

TESIS DOCTORAL

Contribución al estudio de diseño de sistemas de control mediante QFT: aplicaciones al diseño de sistemas de control de vuelo y navegación

Javier Joglar Alcubilla

Ldo. en CC.Físicas

por la Universidad Nacional de Educación a Distancia



Departamento de Informática y Automática

E.T.S.I. Informática

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Madrid, 2014



Departamento de Informática y Automática

E.T.S.I. Informática

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Contribución al estudio de diseño de sistemas de control mediante QFT: aplicaciones al diseño de sistemas de control de vuelo y navegación

Autor de la Tesis Doctoral

D. Javier Joglar Alcubilla

Ldo. en CC.Físicas

por la Universidad Nacional de Educación a Distancia

Director de la Tesis Doctoral

Dr. D. Joaquín Aranda Almansa

Madrid, 2014

Agradecimientos

A Joaquín Aranda, Director de esta Tesis Doctoral, por su ayuda y apoyo prestado a lo largo de los años de desarrollo de este trabajo.

Indice

Indice.....	i a vi
Listas de Símbolos, Abreviaturas y Siglas	vii a x
1. Introducción	1 a 14
1.1 Objetivos	3
1.2 Organización.....	8
1.3 Presentación de la problemática	11
2. Fundamentos de QFT	15 a 42
2.1 Antecedentes y Debilidades del Control QFT	17
2.2 Metodología QFT	30
2.3 Características y puntos fuertes de la metodología QFT.....	39
3. Diseño de Sistemas de Control de Vuelo y Navegación	43 a 66
3.1 Proyecto GARTEUR.....	45
3.2 Descripción del Modelo de Aeronave Civil	48
3.2.1 Sistemas de Referencia	49
3.2.2 Nomenclatura: entradas, estados, salidas, parámetros.....	50
3.2.3 Dinámica de la aeronave.....	55
3.2.4 Criterios de evaluación y especificaciones.....	59
3.3 Principios del proceso de diseño.....	62
4. Traslado de Especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial	67 a 166
4.1. Traslado de Especificaciones para Seguimiento	70
4.1.1. Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Escalón Subamortiguado.	71
4.1.2. Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón subamortiguado.	71
4.1.3. Esquema de la Solución Propuesta: Técnica1	75
4.1.4. Ampliación de la Solución Propuesta: Técnica1_Ampliada.....	82
4.1.5. Ejemplo Aplicado de la Técnica1	84
4.1.6. Simplificación de la Solución Propuesta: Técnica1_Modificada	89
4.1.7. Ejemplo Aplicado de la Técnica1_Modificada.....	90
4.1.8. Esquema de la Solución Propuesta: Técnica2	93
4.1.9. Ejemplo Aplicado de la Técnica2_Modificada.....	94
4.1.10. Búsqueda de límite $w_{superior}$ asociado a variable controlada sobreamortiguada: “STEPTRAC.M”	96
4.1.11. Ejemplo Aplicado de la Técnica “Steptrac”.....	98
4.1.12. Búsqueda de $tr(\omega_n = 1, \rho)$ y $ts(\omega_n = 1, \rho)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes.....	104
4.1.13 Comparativa de Resultados ofrecidos por las distintas Propuestas	109

4.2. Traslado de Especificaciones para Sensibilidad y Tracking Desacoplado.....	111
4.2.1. Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Impulso Subamortiguado.....	112
4.2.2. Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón Subamortiguado.....	113
4.2.3. Esquema de la Solución Propuesta al Caso1: Técnica EsensibQ.....	115
4.2.4. Ejemplo Aplicado de la Técnica EsensibQ.....	118
4.2.5. Esquema de la Solución Propuesta al Caso2: Técnica Esensib.....	122
4.2.6. Ejemplo Aplicado de la Técnica Esensib.....	133
4.2.7. Esquema de la Solución Propuesta al Caso 3: Técnica Etrac.....	141
4.2.8 Búsqueda de $\rho(Mp, \omega_n = 1)$ y $ts(\rho, \omega_n, desv)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensibq).....	149
4.2.9 Búsqueda de $tr(\omega_n, \rho, mal)$ y $ts(\omega_n, \rho, mas)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensib).....	155
4.2.10 Comparativa de Parámetros de las distintas Técnicas Propuestas.....	160
5 “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control.....	167 a 246
5.0 Introducción al “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control.....	169
5.1 Diseño de Control Inicial.....	172
5.1.1 Problema de Regulación.....	172
5.1.1.1 Descripción matemática del problema de Regulación.....	175
5.1.2 Problema de Tracking.....	178
5.1.2.1 Descripción matemática del problema de Tracking.....	182
5.1.3 Problema Combinado Tracking/Regulación.....	185
5.1.3.1 Descripción matemática del problema Combinado Tracking/Regulación.....	187
5.1.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación.....	189
5.1.5 Compensación por Sobrealimentación para Tracking.....	199
5.1.6 Definiciones en las Especificaciones de Tracking.....	201
5.1.7 Resumen del Procedimiento de “Squaring-up”.....	202
5.2 Diseño de Control Optimizado.....	205
5.2.1 Problema de Regulación Optimizado.....	205
5.2.2 Problema de Tracking Optimizado.....	207
5.2.3 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación optimizando esfuerzo de control.....	211
5.2.4 Problema de Tracking Puro Optimizado.....	223
5.2.5 Compatibilidad con las Especificaciones de Esfuerzo de control.....	233
5.2.6 Relajación de Especificaciones de Esfuerzo de control para el segundo lazo.....	239
5.2.7 Resumen del Procedimiento “Squaring-up” Optimizando el Esfuerzo de Control.....	241
5.2.8 Consideraciones para Realización Práctica.....	244

6	“Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control.....	247 a 300
6.0	Introducción al “Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control.....	249
6.1	Diseño de Control Inicial	250
6.1.1	Problema de Regulación reducido	250
6.1.1.1	Descripción matemática del problema de Regulación reducido	252
6.1.2	Problema de Tracking reducido.....	255
6.1.2.1	Descripción matemática del problema de Tracking reducido.....	257
6.1.3	Problema Combinado Tracking/Regulación reducido.....	260
6.1.3.1	Descripción matemática del problema Combinado Tracking/Regulación reducido.....	262
6.1.4	Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación reducido.....	263
6.1.5	Resumen del Procedimiento de “Squaring-up” reducido.....	271
6.2	Diseño de Control optimizado	274
6.2.1	Problema de Regulación reducido Optimizado.....	274
6.2.2	Problema de Tracking reducido Optimizado.....	277
6.2.3	Problema de Tracking Puro reducido Optimizado.....	282
6.2.4	Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación reducido optimizando esfuerzo de control.....	286
6.2.5	Resumen del Procedimiento “Squaring-up” reducido Optimizando el Esfuerzo de Control.....	296
7.	Reducción del orden de Funciones de Transferencia	301 a 320
7.1	Reducción del Orden de la Función de Transferencia Original.....	303
7.2	Procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros en la FT Original.....	305
7.3	Ejemplo1 aplicación del procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros	307
7.4	Ejemplo2 aplicación del procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros	313
8.	Control “Squaring up” para la Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil	321 a 362
8.0	Introducción al Control “squaring-up” para la dinámica longitudinal de una aeronave civil.....	323
8.1	Especificaciones.....	344
8.1.1	Desarrollo de Procedimientos para Traslado de Especificaciones.....	349
8.1.2	Definición de Especificaciones en el TD.....	358
8.1.3	Tipos de Especificaciones en el WD aplicables.....	324
8.1.4	Estudio Inicial: aplicación de las etapas 8.1.1 y 8.1.3, sobre los datos de la etapa 8.1.2.	326
8.2	Diseño.....	333
8.3	Análisis Frecuencial y Temporal.....	338

8.4 Resultados Finales.....	358
9. Conclusiones y posibles Desarrollos Futuros	363 a 372
9.1 Conclusiones.....	365
9.2 Posibles Vías de Desarrollo.....	368
A1 Publicaciones Asociadas a la Tesis	373 a 374
<u>Anexo1.1</u> : Publicaciones en Congresos.....	374
A2 Características de la aeronave real utilizada como modelo de aeronave civil	375 a 380
<u>Anexo2.1</u> : La Aeronave Airbus A300-600ST.....	376
<u>Anexo2.2</u> : Especificaciones Técnicas del A300-600ST	377
A3 Realización Práctica del Diseño de Sistemas de Control de Vuelo y Navegación: Modelo de aeronave civil.....	381 a 392
<u>Anexo3.1</u> : Sistemas de Referencia asociados al modelo de aeronave civil	382
A3.1.1 Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra $F_E, (O_E, X_E Y_E Z_E)$	382
A3.1.2 Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión $F_V, (O_V, X_V Y_V Z_V)$...	382
A3.1.3 Sistema de Referencia Intrínseco o Aerodinámico del Avión $F_B (O_B, X_B Y_B Z_B)$	383
A3.1.4 Sistema de Referencia de Ejes de Viento $F_W (O_W, X_W Y_W Z_W)$	384
A3.1.5 Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal $F_S (O_S, X_S Y_S Z_S)$	385
A3.1.6 Sistema de Referencia de Medidas $F_M (O_M, X_M Y_M Z_M)$	385
<u>Anexo3.2</u> : Transformaciones de Coordenadas asociadas al modelo de aeronave civil	386
A3.2.1 Transformación del Sistema Ligado al Avión F_V al Sistema Intrínseco F_B ...	387
A3.2.2 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema Ligado al Avión F_V ...	387
A3.2.3 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Viento F_W	387
A3.2.4 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S	388
A3.2.5 Transformación del Sistema de Ejes de Viento F_W al Sistema Intrínseco F_B	388
A3.2.6 Transformación del Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S al Sistema Intrínseco F_B	388
A3.2.7 Representación Cuaternaria de Actitud.....	389
A4 Programas para el Traslado de Especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial	393 a 406
<u>Anexo4.1</u> . Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas para Seguimiento	394
<u>Anexo4.2</u> . Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas de Sensibilidad y tracking desacoplado.....	401

A5 “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control, modo DPD	407 a 416
<u>Anexo.5.1</u> Resolución de problemas de “squaring-up” optimizado esfuerzo de control en modo DPD.....	408
A6 “Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control, modo DPD	417 a 424
<u>Anexo 6.1</u> Resolución de problemas de “squaring-up reducido” optimizado esfuerzo de control en modo DPD	418
A7 Programas para Reducción del orden de Funciones de Transferencia	425 a 426
<u>Anexo7.1:</u> Programas asociados a la reducción del orden de funciones de transferencia	426
A8 Desarrollo práctico del Control “Squaring up” para la Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil.....	427 a 488
<u>Anexo8.1:</u> Métodos de “squaring-up”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO.....	428
A8.1.1 Soluciones Propuestas.....	428
<u>Anexo8.2:</u> Esquema de Especificaciones en la dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil.....	430
<u>Anexo8.3:</u> Esquema del Desarrollo Práctico al problema dinámica longitudinal RCAM	433
A8.3.1 Obtención de Especificaciones (Carpeta ESPECIF).....	433
A8.3.2 Obtención de Plantillas del Modelo de aeronave civil (Carpeta RPLANTI).	437
A8.3.3 Determinación del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).....	438
A8.3.4 Estudio de acoplamientos entradas/salidas del modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).	439
A8.3.5 Diseño y Análisis del problema Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil [2,8] (Carpeta R8).	440
A8.3.6 Detalles de los Programas Propuestos para resolución del problema Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil [2,8].....	451
<u>Anexo8.4:</u> Obtención del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).....	472
<u>Anexo8.5:</u> Acoplamientos entradas/salidas del Modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).....	475
<u>Anexo8.6:</u> Obtención de Prefiltros reducidos (Carpeta R8).....	478
Bibliografía y Referencias	489 a 512

Listas de Símbolos, Abreviaturas y Variables

Lista de Símbolos y Funciones:

\angle : Argumento
 $||$: Módulo
 $\sqrt{\quad}$: Raíz cuadrada
 Δ : Incremento o variación
 \sum : Sumatorio
 \prod : Productorio
 \propto : Proporcional
 lim: Función Límite
 sen: Función Seno
 cos: Función Coseno
 tan: Función Tangente
 atan: Función arcotangente
 max: Máximo
 min: Mínimo
 cte: Constante

Lista de Abreviaturas y Siglas:

- IDE o EDI: (Interactive Design Environment). Entorno de diseño interactivo
- QFT: (Quantitative Feedback Theory). Teoría de realimentación cuantitativa.
- FT: Función de transferencia.
- DN o NC: (Nichols Chart). Diagrama de Nichols.
- LTI: (Linear Time Invariant). Lineal e invariante en el tiempo.
- SISO: (Single Input Single Output). Entrada única y salida única.
- MIMO: (Multiple Input Multiple Output). Entrada múltiple y salida múltiple.
- MISO: (Multiple Input Single Output). Entrada múltiple y salida única.
- RACW : función de racionalización en w.
- WD: dominio frecuencial.
- TD: dominio temporal.
- DPD: (Direct Plant Domain). Dominio Directo de la Planta.
- IPD:(Inverse Plant Domain). Dominio Inverso de la Planta.

- RP: (Robust Performances). Especificaciones de cumplimiento robustas.
- RS: (Robust Stability). Estabilidad robusta.
- RHP:(Right Half-complex-plane Poles). Polos en el semiplano complejo derecho.
- GARTEUR:(Group of Aeronautical Research and Technology in Europe).Grupo de investigación y tecnología aeronáutica en Europa.
- RCAM:(Research Civil Aircraft Model). Modelo de investigación de aeronave civil.
- HIRM:(High Incidence Research Model). Modelo militar de Investigación de Elevado Ángulo de Ataque
- FM:(Flight Mechanics). Mecánica de Vuelo.
- FCS:(Flight Control System). Sistema de Control de Vuelo.
- CACEE:(Control Aircraft Computer for Electronic Engineering). Medios de computación para ingeniería de control en aeronaves
- NRG:(Non-square Relative Gain array). Matriz no-cuadrada de ganancia relativa.
- “squaring up”: Metodología QFT para tratamiento de plantas infra-actuadas no cuadradas.
- “squaring down”: Metodología QFT para tratamiento de plantas sobre-actuadas no cuadradas.
- trimming: inicialización de parámetros de un sistema de control

Lista de Variables y Parámetros:

k: ganancia

n o p: polo

m o z: cero

ρ : coeficiente de amortiguamiento

ω_n : frecuencia natural.

ω_d : frecuencia forzada de oscilación

wd : *doble vector* $wd(\omega_n, \rho)$

P: planta.

Pe: planta efectiva.

Pd: planta de perturbaciones

d: perturbaciones externas.

G: controlador o compensador en “feedback”

F: prefiltro o compensador en “feedforward”

L : función de transferencia en lazo abierto
 g_i : elemento controlador de G.
 f_{ij} : elemento prefiltro de F.
 q_{ij} : elemento de planta inversa.
 q_{ij}^k, qe_{ij} : elemento de planta inversa efectiva.
 w, w_1, w_0 : intervalo de frecuencia de trabajo
 We : Especificación de estabilidad.
 Te : Estabilidad.
 α, β : Límites inferior y superior de la Especificación de seguimiento.
 T : Tracking. Seguimiento.
 Wps : Especificación de Sensibilidad.
 S : Sensibilidad.
 We_{cr} : Especificación de Esfuerzo de control de regulación.
 We_{cs} : Especificación de Esfuerzo de control de seguimiento.
 E_{cr} : Esfuerzo de control de regulación.
 E_{cs} : Esfuerzo de control de seguimiento.
 ρ : Especificación de seguimiento puro.
 $T^?$: Tracking puro. Seguimiento puro.
 t_r : Tiempo de alcance
 t_{al} : Porcentaje de alcance
 t_s : Tiempo de asentamiento.
 M_p : (Overshoot). Valor del pico máximo. Sobrelongación.
 y_{ss} : Valor estacionario de la respuesta.
 $desv_{max}$: Desviación máxima.
 T : Constante de tiempo del sistema de control.
 cm : centro de masas.
 cg : centro de gravedad.
 u_i : entradas de control.
 d_i : perturbaciones externas.
 x_i : estados internos del modelo RCAM.
 y_i : salidas del sistema de control.
 r_i : referencias del sistema de control.
 DT : Deflexión de timones de profundidad (rad)
 TH : Posición "throttles" motor (rad)

w_{ze}, w_z : Velocidad viento componente-z (m/s)

w_{zb} : Velocidad turbulencia componente-z (m/s)

n_x : factor de carga longitudinal.

n_z : factor de carga vertical.

v : velocidad inercial.

v_a : velocidad del aire.

w_v : Componente-z de velocidad inercial en F_v

z : Posición-z del cg. en F_E

h : Altura respecto del suelo.

θ : Angulo de cabeceo.

α : Angulo de ataque.

γ : Angulo de la trayectoria de vuelo inercial.

$T_{Lo}(j\omega)$: Límite inferior en el dominio frecuencial.

$T_{Hi}(j\omega)$: Límite superior en el dominio frecuencial.

$BW_{T(j\omega)}$: Ancho de banda del sistema $T(j\omega)$.

'mal': Valor de alcance función de t_r .

'mas': Valor de establecimiento función de t_s .

δ_{ij} : Diferencias ascendentes y descendentes de orden i y posición j .

CAPÍTULO 1

Introducción

RESUMEN

El control de vuelo y navegación en aeronaves representa un problema MIMO de elevada incertidumbre paramétrica y multiplicidad de especificaciones, que las metodologías de control robusto QFT son capaces de manejar. Sin embargo, hoy por hoy no hay ninguna propuesta para resolver problemas MIMO QFT con mayor número de salidas que de entradas, situación muy característica en aplicaciones de control robusto para vuelo y navegación. El objetivo principal de esta Tesis será considerar este problema y desarrollar una metodología de compensación QFT sobre sistemas MIMO con más salidas que entradas, minimizando el esfuerzo de control y, posterior aplicación práctica en el diseño de un sistema de control en una aeronave real, no cuadrado, para seguimiento de una trayectoria con perturbaciones externas.

CONTENIDOS

1.1 Presentación de la problemática

1.2 Objetivos

1.3 Organización

1.1 Presentación de la problemática

La Teoría de la Realimentación Cuantitativa o QFT es un método de diseño de sistemas de control que parte de la premisa de que la realimentación y, por tanto, el control en lazo cerrado, son sólo necesarios cuando el sistema va acompañado de incertidumbre.

Los sistemas de control de vuelo y navegación en las aeronaves para seguimiento de una trayectoria concreta y rechazo de perturbaciones en el entorno de vuelo representan un problema de control complejo, aunque viable en muchos casos para su resolución aplicando metodologías QFT. Combinan la necesidad del acoplamiento de las salidas con las señales de referencia o “command” de entrada, con el del desacople respecto de las perturbaciones externas, dando lugar a dinámicas de control en tres dimensiones espaciales, limitadas tanto en estabilidad, como respecto al cumplimiento de multitud de especificaciones diferentes: “tracking”, sensibilidad, esfuerzo de control para seguimiento, esfuerzo de control para regulación.

En un problema con multiplicidad de especificaciones, como el del control de vuelo, independientemente de la técnica de control empleada, el sobrediseño al utilizar un único controlador es un concepto insalvable: para cada frecuencia de trabajo, el controlador cumplirá con rigurosidad cierta especificación, pero se excederá en el resto. La incertidumbre de la planta va asociada obligatoriamente también al sobrediseño, puesto que significa que el controlador debe satisfacer las especificaciones de cumplimiento para todas y cada una de las plantillas. Los modelos de las aeronaves reales utilizados en control de vuelo son sistemas complejos, definidos normalmente por funciones de transferencia de orden elevado, lo cual conlleva a la hora de obtener los controladores solución del problema también funciones de transferencia de orden elevado.

Existen dos soluciones posibles a este problema poco considerado metodológicamente en la práctica:

- ✚ intentar reducir el orden de la planta original para conseguir controladores de orden bajo;
- ✚ o bien, reducir los controladores solución de orden alto, obtenidos a partir de la planta original.

El control de vuelo y navegación, en los sentidos anteriores, se convierte en un problema no trivial de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), con multiplicidad de especificaciones, que además desarrolla una variabilidad paramétrica importante y donde el sobrediseño y el elevado orden de las soluciones se convierten en problemas prácticos que hay que tratar de minimizar.

QFT es una metodología de diseño en el dominio de la frecuencia, lo que significa que las especificaciones temporales requeridas deben trasladarse con fiabilidad de dominio. Las contribuciones realizadas en este sentido para aplicación de QFT han sido insuficientes y, el traslado riguroso de especificaciones del tiempo a la frecuencia sigue siendo un problema sin resolver. En la práctica, no se ha prestado demasiada atención a este problema, porque las metodologías de control a las que afecta, incluida QFT, utilizan procesos iterativos para la sintetización del controlador que concluyen en un análisis temporal; de esta manera, si los resultados obtenidos en el dominio tiempo no son adecuados, aunque se cumplan las especificaciones en frecuencia, se vuelve atrás en un nuevo proceso de rediseño del controlador. En última instancia, para conseguir buenos resultados temporales, las especificaciones en frecuencia se relajan, comenzando otra vez el proceso.

Si el método de conversión de especificaciones tiempo-frecuencia fuera preciso, el procedimiento de sintetización del controlador no requeriría de tanta iteración, además de que se conseguirían soluciones con menor sobrediseño.

QFT está caracterizada por su versatilidad, demostrada a lo largo de la historia de su desarrollo, iniciada con [Horowitz, 59], pudiendo aplicarse sobre sistemas con perturbaciones y/o seguimiento de referencias, lineales y no lineales, variables e invariantes en el tiempo, continuos y discretos, SISO y MIMO, sistemas de mínima fase y otros de no mínima fase, con metodologías de trabajo directas (DPD) o inversas (IPD), no-secuenciales o secuenciales, con compensación diagonal y no-diagonal. Sin embargo, las metodologías de control QFT desarrolladas exigen trabajar en general con plantas cuadradas o, en algunos casos, mediante procedimientos denominados de “squaring-down” [Philips,89], [Houpis,02], se permite utilizar más entradas que salidas: el sistema es reducido a un problema cuadrado de mismo número de variables de entrada que el número de salidas iniciales, lo cual implica supresión de algunas propiedades consideradas menos significativas de la planta.

No hay ninguna propuesta para resolver problemas MIMO con mayor número de salidas que de entradas, situación real típica en aplicaciones de control de vuelo y navegación en aeronaves, donde sólo se dispone de timones, alerones y empuje de motor como variables de entrada, frente a un número de variables a controlar que puede llegar a ser muy elevado: posiciones tridimensionales, velocidades respecto del aire y respecto a tierra, actitudes de cabeceo, alabeo, guiñada, “rates” de actitud, rumbos, factores de carga longitudinal, transversal y vertical, ángulo de ataque, ángulo sobre la trayectoria, entre otras. La primera propuesta de esta Tesis consiste en considerar este problema, a nivel de desarrollo teórico en QFT y, posterior aplicación práctica en el diseño de un sistema de control de vuelo y navegación no cuadrado, con más salidas que entradas.

Se va a definir la metodología de control “Squaring-up” como procedimiento de compensación QFT sobre sistemas MIMO con más salidas que entradas, incorporando

minimización del esfuerzo de control, en un proceso sin supresión de ningún tipo de características de la planta.

Las actuales técnicas de control MIMO QFT para operar sobre plantas no cuadradas son las siguientes:

1. “Squaring Down”: En [E.Boje,05] se definen los sistemas sobre-actuados como aquellos donde las plantas tienen más entradas(m) que salidas(n), es decir, de tamaño $[m,n]$ con $m > n$. Consiste en aplicar un procedimiento de regularización de la función de transferencia del lazo abierto no cuadrada, convirtiéndola en cuadrada de tamaño $[n,n]$, mediante el uso entre controlador y planta de un precompensador de dimensiones $[n,m]$. Aplicable a sistemas con más entradas que salidas y no a la inversa. Se trata de minimizar o suprimir la influencia de las $(m-n)$ entradas menos significativas sobre las salidas, lo cual supone reducción de características de la planta original. Es como si se sustituye la planta inicial por una planta equivalente “relajada” en cuanto a propiedades de acoplamiento entradas/salidas menos significativas. El problema aparece cuando no hay tantos acoplamientos entradas/salidas no significativos como número de entradas que hay que reducir, ya que el método no permite tener más entradas que el número de salidas del que se parte. Además, en el diseño del precompensador hay que asegurarse de no añadir RHPs, ni más ceros a la función de transferencia cuadrada resultante del lazo abierto (transmisión de ceros), lo cual no siempre es posible.
2. “Non square relative gain array (NRG)”: Se trata una variante de “Squaring down” propuesta por [N.Yousfi et al.,12], que pretende medir las interacciones entre salidas y entradas en sistemas sobre-actuados. Aplicado sobre plantas de tamaño

$[m, n]$ con $m > n$, consigue transformar el sistema MIMO en n sistemas MISO, resolubles de forma independiente, aunque sigue manteniendo el problema de la “relajación” de características de la planta original. Además, para la determinación de los elementos no diagonales del controlador utiliza una hipótesis muy fuerte respecto de los acoplamientos entradas/salidas en la función de lazo abierto, que sólo es cierta a veces: *“el efecto del acoplamiento de los elementos no diagonales del sistema MIMO, definidos como perturbaciones internas, en cada sistema MISO equivalente debe ser nulo”*. La aplicación de esta hipótesis impide la utilización de ciertas especificaciones no nulas para tracking cruzado.

El control MIMO QFT sobre plantas infra-actuadas (menos entradas que salidas) que se va a proponer (“squaring-up”) no debe de tener ninguna de las restricciones que caracterizan a los anteriores métodos de “squaring-down”, además de evitar los problemas generadores de sobrediseño que ya hemos nombrado,

- ✚ incorporación de métodos para traslado de especificaciones tiempo-frecuencia preciso y,
- ✚ reducción de orden de funciones de transferencia de controladores y precompensadores).

1.2 Objetivos

El presente trabajo pretende realizar aportaciones metodológicas, en particular, en el entorno del control QFT y, otras de carácter más general que sirvan para cualquier tipo de control que trabaje en el dominio de la frecuencia. Además, se va a realizar una aplicación práctica compleja conjunta de las aportaciones teóricas llevadas a cabo.

A continuación se describen en forma de objetivos las aportaciones originales que representan el fin de esta Tesis:

1 Metodología para Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial. En la conversión de parámetros del dominio frecuencial al dominio temporal no existe resultado exacto, por lo que deben aplicarse técnicas de aproximación. Interesa máxima precisión a la hora de transferir especificaciones de un dominio a otro. Se van a proponer varias técnicas de conversión tiempo-frecuencia, con diferentes precisiones y complejidades, pensadas para su aplicación sobre especificaciones concretas utilizadas en QFT, pero que van a estar diseñadas de forma flexible para su aplicación general en cualquier metodología de control que requiera traslado entre dominios.

Las técnicas desarrolladas tienen por objetivo tratar especificaciones del tipo,

- “Tracking” o seguimiento específico entre referencias y salidas: unas para acoplamiento y otras especializadas en desacoplamientos.
- Sensibilidades o desacoplo de perturbaciones: aplicadas en problemas de regulación, se va a definir una técnica general donde sólo se especifican algunos parámetros de desacoplo y otra técnica más concreta y rigurosa, donde se especifican todos los parámetros posibles para regulación.

2. Metodología para reducción de orden de funciones de transferencia.

En el diseño de sistemas de control y, en concreto al utilizar modelos de aeronaves, es habitual que el orden de éstos sea grande. QFT permite trabajar con este tipo de plantas pero al hacerlo, da lugar a compensadores (controlador y prefiltros) de orden también elevado. Los problemas de implementación de tales controladores son reales, en muchos casos inaceptables. Existen dos posibles soluciones: procurar reducir el orden de la planta original consiguiendo así, indirectamente, controladores de orden bajo; o bien, reducir de forma directa los controladores solución de orden alto. En todo caso, la metodología de reducción de orden utilizada debe asegurar funciones reducidas con comportamiento parecido al de las originales, para considerarlas válidas: las plantas reducidas cumplirán las especificaciones de diseño de igual modo que la planta original y los controladores reducidos deben mantener estabilidad y control con el mismo grado que el compensador original.

3. Metodología “squaring-up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados.

El método propuesto consiste en sustituir el sistema_inicial no-cuadrado de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y paridad par, por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un único compensador en “feedback” (realimentación) $[2,2]$ y un compensador en “feedforward” (sobrealimentación) o prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos. De esta manera, la solución es un controlador diagonal $[2,n]$ y un prefiltro No diagonal $[n,n]$ con elementos “off-diagonal”.

El procedimiento de compensación MIMO-QFT debe permitir trabajar con plantas con incertidumbre infra-actuadas, evitando la supresión de especificaciones del sistema a controlar, incluidas las asociadas a las salidas menos significativas. Además, en el proceso de diseño se incorpora optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento simultáneamente.

4. Metodología “squaring-up” reducido QFT en sistemas MIMO infra-actuados.

El método propuesto sustituye el sistema_inicial de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y par, por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, con entradas de control comunes sobre un único controlador común $[2,2]$ y un precompensador $[2,2]$, independientes para cada uno de ellos. A diferencia de “squaring-up”, ahora, la solución global es un controlador diagonal común $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos “off-diagonal”.

Al igual que “squaring-up”, este procedimiento de compensación MIMO-QFT permite trabajar con plantas con incertidumbre infra-actuadas, en un proceso sin supresión de especificaciones del sistema a controlar, incorporando optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento simultáneos.

5. Aplicación de control “squaring-up” para la dinámica longitudinal de una aeronave civil.

En esta Tesis se va a poner a prueba el procedimiento de “squaring-up” sobre el modelo de aeronave civil RCAM descrito originalmente en el proyecto europeo GARTEUR; se parte de un modelo no lineal correspondiente, en concreto, a la dinámica longitudinal de la aeronave, descrita como una planta de tamaño $[2,8]$, asociada a un conjunto de especificaciones para regulación y seguimiento simultáneos realistas. La solución será un controlador No diagonal $G[2,8]$ y un prefiltro diagonal $F[8,8]$ con elementos off-diagonal. Concluido el diseño, se efectuará un análisis exhaustivo tanto en el dominio de la frecuencia, como en el temporal, para verificar el grado de cumplimiento de las especificaciones de cumplimiento.

1.3 Organización

Esta Tesis comienza con la descripción de la problemática a tratar en el Capítulo1, donde se justifica la metodología MIMO QFT aplicada al diseño de sistemas de control de vuelo y navegación, además, de los objetivos particulares que se pretenden conseguir con ella.

El “state of art” relacionado se desarrolla en los dos capítulos siguientes:

- ✚ En el Capítulo2 se procede a la descripción de los fundamentos de la técnica de control robusto a utilizar, QFT. Sin embargo, al mismo tiempo que se hace una recopilación histórica del desarrollo de esta metodología de control, se incorpora una crítica constructiva sobre las debilidades que le afectan y que representan puntos de investigación posibles, algunos de los cuales constituyen objetivos del presente trabajo.
- ✚ La situación del diseño de sistemas de control de vuelo y navegación se comenta en el Capítulo3. En particular, se justifica la creación del proyecto de investigación europeo GARTEUR, así como, se hace una descripción del modelo de aeronave civil RCAM que proponen para conseguir desarrollar nuevas propuestas de control más eficaces y de implementación real.

En el Capítulo4 se pretende conseguir el objetivo general de desarrollo de técnicas originales para traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial. Incorpora comparativas de eficiencia entre las diferentes técnicas propuestas. Se van a proponer técnicas y ejemplos de aplicación referidas a traslado de especificaciones del tipo:

- “Tracking” para seguimiento específico entre referencias y salidas:
 - Tres técnicas con diferente precisión y complejidad para acoplamiento de referencias/salidas.
 - Una técnica especializada en desacoplamientos entre referencias y salidas.

- Sensibilidades para desacoplo de perturbaciones en problemas de regulación:
 - Una técnica general que funciona sólo con la especificación de algún parámetro de desacoplo entre salidas y perturbaciones.
 - Una técnica concreta que requiere de la especificación de todos los parámetros necesarios para obtener una regulación rigurosa.

El objetivo principal de la Tesis se desarrolla en el Capítulo5: “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control. Se hace una propuesta de diseño de control inicial, aplicado primero a problemas de seguimiento y de regulación, por separado, para después plantear un problema de control combinado. A este proceso de diseño inicial se incorpora posteriormente una metodología para minimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento simultáneos.

Como complemento a la metodología MIMO-QFT de “Squaring up” se desarrolla en el Capítulo6 una metodología simplificada, de prestaciones reducidas pero que ofrece una solución de menor tamaño que el método principal, adecuada cuando no es necesario una rigurosidad extrema en la consideración de los acoplamientos referencias/salidas y los desacoplamientos referencias_cruzadas/salidas y salidas/perturbaciones, sino que interesa más la simplificación de la solución. Se presenta aquí “Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control, aplicable también a problemas independientes o combinados seguimiento/regulación.

En el Capítulo7 se desarrolla el objetivo general sobre reducción del orden de funciones de transferencia. Se presenta la metodología y procedimientos para reducción de polos y ceros sobre cualquier función de transferencia, así como, ejemplos demostrativos de comportamiento similar entre funciones reducidas y funciones originales, con grado de estabilidad parecido, en el caso de funciones compensadoras (controladores) en QFT.

La aplicación del control “Squaring-up” MIMO-QFT sobre la dinámica longitudinal de una aeronave civil se desarrolla en el Capítulo8. Se utilizará la dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil original del proyecto GARTEUR, que define un problema combinado de regulación/seguimiento descrito a partir de una planta de tamaño entradas-salidas [2,8]. Tras el proceso de diseño, se presentan los resultados en forma de un controlador No diagonal $G[2,8]$ y un precompensador diagonal $F[8,8]$ con elementos off-diagonal, así como, la valoración de los mismos mediante un análisis frecuencial y un análisis temporal, con referencia a las especificaciones de cumplimiento en cada dominio.

La Tesis se complementa con una serie de Anexos donde se incorpora información adicional de carácter técnico y/o desarrollos formales relacionados con los capítulos principales.

- ✚ Anexo1: Publicaciones asociadas a la Tesis, en particular en Congresos.
- ✚ Anexo2: Características de la Aeronave real utilizada como modelo de aeronave civil, en donde se trata el transporte de carga “Airbús A300-600ST”. Se realiza una descripción de las características técnicas reales de la aeronave y de los diferentes modelos de la misma que existen.
- ✚ Anexo3: Asociado al Capítulo3 sobre “Diseño de Sistemas de Control de Vuelo y Navegación: Modelo de aeronave civil”. Se describen los sistemas de referencia alrededor del modelo de aeronave civil utilizado, así como, las transformaciones formales para pasar de unos sistemas a otros.
- ✚ Anexo4: Asociado al Capítulo4 sobre “Traslado de Especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial”. Se presentan los programas correspondientes a las distintas técnicas propuestas.

- ✚ Anexo5: Asociado al Capítulo5 sobre “Squaring up QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control”. Se desarrolla formalmente el “squaring-up” optimizado esfuerzo de control, en modo DPD.

- ✚ Anexo6: Asociado al Capítulo6 sobre “Squaring up reducido QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control”. Se desarrolla formalmente el “squaring-up” reducido optimizado esfuerzo de control, en modo DPD.

- ✚ Anexo7: Asociado al Capítulo7 sobre “Reducción del orden de Funciones de Transferencia”. Se presentan los programas correspondientes a las técnicas de reducción de orden originales.

- ✚ Anexo8: Asociado al Capítulo8 sobre “Desarrollo práctico del control “Squaring-up” para la Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil”. Descripción técnica de los programas utilizados y su organización, para la resolución del problema. Incluye propuestas de desarrollo y ampliación de la metodología “squaring-up”.

CAPÍTULO 2

Fundamentos de QFT

RESUMEN

QFT es una técnica de diseño de control robusto en el dominio de la frecuencia, que permite sintetizar controladores con los que el sistema en lazo cerrado puede satisfacer una serie de especificaciones de cumplimiento y estabilidad, alrededor de un conjunto dado de parámetros variables de la planta. La técnica QFT está basada en la idea clásica de la conformación de la función de transferencia en lazo abierto en el dominio de la frecuencia, pero permitiendo el manejo de plantas con incertidumbre. En el proceso de diseño QFT, la incertidumbre en la ganancia y la fase de la planta se representa mediante plantillas en el diagrama de Nicols. Estas plantillas se utilizan para definir regiones permitidas donde debe ubicarse la respuesta en frecuencia del lazo abierto. Se trata de satisfacer las especificaciones de cumplimiento y estabilidad para todo el conjunto de la planta con incertidumbre.

CONTENIDOS

2.1 Antecedentes y Debilidades del Control QFT

2.2 Metodología QFT

2.3 Características y puntos fuertes de la metodología QFT.

2.1 Antecedentes y debilidades del control QFT

El origen del control cuantitativo en el dominio frecuencial surge con [Horowitz, 59] en donde I. Horowitz incorpora por primera vez el concepto de cuantificación a las ideas básicas de [Bode,45]. Se trata de considerar la incertidumbre de la planta en el problema de control, pero eligiendo la función de transferencia en lazo abierto $L = PG$ para lograr el diseño del controlador y no la función de sensibilidad $S = (1 + L)^{-1}$, caracterizada por insensibilidad al ruido y al ancho de banda. El control de dos grados de libertad, incorporando en el sistema de control lineal un prefiltro, se desarrolla inicialmente en [Horowitz, 63].

En [Horowitz y Sidi, 72] aparece por primera vez la nomenclatura de QFT y la aplicación del diagrama de Nicols, como herramienta de control para plantas SISO. En este trabajo se presenta una metodología de diseño para la síntesis de controladores robustos como solución al problema de plantas con incertidumbre del tipo LTI SISO:

- Aplicación a problemas de seguimiento (“tracking”) y regulación (rechazo a perturbaciones).
- Se acuña el término “coste de la realimentación” con referencia al ancho de banda del controlador.
- El Diagrama de Nicols (DN) permite representar gráficamente, mediante “plantillas”, el conjunto de la planta con incertidumbre, así como, los “contornos” o definiciones gráficas de las especificaciones que debe cumplir.
- Síntesis del controlador manual.
- El procedimiento de diseño incorpora ya pruebas de estabilidad no formal para el caso SISO, esto es, condiciones de existencia, aunque es en [Horowitz, 91] donde se plantea el requerimiento de conjunto de plantillas conectadas y compactas.

Será en [Jayasuriya and Zhao, 94] cuando se formalizan las propiedades de estabilidad para problemas QFT SISO, resaltando la importancia de los conceptos anteriores (conectividad y compacidad).

A partir de aquí, tanto Horowitz como otros muchos autores han ido ampliando y aplicando la metodología QFT sobre,

- ✚ sistemas lineales ([Horowitz, 75], [Horowitz y Shaked, 75], [Doyle, 78]), pero también no lineales ([Horowitz, 76], [Baños y Bailey, 98], [Baños y Horowitz, 00], [Baños et al., 01]);
- ✚ plantas SISO ([Chait et al., 95]) y MIMO ([Chait, 91],[Yaniv, 92], [Park, Chait y Steinbuch, 94], [Zhao y Jayasuriya, 96], [Kerr, 04], [Kerr y Jayasuriya, 05]);
- ✚ tanto para fase mínima ([Johansson y Rantzer, 99]), como fase no-mínima ([Horowitz y Liao, 84], [Horowitz, Oldak y Yaniv, 86], [Chen y Ballance, 01], [Lan, Kerr y Jayasuriya, 04]);
- ✚ en sistemas con retardo ([Hwang y Yang, 02]); en otros de parámetros distribuidos ([Horowitz y Azor, 83]);
- ✚ en sistemas cuadrados (prácticamente todos) y no-cuadrados ([Philips, 89], [Boje, 05], [Yousfi et al, 12]);
- ✚ sobre sistemas en cascada ([Horowitz et al., 85]);
- ✚ con controladores diagonales (la gran mayoría) y no-diagonales ([Yaniv, 95], [Franchek y Nwokah, 95], [Boje, 02b], [Garcia-Sanz y Egaña, 02]).

Los ejemplos de aplicaciones con QFT desde sus inicios son innumerables. Por nombrar sólo algunos:

- control de navegación en “ferrys rápidos”, [Aranda et al., 01];
- estructuras flexibles, [Chait et al., 93];
- lector de CDs, [Chait et al., 94] y [Park, Chait y Steinbuch, 97];
- control de vibraciones en estructuras con sensores piezocerámicos [Choi et al., 99];
- estructuras de vehículos rígido-flexibles, [Crespo, 11];
- buques de alta velocidad, [Cruz et al., 99] y [Velasco et al., 03a];
- control de columnas de destilación, [Franchek y Nwokah, 95];
- depuración de aguas residuales, [García-Sanz y Ostolaza, 00], [Barbu y Caraman, 10];
- control de temperatura de intercambiador de calor industrial, [García-Sanz y Egaña, 02];
- control de vehículos espaciales, [García-Sanz et al., 08];
- control de dirección de vehículo de 4 ruedas activas, [Güvenc et al., 10];
- control de planta desalinizadora, [Ismail, 01];
- control de vuelo de aeronaves tripuladas y no tripuladas [Rasmussen, 91] , [Houpis et al, 94], [Houpis y Pachter, 97], [Philips et al., 97], [Wu et al., 98], [Yang, 08];
- estructuras articuladas flexibles, [Prakash, Adams y Appelby, 91] , [Piedmonte et al., 98] y [Kerr , 04];
- control de niveles de líquidos en tanques múltiples, [Patil et al, 10];

- sistemas navales, [Muñoz-Mansilla et al., 12];
- electrohidráulica, [Pachter et al., 97] y [Niksefat y Sepheri, 02];
- control de frecuencia de carga en sistemas eléctricos de potencia, [Shrikant y Sen, 99], [Shams et al., 10];
- aerogeneradores, [García-Sanz y Torres, 04].

QFT proporciona las características prácticas de las metodologías de control clásicas y la capacidad para manejar una gran cantidad de incertidumbre paramétrica y no-paramétrica. Se trata de utilizar la realimentación para reducir los efectos de la incertidumbre de la planta y cumplir con las especificaciones de control dadas. Sin embargo y, hay que recalcarlo de manera importante, teniendo en cuenta que siempre existe un coste por realimentación en el sistema de control, ésta sólo es necesaria cuando la planta propuesta contenga incertidumbre y/o se consideren perturbaciones sobre la misma de carácter no medible.

Algunas de las características deseables de los métodos modernos de control no se implementaron originalmente en el marco del diseño MIMO QFT. Esta situación dio lugar a una crítica por las deficiencias en su base teórica y, en particular sobre la capacidad de estabilización del sistema usando los procedimientos MIMO QFT originales (véase, por ejemplo, [Doyle, 86]), aunque rápidamente rebatida, incorporando argumentos y ejemplos de aplicación a favor de la metodología MIMO QFT [Yaniv y Horowitz, 87].

Sin embargo, es cierto que existían deficiencias teóricas que han tenido que ser abordadas, sobre todo en la década de los 90 y, resueltas en particular para SISO QFT.

Es justo decir que SISO QFT es una metodología de diseño de sistemas de control aceptada y justificada ampliamente para sistemas con incertidumbre.

Sin embargo, esto no se puede decir de las metodologías de diseño QFT MIMO, a pesar de la cantidad innumerable de publicaciones al respecto, existiendo margen para la contribución adicional en esta área.

El control de sistemas MIMO sobre plantas con incertidumbre representa todavía hoy uno de los problemas más complejos a resolver, independientemente de si se trata de un sistema lineal o no-lineal, de fase mínima o no-mínima, analógico o discreto, cuadrado o no-cuadrado, etc.

Prácticamente desde el inicio de la QFT, se han propuesto multitud de problemas MIMO a resolver mediante esta metodología y, bajo diferentes perspectivas. Bien es cierto que en todos los casos el problema a tratar suele ser cuadrado de tamaño (entradas/salidas) $[2,2]$ o como mucho $[3,3]$, en cuyo caso las características de la planta y/o especificaciones están muy simplificadas, para no complicar en exceso la resolución del problema. En ocasiones se han resuelto problemas no cuadrados de tamaño $[3,2]$ o $[4,3]$, pero siempre de mayor número de entradas que de salidas y reducidos, en definitiva, a sistemas equivalentes $[2,2]$ o $[3,3]$, aunque eso signifique con pérdida de características (no consideración de todas las especificaciones, suprimiendo las menos significativas). No existe metodología para resolver problemas MIMO con mayor número de salidas que de entradas, situación real muy habitual en aplicaciones de control, por ejemplo, en el control de vuelo de una aeronave, donde las superficies de control (timones y alerones) y el motor representan las entradas, mínimas frente al número de variables que interesaría poder controlar (posición, velocidad, actitudes de cabeceo, alabeo, guiñada, "rates" de actitud, rumbos, factores de carga, ángulo de ataque, ángulo de trayectoria, ..). Es un "hueco" de importancia en la QFT.

La mayoría de los trabajos MIMO QFT utilizan el método de diseño de los n elementos diagonales de la matriz del controlador, a partir de los n problemas MISO equivalentes al

problema MIMO de tamaño $[n, n]$ original. Este método, nombrado como MIMO QFT no-secuencial, fue desarrollado por [Horowitz, 79], caracterizado porque cada uno de los problemas MISO equivalentes se resuelve de forma independiente, sin considerar a los demás. Mejorado posteriormente por él mismo [Horowitz, 82b], aparece el método MIMO QFT secuencial, al introducir en el proceso iterativo el concepto de planta equivalente, que considera el efecto acumulativo de los controladores obtenidos en los pasos previos. Esta nueva propuesta, perfeccionada después por ([Nwokah, 84], [Yaniv y Horowitz, 86], [Nwokah y Thompson, 89]), permite una reducción importante del sobrediseño que acompaña al método no-secuencial original, por lo que se ha convertido en el método de diseño MIMO QFT estándar.

Hasta aquí, la metodología QFT utilizada sólo opera con controladores matriciales diagonales, que al no incorporar elementos no-diagonales, importantes para definir el grado de desacoplamiento entre entradas y salidas, son en general más rígidos y de peores resultados en este sentido que los denominados controladores de matrices completas.

El desarrollo de la metodología basada en controladores multivariable QFT no-diagonales procede de ideas incorporadas en [Franchek y Nwokah, 95], [Yaniv, 95], [Franchek, Herman y Nwokah, 97]. En [García-Sanz y Egaña, 02] y [Boje, 02b] los autores hacen nuevas contribuciones a esta metodología de diseño del controlador no-diagonal, como la minimización de la denominada matriz de acoplamiento y uso de una función de calidad indicadora del grado de bondad de la matriz obtenida, para el primero o, el uso de la raíz Perron-Frobenius para diseño del precompensador de matriz completa, para el segundo.

Existen muchas más contribuciones importantes en QFT, tanto de carácter teórico, como de aplicación práctica. Por nombrar sólo algunas de ellas,

 Estudios de estabilidad para,

- Sistemas SISO, [Cohen et al., 94];
 - MIMO de carácter secuencial en [Yaniv y Schwartz, 91], [De Bedout y Franchek, 02], [Kerr et al., 03];
 - MIMO de carácter no secuencial en [Zhao y Jayasuriya, 96b], [Kerr y Jayasuriya, 03], [Kerr y Jayasuriya, 05].
- ✚ Generación de herramientas de software para diseño de controladores, [Borghesani et al., 95], [Montoya, 98], [Borghesani et al., 03], [Dormido et al., 01], [Díaz et al., 04].
- ✚ Distinción entre metodologías de trabajo sobre la planta de tipo directas (DPD) o inversas (IPD), como se describe en [Kerr, 04].
- ✚ Metodologías de sintetización automática de controladores mediante estructuras fraccionales, [Cervera y Baños, 05], [Cervera, 06].
- ✚ Estudio de contornos [Nataraj y Sardar, 00b], [Gil y García, 03], [Gil, 08] y plantillas [Chen y Ballance, 99], [Nataraj y Sardar, 00], [Hwang y Yang, 02].
- ✚ Estudios de incertidumbre,
- paramétrica, [Jayasuriya, 92], [Houpis, 02], [Vries et al., 12];
 - no paramétrica, [Jayasuriya, 93], [Chait et al., 95];
 - mezclada, [Jayasuriya y Zhao, 94].
- ✚ Formulación de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, [Krishnan y Cruickshanks, 77], [D'Azzo y Houpis, 95], [Franchek y Herman, 98].
- ✚ Reducción de orden de modelos y controladores, [Rueda, 03].

La razón para emplear control con realimentación es reducir los efectos de la incertidumbre en el sistema que surge de:

- El desconocimiento de la planta a controlar, debido a su elevada variabilidad paramétrica, imposible de conocer por completo.
- Simplificaciones del modelo de planta al utilizar linealización o simplificaciones.
- Perturbaciones externas sobre la planta.

Se consideran dos clases de incertidumbre a tratar en sistemas de control de tipo robusto, esto es, aquellos que a pesar de la incertidumbre son capaces de proporcionar respuestas aceptables:

- Incertidumbre paramétrica o estructurada: relativa a la variabilidad paramétrica de la planta, se describe en términos de variación de ganancia y variación de fase.
- Incertidumbre no-paramétrica o desestructurada: representa el error del modelo de la planta, diferencia con la planta real, descrita en términos de variación de ganancia, pero sin información respecto de la variación de fase.

La incertidumbre estructurada se puede representar con una topología geométrica concreta en el plano complejo (DN) para cada problema específico. Sin embargo, la incertidumbre desestructurada sólo se representa como un disco de radio definido por la variación de ganancia en el plano complejo, sin poder concretar su forma al no tener información de fase. Es habitual, utilizar la incertidumbre estructurada para modelar el control del sistema en el rango de las bajas y medias frecuencias, mientras que la incertidumbre desestructurada se deja para definir el control en el rango de las altas frecuencias.

El control clásico ya reconoce la importancia de la incertidumbre en el sistema, aplicando conceptos de robustez tales como la medida del margen de fase, margen de ganancia y

sensibilidad. Sin embargo, cuando los niveles de incertidumbre son elevados, el uso de éstos es insuficiente.

El trabajo en el dominio de la frecuencia de Bode fue el punto de partida para incorporar nuevos conceptos a sistemas con variaciones impredecibles [Horowitz, 63], dando lugar a las herramientas necesarias para las técnicas de diseño de QFT posteriores:

- La incertidumbre del sistema se puede describir usando plantillas para cada frecuencia en el plano complejo que caractericen la variación de la planta, tanto en magnitud como en fase. Se consigue una representación gráfica de la planta con incertidumbre y su evolución en frecuencia que ofrece, de un solo vistazo, un esquema gráfico detallado del comportamiento global del conjunto.
- La sintetización del controlador utilizando la función de lazo abierto, se puede desarrollar en este entorno gráfico de manera muy intuitiva.

Una característica importante de la metodología de diseño QFT es que resulta capaz de manejar sistemas con incertidumbre mezclada (paramétrica y no-paramétrica, simultáneamente) [Jayasuriya, 93].

H^∞ y μ -síntesis son metodologías modernas de diseño de control robusto que, como QFT, son capaces de proporcionar soluciones que satisfacen las condiciones de estabilidad robusta interna en lazo cerrado y las especificaciones requeridas en el dominio de la frecuencia; esto es, proporcionan estabilidad robusta (RS) y cumplimiento de especificaciones robusto (RP), tal y como lo define [Astrom y Kerr, 04]. Sin embargo, difieren en la forma de tratar la incertidumbre:

- H^∞ está restringida a incertidumbre del tipo desestructurado.
- μ -análisis trata de compensar los problemas de manejo de incertidumbre que tiene la técnica H^∞ . Es capaz de manejar incertidumbre desestructurada y mezclada, pero no es una técnica tan intuitiva en la sintetización del controlador como QFT.

Se ha demostrado que QFT, H^∞ y μ -síntesis poseen rasgos de diseño comunes y que las diferencias metodológicas entre ellas se pueden usar para complementar aquellas etapas más “flojas” de cada una de ellas con las otras. Algunos ejemplos,

- ✚ En [Lee, Chait y Steinbuch, 00] se presenta un procedimiento de sintonización basado en QFT para sistemas multivariable, pero utilizando μ -síntesis, obteniendo un mejor resultado en cuanto a la reducción de ganancia del controlador en alta frecuencia.
- ✚ También [Sidi, 02] propone la combinación de las metodologías QFT/ H^∞ en un mismo problema, usando la estructura TDOF característica para la aplicación de especificaciones de seguimiento en QFT sobre la que se incorpora un controlador sintetizado mediante H^∞ que satisfaga especificaciones de estabilidad robusta y sensibilidad.

QFT es una metodología de diseño en el dominio frecuencial y, por tanto, las especificaciones requeridas en el dominio temporal deben de ser trasladadas lo más fielmente posible al dominio de la frecuencia. Este problema se ha considerado desde el principio, ya en [Horowitz y Sidi, 72] y, en el posterior desarrollo de la técnica Krishnan y Cruickshanks en [Krishnan y Cruickshanks, 77], en la técnica basada en modelos [D’Azzo y Houpis, 95], además de en el procedimiento dado en [Franchek y Herman, 98]. Todos requieren procesos iterativos manuales, que concluyen cuando el diseñador decide que los resultados obtenidos son aceptables. A pesar de estas contribuciones, el traslado riguroso de especificaciones de un dominio al otro sigue siendo objetivamente un problema sin resolver, teniendo en cuenta que las técnicas anteriores son poco precisas en la conversión. Suele decirse que este problema ha presentado pocas dificultades en la metodología QFT [Kerr, 04], porque al tratarse de procedimientos iterativos, cuando en la sintetización del controlador no se obtienen resultados adecuados en el análisis temporal,

aunque se cumplan las especificaciones en frecuencia, se busca un nuevo controlador en un proceso de rediseño; si el resultado temporal sigue siendo inadecuado, se ajustan las especificaciones en frecuencia y se vuelve a empezar; al final se puede obtener una solución que cumpla las especificaciones temporales. Sin embargo, si se consiguiera un método de conversión preciso tiempo-frecuencia, el procedimiento de sintetización controlador y/o precompensador no precisaría de tanta iteración, además de que proporcionaría soluciones con menor sobrediseño.

El diseño del controlador que satisfaga los requerimientos de estabilidad y especificaciones de cumplimiento se realiza en un proceso de sintetización manual. Dirigidas a aliviar esta dificultad, se han propuesto algunas investigaciones con vistas a desarrollar algoritmos de sintetización del lazo abierto de manera automática o semiautomática [*Thompson y Nwokah, 94*], [*Cervera y Baños, 05*].

La determinación de las plantillas en el DN, para las frecuencias de operación, constituye el conjunto de la incertidumbre de la planta. A mayor densidad de puntos de cada plantilla, mayor fidelidad en la descripción de la incertidumbre real. Hemos visto anteriormente la importancia que tiene el tratamiento de la incertidumbre en los problemas de control robusto y, por tanto, resulta de vital importancia tratar adecuadamente las plantillas. Se han realizado estudios específicos sobre esta cuestión, obteniendo clasificaciones de plantillas convexas y no convexas, éstas segundas circunscritas por las primeras para un manejo funcional del problema, como se plantea en la toolbox de QFT en [*Borghesani et al., 95*]; consideración exclusiva del perfil de las plantillas, a efectos del cálculo de los contornos, demostrado por [*Chait et al., 95*]; o procedimientos de generación de plantillas efectivos, dados por ejemplo en [*Chen y Ballance, 99*], [*Nataraj y Sardar, 00*], [*Hwang y Yang, 02*].

Los contornos (“bounds”) constituyen la representación de las especificaciones robustas en términos de lazo abierto sobre el DN. A cada tipo de especificación y, para cada

frecuencia de operación de la planta, le corresponde un contorno específico. Hay autores que han centrado trabajos de investigación en los contornos, como [Nataraj y Sardar, 00b] y [Gil y García, 03]. Pero es en [Gil, 08] donde se ha llegado a considerar los contornos como un punto clave en la resolución del problema de control QFT: el controlador buscado aportará a la planta nominal la ganancia y fase necesarias para ubicar en el DN la función de transferencia en lazo abierto de manera adecuada, respecto del contorno más exigente; por tanto, los contornos QFT expresan la naturaleza de la planta a controlar, incluida su incertidumbre y, al mismo tiempo, los objetivos del diseñador (especificaciones). El sobrediseño siempre va a existir en un problema de control con incertidumbre, pero la elección de contornos correctamente diseñados, reduce en gran medida este problema.

Como estamos viendo, el desarrollo de la metodología de control QFT ha ido encaminado a conseguir un procedimiento de control robusto (RS y RP), aplicado sobre plantas con incertidumbre de cualquier tipo, que proporcione una solución con el menor sobrediseño posible. Para ello, se han ido “optimizando” las distintas etapas de la metodología:

- ✚ Conversión de las especificaciones del tiempo a la frecuencia, hoy por hoy, no conseguido.
- ✚ Aplicación de condiciones de existencia de solución al problema de control, para requerimientos de estabilidad (RS).
- ✚ Definición de plantillas y contornos efectivos en el dominio de la frecuencia (RP).
- ✚ Simplificación y automatización del proceso de sintetización de controlador y precompensador.
- ✚ Inclusión de procesos complementarios en la obtención del controlador, para incorporación de elementos no-diagonales.

Por último, indicar que QFT, como cualquier otra técnica de control, pretende ser útil tanto al científico, como al ingeniero de control y, por tanto, su objetivo último es la resolución de problemas de control reales [Houpis y Pachter, 97]. En la práctica, la obtención de un controlador de orden elevado suele ser inviable, tecnológica y/o económicamente, por lo que interesan soluciones de orden lo más bajo posible. Debe existir una relación de compromiso razonable entre efectividad y orden del controlador. Existen técnicas propuestas para reducción del orden de funciones de transferencia, pero de aplicación no específica en QFT. Por ejemplo, en [Rueda, 03] se ofrece una guía de aplicación de los métodos de reducción existentes, en función del tipo de problema planteado, así como, una comparativa de resultados sobre un ejemplo de problema resuelto utilizando QFT.

Teniendo en cuenta que en QFT se manejan plantas y controladores en ocasiones de orden muy elevado, resulta importante continuar en esta línea. La incorporación en la propia técnica de diseño del procedimiento de optimización particularizado, tal y como se indica en [Rueda, 03], supondría no tener que preocuparse del orden de las soluciones ofrecidas por esta metodología de control.

2.2 Metodología QFT

Las técnicas de control robusto son particularmente útiles para el diseño de sistemas de control de vuelo en aeronaves, en parte debido a que las dinámicas características de la aeronave varían sustancialmente a lo largo del plan de vuelo. Variables tales como la velocidad, nivel de vuelo, consumo de combustible, y la magnitud y desplazamiento de la carga útil, pueden tener una influencia definitiva en los parámetros de la planta de la aeronave y, por tanto, en la estructura del modelo de la planta. Las variaciones en el modelo de la aeronave pueden ser tenidas en cuenta a través de la robustez del proceso de diseño de la metodología de control QFT.

En el contexto de la QFT, se entiende por control robusto aquel relacionado con el diseño de un controlador que consigue que la salida del sistema siga las respuestas deseadas en la forma especificada, a pesar de la presencia de variaciones en los parámetros característicos de la planta y/o la incorporación de perturbaciones no deseadas.

La metodología QFT está considerada una técnica de diseño de control robusto, basada en la realimentación a partir de las salidas de la planta, con vistas a generar una respuesta en un sistema afectado continuamente por perturbaciones externas y la propia incertidumbre característica del modelo de la planta utilizado.

La teoría de la realimentación cuantitativa fue desarrollada por el Profesor Isaac Horowitz a partir de la década de 1960, aunque las modificaciones y mejoras se han ido realizando desde entonces hasta ahora, por parte de él mismo y de multitud de investigadores diferentes.

QFT emplea una estructura de control de dos grados de libertad (TDOF), esto es, son independientes los procedimientos de conformación de respuestas mediante realimentación y el seguimiento de las referencias de entrada sobre las salidas. Para

conseguirlo, el TDOF utiliza un circuito de realimentación único basado en un controlador $G(s)$ dentro del lazo cerrado y un prefiltro $F(s)$ previo a la entrada del lazo, con los que se consigue reducir las variaciones de las salidas de la planta, producidas por la influencia de perturbaciones y de las propias variaciones de los parámetros característicos de la planta. QFT tiene en cuenta en conjunto, la información cuantitativa que incorpora la variabilidad inherente de las plantas, los requisitos de cumplimiento en frecuencia o especificaciones robustas (“Robust Performance” o RP), las especificaciones de estabilidad de control en el dominio tiempo o estabilidad robusta (“Robust Stability” o RS), las perturbaciones externas y los requisitos de atenuación sobre las respuestas de las mismas.

En particular, el compensador dentro del lazo cerrado se diseña para asegurar el cumplimiento de los requisitos de robustez y de rechazo de perturbaciones. Por otro lado, el prefiltro se utiliza para adaptación de las respuestas en cuanto a las especificaciones de seguimiento.

Los diseños QFT están basados en el DN: al considerar un conjunto de plantas en lugar de una sola, su magnitud y fase para cada frecuencia constituye también un conjunto de puntos en el DN, en lugar de un único punto. Por tanto, a cada frecuencia seleccionada le corresponde un área cerrada, o plantilla (“template”), que encierra el conjunto de puntos indicado. Cuanto mayor sea el tamaño de las plantillas, mayor incertidumbre representan. De esta manera, para evitar excesivo conservadurismo, cada plantilla se define como el polígono convexo más pequeño que encierra todos los puntos a considerar.

En definitiva, se consigue una técnica de diseño en el dominio de la frecuencia transparente en donde la relación entre la complejidad del compensador y el cumplimiento de especificaciones son fácilmente visualizados, ya que el proceso de diseño es completamente gráfico.

La incertidumbre paramétrica de la planta se materializa en las plantillas descritas tanto en magnitud, como en fase, para el conjunto de frecuencias de trabajo de la planta. Con las plantillas y las especificaciones técnicas de control sobre la planta trasladadas al dominio de la frecuencia, se pueden determinar los denominados contornos (“bounds”), con los que se define la separación entre regiones aceptables y prohibidas dentro del DN, para el sistema en lazo abierto $L=GP$: reubicando en el diagrama el sistema en lazo abierto en regiones aceptables y lo más cerca posible de los contornos más exigentes, se consigue satisfacer las especificaciones de estabilidad y de cumplimiento en frecuencia, además de los requerimientos de rechazo de perturbaciones para el conjunto de la planta.

Los contornos de estabilidad se calculan utilizando las plantillas y el margen de fase. Los contornos asociados a las especificaciones de seguimiento se obtienen a partir de las plantillas y los límites de especificación inferior y superior en el dominio de la frecuencia. Los contornos correspondientes al rechazo de perturbaciones y los de esfuerzo de control se basan en las plantillas y sólo en el límite de especificación superior.

La determinación del controlador se realiza en un proceso gráfico de conformación del sistema en lazo abierto, visualizando y teniendo en cuenta en todo momento sobre el DN los márgenes de fase y de ganancia, además del conjunto de contornos asociados a especificaciones sobre estabilidad, seguimiento, rechazo de perturbaciones y esfuerzo de control. Para satisfacer el conjunto de especificaciones al mismo tiempo y de forma simplificada, se determina el contorno intersección de todos los contornos definidos previamente, lo que proporciona los límites comunes más exigentes sobre el sistema de control en lazo abierto. Ahora, se puede buscar el controlador que hace que el sistema en lazo abierto cumpla con todas las especificaciones requeridas.

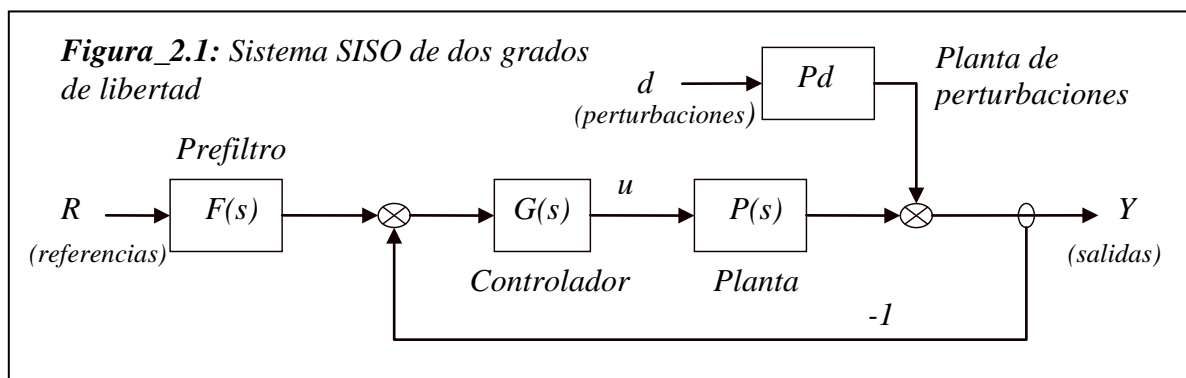
El proceso gráfico de diseño del controlador permite observar la acción resultante de la incorporación/supresión de polos y ceros, lo que proporciona la posibilidad de seleccionar una solución adecuada, en cuanto a conseguir una relación de compromiso equilibrado entre la complejidad del controlador (orden) y el rendimiento del sistema de control obtenido.

Para el diseño del prefiltro se utiliza un diagrama de Bode para dar forma a la respuesta en frecuencia del lazo cerrado, a fin de satisfacer las especificaciones de seguimiento inferior y superior.

La secuencia de diseño QFT típica en un sistema SISO sería la siguiente:

1. Configuración del Sistema de control

La configuración de un sistema de control de dos grados de libertad es la propuesta en la *Figura_2.1*. El modelo de la planta está definido por un conjunto de funciones de transferencia lineales invariantes en el tiempo (LTI), operativas dentro del rango de frecuencias deseado, una por cada plantilla.



2. Especificaciones de diseño

Las especificaciones de diseño representan los requisitos de cumplimiento asociados a la dinámica en estado estacionario del sistema en lazo cerrado. Las especificaciones suelen darse en el dominio del tiempo, usando parámetros de control típicos como el tiempo de

alcance " t_r ", tiempo de asentamiento " t_s " y el valor de pico máximo " M_p ", o definirse, en algunos casos, directamente en el dominio de la frecuencia.

Si se parte de especificaciones en el dominio tiempo, éstas deben de ser transformadas al dominio de la frecuencia. Se trata de buscar funciones de transferencia que satisfagan los límites de la envolvente generada por la especificación. La metodología habitual plantea partir de funciones de transferencia de segundo orden con diferentes frecuencias naturales y coeficientes de amortiguamiento. Se van añadiendo polos y ceros a la función para irse aproximando lo más que se pueda a la especificación original.

También se puede partir del dominio de la frecuencia, utilizando especificaciones definidas directamente en forma de márgenes de fase y ganancia, rechazo de perturbaciones en diferentes puntos o zonas del DN, ancho de banda para seguimiento, ..

3. Selección del rango de frecuencias

Antes de comenzar la fase de diseño es necesario definir un conjunto de frecuencias de operación del sistema de control. Se trata de seleccionar un grupo de frecuencias utilizadas para el procesamiento de las plantillas y los contornos. En principio, se exige estabilidad robusta (RS) en todo el espectro de frecuencia, esto es, desde cero a infinito, de modo que en la práctica los contornos de estabilidad se definen desde una frecuencia próxima a cero, hasta una frecuencia elevada realista. Sin embargo, para cumplimiento de especificaciones robustas (RP) es suficiente con trabajar con un rango de frecuencias finito, normalmente más pequeño que el utilizado para estabilidad, determinado de forma específica según el comportamiento de la planta, función de la incertidumbre que incorpora. No existe un criterio estricto para la selección de la gama de frecuencias, definida a partir de pruebas y percepciones de comportamiento de la planta con incertidumbre a lo largo de la frecuencia.

4. Representación gráfica de la incertidumbre de la planta y procesamiento de plantillas.

La incertidumbre de la planta se clasifica en incertidumbre estructurada (o paramétrica), que implica un conocimiento específico acerca de la variación de parámetros de la planta, o desestructurada (no paramétrica), donde sólo existe información concreta sobre la variación en la ganancia de las plantas. También puede representarse por una mezcla de ambas incertidumbres, estructurada y desestructurada, descrita entonces a partir de variaciones paramétricas completas, por un lado para algunos parámetros y, sólo de ganancia por otro lado para otros parámetros, en el conjunto del modelo de la planta.

Por lo general, los modelos con incertidumbre estructurada se utilizan para representar la incertidumbre en el rango de bajas a medias frecuencias, mientras que la incertidumbre desestructurada se usa en el rango de la alta frecuencia.

La incertidumbre de la planta se representa mediante plantillas en el diagrama de Nichols, mostrando cómo varía la respuesta en frecuencia del sistema (en términos de ganancia y fase) a lo largo de todo el rango de frecuencias seleccionado.

5. Selección de la planta nominal

La metodología QFT utiliza procedimientos de diseño punto a punto alrededor de cada una de las frecuencias del conjunto de prueba seleccionado. Es necesario escoger dentro del conjunto total de plantillas una única función de transferencia representativa de todas las demás, que va a servir como planta nominal para cada una de las frecuencias dentro del rango de prueba seleccionado. La planta nominal se va a utilizar para la generación de contornos y, posteriormente, para la sintetización del controlador de forma gráfica, procurando producir la menor cantidad de sobrediseño posible.

6. Generación e integración de contornos

Para la determinación de contornos se utilizan las especificaciones en el dominio de la frecuencia y las plantillas descritas en el conjunto de frecuencias de prueba. La

denominada función de transferencia en lazo abierto $L(s)=G(s)P(s)$, con $P(s)$ la planta nominal y $G(s)$ el controlador buscado, debe estar en o por encima de los límites descritos por los contornos, para cada una de las frecuencias de prueba.

El cumplimiento de los límites impuestos por los contornos respecto de la planta nominal asegura la satisfacción de las especificaciones para todas las plantas descritas por la incertidumbre [Horowitz, 92]. Por cada especificación de diseño y para cada frecuencia del conjunto de prueba, se debe de incluir un contorno que refleje esta condición en el proceso de diseño. En un problema combinado de regulación y seguimiento se parte de considerar que hay que incluir de forma independiente contornos de estabilidad robusta, de seguimiento, de rechazo de perturbaciones y de esfuerzo de control. Por otro lado, estos límites deben estar integrados entre sí para formar una única envolvente o contorno intersección, para cada frecuencia del conjunto de prueba, que se va a utilizar para diseñar el controlador en la etapa de conformación del lazo abierto. Si no hay solución intersección entre los diferentes límites, se toma el más restrictivo como contorno envolvente final, para cada frecuencia de operación. Si los límites ofrecen una solución de intersección, situación más deseable, entonces el contorno envolvente se construye a partir de las regiones más restrictivas de cada uno de los límites.

7. Sintetización del controlador

El controlador se diseña mediante un proceso de conformación del lazo abierto del sistema de control, utilizando el DN. El proceso comienza representando en conjunto los contornos envolvente, evaluados para cada una de las frecuencias de prueba, y la función de transferencia en lazo abierto que utiliza internamente la planta nominal y un controlador inicial de referencia de valor, por ejemplo, la unidad. El diseño se lleva a cabo mediante la adición a la función de transferencia en lazo abierto de ganancias y/u otros

elementos dinámicos (polos y ceros reales, polos y ceros complejos, “leads” y “lags”, “notches”, ..), de manera que se satisfagan los límites impuestos por los contornos para cada una de las frecuencias de prueba; la adición de elementos a la función original debe ser tal que se consiga la máxima proximidad a los contornos, permaneciendo siempre en las regiones aceptables, con vistas a reducir en lo posible el sobrediseño. La función de transferencia característica del controlador final vendrá dada por el conjunto de todos los elementos añadidos en este proceso.

La conformación del lazo abierto en el DN para la sintetización del controlador suele decirse que representa un proceso transparente, en cuanto a que la compensación puede ser definida poco a poco, de manera que cada uno de los cambios implementados en cada paso sobre el controlador son claramente evidentes.

8. Diseño del prefiltro

El proceso anterior de conformación del lazo abierto permite obtener una respuesta del sistema en lazo cerrado que satisface los requerimientos de estabilidad y/o rechazo de perturbaciones, en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, para conseguir satisfacer además las especificaciones de seguimiento es necesario incluir un prefiltro adecuado o compensador de entrada al lazo cerrado.

El proceso de determinación del prefiltro se lleva también a cabo en el dominio de la frecuencia, pero en lugar del DN, se utiliza un diagrama de Bode.

La respuesta en frecuencia de las funciones de transferencia que componen el lazo cerrado, conteniendo las incertidumbres propias de la planta, se desplazan en el diagrama de bode de manera que queden encerradas por los límites superior e inferior, impuestos por las especificaciones de seguimiento. Estos desplazamientos gráficos en el diagrama de bode se consiguen añadiendo ganancia y/o elementos dinámicos a la

función de transferencia en lazo cerrado original de la que se parte. El conjunto de elementos añadidos en el proceso definen la función de transferencia del prefiltro buscado.

9. Análisis y validación frecuencial y temporal

El último paso en cualquier metodología de diseño QFT consiste en realizar un análisis de las respuestas del sistema en lazo cerrado obtenido, para verificar que cumple con todas las especificaciones de diseño. En primer lugar, el análisis debe ser en el dominio de la frecuencia, respecto de las especificaciones en este dominio. Si el sistema de control definitivo cumple los requerimientos, se concluye con un análisis en el dominio temporal, para verificación de los parámetros temporales exigidos. En cualquier caso, si no se cumple alguna especificación, ya sea en frecuencia o en el tiempo, o simplemente en algún rango de frecuencia, hay que valorar si interesa volver al principio del proceso de diseño; si es así, será necesario rediseñar controlador y/o prefiltro, o incluso “relajar” especificaciones o cambiar los valores de algunas de las frecuencias del conjunto de prueba, utilizado para operación del sistema.

2.3 Características y puntos fuertes de la metodología QFT

QFT es considerada como una extensión natural de la metodología de diseño clásico en el dominio de la frecuencia, que ofrece un enfoque formal para manejar plantas con incertidumbre, basado en la realimentación. Las características QFT se pueden resumir de la siguiente manera:

- La cantidad de realimentación utilizada depende de la cantidad de incertidumbre de la planta y de las perturbaciones externas, así como, de lo estrictas que sean las especificaciones de cumplimiento. Un controlador diseñado usando QFT es robusto para un amplio rango de variaciones paramétricas en la planta, pudiendo satisfacer además una gran cantidad de requerimientos simultáneamente.
- Permite soluciones de compromiso para cada frecuencia de operación entre los conceptos de estabilidad, requerimientos en frecuencia, incertidumbre de la planta, nivel de rechazo de perturbaciones, complejidad del controlador y ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Las limitaciones en cuanto a posibilidades de alcance de los requerimientos se conocen desde las primeras etapas del proceso de diseño. El diseñador puede especificar la estructura del controlador seleccionando distintos tipos de elementos dinámicos, según le interese a efectos prácticos.
- Se trata de una metodología de diseño de control robusto basada en conceptos intuitivos. No precisa de un análisis formal complejo. La base de la metodología se maneja con rapidez. Presenta un potencial de aplicación en problemas de diferentes sectores de ingeniería importante.
- El enfoque y manipulación simultánea de especificaciones e incertidumbre de la planta es sistemático y directo.

- El tiempo empleado para desarrollo del sistema de control QFT no es muy grande y, además, los controladores se pueden rediseñar rápidamente para adaptarse a posibles cambios posteriores a la etapa de diseño, en cuanto a las especificaciones, incertidumbres y perturbaciones consideradas.

La filosofía QFT se ajusta a una amplia gama de situaciones, en comparación con otras metodologías de control típicas más rígidas. Por ejemplo, a efectos de:

- Incertidumbre de la planta. El controlador sintetizado mediante QFT proporciona al sistema de control la capacidad para cumplir con multitud de especificaciones, a pesar de las variaciones paramétricas en la planta, así como, de la incertidumbre propia de las perturbaciones externas.
- Modelización de la planta desde los experimentos. Existen sistemas con dinámicas muy complejas, que hacen que sea complicado obtener un modelo analítico de comportamiento parecido al sistema real. Una solución puede ser obtener las respuestas en frecuencia de la planta directamente, mediante experimentación sobre el sistema físico real, tomando medidas directas de todos y cada uno de los parámetros que se van a considerar. De esta manera, se pueden generar conjuntos de respuestas en frecuencia, para cada posibilidad de funcionamiento de la planta real, definiendo directamente las plantillas que incorporan la variabilidad paramétrica característica de la planta, sin necesidad de utilizar un método de identificación formal complejo.
- Plantas lineales desde dinámicas no lineales. Dada una planta no lineal, su dinámica puede aproximarse mediante procedimientos de linealización y, entonces utilizar como modelo una planta lineal. QFT permite trabajar con plantas no lineales o con plantas

linealizadas; además, da la posibilidad de utilizar conjuntos de funciones de transferencia con diferentes grados de complejidad, tanto global como por polinomios separados en numeradores y denominadores de las funciones; en cualquier caso, el controlador sintetizado mediante QFT será único para todo el conjunto.

- Cumplimiento robusto de especificaciones (RS). En el diseño del sistema de control se utilizan diferentes tipos de especificaciones para cumplimiento en lazo cerrado, de manera que con un único controlador el sistema debe ser capaz de satisfacer todas las especificaciones simultáneamente. El proceso de diseño QFT permite ver gráficamente la agresividad de cada especificación en relación con las demás, para cada frecuencia, esto es, el grado de exigencia hacia el sistema de control por parte de cada especificación. Por otro lado, las metodologías de diseño QFT no requieren especificaciones definidas en todo el espectro de frecuencia, desde cero a infinito, sino que se puede limitar al rango de operación práctico de la planta utilizada.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_2.1: Sistema SISO de dos grados de libertad.....	33
--	-----------

CAPÍTULO 3

Diseño de Sistemas de Control de Vuelo y Navegación

RESUMEN

El Grupo de Tecnología e Investigación Aeronáutica Europeo (GARTEUR) tenía como objetivo estimular y coordinar la cooperación entre Instituciones de Investigación e Industria, en áreas científico-técnicas como la Aerodinámica, Mecánica de Vuelo, Helicópteros, Estructuras y Materiales y Tecnología de la Propulsión. Para ello, en la segunda mitad de la década de los 90, desarrolló dos propuestas independientes de medios de computación para ingeniería de control en aeronaves, RCAM o Modelo de Investigación de Aeronave Civil y HIRM o Modelo militar de Investigación de Elevado Ángulo de Ataque, con las que pretendía integrar los métodos de diseño para control clásicos en los problemas aeronáuticos reales. La Tesis propuesta aplica la metodología QFT desarrollada sobre el modelo de aeronave civil RCAM, considerando el control QFT compatible con los principios del proyecto GARTEUR.

CONTENIDOS

3.1 Proyecto GARTEUR

3.2 Descripción del Modelo de Aeronave Civil utilizado

3.2.1 Sistemas de Referencia

3.2.2 Nomenclatura: entradas, estados, salidas, parámetros

3.2.3 Dinámica de la aeronave

3.2.4 Criterios de evaluación y especificaciones

3.3 Principios del proceso de diseño

3.1 Proyecto GARTEUR

A principios de la década de los 90, el desarrollo práctico en ingeniería de sistemas de control de aeronaves tenía importantes limitaciones. Los métodos en ingeniería de control existentes no se utilizaban en el proceso de desarrollo de sistemas de control de aeronaves que, además, requería aplicaciones suficientemente integradas. Fueron apareciendo multitud de herramientas para control automático, aunque todas ellas en paquetes de distintas plataformas, con su propio formato e incompatibles entre sí. El apoyo a la ingeniería multidisciplinar para la integración de diferentes sistemas era insuficiente en cuanto a métodos y herramientas de control.

En un momento dado, se hizo evidente la necesidad de la integración de los métodos y herramientas de control existentes con los procesos de ingeniería en las aeronaves, de manera que la interacción entre ambos diera lugar a una mejora sustancial en el desarrollo de la ingeniería aeronáutica, a efectos de control.

El Proyecto GARTEUR¹ surge en Europa como medio para incorporar la tecnología de computación de control robusto a los denominados entornos de ingeniería de sistemas, dando lugar a medios de computación para ingeniería de control en aeronaves (CACEE), a partir de los que se pretende reducir costes de desarrollo, acortar tiempos de implementación y, en definitiva, mejorar la calidad del producto.

El Proyecto GARTEUR tratará de estimular y coordinar la cooperación entre Instituciones de Investigación y la Industria, en áreas científico-técnicas como en Aerodinámica, Mecánica del Vuelo, Helicópteros, Estructuras y Materiales y Tecnología de la Propulsión [GARTEUR, 96].

¹ Group for Aeronautical Research and Technology in Europe.

En particular, en lo que se refiere a la Mecánica del Vuelo y, a través del denominado grupo de acción FM(AG08)² [Garteur,97b], se desarrollaron dos propuestas independientes de diseño de control de vuelo robusto:

- Modelo de Investigación de Aeronave Civil (“Research Civil Aircraft Model”) o RCAM. Propuesto por la empresa francesa *Aerospatiale*, considera una aeronave civil concreta (Airbús A300-600ST) durante el tramo de aproximación automática final de vuelo [GARTEUR, 97c].
- Modelo de Investigación de Elevado Ángulo de Ataque (“High Incidence Research Model”) o HIRM. Utiliza una aeronave militar específica (Eurofighter) en situaciones de maniobra con ángulos de ataque extremos [GARTEUR, 97d].

Se pretende conseguir una considerable reducción en el esfuerzo de diseño requerido que suponga una minimización del tiempo de incorporación al mercado industrial y, por tanto, de los costes definitivos por diseño.

El objetivo principal del proyecto GARTEUR no fue desarrollar leyes de control óptimas, sino comparar las teorías de control robustas más actuales del momento con los métodos de diseño clásicos, aplicados a problemas aeronáuticos reales. Los resultados obtenidos con las propuestas RCAM y HIRM se pretendía que aportaran confianza en el uso de las técnicas de control robusto, en su aplicación en la industria aeronáutica europea.

Esta Tesis trabajará con la propuesta de modelo civil RCAM, que parte de un modelo no lineal, asociado a un conjunto de especificaciones de diseño realistas. Se trata de diseñar un controlador de vuelo robusto (“Flight Control System” o FCS) aprovechando la técnica de control QFT, capaz de manejar modelos con incertidumbre y variación de parámetros

² Flight Mechanics Action Group 08.

característicos, no sólo referidos a la propia aeronave (planta), sino también al entorno en el que debe operar (planta de perturbaciones).

La filosofía del proyecto GARTEUR exigía que las técnicas de control robusto elegidas debían ser capaces de:

- Manejar sistemas multivariable, con múltiples entradas de control y múltiples salidas.
- Utilizar leyes de control que cubrieran grandes regiones dentro del entorno de vuelo propio de la aeronave y no sólo alrededor de un único punto de diseño. Esto es, con capacidad para tratar grandes cantidades de incertidumbre, tanto propia de la funcionalidad de la aeronave, como del entorno perturbativo asociado a la misma.

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de esta Tesis es la ampliación de la metodología QFT, la aplicación de las propuestas realizadas en estos términos se llevará a cabo sobre el modelo de aeronave civil RCAM, ya que el control QFT es compatible con los estrictos principios del proyecto GARTEUR.

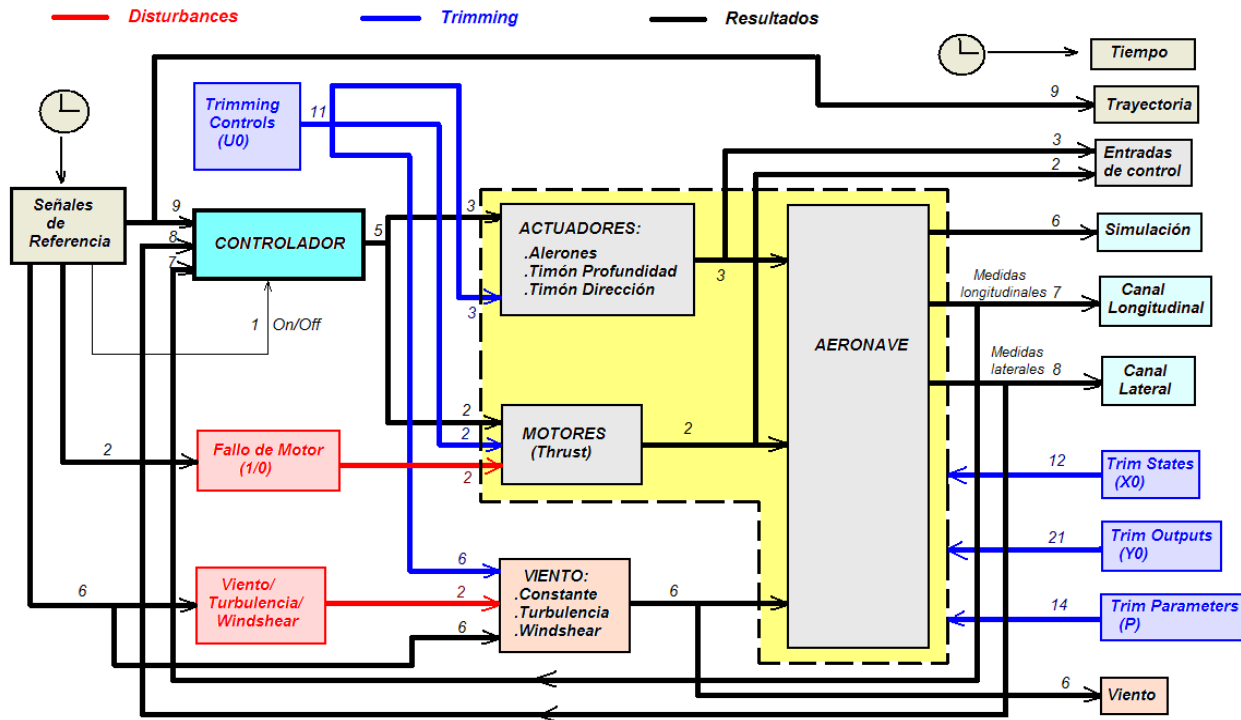
En general, GARTEUR pedía que las leyes de control aplicadas debían ser robustas, en el sentido de que los parámetros de control no superaran los límites especificados.

Estos parámetros de control en el modelo de aeronave propuesto van a ser la velocidad, peso, posición horizontal y vertical del centro de gravedad de la aeronave, retrasos temporales de procesamiento y actuación, además de no linealidades y posibles fallos de motor, entre otros. Deben permitir, además, desacoplo de perturbaciones (regulación), tal que el seguimiento (tracking) de la trayectoria de descenso horizontal y vertical se mantenga dentro de los márgenes de desviación especificados.

3.2 Descripción del Modelo de Aeronave Civil utilizado

Consiste en un sistema no lineal de seis grados de libertad que incorpora no linealidades de actuadores y motores, además de un modelo de perturbaciones externas representativas de la atmósfera en la que se mueve la aeronave civil.

En la *Figura_3.1* a continuación se describe el modelo de aeronave civil a utilizar en forma de diagrama de bloques, donde se puede ver la relación entre la aeronave y el controlador robusto, así como de los distintos flujos de señales: referencias, entradas de control, salidas, perturbaciones externas, inicialización de parámetros y variables ("trimming").



Figura_3.1: Diagrama de bloques del modelo de aeronave civil controlado

En este Capítulo se define la Nomenclatura utilizada en el modelo de aeronave civil, usado como planta en el problema aplicación de la Tesis (Capítulo8). Ésta incluye distintos Sistemas de Referencia, Transformaciones entre Sistemas de Coordenadas, Variables Características de la Aeronave, además de otros parámetros matemáticos utilizados en el modelo y procedimientos de uso común.

Los descriptores alfanuméricos propuestos a continuación son para uso en los programas a desarrollar (Anexo8).

3.2.1 Sistemas de Referencia

Los Sistemas de Referencia que se van a utilizar relacionados con el análisis de la dinámica de la aeronave son los siguientes:

- Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra $F_E (O_E, X_E Y_E Z_E)$.
- Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión $F_V (O_V, X_V Y_V Z_V)$.
- Sistema de Referencia Intrínseco o Aerodinámico del Avión $F_B (O_B, X_B Y_B Z_B)$.
- Sistema de Referencia de Ejes de Viento $F_W (O_W, X_W Y_W Z_W)$.
- Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal $F_S (O_S, X_S Y_S Z_S)$.
- Sistema de Referencia de Medidas $F_M (O_M, X_M Y_M Z_M)$.

Todos los Sistemas de Referencia nombrados son ortogonales con orientación dextrógira.

Ver *Anexo3.1* para una descripción exhaustiva de los mismos.

Nota:

Cabe distinguir la diferencia entre centro de masas (*cm*) y centro de gravedad (*cg*) de un cuerpo. Ambos conceptos son semejantes, en la medida en que los dos hacen referencia al punto del cuerpo a estudio donde se puede colocar la resultante de fuerzas aplicada sobre el cuerpo, creando el mismo efecto.

Sin embargo, mientras que para el cálculo del *cg* no se tiene en cuenta la densidad del cuerpo, considerando ésta uniforme, para la determinación del *cm* sí que hay que considerar la posible variabilidad de la densidad entre puntos dentro del mismo cuerpo. Esto significa que para el *cg* se considera sólo la geometría (volumen), mientras que para definir el *cm* se tienen en cuenta, además, las masas composición del cuerpo material.

En cinemática del vuelo se habla siempre de centro de masas del avión. Evidentemente, un avión es un cuerpo material heterogéneo constituido por multitud de materiales de diversas densidades y de distintos tamaños que hacen difícil el cálculo exacto de su *cm*. Además, existe el agravante

de que durante el vuelo el consumo de combustible supone un cambio de posición continuo del cm del avión.

Pero, teniendo en cuenta que en un avión su plano vertical (definido por los ejes longitudinal y vertical) es un plano de simetría, tanto el cm como el cg deben estar sobre éste y, en la práctica, lo que se hace es que para cinemática del vuelo, se trabaja con el cg y se habla como si se tratase del cm .

3.2.2 Nomenclatura: entradas, estados, salidas, parámetros

Considerando los posibles sistemas de referencia asociados a la aeronave (*Anexo3.1*), así como, las transformaciones para pasar parámetros de unos a otros (*Anexo3.2*), se puede definir ahora la nomenclatura concreta a utilizar para los distintos tipos de flujos de señales alrededor del modelo de aeronave civil.

Tabla_3.1 Entradas de control y de perturbaciones externas u_i

Símbolo	Alfanumérico	Descripción	Unidad
Entradas de control u_i			
$u(1)$	DA	Deflexión de alerones	rad
$u(2)$	DT	Deflexión de timones de profundidad	rad
$u(3)$	DR	Deflexión de timón de dirección	rad
$u(4)$	TH1	Posición "throttle" motor1	rad
$u(5)$	TH2	Posición "throttle" motor2	rad
Entradas de perturbaciones externas u_i			
$u(6)$	WXE	Velocidad viento componente-x	m/s
$u(7)$	WYE	Velocidad viento componente-y	m/s
$u(8)$	WZE	Velocidad viento componente-z	m/s
$u(9)$	WXB	Velocidad turbulencia componente-x	m/s
$u(10)$	WYB	Velocidad turbulencia componente-y	m/s
$u(11)$	WZB	Velocidad turbulencia componente-z	m/s

Las entradas tanto de control, como de perturbaciones externas sobre la planta del modelo de aeronave civil, de nomenclatura u_i vienen descritas en la *Tabla_3.1*

Los estados utilizados internamente sobre la planta del modelo, de nomenclatura x_i vienen descritos en la *Tabla_3.2*

Tabla_3.2 Estados internos de la aeronave x_i

Símbolo	Alfanumérico	Descripción	Unidad
Estados internos x_i			
$x(1)$	P	Rate de alabeo en F_B	rad/s
$x(2)$	Q	Rate de cabeceo en F_B	rad/s
$x(3)$	R	Rate de guiñada en F_B	rad/s
$x(4)$	PHI	Alabeo	rad
$x(5)$	THETA	Cabeceo	rad
$x(6)$	PSI	Guiñada (rumbo)	rad
$x(7)$	UB	Componente-x de velocidad inercial en F_B	m/s
$x(8)$	VB	Componente-y de velocidad inercial en F_B	m/s
$x(9)$	WB	Componente-z de velocidad inercial en F_B	m/s
$x(10)$	X	Posición-x del c.d.g. en F_E	m
$x(11)$	Y	Posición-y del c.d.g. en F_E	m
$x(12)$	Z	Posición-z del c.d.g. en F_E	m

Las salidas, tanto las utilizadas como realimentación para seguimiento, como aquellas de control sólo para indicación, sobre la planta del modelo, de nomenclatura y_i vienen descritas en la *Tabla_3.3*

Tabla_3.3 Salidas con seguimiento e indicación y_i

Símbolo	Alfanumérico	Descripción	Unidad
Salidas con seguimiento y_i			
$y(1)$	Q	Rate de cabeceo	rad/s
$y(2)$	NX	Factor de carga longitudinal	-
$y(3)$	NZ	Factor de carga vertical	-
$y(4)$	WV	Componente-z de velocidad inercial en F_V	m/s
$y(5)$	Z	Posición-z del c.d.g. en F_E	m
$y(6)$	VA	Velocidad del aire	m/s
$y(7)$	V	Velocidad inercial	m/s
$y(8)$	BETA	Angulo de deslizamiento	rad
$y(9)$	P	Rate de alabeo en F_B	rad/s
$y(10)$	R	Rate de guiñada en F_B	rad/s
$y(11)$	PHI	Angulo de alabeo	rad
$y(12)$	UV	Componente-x de velocidad inercial en F_V	m/s
$y(13)$	VV	Componente-y de velocidad inercial en F_V	m/s
$y(14)$	Y	Posición-y del c.d.g. en F_E	m
$y(15)$	CHI	Angulo de track inercial	rad
Salidas para indicación y_i			
$y(16)$	PSI	Angulo de rumbo	rad
$y(17)$	THETA	Angulo de cabeceo	rad
$y(18)$	ALPHA	Angulo de ataque	rad
$y(19)$	GAMMA	Angulo de la trayectoria de vuelo inercial	rad
$y(20)$	X	Posición-x del c.d.g. en F_E	m
$y(21)$	NY	Factor de carga lateral	-

Las referencias utilizadas para seguimiento sobre la planta del modelo, de nomenclatura r_i vienen descritas en la *Tabla_3.4*

Tabla_3.4 Referencias para seguimiento r_i

Símbolo	Alfanumérico	Descripción	Unidad
Referencias para seguimiento r_i			
$r(1)$	T	Tiempo	s
$r(2)$	XC	Posición-x del c.d.g. en F_E	m
$r(3)$	YC	Posición-y del c.d.g. en F_E	m
$r(4)$	ZC	Posición-z del c.d.g. en F_E	m
$r(5)$	UVC	Componente-x de velocidad inercial en F_V	m/s
$r(6)$	VVC	Componente-y de velocidad inercial en F_V	m/s
$r(7)$	WVC	Componente-z de velocidad inercial en F_V	m/s
$r(8)$	VC	Velocidad inercial	m/s
$r(9)$	DYC	Desviación lateral	m
$r(10)$	PSIDC	Rate de rumbo	rad/s
$r(11)$	WXEC	Velocidad viento componente-x	m/s
$r(12)$	WYEC	Velocidad viento componente-y	m/s
$r(13)$	WZEC	Velocidad viento componente-z	m/s
$r(14)$	WXBC	Velocidad turbulencia componente-x	m/s
$r(15)$	WYBC	Velocidad turbulencia componente-y	m/s
$r(16)$	WZBC	Velocidad turbulencia componente-z	m/s
$r(17)$	LEF	Fallo de motor izquierdo	-
$r(18)$	REF	Fallo de motor derecho	-
$r(19)$	CTRLOFF	Controlador apagado	-

La nomenclatura de entradas, estados, salidas y referencias descrita incluye tanto la dinámica longitudinal, como la dinámica lateral de la aeronave

Los parámetros indicativos de las características de la planta del modelo, así como, de su inicialización (“trimming”), de nomenclatura p_i vienen descritas en la *Tabla_3.5*

Tabla_3.5 Parámetros p_i

Alfanumérico	Descripción	Intervalo	Nominal	Unidad
Parámetros p_i				
m	Masa de la aeronave	100,150	120	Ton
CBAR	Cuerda media aerodinámica \bar{c}	-	6.6	m
LTAIL	Distancia entre centros de presiones ala-cola	-	24.8	m
S	Superficie en planta del ala	-	260	m ²
STAIL	Superficie en planta de la cola	-	64	m ²
XCG	Posición-x del c.d.g. en F_M	0.15 \bar{c} , 0.31 \bar{c}	0.23 \bar{c}	m
YCG	Posición-y del c.d.g. en F_M	-	0	m
ZCG	Posición-z del c.d.g. en F_M	0, 0.21 \bar{c}	0	m
XAPT1	Posición-x aplicación del thrust1 en F_M	-	0	m
YAPT1	Posición-y aplicación del thrust1 en F_M	-	-7.94	m
ZAPT1	Posición-z aplicación del thrust1 en F_M	-	-1.9	m
XAPT2	Posición-x aplicación del thrust2 en F_M	-	0	m
YAPT2	Posición-y aplicación del thrust2 en F_M	-	7.94	m
ZAPT2	Posición-z aplicación del thrust2 en F_M	-	-1.9	m
Parámetros de "trimming" p_i				
V0	Velocidad del aire	52,90	80	m/s
CHI0	Angulo de track inercial	0,359	0	deg
GAMMA0	Angulo de la trayectoria de vuelo inercial	6,-6	0	deg
POS	Posición del c.d.g. en F_E	(0,-23500), (0,19000), (-1000,0)	(0,0,-1000)	m
DELAY	Retraso computacional	0,0.1	0	s
WSPEED	Velocidad viento en F_E	(20,-20),(20,- 20),(20,-20)	(0,0,0)	m/s
GUST	Velocidad turbulencia en F_B	(15.4,-15.4), (15.4,-15.4), (15.4,-15.4)	(0,0,0)	m/s

Con los parámetros de valor nominal se define la planta nominal y la planta de perturbaciones nominal. Utilizando el intervalo de valores extremos de cada parámetro se definen las plantillas o contorno de la planta alrededor de la planta nominal, que determina la incertidumbre de la misma. Lo mismo se hace respecto de la planta de perturbaciones para determinar su contorno de incertidumbre.

3.2.3 Dinámica de la aeronave

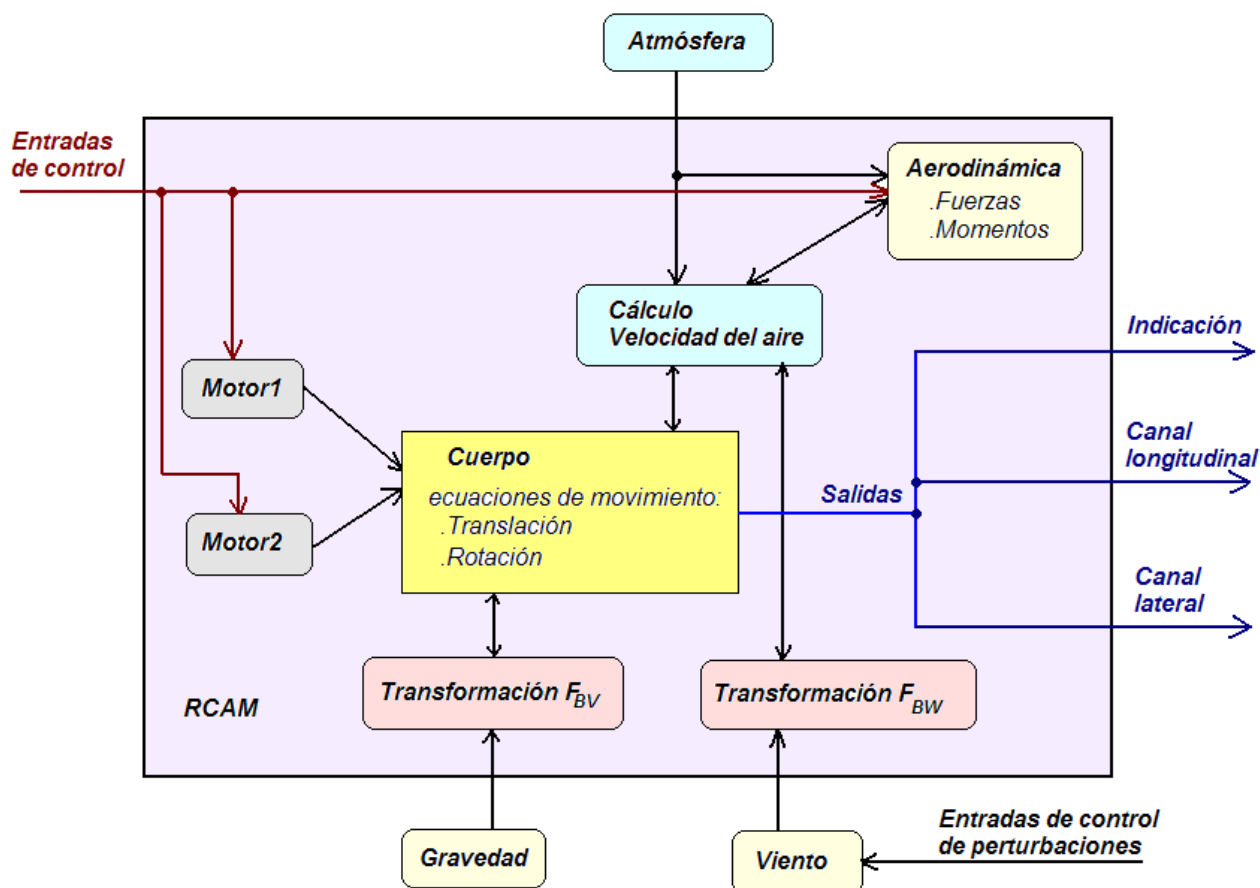
Incluye los modelos que describen, por un lado, la propia aeronave con motores y, por otro, el entorno en el que se mueve, esto es, la atmósfera con un modelo específico de viento representativo de las perturbaciones externas.

Dentro del modelo de aeronave específico se incorpora un modelo concreto de actuadores, referido a las superficies de control encargadas de generar las maniobras necesarias para que la aeronave se mueva como queremos.

La descripción general de la dinámica de la aeronave se da en forma de diagrama de bloques en la *Figura_3.2*

Los bloques que componen la dinámica del modelo son los siguientes:

- Cuerpo: proporciona la descripción del movimiento del cuerpo rígido de 6 grados de libertad en los distintos sistemas de referencia. Distingue entre dos tipos de movimiento:
 - Traslación. Determinación de velocidades y aceleraciones lineales en F_V y F_B , además de parámetros como la altura h , ángulo de la trayectoria de vuelo o ángulo de track inercial, todos ellos respecto de F_V .
 - Rotación. Relaciona momentos de giro alrededor del cdg, debido al empuje de motores y perturbaciones externas, con momentos de inercia y velocidades angulares asociadas.



Figura_3.2: Diagrama de bloques de la dinámica de la aeronave

- Transformación F_{BV} (del sistema intrínseco F_B al sistema ligado F_V) y F_{VB} (del F_V al F_B): La relación entre los sistemas F_B y F_V proporciona las rotaciones de rumbo ψ alrededor del eje vertical, de cabeceo θ , alrededor del eje transversal, y de alabeo ϕ , alrededor del eje longitudinal.
- Transformación F_{BW} (del sistema intrínseco F_B al sistema viento F_W) y F_{WB} (del F_W al F_B): La relación entre los sistemas F_B y F_W proporciona los valores de los ángulos de ataque α y deslizamiento β .
- Cálculo de la velocidad del aire: Definida como la diferencia entre la velocidad inercial de la aeronave V_B y las velocidades del viento W_B y W_E , es decir,

$$V_A = V_B - W_B - R_{BV}W_E \quad (3.1)$$

En forma de componentes se describe como en (A3.3). A partir de V_A y sus componentes, u_a , v_a y w_a , se obtienen los ángulos de ataque α (A3.1) y deslizamiento β (A3.2).

- Aerodinámica: definición de fuerzas y momentos aerodinámicos, a partir de los denominados coeficientes aerodinámicos, con referencia a F_S .
 - Fuerzas aerodinámicas: determinadas a partir de los coeficientes aerodinámicos de resistencia C_D , fuerza lateral C_Y y sustentación C_L que, a su vez, son función del ángulo de ataque α , el ángulo de deslizamiento β y los ángulos de deflexión de las superficies de control. Dan lugar a las fuerzas de resistencia o “drag”, lateral y sustentación o “lift” siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -D = -C_D \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \quad (3.2) \\ Y = C_Y \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \quad (3.3) \\ Z = -L = -C_L \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \quad (3.4) \end{array} \right.$$

- Momentos aerodinámicos: partiendo de los coeficientes de momentos de alabeo C_l , cabeceo C_m y guiñada C_n , respecto del centro aerodinámico del ala, se determinan los mismos coeficientes de momentos pero respecto del cdg de la aeronave, $C_{l_{cg}}$, $C_{m_{cg}}$ y $C_{n_{cg}}$. Con estos últimos se puede obtener los momentos aerodinámicos de alabeo, cabeceo y guiñada siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_A = C_{l_{cg}} \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \bar{c} \quad (3.5) \\ M_A = C_{m_{cg}} \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \bar{c} \quad (3.6) \\ N_A = C_{n_{cg}} \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \bar{c} \quad (3.7) \end{array} \right.$$

- Motores: Modelo de aeronave que utiliza una planta de potencia de dos motores iguales, ubicados simétricos respecto del eje longitudinal y, que proporcionan empuje en esta dirección. La fuerza suministrada por cada motor para translación en la dirección del eje longitudinal o rotación alrededor del cdg se describe como,

$$F_i = \delta_{THi} mg \quad \text{con} \quad i = 1,2 \quad (3.8)$$

Donde δ_{THi} es la posición del “throttle” del motor i .

- Atmósfera: Se utiliza el concepto de atmósfera estándar, definida con valores nominales de 15°C, 1atm y 1.225kg/m³ a nivel del mar y, que considera cambios lineales de temperatura hasta los 11km de altura de -6.6°C/km de ascenso.
- Gravedad: No se considera variable con la altura, aplicando un valor constante de 9.81m/s².

La deflexión de las distintas superficies de control se consigue utilizando actuadores que tienen limitado el ancho de banda y que van a definir unos ángulos de deflexión, así como, velocidades angulares de deflexión (“slew rate”) también limitadas. La dinámica de motor utiliza también las mismas limitaciones que los actuadores de las superficies de control. En ambos casos, se usan modelos de primer orden para la representación formal del retraso de actuación, además de las limitaciones indicadas.

Con vistas a obtener situaciones de vuelo más realistas, el modelo no lineal de aeronave civil se ha considerado con perturbaciones externas definidas por entradas de viento constante y turbulencias.

En las ecuaciones de movimiento del cuerpo de la aeronave, en el sistema de referencia inercial F_E , se ha incorporado el grupo de tres entradas de viento constante. Las componentes de velocidad del viento se pueden obtener restando a la velocidad inercial la velocidad propia de la aeronave. No es necesario un modelo específico para la

velocidad del viento constante, sólo definir un intervalo realista de velocidades de viento respecto a tierra, descrito en la dirección deseada. Para evaluación del sistema, el modelo de aeronave va a utilizar un rango de (20m/s,-20m/s) para cada componente de velocidad de viento.

La turbulencia, sin embargo, es un proceso estocástico que puede ser definido mediante un espectro de velocidades tridimensional. Es habitual utilizar como espectro de velocidades para modelado de la turbulencia el denominado espectro Dryden. Este tipo de espectro está basado en las siguientes hipótesis:

- ✚ La turbulencia atmosférica es un proceso aleatorio que se ajusta a una distribución de Gauss.
- ✚ La turbulencia atmosférica es un proceso estacionario, ya que la distribución de velocidades del viento se considera independiente del tiempo.
- ✚ La turbulencia atmosférica es homogénea a lo largo de cada tramo de vuelo.
- ✚ La turbulencia atmosférica es un proceso isentrópico, para una aeronave volando a una velocidad V constante a través de la turbulencia estacionaria.

3.2.4 Criterios de evaluación y especificaciones

Los objetivos particulares que se pretenden conseguir respecto del sistema de control de vuelo y navegación a diseñar se pueden enumerar del siguiente modo:

1. Actuación del Sistema. Especificada en términos de características de respuesta a órdenes de seguimiento, descritas a través de parámetros normalizados como son, tiempo de subida, tiempo de asentamiento, “overshoot”, y otros parámetros de desviaciones máximas permitidas. Los comandos a controlar para definir una actuación concreta del sistema son los siguientes:

- Desviación Lateral, con respecto a la trayectoria horizontal prefijada.
- Altitud, referida a la pista de aterrizaje considerada.
- Rumbo (“Heading”), o posición angular del eje longitudinal de la aeronave respecto del Norte.
- Variación de Rumbo (“Heading Rate”), definido como variación temporal del parámetro rumbo.
- Ángulo de la Trayectoria de Vuelo (“Flight Path Angle” o FPA), medido como inclinación angular de la aeronave respecto del horizonte.
- Ángulo de Alabeo.
- Velocidad del Aire, o velocidad de la aeronave relativa al medio en el que se mueve.

2. Robustez del Sistema. Descrita a través de valores límite con respecto a ciertos parámetros característicos del sistema, dentro de los cuales se consigue mantener la estabilidad y actuación correcta de la aeronave. Se pretenden controlar las variaciones de los siguientes parámetros referidos a la aeronave:

- Posición Horizontal y Vertical del Centro de Gravedad.
- Masa.
- Retraso de tiempo de procesamiento de los Actuadores y Motor.
- Variaciones de Velocidad.

3. Calidad del Sistema. Referida al grado de confortabilidad en el interior de la aeronave considerando su movimiento. Se mide a partir de:

- Aceleración Vertical Máxima, como indicativo en las maniobras de ascenso y descenso.
- Aceleración Lateral Máxima, como indicativo en las maniobras de viraje.
- Amortiguamiento de las oscilaciones, respecto del parámetro altitud.

4. Seguridad del Sistema. Referida al mantenimiento de ciertas variables del sistema dentro de límites, que eviten “el desprendimiento de la capa límite aerodinámica y la consiguiente entrada en pérdida de la aeronave”. Estas variables son:

- Velocidad del Aire.
- Ángulo de Ataque, de las alas respecto del aire incidente.
- Ángulo de Alabeo.
- Ángulo de Deslizamiento, o resbalamiento de la aeronave respecto del aire incidente.

5. Esfuerzo de Control del Sistema. Generado por las condiciones del entorno en el que se mueve la aeronave, se ha de minimizar en:

- Actuadores, para control de alerones, timones de profundidad (cola) y timón de dirección.
- Motores, a través del mando de gases imponiendo un valor máximo de variación por unidad de tiempo (“throttle rate”).

3.3 Principios del proceso de diseño

El proyecto GARTEUR a través de los programas RCAM y HIRM buscaba obtener controladores adecuados para cada una de las propuestas, aplicando diferentes metodologías de control. Es necesario seguir un proceso de diseño del controlador, como puede ser el planteado por [Taylor et al, 84] y que es el que sugiere el FM(AG08) a través de [Spee, 95].

Los pasos a seguir podrían ser los siguientes:

- ✚ Modelado de la planta a controlar.
- ✚ Determinación de las características del modelo de la planta.
- ✚ Modificar la configuración obtenida para conseguir que la planta se adapte mejor al control (por ejemplo, añadiendo actuadores o sensores).
- ✚ Plantear formalmente los elementos del problema de diseño.
 - Características de la planta: la planta a controlar, ¿es lineal o no lineal? ¿Qué tipo de no linealidad? ¿Se puede linealizar? ¿Es estable o inestable? ¿Contiene ceros RHP? ¿Hay resonancias? ¿Es la planta controlable y observable?
 - Restricciones de diseño: ¿Cuales son las limitaciones respecto de la implementación del controlador: analógico o digital, orden de complejidad, tipo de estructura (centralizada, distribuida), “data rates” o tiempos de muestreo para sistemas digitales, ..?
 - Especificaciones: ¿Cuál debe ser el comportamiento del sistema de control? Cumplimiento de tiempos de alcance y de asentamiento, ancho de banda, sobreelongación, margen de ganancia, margen de fase, frecuencia de corte, índices de actuación cuadráticos, sensibilidad, robustez.
- ✚ Determinar el grado de realismo de especificaciones y restricciones de diseño.
- ✚ Utilizar procedimientos de diseño adecuados a las características del problema.
- ✚ Verificación o análisis del diseño obtenido: temporal y/o frecuencial.

- ✚ Generar documentación completa del diseño final.
- ✚ Implementación del diseño final.

El FM(AG08) propuso los siguientes métodos de control como adecuados para la resolución de los programas RCAM y HIRM:

- Teoría clásica de control.
- Asignación de estructura robusta de eigenvectores y eigenvalores.
- LQ (“linear quadratic”), LQG(“LQ gaussian”), LTR (“loop transfer recovery”).
- Técnicas de H^∞ .
- Técnicas de micro-síntesis y análisis.
- Método de Lyapunov.
- QFT (“Quantitative feedback theory”).
- Parámetros de espacio de estados.
- Técnicas algebraicas.
- Desigualdades matriciales lineales.
- Técnicas de optimización.
- Técnicas de Kharitonov.
- Control predictivo.
- Inversión dinámica no lineal.
- Estimación robusta dinámica inversa.
- Redes neuronales.
- Lógica difusa.

Observar que la lista anterior hace referencia sólo a métodos de diseño de controladores.

Los métodos de control aplicados a desarrollo de especificaciones, análisis, etc, deben implementarse de forma específica en función de las características del tipo de problema de control y de la metodología utilizada para el controlador.

El Proyecto GARTEUR publica en el año 1997 los resultados más importantes desarrollados para los programas RCAM y HIRM [Magni et al., 97]. Algunos de los resultados publicados para el problema RCAM se indican en la *Tabla_3.6* a continuación, no utilizando ninguno de ellos metodología de control QFT.

Tabla_3.6 Resultados publicados para el problema RCAM

Título/Metodología	Autores	Publicación
RCAM design challenge presentation document: the μ -Synthesis Approach	S. Bennani, G. Looye, and J.A. Mulder	GARTEUR/TP-088-11, 1997
RCAM design challenge presentation document: a survey of modal control approaches	Carsten Doll Jean-Francois Magni Yann Le Gorrec	GARTEUR/TP-088-12, 1997
RCAM design challenge presentation document: the Classical Control Approach	J.E. Gautrey (Cranfield University)	GARTEUR/TP-088-13, 1997
RCAM design challenge presentation document: The Lyapunov Approach	J. Daafouz, D. Arzelier, G.Garcia, J. Bernussou (LAAS-CNRS)	GARTEUR/TP-088-14,1997
RCAM design challenge presentation document: A Fuzzy Logic Control Approach	G. Schram (Delft University. The Netherlands)	GARTEUR/TP-088-15,1997
RCAM design challenge presentation document: Multi-Objective Parameter Synthesis (MOPS)	Hans-Dieter Joos (GARE)	GARTEUR/TP-088-16,1997
RCAM design challenge presentation document: An Eigenstructure Assignment approach	L.Faleiro, R.Pratt (Loughborough University)	GARTEUR/TP-088-18,1997
RCAM design challenge presentation document: A Mu-Synthesis Method	J. Schuring R.M.P. Goverde (The Netherlands)	GARTEUR/TP-088-19,1997
RCAM design challenge presentation document: The Model Based Predictive Control Approach	Mihai Huzmezan Jan Maciejowski (University Cambridge)	GARTEUR/TP-088-20,1997
RCAM design challenge presentation document: An H^∞ Approach.	Mark R. Tucker Daniel J. Walker (University of Leicester)	GARTEUR/TP-088-21,1997
RCAM design challenge presentation document: an Eigenstructure Assignment Approach	J.M.de la Cruz P.Ruiperez,J. Aranda (Madrid, Spain)	GARTEUR/TP-088-22,1997
RCAM design challenge presentation document: A Model Following Control Approach	H. Duda, G. Bouwer JM.Bauschat, KU.Hahn (GARE)	GARTEUR/TP-088-25,1997
Description and Analysis of the Research Civil Aircraft Model	G.Looye, S.Bennani (Delft University)	GARTEUR/TP-088-27,1997
Post-Design Stability Robustness Assessment of the RCAM Controller Design Entries	G.Looye, D.Moormann, A. Varga,S. Bennani	GARTEUR/TP-088-35,1997
Automated Generation of LFT-Based Parametric Uncertainty Descriptions from Generic Aircraft Models	A. Varga, G. Looye, D. Moormann,G. Grubel	GARTEUR/TP-088-36,1997

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_3.1: <i>Diagrama de bloques del modelo de aeronave civil controlado.....</i>	48
Figura_3.2: <i>Diagrama de bloques de la dinámica de la aeronave.....</i>	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_3.1 Entradas de control y de perturbaciones externas u_i	50
Tabla_3.2 Estados internos de la aeronave x_i	51
Tabla_3.3 Salidas con seguimiento e indicación y_i	52
Tabla_3.4 Referencias para seguimiento r_i	53
Tabla_3.5 Parámetros p_i	54
Tabla_3.6 Resultados publicados para el problema RCAM.....	64

CAPÍTULO 4

Traslado de Especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial

RESUMEN

Es habitual en ciertos tipos de técnicas de control robusto, tener que realizar un traslado de especificaciones del problema de control dado en el dominio del tiempo (t -domain) al dominio de la frecuencia (w -domain). Esto ocurre normalmente en técnicas, como QFT, donde el problema de control se trata en el dominio frecuencial, por tanto, no sólo las plantas del proceso y perturbaciones deben estar especificadas en este dominio, sino también los límites y restricciones que se imponen originalmente. La cuestión es importante si se tiene en cuenta que cualquier desviación en el traslado de parámetros de un dominio a otro va a influir decisivamente en el tratamiento del problema y, sobre todo, en el resultado finalmente expresado en términos temporales.

CONTENIDOS

4.1. Traslado de Especificaciones para Seguimiento

- 4.1.1. *Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Escalón Subamortiguado.*
- 4.1.2. *Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón subamortiguado.*
- 4.1.3. *Esquema de la Solución Propuesta: Técnica1*
- 4.1.4. *Ampliación de la Solución Propuesta: Técnica1_Ampliada*
- 4.1.5. *Ejemplo Aplicado de la Técnica1*
- 4.1.6. *Simplificación de la Solución Propuesta: Técnica1_Modificada*
- 4.1.7. *Ejemplo Aplicado de la Técnica1_Modificada*
- 4.1.8. *Esquema de la Solución Propuesta: Técnica2*
- 4.1.9. *Ejemplo Aplicado de la Técnica2_Modificada*
- 4.1.10. *Búsqueda de límite $w_{superior}$ asociado a variable controlada sobreamortiguada: "STEPTRAC.M"*
- 4.1.11. *Ejemplo Aplicado de la Técnica "Steptrac"*
- 4.1.12. *Búsqueda de $tr(\omega_n = 1, \rho)$ y $ts(\omega_n = 1, \rho)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes.*
- 4.1.13 *Comparativa de Resultados ofrecidos por las distintas Propuestas*

4.2. Traslado de Especificaciones para Sensibilidad y Tracking Desacoplado

- 4.2.1. *Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Impulso Subamortiguado.*
- 4.2.2. *Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón Subamortiguado.*
- 4.2.3. *Esquema de la Solución Propuesta al Caso1: Técnica EsensibQ.*
- 4.2.4. *Ejemplo Aplicado de la Técnica EsensibQ*
- 4.2.5. *Esquema de la Solución Propuesta al Caso2: Técnica Esensib.*
- 4.2.6. *Ejemplo Aplicado de la Técnica Esensib*
- 4.2.7. *Esquema de la Solución Propuesta al Caso 3: Técnica Etrac.*
- 4.2.8 *Búsqueda de $\rho(Mp, \omega_n = 1)$ y $ts(\rho, \omega_n, desv)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensibq)*

4.2.9 Búsqueda de $tr(\omega_n, \rho, mal)$ y $ts(\omega_n, \rho, mas)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensib)

4.2.10 Comparativa de Parámetros de las distintas Técnicas Propuestas

4.1. Traslado de Especificaciones para Seguimiento

Interesa máxima precisión a la hora de transferir especificaciones de un dominio a otro y, en particular, del tiempo a la frecuencia puesto que en multitud de problemas de control esta conversión influye en etapas posteriores, por lo que de no realizarse correctamente, se genera un error acumulativo desde el inicio del problema. Además, el paso de parámetros del dominio frecuencial al dominio temporal cuenta con funciones de aplicación directa, como las que se describen más adelante, pero al revés, el tratamiento de las funciones anteriores no es posible simplemente de forma inversa, por lo que deben aplicarse técnicas de aproximación.

Se presenta un procedimiento para traslado de especificaciones de seguimiento (tracking) del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros ω_n (frecuencia natural) y ρ (coeficiente de amortiguación), válido para sistemas con amortiguamiento subcrítico. Para ello, se aplica una técnica de Aproximaciones Sucesivas mediante interpolación inversa para la obtención de t_r (tiempos de alcance) y t_s (tiempos de asentamiento), como parte del procedimiento global del traslado. Concretamente, se usa el “*Método de Newton por Diferencias Ascendentes y Descendentes de 5º orden*”.

La Técnica (“time domain to w domain” o TD2WD) se presenta con dos variantes de diferente precisión que, a su vez, se comparan con los resultados obtenidos por otra Técnica2 (TD2WD2) que utiliza hipótesis típicas para simplificación del problema, pero con su consiguiente reducción de eficacia.

Las Técnicas propuestas van a funcionar con entradas escalón, aunque ofrecen dos formatos asociados al tipo de respuesta transitoria que se supone genera el sistema del problema; esto es, respuesta escalón con especificaciones de amortiguamiento subcrítico de 2º orden o respuesta impulso subamortiguado.

4.1.1. Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Escalón Subamortiguado.

Dado un sistema como el mostrado en la *figura4.2*, de parámetros de respuesta transitoria con amortiguamiento subcrítico:

- Tiempo de retardo `td`:..... $y(td)=0.5$
- Tiempo de alcance `tr`:..... $tr=t(0.9y_{ss})-t(0.1y_{ss})$, con `y_{ss` valor estacionario de la respuesta.}
- Tiempo de pico `tp`: $y(tp)=(M_p+y_{ss})/y_{ss}$
- Sobreelongación `Mp`: expresada en porcentaje de y_{ss}
- Tiempo de establecimiento `ts`: $y(ts)=y_{ss} \pm desv_{max}$
- Desviación máxima `desv_{max` : $desv_{max}=0.01y_{ss}$ o $0.02y_{ss}$ o $0.05y_{ss}$}

Estos parámetros se suelen expresar como se indica a continuación.

4.1.2. Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón subamortiguado.

De manera tradicional, se han definido formalmente, como se cita en [Ogata,93] , esto es:

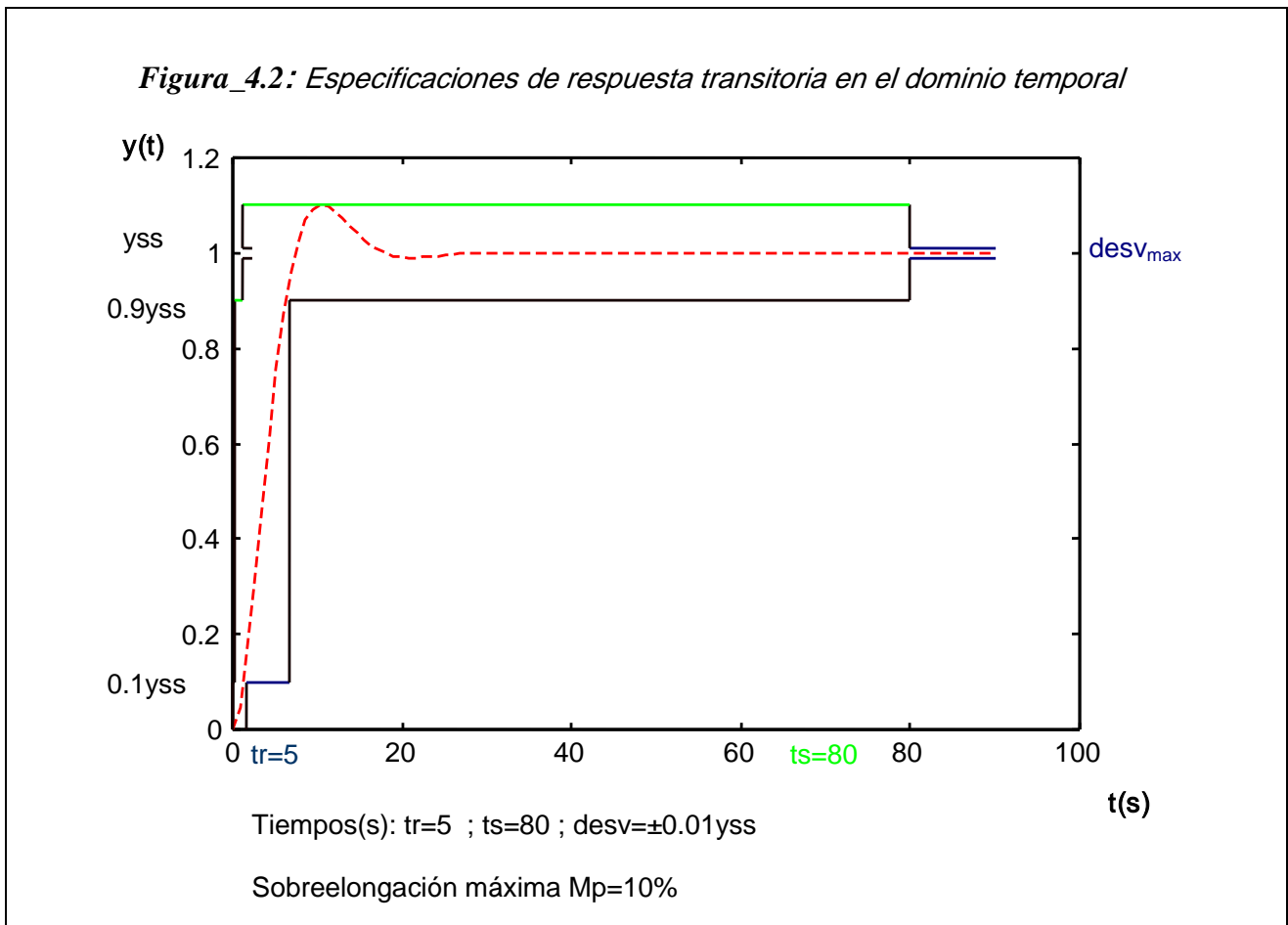
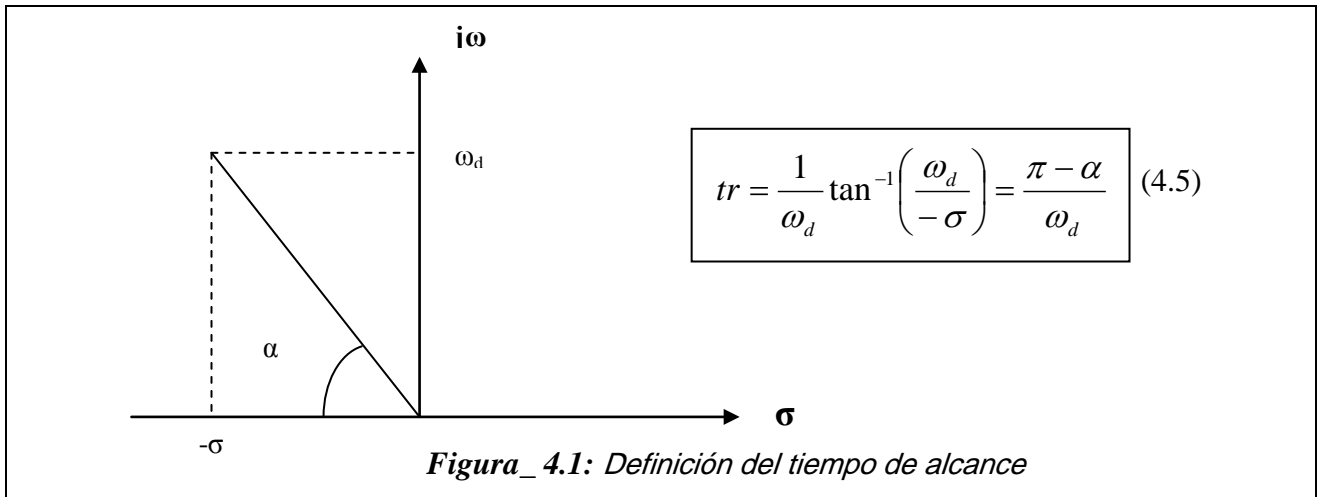
✚ Tiempo de alcance `tr`: supuesto $y(tr)=y_{ss}$, `ρ` coeficiente de amortiguamiento y `ω_{n` frecuencia natural, se obtiene,}

$$y(tr) = 1 = 1 - e^{-\rho\omega_n tr} \left(\cos \omega_d tr + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{sen} \omega_d tr \right) \tag{4.1}$$

$$\text{con } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\rho^2} \text{ , frecuencia forzada de oscilación} \tag{4.2}$$

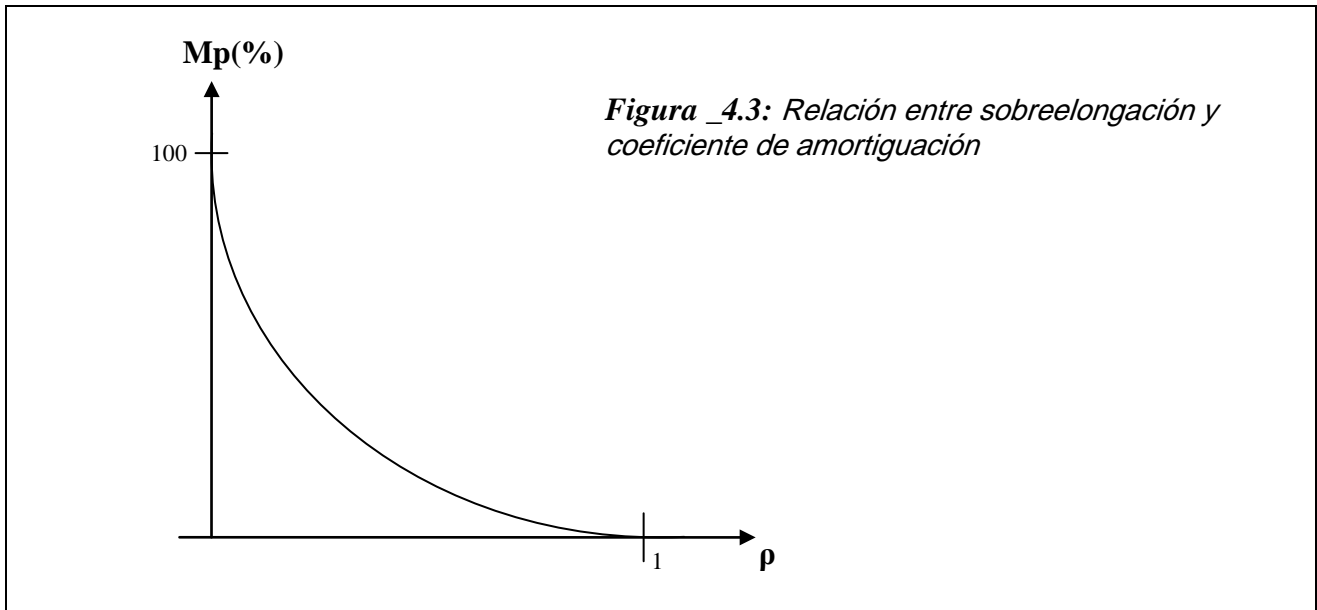
$$\text{Como } e^{-\rho\omega_n tr} \neq 0 \Rightarrow \left(\cos \omega_d tr + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{sen} \omega_d tr \right) = 0 \Rightarrow \tan \omega_d tr = \frac{-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} = -\frac{\omega_d}{\sigma} \tag{4.3}$$

$$\text{con } \sigma = \rho\omega_n \tag{4.4}$$



🚦 Sobreelongación `Mp`: se produce en el tiempo de pico `tp` dado por, $tp = \frac{\pi}{\omega_d}$ (4.6)

y viene definido porcentualmente, respecto al valor estacionario como, $Mp = 100e^{\frac{-\rho\pi}{\sqrt{1-\rho^2}}}$ (4.7)



El error oscilatorio subamortiguado, dado en los instantes de tiempo

$$t = \frac{n\pi}{\omega_d}, (n = 0,1,2,..) \quad (4.8) \text{ y definido por, } e(t) = x(t) - y(t), \text{ con } x(t) \text{ entrada al sistema} \quad (4.9)$$

Con $x(t)=y_{ss}$, el error máximo de cada pico será,

$$e_{\max}(n) = (-1)^n e^{\frac{-\rho\pi}{\sqrt{1-\rho^2}}}, (n = 1,2,3,..) \quad (4.10)$$

siendo el error máximo, dado en $n=1$, $e_{\max} = Mp = -e^{\frac{-\rho\pi}{\sqrt{1-\rho^2}}}$ (4.11)

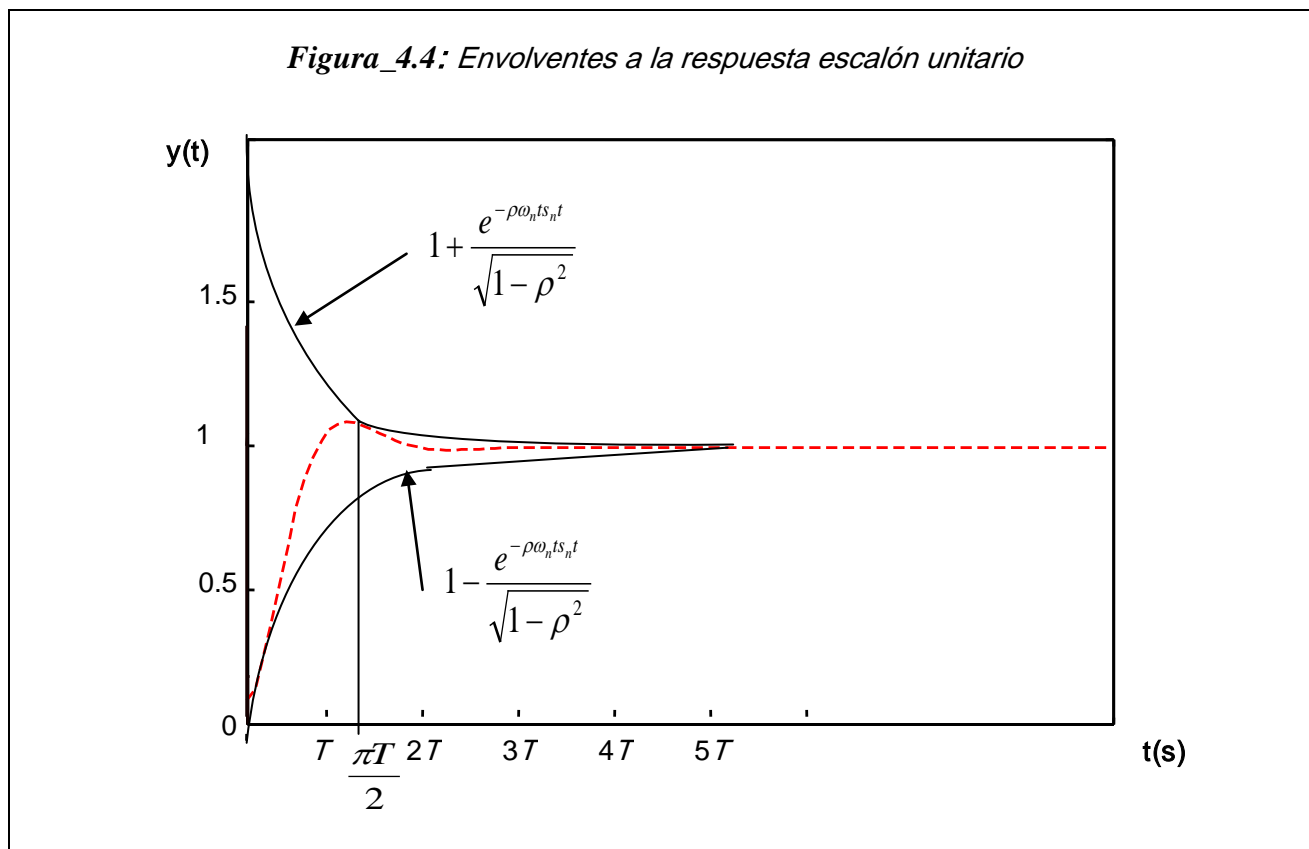
✚ Tiempo de establecimiento `ts`: se alcanza cuando se considera despreciable el error oscilatorio subamortiguado, respecto del valor estacionario de la respuesta y_{ss} . Está en función de la desviación máxima permitida, referida a y_{ss} , nombrada como $desv_{\max}$, típicamente de $\pm 0.01 y_{ss}$, $\pm 0.02 y_{ss}$ o $\pm 0.05 y_{ss}$.

Se obtiene considerando $y(ts)-1 = desv_{\max}$, esto es ,

$$desv_{\max} = \frac{e^{-\rho\omega_n ts_n}}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} ts_n + a \cos \rho\right) \quad (4.12)$$

Donde, si $y\left(ts_n + \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 < |desv_{\max}| \Rightarrow ts = ts_n$ (4.13)

Lo habitual es que, conocidos w_n y ρ , se resuelva ts por (a) aproximaciones sucesivas, o bien, (b) utilizando ábacos $ts=f(w_n, \rho)$. La solución obtenida viene dada por un par de curvas envolventes, como las que se definen en la *Figura 4.4*.



El tiempo de convergencia al valor estacionario se suele expresar en términos de la constante de tiempo del sistema,

$$T = \frac{1}{\rho\omega_n} \tag{4.14}$$

Normalmente, se simplifica el problema de la determinación del tiempo de asentamiento utilizando:

$$\left\{ \begin{array}{l} ts = 4T, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.02 y_{ss} \\ ts = 3T, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.05 y_{ss} \end{array} \right. \tag{4.15}$$

$$\tag{4.16}$$

De esta manera, fijado el sobreimpulso máximo $M\rho$, el tiempo de establecimiento ts varía en función del valor de la frecuencia natural ω_n . Por tanto, la duración del periodo transitorio puede cambiarse, para un $M\rho$ dado, ajustando ω_n .

El Análisis presentado hasta el momento es el que se utiliza para transferir parámetros de un sistema de 2º orden del dominio frecuencial al dominio temporal. El problema inverso se puede resolver de manera eficiente con el método propuesto a continuación.

4.1.3. Esquema de la Solución Propuesta: Técnica1

El método para traslado de “especificaciones del dominio temporal (*TD*, a partir de ahora)” a “especificaciones en el dominio frecuencial (*WD*, a partir de ahora)” que aquí se presenta, viene descrito por la relación siguiente,

$$\boxed{TD(Mp, tr, ts, desv) \rightarrow WD(Num, Den)} \quad (4.17)$$

Siendo los parámetros *TD* valores máximos, tal y como se han descrito anteriormente, y los parámetros *WD* la función de transferencia (FT) del límite inferior, descrita en forma de componentes, tal que,

$$T_{Lo}(j\omega) = \frac{Num}{Den}(j\omega) \quad (4.18)$$

La secuencia de etapas de la técnica1 para traslado de especificaciones es la que sigue,

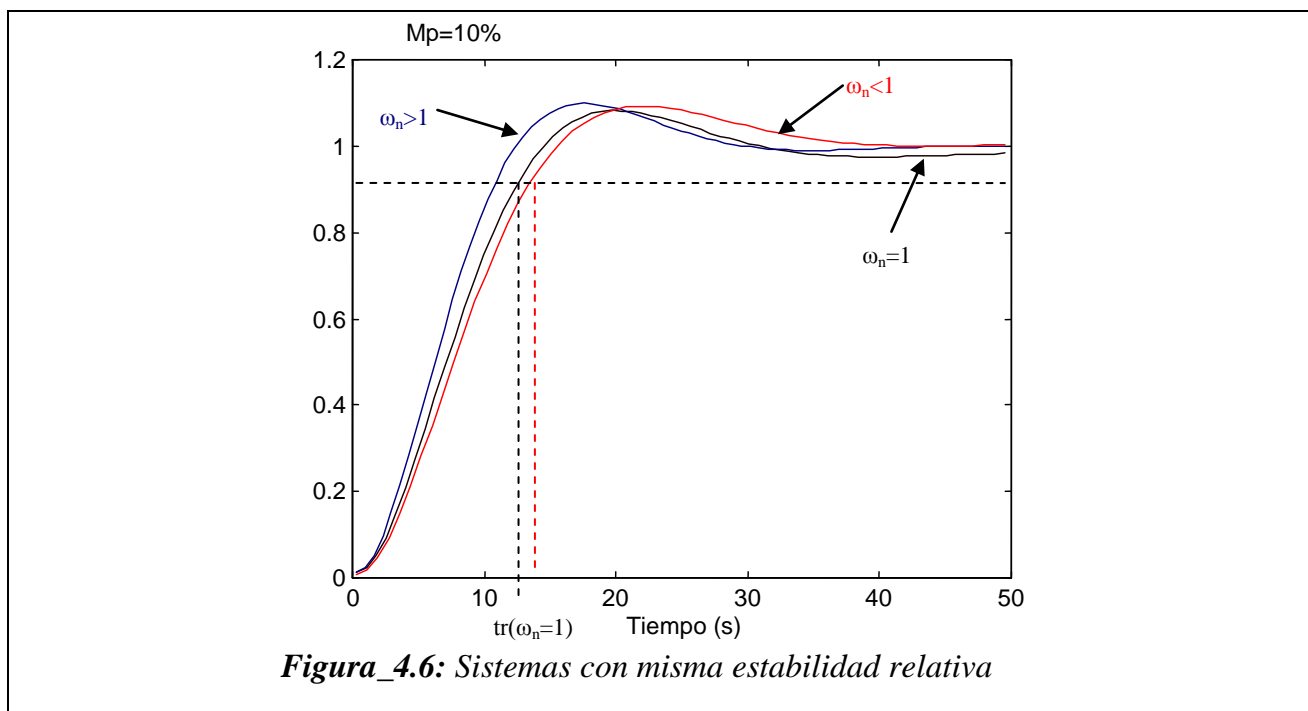
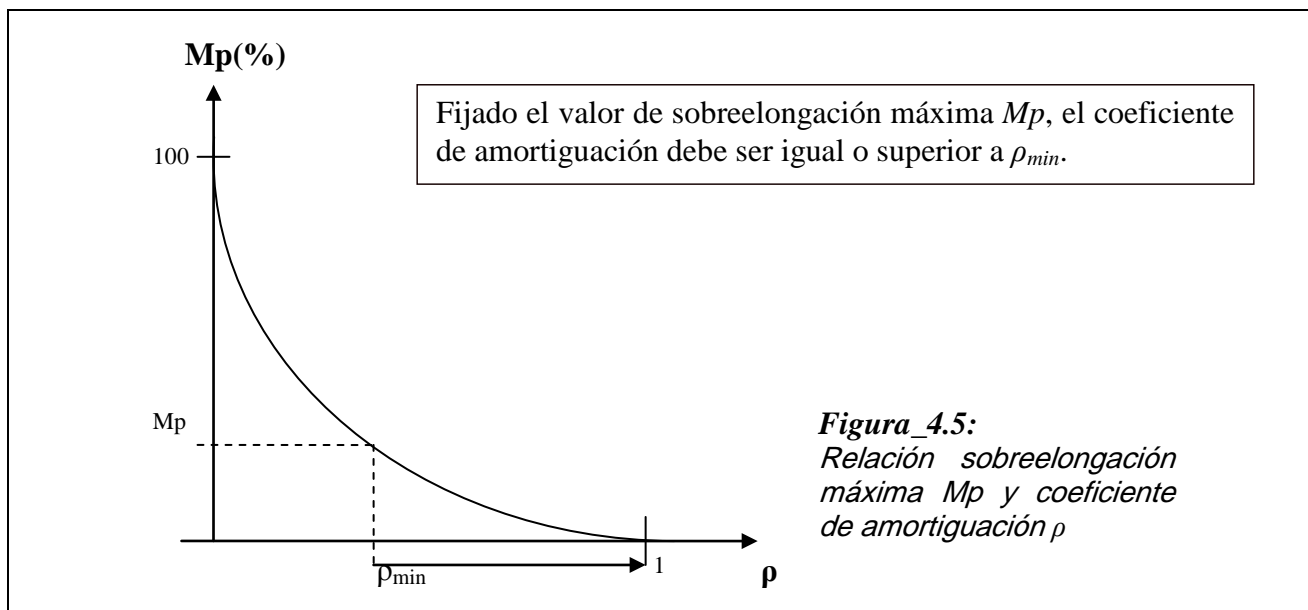
1)- Determinación del coeficiente de amortiguamiento mínimo ρ_{\min} :

Viene dado por la relación,

$$\rho_{\min} = \left[\frac{\left(\ln Mp / \pi \right)^2}{1 + \left(\ln Mp / \pi \right)^2} \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

2)- Determinar la relación $\omega_n = f(\rho, ti)$, con $ti=(tr/ts)$

Sistemas de 2º orden con el mismo ρ , pero diferente ω_n , se caracterizan por la misma sobreelongación, por lo que tienen la misma estabilidad relativa (*Figura 4.6*).



La constante de tiempo de un sistema de 2º orden dada por,
$$T = \frac{1}{\rho\omega_n} k \quad (4.20)$$

se puede expresar para tr y ts , respectivamente, como:

$$tr(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n} k_r \quad (4.21) \quad \text{y} \quad ts(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n} k_s \quad (4.22)$$

Además como,
$$tr(\omega_n = 1) = \frac{1}{\rho} k_r \quad (4.23) \quad \text{y} \quad ts(\omega_n = 1) = \frac{1}{\rho} k_s \quad (4.24)$$

$$\text{Se tiene que, } \frac{tr(\omega_n = 1)}{tr(\omega_n)} = \omega_n \quad (4.25) \quad \text{y} \quad \frac{ts(\omega_n = 1)}{ts(\omega_n)} = \omega_n \quad (4.26)$$

2a)- Aplicando las ecuaciones anteriores para tr , se consigue,

$$\frac{tr(\omega_n = 1, \rho_{\min})}{tr(\omega_n, \rho_{\min})} = \omega_n(tr, \rho_{\min}) \quad (4.27)$$

Dado $tr(\omega_n, \rho_{\min})$ y calculado $tr(\omega_n = 1, \rho_{\min})$, a partir de alguna técnica de aproximación sucesiva, como la propuesta más adelante¹, se obtiene $\omega_n(tr, \rho_{\min})$.

2b)- Igualmente, aplicando las ecuaciones anteriores de 2) para ts , se consigue,

$$\frac{ts(\omega_n = 1, \rho_{\min})}{ts(\omega_n, \rho_{\min})} = \omega_n(ts, \rho_{\min}) \quad (4.28)$$

Dado $ts(\omega_n, \rho_{\min})$ y calculado $ts(\omega_n = 1, \rho_{\min})$, por aproximaciones sucesivas, se obtiene $\omega_n(ts, \rho_{\min})$.

3)- Elegir $\omega_n(\rho_{\min})$ el valor mayor de entre $\omega_n(tr, \rho_{\min})$ y $\omega_n(ts, \rho_{\min})$, como condición más restrictiva de la imposición temporal conjunta (tr, ts) .

4)- Determinar $\omega_n(\rho, tr, ts)$, con $1 > \rho > \rho_{\min}$, que a partir de ahora nombraremos como pares (ω_n, ρ) o bien, doble vector

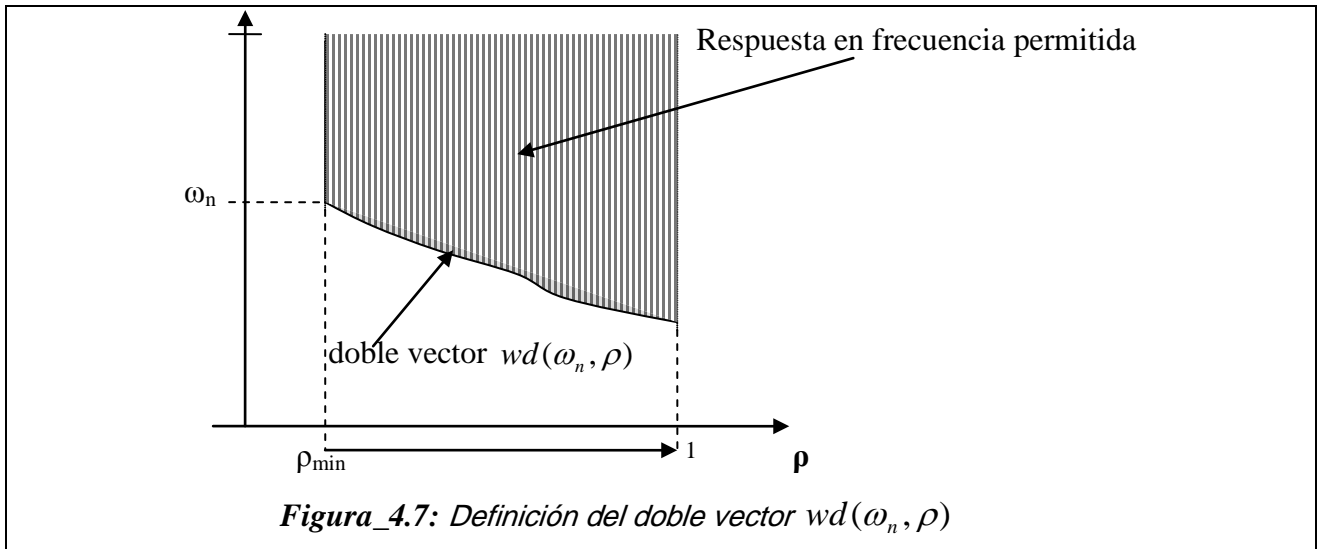
$$wd(\omega_n, \rho) \quad (4.29)$$

Para ello, hay que aplicar las etapas 2a), 2b) y 3) desde ρ_{\min} a 1, ambos valores excluidos.

El intervalo de paso entre un valor de ρ y el siguiente, va a determinar la precisión del resultado final.

Un valor práctico correcto para el intervalo de paso es de 0.05.

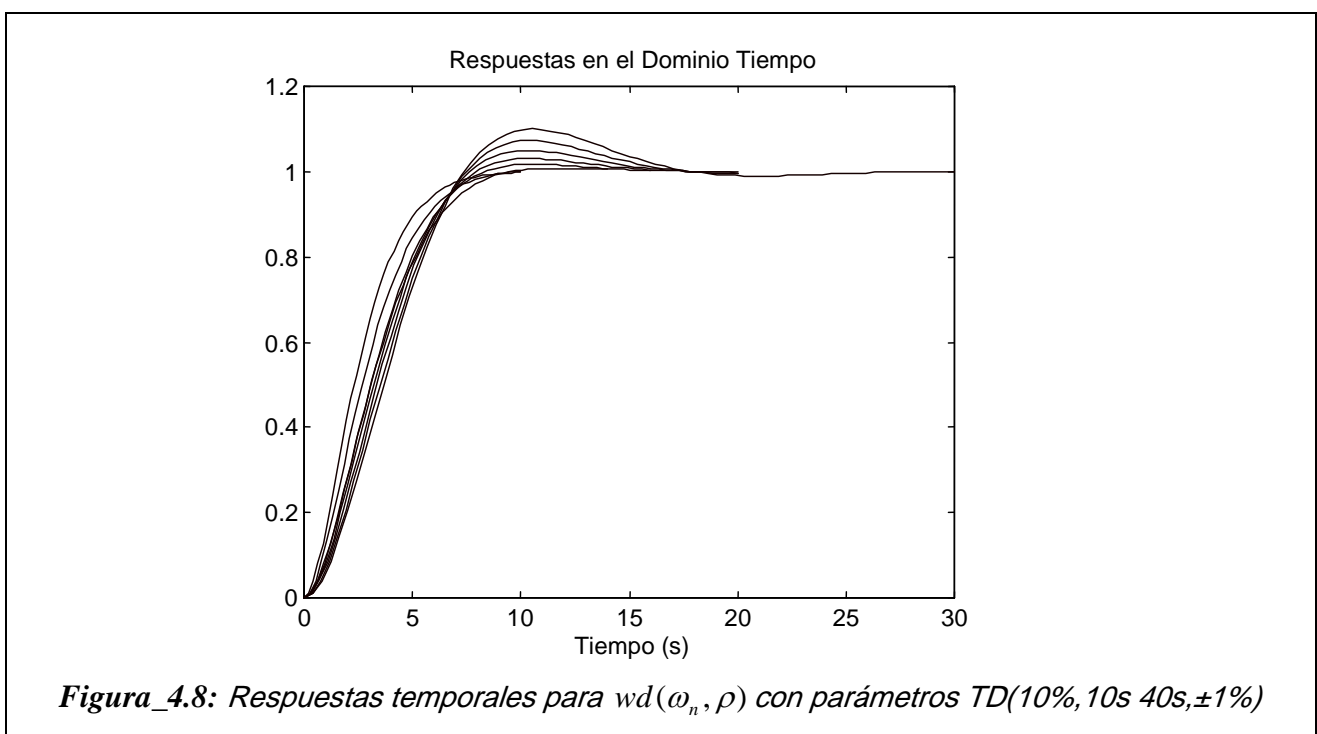
¹ Apartado 4.1.11.



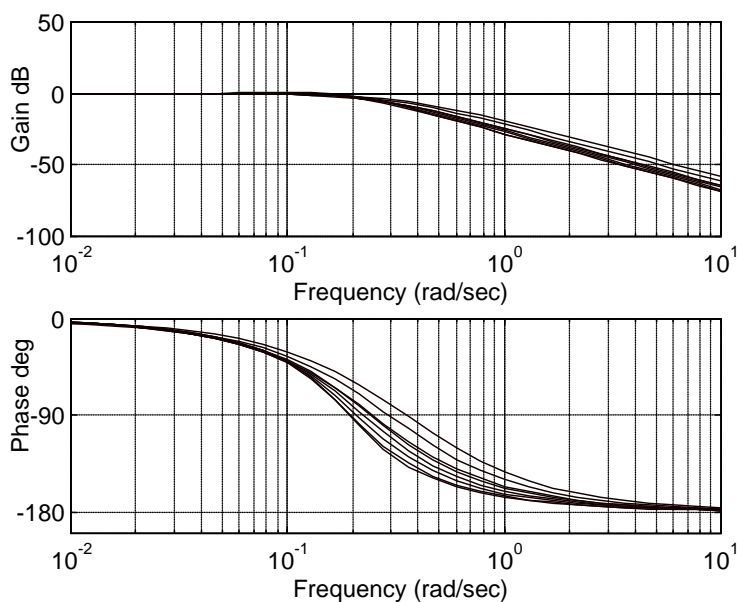
5)- Definición de las curvas de 2º orden $T(j\omega)$, tal que,
$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.30)$$

en donde sustituyendo el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$, se obtiene el conjunto de curvas en el diagrama de Bode para las especificaciones dadas.

Por ejemplo, dado un sistema con parámetros $TD(10\%, 10s, 40s, \pm 1\%)$, las posibles respuestas temporales, definidas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la *Figura 4.8* a continuación.

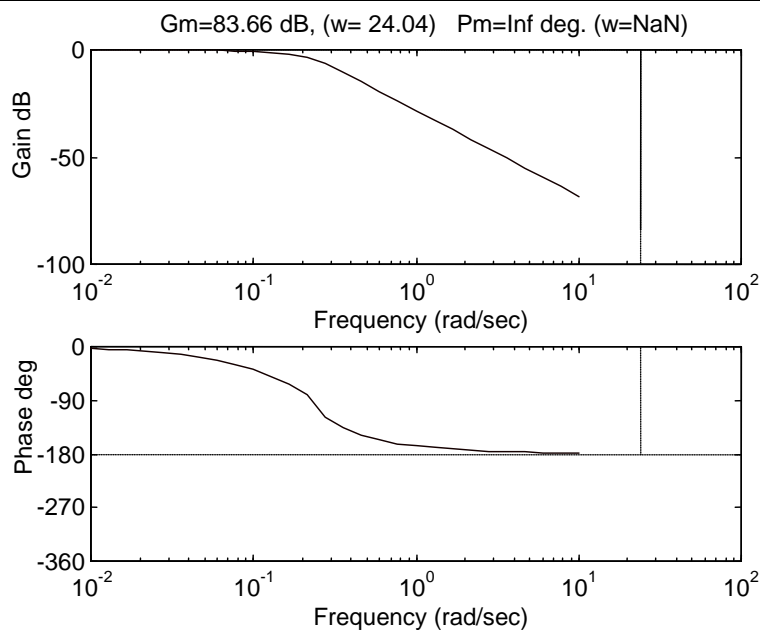


Las posibles respuestas en frecuencia, para el ejemplo propuesto anterior, dadas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la *Figura 4.9*.



Figura_4.9: Respuesta frecuencial para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s\ 40s, \pm 1\%)$

6)- Obtención del límite inferior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$. Sobre el diagrama de Bode se busca la intersección inferior (mínimos de magnitud) de las diferentes curvas definidas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$, obteniendo para el ejemplo anterior, las curvas de la *Figura_4.10*.

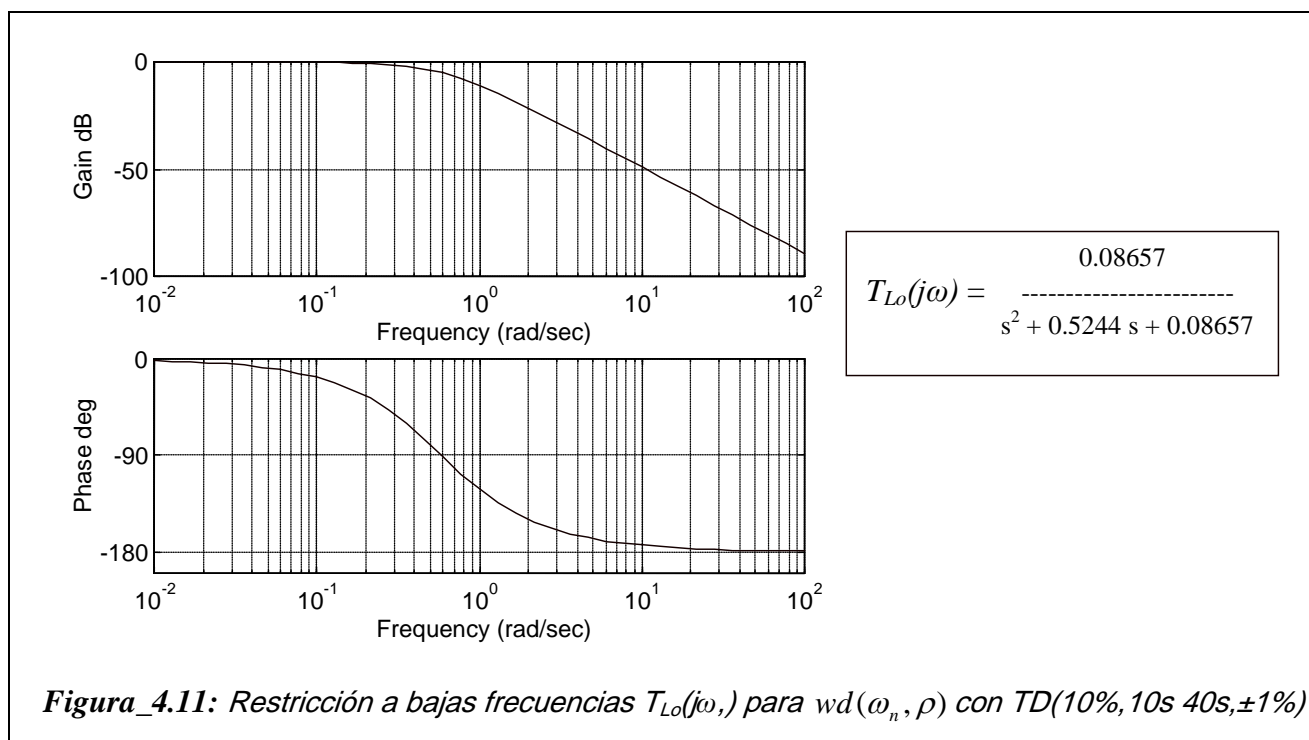


Figura_4.10: Límite inferior en el WD $T_{Lo}(j\omega,)$ para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s\ 40s, \pm 1\%)$

7)- Como la curva límite inferior en frecuencia está compuesta por la intersección de varias curvas $T(j\omega)$, la forma de describir su FT es aproximarla según alguno de los siguientes criterios:

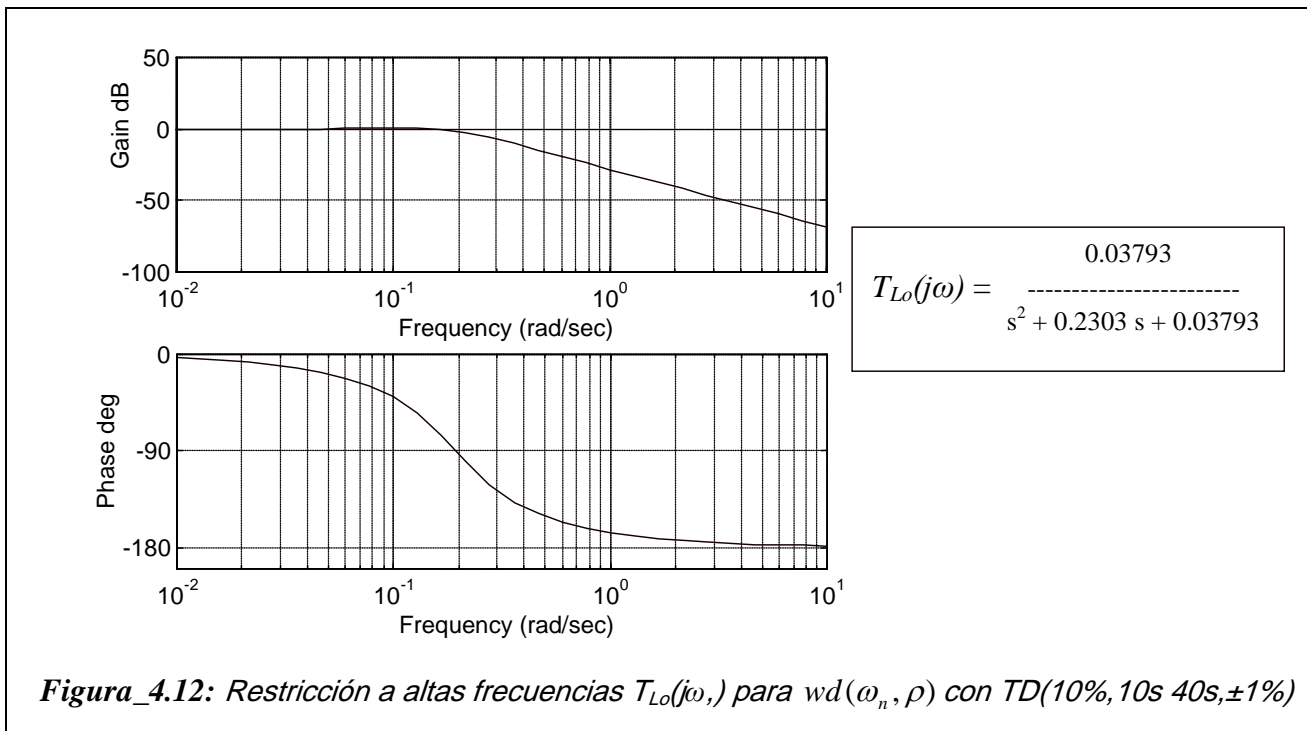
a) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite inferior del WD con precisión para frecuencias bajas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Lo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud mínima para la frecuencia más baja del $BW_{T(j\omega)}$. A esta aproximación la llamaremos *restricción a bajas frecuencias*.

Para $TD(10\%, 10s, 40s, \pm 1\%)$, se obtiene las curvas y FT de la *Figura 4.11*.

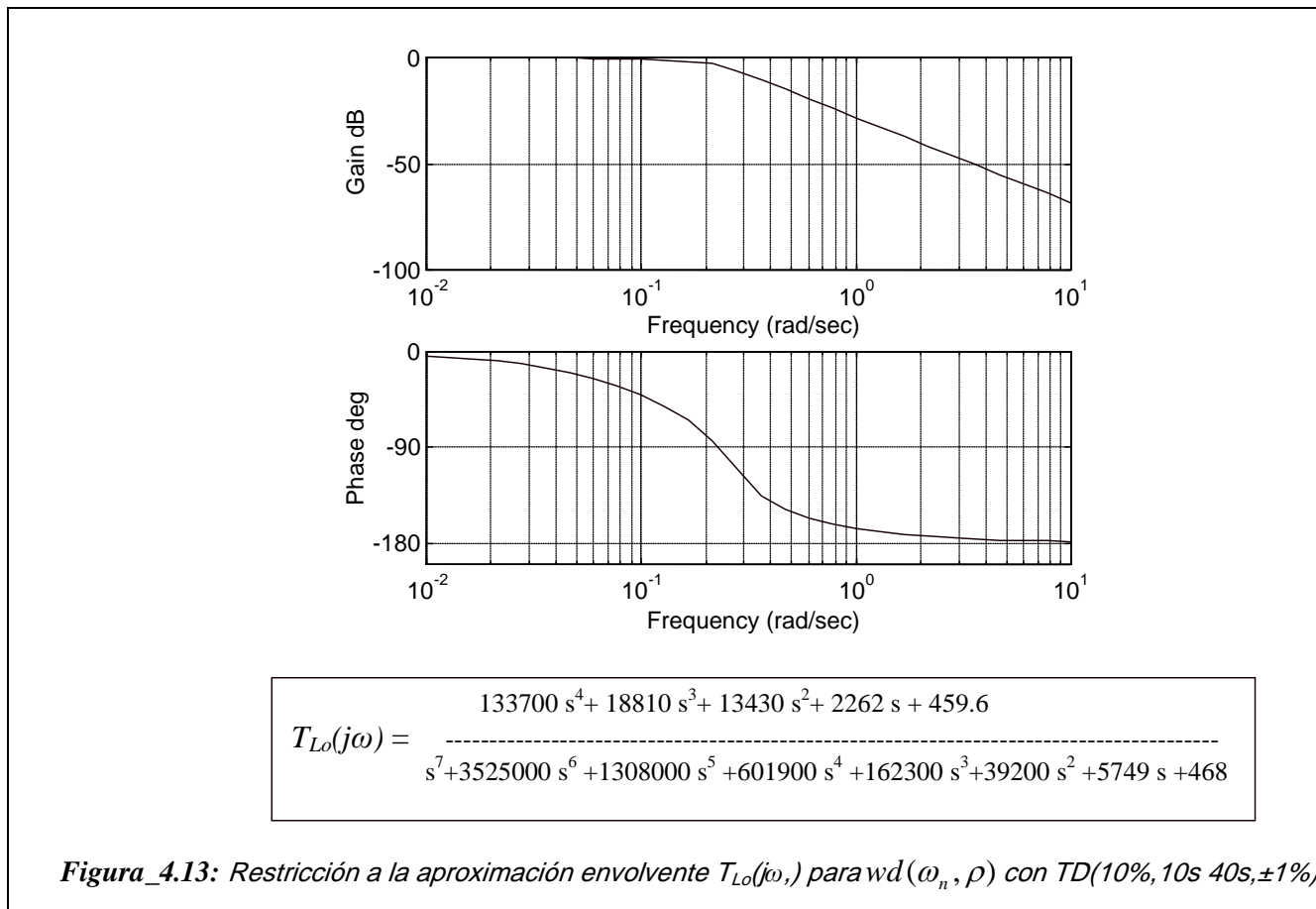


b) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite inferior del WD con precisión para frecuencias altas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Lo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud mínima para la frecuencia más alta del $BW_{T(j\omega)}$. A esta aproximación la llamaremos *restricción a altas frecuencias*.

Para $TD(10\%, 10s, 40s, \pm 1\%)$, se obtiene las curvas y FT de la *Figura 4.12*.



c) Utilizar Racionalización de las respuesta en frecuencia dadas en 6) para conseguir una aproximación a la envolvente del límite inferior $T_{Lo}(j\omega)$. A esta aproximación la llamaremos *restricción a la aproximación envolvente*, cuyo ejemplo anterior se muestra en la *Figura 4.13*.



El problema de este criterio es que genera FTs de orden superior, poco prácticos en realidad, por lo que deben simplificarse, perdiendo parte de la precisión ganada a lo largo de todo el $BW_{T(jw)}$.

8)- Obtención de los parámetros TD finales, a partir de los WD conseguidos, que se ajustan a los TD originales. Esto es,

$$TD_{original}(Mp_max, tr_max, ts_max, desv) \rightarrow WD_{inferior}(Num, Den) \rightarrow TD_{final}(Mp_sup, tr_sup, ts_sup) \quad (4.31)$$

Para el ejemplo propuesto hasta el momento, $TD_{original}(10\%, 10s, 40s, \pm 1\%)$, se obtiene:

a) Aplicando la restricción a bajas frecuencias dada en 7)a),

$$TD_{final}(0.209\%, 10s, 16.08s)$$

b) Aplicando la restricción dada a altas frecuencias en 7)b),

$$TD_{final}(10\%, 9.485s, 40s)$$

c) Aplicando la restricción dada a la aproximación envolvente en 7)c),

$$TD_{final}(-, -, -)$$

4.1.4. Ampliación de la Solución Propuesta: Técnica1 Ampliada

El método para traslado de “especificaciones del TD ” a “especificaciones en el WD ” ($TD2WD$) que aquí se presenta, viene descrito por la relación paramétrica siguiente,

$$TD(Mp, tr, ts, desv, \omega_i) \rightarrow WD(Num_min, Den_min, Num_max, Den_max) \quad (4.32)$$

Siendo los parámetros TD valores máximos, con los que obtenemos los parámetros WD que definen la FT del límite inferior $T_{Lo}(j\omega)$ y la FT del límite superior $T_{Hi}(j\omega)$, dados por,

$$T_{Lo}(j\omega) = \frac{Num_min}{Den_min}(j\omega) \quad (4.33), \quad T_{Hi}(j\omega) = \frac{Num_max}{Den_max}(j\omega) \quad (4.34)$$

El parámetro ω_i describe el número de veces que la frecuencia natural del límite superior $T_{Hi}(j\omega)$ será mayor que la ω_n , calculada para el límite inferior.

De esta manera, la secuencia de etapas de la “técnica1 ampliada” para traslado de especificaciones es la que sigue,

1)- Determinar $\omega_n(\rho, tr, ts)$, con $1 > \rho > \rho_{min}$, esto es, el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$, utilizando el procedimiento anteriormente descrito en el apartado 4.1.3.

2)- Definición de las curvas de 2º orden $T(j\omega)$, tal que

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.30), \text{ y sustituyendo } wd(\omega_n, \rho), \text{ el conjunto de curvas}$$

en el diagrama de Bode para las especificaciones dadas.

3)- Definición de las curvas de 2º orden $T'(j\omega)$, tal que

$$T'(j\omega) = \frac{\omega_{ni}^2}{s^2 + 2\rho\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2}, \text{ con } \omega_{ni} = i\omega_n \text{ y } i=1,2, \dots, \omega_i \quad (4.35)$$

De este modo, sustituyendo $wd(\omega_{ni}, \rho)$, se obtienen ω_i conjuntos de curvas en el diagrama de Bode.

4)- Obtención de los límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$.

Sobre el diagrama de Bode se busca, por un lado, la intersección inferior (mínimos de

magnitud) y, por otro lado, la intersección superior (máximos de magnitud) de las diferentes curvas definidas por los conjuntos de vectores,

$$wd(\omega_{ni}, \rho) \quad (4.36)$$

5)- Como los límites inferior y superior en frecuencia están compuestos por la intersección de varias curvas $T'(j\omega)$, la forma de describir ambas FTs es aproximarlas según alguno de los criterios ya expuestos:

- a) Considerando *restricción a bajas frecuencias*.
- b) Considerando *restricción a altas frecuencias*.
- c) Considerando *restricción a la aproximación envolvente*.

6)- Obtención de los parámetros *TD finales*, a partir de los *WD* conseguidos, que se ajustan a los *TD originales*. Esto es,

$$TD_{original}(Mp_max, tr_max, ts_max, desv, \omega_i) \rightarrow WD(Num_min, Den_min, Num_max, Den_max) \rightarrow TD_{final}(Mp_sup, tr_sup, ts_sup, Mp_inf, tr_inf, ts_inf) \quad (4.37)$$

4.1.5. Ejemplo Aplicado de la Técnica1 Ampliada ²

Supuesto $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$, se obtiene:

- Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$, a partir de $wd(\omega_n, \rho)$, esto es:

$$\frac{0.1137}{s^2 + 0.3486s + 0.1137}, \frac{0.1284}{s^2 + 0.4063s + 0.1284}, \frac{0.1459}{s^2 + 0.4713s + 0.1459}, \frac{0.1668}{s^2 + 0.5448s + 0.1668}, \frac{0.1918}{s^2 + 0.6279s + 0.1918}$$

$$\frac{0.2211}{s^2 + 0.7212s + 0.2211}, \frac{0.21}{s^2 + 0.7487s + 0.21}, \frac{0.3013}{s^2 + 0.9518s + 0.3013}, \frac{0.3923}{s^2 + 1.149s + 0.3923}, \frac{0.5438}{s^2 + 1.426s + 0.5438} \quad (4.38)$$

² Utilizando la función TD2WD1_ desarrollada en Matlab4.2

- Conjuntos de Respuestas de 2º orden $T'(j\omega)$. *Figura 4.14.*
- Conjuntos de Respuestas del TD, equivalentes a los sistemas $T'(j\omega)$. *Figura 4.15.*
- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$. *Figura 4.16.*
- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$, considerando *restricción a bajas frecuencias.* *Figura 4.17.*
- Obtención de las curvas y parámetros *TD finales*, ajustados a los *TD originales.* *Figura 4.18.*

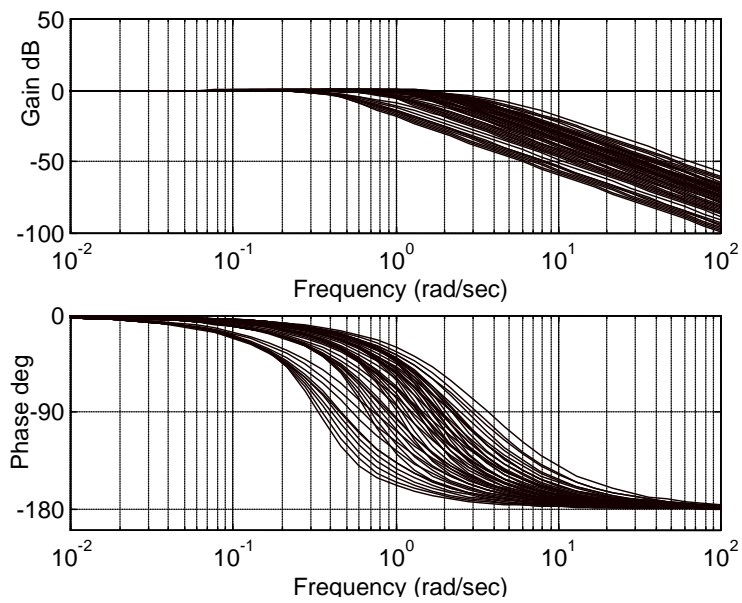
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Límite w-inferior definido como la curva } T(j\omega) \text{ inicial más restrictiva,} \\ \frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.3923}{s^2 + 1.149s + 0.3923} \end{array} \right. \quad (4.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Límite w-superior definido como la curva } T(j\omega) * 5\omega_n \text{ más restrictiva,} \\ \frac{Num_max}{Den_max} = \frac{2.843}{s^2 + 1.743s + 2.843} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

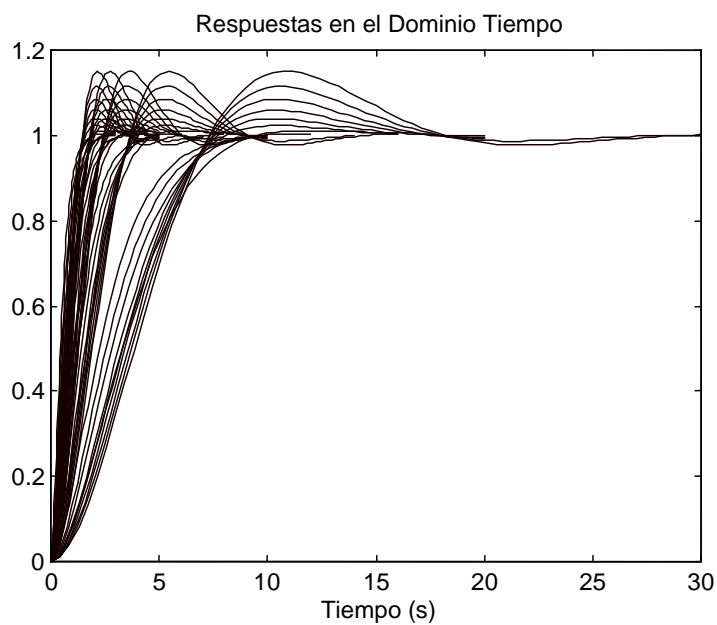
- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$, considerando *restricción a altas frecuencias.* *Figura 4.19.*
- Curvas y parámetros *TD finales*, ajustados a los *TD originales.* *Figura 4.20.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Límite w-inferior definido como la curva } T(j\omega) \text{ inicial más restrictiva,} \\ \frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.1137}{s^2 + 0.3486s + 0.1137} \end{array} \right. \quad (4.41)$$

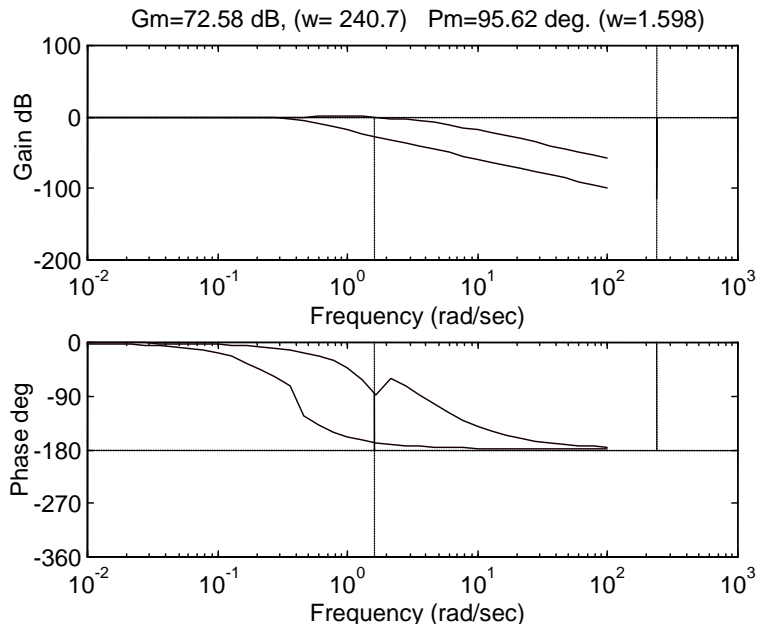
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Límite w-superior definido como la curva } T(j\omega) * 5 \omega_n \text{ más restrictiva,} \\ \frac{Num_max}{Den_max} = \frac{13.59}{s^2 + 7.13s + 13.59} \end{array} \right. \quad (4.42)$$



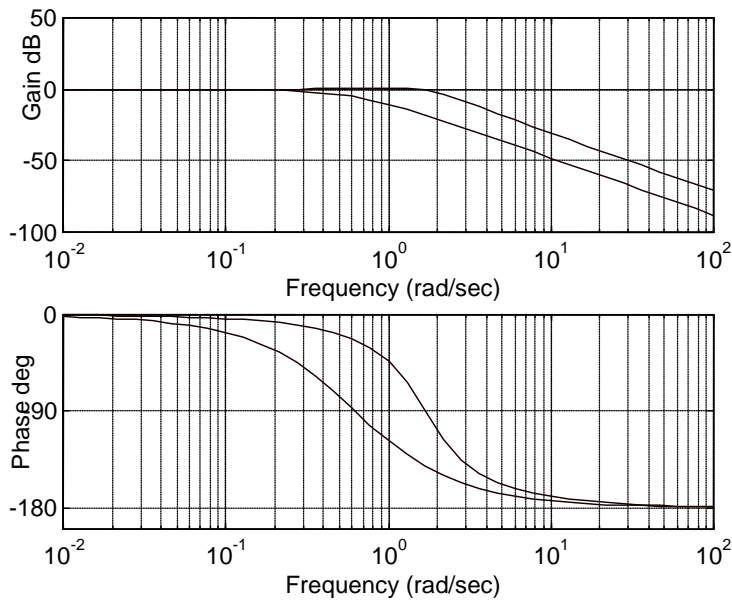
Figura_4.14: Respuestas de 2^o orden $T'(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$



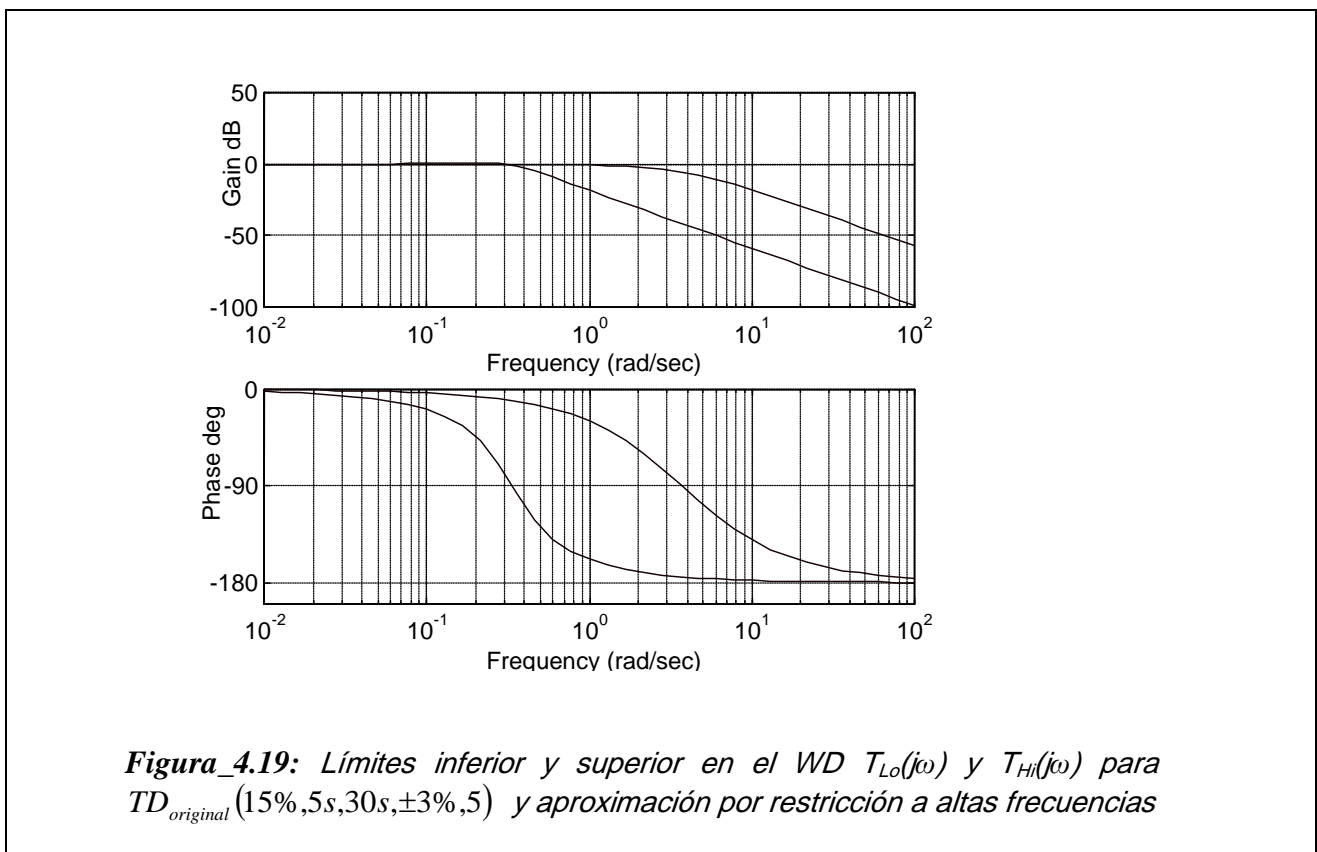
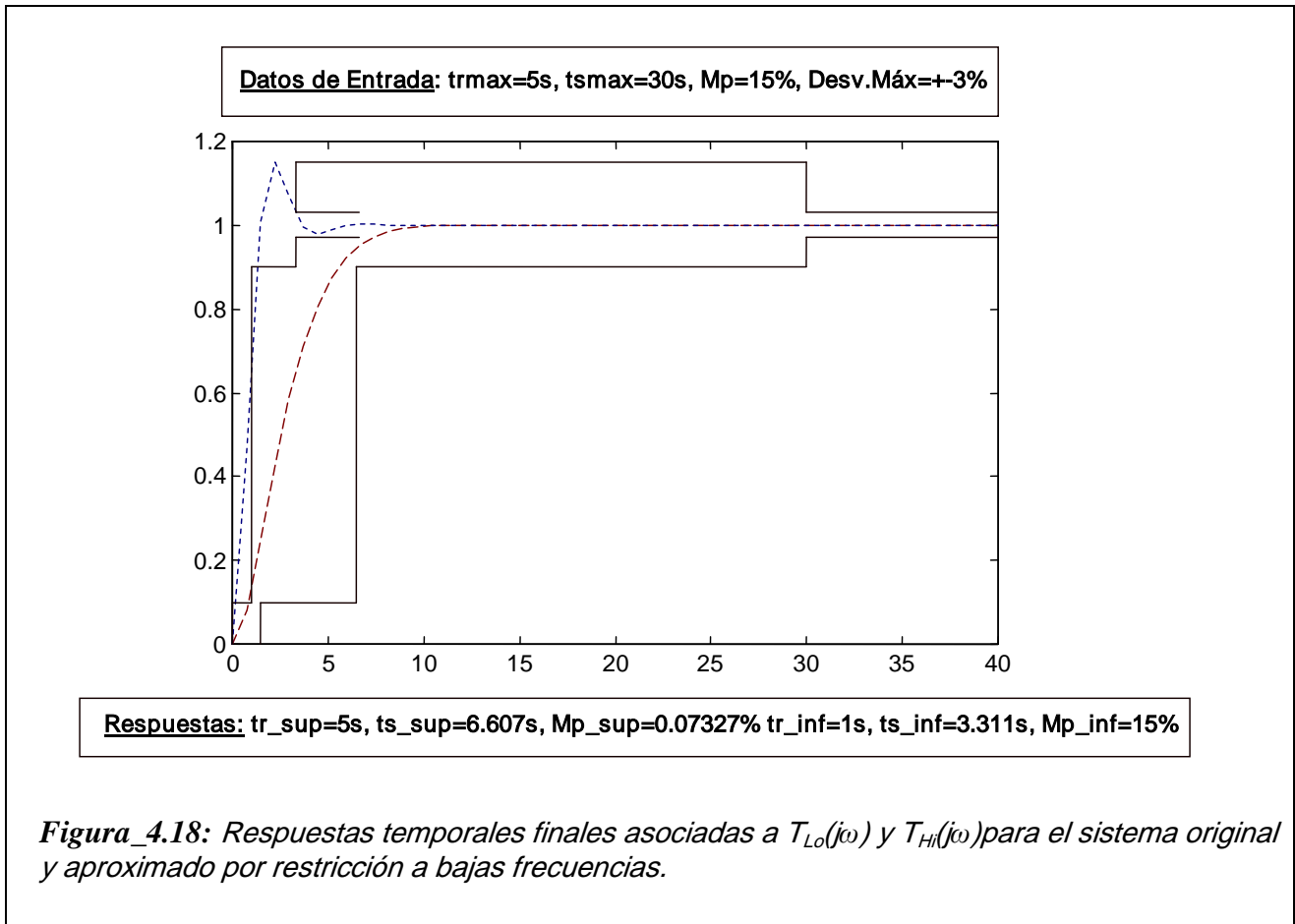
Figura_4.15: Conjunto de Respuestas temporales para el sistema $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$

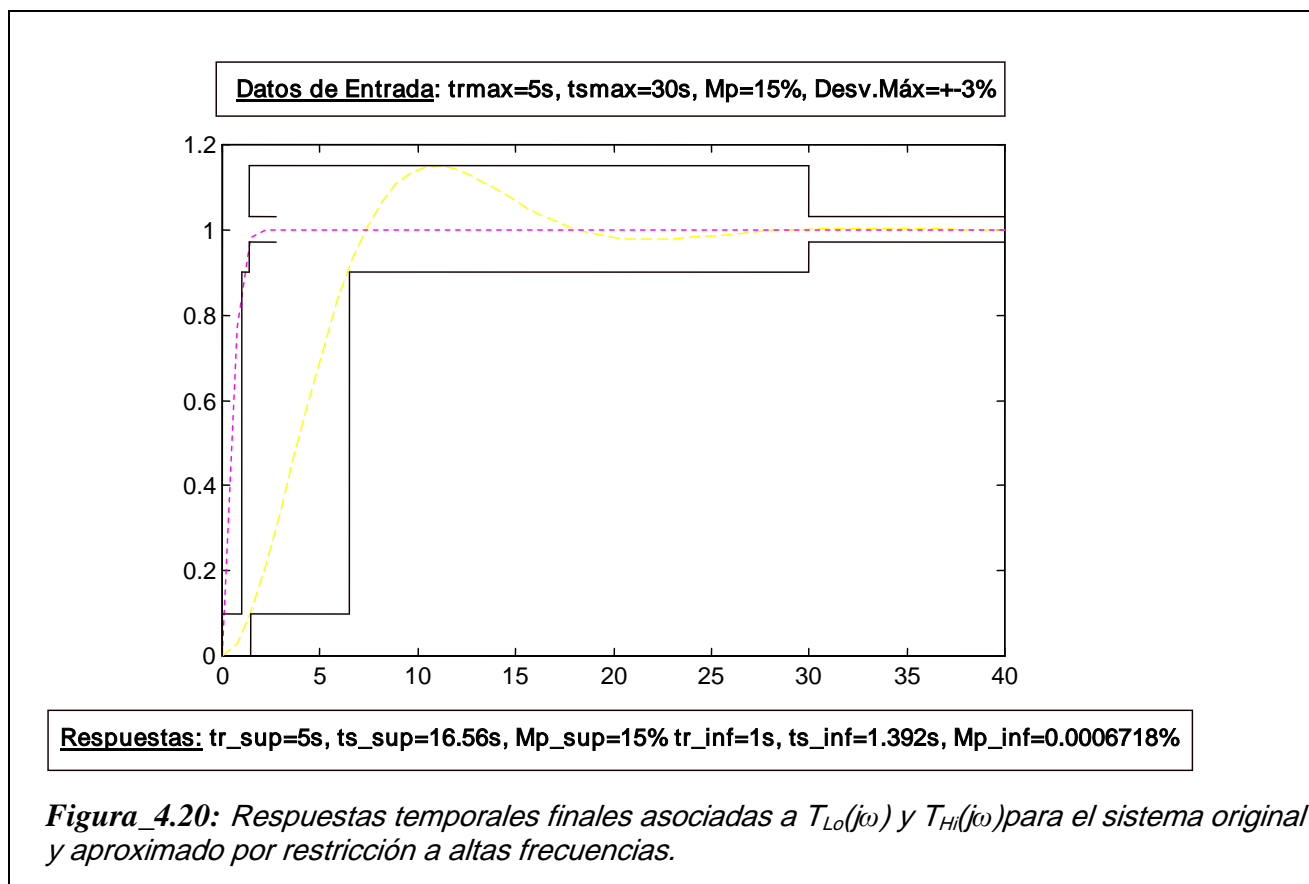


Figura_4.16: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}$ (15%,5s,30s,±3%,5)



Figura_4.17: Límites inferior y superior en el WD, $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}$ (15%,5s,30s,±3%,5) y aproximación por restricción a bajas frecuencias





4.1.6. Simplificación de la Solución Propuesta: Técnica1_Modificada

El método para traslado de “especificaciones del TD” a “especificaciones en el WD” que se ha presentado como Técnica1 funciona variando los 3 parámetros $TD(Mp, tr, ts)$ originales, hasta obtener valores adecuados para todo el rango de frecuencias propuesto.

La Técnica1_Modificada consiste en utilizar los parámetros $TD_{original}$, y sin variar Mp obtener los parámetros TD_{final} , esto es,

$$TD_{final}(Mp, tr_sup, ts_sup, tr_inf, ts_inf) \tag{4.43}$$

Ahora, las FTs de los límites inferior $T_{Lo}(j\omega)$ y superior $T_{Hi}(j\omega)$ se obtienen manteniendo constante el dato Mp e, inicialmente, ts también haciendo $ts_sup=ts_max$ y variando sólo el valor de tr ; si no es posible un resultado que se ajuste a las especificaciones originales, se cambia la estrategia, manteniendo constante Mp , pero ahora disminuyendo ts hasta obtener un valor de tr adecuado ($\leq tr_max$).

De esta manera, la secuencia de etapas de la “técnica1_modificada” para traslado de especificaciones es la que sigue,

1)- Determinar el coeficiente de amortiguamiento mínimo ρ_{min} .

2)- Calculando $ts(\omega_n = 1, \rho_{min})$ por aproximaciones sucesivas, se obtiene $\omega_n(ts, \rho_{min})$,

$$\omega_n(ts, \rho_{min}) = \frac{ts(\omega_n = 1, \rho_{min})}{ts} \quad (4.44)$$

3)- Obtener por aproximaciones sucesivas $tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min})$ y $ts1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min})$.

4)- Aplicar el procedimiento siguiente:

Si $[tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min}) \leq tr] \& [ts1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min}) \leq ts] \Rightarrow (\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min})$ es el par que define $T_{Lo}(j\omega)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} [tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min})] > tr \\ \text{o} \\ [ts1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min})] > ts \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dt = \frac{tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}), \rho_{min}) - tr}{10} \\ \text{Si } dt < 0.001 \Rightarrow dt = 0.001 \\ ts = ts - dt \\ \text{Volver al paso 2).} \end{array} \right.$

4.1.7. Ejemplo Aplicado de la Técnica1_Modificada³

Supuesto $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$, se obtiene:

- Conjunto de Respuestas de 2º orden $T'(j\omega)$. *Figura 4.21.*
- Conjunto de Respuestas del TD, equivalentes a los sistemas $T'(j\omega)$. *Figura 4.22.*
- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$. *Figura 4.23.*

Límite w-inferior definido como la curva T(jw) inicial más restrictiva,

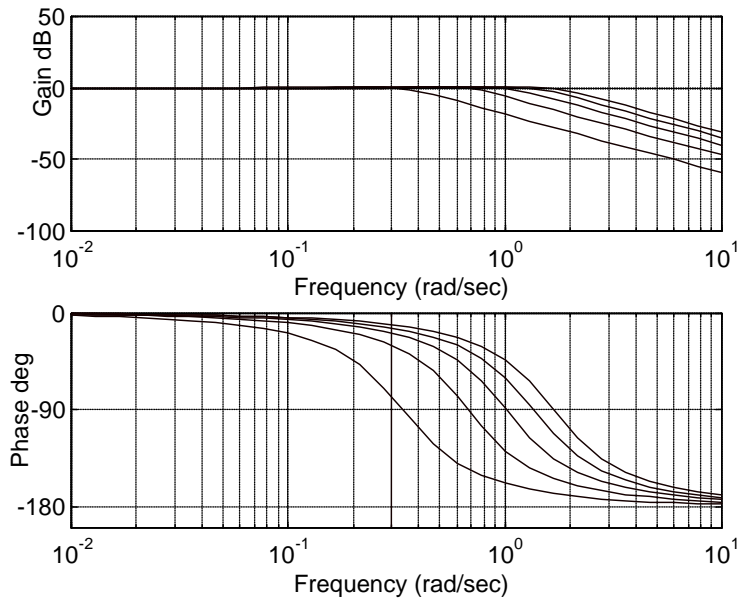
$$\frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.1137}{s^2 + 0.3486s + 0.1137} \quad (4.45)$$

³ Utilizando la función TD2WD1 desarrollada en Matlab4.2

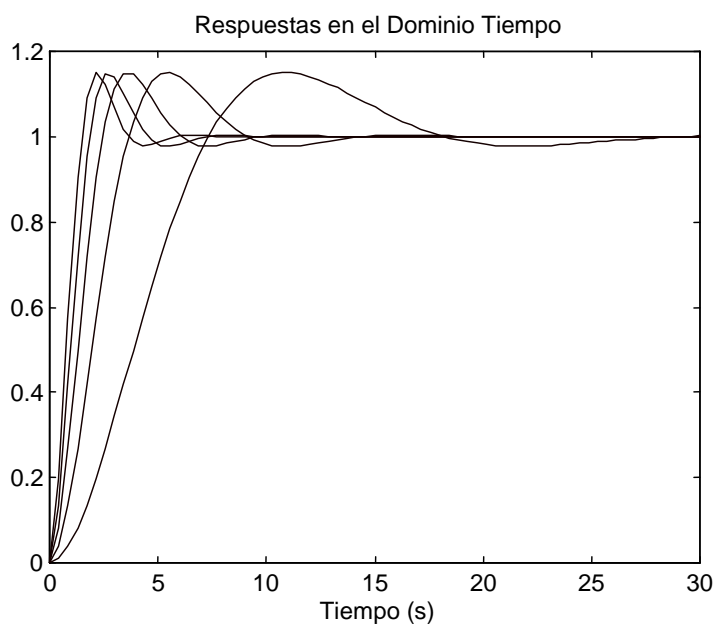
Límite w-superior definido como la curva $T(j\omega) * 5\omega_n$ más restrictiva,

$$\frac{Num_max}{Den_max} = \frac{2.843}{s^2 + 1.743s + 2.843} \tag{4.46}$$

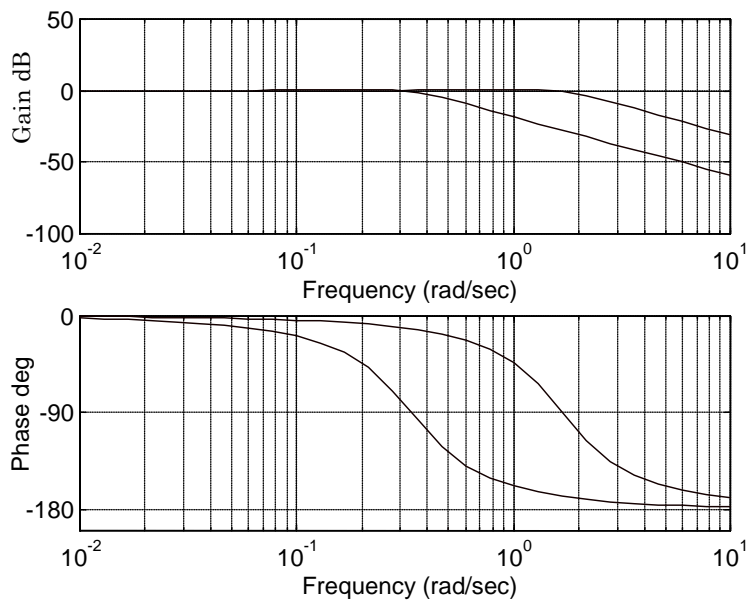
- Curvas y parámetros *TD finales*, ajustados a los *TD originales*. *Figura 4.24*.



Figura_4.21: Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}$ (15%, 5s, 30s, ±3%, 5)

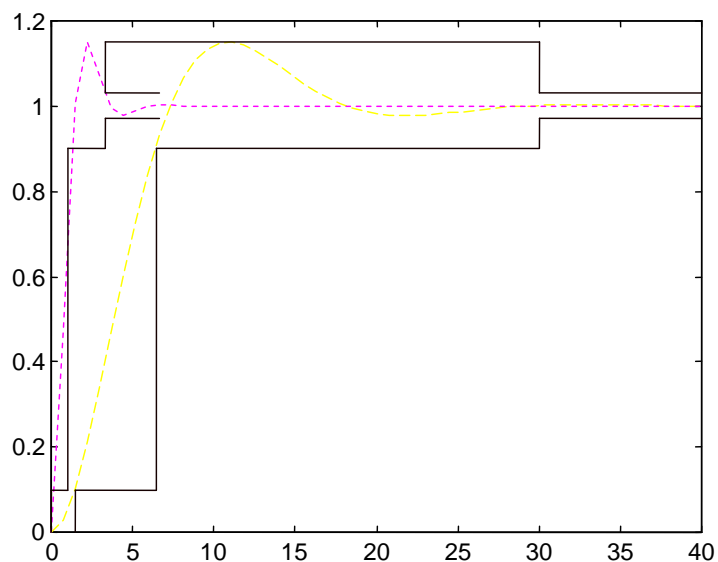


Figura_4.22: Conjunto de Respuestas temporales para el sistema $TD_{original}$ (15%, 5s, 30s, ±3%, 5)



Figura_4.23: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}$ (15%, 5s, 30s, $\pm 3\%$, 5)

Datos de Entrada: trmax=5s, tsmax=30s, Mp=15%, Desv.Máx=±3%



Respuestas: tr_sup=5s, ts_sup=16.56s, tr_inf=1s, ts_inf=3.311s, Mp=15%

Figura_4.24: Respuestas temporales finales asociadas a $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para el sistema original

4.1.8. Esquema de la Solución Propuesta: Técnica2

El método para traslado de “especificaciones del TD” a “especificaciones en el WD” que se describe a continuación (TD2WD2), funciona aplicando las hipótesis de simplificación típicas descritas en el apartado 4.1.2 “Análisis Típico de la Respuesta Temporal”, esto es,

$$tr = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d} \quad (4.5)$$

$$\text{con } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \rho^2} \quad (4.2) \quad , \quad \text{frecuencia forzada de oscilación,}$$

$$\text{con } \sigma = \rho \omega_n \quad (4.4) \quad \text{y} \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\sigma} \right) \quad (4.47)$$

$$\text{donde} \quad Mp = 100e^{\frac{-\rho\pi}{\sqrt{1-\rho^2}}} \quad (4.7)$$

Utilizando la ecuación (4.14) de la constante de tiempo del sistema sobre (4.15) y (4.16),

$$\left\{ \begin{array}{l} ts = \frac{4}{\rho\omega_n}, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.02 y_{ss} \\ ts = \frac{3}{\rho\omega_n}, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.05 y_{ss} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ts = \frac{4}{\rho\omega_n}, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.02 y_{ss} \\ ts = \frac{3}{\rho\omega_n}, \text{ para } desv_{\max} = \pm 0.05 y_{ss} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

La Técnica2 consiste en utilizar los parámetros $TD_{original}$ y, a partir de las ecuaciones anteriores⁴, sin variar Mp , obtener los parámetros TD_{final} , a saber,

$$\boxed{TD_{original}(Mp, tr, ts, desv) \rightarrow TD_{final}(Mp, tr_{sup}, ts_{sup})} \quad (4.50)$$

La FT del límite inferior $T_{Lo}(j\omega)$ se obtiene manteniendo constante el dato Mp e, inicialmente, ts también haciendo $ts_{sup}=ts_{max}$ y variando sólo el valor de tr ; si no es posible un resultado que se ajuste a las especificaciones originales, se cambia la estrategia, manteniendo constante Mp , pero ahora disminuyendo ts hasta obtener un valor de tr_{sup} adecuado ($\leq tr_{max}$).

⁴ Como se deduce de las ecuaciones dadas, sólo puede utilizarse los valores de $desv$ de ± 0.02 o ± 0.05 .

De esta manera, la secuencia de etapas de la técnica² para traslado de especificaciones es la que sigue,

- 1)- Determinar el coeficiente de amortiguamiento mínimo ρ_{min} .
- 2)- Calcular $\omega_n(ts, \rho_{min}, desv)$, con las ecuaciones aproximadas anteriores.
- 3)- Obtener $tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}, desv), \rho_{min})$
- 4)- Aplicar el siguiente proceso:

Si $tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}, desv), \rho_{min}) \leq tr \Rightarrow (\omega_n(ts, \rho_{min}, desv), \rho_{min})$ es el par que define $T_{Lo}(j\omega)$

Si $tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}, desv), \rho_{min}) > tr \Rightarrow$

$$dt = \frac{tr1(\omega_n(ts, \rho_{min}, desv), \rho_{min}) - tr}{10}$$

Si $dt < 0.001 \Rightarrow dt = 0.001$

$ts = ts - dt$

Volver al paso 2).

4.1.9. Ejemplo Aplicado de la Técnica2_Modificada⁵

Supuesto $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 2\%)$, se obtiene:

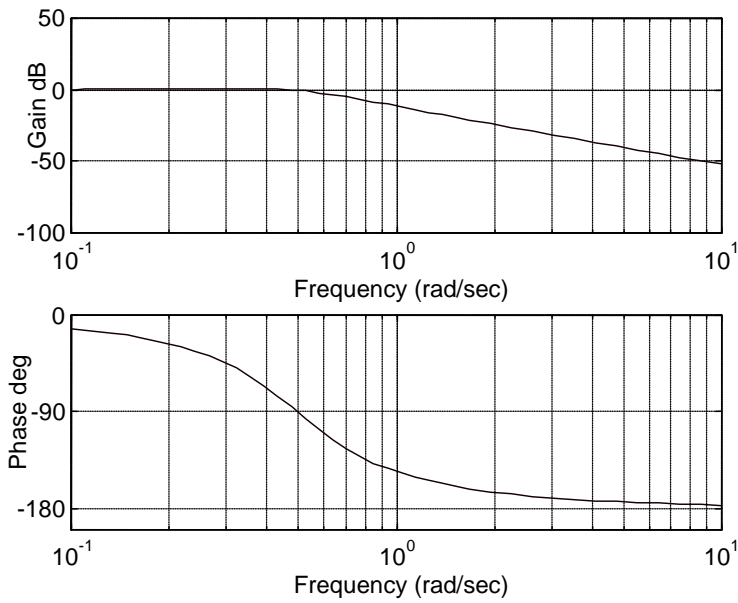
- Límite inferior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$. *Figura 4.25.*

Límite w-inferior dado por la FT siguiente,

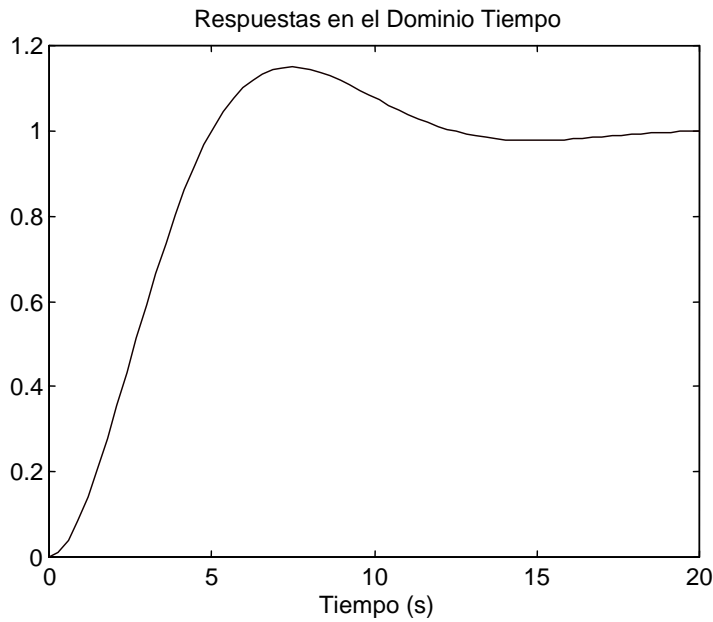
$$\frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.244}{s^2 + 0.5107s + 0.244} \quad (4.51)$$

- Respuesta del TD , equivalente al sistema $T_{Lo}(j\omega)$. *Figura 4.26.*
- Curva y parámetros TD finales, ajustados a los TD originales. *Figura 4.27.*

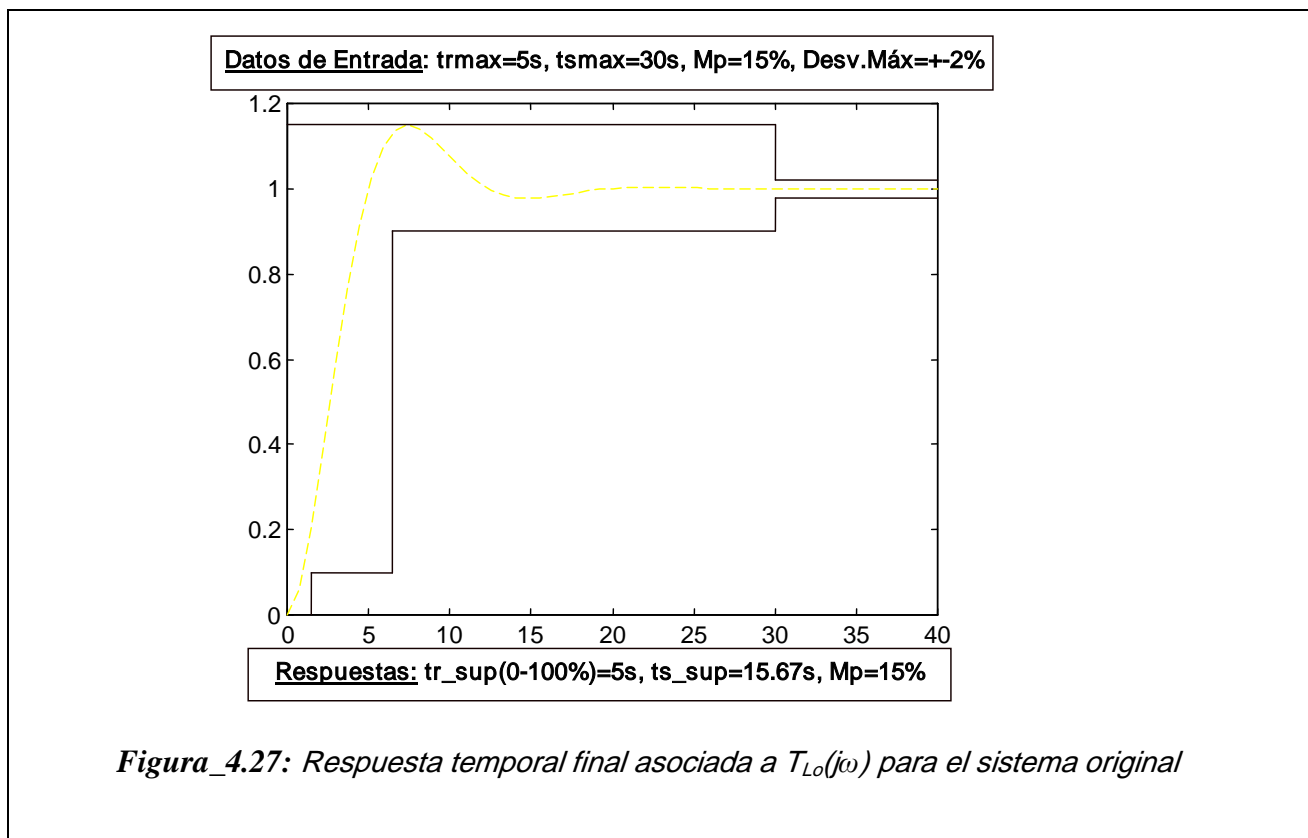
⁵ Utilizando la función TD2WD2 desarrollada en Matlab4.2



Figura_4.25: Límite inferior en el WD, $T_{Lo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ (15%, 5s, 30s, $\pm 2\%$)



Figura_4.26: Respuesta temporal equivalente al $T_{Lo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ (15%, 5s, 30s, $\pm 2\%$)



4.1.10. Búsqueda del límite $w_{superior}$ asociado a una variable controlada sobreamortiguada: “STEPTRAC.M”

En ocasiones, a efectos de tracking de variables controladas, se impone la especificación única de un sobreamortiguamiento máximo dado por una determinada sobreelongación, cuando se aplica un step de entrada concreto. Las técnicas anteriores no son válidas, ya que trabajan intentando alcanzar unos tiempos mínimos o máximos dados previamente.

El programa “Steptrac.m” pretende definir la función de transferencia asociada al límite $w_{superior}$ del WD, caracterizado por una respuesta de amplitud máxima (y_{max}) que sigue a una entrada escalón de amplitud máxima (r_{max}). El resultado se va a caracterizar por una sobreelongación M_p y unos tiempos de alcance y asentamiento mínimos, tal que,

$$M_p = \frac{y_{max} - r_{max}}{r_{max}} \quad (4.52), \quad \text{al que le corresponde,} \quad \rho_{min} = \left[\frac{\left(\ln Mp / \pi \right)^2}{1 + \left(\ln Mp / \pi \right)^2} \right]^{1/2} \quad (4.53)$$

El programa trabaja con unos tiempos superiores de referencia t_r y t_s (por defecto, 5s y 20s, respectivamente), para buscar la w_n asociada a tiempos mínimos, que defina en el WD un límite $w_{superior}$. La secuencia de etapas para traslado de especificaciones es la que sigue,

1)- Determinar el coeficiente de amortiguamiento mínimo ρ_{min} .

2)- Calcular $\omega_n(tr_{sup}, ts_{sup}, \rho_{min}, desv)$, con las ecuaciones anteriores.

3)- Disminuir el valor de t_r y t_s hasta un límite mínimo impuesto por el programa.

4)- Determinar $\omega_n(tr, ts, \rho_{min}, desv)$: Elegir $\omega_n(\rho_{min})$ el valor mayor de entre $\omega_n(tr, \rho_{min})$ y $\omega_n(ts, \rho_{min})$, como condición más restrictiva de la imposición temporal conjunta (tr, ts) .
Volver al paso 3).

5)- Obtener los pares (ω_n, ρ_{min}) o bien, doble vector $wd(\omega_n, \rho_{min})$.

6)- Definición del conjunto de curvas de 2º orden $T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}$

7)- Obtención del límite superior en el dominio frecuencial $T_{Uo}(j\omega)$. Sobre el diagrama de Bode se busca la intersección superior (máximos de magnitud) de las diferentes curvas definidas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho_{min})$.

8)- Como la curva límite superior en frecuencia está compuesta por la intersección de varias curvas $T(j\omega)$, la forma de describir su FT es aproximarla según alguno de los siguientes criterios:

a) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite superior del WD con precisión para frecuencias bajas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Uo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud máxima para la frecuencia más baja del $BW_{T(j\omega)}$. A esta aproximación la llamaremos restricción a bajas frecuencias.

b) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite superior del WD con precisión para frecuencias altas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Uo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud máxima para la frecuencia más alta del $BW_{T(j\omega)}$. A esta aproximación la llamaremos restricción a altas frecuencias.

c) Utilizar Racionalización de las respuesta en frecuencia dadas en 7) para conseguir una aproximación a la envolvente del límite superior $T_{Uo}(j\omega)$. Genera FTs de orden superior, poco prácticas en realidad, por lo que deben simplificarse, perdiendo parte de la precisión ganada a lo largo de todo el $BW_{T(j\omega)}$. A esta aproximación la llamaremos restricción a la aproximación envolvente.

9)- Obtención de los parámetros *TD finales*, a partir de los *WD* conseguidos, que se ajustan a los *TD originales*. Esto es,

$$\boxed{TD_{original}(y_{max}, r_{max}, tr_{sup}, ts_{sup}, desv) \rightarrow WD_{inferior}(Num, Den) \rightarrow TD_{final}(Mp, tr_{inf}, ts_{inf})} \quad (4.54)$$

4.1.11. Ejemplo Aplicado de la Técnica “Steptrac”⁶

Supuesto $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$, se obtiene:

- Conjuntos de Respuestas en el WD de 2º orden $T(j\omega)$, a partir del doble vector $wd(\omega_n, \rho_{min})$. *Figura 4.28*.

⁶ Utilizando la función STEPTRAC desarrollada en Matlab4.2

- Conjuntos de Respuestas del TD, equivalentes a los sistemas $T(j\omega)$. *Figura 4.29.*
- Límite superior en el dominio frecuencial $T_{Uo}(j\omega)$. *Figura 4.30.*
- Límite superior en el dominio frecuencial $T_{Uo}(j\omega)$, considerando aproximación con *restricción a bajas frecuencias. Figura 4.31.*
- Obtención de curva y parámetros TD finales, ajustados a los TD originales, para aproximación con *restricción a bajas frecuencias. Figura 4.32.*

Límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva,

$$\frac{Num_max}{Den_max} = \frac{0.279}{s^2 + 0.3988s + 0.279} \quad (4.55)$$

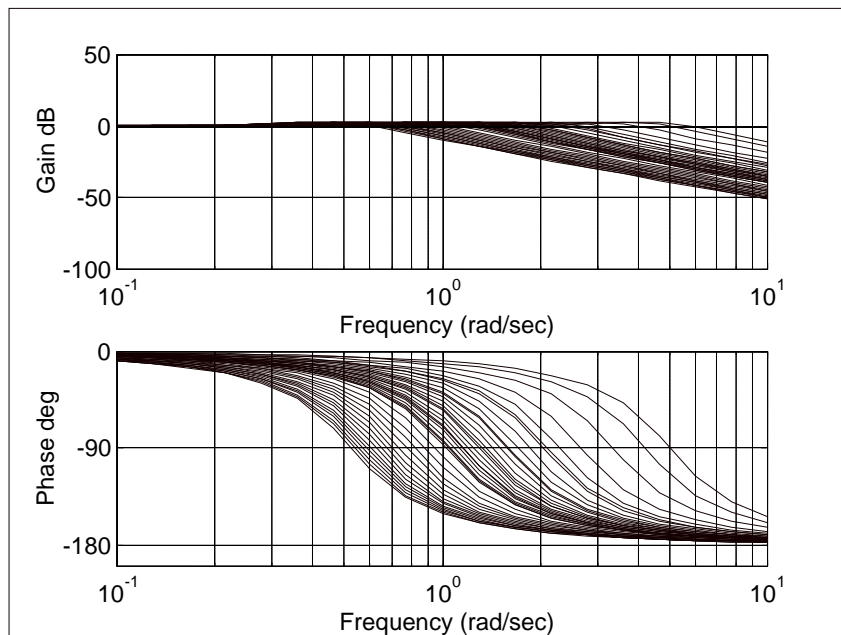
- Límite superior en el dominio frecuencial $T_{Uo}(j\omega)$, considerando aproximación con *restricción a altas frecuencias. Figura 4.33.*
- Obtención de curva y parámetros TD finales, ajustados a los TD originales, para aproximación con *restricción a altas frecuencias. Figura 4.34.*

Límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva,

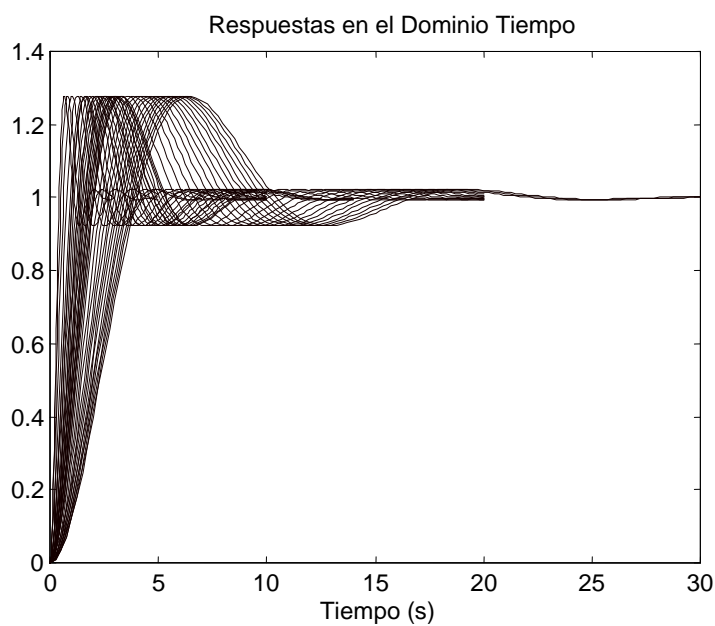
$$\frac{Num_max}{Den_max} = \frac{25.15}{s^2 + 3.787s + 25.15} \quad (4.56)$$

- Límite superior en el dominio frecuencial $T_{Uo}(j\omega)$, considerando aproximación a envolvente. *Figura 4.35*

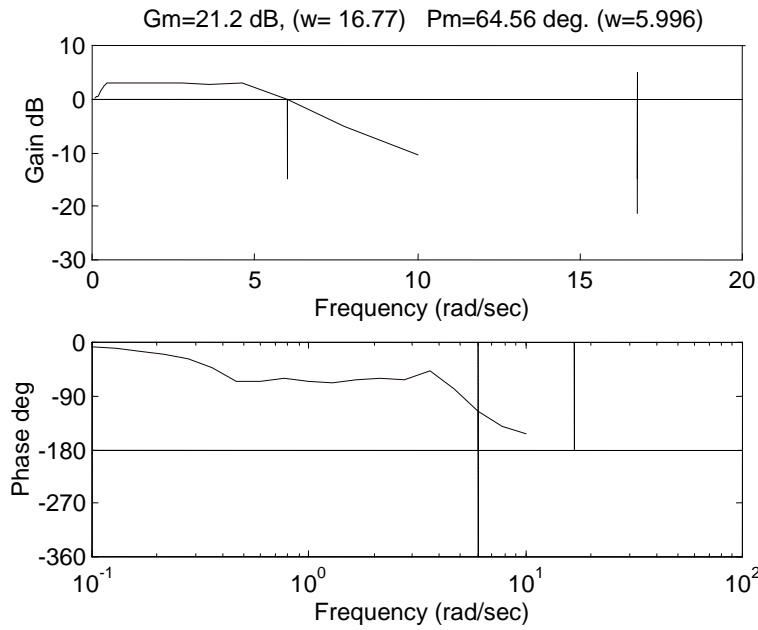
$$\frac{Num_max}{Den_max} = \frac{-1.073s^3 - 7.471s^2 - 23.86s + 9.034}{-1.197s^4 + 0.1767s^3 - 10.7s^2 + 3.415s + 8.762} \quad (4.57)$$



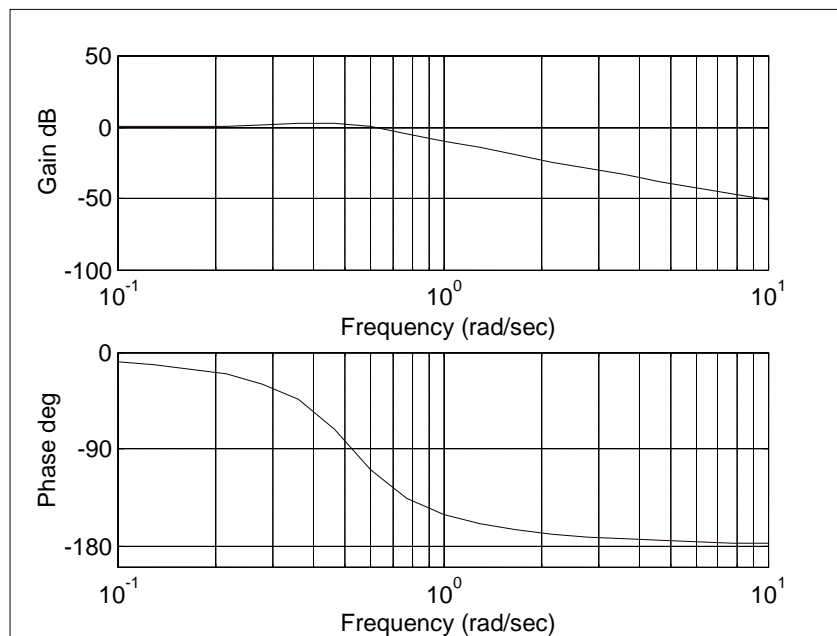
Figura_4.28: Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}$
(Input_Ref (0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))



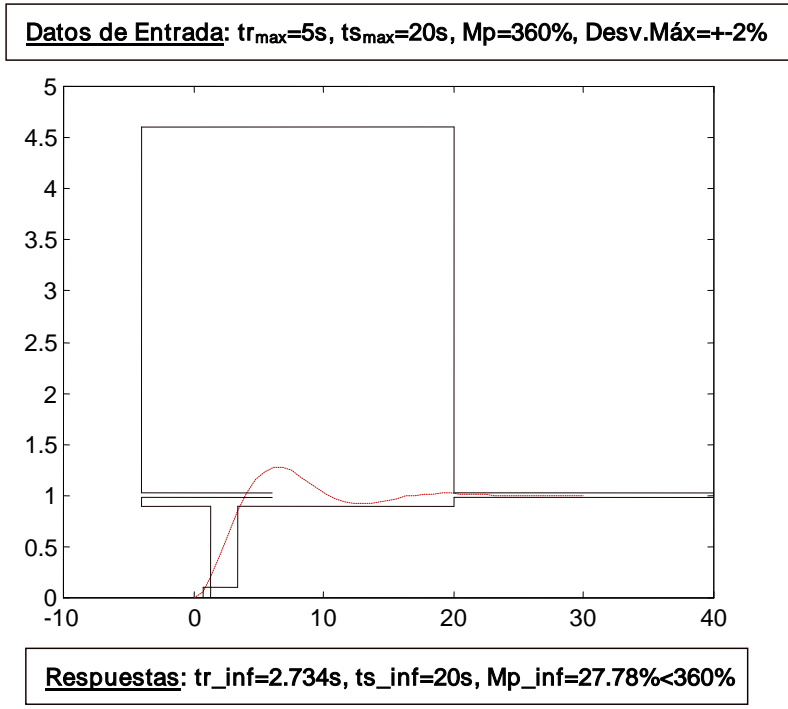
Figura_4.29: Conjunto de Respuestas temporales para el sistema $TD_{original}$
(Input_Ref (0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))



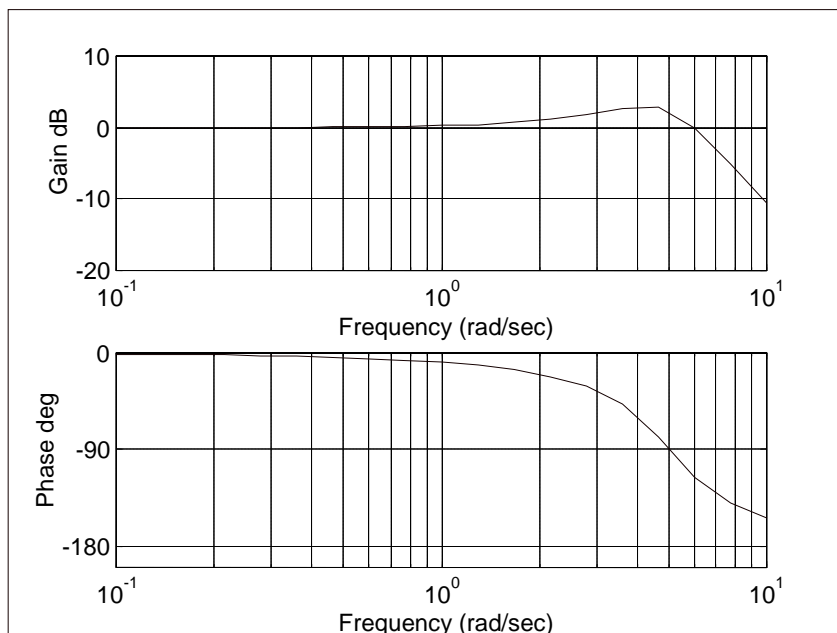
Figura_4.30: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ (Input_Ref (0.5) \rightarrow Output_max(2.3peak))



Figura_4.31: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ (Input_Ref (0.5) \rightarrow Output_max(2.3peak)) con aproximación a bajas frecuencias

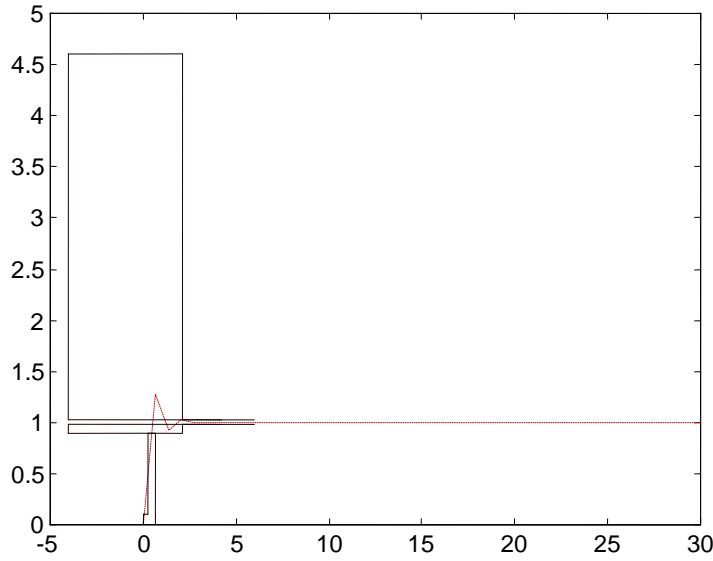


Figura_4.32: Respuesta temporal final asociada a $T_{Uo}(j\omega)$ para el sistema original. Aproximada con restricción a altas frecuencias.



Figura_4.33: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ ($Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak)$) con aproximación a altas frecuencias

Datos de Entrada: $t_{r_{max}}=5s$, $t_{s_{max}}=20s$, $M_p=360\%$, $Desv.Máx=+-2\%$



Respuestas: $t_{r_{inf}}=0.2879s$, $t_{s_{inf}}=2.106s$, $M_{p_{inf}}=27.78\% < 360\%$

Figura 4.34: Respuesta temporal final asociada a $T_{Uo}(j\omega)$ para el sistema original. Aproximada con restricción a altas frecuencias

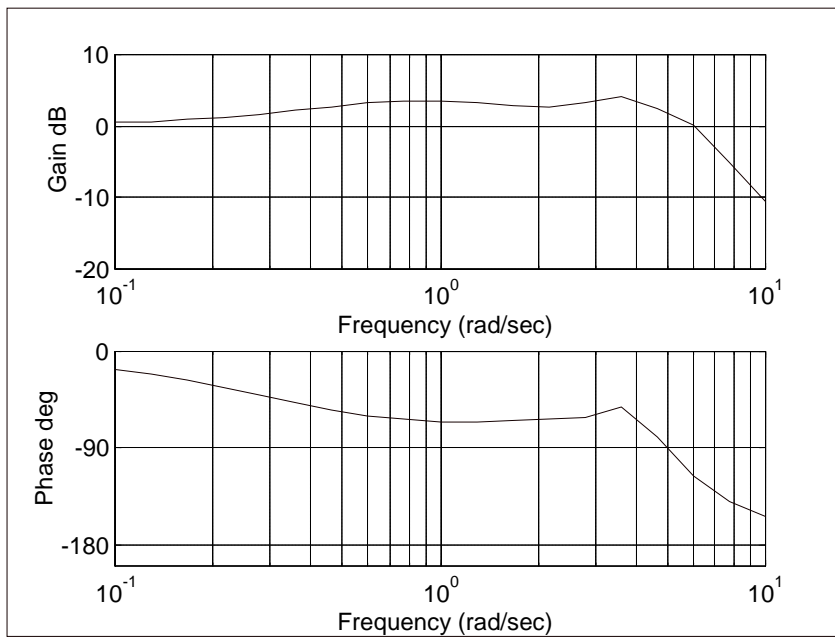


Figura 4.35: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}$ (Input_Ref (0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak)) con aproximación a envolvente

4.1.12. Búsqueda de $tr(\omega_n = 1, \rho)$ y $ts(\omega_n = 1, \rho)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes.

1. Búsqueda de $tr(\omega_n = 1, \rho)$.

Definido como,

$$tr(\omega_n = 1, \rho) = tr_{190}(t_{al} = 90\%, \omega_n = 1, \rho) - tr_{110}(t_{al} = 10\%, \omega_n = 1, \rho), \text{ con } t_{al} \text{ porcentaje de alcance} \quad (4.58)$$

Por tanto, el planteamiento se reduce a buscar $tr_{\omega_n t_{al}}$ ⁷. Esto es, para entradas escalón con amortiguamiento subcrítico, se tiene como respuesta,

$$y(tr_{\omega_n t_{al}}) = \frac{t_{al}}{100} = 1 - \frac{e^{-\rho\omega_n t_{\omega_n t_{al}}}}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t_{\omega_n t_{al}} + a \cos \rho\right) \quad (4.59)$$

Se define la función de interpolación $f(t)$, para cada instante de tiempo t , como,

$$f(t) = 1 - \frac{e^{-\rho\omega_n t}}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t + a \cos \rho\right) \quad (4.60)$$

Las fórmulas de Newton de 5º orden que vamos a utilizar son las siguientes,

Diferencias Descendentes:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_d^1 \theta + \frac{\delta_d^2}{2} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^3}{3!} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^4}{4!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^5}{5!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (4.61)$$

Diferencias Ascendentes:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_a^1 \theta + \frac{\delta_a^2}{2} \theta(\theta+1) + \frac{\delta_a^3}{3!} \theta(\theta+1)(\theta+2) + \frac{\delta_a^4}{4!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3) + \frac{\delta_a^5}{5!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4) \quad (4.62)$$

Donde h es el intervalo de tiempos elegido. El procedimiento general consiste en calcular θ por iteración. Es decir, se despeja $\theta = F(\theta)$ y se asigna un valor inicial $F(\theta_0) = \theta_1$.

⁷ Para ello, se hace uso de la función INTI desarrollada en Matlab4.2

Si θ_1 es adecuado se termina el proceso, en caso contrario, se siguen asignando valores

$$F(\theta_1) = \theta_2 \text{ hasta que se obtenga } |\theta_i - \theta_{i-1}| < |\theta_{i-1} - \theta_{i-2}|.$$

Entonces, despejando θ en la ecuación (4.61) o (4.62), por ejemplo, en la de *diferencias descendentes*, y sustituyendo, se tiene,

$$\theta = \frac{f(t_0 + \theta h) - f(t_0)}{\delta_d} - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \tag{4.63}$$

Para empezar la iteración, se escoge,
$$\theta_0 = \frac{f(t_0 + \theta h) - f(t_0)}{\delta_d} \tag{4.64}$$

Para la función que nos ocupa, la secuencia de pasos a realizar sería:

- Definir el intervalo temporal h . Dado que el Mp se alcanza en el tiempo $\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}}$, un valor válido de intervalo puede ser 1/10 del mismo.

Es decir,
$$h = \frac{\pi}{10\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \tag{4.65}$$

Y utilizar como tiempos discretos:

$$t_i = \{t_1 = 0; t_2 = t_1 + h; \dots; t_n = t_{n-1} + h, \text{ con } i=1, \dots, n\} \tag{4.66}$$

- Obtener los valores de la *tabla_4.1* indicada,

Tabla_4.1: Relación de valores $f(t)$

t	t_1	t_2	t_n
f(t)	$f(t_1)$	$f(t_2)$	$f(t_n)$

- Obtener los valores δ de 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, ... orden, con una tabla de diferencias como la que se indica en la *Tabla_4.2*,

Tabla 4.2: Diferencias δ para funciones $f(t)$ de 1º, 2º, 3º, 4º y 5º orden

t	$f(t)$	1º Orden	2º Orden	3º Orden	4º Orden	5º Orden
t_1	$f(t_1)$ ●	$\delta_{11} = f(t_2) - f(t_1)$	$\delta_{21} = \delta_{12} - \delta_{11}$	$\delta_{31} = \delta_{22} - \delta_{21}$	$\delta_{41} = \delta_{32} - \delta_{31}$	$\delta_{51} = \delta_{42} - \delta_{41}$
t_2	$f(t_2)$ ●	$\delta_{12} = f(t_3) - f(t_2)$	$\delta_{22} = \delta_{13} - \delta_{12}$	$\delta_{32} = \delta_{23} - \delta_{22}$	$\delta_{42} = \delta_{33} - \delta_{32}$	$\delta_{52} = \delta_{43} - \delta_{42}$
t_3	$f(t_3)$ ●	$\delta_{13} = f(t_4) - f(t_3)$	$\delta_{23} = \delta_{14} - \delta_{13}$	$\delta_{33} = \delta_{24} - \delta_{23}$	$\delta_{43} = \delta_{34} - \delta_{33}$	$\delta_{53} = \delta_{44} - \delta_{43}$
t_4	$f(t_4)$ ●	$\delta_{14} = f(t_5) - f(t_4)$	$\delta_{24} = \delta_{15} - \delta_{14}$	$\delta_{34} = \delta_{25} - \delta_{24}$	$\delta_{44} = \delta_{35} - \delta_{34}$	$\delta_{54} = \delta_{45} - \delta_{44}$
t_5	$f(t_5)$ ●	$\delta_{15} = f(t_6) - f(t_5)$	$\delta_{25} = \delta_{16} - \delta_{15}$	$\delta_{35} = \delta_{26} - \delta_{25}$	$\delta_{45} = \delta_{36} - \delta_{35}$	$\delta_{55} = \delta_{46} - \delta_{45}$
t_6	$f(t_6)$ ●	$\delta_{16} = f(t_7) - f(t_6)$	$\delta_{26} = \delta_{17} - \delta_{16}$	$\delta_{36} = \delta_{27} - \delta_{26}$	$\delta_{46} = \delta_{37} - \delta_{36}$	$\delta_{56} = \delta_{47} - \delta_{46}$
t_7	$f(t_7)$ ◆	$\delta_{17} = f(t_8) - f(t_7)$	$\delta_{27} = \delta_{18} - \delta_{17}$	$\delta_{37} = \delta_{28} - \delta_{27}$	$\delta_{47} = \delta_{38} - \delta_{37}$	
t_8	$f(t_8)$ ◆	$\delta_{18} = f(t_9) - f(t_8)$	$\delta_{28} = \delta_{19} - \delta_{18}$	$\delta_{38} = \delta_{29} - \delta_{28}$		
t_9	$f(t_9)$ ◆	$\delta_{19} = f(t_{10}) - f(t_9)$	$\delta_{29} = \delta_{110} - \delta_{19}$			
t_{10}	$f(t_{10})$ ◆	$\delta_{110} = f(t_{11}) - f(t_{10})$				
t_{11}	$f(t_{11})$ ◆					

● --- ➔ Definición de funciones por diferencias descendentes.

◆ ... ➤ Definición de funciones por diferencias ascendentes.

- Obtener t_0 y elegir el procedimiento de diferencias más adecuado, con el siguiente criterio (para el ejemplo de la tabla anterior, de 11 instantes de tiempo muestreados),

Si $f(t_i) > \frac{tal}{100}$, con $i=1,2,\dots,6$, Entonces,

✚ Diferencias Descendentes y $f(t_0) = f(t_{i-1}) < f(t)$, con $t_i < t < t_{i+1}$, es decir, el más cercano con valor inferior al buscado.

Si $f(t_i) > \frac{tal}{100}$, con $i=7,8,\dots,11$, Entonces,

✚ Diferencias Ascendentes y $f(t_0) = f(t_i) > f(t)$, con $t_{i-1} \leq t < t_i$, es decir, el más cercano con valor superior al buscado.

Siendo t el tiempo a encontrar (t_r, t_s, \dots).

- Calcular θ_0 inicial: $f(t_0 + \theta h) = \frac{tal}{100} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\frac{tal}{100} - f(t_0)}{\delta_{li}}$ (4.67)

- Calcular valores θ y el error cometido en cada iteración, usado para controlar la salida del bucle, además de la precisión de la aproximación.

Diferencias Descendentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3)(\theta_0 - 4) \quad (4.68) \\ Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \quad (4.69) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3)(\theta_1 - 4) \quad (4.70) \\ Error_1 = |\theta_1 - \theta_2| \quad (4.71) \end{array} \right.$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Error_1 < Eps, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h, \text{ siendo } Eps \text{ el error máximo permitido} \\ \text{Si } Error_1 \geq Eps, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right.$$

Diferencias Ascendentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \theta_0 + \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 + 1) + \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2) + \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2)(\theta_0 + 3) + \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2)(\theta_0 + 3)(\theta_0 + 4) \quad (4.72) \\ Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \quad (4.73) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 + \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 + 1) + \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2) + \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2)(\theta_1 + 3) + \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2)(\theta_1 + 3)(\theta_1 + 4) \quad (4.74) \\ Error_1 = |\theta_1 - \theta_2| \quad (4.75) \end{array} \right.$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Error_1 < Eps, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h \\ \text{Si } Error_1 \geq Eps, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right.$$

2. Búsqueda de $ts(\omega_n = 1, \rho, desv)$.

El procedimiento de búsqueda de tiempos es el mismo descrito para tr .

Con el parámetro $desv$ se define el canal de asentamiento con valores en tanto por uno

entre, $1 - \frac{desv}{100}$ (4.76)

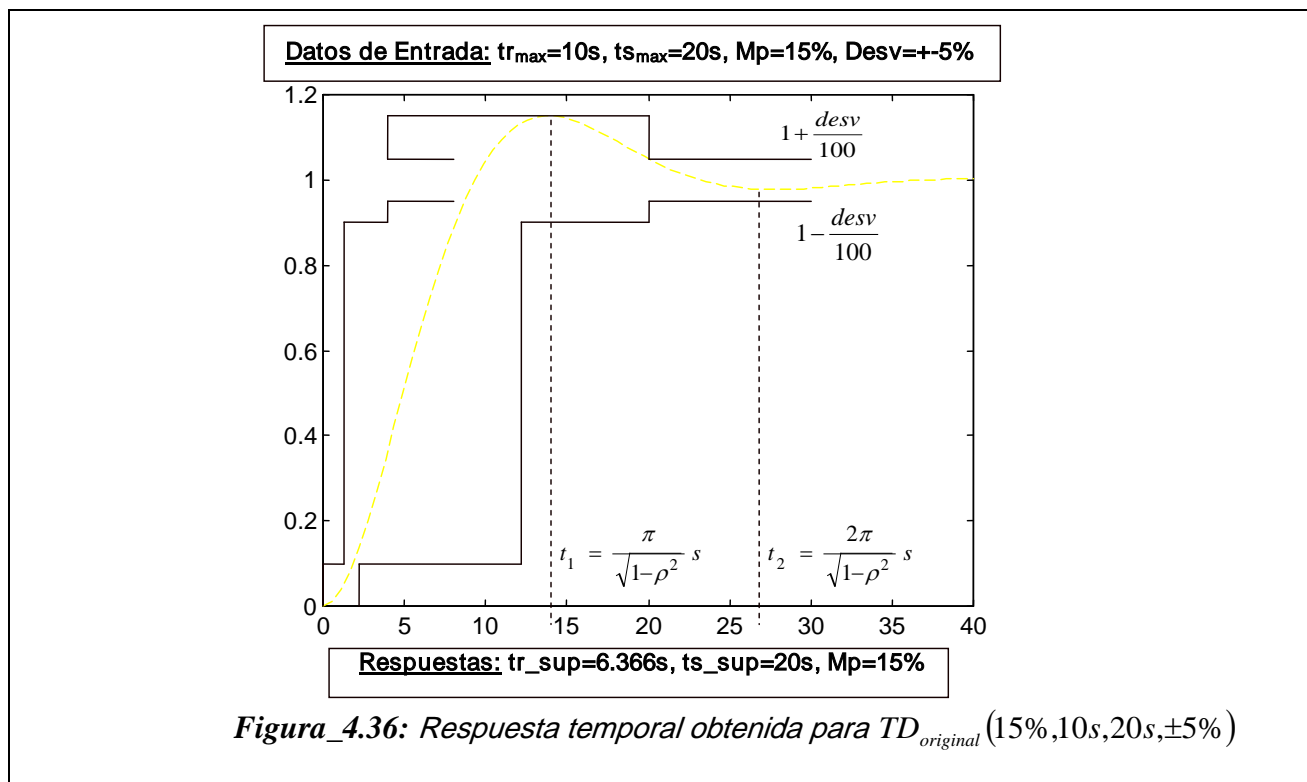
y $1 + \frac{desv}{100}$ (4.77)

Para la obtención de tiempos de asentamiento⁸ se trata de ir observando cada pico o valle máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo de asentamiento estará en el primer semiciclo, en el intervalo de ascenso, antes de dicho pico.

Si no es así, cuando se encuentre un pico-valle máximo dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; en caso contrario, el tiempo de asentamiento será este tiempo más la suma de los tiempos de cada

semiciclo $\frac{\pi}{\sqrt{1-\rho^2}} s$, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal. La

interpolación inversa de ts se realiza entre 0 y t_1 , t_1 y t_2 , y así sucesivamente hasta encontrar el valor adecuado. En el ejemplo de la *Figura_4.36* con $TD_{original}(15\%, 10s, 20s, \pm 5\%)$ pueden verse los parámetros descritos para este procedimiento.



⁸ Para ello, se hace uso de las funciones INTI y BUSCAR desarrolladas en Matlab4.2

4.1.13 Comparativa de Resultados ofrecidos por las distintas Propuestas

Se trata de comparar resultados ofrecidos utilizando la *Técnica1*, la *Técnica1_Modificada* y la *Técnica2*, para la conversión “time domain to w domain”.

Tabla 4.3: Comparativa de resultados entre las distintas técnicas de conversión TD a WD

TÉCNICA	Técnica1	Técnica1_Modificada	Técnica2
<i>Función Matlab de llamada</i>	td2wd td2wd1_	td2wd1	td2wd2
<i>Parámetros de Entrada</i>	Mp, tr, ts, desv, wiw	Mp, tr, ts, desv, wiw	Mp, tr, ts, desv=2 o 5
<i>Parámetros por Defecto</i>	desv=±0.02 wiw=5	desv=±0.02 wiw=5	desv=±0.02
<i>Parámetros de Salida</i>	Num_min, Den_min Num_max, Den_max	Num_min, Den_min Num_max, Den_max	Num_min, Den_min
<i>Resultados en Pantalla</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Respuestas iniciales en TD. • Conjunto Respuestas en TD. • Error cometido en la interpolación de tiempos. • Conjunto Respuestas en WD. • Límites inferior y superior en WD. • Elección de Restricción: Baja, Alta, Envolvente (con td2wd). • Elección de Restricción: Baja, Alta (con td2wd1_) • Límites inferior y superior aproximados en WD. • Resultados en TD (Mp_sup, tr_sup, ts_sup, MP_inf, tr_inf, ts_inf). 	<ul style="list-style-type: none"> • Conjunto Respuestas en TD. • Error cometido en la interpolación de tiempos. • Conjunto Respuestas en WD. • Límites inferior y superior en WD únicos. • Resultados en TD (tr_sup, ts_sup, tr_inf, ts_inf). 	<ul style="list-style-type: none"> • Respuesta en TD. • Límite inferior en WD único. • Resultados en TD (tr_sup, ts_sup).
<i>Funciones Matlab auxiliares</i>	inti buscar racwe (sólo td2wd) m2p (sólo td2wd)	inti buscar	-
<i>Procedimientos aplicados</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Variación de 3 parámetros TD (Mp, tr, ts). • Interpolación inversa de tr • Interpolación inversa de ts y nº de semiciclo para asentamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Variación de 2 parámetros TD (tr, ts). • Interpolación inversa de tr. • Interpolación inversa de ts y nº de semiciclo para asentamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Hipótesis iniciales clásicas: tr de 0 a 100%, ts=3T o 4T. • Variación de 2 parámetros TD (tr, ts).
<i>Nivel de complejidad</i>	Elevado	Medio	Bajo
<i>Nivel de precisión obtenido</i>	Elevado	Elevado_Medio	Bajo
<i>Observaciones</i>	Técnica eficiente, que da la posibilidad de elegir en que zona del BW interesa tener máxima precisión	Técnica eficiente, que interesa utilizar cuando no se especifica diferencia de precisión en ninguna zona del BW	Técnica poco eficiente, que interesa cuando la precisión máxima no es demasiado importante

El programa “*steptrac.m*” genera la función de transferencia asociada a un límite $w_{superior}$ que con un step de entrada (r_{max}) produce una respuesta sobreamortiguada de amplitud máxima (y_{max}), de manera que la sobreelongación (Mp) sea una concreta; utiliza como parámetros de entrada ($y_{max}, r_{max}, tr, ts, desv$), siendo tr y ts tiempos de referencia máximos, usados para determinar tiempos de la función mínimos para el Mp dado.

4.2. Traslado de Especificaciones para Sensibilidad y Tracking Desacoplado

En técnicas de control robusto como QFT, el problema de control se trata en el dominio frecuencial y, no sólo las plantas del proceso y perturbaciones deben estar especificadas en este dominio, sino también los límites y restricciones que se imponen originalmente.

Lo habitual es que el problema exija traslados de especificaciones basados en entradas escalón que generan una respuesta escalón con zona de transición amortiguada subcrítica. Sin embargo, en ocasiones, las especificaciones están basadas en otro tipo de señales, tanto en la entrada, como en el seguimiento de salida.

Esto es, por ejemplo, en las especificaciones de *sensibilidad* para QFT se pueden aplicar entradas escalón o impulso y exigir una respuesta tipo impulso subamortiguado,

✚ Caso 1- cuya amplitud máxima comprendida entre dos valores, uno máximo y el otro que describa el tiempo límite que la señal pueda superar; finalmente, la señal debe desaparecer⁹; o ,

✚ Caso 2- otra con una amplitud máxima que no sobrepase un valor concreto y desaparezca en un tiempo máximo determinado¹⁰.

De cualquier manera, en todos los casos, el error estacionario permitido debe ser nulo.

Otra situación dada en QFT (Caso 3) son algunas especificaciones de *tracking desacoplado* , donde aplicadas entradas de referencia escalón, se deben generar salidas en forma de impulsos subamortiguados de amplitud máxima dada, pero sin imponer tiempos límite para su desaparición .

Se presentan aquí dos procedimientos para traslado de especificaciones de *sensibilidad* del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de

⁹ Ver *Figura_4.37*.

¹⁰ Ver *Figura_4.38*.

parámetros ω_n (frecuencia natural) y ρ (coeficiente de amortiguación), válido para sistemas con amortiguamiento subcrítico. Para ello, se aplica una técnica de Aproximaciones Sucesivas mediante interpolación inversa para la obtención de tiempos, tr (tiempos de alcance) y ts (tiempos de asentamiento), o de coeficiente de amortiguamiento, dependiendo del procedimiento, como parte de las dos técnicas presentadas a continuación. Concretamente, se usa el Método de Newton por Diferencias Ascendentes y Descendentes de 5º orden, en todos los casos.

Además, se proporcionará una solución al problema del traslado de especificaciones de *tracking desacoplado*, de manera simplificada.

4.2.1. Sistemas de 2º orden y Especificaciones de Respuesta Transitoria Impulso Subamortiguado.

Dado un sistema $f(t)$ como el mostrado en la *figura_4.37*, de parámetros de respuesta transitoria con amortiguamiento subcrítico:

- Valor máximo de pico f_{max} Amplitud máxima del primer semiciclo.
- Tiempo de pico máximo t_{max} $f(t_{max})=f_{max}$
- Tiempo de alcance tr $tr=t(n\%f(t))$, $n\%$ es un porcentaje cualquiera.
- Valor de alcance maf $maf=f(tr)$
- Tiempo de establecimiento ts : $f(ts)=\pm mas$
- Valor de establecimiento mas $mas=f(ts)$, Canal de asentamiento
- Desviación máxima $desv_{max}$: Desaparición de la señal.

Éstos se suelen expresar como se indica a continuación.

4.2.2. Análisis Típico de la Respuesta Temporal Escalón Subamortiguado.

De manera tradicional, se han definido formalmente los parámetros de la respuesta impulso subamortiguado a una entrada escalón, como se cita en [Ogata,93], esto es:

- ✚ Respuesta Temporal $f(t)$: supuesto ρ coeficiente de amortiguamiento y ω_n frecuencia natural,

$$f(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\rho\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t\right), \text{ con } 0 < \rho < 1 \quad (4.78)$$

- ✚ Valor máximo de pico f_{\max} : Obtenido en el primer semiciclo, con valor,

$$f_{\max} = f(t_{\max}) = \omega_n e^{-\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)} \quad (4.79)$$

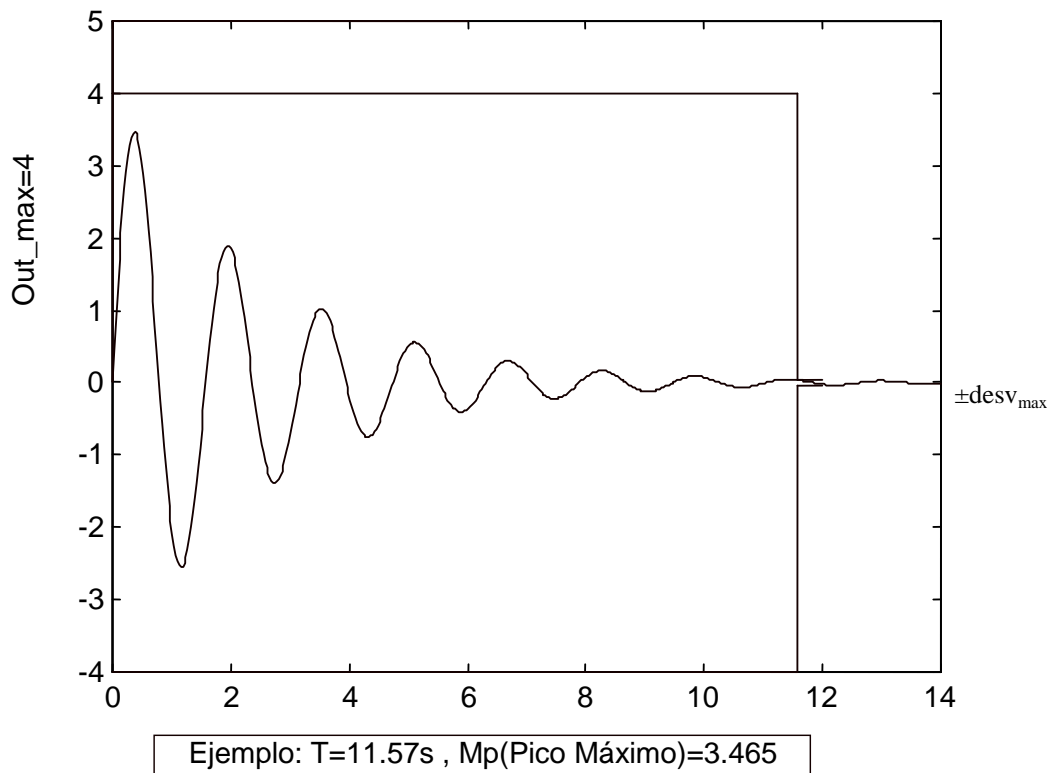
- ✚ Tiempo de pico máximo t_{\max} : Se produce en el instante de tiempo,

$$t_{\max} = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.80)$$

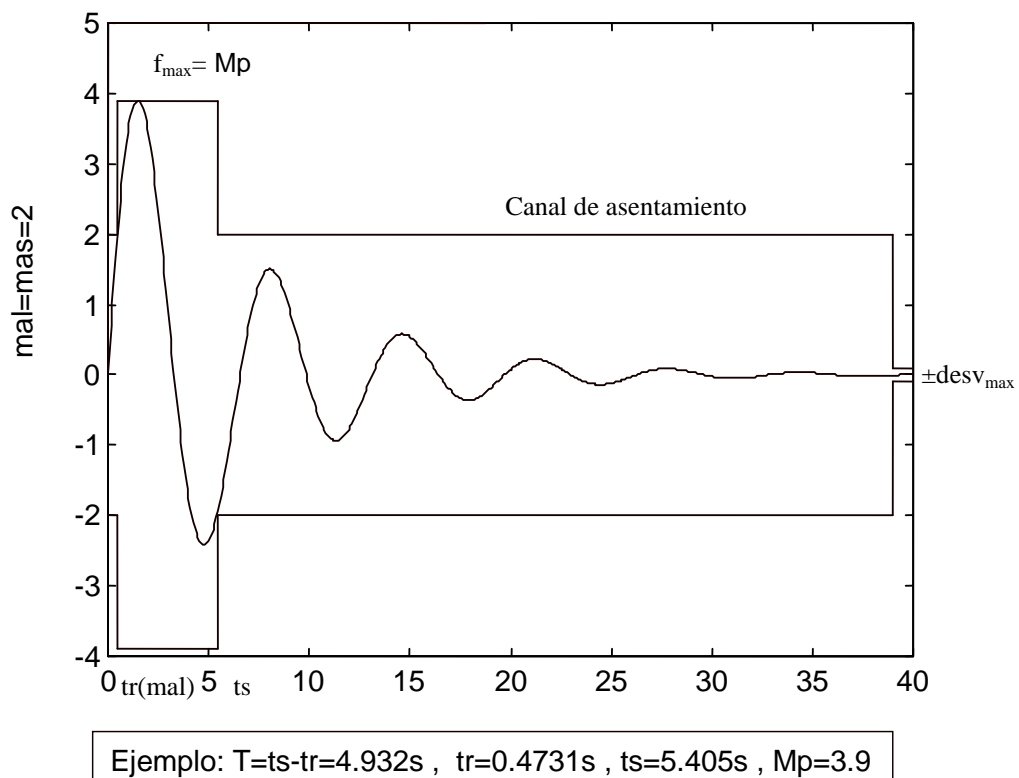
- ✚ Tiempo de picos t_p y de ceros t_c : Picos y ceros se van alternando, obteniendo dos de cada uno por ciclo en los instantes de tiempo dados,

$$t_p = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) + n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.81) \quad \text{y} \quad t_c = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}}, \text{ con } n=0, 1, \dots, \quad (4.82)$$

Figura_4.37: Especificaciones de respuesta transitoria para impulso subamortiguado (Caso 1)



Figura_4.38: Especificaciones de respuesta transitoria para impulso subamortiguado (Caso 2)



El Análisis formal presentado hasta el momento es el que se utiliza para transferir parámetros de un sistema de 2º orden del dominio frecuencial (ρ, ω_n) al dominio temporal. El problema inverso se puede resolver de manera eficiente con los métodos propuestos a continuación.

4.2.3. Esquema de la Solución Propuesta al Caso1: Técnica EsensibQ.

El método para traslado de “especificaciones del dominio temporal (TD)” a “especificaciones en el dominio frecuencial (WD)” que aquí se presenta, viene descrito por la relación siguiente,

$$\boxed{TD(Out, In, T, desv, modo) \rightarrow WD(Num, Den)} \quad (4.83)$$

Donde los parámetros TD representan el valor de una perturbación de entrada, en forma de escalón de amplitud In , que genera una desviación del valor de la variable a controlar tipo impulso subamortiguado, cuya amplitud no debe exceder el valor Out durante más tiempo que T , hasta que desaparezca, es decir, se asiente en el valor $\pm desv$, de manera *absoluta o relativa*, según el *modo de referencia* sea respecto a la unidad o al valor Out . Los parámetros WD son la función de transferencia (FT) del límite impuesto, descrita en forma de componentes, tal que,

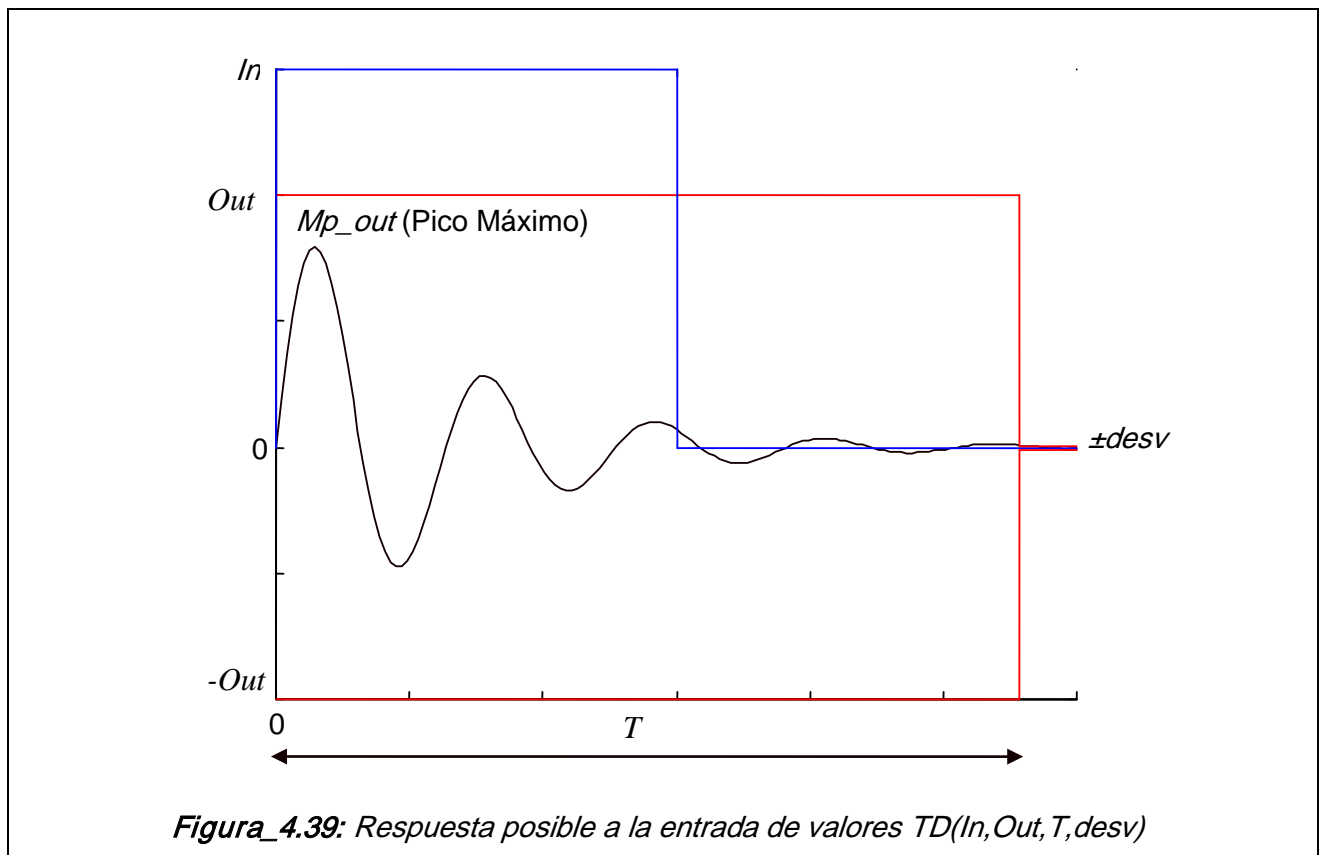
$$T(j\omega) = \frac{Num}{Den}(j\omega) \quad (4.84)$$

Este tipo de problema se plantea, por ejemplo, en técnicas de QFT a la hora de fijar las especificaciones de sensibilidad, definidas como valores máximos de desviación y_{max} de la variable de control del sistema durante un tiempo concreto máximo T , con error estacionario nulo, dada una perturbación de entrada d determinada, esto es,

$$S = \frac{y_{max}}{d} \quad (4.85)$$

La secuencia de etapas de la **técnica EsensibQ** (Especificación de Sensibilidades para QFT) es la que sigue,

1)- Obtención del par (ω_n, ρ) que cumpla las especificaciones TD dadas. Para ello, usar el proceso:



1a)- Utilizar interpolación inversa sobre la función respuesta impulso $f(t)$ para determinar, usando valores de pico máximo absolutos Mp , el coeficiente de amortiguamiento $\rho(\omega_n = 1)$. Como se trata de obtener la respuesta más restrictiva, Mp se elige con el valor más próximo a funcionamiento crítico, es decir, valor unidad. El límite de esta proximidad lo marca la precisión máxima de la función interpolación inversa utilizada¹¹, que es de $Mp=0.99843$.

1b)- Utilizar interpolación inversa¹² sobre la función respuesta impulso $f(t)$ para determinar, usando valores $\rho(\omega_n = 1)$, $\omega_n = 1$ y $desv$, tiempo de asentamiento $ts(\omega_n = 1)$.

¹¹ Función INTIPI desarrollada en Matlab4.2

¹² Función INTITAS desarrollada en Matlab4.2

1c)- La constante de tiempo de un sistema de 2º orden dada por $T_c = \frac{1}{\rho\omega_n}k$, se puede expresar para los tiempos de asentamiento T y ts cualquiera, por ejemplo, para $ts(\omega_n=1)$, respectivamente, como:

$$T = ts(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n}k_s \quad (4.86) \quad \text{y} \quad ts(\omega_n = 1) = \frac{1}{\rho(\omega_n = 1)}k_s \quad (4.87)$$

Combinadas ambas ecuaciones proporcionan,
$$\rho = \frac{\rho(\omega_n = 1)ts(\omega_n = 1)}{ts(\omega_n)\omega_n} \quad (4.88)$$

donde $\rho(\omega_n = 1)$ se ha determinado en 1a) y $ts(\omega_n = 1)$ en 1b)

1d)- Elegir, inicialmente, $\omega_n=Out$ y $ts(\omega_n)=T$. Sustituyendo en la ecuación obtenida en 1c), se determina el valor de ρ_i .

1e)- Definir un bucle para encontrar el par (ω_n, ρ) que cumpla las especificaciones TD dadas. Con $\rho_i(ts, \omega_n, \rho(\omega_n = 1), ts(\omega_n = 1))$ se determina $ts1(\rho_i, \omega_n, desv1)$ por interpolación inversa¹³, donde $desv1$ depende del modo de asentamiento elegido:

- Modo Absoluto (referencia de la señal unidad): $desv1=desv$
- Modo Relativo (referencia de la señal al valor Out): $desv1=desv*f_{max}$

Si $ts1(\omega_n, \rho_i, desv1) \leq T \Rightarrow (\omega_n, \rho_i)$ es el par que define $T(j\omega)$

Si $ts1(\omega_n, \rho_i, desv1) > T \Rightarrow$

$$dt = \frac{ts1(\omega_n, \rho_i, desv1) - ts}{10}$$

Si $dt < 0.001 \Rightarrow dt = 0.001$

$ts=ts-dt$

Volver al paso 1e).

¹³ Función INTITAS desarrollada en Matlab4.2

2)- Definición de la FT de 2º orden $T(j\omega)$, tal que

$$T(j\omega) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \right) / In \quad (4.89)$$

ya que el par (ω_n, ρ) obtenido determina la respuesta de 2º orden $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}$ del sistema, relativa a la perturbación de entrada In .

4.2.4. Ejemplo Aplicado de la Técnica EsensibQ¹⁴

Supuesto $TD_{original}$ ($Out = 10, In = 15, T = 3s, \pm 1\%, Modo Relativo$), se obtiene:

- Respuesta en el TD , equivalente al sistema de 2º orden $T'(j\omega) = T(j\omega)/In$. *Figura_4.40.*
- Respuesta de 2º orden $T'(j\omega) = T(j\omega)/In$. *Figura_4.41.*
- Respuesta y parámetros TD finales, ajustados a los TD originales. En la *Figura_4.42* se considera aplicada una perturbación de entrada impulso de amplitud In , modo relativo.

La FT obtenida como resultado $T(j\omega)/Impulse$ será,
$$\frac{Num}{Den} = \frac{6.667}{s^2 + 3.224s + 100} \quad (4.90)$$

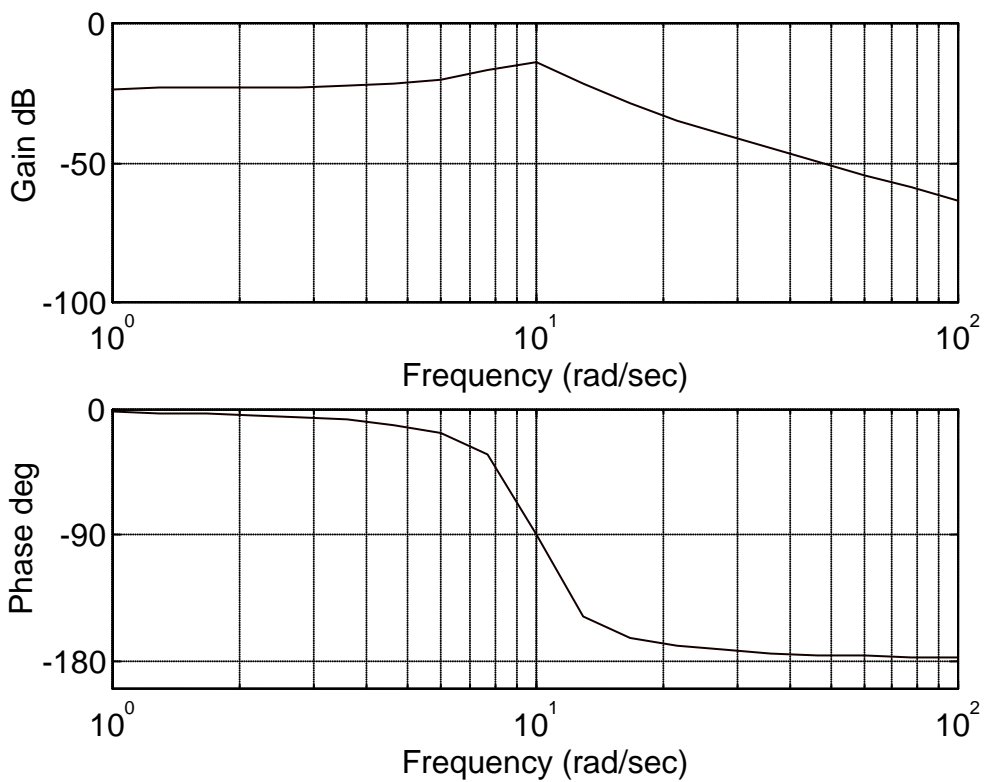
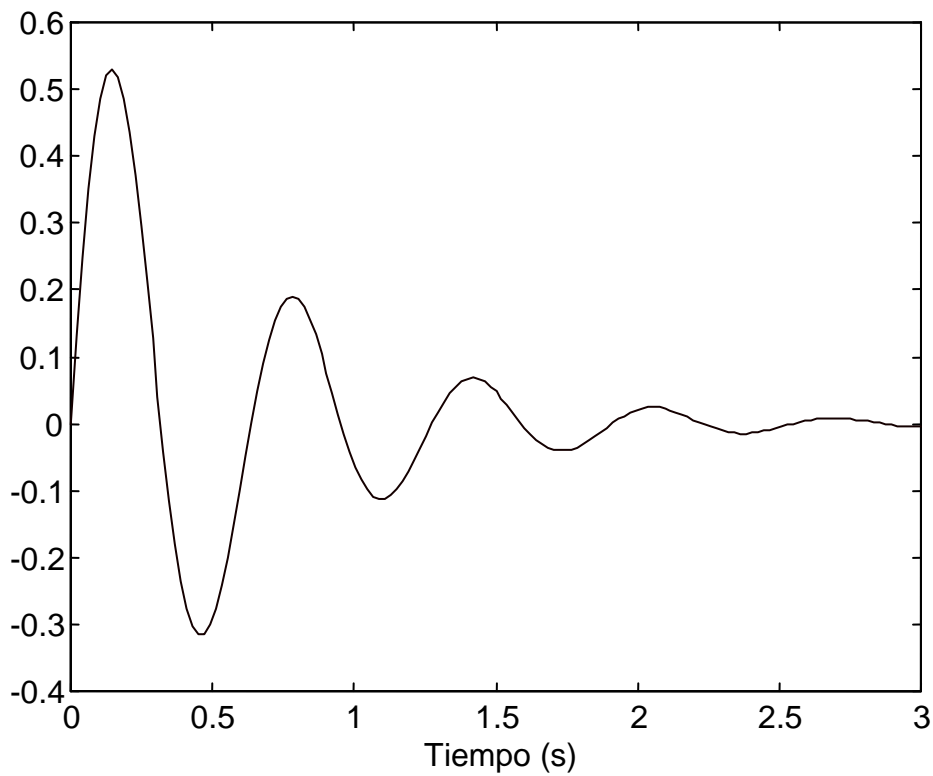
- Respuesta y parámetros TD finales, ajustados a los TD originales. En la *Figura_4.43* se considera aplicada una perturbación de entrada escalón de amplitud In , modo relativo.

La FT obtenida como resultado $T(j\omega)/Step$ será,
$$\frac{Num}{Den} = \frac{6.667s}{s^2 + 3.224s + 100} \quad (4.91)$$

En ambos casos, coeficiente de amortiguamiento: 0.1612 , Frecuencia natural: 10 rad/s

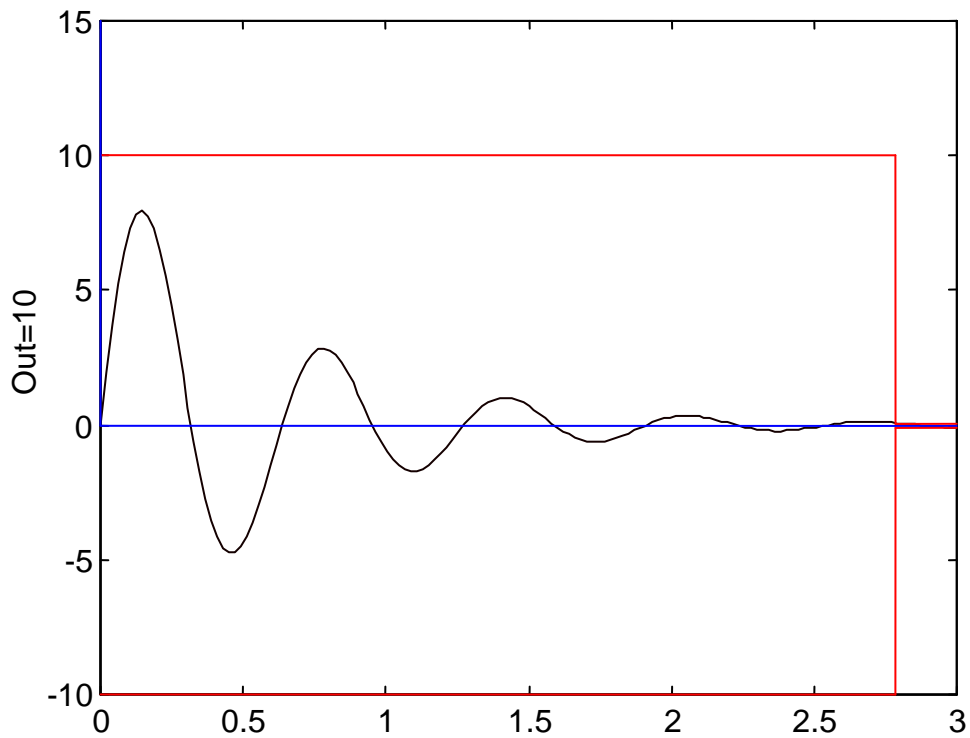
¹⁴ Utilizando la función ESENSIBQ desarrollada en Matlab4.2

Figura_4.40: Respuesta en el TD de la FT $T'(j\omega)=T(j\omega)/In$



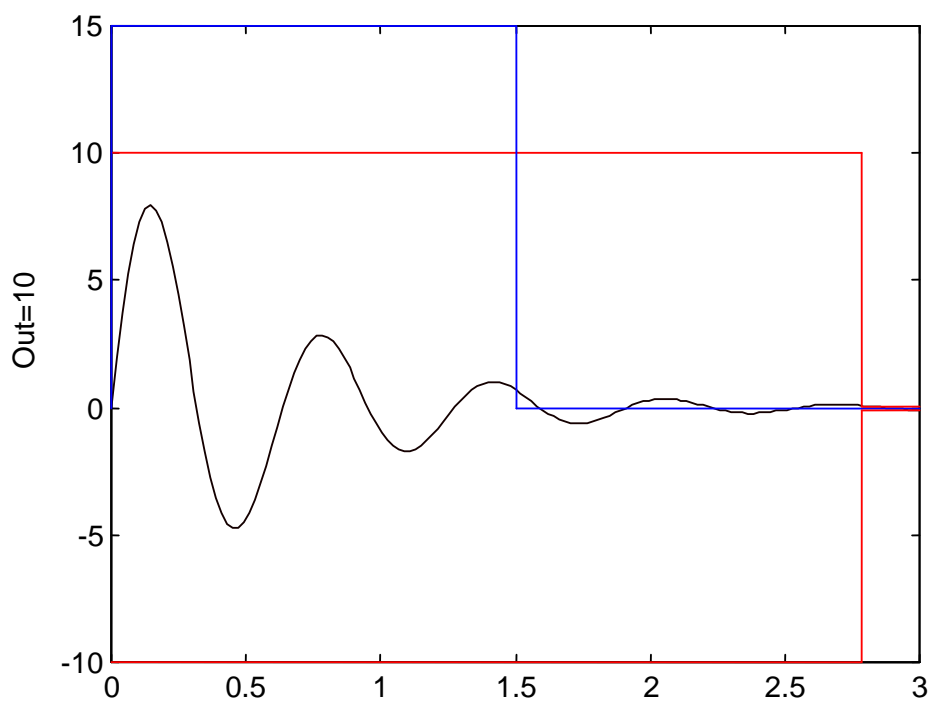
Figura_4.41: Respuesta 2º orden $T'(j\omega)=T(j\omega)/In$ para $TD_{original}$ ($Out = 10, In = 15, T = 3s, \pm 1\%, Modo Relativo$)

Figura 4.42: Perturbación de Entrada IMPULSO, $In=15$, $T=3$ s y $Desv.=\pm 1\% =\pm 0.07944$



Respuesta Modo Relativo : $T_{out}=2.786s$, Mp_{out} (Pico Máximo)=7.944

Figura 4.43: Perturbación de Entrada STEP, $In=15$, $T=3$ s y $Desv.=\pm 1\% =\pm 0.07944$



Respuesta Modo Relativo: $T_{out}=2.786s$, Mp_{out} (Pico Máximo)=7.944

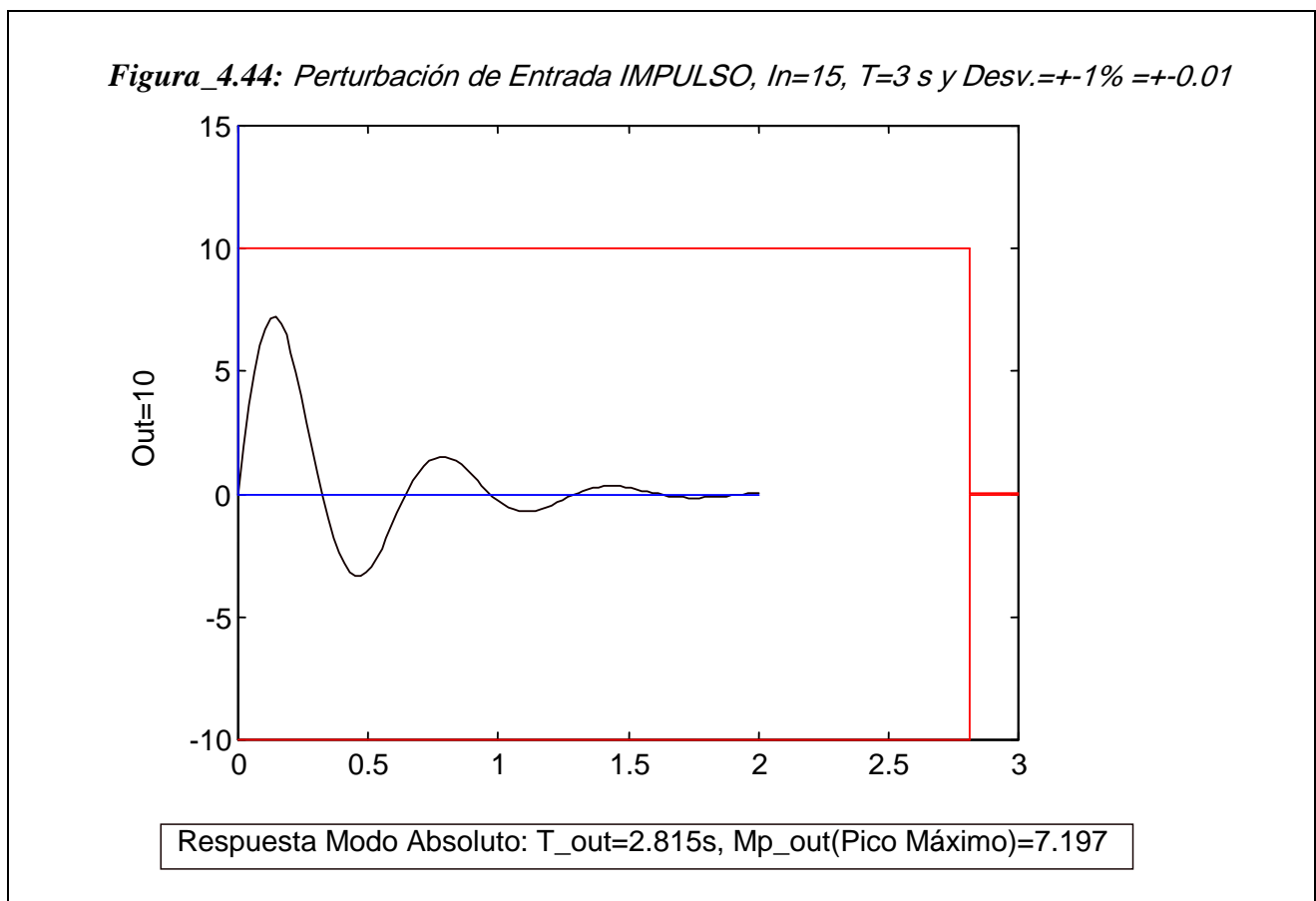
Supuesto el mismo ejemplo anterior, pero en modo absoluto, es decir,

$TD_{original}(Out = 10, In = 15, T = 3s, \pm 1\%, ModoAbsoluto)$, los resultados obtenidos son:

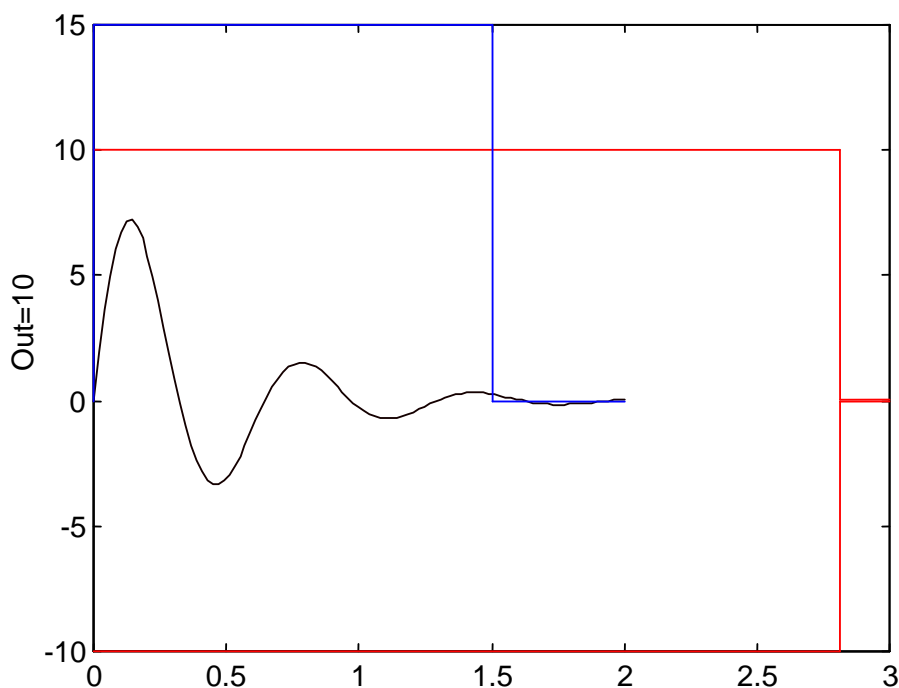
- Respuesta y parámetros *TD finales*, ajustados a los *TD originales*. En las Figuras_4.44 y 4.45 se consideran aplicadas perturbaciones de entrada impulso y escalón, respectivamente, de amplitudes *In*, modo absoluto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La FT obtenida como resultado } T(j\omega)/\text{Impulse será, } \frac{Num}{Den} = \frac{6.667}{s^2 + 4.779s + 100} \quad (4.92) \\ \text{La FT obtenida como resultado } T(j\omega)/\text{Step será, } \frac{Num}{Den} = \frac{6.667s}{s^2 + 4.779s + 100} \quad (4.93) \end{array} \right.$$

En ambos casos, coeficiente de amortiguamiento: 0.239 , Frecuencia natural: 10 rad/s



Figura_4.45: Perturbación de Entrada STEP, $In=15$, $T=3$ s y $Desv.=\pm 1\% =\pm 0.01$



Respuesta Modo Absoluto: $T_{out}=2.815s$, Mp_{out} (Pico Máximo)=7.197

4.2.5. Esquema de la Solución Propuesta al Caso2: Técnica Esensib.

El método para traslado de “especificaciones del dominio temporal (TD)” a “especificaciones en el dominio frecuencial (WD)” que ahora se presenta, viene descrito por la relación siguiente,

$$TD(Out, In, T, exceso) \rightarrow WD(Num, Den) \quad (4.94)$$

Donde los parámetros TD representan el valor de una perturbación de entrada escalón de amplitud In , que genera una desviación sobre la variable de control en forma de impulso subamortiguado, cuya amplitud puede exceder el valor Out , pero como máximo $Out \cdot exceso$, aunque sólo durante un máximo de T segundos. Los parámetros WD son la función de transferencia (FT) del límite inferior, descrita en forma de componentes, tal que,

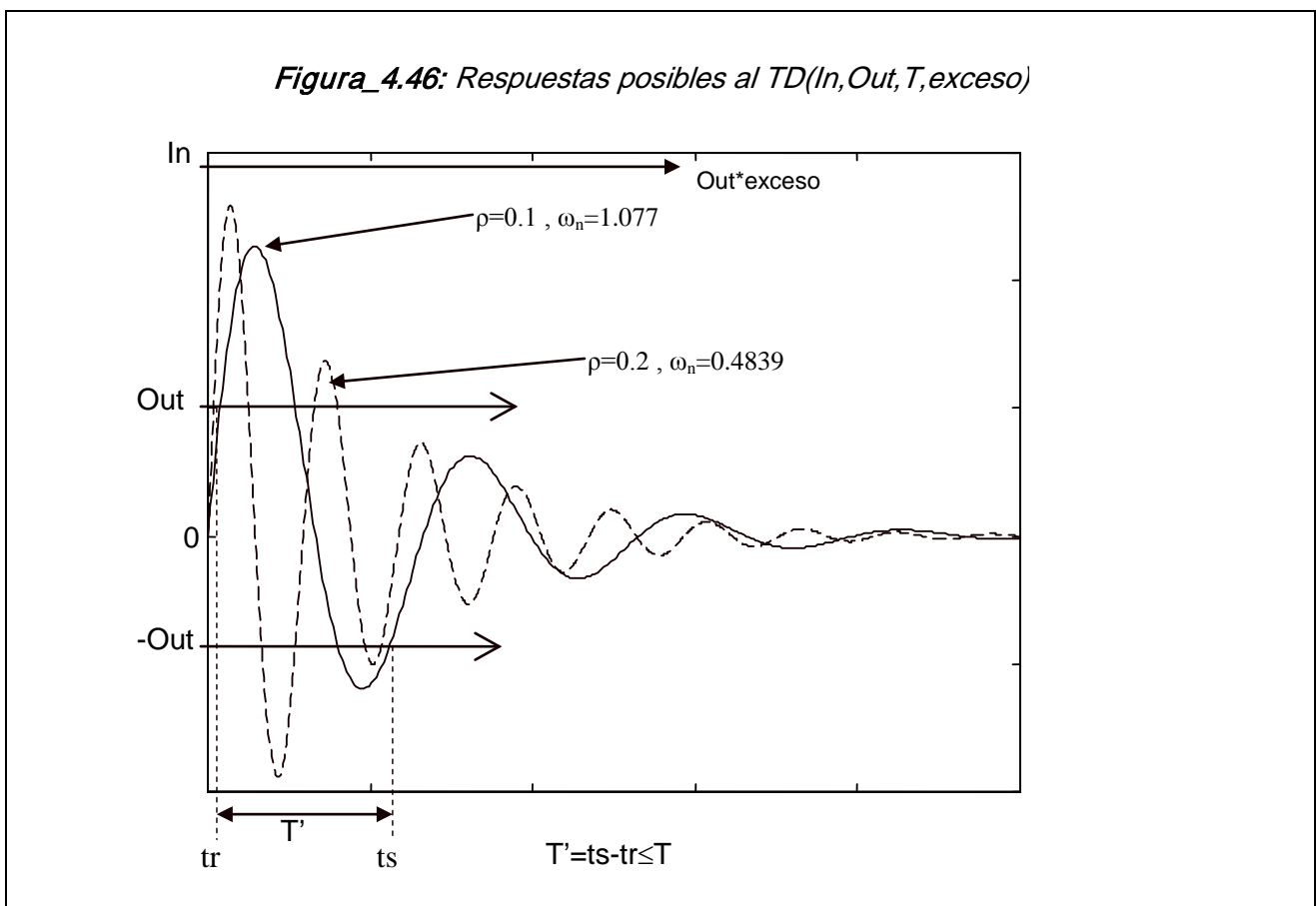
$$T_{Lo}(j\omega) = \frac{Num}{Den}(j\omega) \quad (4.95)$$

Este tipo de problema en técnicas de QFT se puede dar ocasionalmente a la hora de fijar las especificaciones de sensibilidad dadas como valores máximos de desviación entre dos magnitudes Out y $exceso$ veces Out , de la variable de control durante un tiempo concreto para una perturbación de entrada determinada, esto es,

$$S = \frac{y_{\max}}{d} \tag{4.96}$$

La secuencia de etapas de la **técnica_Esensib** (Especificación de Sensibilidades) es la que sigue,

- 1)- Obtención de pares (ω_n, ρ) o bien, del doble vector $wd(\omega_n, \rho)$, que cumpla las especificaciones TD dadas. Ver *Figura_4.46*.



1a)- La constante de tiempo de un sistema de 2º orden dada por $T_c = \frac{1}{\rho\omega_n}k$, se puede expresar para los tiempos T y $(ts - tr)$ cualquiera, respectivamente, como:

$$(ts - tr)(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n}k_{sr} \quad (4.97) \quad \text{y} \quad T(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n}k_T \quad (4.98)$$

Si ambos sistemas tienen la misma estabilidad relativa, es decir, mismo ρ con distinta ω_n , la constante de tiempo es igual para los dos y, por tanto, $k_{sr} = k_T = k$ (4.99)

$$\text{Como } (ts - tr)(\omega_n = 1) = \frac{1}{\rho}k \quad (4.100) \quad \text{y} \quad T(\omega_n) = \frac{1}{\rho\omega_n}k \quad (4.101)$$

$$\text{Se tiene que} \quad \frac{(ts - tr)(\omega_n = 1)}{T(\omega_n)} = \omega_n \quad (4.102)$$

1b)- Utilizar interpolación inversa¹⁵ sobre la función respuesta impulso $f(t)$ para determinar $(ts - tr)(\omega_n = 1)$, usando valores de alcance y asentamiento iguales. Es decir, con

$$mal = mas = \frac{out}{in} \quad (4.103)$$

1c)- Definir un bucle para todos los posibles valores de ρ para amortiguamiento subcrítico, es decir $0 < \rho < 1$, obteniendo ω_n equivalente al aplicar 1a) y 1b).

1d)- No todos los pares (ω_n, ρ) obtenidos en 1c) cumplen las especificaciones TD .

Para cada par (ω_{ni}, ρ_i) se busca $f_{\max}(\omega_{ni}, \rho_i)$. Proceso:

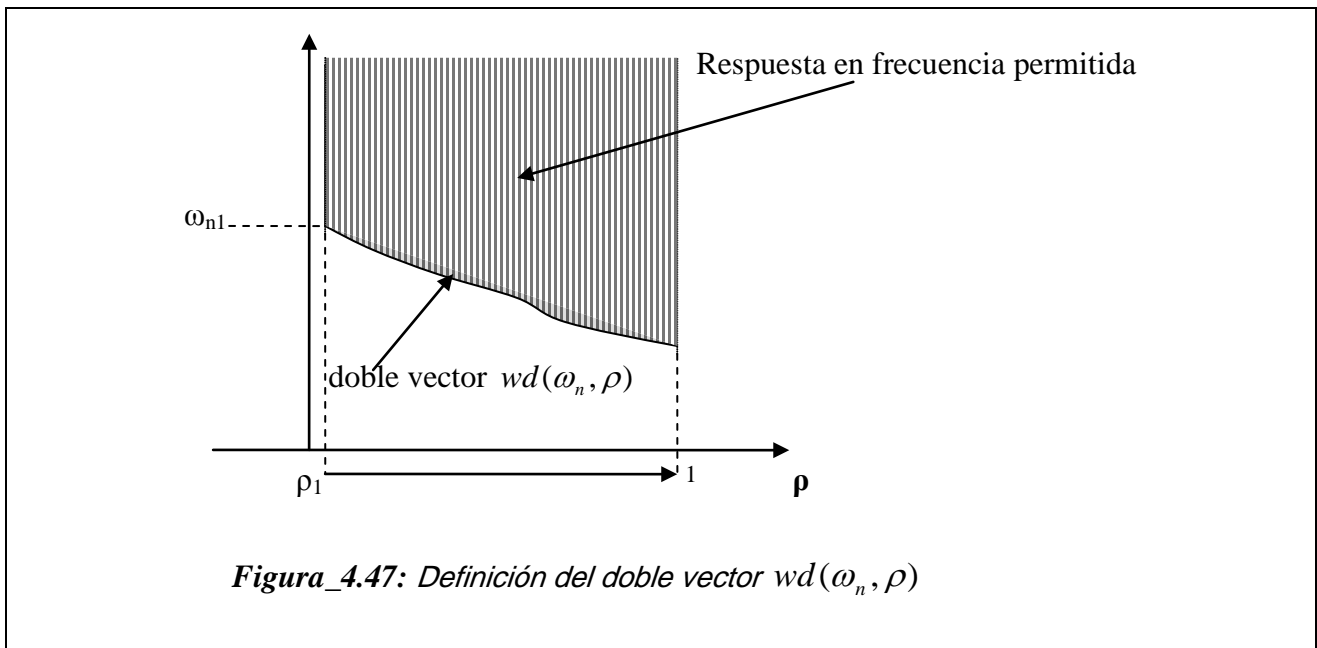
Si $f_{\max}(\omega_{ni}, \rho_i) \geq mal$ y $f_{\max}(\omega_{ni}, \rho_i) \leq mal * exceso \Rightarrow$ aplicar interpolación inversa de

$$f(mal, \omega_{ni}, \rho_i) \Rightarrow (ts - tr)(\omega_{ni})$$

Si $(ts - tr)(\omega_{ni}) \leq T(\omega_{ni}) \Rightarrow (\omega_{ni}, \rho_i)$ cumple las especificaciones $TD(Out, In, T, exceso)$

¹⁵ Función INTI2 desarrollada en Matlab4.2

El intervalo de paso entre un valor de ρ y el siguiente, va a determinar la precisión del resultado final. Un valor correcto inicial es de 0.01. Si con intervalos de este tamaño no se obtiene ningún par adecuado, disminuir su tamaño e iterar de nuevo. Ver *Figura_4.47*.

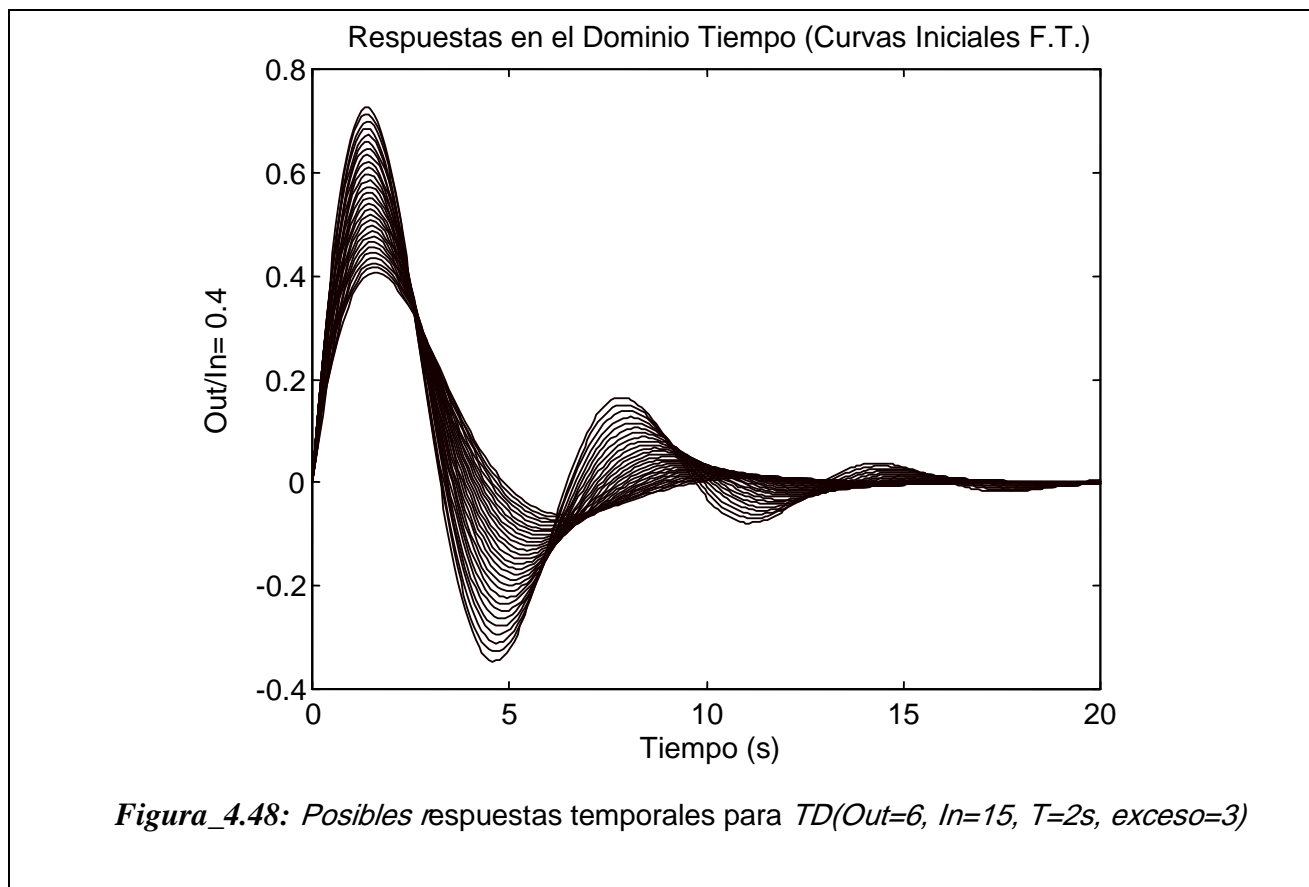


2)- Definición de las curvas de 2º orden $T(j\omega)$, tal que

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \text{ en donde sustituyendo el doble vector } wd(\omega_n, \rho) \text{ , se}$$

obtiene el conjunto de curvas en el diagrama de Bode para las especificaciones dadas.

Por ejemplo, dado un sistema con parámetros $TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)$, las posibles respuestas temporales, definidas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la *Figura_4.48*.

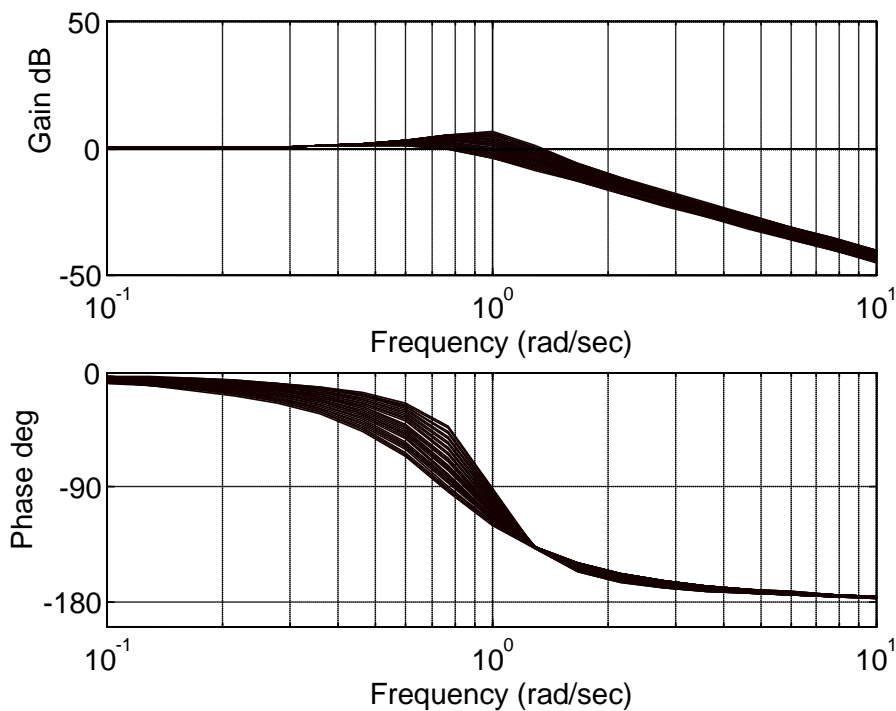


Las FT correspondientes a las curvas anteriores son:

$$\begin{aligned}
 FT1 &= \frac{0.9946}{s^2 + 0.4588s + 0.9946} , & FT2 &= \frac{0.9798}{s^2 + 0.4751s + 0.9798} , & FT3 &= \frac{0.9649}{s^2 + 0.4911s + 0.9649} \\
 FT4 &= \frac{0.9499}{s^2 + 0.5068s + 0.9499} , & FT5 &= \frac{0.9348}{s^2 + 0.5221s + 0.9348} , & FT6 &= \frac{0.9196}{s^2 + 0.537s + 0.9196} \\
 FT7 &= \frac{0.9044}{s^2 + 0.5516s + 0.9044} , & FT8 &= \frac{0.8891}{s^2 + 0.5658s + 0.8891} , & FT9 &= \frac{0.8738}{s^2 + 0.5796s + 0.8738} \\
 FT10 &= \frac{0.8584}{s^2 + 0.593s + 0.8584} , & FT11 &= \frac{0.843}{s^2 + 0.606s + 0.843} , & FT12 &= \frac{0.8276}{s^2 + 0.6186s + 0.8276} \\
 FT13 &= \frac{0.8121}{s^2 + 0.6308s + 0.8121} , & FT14 &= \frac{0.7966}{s^2 + 0.6426s + 0.7966} , & FT15 &= \frac{0.7811}{s^2 + 0.6426s + 0.7811} \\
 FT16 &= \frac{0.7656}{s^2 + 0.665s + 0.7656} , & FT17 &= \frac{0.7502}{s^2 + 0.665s + 0.7502} , & FT18 &= \frac{0.7348}{s^2 + 0.6858s + 0.7348} \\
 FT19 &= \frac{0.7195}{s^2 + 0.6955s + 0.71954} , & FT20 &= \frac{0.7042}{s^2 + 0.7049s + 0.7042} , & FT21 &= \frac{0.689}{s^2 + 0.7139s + 0.689}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FT22 &= \frac{0.674}{s^2 + 0.7224s + 0.674} , & FT23 &= \frac{0.659}{s^2 + 0.7306s + 0.659} , & FT24 &= \frac{0.6432}{s^2 + 0.7378s + 0.6432} \\
 FT25 &= \frac{0.6272}{s^2 + 0.7444s + 0.6272} , & FT26 &= \frac{0.6113}{s^2 + 0.7506s + 0.6113} , & FT27 &= \frac{0.5953}{s^2 + 0.7561s + 0.5953} \\
 FT28 &= \frac{0.5759}{s^2 + 0.7612s + 0.5759} , & FT29 &= \frac{0.5637}{s^2 + 0.7658s + 0.5637}
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

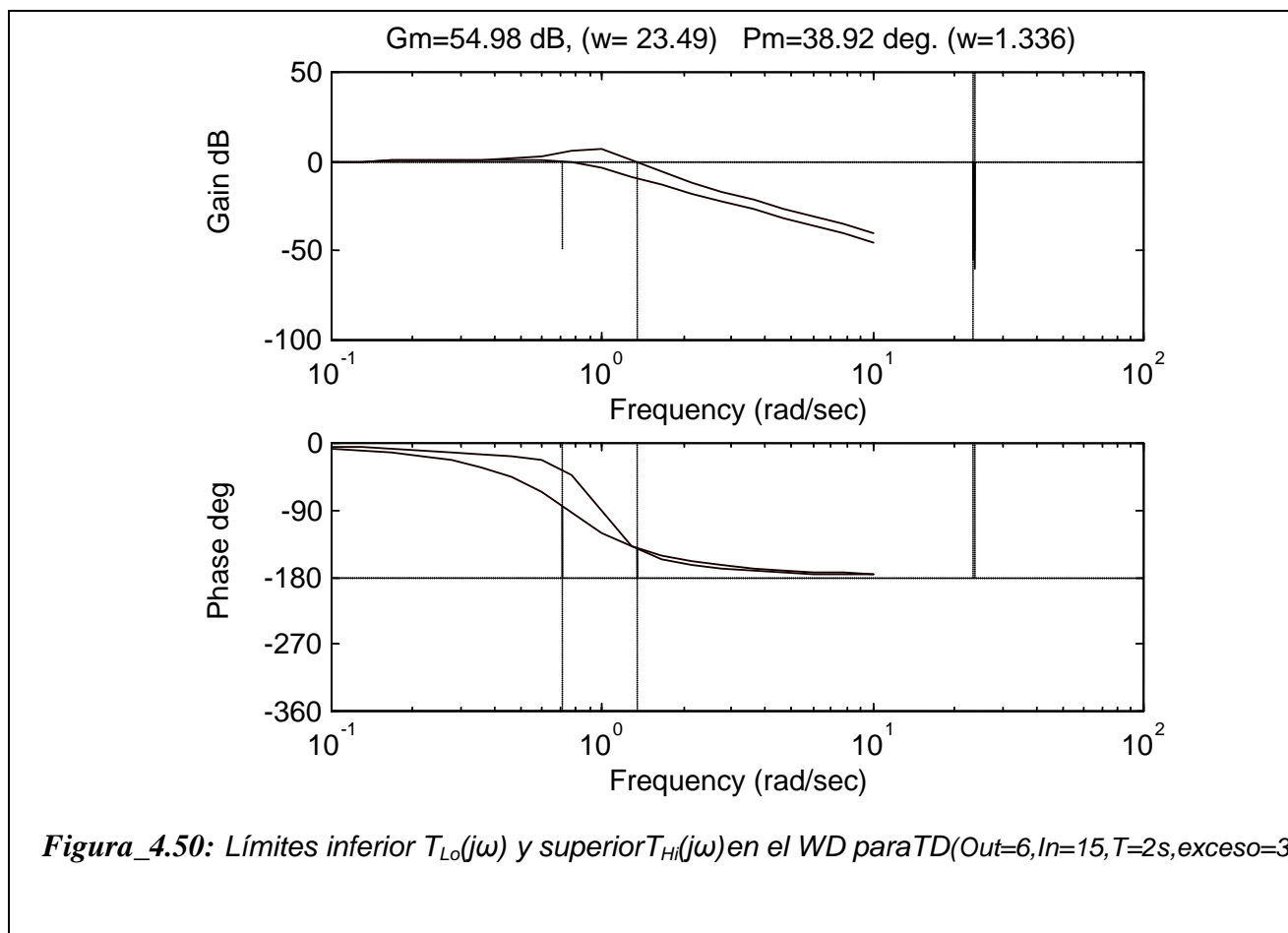
Las posibles respuestas en frecuencia, para el ejemplo propuesto, dadas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la *Figura_4.49*.



Figura_4.49: Posibles respuestas en frecuencia para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)

3)- Obtención de los límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$. Sobre el diagrama de Bode se busca, por un lado, la intersección inferior (mínimos de magnitud) y, por otro lado, la intersección superior (máximos de magnitud) de las

diferentes curvas definidas por los conjuntos de vectores $w d(\omega_{ni}, \rho)$, obteniendo para el ejemplo anterior, las curvas de la *Figura_4.50*.



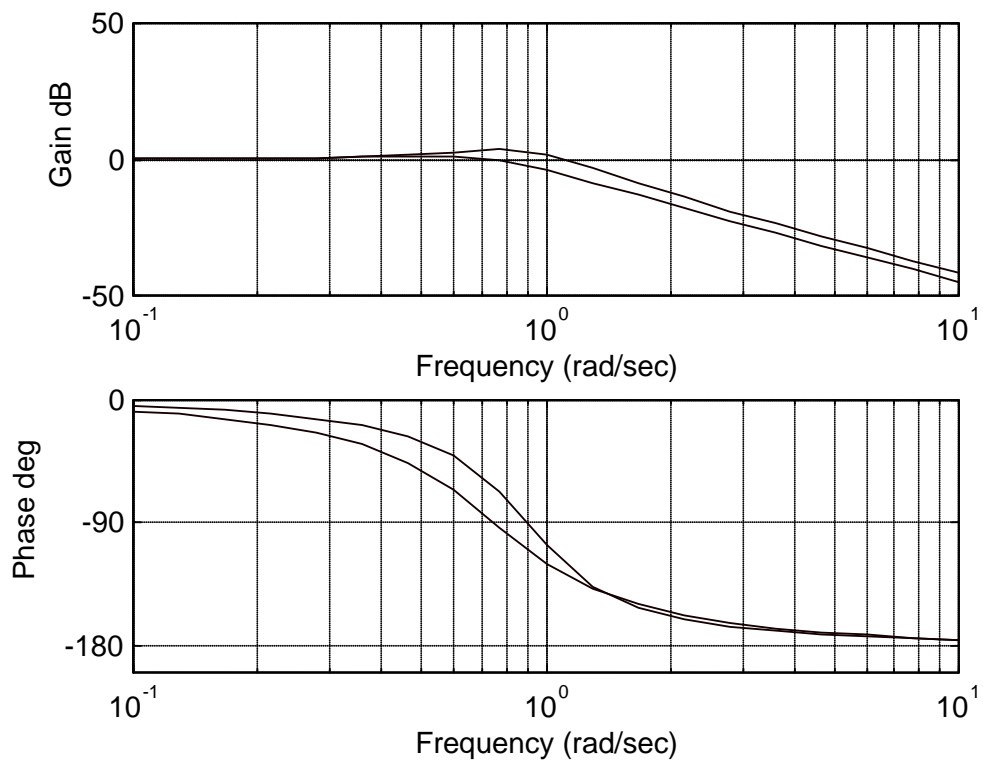
Las curvas anteriores se han obtenido a partir de los resultados de la siguiente tabla,

Tabla_4.4: Funciones de Transferencia de magnitud máxima y mínima para cada frecuencia w . Caso2-Esensib

$\omega(\text{rad/s})$	0.1	0.1292	0.1668	0.2154	0.2783	0.3594	0.4642	0.5995	0.7743	1	1.2915	1.6681	2.1544	2.7826	3.5938	4.6416	5.9948	7.7426	10
FT_{\min}	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29
FT_{\max}	13	13	12	11	10	7	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4)- Como los límites inferior y superior en frecuencia están compuestos por la intersección de varias curvas $T'(j\omega)$, la forma de describir su FT es aproximarla según alguno de los siguientes criterios:

a) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite inferior del WD con precisión para frecuencias bajas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Lo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud mínima para la frecuencia más baja del $BW_{T(j\omega)}$. Es decir, aplicando restricción a bajas frecuencias. Para $TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)$, se obtienen las curvas y FT de la *Figura_4.51*.



Figura_4.51: Límites inferior y superior en el WD para $TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)$ con aproximación por restricción a bajas frecuencias.

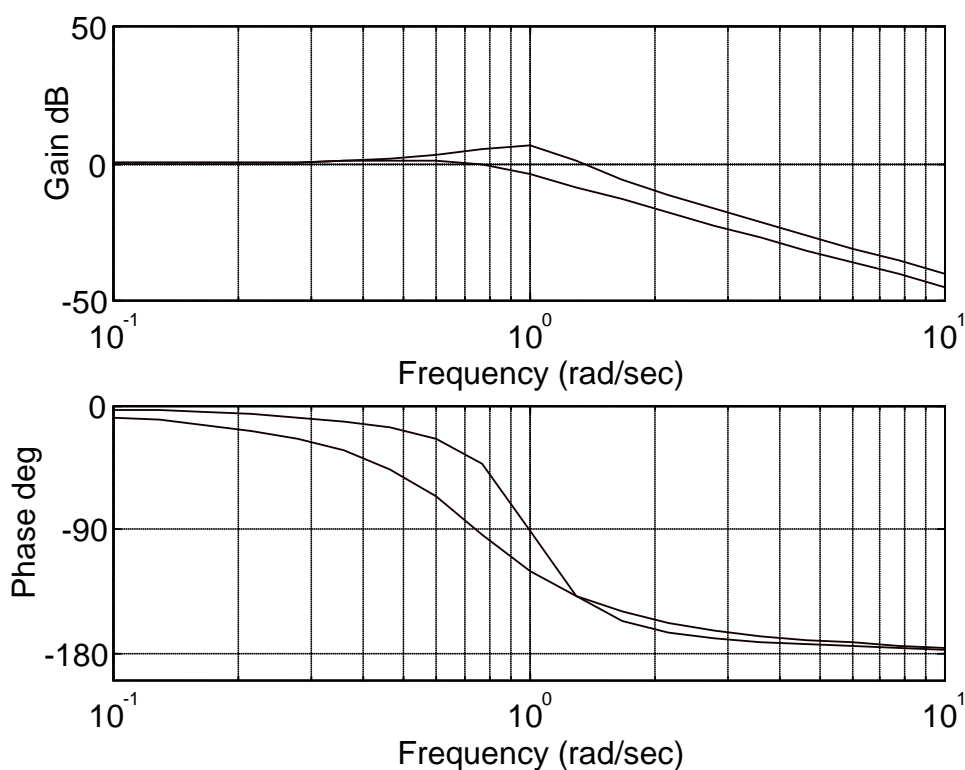
Obtención del límite w-inferior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por debajo:

$$FT29 = \frac{0.5637}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \tag{4.105}$$

Obtención del límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por arriba:

$$FT13 = \frac{0.8121}{s^2 + 0.6308s + 0.8121} \tag{4.106}$$

b) Considerando el ancho de banda de interés del sistema, $BW_{T(j\omega)}$, establecer el límite inferior del WD con precisión para frecuencias altas del mismo. Esto es, seleccionar como $T_{Lo}(j\omega)$, la $T(j\omega)$ de magnitud mínima para la frecuencia más alta del $BW_{T(j\omega)}$. Esto es, mediante restricción a altas frecuencias. Para $TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)$, se obtienen las curvas y FT de la *Figura_4.52*.



Figura_4.52: Límites inferior y superior en el WD para $TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3)$ con aproximación por restricción a altas frecuencias.

Obtención del límite w-inferior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por debajo:

$$FT29 = \frac{0.5637}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \quad (4.105)$$

Obtención del límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por arriba:

$$FT1 = \frac{0.9946}{s^2 + 0.4588s + 0.9946} \quad (4.107)$$

5)- Obtención de los parámetros *TD finales*, a partir de los *WD* conseguidos, que se ajustan a los *TD originales*. Esto es,

$$1. TD_{original}(Out, In, T, exceso) \rightarrow WD_{inferior}(Num, Den) \rightarrow TD_{final_máximos}(T_Out, tr_Out, ts_Out, Mp)$$

$$2. TD_{original}(Out, In, T, exceso) \rightarrow WD_{superior}(Num, Den) \rightarrow TD_{final_mínimos}(T_Out, tr_Out, ts_Out, Mp)$$

Para el ejemplo propuesto hasta el momento, $TD_{original}(Out = 6, In = 15, T = 2s, exceso = 3)$, se obtiene:

a) Aplicando la restricción dada en 4)a),

Para 1. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.03758}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \quad (4.108)$$

Para 1. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.03758s}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \quad (4.109)$$

Respuesta: $TD_{final_máximos}(T_Out = 0.6272s, tr_Out = 1.298s, ts_Out = 1.923s, Mp = 6.089)$

Coefficiente de amortiguamiento: 0.51, Frecuencia natural: 0.7508rad/s

Para 2. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.05414}{s^2 + 0.6308s + 0.8121} \quad (4.110)$$

Para 2. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.05414s}{s^2 + 0.6308s + 0.8121} \quad (4.111)$$

Respuesta: $TD_{final_mínimos}(T_Out = 1.7862s, tr_Out = 0.6301s, ts_Out = 2.416s, Mp = 8.583)$

Coefficiente de amortiguamiento: 0.35, Frecuencia natural: 0.9012rad/s

b) Aplicando la restricción dada en 4)b),

Para 1. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.03758}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \quad (4.108)$$

Para 1. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.03758s}{s^2 + 0.7658s + 0.5637} \quad (4.109)$$

Respuesta: $TD_{final_máximos}$ ($T_Out = 0.6272s, tr_Out = 1.298s, ts_Out = 1.923s, Mp = 6.089$)

Coefficiente de amortiguamiento: 0.51, Frecuencia natural: 0.7508rad/s

Para 2. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.06631}{s^2 + 0.4588s + 0.9946} \quad (4.112)$$

Para 2. El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.06631s}{s^2 + 0.4588s + 0.9946} \quad (4.113)$$

Respuesta: $TD_{final_mínimos}$ ($T_Out = 1.996s, tr_Out = 0.4624s, ts_Out = 2.459s, Mp = 10.9$)

Coefficiente de amortiguamiento: 0.23, Frecuencia natural: 0.9973rad/s

Los parámetros TD finales obtenidos varían en función del tipo de restricción inicial en frecuencia (baja/alta) y del límite WD seleccionado (inferior/superior), que influye a su vez en el límite temporal (máximo/mínimo). En cualquier caso, estos parámetros finales indican qué respuestas son aceptables y cuales no, observando en el TD hacia donde se desplazan los picos de las mismas cuando se varía ρ y ω_n , respecto de los picos de la respuesta TD final.

Las respuestas válidas posibles se esquematizan en la tabla siguiente,

Tabla_4.5: Relación entre límites en WD-TD y el tipo de aproximación elegida para la FT

Limitación WD-TD / Restricción en WD	Baja Frecuencia	Alta Frecuencia
w_inferior-t_máximos	Aumentar $\omega_n \Rightarrow$ Picos Respuestas se desplazan a la izquierda de <i>TD final</i>	Disminuir $\rho \Rightarrow$ Picos Respuestas se desplazan a la izquierda de <i>TD final</i>
w_superior-t_mínimos	Disminuir $\omega_n \Rightarrow$ Picos Respuestas se desplazan a la derecha de <i>TD final</i>	Aumentar $\rho \Rightarrow$ Picos Respuestas se desplazan a la derecha de <i>TD final</i>

4.2.6. Ejemplo Aplicado de la Técnica Esensib¹⁶

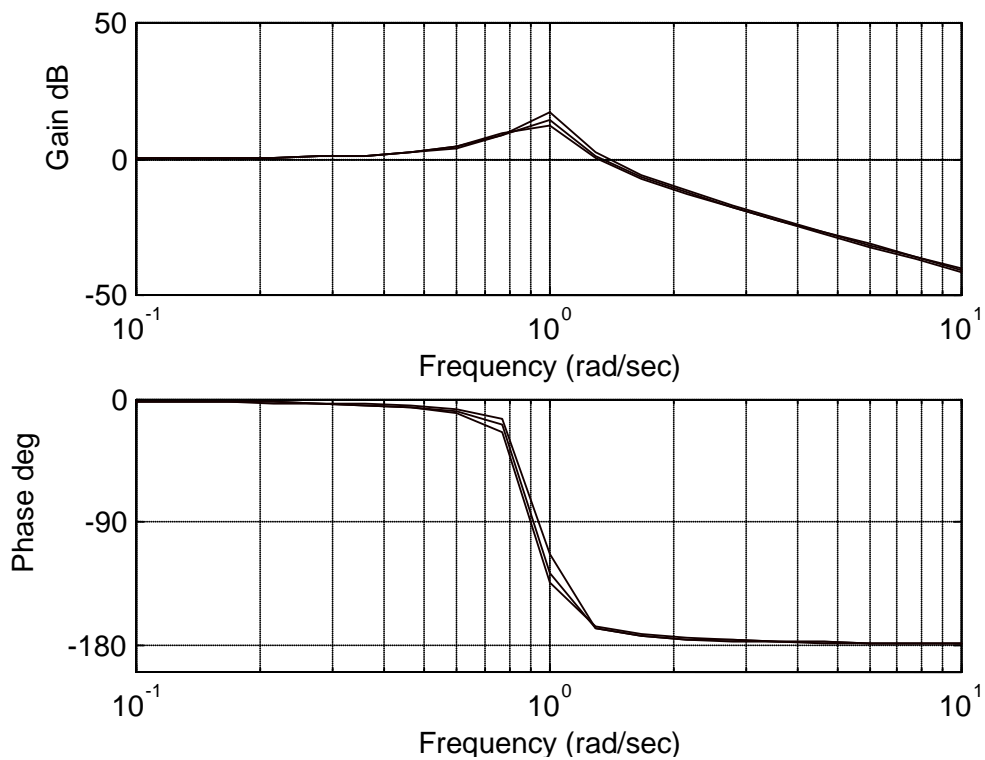
Supuesto $TD_{original} (Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$, se obtiene:

- Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$, a partir de $wd(\omega_n, \rho)$, esto es:

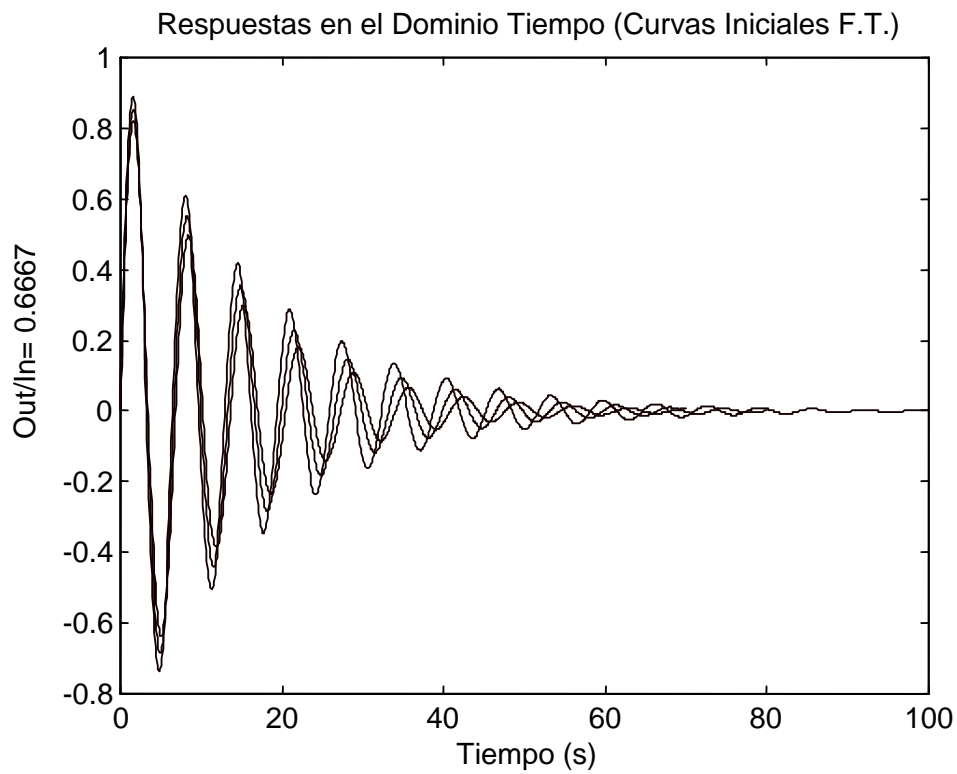
$$\left. \begin{aligned} FT1 &= \frac{0.9491}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \\ FT2 &= \frac{0.9002}{s^2 + 0.1328s + 0.9002} \\ FT3 &= \frac{0.8574}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \end{aligned} \right\} \quad (4.114)$$

- Conjuntos de Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$. *Figura_4.53.*
- Conjuntos de Respuestas del TD, equivalentes a los sistemas $T(j\omega)$. *Figura_4.54.*
- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$. *Figura_4.55.*

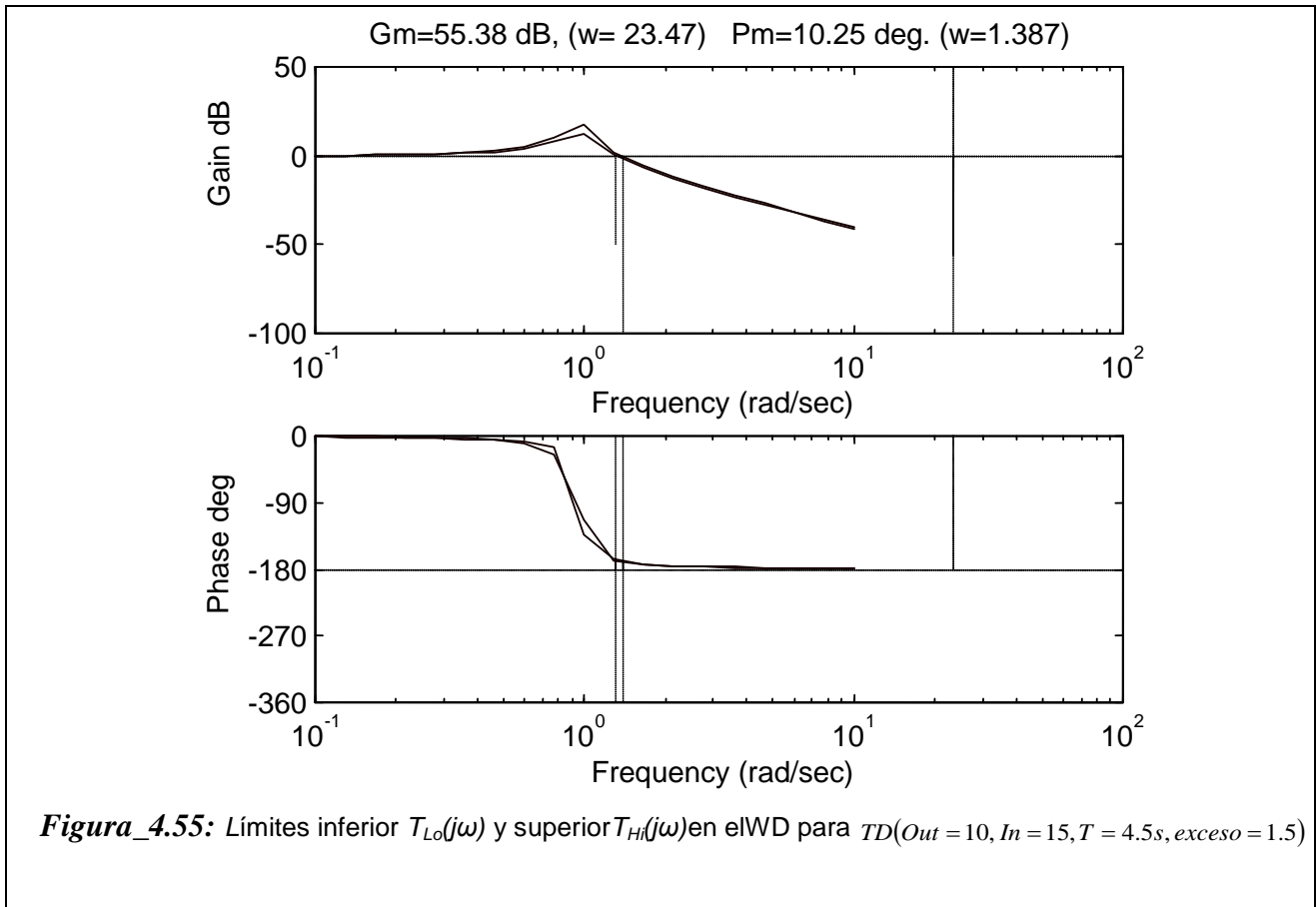
¹⁶ Utilizando la función ESENSIB desarrollada en Matlab4.2



Figura_4.53: Posibles respuestas en frecuencia para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$



Figura_4.54: Posibles respuestas temporales para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$



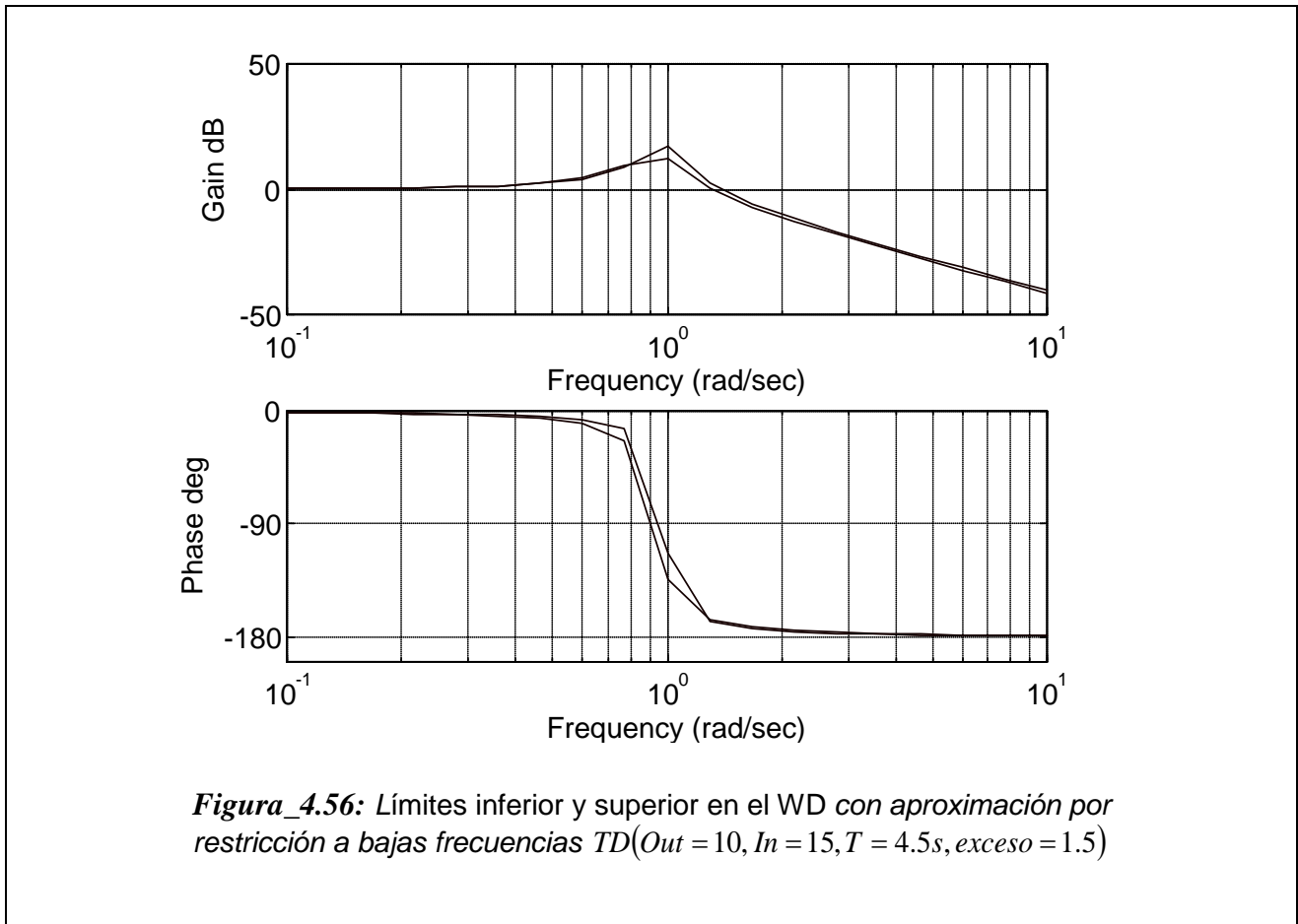
Las curvas anteriores de límites $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$, se han obtenido a partir de los resultados de la siguiente tabla,

Tabla_4.6: Funciones de Transferencia de magnitud máxima y mínima para cada frecuencia w . Técnica_Esensib

$\omega(\text{rad/s})$	0.1	0.1292	0.1668	0.2154	0.2783	0.3594	0.4642	0.5995	0.7743	1	1.2915	1.6681	2.1544	2.7826	3.5938	4.6416	5.9948	7.7426	10
FT_{min}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
FT_{max}	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$, considerando restricción a bajas frecuencias. *Figura_4.56.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Límite } w\text{-inferior definido como la curva } T(j\omega) \text{ inicial más restrictiva por debajo,} \\ \frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.9491}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \quad (4.115) \\ \text{Límite } w\text{-superior definido como la curva } T(j\omega) \text{ inicial más restrictiva por arriba,} \\ \frac{Num_max}{Den_max} = \frac{0.8574}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \quad (4.116) \end{array} \right.$$



- Obtención de las curvas y parámetros TD finales_máximos, ajustados a los TD originales. Figuras_4.57 y 4.58 para límite temporal superior:

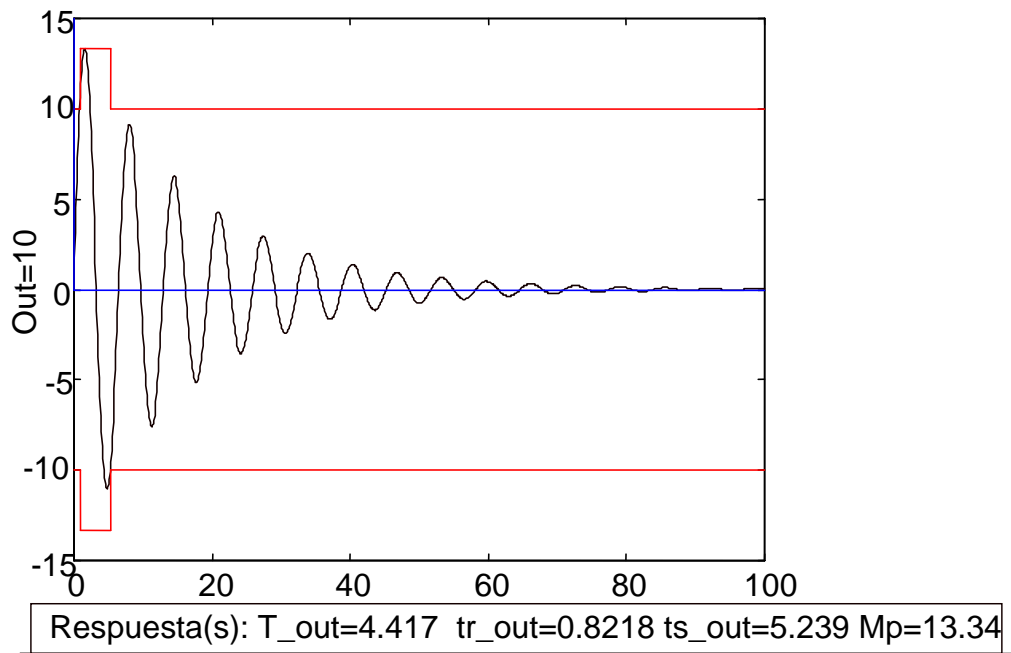
El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.06327}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \quad (4.117)$$

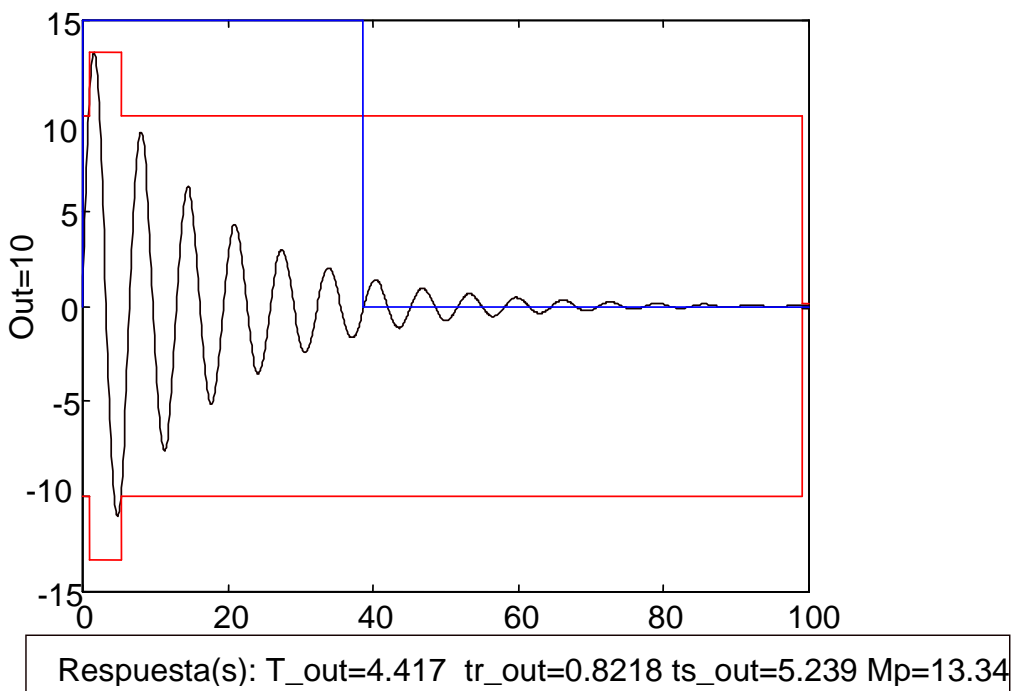
El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.06327s}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \quad (4.118)$$

Coefficiente de amortiguamiento:0.06 , Frecuencia natural:0.9742 rad/s



Figura_4.57: Respuesta Límite Temporal Superior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada IMPULSE



Figura_4.58: Respuesta Límite Temporal Superior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada STEP

- Obtención de las curvas y parámetros *TD finales_mínimos*, ajustados a los *TD originales*. Figuras_4.59 y 4.60 para límite temporal inferior:

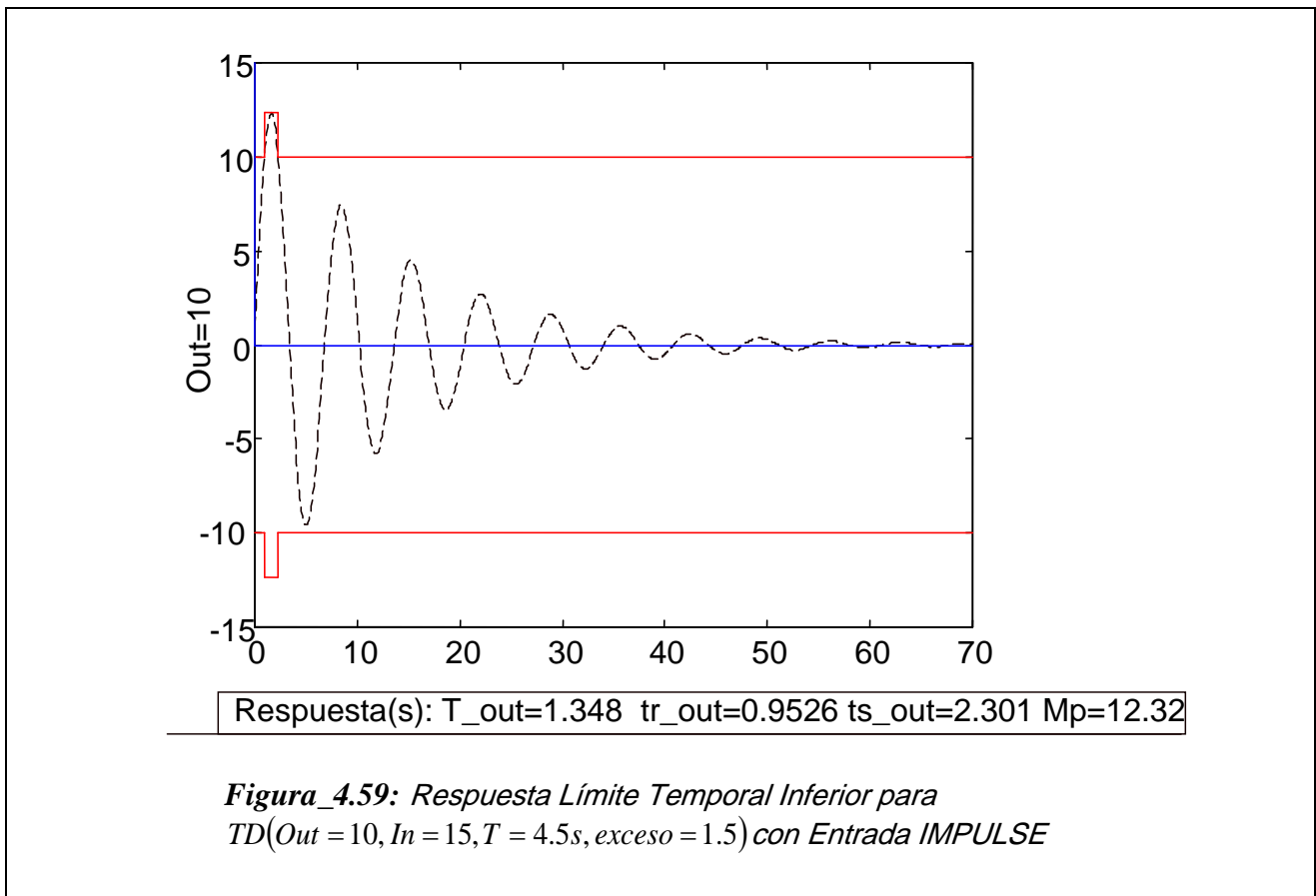
El valor de la función de transferencia sometida a una entrada IMPULSE es:

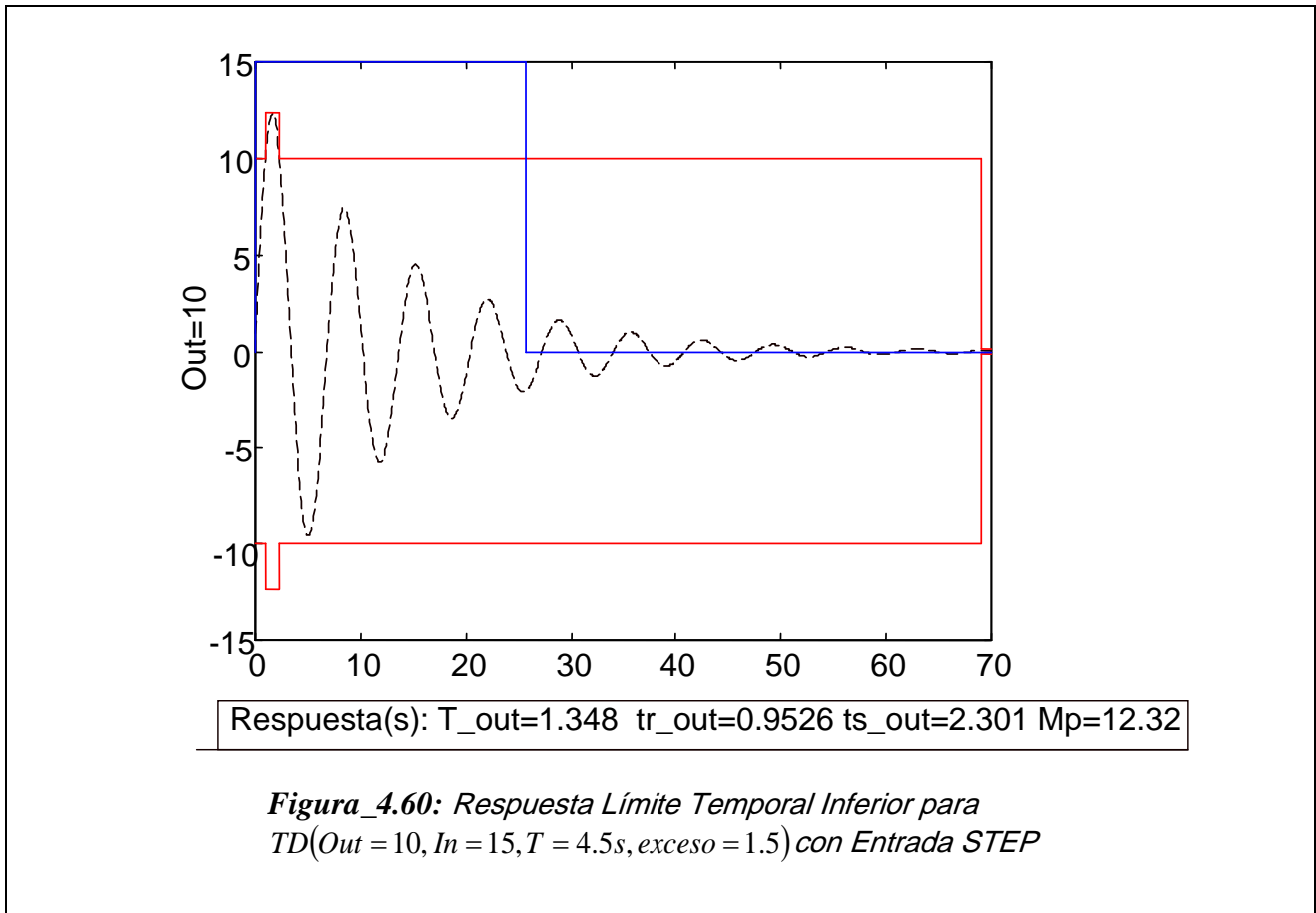
$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.05716}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \quad (4.119)$$

El valor de la función de transferencia sometida a una entrada STEP es:

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.05716s}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \quad (4.120)$$

Coefficiente de amortiguamiento: 0.08, Frecuencia natural: 0.926 rad/s





- Límites inferior y superior en el dominio frecuencial $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$, considerando restricción a altas frecuencias. Figura_4.61.

Límite w-inferior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por debajo,

$$\frac{Num_min}{Den_min} = \frac{0.8574}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \quad (4.121)$$

Límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por arriba,

$$\frac{Num_max}{Den_max} = \frac{0.9491}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \quad (4.122)$$

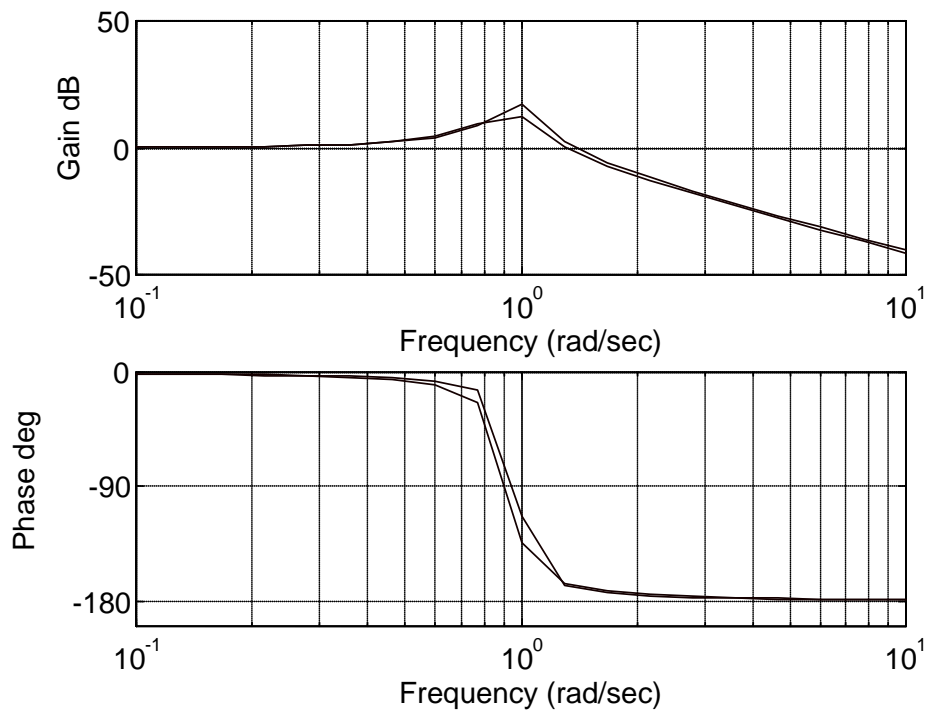


Figura 4.61: Límites inferior y superior en el WD con aproximación por restricción a altas frecuencias $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$

- Obtención de las curvas y parámetros TD finales_máximos, ajustados a los TD originales. Son los resultados indicados anteriormente en las Figuras_4.59 y 4.60 para límite temporal superior, es decir, para entrada STEP,

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.05716s}{s^2 + 0.1482s + 0.8574} \quad (4.123)$$

Coefficiente de amortiguamiento: 0.08, Frecuencia natural: 0.926 rad/s

- Obtención de las curvas y parámetros TD finales_mínimos, ajustados a los TD originales. Son los resultados indicados anteriormente en las Figuras_4.57 y 4.58 para límite temporal inferior, es decir, para entrada STEP,

$$\frac{Num}{Den} = \frac{0.06327s}{s^2 + 0.1169s + 0.9491} \quad (4.124)$$

Coefficiente de amortiguamiento: 0.06, Frecuencia natural: 0.9742 rad/s

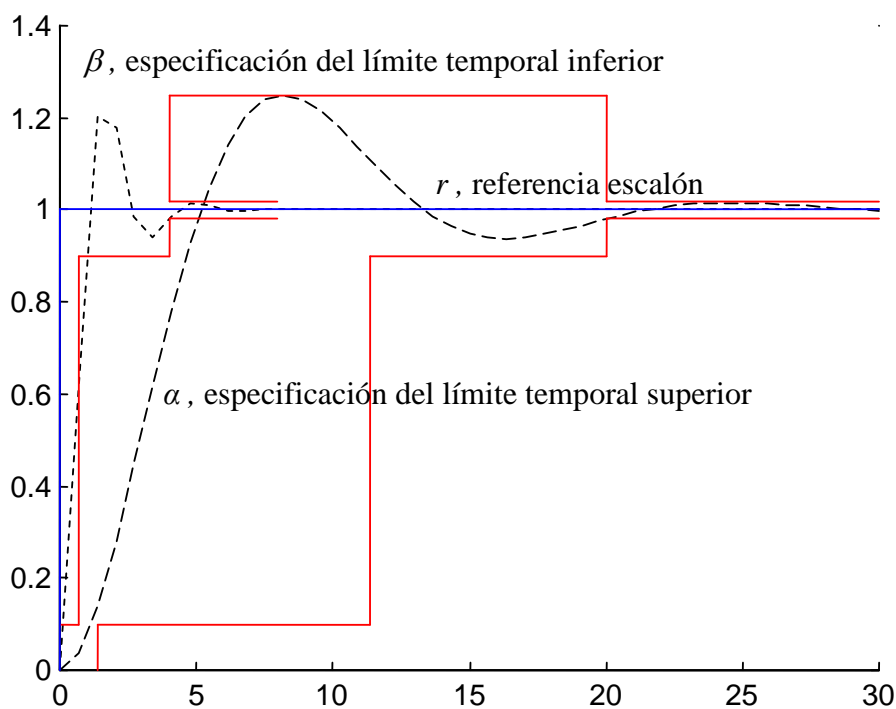
4.2.7. Esquema de la Solución Propuesta al Caso 3: Técnica Etrac.

La técnica presentada a continuación intenta dar solución al problema del traslado de especificaciones de *tracking desacoplado*, de manera simplificada.

El tracking propio o inherente de variables de control “y” acopladas a la referencia de

entrada “r” se expresa de la forma,
$$\frac{y}{r} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 1 \quad (4.125)$$

y viene dado en el *TD* por respuestas amortiguadas del tipo α y β , como las descritas en la *Figura_4.62*

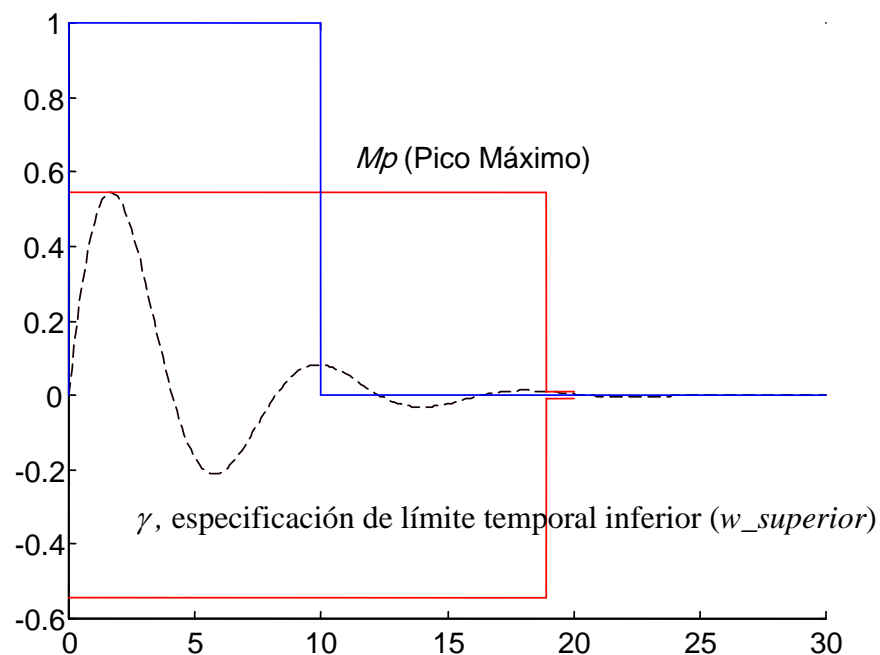


Figura_4.62: Tracking propio (acoplo) sobre una referencia escalón unitaria.

El tracking auxiliar de variables de control “y” desacopladas a la referencia de entrada se

expresa de la forma,
$$\frac{y}{r} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.126)$$

y viene dado en el *TD* por respuestas del tipo γ , como las descritas en la *Figura_4.63*



Figura_4.63: Tracking auxiliar (desacoplo) sobre una referencia escalón unitaria.

El método para traslado de “especificaciones del dominio temporal (TD)” a “especificaciones en el dominio frecuencial (WD)” esquematizado para tracking desacoplado, viene descrito por la relación siguiente,

$$TD(y_{\max}, r_{\max}) \rightarrow WD(Num, Den) \tag{4.127}$$

Donde los parámetros TD representan el valor máximo de desviación y_{\max} de una variable de control cuando se aplica una entrada de referencia escalón de amplitud r_{\max} ; la desviación sobre la variable de control se da en forma de impulso subamortiguado, de error estacionario nulo. Los parámetros WD son la función de transferencia (FT) del límite superior de error estacionario nulo, descrita en componentes del siguiente modo,

$$T_{Hi}(j\omega) = \frac{Num}{Den}(j\omega) \tag{4.128}$$

La secuencia de etapas de la **técnica Etrac** (Especificación de Tracking desacoplado) es la que sigue,

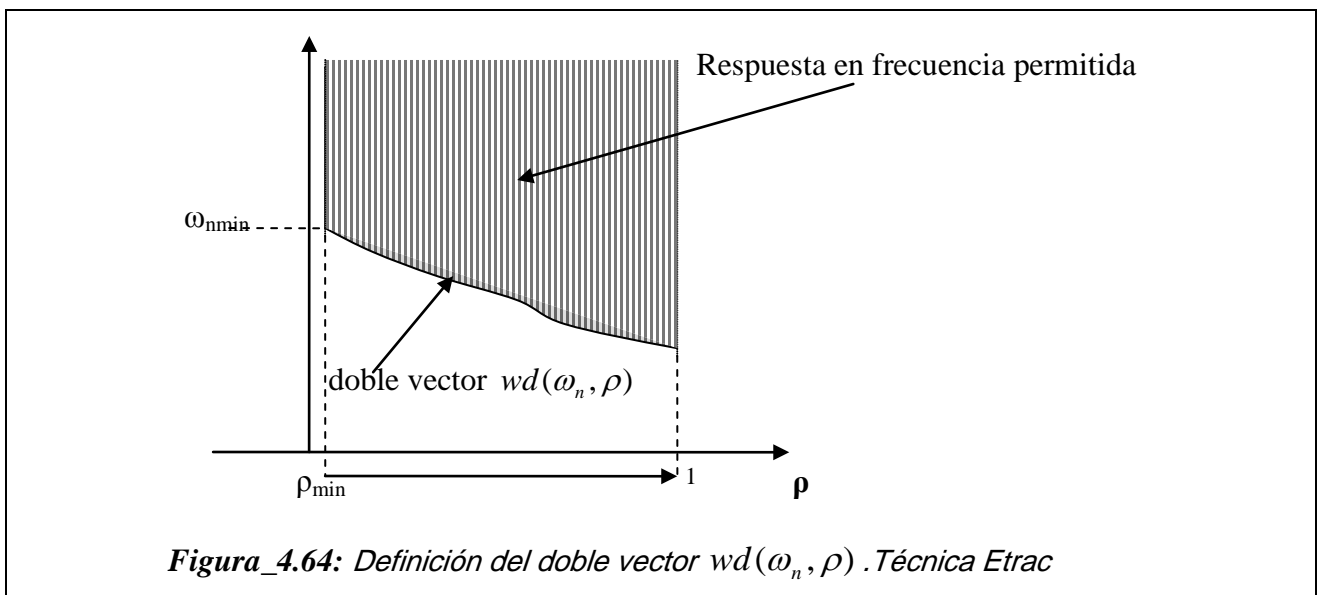
1)- Obtención de pares (ω_n, ρ) o bien, del doble vector $wd(\omega_n, \rho)$, que cumpla las especificaciones TD dadas.

1a)- Definir f_{max} y ρ_{min} , tal que

$$f_{max} = \frac{y_{max}}{r_{max}} \quad y \quad \rho_{min} = 0.05$$

1b)- Abrir un bucle e iterar desde ρ_{min} a $\rho_{max} = 1$ (sistema crítico, sin incluir) para encontrar el valor ω_n de cada coeficiente de amortiguamiento.

El intervalo de paso entre un valor de ρ y el siguiente, va a determinar la precisión del resultado final. Un valor correcto práctico es de 0.05. Ver *Figura_4.64*.



Utilizar el siguiente criterio,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } abs\left(\frac{y_{max}}{r_{max}}\right) > 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{f_{max}}{e^{-\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} a \tan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)}} \end{array} \right. \quad (4.129)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } abs\left(\frac{y_{max}}{r_{max}}\right) < 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{-f_{max}}{e^{-\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} a \tan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)}} \end{array} \right. \quad (4.130)$$

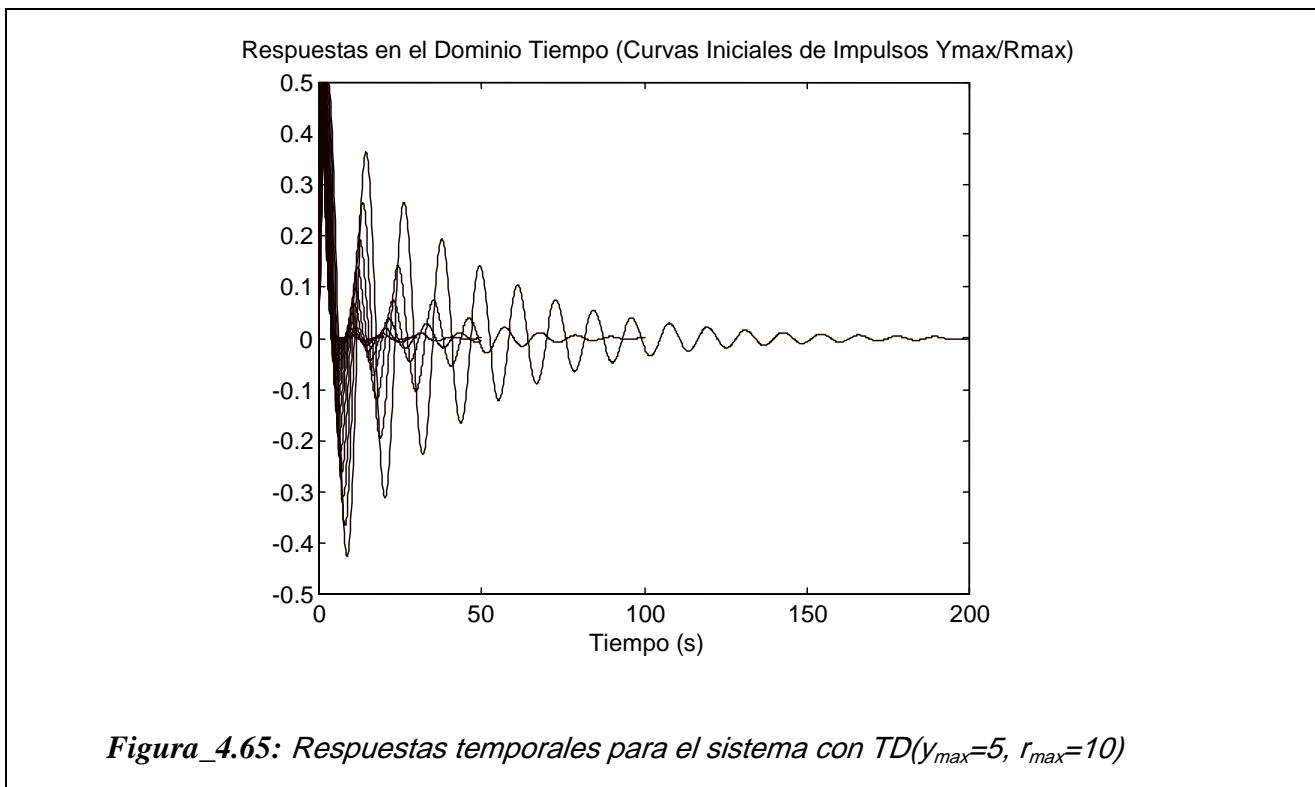
2)- Definición de las curvas de 2º orden $T(j\omega)$, tal que

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \text{ en donde sustituyendo el doble vector } wd(\omega_n, \rho) \text{ , se}$$

obtiene el conjunto de curvas en el diagrama de Bode para las especificaciones dadas.

Por ejemplo, dado un sistema con parámetros $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$, las posibles respuestas temporales, definidas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la

Figura_4.65.



Figura_4.65: Respuestas temporales para el sistema con $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$

Las FT correspondientes a las curvas anteriores son:

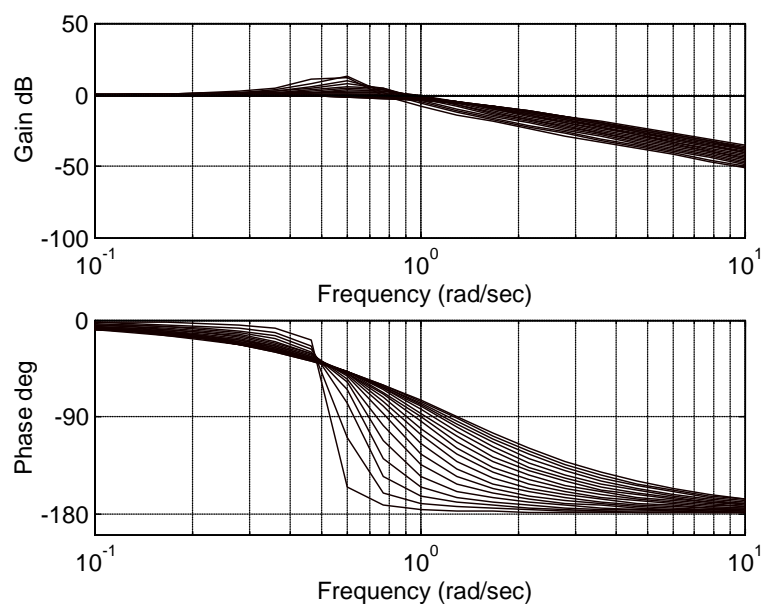
$$FT1(\rho = 0.05, \omega_n = 0.5396) = \frac{0.2911}{s^2 + 0.05396s + 0.2911} \quad , \quad FT2(\rho = 0.1, \omega_n = 0.5796) = \frac{0.336}{s^2 + 0.1159s + 0.336}$$

$$FT3(\rho = 0.15, \omega_n = 0.6202) = \frac{0.3847}{s^2 + 0.1861s + 0.3847} \quad , \quad FT4(\rho = 0.2, \omega_n = 0.6613) = \frac{0.4373}{s^2 + 0.2645s + 0.4373}$$

$$FT5(\rho = 0.25, \omega_n = 0.7027) = \frac{0.4938}{s^2 + 0.3514s + 0.4938} \quad , \quad FT6(\rho = 0.3, \omega_n = 0.7445) = \frac{0.5544}{s^2 + 0.4467s + 0.5544}$$

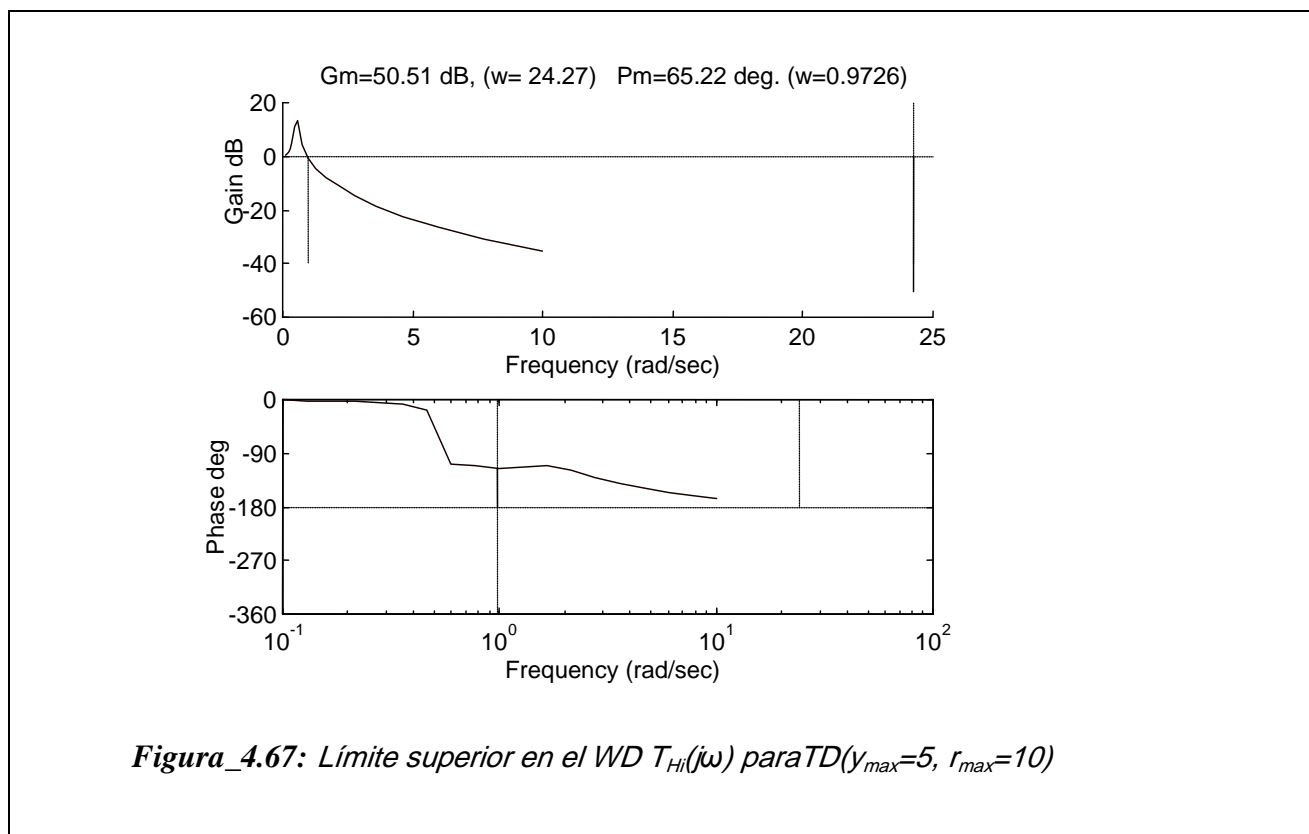
$$\begin{aligned}
 FT7(\rho = 0.35, \omega_n = 0.7867) &= \frac{0.619}{s^2 + 0.5507s + 0.619} , & FT8(\rho = 0.4, \omega_n = 0.8293) &= \frac{0.6877}{s^2 + 0.6634s + 0.6877} \\
 FT9(\rho = 0.45, \omega_n = 0.8721) &= \frac{0.7606}{s^2 + 0.7849s + 0.7606} , & FT10(\rho = 0.5, \omega_n = 0.9153) &= \frac{0.8377}{s^2 + 0.9153s + 0.8377} \\
 FT11(\rho = 0.55, \omega_n = 0.9587) &= \frac{0.919}{s^2 + 1.055s + 0.919} , & FT12(\rho = 0.6, \omega_n = 1.002) &= \frac{1.005}{s^2 + 1.203s + 1.005} \\
 FT13(\rho = 0.65, \omega_n = 1.046) &= \frac{1.095}{s^2 + 1.36s + 1.095} , & FT14(\rho = 0.7, \omega_n = 1.09) &= \frac{1.189}{s^2 + 1.526s + 1.189} \\
 FT15(\rho = 0.75, \omega_n = 1.135) &= \frac{1.288}{s^2 + 1.702s + 1.288} , & FT16(\rho = 0.8, \omega_n = 1.179) &= \frac{1.391}{s^2 + 1.887s + 1.391} \\
 FT17(\rho = 0.85, \omega_n = 1.224) &= \frac{1.498}{s^2 + 2.081s + 1.498} , & FT18(\rho = 0.9, \omega_n = 1.269) &= \frac{1.61}{s^2 + 2.284s + 1.61} \\
 FT19(\rho = 0.95, \omega_n = 1.314) &= \frac{1.726}{s^2 + 2.496s + 1.726} & & (4.131)
 \end{aligned}$$

Las posibles respuestas en frecuencia, para el ejemplo propuesto, dadas por el doble vector $wd(\omega_n, \rho)$ se indican en la *Figura_4.66*



Figura_4.66: Respuestas en frecuencia para el sistema TD($y_{max}=5, r_{max}=10$)

3)- Obtención del límite superior en el dominio frecuencial $T_{Hi}(j\omega)$. Sobre el diagrama de Bode se busca la intersección superior (máximos de magnitud) de las curvas definidas por el vector $wd(\omega_n, \rho)$, obteniendo para el ejemplo anterior, las curvas de la *Figura_4.67*.



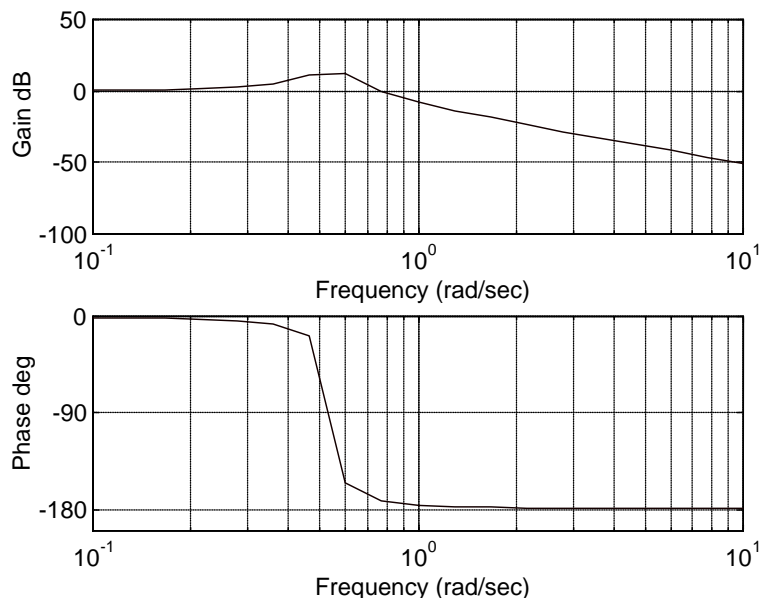
Las curvas anteriores se han obtenido a partir de los resultados de la siguiente tabla,

Tabla_4.7: Funciones de Transferencia de magnitud máxima para cada frecuencia w . Técnica Etrac

$\omega(\text{rad/s})$	0.1	0.1292	0.1668	0.2154	0.2783	0.3594	0.4642	0.5995	0.7743	1	1.2915	1.6681	2.1544	2.7826	3.5938	4.6416	5.9948	7.7426	10	
FT_{max}	1	1	1	1	1	1	1	2	5	8	12	17	19	19	19	19	19	19	19	19

4)- Estando el límite superior en frecuencia compuesto por la intersección de varias curvas $T(j\omega)$, la forma de describir su FT es aproximarla según alguno de los siguientes criterios:

a) Aplicando restricción a bajas frecuencias. Para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ se obtienen las curvas y FT de la *Figura_4.68*.

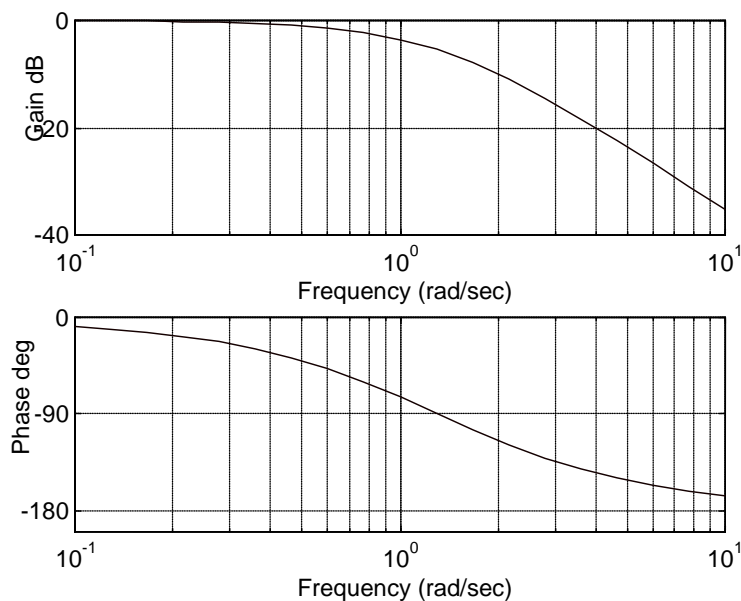


Figura_4.68: Límite superior en el WD $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ con restricción a bajas frecuencias.

Obtención del límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por arriba,

$$FT1(\rho = 0.05, \omega_n = 0.5396) = \frac{0.2911}{s^2 + 0.05396s + 0.2911} \tag{4.132}$$

b) Mediante restricción a altas frecuencias. Para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ se obtienen las curvas y FT de la *Figura_4.69*.



Figura_4.69: Límite superior en el WD $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ con restricción a altas frecuencias.

Obtención del límite w-superior definido como la curva $T(j\omega)$ inicial más restrictiva por arriba,

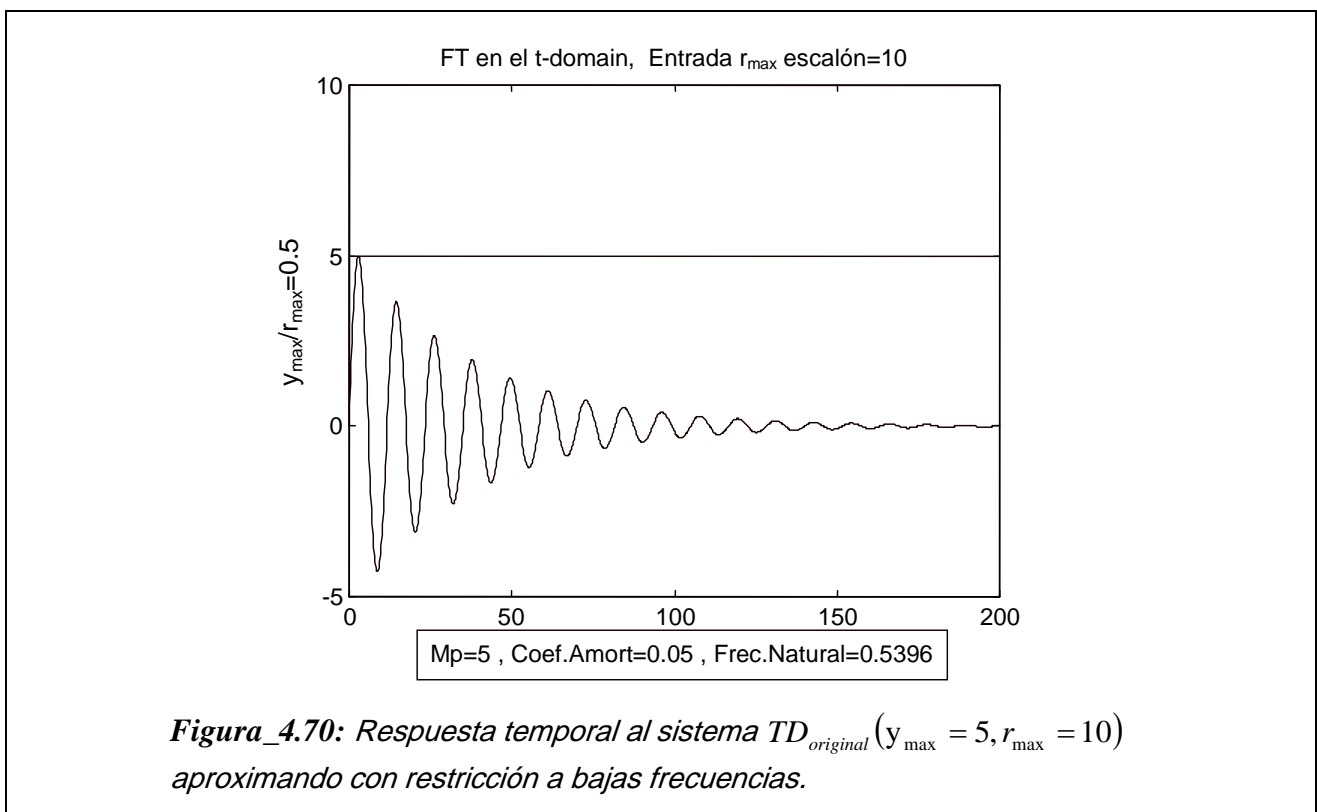
$$FT19(\rho = 0.95, \omega_n = 1.314) = \frac{1.726}{s^2 + 2.496s + 1.726} \quad (4.133)$$

5)- Obtención de los parámetros TD finales, a partir de los WD conseguidos, que se ajustan a los TD originales. Esto es,

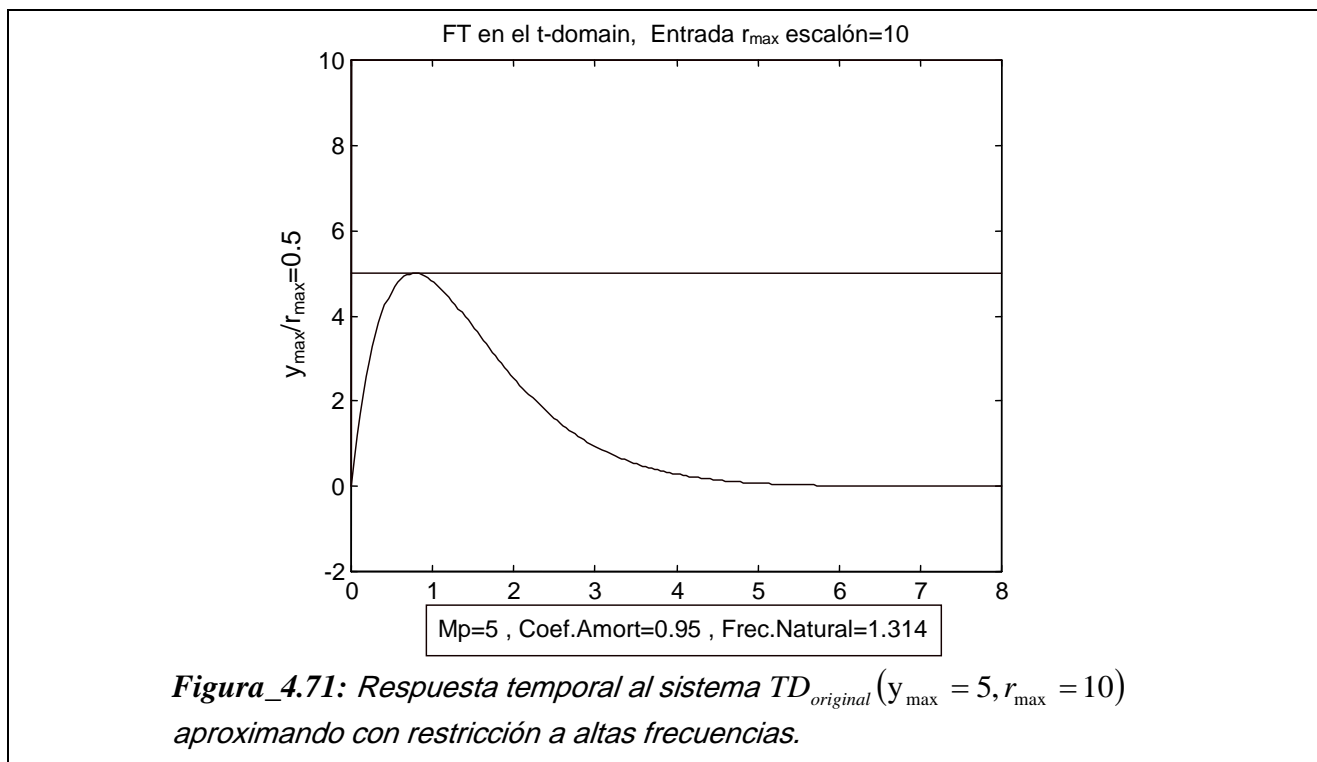
$$TD_{original}(y_{max}, r_{max}) \rightarrow WD_{superiorr}(Num, Den) \rightarrow TD_{final}(Mp, \rho, \omega_n) \quad (4.134)$$

Para el ejemplo propuesto hasta el momento, $TD_{original}(y_{max} = 5, r_{max} = 10)$, se obtiene:

a) Aplicando la restricción dada en 4)a),



b) Aplicando la restricción dada en 4)b),



4.2.8 Búsqueda de $\rho(Mp, \omega_n = 1)$ y $ts(\rho, \omega_n, desv)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensibq)

1. Búsqueda de $\rho(Mp, \omega_n = 1)$ ¹⁷.

Para entradas impulso con amortiguamiento subcrítico, se tiene como respuesta,

$$f(t, \rho) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\rho\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t\right), \text{ con } 0 < \rho < 1 \tag{4.135}$$

Se define la función de interpolación $f(\rho)$, para cada valor ρ asociado a Mp , como,

$$f(\rho) = \omega_n e^{-\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)} \tag{4.136}$$

¹⁷ Para ello, se hace uso de la función INTIPI desarrollada en Matlab4.2

Las fórmulas de Newton de 5º orden aplicadas para la determinación de coeficientes de amortiguamiento son,

Diferencias Descendentes:

$$f(\rho_0 + \theta h) = f(\rho_0) + \delta_d^1 \theta + \frac{\delta_d^2}{2} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^3}{3!} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^4}{4!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^5}{5!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (4.137)$$

Diferencias Ascendentes:

$$f(\rho_0 + \theta h) = f(\rho_0) + \delta_a^1 \theta + \frac{\delta_a^2}{2} \theta(\theta+1) + \frac{\delta_a^3}{3!} \theta(\theta+1)(\theta+2) + \frac{\delta_a^4}{4!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3) + \frac{\delta_a^5}{5!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4) \quad (4.138)$$

Donde h es el intervalo elegido sobre la variable ρ a recorrer para amortiguamiento subcrítico. El procedimiento general consiste en calcular θ por iteración. Es decir, se despeja $\theta = F(\theta)$ y se asigna un valor inicial $F(\theta_0) = \theta_1$. Si θ_1 es adecuado se termina el proceso, en caso contrario, se siguen asignando valores $F(\theta_1) = \theta_2$ hasta que se obtenga,

$$|\theta_i - \theta_{i-1}| < |\theta_{i-1} - \theta_{i-2}| \quad (4.139)$$

Entonces, despejando θ en la ecuación de *diferencias descendentes*, por ejemplo, y sustituyendo, se tiene,

$$\theta = \frac{f(\rho_0 + \theta h) - f(\rho_0)}{\delta_d} - \frac{\delta_d^2}{2\delta_d^1} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^3}{3!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^4}{4!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^5}{5!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (4.140)$$

Para empezar la iteración, se escoge
$$\theta_0 = \frac{f(\rho_0 + \theta h) - f(\rho_0)}{\delta_d} \quad (4.141)$$

Para la función que nos ocupa, la secuencia de pasos a realizar sería:

- Definir el intervalo de paso h . Dado que los valores posibles de ρ van desde 0 a 1, ambos sin incluir, un valor válido de intervalo puede ser 1/10 del mismo. Es decir,

$$\text{por ejemplo}^{18}, \quad h = \frac{0.999 - 0.001}{10} \quad (4.142)$$

Y utilizar como valores discretos:

$$\rho = \{\rho_1 = 0; \rho_2 = \rho_1 + h; \dots; \rho_n = \rho_{n-1} + h, \text{ con } i=1, \dots, n\} \quad (4.143)$$

- Obtener los valores de la tabla indicada,

Tabla_4.8: Relación de valores $f(\rho)$

ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_n
$f(\rho)$	$f(\rho_1)$	$f(\rho_2)$	$f(\rho_n)$

- Obtener los valores δ de 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, ... orden, con una tabla de diferencias como la que se indica,

Tabla_4.9: Diferencias δ para funciones $f(\rho)$ de 1°, 2°, 3°, 4°y 5° orden

ρ	$f(\rho)$	1° Orden	2° Orden	3° Orden	4° Orden	5° Orden
ρ_1	$f(\rho_1)$ ●	$\delta_{11} = f(t_2) - f(t_1)$	$\delta_{21} = \delta_{12} - \delta_{11}$	$\delta_{31} = \delta_{22} - \delta_{21}$	$\delta_{41} = \delta_{32} - \delta_{31}$	$\delta_{51} = \delta_{42} - \delta_{41}$
ρ_2	$f(\rho_2)$ ●	$\delta_{12} = f(t_3) - f(t_2)$	$\delta_{22} = \delta_{13} - \delta_{12}$	$\delta_{32} = \delta_{23} - \delta_{22}$	$\delta_{42} = \delta_{33} - \delta_{32}$	$\delta_{52} = \delta_{43} - \delta_{42}$
ρ_3	$f(\rho_3)$ ●	$\delta_{13} = f(t_4) - f(t_3)$	$\delta_{23} = \delta_{14} - \delta_{13}$	$\delta_{33} = \delta_{24} - \delta_{23}$	$\delta_{43} = \delta_{34} - \delta_{33}$	$\delta_{53} = \delta_{44} - \delta_{43}$
ρ_4	$f(\rho_4)$ ●	$\delta_{14} = f(t_5) - f(t_4)$	$\delta_{24} = \delta_{15} - \delta_{14}$	$\delta_{34} = \delta_{25} - \delta_{24}$	$\delta_{44} = \delta_{35} - \delta_{34}$	$\delta_{54} = \delta_{45} - \delta_{44}$
ρ_5	$f(\rho_5)$ ●	$\delta_{15} = f(t_6) - f(t_5)$	$\delta_{25} = \delta_{16} - \delta_{15}$	$\delta_{35} = \delta_{26} - \delta_{25}$	$\delta_{45} = \delta_{36} - \delta_{35}$	$\delta_{55} = \delta_{46} - \delta_{45}$
ρ_6	$f(\rho_6)$ ●	$\delta_{16} = f(t_7) - f(t_6)$	$\delta_{26} = \delta_{17} - \delta_{16}$	$\delta_{36} = \delta_{27} - \delta_{26}$	$\delta_{46} = \delta_{37} - \delta_{36}$	$\delta_{56} = \delta_{47} - \delta_{46}$
ρ_7	$f(\rho_7)$ ◆	$\delta_{17} = f(t_8) - f(t_7)$	$\delta_{27} = \delta_{18} - \delta_{17}$	$\delta_{37} = \delta_{28} - \delta_{27}$	$\delta_{47} = \delta_{38} - \delta_{37}$	
ρ_8	$f(\rho_8)$ ◆	$\delta_{18} = f(t_9) - f(t_8)$	$\delta_{28} = \delta_{19} - \delta_{18}$	$\delta_{38} = \delta_{29} - \delta_{28}$		
ρ_9	$f(\rho_9)$ ◆	$\delta_{19} = f(t_{10}) - f(t_9)$	$\delta_{29} = \delta_{10} - \delta_{19}$			
ρ_{10}	$f(\rho_{10})$ ◆	$\delta_{10} = f(t_{11}) - f(t_{10})$				
ρ_{11}	$f(\rho_{11})$ ◆					

● --- ➔ Definición de funciones por diferencias descendentes.

◆ ... ➤ Definición de funciones por diferencias ascendentes.

¹⁸ Para esta precisión, elegida a la hora de definir el intervalo h sin los valores extremos 1 y 0, se va a conseguir que la función INTIPI ofrezca valores dentro del intervalo $M_p = [0.36813, 0.99843]$, para $w_n = 1$; este intervalo cambia como $M_{p,w_n} = w_n * M_{p,w_n=1}$; si se quiere ampliar el intervalo M_p de trabajo hay que seleccionar en h valores extremos más cercanos al 1 y 0.

- Obtener ρ_0 y elegir el procedimiento de diferencias más adecuado, con el siguiente criterio (para el ejemplo de la tabla anterior, de 11 valores de ρ muestreados),

Si $f(\rho_i) < Mp$, con $i=1,2,\dots,6$, Entonces,

$$\color{blue}{\downarrow} \text{ Diferencias Descendentes y } f(\rho_0) = f(\rho_{i-1}) < f(\rho) , \text{ con } \rho_i < \rho < \rho_{i+1} \quad (4.144)$$

es decir, el más cercano con valor inferior al buscado.

Si $f(\rho_i) < Mp$, con $i=7,8,\dots,11$, Entonces,

$$\color{blue}{\downarrow} \text{ Diferencias Ascendentes y } f(\rho_0) = f(\rho_i) > f(\rho) , \text{ con } \rho_{i-1} \leq \rho < \rho_i \quad (4.145)$$

es decir, el más cercano con valor superior al buscado.

Siendo ρ el coeficiente de amortiguamiento buscado.

- Calcular θ_0 inicial.

$$f(\rho_0 + \theta h) = Mp \Rightarrow \theta_0 = \frac{Mp - f(\rho_0)}{\delta_{\rho_i}} \quad (4.146)$$

- Calcular valores θ y el error cometido en cada iteración, usado para controlar la salida del bucle, además de la precisión de la aproximación.

Diferencias Descendentes:

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3)(\theta_0 - 4) \end{aligned} \right. \quad (4.147)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \end{aligned} \right. \quad (4.148)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1-1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1-1)(\theta_1-2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1-1)(\theta_1-2)(\theta_1-3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1-1)(\theta_1-2)(\theta_1-3)(\theta_1-4) \\ \\ \text{Error}_1 = |\theta_1 - \theta_2| \end{array} \right. \quad (4.149)$$

$$(4.150)$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{Error}_1 < \text{Eps}, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } \rho = \rho_0 + \theta h \\ \\ \text{Si } \text{Error}_1 \geq \text{Eps}, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right.$$

siendo *Eps* el error máximo permitido

Diferencias Ascendentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0+1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2) - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2)(\theta_0+3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2)(\theta_0+3)(\theta_0+4) \\ \\ \text{Error}_0 = |\theta_0 - \theta_1| \end{array} \right. \quad (4.151)$$

$$(4.152)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1+1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2) - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2)(\theta_1+3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}}\theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2)(\theta_1+3)(\theta_1+4) \\ \\ \text{Error}_1 = |\theta_1 - \theta_2| \end{array} \right. \quad (4.153)$$

$$(4.154)$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{Error}_1 < \text{Eps}, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } \rho = \rho_0 + \theta h \\ \\ \text{Si } \text{Error}_1 \geq \text{Eps}, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right.$$

2. Búsqueda de $ts(\rho, \omega_n, desv)$ ¹⁹.

El procedimiento de búsqueda de tiempos por interpolación inversa utilizado es el mismo descrito para el parámetro ρ anteriormente.

¹⁹ Para ello, se hace uso de las funciones INTITAS y BUSCAR2 desarrolladas en Matlab4.2

Con el parámetro $desv$ se define el canal de asentamiento con valores en tanto por uno entre,

$$-\frac{desv}{100} \quad \text{y} \quad +\frac{desv}{100} \quad (4.155)$$

Para la obtención de tiempos de asentamiento se trata de ir observando cada pico o valle máximo de la señal $f(t)$. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo t_s buscado estará en el primer semiciclo, en el intervalo de ascenso, antes de dicho pico.

$$f(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\rho\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t\right), \quad \text{con } 0 < \rho < 1 \quad (4.156)$$

Si no es así, cuando se localice un pico-valle máximo dentro del canal de asentamiento, el tiempo t_s se encontrará dentro del anterior semiciclo; en caso contrario, el tiempo de asentamiento será este tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo

$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}}$ s, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal. El procedimiento

de búsqueda de t_s comienza definiendo el intervalo h de trabajo, siempre comprendido entre un pico-valle t_p y el cero siguiente t_c de la función.

$$t_p = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) + n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.157)$$

$$t_c = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.158)$$

ambos con $n=0, 1, \dots$

La interpolación inversa de t_s dentro del intervalo h se realiza entre t_p y t_1 , t_1 y t_2 , y así sucesivamente hasta finalizar en t_c .

4.2.9 Búsqueda de $tr(\omega_n, \rho, mal)$ y $ts(\omega_n, \rho, mas)$ aplicando Aproximaciones Sucesivas por Interpolación Inversa. Fórmulas de Newton de Diferencias Ascendentes y Descendentes. (Técnica Esensib)

1. Búsqueda de $tr(\omega_n, \rho, mal)$ ²⁰.

Se trata de encontrar el tiempo de alcance tr sobre la señal $f(t)$, cuando ésta toma el valor de alcance “mal” y viene definida por los parámetros ω_n y ρ .

Se define la función de interpolación $f(t)$, para cada instante de tiempo t , como,

$$f(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\rho\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t\right), \quad \text{con } 0 < \rho < 1 \quad (4.159)$$

Las fórmulas de Newton de 5º orden aplicadas para determinación de tiempos son,

Diferencias Descendentes:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_d^1 \theta + \frac{\delta_d^2}{2} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^3}{3!} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^4}{4!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^5}{5!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (4.160)$$

Diferencias Ascendentes:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_a^1 \theta + \frac{\delta_a^2}{2} \theta(\theta+1) + \frac{\delta_a^3}{3!} \theta(\theta+1)(\theta+2) + \frac{\delta_a^4}{4!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3) + \frac{\delta_a^5}{5!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4) \quad (4.161)$$

Donde h es el intervalo de tiempos elegido.

Despejando θ en la ecuación de *diferencias descendentes*, por ejemplo, y sustituyendo, se tiene,

$$\theta = \frac{f(t_0 + \theta h) - f(t_0)}{\delta_d} - \frac{\delta_d^2}{2\delta_d^1} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^3}{3!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^4}{4!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^5}{5!\delta_d^1} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (4.162)$$

Para la función actual, la secuencia de pasos a realizar sería:

²⁰ Para ello, se hace uso de la función INTI2 desarrollada en Matlab4.2

- Definir el intervalo temporal h . Dado que el M_p se alcanza en el tiempo,

$$t_{\max} = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.163)$$

Un valor válido de intervalo puede ser 1/10 del mismo. Es decir,

$$h = \frac{t_{\max}}{10} \quad (4.164)$$

Y utilizar como tiempos discretos:

$$t_i = \{t_1 = 0; t_2 = t_1 + h; \dots; t_n = t_{n-1} + h, \text{ con } i=1, \dots, n\} \quad (4.165)$$

- Obtener los valores de la tabla indicada,

Tabla_4.1: Relación de valores $f(t)$

t	t_1	t_2	t_n
$f(t)$	$f(t_1)$	$f(t_2)$	$f(t_n)$

- Obtener los valores δ de 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, ... orden, con una tabla de diferencias como la que se indica,

Tabla_4.2: Diferencias δ para funciones $f(t)$ de 1º, 2º, 3º, 4º y 5º orden

t	$f(t)$	1º Orden	2º Orden	3º Orden	4º Orden	5º Orden
t_1	$f(t_1)$	$\delta_{11} = f(t_2) - f(t_1)$	$\delta_{21} = \delta_{12} - \delta_{11}$	$\delta_{31} = \delta_{22} - \delta_{21}$	$\delta_{41} = \delta_{32} - \delta_{31}$	$\delta_{51} = \delta_{42} - \delta_{41}$
t_2	$f(t_2)$	$\delta_{12} = f(t_3) - f(t_2)$	$\delta_{22} = \delta_{13} - \delta_{12}$	$\delta_{32} = \delta_{24} - \delta_{23}$	$\delta_{42} = \delta_{33} - \delta_{32}$	$\delta_{52} = \delta_{43} - \delta_{42}$
t_3	$f(t_3)$	$\delta_{13} = f(t_4) - f(t_3)$	$\delta_{23} = \delta_{14} - \delta_{13}$	$\delta_{33} = \delta_{25} - \delta_{24}$	$\delta_{43} = \delta_{34} - \delta_{33}$	$\delta_{53} = \delta_{44} - \delta_{43}$
t_4	$f(t_4)$	$\delta_{14} = f(t_5) - f(t_4)$	$\delta_{24} = \delta_{15} - \delta_{14}$	$\delta_{34} = \delta_{26} - \delta_{25}$	$\delta_{44} = \delta_{35} - \delta_{34}$	$\delta_{54} = \delta_{45} - \delta_{44}$
t_5	$f(t_5)$	$\delta_{15} = f(t_6) - f(t_5)$	$\delta_{25} = \delta_{16} - \delta_{15}$	$\delta_{35} = \delta_{27} - \delta_{26}$	$\delta_{45} = \delta_{36} - \delta_{35}$	$\delta_{55} = \delta_{46} - \delta_{45}$
t_6	$f(t_6)$	$\delta_{16} = f(t_7) - f(t_6)$	$\delta_{26} = \delta_{17} - \delta_{16}$	$\delta_{36} = \delta_{28} - \delta_{27}$	$\delta_{46} = \delta_{37} - \delta_{36}$	$\delta_{56} = \delta_{47} - \delta_{46}$
t_7	$f(t_7)$	$\delta_{17} = f(t_8) - f(t_7)$	$\delta_{27} = \delta_{18} - \delta_{17}$	$\delta_{37} = \delta_{29} - \delta_{28}$	$\delta_{47} = \delta_{38} - \delta_{37}$	
t_8	$f(t_8)$	$\delta_{18} = f(t_9) - f(t_8)$	$\delta_{28} = \delta_{19} - \delta_{18}$	$\delta_{38} = \delta_{29} - \delta_{28}$		
t_9	$f(t_9)$	$\delta_{19} = f(t_{10}) - f(t_9)$	$\delta_{29} = \delta_{110} - \delta_{19}$			
t_{10}	$f(t_{10})$	$\delta_{110} = f(t_{11}) - f(t_{10})$				
t_{11}	$f(t_{11})$					

- --- ➔ Definición de funciones por diferencias descendentes.
- ◆ ... ➤ Definición de funciones por diferencias ascendentes.

- Obtener t_0 y elegir el procedimiento de diferencias más adecuado, con el siguiente criterio (para el ejemplo de la tabla anterior, de 11 instantes de tiempo muestreados),

Si $f(t_i) > \frac{mal}{100}$, con $i=1,2,\dots,6$, Entonces,

✚ *Diferencias Descendentes* y $f(t_0) = f(t_{i-1}) < f(t)$, con $t_i < t < t_{i+1}$, (4.166)

es decir, el más cercano con valor inferior al buscado.

Si $f(t_i) > \frac{mal}{100}$, con $i=7,8,\dots,11$, Entonces,

✚ *Diferencias Ascendentes* y $f(t_0) = f(t_i) > f(t)$, con $t_{i-1} \leq t < t_i$, (4.167)

es decir, el más cercano con valor superior al buscado.

Siendo t el tiempo a encontrar (t_r , t_s , ..).

- Calcular θ_0 inicial.

$$f(t_0 + \theta h) = \frac{mal}{100} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\frac{mal}{100} - f(t_0)}{\delta_{li}} \tag{4.168}$$

- Calcular valores θ y el error cometido en cada iteración, usado para controlar la salida del bucle, además de la precisión de la aproximación.

Diferencias Descendentes:

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}}\theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3)(\theta_0 - 4) \tag{4.169}$$

$$Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \tag{4.170}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3)(\theta_1 - 4) \\ \\ \text{Error}_1 = |\theta_1 - \theta_2| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.171) \\ (4.172) \end{array}$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{Error}_1 < \text{Eps}, \text{ Entonces, } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h \\ \\ \text{Si } \text{Error}_1 \geq \text{Eps}, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.173) \\ \text{siendo Eps el error máximo permitido} \end{array}$$

Diferencias Ascendentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}} \theta_0 (\theta_0 + 1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}} \theta_0 (\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2) - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}} \theta_0 (\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2)(\theta_0 + 3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}} \theta_0 (\theta_0 + 1)(\theta_0 + 2)(\theta_0 + 3)(\theta_0 + 4) \\ \\ \text{Error}_0 = |\theta_0 - \theta_1| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.174) \\ (4.175) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 + 1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3!\delta_a^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2) - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4!\delta_a^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2)(\theta_1 + 3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5!\delta_a^{1^\circ}} \theta_1 (\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2)(\theta_1 + 3)(\theta_1 + 4) \\ \\ \text{Error}_1 = |\theta_1 - \theta_2| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.176) \\ (4.177) \end{array}$$

Proceso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{Error}_1 < \text{Eps}, \text{ Entonces, } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h \\ \\ \text{Si } \text{Error}_1 \geq \text{Eps}, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{array} \right. \quad (4.173)$$

2. Búsqueda de $ts(\omega_n, \rho, mas)$ ²¹.

El procedimiento de búsqueda de tiempos es el mismo descrito para tr .

²¹ Para ello, se hace uso de las funciones INTI2 y BUSCAR2 desarrolladas en Matlab4.2

Con el parámetro *mas* se define el canal de asentamiento con valores en tanto por uno entre,

$$-\frac{mas}{100} \quad y \quad +\frac{mas}{100} \quad (4.178)$$

Para la obtención del tiempo de asentamiento buscado se trata de ir observando cada pico o valle máximo de la señal $f(t)$. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, no existe entonces tiempo de asentamiento t_s distinto de cero.

$$f(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\rho\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\rho^2} t\right) , \quad \text{con } 0 < \rho < 1 \quad (4.179)$$

Si no es así, cuando se localice un pico-valle máximo dentro del canal de asentamiento, distinto del primero, el tiempo t_s se encontrará asociado al anterior semiciclo; en caso contrario, el tiempo de asentamiento será este tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo $\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} s$, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal. El intervalo h de trabajo, siempre está comprendido entre un pico-valle t_p y el cero siguiente t_c de la función.

$$t_p = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) + n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.157)$$

$$t_c = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.158)$$

ambos con $n=0, 1, \dots$

La interpolación inversa de t_s dentro del intervalo h se realiza entre t_p y t_1 , t_1 y t_2 , y así sucesivamente hasta finalizar en t_c .

4.2.10 Comparativa de Parámetros de las distintas Técnicas Propuestas

TÉCNICA	ESENSIBQ	ESENSIB	ETRAC
<i>Descripción</i>	Especificación de sensibilidades en QFT. Entrada impulso o escalón y salida impulso amortiguado de amplitud limitada y tiempo de desvanecimiento controlado.	Especificación de sensibilidades. Entrada impulso o escalón y salida impulso amortiguado de amplitud y valor de alcance limitados, incluso temporalmente.	Especificación de tracking desacoplado en QFT. Entrada escalón y salida impulso amortiguado de amplitud limitada.
<i>Parámetros de Entrada</i>	Out, In, T, desv, modo	Out, In, T, exceso	y_{max} , r_{max}
<i>Parámetros por Defecto</i>	desv= ± 0.01 modo absoluto	exceso=2	
<i>Parámetros de Salida</i>	Num, Den Nums, Dens	Num, Den Nums, Dens	Num, Den
<i>Resultados en Pantalla</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Respuesta posible $T(j\omega)$ en TD. • Error cometido en la interpolación de tiempos. • Respuesta posible $T(j\omega)$ en WD. • Salida en TD para entrada impulso (Modo, T_{out}, Mp_{out}). • Salida en TD para entrada escalón (Modo, T_{out}, Mp_{out}). • ρ y ω_n. 	<ul style="list-style-type: none"> • Conjunto Respuestas posibles en TD. • Error cometido en la interpolación de tiempos. • Conjunto Respuestas posibles en WD. • Límites inferior y superior en WD. • Elección de Restricción: Baja, Alta. • Límites inferior y superior aproximados en WD. • Elección Representación tiempos máx o tiempos min. • Salida en TD para entrada impulso (Mp, T_{out}, ts_{out}, tr_{out}). • Salida en TD para entrada escalón (Mp, T_{out}, ts_{out}, tr_{out}). • ρ y ω_n. 	<ul style="list-style-type: none"> • Conjunto Respuestas posibles en TD. • Error cometido en la interpolación de tiempos. • Conjunto Respuestas posibles en WD. • Límite superior en WD. • Elección de Restricción: Baja, Alta. • Límite superior aproximado en WD. • Salida en TD para entrada escalón. • ρ y ω_n.

TÉCNICA	ESENSIBQ	ESENSIB	ETRAC
<i>Funciones Matlab auxiliares</i>	intipi intitas buscar2	inti2 buscar2	-
<i>Procedimientos aplicados</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Variación de 2 parámetros TD (Mp, ts). • Interpolación inversa de ρ. • Interpolación inversa de ts y n° de semiciclo para asentamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Variación de 3 parámetros TD (Mp, tr, ts). • Interpolación inversa de tr para mal. • Interpolación inversa de ts para mas y n° de semiciclo para su alcance. • Interpolación inversa de ts y n° de semiciclo para asentamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Variación de 1 parámetro TD (Mp).
<i>Nivel de complejidad</i>	Medio	Elevado	Bajo
<i>Nivel de precisión obtenido</i>	Elevado	Elevado_Medio	Medio
<i>Observaciones</i>	Técnica eficiente, que da la posibilidad de elegir en qué zona del BW interesa tener máxima precisión	Técnica eficiente, que da la posibilidad de elegir en qué zona del BW interesa tener máxima precisión	Técnica medio eficiente, que da la posibilidad de elegir en qué zona del BW interesa tener máxima precisión

Tabla_4.10: Comparativa de resultados entre las distintas técnicas de conversión TD a WD

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_ 4.1: Definición del tiempo de alcance	72
Figura_ 4.2: Especificaciones de respuesta transitoria en el dominio temporal.....	72
Figura_ 4.3: Relación entre sobreelongación y coeficiente de amortiguación.....	73
Figura_ 4.4: Envolventes a la respuesta escalón unitario.....	74
Figura_ 4.5: Relación sobreelongación máxima M_p y coeficiente de amortiguación ρ	76
Figura_ 4.6: Sistemas con misma estabilidad relativa	76
Figura_ 4.7: Definición del doble vector $wd(\omega_n, \rho)$	78
Figura_ 4.8: Respuestas temporales para $wd(\omega_n, \rho)$ con parámetros $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	78
Figura_ 4.9: Respuesta frecuencial para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	79
Figura_ 4.10: Límite inferior en el WD $T_{Lo}(j\omega,)$ para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	79
Figura_ 4.11: Restricción a bajas frecuencias $T_{Lo}(j\omega,)$ para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	80
Figura_ 4.12: Restricción a altas frecuencias $T_{Lo}(j\omega,)$ para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	81
Figura_ 4.13: Restricción a la aproximación envolvente $T_{Lo}(j\omega,)$ para $wd(\omega_n, \rho)$ con $TD(10\%, 10s$ $40s, \pm 1\%)$	81
Figura_ 4.14: Respuestas de 2º orden $T'(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$.	86
Figura_ 4.15: Conjunto de Respuestas temporales para el sistema $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$	86
Figura_ 4.16: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$	87
Figura_ 4.17: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$ y aproximación por restricción a bajas frecuencias	87
Figura_ 4.18: Respuestas temporales finales asociadas a $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para el sistema original y aproximado por restricción a bajas frecuencias.....	88
Figura_ 4.19: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}(15\%, 5s, 30s, \pm 3\%, 5)$ y aproximación por restricción a altas frecuencias.....	88

Figura_4.20: Respuestas temporales finales asociadas a $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para el sistema original y aproximado por restricción a altas frecuencias..... 89

Figura_4.21: Respuestas de 2º orden $T'(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}(15\%,5s,30s,\pm3\%,5)$ 91

Figura_4.22: Conjunto de Respuestas temporales para el sistema $TD_{original}(15\%,5s,30s,\pm3\%,5)$ 91

Figura_4.23: Límites inferior y superior en el WD $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD_{original}(15\%,5s,30s,\pm3\%,5)$ 92

Figura_4.24: Respuestas temporales finales asociadas a $T_{Lo}(j\omega)$ y $T_{Hi}(j\omega)$ para el sistema original..... 92

Figura_4.25: Límite inferior en el WD, $T_{Lo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}(15\%,5s,30s,\pm2\%)$ 95

Figura_4.26: Respuesta temporal equivalente al $T_{Lo}(j\omega)$ para parámetros del $TD_{original}(15\%,5s,30s,\pm2\%)$ 95

Figura_4.27: Respuesta temporal final asociada a $T_{Lo}(j\omega)$ para el sistema original..... 96

Figura_4.28: Respuestas de 2º orden $T(j\omega)$ para el sistema $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ 100

Figura_4.29: Conjunto de Respuestas temporales para sistema $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ 100

Figura_4.30: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ 101

Figura_4.31: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ con aproximación a bajas frecuencias 101

Figura_4.32: Respuesta temporal final asociada a $T_{Uo}(j\omega)$ para el sistema original. Aproximada con restricción a altas frecuencias..... 102

Figura_4.33: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ con aproximación a altas frecuencias 102

Figura_4.34: Respuesta temporal final asociada a $T_{Uo}(j\omega)$ para el sistema original. Aproximada con restricción a altas frecuencias..... 103

Figura_4.35: Límite superior en el WD, $T_{Uo}(j\omega)$ para parámetros $TD_{original}(Input_Ref(0.5) \rightarrow Output_{max}(2.3peak))$ con aproximación a envolvente..... 103

Figura_4.36: Respuesta temporal obtenida para $TD_{original}(15\%,10s,20s,\pm5\%)$ 108

Figura_4.37: Especificaciones de respuesta transitoria para impulso subamortiguado (Caso 1).....	114
Figura_4.38: Especificaciones de respuesta transitoria para impulso subamortiguado (Caso 2).....	114
Figura_4.39: Respuesta posible a la entrada de valores TD(In, Out, T, desv).....	116
Figura_4.40: Respuesta en el TD de la FT $T'(j\omega)=T(j\omega)/In$	119
Figura_4.41: Respuesta 2º orden $T'(j\omega)=T(j\omega)/In$ para $TD_{original}(Out = 10, In = 15, T = 3s, \pm 1\%, \text{Modo Relativo})$	119
Figura_4.42: Perturbación de Entrada IMPULSO, In=15, T=3 s y Desv.=+1% =+0.07944.....	120
Figura_4.43: Perturbación de Entrada STEP, In=15, T=3 s y Desv.=+1% =+0.07944.....	120
Figura_4.44: Perturbación de Entrada IMPULSO, In=15, T=3 s y Desv.=+1% =+0.01.....	121
Figura_4.45: Perturbación de Entrada STEP, In=15, T=3 s y Desv.=+1% =+0.01.....	122
Figura_4.46: Respuestas posibles al TD(In, Out, T, exceso).....	123
Figura_4.47: Definición del doble vector $wd(\omega_n, \rho)$	125
Figura_4.48: Posibles respuestas temporales para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3).....	126
Figura_4.49: Posibles respuestas en frecuencia para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3).....	127
Figura_4.50: Límites inferior $T_{Lo}(j\omega)$ y superior $T_{Hi}(j\omega)$ en el WD para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3).....	128
Figura_4.51: Límites inferior y superior en el WD para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3) con aproximación por restricción a bajas frecuencias.....	129
Figura_4.52: Límites inferior y superior en el WD para TD(Out=6, In=15, T=2s, exceso=3) con aproximación por restricción a altas frecuencias.....	130
Figura_4.53: Posibles respuestas en frecuencia para TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5).....	134
Figura_4.54: Posibles respuestas temporales para TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5).....	134
Figura_4.55: Límites inferior $T_{Lo}(j\omega)$ y superior $T_{Hi}(j\omega)$ en el WD para TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5).....	135
Figura_4.56: Límites inferior y superior en el WD con aproximación por restricción a bajas frecuencias TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5).....	136

Figura_4.57: Respuesta Límite Temporal Superior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada IMPULSE	137
Figura_4.58: Respuesta Límite Temporal Superior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada STEP	137
Figura_4.59: Respuesta Límite Temporal Inferior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada IMPULSE	138
Figura_4.60: Respuesta Límite Temporal Inferior para $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$ con Entrada STEP	139
Figura_4.61: Límites inferior y superior en el WD con aproximación por restricción a altas frecuencias $TD(Out = 10, In = 15, T = 4.5s, exceso = 1.5)$	140
Figura_4.62: Tracking propio (acoplo) sobre una referencia escalón unitaria.....	141
Figura_4.63: Tracking auxiliar (desacoplo) sobre una referencia escalón unitaria.....	142
Figura_4.64: Definición del doble vector $wd(\omega_n, \rho)$.Técnica Etrac	143
Figura_4.65: Respuestas temporales para el sistema con $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$	144
Figura_4.66: Respuestas en frecuencia para el sistema $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$	145
Figura_4.67: Límite superior en el WD $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$	146
Figura_4.68: Límite superior en el WD $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ con restricción a bajas frecuencias	147
Figura_4.69: Límite superior en el WD $T_{Hi}(j\omega)$ para $TD(y_{max}=5, r_{max}=10)$ con restricción a altas frecuencias.....	147
Figura_4.70: Respuesta temporal al sistema $TD_{original}(y_{max} = 5, r_{max} = 10)$ aproximando con restricción a bajas frecuencias.....	148
Figura_4.71: Respuesta temporal al sistema $TD_{original}(y_{max} = 5, r_{max} = 10)$ aproximando con restricción a altas frecuencias.....	149

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_4.1: Relación de valores $f(t)$	105,156
Tabla_4.2: Diferencias δ para funciones $f(t)$ de 1º, 2º, 3º, 4ºy 5º orden	106,156
Tabla_4.3: Comparativa de resultados entre las distintas técnicas de conversión TD a WD.....	109
Tabla_4.4: Funciones de Transferencia de magnitud máxima y mínima para cada frecuencia w . Caso2-Esensib.....	128
Tabla_4.5: Relación entre límites en WD-TD y el tipo de aproximación elegida para la FT.....	133
Tabla_4.6: Funciones de Transferencia de magnitud máxima y mínima para cada frecuencia w . Técnica Esensib	135
Tabla_4.7: Funciones de Transferencia de magnitud máxima para cada frecuencia w . Técnica Etrac.....	146
Tabla_4.8: Relación de valores $f(\rho)$	151
Tabla_4.9: Diferencias δ para funciones $f(\rho)$ de 1º, 2º, 3º, 4ºy 5º orden.....	151
Tabla_4.10: Comparativa de resultados entre las distintas técnicas de conversión TD a WD.....	160,161

CAPÍTULO 5

“Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control

RESUMEN

QFT exige trabajar con plantas cuadradas o, en algunos casos aplicando procedimientos de “squaring-down” es posible utilizar más entradas que salidas, aunque siempre en un proceso de reducción de las variables de entrada, que implicará pérdida de características de la planta. El procedimiento de “squaring-up” utilizando compensación MIMO-QFT permite trabajar con plantas con incertidumbre infra-actuadas, es decir, con más salidas que entradas, en un proceso sin supresión de especificaciones del sistema a controlar. Además, en el proceso de diseño se incorpora optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento.

CONTENIDOS

5.0 Introducción al “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control

5.1 Diseño de Control Inicial

5.1.1 Problema de Regulación

5.1.1.1 Descripción matemática del problema de Regulación

5.1.2 Problema de Tracking

5.1.2.1 Descripción matemática del problema de Tracking

5.1.3 Problema Combinado Tracking/Regulación

5.1.3.1 Descripción matemática del problema Combinado Tracking/Regulación

5.1.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación

5.1.5 Compensación por Sobrealimentación para Tracking

5.1.6 Definiciones en las Especificaciones de Tracking

5.1.7 Resumen del Procedimiento de “Squaring-up”

5.2 Diseño de Control Optimizado

5.2.1 Problema de Regulación Optimizado

5.2.2 Problema de Tracking Optimizado

5.2.3 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación optimizando esfuerzo de control

5.2.4 Problema de Tracking Puro Optimizado

5.2.5 Compatibilidad con las Especificaciones de Esfuerzo de control

5.2.6 Relajación de Especificaciones de Esfuerzo de control para el segundo lazo

5.2.7 Resumen del Procedimiento “Squaring-up” Optimizando el Esfuerzo de Control

5.2.8 Consideraciones para Realización Práctica

5.0 Introducción al “Squaring up” QFT en sistemas MIMO infra-actuados, optimizando esfuerzo de control.

La técnica de diseño en el dominio de la frecuencia QFT permite obtener sistemas de control para regulación y seguimiento, considerando perturbaciones e incertidumbre sobre la planta. QFT se caracteriza por su versatilidad, pudiendo aplicarse sobre sistemas lineales y no lineales, variables e invariantes en el tiempo, continuos y discretos, SISO, MISO y MIMO, sistemas de mínima fase y otros de no mínima fase, [Horowitz,92], [Yaniv,99], [Houpis y Rasmussen,99]. Se han desarrollado metodologías de trabajo directas o DPD y también inversas o IPD [Kerr,04], compensación diagonal y no-diagonal [García-Sanz y Egaña, 02] . Sin embargo, QFT exige trabajar en general con plantas cuadradas o, en algunos casos aplicando procedimientos de “squaring-down” [Philips,89], [Houpis,02], es posible utilizar más entradas que salidas, aunque siempre en un proceso de reducción de las variables de entrada, que supondrá la no consideración de ciertas propiedades de la planta.

“Squaring-up” es un procedimiento de compensación QFT sobre sistemas MIMO en donde existan más salidas que entradas, en particular, de tamaños $[2,n]$, con $n \geq 2$ y paridad *par*, que incorpora optimización (minimización) del esfuerzo de control, en un proceso sin eliminación de características de la planta.

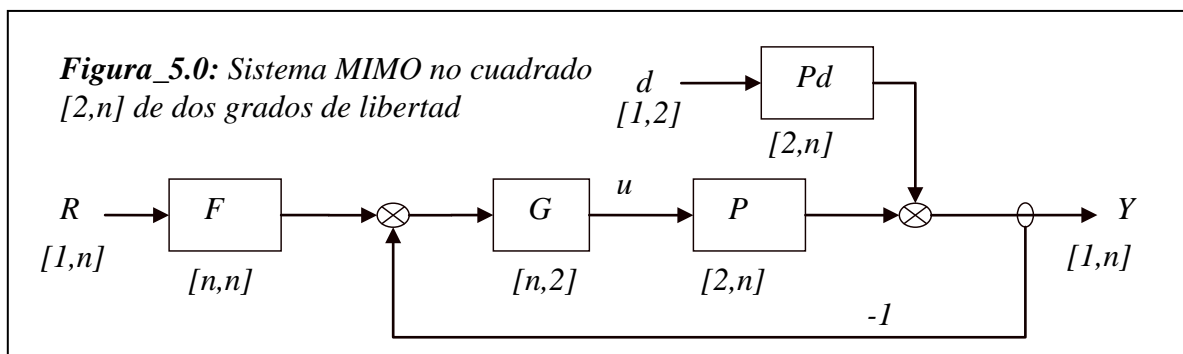
Cuando se trabaja sobre una planta no cuadrada se han desarrollado algunas técnicas para tratar de aplicar control MIMO QFT de forma adecuada, como si se tratara de una planta cuadrada y regular:

1. “Squaring Down”: las plantas con más entradas(m) que salidas(n) ($[m,n], m > n$) son nombradas por [E.Boje,05] como sistemas sobre-actuados, proponiendo un procedimiento de regularización de la función de transferencia del lazo, convirtiéndola en cuadrada $[n,n]$, mediante el uso entre controlador y planta de un

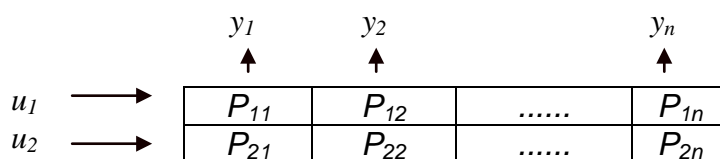
precompensador de tamaño $[n, m]$. Es sólo aplicable a sistemas con más entradas que salidas y no a la inversa. Para ello, trata de minimizar o suprimir la influencia de alguna o algunas entrada/s sobre las salidas. En el diseño del precompensador hay que asegurarse de no añadir RHPs, ni más ceros a la función de transferencia cuadrada resultante del lazo (transmisión de ceros), en algunos casos bastante complicado.

2. “Non square relative gain array (NRG)”: propuesto por [N.Yousfi et al., 12], es una variante de “Squaring down” que trata de medir las interacciones entre salidas y entradas en sistemas sobre-actuados. Aplicado sobre plantas con más entradas (m) que salidas (n) ($[m, n], m > n$), consigue transformar el sistema MIMO en n sistemas MISO, resolubles de forma independiente. Sin embargo, sigue siendo sólo aplicable a sistemas con más entradas que salidas y no a la inversa. Para la determinación de los elementos no diagonales del controlador utiliza una hipótesis muy fuerte respecto de los acoplamientos entradas-salidas en la función de lazo, que sólo es cierta a veces: “*el efecto del acoplamiento de los elementos no diagonales del sistema MIMO, definidos como perturbaciones internas, en cada sistema MISO equivalente debe ser nulo*”. La aplicación de esta hipótesis impide la utilización de ciertas especificaciones no nulas para tracking cruzado.

El método propuesto de “squaring up” consiste en sustituir el *sistema_inicial* por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO [2,2], caracterizados por tener todas entradas de control comunes pero, un único compensador en “feedback” (realimentación) [2,2] y un compensador en “feedforward” (sobrealimentación) o prefiltro [2, n], independientes para cada uno de ellos. Se describen formalmente todas las salidas y además las especificaciones, en términos de IPD (“*Inverse Plant Domain*”), para conseguir RS y RP, es decir, robustez en el TD y en el WD [Astrom y Kerr,04]. Al final, la solución es un controlador diagonal [2, n] y un prefiltro No diagonal [n,n] con elementos “off-diagonal”.



Partiremos de la planta $P[2,n]$, con $n = 2^i$, $i = 2,3,..$, descrita gráficamente como,



donde $u = (u_1, u_2)$ son las entradas de control y que es compatible con ser agrupada en subsistemas cuadrados tal que, $Y_1 = (y_1, y_2)$,, $Y_m = (y_{n-1}, y_n)$; es decir, m subsistemas de tamaño $[2,2]$ cada uno, siendo $m=n/2$, ordenados por :

1. prioridad de especificaciones; esto es, el *subsistema-1* es aquel al que se imponen las especificaciones más restrictivas del problema principal;

2. a partir de un estudio previo de acoplamientos entradas-salidas, según el grado de acoplos-desacoplos detectados; se busca máximo acoplamiento en los elementos diagonales del *subsistema-1*, y a ser posible también máximo desacoplo en sus elementos no diagonales. Expresada la planta como el modelo lineal de espacio de estados siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right\} \text{ donde } u \text{ son las entradas de control, y las salidas,}$$

x los estados y A,B,C,D las matrices del espacio de estados; el producto de la matriz C con la matriz de *eigenvectores* de la matriz A proporciona el grado de acoplamiento salidas-entradas, es decir, $abs(C * eigenvector(A))$. Observar que este estudio es aplicable a la planta y, también a la planta de perturbaciones a efectos de detectar acoplamientos salidas-perturbaciones_de_entrada. Los *eigenvalores* de la matriz A nos proporcionan también los modos de oscilación

característicos de la planta y, de ellos se puede obtener el rango de frecuencias de trabajo de la misma.

En una primera etapa de diseño de control se plantea “squaring up” en términos de regulación y seguimiento por separado, para posteriormente mezclar los resultados a efectos de obtener la solución al problema combinado tracking-regulación.

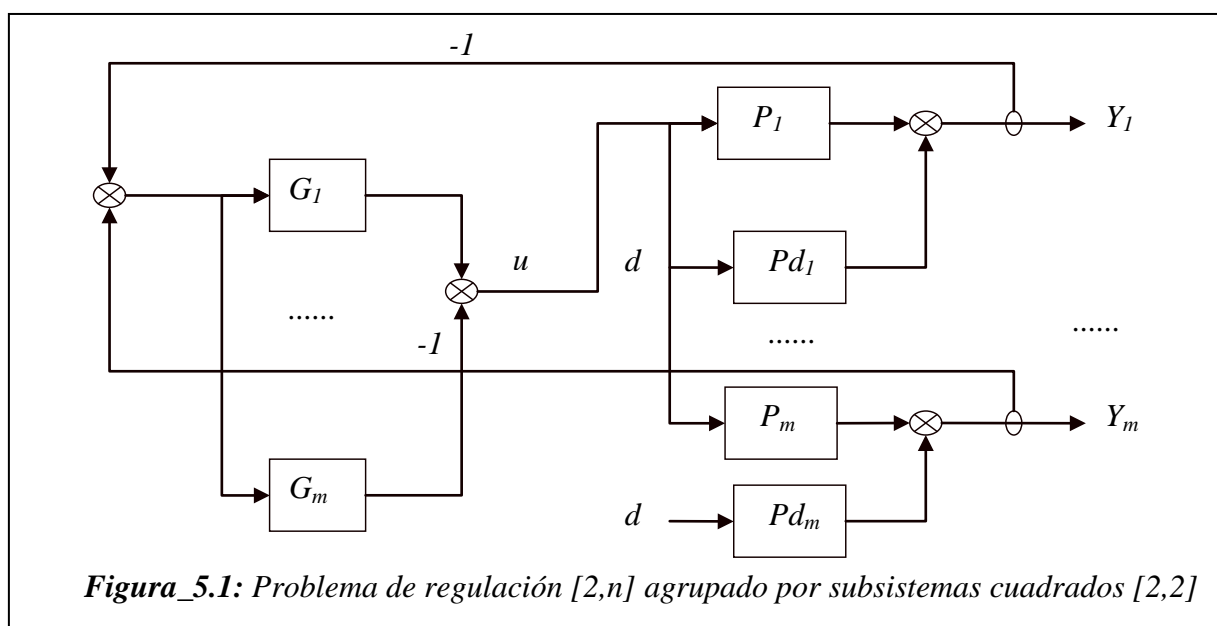
En la segunda etapa de diseño definitiva, se incorpora una descripción de especificaciones para seguimiento y regulación que incluya minimización del esfuerzo de control (optimización). Para ello, las especificaciones de esfuerzo de control van a formar parte de las especificaciones básicas para seguimiento (tracking) y regulación (sensibilidades).

5.1 Diseño de Control Inicial

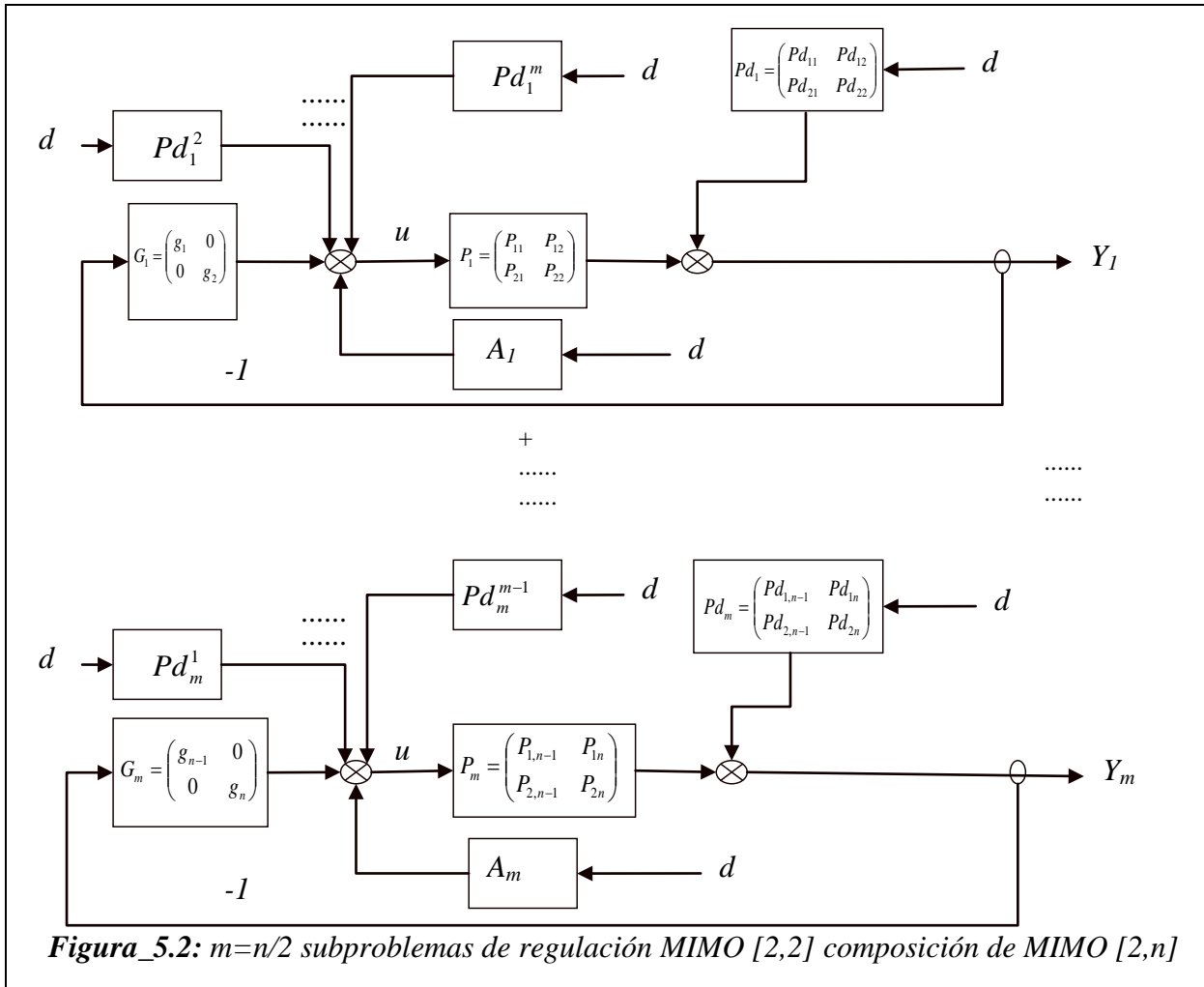
5.1.1 Problema de Regulación

Esquemático por la *Figura_5.1* propuesta, utilizando agrupación por subsistemas cuadrados de tamaño $[2,2]$, donde se ha utilizado $G_i[2,2]$, subplanta de perturbaciones $Pd_i[2,2]$, subplanta $P_i[2,2]$, perturbaciones externas $d = (d_1, d_2)$ y

$$\text{entradas de control } u = -\sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m Y_i$$



El problema MIMO $[2, n]$ anterior se descompone en m problemas (subsistemas) MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_5.2*. Es decir, la solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO $[2, 2]$ propuestos a continuación, donde cada compensador G_i diagonal $[2, 2]$ está especializado en una única planta P_i $[2, 2]$.



donde $Pd_1^i = -G_1 \frac{Y_i}{d}$, con $i = 2, \dots, m$ (5.1) y $A_1 = -\sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d}$ (5.2)

.....

$Pd_m^i = -G_m \frac{Y_i}{d}$, con $i = 1, \dots, m-1$ (5.3) y $A_m = -\sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d}$ (5.4),

son funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás *subsistemas* sobre el *subsistema-j* a estudio: Pd_j^i representa la influencia de la *salida_i* realimentada a través del controlador G_j del *subsistema-j*; A_j es la influencia de

todas las salidas realimentadas a través de todos los controladores, excepto el del *subsistema-j* estudiado.

Formalmente, las relaciones $\frac{Y_i}{d}$ para $i = 1, \dots, m$, se utilizan en forma de imposición de restricciones, a través de las especificaciones de sensibilidad, generalizadas para cada *subsistema-i* como,

$$|S_i| = \left| \frac{Y_i}{d} \right| \leq Wps_i \quad (5.5)$$

Por tanto, para el *subsistema-j* a estudio, escogiendo la peor situación en la que con perturbaciones externas d las salidas Y_i son máximas, se tiene

$$Pd_j^i = -G_j Wps_i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \quad (5.6)$$

y,

$$A_j = - \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d} = - \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1}^m Wps_i, \quad j = 1, \dots, m \quad (5.7)$$

De esta forma, para el *subsistema-j*, las entradas de control se pueden describir como,

$$u = -G_j Y_j + d \sum_{i=1, i \neq j}^m Perturbación_Propia_i + d \sum_{i=1, i \neq j}^m Perturbación_Auxiliar_i \quad (5.8)$$

donde se define,

$$\left\{ \begin{array}{l} Perturbación_Propia_i = Pd_j^i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1, i \neq j}^m Perturbación_Auxiliar_i = A_j, \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (5.10)$$

es decir,

$$u = -G_j Y_j - d G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i - d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1}^m Wps_i \quad (5.11)$$

Así, el control aplicado a la planta j , considera

- (1) el valor de sus salidas Y_j función de las perturbaciones externas (dPd_j) , pero también
- (2) el efecto de las perturbaciones propias $\left(d \sum_{i=1, i \neq j}^m Pd_j^i\right)$ definidas en función de las sensibilidades a perturbaciones externas de las salidas del resto de los *subsistemas* distintos del j , pero consideradas por el controlador G_j , y
- (3) el efecto de las perturbaciones auxiliares (dA_j) definidas en función de las sensibilidades a perturbaciones externas de todas las salidas, consideradas por todos los controladores G_k , excepto por G_j del *subsistema-j* a estudio.

5.1.1.1 Descripción matemática del problema de Regulación

Formalmente, los m subsistemas se pueden describir matricialmente como sigue [Yaniv,99],

(1) Para el subsistema-1,

$$Y_1 = Pd_1d + P_1u \quad (5.12)$$

y como

$$Y_1 = Pd_1d - P_1 \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m Y_i - P_1 G_1 \sum_{i=2}^m Y_i - P_1 G_1 Y_1 \quad (5.13)$$

se puede describir en la forma,

$$(I + P_1 G_1) Y_1 = Pd_1d - P_1 \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m Y_i - P_1 G_1 \sum_{i=2}^m Y_i \quad (5.14)$$

y, en definitiva, como

$$(P_1^{-1} + G_1) Y_1 = \left(P_1^{-1} Pd_1 - G_1 \sum_{i=2}^m \frac{Y_i}{d} - \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d} \right) d \quad (5.15)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el m .

(m) Para el subsistema- m ,

$$Y_m = P d_m d + P_m u \quad (5.16)$$

y como

$$Y_m = P d_m d - P_m \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m Y_i - P_m G_m \sum_{i=1}^{m-1} Y_i - P_m G_m Y_m \quad (5.17)$$

se describe en la forma,

$$(I + P_m G_m) Y_m = P d_m d - P_m \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m Y_i - P_m G_m \sum_{i=1}^{m-1} Y_i \quad (5.18)$$

y, en definitiva, como

$$(P_m^{-1} + G_m) Y_m = \left(P_m^{-1} P d_m - G_m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{Y_i}{d} - \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d} \right) d \quad (5.19)$$

Utilizando la notación $P^{-1} = [q_{ij}]$ y $G = \text{diag}(g_1, g_2)$, las ecuaciones (5.15) y (5.19) se pueden desarrollar, considerando simplificación como se indica,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2i}^1 = q_{2i} - \frac{q_{2i} q_{1i}}{q_{1i} + g_1} = \frac{q_{2i} g_1}{q_{1i} + g_1} \quad (5.19a) \\ q_{2j}^2 = q_{2j} - \frac{q_{2,j-1} q_{1j}}{q_{1,j-1} + g_1} \quad (5.19b) \\ q_{2,j-1}^{1i} = \frac{q_{2,j-1} g_i}{q_{1,j-1} + g_{j-1}} \quad (5.19c) \\ q_{2j}^{2i} = q_{2j} - \frac{q_{2,j-1} q_{1j}}{q_{1,j-1} + g_i} \quad (5.19d) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{con } i=1,3,5,\dots, n-1 \text{ y } j=2,4, \dots, n \end{array} \right.$$

(1) Para el subsistema-1, premultiplicando ambos lados de la ecuación (5.15)

desarrollada matricialmente por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{21} & 1 \\ q_{11} + g_1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21}^1 & q_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pd_{11} & Pd_{12} \\ Pd_{21} & Pd_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^1 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_5}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_6}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} g3 & 0 \\ -q_{21}^{13} & g4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] + \begin{pmatrix} g5 & 0 \\ -q_{21}^{15} & g6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] + \dots \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} (q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21}) & (q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22}) \\ (q_{21}^1Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21}) & (q_{21}^1Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^1 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{d_2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} gi & 0 \\ -\sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} q_{21}^{1i} & \sum_{i=4}^{n, \text{par}} gi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_j}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{j=2}^{n, \text{par}} \frac{y_j}{d_2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene finalmente,

$$(q_{11} + g1)y_1 + q_{12}y_2 = (q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21})d_1 + (q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22})d_2 - g1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1}d_1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} gi \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_j}{d_1}d_1 \quad (5.22)$$

$$(q_{22}^2 + g2)y_2 = (q_{21}^1Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21})d_1 + (q_{21}^1Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22})d_2 + q_{21}^1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1}d_1 - g2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{d_2}d_2 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} q_{21}^{1i} \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_j}{d_1}d_1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} gi \sum_{j=2}^{n, \text{par}} \frac{y_j}{d_2}d_2 \quad (5.23)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el *m*.

(m) Para el subsistema-*m*, premultiplicando ambos lados de la ecuación (5.19)

desarrollada matricialmente por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{2,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g_{n-1} & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^{2,n-1} + g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,n-1} & q_{1n} \\ q_{2,n-1}^{1,n-1} & q_{2n}^{2,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pd_{1,n-1} & Pd_{1n} \\ Pd_{2,n-1} & Pd_{2n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{n-1} & 0 \\ -q_{2,n-1}^{1,n-1} & g_n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^{11} & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] + \left[\begin{pmatrix} g_3 & 0 \\ -q_{2,n-1}^{13} & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] + \dots \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g_{n-1} & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^{2,n-1} + g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{1n}Pd_{2,n-1}) & (q_{1,n-1}Pd_{1n} + q_{1n}Pd_{2n}) \\ (q_{2,n-1}^{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2,n-1}) & (q_{2,n-1}^{1,n-1}Pd_{1n} + q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2n}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{n-1} & 0 \\ -q_{2,n-1}^{1,n-1} & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{d_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3,impar} g_i & 0 \\ -\sum_{i=1}^{n-3,impar} q_{2,n-1}^{1i} & \sum_{i=2}^{n-2,par} g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{j=2}^{n,par} \frac{y_j}{d_2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene finalmente,

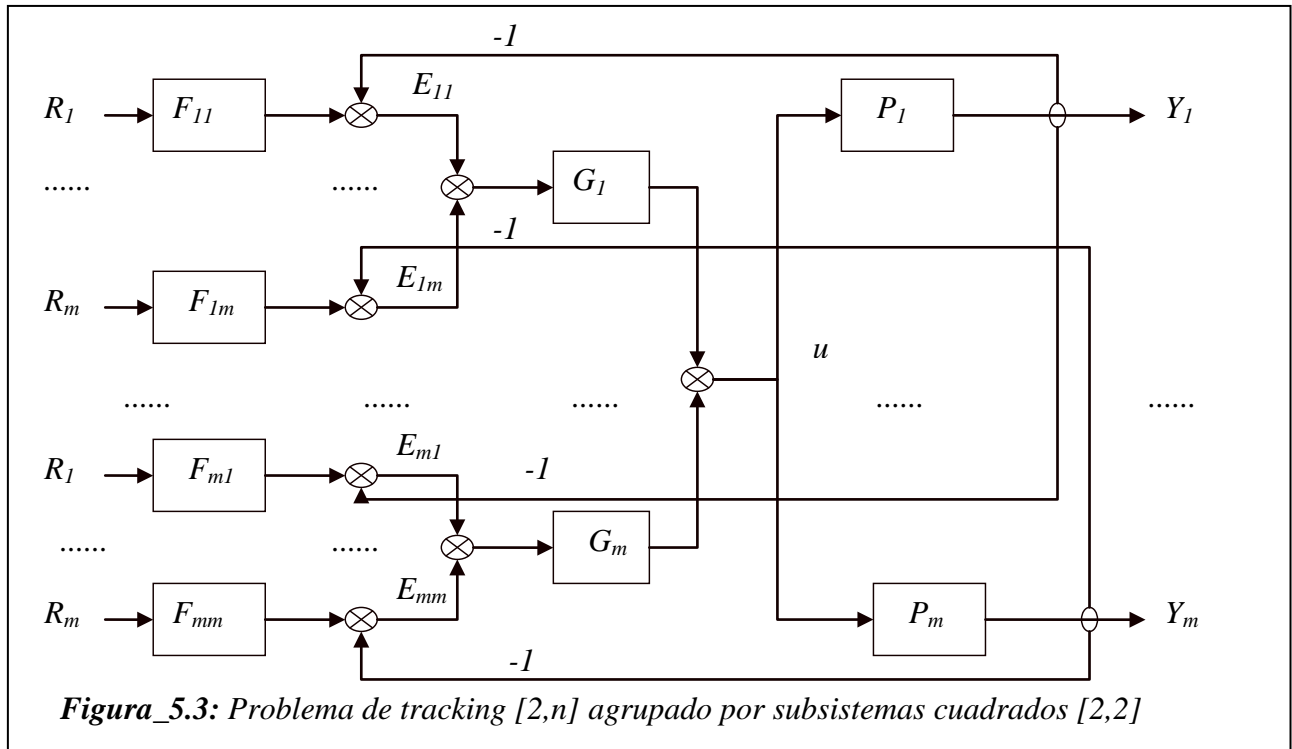
$$(q_{1,n-1} + g_{n-1})y_{n-1} + q_{1n}y_n = (q_{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{1n}Pd_{2,n-1})d_1 + (q_{1,n-1}Pd_{1n} + q_{1n}Pd_{2n})d_2 - g_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{d_1} - \sum_{i=1}^{n-3,impar} g_i \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} \quad (5.26)$$

$$(q_{2n}^{2,n-1} + g_n)y_n = (q_{2,n-1}^{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2,n-1})d_1 + (q_{2,n-1}^{1,n-1}Pd_{1n} + q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2n})d_2 + q_{2,n-1}^{1,n-1} \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{d_1} - g_n \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{d_2} + \sum_{i=1}^{n-3,impar} q_{2,n-1}^{1i} \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} - \sum_{i=2}^{n-2,par} g_i \sum_{j=2}^{n,par} \frac{y_j}{d_2} \quad (5.27)$$

5.1.2 Problema de Tracking

Esquemático por la representación dada en la *Figura_5.3*, utilizando agrupación por subsistemas cuadrados $[2,2]$, donde $G_i[2,2]$, prefiltros $F_{ij}[2,2]$, subplanta $P_i[2,2]$, referencias de entrada $R_1 = (r_1, r_2)$, ..., $R_m = (r_{n-1}, r_n)$ y entradas de control

$$u = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m E_{ki}, \quad \text{con } E_{ki} = F_{ki} R_i - Y_i$$



El problema MIMO [2,n] presentado se descompone en m problemas (*subsistemas*) MIMO [2,2], tal y como se describen en la *Figura_5.4*.

Es decir, la solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO [2,2] propuestos a continuación, donde cada compensador G_i [2,2] diagonal y cada prefiltro F_{ij} [2,2] no diagonal está especializado en una única planta P_i [2,2] ¹.

Se ha utilizado la notación siguiente:

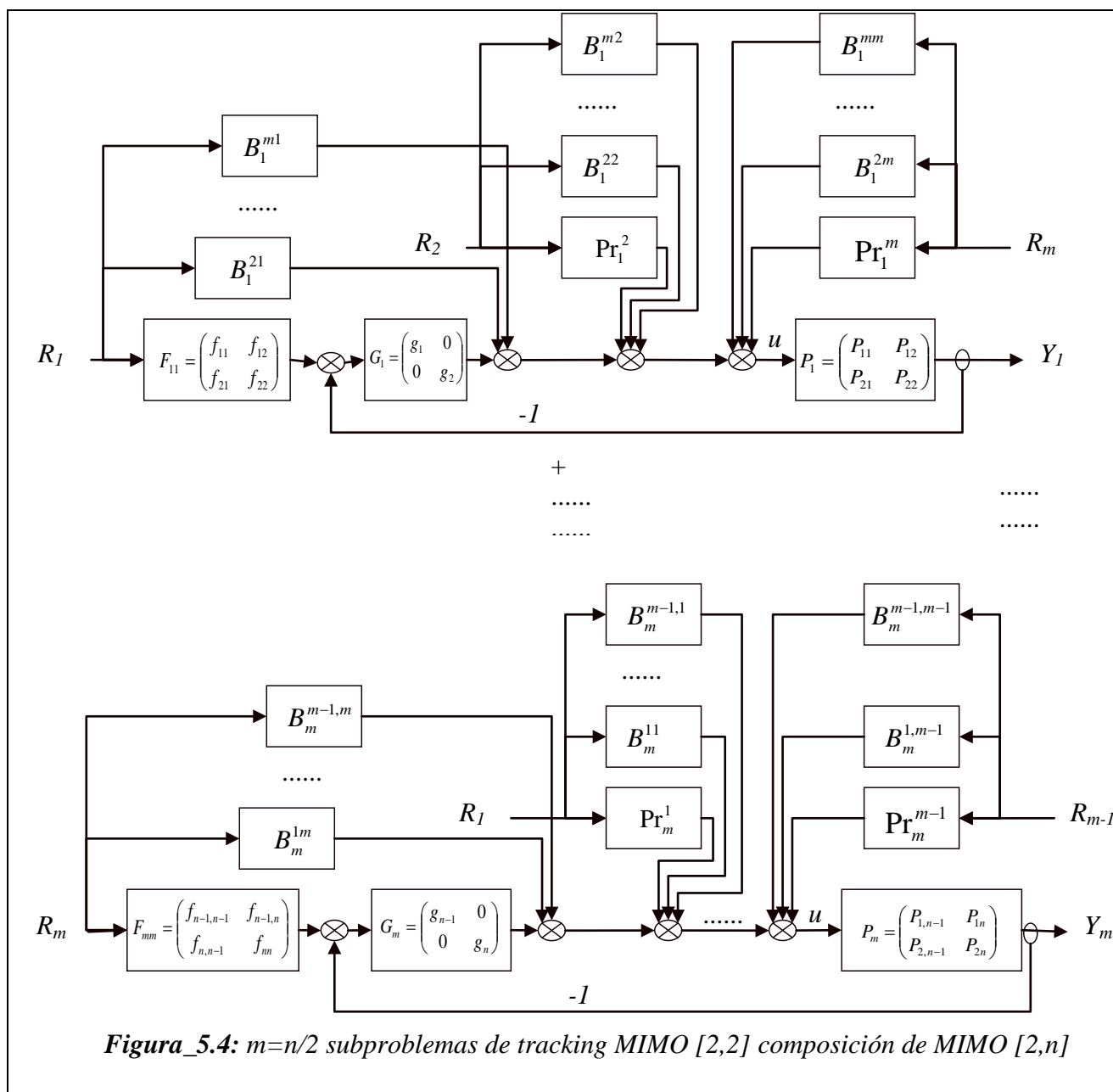
$$Pr_1^i = G_1 \left(F_{1i} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 2, \dots, m \quad (5.28); \dots; Pr_m^i = G_m \left(F_{mi} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \quad (5.29)$$

$$B_1^{ki} = G_k \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m \text{ y } k = 2, \dots, m \quad (5.30); \dots; B_m^{ki} = G_k \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, m-1 \quad (5.31)$$

son funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás *subsistemas* sobre el *subsistema-j* a estudio: Pr_j^i representa la influencia de la *salida-i* realimentada a través del controlador G_j del *subsistema-j*; B_j^{ki} es la influencia de

¹ Los prefiltros F_{ij} , con $i \neq j$, se usan para compensar los distintos acoplamientos entre subsistemas.

todas las salidas realimentadas a través de todos los controladores, excepto el del *subsistema-j* estudiado.



Formalmente, las relaciones $\frac{Y_i}{R_j}$ para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$ se utilizan en forma de imposición de restricciones, a través de las especificaciones de tracking, generalizadas para cada *subsistema-i* como,

$$\alpha_i \leq |T_i| = \left| \frac{Y_i}{R_j} \right| \leq \beta_i \quad (5.32)$$

Por tanto, para el *subsistema-j* a estudio, escogiendo la peor situación en la que con referencias de entrada R_j las salidas Y_j son máximas, se tiene

$$\text{Pr}_j^i = G_j(F_{ji} - \beta_i), \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \quad (5.33)$$

y,

$$B_j^{ki} = G_k\left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i}\right) = G_k(F_{ki} - \beta_i), \quad \text{con } i = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, m, k \neq j \quad (5.34)$$

De esta forma, para el *subsistema-j*, las entradas de control se pueden describir como,

$$u = G_j(F_{jj}R_j - Y_j) + \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i \text{Perturbación_Propia}_i + \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i \text{Perturbación_Auxiliar}_i \quad (5.35)$$

donde se define,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Perturbación_Propia}_i = \text{Pr}_j^i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \\ \text{Perturbación_Auxiliar}_i = B_j^{ki}, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \text{ y } k = 1, \dots, m, k \neq j \end{array} \right. \quad (5.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Perturbación_Propia}_i = \text{Pr}_j^i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \\ \text{Perturbación_Auxiliar}_i = B_j^{ki}, \quad i = 1, \dots, m, i \neq j \text{ y } k = 1, \dots, m, k \neq j \end{array} \right. \quad (5.37)$$

es decir,

$$u = G_j(F_{jj}R_j - Y_j) + G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_{ji} - \beta_i) + \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1}^m R_i (F_{ki} - \beta_i) \quad (5.38)$$

Así, el control aplicado a la planta j considera,

(1) el valor de sus salidas Y_j función del seguimiento de entrada $R_j(F_{jj} - Y_j / R_j)$, pero también ,

(2) el efecto de las *perturbaciones propias* $\sum_{i=1, i \neq j}^m R_i \text{Pr}_j^i$ definido en función de las

especificaciones de seguimiento a referencias de entrada del resto de los *subsistemas* distintos del j , pero consideradas por el controlador G_j , y

(3) el efecto de las *perturbaciones auxiliares* $\sum_{k=1, k \neq j}^m \sum_{i=1}^m R_i B_j^{ki}$ definidas en función de las especificaciones de seguimiento a todas las referencias de entrada consideradas por todos los controladores G_k , excepto por G_j del *subsistema-j* a estudio.

5.1.2.1 Descripción matemática del problema de Tracking

Formalmente, los m subsistemas matricialmente se describen como sigue [Yaniv,99],

(1) Para Tracking del subsistema-1,

$$Y_1 = P_1 u \quad (5.39)$$

y como

$$Y_1 = P_1 G_1 \sum_{i=2}^m (F_{1i} R_i - Y_i) - P_1 G_1 Y_1 + P_1 G_1 F_{11} R_1 + P_1 \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m (F_{ki} R_i - Y_i) \quad (5.40)$$

se puede describir en la forma,

$$(P_1^{-1} + G_1) Y_1 = G_1 F_{11} R_1 + G_1 \sum_{i=2}^m \left(F_{1i} - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i + \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i \quad (5.41)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..*, hasta alcanzar el m .

(m) Para Tracking del subsistema-m,

$$Y_m = P_m u \quad (5.42)$$

y como

$$Y_m = P_m G_m \sum_{i=1}^{m-1} (F_{mi} R_i - Y_i) - P_m G_m Y_m + P_m G_m F_{mm} R_m + P_m \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m (F_{ki} R_i - Y_i) \quad (5.43)$$

se puede describir en la forma,

$$(P_m^{-1} + G_m) Y_m = G_m F_{mm} R_m + G_m \sum_{i=1}^{m-1} \left(F_{mi} - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i + \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i \quad (5.44)$$

Utilizando la notación $P^{-1} = [q_{ij}]$ y $G = \text{diag}(g1, g2)$, las ecuaciones (5.41) y (5.44) se pueden desarrollar como se indica,

$$\left. \begin{aligned} q_{2i}^1 &= q_{2i} - \frac{q_{2i}q_{1i}}{q_{1i} + g1} = \frac{q_{2i}g1}{q_{1i} + g1} & (5.44a) \\ q_{2j}^2 &= q_{2j} - \frac{q_{2,j-1}q_{1j}}{q_{1,j-1} + g1} & (5.44b) \\ q_{2,j-1}^{1i} &= \frac{q_{2,j-1}g_i}{q_{1,j-1} + g_{j-1}} & (5.44c) \\ q_{2j}^{2i} &= q_{2j} - \frac{q_{2,j-1}q_{1j}}{q_{1,j-1} + g_i} & (5.44d) \end{aligned} \right\} \text{en todas ellas con } i = 1,3,5,\dots, n-1 \text{ y } j=2,4, \dots, n$$

(1) Para Tracking del subsistema-1, premultiplicando ambos lados de la ecuación (5.41)

desarrollada matricialmente por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{21} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22} + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21} & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21} & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{13} - \frac{y_3}{r_3} & f_{14} \\ f_{23} & f_{24} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{15} - \frac{y_5}{r_5} & f_{16} \\ f_{25} & f_{26} - \frac{y_6}{r_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} + \dots \right] + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} g3 & 0 \\ -q_{21}^{13} & g4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{31} - \frac{y_1}{r_1} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{33} - \frac{y_3}{r_3} & f_{34} \\ f_{43} & f_{44} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] + \begin{pmatrix} g5 & 0 \\ -q_{21}^{15} & g6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{51} - \frac{y_1}{r_1} & f_{52} \\ f_{61} & f_{62} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{53} - \frac{y_3}{r_3} & f_{54} \\ f_{63} & f_{64} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g1f_{11}) & (g1f_{12}) \\ (-q_{21}^1f_{11} + g2f_{21}) & (-q_{21}^1f_{12} + g2f_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^1 & g2 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} \sum_{i=3}^{n-1, impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} \\ \sum_{i=4}^{n, par} f_{2,i-1}r_{i-1} + (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i})r_i \end{matrix} \right) + \left[\begin{matrix} \left(\sum_{k=3}^{n-1, impar} g_k & 0 \right) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \\ \sum_{i=2}^{n, par} f_{l,i-1}r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i})r_i \end{pmatrix} \\ - \sum_{k=3}^{n-1, impar} q_{21}^{1k} & \sum_{l=4}^{n, par} g_l \end{matrix} \right] \quad (5.46)$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene finalmente,

$$(q_{11} + g1)y_1 + q_{12}y_2 = g1f_{11}r_1 + g1f_{12}r_2 + g1 \left(\sum_{i=3}^{n-1, impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + \sum_{k=3}^{n-1, impar} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1, impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \right) \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} (q_{22}^2 + g2)y_2 = & (-q_{21}^1f_{11} + g2f_{21})r_1 + (-q_{21}^1f_{12} + g2f_{22})r_2 - q_{21}^1 \left(\sum_{i=3}^{n-1, impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{i=4}^{n, par} f_{2,i-1}r_{i-1} + (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i})r_i \right) - \\ & - \sum_{k=3}^{n-1, impar} q_{21}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \right) + \sum_{l=4}^{n, par} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, par} f_{l,i-1}r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i})r_i \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..*, hasta alcanzar el *m*.

(m) Para Tracking del subsistema-m, premultiplicando ambos lados de la ecuación (5.44)

desarrollada matricialmente por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{2,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g_{n-1} & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^{2,n-1} + g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} g_{n-1} & 0 \\ -q_{2,n-1} & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1,n-1} & f_{n,n-1} \\ f_{n-1,n} & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{n-1} & 0 \\ -q_{2,n-1} & g_n \end{pmatrix} \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} f_{n-1,1} - \frac{y_1}{r_1} & f_{n-1,2} \\ f_{n1} & f_{n2} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{n-1,3} - \frac{y_3}{r_3} & f_{n-1,4} \\ f_{n3} & f_{n4} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] + \\ & + \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1} & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} - \frac{y_1}{r_1} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{13} - \frac{y_3}{r_3} & f_{14} \\ f_{23} & f_{24} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] + \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} g3 & 0 \\ -q_{2,n-1} & g4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{31} - \frac{y_1}{r_1} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{33} - \frac{y_3}{r_3} & f_{34} \\ f_{43} & f_{44} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.49)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g_{n-1} & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^{2,n-1} + g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_{n-1} f_{n-1,n-1}) \\ (-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n-1,n-1} + g_n f_{n-1,n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_{n-1} f_{n,n-1}) \\ (-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n,n-1} + g_n f_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} g_{n-1} & 0 \\ -q_{2,n-1}^{1,n-1} & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} \\ \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} f_{n,i-1} r_{i-1} + (f_{ni} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k & 0 \\ -\sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2,n-1}^{1k} & \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \\ \sum_{i=2}^{n, \text{par}} f_{l,i-1} r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \end{pmatrix} \right] \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene finalmente,

$$(q_{1,n-1} + g_{n-1}) y_{n-1} + q_{1n} y_n = g_{n-1} f_{n-1,n-1} r_{n-1} + g_{n-1} f_{n,n-1} r_n + g_{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) \quad (5.51)$$

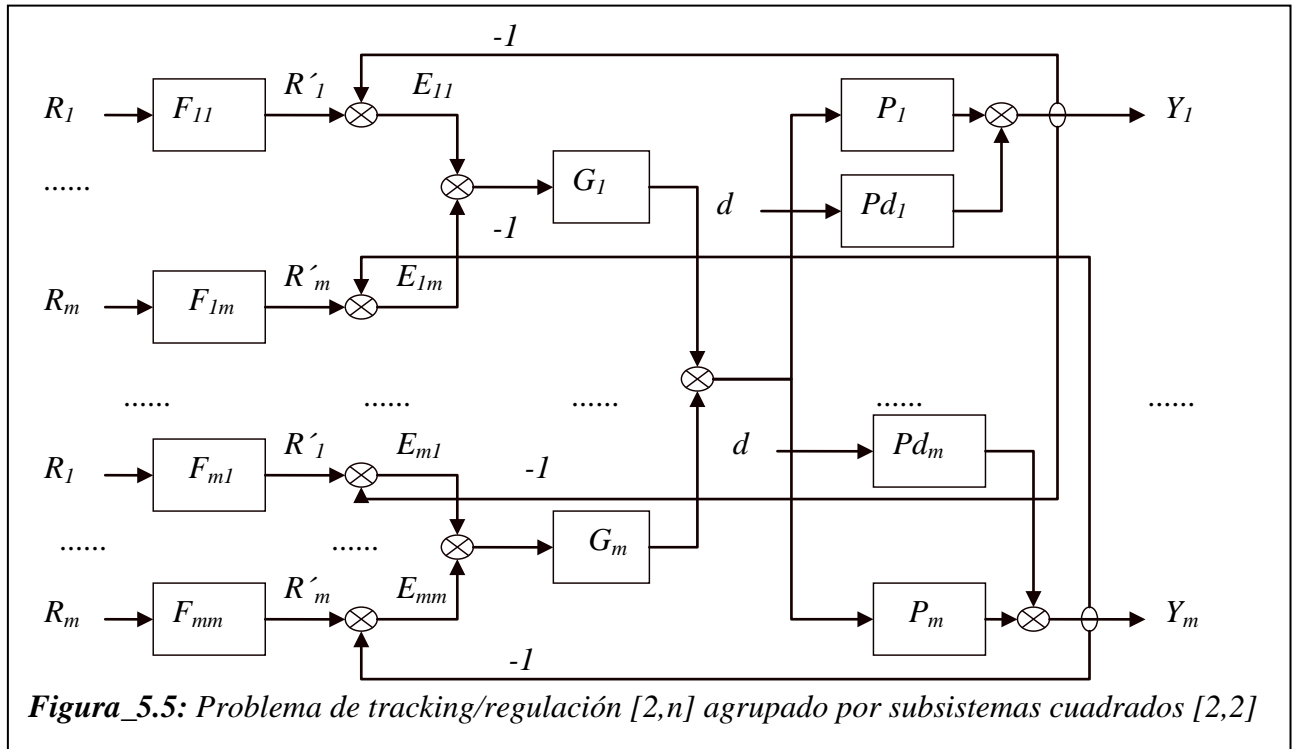
$$\begin{aligned}
 & (q_{2n}^{2,n-1} + g_n) y_n = (-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n-1,n-1} + g_n f_{n-1,n}) r_{n-1} + (-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n,n-1} + g_n f_{nn}) r_n - q_{2,n-1}^{1,n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} \right) + \\
 & + g_n \left(\sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} f_{n,i-1} r_{i-1} + (f_{ni} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right) - \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2,n-1}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} f_{l,i-1} r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right) \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

5.1.3 Problema Combinado Tracking/Regulación

Esquemático por la representación dada en la *Figura_5.5*, donde se ha usado controladores diagonales $G_i[2,2]$, prefiltros no diagonales $F_{ij}[2,2]$, subplantas $P_i[2,2]$, referencias de entrada $R_1 = (r_1, r_2)$, ..., $R_m = (r_{n-1}, r_n)$, subplantas de perturbaciones $Pd_i[2,2]$, perturbaciones externas $d = (d_1, d_2)$ y entradas de control

$$u = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m E_{ki}, \quad \text{con } E_{ki} = F_{ki} R_i - Y_i$$

El problema MIMO $[2, n]$ presentado se descompone en m problemas (*subsistemas*) MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_5.6*.



La solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO [2,2] propuestos a continuación, donde cada compensador G_i y cada prefiltro F_{ij} está especializado en una única planta P_i .

Donde

$$Pd_1^i = -G_1 \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 2, \dots, m \quad (5.1) \quad \text{y} \quad A_1 = -\sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d} \quad (5.2)$$

;

$$Pd_m^i = G_m \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \quad (5.3) \quad \text{y} \quad A_m = -\sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{d} \quad (5.4)$$

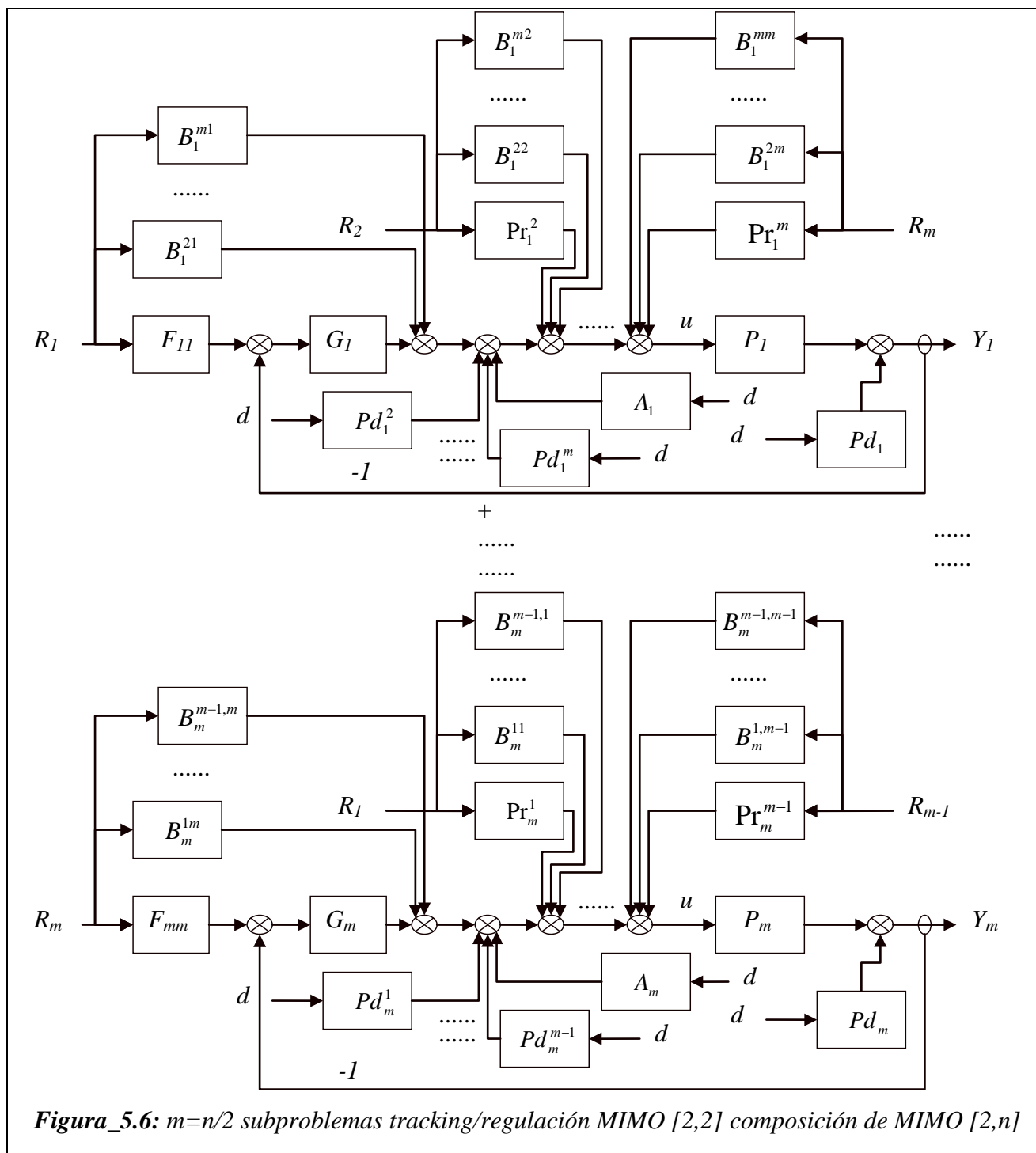
y, donde

$$Pr_1^i = G_1 \left(F_{1i} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 2, \dots, m \quad (5.28); \dots; Pr_m^i = G_m \left(F_{mi} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \quad (5.29),$$

$$B_1^{ki} = G_k \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m \text{ y } k = 2, \dots, m \quad (5.30)$$

;

$$B_m^{ki} = G_k \left(F_{ki} - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, m-1 \quad (5.31)$$



Figura_5.6: $m=n/2$ subproblemas tracking/regulación MIMO [2,2] composición de MIMO [2,n]

5.1.3.1 Descripción matemática del problema Combinado Tracking/Regulación

Formalmente, los m subsistemas en modo matricial se describen considerando los resultados obtenidos anteriormente según, (5.22), (5.23), (5.26), (5.27) y (5.47), (5.48), (5.51), (5.52), como sigue,

(1) Para Tracking/Regulación del subsistema-1,

$$y_1 = \frac{\left(q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21} - g1 \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{d_1} - \sum_{i=3}^{n-1,impar} gi \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} \right) d_1 + (q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22})d_2 + g1f_{11}r_1 + g1f_{12}r_2}{(q_{11} + g1)} +$$

$$+ \frac{g1 \left(\sum_{i=3}^{n-1,impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1,impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \right) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (5.53)$$

$$y_2 = \frac{\left(q_{21}^1Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21} + q_{21}^1 \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{d_1} + \sum_{i=3}^{n-1,impar} q_{21}^{li} \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} \right) d_1 + \left(q_{21}^1Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22} - g2 \sum_{i=4}^{n,par} \frac{y_i}{d_2} - \sum_{i=4}^{n,par} gi \sum_{j=2}^{n,par} \frac{y_j}{d_2} \right) d_2}{(q_{22}^2 + g2)} +$$

$$+ \frac{\left(-q_{21}^1f_{11} + g2f_{21} \right) r_1 + \left(-q_{21}^1f_{12} + g2f_{22} \right) r_2 - q_{21}^1 \left(\sum_{i=3}^{n-1,impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{i=4}^{n,par} f_{2,i-1}r_{i-1} + (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i})r_i \right)}{(q_{22}^2 + g2)} +$$

$$+ \frac{- \sum_{k=3}^{n-1,impar} q_{21}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1,impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \right) + \sum_{l=4}^{n,par} g_l \left(\sum_{i=2}^{n,par} f_{l,i-1}r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i})r_i \right)}{(q_{22}^2 + g2)} \quad (5.54)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los subsistemas 2, 3, ..., hasta alcanzar el m.

(m) Para Tracking/Regulación del subsistema-m,

$$y_{n-1} = \frac{\left(q_{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{1n}Pd_{2,n-1} - g_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{d_1} - \sum_{i=1}^{n-3,impar} gi \sum_{j=1}^{n-1,impar} \frac{y_j}{d_1} \right) d_1 + (q_{1,n-1}Pd_{1n} + q_{1n}Pd_{2n})d_2 - q_{1n}y_n}{(q_{1,n-1} + g_{n-1})} +$$

$$+ \frac{g_{n-1}f_{n-1,n-1}r_{n-1} + g_{n-1}f_{n,n-1}r_n + g_{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3,impar} (f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{n-1,i+1}r_{i+1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1,impar} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i})r_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \right)}{(q_{1,n-1} + g_{n-1})} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned}
 y_n = & \frac{\left(q_{2,n-1}^{1,n-1} P d_{1,n-1} + q_{2n}^{2,n-1} P d_{2,n-1} + q_{2,n-1}^{1,n-1} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1} + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2,n-1}^{1i} \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_j}{d_1} \right) d_1 + \left(q_{2,n-1}^{1,n-1} P d_{1n} + q_{2n}^{2,n-1} P d_{2n} - g_n \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{d_2} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} g_i \sum_{j=2}^{n, \text{par}} \frac{y_j}{d_2} \right) d_2}{\left(q_{2n}^{2,n-1} + g_n \right)} + \\
 & + \frac{\left(-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n-1,n-1} + g_n f_{n-1,n} \right) r_{n-1} + \left(-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n,n-1} + g_n f_{nn} \right) r_n - q_{2,n-1}^{1,n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \left(f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} \right) + g_n \left(\sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} f_{n,i-1} r_{i-1} + \left(f_{ni} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i \right)}{\left(q_{2n}^{2,n-1} + g_n \right)} + \\
 & + \frac{- \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2,n-1}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \left(f_{ki} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} g_i \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} f_{1,i-1} r_{i-1} + \left(f_{li} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i \right)}{\left(q_{2n}^{2,n-1} + g_n \right)} \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

5.1.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación

A partir de las ecuaciones (5.53), (5.54), (5.55) y (5.56), se obtiene lo siguiente,

Sensibilidades:

Definidas por las limitaciones impuestas por $\left| \frac{y_i}{d_j} \right| \leq Wps_{ij}$, con $i=1, \dots, n$ y $j=1, 2$

Subsistema-1,

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{11} P d_{11}| + |q_{12} P d_{21}| + |g_1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} Wps_{i1} + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |g_i| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} Wps_{j1} + |q_{12} Wps_{21}|}{q_{11} + g_1} \right| \leq Wps_{11} \quad (5.57)$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{11} P d_{12}| + |q_{12} P d_{22}| + |q_{12} Wps_{22}|}{q_{11} + g_1} \right| \leq Wps_{12} \quad (5.58)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1 P d_{11}| + |q_{22}^2 P d_{21}| + |q_{21}^1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} Wps_{i1} + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^i| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} Wps_{j1}}{q_{22}^2 + g_2} \right| \leq Wps_{21} \quad (5.59)$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1 P d_{12}| + |q_{22}^2 P d_{22}| + |g_2| \sum_{i=4}^{n,par} Wps_{i2} + \sum_{i=4}^{n,par} |g_i| \sum_{j=2}^{n,par} Wps_{j2}}{q_{22}^2 + g_2} \right| \leq Wps_{22} \quad (5.60)$$

.....

Subsistema-m,

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1} P d_{1,n-1}| + |q_{1n} P d_{2,n-1}| + |g_{n-1}| \sum_{i=1}^{n-3,impar} Wps_{i1} + \sum_{i=1}^{n-3,impar} |g_i| \sum_{j=1}^{n-1,impar} Wps_{j1} + |q_{1n} Wps_{n1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq Wps_{n-1,1} \quad (5.61)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1} P d_{1n}| + |q_{1n} P d_{2n}| + |q_{1n} Wps_{n2}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq Wps_{n-1,2} \quad (5.62)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1} P d_{1,n-1}| + |q_{2n}^{2,n-1} P d_{2,n-1}| + |q_{2,n-1}^{1,n-1}| \sum_{i=1}^{n-3,impar} Wps_{i1} + \sum_{i=1}^{n-3,impar} |q_{2,n-1}^{1i}| \sum_{j=1}^{n-1,impar} Wps_{j1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq Wps_{n1} \quad (5.63)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1} P d_{1n}| + |q_{2n}^{2,n-1} P d_{2n}| + |g_n| \sum_{i=2}^{n-2,par} Wps_{i2} + \sum_{i=2}^{n-2,par} |g_i| \sum_{j=2}^{n,par} Wps_{j2}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq Wps_{n2} \quad (5.64)$$

Esfuerzo de Control:

A efectos de Regulación, en principio, hay tantas especificaciones de Esfuerzo de Control como lazos cerrados del *sistema* a regular pero, como entradas de control se tienen dos, sólo se pueden imponer dos veces el número de perturbaciones externas existentes.

Las especificaciones de esfuerzo de control para regulación se van a reagrupar imponiendo las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{11} = \max(Wecr_{i1}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{12} = \max(Wecr_{i2}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{21} = \max(Wecr_{i1}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{22} = \max(Wecr_{i2}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.68)$$

donde las funciones de valor *max* significan elección de la especificación más restrictiva.

En términos de Seguimiento existen igualmente, tantas especificaciones de Esfuerzo de Control como especificaciones de tracking.

Como sólo existen dos entradas de control, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento se reagrupan imponiendo las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{11} = \max(Wecs_{i1}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{12} = \max(Wecs_{i2}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{13} = \max(Wecs_{i3}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.71)$$

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{1n} = \max(Wecs_{in}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (5.72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{21} = \max(Wecs_{i1}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{22} = \max(Wecs_{i2}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{23} = \max(Wecs_{i3}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.75)$$

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{2n} = \max(Wecs_{in}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \end{array} \right. \quad (5.76)$$

1.En Términos de Regulación. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}}{d_j} \right| \leq We_{cr_{ij}} \leq We_{crm_{kj}}$, con

$i=1,2,\dots,n$ (salidas), $j=1,2$ y $k=1,2$, aunque descritas en función de las sensibilidades definidas anteriormente y, expresadas en modo IPD².

$$|E_{cr_{11}}| = q_{11}|S_{11}| \leq We_{cr_{11}} \leq We_{crm_{11}} \quad (5.77) \quad ; \quad |E_{cr_{12}}| = q_{11}|S_{12}| \leq We_{cr_{12}} \leq We_{crm_{12}} \quad (5.78)$$

$$|E_{cr_{21}}| = q_{22}^2|S_{21}| \leq We_{cr_{21}} \leq We_{crm_{21}} \quad (5.79) \quad ; \quad |E_{cr_{22}}| = q_{22}^2|S_{22}| \leq We_{cr_{22}} \leq We_{crm_{22}} \quad (5.80)$$

.....

$$|E_{cr_{n-1,1}}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,1}| \leq We_{cr_{n-1,1}} \leq We_{crm_{11}} \quad (5.81); \quad |E_{cr_{n-1,2}}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,2}| \leq We_{cr_{n-1,2}} \leq We_{crm_{12}} \quad (5.82)$$

$$|E_{cr_{n1}}| = q_{2n}^{2,n-1}|S_{n1}| \leq We_{cr_{n1}} \leq We_{crm_{21}} \quad (5.83) \quad ; \quad |E_{cr_{n2}}| = q_{2n}^{2,n-1}|S_{n2}| \leq We_{cr_{n2}} \leq We_{crm_{22}} \quad (5.84)$$

Se ha tenido en cuenta que las sensibilidades y el esfuerzo de control para regulación,

expresados como $S_{ij} = \frac{y_i}{d_j}$ y $E_{cr_{ij}} = \frac{u_{ij}}{d_j}$, respectivamente, pueden relacionarse a través de

la expresión $E_{cr_{ij}} = \frac{y_i}{d_j} \frac{u_{ij}}{y_i} = \frac{S_{ij}}{Pe_{ij}}$, donde $Pe_{ij} = \frac{y_i}{u_{ij}}$ es la planta efectiva del subsistema

considerado.

2.En Términos de Seguimiento. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}}{r_j} \right| \leq We_{cs_{ij}} \leq We_{csm_{kj}}$, con

$i=1,2,\dots,n$ (salidas), $j=1,\dots,n$ y $k=1,2$, siendo r_j , referencias de entrada a los subsistemas usados con prefiltros.

$$|E_{cs_{11}}| = q_{11}|T_{11}| \leq We_{cs_{11}} \leq We_{csm_{11}} \quad (5.85) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad |E_{cs_{1n}}| = q_{11}|T_{1n}| \leq We_{cs_{1n}} \leq We_{csm_{1n}} \quad (5.86)$$

$$|E_{cs_{21}}| = q_{22}^2|T_{21}| \leq We_{cs_{21}} \leq We_{csm_{21}} \quad (5.87); \quad \dots \quad ; \quad |E_{cs_{2n}}| = q_{22}^2|T_{2n}| \leq We_{cs_{2n}} \leq We_{csm_{2n}} \quad (5.88)$$

.....

$$|E_{cs_{n-1,1}}| = q_{1,n-1}|T_{n-1,1}| \leq We_{cs_{n-1,1}} \leq We_{csm_{11}} \quad (5.89); \quad \dots \quad ; \quad |E_{cs_{n-1,n}}| = q_{1,n-1}|T_{n-1,n}| \leq We_{cs_{n-1,n}} \leq We_{csm_{1n}} \quad (5.90)$$

² Aplicadas las ecuaciones (5.65), (5.66), (5.67) y (5.68).

$$|Ecs_{n1}| = q_{2n}^{2,n-1} |T_{n1}| \leq We_{cs_{n1}} \leq We_{csm_{21}} \quad (5.91); \quad \dots \quad ; |Ecs_{nm}| = q_{2n}^{2,n-1} |T_{nm}| \leq We_{cs_{nm}} \leq We_{csm_{2n}} \quad (5.92)$$

El tracking y el esfuerzo de control para seguimiento, $T_{ij} = \frac{y_i}{r_j}$ y $Ecs_{ij} = \frac{u_{ij}}{r_j}$,

respectivamente, se relacionan a través de la expresión $Ecs_{ij} = \frac{y_i}{r_j} \frac{u_{ij}}{y_i} = \frac{T_{ij}}{Pe_{ij}}$

3.En Términos de Seguimiento Puro. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}}{r'_j} \right| \leq We_{cs'_{ij}} \leq We_{csm'_{kj}}$,

con $i=1,2,\dots,n$ (salidas), $j=1,\dots,n$ y $k=1,2$, siendo r'_j , referencias de entrada a los subsistemas usados sin prefiltros.

El tracking puro y el esfuerzo de control para seguimiento puro, $T'_{ij} = \frac{y_i}{r'_j}$ y $Ecs'_{ij} = \frac{u_{ij}}{r'_j}$,

respectivamente, se relacionan a través de la expresión $Ecs'_{ij} = \frac{y_i}{r'_j} \frac{u_{ij}}{y_i} = \frac{T'_{ij}}{Pe_{ij}}$

Estabilidad Robusta: Viene descrita por las limitaciones impuestas dentro de cada

subsistema a cada uno de los lazos cerrados con plantas equivalentes $\frac{1}{q_{1i}}$ y $\frac{1}{q_{2j}^{2,j-1}}$, con

$i=1,3, \dots, n-1$ y $j=2,4,\dots,n$, y controladores g_i y g_j , respectivamente, todos ellos estables.

Tales limitaciones se denotan por $|Te_{ij}| \leq We_k$, con $i=1,2$, $j=1,\dots,n$ y $k=1, \dots, n$, dando lugar

a,

$$|Te_{11}| = |Te_{12}| = \left| \frac{q_{11}}{q_{11} + g_1} \right| \leq We_1 \quad (5.93); \quad |Te_{21}| = |Te_{22}| = \left| \frac{q_{22}^2}{q_{22}^2 + g_2} \right| \leq We_2 \quad (5.94)$$

$$|Te_{13}| = |Te_{14}| = \left| \frac{q_{13}}{q_{13} + g_3} \right| \leq We_3 \quad (5.95); \quad |Te_{23}| = |Te_{24}| = \left| \frac{q_{24}^{23}}{q_{24}^{23} + g_4} \right| \leq We_4 \quad (5.96)$$

.....

$$|Te_{1,n-1}| = |Te_{1n}| = \left| \frac{q_{1,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq We_{n-1} \quad (5.97); \quad |Te_{2,n-1}| = |Te_{2n}| = \left| \frac{q_{2n}^{2,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq We_n \quad (5.98)$$

Tracking: Para determinación de prefiltros. Limitaciones impuestas por $\alpha_{ij} \leq \left| \frac{y_i}{r_j} \right| \leq \beta_{ij}$, con

$i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{11}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(|f_{k1}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + |q_{12} \beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{11} \quad (5.99)$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{12}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(|f_{k2}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + |q_{12} \beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{12} \quad (5.100)$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| = \left| \frac{y_1}{r_3} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{13}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(|f_{k3}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + |q_{12} \beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{13} \quad (5.101)$$

.....

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r_n} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{1n}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(|f_{kn}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + |q_{12} \beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{1n} \quad (5.102)$$

$$\alpha_{21} \leq |T_{21}| = \left| \frac{y_2}{r_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \left(|f_{11}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \left(|f_{k1}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + |g2| \left(|f_{21}| + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\beta_{i1}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \left(|f_{l1}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{i1}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{21} \quad (5.103)$$

$$\alpha_{22} \leq |T_{22}| = \left| \frac{y_2}{r_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \left(|f_{12}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \left(|f_{k2}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + |g2| \left(|f_{22}| + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\beta_{i2}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \left(|f_{l2}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{i2}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{22} \quad (5.104)$$

$$\alpha_{23} \leq |T_{23}| = \left| \frac{y_2}{r_3} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1 \left(|f_{13}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k} \left(|f_{k3}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + |g_2 \left(|f_{23}| + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\beta_{i3}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l \left(|f_{13}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{i3}| \right)|}{q_{22}^2 + g_2} \right| \leq \beta_{23} \quad (5.105)$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r_n} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1 \left(|f_{1n}| + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k} \left(|f_{kn}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + |g_2 \left(|f_{2n}| + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l \left(|f_{1n}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{in}| \right)|}{q_{22}^2 + g_2} \right| \leq \beta_{2n} \quad (5.106)$$

.....

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_1} \right| = \left| \frac{|q_{1n} \beta_{n1}| + |g_{n-1} \left(|f_{n-1,1}| + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} |g_k \left(|f_{k1}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i1}| \right)|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \beta_{n-1,1} \quad (5.107)$$

.....

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| \frac{|q_{1n} \beta_{nn}| + |g_{n-1} \left(|f_{n-1,n}| + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} |g_k \left(|f_{kn}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right)|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \beta_{n-1,n} \quad (5.108)$$

.....

$$\alpha_{n,n-1} \leq |T_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1} \left(|f_{n-1,n-1}| + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} |\beta_{i,n-1}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} |q_{2,n-1}^{1k} \left(|f_{kn}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{i,n-1}| \right) + |g_n \left(|f_{n,n-1}| + \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} |\beta_{i,n-1}| \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} |g_l \left(|f_{1n}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{i,n-1}| \right)|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \beta_{n,n-1} \quad (5.109)$$

$$\alpha_{nn} \leq |T_{nn}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1} \left(|f_{n-1,n}| + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} |q_{2,n-1}^{1k} \left(|f_{kn}| + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\beta_{in}| \right) + |g_n \left(|f_{nn}| + \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} |\beta_{in}| \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} |g_l \left(|f_{1n}| + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\beta_{in}| \right)|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \beta_{nn} \quad (5.110)$$

Ecuaciones de Tracking Puro, usadas en Esfuerzo de Control en términos de Seguimiento:

En un problema de tracking/regulación como el presentado en la *Figura_5.5*, a efectos de Tracking Puro, usando entradas de referencia r' sobre subsistemas sin prefiltros, se obtiene un comportamiento descrito por la ecuación (5.41) modificada tal como se indica en (5.114), es decir,

$$T = \frac{Y}{R} \quad \text{y} \quad T' = \frac{T}{F} = \frac{Y}{FR} = \frac{Y}{R'} \quad (5.111)$$

$$u' = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m E'_{ki} \quad (5.112) \quad \text{con} \quad E'_{ki} = R'_i - Y_i \quad (5.113)$$

dan lugar a,

$$(P_1^{-1} + G_1)Y_1 = G_1R'_1 + G_1 \sum_{i=2}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) R'_i + \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) R'_i = G_1R'_1 + G_1 \sum_{i=2}^m (R'_i - Y_i) + \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=1}^m (R'_i - Y_i) \quad (5.114)$$

que finalmente hace que las ecuaciones (5.53), (5.54), (5.55) y (5.56) queden del siguiente modo,

(1) Para el subsistema-1,

$$y_1 = \frac{g1r'_1 + g1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (5.115)$$

$$y_2 = \frac{-q_{21}^1 r'_1 + g2r'_2 - q_{21}^1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + g2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) - \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} q_{21}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) \right)}{(q_{22}^2 + g2)} \quad (5.116)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ...*, hasta alcanzar el m .

(m) Para el subsistema-m,

$$y_{n-1} = \frac{g_{n-1}r'_{n-1} + g_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{1n} y_n}{(q_{1, n-1} + g_{n-1})} \quad (5.117)$$

$$y_n = \frac{-q_{2, n-1}^{1, n-1} r'_{n-1} + g_n r'_n - q_{2, n-1}^{1, n-1} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (r'_i - y_i) + g_n \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} (r'_i - y_i) - \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2, n-1}^{1k} \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \sum_{i=2}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{2n}^{2, n-1} + g_n)} \quad (5.118)$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking Puro se pueden describir como se indica a

continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\left| \frac{y_i}{r'_j} \right| \leq \rho_{ij}$, con

$i=1, \dots, n$ y $j=1, \dots, n$

$$|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{12} \rho_{21}| + |g1| \left(1 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right)}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{11} \quad (5.119)$$

$$|T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{12} \rho_{22}| + |g1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i2}| + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i2}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{12} \quad (5.120)$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left| \frac{|q_{12} \rho_{23}| + |g1| \left(1 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i3}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i3}| \right)}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{13} \quad (5.121)$$

$$|T'_{14}| = \left| \frac{y_1}{r'_4} \right| = \left| \frac{|q_{12} \rho_{24}| + |g1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i4}| + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i4}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{14} \quad (5.122)$$

.....

$$|T'_{1,n-1}| = \left| \frac{y_1}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{2,n-1}| + |g1| \left(1 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right)}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1,n-1} \quad (5.123)$$

$$|T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + |g1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{in}| + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |g_k| \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{in}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1n} \quad (5.124)$$

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \left(1 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right) + |g2| \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\rho_{i1}| + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\rho_{i1}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{21} \quad (5.125)$$

$$|T'_{22}| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i2}| + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i2}| + |g2| \left(1 + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\rho_{i2}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \left(1 + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\rho_{i2}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{22} \quad (5.126)$$

.....

$$|T'_{2,n-1}| = \left| \frac{y_2}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \left(1 + \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + |g2| \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\rho_{i,n-1}| + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\rho_{i,n-1}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2,n-1} \quad (5.127)$$

$$|T'_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{in}| + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} |q_{21}^{1k}| \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{in}| + |g2| \left(1 + \sum_{i=4}^{n, \text{par}} |\rho_{in}| \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} |g_l| \left(1 + \sum_{i=2}^{n, \text{par}} |\rho_{in}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2n} \quad (5.128)$$

.....

$$|T'_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n1}| + |g_{n-1}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} |g_k| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} |\rho_{i1}| \right)}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,1} \quad (5.129)$$

$$|T'_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n2}| + |g_{n-1}| \sum_{i=1}^{n-3,impar} |\rho_{i2}| + \sum_{k=1}^{n-3,impar} |g_k| \sum_{i=1}^{n-1,impar} |\rho_{i2}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,2} \quad (5.130)$$

$$|T'_{n-1,n-1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n,n-1}| + |g_{n-1}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-3,impar} |\rho_{i,n-1}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} |g_k| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1,impar} |\rho_{i,n-1}| \right)}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,n-1} \quad (5.131)$$

$$|T'_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{nn}| + |g_{n-1}| \sum_{i=1}^{n-3,impar} |\rho_{in}| + \sum_{k=1}^{n-3,impar} |g_k| \sum_{i=1}^{n-1,impar} |\rho_{in}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,n} \quad (5.132)$$

.....

$$|T'_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-3,impar} |\rho_{i,n-1}| \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} |q_{2,n-1}^{1k}| \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1,impar} |\rho_{i,n-1}| \right) + |g_n| \sum_{i=2}^{n-2,par} |\rho_{i,n-1}| + \sum_{l=2}^{n-2,par} |g_l| \sum_{i=2}^{n,par} |\rho_{i,n-1}|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{n,n-1} \quad (5.133)$$

$$|T'_{nn}| = \left| \frac{y_n}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1}| \sum_{i=1}^{n-3,impar} |\rho_{in}| + \sum_{k=1}^{n-3,impar} |q_{2,n-1}^{1k}| \sum_{i=1}^{n-1,impar} |\rho_{in}| + |g_n| \left(1 + \sum_{i=2}^{n-2,par} |\rho_{in}| \right) + \sum_{l=2}^{n-2,par} |g_l| \left(1 + \sum_{i=2}^{n,par} |\rho_{in}| \right)}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{nn} \quad (5.134)$$

5.1.5 Compensación por Sobrealimentación para Tracking

En el problema de Tracking esquematizado en la *Figura_5.3*, se observa que aparecen dos tipos de prefiltros: aquellos que relacionan las salidas de un *subsistema* con sus referencias de entrada directamente y los que, por otro lado, enlazan las salidas de cada *subsistema* con las referencias de entrada que no son propias del mismo.

Estamos hablando de compensadores de entrada para acoplo o desacoplo, respectivamente. En cada caso, indican el grado de acoplamiento/desacoplamiento de las

salidas de cada subsistema respecto de cada conjunto de referencias de entrada. En general, la definición de cada término podría ser como sigue:

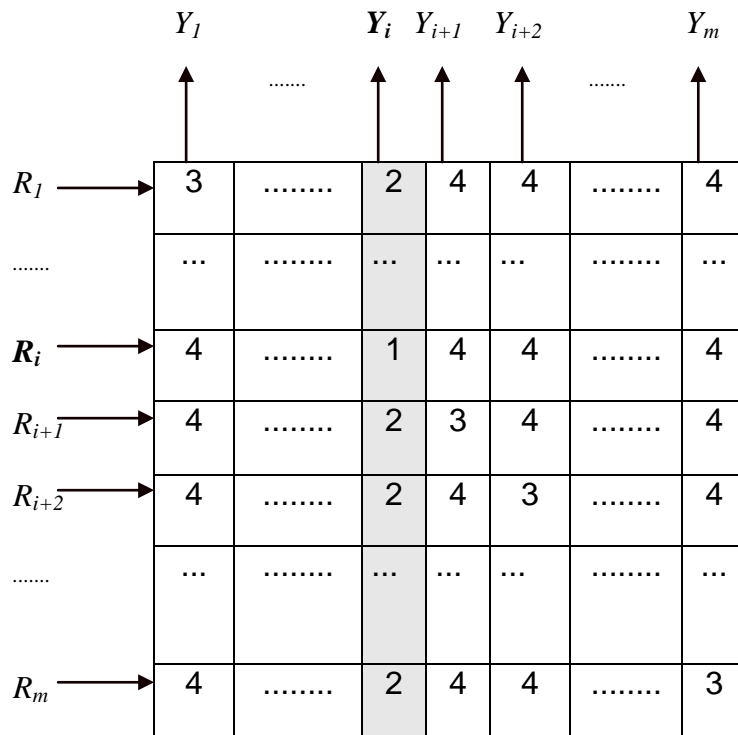
- Acoplo: Seguimiento lo más exhaustivo posible de las referencias de entrada hacia las salidas.
- Desacoplo: Inhibición de las salidas a partir de las referencias de entrada.

Para un determinado *subsistema-i* van a existir acoplos propios, pero también le van a afectar los acoplos propios de otros *subsistemas*, que por tanto, se van a nombrar como desacoplos.

Siguiendo el esquema de la *Figura_5.4*, donde se ha aplicado descomposición del problema principal *MIMO* $[2,n]$, en $m=n/2$ subproblemas de tracking/regulación *MIMO* $[2,2]$, se observa que en realidad existen para cada *subsistema-i* cuatro tipos de prefiltros, que definen diferentes tipos de acoplos/desacoplos:

- 1.- Prefiltro de Acoplo Propio o Principal: F_{ii} . Sobrealimentación principal del *subsistema-i*.
- 2.- Prefiltro de Desacoplo Principal: F_{ij} , con $j \neq i$. Determina la sobrealimentación dada en las funciones Pr_i^j .
- 3.- Prefiltro de Desacoplo del Acoplo Auxiliar: F_{kk} , con $k \neq i$. Sobrealimentación principal dada en las funciones B_i^{kj} .
- 4.- Prefiltro de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar: F_{kj} , con $k \neq j \neq i$. Sobrealimentación no principal dada en las funciones B_i^{kj} .

En la *Figura_5.7* se esquematiza la distribución de los diferentes prefiltros descritos y su relación con las salidas/referencias de entrada para un *subsistema-i* cualquiera en un problema de Tracking $[n,n]$, es decir de m *subsistemas*, con $m=n/2$.



Figura_5.7
Tipos de Prefiltros función de referencias/salidas

1. Prefiltro de **Acoplo Principal**.
2. Prefiltro de **Desacoplo Principal**.
3. Prefiltro de Desacoplo del Acoplo Auxiliar.
4. Prefiltro de Desacoplo del DesacoploAuxiliar.

5.1.6 Definiciones en las Especificaciones de Tracking

Considerando el planteamiento anterior, con 4 tipos diferentes de compensadores por sobrealimentación, se definen también 4 tipos distintos de especificaciones para tracking.

1. Tracking de Acoplo Propio o Principal: Especificaciones sobre el *subsistema-i*³.
2. Tracking de Desacoplo Principal: Especificaciones de todos los *subsistemas* menos del *subsistema-i*, que afectan a las salidas Y_i . Su exactitud de definición es importante para conseguir un buen desacoplo principal.
3. Tracking de Desacoplo del Acoplo Auxiliar: Especificaciones de acoplo propias de cada *subsistema* distinto al *subsistema-i*. Algunas suelen ser imposiciones al problema, aunque menos restrictivas que las propias del *subsistema-i*, elegido como número 1.
4. Tracking de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar: Especificaciones de todos los *subsistemas* menos del *subsistema-i*, que NO afectan a las salidas Y_i . Su exactitud de definición suele ser menos importante.

³ Las imposiciones más rigurosas de acoplamiento salidas/referencias definen el subsistema-1 y, por tanto, su tracking propio principal.

5.1.7 Resumen del Procedimiento de “Squaring-up”

La descripción se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso.

Problema de Tracking:

Tabla_5.1: Descripción de entradas de control en problema de Tracking

Procedimiento de Compensación	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,n] y prefiltro No diagonal [n,n]	$u = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m (F_{ki} R_i - Y_i)$	1	3

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera, las entradas de control se descomponen del siguiente modo:

$$u = G_j (F_{jj} R_j - Y_j) + G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_{ji} - \beta_i) + \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k R_k (F_{kk} - \beta_k) + \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i (F_{ki} - \beta_i) \quad (5.135)$$

$$1. \text{ Término de Acoplo Propio } \equiv G_j (F_{jj} R_j - Y_j) \quad (5.136)$$

(Máxima influencia en la definición de controladores para acoplamiento)

$$2. \text{ Término de Desacoplo Principal } \equiv G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_{ji} - \beta_i) \quad (5.137)$$

(Máxima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$3. \text{ Término de Desacoplo del Acoplo Auxiliar } \equiv \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k R_k (F_{kk} - \beta_k) \quad (5.138)$$

(Menor influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$4. \text{ Término de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } \equiv \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i (F_{ki} - \beta_i) \quad (5.139)$$

(Mínima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

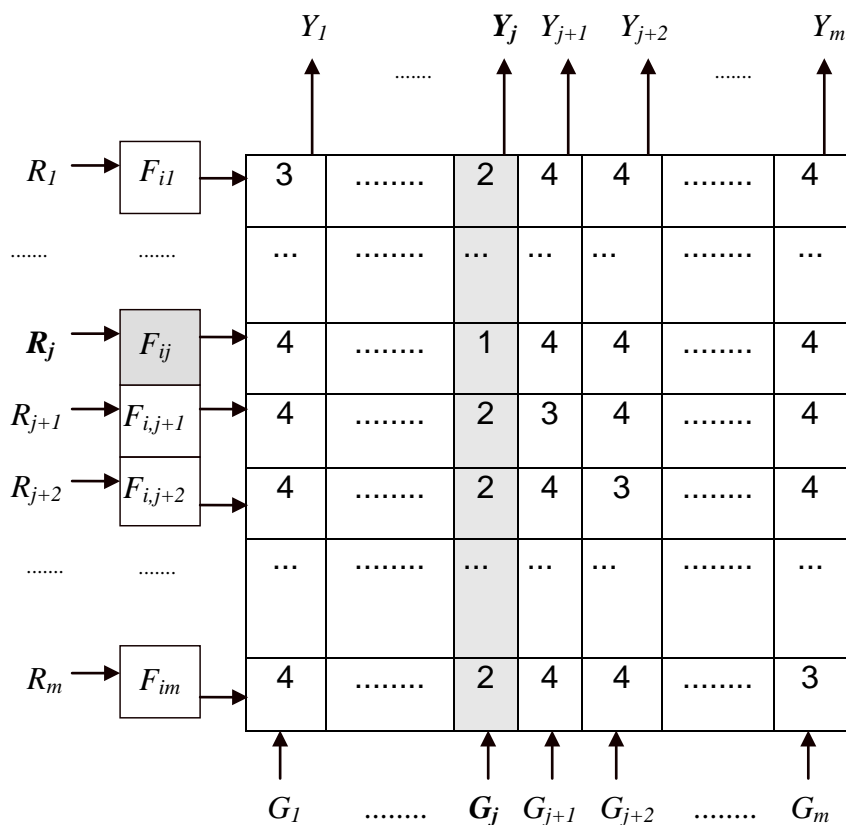


Figura 5.8
Grado de Acoplo/desacoplo de referencias/salidas (Tracking)

1. Prefiltro de **Acoplo Principal**.
2. Prefiltro de **Desacoplo Principal**.
3. Prefiltro de Desacoplo del Acoplo Auxiliar.
4. Prefiltro de Desacoplo del DesacoploAuxiliar.

En la *Figura_5.8* se esquematiza la relación de los distintos términos de acoplo/desacoplo con las diferentes entradas_de_referencia/salidas, así como, los tipos de prefiltros y compensadores \$G_i\$ a que dan lugar.

Problema de Regulación:

Tabla 5.2: Descripción de entradas de control en problema de Regulación

Procedimiento de Compensación	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,n]	$u = -\sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m Y_i$	1	3

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera, las entradas de control se descomponen del siguiente modo:

$$u = -G_j Y_j - dG_j \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i - d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k Wps_k - d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m Wps_i \quad (5.140)$$

1. Término de Acoplo Propio $\equiv -G_j Y_j$ (5.141)

(Máxima influencia en la definición de controladores para acoplamiento)

$$2. \text{ Término de Desacoplo Principal } \equiv -dG_j \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i \quad (5.142)$$

(Máxima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

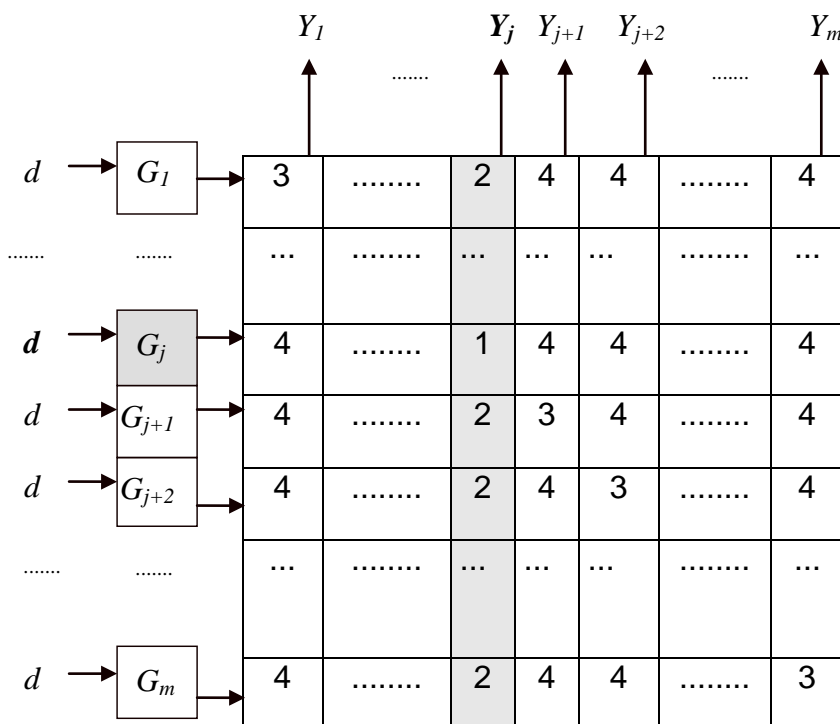
$$3. \text{ Término de Desacoplo del Acoplo Auxiliar } \equiv -d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k Wps_k \quad (5.143)$$

(Menor influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$4. \text{ Término de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } \equiv -d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m Wps_i \quad (5.144)$$

(Mínima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

En la *Figura_5.9* se esquematiza la relación de los distintos términos de acoplo/desacoplo con las diferentes perturbaciones_externas/salidas, así como, los tipos de compensadores G_i a que dan lugar.



Figura_5.9
Grado de Acoplo/desacoplo de perturbaciones/ salidas (Regulación)

1. Término de **Acoplo Principal**.
2. Términos de **Desacoplo Principal**.
3. Términos de Desacoplo del Acoplo Auxiliar.
4. Términos de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar.

NOTA: Las entradas del vector perturbaciones externas sobre los controladores G_i no son reales, significa que los distintos G_i consideran/tratan el valor de d .

5.2 Diseño de Control Optimizado

Vamos a tratar de incorporar en el “diseño de control inicial” anterior una descripción de especificaciones para seguimiento y regulación que incluya minimización del esfuerzo de control; es lo que llamaremos “diseño de control optimizado”. Para ello, las especificaciones de esfuerzo de control se van a introducir en las especificaciones básicas para seguimiento (tracking) y regulación (sensibilidades), formando parte de las mismas. De esta manera, a partir de las especificaciones de tracking y sensibilidad, que incorporarán de forma inherente las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento y regulación ya minimizadas, respectivamente, vamos a conseguir mejorar en el sentido del esfuerzo de control el seguimiento y la regulación del sistema.

5.2.1 Problema de Regulación Optimizado

Utilizando como base el problema de regulación 5.1.1, esquematizado en las *figuras_5.1* y *5.2*, la optimización de las especificaciones de control en términos de regulación parte

de considerar la ecuación $u = -\sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m Y_i$ (5.145) de forma matricial, esto es,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \left[\begin{array}{cc} \left(\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j & 0 \right) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} y_i \\ \sum_{i=2}^{n, \text{par}} y_i \end{pmatrix} \\ 0 & \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \end{array} \right] \quad (5.146)$$

Que desarrollada queda como,

$$\begin{cases} u_1 = - \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} y_i \end{cases} \quad (5.147)$$

$$\begin{cases} u_2 = - \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n, \text{par}} y_i \end{cases} \quad (5.148)$$

Además, para un *subsistema-k* cualquiera con $k \equiv [l, l+1]$,

$$\begin{pmatrix} y_l \\ y_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1l} & P_{1, l+1} \\ P_{2l} & P_{2, l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_{l+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pd_{1l} & Pd_{1, l+1} \\ Pd_{2l} & Pd_{2, l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (5.149)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, se utilizan entradas de control optimizadas u_i^{opt} y u_{i+1}^{opt} , manteniendo el esfuerzo de control para regulación lo más cerca posible de su valor mínimo⁴, **las salidas se anulan** [Yaniv,99]; esto es,

(1) Para el subsistema-1 optimizado,

$$\begin{cases} y_1 = 0 = P_{11}u_1^{opt} + P_{12}u_2^{opt} + Pd_{11}d_1 + Pd_{12}d_2 & (5.150) \\ y_2 = 0 = P_{21}u_1^{opt} + P_{22}u_2^{opt} + Pd_{21}d_1 + Pd_{22}d_2 & (5.151) \end{cases}$$

$$\text{con } u_1^{opt} = - \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i \quad (5.152) \quad \text{y} \quad u_2^{opt} = - \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i \quad (5.153)$$

Por tanto, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación del *subsistema-1* vendrán descritas del siguiente modo,

$$\left| Ecr_{11}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{d_1} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{11} \quad (5.154); \quad \left| Ecr_{12}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{d_2} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{12} \quad (5.155)$$

$$\left| Ecr_{21}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{d_1} \right| = \left| \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{21} \quad (5.156); \quad \left| Ecr_{22}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{d_2} \right| = \left| \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{22} \quad (5.157)$$

.....

(m) Para el subsistema-m optimizado,

$$\begin{cases} y_{n-1} = 0 = P_{1, n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{1n}u_n^{opt} + Pd_{1, n-1}d_1 + Pd_{1n}d_2 & (5.158) \\ y_n = 0 = P_{2, n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{2n}u_n^{opt} + Pd_{2, n-1}d_1 + Pd_{2n}d_2 & (5.159) \end{cases}$$

$$\text{con } u_{n-1}^{opt} = - \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i \quad (5.160) \quad \text{y} \quad u_n^{opt} = - \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i \quad (5.161)$$

⁴ u_i^{opt} y u_{i+1}^{opt} son u_1 y u_2 para el *subsistema-k* optimizado (minimizado) para esfuerzos de control de regulación.

De esta manera, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación del *subsistema-m* vendrán descritas del siguiente modo,

$$\left| Ecr_{n-1,1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{d_1} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq We cr_{n-1,1} \quad (5.162); \quad \left| Ecr_{n-1,2}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{d_2} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq We cr_{n-1,2} \quad (5.163)$$

$$\left| Ecr_{n1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{d_1} \right| = \left| \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq We cr_{n1} \quad (5.164); \quad \left| Ecr_{n2}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{d_2} \right| = \left| \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq We cr_{n2} \quad (5.165)$$

Como entradas de control, estén optimizadas o no sólo hay dos, únicamente se pueden imponer dos veces el número de perturbaciones externas existentes. Por ello, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación se reagrupan considerando las ecuaciones (5.65) a (5.68), como en el apartado 5.1.4.

Estas ecuaciones habrá que tenerlas en cuenta también a efectos de sensibilidad.

5.2.2 Problema de Tracking Optimizado

Utilizando como base el problema de tracking 5.1.2, esquematizado en las *figuras_5.3* y *5.4*, la optimización de las especificaciones de control en términos de seguimiento parte

de considerar la ecuación,

$$u = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m E_{ki} , \quad \text{con } E_{ki} = F_{ki} R_i - Y_i \quad (5.166)$$

que escrita de manera más conveniente ,

$$u = G_x (F_{xx} R_x - Y_x) + G_x \sum_{i=1, i \neq x}^m (F_{xi} R_i - Y_i) + \sum_{k=1, k \neq x}^m G_k \sum_{i=1}^m (F_{ki} R_i - Y_i) \quad (5.167)$$

donde dentro de los m *subsistemas*, x es un *subsistema* cualquiera , con $x \equiv [x_1, x_2]$.

En forma matricial, desarrollada la ecuación (5.167) proporciona,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x1,1} r_{x1} + f_{x1,2} r_{x2} - y_{x1} \\ f_{x2,1} r_{x1} + f_{x2,2} r_{x2} - y_{x2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{x1,1} r_1 + f_{x1,2} r_2 - y_1 \\ f_{x2,1} r_1 + f_{x2,2} r_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{x1,3} r_3 + f_{x1,4} r_4 - y_3 \\ f_{x2,3} r_3 + f_{x2,4} r_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} f_{x1,n-1} r_{n-1} + f_{x1,n} r_n - y_{n-1} \\ f_{x2,n-1} r_{n-1} + f_{x2,n} r_n - y_n \end{pmatrix} \right] + \\ & + \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{11} r_1 + f_{12} r_2 - y_1 \\ f_{21} r_1 + f_{22} r_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{13} r_3 + f_{14} r_4 - y_3 \\ f_{23} r_3 + f_{24} r_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} f_{1,n-1} r_{n-1} + f_{1,n} r_n - y_{n-1} \\ f_{2,n-1} r_{n-1} + f_{2,n} r_n - y_n \end{pmatrix} \right] + \\ & + \begin{pmatrix} g_3 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{31} r_1 + f_{32} r_2 - y_1 \\ f_{41} r_1 + f_{42} r_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{33} r_3 + f_{34} r_4 - y_3 \\ f_{43} r_3 + f_{44} r_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} f_{3,n-1} r_{n-1} + f_{3,n} r_n - y_{n-1} \\ f_{4,n-1} r_{n-1} + f_{4,n} r_n - y_n \end{pmatrix} \right] + \dots \quad (5.168) \end{aligned}$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x1,x1}r_{x1} + f_{x1,x2}r_{x2} - y_{x1} \\ f_{x2,x1}r_{x1} + f_{x2,x2}r_{x2} - y_{x2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1, i \neq x1}^{n-1, impar} f_{x1,i}r_i + f_{x1,i+1}r_{i+1} - y_i \\ \sum_{i=2, i \neq x2}^{n, par} f_{x2,i-1}r_{i-1} + f_{x2,i}r_i - y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1, k \neq x1}^{n-1, impar} g_k & 0 \\ 0 & \sum_{l=2, l \neq x2}^{n, par} g_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, impar} f_{ki}r_i - y_i + f_{k,i+1}r_{i+1} \\ \sum_{i=2}^{n, par} f_{l,i-1}r_{i-1} + f_{li}r_i - y_i \end{pmatrix} \quad (5.169)$$

Además, para un *subsistema-x* cualquiera con $x \equiv [x1, x2]$,

$$\begin{pmatrix} y_{x1} \\ y_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,x1} & P_{1,x2} \\ P_{2,x1} & P_{2,x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{pmatrix}, \quad \text{con } [u_{x1}, u_{x2}] = [u_1, u_2]_x \quad (5.170)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, se utilizan entradas de control optimizadas u_{x1}^{opt} y u_{x2}^{opt} , manteniendo el esfuerzo de control para seguimiento lo más cerca posible de su valor mínimo⁵, **las salidas seguirán a sus referencias de entrada** y las especificaciones de esfuerzo de control para tracking, vendrán descritas en general del siguiente modo,

$$\left| Ecs_{ij}^{opt} \right| = \left| \frac{u_l^{opt}}{r_j} \right| \leq Wecs_{ij}, \quad \text{con } l \in [1, 2, \dots, n] \text{ y } j \in [1, 2, \dots, n] \quad (5.171)$$

(1) Para el *subsistema-1*, optimizando para seguimiento las salidas y_1, y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u_1^{opt} + P_{12}u_2^{opt} = r_1 & (5.172) \\ y_2 = P_{21}u_1^{opt} + P_{22}u_2^{opt} = r_2 & (5.173) \end{cases}$$

⁵ u_{x1}^{opt} y u_{x2}^{opt} son u_1 y u_2 , respectivamente, para el *subsistema-x* optimizado (minimizado) para esfuerzos de control de seguimiento.

$$\text{con } u_1^{opt} = g1 \left[f_{11}r_1 - r_1 + f_{12}r_2 + \sum_{i=3}^{n-1,impar} (f_{1i}r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} - y_i) \right] + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \sum_{i=1}^{n-1,impar} (f_{ki}r_i - y_i + f_{k,i+1}r_{i+1}) \quad (5.174)$$

$$\text{y } u_2^{opt} = g2 \left[f_{21}r_1 + f_{22}r_2 - r_2 + \sum_{i=4}^{n,par} (f_{2,i-1}r_{i-1} + f_{2i}r_i - y_i) \right] + \sum_{l=4}^{n,par} g_l \sum_{i=2}^{n,par} (f_{l,i-1}r_{i-1} + f_{li}r_i - y_i) \quad (5.175)$$

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_1^{opt} para r_1 con i impar, aparece un "1" dentro de ambos paréntesis del resultado y se elimina en los sumatorios donde r_i está implicado el valor i impar utilizado.

$$\left| Ecs_{11}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r_1} \right| = \left| g1 \left(f_{11} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{11} \quad (5.176)$$

por tanto,
$$\left| Ecs_{11}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r_1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1,impar} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{11} \quad (5.177)$$

$$\left| Ecs_{12}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r_2} \right| = \left| g1 \left(f_{12} - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \left(f_{k2} - \sum_{i=1}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| \leq Wecs_{12} \quad (5.178)$$

$$\left| Ecs_{13}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r_3} \right| = \left| g1 \left(f_{13} - 1 - \sum_{i=5}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_3} \right) + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \left(f_{k3} - 1 - \sum_{i=1, i \neq 3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_3} \right) \right| \leq Wecs_{13} \quad (5.179)$$

.....

$$\left| Ecs_{1n}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r_n} \right| = \left| g1 \left(f_{1n} - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{k=3}^{n-1,impar} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq Wecs_{1n} \quad (5.180)$$

* Usando u_2^{opt} para r_1 con i par, aparece un "1" dentro de ambos paréntesis del resultado y se elimina en los sumatorios donde r_i está implicado el valor i par utilizado.

$$\left| Ecs_{21}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r_1} \right| = \left| g2 \left(f_{21} - \sum_{i=4}^{n,par} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{l=4}^{n,par} g_l \left(f_{l1} - \sum_{i=2}^{n,par} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{21} \quad (5.181)$$

$$\left| Ecs_{22}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r_2} \right| = \left| g2 \left(f_{22} - 1 - \sum_{i=4}^{n,par} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{l=4}^{n,par} g_l \left(f_{l2} - 1 - \sum_{i=4}^{n,par} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| \leq Wecs_{22} \quad (5.182)$$

por tanto,
$$\left| Ecs_{22}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r_2} \right| = \left| \sum_{l=2}^{n,par} g_l \left(f_{l2} - 1 - \sum_{i=4}^{n,par} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| \leq Wecs_{22} \quad (5.183)$$

$$\left| Ecs_{2n}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{2n}^{opt}}{r_n} \right| = \left| g_{2n} \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{l=4}^{n,par} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq Wecs_{2n} \quad (5.184)$$

(m) Para el subsistema-m, optimizando para seguimiento las salidas y_{n-1}, y_n :

$$\begin{cases} y_{n-1} = P_{1,n-1} u_{n-1}^{opt} + P_{1n} u_n^{opt} = r_{n-1} \\ y_n = P_{2,n-1} u_{n-1}^{opt} + P_{2n} u_n^{opt} = r_n \end{cases} \quad (5.185)$$

$$\quad (5.186)$$

con

$$u_{n-1}^{opt} = g_{n-1} \left[f_{n-1,n-1} r_{n-1} - r_{n-1} + f_{n-1,n} r_n + \sum_{i=1}^{n-3,impar} (f_{n-1,i} r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} - y_i) \right] + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \sum_{i=1}^{n-1,impar} (f_{ki} r_i - y_i + f_{k,i+1} r_{i+1}) \quad (5.187)$$

y

$$u_n^{opt} = g_n \left[f_{n,n-1} r_{n-1} + f_{nn} r_n - r_n + \sum_{i=2}^{n-2,par} (f_{n,i-1} r_{i-1} + f_{ni} r_i - y_i) \right] + \sum_{l=2}^{n-2,par} g_l \sum_{i=2}^{n,par} (f_{li-1} r_{i-1} + f_{li} r_i - y_i) \quad (5.188)$$

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_{n-1}^{opt} para r_i con i impar, aparece un "1" dentro de ambos paréntesis del resultado y se elimina en los sumatorios donde r_i está implicado el valor i impar utilizado.

$$\left| Ecs_{n-1,1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_1} \right| = \left| g_{n-1} \left(f_{n-1,1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,1} \quad (5.189)$$

$$\left| Ecs_{n-1,2}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_2} \right| = \left| g_{n-1} \left(f_{n-1,2} - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \left(f_{k2} - \sum_{i=1}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,2} \quad (5.190)$$

$$\left| Ecs_{n-1,n-1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_{n-1}} \right| = \left| g_{n-1} \left(f_{n-1,n-1} - 1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_{n-1}} \right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \left(f_{k,n-1} - 1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,n-1} \quad (5.191)$$

por tanto,
$$\boxed{\left|Ecs_{n-1,n-1}^{opt}\right| = \left|\frac{u_{n-1}^{opt}}{r_{n-1}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1,impar} g_k \left(f_{k,n-1} - 1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_{n-1}}\right)\right| \leq Wecs_{n-1,n-1}} \quad (5.192)$$

$$\left|Ecs_{n-1,n}^{opt}\right| = \left|\frac{u_{n-1}^{opt}}{r_n}\right| = \left|g_{n-1} \left(f_{n-1,n} - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-3,impar} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1,impar} \frac{y_i}{r_n}\right)\right| \leq Wecs_{n-1,n} \quad (5.193)$$

* Usando u_n^{opt} para r_i con i par, aparece un "1" dentro de ambos paréntesis del resultado y se elimina en los sumatorios donde r_i está implicado el valor i par utilizado.

$$\left|Ecs_{n1}^{opt}\right| = \left|\frac{u_n^{opt}}{r_1}\right| = \left|g_n \left(f_{n1} - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_1}\right) + \sum_{l=2}^{n-2,par} g_l \left(f_{l1} - \sum_{i=2}^{n,par} \frac{y_i}{r_1}\right)\right| \leq Wecs_{n1} \quad (5.194)$$

.....

$$\left|Ecs_{nn}^{opt}\right| = \left|\frac{u_n^{opt}}{r_n}\right| = \left|g_n \left(f_{nn} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_n}\right) + \sum_{l=2}^{n-2,par} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_n}\right)\right| \leq Wecs_{nn} \quad (5.195)$$

por tanto,
$$\boxed{\left|Ecs_{nn}^{opt}\right| = \left|\frac{u_n^{opt}}{r_n}\right| = \left|\sum_{l=2}^{n,par} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r_n}\right)\right| \leq Wecs_{nn}} \quad (5.196)$$

Considerando que entradas de control sólo hay dos, estén optimizadas o no, únicamente se pueden imponer dos veces el número de referencias de entrada existentes. Por ello, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento se reagrupan considerando las ecuaciones (5.69) a (5.76), como en el apartado 5.1.4.

Estas ecuaciones habrá que tenerlas en cuenta también a efectos de Tracking.

5.2.3 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación optimizando esfuerzo de control

A partir de las ecuaciones definidas para el problema combinado Tracking/Regulación, se obtienen las especificaciones descritas a continuación, usando los desarrollos optimizados propuestos en 5.2.1 y 5.2.2 [Borghesani et al., 95].

Sensibilidades: Definidas por las limitaciones impuestas por $\left| \frac{y_i}{d_j} \right| \leq Wps_{ij}$, con $i=1,\dots,n$ y

$j=1,2$. Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 5.2.1, en modo IPD⁶,

(1) Subsistema-1 optimizado para regulación,

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{11}| + |q_{12}Pd_{21}| + |q_{12}Wps_{21}| + |Wecr_{11}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{11}Pd_{11}| + |q_{12}Pd_{21}| + |q_{12}Wps_{21}| + |Wecrm_{11}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{11} \quad (5.197)$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{12}| + |q_{12}Pd_{22}| + |q_{12}Wps_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{12} \quad (5.198)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1Pd_{11}| + |q_{22}^2Pd_{21}| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecr_{11} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{21}^1Pd_{11}| + |q_{22}^2Pd_{21}| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecrm_{11} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{21} \quad (5.199)$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1Pd_{12}| + |q_{22}^2Pd_{22}| + |Wecr_{22}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{21}^1Pd_{12}| + |q_{22}^2Pd_{22}| + |Wecrm_{22}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{22} \quad (5.200)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para regulación,

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1,n-1}| + |q_{1n}Pd_{2,n-1}| + |q_{1n}Wps_{n1}| + |Wecr_{n-1,1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1,n-1}| + |q_{1n}Pd_{2,n-1}| + |q_{1n}Wps_{n1}| + |Wecrm_{11}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq Wps_{n-1,1} \quad (5.201)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1n}| + |q_{1n}Pd_{2n}| + |q_{1n}Wps_{n2}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq Wps_{n-1,2} \quad (5.202)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^1Pd_{1,n-1}| + |q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecr_{n-1,1} \right|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{|q_{2,n-1}^1Pd_{1,n-1}| + |q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecrm_{11} \right|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq Wps_{n1} \quad (5.203)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^1Pd_{1n}| + |q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2n}| + |Wecr_{n2}|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{|q_{2,n-1}^1Pd_{1n}| + |q_{2n}^{2,n-1}Pd_{2n}| + |Wecrm_{22}|}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq Wps_{n2} \quad (5.204)$$

⁶ Según aplicación de ecuaciones (5.65) a (5.68).

NOTA: Observar en las ecuaciones anteriores cómo las especificaciones de esfuerzo de control para regulación forman parte de la estructura de las especificaciones de sensibilidad.

Tracking: Para determinación de prefiltros. En un problema de tracking/regulación usando entradas de referencia r y aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 5.2.2, en **modo IPD**, se obtiene un comportamiento descrito por las siguientes ecuaciones,

(1) Para Tracking del subsistema-1,

$$y_1 = \frac{g_1 f_{11} r_1 + g_1 f_{12} r_2 + g_1 \left(\sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{1,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) - q_{12} y_2}{(q_{11} + g_1)} \quad (5.205)$$

$$y_2 = \frac{(-q_{21}^1 f_{11} + g_2 f_{21}) r_1 + (-q_{21}^1 f_{12} + g_2 f_{22}) r_2 - q_{21}^1 \left(\sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{1,i+1} r_{i+1} \right) + g_2 \left(\sum_{i=4}^{n, \text{par}} f_{2,i-1} r_{i-1} + (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right)}{(q_{22}^2 + g_2)} +$$

$$+ \frac{- \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} q_{21}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} f_{l,i-1} r_{i-1} + (f_{li} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right)}{(q_{22}^2 + g_2)} \quad (5.206)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el m .

(m) Para Tracking del subsistema- m ,

$$y_{n-1} = \frac{g_{n-1} f_{n-1,n-1} r_{n-1} + g_{n-1} f_{n,n-1} r_n + g_{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1} \right) - q_{1n} y_n}{(q_{1,n-1} + g_{n-1})} \quad (5.207)$$

$$y_n = \frac{\left(-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n-1,n-1} + g_n f_{n-1,n}\right) r_{n-1} + \left(-q_{2,n-1}^{1,n-1} f_{n,n-1} + g_n f_{nn}\right) r_n - q_{2,n-1}^{1,n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \left(f_{n-1,i} - \frac{y_i}{r_i}\right) r_i + f_{n-1,i+1} r_{i+1}\right) + g_n \left(\sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} f_{n,i-1} r_{i-1} + \left(f_{ni} - \frac{y_i}{r_i}\right) r_i\right)}{\left(q_{2n}^{2,n-1} + g_n\right)} + \frac{-\sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2,n-1}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \left(f_{ki} - \frac{y_i}{r_i}\right) r_i + f_{k,i+1} r_{i+1}\right) + \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} f_{l,i-1} r_{i-1} + \left(f_{li} - \frac{y_i}{r_i}\right) r_i\right)}{\left(q_{2n}^{2,n-1} + g_n\right)} \quad (5.208)$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking se pueden describir como se indica a continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\alpha_{ij} \leq \left| \frac{y_i}{r_j} \right| \leq \beta_{ij}$, con $i=1, \dots, n$ y $j=1, \dots, n$ ⁷.

(1) Subsistema-1 optimizado para tracking .

* Notar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T_{ij}|$ con $ij \equiv (11;21;22)$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| \frac{|g1| + Wecs_{11} + |q_{12} \beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|g1| + Wecsm_{11} + |q_{12} \beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{11} \quad (5.209)$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| \frac{Wecs_{12} + |q_{12} \beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm_{12} + |q_{12} \beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{12} \quad (5.210)$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| = \left| \frac{y_1}{r_3} \right| = \left| \frac{Wecs_{13} + |q_{12} \beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm_{13} + |q_{12} \beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{13} \quad (5.211)$$

.....

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r_n} \right| = \left| \frac{Wecs_{1n} + |q_{12} \beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm_{1n} + |q_{12} \beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{1n} \quad (5.212)$$

$$\alpha_{21} \leq |T_{21}| = \left| \frac{y_2}{r_1} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wecs_{11} + |g1|) + Wecs_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wecsm_{11} + |g1|) + Wecsm_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{21} \quad (5.213)$$

⁷ Según aplicación de ecuaciones (5.174) a (5.196) y (5.69) a (5.76)

$$\alpha_{22} \leq |T_{22}| = \left| \frac{y_2}{r_2} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec s_{12} + Wec s_{22} + |g2||}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec sm_{12} + Wec sm_{22} + |g2||}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{22} \quad (5.214)$$

$$\alpha_{23} \leq |T_{23}| = \left| \frac{y_3}{r_3} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec s_{13} + Wec s_{23}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec sm_{13} + Wec sm_{23}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{23} \quad (5.215)$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec s_{1n} + Wec s_{2n}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec sm_{1n} + Wec sm_{2n}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{2n} \quad (5.216)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para tracking.

* Notar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T_{ij}|$ con $ij \equiv (n-1, n-1; n, n-1; nm)$

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_1} \right| = \left| \frac{Wec s_{n-1,1} + |q_{1n} \beta_{n1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{Wec sm_{11} + |q_{1n} \beta_{n1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \beta_{n-1,1} \quad (5.217)$$

.....

$$\alpha_{n-1,n-1} \leq |T_{n-1,n-1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_{n-1}} \right| = \left| \frac{|g_{n-1}| + Wec s_{n-1,n-1} + |q_{1n} \beta_{n,n-1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|g_{n-1}| + Wec sm_{1,n-1} + |q_{1n} \beta_{n,n-1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \beta_{n-1,n-1} \quad (5.218)$$

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| \frac{Wec s_{n-1,n} + |q_{1n} \beta_{nn}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{Wec sm_{1n} + |q_{1n} \beta_{nn}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \beta_{n-1,n} \quad (5.219)$$

.....

$$\alpha_{n,n-1} \leq |T_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r_{n-1}} \right| = \left| \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} (Wec s_{n-1,n-1} + |g_{n-1}|) + Wec s_{n,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} (Wec sm_{1,n-1} + |g_{n-1}|) + Wec sm_{2,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \beta_{n,n-1} \quad (5.220)$$

$$\alpha_m \leq |T_{nn}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} |Wec s_{n-1,n} + Wec s_{nn} + |g_n||}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} |Wec s_{m_{1n}} + Wec s_{m_{2n}} + |g_n||}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \beta_m \quad (5.221)$$

NOTA: Observar cómo en las ecuaciones anteriores las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento forman parte de la estructura de las especificaciones de tracking.

A partir de las ecuaciones (5.209) a (5.221) se puede obtener el valor de los prefiltros asociados, teniendo en cuenta que para tracking la expresión utilizada matricialmente es

de la forma,
$$T = F \frac{PG}{1 + PG} \quad (5.222)$$

donde P es la planta efectiva, G el controlador y F el prefiltro.

Los elementos del prefiltro F vendrán descritos por las siguientes ecuaciones ^{8, 9}:

(1) Subsistema-1 optimizado para tracking.

$$f_{11} = \frac{g1 + Wecsm_{11} - q_{12}\beta_{21}}{g1} \quad (5.223)$$

$$f_{12} = \frac{Wecsm_{12} - q_{12}\beta_{22}}{g1} \quad (5.224)$$

$$f_{13} = \frac{Wecsm_{13} - q_{12}\beta_{23}}{g1} \quad (5.225)$$

.....

$$f_{1n} = \frac{Wecsm_{1n} - q_{12}\beta_{2n}}{g1} \quad (5.226)$$

$$f_{21} = \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (-Wecsm_{11} - g1) + Wecsm_{21}}{g2} \quad (5.227)$$

⁸ Tener en cuenta que al no hablar ya de especificaciones, no se usan valores absolutos, sino valores con su signo concreto.

⁹ Observar que el esfuerzo de control para seguimiento está incorporado inherentemente al valor de cada elemento del prefiltro F .

$$f_{22} = \frac{-\left(\frac{q_{21}}{q_{11} + g_1}\right)Wecsm_{12} + Wecsm_{22} + g_2}{g_2} \quad (5.228)$$

$$f_{23} = \frac{-\left(\frac{q_{21}}{q_{11} + g_1}\right)Wecsm_{13} + Wecsm_{23}}{g_2} \quad (5.229)$$

.....

$$f_{2n} = \frac{-\left(\frac{q_{21}}{q_{11} + g_1}\right)Wecsm_{1n} + Wecsm_{2n}}{g_2} \quad (5.230)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para tracking.

$$f_{n-1,1} = \frac{Wecsm_{11} - q_{1n}\beta_{n1}}{g_{n-1}} \quad (5.231)$$

.....

$$f_{n-1,n-1} = \frac{g_{n-1} + Wecsm_{1,n-1} - q_{1n}\beta_{n,n-1} |q_{1n}\beta_{n,n-1}|}{g_{n-1}} \quad (5.232)$$

$$f_{n-1,n} = \frac{Wecsm_{1n} - q_{1n}\beta_{nn}}{g_{n-1}} \quad (5.233)$$

.....

$$f_{n,n-1} = \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}}(-Wecsm_{1,n-1} - g_{n-1}) + Wecsm_{2,n-1}}{g_n} \quad (5.234)$$

$$f_{nn} = \frac{-\left(\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}}\right)Wecsm_{1n} + Wecsm_{2n} + g_n}{g_n} \quad (5.235)$$

Estabilidad Robusta: La expresión utilizada matricialmente a efectos de estabilidad robusta es de la forma, $E = (1 + PG)^{-1}$ (5.236), donde P es la planta efectiva y G el controlador. Viene descrita por las ecuaciones (5.93) a (5.98) del apartado 5.1.4.

Esfuerzo de Control: La expresión utilizada matricialmente a efectos de esfuerzo de control es de la forma, $ECr = \frac{G}{1 + PG}$ (5.237) para regulación y $ECs = F \frac{G}{1 + PG}$ (5.238) para seguimiento, donde P es la planta efectiva, G el controlador y F el prefiltro. En términos de regulación y en términos de seguimiento puro ya se han descrito, a partir de las ecuaciones (5.77) a (5.84) y (5.85) a (5.92), respectivamente. En términos de seguimiento vamos a partir de las ecuaciones para especificaciones de tracking (5.209) a (5.221) y, sobre ellas aplicaremos los siguientes principios:

a) Para especificaciones propias, consideraremos que para que haya optimización de

$$\text{esfuerzo de control en seguimiento se debe cumplir que } \frac{y_i}{r_i} = 1, \forall i \quad (5.239)$$

b) Para especificaciones cruzadas, a partir de la ecuación de tracking asociada, despejar la especificación de ECs buscada.

De esta manera, las especificaciones para ECs se pueden describir como se indica a continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas según (5.171).

(1) Subsistema-1 optimizado para ECs .

$$\text{Si } \frac{y_1}{r_1} = 1 \quad (5.240)$$

aplicada sobre la ecuación

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{g\mathbf{1} + Wecs_{11} - q_{12}\beta_{21}}{q_{11} + g\mathbf{1}} \quad (5.241)$$

despejando se obtiene ,

$$q_{11} + q_{12}\beta_{21} = Wecs_{11} \quad (5.242)$$

que se convierte en la especificación, $q_{11} + |q_{12}T_{21}| \leq Wecs_{11}$ (5.243)

Como $|Ecs_{12}| = q_{11}|T_{12}| \leq Wecs_{12}$ (5.244)

sustituyendo (5.210) en (5.244), queda

$$\left| \frac{Wecs_{12} + |-q_{12}\beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \frac{Wecs_{12}}{q_{11}} \quad (5.245)$$

y despejando $Wecs_{12}$,

$$\left| \frac{|q_{12}\beta_{22}|}{g1/q_{11}} \right| \leq Wecs_{12} \quad (5.246)$$

Como $|Ecs_{13}| = q_{11}|T_{13}| \leq Wecs_{13}$ (5.247)

sustituyendo (5.211) en (5.247), queda

$$\left| \frac{Wecs_{13} + |-q_{12}\beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \frac{Wecs_{13}}{q_{11}} \quad (5.248),$$

y despejando $Wecs_{13}$,

$$\left| \frac{|q_{12}\beta_{23}|}{g1/q_{11}} \right| \leq Wecs_{13} \quad (5.249)$$

.....

Como $|Ecs_{1n}| = q_{11}|T_{1n}| \leq Wecs_{1n}$ (5.250)

sustituyendo (5.212) en (5.250), queda

$$\left| \frac{Wecs_{1n} + |-q_{12}\beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \frac{Wecs_{1n}}{q_{11}} \quad (5.251),$$

y despejando $Wecs_{1n}$,

$$\left| \frac{|q_{12}\beta_{2n}|}{g1/q_{11}} \right| \leq Wecs_{1n} \quad (5.252)$$

Como $|Ecs_{21}| = q_{22}^2|T_{21}| \leq Wecs_{21}$ (5.253)

sobre (5.213), queda

$$\left| \frac{Wecs_{21} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wecs_{11} + g1)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \frac{Wecs_{21}}{q_{22}^2} \quad (5.254)$$

y despejando $Wecs_{21}$,

$$\left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wecs_{11} + g1)}{g2 / q_{22}^2} \right| \leq Wecs_{21} \quad (5.255)$$

Si $\frac{y_2}{r_2} = 1$ (5.256)

aplicada sobre la ecuación

$$\frac{y_2}{r_2} = \frac{g2 + Wecs_{22} - \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs_{12}}{q_{22}^2 + g2} \quad (5.257)$$

despejando, se obtiene

$$q_{22}^2 + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs_{12} = Wecs_{22} \quad (5.258)$$

y sustituyendo (5.246) se convierte en la especificación,

$$q_{22}^2 + \left| \frac{\frac{q_{21}q_{12}}{q_{11} + g1} \beta_{22}}{g1 / q_{11}} \right| \leq Wecs_{22} \quad (5.259)$$

.....

Como $|Ecs_{2n}| = q_{22}^2 |T_{2n}| \leq Wecs_{2n}$ (5.260)

Sobre (5.216), queda

$$\left| \frac{Wecs_{2n} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs_{1n}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \frac{Wecs_{2n}}{q_{22}^2} \quad (5.261)$$

y despejando $Wecs_{2n}$,

$$\left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g_1} Wecs_{1n}}{g_2 / q_{22}^2} \right| \leq Wecs_{2n} \quad (5.262)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para ECs .

Como $|Ecs_{n-1,1}| = q_{1,n-1} |T_{n-1,1}| \leq Wecs_{11}$ (5.263)

sustituyendo (5.217) en (5.263) , queda

$$\left| \frac{Wecs_{11} + |-q_{1n}\beta_{n1}|}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \frac{Wecs_{11}}{q_{1,n-1}} \quad (5.264)$$

y despejando $Wecs_{11}$,

$$\left| \frac{|q_{1n}\beta_{n1}|}{g_{n-1} / q_{1,n-1}} \right| \leq Wecs_{11} \quad (5.265)$$

.....

Si $\frac{y_{n-1}}{r_{n-1}} = 1$ (5.266)

aplicada sobre la ecuación siguiente

$$\frac{y_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{g_{n-1} + Wecs_{1,n-1} - q_{1n}\beta_{n,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \quad (5.267)$$

se obtiene despejando,

$$q_{1,n-1} + q_{1n}\beta_{n,n-1} = Wecs_{1,n-1} \quad (5.268)$$

y se convierte en la especificación,

$$q_{1,n-1} + |q_{1n}T_{n,n-1}| \leq Wecs_{1,n-1} \quad (5.269)$$

Como $|Ecs_{n-1,n}| = q_{1,n-1} |T_{n-1,n}| \leq Wecs_{1n}$ (5.270)

sustituyendo (5.219) en (5.270), queda

$$\left| \frac{Wecs_{1n} + | -q_{1n}\beta_{nn} |}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \frac{Wecs_{1n}}{q_{1,n-1}} \quad (5.271),$$

y despejando $Wecs_{1n}$,

$$\left| \frac{|q_{1n}\beta_{nn}|}{g_{n-1} / q_{1,n-1}} \right| \leq Wecs_{1n} \quad (5.272)$$

.....

Como
$$|Ecs_{n,n-1}| = q_{2n}^{2,n-1} |T_{n,n-1}| \leq Wecs_{2,n-1} \quad (5.273)$$

sobre (5.220), queda

$$\left| \frac{Wecs_{2,n-1} + \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} (Wecs_{1,n-1} + g_{n-1})}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \frac{Wecs_{2,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1}} \quad (5.274)$$

y despejando $Wecs_{2,n-1}$,

$$\left| \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} (Wecs_{1,n-1} + g_{n-1})}{g_n / q_{2n}^{2,n-1}} \right| \leq Wecs_{2,n-1} \quad (5.275)$$

Si
$$\frac{y_n}{r_n} = 1 \quad (5.276)$$

aplicada sobre la ecuación siguiente

$$\frac{y_n}{r_n} = \frac{g_n + Wecs_{2n} - \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecs_{1n}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \quad (5.277)$$

despejando, se obtiene

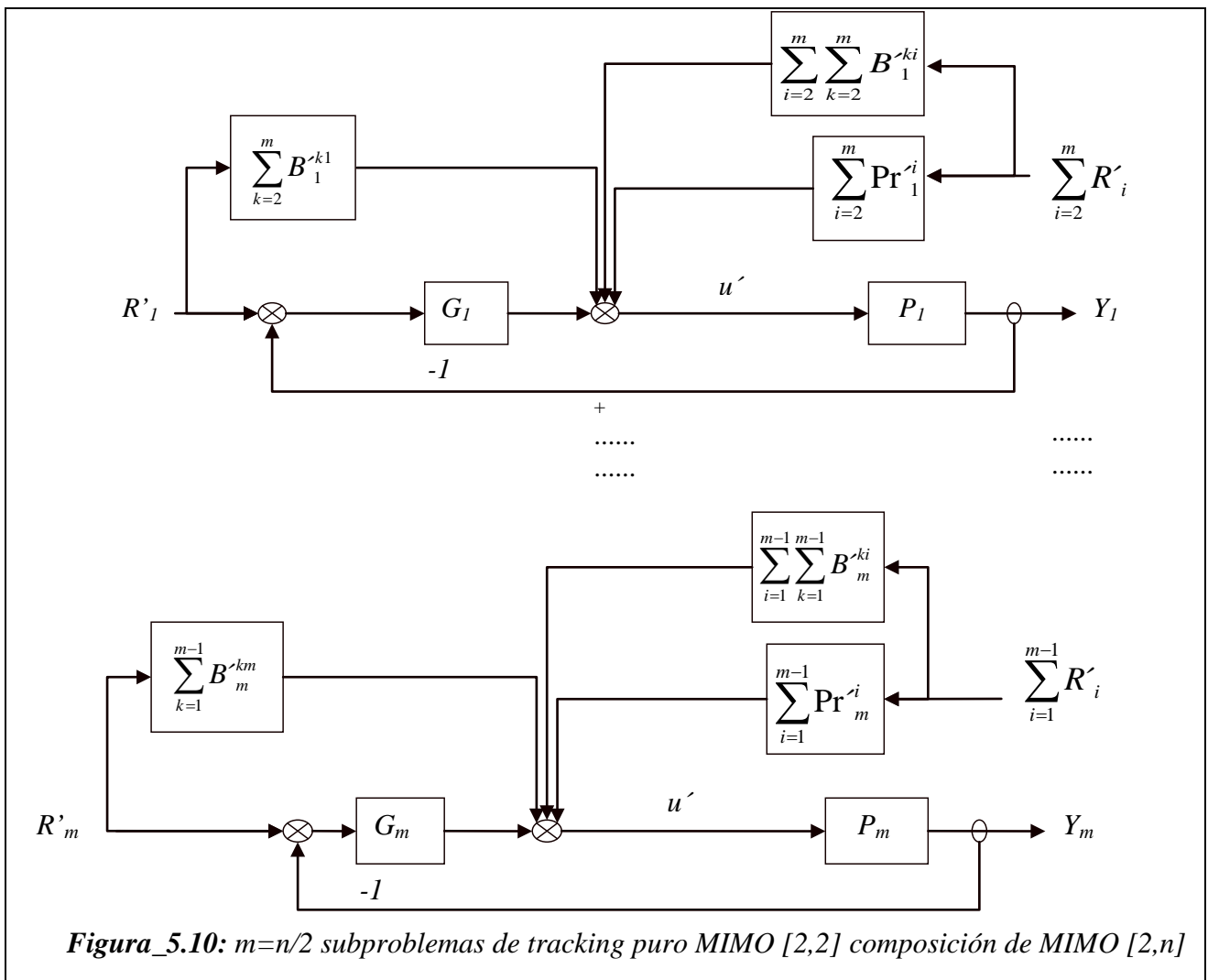
$$q_{2n}^{2,n-1} + \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecs_{1n} = Wecs_{2n} \quad (5.278)$$

y sustituyendo (5.272) se convierte en la especificación,

$$q_{2n}^{2,n-1} + \left| \frac{\frac{q_{2,n-1}q_{1n}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \beta_{nn}}{g_{n-1} / q_{1,n-1}} \right| \leq Wecs_{2n} \quad (5.279)$$

5.2.4 Problema de Tracking Puro Optimizado

El problema MIMO $[2, n]$ propuesto se descompone en m subsistemas MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_5.10*. La nomenclatura usada es, controlador $G_i[2,2]$, sin prefiltros, planta para cada subsistema $P_i[2,2]$ y referencias de entrada para cada subsistema $R'_1 = (r'_1, r'_2), \dots, R'_m = (r'_{n-1}, r'_n)$.



Figura_5.10: m=n/2 subproblemas de tracking puro MIMO [2,2] composición de MIMO [2,n]

Se ha utilizado la siguiente notación,

$$\sum_{i=2}^m \text{Pr}_1^i = G_1 \sum_{i=2}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) R'_i \quad (5.280) ; \dots ; \sum_{i=1}^{m-1} \text{Pr}_m^i = G_m \sum_{i=1}^{m-1} \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) R'_i \quad (5.281)$$

$$y \quad \sum_{i=2}^m \sum_{k=2}^m B_1^{ki} = \sum_{k=2}^m G_k \sum_{i=2}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) \quad (5.282) , \quad \sum_{k=2}^m B_1^{k1} = \sum_{k=2}^m G_k \left(I - \frac{Y_1}{R'_1} \right) \quad (5.283)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} B_m^{ki} = \sum_{k=1}^{m-1} G_k \sum_{i=1}^{m-1} \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) \quad (5.284) , \quad \sum_{k=1}^{m-1} B_m^{km} = \sum_{k=1}^{m-1} G_k \left(I - \frac{Y_m}{R'_m} \right) \quad (5.285)$$

La optimización de las especificaciones de control en términos de seguimiento Puro (sin

prefiltros) parte de considerar la ecuación $u' = \sum_{k=1}^m G_k \sum_{i=1}^m (R'_i - Y_i)$ (5.286) , que escrita de

manera más conveniente , se puede expresar como,

$$u' = G_x (R'_x - Y_x) + G_x \sum_{i=1, i \neq x}^m (R'_i - Y_i) + \sum_{k=1, k \neq x}^m G_k \sum_{i=1}^m (R'_i - Y_i) \quad (5.287)$$

donde dentro de los m subsistemas existentes, x es un subsistema cualquiera, con

$x=[x1, x2]$.

En forma matricial,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_{x1} - y_{x1} \\ r'_{x2} - y_{x2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} r'_1 - y_1 \\ r'_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'_3 - y_3 \\ r'_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} r'_{n-1} - y_{n-1} \\ r'_n - y_n \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_3 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} r'_1 - y_1 \\ r'_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'_3 - y_3 \\ r'_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} r'_{n-1} - y_{n-1} \\ r'_n - y_n \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.288)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_{x1} - y_{x1} \\ r'_{x2} - y_{x2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 \\ 0 & g_{x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1, i \neq x1}^{n-1, impar} r'_i - y_i \\ \sum_{i=2, i \neq x2}^{n, par} r'_i - y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1, k \neq x1}^{n-1, impar} g_k & 0 \\ 0 & \sum_{l=2, l \neq x2}^{n, par} g_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, impar} r'_i - y_i \\ \sum_{i=2}^{n, par} r'_i - y_i \end{pmatrix} \quad (5.289)$$

Además, para un *subsistema-x* cualquiera con $x=[x_1, x_2]$,

$$\begin{pmatrix} y_{x1} \\ y_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,x1} & P_{1,x2} \\ P_{2,x1} & P_{2,x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{x1} \\ u'_{x2} \end{pmatrix}, \quad \text{con } [u'_{x1}, u'_{x2}] = [u'_1, u'_2]_x \quad (5.290)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, se utilizan entradas de control optimizadas $u'_{x1}{}^{opt}$ y $u'_{x2}{}^{opt}$ ¹⁰, manteniendo el esfuerzo de control para seguimiento lo más cerca posible de su valor mínimo, **las salidas seguirán a sus referencias de entrada** y las especificaciones de esfuerzo de control para tracking, vendrán descritas en general del siguiente modo,

$$\left| Ecs'_{lj}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u'_l{}^{opt}}{r'_j} \right| \leq Wecs'_{lj}, \quad \text{con } l \in [1, 2, \dots, n] \quad \text{y } j \in [1, 2, \dots, n] \quad (5.291)$$

(1) Para el *subsistema-1* sin prefiltro, optimizando para seguimiento las salidas y_1, y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u'_1{}^{opt} + P_{12}u'_2{}^{opt} = r'_1 \end{cases} \quad (5.292)$$

$$\begin{cases} y_2 = P_{21}u'_1{}^{opt} + P_{22}u'_2{}^{opt} = r'_2 \end{cases} \quad (5.293)$$

$$\text{con } u'_1{}^{opt} = \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left[\sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) \right] \quad (5.294) \quad \text{y} \quad u'_2{}^{opt} = \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left[\sum_{i=4}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) \right] \quad (5.295)$$

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando $u'_1{}^{opt}$ para r_i con $i \neq 1$, *impar*, aparece un "1" dentro del paréntesis del resultado.

$$\left| Ecs'_{11}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u'_1{}^{opt}}{r'_1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{11} \quad (5.296)$$

$$\left| Ecs'_{12}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u'_1{}^{opt}}{r'_2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{12} \quad (5.297)$$

¹⁰ $u'_{x1}{}^{opt}$ y $u'_{x2}{}^{opt}$ son u'_1 y u'_2 , respectivamente, para el *subsistema-x* optimizado (minimizado) para esfuerzos de control de seguimiento.

$$\left| Ecs'_{13}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_3} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, impar} g_k \left(1 - \sum_{i=3}^{n-1, impar} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{13} \quad (5.298)$$

.....

$$\left| Ecs'_{1,n-1}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, impar} g_k \left(1 - \sum_{i=3}^{n-1, impar} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{1,n-1} \quad (5.299)$$

$$\left| Ecs'_{1n}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, impar} g_k \left(- \sum_{i=3}^{n-1, impar} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{1n} \quad (5.300)$$

* Usando u_2^{opt} para r_i con $i \neq 2$, *par*, aparece un "1" dentro del paréntesis del resultado.

$$\left| Ecs'_{21}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_1} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, par} g_k \left(- \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{21} \quad (5.301)$$

$$\left| Ecs'_{22}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_2} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, par} g_k \left(- \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{22} \quad (5.302)$$

$$\left| Ecs'_{23}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_3} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, par} g_k \left(- \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{23} \quad (5.303)$$

$$\left| Ecs'_{24}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_4} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, par} g_k \left(1 - \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{r'_4} \right) \right| \leq Wecs'_{24} \quad (5.304)$$

.....

$$\left| Ecs'_{2n}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_n} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, par} g_k \left(1 - \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{2n} \quad (5.305)$$

.....

(m) Para el subsistema-m sin prefiltro, optimizando para seguimiento las salidas

y_{n-1}, y_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n-1} = P_{1,n-1} u_{n-1}^{opt} + P_{1n} u_n^{opt} = r'_{n-1} \end{array} \right. \quad (5.306)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = P_{2,n-1} u_{n-1}^{opt} + P_{2n} u_n^{opt} = r'_n \end{array} \right. \quad (5.307)$$

$$\text{con } u_{n-1}^{opt} = \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left[\sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (r'_i - y_i) \right] \quad (5.308) \quad \text{y} \quad u_n^{opt} = \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left[\sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} (r'_i - y_i) \right] \quad (5.309)$$

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_{n-1}^{opt} para r_i con $i \neq n-1$, *impar*, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado.

$$\left| Ecs'_{n-1,1}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(1 - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,1} \quad (5.310)$$

$$\left| Ecs'_{n-1,2}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,2} \quad (5.311)$$

$$\left| Ecs'_{n-1,3}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_3} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(1 - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,3} \quad (5.312)$$

$$\left| Ecs'_{n-1,4}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_4} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_4} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,4} \quad (5.313)$$

.....

$$\left| Ecs'_{n-1,n-1}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,n-1} \quad (5.314)$$

$$\left| Ecs'_{n-1,n}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(- \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,n} \quad (5.315)$$

* Usando u_n^{opt} para r_i con $i \neq n$, *par*, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado.

$$\left| Ecs'_{n1}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_1} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left(- \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{n1} \quad (5.316)$$

$$\left| Ecs'_{n2}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_2} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left(1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{n2} \quad (5.317)$$

.....

$$\left| Ecs'_{n,n-1}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u'_n{}^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n,par} g_k \left(- \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{n,n-1} \quad (5.318)$$

$$\left| Ecs'_{nn}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u'_n{}^{opt}}{r'_n} \right| = \left| \sum_{k=2}^{n,par} g_k \left(- \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{nn} \quad (5.319)$$

Como sólo se pueden imponer dos veces el número de referencias de entrada existentes, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento puro se reagrupan en las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm'_{11} = \max(Wecs'_{i1}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (5.320) \\ Wecsm'_{12} = \max(Wecs'_{i2}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (5.321) \\ Wecsm'_{13} = \max(Wecs'_{i3}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (5.322) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm'_{1n} = \max(Wecs'_{in}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (5.323) \\ Wecsm'_{21} = \max(Wecs'_{i1}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (5.324) \\ Wecsm'_{22} = \max(Wecs'_{i2}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (5.325) \\ Wecsm'_{23} = \max(Wecs'_{i3}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (5.326) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm'_{2n} = \max(Wecs'_{in}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (5.327) \end{array} \right.$$

Ecuaciones que también hay que tener en cuenta a efectos de tracking Puro.

Ecuaciones de Tracking Puro, usadas en Esfuerzo de Control en términos de Seguimiento Puro:

En un problema de tracking usando entradas de referencia r' sobre subsistemas sin prefiltros y aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema de tracking puro optimizado 5.2.4, en **modo IPD**, se obtiene un comportamiento descrito por las siguientes ecuaciones,

(1) Para el subsistema-1,

$$y_1 = \frac{g_1 r'_1 + g_1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{12} y_2}{(q_{11} + g_1)} \quad (5.328)$$

$$y_2 = \frac{-q_{21}^1 r'_1 + g_2 r'_2 - q_{21}^1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + g_2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) - \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} q_{21}^{1k} \left(\sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(\sum_{i=2}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) \right)}{(q_{22}^2 + g_2)} \quad (5.329)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..., hasta alcanzar el m.*

(m) Para el subsistema-m,

$$y_{n-1} = \frac{g_{n-1} r'_{n-1} + g_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{1n} y_n}{(q_{1, n-1} + g_{n-1})} \quad (5.330)$$

$$y_n = \frac{-q_{2, n-1}^{1, n-1} r'_{n-1} + g_n r'_n - q_{2, n-1}^{1, n-1} \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} (r'_i - y_i) + g_n \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} (r'_i - y_i) - \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} q_{2, n-1}^{1k} \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \sum_{i=2}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{2n}^{2, n-1} + g_n)} \quad (5.331)$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking Puro se pueden describir como se indica a

continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\left| \frac{y_i}{r'_j} \right| \leq \rho_{ij}$,

con $i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$ ¹¹,

(1) Subsistema-1 optimizado para tracking sin prefiltros,

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T'_{ij}|$ con $ij \equiv (11;21;22)$

$$\boxed{|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{21}| + |g1| + Wecs'_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{21}| + |g1| + Wecsm'_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{11}} \quad (5.332)$$

$$|T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{22}| + Wecs'_{12}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{22}| + Wecsm'_{12}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{12} \quad (5.333)$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left| \frac{Wecs'_{13} + |q_{12}\rho_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{13} + |q_{12}\rho_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{13} \quad (5.334)$$

$$|T'_{14}| = \left| \frac{y_1}{r'_4} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{24}| + Wecs'_{14}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{24}| + Wecsm'_{14}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{14} \quad (5.335)$$

$$|T'_{15}| = \left| \frac{y_1}{r'_5} \right| = \left| \frac{Wecs'_{15} + |q_{12}\rho_{25}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{15} + |q_{12}\rho_{25}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{15} \quad (5.336)$$

$$|T'_{16}| = \left| \frac{y_1}{r'_6} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{26}| + Wecs'_{16}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{26}| + Wecsm'_{16}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{16} \quad (5.337)$$

.....

¹¹ Según aplicación de ecuaciones (3.310) a (3.319) y (3.320) a (3.327)

$$|T'_{1,n-1}| = \left| \frac{y_1}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{Wecs'_{1,n-1} + |q_{12}\rho_{2,n-1}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{1,n-1} + |q_{12}\rho_{2,n-1}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1,n-1} \quad (5.338)$$

$$|T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + Wecs'_{1n}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + Wecsm'_{1n}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1n} \quad (5.339)$$

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^1| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{11} \right| + Wecs'_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{21}^1| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{11} \right| + Wecsm'_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{21} \quad (5.340)$$

$$|T'_{22}| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{12} \right| + |g2| + Wecs'_{22}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{12} \right| + |g2| + Wecsm'_{22}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{22} \quad (5.341)$$

$$|T'_{23}| = \left| \frac{y_2}{r'_3} \right| = \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{13} \right| + Wecs'_{23}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{13} \right| + Wecsm'_{23}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{23} \quad (5.342)$$

$$|T'_{24}| = \left| \frac{y_2}{r'_4} \right| = \left| \frac{Wecs'_{24} + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{14} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{24} + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{14} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{24} \quad (5.343)$$

.....

$$|T'_{2,n-1}| = \left| \frac{y_2}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{1,n-1} \right| + Wecs'_{2,n-1}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{1,n-1} \right| + Wecsm'_{2,n-1}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2,n-1} \quad (5.344)$$

$$|T'_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| \frac{Wecs'_{2n} + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{1n} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{2n} + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{1n} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2n} \quad (5.345)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para tracking sin prefiltros,

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T'_{ij}|$ con $ij \equiv (n-1, n-1; n, n-1; nn)$

$$|T'_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n1}| + Wecs'_{n-1,1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n1}| + Wecsm'_{11}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,1} \quad (5.346)$$

$$|T'_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n2}| + Wecs'_{n-1,2}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n2}| + Wecsm'_{12}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,2} \quad (5.347)$$

.....

$$\boxed{|T'_{n-1,n-1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n,n-1}| + |g1| + Wecs'_{n-1,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n}\rho_{n,n-1}| + |g1| + Wecsm'_{1,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,n-1}} \quad (5.348)$$

$$|T'_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{1n}\rho_{nn}| + Wecs'_{n-1,n}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n}\rho_{nn}| + Wecsm'_{1n}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} \right| \leq \rho_{n-1,n} \quad (5.349)$$

.....

$$|T'_{n,1}| = \left| \frac{y_n}{r'_1} \right| = \left| \frac{\left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecs'_{n-1,1} \right| + Wecs'_{n1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{\left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecsm'_{11} \right| + Wecsm'_{21}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{n,1} \quad (5.350)$$

$$|T'_{n,2}| = \left| \frac{y_n}{r'_2} \right| = \left| \frac{\left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecs'_{n-1,2} \right| + Wecs'_{n2}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{\left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecsm'_{12} \right| + Wecsm'_{22}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{n,2} \quad (5.351)$$

.....

$$\boxed{|T'_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecs'_{n-1,n-1} \right| + Wecs'_{n,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{|q_{2,n-1}^{1,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} Wecsm'_{1,n-1} \right| + Wecsm'_{2,n-1}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{n,n-1}} \quad (5.352)$$

$$|T'_{m}| = \left| \frac{y_n}{r'_n} \right| = \left| \frac{\frac{q_{2,n-1} Wecs'_{n-1,n}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} + |g_n| + Wecs'_{mn}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{2,n-1} Wecsm'_{1n}}{q_{1,n-1} + g_{n-1}} + |g_n| + Wecsm'_{2n}}{q_{2n}^{2,n-1} + g_n} \right| \leq \rho_{mn}$$

(5.353)

5.2.5 Compatibilidad con las Especificaciones de Esfuerzo de control

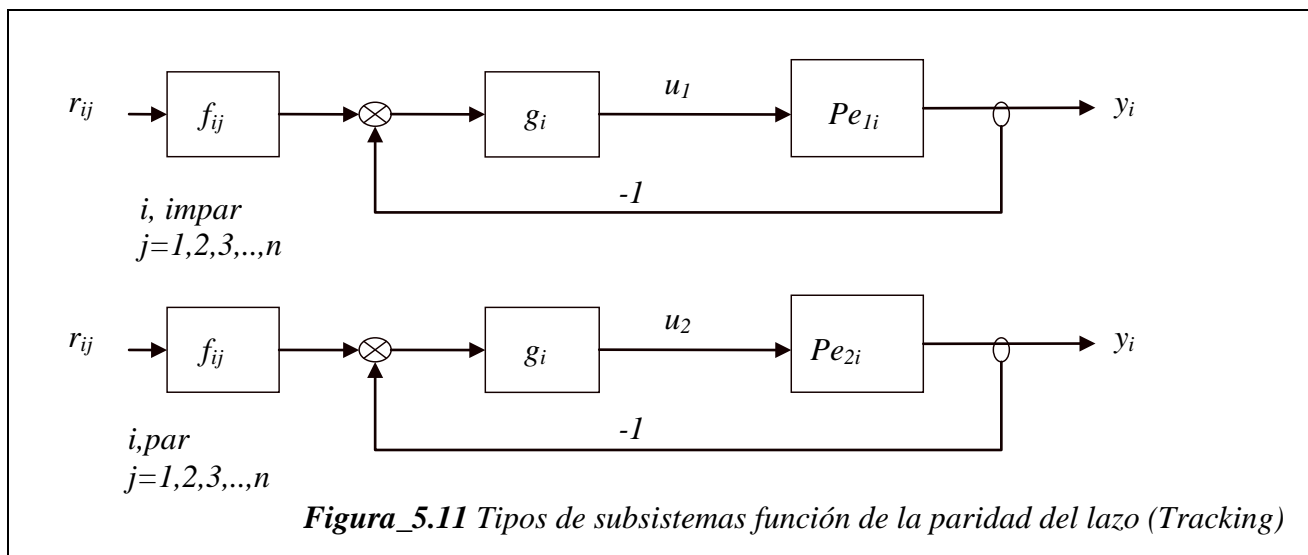
El esfuerzo de control está directamente relacionado con el tipo de problema que se intenta solucionar:

- el esfuerzo de control de regulación respecto del problema de regulación, basado en las especificaciones de sensibilidad,
- el esfuerzo de control de seguimiento respecto del problema de tracking, basado en las especificaciones de seguimiento.

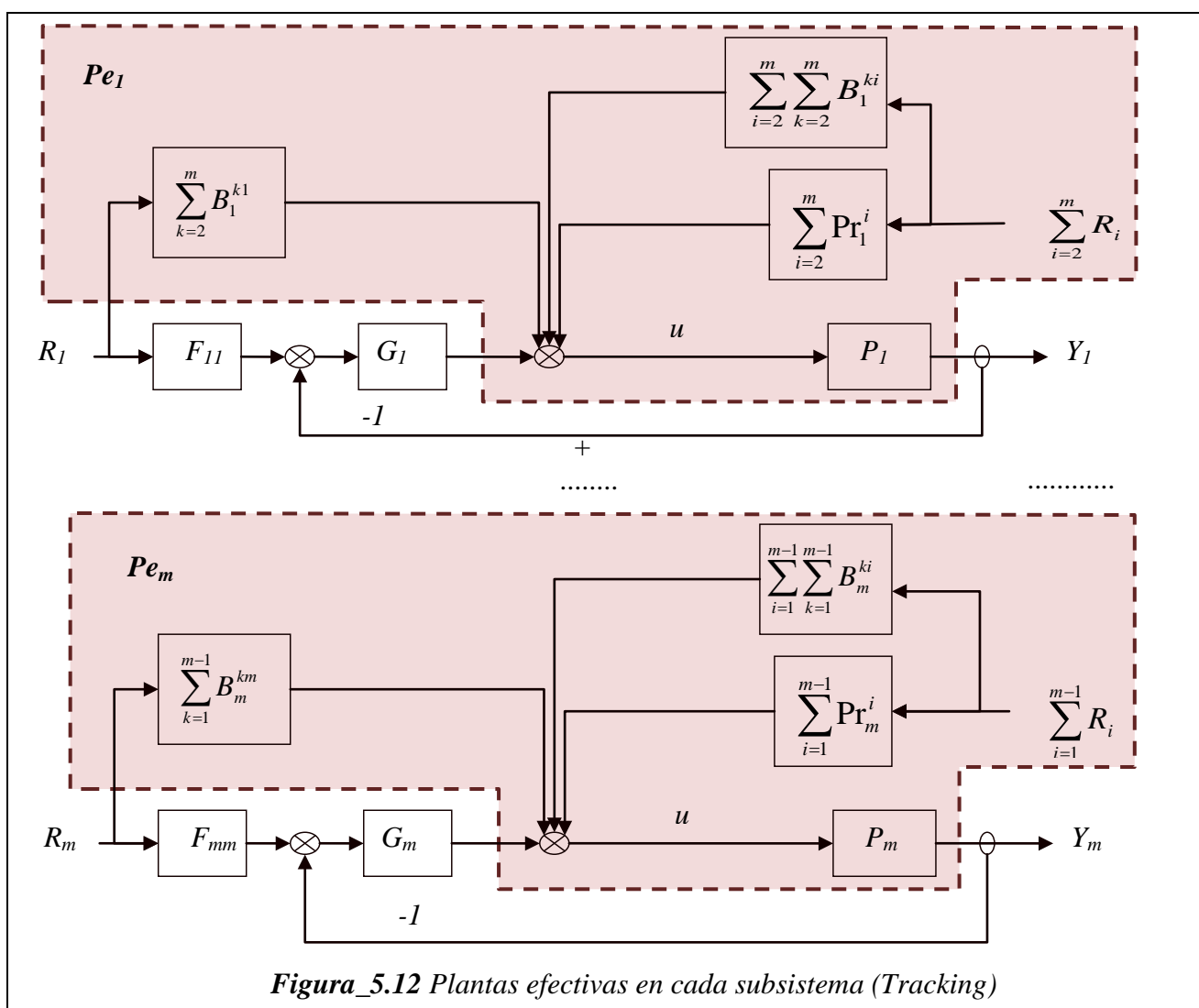
Se trata de buscar compatibilidad entre especificaciones del problema principal (tracking y/o sensibilidad) y las de esfuerzo de control (para seguimiento y/o para regulación). La compatibilidad viene dada por la obtención de resultados LTI dentro de todo el rango de frecuencias aplicable.

Supuesto el problema de Tracking, en los términos del apartado 5.2.2. El sistema equivalente está compuesto por elementos de dos tipos (teniendo en cuenta que sólo hay dos lazos por subsistema), como los descritos en la *Figura_5.11*, en función de la paridad de la planta efectiva (o del elemento controlador diagonal).

Observar que para especificaciones propias la compatibilidad se describe entre límites_w superior e inferior, mientras que para especificaciones cruzadas sólo se da respecto de límites_w superiores.



Las plantas efectivas de la *Figura_5.11* proceden de la reagrupación de bloques en el problema de tracking del apartado 5.2.2, definido en la *Figura_5.12* a continuación.



Las especificaciones de tracking y esfuerzo de control propios se describen típicamente como:

$$\alpha_{ii} \leq |T_{ii}| = \left| \frac{y_i}{r_i} \right| \leq \beta_{ii} \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.354)$$

$$\left| \frac{u_k^{opt}}{r_i} \right| = |Ecs_{ki}^{opt}| \leq Wecs_{ki} \text{ , } k=1, 2 \text{ , } i=1.., n \quad (5.355)$$

Como $\left| \frac{u_k^{opt}}{r_i} \right| = \left| \frac{y_i}{r_i} \right| \left| \frac{u_k^{opt}}{y_i} \right|$ se consigue, $|T_{ii}| |q_{ki}| \leq Wecs_{ki}$ (5.356), siendo q_{ki} el elemento

inverso de la planta para la posición ki . Sustituyendo (5.354) en (5.356) se obtiene,

$$\alpha_{ii} |q_{ki}| \leq Wecs_{ki} \quad (5.357)$$

Que se puede describir como, $|Pe_{ki}| \geq \frac{\alpha_{ii}}{Wecs_{ki}}$ (5.358)

Siendo Pe_{ki} la planta efectiva para la posición ki . Observar que la relación (5.358) sólo es aplicable para especificaciones propias y, siempre que existan límites_w inferiores.

Hipótesis de restricción fuerte para seguimiento: si se impone la máxima restricción entre especificaciones de tracking y de esfuerzo de control para seguimiento eliminando desigualdades, se obtiene la **compatibilidad fuerte para seguimiento**.

Si en la ecuación (5.238) se suprime la desigualdad, es decir, con $|T_{ii}| |q_{ki}| = Wecs_{ki}$ (5.359), y se aplica en (5.354) se obtiene,

$$\alpha_{ii} |q_{ki}| \leq Wecs_{ki} \leq \beta_{ii} |q_{ki}| \quad (5.360)$$

Por otro lado, si en la ecuación (5.354) se suprime la desigualdad del límite_w superior, es decir, con $\alpha_{ii} \leq |T_{ii}| = \beta_{ii}$ (5.361), y se aplica en (5.356) se obtiene,

$$\alpha_{ii} |q_{ki}| \leq Wecs_{ki} \geq \beta_{ii} |q_{ki}| \quad (5.362)$$

Se observa que existe un único valor común a las ecuaciones (5.360) y (5.362), que se obtiene con la máxima restricción dada con (5.359) y (5.361) a la vez. Así, se logra,

$$\alpha_{ii}|q_{ki}| \leq Wecs_{ki} = \beta_{ii}|q_{ki}| \quad (5.363)$$

Que se puede describir como,
$$\frac{\beta_{ii}}{Wecs_{ki}} = |Pe_{ki}| \geq \frac{\alpha_{ii}}{Wecs_{ki}} \quad (5.364)$$

Por otro lado, las especificaciones de tracking cruzado tienen la siguiente descripción:

$$|T_{ij}| = \left| \frac{y_i}{r_j} \right| \leq \beta_{ij} \text{ con } i = 1,2,3,\dots,n \text{ y } j = 1,2,3,\dots,n \text{ con } i \neq j \quad (5.365)$$

Por tanto,
$$|T_{ij}||q_{ki}| \leq Wecs_{kj} \quad (5.366)$$

Aplicando la hipótesis de restricción fuerte, (5.366) queda como

$$|T_{ij}||q_{ki}| = Wecs_{kj} \quad (5.367)$$

y la ecuación (5.365) será aplicable como,
$$|T_{ij}| = \beta_{ij} \quad (5.368)$$

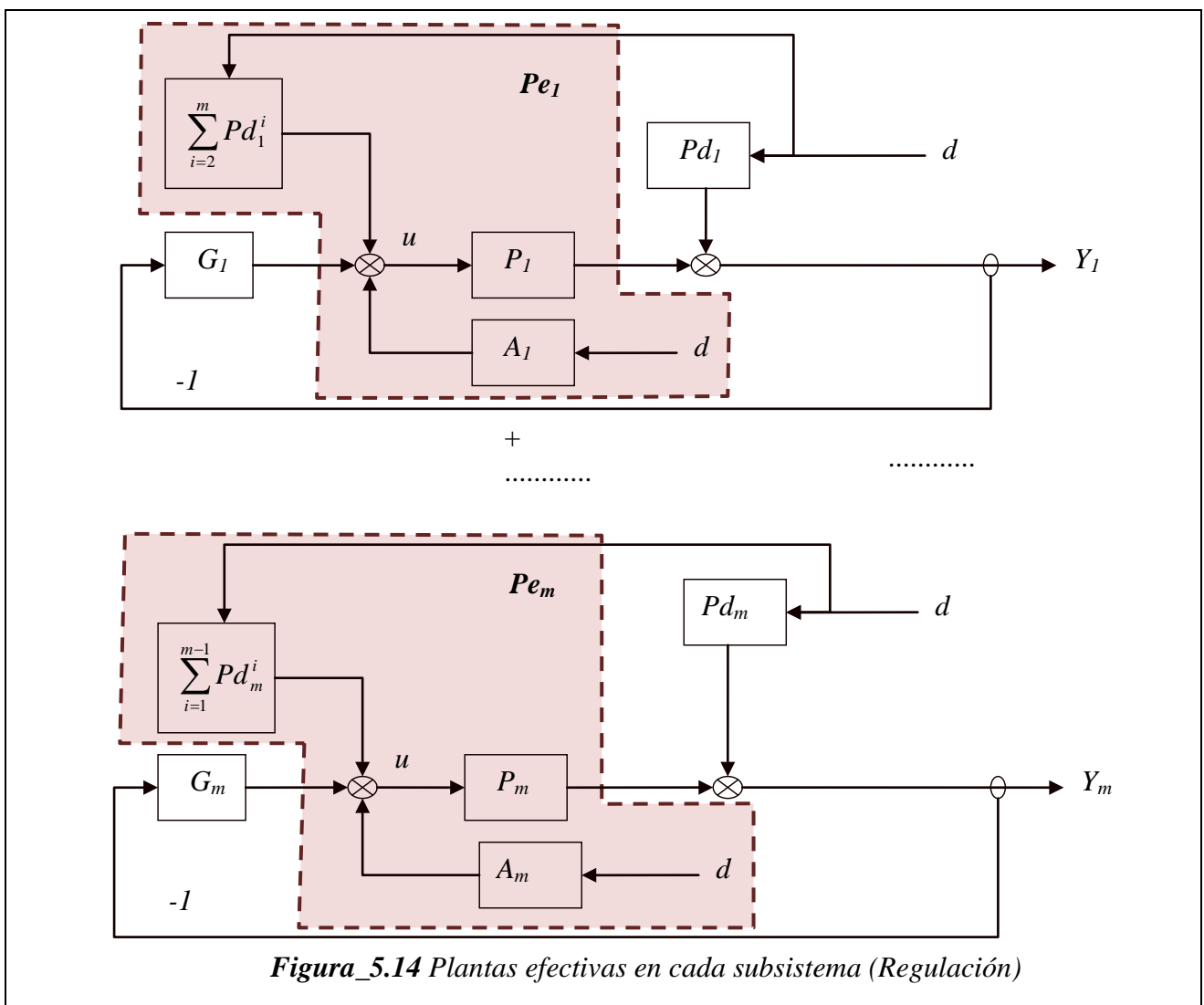
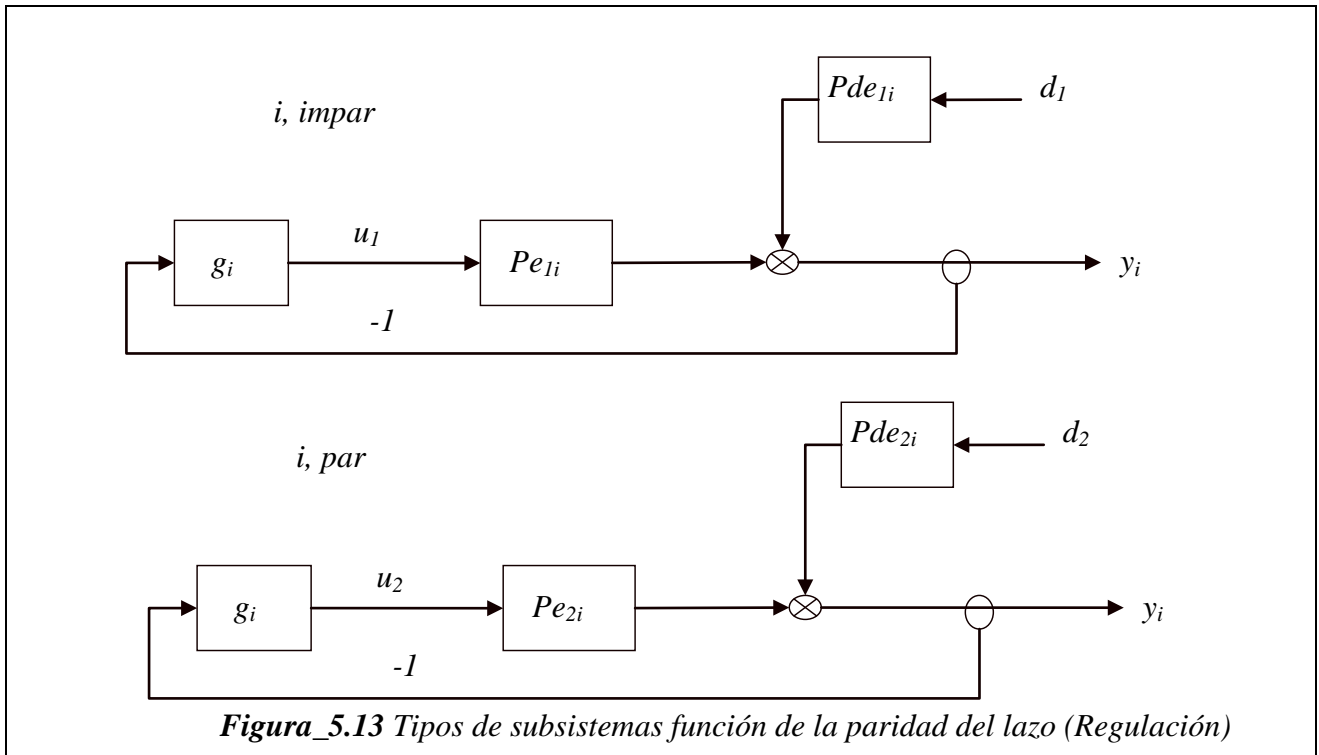
Sustituyendo (5.368) en (5.367) se obtiene, en términos de compatibilidad fuerte,

$$Wecs_{kj} = \beta_{ij}|q_{ki}| \quad (5.369)$$

Que se puede describir como,
$$\frac{\beta_{ij}}{Wecs_{kj}} = |Pe_{ki}| \quad (5.370)$$

Supuesto el problema de Regulación, de acuerdo al apartado 5.2.1. El sistema equivalente está compuesto por elementos de dos tipos (al haber sólo dos lazos por subsistema), como los descritos en la *Figura_5.13*, en función de la paridad de la planta efectiva.

Las plantas efectivas de la *Figura_5.13* proceden de la reagrupación de bloques en el problema de regulación del apartado 5.2.1, definido en la *Figura_5.14* a continuación.



Las especificaciones de sensibilidad y esfuerzo de control para regulación se describen típicamente como:

$$|S_{ik}| = \left| \frac{y_i}{d_k} \right| \leq Wps_{ik} \text{ con } i = 1,2,3,\dots,n \text{ y } k = 1,2 \quad (5.371)$$

$$\left| \frac{u_i^{opt}}{d_k} \right| = |Ecr_{ik}^{opt}| \leq Wecr_{ik}, \quad k=1,2, \quad i=1\dots,n \quad (5.372)$$

Como $\left| \frac{u_i^{opt}}{d_k} \right| = \left| \frac{y_i}{d_k} \right| \left| \frac{u_i^{opt}}{y_i} \right|$ se consigue, $|S_{ik}| |q_{ki}| \leq Wecr_{ik}$ (5.373), siendo q_{ki} el elemento

inverso de la planta para la posición ki .

Hipótesis de restricción fuerte para regulación: si se impone la máxima restricción entre especificaciones de sensibilidad y de esfuerzo de control para regulación eliminando desigualdades, se obtiene la **compatibilidad fuerte para regulación**.

Si se suprime la desigualdad en la ecuación (5.373), es decir, con $|S_{ik}| |q_{ki}| = Wecr_{ik}$ (5.374),

sustituyendo (5.374) en (5.371) se obtiene, $Wecr_{ik} \leq Wps_{ik} |q_{ki}|$ (5.375)

Por otro lado, si en (5.371) se elimina la desigualdad, utilizando $|S_{ik}| = Wps_{ik}$ (5.376)

y esta ecuación se aplica en (5.373), se consigue $Wecr_{ik} \geq Wps_{ik} |q_{ki}|$ (5.377)

Se observa que existe un único valor común a las ecuaciones (5.375) y (5.377), que se obtiene con la máxima restricción dada con (5.374) y (5.376) a la vez. Así, se obtiene,

$$Wecr_{ik} = Wps_{ik} |q_{ki}| \quad (5.378)$$

Que se puede describir como,

$$\boxed{\frac{Wps_{ik}}{Wecr_{ik}} = |Pe_{ki}|} \quad (5.379)$$

Observar que los resultados (5.366), (5.372) y (5.379) sólo son válidos si se considera aplicable la compatibilidad fuerte para seguimiento y regulación, en la forma de (5.359), (5.363), (5.369), (5.370) y (5.374), (5.376).

5.2.6 Relajación de Especificaciones de Esfuerzo de control para el segundo lazo

Para resolver el segundo lazo de todos los subsistemas de control y, en particular para el problema de seguimiento, nos encontramos con que vamos arrastrando las especificaciones y resolución del primer lazo con todas sus restricciones. Es decir, sobre el segundo lazo no sólo se imponen sus propias especificaciones, sino las dadas por la resolución previa del primer lazo.

Además, en el caso del esfuerzo de control y, como la especificación depende de la especificación de seguimiento o de regulación, nos encontramos con que esta restricción es la más fuerte de todas.

Puede ocurrir, sobre todo para el problema de seguimiento, que la acumulación de restricciones hasta llegar a la especificación de esfuerzo de control para seguimiento en el segundo lazo, sea tan fuerte que no permita solución posible. En este caso es necesario buscar una relajación para tal especificación, que no siempre será posible. El procedimiento a seguir entonces es el siguiente:

(1^o). Teniendo en cuenta las especificaciones de esfuerzo de control descritas en el apartado 5.2.3, las mismas para seguimiento vienen dadas como

$$|Ecs_{kj}| = |T_{ij}| |qe_{ki}| \leq Wecs_{kj} \quad (5.380), \text{ con } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2 \text{ y } qe_{ki} \text{ planta inversa}$$

efectiva para la posición ki y, que para el segundo lazo se convierten en

$$|Ecs_{2j}| = |T_{ij}| |qe_{2i}| \leq Wecs_{2j} \quad (5.381), \text{ con } i \text{ par. Las imposiciones más fuertes se dan}$$

cuando utilizamos tracking propio, es decir, con

$$\left| Ecs_{2i} \right| = \left| T_{ii} \right| \left| qe_{2i} \right| = \left| \frac{\frac{q_{2,i-1}}{q_{1,i-1} + g_{i-1}} \left| Wecs_{1i} + Wecs_{2i} + |g_i| \right|}{1 + g_i / q_{2i}^{2,i-1}} \right| \leq Wecs_{2i} \quad (5.382)$$

Si con (5.382) no hay “LTI_Solution” aplicar lo siguiente:

(2º). En lugar de utilizar (5.382) y como

$$\alpha_{ii} \leq \left| T_{ii} \right| = \left| \frac{\frac{q_{2,i-1}}{q_{1,i-1} + g_{i-1}} \left| Wecs_{1i} + Wecs_{2i} + |g_i| \right|}{q_{2i}^{2,i-1} + g_i} \right| \leq \beta_{ii} \quad (5.383)$$

Incorpora internamente la especificación de esfuerzo de control, se despeja de la

desigualdad, obteniendo

$$\alpha_{ii} \left(q_{2i}^{2,i-1} + g_i \right) - \frac{q_{2,i-1}}{q_{1,i-1} + g_{i-1}} \left| Wecs_{1i} - |g_i| \right| \leq Wecs_{2i} \quad (5.384)$$

(Observar que no es posible conseguir una ecuación adecuada usando la desigualdad en (5.383) sobre β_{ii}).

Si aún con (5.384) no hay “LTI_Solution” aplicar lo siguiente:

(3º). Sustituir en (5.384) la expresión $Wecs_{1i}$ obtenida despejando de,

$$\alpha_{i-1,i} \leq \left| T_{i-1,i} \right| = \left| \frac{Wecs_{1i} + |q_{1i} \beta_{ii}|}{q_{1,i-1} + g_{i-1}} \right| \leq \beta_{i-1,i} \quad (5.385)$$

Entonces,

$$\alpha_{i-1,i} \left(q_{1,i-1} + g_{i-1} \right) - |q_{1i} \beta_{ii}| \leq Wecs_{1i} \quad (5.386)$$

Y, por tanto,

$$\alpha_{ii} \left(q_{2i}^{2,i-1} + g_i \right) - \frac{q_{2,i-1}}{q_{1,i-1} + g_{i-1}} \left(\alpha_{i-1,i} \left(q_{1,i-1} + g_{i-1} \right) - |q_{1i} \beta_{ii}| \right) - |g_i| \leq Wecs_{2i} \quad (5.387)$$

(Observar que no es posible conseguir una ecuación adecuada usando la desigualdad en (5.385) sobre $\beta_{i-1,i}$).

Si todavía con (5.387) no hay “LTI_Solution”, relajar o eliminar la especificación.

5.2.7 Resumen del Procedimiento “Squaring-up” Optimizando el Esfuerzo de Control

Problema de Tracking

La descripción resumen siguiente se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control optimizadas, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso. Para un *subsistema-j* cualquiera, a efectos de tracking optimizado, se tiene la descripción dada en la *Tabla_5.3*.

Tabla_5.3: Descripción de entradas de control en problema de Tracking Optimizado

Procedimiento de Compensación Optimizada	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,n] y prefiltro No diagonal [n,n]	$u_j^{opt} = G_j(F_{jj}R_j - R_j) + G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i(F_{ji} - \beta_i) + \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k R_k(F_{kk} - \beta_k) + \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i(F_{ki} - \beta_i)$	1	3

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera con $j=[x, x+1]$, las entradas de control optimizadas se descomponen del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned}
 u_x^{opt} &= g_x \left[f_{xx} r_x - r_x + f_{x, x+1} r_{x+1} + \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} (f_{xi} r_i + f_{x, i+1} r_{i+1} - r_i \beta_{ii}) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k (f_{kk} r_k - r_k \beta_{kk} + f_{k, k+1} r_{k+1}) + \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1, impar} (f_{ki} r_i - r_i \beta_{ii} + f_{k, i+1} r_{i+1}) \quad (5.388)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{x+1}^{opt} &= g_{x+1} \left[f_{x+1, x} r_x + f_{x+1, x+1} r_{x+1} - r_{x+1} + \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} (f_{x+1, i-1} r_{i-1} + f_{x+1, i} r_i - r_i \beta_{ii}) \right] + \\
 &+ \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l (f_{l, l-1} r_{l-1} + f_{ll} r_l - r_l \beta_{ll}) + \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l \sum_{i=2, i \neq l}^{n, par} (f_{l, i-1} r_{i-1} + f_{li} r_i - r_i \beta_{ii}) \quad (5.389)
 \end{aligned} \right\}$$

1. Término de Acoplo Propio $\equiv G_j (F_{jj} R_j - R_j)$

(Máxima influencia en la definición de controladores para acoplamiento)

$$\text{Acoplo Propio } (u_x^{opt}) = g_x [f_{xx} r_x - r_x + f_{x,x+1} r_x] \quad (5.390)$$

$$\text{Acoplo Propio } (u_{x+1}^{opt}) = g_{x+1} [f_{x+1,x} r_x + f_{x+1,x+1} r_{x+1} - r_{x+1}] \quad (5.391)$$

2. Término de Desacoplo Principal $\equiv G_j \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_{ji} - \beta_i)$

(Máxima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo Principal } (u_x^{opt}) = g_x \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, \text{impar}} (f_{xi} r_i + f_{x,i+1} r_{i+1} - r_i \beta_{ii}) \quad (5.392)$$

$$\text{Desacoplo Principal } (u_{x+1}^{opt}) = g_{x+1} \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, \text{par}} (f_{x+1,i-1} r_{i-1} + f_{x+1,i} r_i - r_i \beta_{ii}) \quad (5.393)$$

3. Término de Desacoplo del Acoplo Auxiliar $\equiv \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k R_k (F_{kk} - \beta_k)$

(Menor influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo del Acoplo Auxiliar } (u_x^{opt}) = \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, \text{impar}} g_k (f_{kk} r_k - r_k \beta_{kk} + f_{k,k+1} r_{k+1}) \quad (5.394)$$

$$\text{Desacoplo del Acoplo Auxiliar } (u_{x+1}^{opt}) = \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, \text{par}} g_l (f_{l,l-1} r_{l-1} + f_{ll} r_l - r_l \beta_{ll}) \quad (5.395)$$

4. Término de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar $\equiv \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i (F_{ki} - \beta_i)$

(Mínima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } (u_x^{opt}) = \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1, \text{impar}} (f_{ki} r_i - r_i \beta_{ii} + f_{k,i+1} r_{i+1}) \quad (5.396)$$

$$\text{Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } (u_{x+1}^{opt}) = \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, \text{par}} g_l \sum_{i=2, i \neq l}^{n, \text{par}} (f_{li} r_i - r_i \beta_{ii} + f_{l,i-1} r_{i-1}) \quad (5.397)$$

Problema de Regulación

La descripción se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso. Para un *subsistema-j* cualquiera, a efectos de regulación optimizada, se tiene la descripción dada en la *Tabla_5.4*.

Tabla_5.4: Descripción de entradas de control en problema de Regulación Optimizado

Procedimiento de Compensación Optimizada	Descripción Entradas de Control	Nºde Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,n]	$u_j^{opt} = -dG_j \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i - d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k Wps_k - d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m Wps_i$	0	3

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera con $j=[x, x+1]$, las entradas de control se descomponen del siguiente modo:

$$u_x^{opt} = -d_1 g_x \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} - d_1 \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k Wps_{k1} - d_1 \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \quad (5.398)$$

$$u_{x+1}^{opt} = -d_2 g_{x+1} \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} - d_2 \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l Wps_{l2} - d_2 \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \quad (5.399)$$

1. Término de Acoplo Propio $\equiv 0$

$$\text{Acoplo Propio } (u_x^{opt}) = 0 \quad (5.400)$$

$$\text{Acoplo Propio } (u_{x+1}^{opt}) = 0 \quad (5.401)$$

2. Término de Desacoplo Principal $\equiv -dG_j \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i$

(Máxima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo Principal } (u_x^{opt}) = -d_1 g_x \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \quad (5.402)$$

$$\text{Desacoplo Principal } (u_{x+1}^{opt}) = -d_2 g_{x+1} \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \quad (5.403)$$

$$3. \underline{\text{Término de Desacoplo del Acoplo Auxiliar}} \equiv -d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k Wps_k$$

(Menor influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo del Acoplo Auxiliar } (u_x^{opt}) = -d_1 \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k Wps_{k1} \quad (5.404)$$

$$\text{Desacoplo del Acoplo Auxiliar } (u_{x+1}^{opt}) = -d_2 \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l Wps_{l2} \quad (5.405)$$

$$4. \underline{\text{Término de Desacoplo del Desacoplo Auxiliar}} \equiv -d \sum_{k=1, k \neq j}^m G_k \sum_{i=1, i \neq k}^m Wps_i$$

(Mínima influencia en la definición de controladores para desacoplamiento)

$$\text{Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } (u_x^{opt}) = -d_1 \sum_{k=1, k \neq x}^{n-1, impar} g_k \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \quad (5.406)$$

$$\text{Desacoplo del Desacoplo Auxiliar } (u_{x+1}^{opt}) = -d_2 \sum_{l=2, l \neq x+1}^{n, par} g_l \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \quad (5.407)$$

5.2.8 Consideraciones para Realización Práctica

- ✚ En Análisis de Tracking y Sensibilidades, para cada subsistema, aplicar secuencialmente:
 - Resolución de especificaciones del 2º lazo.
 - Con resultados anteriores, sustituir en especificaciones de 1º lazo.
- ✚ Al utilizar las especificaciones para resolver “bounds” usar ecuaciones de valores máximos (absolutos), pero para Análisis usar las mismas ecuaciones con sus signos.
- ✚ RS se aplica en todo el espectro de frecuencias (0 a ∞), mientras que RP sólo en el margen de frecuencias acopladas al uso de la planta.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_5.0: Sistema MIMO no cuadrado $[2,n]$ de dos grados de libertad.....	171
Figura_5.1: Problema de regulación $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	172
Figura_5.2: $m=n/2$ subproblemas de regulación MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	173
Figura_5.3: Problema de tracking $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	179
Figura_5.4: $m=n/2$ subproblemas de tracking MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	180
Figura_5.5: Problema de tracking/regulación $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	186
Figura_5.6: $m=n/2$ subproblemas tracking/regulación MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	187
Figura_5.7: Tipos de Prefiltros función de referencias/salidas.....	201
Figura_5.8: Grado de Acoplo/desacoplo de referencias/salidas (Tracking).....	203
Figura_5.9: Grado de Acoplo/desacoplo de perturbaciones/salidas (Regulación)..	204
Figura_5.10: $m=n/2$ subproblemas de tracking puro MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	223
Figura_5.11: Tipos de subsistemas función de la paridad del lazo (Tracking).....	234
Figura_5.12: Plantas efectivas en cada subsistema (Tracking).....	234
Figura_5.13: Tipos de subsistemas función de la paridad del lazo (Regulación)....	237
Figura_5.14: Plantas efectivas en cada subsistema (Regulación).....	237

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_5.1: Descripción de entradas de control en problema de Tracking.....	202
Tabla_5.2: Descripción de entradas de control en problema de Regulación.....	203
Tabla_5.3: Descripción de entradas de control en problema de Tracking Optimizado	241
Tabla_5.4: Descripción de entradas de control en problema de Regulación Optimizado	243

CAPÍTULO 6

“Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control

RESUMEN

El procedimiento de “squaring-up” reducido, utilizando compensación MIMO-QFT permite trabajar con plantas con incertidumbre infra-actuadas, en un proceso sin supresión de especificaciones del sistema a controlar que incorpora optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento, al igual que “squaring-up”. En plantas de tamaños $[2,n]$, con $n \geq 2$ y paridad par, mientras que con “squaring-up” la solución es un controlador diagonal $[2,n]$ y un prefiltro No diagonal $[n,n]$ con elementos “off-diagonal”, “squaring-up” reducido ofrece como solución un controlador diagonal $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos “off-diagonal”.

CONTENIDOS

6.0 Introducción al “Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control

6.1 Diseño de Control Inicial

6.1.1 Problema de Regulación reducido

6.1.1.1 Descripción matemática del problema de Regulación reducido

6.1.2 Problema de Tracking reducido

6.1.2.1 Descripción matemática del problema de Tracking reducido

6.1.3 Problema Combinado Tracking/Regulación reducido

6.1.3.1 Descripción matemática del problema Combinado Tracking/Regulación reducido

6.1.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación reducido

6.1.5 Resumen del Procedimiento de “Squaring-up” reducido

6.2 Diseño de Control optimizado

6.2.1 Problema de Regulación reducido Optimizado

6.2.2 Problema de Tracking reducido Optimizado

6.2.3 Problema de Tracking Puro reducido Optimizado

6.2.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado Tracking/Regulación reducido optimizando esfuerzo de control

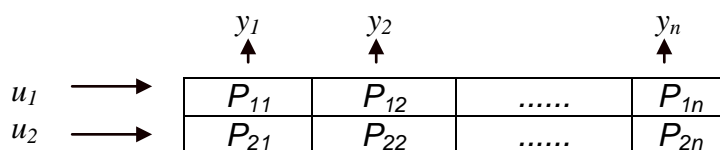
6.2.5 Resumen del Procedimiento “Squaring-up” reducido Optimizando el Esfuerzo de Control

6.0 Introducción al “Squaring up” reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control

El método propuesto de “squaring up” reducido consiste en sustituir el *sistema_inicial* de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y *par*, por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes con un único compensador en “feedback” común $[2,2]$ y un compensador en “feedforward” o prefiltro $[2,2]$, independientes para cada uno de ellos. Se describen formalmente todas las salidas y además las especificaciones, en términos de IPD (“Inverse Plant Domain”), para conseguir RS y RP, es decir, robustez en el TD y en el WD [Amstrom y Kerr,04].

A diferencia de “squaring-up”, ahora, la solución es un controlador diagonal común $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos “off-diagonal”.

Dada la planta $P[2,n]$, con $n = 2^i$, $i = 2,3,..$, descrita gráficamente como,



donde $u = (u_1, u_2)$ son las entradas de control y que se va a agrupar en subsistemas cuadrados tal que, $Y_1 = (y_1, y_2)$, , $Y_m = (y_{n-1}, y_n)$; es decir, m subsistemas de tamaño $[2,2]$ cada uno, siendo $m=n/2$, ordenados por prioridad de especificaciones, a saber, el *subsistema-1* es aquel al que se imponen las especificaciones más restrictivas del problema, a continuación con especificaciones algo menos rigurosas el *subsistema-2* y , así, sucesivamente. Se aplica también al respecto un estudio previo de acoplamientos entradas-salidas, tal y como se ha descrito en el Capítulo5 anterior.

En una primera etapa de diseño de control se plantea “squaring up” reducido en términos de regulación y seguimiento, por separado, para posteriormente mezclar los resultados a efectos de obtener la solución al problema combinado tracking-regulación.

En la segunda etapa de diseño definitiva, se incorpora una descripción de especificaciones para seguimiento y regulación que incluya minimización del esfuerzo de control (optimización). Para ello, las especificaciones de esfuerzo de control van a formar parte de las especificaciones básicas para seguimiento (tracking) y regulación (sensibilidades).

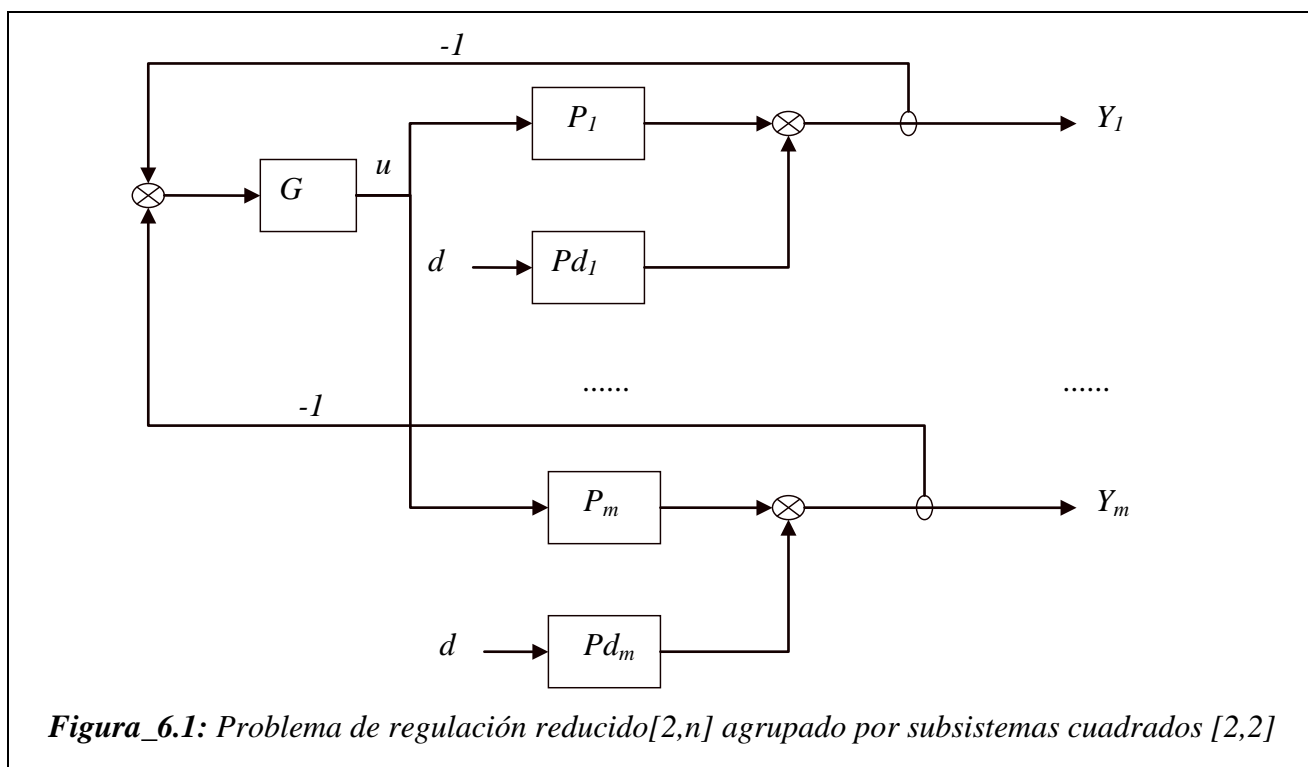
6.1 Diseño de Control Inicial

6.1.1 Problema de Regulación reducido

Esquemático por la *Figura_6.1* propuesta, utilizando agrupación por subsistemas cuadrados de tamaño $[2,2]$, donde se ha utilizado $G[2,2]$, subplanta de perturbaciones $Pd_i[2,2]$, subplanta $P_i[2,2]$, perturbaciones externas $d = (d_1, d_2)$ y

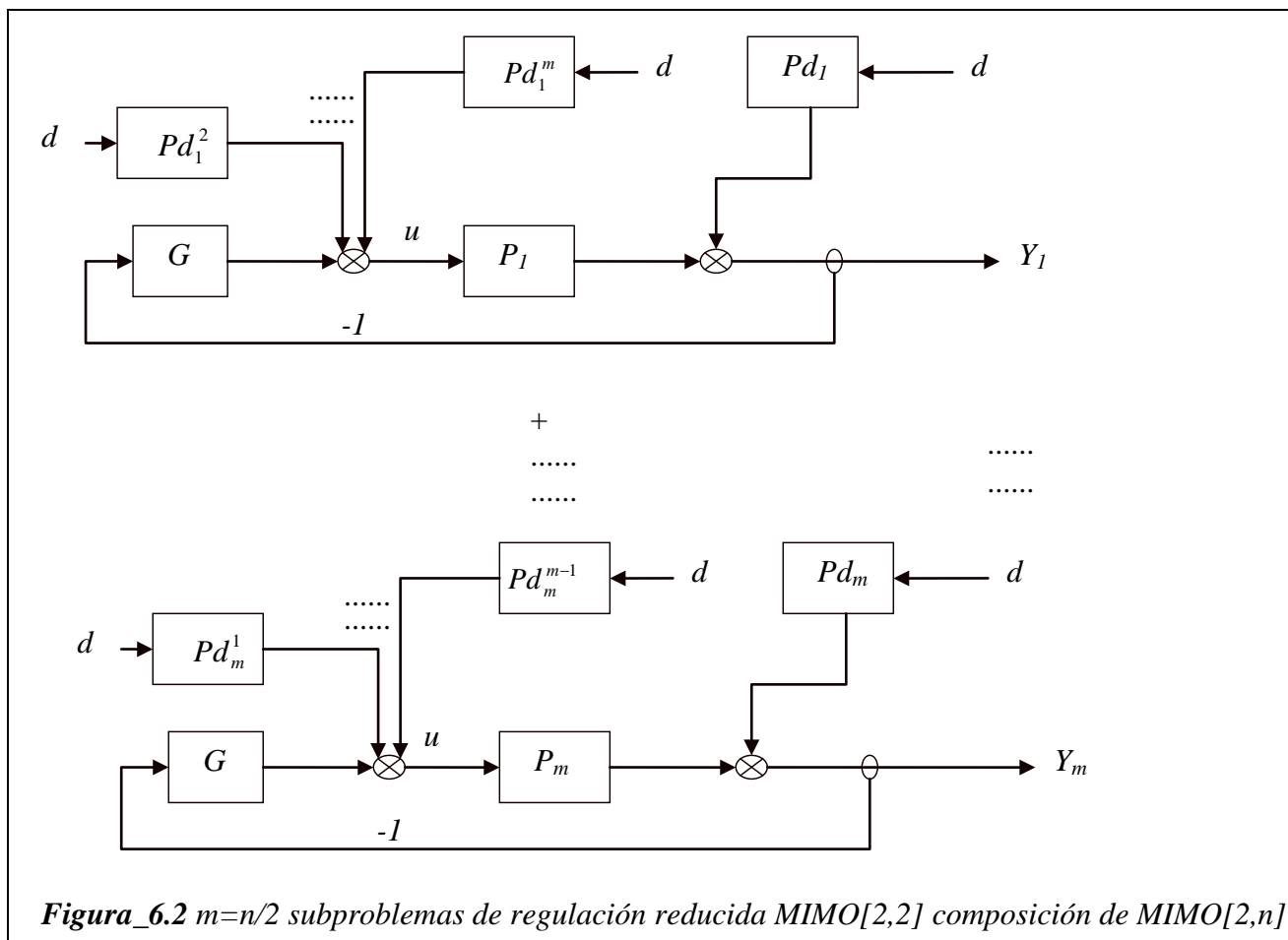
entradas de control $u = -G \sum_{i=1}^m Y_i$

El problema MIMO $[2, n]$ de la *Figura_6.1* se descompone en m problemas (subsistemas) MIMO $[2,2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.2*.



Figura_6.1: Problema de regulación reducido $[2, n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2, 2]$

Es decir, la solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO [2,2] propuestos a continuación, donde el compensador único G diagonal [2,2] está especializado en todas y cada una de las plantas P_i [2,2].



Figura_6.2 $m=n/2$ subproblemas de regulación reducida MIMO[2,2] composición de MIMO[2,n]

donde

$$Pd_1^i = -G \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 2, \dots, m \quad (6.1) \quad ; \dots \dots \dots ; Pd_m^i = -G \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 1, \dots, m-1, \quad (6.2)$$

son funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás subsistemas sobre el subsistema-j a estudio: Pd_j^i representa la influencia de la salida_i realimentada a través del controlador G del subsistema-j.

Formalmente, las relaciones $\frac{Y_i}{d}$ para $i = 1, \dots, m, i \neq k$, siendo k el subsistema estudiado, se utilizan en forma de imposición de restricciones, a través de las especificaciones de sensibilidad, generalizadas para cada subsistema-i como,

$$|S_i| = \left| \frac{Y_i}{d} \right| \leq Wps_i \quad (6.3)$$

Por tanto, escogiendo la peor situación en la que con perturbaciones d las salidas Y_i son máximas, se tiene

$$Pd_k^i = -GWps_i, i = 1, \dots, m, i \neq k \quad (6.4)$$

De esta forma, en el *subsistema-k*, las entradas de control se pueden describir como,

$$u = -GY_k + d \sum_{i=1, i \neq k}^m \text{Perturbación}_i, \text{ donde } \text{Perturbación}_i = Pd_k^i, i = 1, \dots, m, i \neq k \quad (6.5)$$

es decir,

$$u = -G \left(Y_k + d \sum_{i=1, i \neq k}^m Wps_i \right) \quad (6.6)$$

Así, el control aplicado a la subplanta k genérica, considera el valor de sus salidas Y_k función de las perturbaciones externas dPd_k , pero también el efecto de las perturbaciones $d \sum_{i=1, i \neq k}^m Pd_k^i$ definidas en función de las sensibilidades a perturbaciones externas de las salidas del resto de los *subsistemas* distintos del k .

6.1.1.1 Descripción matemática del problema de Regulación reducido

Los m subsistemas se pueden describir matricialmente como sigue,

(1) Para el *subsistema-1*,

$$Y_1 = P_1u + Pd_1d \quad (6.7)$$

y como

$$Y_1 = Pd_1d - P_1G \sum_{i=2}^m Y_i - P_1GY_1 \quad (6.8)$$

se puede describir en la forma,

$$(I + P_1G)Y_1 = Pd_1d - P_1G \sum_{i=2}^m Y_i \quad (6.9)$$

y, en definitiva, como

$$(P_1^{-1} + G)Y_1 = \left(P_1^{-1}Pd_1 - G \sum_{i=2}^m \frac{Y_i}{d} \right) d \quad (6.10)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el *m*.

(m) Para el subsistema-m,

$$Y_m = P_m u + Pd_m d \quad (6.11)$$

y como

$$Y_m = Pd_m d - P_m G \sum_{i=1}^{m-1} Y_i - P_m G Y_m \quad (6.12)$$

se describe en la forma,

$$(I + P_m G)Y_m = Pd_m d - P_m G \sum_{i=1}^{m-1} Y_i \quad (6.13)$$

y, en definitiva, como

$$(P_m^{-1} + G)Y_m = \left(P_m^{-1}Pd_m - G \sum_{i=1}^{m-1} \frac{Y_i}{d} \right) d \quad (6.14)$$

Utilizando la notación $P^{-1} = [q_{ij}]$ y $G = \text{diag}(g_1, g_2)$, las ecuaciones (6.10) y (6.14) se pueden desarrollar (considerando la simplificación usada por [Yaniv,99] modificada convenientemente), como se indica,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2,i-1}^2 = q_{2,i-1} - \frac{q_{2,i-1}q_{1,i-1}}{q_{1,i-1} + g_1} = \frac{q_{2,i-1}g_1}{q_{1,i-1} + g_1} \end{array} \right. \quad (6.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2i}^2 = q_{2i} - \frac{q_{2,i-1}q_{1i}}{q_{1,i-1} + g_1} \end{array} \right. \quad (6.14b)$$

con $i = 2,4,6,\dots,n, i \text{ par}$

(1) Para el subsistema-1, premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.10),

desarrollada matricialmente, por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{21} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pd_{11} & Pd_{12} \\ Pd_{21} & Pd_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^2 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_5}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_6}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} (q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21}) & (q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22}) \\ (q_{21}^2Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21}) & (q_{21}^2Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{impar} \frac{y_i}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{par} \frac{y_i}{d_2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$\text{con } \sum_{impar} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 3,5,7,\dots,n-1 \quad \text{y} \quad \sum_{par} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 4,6,8,\dots,n$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene,

$$(q_{11} + g1)y_1 + q_{12}y_2 = (q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21})d_1 + (q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22})d_2 - g1 \sum_{impar} \frac{y_i}{d_1} d_1 \quad (6.17)$$

$$(q_{22}^2 + g2)y_2 = (q_{21}^2Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21})d_1 + (q_{21}^2Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22})d_2 + q_{21}^2 \sum_{impar} \frac{y_i}{d_1} d_1 - g2 \sum_{par} \frac{y_i}{d_2} d_2 \quad (6.18)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..*, hasta alcanzar el *m*.

(m) Para el subsistema-m, premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.14),

desarrollada matricialmente, por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{2,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g1 & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} q_{1,n-1} & q_{1n} \\ q_{2,n-1}^2 & q_{2n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pd_{1,n-1} & Pd_{1n} \\ Pd_{2,n-1} & Pd_{2n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^2 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{y_1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_3}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{d_2} \end{pmatrix} + \dots \right] \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g1 & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{1n}Pd_{2,n-1}) & (q_{1,n-1}Pd_{1n} + q_{1n}Pd_{2n}) \\ (q_{21}^2Pd_{1,n-1} + q_{2n}^2Pd_{2,n-1}) & (q_{2,n-1}Pd_{1n} + q_{2n}^2Pd_{2n}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} & 0 \\ 0 & \sum_{\text{par}} \frac{y_i}{d_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

con $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene,

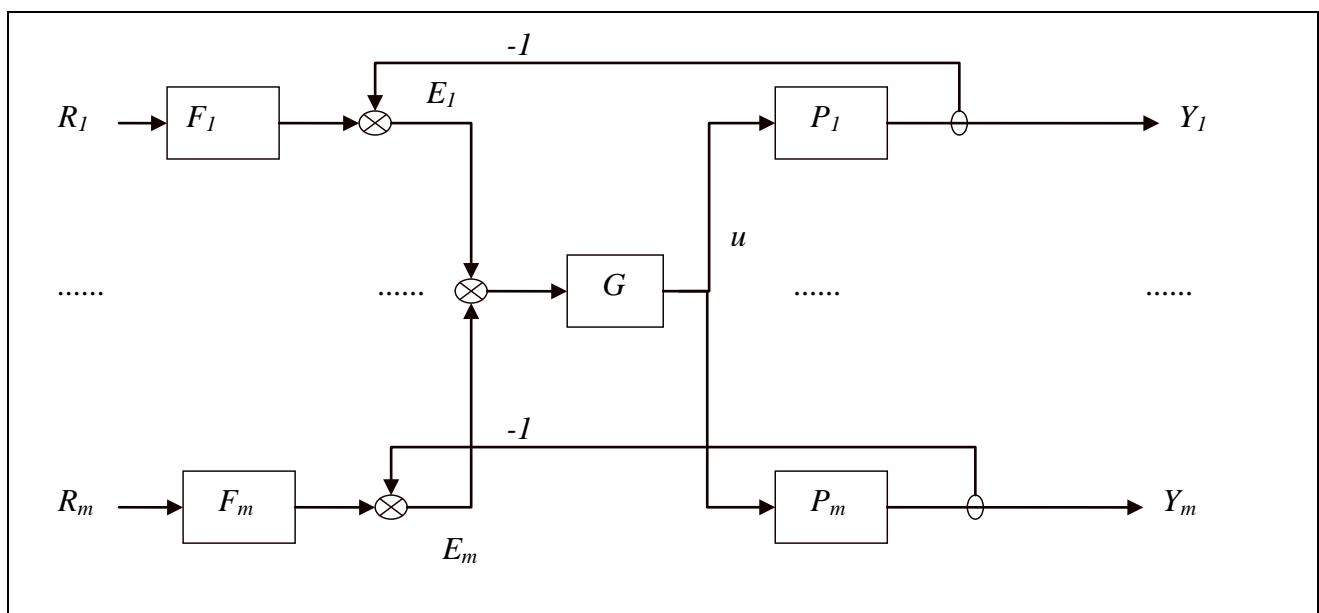
$$(q_{1,n-1} + g1)y_{n-1} + q_{1n}y_n = (q_{1,n-1}Pd_{1,n-1} + q_{1n}Pd_{2,n-1})d_1 + (q_{1,n-1}Pd_{1n} + q_{1n}Pd_{2n})d_2 - g1 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} d_1 \quad (6.21)$$

$$(q_{2n}^2 + g2)y_n = (q_{2,n-1}^2Pd_{1,n-1} + q_{2n}^2Pd_{2,n-1})d_1 + (q_{2,n-1}^2Pd_{1n} + q_{2n}^2Pd_{2n})d_2 + q_{2,n-1}^2 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} d_1 - g2 \sum_{\text{par}} \frac{y_i}{d_2} d_2 \quad (6.22)$$

6.1.2 Problema de Tracking reducido

Esquematzado por la representación dada en la *Figura_6.3*, utilizando agrupación por subsistemas cuadrados $[2,2]$, donde $G[2,2]$, prefiltros $F_i[2,2]$, subplanta $P_i[2,2]$, referencias de entrada $R_1 = (r_1, r_2)$, ..., $R_m = (r_{n-1}, r_n)$ y entradas de control $u = G \sum_{i=1}^m E_i$,

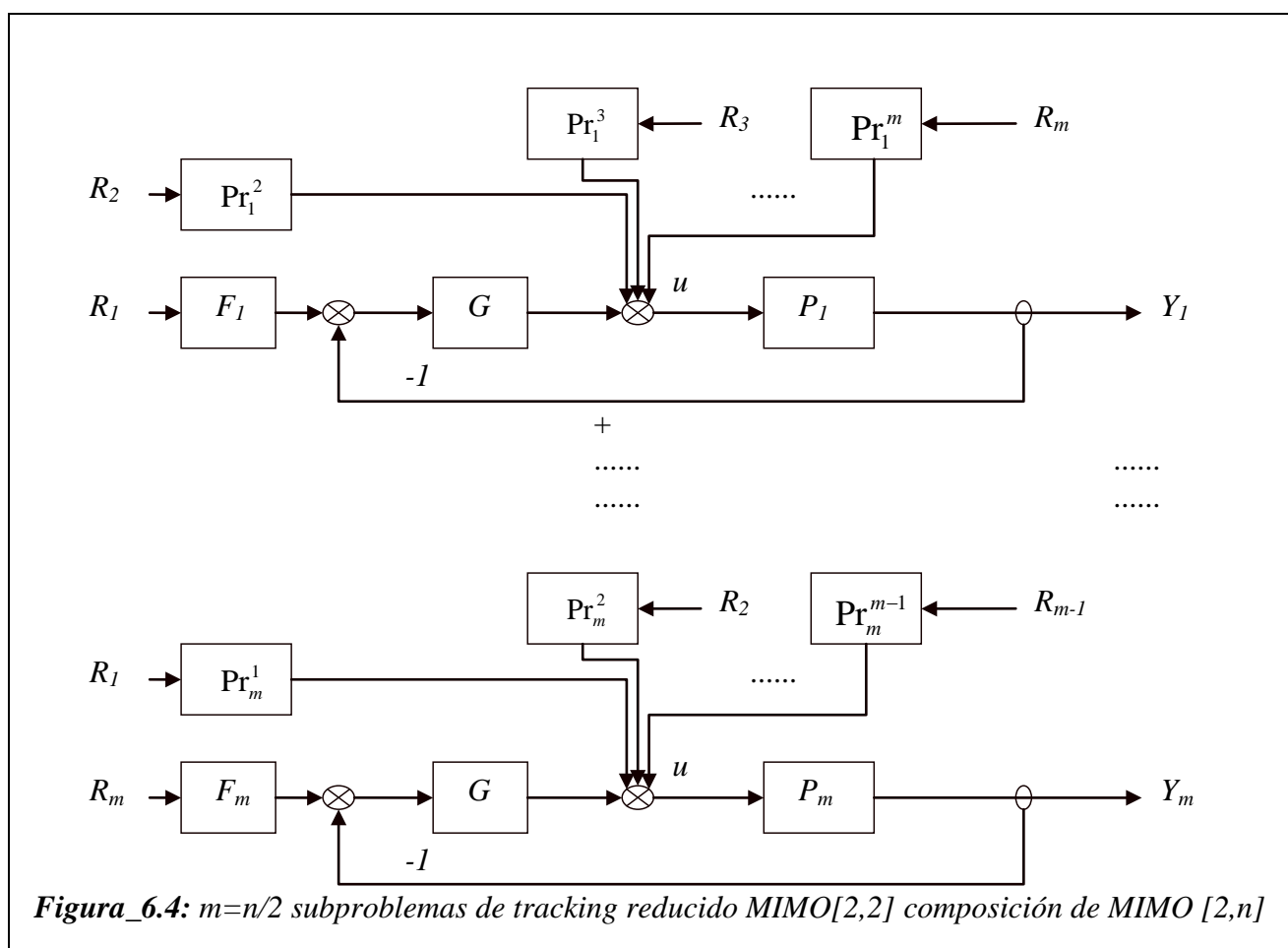
con $E_i = F_i R_i - Y_i$



Figura_6.3: Problema de tracking reducido $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$

El problema MIMO $[2, n]$ presentado se descompone en m problemas (*subsistemas*) MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.4*.

Es decir, la solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO $[2, 2]$ propuestos a continuación, donde el compensador $G [2, 2]$ diagonal es común a todos y cada prefiltro $F_i [2, 2]$ no diagonal está especializado en una única planta $P_i [2, 2]$.



Figura_6.4: $m=n/2$ subproblemas de tracking reducido MIMO $[2, 2]$ composición de MIMO $[2, n]$

Se ha utilizado la notación siguiente:

$$\Pr_1^i = G \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 2, \dots, m \quad (6.23) ; \dots ; \Pr_m^i = G \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \quad (6.24)$$

funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás *subsistemas* sobre el *subsistema* a estudio.

Formalmente, las relaciones $\frac{Y_i}{R_j}$ para $i = 1, \dots, m, i \neq k, j = 1, \dots, m$, siendo k el *subsistema* estudiado, se utilizan en forma de imposición de restricciones, a través de las especificaciones de tracking, generalizadas para cada *subsistema-i* como,

$$\alpha_i \leq |T_i| = \left| \frac{Y_i}{R_j} \right| \leq \beta_i \quad (6.25)$$

Por tanto, escogiendo la peor situación en la que con referencias de entrada R_j las salidas Y_i son máximas, se tiene $Pr_k^i = G(F_i - \beta_i)$, $i = 1, \dots, m, i \neq k$ (6.26)

De esta forma, en el *subsistema-k*, las entradas de control se pueden describir como,

$$u = G(F_k R_k - Y_k) + \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i \text{Perturbación}_i, \text{ donde } \text{Perturbación}_i = Pr_k^i, i = 1, \dots, m, i \neq k \quad (6.27)$$

es decir,
$$u = G\left(F_k R_k - Y_k + \sum_{i=1, i \neq k}^m R_i (F_i - \beta_i)\right) \quad (6.28)$$

Así, el control aplicado a la subplanta k genérica, considera el valor de sus salidas Y_k función del seguimiento de entrada $R_k (F_k - Y_k / R_k)$, pero también el efecto de las perturbaciones $\sum_{i=1, i \neq k}^m R_i Pr_k^i$ definido en función de las especificaciones de seguimiento a referencias de entrada del resto de los *subsistemas* distintos del k .

6.1.2.1 Descripción matemática del problema de Tracking reducido

Los m subsistemas matricialmente se describen como sigue,

(1) Para Tracking del *subsistema-1*,

$$Y_1 = P_1 u \quad (6.29)$$

$$\text{y como } Y_1 = P_1 G \sum_{i=2}^m (F_i R_i - Y_i) - P_1 G Y_1 + P_1 G F_1 R_1 \quad (6.30)$$

que se puede describir en la forma,

$$(P_1^{-1} + G)Y_1 = G F_1 R_1 + G \sum_{i=2}^m \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i \quad (6.31)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..*, hasta alcanzar el *m*.

(m) Para Tracking del subsistema-m,

$$Y_m = P_m u \quad (6.32)$$

$$\text{y como } Y_m = P_m G \sum_{i=1}^{m-1} (F_i R_i - Y_i) - P_m G Y_m + P_m G F_m R_m \quad (6.33)$$

se puede describir en la forma,

$$(P_m^{-1} + G)Y_m = G F_m R_m + G \sum_{i=1}^{m-1} \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right) R_i \quad (6.34)$$

Utilizando la notación $P^{-1} = [q_{ij}]$ y $G = \text{diag}(g_1, g_2)$, las ecuaciones (6.31) y (6.34) se pueden desarrollar, usando la simplificación siguiente, como se indica,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2,i-1}^2 = q_{2,i-1} - \frac{q_{2,i-1} q_{1,i-1}}{q_{1,i-1} + g_1} = \frac{q_{2,i-1} g_1}{q_{1,i-1} + g_1} \end{array} \right. \quad (6.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2i}^2 = q_{2i} - \frac{q_{2,i-1} q_{1i}}{q_{1,i-1} + g_1} \end{array} \right. \quad (6.14b)$$

con $i = 2, 4, 6, \dots, n$, *i par*

(1) Para Tracking del subsistema-1, premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.31),

desarrollada matricialmente, por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{21} & 1 \\ q_{11} + g_1 & \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^2 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{13} - \frac{y_3}{r_3} & f_{14} \\ f_{23} & f_{24} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{15} - \frac{y_5}{r_5} & f_{16} \\ f_{25} & f_{26} - \frac{y_6}{r_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} + \dots \right] \quad (6.35)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{11} + g1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g1f_{11}) & (g1f_{12}) \\ (-q_{21}^2f_{11} + g2f_{21}) & (-q_{21}^2f_{12} + g2f_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{21}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1}r_{i+1} \\ \sum_{par} f_{2,i-1}r_{i-1} + \sum_{par} (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i})r_i \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

con $\sum_{impar} \equiv \sum_i \dots con_i = 3,5,7,\dots, n-1$ y $\sum_{par} \equiv \sum_i \dots con_i = 4,6,8,\dots, n$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene,

$$(q_{11} + g1)y_1 + q_{12}y_2 = g1f_{11}r_1 + g1f_{12}r_2 + g1 \left(\sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1}r_{i+1} \right) \quad (6.37)$$

$$(q_{22}^2 + g2)y_2 = (-q_{21}^2f_{11} + g2f_{21})r_1 + (-q_{21}^2f_{12} + g2f_{22})r_2 - q_{21}^2 \left(\sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i})r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{par} f_{2,i-1}r_{i-1} + \sum_{par} (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i})r_i \right) \quad (6.38)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el *m*.

(m) Para Tracking del *subsistema-m*, premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.34),

desarrollada matricialmente, por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{2,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g1 & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,n-1} & f_{1n} \\ f_{2,n-1} & f_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^2 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{11} - \frac{y_1}{r_1} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \frac{y_2}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{13} - \frac{y_3}{r_3} & f_{14} \\ f_{23} & f_{24} - \frac{y_4}{r_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \dots \right] \quad (6.39)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} q_{1,n-1} + g1 & q_{1n} \\ 0 & q_{2n}^2 + g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g1f_{1,n-1}) & (g1f_{1n}) \\ (-q_{2,n-1}^2 f_{1,n-1} + g2f_{2,n-1}) & (-q_{2,n-1}^2 f_{1n} + g2f_{2n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ -q_{2,n-1}^2 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1} r_{i+1} \\ \sum_{par} f_{2,i-1} r_{i-1} + \sum_{par} (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

$$\text{con } \sum_{impar} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots, n-3 \quad \text{y} \quad \sum_{par} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots, n-2$$

Desarrollada la ecuación matricial, se obtiene,

$$(q_{1,n-1} + g1)y_{n-1} + q_{1n}y_n = g1f_{1,n-1}r_{n-1} + g1f_{1n}r_n + g1 \left(\sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1} r_{i+1} \right) \quad (6.41)$$

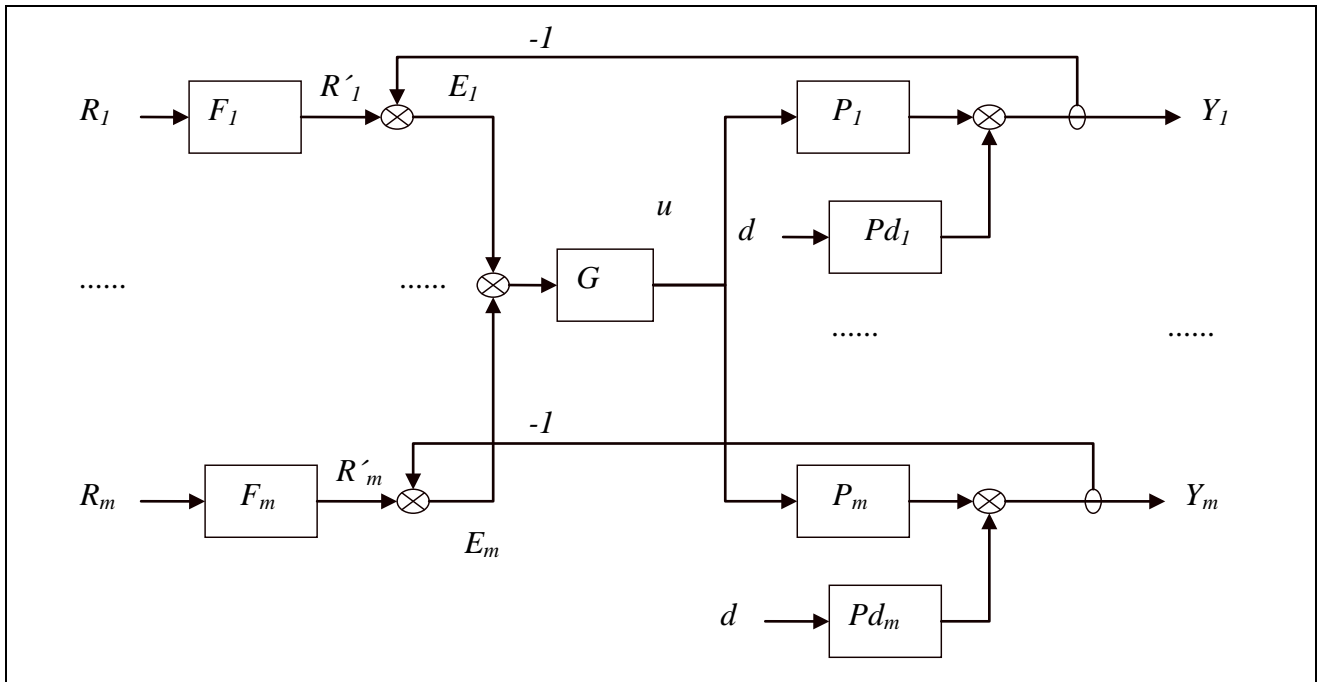
$$(q_{2n}^2 + g2)y_n = (-q_{2,n-1}^2 f_{1,n-1} + g2f_{2,n-1})r_{n-1} + (-q_{2,n-1}^2 f_{1n} + g2f_{2n})r_n - q_{2,n-1}^2 \left(\sum_{impar} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + \sum_{impar} f_{1,i+1} r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{par} f_{2,i-1} r_{i-1} + \sum_{par} (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right) \quad (6.42)$$

6.1.3 Problema Combinado Tracking/Regulación reducido

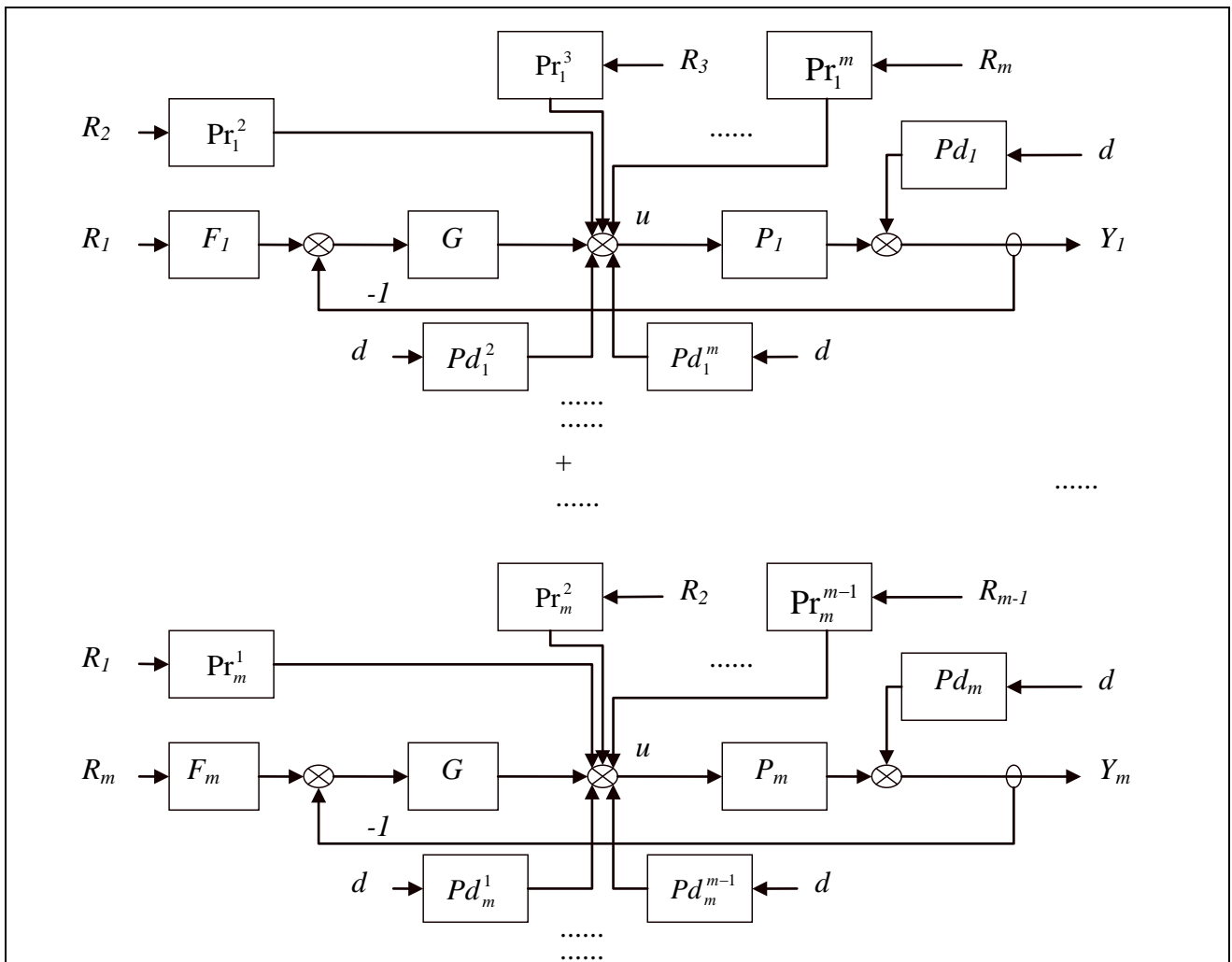
Esquemático por la representación dada en la *Figura_6.5*, donde se ha usado un controlador único diagonal $G[2,2]$, prefiltros no diagonales $F_i[2,2]$, subplantas $P_i[2,2]$, referencias de entrada $R_1 = (r_1, r_2)$, ..., $R_m = (r_{n-1}, r_n)$, subplantas de perturbaciones $Pd_i[2,2]$, perturbaciones externas $d = (d_1, d_2)$ y entradas de control

$$u = G \sum_{i=1}^m E_i, \quad \text{con } E_i = F_i R_i - Y_i$$

El problema MIMO $[2, n]$ presentado se descompone en m problemas (*subsistemas*) MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.6*. La solución global viene dada por las m soluciones de los problemas MIMO $[2, 2]$ propuestos a continuación, donde el compensador G es común y cada prefiltro F_i está especializado en una única planta P_i .



Figura_6.5: Problema de tracking/regulación reducido[2,n] agrupado en subsistemas cuadrados[2,2]



Figura_6.6: $m=n/2$ subproblemas de tracking/regulación reducido MIMO[2,2] composición de MIMO [2,n]

donde

$$Pr_1^i = G \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 2, \dots, m \text{ (6.43)} ; \dots ; Pr_m^i = G \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right), \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \text{ (6.44)}$$

y, donde

$$Pd_1^i = -G \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 2, \dots, m \text{ (6.45)} ; \dots ; Pd_m^i = -G \frac{Y_i}{d}, \text{ con } i = 1, \dots, m-1 \text{ (6.46)}$$

6.1.3.1 Descripción matemática del problema Combinado

Tracking/Regulación reducido

Los m subsistemas en modo matricial se describen considerando los resultados obtenidos anteriormente según los grupos de ecuaciones, (6.17), (6.18), (6.21), (6.22) y (6.37), (6.38), (6.41), (6.42), como sigue,

(1) Para Tracking/Regulación del subsistema-1,

$$\text{con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3, 5, 7, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4, 6, 8, \dots, n$$

$$y_1 = \frac{\left(q_{11}Pd_{11} + q_{12}Pd_{21} - g1 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right) d_1 + \left(q_{11}Pd_{12} + q_{12}Pd_{22} \right) d_2 + g1f_{11}r_1 + g1f_{12}r_2 + g1 \left(\sum_{\text{impar}} \left(f_{1i} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i + \sum_{\text{impar}} f_{1,i+1}r_{i+1} \right) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (6.47)$$

$$y_2 = \frac{\left(q_{21}^2Pd_{11} + q_{22}^2Pd_{21} + q_{21}^2 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right) d_1 + \left(q_{21}^2Pd_{12} + q_{22}^2Pd_{22} - g2 \sum_{\text{par}} \frac{y_i}{d_2} \right) d_2}{(q_{22}^2 + g2)} +$$

$$+ \frac{\left(-q_{21}^2f_{11} + g2f_{21} \right) r_1 + \left(-q_{21}^2f_{12} + g2f_{22} \right) r_2 - q_{21}^2 \left(\sum_{\text{impar}} \left(f_{1i} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i + \sum_{\text{impar}} f_{1,i+1}r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{\text{par}} f_{2,i-1}r_{i-1} + \sum_{\text{par}} \left(f_{2i} - \frac{y_i}{r_i} \right) r_i \right)}{(q_{22}^2 + g2)}$$

(6.48)

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas 2, 3, ..., hasta alcanzar el m.*

(m) Para Tracking/Regulación del subsistema-m,

$$\text{con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 1,3,5,\dots, n-3 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 2,4,6,\dots, n-2$$

$$y_{n-1} = \frac{\left(q_{1,n-1} P d_{1,n-1} + q_{1n} P d_{2,n-1} - g1 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right) d_1 + (q_{1,n-1} P d_{1n} + q_{1n} P d_{2n}) d_2 + g1 f_{1,n-1} r_{n-1} + g1 f_{1n} r_n + g1 \left(\sum_{\text{impar}} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + \sum_{\text{impar}} f_{1,i+1} r_{i+1} \right) - q_{1n} y_n}{(q_{1,n-1} + g1)} \quad (6.49)$$

$$y_n = \frac{\left(-q_{2,n-1}^2 f_{1,n-1} + g2 f_{2,n-1} \right) r_{n-1} + \left(-q_{2,n-1}^2 f_{1n} + g2 f_{2n} \right) r_n - q_{2,n-1}^2 \left(\sum_{\text{impar}} (f_{1i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i + \sum_{\text{impar}} f_{1,i+1} r_{i+1} \right) + g2 \left(\sum_{\text{par}} f_{2,i-1} r_{i-1} + \sum_{\text{par}} (f_{2i} - \frac{y_i}{r_i}) r_i \right)}{(q_{2n}^2 + g2)} +$$

$$+ \frac{\left(q_{2,n-1}^2 P d_{1,n-1} + q_{2n}^2 P d_{2,n-1} + q_{2,n-1}^2 \sum_{\text{impar}} \frac{y_i}{d_1} \right) d_1 + \left(q_{2,n-1}^2 P d_{1n} + q_{2n}^2 P d_{2n} - g2 \sum_{\text{par}} \frac{y_i}{d_2} \right) d_2}{(q_{2n}^2 + g2)} \quad (6.50)$$

6.1.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado

Tracking/Regulación reducido

A partir de las ecuaciones (6.47), (6.48), (6.49) y (6.50), se obtiene lo siguiente,

Sensibilidades:

Definidas por las limitaciones impuestas por $\left| \frac{y_i}{d_j} \right| \leq Wps_{ij}$, con $i=1,\dots,n$ y $j=1,2$

Subsistema-1, usando la notación $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 3,5,7,\dots, n-1$ y

$\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } _i = 4,6,8,\dots, n$, se tiene,

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{11}| + |q_{12}Pd_{21}| + |g1| \sum_{impar} Wps_{i1} + |q_{12}Wps_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{11} \quad (6.51)$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{12}| + |q_{12}Pd_{22}| + |q_{12}Wps_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{12} \quad (6.52)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{11}| + |q_{22}^2Pd_{21}| + |q_{21}^2| \sum_{impar} Wps_{i1}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{21} \quad (6.53)$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{12}| + |q_{22}^2Pd_{22}| + |g2| \sum_{par} Wps_{i2}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{22} \quad (6.54)$$

.....

Subsistema-m, con $\sum_{impar} \equiv \sum_i \dots con _i = 1,3,5,\dots, n-3$ y $\sum_{par} \equiv \sum_i \dots con _i = 2,4,6,\dots, n-2$,

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1,n-1}| + |q_{1n}Pd_{2,n-1}| + |g1| \sum_{impar} Wps_{i1} + |q_{1n}Wps_{n1}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq Wps_{n-1,1} \quad (6.55)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1n}| + |q_{1n}Pd_{2n}| + |q_{1n}Wps_{n2}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq Wps_{n-1,2} \quad (6.56)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1,n-1}| + |q_{2n}^2Pd_{2,n-1}| + |q_{2,n-1}^2| \sum_{impar} Wps_{i1}}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq Wps_{n1} \quad (6.57)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1n}| + |q_{2n}^2Pd_{2n}| + |g2| \sum_{par} Wps_{i2}}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq Wps_{n2} \quad (6.58)$$

Esfuerzo de Control:

Para Regulación existen, en principio, tantas especificaciones de Esfuerzo de Control como lazos cerrados del sistema a regular, o igualmente, como tantas especificaciones de sensibilidad.

Sin embargo, a efectos de Regulación y, como entradas de control sólo hay dos, únicamente se pueden imponer dos veces el número de perturbaciones externas existentes.

Por ello, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación se van a reagrupar imponiendo las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{11} = \max(Wecr_{i1}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.59) \\ Wecrm_{12} = \max(Wecr_{i2}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.60) \\ Wecrm_{21} = \max(Wecr_{i1}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.61) \\ Wecrm_{22} = \max(Wecr_{i2}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.62) \end{array} \right.$$

donde las funciones de valor *max* significan elección de la especificación más restrictiva.

Del mismo modo, para Seguimiento Puro existen, en principio, tantas especificaciones de Esfuerzo de Control como especificaciones de tracking puro.

Como sólo existen dos entradas de control, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento puro se reagrupan imponiendo las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm'_{11} = \max(Wecs'_{i1}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.63) \\ Wecsm'_{12} = \max(Wecs'_{i2}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.64) \\ Wecsm'_{13} = \max(Wecs'_{i3}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.65) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm'_{1n} = \max(Wecs'_{in}), \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.66) \\ Wecsm'_{21} = \max(Wecs'_{i1}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.67) \\ Wecsm'_{22} = \max(Wecs'_{i2}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.68) \\ Wecsm'_{23} = \max(Wecs'_{i3}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.69) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm'_{2n} = \max(Wecs'_{in}), \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.70) \end{array} \right.$$

1.En Términos de Regulación. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}}{d_j} \right| \leq Wecr_{ij} \leq Wecrm_{kj}$, con $i=1,2,\dots,n$ (salidas), $j=1,2$ y $k=1,2$, aunque descritas en función de las sensibilidades definidas anteriormente y, expresadas en modo IPD¹.

$$|Ecr_{11}| = q_{11}|S_{11}| \leq Wecr_{11} \leq Wecrm_{11} \quad (6.71) ; \quad |Ecr_{12}| = q_{11}|S_{12}| \leq Wecr_{12} \leq Wecrm_{12} \quad (6.72)$$

$$|Ecr_{21}| = q_{22}^2|S_{21}| \leq Wecr_{21} \leq Wecrm_{21} \quad (6.73) ; \quad |Ecr_{22}| = q_{22}^2|S_{22}| \leq Wecr_{22} \leq Wecrm_{22} \quad (6.74)$$

.....

$$|Ecr_{n-1,1}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,1}| \leq Wecr_{n-1,1} \leq Wecrm_{11} \quad (6.75); \quad |Ecr_{n-1,2}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,2}| \leq Wecr_{n-1,2} \leq Wecrm_{12} \quad (6.76)$$

$$|Ecr_{n1}| = q_{2n}^2|S_{n1}| \leq Wecr_{n1} \leq Wecrm_{21} \quad (6.77) ; \quad |Ecr_{n2}| = q_{2n}^2|S_{n2}| \leq Wecr_{n2} \leq Wecrm_{22} \quad (6.78)$$

2.En Términos de Seguimiento. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}}{r'_j} \right| \leq Wecs'_{ij} \leq Wecsm'_{kj}$, con

$i=1,2,\dots,n$ (salidas), $j=1,\dots,n$ y $k=1,2$, siendo r'_j , referencias de entrada a los subsistemas usados sin prefiltros (Tracking Puro)².

$$|Ecs'_{11}| = q_{11}|T'_{11}| \leq Wecs'_{11} \leq Wecsm'_{11} \quad (6.79) ; \quad \dots ; \quad |Ecs'_{1n}| = q_{11}|T'_{1n}| \leq Wecs'_{1n} \leq Wecsm'_{1n} \quad (6.80)$$

$$|Ecs'_{21}| = q_{22}^2|T'_{21}| \leq Wecs'_{21} \leq Wecsm'_{21} \quad (6.81); \quad \dots ; \quad |Ecs'_{2n}| = q_{22}^2|T'_{2n}| \leq Wecs'_{2n} \leq Wecsm'_{2n} \quad (6.82)$$

.....

$$|Ecs'_{n-1,1}| = q_{1,n-1}|T'_{n-1,1}| \leq Wecs'_{n-1,1} \leq Wecsm'_{11} \quad (6.83); \quad \dots ; \quad |Ecs'_{n-1,n}| = q_{1,n-1}|T'_{n-1,n}| \leq Wecs'_{n-1,n} \leq Wecsm'_{1n} \quad (6.84)$$

$$|Ecs'_{n1}| = q_{2n}^2|T'_{n1}| \leq Wecs'_{n1} \leq Wecsm'_{21} \quad (6.85); \quad \dots ; \quad |Ecs'_{nn}| = q_{2n}^2|T'_{nn}| \leq Wecs'_{nn} \leq Wecsm'_{2n} \quad (6.86)$$

¹ Aplicadas las ecuaciones (6.59), (6.60), (6.61) y (6.62).

² Se han aplicado también las ecuaciones (6.63) a (6.70).

Estabilidad Robusta: Viene descrita por las limitaciones impuestas dentro de cada subsistema a cada uno de los lazos cerrados con plantas equivalentes $\frac{1}{q_{1i}}$ y $\frac{1}{q_{2j}^2}$, con

$i=1,3, \dots, n-1$ y $j=2,4,\dots,n$, y controladores g_1 y g_2 , respectivamente, todos ellos estables.

Tales limitaciones se denotan por $|Te_{ij}| \leq We_k$, con $i=1,2$, $j=1,\dots,n$ y $k=1, \dots,n$, dando lugar

a,

$$|Te_{11}| = |Te_{12}| = \left| \frac{q_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq We_1 \quad (6.87) ; \quad |Te_{21}| = |Te_{22}| = \left| \frac{q_{22}^2}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq We_2 \quad (6.88)$$

$$|Te_{13}| = |Te_{14}| = \left| \frac{q_{13}}{q_{13} + g1} \right| \leq We_3 \quad (6.89) ; \quad |Te_{23}| = |Te_{24}| = \left| \frac{q_{24}^2}{q_{24}^2 + g2} \right| \leq We_4 \quad (6.90)$$

.....

$$|Te_{1,n-1}| = |Te_{1n}| = \left| \frac{q_{1,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq We_{n-1} \quad (6.91) ; \quad |Te_{2,n-1}| = |Te_{2n}| = \left| \frac{q_{2n}^2}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq We_n \quad (6.92)$$

Ecuaciones de Tracking Puro, usadas en Esfuerzo de Control en términos de

Seguimiento:

En un problema de tracking/regulación como el presentado en la Figura_6.5, a efectos de Tracking Puro, usando entradas de referencia r' sobre subsistemas sin prefiltros, se obtiene un comportamiento descrito por la ecuación (6.31) modificada tal como se indica en (6.97), es decir,

$$T = \frac{Y}{R} \quad (6.93) \quad \text{y} \quad T' = \frac{T}{F} = \frac{Y}{FR} = \frac{Y}{R'} \quad (6.94)$$

$$u' = G \sum_{i=1}^m E_i' \quad (6.95) \quad \text{con} \quad E_i' = R_i' - Y_i \quad (6.96)$$

da lugar a,
$$(P_1^{-1} + G)Y_1 = GR_1 + G \sum_{i=2}^m \left(I - \frac{Y_i}{R_i'} \right) R_i' = GR_1 + G \sum_{i=2}^m (R_i' - Y_i) \quad (6.97)$$

que finalmente hace que las ecuaciones (6.47),(6.48), (6.49) y (6.50) queden del siguiente modo,

(1) Para el subsistema-1,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3,5,7,\dots,n-1 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4,6,8,\dots,n \\ \\ y_1 = \frac{g1r'_1 + g1 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (6.98) \\ \\ y_2 = \frac{-q_{21}^2 r'_1 + g2r'_2 - q_{21}^2 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) + g2 \sum_{\text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{22}^2 + g2)} \quad (6.99) \end{array} \right.$$

Se aplica el mismo procedimiento para los *subsistemas* 2, 3, ..., hasta alcanzar el *m*.

(m) Para el subsistema-m,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2 \\ \\ y_{n-1} = \frac{g1r'_{n-1} + g1 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{1n}y_n}{(q_{1,n-1} + g1)} \quad (6.100) \\ \\ y_n = \frac{-q_{2,n-1}^2 r'_{n-1} + g2r'_n - q_{2,n-1}^2 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) + g2 \sum_{\text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{2n}^2 + g2)} \quad (6.101) \end{array} \right.$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking Puro se pueden describir como se indica a

continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\left| \frac{y_i}{r'_j} \right| \leq \rho_{ij}$, con

$i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$

Notación Subsistema1: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3,5,7,\dots,n-1$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4,6,8,\dots,n$

$$|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{21}| + |g1| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i1}| \right)}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{11} \quad (6.102); |T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{22}| + |g1| \sum_{\text{impar}} |\rho_{i2}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{12} \quad (6.103)$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left| \frac{|g1| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i3}| \right) + |q_{12}\rho_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{13} \quad (6.104); |T'_{14}| = \left| \frac{y_1}{r'_4} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{24}| + |g1| \sum_{\text{impar}} |\rho_{i4}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{14} \quad (6.105)$$

$$|T'_{15}| = \left| \frac{y_1}{r'_5} \right| = \left| \frac{|g1| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i5}| \right) + |q_{12}\rho_{25}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{15} \quad (6.106); |T'_{16}| = \left| \frac{y_1}{r'_6} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{26}| + |g1| \sum_{\text{impar}} |\rho_{i6}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{16} \quad (6.107)$$

.....

$$|T'_{1,n-1}| = \left| \frac{y_1}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|g1| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + |q_{12}\rho_{2,n-1}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1,n-1} \quad (6.108); |T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + |g1| \sum_{\text{impar}} |\rho_{in}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1n} \quad (6.109)$$

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i1}| \right) + |g2| \sum_{\text{par}} |\rho_{i1}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{21} \quad (6.110); |T'_{22}| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left| \frac{|g2| \left(1 + \sum_{\text{par}} |\rho_{i2}| \right) + |q_{21}^2| \sum_{\text{impar}} |\rho_{i2}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{22} \quad (6.111)$$

.....

$$|T'_{2,n-1}| = \left| \frac{y_2}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + |g2| \sum_{\text{par}} |\rho_{i,n-1}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2,n-1} \quad (6.112); |T'_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| \frac{|g2| \left(1 + \sum_{\text{par}} |\rho_{in}| \right) + |q_{21}^2| \sum_{\text{impar}} |\rho_{in}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2n} \quad (6.113)$$

.....

Notación Subsistema-m: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2$

$$|T'_{n-1,n-1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{q_{1n} \rho_{n,n-1} + |g1| \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right)}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \rho_{n-1,n-1} \quad (6.114); \quad |T'_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_n} \right| = \left| \frac{q_{1n} \rho_{nn} + |g1| \sum_{\text{impar}} |\rho_{in}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \rho_{n-1,n} \quad (6.115)$$

.....

$$|T'_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{q_{2n}^2 \left(1 + \sum_{\text{impar}} |\rho_{i,n-1}| \right) + |g2| \sum_{\text{par}} |\rho_{i,n-1}|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \rho_{n,n-1} \quad (6.116); \quad |T'_{nn}| = \left| \frac{y_n}{r'_n} \right| = \left| \frac{|g2| \left(1 + \sum_{\text{par}} |\rho_{in}| \right) + q_{2n}^2 \sum_{\text{impar}} |\rho_{in}|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \rho_{nn} \quad (6.117)$$

Tracking: Para determinación de prefiltros. Limitaciones impuestas por $\alpha_{ij} \leq \left| \frac{y_i}{r_j} \right| \leq \beta_{ij}$, con

$i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$

Notación Subsistema1: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3,5,7,\dots,n-1$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4,6,8,\dots,n$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{11}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + |q_{12} \beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{11} \quad (6.118); \quad \alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{12}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + |q_{12} \beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{12} \quad (6.119)$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| = \left| \frac{y_1}{r_3} \right| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{13}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + |q_{12} \beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{13} \quad (6.120); \dots; \alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{|g1| \left(|f_{1n}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{in}| \right) + |q_{12} \beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{1n} \quad (6.121)$$

$$\alpha_{21} \leq |T_{21}| = \left| \frac{y_2}{r_1} \right| = \left| \frac{q_{21}^2 \left(|f_{11}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i1}| \right) + |g2| \left(|f_{21}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{i1}| \right) \sum_{\text{par}} |\beta_{i1}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{21} \quad (6.122)$$

$$\alpha_{22} \leq |T_{22}| = \left| \frac{y_2}{r_2} \right| = \left| \frac{q_{21}^2 \left(|f_{12}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i2}| \right) + |g2| \left(|f_{22}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{i2}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{22} \quad (6.123)$$

$$\alpha_{23} \leq |T_{23}| = \left| \frac{y_2}{r_3} \right| = \left| \frac{q_{21}^2 \left(|f_{13}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i3}| \right) + g2 \left(|f_{23}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{i3}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{23} \quad (6.124)$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r_n} \right| = \left| \frac{q_{21}^2 \left(|f_{1n}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{in}| \right) + g2 \left(|f_{2n}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{in}| \right)}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{2n} \quad (6.125)$$

.....

Notación Subsistema-m: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2$

.....

$$\alpha_{n,n-1} \leq |T_{n,n-1}| = \left| \frac{y_n}{r_{n-1}} \right| = \left| \frac{q_{2,n-1}^2 \left(|f_{1,n-1}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{i,n-1}| \right) + g2 \left(|f_{2,n-1}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{i,n-1}| \right)}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \beta_{n,n-1} \quad (6.126)$$

$$\alpha_{nn} \leq |T_{nn}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| \frac{q_{2,n-1}^2 \left(|f_{1n}| + \sum_{\text{impar}} |\beta_{in}| \right) + g2 \left(|f_{2n}| + \sum_{\text{par}} |\beta_{in}| \right)}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \beta_{nn} \quad (6.127)$$

6.1.5 Resumen del Procedimiento de “Squaring-up” reducido

Problema de Tracking:

La comparativa se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso.

Tabla_6.1: Descripción de entradas de control en problema de Tracking reducido

Procedimiento de Compensación	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,2] y prefiltro No diagonal [2,n]	$u = G \sum_{i=1}^m (F_i R_i - Y_i)$	1	1

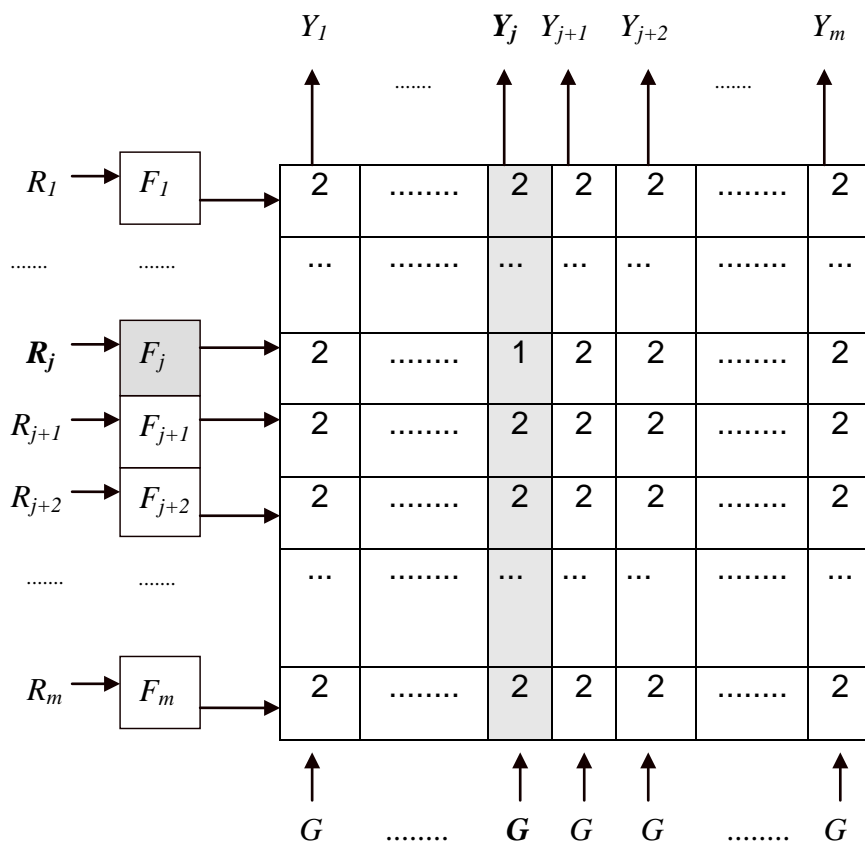
Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera, las entradas de control se descomponen

del siguiente modo:
$$u = G(F_j R_j - Y_j) + G \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_i - \beta_i) \tag{6.128}$$

1. Término de Acoplo $\equiv G(F_j R_j - Y_j)$ (6.129)

2. Término de Desacoplo $\equiv G \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_i - \beta_i)$ (6.130)

En la *Figura_6.7* se esquematiza la relación de los distintos términos de acoplo/desacoplo con las diferentes entradas_de_referencia/salidas, así como, los tipos de prefiltros y compensador G a que dan lugar.



Figura_6.7
Grado de Acoplo/desacoplo de referencias/salidas (Tracking reducido)

- 1. Prefiltro de Acoplo.
- 2. Prefiltro de Desacoplo.

Problema de Regulación:

La comparativa se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso.

Tabla_6.2: Descripción de entradas de control en problema de Regulación reducido

Procedimiento de Compensación	Descripción Entradas de Control	Nºde Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,2]	$u = -G \sum_{i=1}^m Y_i$	1	1

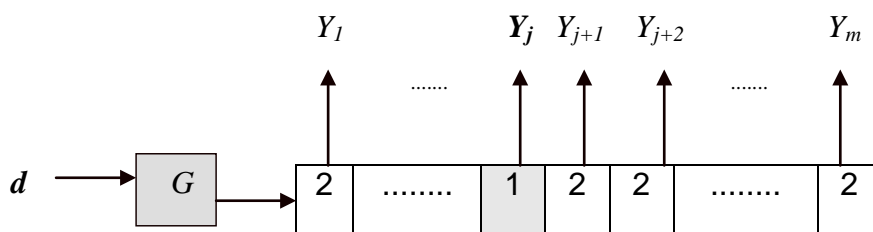
Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera, las entradas de control se descomponen

del siguiente modo:
$$u = -G \left(Y_j + d \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i \right) \tag{6.131}$$

1. Término de Acoplo $\equiv -GY_j$ (6.132)

2. Término de Desacoplo $\equiv -Gd \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i$ (6.133)

En la *Figura_6.8* se esquematiza la relación de los distintos términos de acoplo/desacoplo con las diferentes perturbaciones_externas/salidas, así como, el compensador G a que dan lugar.



Figura_6.8
Grado de Acoplo/desacoplo de perturbaciones/salidas (Regulación reducida)
1. Término de Acoplo.
2. Términos de Desacoplo.

NOTA: La entrada del vector perturbaciones externas sobre el controlador G no es real, significa que G considera/trata el valor de d.

6.2 Diseño de Control Optimizado

Vamos a incorporar en el “diseño de control inicial” anterior una descripción de especificaciones para seguimiento y regulación que incluya minimización del esfuerzo de control: es lo que denominaremos “diseño de control optimizado”. Las especificaciones de esfuerzo de control se van a introducir en las especificaciones básicas para seguimiento (tracking) y regulación (sensibilidades), formando parte de las mismas. De esta manera, mejoraremos significativamente, en el sentido del esfuerzo de control, el seguimiento y la regulación del sistema.

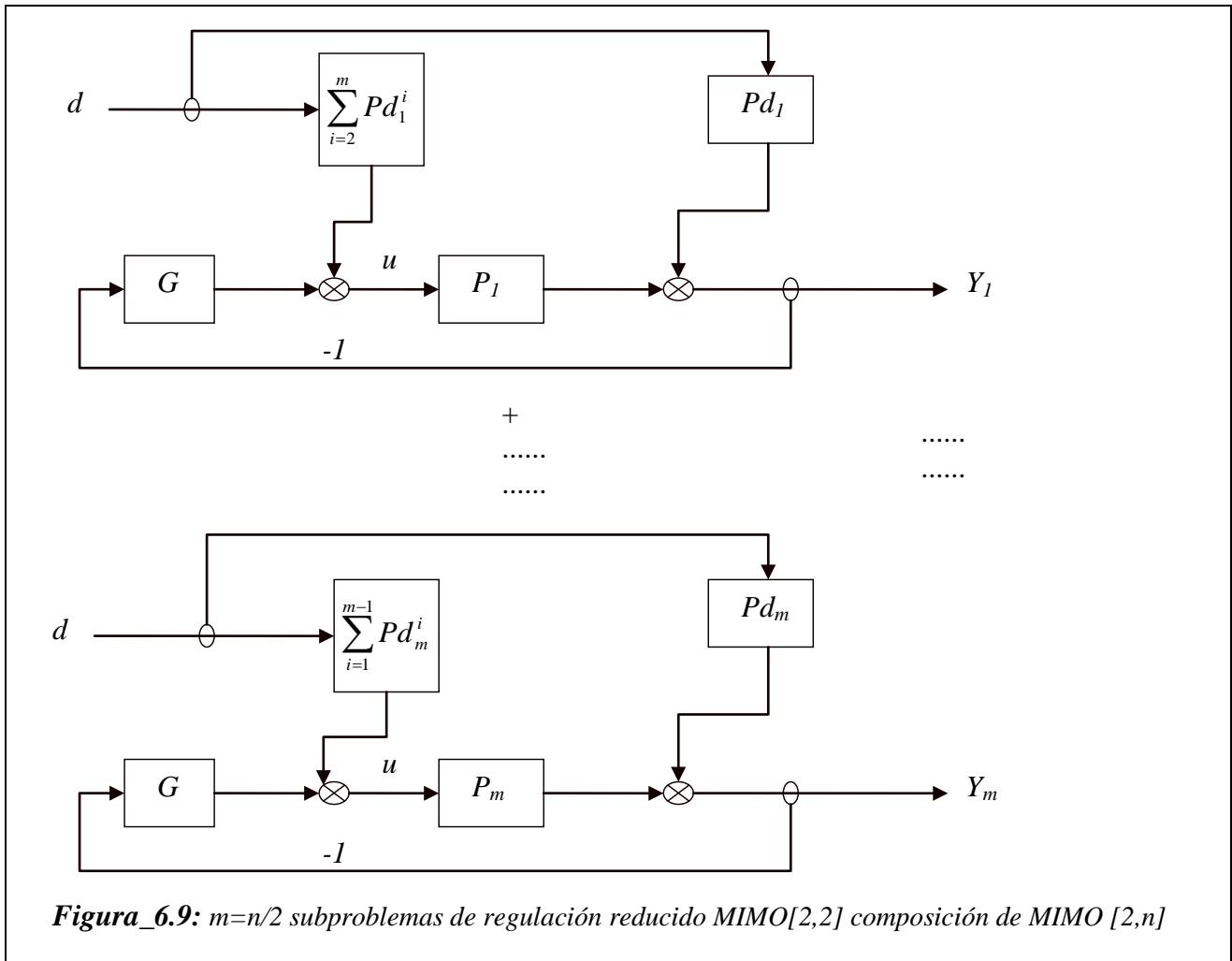
6.2.1 Problema de Regulación reducido Optimizado

Se trata de utilizar el procedimiento “*Squaring up reducido en sistemas MIMO [2,n] infra-actuados*”, pero partiendo de la optimización sobre las especificaciones de esfuerzo de control para, posteriormente, aplicar el resto de especificaciones necesarias. Se plantean especificaciones en términos tanto de DPD (“*Direct Plant Domain*”), como de IPD (“*Inverse Plant Domain*”).

El problema MIMO $[2, n]$ se descompone en m problemas (subsistemas) MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.9*. Se tiene, controlador único G diagonal $[2, 2]$ especializado en todas y cada una de las plantas $P_i [2, 2]$, planta de perturbaciones para cada subsistema $Pd_i [2, 2]$, y perturbaciones de entrada $d = (d_1, d_2)$.

$$\text{donde } \sum_{i=2}^m Pd_1^i = -G \sum_{i=2}^m \frac{Y_i}{d} \quad (6.134) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \sum_{i=1}^{m-1} Pd_m^i = -G \sum_{i=1}^{m-1} \frac{Y_i}{d} \quad (6.135)$$

funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás *subsistemas* sobre el *subsistema* a estudio.



La optimización de las especificaciones de control en términos de regulación parte de

considerar la ecuación $u = -G \sum_{i=1}^m Y_i$ (6.136) de forma matricial, esto es,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g1 & 0 \\ 0 & -g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} y_i \\ \sum_{i=2}^{n, \text{par}} y_i \end{pmatrix} \tag{6.137}$$

Que desarrollada queda como,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -g1 \sum_{i=1}^{\text{impar}} y_i \quad , \text{ con } i=1, 3, 5, \dots, n-1 \end{array} \right. \tag{6.138}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = -g2 \sum_{i=2}^{\text{par}} y_i \quad , \text{ con } i=2, 4, 6, \dots, n \end{array} \right. \tag{6.139}$$

Además, para un *subsistema-k* cualquiera con $k=[l,l+1]$,

$$\begin{pmatrix} y_l \\ y_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1l} & P_{1,l+1} \\ P_{2l} & P_{2,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_{l+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pd_{1l} & Pd_{1,l+1} \\ Pd_{2l} & Pd_{2,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (6.140)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, se utilizan entradas de control optimizadas u_l^{opt} y u_{l+1}^{opt} , manteniendo el esfuerzo de control para regulación lo más cerca posible de su valor mínimo³, **las salidas se anulan** [Yaniv,99]; esto es,

(1) Para el subsistema-1 optimizado,

$$\begin{cases} y_1 = 0 = P_{11}u_1^{opt} + P_{12}u_2^{opt} + Pd_{11}d_1 + Pd_{12}d_2 & (6.141) \\ y_2 = 0 = P_{21}u_1^{opt} + P_{22}u_2^{opt} + Pd_{21}d_1 + Pd_{22}d_2 & (6.142) \end{cases}$$

con $u_1^{opt} = -g1 \sum_{i=3}^{impar} y_i$, donde $i=3, 5, \dots, n-1$ (3.143) y $u_2^{opt} = -g2 \sum_{i=4}^{par} y_i$, con $i=4, 6, \dots, n$ (6.144)

Por tanto, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación del *subsistema-1* vendrán descritas del siguiente modo,

$$|Ecr_{11}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{d_1} \right| = \left| g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{11} \quad (6.145); \quad |Ecr_{12}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{d_2} \right| = \left| g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{12} \quad (6.146)$$

$$|Ecr_{21}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{d_1} \right| = \left| g2 \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{21} \quad (6.147) ; \quad |Ecr_{22}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{d_2} \right| = \left| g2 \sum_{i=4}^{n, par} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{22} \quad (6.148)$$

.....

(m) Para el subsistema-m optimizado,

$$\begin{cases} y_{n-1} = 0 = P_{1,n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{1n}u_n^{opt} + Pd_{1,n-1}d_1 + Pd_{1n}d_2 & (6.149) \\ y_n = 0 = P_{2,n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{2n}u_n^{opt} + Pd_{2,n-1}d_1 + Pd_{2n}d_2 & (6.150) \end{cases}$$

con $u_{n-1}^{opt} = -g1 \sum_{i=1}^{impar} y_i$, donde $i=1,3, 5, \dots, n-3$ (6.151) y $u_n^{opt} = -g2 \sum_{i=2}^{par} y_i$, con $i=2,4, 6, \dots, n-2$ (6.152)

³ u_l^{opt} y u_{l+1}^{opt} son u_1 y u_2 para el *subsistema-k* optimizado (minimizado) para esfuerzos de control de regulación.

Por tanto, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación del *subsistema-m* vendrán descritas del siguiente modo,

$$\left| Ecr_{n-1,1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{d_1} \right| = \left| g1 \sum_{i=1}^{n-3, impar} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{n-1,1} \quad (6.153); \left| Ecr_{n-1,2}^{opt} \right| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{d_2} \right| = \left| g1 \sum_{i=1}^{n-3, impar} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{n-1,2} \quad (6.154)$$

$$\left| Ecr_{n1}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{d_1} \right| = \left| g2 \sum_{i=2}^{n-2, par} \frac{y_i}{d_1} \right| \leq Wecr_{n1} \quad (6.155); \left| Ecr_{n2}^{opt} \right| = \left| \frac{u_n^{opt}}{d_2} \right| = \left| g2 \sum_{i=2}^{n-2, par} \frac{y_i}{d_2} \right| \leq Wecr_{n2} \quad (6.156)$$

Como entradas de control, estén optimizadas o no sólo hay dos, únicamente se pueden imponer dos veces el número de perturbaciones externas existentes.

Por ello, las especificaciones de esfuerzo de control para regulación se reagrupan imponiendo las siguientes restricciones,

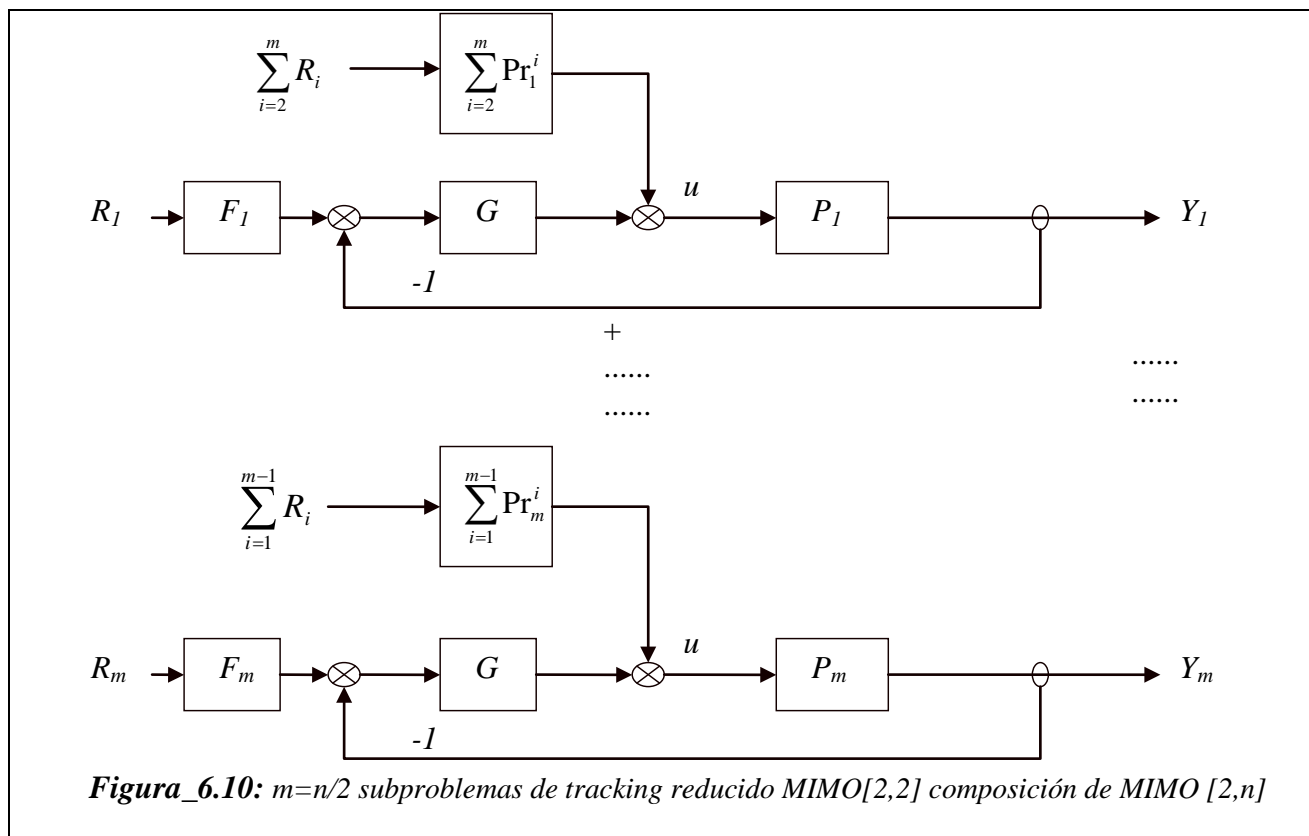
$$\left\{ \begin{array}{l} Wecrm_{11} = \max(Wecri_1) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.157) \\ Wecrm_{12} = \max(Wecri_2) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.158) \\ Wecrm_{21} = \max(Wecri_1) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.159) \\ Wecrm_{22} = \max(Wecri_2) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.160) \end{array} \right.$$

donde las funciones de valor *max* significan elección de la especificación más restrictiva.

Ecuaciones que también hay que tener en cuenta a efectos de sensibilidad.

6.2.2 Problema de Tracking reducido Optimizado

El problema MIMO $[2, n]$ se descompone en *m* subsistemas MIMO $[2,2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.10*. La nomenclatura usada es, compensador $G [2,2]$ diagonal común, prefiltros $F_i [2,2]$ no diagonal especializados en una única planta $P_i [2,2]$ y referencias de entrada para cada *subsistema* $R_1 = (r_1, r_2), \dots, R_m = (r_{n-1}, r_n) .$



donde $\sum_{i=2}^m Pr_1^i = G \sum_{i=2}^m \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right)$ (6.161) ; ; $\sum_{i=1}^{m-1} Pr_m^i = G \sum_{i=1}^{m-1} \left(F_i - \frac{Y_i}{R_i} \right)$ (6.162)

son funciones que describen la contribución, en forma de perturbaciones de entrada, de los demás *subsistemas* sobre el *subsistema* a estudio.

La optimización de las especificaciones de control en términos de seguimiento parte de

considerar la ecuación,
$$u = G \sum_{i=1}^m (F_i R_i - Y_i)$$
 (6.163)

que escrita de manera más conveniente,
$$u = G \sum_{i=1, i \neq k}^m (F_i R_i - Y_i) + G(F_k R_k - Y_k)$$
 (6.164)

donde dentro de los m *subsistemas*, k es un *subsistema* genérico cualquiera.

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} f_{11}r_1 + f_{12}r_2 - y_1 \\ f_{21}r_1 + f_{22}r_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{13}r_3 + f_{14}r_4 - y_3 \\ f_{23}r_3 + f_{24}r_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} f_{1l} - \frac{y_l}{r_l} & f_{1,l+1} \\ f_{2l} & f_{2,l+1} - \frac{y_{l+1}}{r_{l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_l \\ r_{l+1} \end{pmatrix} \right] \quad (6.165)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \left(\sum_{i \neq l}^{impar} (f_{1i}r_i + f_{1,i+1}r_{i+1} - y_i) \right) + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1l}r_l - y_l + f_{1,l+1}r_{l+1} \\ f_{2l}r_l + f_{2,l+1}r_{l+1} - y_{l+1} \end{pmatrix} \quad (6.166)$$

Notación: $\sum_{i \neq l}^{impar} \equiv \sum_{i \neq l} \dots$ con $i=1,3,5,\dots,n-1 \neq l$ y $\sum_{i \neq l}^{par} \equiv \sum_{i \neq l} \dots$ con $i=2,4,6,\dots,n \neq l$, donde $k \equiv [l, l+1]$.

Además, para un *subsistema-k* cualquiera con $k \equiv [l, l+1]$,

$$\begin{pmatrix} y_l \\ y_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1l} & P_{1,l+1} \\ P_{2l} & P_{2,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_{l+1} \end{pmatrix} \quad (6.167)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, se utilizan entradas de control optimizadas u_{x1}^{opt} y u_{x2}^{opt} , manteniendo el esfuerzo de control para seguimiento lo más cerca posible de su valor mínimo ⁴, **las salidas seguirán a sus referencias de entrada** y las especificaciones de esfuerzo de control para tracking, vendrán descritas en general del siguiente modo,

$$\left| Ecs_{ij}^{opt} \right| = \left| \frac{u_l^{opt}}{r_j} \right| \leq We_{cs}_{ij}, \quad \text{con } l \in [1,2,\dots,n] \text{ y } j \in [1,2,\dots,n] \quad (6.168)$$

(1) Para el *subsistema-1*, optimizando para seguimiento las salidas y_1, y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u_1^{opt} + P_{12}u_2^{opt} = r_1 & (6.169) \\ y_2 = P_{21}u_1^{opt} + P_{22}u_2^{opt} = r_2 & (6.170) \end{cases}$$

⁴ u_{x1}^{opt} y u_{x2}^{opt} son u_1 y u_2 , respectivamente, para el *subsistema-x* optimizado (minimizado) para esfuerzos de control de seguimiento.

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_{n-1}^{opt} para r_i con i impar, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado y se elimina en el sumatorio el valor i impar utilizado.

$$|Ecs_{n-1,1}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_1} \right| = \left| g1 \left(f_{11} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,1} \quad (6.184) ; |Ecs_{n-1,2}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_2} \right| = \left| g1 \left(f_{12} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,2} \quad (6.185)$$

.....

$$|Ecs_{n-1,n-1}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_{n-1}} \right| = \left| g1 \left(f_{1,n-1} - 1 - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,n-1} \quad (6.186) ; |Ecs_{n-1,n}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r_n} \right| = \left| g1 \left(f_{1n} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq Wecs_{n-1,n} \quad (6.187)$$

* Usando u_n^{opt} para r_i con i par, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado y se elimina en el sumatorio el valor i par utilizado.

$$|Ecs_{n1}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r_1} \right| = \left| g2 \left(f_{21} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| \leq Wecs_{n1} \quad (6.188) ; \dots ; |Ecs_{nn}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r_n} \right| = \left| g2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq Wecs_{nn} \quad (6.189)$$

Teniendo en cuenta que entradas de control, estén optimizadas o no, sólo hay dos, únicamente se pueden imponer dos veces el número de referencias de entrada existentes.

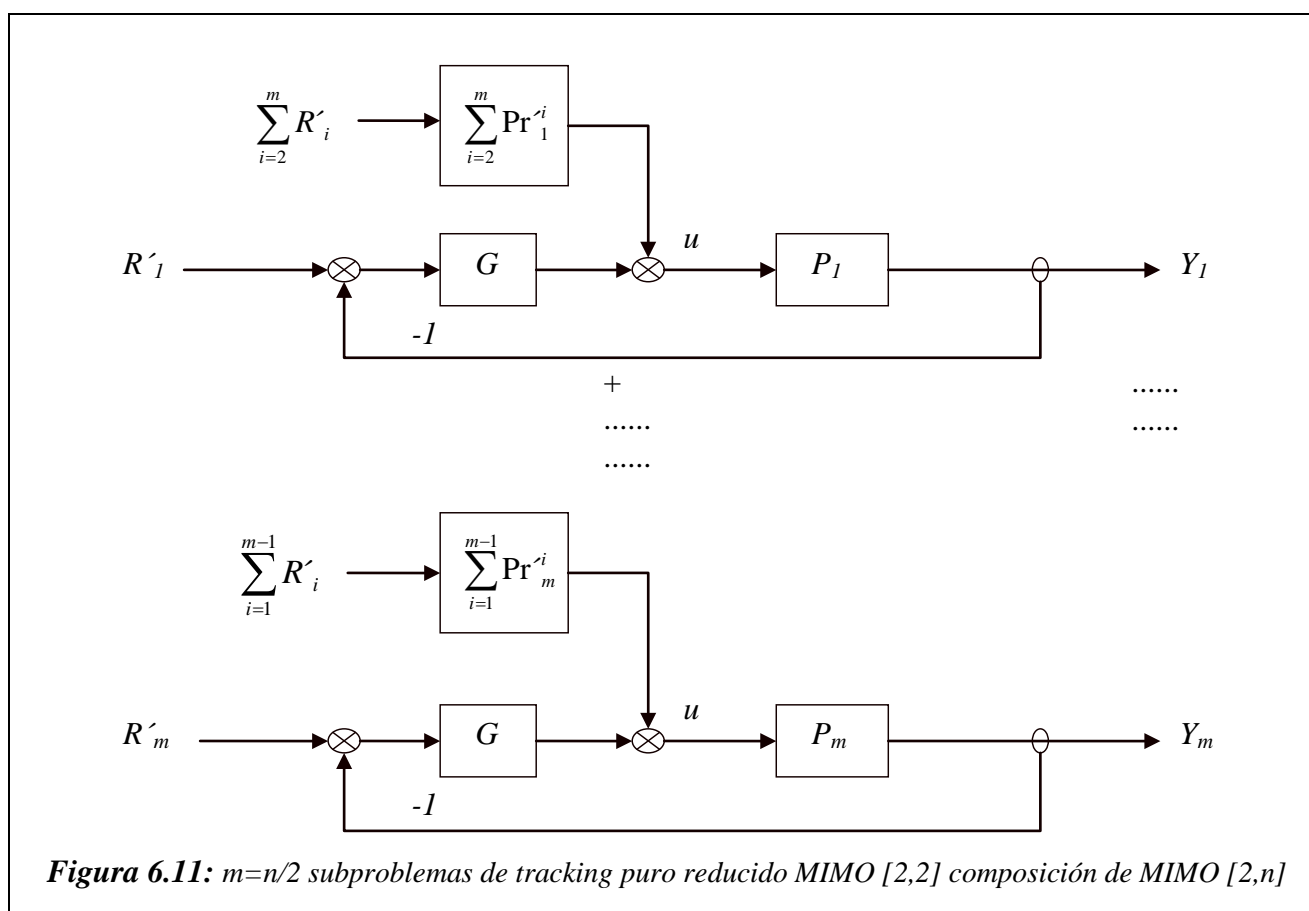
Por ello, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento se reagrupan imponiendo las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} Wecsm_{11} = \max(Wecs_{i1}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.190) \\ Wecsm_{12} = \max(Wecs_{i2}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.191) \\ Wecsm_{13} = \max(Wecs_{i3}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.192) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm_{1n} = \max(Wecs_{in}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.193) \\ Wecsm_{21} = \max(Wecs_{i1}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.194) \\ Wecsm_{22} = \max(Wecs_{i2}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.195) \\ Wecsm_{23} = \max(Wecs_{i3}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.196) \\ \dots\dots\dots \\ Wecsm_{2n} = \max(Wecs_{in}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.197) \end{array} \right.$$

Ecuaciones que también hay que tener en cuenta a efectos de Tracking.

6.2.3 Problema de Tracking Puro reducido Optimizado

El problema MIMO $[2, n]$ propuesto se descompone en m subsistemas MIMO $[2, 2]$, tal y como se describen en la *Figura_6.11*. La nomenclatura usada es, controlador único diagonal $G[2, 2]$, sin prefiltros, planta para cada subsistema $P_i[2, 2]$ y referencias de entrada para cada *subsistema* $R'_1 = (r'_1, r'_2), \dots, R'_m = (r'_{n-1}, r'_n)$.



$$\text{Donde, } \sum_{i=2}^m Pr_1^i = G \sum_{i=2}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) \quad (6.198) \quad ; \dots \dots \dots ; \quad \sum_{i=1}^{m-1} Pr_m^i = G \sum_{i=1}^m \left(I - \frac{Y_i}{R'_i} \right) \quad (6.199)$$

La optimización de las especificaciones de control en términos de seguimiento Puro (sin prefiltros) parte de considerar la ecuación,

$$u = G \sum_{i=1}^m (R'_i - Y_i) \quad (6.200)$$

que escrita de manera más conveniente ,

$$u = G \sum_{i=1, i \neq k}^m (R'_i - Y_i) + G \left(I - \frac{Y_k}{R'_k} \right) R'_k \quad (6.201)$$

donde dentro de los m subsistemas existentes, k es un subsistema cualquiera.

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} r'_1 - y_1 \\ r'_2 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'_3 - y_3 \\ r'_4 - y_4 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 - \frac{y_l}{r'_l} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{y_{l+1}}{r'_{l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_l \\ r'_{l+1} \end{pmatrix} \right] \quad (6.202)$$

que se puede describir también como,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i \neq l}^{impar} (r'_i - y_i) \\ \sum_{i \neq l+1}^{par} (r'_i - y_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g1 & 0 \\ 0 & g2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{y_l}{r'_l} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{y_{l+1}}{r'_{l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_l \\ r'_{l+1} \end{pmatrix} \quad (6.203)$$

Notación: $\sum_{i \neq l}^{impar} \equiv \sum_{i \neq l} \dots$ con $i=1,3,5,\dots,n-1 \neq l$ y $\sum_{i \neq l}^{par} \equiv \sum_{i \neq l} \dots$ con $i=2,4,6,\dots,n \neq l$, donde $k \equiv [l, l+1]$.

Además, para un subsistema- k cualquiera con $k \equiv [l, l+1]$,

$$\begin{pmatrix} y_l \\ y_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1l} & P_{1,l+1} \\ P_{2l} & P_{2,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_{l+1} \end{pmatrix} \quad (6.204)$$

Si el **esfuerzo de control** está **optimizado**, es decir, si se utilizan entradas de control optimizadas u_l^{opt} y u_{l+1}^{opt} ⁵, **las salidas seguirán a sus referencias de entrada** y las especificaciones de esfuerzo de control para tracking sin prefiltros, vendrán descritas en general del siguiente modo,

$$\left| Ecs'_{lj}{}^{opt} \right| = \left| \frac{u_l^{opt}}{r'_j} \right| \leq Wecs'_{lj} \quad , \text{ con } l \in [1,2,\dots,n] \quad \text{ y } j \in [1,2,\dots,n] \quad (6.205)$$

⁵ u_l^{opt} y u_{l+1}^{opt} son u_1 y u_2 , respectivamente, para el subsistema- k optimizado para esfuerzos de control de seguimiento sin prefiltros.

(1) Para el subsistema-1 sin prefiltro, optimizando para seguimiento las salidas y_1, y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u_1^{opt} + P_{12}u_2^{opt} = r'_1 & (6.206) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = P_{21}u_1^{opt} + P_{22}u_2^{opt} = r'_2 & (6.207) \end{cases}$$

$$\text{con } u_1^{opt} = g1 \left[\sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} (r'_i - y_i) \right] \quad (6.208) \quad \text{y} \quad u_2^{opt} = g2 \left[\sum_{i=4}^{n, \text{par}} (r'_i - y_i) \right] \quad (6.209)$$

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_1^{opt} para r_j con j impar y $j \neq 1$ para todo $|Ecs_{1j}^{opt}|$, aparece un "1" dentro del paréntesis del resultado.

$$|Ecs_{11}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_1} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{11} \quad (6.210); \quad |Ecs_{12}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_2} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{12} \quad (6.211)$$

$$|Ecs_{13}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_3} \right| = \left| g1 \left(1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{13} \quad (6.212)$$

.....

$$|Ecs_{1, n-1}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| g1 \left(1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{1, n-1} \quad (6.213); \quad |Ecs_{1n}^{opt}| = \left| \frac{u_1^{opt}}{r'_n} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{1n} \quad (6.214)$$

* Usando u_2^{opt} para r_j con j par y $j \neq 2$ para todo $|Ecs_{2j}^{opt}|$, aparece un "1" dentro del paréntesis del resultado.

$$|Ecs_{21}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_1} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{21} \quad (6.215); \quad |Ecs_{22}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_2} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{22} \quad (6.216)$$

$$|Ecs_{23}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_3} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{23} \quad (6.217); \quad |Ecs_{24}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_4} \right| = \left| g2 \left(1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r'_4} \right) \right| \leq Wecs'_{24} \quad (6.218)$$

.....

$$|Ecs_{2n}^{opt}| = \left| \frac{u_2^{opt}}{r'_n} \right| = \left| g2 \left(1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{2n} \quad (6.219)$$

.....

(m) Para el subsistema-m sin prefiltro, optimizando para seguimiento las salidas y_{n-1}, y_n :

$$\begin{cases} y_{n-1} = P_{1,n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{1n}u_n^{opt} = r'_{n-1} & (6.220) \\ y_n = P_{2,n-1}u_{n-1}^{opt} + P_{2n}u_n^{opt} = r'_n & (6.221) \end{cases}$$

con $u_{n-1}^{opt} = g1 \left[\sum_{i=1}^{n-3,impar} (r'_i - y_i) \right]$ (6.222) y $u_n^{opt} = g2 \left[\sum_{i=2}^{n-2,par} (r'_i - y_i) \right]$ (6.223)

Que proporcionan las siguientes especificaciones de esfuerzo de control,

* Usando u_{n-1}^{opt} para r_j con j impar y $j \neq n-1$ para todo $|Ecs_{n-1,j}^{opt}|$, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado.

$$|Ecs_{n-1,1}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_1} \right| = \left| g1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,1} \text{ (6.224)} ; |Ecs_{n-1,2}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_2} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,2} \text{ (6.225)}$$

$$|Ecs_{n-1,3}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_3} \right| = \left| g1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_3} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,3} \text{ (6.226)} ; |Ecs_{n-1,4}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_4} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_4} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,4} \text{ (6.227)}$$

.....

$$|Ecs_{n-1,n-1}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,n-1} \text{ (6.228)} ; |Ecs_{n-1,n}^{opt}| = \left| \frac{u_{n-1}^{opt}}{r'_n} \right| = \left| g1 \left(- \sum_{i=1}^{n-3,impar} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{n-1,n} \text{ (6.229)}$$

* Usando u_n^{opt} para r_j con j par y $j \neq n$ para todo $|Ecs_{nj}^{opt}|$, aparece un “1” dentro del paréntesis del resultado .

$$|Ecs_{n1}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_1} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_1} \right) \right| \leq Wecs'_{n1} \text{ (6.230)} ; |Ecs_{n2}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_2} \right| = \left| g2 \left(1 - \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_2} \right) \right| \leq Wecs'_{n2} \text{ (6.231)}$$

.....

$$|Ecs_{n,n-1}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_{n-1}} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_{n-1}} \right) \right| \leq Wecs'_{n,n-1} \text{ (6.232)} ; |Ecs_{nm}^{opt}| = \left| \frac{u_n^{opt}}{r'_n} \right| = \left| g2 \left(- \sum_{i=2}^{n-2,par} \frac{y_i}{r'_n} \right) \right| \leq Wecs'_{nm} \text{ (6.233)}$$

Como sólo se pueden imponer dos veces el número de referencias de entrada existentes, las especificaciones de esfuerzo de control para seguimiento puro se reagrupan en las siguientes restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Wecsm}'_{11} = \max(\text{Wecs}'_{i1}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.234) \\ \text{Wecsm}'_{12} = \max(\text{Wecs}'_{i2}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.235) \\ \text{Wecsm}'_{13} = \max(\text{Wecs}'_{i3}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.236) \\ \dots\dots\dots \\ \text{Wecsm}'_{1n} = \max(\text{Wecs}'_{in}) , \text{ con } i = 1,3,5,\dots,n-1 \quad (6.237) \\ \text{Wecsm}'_{21} = \max(\text{Wecs}'_{i1}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.238) \\ \text{Wecsm}'_{22} = \max(\text{Wecs}'_{i2}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.239) \\ \text{Wecsm}'_{23} = \max(\text{Wecs}'_{i3}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.240) \\ \dots\dots\dots \\ \text{Wecsm}'_{2n} = \max(\text{Wecs}'_{in}) , \text{ con } i = 2,4,6,\dots,n \quad (6.241) \end{array} \right.$$

Ecuaciones que también hay que tener en cuenta a efectos de tracking Puro.

6.2.4 Descripción de Especificaciones para el Problema Combinado

Tracking/Regulación reducido optimizando esfuerzo de control

A partir de las ecuaciones definidas para el problema combinado Tracking/Regulación reducido, se obtienen las especificaciones descritas a continuación, usando los desarrollos optimizados propuestos en los apartados 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3.

Sensibilidades:

Definidas por las limitaciones impuestas por $\left| \frac{y_i}{d_j} \right| \leq Wps_{ij}$, con $i=1,\dots,n$ y $j=1,2$. Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.1, en modo IPD⁶,

⁶ Según aplicación de ecuaciones (6.157), (6.158), (6.159) y (6.160)

(1) Subsistema-1 optimizado para regulación,

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{11}| + |q_{12}Pd_{21}| + |q_{12}Wps_{21}| + |Wecr_{11}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{11}Pd_{11}| + |q_{12}Pd_{21}| + |q_{12}Wps_{21}| + |Wecrm_{11}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{11} \quad (6.242)$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{11}Pd_{12}| + |q_{12}Pd_{22}| + |q_{12}Wps_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq Wps_{12} \quad (6.243)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{11}| + |q_{22}^2Pd_{21}| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecr_{11} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{11}| + |q_{22}^2Pd_{21}| + \left| \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecrm_{11} \right|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{21} \quad (6.244)$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{12}| + |q_{22}^2Pd_{22}| + |Wecr_{22}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{21}^2Pd_{12}| + |q_{22}^2Pd_{22}| + |Wecrm_{22}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq Wps_{22} \quad (6.245)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para regulación,

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1,n-1}| + |q_{1n}Pd_{2,n-1}| + |q_{1n}Wps_{n1}| + |Wecr_{n-1,1}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1,n-1}| + |q_{1n}Pd_{2,n-1}| + |q_{1n}Wps_{n1}| + |Wecrm_{11}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq Wps_{n-1,1} \quad (6.246)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{1,n-1}Pd_{1n}| + |q_{1n}Pd_{2n}| + |q_{1n}Wps_{n2}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq Wps_{n-1,2} \quad (6.247)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1,n-1}| + |q_{2n}^2Pd_{2,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} Wecr_{n-1,1} \right|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1,n-1}| + |q_{2n}^2Pd_{2,n-1}| + \left| \frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} Wecrm_{11} \right|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq Wps_{n1} \quad (6.248)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1n}| + |q_{2n}^2Pd_{2n}| + |Wecr_{n2}|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{|q_{2,n-1}^2Pd_{1n}| + |q_{2n}^2Pd_{2n}| + |Wecrm_{22}|}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq Wps_{n2} \quad (6.249)$$

Esfuerzo de Control:

1.En Términos de Regulación. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}^{opt}}{d_j} \right| \leq Wecr_{ij} \leq Wecrm_{kj}$, con

$i=1,2,\dots,n$, $j=1,2$ y $k=1,2$, aunque descritas en función de las sensibilidades definidas anteriormente y, expresadas en modo IPD⁷.

$$|Ecr_{11}| = q_{11}|S_{11}| \leq Wecr_{11} \leq Wecrm_{11} \quad (6.250) \quad ; \quad |Ecr_{12}| = q_{11}|S_{12}| \leq Wecr_{12} \leq Wecrm_{12} \quad (6.251)$$

$$|Ecr_{21}| = q_{22}^2|S_{21}| \leq Wecr_{21} \leq Wecrm_{21} \quad (6.252) \quad ; \quad |Ecr_{22}| = q_{22}^2|S_{22}| \leq Wecr_{22} \leq Wecrm_{22} \quad (6.253)$$

.....

$$|Ecr_{n-1,1}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,1}| \leq Wecr_{n-1,1} \leq Wecrm_{11} \quad (6.254); |Ecr_{n-1,2}| = q_{1,n-1}|S_{n-1,2}| \leq Wecr_{n-1,2} \leq Wecrm_{12} \quad (6.255)$$

$$|Ecr_{n1}| = q_{2n}^2|S_{n1}| \leq Wecr_{n1} \leq Wecrm_{21} \quad (6.256) \quad ; \quad |Ecr_{n2}| = q_{2n}^2|S_{n2}| \leq Wecr_{n2} \leq Wecrm_{22} \quad (6.257)$$

2.En Términos de Seguimiento. Limitaciones impuestas por $\left| \frac{u_{ij}^{opt}}{r'_j} \right| \leq Wecs'_{ij} \leq Wecsm'_{kj}$, con

$i=1,2,\dots,n$, $j=1,\dots,n$ y $k=1,2$, siendo r'_j , referencias de entrada a los subsistemas usados sin prefiltros. Problema solucionado en el apartado 6.2.3, aunque descritas ahora en función de las especificaciones de tracking Puro que se desarrollan posteriormente y, expresadas en modo IPD⁸.

$$|Ecs'_{11}| = q_{11}|T'_{11}| \leq Wecs'_{11} \leq Wecsm'_{11} \quad (6.258); \dots\dots ; |Ecs'_{1n}| = q_{11}|T'_{1n}| \leq Wecs'_{1n} \leq Wecsm'_{1n} \quad (6.259)$$

$$|Ecs'_{21}| = q_{22}^2|T'_{21}| \leq Wecs'_{21} \leq Wecsm'_{21} \quad (6.260); \dots\dots ; |Ecs'_{2n}| = q_{22}^2|T'_{2n}| \leq Wecs'_{2n} \leq Wecsm'_{2n} \quad (6.261)$$

.....

$$|Ecs'_{n-1,1}| = q_{1,n-1}|T'_{n-1,1}| \leq Wecs'_{n-1,1} \leq Wecsm'_{11} \quad (6.262); \dots\dots; |Ecs'_{n-1,n}| = q_{1,n-1}|T'_{n-1,n}| \leq Wecs'_{n-1,n} \leq Wecsm'_{1n} \quad (6.263)$$

$$|Ecs'_{n1}| = q_{2n}^2|T'_{n1}| \leq Wecs'_{n1} \leq Wecsm'_{21} \quad (6.264); \dots\dots ; |Ecs'_{nm}| = q_{2n}^2|T'_{nm}| \leq Wecs'_{nm} \leq Wecsm'_{2n} \quad (6.265)$$

⁷ Se han aplicado también las ecuaciones (6.157), (6.158), (6.159) y (6.160).

⁸ Se han aplicado también las ecuaciones (6.234) a (6.241).

Ecuaciones de Tracking Puro, usadas en Esfuerzo de Control en términos de Seguimiento:

En un problema de tracking usando entradas de referencia r' sobre subsistemas sin prefiltros y aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.3, en modo IPD, se obtiene un comportamiento descrito por las siguientes ecuaciones,

(1) Para el subsistema-1,

$$\text{Con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3,5,7,\dots,n-1 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4,6,8,\dots,n$$

$$y_1 = \frac{g1r'_1 + g1 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (6.266)$$

$$y_2 = \frac{-q_{21}^2 r'_1 + g2r'_2 - q_{21}^2 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) + g2 \sum_{\text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{22}^2 + g2)} \quad (6.267)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los subsistemas 2, 3, ..., hasta alcanzar el m .

(m) Para el subsistema- m ,

$$\text{Con } \sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2$$

$$y_{n-1} = \frac{g1r'_{n-1} + g1 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) - q_{1n}y_n}{(q_{1,n-1} + g1)} \quad (6.268)$$

$$y_n = \frac{-q_{2,n-1}^2 r'_{n-1} + g2r'_n - q_{2,n-1}^2 \sum_{\text{impar}} (r'_i - y_i) + g2 \sum_{\text{par}} (r'_i - y_i)}{(q_{2n}^2 + g2)} \quad (6.269)$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking Puro se pueden describir como se indica a

continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\left| \frac{y_i}{r'_j} \right| \leq \rho_{ij}$, con

$i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$ ⁹,

⁹ Según aplicación de ecuaciones (6.234) a (6.241).

(1) Subsistema-1 optimizado para tracking sin prefiltros,

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T'_{ij}|$ con $ij \equiv (11;21;22)$

$$|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{21}| + |g1| + Wecs'_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{21}| + |g1| + Wecsm'_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{11} \quad (6.270)$$

$$|T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{22}| + Wecs'_{12}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{22}| + Wecsm'_{12}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{12} \quad (6.271)$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left| \frac{Wecs'_{13} + |q_{12}\rho_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{13} + |q_{12}\rho_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{13} \quad (6.272)$$

$$|T'_{14}| = \left| \frac{y_1}{r'_4} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{24}| + Wecs'_{14}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{24}| + Wecsm'_{14}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{14} \quad (6.273)$$

$$|T'_{15}| = \left| \frac{y_1}{r'_5} \right| = \left| \frac{Wecs'_{15} + |q_{12}\rho_{25}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{15} + |q_{12}\rho_{25}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{15} \quad (6.274)$$

$$|T'_{16}| = \left| \frac{y_1}{r'_6} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{26}| + Wecs'_{16}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{26}| + Wecsm'_{16}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{16} \quad (6.275)$$

.....

$$|T'_{1,n-1}| = \left| \frac{y_1}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{Wecs'_{1,n-1} + |q_{12}\rho_{2,n-1}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wecsm'_{1,n-1} + |q_{12}\rho_{2,n-1}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1,n-1} \quad (6.276)$$

$$|T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + Wecs'_{1n}}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{12}\rho_{2n}| + Wecsm'_{1n}}{q_{11} + g1} \right| \leq \rho_{1n} \quad (6.277)$$

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left| \frac{q_{21}^2 + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecs'_{11} + Wecs'_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{q_{21}^2 + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wecsm'_{11} + Wecsm'_{21}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{21} \quad (6.278)$$

$$\left| T'_{22} \right| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecs}'_{12} + |g2| + \text{Wecs}'_{22}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecsm}'_{12} + |g2| + \text{Wecsm}'_{22}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{22} \quad (6.279)$$

$$\left| T'_{23} \right| = \left| \frac{y_2}{r'_3} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecs}'_{13} + \text{Wecs}'_{23}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecsm}'_{13} + \text{Wecsm}'_{23}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{23} \quad (6.280)$$

$$\left| T'_{24} \right| = \left| \frac{y_2}{r'_4} \right| = \left| \frac{\text{Wecs}'_{24} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecs}'_{14}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\text{Wecsm}'_{24} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecsm}'_{14}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{24} \quad (6.281)$$

.....

$$\left| T'_{2,n-1} \right| = \left| \frac{y_2}{r'_{n-1}} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecs}'_{1,n-1} + \text{Wecs}'_{2,n-1}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecsm}'_{1,n-1} + \text{Wecsm}'_{2,n-1}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2,n-1} \quad (6.282)$$

$$\left| T'_{2n} \right| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| \frac{\text{Wecs}'_{2n} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecs}'_{1n}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\text{Wecsm}'_{2n} + \frac{q_{21}}{q_{11} + g1} \text{Wecsm}'_{1n}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \rho_{2n} \quad (6.283)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para tracking sin prefiltros,

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T'_{ij}|$ con $ij \equiv (n-1, n-1; n, n-1; nn)$

$$\left| T'_{n-1,1} \right| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_1} \right| = \left| \frac{|q_{1n} \rho_{n1}| + \text{Wecs}'_{n-1,1}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n} \rho_{n1}| + \text{Wecsm}'_{11}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \rho_{n-1,1} \quad (6.284)$$

$$\left| T'_{n-1,2} \right| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_2} \right| = \left| \frac{|q_{1n} \rho_{n2}| + \text{Wecs}'_{n-1,2}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \left| \frac{|q_{1n} \rho_{n2}| + \text{Wecsm}'_{12}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \rho_{n-1,2} \quad (6.285)$$

.....

$$\boxed{\left|T'_{n-1,n-1}\right| = \left|\frac{y_{n-1}}{r'_{n-1}}\right| = \left|\frac{|q_{1n}\rho_{n,n-1}| + |g1| + \text{Wecs}'_{n-1,n-1}}{q_{1,n-1} + g1}\right| \leq \left|\frac{|q_{1n}\rho_{n,n-1}| + |g1| + \text{Wecsm}'_{1,n-1}}{q_{1,n-1} + g1}\right| \leq \rho_{n-1,n-1}} \quad (6.286)$$

$$\left|T'_{n-1,n}\right| = \left|\frac{y_{n-1}}{r'_n}\right| = \left|\frac{|q_{1n}\rho_{nn}| + \text{Wecs}'_{n-1,n}}{q_{1,n-1} + g1}\right| \leq \left|\frac{|q_{1n}\rho_{nn}| + \text{Wecsm}'_{1n}}{q_{1,n-1} + g1}\right| \leq \rho_{n-1,n} \quad (6.287)$$

.....

$$\left|T'_{n,1}\right| = \left|\frac{y_n}{r'_1}\right| = \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecs}'_{n-1,1}\right| + \text{Wecs}'_{n1}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecsm}'_{11}\right| + \text{Wecsm}'_{21}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \rho_{n,1} \quad (6.288)$$

$$\left|T'_{n,2}\right| = \left|\frac{y_n}{r'_2}\right| = \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecs}'_{n-1,2}\right| + \text{Wecs}'_{n2}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecsm}'_{12}\right| + \text{Wecsm}'_{22}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \rho_{n,2} \quad (6.289)$$

.....

$$\boxed{\left|T'_{n,n-1}\right| = \left|\frac{y_n}{r'_{n-1}}\right| = \left|\frac{|q_{2,n-1}^2| + \left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecs}'_{n-1,n-1}\right| + \text{Wecs}'_{n,n-1}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \left|\frac{|q_{2,n-1}^2| + \left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecsm}'_{1,n-1}\right| + \text{Wecsm}'_{2,n-1}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \rho_{n,n-1}} \quad (6.290)$$

$$\boxed{\left|T'_{mn}\right| = \left|\frac{y_n}{r'_n}\right| = \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecs}'_{n-1,n}\right| + |g2| + \text{Wecs}'_{mn}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \left|\frac{\left|\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \text{Wecsm}'_{1n}\right| + |g2| + \text{Wecsm}'_{2n}}{q_{2n}^2 + g2}\right| \leq \rho_{mn}} \quad (6.291)$$

Tracking: Para determinación de prefiltros. En un problema de tracking/regulación reducido usando entradas de referencia r y aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.2, en modo IPD, se obtiene un comportamiento descrito por las siguientes ecuaciones,

(1) Para Tracking del subsistema-1,

Notación: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 3,5,7,\dots,n-1$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 4,6,8,\dots,n$

$$y_1 = \frac{g1f_{11}r_1 + g1f_{12}r_2 + g1\left(\sum_{\text{impar}}(f_{1i}r_i - y_i) + \sum_{\text{impar}}f_{1,i+1}r_{i+1}\right) - q_{12}y_2}{(q_{11} + g1)} \quad (6.292)$$

$$y_2 = \frac{(-q_{21}^2f_{11} + g2f_{21})r_1 + (-q_{21}^2f_{12} + g2f_{22})r_2 - q_{21}^2\left(\sum_{\text{impar}}(f_{1i}r_i - y_i) + \sum_{\text{impar}}f_{1,i+1}r_{i+1}\right) + g2\left(\sum_{\text{par}}f_{2,i-1}r_{i-1} + \sum_{\text{par}}(f_{2i}r_i - y_i)\right)}{(q_{22}^2 + g2)} \quad (6.293)$$

Se aplica el mismo procedimiento para los subsistemas 2, 3, ..., hasta alcanzar el m.

(m) Para Tracking del subsistema-m,

Notación: $\sum_{\text{impar}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 1,3,5,\dots,n-3$ y $\sum_{\text{par}} \equiv \sum_i \dots \text{con } i = 2,4,6,\dots,n-2$

$$y_{n-1} = \frac{g1f_{1,n-1}r_{n-1} + g1f_{1n}r_n + g1\left(\sum_{\text{impar}}(f_{1i}r_i - y_i) + \sum_{\text{impar}}f_{1,i+1}r_{i+1}\right) - q_{1n}y_n}{(q_{1,n-1} + g1)} \quad (6.294)$$

$$y_n = \frac{(-q_{2,n-1}^2f_{1,n-1} + g2f_{2,n-1})r_{n-1} + (-q_{2,n-1}^2f_{1n} + g2f_{2n})r_n - q_{2,n-1}^2\left(\sum_{\text{impar}}(f_{1i}r_i - y_i) + \sum_{\text{impar}}f_{1,i+1}r_{i+1}\right) + g2\left(\sum_{\text{par}}f_{2,i-1}r_{i-1} + \sum_{\text{par}}(f_{2i}r_i - y_i)\right)}{(q_{2n}^2 + g2)} \quad (6.295)$$

Por tanto, las especificaciones para Tracking se pueden describir como se indica a

continuación, teniendo en cuenta que las limitaciones vienen impuestas por $\alpha_{ij} \left| \frac{y_i}{r_j} \right| \leq \beta_{ij}$,

con $i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,n$ ¹⁰.

¹⁰ Según aplicación de ecuaciones (6.190) a (6.197)

(1) Subsistema-1 optimizado para tracking .

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T_{ij}|$ con $ij \equiv (11;21;22)$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| \frac{|g1| + Wec_{s_{11}} + |q_{12}\beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{|g1| + Wec_{sm_{11}} + |q_{12}\beta_{21}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{11} \quad (6.296)$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| \frac{Wec_{s_{12}} + |q_{12}\beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wec_{sm_{12}} + |q_{12}\beta_{22}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{12} \quad (6.297)$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| = \left| \frac{y_1}{r_3} \right| = \left| \frac{Wec_{s_{13}} + |q_{12}\beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wec_{sm_{13}} + |q_{12}\beta_{23}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{13} \quad (6.298)$$

.....

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r_n} \right| = \left| \frac{Wec_{s_{1n}} + |q_{12}\beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wec_{sm_{1n}} + |q_{12}\beta_{2n}|}{q_{11} + g1} \right| \leq \beta_{1n} \quad (6.299)$$

$$\alpha_{21} \leq |T_{21}| = \left| \frac{y_2}{r_1} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wec_{s_{11}} + |g1|) + Wec_{s_{21}}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} (Wec_{sm_{11}} + |g1|) + Wec_{sm_{21}}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{21} \quad (6.300)$$

$$\alpha_{22} \leq |T_{22}| = \left| \frac{y_2}{r_2} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wec_{s_{12}} + Wec_{s_{22}} + |g2|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wec_{sm_{12}} + Wec_{sm_{22}} + |g2|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{22} \quad (6.301)$$

$$\alpha_{23} \leq |T_{23}| = \left| \frac{y_2}{r_3} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wec_{s_{13}} + Wec_{s_{23}}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} Wec_{sm_{13}} + Wec_{sm_{23}}}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{23} \quad (6.302)$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r_n} \right| = \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec s_{1n} + Wec s_{2n}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \left| \frac{\frac{q_{21}}{q_{11} + g1} |Wec s_{m_{1n}} + Wec s_{m_{2n}}|}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq \beta_{2n} \quad (6.303)$$

.....

(m) Subsistema-m optimizado para tracking .

* Observar cómo difiere la forma matemática del resultado en las ecuaciones de $|T_{ij}|$ con $ij \equiv (n-1, n-1; n, n-1; nn)$

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_1} \right| = \left| \frac{Wec s_{n-1,1} + |q_{1n} \beta_{n1}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \left| \frac{Wec s_{m_{11}} + |q_{1n} \beta_{n1}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \beta_{n-1,1} \quad (6.304)$$

.....

$\alpha_{n-1,n-1} \leq T_{n-1,n-1} = \left \frac{y_{n-1}}{r_{n-1}} \right = \left \frac{ g1 + Wec s_{n-1,n-1} + q_{1n} \beta_{n,n-1} }{q_{1,n-1} + g1} \right \leq \left \frac{ g1 + Wec s_{m_{1,n-1}} + q_{1n} \beta_{n,n-1} }{q_{1,n-1} + g1} \right \leq \beta_{n-1,n-1}$
--

(6.305)

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| \frac{Wec s_{n-1,n} + |q_{1n} \beta_{nn}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| \frac{Wec s_{m_{1n}} + |q_{1n} \beta_{nn}|}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq \beta_{n-1,n} \quad (6.306)$$

.....

$\alpha_{n,n-1} \leq T_{n,n-1} = \left \frac{y_n}{r_{n-1}} \right = \left \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} (Wec s_{n-1,n-1} + g1) + Wec s_{n,n-1}}{q_{2n}^2 + g2} \right \leq \left \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} (Wec s_{m_{1,n-1}} + g1) + Wec s_{m_{2,n-1}}}{q_{2n}^2 + g2} \right \leq \beta_{n,n-1}$
--

(6.307)

$\alpha_{nn} \leq T_{nn} = \left \frac{y_n}{r_n} \right = \left \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} Wec s_{n-1,n} + Wec s_{nn} + g2 }{q_{2n}^2 + g2} \right \leq \left \frac{\frac{q_{2,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} Wec s_{m_{1n}} + Wec s_{m_{2n}} + g2 }{q_{2n}^2 + g2} \right \leq \beta_{nn}$
--

(6.308)

Estabilidad Robusta: Viene descrita por las limitaciones impuestas dentro de cada

subsistema a cada uno de los lazos cerrados con plantas equivalentes $\frac{1}{q_{1i}}$ y $\frac{1}{q_{2j}^2}$, con

$i=1,3, \dots, n-1$ y $j=2,4,\dots,n$, y controladores g_1 y g_2 , respectivamente, todos ellos estables.

Tales limitaciones se denotan por $|Te_{ij}| \leq We_k$, con $i=1,2$, $j=1,\dots,n$ y $k=1, \dots,n$, dando lugar a,

$$|Te_{11}| = |Te_{12}| = \left| \frac{q_{11}}{q_{11} + g1} \right| \leq We_1 \quad (6.309) \quad ; \quad |Te_{21}| = |Te_{22}| = \left| \frac{q_{22}^2}{q_{22}^2 + g2} \right| \leq We_2 \quad (6.310)$$

$$|Te_{13}| = |Te_{14}| = \left| \frac{q_{13}}{q_{13} + g1} \right| \leq We_3 \quad (6.311) \quad ; \quad |Te_{23}| = |Te_{24}| = \left| \frac{q_{24}^2}{q_{24}^2 + g2} \right| \leq We_4 \quad (6.312)$$

.....

$$|Te_{1,n-1}| = |Te_{1n}| = \left| \frac{q_{1,n-1}}{q_{1,n-1} + g1} \right| \leq We_{n-1} \quad (6.313) \quad ; \quad |Te_{2,n-1}| = |Te_{2n}| = \left| \frac{q_{2n}^2}{q_{2n}^2 + g2} \right| \leq We_n \quad (6.314)$$

6.2.5 Resumen del Procedimiento “Squaring-up” reducido *Optimizando el Esfuerzo de Control*

Problema de Tracking

La descripción resumen siguiente se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control optimizadas, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso. Para un *subsistema-j* genérico cualquiera, a efectos de tracking reducido optimizado, se tiene la descripción dada en la *Tabla_6.3*.

Tabla_6.3: Descripción de entradas de control en problema de Tracking reducido Optimizado

Procedimiento de Compensación Optimizada	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,2] y prefiltro No diagonal [2,n]	$u_j^{opt} = G(F_j R_j - R_j) + G \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_i - \beta_i)$	1	1

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera con $j=[x,x+1]$, las entradas de control optimizadas se descomponen del siguiente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^{opt} = g1 \left[f_{1x} r_x - r_x + f_{1,x+1} r_{x+1} + \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} (f_{1i} r_i + f_{1,i+1} r_{i+1} - r_i \beta_{ii}) \right] \\ u_{x+1}^{opt} = g2 \left[f_{2x} r_x + f_{2,x+1} r_{x+1} - r_{x+1} + \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} (f_{2,i-1} r_{i-1} + f_{2i} r_i - r_i \beta_{ii}) \right] \end{array} \right. \quad (6.315)$$

1. Término de Acoplo $\equiv G(F_j R_j - R_j)$

$$\text{Acoplo } (u_x^{opt}) = g1 [f_{1x} r_x - r_x + f_{1,x+1} r_{x+1}] \quad (6.317)$$

$$\text{Acoplo } (u_{x+1}^{opt}) = g2 [f_{2x} r_x + f_{2,x+1} r_{x+1} - r_{x+1}] \quad (6.318)$$

2. Término de Desacoplo $\equiv G \sum_{i=1, i \neq j}^m R_i (F_i - \beta_i)$

$$\text{Desacoplo } (u_x^{opt}) = g1 \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} (f_{1i} r_i + f_{1,i+1} r_{i+1} - r_i \beta_{ii}) \quad (6.319)$$

$$\text{Desacoplo } (u_{x+1}^{opt}) = g2 \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} (f_{2,i-1} r_{i-1} + f_{2i} r_i - r_i \beta_{ii}) \quad (6.320)$$

Problema de Regulación

La descripción se va a llevar a cabo estudiando la descomposición que cada procedimiento hace de las entradas de control, en donde se va a ver el tipo de términos para acoplo/desacoplo utilizados en cada caso. Para un *subsistema-j* cualquiera, a efectos de regulación reducida optimizada, se tiene la descripción dada en la *Tabla_6.4*.

Tabla_6.4: Descripción de entradas de control en problema de Regulación reducido Optimizado

Procedimiento de Compensación Optimizada	Descripción Entradas de Control	Nº de Términos de Acoplo	Nº de Términos de Desacoplo
controlador diagonal [2,n]	$u_j^{opt} = -Gd \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i$	0	1

Para el estudio de un *subsistema-j* cualquiera con $j=[x,x+1]$, las entradas de control se descomponen del siguiente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^{opt} = -g1d_1 \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \\ u_{x+1}^{opt} = -g2d_2 \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \end{array} \right. \quad (6.321)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x^{opt} = -g1d_1 \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \\ u_{x+1}^{opt} = -g2d_2 \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \end{array} \right\} \quad (6.322)$$

1. Término de Acoplo $\equiv 0$

$$\text{Acoplo } (u_x^{opt}) = 0 \quad (6.323)$$

$$\text{Acoplo } (u_{x+1}^{opt}) = 0 \quad (6.324)$$

2. Término de Desacoplo $\equiv -Gd \sum_{i=1, i \neq j}^m Wps_i$

$$\text{Desacoplo } (u_x^{opt}) = -g1d_1 \sum_{i=1, i \neq x}^{n-1, impar} Wps_{i1} \quad (6.325)$$

$$\text{Desacoplo } (u_{x+1}^{opt}) = -g2d_2 \sum_{i=2, i \neq x+1}^{n, par} Wps_{i2} \quad (6.326)$$

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_6.1: Problema de regulación reducido $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	250
Figura_6.2: $m=n/2$ subproblemas de regulación reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	251
Figura_6.3: Problema de tracking reducido $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	255
Figura_6.4: $m=n/2$ subproblemas de tracking reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	256
Figura_6.5: Problema de tracking/regulación reducido $[2,n]$ agrupado por subsistemas cuadrados $[2,2]$	261
Figura_6.6: $m=n/2$ subproblemas tracking/regulación reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	261
Figura_6.7: Grado de Acoplo/desacoplo de referencias/salidas (Tracking).....	272
Figura_6.8: Grado de Acoplo/desacoplo de perturbaciones/salidas (Regulación) ..	273
Figura_6.9: $m=n/2$ subproblemas de regulación reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	275
Figura_6.10: $m=n/2$ subproblemas de tracking reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	278
Figura_6.11: $m=n/2$ subproblemas de tracking puro reducido MIMO $[2,2]$ composición de MIMO $[2,n]$	282

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_6.1: Descripción de entradas de control en problema de Tracking reducido	272
Tabla_6.2: Descripción de entradas de control en problema de Regulación reducido	273
Tabla_6.3: Descripción de entradas de control en problema de Tracking reducido Optimizado	296
Tabla_6.4: Descripción de entradas de control en problema de Regulación reducido Optimizado	297

CAPÍTULO 7

Reducción del orden de Funciones de Transferencia

RESUMEN

En el diseño de sistemas de control y, en particular sobre vehículos aéreos, es habitual tener que trabajar con modelos matemáticos de orden alto. QFT es una técnica de control que permite hacerlo, aunque da lugar a compensadores (controlador y prefiltros) de orden también elevado. Son evidentes los problemas reales de implementación de tales controladores, en ocasiones inviables. Existen dos soluciones: intentar reducir el orden de la planta original para conseguir controladores de orden bajo; o bien, reducir los controladores solución de orden alto, obtenidos a partir de la planta original. En cualquier caso, las funciones reducidas deben mostrar un comportamiento parecido al de las originales, para considerarlas válidas: plantas reducidas cumplirán las especificaciones de diseño de igual modo que la planta original y controladores reducidos deben mantener estabilidad y control con el mismo grado que el compensador original.

CONTENIDOS

7.1 Reducción del Orden de la Función de Transferencia Original.

7.2 Procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros en la FT Original.

7.3 Ejemplo1 aplicación del procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros.

7.4 Ejemplo2 aplicación del procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros.

7.1 Reducción del Orden de la Función de Transferencia Original.

Las metodologías de control que permiten trabajar con modelos matemáticos de orden elevado, como QFT, producen compensadores (controlador y prefiltros) de orden también alto, cuya implementación resulta complicada, incluso en ocasiones imposible. Si se consigue reducir el orden de la planta original previo a la etapa de diseño, se obtendrán controladores de orden más bajo. Otra solución posible consiste en diseñar compensadores a partir de la planta original de orden alto e intentar, posteriormente, reducir éstos.

En cualquier caso, las funciones reducidas deben de mostrar un comportamiento similar a las originales, para considerarlas válidas. Es decir, las plantas reducidas cumplirán las especificaciones de diseño del mismo modo que la planta original y los controladores reducidos deben mantener el mismo grado de estabilidad y control que el compensador original.

Se trata de conseguir, dada una función de transferencia en forma polinómica NUM/DEN, es decir, descrita como,

$$\frac{NUM(s)}{DEN(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} \quad (7.1)$$

reducir su número de polos y de ceros de forma que,

1. La función tenga la forma más parecida posible a la original en el *Diagrama de Nichols (DN)*, de manera que su comportamiento dinámico siga siendo el mismo.
2. La función, planta o controlador, siga manteniendo su estabilidad. Para ello,
 - $m \leq n$. Más polos que ceros
 - No RHP polos ni ceros.
 - No polos en cero.
 - La función no cruza el 2º cuadrante del *DN* o lo hace cumpliendo condiciones de estabilidad condicional [Yaniv, 99].

Observar que la Función de Transferencia original a reducir puede representar el modelo matemático de un sistema (planta) o un compensador (controlador o prefiltro). En ambos casos, se parte de una función de orden alto, cuya implementación puede no ser viable o bien generadora de problemas computacionales. En cualquier caso, interesa obtener un orden de implementación bajo, aunque la función de transferencia reducida debe comportarse de forma similar a como lo hace la función original:

- para planta reducida, debe cumplir las especificaciones de diseño como la planta original;
- para compensadores reducidos, la función debe mantener estabilidad y control con el mismo grado que el compensador original.

En el problema QFT elegido y, como la técnica lo permite, a efectos de no perder precisión se va a trabajar con las plantas originales y el procedimiento de reducción aquí presentado se va a aplicar sólo sobre los compensadores obtenidos en el proceso final de diseño.

Además, la reducción no es viable aplicarla sobre la planta original del problema dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil, ya que se va a trabajar con 881 escenarios de vuelo distintos, cada uno de ellos descrito por 2x8 FTs para la planta, más 2x8 FTs para la planta de perturbaciones. El número total de FTs a reducir uno a uno sería de 28192, lo cual resulta impracticable. En general, en problemas de control con elevada incertidumbre la reducción no es posible sobre la planta original.

Se ha desarrollado un programa en matlab ("RACW.M") de racionalización de las funciones de transferencia a reducir que, aunque se puede aplicar tanto sobre plantas como compensadores, se va a particularizar en compensadores de modelos con incertidumbre elevada.

Se va a utilizar el siguiente procedimiento, dependiendo del tipo de compensador obtenido en el proceso de diseño QFT a reducir:

- Para determinación de funciones reducidas de compensadores g :

1. Inicialmente los parámetros de ajuste numerador $nc0$ y denominador $dc0$ de g se eligen asignándoles la unidad. $nc0 = 1$, $dc0 = 1$.
2. Ajuste y obtención del controlador original g con la *IDE de QFT*.
3. Grabar el resultado en la forma "*g.shp*".
4. Cambiar los parámetros de ajuste $nc0$, $dc0$ de g , tal que $[nc0, dc0] = \text{getqft}('g.shp')$.
5. Abrir la *IDE* y grabar g en forma compleja, $g = \text{freqcp}(nc0, dc0, w)$.
6. Llamar al programa de racionalización de la función g , del siguiente modo:

$$[nc0, dc0] = \text{racw}(g, w, n, m) , \text{ donde } m \text{ es el n}^\circ \text{ de ceros y } n \text{ el n}^\circ \text{ de polos.}$$

Probar distintos valores de m y n (siempre con $m \leq n$), hasta que el error de fase y el error de magnitud siendo mínimos, den lugar a unos números de polos y ceros lo más pequeños posible.

7. Grabar en formato *.mat* los resultados, es decir, "*save g nc0 dc0 w*"
8. Desde el programa *MIMO* desarrollado, llamar a la función con este último formato, esto es, "*load g.mat* "

- Para determinación de funciones reducidas de prefiltros F :

1. Inicialmente los parámetros de ajuste numerador $nf0$ y denominador $df0$ de F se eligen asignándoles la unidad. $nf0 = \text{ones}(1, l)$, $df0 = \text{ones}(1, l)$ con $l = \text{length}(w)$.
2. Ajuste y obtención del prefiltro original F con la *IDE de QFT*.
3. Grabar el resultado en la forma "*F.shp*".
4. Cambiar los parámetros de ajuste $nf0$, $df0$ de F , tal que $[nf0, df0] = \text{getqft}('F.shp')$.

5. Abrir la *IDE* y grabar F en forma compleja, $F = freqcp(nf0, df0, w)$.
6. Llamar al programa de racionalización de la función F , del siguiente modo:

$$[nf0, df0] = racw(F, w, n, m), \text{ donde } m \text{ es el n}^\circ \text{ de ceros y } n \text{ el n}^\circ \text{ de polos.}$$

Probar distintos valores de m y n (siempre con $m \leq n$), hasta que el error de fase y el error de magnitud siendo mínimos, den lugar a unos números de polos y ceros lo más pequeños posible.

7. Grabar en formato *.mat* los resultados, es decir, “*save F nf0 df0 w*”
8. En el programa *MIMO* desarrollado, llamar a la función desde este último formato, esto es, “*load F.mat*”

7.2 Procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros en la FT Original.

La *IDE* de la Toolbox QFT diseñada por Borghesani, Chait y Yaniv [Borghesani et al., 95], [Borghesani et al., 03] permite trabajar con plantas de orden elevado, aunque habitualmente esto supone diseño de controladores y prefiltros también de orden alto.

Esta *IDE* permite añadir elementos de diseño típicos para obtener la FT en lazo abierto del sistema de control como, polo real o complejo, cero real o complejo, supersistema de 2º orden 2/2, integrador o diferenciador, ‘lead’ o ‘lag’, ‘notch’ o ‘lead’ complejo. Sin embargo, no ofrece como resultado la FT en lazo abierto diseñada en formato polinómico numerador/denominador, sino exclusivamente en forma compleja para el rango frecuencial de trabajo.

Esta fue la razón inicial para el desarrollo del programa RACW.M. Se trata de conseguir una FT polinómica en formato numerador/denominador de comportamiento lo más parecido posible al de la FT dada en forma compleja, dentro de un rango de frecuencias concreto.

Cuando hablamos de comportamiento parecido entre dos FTs en dos formatos diferentes, nos referimos a que ambas deben tener una apariencia similar en el DN, con magnitudes y fases para mismas frecuencias lo más parecidas posible. Con ello nos aseguramos que ambas FTs cumplirán las especificaciones de diseño de forma similar.

Con la función RACW.M, aplicando un proceso de RACionalización como el descrito por [Horowitz, 92], se consigue trabajar con entrada compleja y salida la función de transferencia (numer/denom) correspondiente, según el vector frecuencia w suministrado. Pero además permite decidir el orden de las funciones de salida, ajustando el número de polos y ceros que puedan contener. Dependiendo del orden de la FT de salida seleccionado, así será la diferencia en magnitud y fase para cada frecuencia dentro del rango utilizado, entre la salida y la entrada. Por tanto, seleccionando diferentes ordenes de salida y observando las diferencias en magnitud y fase se puede conseguir reducir el orden de la función hasta un valor en donde estas diferencias no sean excesivamente elevadas, lo que implica un comportamiento de FTs de entrada y salida parecido en el DN.

El programa RACW.M se describe técnicamente del siguiente modo:

function [numer,denom,er]=racw(c, w, n, m)

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- c : vector [N,1], función compleja de entrada.
- w : vector [N,1], rango de frecuencias.
- n y m : n^0 de polos y de ceros, respectivamente, para la función de transferencia buscada (numer/denom).

La relación entre la FT buscada y el vector $c(s)$ de entrada sería:

$$\frac{\text{numer}}{\text{denom}} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_m s^m} = c(s) \quad (7.2)$$

Que se puede describir como:

$$\left[a_0 + a_1 s + \dots + a_{m-1} s^{m-1} \right] - \frac{1}{c} \left[b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n \right] = -a_m s^m \quad (7.3)$$

A partir de la función de N números complejos $c(s)$ de entrada, valor de la FT para cada frecuencia w ($s=iw$), se desarrollan N ecuaciones sustituyendo en (7.3). Aplicando el proceso de racionalización descrito por [Horowitz, 92] se obtienen valores para los m coeficientes a_i y n coeficientes b_i .

Por último, realizando una valoración polinómica de la FT con los coeficientes a_i y b_i obtenidos, se compara en magnitud y en fase con el valor de la FT compleja $c(s)$ original, dando lugar a los errores de magnitud y fase del proceso.

7.3 Ejemplo1 aplicación del procedimiento de reducción del número de polos y ceros.

Vamos a elegir una FT arbitraria para aplicar el procedimiento de reducción del número de polos y ceros sobre ella. Por ejemplo, si partimos de la función siguiente,

$$g = \frac{3s^7 + 4s^6 + 5s^5 + 6s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 9s + 20}{5s^{11} + 4s^{10} + 2s^9 + 25s^8 + 0.5s^7 + 7s^6 + 10s^5 + 21s^4 + 34s^3 + 101s^2 + 2s + 28} \quad (7.4)$$

De orden (7,11), es decir, 7 ceros y 11 polos.

Y pretendemos buscar la FT reducida equivalente g_r , asociada a un rango de frecuencias w concreto elegido también arbitrariamente, esto es,

$$w = (0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 10, 30) \text{ rad/s} \quad (7.5)$$

Utilizando el programa *racw.m* en Matlab, con el formato dado por la expresión,

$$[n_r, d_r] = \text{racw}(g, w, n, m) \quad (7.6)$$

Siendo n y m valores de prueba del número de polos y de ceros de la FT g_r descrita polinómicamente por el numerador n_r y el denominador d_r . Se trata de encontrar los valores n y m tal que,

- $m \leq n$. Más polos que ceros
- No RHP polos ni ceros.
- No polos en cero.
- Menor número de polos y de ceros de la función g_r reducida que la función g original.
- Error de magnitud y error de fase lo más pequeño posible, dentro del intervalo de frecuencias w prefijado.
- Comportamiento parecido en el DN de ambas funciones g y g_r , para el rango de frecuencias w prefijado.

Las FTs obtenidas con el programa *racw.m* que mejor se adaptan a las condiciones anteriores son las siguientes:

$$g_{r1} = \frac{0.5845s^4 + 0.6673s^3 + 2.3719s^2 + 1.0842s + 2.5384}{s^8 + 0.5858s^7 + 5.3012s^6 + 2.9311s^5 + 16.0379s^4 + 4.7042s^3 + 17.4879s^2 + 0.3844s + 3.8968} \quad (7.7)$$

De orden (4,8), es decir, 4 ceros y 8 polos.

$$g_{r2} = \frac{0.5862s^3 + 0.72573s^2 + 0.9128s + 1.42}{s^7 + 0.7064s^6 + 2.4622s^5 + 7.1467s^4 + 3.5523s^3 + 10.5114s^2 + 0.3866s + 2.4941} \quad (7.8)$$

De orden (3,7), es decir, 3 ceros y 7 polos.

Inicialmente, las funciones g_{r1} y g_{r2} obtenidas con *racw.m* son de orden (6,8) y (5,7), respectivamente. Se han podido reducir todavía más a ordenes (4,8) y (3,7), debido a la supresión de polos insignificantes.

Los errores de magnitud y de fase para cada una de estas FTs reducidas respecto de la FT original y para el rango de frecuencias prefijado, se especifican formalmente en las tablas 7.1 y 7.2 a continuación.

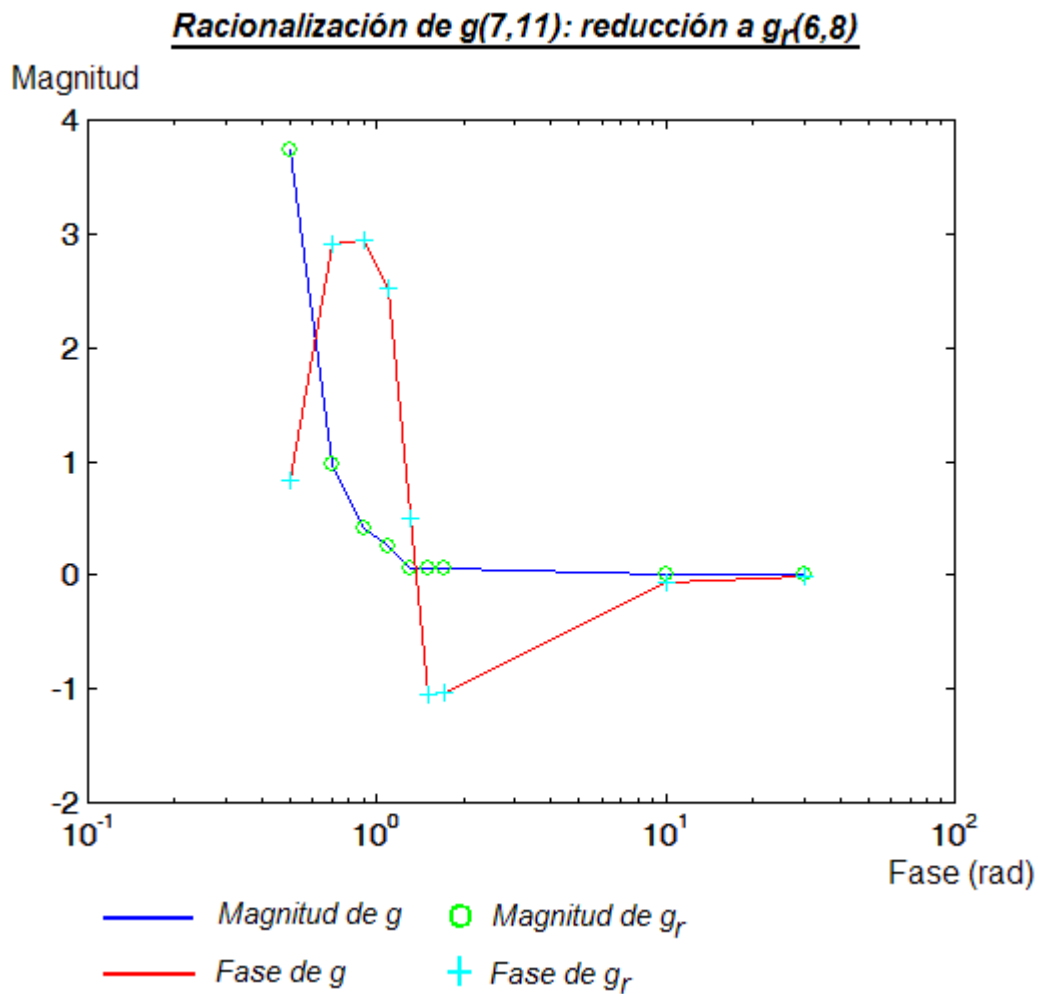
Por otro lado, estos mismos errores de magnitud y de fase para las FTs reducidas g_{r1} y g_{r2} , se describen gráficamente en las figuras 7.1 y 7.2 siguientes.

Tabla 7.1: Características de la FT reducida g_{r1} , respecto de g en el rango de frecuencias w

$w(\text{rad/s})$	$C(\text{in})$ <i>original</i>	$C(\text{out})$ <i>reducida</i>	<u>Error Magnitud</u> $c(\text{in})-c(\text{out})$	<u>Error Fase</u> $\text{Fase}[c(\text{in})]-\text{Fase}[c(\text{out})]$
0.5	2.5204+2.7595i	2.5203+2.7595i	0.0001	-0.0005
0.7	-0.9447+0.2302i	-0.9436+0.2301i	0.0010	0.0075
0.9	-0.4031+0.0811i	-0.4065+0.0818i	0.0035	0.0051
1.1	-0.2012+ 0.1454i	-0.1991+0.1412i	0.0047	-0.5292
1.3	0.0451 + 0.0268i	0.0483+0.0259i	0.0033	2.5148
1.5	0.0288 - 0.0501i	0.0283-0.0491i	0.0011	-0.0138
1.7	0.0269 - 0.0447i	0.0269-0.0448i	0.0001	0.0091
10	0.0001 - 0.0000i	0.0001-0.0000i	0.0000	0.0000
30	0.0000 - 0.0000i	0.0000-0.0000i	0.0000	0.0000

Tabla 7.2: Características de la FT reducida g_{r2} , respecto de g en el rango de frecuencias w

w <i>(rad/s)</i>	$C(\text{in})$ <i>original</i>	$C(\text{out})$ <i>reducida</i>	<u>Error Magnitud</u> $c(\text{in})-c(\text{out})$	<u>Error Fase</u> $\text{Fase}[c(\text{in})]-\text{Fase}[c(\text{out})]$
0.5	2.5204+2.7595i	2.4521+2.7443i	0.0699	-0.6240
0.7	-0.9447+0.2302i	-0.9521+0.1455i	0.0850	-5.0050
0.9	-0.4031+0.0811i	-0.4250+0.0844i	0.0221	-0.1452
1.1	-0.2012+0.1454i	-0.1696+0.1619i	0.0356	7.8025
1.3	0.0451+0.0268i	0.0346+0.0301i	0.0110	-10.3227
1.5	0.0288-0.0501i	0.0310-0.0438i	0.0066	-5.3730
1.7	0.0269-0.0447i	0.0275-0.0474i	0.0028	0.8786
10	0.0001-0.0000i	0.0001-0.0000i	0.0000	0.0000
30	0.0000-0.0000i	0.0000-0.0000i	0.0000	0.0000



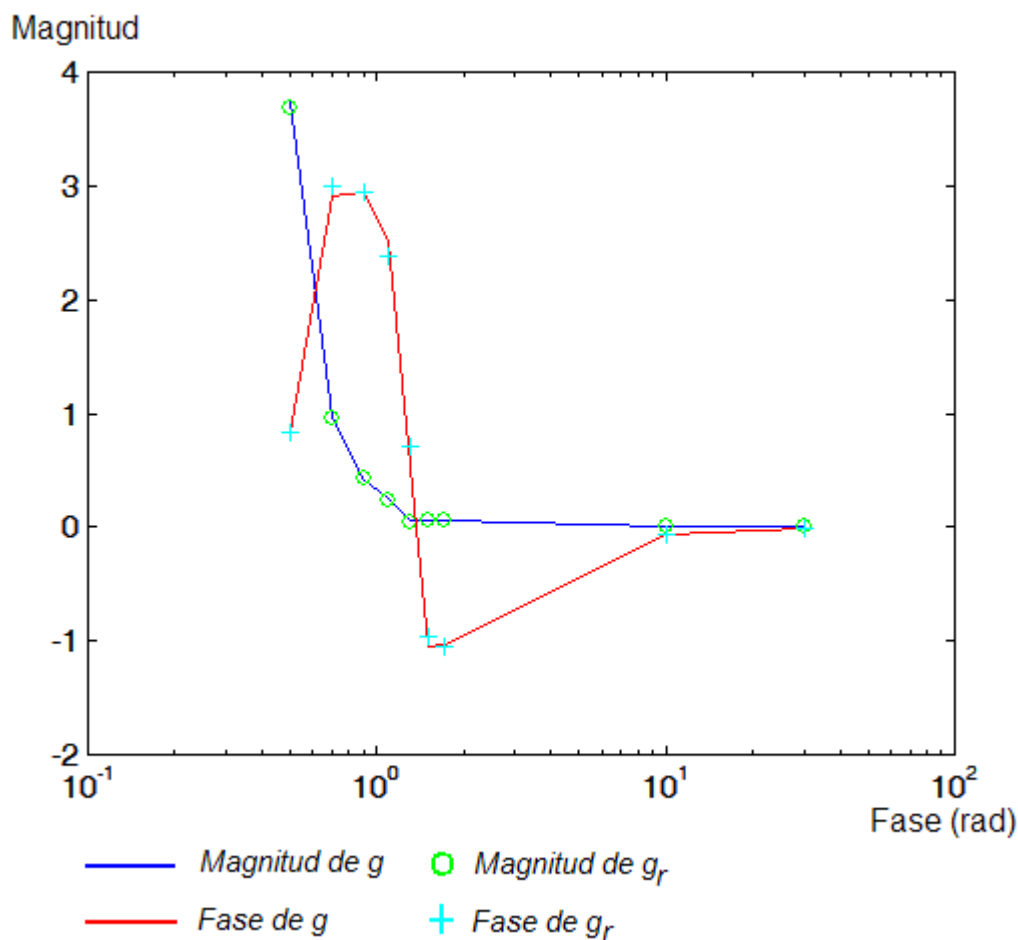
Figura_7.1 : Características gráficas de $g_r(6,8)$ aplicando $RACW(g,w,11,7)$

Se puede observar que los errores de magnitud y de fase obtenidos para g_{r1} y g_{r2} respecto de la FT original, dentro de todo el margen de frecuencia w , son suficientemente pequeños como para considerar adecuadas, en este sentido, las FTs reducidas.

Por último, es necesario comprobar el grado de comportamiento parecido entre las FTs reducidas y la FT original en el DN. Para ello, comparamos gráficamente las tres FTs entre sí, representándolas por separado y para el mismo rango de frecuencias w en el DN.

Los resultados obtenidos se pueden ver en las figuras 7.3, 7.4 y 7.5, a continuación.

Racionalización de $g(7,11)$: reducción a $g_r(5,7)$



Figura_7.2 : Características gráficas de $g_r(5,7)$ aplicando $RACW(g,w,11,7)$

En la *Figura_7.3* se describe el comportamiento de la función original $g(7,11)$ en w , mientras que en las figuras 7.4 y 7.5, se describe el comportamiento de las funciones reducidas $g_{r1}(4,8)$ y $g_{r2}(3,7)$ en w , respectivamente.

Puede verse que los resultados obtenidos son muy parecidos, tanto en magnitud, como en fase, por lo que se concluye que ambas FTs reducidas son equivalentes válidas respecto de la FT original en w .

Nichols Chart de la función $g(7,11)$ en el rango de frecuencias w (rad/s)

Magnitude (dB)

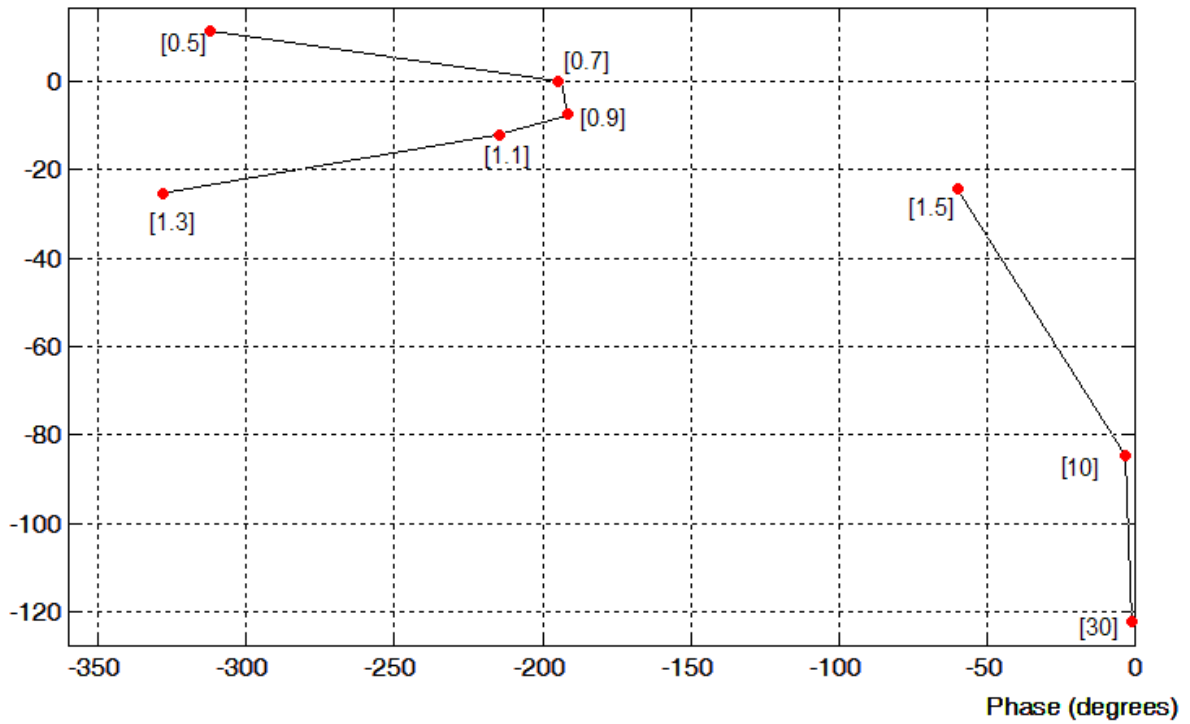


Figura 7.3 : Comportamiento de la función original $g(7,11)$ en el NC para el rango w

Nichols Chart de la función $g_r(4,8)$ en el rango de frecuencias w (rad/s)

Magnitude (dB)

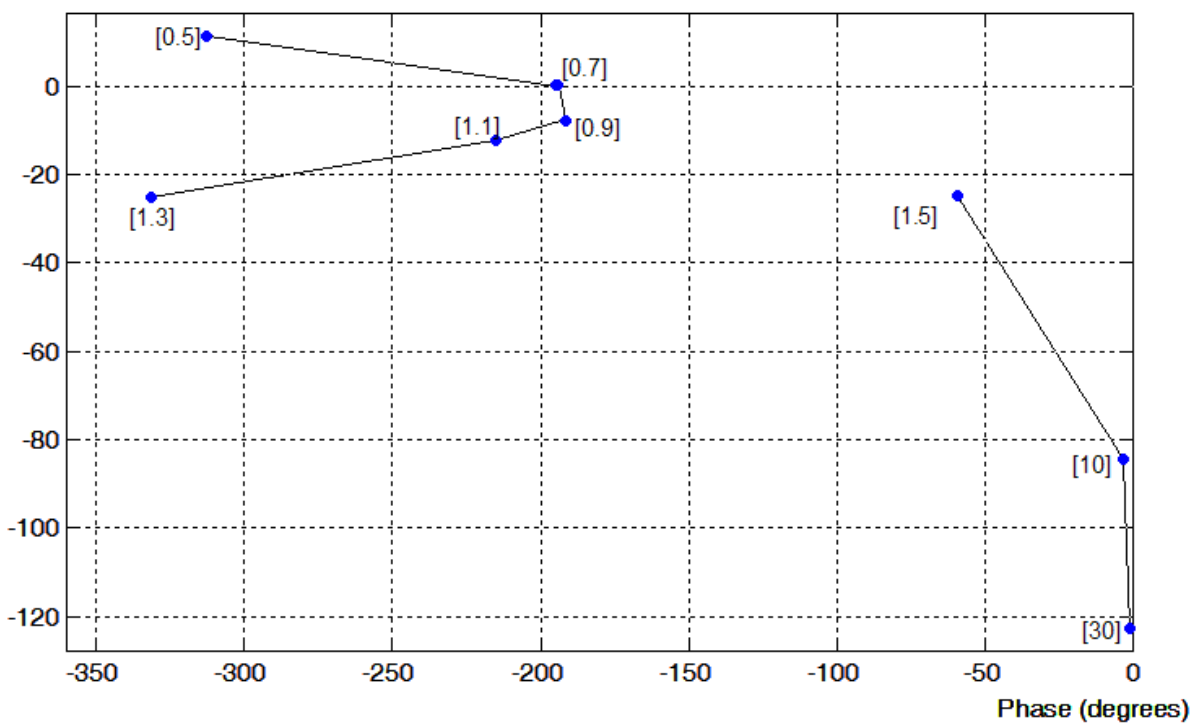
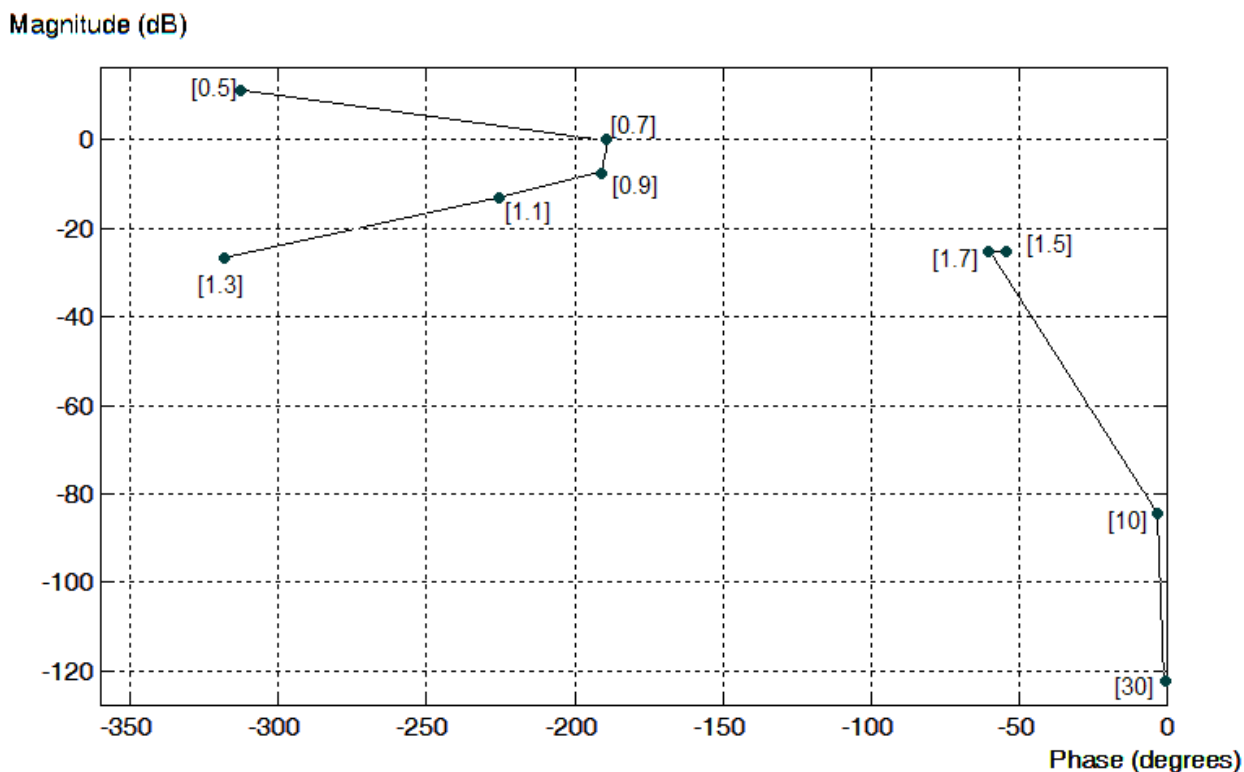


Figura 7.4 : Comportamiento de la función reducida $g_r(4,8)$ en el NC para el rango w

Nichols Chart de la función $g_r(3,7)$ en el rango de frecuencias w (rad/s)



Figura_7.5 : Comportamiento de la función reducida $g_{r2}(3,7)$ en el NC para el rango w

7.4 Ejemplo2 aplicación del procedimiento de Reducción del Número de Polos y Ceros.

En el Capítulo8 se desarrolla el problema MIMO-QFT “squaring-up” del modelo de aeronave civil descrito en el Capítulo3. En concreto, se trata de un problema combinado regulación/seguimiento que afecta a la dinámica longitudinal de la aeronave, dada por una planta de tamaño [2,8]. La solución final será un controlador No diagonal G[2,8] y un prefiltro diagonal F[8,8].

A continuación se presenta, como ejemplo aplicación del procedimiento de reducción del orden de una FT, la función original g_1 correspondiente al controlador del primer lazo del primer subsistema de la planta del modelo indicado, dentro del rango de frecuencias w de trabajo específico de tal modelo, expresado en (7.5).

La banda de frecuencia seleccionada, tras el estudio de rango de frecuencias de los modos de oscilación característicos de la planta (Anexo8.4), es de $\omega(0.5-1.7)rad / s$. A efectos de conseguir estabilidad robusta en el diseño de los controladores, se amplía la banda de frecuencia hasta los $30rad/s$, suficiente al reducirse con ella de manera importante la ganancia de los distintos subsistemas en lazo abierto. De esta manera,

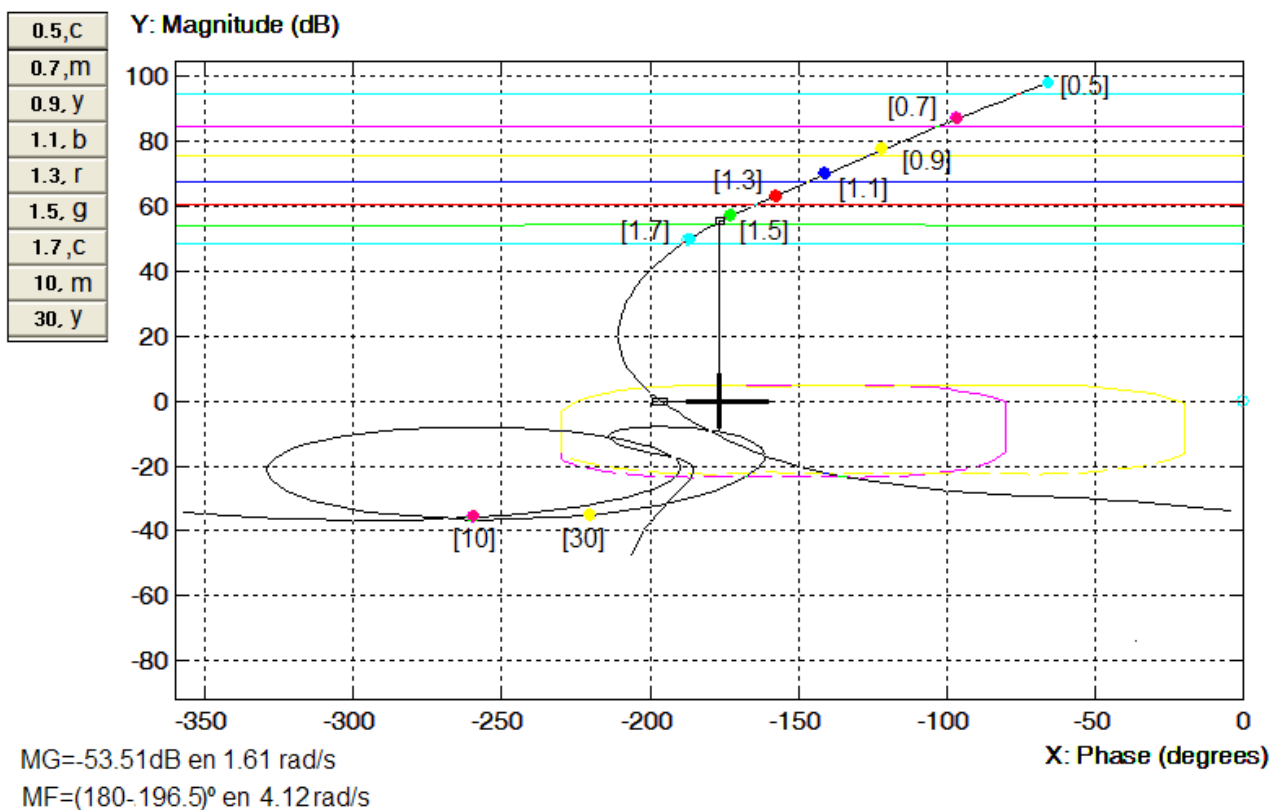
- una cosa es el rango de trabajo w_0 para conseguir robustez en el WD en cumplimiento de las especificaciones de seguimiento/regulación;

$$w_0 = (0.5,0.7,0.9,1.1,1.3,1.5,1.7)rad / s \tag{7.9}$$

- y otra, el rango de trabajo ampliado w para conseguir robustez en el TD, incluyendo el cumplimiento de las especificaciones de estabilidad.

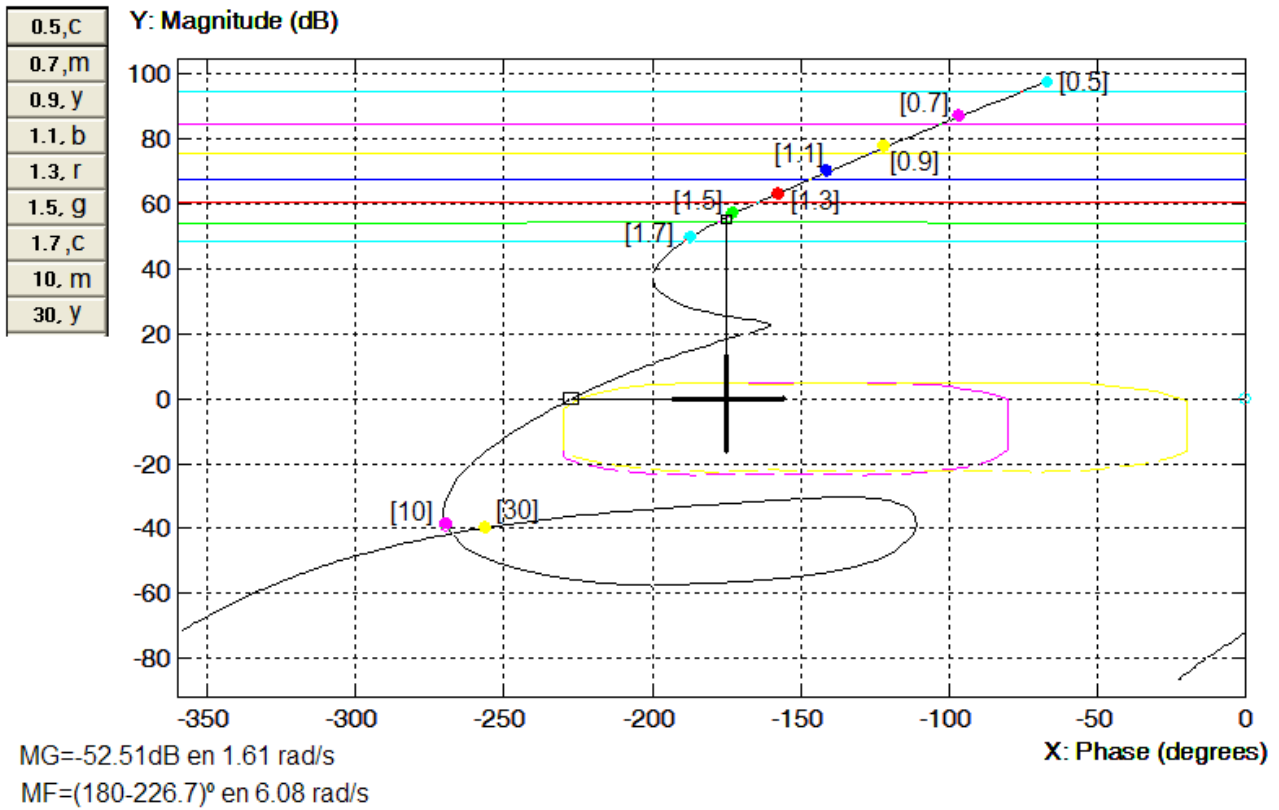
$$w = (0.5,0.7,0.9,1.1,1.3,1.5,1.7,10,30)rad / s \tag{7.5}$$

La función g_1 es una FT con 17 polos y 24 ceros, obtenida a partir de la IDE de la QFT-Toolbox en Matlab, tal y como se puede ver en la *Figura_7.6*.



Figura_7.6 : Ajuste de la función de lazo g_1 original (24,17)

Aplicando el procedimiento de reducción descrito en el apartado_7.1, se obtiene una FT para g_1 cuya representación gráfica en la IDE de la QFT-Toolbox en Matlab tiene el aspecto indicado en la *Figura_7.7*.



Figura_7.7 : Ajuste de la función de lazo g_{1r} reducida (6,8)

Los resultados que se obtienen del análisis comparativo entre la *Figura_7.6* y *Figura_7.7* son los siguientes:

- Mismo comportamiento de ambas funciones en magnitud y fase en el margen de frecuencia $(0.5-2.55)rad/s$. Esto es, incluye todo w_0 y, por tanto, misma robustez en el WD de las dos FTs.
- Prácticamente el mismo MG negativo y para la misma frecuencia $(1.61rad/s)$. Cumple la especificación para estabilidad robusta, expresada como,

$$|MG| \approx 52dB \geq 2.6db = MG_{RS} \quad (7.10)$$

- Una sola frecuencia de cruce, parecida en ambos casos, y fuera del rango de trabajo w_0
- Distinto grado de estabilidad condicional en lazo abierto. Los MF son negativos, pero diferentes en cada caso: -16.5° para g_1 original y -46.7° para g_{1r} reducida. El MF para estabilidad robusta exigido es de 45° , por lo que en valores absolutos precisamente la función reducida lo cumple, mientras que la original no.

La FT reducida g_{1r} es de orden (6,8), esto es, 6 ceros y 8 polos y, viene dada por la expresión siguiente:

$$g_1 = \frac{0.48s^6 + 0.84s^5 + 57.63s^4 + 91.47s^3 + 468.58s^2 + 358.42s + 474.38}{0.0002s^8 + 0.0048s^7 + 0.1831s^6 + 0.8514s^5 + 2.6942s^4 + 3.1651s^3 + 3.0995s^2 + 0.8421s + 0.0285} \tag{7.11}$$

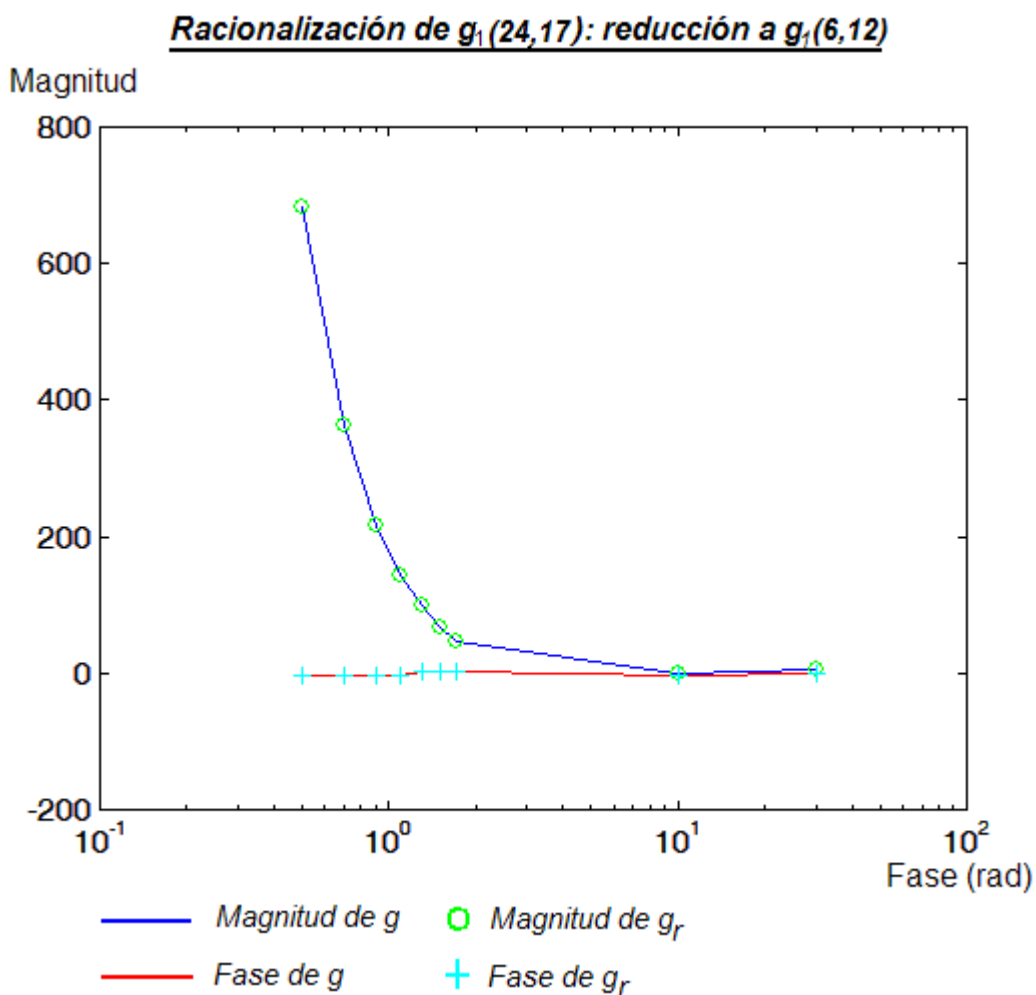
Se ha obtenido haciendo $[n1,d1]=racw(g1,w,12,6)$ y, posteriormente, suprimiendo los polos y ceros no significativos.

Los errores de magnitud y de fase para la FT reducida respecto de la FT original y para el rango de frecuencias prefijado, se describen en las *Tabla_7.3* a continuación.

Tabla_7.3: Características de la FT reducida g_{1r} , respecto de g_1 original en el rango de frecuencias w

$w(\text{rad/s})$	$C(\text{in})$ <i>original</i>	$C(\text{out})$ <i>reducida</i>	<u>Error Magnitud</u> $c(\text{in})-c(\text{out})$	<u>Error Fase</u> $\text{Fase}[c(\text{in})]-\text{Fase}[c(\text{out})]$
0.5	-590.57- 341.13i	-590.61-341.39i	0.2599	-0.0171
0.7	-345.94- 113.10i	-345.59-113.05i	0.3555	-0.0092
0.9	-214.10 -39.83i	-214.07-39.63i	0.2018	0.0503
1.1	-141.57-12.45i	-141.62-12.36i	0.1035	0.0385
1.3	-97.76+0.45i	-97.85+0.51i	0.0990	0.0311
1.5	-67.72+6.46i	-67.76+6.40i	0.0680	-0.0507
1.7	-46.59+7.45i	-46.57+7.45i	0.0166	0.0029
10	-0.33-0.06i	-0.33-0.06i	0.0000	0.0000
30	-0.60-4.75i	-0.60-4.75i	0.0000	0

Los errores de magnitud y de fase para la FT reducida respecto de la FT original y para el rango de frecuencias prefijado, se describen gráficamente en la *Figura_7.8* a continuación.



Figura_7.8 : Características gráficas de $g_1(6,12)$ aplicando $RACW(g_1, w, 24, 17)$

Se puede observar que los errores de magnitud y de fase obtenidos para g_{1r} reducida respecto de la FT original, dentro de todo el margen de frecuencia w , son suficientemente pequeños como para considerarla adecuada, en este sentido.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_7.1 : Características gráficas de $g_r(6,8)$ aplicando $RACW(g,w,11,7)$	310
Figura_7.2 : Características gráficas de $g_r(5,7)$ aplicando $RACW(g,w,11,7)$	311
Figura_7.3 : Comportamiento de la función original $g(7,11)$ en el NC para el rango w	312
Figura_7.4 : Comportamiento de la función reducida $g_{r1}(4,8)$ en el NC para el rango w	312
Figura_7.5 : Comportamiento de la función reducida $g_{r2}(3,7)$ en el NC para el rango w	313
Figura_7.6 : Ajuste de la función de lazo g_1 original.....	314
Figura_7.7 : Ajuste de la función de lazo g_1 reducida	315
Figura_7.8 : Características gráficas de $g_1(6,12)$ aplicando $RACW(g_1,w,24,17)$	317

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_7.1: Características de la FT reducida g_{r1} , respecto de g en el rango de frecuencias w	309
Tabla_7.2: Características de la FT reducida g_{r2} , respecto de g en el rango de frecuencias w	309
Tabla_7.3: Características de la FT reducida g_1 , respecto de g_1 original en el rango de frecuencias w	316

CAPÍTULO 8

Control “Squaring-up” para la Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil

RESUMEN

El procedimiento de “squaring-up” sobre compensación MIMO-QFT en plantas con incertidumbre infra-actuadas, con optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento, se va a poner a prueba sobre el modelo de aeronave civil definido. En concreto, el problema combinado regulación/seguimiento propuesto afecta a la dinámica longitudinal de la aeronave, descrita como una planta de tamaño [2,8]. La solución será un controlador No diagonal $G[2,8]$ y un prefiltro diagonal $F[8,8]$. Tras su diseño, se realizará un análisis exhaustivo tanto en el dominio frecuencial, como en el temporal, para verificar el grado de cumplimiento de las especificaciones originales.

CONTENIDOS

8.0 Introducción al Control “squaring-up” para la dinámica longitudinal de una aeronave civil.

8.1 Especificaciones.

8.1.1 Desarrollo de Procedimientos para Traslado de Especificaciones.

8.1.2 Definición de Especificaciones en el TD.

8.1.3 Tipos de Especificaciones en el WD aplicables.

8.1.4 Estudio Inicial: aplicación de las etapas 8.1.1 y 8.1.3, sobre los datos de la etapa 8.1.2.

8.2 Diseño.

8.3 Análisis Frecuencial y Temporal.

8.4 Resultados Finales.

8.0 Introducción al Control “squaring-up” para la dinámica longitudinal de una aeronave civil.

Se va a utilizar como problema aplicación del procedimiento de “squaring-up” desarrollado el modelo de aeronave civil descrito en el Capítulo3.2. En particular, el problema combinado regulación/seguimiento propuesto se describe bajo los siguientes términos:

- Planta del Canal Longitudinal P [2,8] con subplantas P_i [2,2] , tal que $P \equiv [P_1, P_2, \dots, P_4]$
- Planta de Perturbaciones P_d [2,8] con P_{d_i} [2,2] , tal que $P_d \equiv [P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{d4}]$,

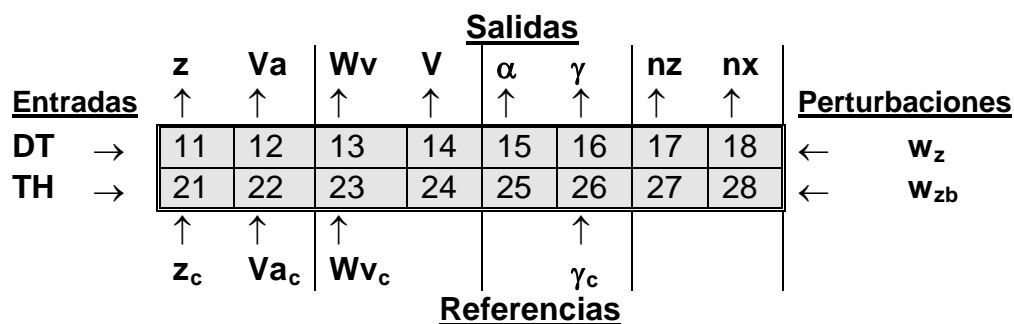
donde el vector de perturbaciones externas es $d \equiv [w_z, w_{zb}]$, las entradas de control $u \equiv [DT, TH]$ y las salidas $y \equiv [z, Va, Wv, V, \alpha, \gamma, n_z, n_x]$. El orden seleccionado de las variables en estos vectores (d, u, y) se obtiene a partir de un estudio a priori de acoplamientos entradas-salidas, por un lado y, perturbaciones-salidas, por otro, según aplicación de la teoría del Capítulo5 propuesta.

Para la organización y ordenación definitiva de los elementos de la Planta se ha considerado la siguiente secuencia de prioridades:

1. Salidas que además son Referencias: z, Va, Wv, γ .
2. Rigurosidad de las Especificaciones originales:
 - Seguimiento estricto de las variables z y Va .
 - Desacoplamientos rigurosos entre z y Va .
3. Grado de Acoplamientos entradas/salidas:
 - Con la entrada DT por orden de grado de acoplamiento se obtiene:

$$Wv, z, \alpha, n_z, y, \text{ además, } Va, V, n_x, \gamma$$

En definitiva, la organización de la Planta puede expresarse gráficamente como se indica en la *Figura_8.1*



Figura_8.1: Relación Entradas/Salidas/Referencias/Perturbaciones con la Planta [2,8]

Se ha elegido en el primer subsistema Va_c en lugar de V_c , ya que los desacoplamientos definidos por las especificaciones son para $z-Va$.

Si sólo se hubiera tenido en cuenta los resultados dados por el grado de acoplamiento entradas-salidas, el agrupamiento de variables habría sido:

$$Wv, z, nz, nx, V, \alpha, Va, \gamma.$$

La solución que nos va a proporcionar la aplicación de la metodología “squaring up” al problema propuesto será un controlador No diagonal [2,8] y un prefiltro diagonal [8,8] con elementos off-diagonal.

8.1 Especificaciones.

El estudio del traslado de especificaciones del TD al WD merece una atención especial, pues su nivel de precisión influye definitivamente en la eficacia de la resolución del problema. Se ha seguido el siguiente proceso de aplicación por etapas sobre las mismas.

Etapas:

Se han aplicado secuencialmente las siguientes etapas de trabajo, al respecto de la definición de las especificaciones concretas aplicadas en el problema:

1. Desarrollo de procedimientos para Traslado de Especificaciones:

- Teóricos: Los propuestos en el Capítulo4 y otros, detallados a continuación como, el método del tracking cruzado, estudio de la dinámica de actuadores o de la dinámica de variables realimentadas.
- Prácticos: Programas. Ver Anexo8, para más detalle.

2. Definición de Especificaciones en el TD para el problema en desarrollo.

3. Tipos de Especificaciones en el WD aplicables.

4. Estudio Inicial aplicación de las etapas 1 y 3, sobre los datos de la etapa 2.

5. Agrupación de resultados.

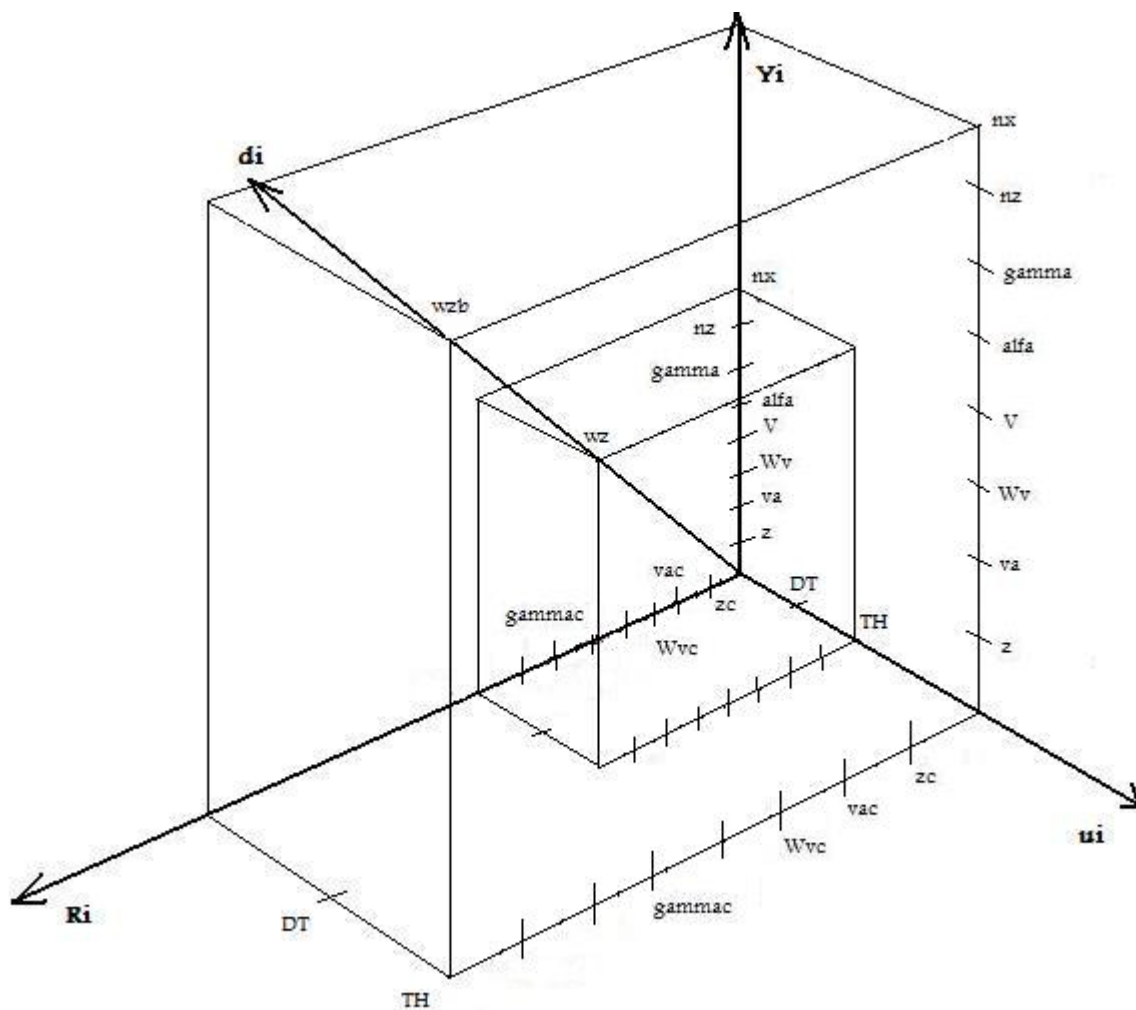


Figura 8.2 Diagrama Relación de Variables y Definición de Especificaciones.

Antes de comenzar con el proceso de trabajo esquematizado, tener en cuenta que a partir de ahora se utilizará la siguiente notación (ver *Figura_8.2*):

Variables consideradas:

- ✚ Y_i : Salidas.
- ✚ R_i : Referencias de Entrada.
- ✚ u_i : Entradas de Control.
- ✚ d_i : Perturbaciones de Entrada.

Especificaciones:

- ✚ Plano u_i/d_i : Esfuerzo de Control Regulación.
- ✚ Plano Y_i/d_i : Sensibilidad.
- ✚ Plano u_i/R_i : Esfuerzo de Control Seguimiento.
- ✚ Plano Y_i/R_i : Tracking.

8.1.1 Desarrollo de Procedimientos para Traslado de Especificaciones.

Las especificaciones a considerar, en función del tipo de variables relacionadas, son:

- Estabilidad Robusta: $|Te_{ij}| \leq We_k, i=1,2, j=1,..,n, k=1, ..,n$ (8.1)

a) Problema de regulación.

- Esfuerzo de Control Regulación: $\left| \frac{u_i^{opt}}{d_j} \right| = |Ecr_{ij}^{opt}| \leq Wecr_{ij}, i=1, ..,n, j=1,2$ (8.2)

- Sensibilidad: $\left| \frac{Y_i}{d_j} \right| = |S_{ij}| \leq Wps_{ij}, i=1, ..,n, j=1,2$ (8.3)

b) Problema de seguimiento.

- Esfuerzo de Control Seguimiento:
$$\left| \frac{u_i^{opt}}{r_j} \right| = |Ecs_{ij}^{opt}| \leq Wecs_{ij} \quad , i=1, ..,n \quad j=1,..,n \quad (8.4)$$

- Esfuerzo de Control Seguimiento Puro:
$$\left| \frac{u_i^{opt}}{r_j} \right| = |Ecs_{ij}^{opt}| \leq Wecs_{ij} \quad , i=1, ..,n, \quad j=1,..,n \quad (8.5)$$

- Tracking Puro:
$$\left| \frac{Y_i}{r_j} \right| = |T_{ij}| \leq \rho_{ij} \quad , i=1, ..,n \quad j=1,..,n \quad (8.6)$$

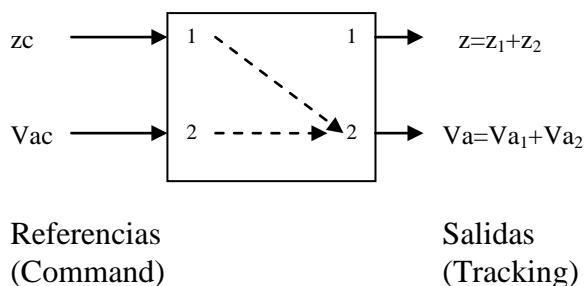
- Tracking:
$$\left| \frac{Y_i}{r_j} \right| : \alpha_{ij} \leq |T_{ij}| \leq \beta_{ij} \quad , i=1, ..,n \quad j=1,..,n \quad (8.7)$$

Los procedimientos a utilizar para la obtención de dichas especificaciones son:

- ✚ *TD2WD*.M* (*Mp, tr, ts, desv*): Determinación del Tracking del Acoplo Principal y Tracking del Desacoplo del Acoplo Auxiliar.
- ✚ *ESENSIBQ.M* (*Mp, In, T, desv*): Determinación de una Sensibilidad concreta, especificada por los parámetros indicados.
- ✚ *ETRAC.M* (*Out_Impulse, In_Impulse/Step*): Determinación de una Sensibilidad general (sólo especificada por algunos parámetros) o de Tracking Cruzado (desacoplo).
- ✚ *STEPTRAC.M* (*Out_Step, In_Step*): Determinación del límite *w_superior* en Tracking Propio (acoplo).
- ✚ *Dinámica de Actuadores y Motor.*
- ✚ *Método del Tracking Cruzado* (desacoplo).

Tracking Propio y Tracking Cruzado: Método del Tracking Cruzado

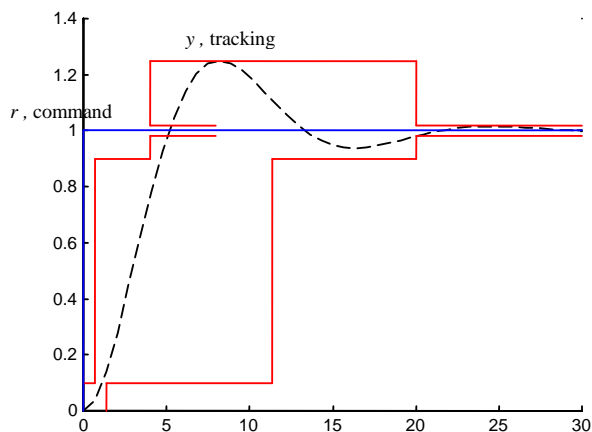
Dado un sistema MIMO [2,2] para seguimiento, por ejemplo, el de salidas (z , V_a), la relación de éstas con las referencias de entrada se puede describir gráficamente como en la *Figura_8.3*



Figura_8.3: Relación Referencias/Salidas en un sistema MIMO [2,2]

Es decir, el valor de cada salida es la suma de la contribución sobre el sistema de cada entrada de referencia o “command” a la misma. Por ejemplo, la salida z es la suma de z_1 , debido a z_c (acoplo o tracking propio), más z_2 debido a V_{a_c} (desacoplo o tracking cruzado).

Generan señales, en general, de la forma dada en la *Figura_8.4*.



Figura_8.4: Seguimiento de una señal escalón

Con estas consideraciones iniciales, realizaremos las siguientes definiciones:

a) Tracking Propio: aquel que se realiza a través de elementos diagonales de la Planta. Viene descrito por una entrada escalón sobre una variable que produce un seguimiento de salida sobre la variable de acoplamiento. Por ejemplo, para las variables z y Va se tiene:

✚ Cualquier z_1 debido a una z_c de entrada estará comprendida entre unos valores mínimos y máximos, tal que,

$$\forall z_1 \in [z_{1\min}, z_{1\max}] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_c * \alpha_{11} = z_{1\min} \\ z_c * \beta_{11} = z_{1\max} \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{z_1}{z_c} \right| \leq \beta_{11} \quad (8.9)$$

✚ Cualquier Va_2 debido a una Va_c de entrada estará comprendida entre unos valores mínimos y máximos, tal que,

$$\forall Va_2 \in [Va_{2\min}, Va_{2\max}] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Va_c * \alpha_{22} = Va_{2\min} \\ Va_c * \beta_{22} = Va_{2\max} \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

$$\alpha_{22} \leq |T_{22}| = \left| \frac{Va_2}{Va_c} \right| \leq \beta_{22} \quad (8.11)$$

donde las funciones α son los límites_w_inferiores asociados a tiempos máximos y las funciones β los límites_w_superiores asociados a tiempos mínimos, característicos del Tracking Propio.

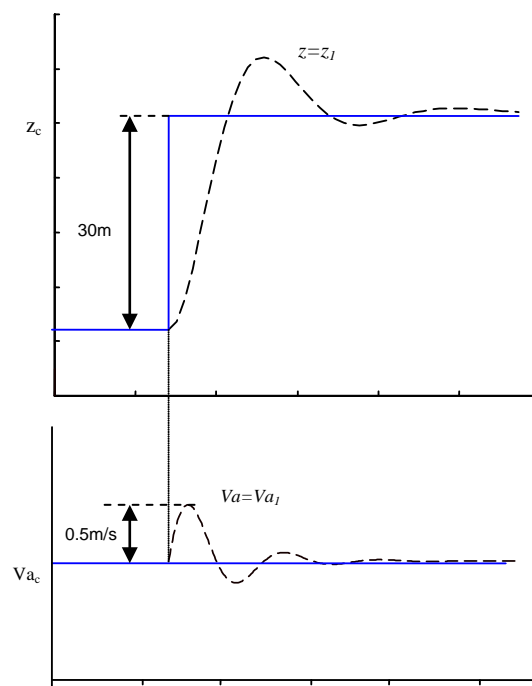
Los límites_w_inferiores α se van a conseguir aplicando las especificaciones de tracking propio del problema (Acoplo Principal y Desacoplo del Acoplo Auxiliar) con el programa de conversión de parámetros TD a WD, descrito en el Capítulo4

TD2WD.M . Los límites_w_superiores β , se obtienen aplicando la especificación general sobre amortiguación de variables controladas indicada en el Capítulo 8.1.2, usando STEPTRAC.M.

b) Tracking Cruzado: aquel que se realiza a través de elementos No diagonales de la Planta. Viene descrito por una entrada escalón sobre una variable que produce una salida impulso en otra variable contigua cruzada. Por ejemplo, para las variables z_1 y Va_2 se tienen las siguientes especificaciones:

1. Tracking de Va respecto de z : $|T_{21}| = \left| \frac{Va_1}{z_c} \right| \leq \beta_{21}$ (8.12)

Gráficamente, las especificaciones para T_{21} vienen expresadas en la *Figura_8.5* a continuación.



Figura_8.5: Tracking cruzado de Va respecto de z

Es decir, para un step de entrada $z_c = 30m$, la salida cruzada en Va debe variar un máximo de $0.5m/s$, esto es, $Va_1 \leq 0.5m/s$; el tiempo de amortiguación de este impulso no

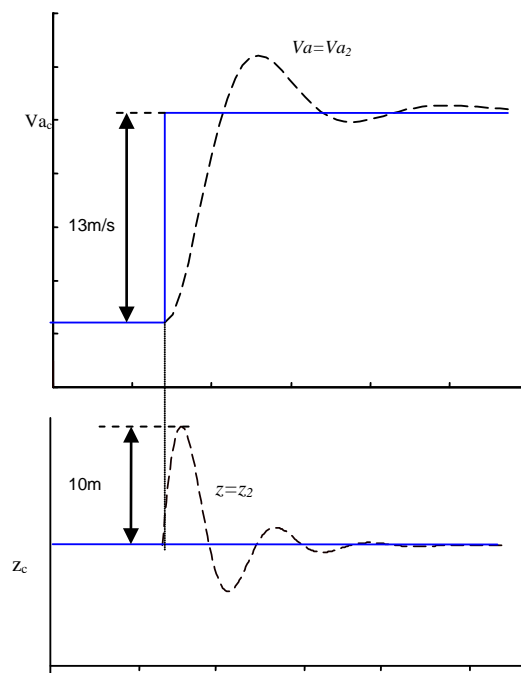
es un parámetro dado; la imposición es sólo de límite_w superior, pudiendo utilizar

$$\beta_{21} \equiv ETRAC(0.5m/s,30m)s .$$

El programa ETRAC.M trabaja con entradas impulso y salidas impulso, por lo que si las entradas son escalón, caso del tracking cruzado utilizado, el resultado debe multiplicarse por $s=jw$.

$$2. \text{ Tracking de } z \text{ respecto de } Va: |T_{12}| = \left| \frac{z_2}{Va_c} \right| \leq \beta_{12} \tag{8.13}$$

Gráficamente, las especificaciones para T_{12} vienen expresadas en la *Figura_8.6* a continuación.



Figura_8.6: Tracking cruzado de z respecto de Va

Es decir, para un step de entrada $Va_c = 13m/s$, la salida cruzada en z debe variar un

máximo de 10m, esto es, $z_2 \leq 10m$; el tiempo de amortiguación de este impulso no es un

parámetro dado; la imposición es sólo de límite_w superior, pudiendo utilizar

$$\beta_{12} \equiv ETRAC(10m,13m/s)s .$$

Dinámica de Actuadores y Motor

Aplicable para la obtención de plantillas (“*templates*”) del sistema asociado a entradas de control. Por otro lado, se utiliza también para la definición de Especificaciones de Esfuerzo de Control, tanto para regulación, como para seguimiento.

Esquemmatizada por la secuencia dada en la *Tabla_8.1* siguiente.

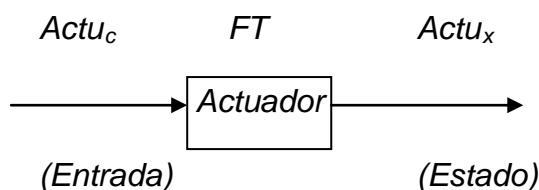
Tabla_8.1: Secuencia para la determinación de la función de transferencia asociada a la Dinámica de Actuadores y Motor

Entradas Control	Retraso Computacional	Limitación	Lazo Cerrado			Salidas Control
			Ganancia	Limit_Rate	Integración	
Trim + Command - min*	T	Superior - Inferior	G	Superior - Inferior	1/s	+ min*

* Sólo se aplica si el mínimo (“min”) es positivo.

Por tanto, la función de transferencia asociada al actuador/motor se puede describir considerando la *Figura_8.7* como,

$$\frac{Actu_x}{Actu_c} = \frac{K}{Ts + 1} * \frac{GL}{s + GL} \quad (8.14)$$



Figura_8.7: Descripción gráfica de la función de transferencia del actuador/motor

donde G es la ganancia del actuador, L el Limit_Rate y K depende de la forma de la referencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} K=s \text{ si } R_{\max j} \text{ es un Impulso.} \\ K=1 \text{ si } R_{\max j} \text{ es un Escalón.} \end{array} \right. \quad (8.15)$$

$$\left. \begin{array}{l} K=1 \text{ si } R_{\max j} \text{ es un Escalón.} \end{array} \right\} \quad (8.16)$$

A efectos de esfuerzos de control, las especificaciones son de la forma:

$$\frac{u_{\max i}}{R_{\max j}} \quad (8.17)$$

donde $u_{\max i}$ es el valor máximo de la entrada de control i aplicable, definido a través de la limitación del actuador/motor dada, cuando se tiene la referencia j (perturbación o “command” de entrada) de valor máximo $R_{\max j}$.

Dinámica de Variables realimentadas

Se ha tenido en cuenta para la obtención de plantillas (“*templates*”) un retraso computacional máximo en todos los casos de 100ms.

8.1.2 Definición de Especificaciones en el TD.

Los criterios de evaluación particulares que afectan al canal de control longitudinal (dinámica longitudinal), siguiendo la nomenclatura descrita en el Capítulo3.2.4, son los que se indican a continuación:

Respuesta en Altitud

- El sistema controlado debería ser capaz de seguir órdenes de altitud, h_c , con tiempos de alcance $tr < 12$ s y tiempos de asentamiento $ts < 45$ s.

- Para altitudes por encima de 305 m (1000 ft), debería existir una sobreelongación $M_p < 5\%$, en respuesta a órdenes de altitud en forma de escalón unitario y para altitudes por debajo de 305 m (1000 ft), la sobreelongación $M_p < 30\%$.
- En la fase final del vuelo, a saber, en la senda de descenso para aterrizaje, la desviación vertical máxima permitida debe ajustarse a lo indicado a continuación,

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ ft} \leq z_c \leq 400 \text{ ft} \Rightarrow \frac{dz}{dz_c} = \frac{(6-1.5)m}{(400-100)\text{ft}} (36090 \text{ ft} / 11000m) z_c = 0.049 z_c (\text{ft}) = 0.015 z_c (m) \quad (8.18) \\ \\ z_c < 100 \text{ ft} \Rightarrow \frac{dz}{dz_c} = 1.5m \quad (8.19) \\ \\ z_c > 400 \text{ ft} \Rightarrow \frac{dz}{dz_c} = 6m \quad (8.20) \end{array} \right.$$

Respuesta al Ángulo de la Trayectoria de Vuelo (FPA).

- El sistema controlado debe ser capaz de seguir órdenes de FPA γ_c hasta obtener un FPA actual γ , con tiempos de alcance $tr < 5s$ y tiempos de asentamiento $ts < 20s$.
- Para altitudes por encima de 305 m (1000 ft), debería existir una sobreelongación $M_p < 5\%$, en respuesta a órdenes de FPA en forma de escalón unitario y para altitudes por debajo de 305 m (1000 ft), la sobreelongación $M_p < 30\%$.

Respuesta en Velocidad relativa al aire

- El sistema controlado debe ser capaz de seguir órdenes de Velocidad relativa al aire Va_c hasta obtener una Velocidad relativa al aire actual Va , con tiempos de alcance $tr < 12 s$ y tiempos de asentamiento $ts < 45 s$.
- Para altitudes por encima de 305 m (1000 ft), debería existir una sobreelongación $M_p < 5\%$, en respuesta a órdenes de Velocidad relativa al aire en forma de

escalón unitario y para altitudes por debajo de 305 m (1000 ft), la sobreelongación $M_p < 30\%$.

- Con viento de magnitud 13m/s (25kts) no debe haber una desviación en la Velocidad relativa al aire superior a 2.6m/s (5kts) durante más de 15 s, además de que no debe haber error mantenido debido a viento constante.

Desacoplamiento entre Velocidad del Aire V_a y Altitud h .

- Para una orden en altitud h_c de 30m, el valor de pico máximo de la señal de error de la Velocidad Relativa al Aire ($V_{a_c} - V_a$) debe ser menor de 0.5 m/s (1 kt).
- Para una orden en la Velocidad Relativa al Aire V_{a_c} de 13 m/s (25 kts), el valor de pico máximo de la señal de error en altitud ($h_c - h$) debe ser menor de 10m.

Aceleración Vertical Máxima.

En condiciones normales, sin turbulencia, la Aceleración Vertical sobre el cdg debe ser mínima:

- En vuelo recto $< \pm 0.05$ g.
- En un giro no superior a 30° $< \pm 0.2$ g.

Amortiguamiento

- A no ser que se indique específicamente, para altitudes por encima de 305 m (1000 ft), no debería existir sobreelongación en la respuesta a cualquier variable controlada.
- Para altitudes por debajo de 305 m (1000 ft), la sobreelongación $M_p < 30\%$, en respuesta a órdenes de cualquier variable controlada.

Ángulo de Ataque

- Está definido entre -11.5° y 18° . El c_l correspondiente a este último es de 2.75. Se considera un valor de ángulo de ataque máximo aceptable los 12° .

Tabla_8.2: Valor de Parámetros de la Dinámica de Actuadores y Motor

Dinámica de Actuadores y Motor				
	TH	Alerones	Timón Profundidad	Timón de Dirección
Constante de Tiempo (s)	1.5	0.15	0.15	0.3
Rate_Limit (°/s)	± 1.6	± 25	± 15	± 25
Límites (°)	+10 , +0.5	± 25	+10 , -25	± 30
Ganancia	0.67	6.7	6.7	6.7/2

Tabla_8.3: Valores de Perturbaciones asociados a la Dinámica máxima de Actuadores y Motor

Relación Perturbaciones/Dinámica Máxima Actuadores y Motor	
Turbulencia (Ligera/Altura_Media_Alta)	Impulso 15.4 m/s
Viento	Step 13 m/s

Especificaciones Complementarias:

- **Ajuste masa-Va.**

Las especificaciones de masa de la aeronave indican que puede variar de 100 a 150 ton, así como, que su velocidad en el aire V_a desde 52 a 90 m/s. Sin embargo, es sabido que no todo el rango de velocidad en el aire es válido para cualquier valor de carga de la aeronave. Esto es, cuanto mayor es la masa del avión, mayor debe ser la velocidad mínima en el aire del mismo, sin que se produzca entrada en pérdida. Para determinar las velocidades mínimas asociadas a cada valor de carga del avión, se debe partir de la denominada velocidad de pérdida ("*stall*") V_s definida por,

$$V_s = \left(\frac{2mg}{\rho S C_{l_{\max}}} \right)^{1/2} \quad (8.21)$$

con ρ la densidad del aire, S superficie alar y $C_{l_{\max}}$ coeficiente de sustentación aerodinámica máximo.

Las aeronaves indican artificialmente a los pilotos el acercamiento a la pérdida a través del sistema de "stick-shaker", controlado por la V_{ss} , definida con un margen del 10% de seguridad respecto de la V_s .

Ahora bien, se considera que la aeronave puede maniobrar en condiciones de seguridad, incluso con fallo de motor, si su velocidad está por encima de la denominada "mínima de control en el aire" V_{MCA} , definida con un margen del 23% por encima de la V_s .

El requerimiento mínimo para tener alguna posibilidad de escapar de la pérdida es que la aeronave vuele por encima de un 3% de la V_s .

Tabla 8.4 : Ajuste y corrección masa_ V_a , función del margen de seguridad escogido

Masa (Kgx1000)	V_{MCA}	V_s	V_{ss}	
	1.23 V_s		1.10 V_s	1.03 V_s
100	58.1	47.2	52	48.7
105	59.6	48.5	53.3	50
110	61	49.6	54.6	51.1
115	62.7	50.1	56.1	52.5
120	63.7	51.8	57	53.4
125	65.1	52.9	58.2	54.5
130	66.3	53.9	59.3	55.5
135	67.6	55	60.5	56.6
140	68.8	55.9	61.5	57.6
145	70.1	57	62.7	58.7
150	71.2	57.9	63.7	59.6

NOTA: Velocidades dadas en m/s.

En el problema considerado, se van a utilizar como datos de ajuste y corrección masa-Va los asociados al sistema de “*stick-shaker*”, es decir, de V_{ss} .

- **Especificaciones de W_v .**

La salida W_v está relacionada con la salida z , del siguiente modo, $W_v = \frac{dz}{dt}$ (8.22)

Por tanto, las respuestas en frecuencia de ambos parámetros de salida también están relacionados:

$$\text{Respuesta_Frec}(W_v) = s \text{ Respuesta_Frec}(z) \quad (8.23)$$

- **Ángulo de la Trayectoria de Vuelo.**

Se va a utilizar un $\gamma_c \in (-6^\circ, 6^\circ)$. Los pasos mínimos serán de 0.1° .

8.1.3 Tipos de Especificaciones en el WD aplicables.

En este problema, al considerarse tanto regulación como seguimiento, en situación combinada, se van a aplicar todas las especificaciones indicadas en el apartado 8.1.1. “*Desarrollo de Procedimientos para Traslado de Especificaciones*”.

8.1.4 Estudio Inicial: aplicación de las etapas 8.1.1 y 8.1.3, sobre los datos de la etapa 8.1.2.

A efectos de Tracking se van a utilizar las especificaciones indicadas con sombra en la tabla de la *Figura_8.8*, relación salidas/referencias:

<u>Referencias</u>		<u>Salidas</u>							
		<u>z</u>	<u>Va</u>	<u>Wv</u>	<u>V</u>	<u>α</u>	<u>γ</u>	<u>nz</u>	<u>nx</u>
		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
z_c	→	11	12	13	14	15	16	17	18
Va_c	→	21	22	23	24	25	26	27	28
Wv_c	→	31	32	33	34	35	36	37	38
V_c	→	41	42	43	44	45	46	47	48
α_c	→	51	52	53	54	55	56	57	58
γ_c	→	61	62	63	64	65	66	67	68
nz_c	→	71	72	73	74	75	76	77	78
		81	82	83	84	85	86	87	88

Nota1: La nomenclatura de posición de elementos de plantas es inversa a la de las especificaciones asociadas.

Nota2: Las especificaciones definidas para Va(2) se van a utilizar también sobre V(4). No existen órdenes de mando sobre α(5), nz(7) y nx(8), sólo “Dinámica de variables realimentadas”.

Figura_8.8: Descripción de la nomenclatura de especificaciones de Tracking

Las especificaciones dadas en el RCAM-GARTEUR proporcionan los siguientes datos de aplicación :

Tabla_8.5 : Especificaciones de estabilidad robusta

<u>Estabilidad Robusta</u>	
$We_k=1.3$	$MG \geq 1.8$ y $MF \geq 45^\circ$

Los esfuerzos de control para regulación y seguimiento, se describen con los datos de la tabla siguiente, considerando $u_{máximas}$ para $r_{mínimas}$, respecto del seguimiento.

Para regulación, las relaciones u_{max} / d_{min} vienen dadas por las especificaciones impuestas por el problema.

Tabla 8.6 : Especificaciones de esfuerzo de control

Esfuerzo Control	Entradas	
	DT(1)	TH(2)
Perturbación	$Wecr_{i1}$ (entrada_“Step”xFT= salida_“Step”) $Wecr_{i2}$ (entrada_“Impulse”x(FT)/s= salida_“Step”)	
wz(1)	$\frac{25\pi / 180}{13}$	$\frac{10\pi / 180}{13}$
wzb(2)	$\left(\frac{25\pi / 180}{15.4}\right) / s$	$\left(\frac{10\pi / 180}{15.4}\right) / s$
Referencia	$Wecs_{ij}$ (entrada_“Step”xFT= salida_“Step”)	
	$\frac{25\pi / 180}{c_j}$	$\frac{10\pi / 180}{c_j}$
z_c(1)	$c_1 = 1m$	
Va_c(2)	$c_2 = 1m / s$	
Wv_c(3)	$c_3 = 1 m/s$	
$\alpha_c(5)$	$c_5 = 0.1\pi / 180rad$	
$\gamma_c(6)$	$c_6 = 0.1\pi / 180rad$	
nz_c(7)	$c_7 = 0.01g$	

*FT es la función de transferencia asociada a la especificación dada.

Los datos sobre especificaciones de sensibilidad y de seguimiento vienen dados en las tablas siguientes,

Tabla 8.7 : Especificaciones de sensibilidad

Sensibilidad	Salidas				
	z(1)	Va(2),	Wv(3)	V(4)	Programa Aplicable
Perturbación	Wps_{i1} (entrada_“Step”x(FT)s= salida_“Impulse”) Wps_{i2} (entrada_“Impulse”xFT= salida_“Impulse”)				
wz(1)	Pico ₁ =	$esensibq(2.6,13,15,1)s$	Pico ₃ =	Wps ₂₁	$etrac(0.3pico_i,13)s, i \neq 2$
wzb(2)	10m	Pico ₂ =0.5m/s	10 m/s	Wps ₂₂	$etrac(0.3pico_i,15.4)$
	Salidas				
	α (5)	γ (6)	nz(7)	nx(8)	Programa Aplicable
wz(1)	Pico ₅ =	Pico ₆ =	Pico ₇ =0.05g	-	$etrac(0.3pico_i,13)s, i \neq 2$
wzb(2)	12 π /180 rad	6 π /180 rad			$etrac(0.3pico_i,15.4)$

Tabla 8.8 : Especificaciones de Tracking ($z_c, Va_c, Wv_c, V_c, \alpha_c-z, Va, Wv$)

Tracking	Salidas			
	z(1)	Va(2)	Wv(3)	Programa Aplicable
Referencia	(Se asume $y_{mínimas}$ para $r_{máximas}$ respecto de α_{ii} e $y_{máximas}$ para $r_{mínimas}$ respecto de β_{ii})			
z_c(1)	$\alpha_{11} \equiv td2wd(5\%,12,45)$ $\beta_{11} \equiv steptrac(1.3,1,12,45)$	Pico ₂ =0.5/0.3m/s	Pico ₃ =90 m/s	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,30)s, i \neq 1$
Va_c(2)/ V_c(4)	Pico ₁ =10/0.3m	$\alpha_{22} \equiv td2wd(5\%,12,45)$ $\beta_{22} \equiv steptrac(1.3,1,12,45)$	Pico ₃ =30 m/s	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,13)s, i \neq 2$
Wv_c(3)	Pico ₁ =30m	Pico ₂ =0.5/0.3m/s	$\alpha_{33} = \alpha_{11}$ $\beta_{33} = \beta_{11}$	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,10)s, i \neq 3$
$\alpha_c(5)$	Pico ₁ =10m	Pico ₂ =0.5m/s	Pico ₃ =10 m/s	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, \pi / 180)s, i \neq 5$

Tabla 8.9 : Especificaciones de Tracking ($z_c, Va_c, Wv_c, V_c, \alpha_c-V, \alpha, \gamma, nz, nx$)

Tracking	Salidas					
	V(4)	α (5)	γ (6)	nz(7)	nx(8)	Programa Aplicable
z_c(1)	Pico ₄ =Pico ₂	Pico ₅ = $12\pi/180$ rad	Pico ₆ = $6\pi/180$ rad	Pico ₇ =0.05g	-	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,30)s, i \neq 1$
Va_c(2)/ V_c(4)						$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,13)s, i \neq 2$
Wv_c(3)						$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i,10)s, i \neq 3$
$\alpha_c(5)$						$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, \pi / 180)s, i \neq 5$
		$\beta_{55} = steptrac(1.3,1,5,20)$				

Tabla 8.10 : Especificaciones de Tracking ($\gamma_c, nz_c-z, Va, Wv, V$)

Tracking	Salidas				
	z(1)	Va(2)	Wv(3)	V(4)	Programa Aplicable
Referencia	(Se asume $y_{mínimas}$ para $r_{máximas}$ respecto de α_{ii} e $y_{máximas}$ para $r_{mínimas}$ respecto de β_{ii})				
$\gamma_c(6)$	Pico ₁ =10m	Pico ₂ =0.5m/s	Pico ₃ =10 m/s	Pico ₄ =0.5m/s	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, \pi / 180)s, i \neq 6$
nz_c(7)					$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, .01)s, i \neq 7$
nx_c(8)	-	-	-	-	

Tabla_8.11 : Especificaciones de Tracking ($\gamma_c, nz_c, nx_c - \alpha, \gamma, nz, nx$)

Tracking	Salidas				Programa Aplicable
	α (5)	γ (6)	nz(7)	nx(8)	
$\gamma_c(6)$	$Pico_5 = 12\pi/180$ rad	$\alpha_{66} \equiv td2wd(5\%, 5, 20)$ $\beta_{66} \equiv \beta_{55}$	Pico ₇ =0.05g	-	$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, \pi / 180)s, i \neq 6$
nz_c(7)		Pico ₆ =6 π /180 rad	$\beta_{77} = \beta_{55}$		$\beta_{ij} = etrac(0.3pico_i, .01)s, i \neq 7$
nx_c(8)	-	-	-	$\beta_{88} = \beta_{55}$	

Agrupación de resultados. Datos obtenidos al aplicar los procedimientos generados en Matlab descritos anteriormente.

La banda de frecuencia seleccionada para procesamiento de las plantillas, tras el estudio de rango de frecuencias de los modos de oscilación característicos de la planta previo, es de $\omega(0.5 - 1.7)rad / s$.

A efectos de conseguir estabilidad robusta en el diseño de los controladores, se amplía la banda de frecuencia hasta los 30rad/s, suficiente al reducirse con ella de manera importante la ganancia de los distintos subsistemas en lazo abierto [Yaniv y Schwartz, 91].

Tabla_8.12 : Resultados de Especificaciones de sensibilidad(z, Va, V, α)

Sensibilidad	Salidas		
	z(1)	Va(2), V(4)	α (5)
Perturbación	Wps_{i1} (entrada_“Step”x(FT)s= salida_“Impulse”) Wps_{i2} (entrada_“Impulse”xFT= salida_“Impulse”)		
wz(1)	$\omega(0.2,10), Mp = 3m$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.61rad / s$ $\frac{0.3677s}{s^2 + 1.152s + 0.3677}$	$T = 14.31s$ $Mp = 2.117m / s$ $\rho = 0.1422, \omega_n = 2.6rad / s$ $\frac{0.52s}{s^2 + 0.7396s + 6.76}$	$\omega(10^{-2}, 10^{-1}), Mp = 0.063rad$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.0127rad / s$ $\frac{1.611 \cdot 10^{-4}s}{s^2 + 0.02412s + 1.611 \cdot 10^{-4}}$
wzb(2)	$\omega(0.4,10), Mp = 3m$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.51rad / s$ $\frac{0.2621}{s^2 + 0.9726s + 0.2621}$	$\omega(10^{-2}, 10^{-1}), Mp = 0.15m / s$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.0256rad / s$ $\frac{0.0006551}{s^2 + 0.04863s + 0.0006551}$	$\omega(10^{-2}, 10^{-1}), Mp = 0.063rad$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.01072rad / s$ $\frac{0.0001148}{s^2 + 0.02036s + 0.0001148}$

Tabla 8.13 : Resultados de Especificaciones de sensibilidad(γ, nz, Wv)

Sensibilidad	Salidas		
	γ (6)	nz(7)	Wv(3)
Perturbación	Wps_{i1} (entrada_“Step”x(FT)s= salida_“Impulse”) Wps_{i2} (entrada_“Impulse”xFT= salida_“Impulse”)		
wz(1)	$\omega(10^{-2}, 10^{-1}), Mp = 0.0314rad$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.0064rad / s$ $\frac{4.033 \cdot 10^{-5} s}{s^2 + 0.01207s + 4.033 \cdot 10^{-5}}$	$\omega(10^{-3}, 10^{-1}), Mp = 0.015g$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.003032rad / s$ $\frac{9.194 \cdot 10^{-6} s}{s^2 + 0.005761s + 9.194 \cdot 10^{-6}}$	$\omega(0.2, 10), Mp = 3m$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.61rad / s$ $\frac{0.3677s}{s^2 + 1.152s + 0.3677}$
wzb(2)	$\omega(10^{-2}, 10^{-1}), Mp = 0.0314rad$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.00536rad / s$ $\frac{0.00002874}{s^2 + 0.01019s + 0.00002874}$	$\omega(10^{-3}, 10^{-2}), Mp = 0.015g$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.00256rad / s$ $\frac{6.551 \cdot 10^{-6}}{s^2 + 0.004863s + 6.551 \cdot 10^{-6}}$	$\omega(0.4, 10), Mp = 3m$ $\rho = 0.95, \omega_n = 0.51rad / s$ $\frac{0.2621}{s^2 + 0.9726s + 0.2621}$

Tabla 8.14 : Resultados de Especificaciones de Tracking Propio (acoplos)

Tracking Propio	Salidas					
	$z(1) , Va(2) , Wv(3), V(4)$			γ (6)		
Referencia	$\alpha_{ij} - \beta_{ij}$ (entrada_“Step”xFT= salida_“Step”)					
z_c(1)/Va_c(2)/Wv_c(3)/Vc(4)	$\omega(0.3, 10)$ $\frac{0.03088}{s^2 + 0.2425s + 0.03088}$	$t-sup$ (s)	$t-inf$ (s)	$\omega(0.6, 10^2)$ $\frac{0.1778}{s^2 + 0.5821s + 0.1778}$	$t-sup$ (s)	$t-inf$ (s)
$\gamma_c(6)/\alpha_c(5)/nx_c(8)$	$\alpha_{11} \equiv \frac{56.98}{s^2 + 5.402s + 56.98}$ $\beta_{11} \equiv \frac{56.98}{s^2 + 5.402s + 56.98}$	12	0.19	$\alpha_{66} \equiv \frac{25.15}{s^2 + 3.589s + 25.15}$ $\beta_{66} \equiv \frac{25.15}{s^2 + 3.589s + 25.15}$	5	0.28
		37.3	1.44		15.6	2.17
		5%	30%		5%	30%

* FT es la función de transferencia de segundo orden asociada a la especificación dada



de la forma $\frac{a}{s^2 + bs + a}$

Tabla_8.15 : Resultados de Especificaciones de Tracking Cruzado (desacoplos)

Track. Cruz.	Salidas					
Refer.	β_{ij} (entrada "Step".(FT)s= salida "Impulse")					
z_c(1)	Va(2)	Wv(3)	V(4)	α (5)	γ (6)	nz(7)
	$\beta_{21} = \frac{0.002039s}{s^2 + 0.08986s + 0.002039}$	$\beta_{31} = \frac{5.593s}{s^2 + 4.494s + 5.593}$	$\beta_{41} = \beta_{21}$	$\beta_{51} = \frac{0.0000322s}{s^2 + 0.01129s + 0.0000322}$	$\beta_{61} = \frac{8.049 \cdot 10^{-4}s}{s^2 + 0.005646s + 8.049 \cdot 10^{-6}}$	$\beta_{71} = \frac{1.835 \cdot 10^{-6}s}{s^2 + 0.002696s + 1.835 \cdot 10^{-6}}$
Va_c(2)	z(1)	Wv(3)	V(4)	α (5)	γ (6)	nz(7)
	$\beta_{12} = \frac{4.086s}{s^2 + 3.841s + 4.086}$	$\beta_{32} = \frac{4.086s}{s^2 + 3.841s + 4.086}$	$\beta_{42} = \frac{0.01022s}{s^2 + 0.192s + 0.01022}$	$\beta_{52} = \frac{0.0001715s}{s^2 + 0.02606s + 0.0001715}$	$\beta_{62} = \frac{0.00004286s}{s^2 + 0.01303s + 0.00004286}$	$\beta_{72} = \frac{9.772 \cdot 10^{-6}s}{s^2 + 0.006221s + 9.772 \cdot 10^{-6}}$
Wv_c(3)	z(1)	Va(2)	V(4)	α (5)	γ (6)	nz(7)
	$\beta_{13} = \frac{5.593s}{s^2 + 4.494s + 5.593}$	$\beta_{23} = \frac{0.01835s}{s^2 + 0.2696s + 0.01835}$	$\beta_{43} = \beta_{23}$	$\beta_{53} = \frac{0.0002898s}{s^2 + 0.03387s + 0.0002898}$	$\beta_{63} = \frac{0.00007244s}{s^2 + 0.01694s + 0.00007244}$	$\beta_{73} = \frac{0.00001651s}{s^2 + 0.008087s + 0.00001651}$
α_c(5)	z(1)	Va(2)	Wv(3)	V(4)	γ (6)	nz(7)
	$\beta_{15} = \frac{2.169 \cdot 10^4 s}{s^2 + 92.67s + 2.169 \cdot 10^4}$	$\beta_{25} = \frac{510.1s}{s^2 + 42.91s + 510.1}$	$\beta_{35} = \beta_{15}$	$\beta_{45} = \beta_{25}$	$\beta_{65} = \frac{22.37s}{s^2 + 8.987s + 22.37}$	$\beta_{75} = \frac{5.421s}{s^2 + 4.634s + 5.421}$
γ (6)	z(1)	Va(2)	Wv(3)	V(4)	α (5)	nz(7)
	$\beta_{16} = \frac{2.169 \cdot 10^4 s}{s^2 + 92.67s + 2.169 \cdot 10^4}$	$\beta_{26} = \frac{510.1s}{s^2 + 42.91s + 510.1}$	$\beta_{36} = \beta_{16}$	$\beta_{46} = \beta_{26}$	$\beta_{66} = \frac{95.12s}{s^2 + 19.41s + 95.12}$	$\beta_{76} = \frac{5.421s}{s^2 + 4.634s + 5.421}$
nz_c(7)	z(1)	Va(2)	Wv(3)	V(4)	α (5)	γ (6)
	$\beta_{17} = \frac{6.606 \cdot 10^4 s}{s^2 + 161.7s + 6.606 \cdot 10^4}$	$\beta_{27} = \frac{1651s}{s^2 + 80.87s + 1651}$	$\beta_{37} = \beta_{17}$	$\beta_{47} = \beta_{27}$	$\beta_{67} = \frac{289.8s}{s^2 + 33.87s + 289.8}$	$\beta_{77} = \frac{72.44s}{s^2 + 16.94s + 72.44}$

8.2 Diseño.

Se va a trabajar con 881 escenarios de vuelo distintos, que representan el conjunto de la incertidumbre de la planta, definidos individualmente como plantillas ("templates"). Para la obtención de plantillas se ha tenido en cuenta además [GARTEUR, 97c]:

-  Dinámica de variables realimentadas: se aplica un retraso computacional máximo de 100ms en el tracking de cada variable considerada.
-  Dinámica de actuadores y control de empuje de motor: se incorpora a la planta, además de usarse para la definición de Especificaciones de Esfuerzo de Control, tanto para regulación, como para seguimiento.

El rango de operación de frecuencias, a efectos de cumplimiento de especificaciones robustas (RP) en el procesamiento de las plantillas, es de $\omega(0.5-1.7)rad / s$.

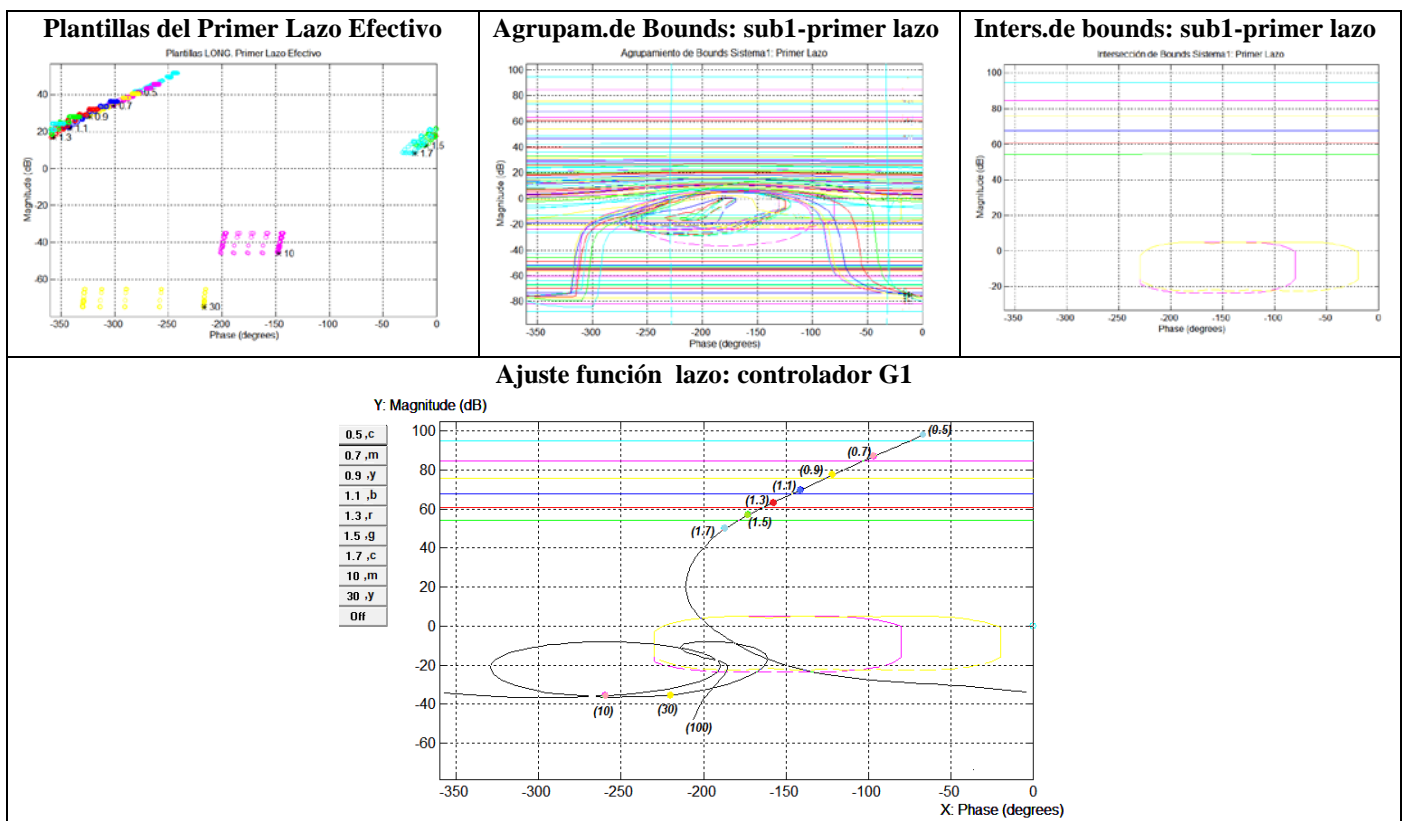
Para conseguir estabilidad robusta (RS) en el sistema de control, la banda de frecuencia ampliada será de $\omega(0.5 - 30)rad / s$.

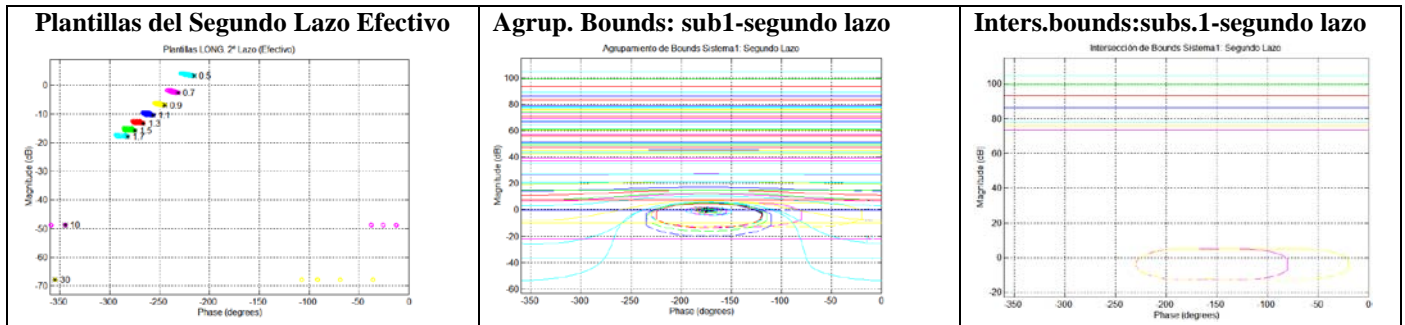
En la aplicación del proceso de diseño, utilizando la toolbox QFT de MATLAB [Borghesani et al., 95], se han considerado, en general:

- ✚ Criterios de estabilidad basados en el trabajo de [Cohen et al.,94]: gráficamente en el “Nichols Chart” un sistema en lazo abierto es estable si, yendo de menos a más frecuencia, su ganancia disminuye, comenzando en el primer cuadrante, la frecuencia de cruce se da con el cuarto cuadrante y para altas frecuencias pasa al tercer cuadrante.
- ✚ Los sistemas físicos prácticos deben tener al menos 2 o más polos que ceros y las altas frecuencias deben ser atenuadas, a efectos de minimizar el ruido de los sensores [Yaniv, 99].

Los resultados obtenidos gráficamente son los descritos a continuación en la *Tabla_8.16*.

Tabla_8.16 : Resultados gráficos del diseño: obtención de controladores

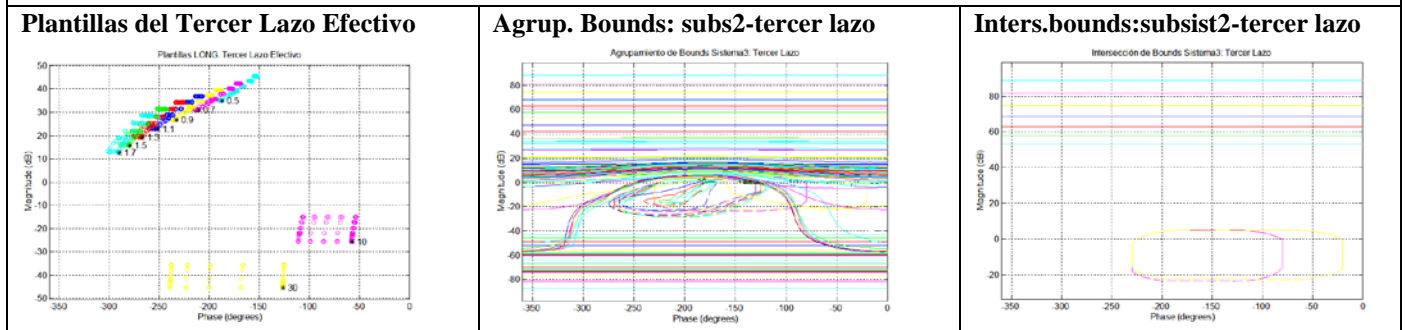
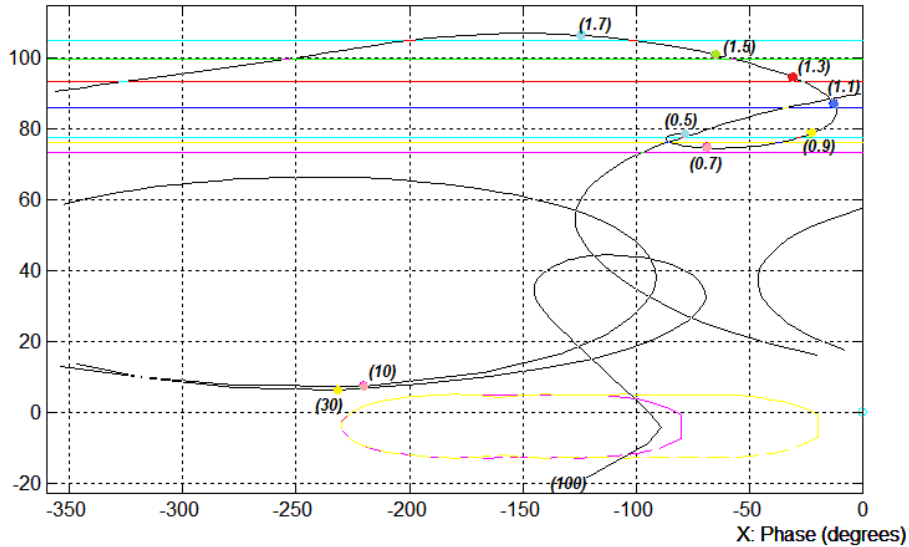




Ajuste función de lazo: controlador G2

Y: Magnitude (dB)

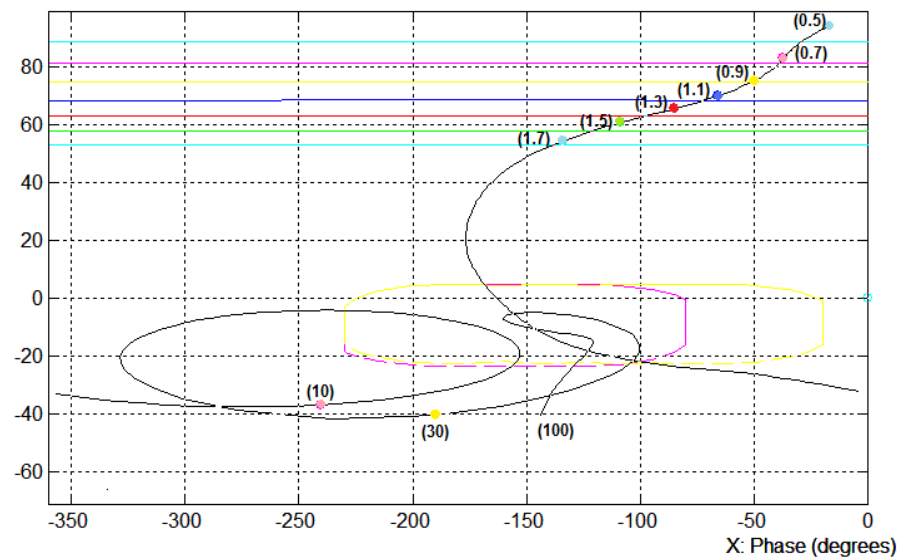
- 0.5 ,c
- 0.7 ,m
- 0.9 ,y
- 1.1 ,b
- 1.3 ,r
- 1.5 ,g
- 1.7 ,c
- 10 ,m
- 30 ,y
- Off

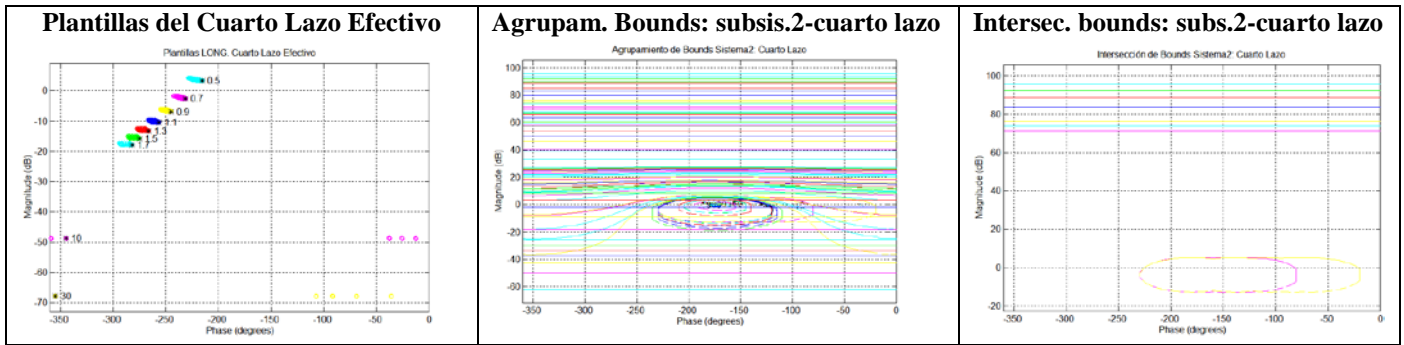


Ajuste función lazo: controlador G3

Y: Magnitude (dB)

- 0.5 ,c
- 0.7 ,m
- 0.9 ,y
- 1.1 ,b
- 1.3 ,r
- 1.5 ,g
- 1.7 ,c
- 10 ,m
- 30 ,y
- Off

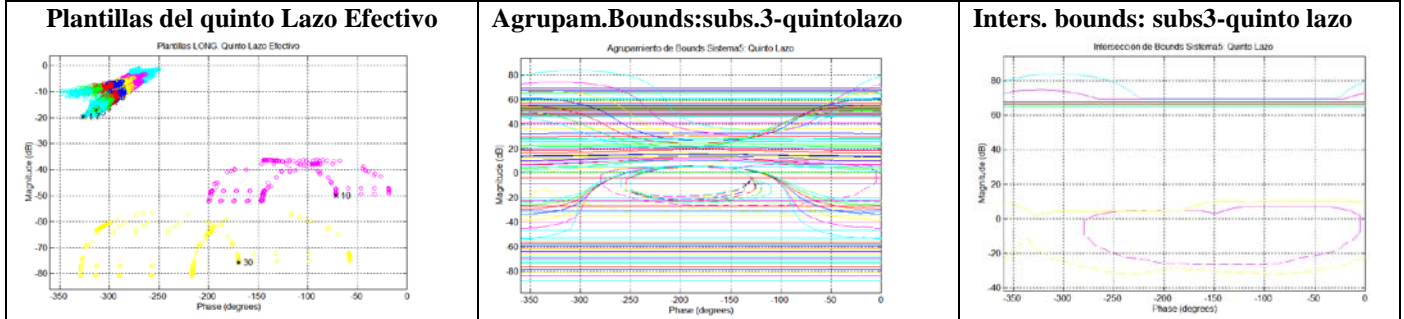
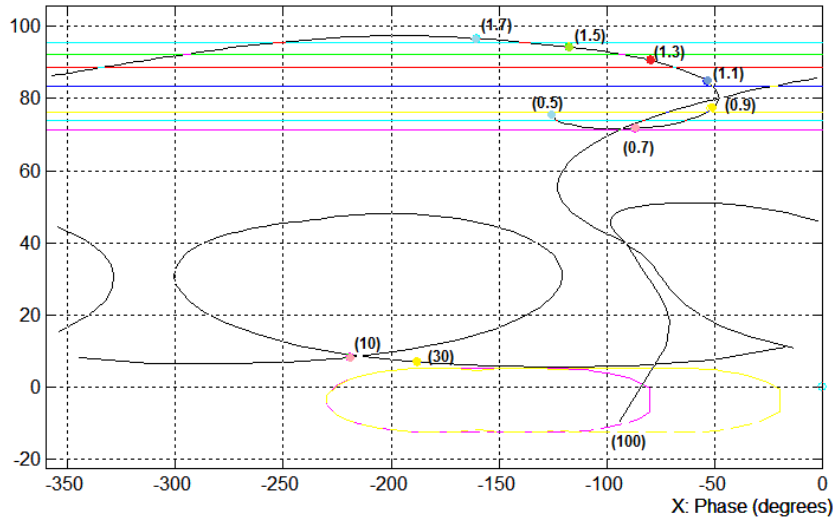




Ajuste función lazo: controlador G4

Y: Magnitude (dB)

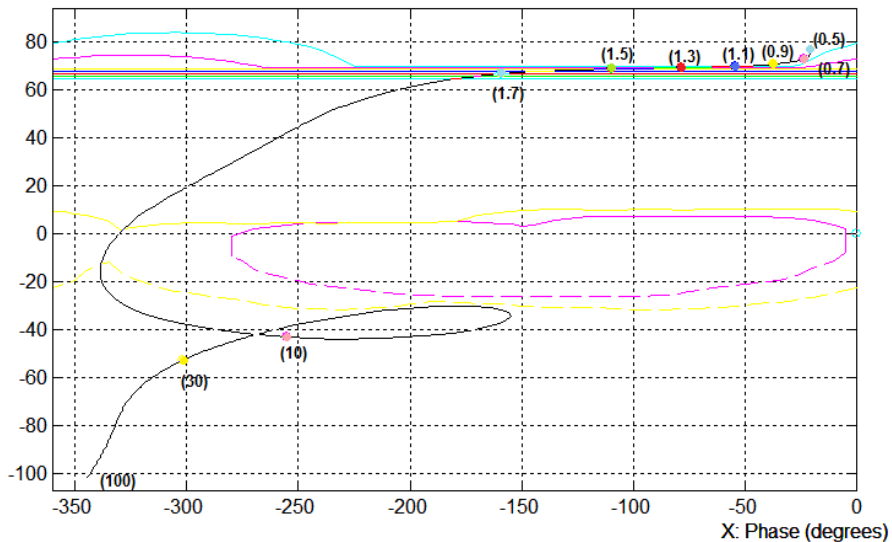
- 0.5 ,c
- 0.7 ,m
- 0.9 ,y
- 1.1 ,b
- 1.3 ,r
- 1.5 ,g
- 1.7 ,c
- 10 ,m
- 30 ,y
- Off

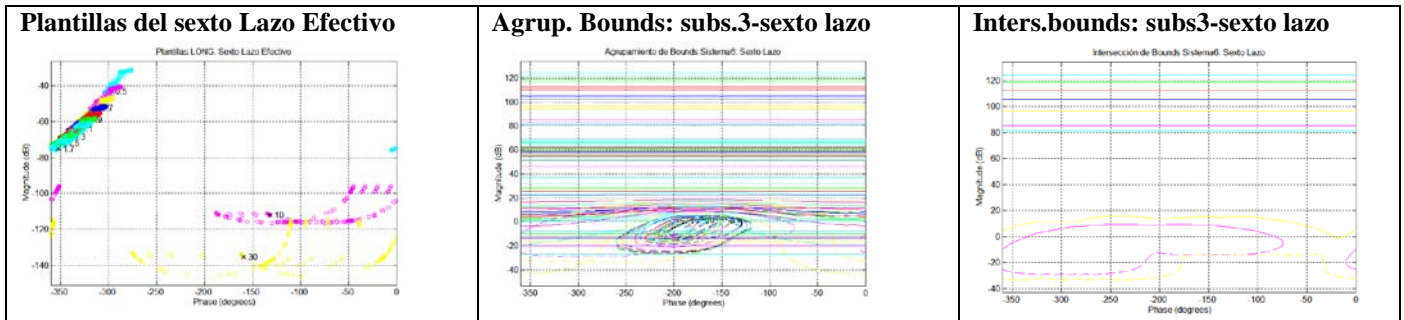


Ajuste función de lazo: controlador G5

Y: Magnitude (dB)

- 0.5 ,c
- 0.7 ,m
- 0.9 ,y
- 1.1 ,b
- 1.3 ,r
- 1.5 ,g
- 1.7 ,c
- 10 ,m
- 30 ,y
- Off

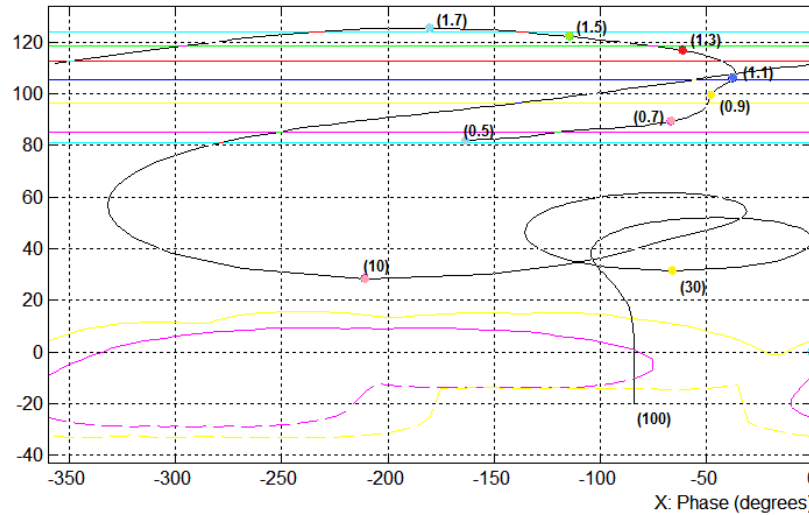




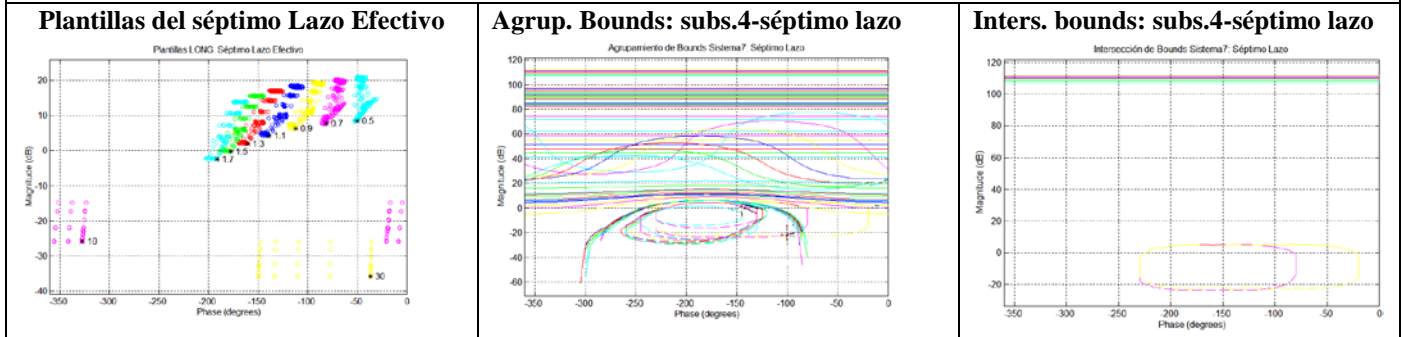
Ajuste función lazo: controlador G6

Y: Magnitude (dB)

0.5 ,c
0.7 ,m
0.9 ,y
1.1 ,b
1.3 ,r
1.5 ,g
1.7 ,c
10 ,m
30 ,y
Off



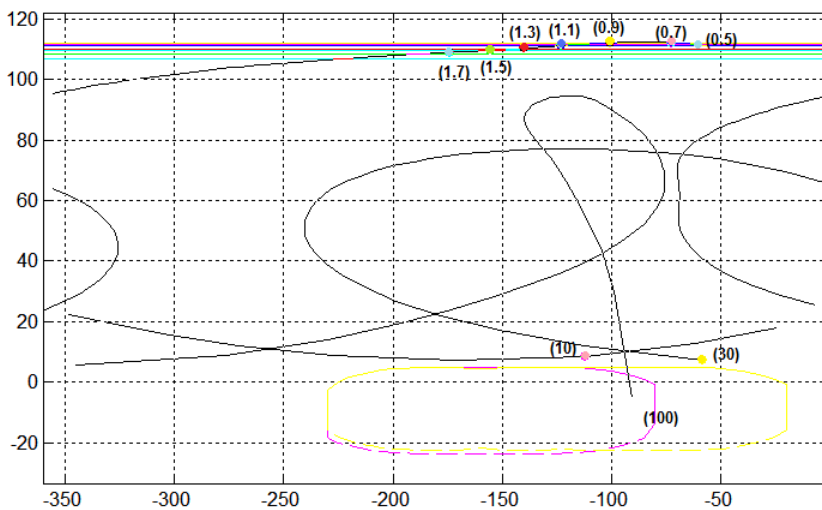
X: Phase (degrees)



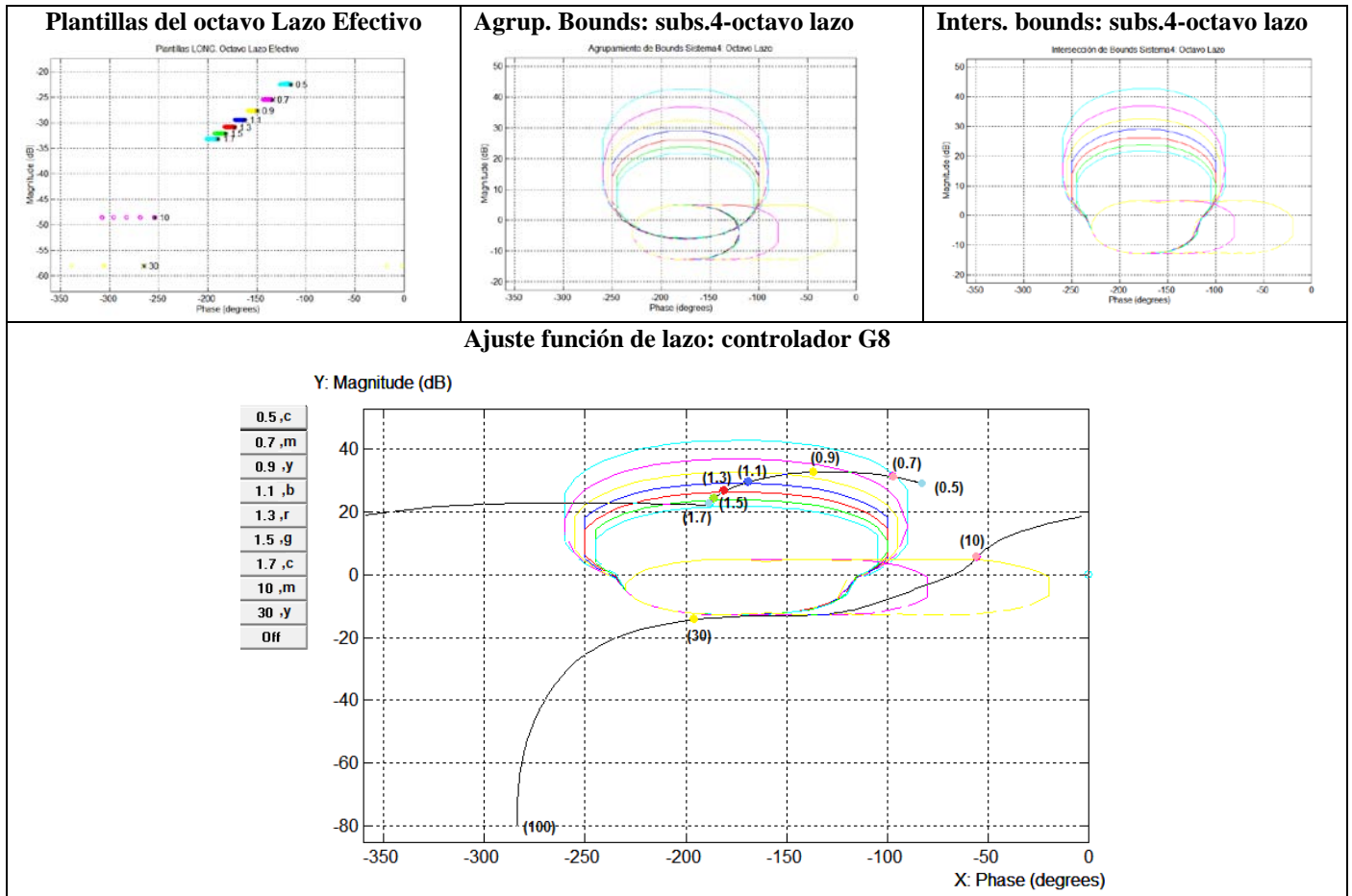
Ajuste función lazo: controlador G7

Y: Magnitude (dB)

0.5 ,c
0.7 ,m
0.9 ,y
1.1 ,b
1.3 ,r
1.5 ,g
1.7 ,c
10 ,m
30 ,y
Off



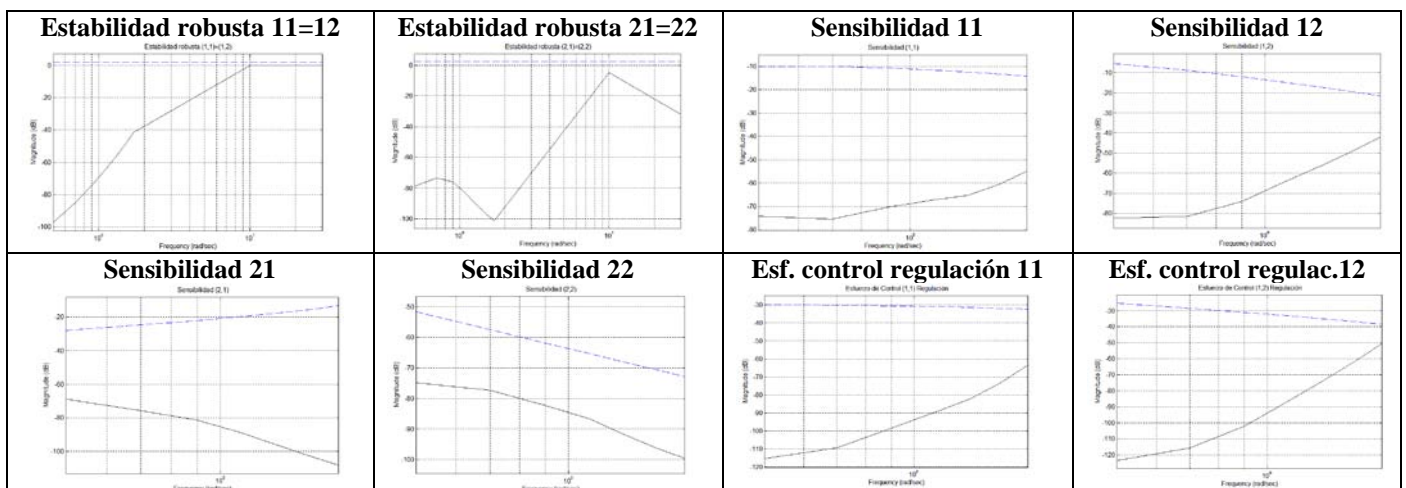
X: Phase (degrees)

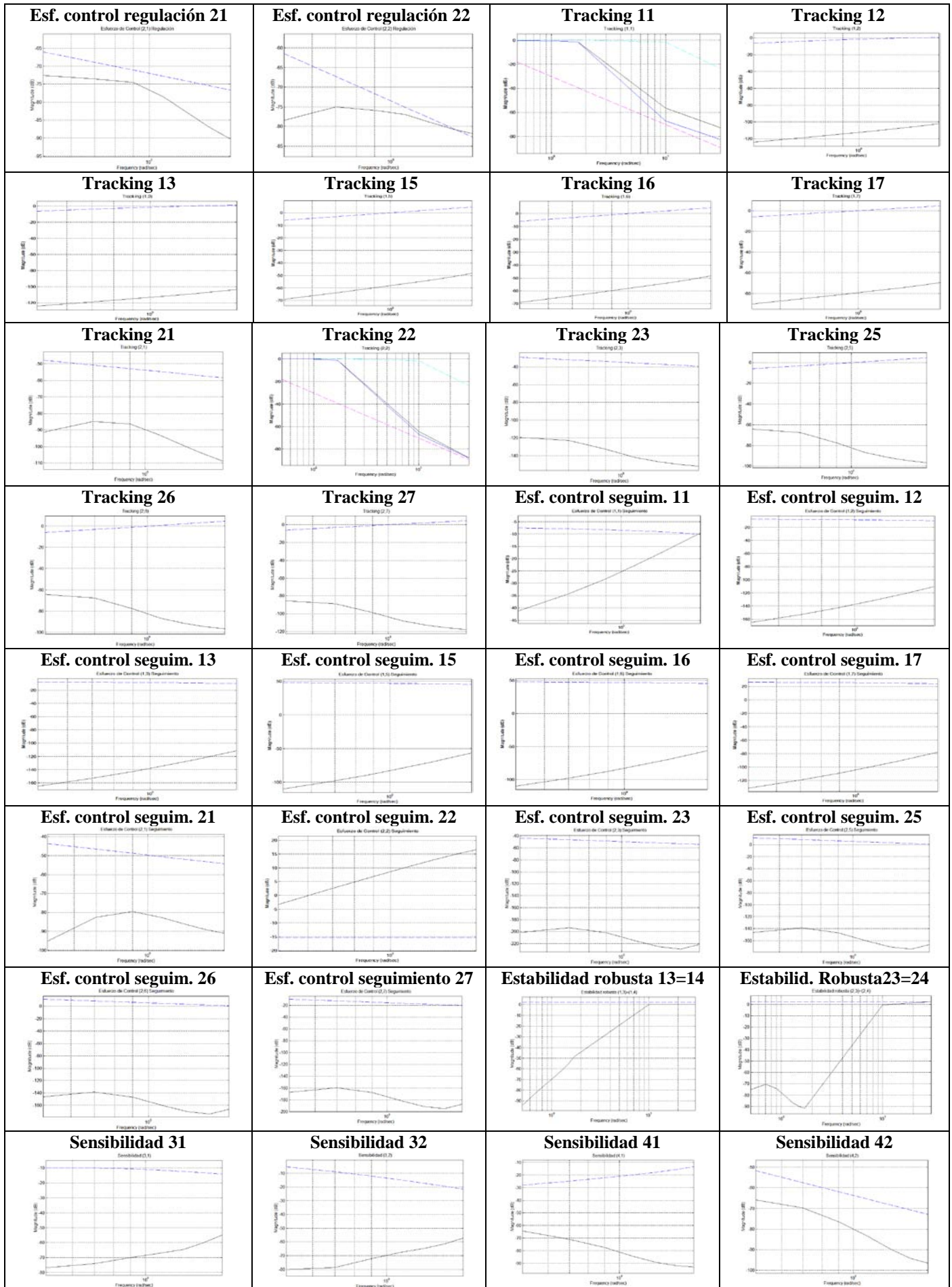


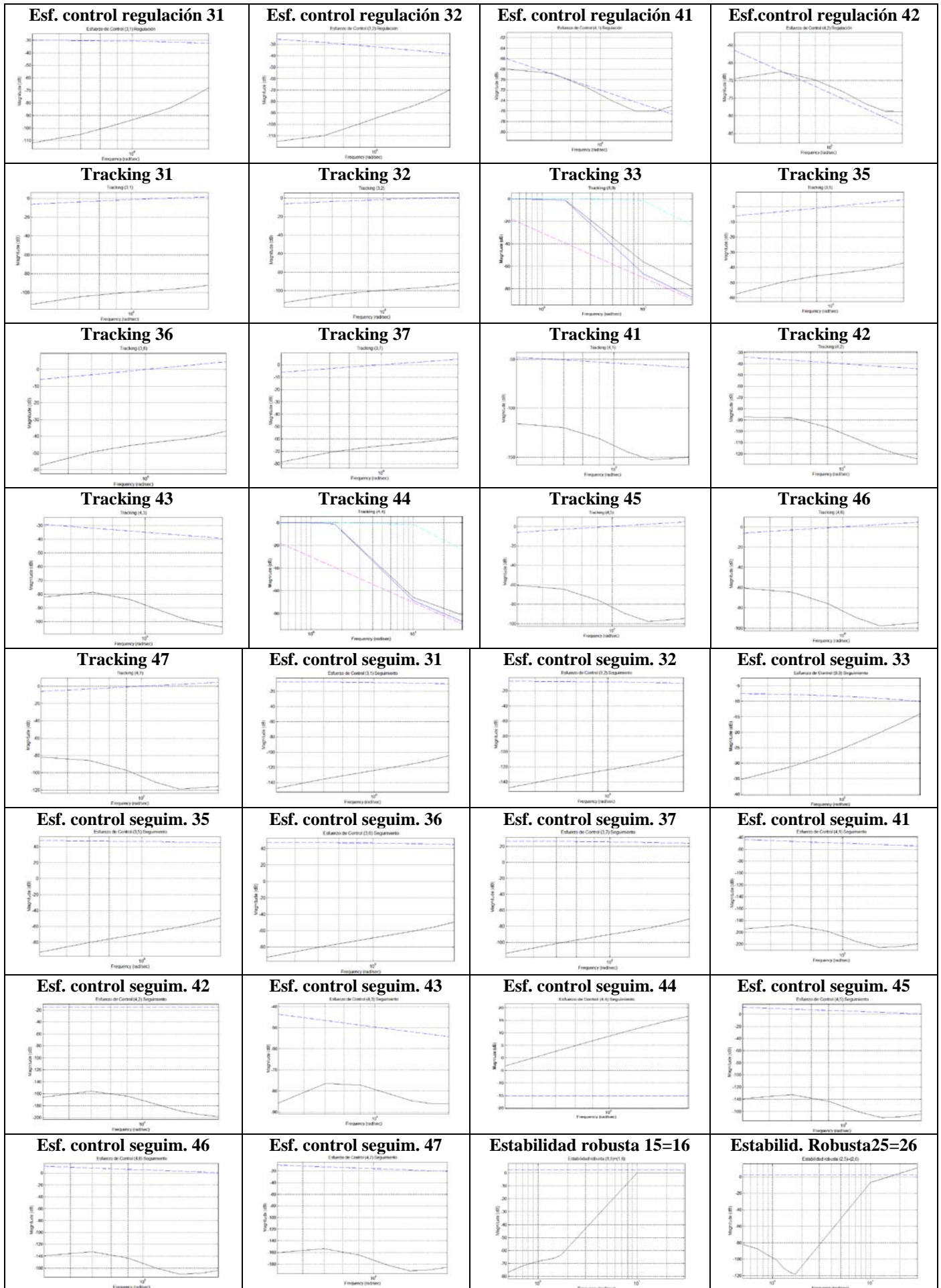
8.3 Análisis Frecuencial y Temporal.

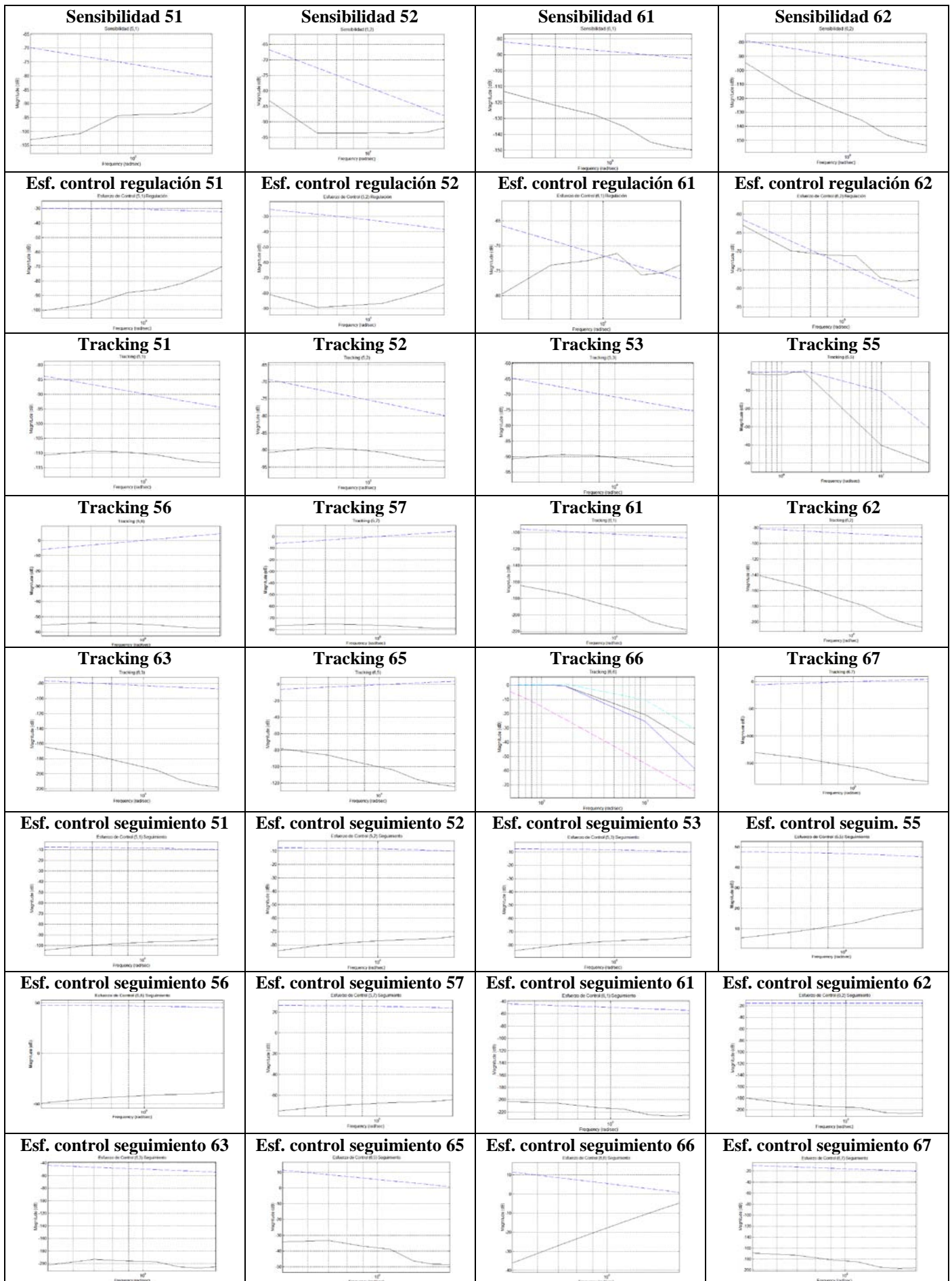
Los resultados obtenidos tras el proceso de diseño, proporcionan el siguiente análisis en frecuencia, en donde las líneas discontinuas azules representan las especificaciones y las líneas continuas en negro el resultado:

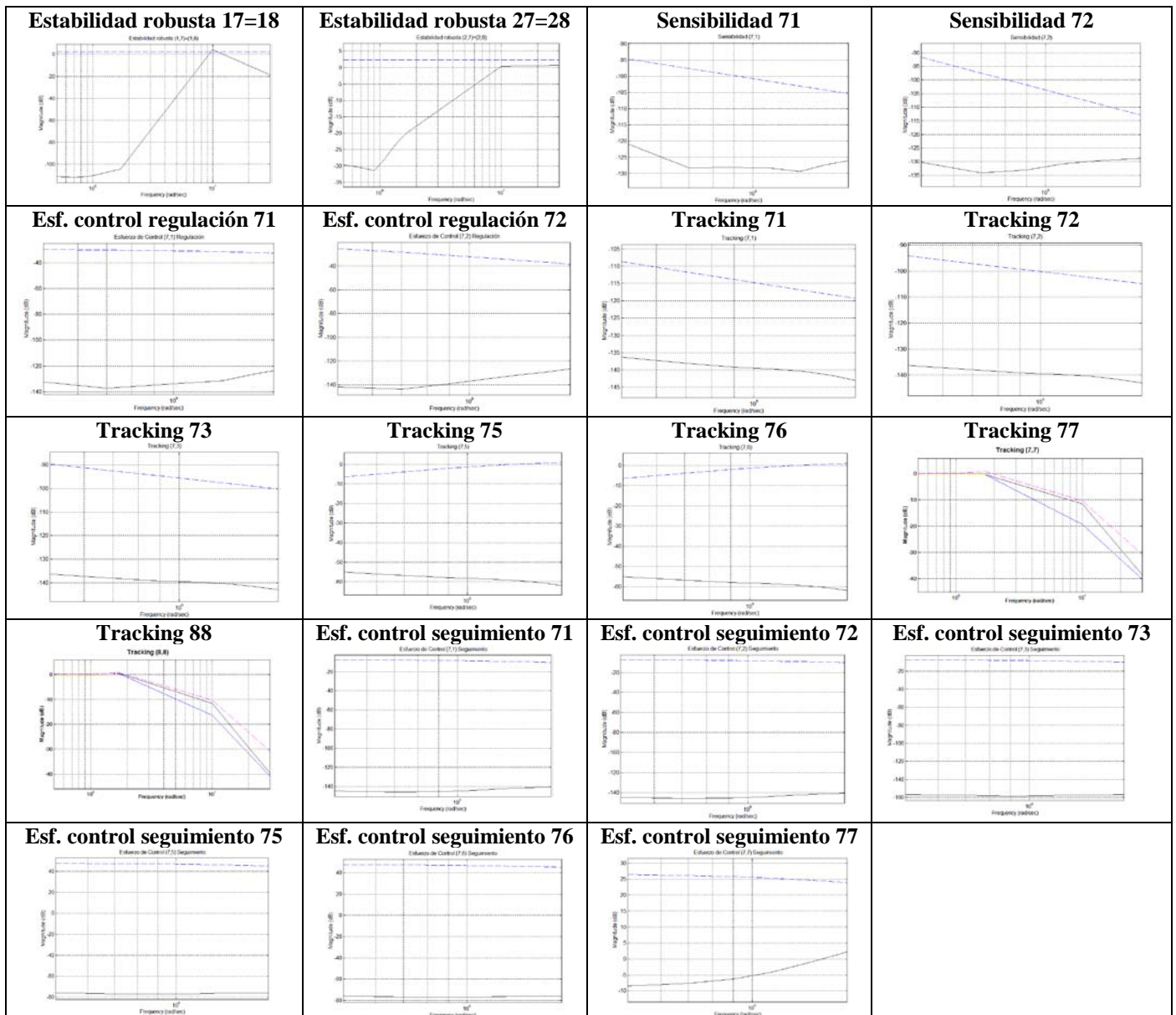
Tabla_8.17 : Resultados gráficos del Análisis en Frecuencia





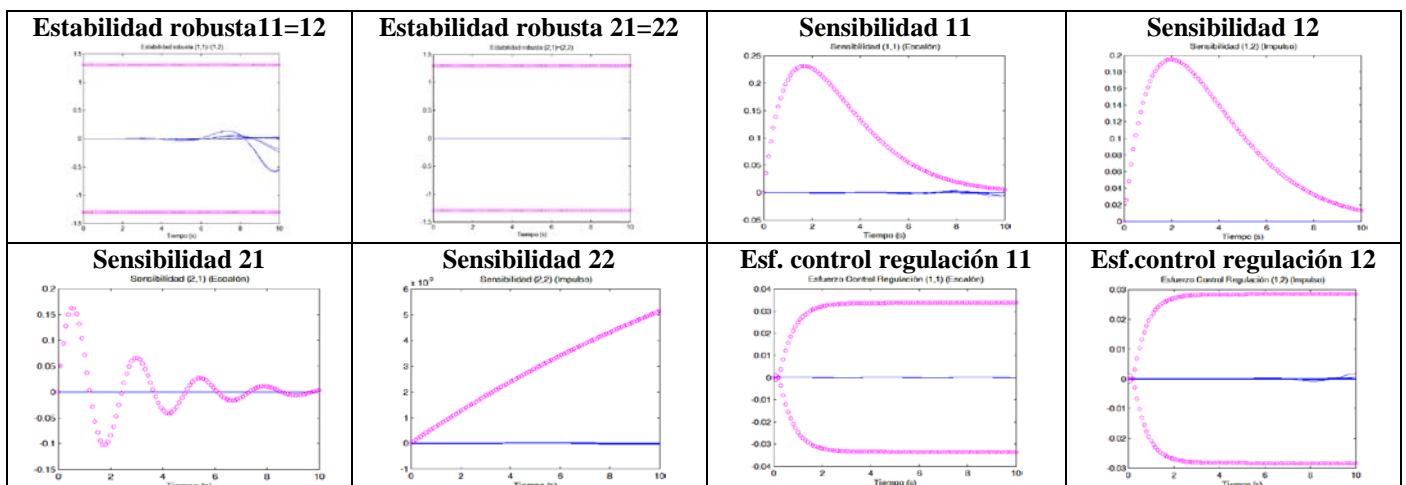


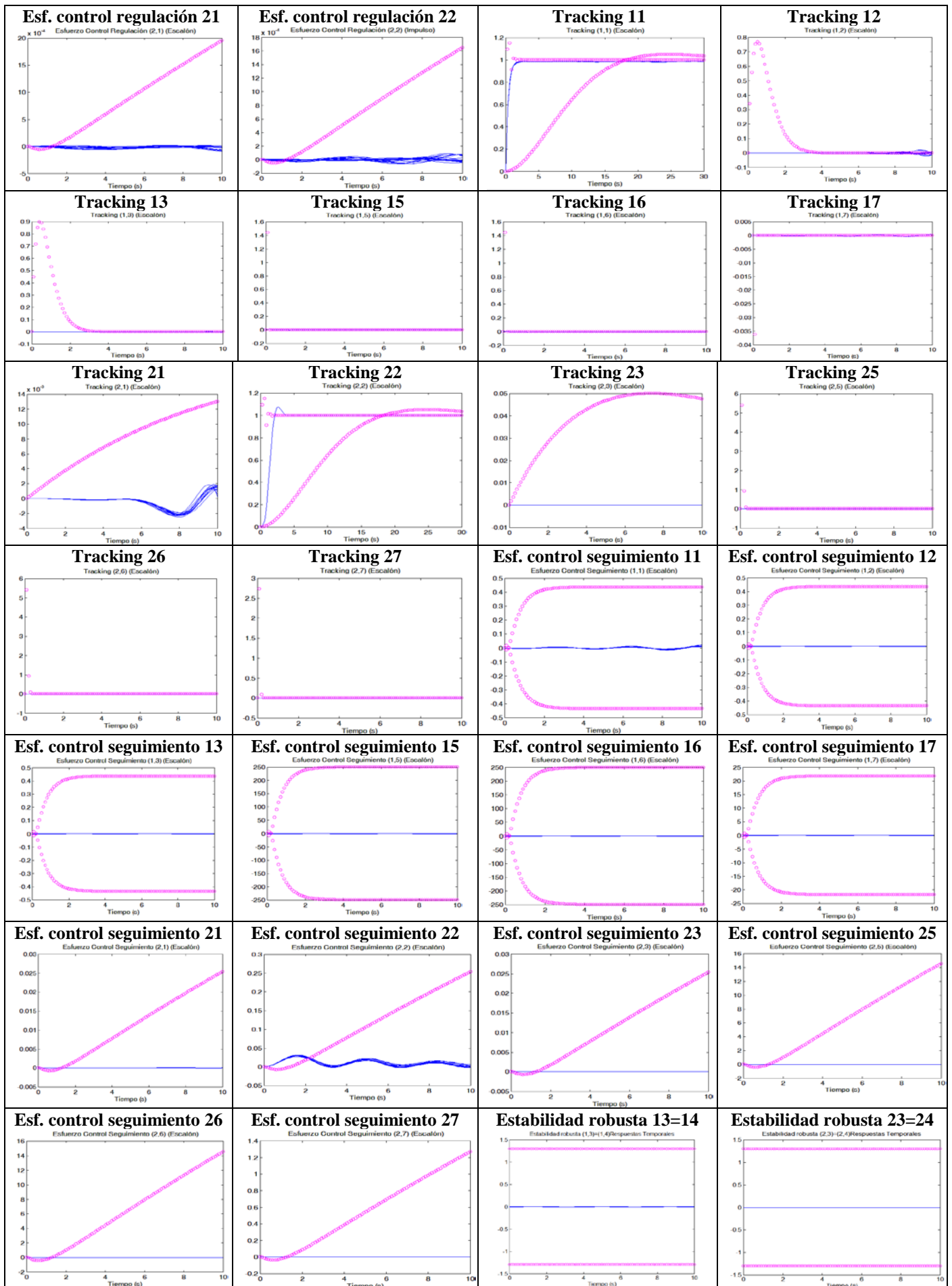


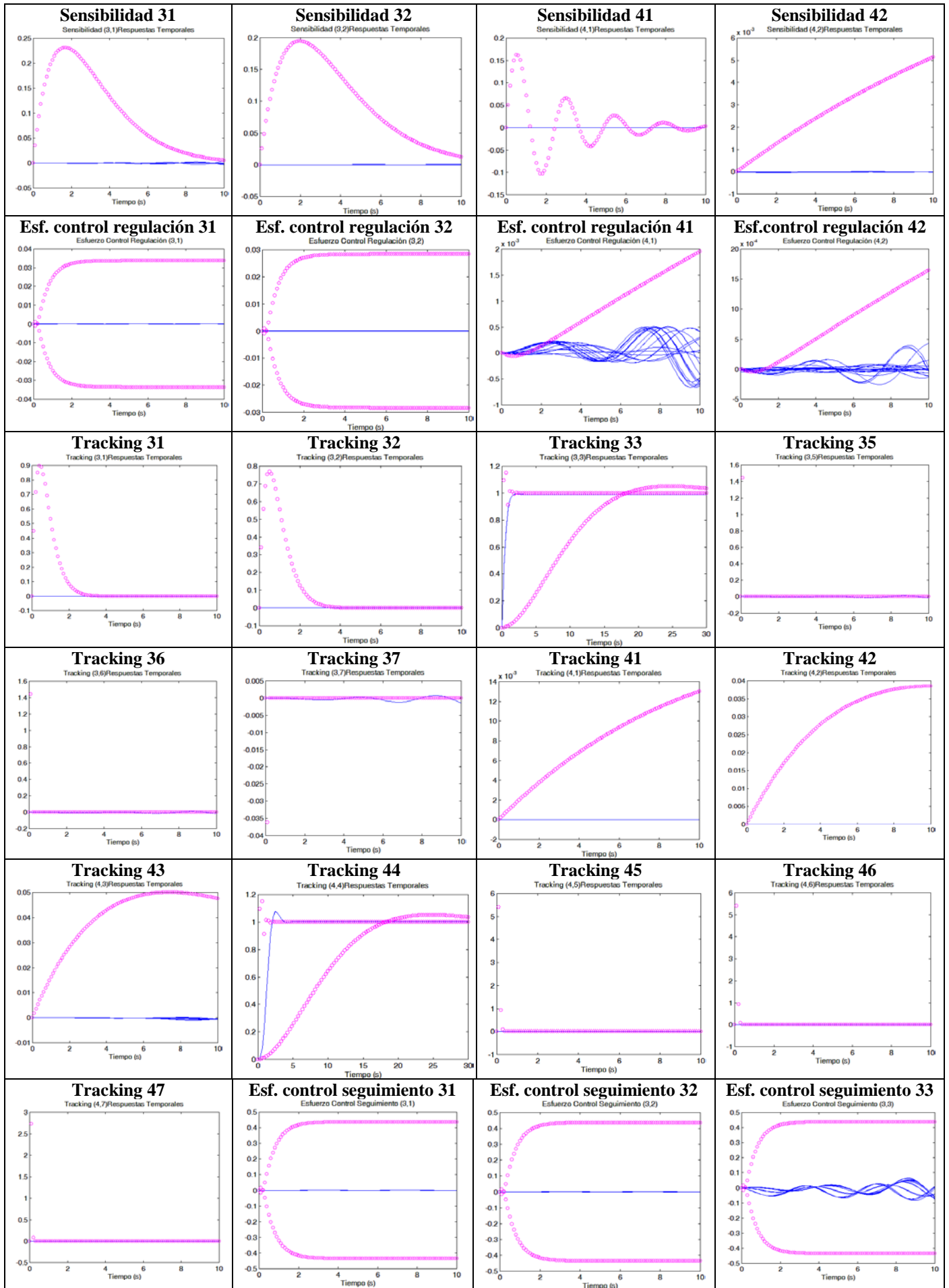


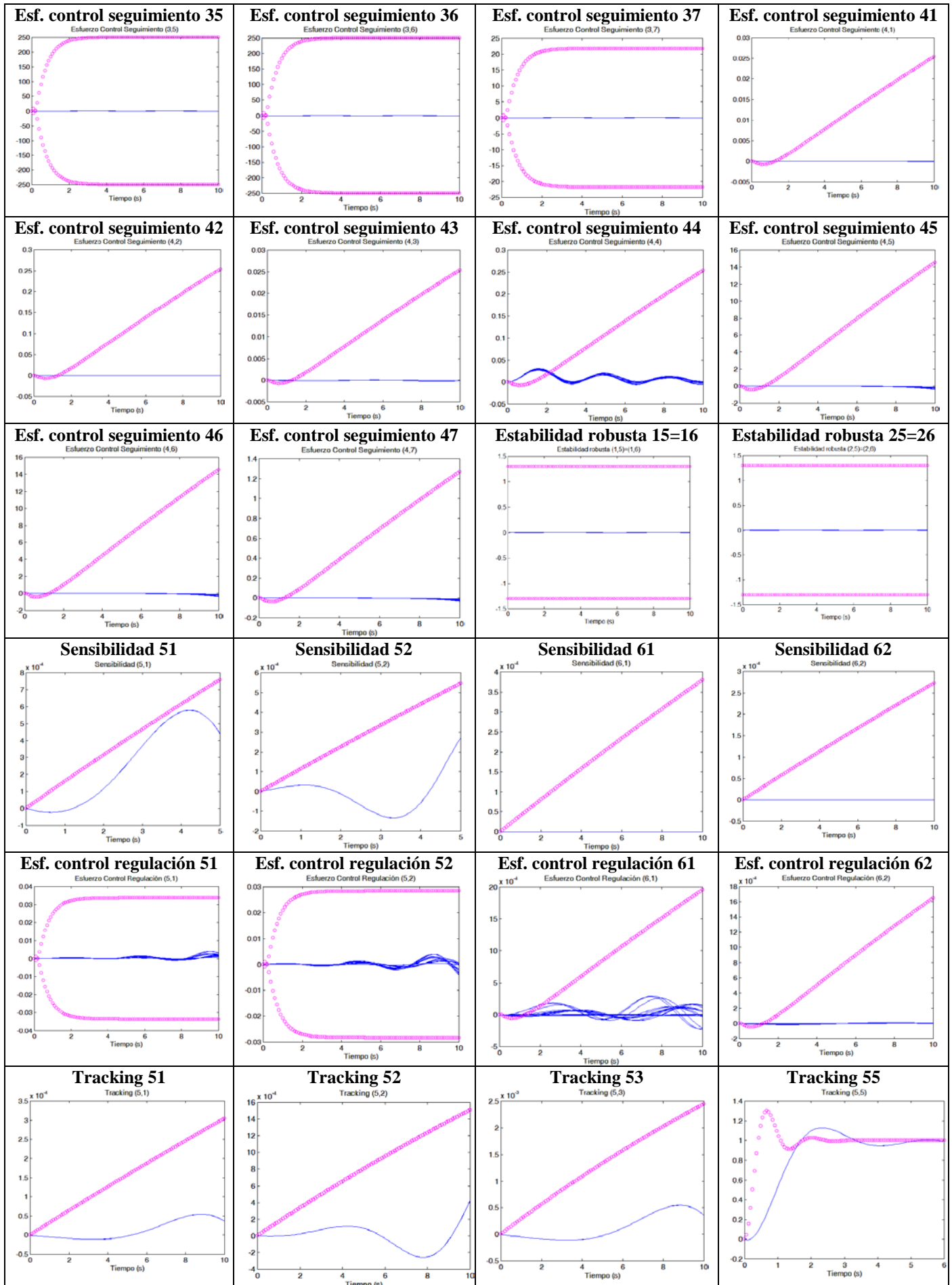
Los resultados del análisis en frecuencia proporcionan el siguiente análisis temporal, en donde las líneas gruesas azules representan las especificaciones y las líneas finas verdes el resultado:

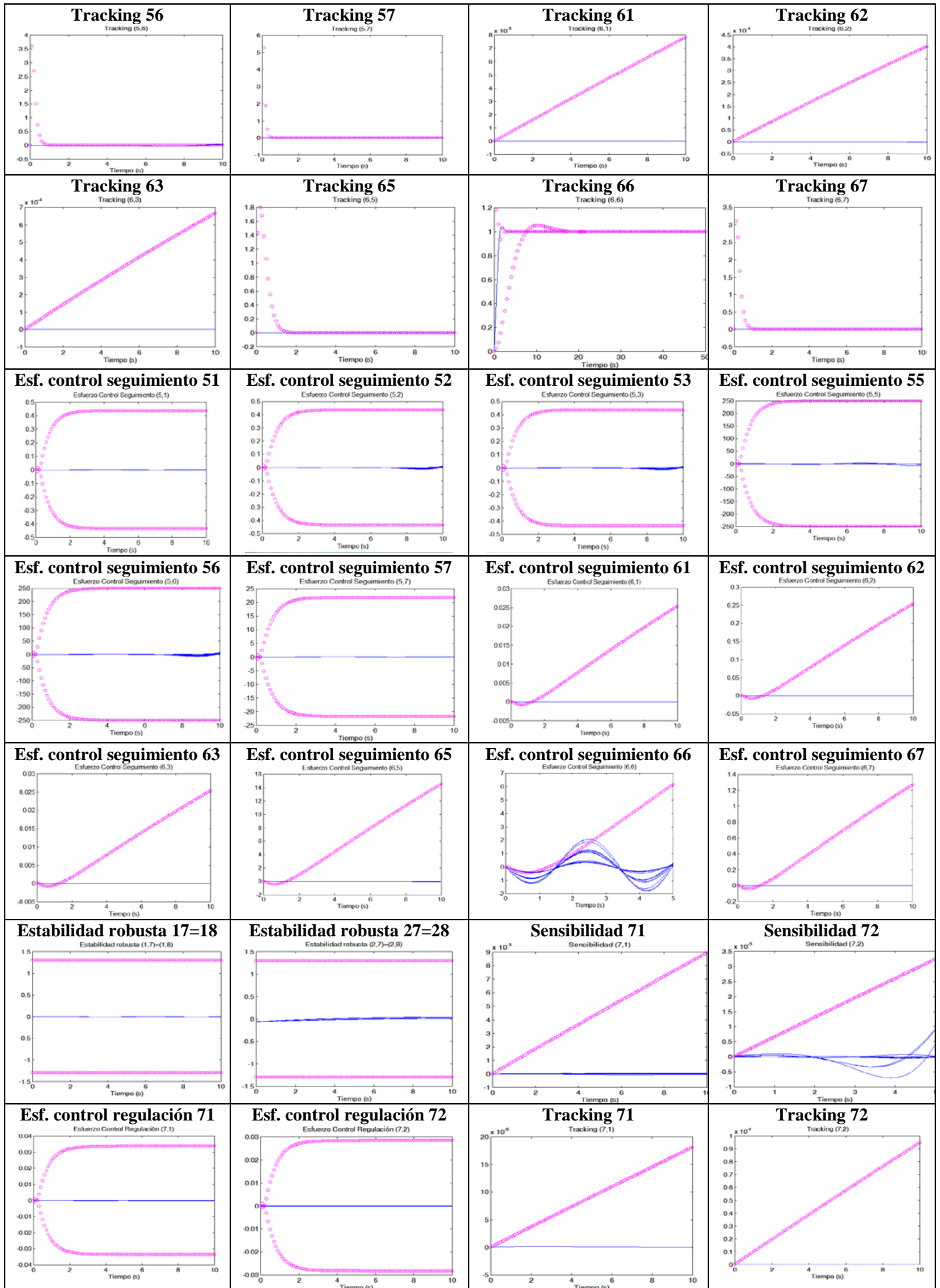
Tabla 8.18 : Resultados gráficos del Análisis temporal

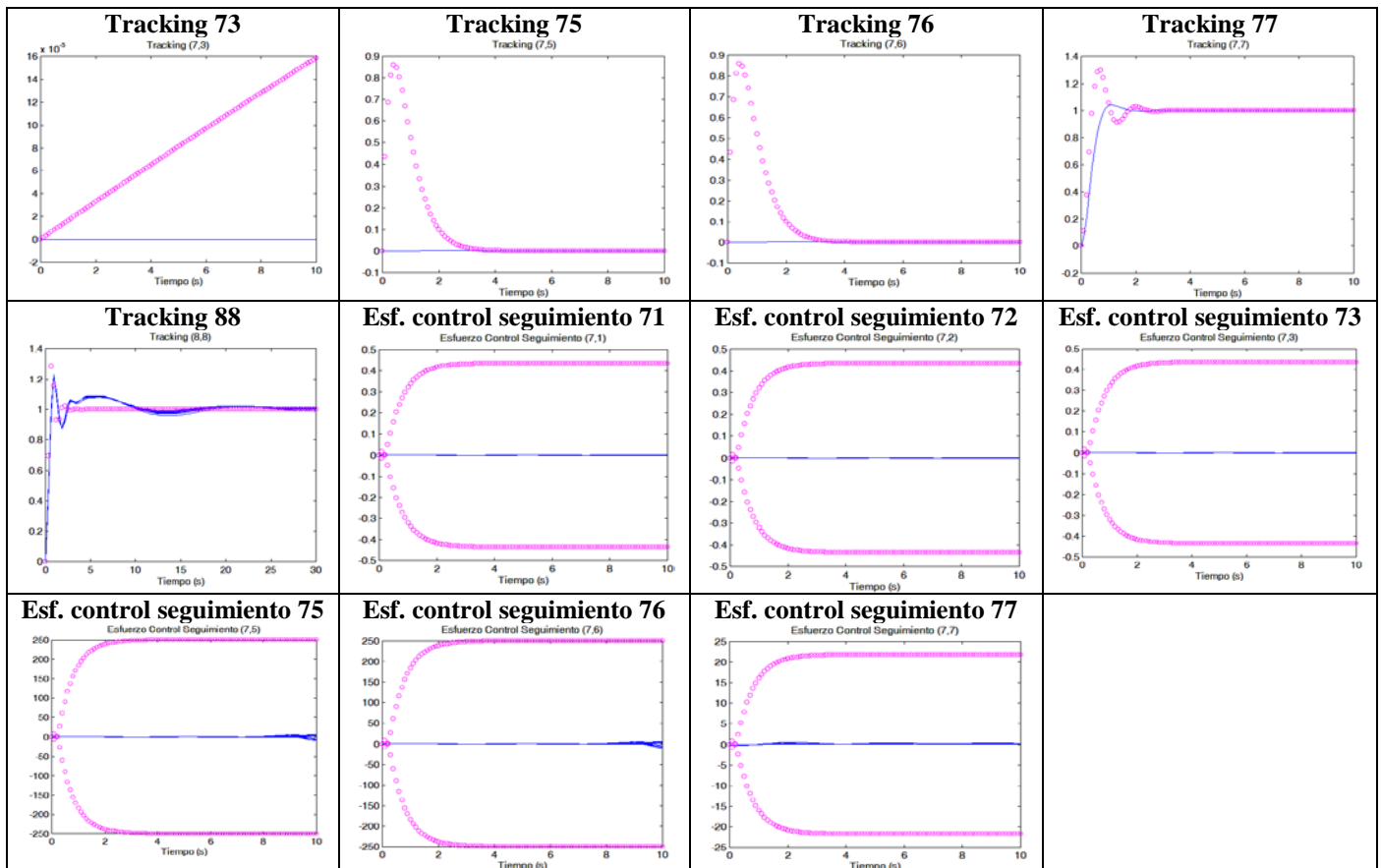












Observaciones:

- Las especificaciones de esfuerzo de control respecto a los actuadores se han considerado simétricas en el dominio del tiempo, esto es, con $\pm 25^\circ$ de deflexión.
- A efectos del análisis temporal, a excepción de la estabilidad robusta, se ha tenido en cuenta los criterios dados por [Houpis, 02], por los que “la bondad del diseño de sistemas de control de vuelo se define dentro de un horizonte temporal, fuera del cual las especificaciones dadas son menos importantes, ya que el operador humano inyectará nuevas entradas al sistema. En particular, en muchos escenarios de control de vuelo el horizonte temporal es suficiente con 5s”. Se ha utilizado en el análisis temporal un horizonte de 10s en casi todos los casos.
- Se han aplicado las “consideraciones para realización práctica” del Capítulo 5.2.8

8.4 Resultados Finales.

Teniendo en cuenta que se ha trabajado con 8 subsistemas MIMO [2,2] independientes y, que con cada uno de ellos se ha obtenido una solución parcial basada en un controlador No diagonal $G_i[2,2]$ y un prefiltro diagonal $F_i[2,8]$ con elementos off-diagonal, la solución final para el sistema de control expuesto es un controlador No diagonal $G[2,8]$ y un prefiltro diagonal $F[8,8]$ con elementos off-diagonal.

Los resultados numéricos obtenidos tras la aplicación del proceso de diseño “squaring up”, que incluye los procedimientos de reducción de orden de controladores y prefiltros, descritos en el Capítulo 7.1, son los siguientes:

Tabla 8.19 : Funciones de transferencia de los elementos del controlador final

$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_3 & 0 & g_5 & 0 & g_7 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & g_4 & 0 & g_6 & 0 & g_8 \end{bmatrix}$
$g_1 = \frac{0.48s^6 + 0.84s^5 + 57.63s^4 + 91.47s^3 + 468.58s^2 + 358.42s + 474.38}{0.0002s^8 + 0.0048s^7 + 0.1831s^6 + 0.8514s^5 + 2.6942s^4 + 3.1651s^3 + 3.0995s^2 + 0.8421s + 0.0285}$
$g_2 = \frac{339s^6 + 373s^5 + 34263s^4 + 36996s^3 + 33604s^2 + 17576s + 461}{0.0008s^6 + 0.0001s^5 + 0.21s^4 + 0.2544s^3 + 1.2117s^2 + 0.7572s + 1.517}$
$g_3 = \frac{180s^6 + 380s^5 + 19370s^4 + 46040s^3 + 103110s^2 + 28270s + 35470}{s^8 + 8.175s^7 + 286.2531s^6 + 292.4713s^5 + 843.2095s^4 + 145.8063s^3 + 328.1161s^2 + 23.5322}$
$g_4 = \frac{213s^6 + 22s^5 + 18716s^4 + 36357s^3 + 26958s^2 + 19338s + 3056}{0.0095s^7 + 0.0196s^6 + 0.1079s^5 + 0.4009s^4 + 0.7099s^3 + 1.8417s^2 + 1.3412s + 1.9074}$
$g_5 = \frac{47s^6 + 67s^5 + 4831s^4 + 4979s^3 + 12725s^2 + 4293s + 4157}{0.001s^9 + 0.0341s^8 + 0.2813s^7 + 0.5284s^6 + 1.5343s^5 + 1.4243s^4 + 2.1206s^3 + 0.7999s^2 + 0.5824s + 0.0024}$
$g_6 = \frac{-10^6(4.92s^4 + 383.86s^2 + 159.07s + 207.23)}{0.001s^6 + 0.0045s^5 + 0.7702s^4 + 0.2538s^3 + 3.972s^2 + 0.713s + 4.9007}$
$g_7 = \frac{630s^6 + 1520s^5 + 65290s^4 + 151160s^3 + 230540s^2 + 113910s + 46180}{0.001s^8 + 0.0099s^7 + 0.0013s^6 + 0.2132s^5 + 0.4243s^4 + 1.3201s^3 + 1.2778s^2 + 0.8526s + 0.2087}$
$g_8 = \frac{478.1s^3 + 2451.2s^2 + 3295.9s + 1559.8}{0.001s^6 + 0.0196s^5 + 0.4392s^4 + 0.5759s^3 + 8.0492s^2 + 3.6825s + 6.2902}$

Tabla 8.20 : Funciones de transferencia de los elementos del Prefiltro final

$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & F_{15} & F_{16} & F_{17} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & F_{25} & F_{26} & F_{27} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & F_{35} & F_{36} & F_{37} & 0 \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} & F_{47} & 0 \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & 0 & F_{55} & F_{56} & F_{57} & 0 \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & 0 & F_{65} & F_{66} & F_{67} & 0 \\ F_{71} & F_{72} & F_{73} & 0 & F_{75} & F_{76} & F_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{88} \end{bmatrix}$
--

$F_{11} = \frac{1.8443s^2 + 3.7055s + 2.2796}{0.6885s^3 + 3.2561s^2 + 4.5787s + 2.3272}$	$F_{12} = \frac{0.0096s^4 + 0.0066s^3 + 0.1214s^2 + 0.0436s + 0.2214}{10000s^5 + 13274s^4 + 6308s^3 + 7182s^2 + 786s + 751}$
$F_{13} = \frac{0.1636s^4 + 0.0431s^3 + 0.2334s^2 + 0.0096s + 0.0774}{100000s^5 + 143750s^4 + 64850s^3 + 116700s^2 + 9200s + 22670}$	$F_{15} = \frac{0.0017s^2 + 0.0002s + 0.0015}{s^5 + 0.8432s^4 + 0.953s^3 + 0.6704s^2 + 0.1982s + 0.1187}$
$F_{16} = \frac{0.0017s^2 + 0.0002s + 0.0015}{s^5 + 0.8432s^4 + 0.953s^3 + 0.6704s^2 + 0.1982s + 0.1187}$	$F_{17} = \frac{0.0003s^2 + 0.0001s + 0.0014}{s^5 + 0.7283s^4 + 0.6702s^3 + 0.4452s^2 + 0.0971s + 0.0594}$
$F_{21} = \frac{10^{-5}(0.5322s^2 + 0.5699s + 0.7132)}{s^3 + 0.7708s^2 + 3.741s + 0.5034}$	$F_{22} = \frac{0.03865s^2 + 0.4784s + 9.0331}{s^4 + 2.5396s^3 + 8.7796s^2 + 11.4802s + 9.6241}$
$F_{23} = \frac{10^{-6}(0.1537s^2 + 0.211s + 0.3297)}{s^3 + 0.5913s^2 + 3.6152s + 1.5715}$	$F_{25} = \frac{10^{-3}(0.0881s^2 + 0.1209s + 0.1889)}{s^3 + 0.5913s^2 + 3.6152s + 1.5715}$
$F_{26} = \frac{10^{-3}(0.0881s^2 + 0.1209s + 0.1889)}{s^3 + 0.5913s^2 + 3.6152s + 1.5715}$	$F_{27} = \frac{10^{-4}(0.0769s^2 + 0.1055s + 0.1648)}{s^3 + 0.5913s^2 + 3.6152s + 1.5715}$
$F_{31} = \frac{0.0018s^2 + 0.002}{s^4 + 0.7156s^3 + 0.043s + 0.6679}$	$F_{32} = \frac{0.0013s^2 + 0.0016}{s^4 + 1.4219s^3 + 0.3971s + 0.4313}$
$F_{33} = \frac{0.0767s^3 + 1.2322s^2 + 7.8983s + 2.8309}{0.0761s^4 + 0.7996s^3 + 4.8348s^2 + 9.1144s + 2.8674}$	$F_{35} = \frac{0.0025s^2 + 0.0019s + 0.0017}{s^4 + 0.1088s^3 + 0.7408s^2 + 0.0356s + 0.1215}$
$F_{36} = \frac{0.0025s^2 + 0.0019s + 0.0017}{s^4 + 0.1088s^3 + 0.7408s^2 + 0.0356s + 0.1215}$	$F_{37} = \frac{0.0009s^4 + 0.0003s^3 + 0.0035s^2 + 0.0002s + 0.0065}{s^5 + 0.5848s^3 + 0.1371s + 0.0218}$
$F_{41} = \frac{10^{-5}(0.161s + 0.0886)}{s^7 + 0.193s^6 + 6.0095s^5 + 2.3066s^4 + 10.0051s^3 + 5.5238s^2 + 1.1921s + 0.9601}$	$F_{42} = \frac{10^{-5}(0.5269s^2 + 0.0123s + 0.284)}{s^4 + 0.1286s^3 + 3.7468s^2 + 0.1995s + 1.9301}$
$F_{43} = \frac{0.0375s^4 + 0.0776s^3 + 0.037s^2 + 0.1908s + 0.1291}{10000s^5 + 56061s^3 + 562s^2 + 86675s + 12727}$	$F_{44} = \frac{0.059s^2 + 0.3446s + 6.6685}{0.3725s^4 + 1.6086s^3 + 5.1436s^2 + 8.0553s + 6.7111}$
$F_{45} = \frac{0.1147s + 0.6118}{1000s^4 + 409.8s^3 + 2906.1s^2 + 1228s + 1219.6}$	$F_{46} = \frac{0.1147s + 0.6118}{1000s^4 + 409.8s^3 + 2906.1s^2 + 1228s + 1219.6}$
$F_{47} = \frac{0.1147s + 0.6118}{1000s^4 + 409.8s^3 + 2906.1s^2 + 1228s + 1219.6}$	$F_{51} = \frac{0.7534s^2 + 0.269s + 0.5844}{100000s^5 + 41690s^4 + 553060s^3 + 160380s^2 + 398810s + 164540}$
$F_{52} = \frac{0.3599s^2 + 0.0645s + 0.2422}{10000s^3 + 8507s + 1902}$	$F_{53} = \frac{0.3554s^2 + 0.058s + 0.2272}{10000s^3 + 8511s + 1512}$
$F_{55} = \frac{2.4498s^6 - 4.2313s^5 + 12.6252s^4 - 8.2123s^3 + 17.1853s^2 - 3.6654s + 6.4963}{-s^7 + 1.6012s^6 - 1.0159s^5 + 11.7509s^4 + 1.4521s^3 + 17.9398s^2 + 1.5141s + 7.1446}$	$F_{56} = \frac{0.0358s^2 + 0.0675}{s^5 + 1.206s^4 + 2.1495s^3 + 0.8151s^2 + 1.4013s + 0.0238}$
$F_{57} = \frac{0.0076s + 0.0328}{s^3 + 0.5542s + 0.0605}$	$F_{61} = \frac{10^{-7}(0.0972s + 0.1052)}{s + 0.3455}$
$F_{62} = \frac{10^{-8}(0.5494s + 0.286)}{s^3 + 1.4651s^2 + 0.1428s + 0.1222}$	$F_{63} = \frac{10^{-7}(0.0972s + 0.1052)}{s + 0.3455}$
$F_{65} = \frac{10^{-5}0.2764}{s^2 + 0.9232s + 0.0948}$	$F_{66} = \frac{2.0441s + 196.61}{s^3 + 31.1233s^2 + 109.692s + 192.5904}$
$F_{67} = \frac{10^{-6}(0.4859s + 0.5259)}{s + 0.3455}$	$F_{71} = \frac{10^{-6}(0.3333s^2 + 0.1321s + 0.1785)}{s^3 + 2.2758s^2 + 3.0902s + 0.6192}$
$F_{72} = \frac{10^{-6}(0.3333s^2 + 0.1321s + 0.1785)}{s^3 + 2.2758s^2 + 3.0902s + 0.6192}$	$F_{73} = \frac{10^{-6}(0.3333s^2 + 0.1321s + 0.1785)}{s^3 + 2.2758s^2 + 3.0902s + 0.6192}$
$F_{75} = \frac{0.0038s^2 + 0.0015s + 0.002}{s^3 + 2.2758s^2 + 3.0902s + 0.6192}$	$F_{76} = \frac{0.0038s^2 + 0.0015s + 0.002}{s^3 + 2.2758s^2 + 3.0902s + 0.6192}$
$F_{77} = \frac{-5.6305s^3 + 247.6783s^2 - 353.353s + 290.3784}{s^5 + 19.2473s^4 + 163.227s^3 + 422.8857s^2 + 512.347s + 302.6807}$	$F_{88} = \frac{0.8467s^4 + 8.5952s^3 + 8.6023s^2 + 7.6711s + 0.9703}{0.001s^7 + 0.011s^6 + 0.662s^5 + 3.649s^4 + 11.877s^3 + 11.587s^2 + 8.225s + 0.934}$

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_8.1: <i>Relación Entradas/Salidas/Referencias/Perturbaciones con la Planta [2,8]</i>	324
Figura_8.2 <i>Diagrama Relación de Variables y Definición de Especificaciones.....</i>	325
Figura_8.3: <i>Relación Referencias/Salidas en un sistema MIMO [2,2].....</i>	328
Figura_8.4: <i>Seguimiento de una señal escalón.....</i>	328
Figura_8.5: <i>Tracking cruzado de V_a respecto de z.....</i>	330
Figura_8.6: <i>Tracking cruzado de z respecto de V_a.....</i>	331
Figura_8.7: <i>Descripción gráfica de la función de transferencia del actuador/motor</i>	332
Figura_8.8: <i>Descripción de la nomenclatura de especificaciones de Tracking.....</i>	339

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_8.1: Secuencia para la determinación de la función de transferencia asociada a la Dinámica de Actuadores y Motor.....	332
Tabla_8.2: Valor de Parámetros de la Dinámica de Actuadores y Motor	336
Tabla_8.3: Valores de Perturbaciones asociados a la Dinámica máxima de Actuadores y Motor.....	336
Tabla_8.4 : Ajuste y corrección masa_Va, función del margen de seguridad escogido	337
Tabla_8.5 : Especificaciones de estabilidad robusta.....	339
Tabla_8.6 : Especificaciones de esfuerzo de control	340
Tabla_8.7 : Especificaciones de sensibilidad	340
Tabla_8.8 : Especificaciones de Tracking ($z_c, Va_c, Wv_c, V_c, \alpha_c-z, Va, Wv$).....	341
Tabla_8.9 : Especificaciones de Tracking ($z_c, Va_c, Wv_c, V_c, \alpha_c-V, \alpha, \gamma, nz, nx$)	341
Tabla_8.10 : Especificaciones de Tracking ($\gamma_c, nz_c-z, Va, Wv, V$)	341
Tabla_8.11 : Especificaciones de Tracking ($\gamma_c, nz_c, nx_c-\alpha, \gamma, nz, nx$)	342
Tabla_8.12 : Resultados de Especificaciones de sensibilidad(z, Va, V, α)	342
Tabla_8.13 : Resultados de Especificaciones de sensibilidad(γ, nz, Wv).....	343
Tabla_8.14 : Resultados de Especificaciones de Tracking Propio (acoplos).....	343
Tabla_8.15 : Resultados de Especificaciones de Tracking Cruzado (desacoplos)..	344
Tabla_8.16 : Resultados gráficos del diseño: obtención de controladores.....	345 a 349
Tabla_8.17 : Resultados gráficos del Análisis en Frecuencia.....	349 a 353
Tabla_8.18 : Resultados gráficos del Análisis temporal	353 a 358
Tabla_8.19 : Funciones de transferencia de los elementos del controlador final.....	359
Tabla_8.20 : Funciones de transferencia de los elementos del Prefiltro final....	359-360

CAPÍTULO 9

Conclusiones y Posibles Desarrollos Futuros

RESUMEN

Se resume a continuación las aportaciones realizadas en el presente trabajo de investigación, así como, se indican posteriormente posibles vías de continuación a partir del mismo.

CONTENIDOS

9.1 Conclusiones

9.2 Posibles Vías de Desarrollo

9.1 Conclusiones

Esta Tesis realiza aportaciones metodológicas, en particular, en el entorno del control QFT y, otras de carácter más general que pueden ser utilizadas en cualquier tipo de control que maneje el dominio de la frecuencia. Se ha llevado a cabo la resolución de un problema práctico complejo, aplicando de forma conjunta las contribuciones teóricas definidas y demostradas previamente. Se describen a continuación cuales han sido las aportaciones originales incorporadas en este trabajo de investigación y su aplicación:

1 Procedimientos para conversión de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial. Se han propuesto varias técnicas para traslado de parámetros tiempo a frecuencia, con diferentes precisiones y complejidades, diseñadas para su aplicación sobre especificaciones concretas usadas en QFT, aunque pueden tener aplicación general en cualquier metodología de control que requiera conversión entre los dominios indicados. Las técnicas más generales desarrolladas están basadas en procedimientos de aproximación que usan como principio el “*Método de Newton por Diferencias Ascendentes y Descendentes de 5º orden*”. Las especificaciones a tratar permitidas van a ser del tipo,

- ✚ Seguimiento específico entre referencias y salidas: unas para acoplamiento y otras especializadas en desacoplamientos sobre el denominado “tracking cruzado”.
- ✚ Sensibilidades o desacoplo de perturbaciones: utilizadas en problemas de regulación para rechazo de perturbaciones, en donde se puede concretar sólo algunos parámetros de desacoplo o bien usar todos los parámetros posibles para regulación.

2. El método de “Squaring-up”, principal aportación de la Tesis, utiliza compensación MIMO-QFT sobre plantas con incertidumbre infra-actuadas, esto es, con más salidas que entradas, de tamaños $[2,n]$, con $n \geq 2$ y paridad *par*, en un proceso sin supresión de

especificaciones del sistema a controlar y que, además, incorpora optimización del esfuerzo de control, lo que permite de manera más eficaz una regulación y seguimiento simultáneos de todo el conjunto de parámetros considerado, ya sea a efecto de acoplamientos o desacoplamientos. Se trata de sustituir el sistema_inicial no-cuadrado por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, todos con mismas entradas de control y que utilizan un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$, independientes para cada uno de ellos. En definitiva, el método permite obtener un controlador diagonal $[2,n]$ y un prefiltro No diagonal $[n,n]$ con elementos “off-diagonal”, como elementos de control para regulación y seguimiento de la planta original.

3. Aplicación práctica del método de control “squaring-up”, sobre la dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil propuesto en el proyecto europeo GARTEUR. El problema parte del modelo no lineal de la dinámica longitudinal de la aeronave, descrita como una planta de tamaño $[2,8]$, asociada a un conjunto de especificaciones para regulación y seguimiento simultáneos realistas. La solución obtenida consiste en un controlador No diagonal $G[2,8]$ y un prefiltro diagonal $F[8,8]$ con elementos off-diagonal. Concluido el diseño QFT, se ha llevado a cabo un análisis exhaustivo, tanto en el dominio de la frecuencia, como en el temporal, verificando el grado de cumplimiento de las especificaciones exigidas.

La bondad del método de control “squaring-up” se ha puesto a prueba con el ejemplo complejo propuesto, que opera con un rango de incertidumbre elevado, para una gran cantidad de variables de salida y en situación combinada tracking-regulación.

✚ En términos de seguimiento, los resultados tanto en acoplamiento (“tracking propio”), como en desacoplamiento (“tracking cruzado”) cumplen con las especificaciones dadas de forma individual, ya sea en el dominio de la frecuencia, como en el dominio temporal.

- ✚ En términos de regulación, los resultados obtenidos por efecto de las perturbaciones incorporadas y, a pesar de su grado de incertidumbre elevado, son buenos.

En conclusión, el comportamiento del método sobre el ejemplo propuesto, ya sea a nivel individual de cada variable de salida, respecto de cada referencia de entrada o cada perturbación de entrada, como a nivel global de cada variable afectada por la suma de todas las referencias de entrada y de todas las perturbaciones de entrada, es notable, considerando la multitud de interacciones entre todos los parámetros del sistema.

La aplicación de “squaring up” en sistemas de control de aeronaves, donde es muy habitual encontrar pocas entradas de control sobre muchas variables de salida, podría resultar una solución adecuada, en lugar de eliminar parámetros de salida para adaptar su número al de las entradas, como suele hacerse para poder trabajar con plantas cuadradas.

4. Procedimientos para reducción de orden de funciones de transferencia. Se han propuesto técnicas para reducción del orden de funciones de transferencia complejas y, en particular, asociadas a controladores y prefiltros obtenidos mediante QFT. En el diseño de sistemas de control y, en concreto al utilizar modelos de aeronaves, como el ejemplo de la Tesis actual, resulta típico encontrar que el orden de éstos sea grande. “Squaring-up” MIMO-QFT permite trabajar con este tipo de plantas pero, al hacerlo, da lugar a compensadores (controlador y prefiltros) de orden también elevado, como ha ocurrido con la resolución del problema canal longitudinal de la aeronave civil planteado. En cualquier caso, la metodología de reducción de orden utilizada asegura funciones reducidas con comportamiento parecido al de las originales: los compensadores reducidos obtenidos permiten que el sistema de control cumpla con las especificaciones de diseño, de igual

modo que los compensadores originales sintetizados mediante “squaring-up”, además de que mantienen estabilidad y control con el mismo grado que el sistema original, con compensadores no reducidos.

5. Metodología “squaring-up” reducido QFT en sistemas MIMO infra-actuados.

Se ha desarrollado un método en QFT que sustituye el sistema_inicial de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y par, por m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, con entradas de control comunes sobre un controlador $[2,2]$ y un precompensador $[2,2]$, independientes para cada uno de ellos. A diferencia de “squaring-up”, ahora, la solución global es un controlador diagonal común $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos “off-diagonal”.

Por otro lado, al igual que ocurre con “squaring-up”, este procedimiento de compensación MIMO-QFT permite trabajar con plantas con incertidumbre infra-actuadas, en un proceso sin supresión de especificaciones del sistema a controlar, incorporando optimización del esfuerzo de control, tanto para regulación como para seguimiento simultáneos.

6. Metodología para Resolución de problemas de “squaring-up” optimizado esfuerzo de control en modo DPD. Se han definido en el Anexo5 las ecuaciones necesarias para resolver problemas de regulación y/o seguimiento mediante “squaring up”, incluyendo optimización de esfuerzo de control, pero en modo DPD (“Direct Plant Domain”). Tener en cuenta que todos los desarrollos anteriores han sido en IPD.

7. Metodología para Resolución de problemas de “squaring-up” reducido optimizado esfuerzo de control en modo DPD. Se han definido en el Anexo6 las ecuaciones necesarias para resolver problemas de regulación y/o seguimiento mediante “squaring up” reducido, incluyendo optimización de esfuerzo de control, pero en modo DPD (“Direct Plant Domain”).

9.2 Posibles Vías de Desarrollo

El método de control “squaring-up”, como principal aportación de esta Tesis, se ha probado a partir de un ejemplo práctico complejo sobre control de vuelo y navegación, que utiliza un grado de incertidumbre elevado, con una gran cantidad de variables de salida para sólo dos parámetros de entrada y en situación combinada tracking-regulación.

Sin embargo, sería interesante ampliar la teoría de “squaring-up” a sistemas de tamaño general $[p,n]$, con $p>2$, $n>2$, $n>p$ y ambos con cualquier tipo de paridad. Observar que actualmente el método está restringido en este sentido y, por tanto, no es aplicable a plantas infra-actuadas de cualquier tamaño.

En este trabajo se han dado las pautas para conseguir alcanzar un método de “squaring-up” para resolución de problemas de control QFT sobre plantas MIMO tamaño $[p,n]$, con p,n cualesquiera, pares o impares, de cualquier valor. Se trata de conseguir generalizar el método que debe de ajustarse a las siguientes características, según sea el tipo de planta de la que se parte:

- + MIMO-QFT de tamaño $[p,n]$, con $(p,n) \geq 2$, $n > p$ y ambos *pares*.
 - Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.
 - $m \cdot q$ sistemas ($m=n/2$, $q=p/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos.
 - La solución es un controlador diagonal $[p,n]$ y un prefiltro No diagonal $[p \cdot n, n]$.

- + MIMO-QFT de tamaño $[p,n]$, con $(p,n) \geq 2$, $n > p$ y ambos cualquier *paridad*.
 - Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.

- $m \times q$ sistemas ($m=n'/2$, $q=p'/2$, con n' y p' pares) MIMO [2,2], caracterizados por tener todas las entradas de control comunes pero, un controlador [2,2] y un prefiltro [2, n] independientes para cada uno de ellos.
- La solución es un controlador diagonal [p',n'] y un prefiltro No diagonal [$p' \times n', n'$].

“Squaring-up” reducido QFT se ha desarrollado en este trabajo proponiendo un método para trabajar con plantas infra-actuadas MIMO-QFT de tamaño [2, n], con $n \geq 2$ y n par, optimizando el esfuerzo de control para regulación y seguimiento de forma simultánea, con una solución reducida del tipo, controlador diagonal [2,2] y prefiltro No diagonal [2, n] con elementos off-diagonal. Sin embargo, sería necesario o al menos interesante resolver el mismo problema canal longitudinal de la aeronave civil de tamaño [2,8] en los mismos términos que se ha hecho con “squaring up”, pero aplicando ahora “squaring up” reducido. De esta forma, con los resultados de ambos métodos sobre el mismo problema se puede efectuar una comparativa que proporcione indicaciones sobre, grado de precisión, tiempos de resolución del problema, orden de complejidad de soluciones, etc, para cada caso, que nos ayude a saber cuándo interesa utilizar un método u otro.

El problema resuelto en este trabajo utiliza la Planta del Canal Longitudinal del modelo de aeronave civil P [2,8], que incorpora además una Planta de Perturbaciones Pd [2,8], tal que,

- las 2 entradas de control son, $u \equiv [DT, TH]$;
- las 8 salidas se definen como, $y \equiv [z, Va, Wv, V, \alpha, \gamma, n_z, n_x]$;
- el vector de perturbaciones externas es, $d \equiv [w_z, w_{zb}]$,

Una posible vía de continuación de esta Tesis es la resolución mediante “squaring up” del problema modelo de aeronave civil completo. Es decir, resolver también la Planta del Canal Lateral $P [2,10]$, que incorpora además una Planta de Perturbaciones $Pd [4,10]$, tal que,

- las 2 entradas de control serían, $u \equiv [DA, DR]$;
- las 10 salidas se definen como, $y \equiv [\beta, P, R, Phi, U_v, V_v, y, Chi, x, n_y]$;
- el vector de perturbaciones externas es, $d \equiv [w_x, w_y, w_{xb}, w_{yb}]$,

Los métodos de reducción de orden de funciones de transferencia desarrollados en esta Tesis y aplicados con buenos resultados en el problema práctico aeronave-canal_longitudinal, deberían compararse con los métodos ya existentes: truncamiento equilibrado, residualización equilibrada o aproximación a la norma Hankel óptima, ya comparados entre sí en el trabajo [*Rueda et al., 03*]. La comparativa debe ser sobre diferentes tipos de funciones de transferencia y en términos de aplicación en QFT, es decir, como se ha hecho en esta Tesis, las funciones reducidas deben de proporcionar comportamiento parecido en cuanto a estabilidad y robustez de especificaciones de cumplimiento, comparadas con las funciones originales; para ello, se han de utilizar comparativas formales y gráficas sobre el diagrama de Nicols.

El problema aeronave-canal_longitudinal, o bien el modelo de aeronave civil completo con dinámicas longitudinal y lateral, podría resolverse aplicando “squaring up” pero en modo DPD, a partir de las ecuaciones desarrolladas en el Anexo5, para comparar los resultados con los obtenidos en este trabajo en donde se ha aplicado el modo IPD.

Por otro lado, también cabe la posibilidad de resolver el mismo problema mediante “squaring up” reducido, pero en modo DPD a partir de las ecuaciones desarrolladas en el Anexo6.

Anexo 1

Publicaciones Asociadas a la Tesis

CONTENIDOS

Anexo1.1: Publicaciones en Congresos

Anexo1.1: Publicaciones en Congresos

- [Joglar y Aranda, 13] Joglar, J., Aranda, J., (2013), "*Control Multivariable QFT para la Dinámica Longitudinal de un Vehículo Aéreo*", XXXIV Jornadas de Automática, Terrassa, España
- [Joglar y Aranda, 14a] Joglar, J., Aranda, J., (2014), "*QFT multivariable control for the longitudinal dynamics of an air vehicle*", The 9th International Conference on Electrical and Control Technologies, ECT2014, Lituania
- [Joglar y Aranda, 14b] Joglar, J., Aranda, J., (2014), "*Order reduction of transfer functions in practical control systems*", The 9th International Conference on Electrical and Control Technologies, ECT2014, Lituania

Anexo 2

Características de la Aeronave Real utilizada como Modelo de Aeronave Civil

CONTENIDOS

Anexo2.1: La Aeronave Airbus A300-600ST

Anexo2.2: Especificaciones Técnicas del A300-600ST

Anexo2.1: La Aeronave Airbus A300-600ST

El modelo de aeronave en el que se basa el ejemplo práctico de esta tesis es un A300 de la serie 600 y del tipo ST, del fabricante europeo Airbus Industrie.

El A300-600SuperTransporter (Beluga) es un avión de carga, diseñado a partir del avión de pasaje de fuselaje ancho bimotor de medio alcance A300-600, pero con modificaciones que le permiten llevar cargas de grandes dimensiones:

- ✚ La parte superior del fuselaje se ha sustituido por una nueva cubierta de 7.4m de diámetro.
- ✚ El cockpit se ha trasladado a un nivel inferior con respecto de la cabina de carga a la que se accede mediante una puerta frontal superior de 17m de altura.
- ✚ La parte trasera del fuselaje se ha alargado y ensanchado, modificando el empenaje de cola al añadir dos estabilizadores verticales adicionales en los extremos del estabilizador horizontal.



Figura A2.1: A300-600ST durante un proceso de carga

Voló por primera vez en septiembre de 1994, entrando en servicio en septiembre de 1995. Se han construido 5 unidades utilizadas para transportar cargas de gran tamaño entre las

distintas fábricas del consorcio europeo Airbus, a efectos del ensamblaje final de diferentes modelos de aviones fabricados.



Figura_A2.2: Toma de contacto en el Aterrizaje del A300-600ST N°1

Anexo2.2: Especificaciones técnicas del A300-600ST

Tabla_A2.1: Dimensiones principales del A300-600ST

Dimensiones	
Longitud	56.15m
Envergadura	44.84m ²
Altura	1724m

Tabla_A2.2: Pesos máximos permitidos en el A300-600ST

Pesos	
Peso máximo al despegue (MTOW)	155000Kg
Peso máximo al aterrizaje (MLW)	140000Kg
Peso máximo sin combustible (MZFW)	133800Kg

Tabla_A2.3: Capacidades funcionales principales del A300-600ST

Capacidades	
Tripulación de vuelo	2 pilotos
Carga	47000kg
Planta motriz	2 turbofan General Electric, GE CF6-80
VMO/MMO (Velocidad y Mach máximos operativos)	542Kt /0.82Mach
Autonomía	2500NM (con carga de 26ton) 1500NM(con carga de40ton)
Sistema de mandos de vuelo	gestionado de forma electrónica (fly-by-wire)

Tabla_A2.4: Habilitaciones certificadas al A300-600ST

Habilitaciones	
Precisión para aproximación	Certificado Autoland CATII
Certificación ETOPS	Europea (180')



Figura_A2.3:
Parte trasera del A300-600ST

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_A2.1: A300-600ST durante un proceso de carga.....	376
Figura_A2.2: Toma de contacto en el Aterrizaje del A300-600ST N°1.....	377
Figura_A2.3: Parte trasera del A300-600ST	378

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_A2.1: Dimensiones principales del A300-600ST.....	377
Tabla_A2.2: Pesos máximos permitidos en el A300-600ST.....	377
Tabla_A2.3: Capacidades funcionales principales del A300-600ST.....	378
Tabla_A2.4: Habilitaciones certificadas al A300-600ST.....	378

Anexo 3

Realización Práctica del Diseño de Sistemas de Control de Vuelo y Navegación: Modelo de aeronave civil

CONTENIDOS

Anexo3.1: Sistemas de Referencia del modelo de aeronave civil

A3.1.1 Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra F_E , $(O_E, X_E Y_E Z_E)$

A3.1.2 Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión F_V , $(O_V, X_V Y_V Z_V)$

A3.1.3 Sistema de Referencia Intrínseco o Aerodinámico del Avión F_B $(O_B, X_B Y_B Z_B)$

A3.1.4 Sistema de Referencia de Ejes de Viento F_W $(O_W, X_W Y_W Z_W)$

A3.1.5 Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S $(O_S, X_S Y_S Z_S)$

A3.1.6 Sistema de Referencia de Medidas F_M $(O_M, X_M Y_M Z_M)$

Anexo3.2: Transformaciones de Coordenadas del modelo de aeronave civil

A3.2.1 Transformación del Sistema Ligado al Avión F_V al Sistema Intrínseco F_B

A3.2.2 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema Ligado al Avión F_V

A3.2.3 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Viento F_W

A3.2.4 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S

A3.2.5 Transformación del Sistema de Ejes de Viento F_W al Sistema Intrínseco F_B

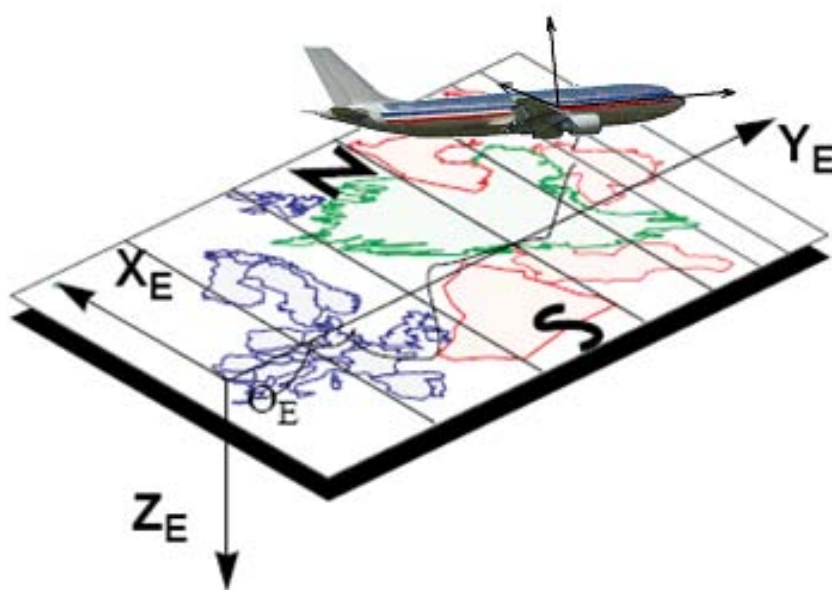
A3.2.6 Transformación del Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S al Sistema Intrínseco F_B

A3.2.7 Representación Cuaternaria de Actitud

Anexo3.1: Sistemas de Referencia del modelo de aeronave civil

A3.1.1 Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra $F_E, (O_E, X_E Y_E Z_E)$

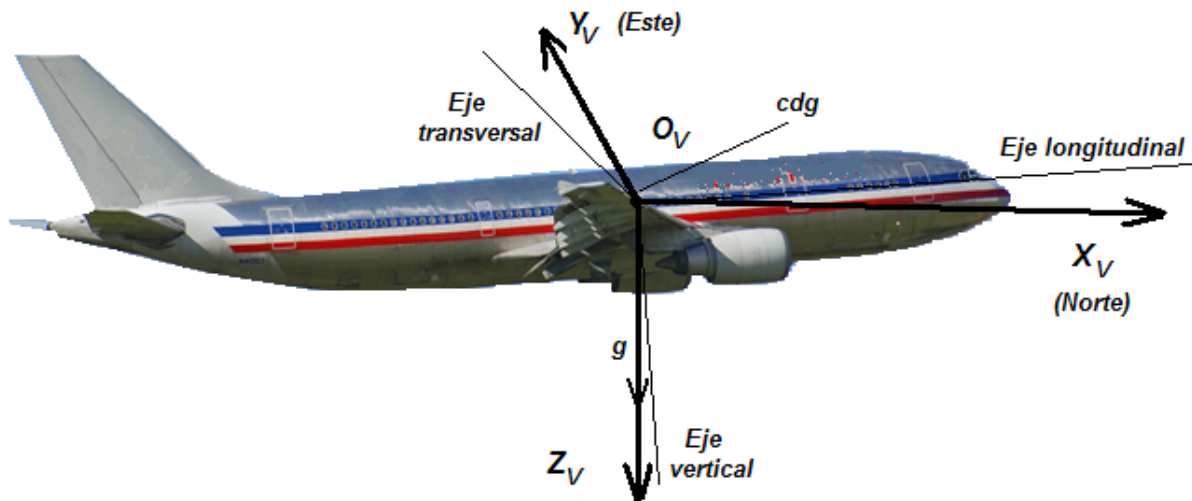
Viene definido como se indica en la *Figura_A3.1*, esto es, se trata de un sistema de referencia F_E con origen O_E en la superficie terrestre, en algún punto de la ruta de la aeronave; ejes Z_E positivo hacia abajo y coincidente con la vertical local del origen, X_E positivo hacia el Norte e Y_E positivo hacia el Este.



Figura_A3.1: Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra

A3.1.2 Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión $F_V, (O_V, X_V Y_V Z_V)$

Viene definido como se indica en la *Figura_A3.2*, esto es, se trata de un sistema de referencia F_V que se mueve con el avión y de ejes paralelos al Sistema Fijo a Tierra. Con origen O_V en el centro de gravedad (cdg) del avión y ejes Z_V positivo hacia abajo y coincidente con la vertical local del origen, X_V positivo hacia el Norte e Y_V positivo hacia el Este.

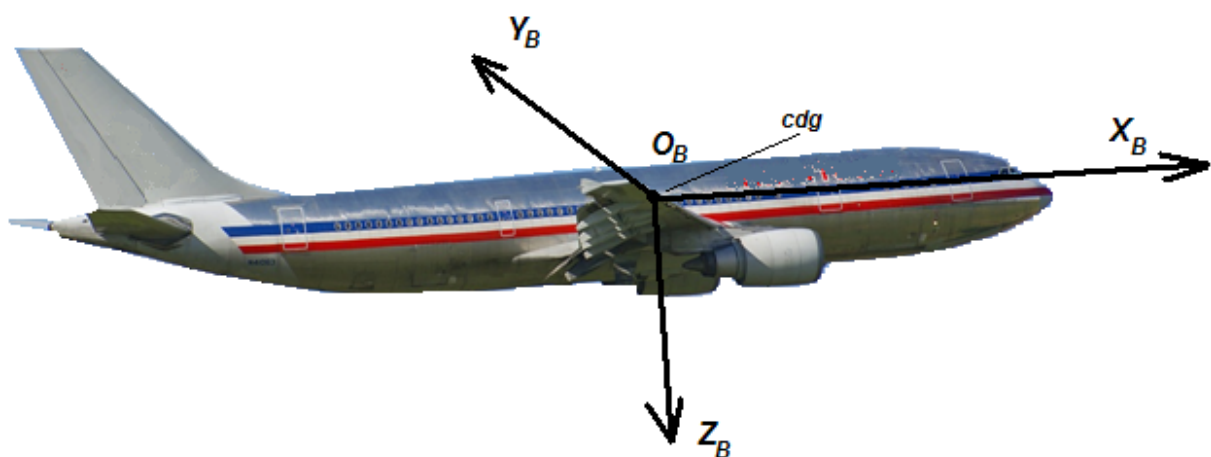


Figura_A3.2: Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión

A3.1.3 Sistema de Referencia Intrínseco o Aerodinámico del Avión $F_B (O_B, X_B, Y_B, Z_B)$

Definido como se indica en la *Figura_A3.3*, esto es, se trata de un sistema de referencia F_B con origen O_B en el cdg de la aeronave y ejes coincidentes con los ejes característicos del avión, X_B longitudinal positivo hacia delante, Z_B vertical positivo hacia abajo e Y_B transversal positivo hacia la derecha.

La transformación de coordenadas desde el Sistema Ligado al Avión F_V al Sistema Intrínseco F_B consiste en girar según el valor de rumbo ψ primero, rotar por el valor del ángulo de cabeceo θ después y, al final, rotar según el ángulo de alabeo ϕ .

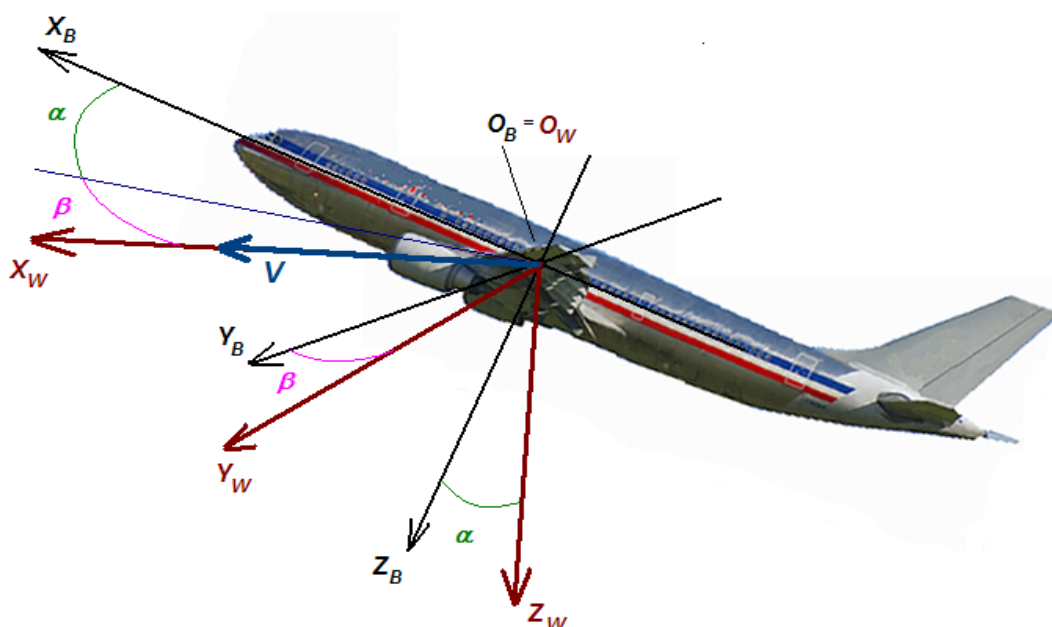


Figura_A3.3: Sistema de Referencia Intrínseco del Avión

A3.1.4 Sistema de Referencia de Ejes de Viento $F_W (O_W, X_W, Y_W, Z_W)$

Definido como se indica en la *Figura_A3.4*, es decir, se trata de un sistema de referencia F_W con origen O_W en el cdg de la aeronave y ejes, X_W positivo hacia delante coincidente con el vector velocidad verdadera V , Z_W positivo hacia abajo e Y_W positivo hacia la derecha.

La transformación de coordenadas desde el Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Viento F_W consiste en girar según el valor del ángulo de ataque α primero y rotar después por el valor del ángulo de deslizamiento β .



Figura_A3.4: Sistema de Referencia de Ejes de Viento

Ambos ángulos de ataque (α) y deslizamiento (β) se definen como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \arctan \frac{w_a}{u_a} \\ \beta = \arcsin \frac{v_a}{V_A} \end{array} \right. \quad (A3.1)$$

$$\beta = \arcsin \frac{v_a}{V_A} \quad (A3.2)$$

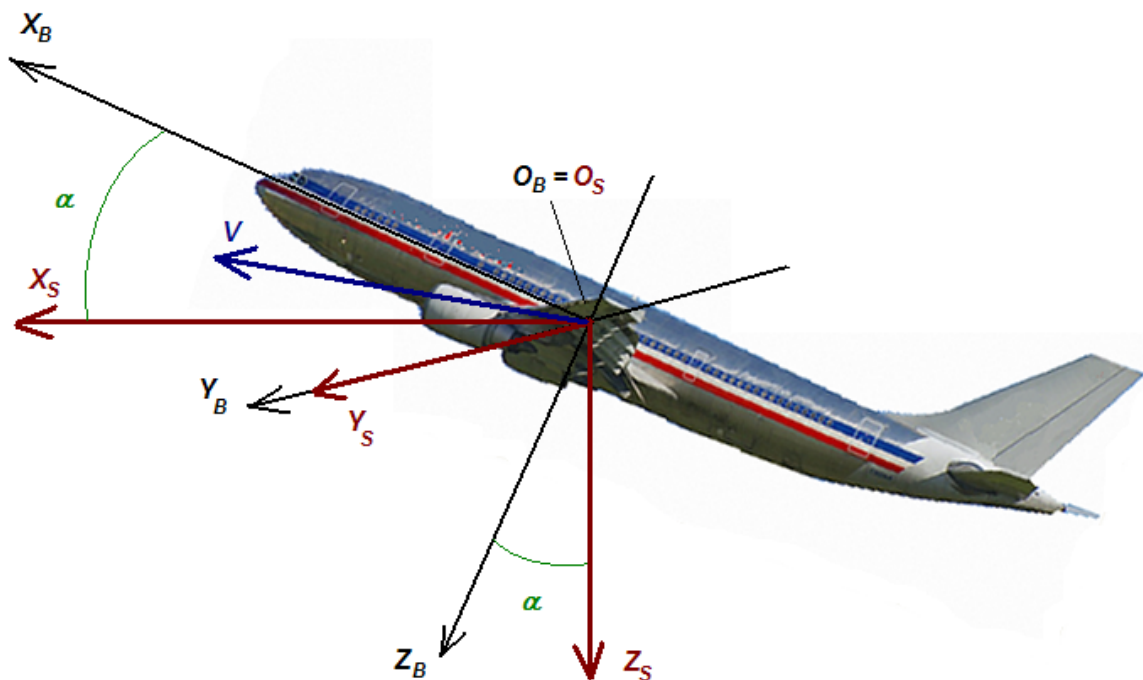
donde u_a , v_a y w_a son las componentes x , y , z del vector velocidad propia de la aeronave V_A en el sistema de ejes de viento, de magnitud dada por,

$$V_A = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2} \quad (A3.3)$$

A3.1.5 Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S (O_S, X_S, Y_S, Z_S)

Definido como se indica en la *Figura_A3.5*, es decir, se trata de un sistema de referencia F_S con origen O_S en el cdg de la aeronave y ejes, X_S horizontal y positivo hacia delante, Z_S positivo hacia abajo e Y_S positivo hacia la derecha.

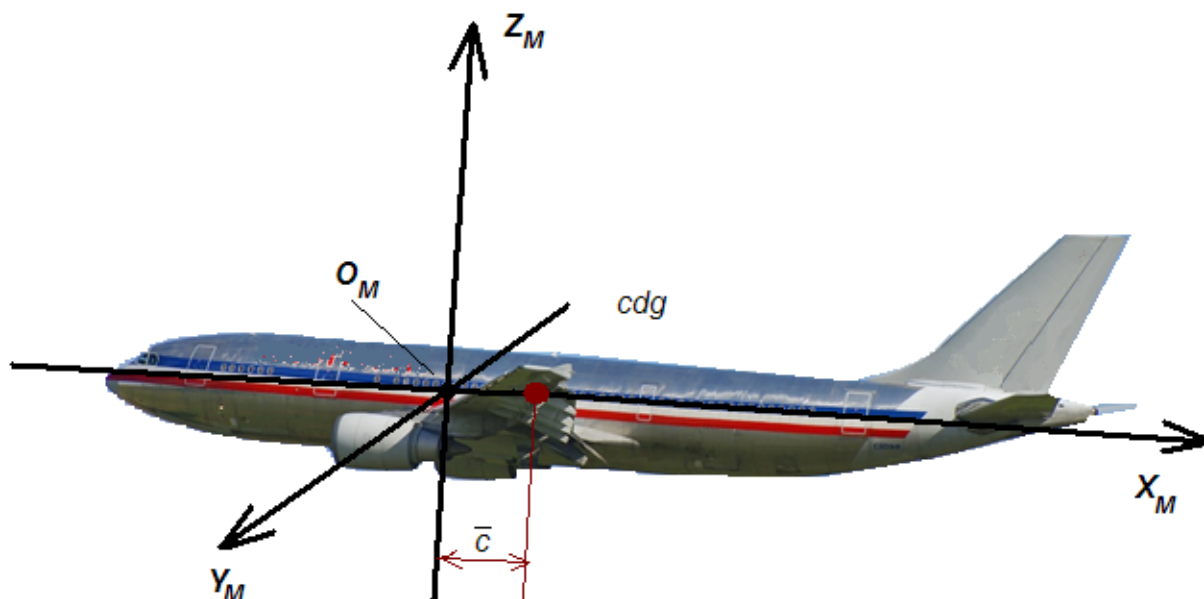
La transformación de coordenadas desde el Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S consiste en girar según el valor del ángulo de ataque α .



Figura_A3.5: Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal

A3.1.6 Sistema de Referencia de Medidas F_M (O_M, X_M, Y_M, Z_M)

Definido como se indica en la *Figura_A3.6*, es decir, se trata de un sistema de referencia F_M con origen O_M por delante de O_S (cdg) a una distancia de valor la cuerda media aerodinámica (MAC) y ejes, X_M positivo hacia atrás, Z_M positivo hacia arriba e Y_M positivo hacia la derecha.



Figura_A3.6: Sistema de Referencia de Medidas

Anexo3.2: Transformaciones de Coordenadas del modelo de aeronave civil

Las transformaciones asociadas con las rotaciones básicas (X_1, X_2, X_3) alrededor de los tres ejes de coordenadas del avión (longitudinal, transversal y vertical) se definen del siguiente modo,

$$R_1(X_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos X_1 & \text{sen}X_1 \\ 0 & -\text{sen}X_1 & \cos X_1 \end{bmatrix} \tag{A3.4}$$

$$R_2(X_2) = \begin{bmatrix} \cos X_2 & 0 & -\text{sen}X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}X_2 & 0 & \cos X_2 \end{bmatrix} \tag{A3.5}$$

$$R_3(X_3) = \begin{bmatrix} \cos X_3 & \text{sen}X_3 & 0 \\ -\text{sen}X_3 & \cos X_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A3.6}$$

La actitud básica del avión viene dada por las rotaciones alrededor de los ejes del sistema intrínseco $(X, Y, Z)_B$, dadas por los valores de alabeo ϕ , cabeceo θ y rumbo (guiñada) ψ , respectivamente.

A3.2.1 Transformación del Sistema Ligado al Avión F_V al Sistema Intrínseco F_B

La matriz de transformación R_{BV} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente,

$$R_{BV} = R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) \quad (A3.7)$$

De este modo se obtiene,

$$R_{BV} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (A3.8)$$

A3.2.2 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema Ligado al Avión F_V

La matriz de transformación R_{VB} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente

$$R_{VB} = R_1(-\phi)R_2(-\theta)R_3(-\psi) \quad (A3.9)$$

De este modo se obtiene,

$$R_{VB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \cos \psi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (A3.10)$$

Siendo,
$$R_{VB} = R_{BV}^T \quad (A3.11)$$

A3.2.3 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Viento F_W

La matriz de transformación R_{WB} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente ,

$$R_{WB} = R_3(\beta)R_2(-\alpha) \quad (A3.12)$$

De este modo se obtiene,

$$R_{WB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (A3.13)$$

A3.2.4 Transformación del Sistema Intrínseco F_B al Sistema de Ejes de Estabilidad

Longitudinal F_S

La matriz de transformación R_{SB} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente,

$$R_{SB} = R_2(-\alpha) \quad (A3.14)$$

De este modo se obtiene,

$$R_{SB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (A3.15)$$

A3.2.5 Transformación del Sistema de Ejes de Viento F_W al Sistema Intrínseco F_B

La matriz de transformación R_{BW} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente

$$R_{BW} = R_3(-\beta)R_2(\alpha) \quad (A3.16)$$

De este modo se obtiene,

$$R_{BW} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \text{sen} \beta & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \beta & \cos \beta & 0 \\ \text{sen} \alpha \cos \beta & -\text{sen} \alpha \text{sen} \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (A3.17)$$

Siendo,

$$R_{BW} = R_{WB}^T \quad (A3.18)$$

A3.2.6 Transformación del Sistema de Ejes de Estabilidad Longitudinal F_S al Sistema

Intrínseco F_B

La matriz de transformación R_{BS} consiste en aplicar la secuencia de rotaciones siguiente,

$$R_{BS} = R_2(\alpha) \quad (A3.19)$$

La matriz resultante será,

$$R_{SB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A3.20})$$

Utilizando, $R_{BS} = R_{SB}^T$ (A3.21)

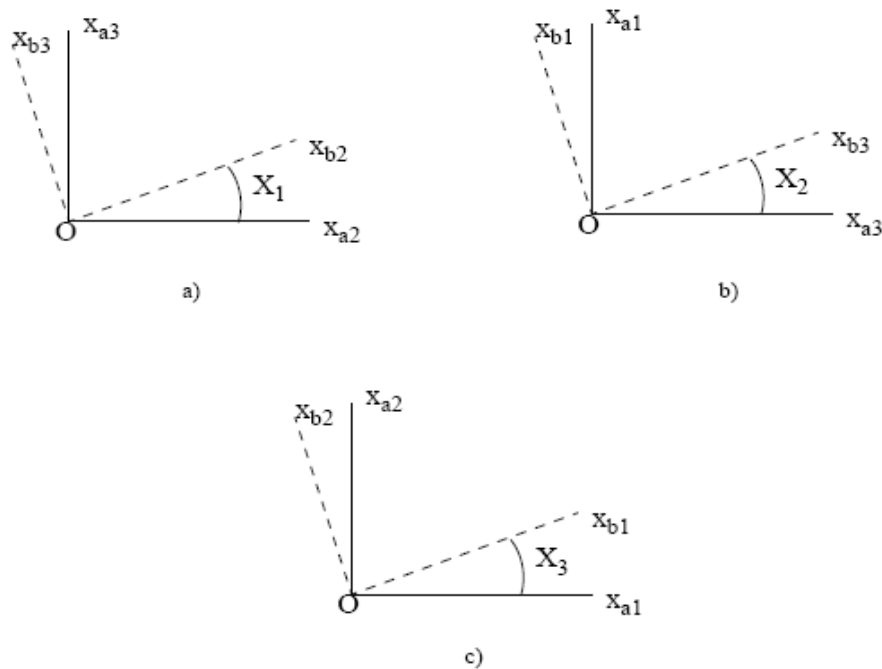
A3.2.7 Representación Cuaternaria de Actitud

Una posible alternativa al uso de *ángulos de Euler* para la definición de *Actitudes* (alabeo, cabeceo y guiñada), es utilizar en su lugar la denominada *representación cuaternaria*.

Ésta consiste en un sistema formal de 4 parámetros que comparado con los ángulos de Euler presenta como ventaja su mayor eficiencia numérica y que además no presenta singularidades.

Los parámetros cuaternarios definidos como,

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \quad (\text{A3.22})$$



Figura_A3.7: Rotaciones Básicas alrededor de x_{a1} (a), x_{a2} (b), x_{a3} (c)

cumplen la siguiente condición,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.0 \quad (\text{A3.23})$$

y están relacionados con los ángulos de Euler por,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \pm(\cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) + \text{sen}(\phi/2)\text{sen}(\theta/2)\text{sen}(\psi/2)) \end{array} \right. \quad (\text{A3.24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \pm(\text{sen}(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\text{sen}(\theta/2)\text{sen}(\psi/2)) \end{array} \right. \quad (\text{A3.25})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2 = \pm(\cos(\phi/2)\text{sen}(\theta/2)\cos(\psi/2) + \text{sen}(\phi/2)\cos(\theta/2)\text{sen}(\psi/2)) \end{array} \right. \quad (\text{A3.26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = \pm(\cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\text{sen}(\psi/2) - \text{sen}(\phi/2)\text{sen}(\theta/2)\cos(\psi/2)) \end{array} \right. \quad (\text{A3.27})$$

Estas ecuaciones se utilizan para calcular los valores iniciales de los parámetros cuaternarios, a partir de los valores iniciales de los ángulos de Euler.

Las derivadas cuaternarias respecto al tiempo son,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & p & q & r \\ -p & 0 & -r & q \\ -q & r & 0 & -p \\ -r & -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.28})$$

siendo p , q y r la variación angular temporal (regímenes de actitud) de los ángulos de Euler, es decir, “rate de alabeo”, “rate de cabeceo” y “rate de guiñada”, respectivamente.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_A3.1: Sistema de Coordenadas Geográficas Fijo a Tierra.....	382
Figura_A3.2: Sistema de Coordenadas Geográficas Ligado al Avión.....	383
Figura_A3.3: Sistema de Referencia Intrínseco del Avión	383
Figura_A3.4: Sistema de Referencia de Ejes de Viento	384
Figura_A3.5: Sistema de Referencia de Ejes de Estabilidad Longitudinal	385
Figura_A3.6: Sistema de Referencia de Medidas.....	386
Figura_A3.7: Rotaciones Básicas alrededor de x_{a1} (a), x_{a2} (b), x_{a3} (c).....	389

Anexo 4

Programas para el Traslado de Especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial

CONTENIDOS

Anexo4.1. Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas para Seguimiento

Anexo4.2. Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas de Sensibilidad y tracking desacoplado

Anexo4.1. Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas para Seguimiento

function [nummin,denmin,nummax,denmax]=td2wd1_(mp,tr,ts,desv,wiw)

- ✚ Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón.
- ✚ 'mp' (sobrelongación máxima) en tanto por ciento y tiempos en segundos.
- ✚ 'tr' y 'ts' tiempos de alcance y de asentamiento máximos.
- ✚ 'desv' valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Por defecto 0.02.
- ✚ Devuelve función de transferencia del límite inferior en el dominio frecuencial (nummin/denmin) y función de transferencia del límite superior en el dominio frecuencial (nummax/denmax). Los parámetros de entrada sólo exigen límite inferior.
- ✚ El límite superior se define con el parámetro 'wiw': es wiw veces la wn definida para el límite inferior; por defecto wiw=5.
- ✚ Técnica1 que NO utiliza las hipótesis clásicas de la Técnica2, con las que se comete un error importante de transferencia de datos. Hace llamada a la función 'inti' para la integración de parámetros 'tr' y 'ts', que a su vez llama a la función 'buscar' donde se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros temporales.
- ✚ 'trmax' y 'tsmax' con 'Mp', son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.
- ✚ Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'tr_sup' y 'ts_sup' con 'Mp_sup'. Con estos parámetros se

determina el límite $w_{inferior}$, dado por la envolvente inferior de las curvas de pares (r_o, w_n) y definido por la FT obtenida con 'nummin' y 'denmin'. Hay que tener en cuenta que w_n en cada una de estas curvas es el valor MAYOR del correspondiente a cada tiempo 'tr' y 'ts'. Por tanto, la técnica funciona variando los valores de los 3 parámetros TD, hasta obtener valores adecuados para todo el rango de frecuencias.

- ✚ No existiendo como dato de entrada el límite 't_inferior', el sistema lo tiene en cuenta considerando límite superior en WD para cada par de curvas (r_o, w_n) , 'wiw' veces el valor de w_n , siendo 'wiw' la guía para definir el límite inferior. Los parámetros 'tr_inf' y 'ts_inf' con 'mp_inf' en TD, determinan el límite $w_{superior}$, definido por la envolvente superior en WD de las respuestas de pares $(r_o, w_n * wiw)$.

<p><i>funcion [nummin,denmin,nummax,denmax]=td2wd(mp,tr,ts,desv,wiw)</i></p>
--

- Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.), excepto en la opción 'aproximación a envolvente', donde se ofrece un sistema de orden superior. Se consideran aplicadas entradas escalón.
- 'mp' (sobrelongación máxima) en tanto por ciento y tiempos en segundos.
- 'tr' y 'ts' tiempos de alcance y de asentamiento máximos.
- 'desv' valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Por defecto 0.02.
- Devuelve función de transferencia del límite inferior en el dominio frecuencial (nummin/denmin) y función de transferencia del límite superior en el dominio frecuencial (nummax/denmax). Los parámetros de entrada sólo exigen límite inferior.
- El límite superior se define con el parámetro 'wiw': es wiw veces la w_n definida para el límite inferior; por defecto $wiw=5$.

- Técnica1 que NO utiliza las hipótesis clásicas de la Técnica2.
- Hace uso de la función RACWE (Racionalización de respuestas en frecuencia) para obtener una FT aproximada a la envolvente que se pretende definir: $w_{inferior}$ o $w_{superior}$.
- La FT de orden superior que ofrece RACWE habría que reducirla utilizando un método de búsqueda de raíces dominantes.
- 'trmax' y 'tsmax' con 'Mp', son los Datos de Entrada.
- Respuesta temporal de parámetros 'tr_sup' y 'ts_sup' con 'Mp_sup'.

function [nummin,denmin,nummax,denmax]=td2wd1(mp,tr,ts,desv,wiw)

- ✚ Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón.
- ✚ 'mp' (sobrelongación máxima) en tanto por ciento y 'tiempos' en segundos.
- ✚ 'tr' y 'ts' tiempos de alcance y de asentamiento máximos.
- ✚ 'desv' valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Por defecto ± 0.02 . Se pide a la entrada en %, esto es, ± 0.02 es 2%.
- ✚ Devuelve función de transferencia del límite inferior en el dominio frecuencial (nummin/denmin) y función de transferencia del límite superior en el dominio frecuencial (nummax/denmax). Los parámetros de entrada sólo exigen límite inferior. El límite superior se define con el parámetro 'wiw': es wiw veces la wn definida para el límite inferior; por defecto $wiw=5$.
- ✚ Técnica1 que NO utiliza las hipótesis clásicas de la Técnica2.
- ✚ 'trmax' y 'tsmax' con 'Mp', son los Datos de Entrada.

- ✚ 'tr_sup' y 'ts_sup' con 'Mp' es la respuesta temporal de parámetros TD posibles. Con estos parámetros se determina el límite w_inferior, definido por la FT dada por 'nummin' y 'denmin'. El dato 'Mp' se mantiene constante e, inicialmente, el dato 'ts' (ts_sup=tsmax), variando el valor de 'tr'; si no es posible, la estrategia cambia manteniendo constante 'Mp', disminuyendo 'ts' hasta obtener un valor de 'tr' adecuado. Por tanto, la técnica funciona variando los valores de 2 de los 3 parámetros TD.
- ✚ No existiendo como dato de entrada el límite 't_inferior', el sistema lo tiene en cuenta considerando límite superior en WD la respuesta dada por el par (ro,wn) del límite inferior, desplazada 'wiw' veces el valor de wn. Los parámetros 'tr_inf' y 'ts_inf' con 'mp' en TD, determinan el límite w_superior definido por la envolvente superior en WD de la respuesta de par (ro,wn*wiw).

function [numt,dent]=td2wd2(mp,tr,ts,desv)

- Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón.
- 'mp' (sobrelongación máxima) en tanto por ciento y tiempos en segundos.
- 'tr' y 'ts' tiempos de alcance y de asentamiento máximos.
- 'desv' valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Sólo admite los valores típicos de ±0.02 y ±0.05, esto es 2% o 5% (aproximación clásica).
- Devuelve función de transferencia del límite inferior en el dominio frecuencial (numt/dent).
- Técnica2 que utiliza las hipótesis clásicas: 'tr' definido de 0 a 100% de señal y 'ts' aproximado a los valores típicos 4T o 3T, siendo 'T' la constante de tiempo del sistema.

- 'trmax' y 'tsmax' con 'mp', indican el límite t-superior. Con estos parámetros se determina el límite w_inferior. El dato 'Mp' se mantiene constante e, inicialmente, el dato 'ts' (ts_sup=tsmax), variando el valor de 'tr'; si no es posible, la estrategia cambia manteniendo constante 'Mp', disminuyendo 'ts' hasta obtener un valor de 'tr' adecuado.

function [tr,ts]=inti(ro,para,tal,tas,wn)

- ✚ Función 'int' mejorada para el cálculo de 'ts'. Hace uso de la subrutina 'buscar'.
- ✚ Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con wn (frecuencia natural) = 1 rad/s, por defecto.
- ✚ 'para' es un parámetro que indica si la función ofrece sólo tiempo de alcance (90% defecto), 'para=1', o bien tiempo de asentamiento ($\pm 1\%$ defecto) y tiempo de alcance, 'para=2'. El valor por defecto de 'para' es 1.
- ✚ Sólo 2 parámetros de entrada indican 'ro' y 'para'.
- ✚ 'tal' y 'tas' son los parámetros márgenes de tiempos de alcance y asentamiento, respectivamente. Para t_alcance de 0% a 95%, tal=95. Para t_asentam. de $\pm 2\%$, 'tas=2'. Por defecto, 'tal=90' y 'tas=1'.
- ✚ Trabaja con respuestas a señales ESCALÓN.
- ✚ La función indica el semiperiodo de la señal de respuesta en que se consigue el t_asentamiento.
- ✚ La función trabaja con resultados en el intervalo ro=[.0001,.99]: funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.
- ✚ Obtención de tiempos de asentamiento: Se trata de ir observando cada pico máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de

asentamiento, el tiempo de asentamiento estará en el primer semiciclo, en el intervalo de ascenso, antes de dicho pico. Si no es así, cuando se encuentre un pico máximo dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; si no, el tiempo de asentamiento será éste tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal.

*function ts=***buscar***(ro,mas,i1,i2,wn,gh)*

- Función asociada a 'inti' para la determinación de 'ts'.
- Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con wn (frecuencia natural) = 1 rad/s, por defecto.
- 'mas' parámetro margen de tiempo de asentamiento en tanto por uno.
- 'i1' e 'i2' son los intervalos de interpolación. 'gh' es un parámetro de búsqueda en semiciclo anterior o posterior.
- La función trabaja con resultados en el intervalo $ro=[.0001,.99]$:
- Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

*function [numer,denom,er]=***racwe***(c,w,n,m)*

- ✚ Función de RACionalización de respuestas en frecuencia (complex vs.W).
- ✚ Inversa de la función "freqresp.m".
- ✚ Función llamada por los programas "td2wd" y "esensib" para definir la FT de la envolvente dada inicialmente por parámetros magnitud-fase.
- ✚ Función e idea original: Horowitz.
- ✚ 'c'=vector Nx1 función compleja de entrada.

- ✚ 'w'= vector Nx1 de frecuencias. N es el número de frecuencias utilizadas.
- ✚ 'n' y 'm', nº de polos y de zeros, respectivamente, para la función de transferencia buscada (numer/denom).

function pp=m2p(ww,cc,vv,o1,o2)

- Función de cálculo de Fases, a partir de Magnitudes.
- Determinación de la fase "pp" en los puntos "ww", dada la magnitud "vv" en dBs en los puntos "cc".
- Si hay polos o zeros en el origen 'o1=1', sino 'o1=0'. Si hay exceso de polos o zeros 'o2=1', sino 'o2=0'.
- Función e idea original: Horowitz.
- 'ww'=vector 1xq frecuencia fases.
- 'cc'= vector 1xn de frecuencia magnitudes.
- 'vv'= vector 1xn magnitudes

function [nummax,denmax]=steptrac(ymax,rmax,trx,tsx,desv)

- ✚ Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón.
- ✚ El step de entrada 'rmax' produce una salida 'ymax' asociadas a una 'mp' (sobrelongación máxima).
- ✚ 'trx' y 'tsx' tiempos de alcance y de asentamiento máximos utilizados sólo como referencias, para determinar el límite de los tiempos mínimos. Por defecto 'trx=5s' y 'tsx=20s'.

- ✚ `desv` valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Por defecto 0.02.
- ✚ Devuelve función de transferencia del límite superior en el dominio frecuencial (nummax/denmax), con tiempos mínimos de alcance y asentamiento.
- ✚ Hace uso de la función RACWE (Racionalización de respuestas en frecuencia) para obtener una FT aproximada a la envolvente que se pretende definir en el $w_{superior}$.
- ✚ `trmax` y `tsmax` con `Mp`, son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.
- ✚ Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, `tr_sup` y `ts_sup` con `Mp`.
- ✚ Los parámetros `tr_inf` y `ts_inf` con `mp` en TD determinan el límite $w_{superior}$, definido por la envolvente superior en WD de las respuestas de pares (ro,wn).

Anexo4.2. Programas asociados a las distintas Soluciones Propuestas de Sensibilidad y tracking desacoplado

function [nums,dens,nums2]=esensibq(out,in,T,desv,asen)

- Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón de valor 'in', que generan una respuesta tipo impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor 'out' y debe desaparecer en un tiempo inferior a 'T'. El pico máximo de la respuesta debe ser entonces `out`.
- Debido a la simplificación de la interpolación inversa, se exige `out` mínimo de 0.465. Para valores inferiores normalizar usando, por ejemplo, 'out=0.5' e 'in=0.5*in/out'

- 'asen' 1 o 2, indica como tener en cuenta el valor `desv` para considerar nula la señal:
 - 1) Modo absoluto. Desviación función de la señal referida a 1. Por defecto.
 - 2) Modo relativo. Desviación función de la señal referida a 'out'.
- Devuelve función de transferencia del límite en el dominio frecuencial en forma, (nums/dens) para entrada impulso o (nums2/dens) para entrada step.
- Técnica que NO utiliza las hipótesis clásicas, con las que se comete un error importante de transferencia de datos. Hace llamada a las funciones `intipi` e `intitas` para la integración de parámetros 'ro' y 'ts', respectivamente. `intitas` llama a su vez a la función `buscar2`. Se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros.
- 'out', 'in' y 'T', son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.
- Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'T_out' y 'Mp_out', ajustados a 'T'. Con estos parámetros se determina la FT en el WD.

function [ro]=intipi(mp,wn)

- ✚ Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del pico del impulso.
- ✚ Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable ro coeficiente de amortiguamiento, con wn (frecuencia natural).
- ✚ Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.
- ✚ La función trabaja con resultados en el intervalo mp=[.36813,.99843], para wn=1; este intervalo cambia como 'mpwn=wn*mpwn1'.
- ✚ Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

function [ts]=intitas(ro,wn,tas)

- ✚ Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del tiempo de asentamiento. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con wn (frecuencia natural).
- ✚ 'tas' es el parámetro correspondiente a la desviación máxima permitida para el asentamiento.
- ✚ La función indica el semiperiodo de la señal de respuesta en que se consigue el tiempo de asentamiento.
- ✚ Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.
- ✚ Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.
- ✚ Obtención de tiempos de asentamiento: Se trata de ir observando cada pico máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, no habrá tiempo de asentamiento. Por tanto, si un pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado está dentro del anterior semiciclo; si no, el tiempo de asentamiento será éste tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal. La búsqueda de 'ts' se realiza entre un pico-valle (fmax) y un cero.

function ts=buscar2(ro,mas,i1,i2,wn,gh)

- Función asociada a 'intitas' e 'inti2' para la determinación de 'ts'.
- Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con wn (frecuencia natural) = 1 rad/s, por defecto.
- 'mas' parámetro margen de tiempo de asentamiento en tanto por uno.
- 'i1' e 'i2' son los intervalos de interpolación.

- La función trabaja con resultados en el intervalo $ro=[.00001,.99]$.
- Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

function [nums,dens,nums2]=esensib(out,in,T,rest)

- ✚ Traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón de valor 'in', que generan una respuesta tipo impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor 'out' durante más tiempo que 'T'. El pico máximo de las respuestas obtenidas no debe exceder `rest` veces el valor `out`. Se exige 'rest>1', por defecto 'rest=2'.
- ✚ Devuelve función de transferencia del límite inferior o superior en el dominio frecuencial según elección de mínimos o máximos, en forma, (nums/dens) para entrada impulso o (nums2/dens) para entrada step.
- ✚ Técnica que NO utiliza las hipótesis clásicas, con las que se comete un error importante de transferencia de datos. Hace llamada a la función `inti2` para la integración de parámetros 'tr'y 'ts', que a su vez llama a la función `buscar2` donde se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros temporales.
- ✚ 'out', 'in', 'T' y 'rest', son datos de entrada, esto es, especificaciones TD originales.
- ✚ Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'T_out', 'tr_out' y 'ts_out', ajustados a 'T'. Con estos parámetros se determina el límite $w_{inferior}$, dado por la envolvente inferior de las curvas de pares (ro,wn) y definido por la FT obtenida con 'nums' y 'dens'. La técnica funciona variando los valores de los 3 parámetros 'Mp', 'tr' y 'ts' de la

respuesta impulso subamortiguado, hasta obtener valores adecuados para todo el rango de frecuencias.

- ✚ Los pares (r_o, w_n) considerados válidos son aquellos que dan lugar a respuestas con $0 < (t_s - t_r) \leq T$, es decir, 'fmax' sobrepasa 'out' aunque no sobrepasa 'rest*out'. 'Mp_max' puede exceder el valor 'in'.
- ✚ En la elección de mínimos, 'tr_out' y 'ts_out' con 'T', indican el límite t-superior.
 - Aumentar w_n (en bajas frecuencias) o disminuir 'ro' (en altas frecuencias): los picos máximos se desplazan a la izquierda.
 - Con estos parámetros se ha determinado el límite w-inferior, definido por la envolvente inferior de las curvas de pares (r_o, w_n) .
- ✚ Para el límite t-inferior, la elección es de máximos, determinando el límite w-superior.
 - Disminuir w_n (para bajas frecuencias) o aumentar 'ro' (para altas frecuencias): los picos máximos se desplazan a la derecha.
- ✚ En cada caso, se escoge como solución la curva más restrictiva de la envolvente: la primera para bajas frecuencias o la última para altas frecuencias.

$$\text{función } [tr, ts, ind] = \text{inti2}(ro, para, tal, tas, wn)$$

- Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con w_n (frecuencia natural) = 1 rad/s, por defecto.
- 'para' es un parámetro que indica si la función ofrece sólo tiempo de alcance (90% defecto), 'para=1', o bien tiempo de asentamiento ($\pm 1\%$ defecto) y tiempo de alcance, 'para=2'. El valor por defecto de 'para' es 1.
- Sólo 2 parámetros de entrada indican 'ro' y 'para'.
- 'tal' y 'tas' son parámetros márgenes t_alcance y t_asentamiento, respectivamente.

- Para t_{alcance} de 0% a 95%, ' $t_{\text{al}}=95$ '. Para $t_{\text{asentam.}}$ de $\pm 2\%$, ' $t_{\text{as}}=2$ '. Por defecto, ' $t_{\text{al}}=90$ ' y ' $t_{\text{as}}=t_{\text{al}}$ '.
- La función indica el semiperiodo de la señal de respuesta en que se consigue el $t_{\text{asentamiento}}$.
- Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.
- La función ofrece resultados en el intervalo $ro=[.00001,.99]$.
- Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.
- Obtención de tiempos de asentamiento: Se trata de ir observando cada pico máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, no habrá tiempo de asentamiento. Por tanto, si un pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; si no, el tiempo de asentamiento será éste tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal. La búsqueda de t_s se realiza entre un pico-valle (f_{max}) y un cero.

function [num,den]=etrac(ymax,rmax)

- ✚ Traslado de especificaciones de tracking desacoplado del dominio temporal al dominio frecuencial, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros ' ω_n ' (frecuencia natural) y ' ρ ' (coef. de amort.). Se consideran aplicadas entradas escalón de referencia, con valor máximo ' r_{max} '. Para tales entradas se generan salidas en forma de impulsos de amplitud máxima ' y_{max} '. Se busca la función de transferencia de parámetros ' ω_n ' y ' ρ ' que describe la relación ' $y_{\text{max}}/r_{\text{max}}$ ', con magnitud en el dominio frecuencial máxima para el rango de frecuencias seleccionado: función de transferencia del límite superior en el dominio frecuencial.
- ✚ La función de transferencia $T(j\omega)$ definida considera entradas ' R_{max} ' impulso.
- ✚ Como ' R_{max} ' son entradas Tipo escalón, la FT definitiva será ' $s*T(j\omega)$ '.

Anexo 5

"Squaring up" QFT en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control, modo DPD

CONTENIDOS

*Anexo.5.1 Resolución de problemas de "squaring-up" optimizado
esfuerzo de control en modo DPD*

Anexo5.1 Resolución de problemas de “squaring-up” optimizado esfuerzo de control en modo DPD

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema de regulación optimizado 5.2.1, en **modo DPD**, a partir de la ecuación matricial (5.149), se consigue,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para regulación, utilizando las ecuaciones (5.150), (5.151), (5.152) y (5.153),

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{- \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{12} \left(\frac{- \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{11} \right| = \|P_{11}Wecr_{11}\| + \|P_{12}Wecr_{21}\| + \|Pd_{11}\| \leq Wps_{11} \quad (\text{A5.1.1})$$

$$|S_{11}| \leq \|P_{11}Wecrm_{11}\| + \|P_{12}Wecrm_{21}\| + \|Pd_{11}\| \leq Wps_{11} \quad (\text{A5.1.2})$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{- \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{12} \left(\frac{- \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{12} \right| = \|P_{11}Wecr_{12}\| + \|P_{12}Wecr_{22}\| + \|Pd_{12}\| \leq Wps_{12} \quad (\text{A5.1.3})$$

$$|S_{12}| \leq \|P_{11}Wecrm_{12}\| + \|P_{12}Wecrm_{22}\| + \|Pd_{12}\| \leq Wps_{12} \quad (\text{A5.1.4})$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{- \sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{22} \left(\frac{- \sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{21} \right| = \|P_{21}Wecr_{11}\| + \|P_{22}Wecr_{21}\| + \|Pd_{21}\| \leq Wps_{21} \quad (\text{A5.1.5})$$

$$|S_{21}| \leq \|P_{21}Wecrm_{11}\| + \|P_{22}Wecrm_{21}\| + \|Pd_{21}\| \leq Wps_{21} \quad (\text{A5.1.6})$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{22} \left(\frac{-\sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{22} \right| = \left\| P_{21} \text{Wecr}_{12} \right\| + \left\| P_{22} \text{Wecr}_{22} \right\| + \left\| Pd_{22} \right\| \leq Wps_{22}$$

(A5.1.7)

$$|S_{22}| \leq \left\| P_{21} \text{Wecrm}_{12} \right\| + \left\| P_{22} \text{Wecrm}_{22} \right\| + \left\| Pd_{22} \right\| \leq Wps_{22} \quad (A5.1.8)$$

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para regulación, utilizando las ecuaciones (5.158), (5.159), (5.160) y (5.161),

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{1n} \left(\frac{-\sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{1,n-1} \right| = \left\| P_{1,n-1} \text{Wecr}_{n-1,1} \right\| + \left\| P_{1n} \text{Wecr}_{n1} \right\| + \left\| Pd_{1,n-1} \right\| \leq Wps_{n-1,1}$$

(A5.1.9)

$$|S_{n-1,1}| \leq \left\| P_{1,n-1} \text{Wecrm}_{11} \right\| + \left\| P_{1n} \text{Wecrm}_{21} \right\| + \left\| Pd_{1,n-1} \right\| \leq Wps_{n-1,1} \quad (A5.1.10)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{1n} \left(\frac{-\sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{1n} \right| = \left\| P_{1,n-1} \text{Wecr}_{n-1,2} \right\| + \left\| P_{1n} \text{Wecr}_{n2} \right\| + \left\| Pd_{1n} \right\| \leq Wps_{n-1,2}$$

(A5.1.11)

$$|S_{n-1,2}| \leq \left\| P_{1,n-1} \text{Wecrm}_{12} \right\| + \left\| P_{1n} \text{Wecrm}_{22} \right\| + \left\| Pd_{1n} \right\| \leq Wps_{n-1,2} \quad (A5.1.12)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{2n} \left(\frac{-\sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{2,n-1} \right| = \left\| P_{2,n-1} \text{Wecr}_{n-1,1} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Wecr}_{n1} \right\| + \left\| Pd_{2,n-1} \right\| \leq Wps_{n1}$$

(A5.1.13)

$$|S_{n1}| \leq \left\| P_{2,n-1} \text{Wecrm}_{11} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Wecrm}_{21} \right\| + \left\| Pd_{2,n-1} \right\| \leq Wps_{n1} \quad (A5.1.14)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n-1, \text{impar}} g_j \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{2n} \left(\frac{-\sum_{j=2}^{n, \text{par}} g_j \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{2n} \right| = \|P_{2,n-1} \text{Wecr}_{n-1,2}\| + \|P_{2n} \text{Wecr}_{n2}\| + \|Pd_{2n}\| \leq Wps_{n2} \quad (\text{A5.1.15})$$

$$|S_{n2}| \leq \|P_{2,n-1} \text{Wecrm}_{12}\| + \|P_{2n} \text{Wecrm}_{22}\| + \|Pd_{2n}\| \leq Wps_{n2} \quad (\text{A5.1.16})$$

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema de tracking optimizado 5.2.2, en **modo DPD**, a partir de la ecuación matricial (5.170), se consigue,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para tracking, utilizando las ecuaciones (5.172), (5.173), (5.174) y (5.175),

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| P_{11} \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) + P_{12} \left(g2 \left(f_{21} - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{l1} - \sum_{i=2}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right) \right| = \|P_{11} \text{Wec}_{s11}\| + \|P_{12} \text{Wec}_{s21}\| \leq \beta_{11} \quad (\text{A5.1.17})$$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| \leq \|P_{11} \text{Wecsm}_{11}\| + \|P_{12} \text{Wecsm}_{21}\| \leq \beta_{11} \quad (\text{A5.1.18})$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| P_{11} \left(g1 \left(f_{12} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(f_{k2} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right) + P_{12} \left(\sum_{l=2}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{l2} - 1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right) \right| = \|P_{11} \text{Wec}_{s12}\| + \|P_{12} \text{Wec}_{s22}\| \leq \beta_{12} \quad (\text{A5.1.19})$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| \leq \|P_{11} \text{Wecsm}_{12}\| + \|P_{12} \text{Wecsm}_{22}\| \leq \beta_{12} \quad (\text{A5.1.20})$$

.....

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r_n} \right| = \left| P_{11} \left(g1 \left(f_{1n} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) + P_{12} \left(g2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) \right| = \|P_{11} \text{Wec}_{s1n}\| + \|P_{12} \text{Wec}_{s2n}\| \leq \beta_{1n} \quad (\text{A5.1.21})$$

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| \leq \|P_{11} \text{Wecsm}_{1n}\| + \|P_{12} \text{Wecsm}_{2n}\| \leq \beta_{1n} \quad (\text{A5.1.22})$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r_n} \right| = \left| P_{21} \left(g_1 \left(f_{1n} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{k=3}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) + P_{22} \left(g_2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{l=4}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) \right| = \|P_{21} \text{Wec}s_{1n}\| + \|P_{22} \text{Wec}s_{2n}\| \leq \beta_{2n} \quad (\text{A5.1.23})$$

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| \leq \|P_{21} \text{Wec}s_{m_{1n}}\| + \|P_{22} \text{Wec}s_{m_{2n}}\| \leq \beta_{2n} \quad (\text{A5.1.24})$$

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para tracking , utilizando las ecuaciones (5.185), (5.186), (5.187) y (5.188),

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_1} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(g_{n-1} \left(f_{n-1,1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right) + P_{1n} \left(g_n \left(f_{n1} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \left(f_{l1} - \sum_{i=2}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right) \right| \leq \beta_{n-1,1} \quad (\text{A5.1.25})$$

por tanto,

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,1}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{n1}\| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{11}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{21}}\| \leq \beta_{n-1,1} \quad (\text{A5.1.26})$$

$$\alpha_{n-1,2} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_2} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(g_{n-1} \left(f_{n-1,2} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(f_{k2} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right) + P_{1n} \left(g_n \left(f_{n2} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_2} \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \left(f_{l2} - 1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right) \right| \leq \beta_{n-1,2} \quad (\text{A5.1.27})$$

por tanto,

$$\alpha_{n-1,2} \leq |T_{12}| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,2}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{n2}\| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{12}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{22}}\| \leq \beta_{n-1,2} \quad (\text{A5.1.28})$$

.....

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(g_{n-1} \left(f_{n-1,n} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) + P_{1n} \sum_{l=2}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq \beta_{n-1,n} \quad (\text{A5.1.29})$$

por tanto,

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,n}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{nn}\| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{1n}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{2n}}\| \leq \beta_{n-1,n} \quad (\text{A5.1.30})$$

$$\alpha_{n1} \leq |T_{n1}| = \left| \frac{y_n}{r_1} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(g_{n-1} \left(f_{n-1,1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(f_{k1} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right) + P_{2n} \left(g_n \left(f_{n1} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) + \sum_{l=2}^{n-2, \text{par}} g_l \left(f_{l1} - \sum_{i=2}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right) \right| \leq \beta_{n1} \quad (\text{A5.1.31})$$

por tanto,

$$\alpha_{n1} \leq |T_{n1}| = \left\| P_{2,n-1} \text{Weecs}_{n-1,1} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Weecs}_{n1} \right\| \leq \left\| P_{2,n-1} \text{Weecsm}_{11} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Weecsm}_{21} \right\| \leq \beta_{n1} \quad (\text{A5.1.32})$$

.....

$$\alpha_{nm} \leq |T_{nm}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(g_{n-1} \left(f_{n-1,n} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + \sum_{k=1}^{n-3, \text{impar}} g_k \left(f_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right) + P_{2n} \sum_{l=2}^{n, \text{par}} g_l \left(f_{ln} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| \leq \beta_{nm} \quad (\text{A5.1.33})$$

por tanto,

$$\alpha_{nm} \leq |T_{nm}| = \left\| P_{2,n-1} \text{Weecs}_{n-1,n} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Weecs}_{nm} \right\| \leq \left\| P_{2,n-1} \text{Weecsm}_{1n} \right\| + \left\| P_{2n} \text{Weecsm}_{2n} \right\| \leq \beta_{nm} \quad (\text{A5.1.34})$$

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema de tracking puro optimizado 5.2.4, en **modo DPD**, a partir de la ecuación matricial (5.290), se determina,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para tracking sin prefiltros, utilizando las ecuaciones

(5.292), (5.293), (5.294) y (5.295),

$$|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{- \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_1} \right) + P_{12} \left(\frac{- \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_1} \right) \right| = \left\| P_{11} \text{Weecs}'_{11} \right\| + \left\| P_{12} \text{Weecs}'_{21} \right\| \leq \rho_{11} \quad (\text{A5.1.35})$$

$$|T'_{11}| \leq \left\| P_{11} \text{Weecsm}'_{11} \right\| + \left\| P_{12} \text{Weecsm}'_{21} \right\| \leq \rho_{11} \quad (\text{A5.1.36})$$

$$|T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{- \sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_2} \right) + P_{12} \left(\frac{- \sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_2} \right) \right| = \left\| P_{11} \text{Weecs}'_{12} \right\| + \left\| P_{12} \text{Weecs}'_{22} \right\| \leq \rho_{12} \quad (\text{A5.1.37})$$

$$|T'_{12}| \leq \|P_{11} Weccsm'_{12}\| + \|P_{12} Weccsm'_{22}\| \leq \rho_{12} \quad (\text{A5.1.38})$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left\| P_{11} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(r'_3 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i \right)}{r'_3} \right) + P_{12} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_3} \right) \right\| = \|P_{11} Weccs'_{13}\| + \|P_{12} Weccs'_{23}\| \leq \rho_{13} \quad (\text{A5.1.39})$$

$$|T'_{13}| \leq \|P_{11} Weccsm'_{13}\| + \|P_{12} Weccsm'_{23}\| \leq \rho_{13} \quad (\text{A5.1.40})$$

.....

$$|T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left\| P_{11} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{12} \left(\frac{\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left(r'_n - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i \right)}{r'_n} \right) \right\| = \|P_{11} Weccs'_{1n}\| + \|P_{12} Weccs'_{2n}\| \leq \rho_{1n} \quad (\text{A5.1.41})$$

$$|T'_{1n}| \leq \|P_{11} Weccsm'_{1n}\| + \|P_{12} Weccsm'_{2n}\| \leq \rho_{1n} \quad (\text{A5.1.42})$$

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left\| P_{21} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_1} \right) + P_{22} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_1} \right) \right\| = \|P_{21} Weccs'_{11}\| + \|P_{22} Weccs'_{21}\| \leq \rho_{21} \quad (\text{A5.1.43})$$

$$|T'_{21}| \leq \|P_{21} Weccsm'_{11}\| + \|P_{22} Weccsm'_{21}\| \leq \rho_{21} \quad (\text{A5.1.44})$$

$$|T'_{22}| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left\| P_{21} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_2} \right) + P_{22} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_2} \right) \right\| = \|P_{21} Weccs'_{12}\| + \|P_{22} Weccs'_{22}\| \leq \rho_{22} \quad (\text{A5.1.45})$$

$$|T'_{22}| \leq \|P_{21} Weccsm'_{12}\| + \|P_{22} Weccsm'_{22}\| \leq \rho_{22} \quad (\text{A5.1.46})$$

.....

$$|T'_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{22} \left(\frac{\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left(r'_n - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i \right)}{r'_n} \right) \right| = \|P_{21} \text{Wec}s'_{1n}\| + \|P_{22} \text{Wec}s'_{2n}\| \leq \rho_{2n} \quad (\text{A5.1.47})$$

$$|T'_{2n}| \leq \|P_{21} \text{Wec}s'm'_{1n}\| + \|P_{22} \text{Wec}s'm'_{2n}\| \leq \rho_{2n} \quad (\text{A5.1.48})$$

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para tracking sin prefiltros, utilizando las ecuaciones (5.306), (5.307), (5.308) y (5.309),

$$|T'_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_1} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \left(r'_1 - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i \right)}{r'_1} \right) + P_{1n} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{r'_1} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s'_{n-1,1}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s'_{n1}\| \leq \rho_{n-1,1} \quad (\text{A5.1.49})$$

$$|T'_{n-1,1}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s'm'_{11}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s'm'_{21}\| \leq \rho_{n-1,1} \quad (\text{A5.1.50})$$

$$|T'_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_2} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{r'_2} \right) + P_{1n} \left(\frac{\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \left(r'_2 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i \right)}{r'_2} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s'_{n-1,2}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s'_{n2}\| \leq \rho_{n-1,2} \quad (\text{A5.1.51})$$

$$|T'_{n-1,2}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s'm'_{12}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s'm'_{22}\| \leq \rho_{n-1,2} \quad (\text{A5.1.52})$$

.....

$$|T'_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_n} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1, \text{impar}} g_k \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{1n} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n, \text{par}} g_k \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{r'_n} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s'_{n-1,n}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s'_{mn}\| \leq \rho_{n-1,n} \quad (\text{A5.1.53})$$

$$|T'_{n-1,n}| \leq \|P_{1,n-1} Weccsm'_{1n}\| + \|P_{1n} Weccsm'_{2n}\| \leq \rho_{n-1,n} \quad (A5.1.54)$$

$$|T'_{n,1}| = \left| \frac{y_n}{r'_1} \right| = \left\| P_{2,n-1} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1,impar} g_k \left(r'_1 - \sum_{i=1}^{n-3,impar} y_i \right)}{r'_1} \right) + P_{2n} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n,par} g_k \sum_{i=2}^{n-2,par} y_i}{r'_1} \right) \right\| = \|P_{2,n-1} Weccs'_{n-1,1}\| + \|P_{2n} Weccs'_{n1}\| \leq \rho_{n,1} \quad (A5.1.55)$$

$$|T'_{n,1}| \leq \|P_{2,n-1} Weccsm'_{11}\| + \|P_{2n} Weccsm'_{21}\| \leq \rho_{n,1} \quad (A5.1.56)$$

.....

$$|T'_{n,n}| = \left| \frac{y_n}{r'_n} \right| = \left\| P_{2,n-1} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1,impar} g_k \sum_{i=1}^{n-3,impar} y_i}{r'_n} \right) + P_{2n} \left(\frac{-\sum_{k=2}^{n,par} g_k \sum_{i=2}^{n-2,par} y_i}{r'_n} \right) \right\| = \|P_{2,n-1} Weccs'_{n-1,n}\| + \|P_{2n} Weccs'_{n,n}\| \leq \rho_{n,n} \quad (A5.1.57)$$

$$|T'_{n,n}| \leq \|P_{2,n-1} Weccsm'_{1n}\| + \|P_{2n} Weccsm'_{2n}\| \leq \rho_{n,n} \quad (A5.1.58)$$

Anexo 6

"Squaring up" reducido en sistemas MIMO infra-actuados optimizando esfuerzo de control, modo DPD

CONTENIDOS

Anexo 6.1 Resolución de problemas de "squaring-up reducido" optimizado esfuerzo de control en modo DPD

Anexo6.1 Resolución de problemas de “squaring-up reducido” optimizado esfuerzo de control en modo DPD

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.1, en modo DPD, a partir de la ecuación matricial (6.140)¹, se consigue ,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para regulación, utilizando las ecuaciones (6.141), (6.142), (6.143) y (6.144),

$$|S_{11}| = \left| \frac{y_1}{d_1} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{d_1} \right) + P_{12} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{d_1} \right) + Pd_{11} \right| = \|P_{11}Wecr_{11}\| + \|P_{12}Wecr_{21}\| + \|Pd_{11}\| \leq Wps_{11} \quad (A6.1.1)$$

$$|S_{11}| \leq \|P_{11}Wecrm_{11}\| + \|P_{12}Wecrm_{21}\| + \|Pd_{11}\| \leq Wps_{11} \quad (A6.1.2)$$

$$|S_{12}| = \left| \frac{y_1}{d_2} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{d_2} \right) + P_{12} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{d_2} \right) + Pd_{12} \right| = \|P_{11}Wecr_{12}\| + \|P_{12}Wecr_{22}\| + \|Pd_{12}\| \leq Wps_{12} \quad (A6.1.3)$$

$$|S_{12}| \leq \|P_{11}Wecrm_{12}\| + \|P_{12}Wecrm_{22}\| + \|Pd_{12}\| \leq Wps_{12} \quad (A6.1.4)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{y_2}{d_1} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{d_1} \right) + P_{22} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{d_1} \right) + Pd_{21} \right| = \|P_{21}Wecr_{11}\| + \|P_{22}Wecr_{21}\| + \|Pd_{21}\| \leq Wps_{21} \quad (A6.1.5)$$

$$|S_{21}| \leq \|P_{21}Wecrm_{11}\| + \|P_{22}Wecrm_{21}\| + \|Pd_{21}\| \leq Wps_{21} \quad (A6.1.6)$$

$$|S_{22}| = \left| \frac{y_2}{d_2} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{d_2} \right) + P_{22} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{d_2} \right) + Pd_{22} \right| = \|P_{21}Wecr_{12}\| + \|P_{22}Wecr_{22}\| + \|Pd_{22}\| \leq Wps_{22} \quad (A6.1.7)$$

¹ Para las simplificaciones se han aplicado las ecuaciones (6.157), (6.158), (6.159) y (6.160).

$$|S_{22}| \leq \|P_{21} Wecrm_{12}\| + \|P_{22} Wecrm_{22}\| + \|Pd_{22}\| \leq Wps_{22} \quad (A6.1.8)$$

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para regulación, utilizando las ecuaciones (6.149), (6.150), (6.151) y (6.152),

$$|S_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_1} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{1n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{1,n-1} \right| = \|P_{1,n-1} Wecr_{n-1,1}\| + \|P_{1n} Wecr_{n1}\| + \|Pd_{1,n-1}\| \leq Wps_{n-1,1} \quad (A6.1.9)$$

$$|S_{n-1,1}| \leq \|P_{1,n-1} Wecrm_{11}\| + \|P_{1n} Wecrm_{21}\| + \|Pd_{1,n-1}\| \leq Wps_{n-1,1} \quad (A6.1.10)$$

$$|S_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{d_2} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{1n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{1n} \right| = \|P_{1,n-1} Wecr_{n-1,2}\| + \|P_{1n} Wecr_{n2}\| + \|Pd_{1n}\| \leq Wps_{n-1,2} \quad (A6.1.11)$$

$$|S_{n-1,2}| \leq \|P_{1,n-1} Wecrm_{12}\| + \|P_{1n} Wecrm_{22}\| + \|Pd_{1n}\| \leq Wps_{n-1,2} \quad (A6.1.12)$$

$$|S_{n1}| = \left| \frac{y_n}{d_1} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_1} \right) + P_{2n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_1} \right) + Pd_{2,n-1} \right| = \|P_{2,n-1} Wecr_{n-1,1}\| + \|P_{2n} Wecr_{n1}\| + \|Pd_{2,n-1}\| \leq Wps_{n1} \quad (A6.1.13)$$

$$|S_{n1}| \leq \|P_{2,n-1} Wecrm_{11}\| + \|P_{2n} Wecrm_{21}\| + \|Pd_{2,n-1}\| \leq Wps_{n1} \quad (A6.1.14)$$

$$|S_{n2}| = \left| \frac{y_n}{d_2} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{d_2} \right) + P_{2n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{d_2} \right) + Pd_{2n} \right| = \|P_{2,n-1} Wecr_{n-1,2}\| + \|P_{2n} Wecr_{n2}\| + \|Pd_{2n}\| \leq Wps_{n2} \quad (A6.1.15)$$

$$|S_{n2}| \leq \|P_{2,n-1} Wecrm_{12}\| + \|P_{2n} Wecrm_{22}\| + \|Pd_{2n}\| \leq Wps_{n2} \quad (A6.1.16)$$

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.3, en modo DPD, a partir de la ecuación matricial (6.204)², se consigue,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para tracking sin prefiltros, utilizando las ecuaciones (6.206), (6.207), (6.208) y (6.209),

$$|T'_{11}| = \left| \frac{y_1}{r'_1} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_1} \right) + P_{12} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_1} \right) \right| = \|P_{11}Wecs'_{11}\| + \|P_{12}Wecs'_{21}\| \leq \rho_{11} \quad (\text{A6.1.17})$$

$$|T'_{11}| \leq \|P_{11}Wecsm'_{11}\| + \|P_{12}Wecsm'_{21}\| \leq \rho_{11} \quad (\text{A6.1.18})$$

$$|T'_{12}| = \left| \frac{y_1}{r'_2} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_2} \right) + P_{12} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_2} \right) \right| = \|P_{11}Wecs'_{12}\| + \|P_{12}Wecs'_{22}\| \leq \rho_{12} \quad (\text{A6.1.19})$$

$$|T'_{12}| \leq \|P_{11}Wecsm'_{12}\| + \|P_{12}Wecsm'_{22}\| \leq \rho_{12} \quad (\text{A6.1.20})$$

$$|T'_{13}| = \left| \frac{y_1}{r'_3} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{g1 \left(r'_3 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i \right)}{r'_3} \right) + P_{12} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i}{r'_3} \right) \right| = \|P_{11}Wecs'_{13}\| + \|P_{12}Wecs'_{23}\| \leq \rho_{13} \quad (\text{A6.1.21})$$

$$|T'_{13}| \leq \|P_{11}Wecsm'_{13}\| + \|P_{12}Wecsm'_{23}\| \leq \rho_{13} \quad (\text{A6.1.22})$$

.....

$$|T'_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r'_n} \right| = \left| P_{11} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{12} \left(\frac{g2 \left(r'_n - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} y_i \right)}{r'_n} \right) \right| = \|P_{11}Wecs'_{1n}\| + \|P_{12}Wecs'_{2n}\| \leq \rho_{1n} \quad (\text{A6.1.23})$$

$$|T'_{1n}| \leq \|P_{11}Wecsm'_{1n}\| + \|P_{12}Wecsm'_{2n}\| \leq \rho_{1n} \quad (\text{A6.1.24})$$

² Para las simplificaciones se han aplicado las ecuaciones (6.234) a (6.241).

$$|T'_{21}| = \left| \frac{y_2}{r'_1} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{r'_1} \right) + P_{22} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{r'_1} \right) \right| = \|P_{21} Wecs'_{11}\| + \|P_{22} Wecs'_{21}\| \leq \rho_{21} \quad (A6.1.25)$$

$$|T'_{21}| \leq \|P_{21} Wecsm'_{11}\| + \|P_{22} Wecsm'_{21}\| \leq \rho_{21} \quad (A6.1.26)$$

$$|T'_{22}| = \left| \frac{y_2}{r'_2} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{r'_2} \right) + P_{22} \left(\frac{-g2 \sum_{i=4}^{n, par} y_i}{r'_2} \right) \right| = \|P_{21} Wecs'_{12}\| + \|P_{22} Wecs'_{22}\| \leq \rho_{22} \quad (A6.1.27)$$

$$|T'_{22}| \leq \|P_{21} Wecsm'_{12}\| + \|P_{22} Wecsm'_{22}\| \leq \rho_{22} \quad (A6.1.28)$$

.....

$$|T'_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r'_n} \right| = \left| P_{21} \left(\frac{-g1 \sum_{i=3}^{n-1, impar} y_i}{r'_n} \right) + P_{22} \left(\frac{g2 \left(r'_n - \sum_{i=4}^{n, par} y_i \right)}{r'_n} \right) \right| = \|P_{21} Wecs'_{1n}\| + \|P_{22} Wecs'_{2n}\| \leq \rho_{2n} \quad (A6.1.29)$$

$$|T'_{2n}| \leq \|P_{21} Wecsm'_{1n}\| + \|P_{22} Wecsm'_{2n}\| \leq \rho_{2n} \quad (A6.1.30)$$

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para tracking sin prefiltros, utilizando las ecuaciones (6.220), (6.221), (6.222) y (6.223),

$$|T'_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_1} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{g1 \left(r'_1 - \sum_{i=1}^{n-3, impar} y_i \right)}{r'_1} \right) + P_{1n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, par} y_i}{r'_1} \right) \right| = \|P_{1,n-1} Wecs'_{n-1,1}\| + \|P_{1n} Wecs'_{n1}\| \leq \rho_{n-1,1} \quad (A6.1.31)$$

$$|T'_{n-1,1}| \leq \|P_{1,n-1} Wecsm'_{11}\| + \|P_{1n} Wecsm'_{21}\| \leq \rho_{n-1,1} \quad (A6.1.32)$$

$$|T'_{n-1,2}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_2} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{r'_2} \right) + P_{1n} \left(\frac{g2 \left(r'_2 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i \right)}{r'_2} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wecsm}'_{n-1,2}\| + \|P_{1n} \text{Wecsm}'_{n2}\| \leq \rho_{n-1,2}$$

(A6.1.33)

$$|T'_{n-1,2}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wecsm}'_{12}\| + \|P_{1n} \text{Wecsm}'_{22}\| \leq \rho_{n-1,2}$$

(A6.1.34)

.....

$$|T'_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r'_n} \right| = \left| P_{1,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{1n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{r'_n} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wecsm}'_{n-1,n}\| + \|P_{1n} \text{Wecsm}'_{nn}\| \leq \rho_{n-1,n}$$

(A6.1.35)

$$|T'_{n-1,n}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wecsm}'_{1n}\| + \|P_{1n} \text{Wecsm}'_{2n}\| \leq \rho_{n-1,n}$$

(A6.1.36)

$$|T'_{n,1}| = \left| \frac{y_n}{r'_1} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{g1 \left(r'_1 - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i \right)}{r'_1} \right) + P_{2n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{r'_1} \right) \right| = \|P_{2,n-1} \text{Wecsm}'_{n-1,1}\| + \|P_{2n} \text{Wecsm}'_{n1}\| \leq \rho_{n,1}$$

(A6.1.37)

$$|T'_{n,1}| \leq \|P_{2,n-1} \text{Wecsm}'_{11}\| + \|P_{2n} \text{Wecsm}'_{21}\| \leq \rho_{n,1}$$

(A6.1.38)

.....

$$|T'_{n,n}| = \left| \frac{y_n}{r'_n} \right| = \left| P_{2,n-1} \left(\frac{-g1 \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} y_i}{r'_n} \right) + P_{2n} \left(\frac{-g2 \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} y_i}{r'_n} \right) \right| = \|P_{2,n-1} \text{Wecsm}'_{n-1,n}\| + \|P_{2n} \text{Wecsm}'_{nn}\| \leq \rho_{n,n}$$

(A6.1.39)

$$|T'_{n,n}| \leq \|P_{2,n-1} \text{Wecsm}'_{1n}\| + \|P_{2n} \text{Wecsm}'_{2n}\| \leq \rho_{n,n}$$

(A6.1.40)

Aplicando los resultados obtenidos en el desarrollo del problema 6.2.2, en modo DPD, a partir de la ecuación matricial (6.167)³, se determina,

(1) Para el subsistema 1 optimizado para tracking, utilizando las ecuaciones (6.169), (6.170), (6.171) y (6.172),

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| = \left| \frac{y_1}{r_1} \right| = \left| P_{11} g_1 \left(f_{11} - 1 - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) + P_{12} g_2 \left(f_{21} - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| = \|P_{11} Wecs_{11}\| + \|P_{12} Wecs_{21}\| \leq \beta_{11} \quad (\text{A6.1.41})$$

$$\alpha_{11} \leq |T_{11}| \leq \|P_{11} Wecsm_{11}\| + \|P_{12} Wecsm_{21}\| \leq \beta_{11} \quad (\text{A6.1.42})$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_1}{r_2} \right| = \left| P_{11} g_1 \left(f_{12} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) + P_{12} g_2 \left(f_{22} - 1 - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| = \|P_{11} Wecs_{12}\| + \|P_{12} Wecs_{22}\| \leq \beta_{12} \quad (\text{A6.1.43})$$

$$\alpha_{12} \leq |T_{12}| \leq \|P_{11} Wecsm_{12}\| + \|P_{12} Wecsm_{22}\| \leq \beta_{12} \quad (\text{A6.1.44})$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| = \left| \frac{y_1}{r_3} \right| = \left| P_{11} g_1 \left(f_{13} - 1 - \sum_{i=5}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_3} \right) + P_{12} g_2 \left(f_{23} - \sum_{i=4}^{n, \text{par}} \frac{y_i}{r_3} \right) \right| = \|P_{11} Wecs_{13}\| + \|P_{12} Wecs_{23}\| \leq \beta_{13} \quad (\text{A6.1.45})$$

$$\alpha_{13} \leq |T_{13}| \leq \|P_{11} Wecsm_{13}\| + \|P_{12} Wecsm_{23}\| \leq \beta_{13} \quad (\text{A6.1.46})$$

.....

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| = \left| \frac{y_1}{r_n} \right| = \left| P_{11} g_1 \left(f_{1n} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + P_{12} g_2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| = \|P_{11} Wecs_{1n}\| + \|P_{12} Wecs_{2n}\| \leq \beta_{1n} \quad (\text{A6.1.47})$$

$$\alpha_{1n} \leq |T_{1n}| \leq \|P_{11} Wecsm_{1n}\| + \|P_{12} Wecsm_{2n}\| \leq \beta_{1n} \quad (\text{A6.1.48})$$

.....

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| = \left| \frac{y_2}{r_n} \right| = \left| P_{21} g_1 \left(f_{1n} - \sum_{i=3}^{n-1, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + P_{22} g_2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| = \|P_{21} Wecs_{1n}\| + \|P_{22} Wecs_{2n}\| \leq \beta_{2n} \quad (\text{A6.1.49})$$

$$\alpha_{2n} \leq |T_{2n}| \leq \|P_{21} Wecsm_{1n}\| + \|P_{22} Wecsm_{2n}\| \leq \beta_{2n} \quad (\text{A6.1.50})$$

³ Para las simplificaciones se han aplicado las ecuaciones (6.190) a (6.197).

.....

(m) Para el subsistema m optimizado para tracking, utilizando las ecuaciones (6.180), (6.181), (6.182) y (6.183),

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_1} \right| = \left| P_{1,n-1} g_1 \left(f_{11} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_1} \right) + P_{1n} g_2 \left(f_{21} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_1} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,1}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{n1}\| \leq \beta_{n-1,1} \quad (\text{A6.1.51})$$

$$\alpha_{n-1,1} \leq |T_{n-1,1}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{11}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{21}}\| \leq \beta_{n-1,1} \quad (\text{A6.1.52})$$

$$\alpha_{n-1,2} \leq |T_{12}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_2} \right| = \left| P_{1,n-1} g_1 \left(f_{12} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_2} \right) + P_{1n} g_2 \left(f_{22} - 1 - \sum_{i=4}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_2} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,2}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{n2}\| \leq \beta_{n-1,2} \quad (\text{A6.1.53})$$

$$\alpha_{n-1,2} \leq |T_{12}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{12}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{22}}\| \leq \beta_{n-1,2} \quad (\text{A6.1.54})$$

.....

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| = \left| \frac{y_{n-1}}{r_n} \right| = \left| P_{1,n-1} g_1 \left(f_{1n} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + P_{1n} g_2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| = \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{n-1,n}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{nm}\| \leq \beta_{n-1,n} \quad (\text{A6.1.55})$$

$$\alpha_{n-1,n} \leq |T_{n-1,n}| \leq \|P_{1,n-1} \text{Wec}s_{m_{1n}}\| + \|P_{1n} \text{Wec}s_{m_{2n}}\| \leq \beta_{n-1,n} \quad (\text{A6.1.56})$$

$$\alpha_{n1} \leq |T_{n1}| = \left| \frac{y_n}{r_1} \right| = \left| P_{2,n-1} g_1 \left(f_{11} - 1 - \sum_{i=3}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + P_{2n} g_2 \left(f_{21} - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| = \|P_{2,n-1} \text{Wec}s_{n-1,1}\| + \|P_{2n} \text{Wec}s_{n1}\| \leq \beta_{n1} \quad (\text{A6.1.57})$$

$$\alpha_{n1} \leq |T_{n1}| \leq \|P_{2,n-1} \text{Wec}s_{m_{11}}\| + \|P_{2n} \text{Wec}s_{m_{21}}\| \leq \beta_{n1} \quad (\text{A6.1.58})$$

.....

$$\alpha_{m} \leq |T_{m}| = \left| \frac{y_n}{r_n} \right| = \left| P_{2,n-1} g_1 \left(f_{1n} - \sum_{i=1}^{n-3, \text{impar}} \frac{y_i}{r_n} \right) + P_{2n} g_2 \left(f_{2n} - 1 - \sum_{i=2}^{n-2, \text{par}} \frac{y_i}{r_n} \right) \right| = \|P_{2,n-1} \text{Wec}s_{n-1,n}\| + \|P_{2n} \text{Wec}s_{nm}\| \leq \beta_m \quad (\text{A6.1.59})$$

$$\alpha_{m} \leq |T_{m}| \leq \|P_{2,n-1} \text{Wec}s_{m_{1n}}\| + \|P_{2n} \text{Wec}s_{m_{2n}}\| \leq \beta_m \quad (\text{A6.1.60})$$

Anexo 7

Programas para Reducción del orden de Funciones de Transferencia

CONTENIDOS

Anexo7.1: Programas asociados a la reducción del orden de funciones de transferencia

Anexo7.1: Programas asociados a la reducción del orden de funciones de transferencia

function [numer, denom]=racw(c,w,n,m)

✚ Función de RACionalización de respuestas en frecuencia (complex vs. W) para disminución del orden de compensación, de entrada compleja y salida la función de transferencia (numer/denom) correspondiente, según el vector frecuencia w suministrado. Utilizada para la reducción del n° de ceros y n° de polos obtenidos inicialmente para las funciones almacenadas en CONTROL*.MAT (*=1,2,3,4,5,6,7,8).

✚ Inversa de la función "freqresp.m".

✚ Basado en una Función e idea original de I.Horowitz [Horowitz,92].

✚ Javier Joglar: 06/02/04

✚ Actualizado: 19/06/09

✚ Parámetros de entrada:

- 'c'=vector [1,N], función compleja entrada.
- 'w'= vector [1,N] de frecuencias de operación.
- 'n' y 'm', n° de polos y de zeros, respectivamente, para la función de transferencia buscada (numer/denom).

Anexo 8

Desarrollo práctico del control “Squaring-up” para la Dinámica Longitudinal de una Aeronave Civil

CONTENIDOS

Anexo8.1: Métodos de “squaring-up”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO

A8.1.1 Soluciones Propuestas.

Anexo8.2: Esquema de Especificaciones en la dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil

Anexo8.3: Esquema del Desarrollo Práctico al problema dinámica longitudinal de una aeronave civil

A8.3.1 Obtención de Especificaciones (Carpeta ESPECIF)

A8.3.2 Obtención de Plantillas del modelo de aeronave civil (Carpeta RPLANTI).

A8.3.3 Determinación del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).

A8.3.4 Estudio de acoplamientos entradas/salidas del modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).

A8.3.5 Diseño y Análisis del problema dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil [2,8] (Carpeta R8).

A8.3.6 Detalles de los Programas Propuestos para resolución del problema dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil [2,8]

Anexo8.4: Obtención del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).

Anexo8.5: Acoplamientos entradas/salidas del modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).

Anexo8.6: Obtención de Prefiltros reducidos (Carpeta R8).

Anexo8.1: Métodos de “squaring-up”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO

Se esquematiza a continuación los pasos dados para conseguir alcanzar un método de “squaring-up” para resolución de problemas de control QFT sobre plantas MIMO tamaño $[p,n]$, con p,n cualesquiera, pares o impares, de cualquier valor. Imposición de perturbaciones sobre la planta, controlada para regulación y seguimiento de referencias de entrada.

En cada paso, se describen formalmente todas las salidas y además las especificaciones para conseguir RS y RP, es decir, robustez en el TD y en el WD. La descripción de especificaciones viene dada en términos de IPD (“*Inverse Plant Domain*”) primero y de DPD (“*Direct Plant Domain*”) segundo. Además, se intentan optimizar *esfuerzos de control* siempre que se pueda.

A8.1.1 Soluciones Propuestas.

1. Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_1.

- MIMO con QFT de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y *par*.
- Más salidas que entradas de control, por lo que éstas últimas se usan en común para controlar varias salidas distintas.
- La solución es un controlador diagonal $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos off-diagonal.

2. “Squaring-up reducido”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_1 Optimizando el Esfuerzo de Control. Desarrollado en el Capítulo6.

- MIMO con QFT de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y *par*.
- Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.

- La solución es un controlador diagonal $[2,2]$ y un prefiltro No diagonal $[2,n]$ con elementos off-diagonal.

3. Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_2.

- MIMO con QFT de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y *par*.
- m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos.
- La solución es un controlador diagonal $[2,n]$ y un prefiltro No diagonal $[n,n]$ con elementos off-diagonal.

4. “Squaring-up”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_2

Optimizando el Esfuerzo de Control. Desarrollado en el Capítulo5.

- MIMO con QFT de tamaño $[2,n]$, con $n \geq 2$ y *par*.
- Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.
- m subsistemas ($m=n/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos.
- La solución es un controlador diagonal $[2,n]$ y un prefiltro No diagonal $[n,n]$ con elementos off-diagonal.

5. Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_3.

- MIMO con QFT de tamaño $[p,n]$, con $(p,n) \geq 2$ y ambos *pares*.
- Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.
- $m \cdot q$ subsistemas ($m=n/2, q=p/2$) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos.

- La solución es un controlador diagonal $[p,n]$ y un prefiltro No diagonal $[p^*n,n]$.

6. “Squaring-up general”: Compensación por Uso Común de Entradas de Control MIMO_4.

- MIMO con QFT de tamaño $[p,n]$, con $(p,n) \geq 2$ y cualquier *paridad* para ambos.
- Optimización del esfuerzo de control para regulación y seguimiento.
- m^*q subsistemas ($m=n'/2, q=p'/2$, con n' y p' pares normalización de n y p) MIMO $[2,2]$, caracterizados por tener todos entradas de control comunes pero, un controlador $[2,2]$ y un prefiltro $[2,n]$ independientes para cada uno de ellos.
- La solución es un controlador diagonal $[p',n']$ y un prefiltro No diagonal $[p'^*n',n']$.

Anexo8.2: Esquema de Especificaciones en la dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil

Dada la Planta del Canal Longitudinal $P [2,8]$ con subplantas $P_i [2,2]$, tal que $P \equiv [P_1, P_2, \dots, P_4]$, que incorpora Planta de Perturbaciones $P_d [2,8]$ con $P_{d_i} [2,2]$, tal que $P_d \equiv [P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{d4}]$, siendo

- el vector de perturbaciones externas $d \equiv [w_z, w_{zb}]$,
- las entradas de control $u \equiv [DT, TH]$ y,
- las salidas $y \equiv [z, Va, Wv, V, \alpha, \gamma, n_z, n_x]$.

Las especificaciones del problema combinado regulación/seguimiento propuesto se describen gráficamente del siguiente modo:

Estabilidad Robusta: $|Te_{ij}| \leq We_k, \quad i=1,2 \quad j=1,\dots,8 \quad k=1, \dots,8 \quad (A8.1)$

		Salidas							
		z	Va	Wv	V	α	γ	nz	nx
Entradas	DT →	11	21	31	41	51	61	71	81
	TH →	12	22	32	42	52	62	72	82
		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
		g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8

Figura_A8.1: Nomenclatura de especificaciones para estabilidad robusta

Esfuerzo de Control Seguimiento: $\frac{|u_i^{opt}|}{r_j} = |Ecs_{ij}^{opt}| \leq Wecs_{ij}, i=1, \dots, 8 \quad j=1, \dots, 8 \quad (A8.2)$

✚ Condiciones iniciales dadas por la relación, Entradas_control/Referencias

		Referencias							
		z _c	Va _c	Wv _c	V _c	α _c	γ _c	nz _c	nx _c
Entradas	DT ←	11	21	31	41	51	61	71	81
	TH ←	12	22	32	42	52	62	72	82

Figura_A8.2: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para seguimiento. Relación Entradas_control/Referencias

✚ Condiciones extendidas dadas por la relación, Salidas/Referencias

		Salidas							
		z	Va	Wv	V	α	γ	nz	nx
Referencias	z _c →	11	21	31	41	51	61	71	81
	Va _c →	12	22	32	42	52	62	72	82
	Wv _c →	13	23	33	43	53	63	73	83
	V _c =0 →	14	24	34	44	54	64	74	84
	α _c →	15	25	35	45	55	65	75	85
	γ _c →	16	26	36	46	56	66	76	86
	nz _c →	17	27	37	47	57	67	77	87
	nx _c =0 →	18	28	38	48	58	68	78	88

Figura_A8.3: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para seguimiento. Relación Salidas/Referencias

Esfuerzo de Control Regulación: $\left| \frac{u_i^{opt}}{d_j} \right| = |Ecr_{ij}^{opt}| \leq We_{cr_{ij}}, i=1, \dots, 8, j=1,2$ (A8.3)

Condiciones iniciales dadas por la relación, Entradas_control/Perturbaciones

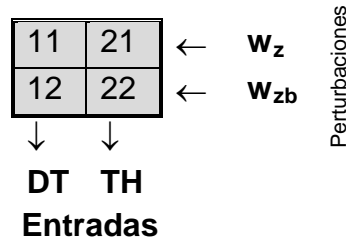


Figura A8.4: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para regulación. Relación Entradas_control/Perturbaciones

Condiciones extendidas dadas por la relación, Salidas/Perturbaciones

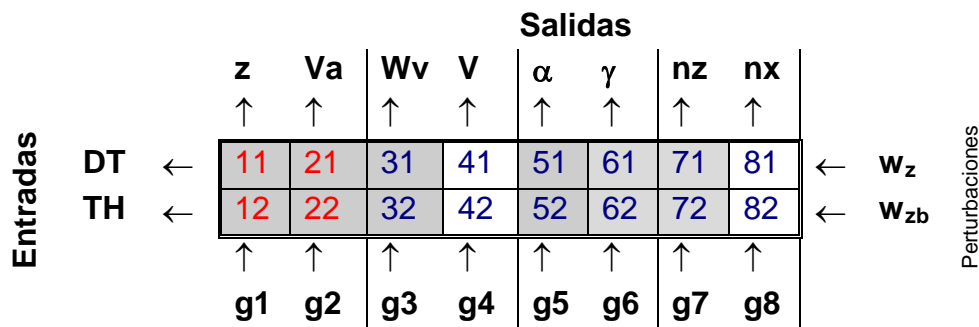


Figura A8.5: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para regulación. Relación Salidas/Perturbaciones

Sensibilidad: $\left| \frac{Y_i}{d_j} \right| = |S_{ij}| \leq Wps_{ij}, i=1, \dots, 8, j=1,2$ (A8.4)

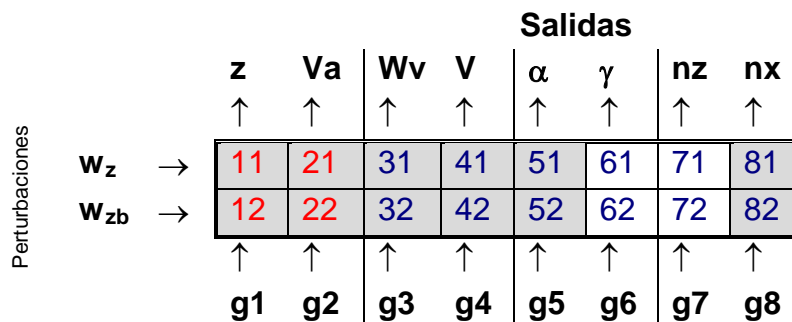


Figura A8.6: Nomenclatura de especificaciones para sensibilidad

Tracking: $\left| \frac{Y_i}{r_j} \right| : \alpha_{ij} \leq |T_{ij}| \leq \beta_{ij} , i=1, \dots, 8 \quad j=1, \dots, 8$ (A8.5)

		Salidas							
Referencias		z	Va	Wv	V	α	γ	nz	nx
		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
z_c	→	11	21	31	41	51	61	71	81
Va_c	→	12	22	32	42	52	62	72	82
Wv_c	→	13	23	33	43	53	63	73	83
V_c=0	→	14	24	34	44	54	64	74	84
α_c	→	15	25	35	45	55	65	75	85
γ_c	→	16	26	36	46	56	66	76	86
nz_c	→	17	27	37	47	57	67	77	87
nx_c=0	→	18	28	38	48	58	68	78	88

	→	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	→	11	21	31	41	51	61	71	81
	→	12	22	32	42	52	62	72	82
		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
		g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8

Figura_A8.7: Nomenclatura de especificaciones para tracking: prefiltro y compensador

Anexo8.3: Esquema del Desarrollo Práctico al problema dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil

Se esquematiza a continuación los pasos dados para conseguir dar una solución adecuada al problema del modelo de aeronave civil en su dinámica longitudinal.

Desarrollos organizados según las siguientes carpetas,

A8.3.1 Obtención de Especificaciones (Carpeta ESPECIF)

TD2WD (Subcarpeta)->TD2WD.M->INTI.M->BUSCAR.M
 ->RACWE.M
 ->M2P.M

- TD2WD.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn'(frecuencia natural) y 'ro'(coef.de amortiguamiento) para seguimiento de entradas escalón. Aplicación de la Técnica1 que NO utiliza las hipótesis clásicas. Hace llamada a la función INTI.M para la integración de parámetros 'tr' y 'ts'. Además, hace uso de la función RACWE.M para aproximar resultados a la envolvente de orden superior.
- INTI.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo.
- BUSCAR.M: Función asociada a INTI.M para la determinación de 'ts'.
- RACWE.M: Función de RACionalización de respuestas en frecuencia (complex vs.W).
- M2P.M: Función de cálculo de Fases, a partir de Magnitudes.

TD2WD (Subcarpeta)->TD2WD1_.M->INTI.M->BUSCAR.M
->RACWE.M
->M2P.M

- TD2WD1_.M: Funciona igual que TD2WD.M, aplicando la misma Técnica NO Clásica, pero no permite aproximación de orden superior a la envolvente.

TD2WD (Subcarpeta)->TD2WD1.M->INTI.M->BUSCAR.M
->RACWE.M
->M2P.M

- TD2WD1.M: Simplificación de la Función TD2WD_1.M, aplicando la Técnica 1_Modificada NO Clásica.

TD2WD (Subcarpeta)->TD2WD2.M->INTI.M->BUSCAR.M

->RACWE.M

->M2P.M

- TD2WD2.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro' para seguimiento de entradas escalón, aplicando la Técnica2 que utiliza hipótesis clásicas.

STEPTRAC (Subcarpeta)->STEPTRAC.M->INTI.M->BUSCAR.M

->RACWE.M

->M2P.M

- STEPTRAC.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro'. Entradas escalón cuyo valor 'rmax' produce una salida 'ymax', asociada a una 'mp' (sobrelongación máxima). Devuelve función de transferencia del límite superior en el w-domain (nummax/denmax), con tiempos mínimos de alcance y asentamiento. Hace uso de la función RACWE para obtener una FT aproximada a la envolvente que se pretende definir en el w_superior.

ESENSIBQ (Subcarpeta)->ESENSIBQ.M->INTIPI.M

->INTITAS.M->BUSCAR2.M

- ESENSIBQ.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro', aplicadas entradas escalón de valor 'in', que generan un impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor 'out' y debe desaparecer en un tiempo inferior a 'T'.

- INTIPI.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del pico del impulso, aplicando Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable coeficiente de amortiguamiento.
- INTITAS.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del tiempo de asentamiento. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo. Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.
- BUSCAR2.M: Función asociada a INTITAS.M para la determinación de 'ts'. Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

ESENSIB (Subcarpeta)->ESENSIB.M->INTI2.M->BUSCAR2.M

- ESENSIB.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro', aplicadas entradas escalón de valor 'in', que generan una respuesta tipo impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor 'out' durante más tiempo que 'T'.
- INTI2.M: Equivalente a INTITAS.M, pero asociado a ESENSIB.M .

ETRAC (Subcarpeta)->ETRAC.M

- ETRAC.M: Traslado de especificaciones de tracking acoplado del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro', aplicadas entradas escalón de referencia, con valor máximo 'rmax' y salidas en forma de impulsos de amplitud máxima 'ymax'.

A8.3.2 Obtención de Plantillas del modelo de aeronave civil (Carpeta RPLANTI).

GPLANTA.M->T12.M

- Retraso computacional (delay: 0 a 100ms) incluido en la linealización de todas las variables de salida.
- FT de Actuadores y Motor: Ganancia+Rate_Limit+Constante de Tiempo.
- Los datos de todas las plantillas deben tener el mismo n^o de componentes, ya que se almacenan matricialmente.

T12.M->RCAM12.M

->RCAMEX.C

->FTRIM2.M->FMINV2.M->ACEVAL.M->LIMITS

- T12.M : “Trimming” y Linealización del Modelo RCAM de 12 Estados¹, con ciertas condiciones paramétricas.

$$[num,den]=\mathbf{T12}(\text{parámetros Trim, contador}).$$

- RCAM12.M: Definición del Modelo de aeronave RCAM de 12 Estados.
- RCAMEX.C: RCAM12 en formato C.
- FTRIM2.M: Condiciones de equilibrio del Modelo RCAM

$$[x0, u0, y0]=\mathbf{ftrim2}(\text{aeronave, xini, uini, yini, par, ef})$$

- FMINV2.M: Minimización/Optimización del vector de funciones.
- ACEVAL.M: Evaluación de parámetros de la aeronave, mediante funciones de coste.
- LIMITS.M: Definición de límites de variables.

¹ Convencionales (9 estados) + Posición (3 estados).

Estructura para la generación de Familias de Plantillas (“Templates”):

GPLANTA.M->APAR.M

->PROCESO.M->T12.M->.....

->TEM*-.MAT

- GPLANTA.M: Generación iterativa de una Familia de Plantillas para todas las posibles combinaciones In/Out. Produce las plantillas en formato TEM*-.MAT. Almacenadas en las subcarpetas LON (dinámica longitudinal) y LAT (dinámica lateral).
- APAR.M: Asignación de valores a parámetros individuales según configuración asignada por GPLANTA.M.
- PROCESO.M: Definición de cada FT [num,den] para cada posición “contador” que indica una determinada plantilla y llamada al programa principal de “trimming” y linealización, T12.M.

A8.3.3 Determinación del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).

GPLANTA3.M->APAR.M

->PROCESO.M->T12.M->.....

->MAXMINWN.MAT

GPLANTA3.M: Obtención de plantillas para la planta RCAM12 sin viento/turbulencia. Igual que GPLANTA.M, pero se utiliza no para la definición de plantillas, sino de los eigenvalores de la matriz del espacio de estados 'A', a efectos de obtener los valores extremo del rango de frecuencias `wn`. Los resultados se graban en la matriz MAXMINWN.MAT.

A8.3.4 Estudio de acoplamientos entradas/salidas del modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).

TRIM17.M->RCAM17.M

->FTRIM.M->FMINV.M->ACEVAL.M->LIMITS

- TRIM17.M : Trimming y Linealización del Modelo RCAM de 17 Estados².
- RCAM17.M: Definición del Modelo RCAM de 17 Estados.

TRIM23.M->RCAM23.M

->FTRIM.M->FMINV.M->ACEVAL.M->LIMITS

- TRIM23.M : Trimming y Linealización del Modelo RCAM de 23 Estados³.
- RCAM23.M: Definición del Modelo RCAM de 23 Estados.
- ACOPLAMIENTOS.DOC: Sobre cada uno de los modelos RCAM17 y RCAM23 ofrece:
 - Eigenvectores y eigenvalores de los modos (estados).
 - Grado de acoplamiento de los diferentes modos con las salidas.
 - Acoplamiento entradas/salidas.

Todo ello, para las situaciones propuestas en la Tabla_A8.1 a continuación.

Tabla_A8.1: Situaciones de vuelo consideradas para la determinación de acoplamientos

Situación	Condiciones de Vuelo y Trimming	Viento	Turbulencia
1	Nominal	NO	NO
2	Nominal	-20 m/s	2 m/s
3	Nominal	20 m/s	-2m/s

² Convencionales (9 estados) + Posición (3 estados) + Entradas (5 estados).

³ Convencionales (9 estados) + Posición (3 estados) + Entradas (5 estados) + Perturbaciones (6 estados).

A8.3.5 Diseño y Análisis del problema modelo de aeronave civil dinámica longitudinal [2,8] (Carpeta R8).

Resolución del problema de Tracking y Regulación mediante procedimiento de “Squaring-up”. Planta del Sistema RCAM12, canal Longitudinal de tamaño [2,8] MIMO.

- Entradas: DT(2) y TH(4+5).
- Salidas: Z(5), Va(6), Wv(4), V(7), alpha(18), gamma(19), nz(3), nx(2).
- Perturbaciones: Wz(8) y Wzb(11).

La estructura secuencial básica para resolución del problema es la siguiente:

PLANTA.M->P1.MAT, PD1.MAT, P2.MAT, PD2.MAT, P3.MAT, PD3.MAT, P4.MAT,
PD4.MAT

PNOM.M->PNOM1.MAT, PDNOM1.MAT, PNOM2.MAT, PDNOM2.MAT,
PNOM3.MAT, PDNOM3.MAT, PNOM4.MAT, PDNOM4.MAT,

PNOMW.M->PNOMW.MAT, PDNOMW.MAT

QNOM.M->QNOM1.MAT, PE1.MAT, QNOM2.MAT, PE3.MAT, QNOM3.MAT,
PE5.MAT, QNOM4.MAT, PE7.MAT.

QNOMW.M->QNOMW.MAT y PE1W.MAT

ESPECIF1.M->BOUNDS11.MAT, BOUNDS21.MAT, BOUNDS31.MAT,
BOUNDS41.MAT, BOUNDS51.MAT, BOUNDS61.MAT,
BOUNDS71.MAT, BOUNDS81.MAT, ESPEC11.MAT, ESPEC21.MAT,
ESPEC31.MAT, ESPEC41.MAT.

MIMO1.M->CONTROL1.MAT

MIMO3.M->CONTROL3.MAT

MIMO5.M->CONTROL5.MAT

MIMO7.M->CONTROL7.MAT

QENOM.M-> P2e2.MAT, P21e2.MAT, P2e4.MAT, P23e4.MAT, P2e6.MAT, P25e6.MAT,
P2e8.MAT, P27e8.MAT

QENOMB.M-> P2e2w.MAT, P21e2w.MAT, P2e4w.MAT, P23e4w.MAT, P2e6w.MAT,
P25e6w.MAT, P2e8w.MAT, P27e8w.MAT

QENOMC.M-> ndP2e2.MAT, ndP21e2.MAT, ndP2e4.MAT, ndP23e4.MAT,
ndP2e6.MAT, ndP25e6.MAT, ndP2e8.MAT, ndP27e8.MAT

QENOM2.M-> q1e1.MAT, q3e3.MAT, q5e5.MAT, q7e7.MAT

QENOM2B.M-> q1e1w.MAT, q3e3w.MAT, q5e5w.MAT, q7e7w.MAT.

QENOM2C.M-> ndq1e1.MAT, ndq3e3.MAT, ndq5e5.MAT, ndq7e7.MAT.

ESPECIF2.M->BOUNDS22.MAT, BOUNDS42.MAT, BOUNDS62.MAT,
BOUNDS82.MAT.

MIMO2.M->CONTROL2.MAT

MIMO4.M->CONTROL4.MAT

MIMO6.M->CONTROL6.MAT

MIMO8.M->CONTROL8.MAT

RACW.M

ANALISIS.M-> ANA1.MAT, ANA2.MAT, ANA3.MAT, ANA4.MAT

WD2TD*.M (*=1,2,3,4)

ANALIT.M

PLANTA.M: A partir de las plantillas de la carpeta TEM/LON se reorganizan los datos definiendo el problema MIMO [2,8], tanto para la Planta P como para la Planta de Perturbaciones Pd , ofreciendo las FTs en forma de polinomios numerador, denominador.

Problema de Tracking y Regulación.

Los resultados se almacenan en:

- P1.MAT (num11, den11, num12, den12, num21, den21, num22, den22).
- PD1.MAT (numpd11, denpd11, numpd12, denpd12, numpd21, denpd21, numpd22, denpd22).
- P2.MAT (num13, den13, num14, den14, num23, den23, num24, den24).
- PD2.MAT (numpd13, denpd13, numpd14, denpd14, numpd23, denpd23, numpd24, denpd24).
- P3.MAT (num15, den15, num16, den16, num25, den25, num26, den26).

- PD3.MAT (numpd15, denpd15, numpd16, denpd16, numpd25, denpd25, numpd26, denpd26).
- P4.MAT (num17, den17, num18, den18, num27, den27, num28, den28).
- PD4.MAT (numpd17, denpd17, numpd18, denpd18, numpd27, denpd27, numpd28, denpd28).

PNOM.M: A partir de las plantillas de la Planta P y de la Planta de Perturbaciones Pd , definidas por PLANTA.M, se obtienen los valores complejos P_{ij} y Pd_{ij} ($i=1,2$ y $j=1$ a 8), que ya se pueden representar gráficamente en Diagramas de Nichols. Se define para cada conjunto P_{ij} y Pd_{ij} una plantilla nominal; ésta se calcula buscando dentro de cada conjunto la plantilla de mínima magnitud (abajo en DN) y máxima fase (derecha en DN). Los resultados se almacenan en:

- PNOM1.MAT (P11, P12, P21, P22, nom11, nom12, nom21, nom22, w).
- PDNOM1.MAT (Pd11, Pd12, Pd21, Pd22, w).
- PNOM2.MAT (P13, P14, P23, P24, nom13, nom14, nom23, nom24, w).
- PDNOM2.MAT (Pd13, Pd14, Pd23, Pd24, w).
- PNOM3.MAT (P15, P16, P25, P26, nom15, nom16, nom25, nom26, w).
- PDNOM3.MAT (Pd15, Pd16, Pd25, Pd26, w).
- PNOM4.MAT (P17, P18, P27, P28, nom17, nom18, nom27, nom28, w).
- PDNOM4.MAT (Pd17, Pd18, Pd27, Pd28, w).

PNOMW.M: Ofrece los mismos resultados que PNOM.M, pero utilizando un array de frecuencias logarítmico $w1$.

Los resultados para el subsistema1 se almacenan en:

- PNOMW.MAT (P11w, P12w, P21w, P22w, nom11w, nom12w, nom21w, nom22w, w1).

- PDNOMW.MAT (Pd11w, Pd12w, Pd21w, Pd22w, nomd11w, nomd12w, nomd21w, nomd22w, w1).

QNOM.M: A partir de las plantillas de la Planta P en forma compleja, definidas por PNOM.M, se obtienen también en forma compleja los elementos inversos de las plantillas q_{ij} ($i=1,2$ y $j=1$ a 8), además de las plantillas efectivas para el lazo1 Pe_k ($k=1,3,5,7$). Se define para cada conjunto q_{ij} y Pe_k una plantilla nominal; ésta se calcula buscando dentro de cada conjunto la plantilla de mínima magnitud (abajo en DN) y máxima fase (derecha en DN). Procesamiento de elementos inversos de plantillas y equivalentes inversos lazo1.

Los resultados se almacenan en:

- QNOM1.MAT (q11, q12, q21, q22, detP1, qnom11, qnom12, qnom21, qnom22, w).
- PE1.MAT (Pe11, Penom11).
- QNOM2.MAT (q13, q14, q23, q24, detP2, qnom13, qnom14, qnom23, qnom24, w).
- PE3.MAT (Pe13, Penom13).
- QNOM3.MAT (q15, q16, q25, q26, detP3, qnom15, qnom16, qnom25, qnom26, w).
- PE5.MAT (Pe15, Penom15).
- QNOM4.MAT (q17, q18, q27, q28, detP4, qnom17, qnom18, qnom27, qnom28, w).
- PE7.MAT (Pe17, Penom17).

QNOMW.M: Ofrece los mismos resultados que QNOM.M, pero utilizando un array de frecuencias logarítmico $w1$. Los resultados para el subsistema1 se almacenan en:

- QNOMW.MAT (q11w, q12w, q21w, q22w, detP1w, w1).
- PE1W.MAT (Pe11w, Penom11w).

ESPECIF1.M: Definición de especificaciones y búsqueda de “bounds” para todos los subsistemas del primer lazo. Los resultados se almacenan en:

- BOUNDS11.MAT (bdbe11, bdbt11, bdbt12, bdbt13, bdbt15, bdbt16, bdbt17, bdbbs11, bdbbs12, bdbbecr11, bdbbecr12, w)
- BOUNDS21.MAT (bdbecs11, bdbecs12, bdbecs13, bdbecs15, bdbecs16, bdbecs17)
- BOUNDS31.MAT (bdbe13, bdbt31, bdbt32, bdbt33, bdbt35, bdbt36, bdbt37, bdbbs31, bdbbs32, bdbbecr31, bdbbecr32, w)
- BOUNDS41.MAT (bdbecs31, bdbecs32, bdbecs33, bdbecs35, bdbecs36, bdbecs37)
- BOUNDS51.MAT (bdbe15, bdbt51, bdbt52, bdbt53, bdbt55, bdbt56, bdbt57, bdbbs51, bdbbs52, bdbbecr51, bdbbecr52, w)
- BOUNDS61.MAT (bdbecs51, bdbecs52, bdbecs53, bdbecs55, bdbecs56, bdbecs57)
- BOUNDS71.MAT (bdbe17, bdbt71, bdbt72, bdbt73, bdbt75, bdbt76, bdbt77, bdbbs71, bdbbs72, bdbbecr71, bdbbecr72, w)
- BOUNDS81.MAT (bdbecs71, bdbecs72, bdbecs73, bdbecs75, bdbecs76, bdbecs77)
- ESPEC11.MAT (Wek, Wecr11, Wecr12, Wecr21, Wecr22, Wecs11, Wecs12, Wecs21, Wecs22, Wecs13, Wecs23, Wecs15, Wecs25, Wecs16, Wecs26, Wecs17, Wecs27, Wps11, Wps12, Wps21, Wps22, Wps31, Wps32, Wps51, Wps52, Wps61, Wps62, Wps71, Wps72, alpha44, beta44, Wtt44, beta88)
- ESPEC21.MAT (alpha11, alpha22, beta11, beta22, beta33, alpha33, beta55, alpha66, beta66, beta77, beta13, beta23, beta43, beta53, Wtt11, Wtt22, Wtt33, Wtt66, beta63, beta73)
- ESPEC31.MAT (beta21, beta12, beta31, beta41, beta32, beta42, beta51, beta52, beta61, beta62, beta71, beta72)

- ESPEC41.MAT (beta15, beta25, beta35, beta45, beta65, beta75, beta16, beta26, beta36, beta46, beta56, beta76, beta17, beta27, beta37, beta47, beta57, beta67)

MIMO1.M: Procesamiento del primer lazo para la planta efectiva1, realizando Tratamiento de bounds (agrupamiento e intersección), ajuste de la Función de Lazo (g1) y determinación del Prefiltro del lazo1 (f11, f12 ,f13 ,f15 ,f16 ,f17). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL1.MAT (g1, g1w, f11, f12, f13, f15, f16, f17, nc1, dc1).

MIMO3.M: Procesamiento del primer lazo para la planta efectiva3, realizando Tratamiento de bounds (agrupamiento e intersección), ajuste de la Función de Lazo (g3) y determinación del Prefiltro del lazo3 (f31,f32 ,f33 ,f35 ,f36 ,f37). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL3.MAT (g3, g3w, f31, f32, f33, f35, f36, f37, nc3, dc3).

MIMO5.M: Procesamiento del primer lazo para la planta efectiva5, realizando Tratamiento de bounds (agrupamiento e intersección), ajuste de la Función de Lazo (g5) y determinación del Prefiltro del lazo5 (f51,f52 ,f53 ,f55 ,f56 ,f57). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL5.MAT (g5, g5w, f51, f52, f53, f55, f56, f57, nc5, dc5).

MIMO7.M: Procesamiento del primer lazo para la planta efectiva7, realizando Tratamiento de bounds (agrupamiento e intersección), ajuste de la Función de Lazo (g7) y determinación del Prefiltro del lazo7 (f71, f72 ,f73 ,f75 ,f76 ,f77). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL7.MAT (g7, g7w, f71, f72, f73, f75, f76, f77, nc7, dc7).

QENOM.M, QENOMB.M, QENOMC.M: Obtención de los elementos inversos en forma compleja de las plantillas qe_{ij} ($i=1,2$ y $j=1$ a 8), además de las plantillas efectivas para el lazo2 Pe_k ($k=2,4,6,8$). Se define para cada conjunto qe_{ij} y Pe_k una plantilla nominal, calculada buscando mínima magnitud y máxima fase en el DN. QENOMB.M hace lo mismo pero utilizando un array de frecuencias logarítmico $w1$. QENOMC.M ofrece el resultado de QENOM.M pero en formato (num/den) polinómico. Los resultados se almacenan en:

- P2e2.MAT (P2e22, P2enom22, q2e22)
- P21e2.MAT (P21e22, P21enom22, q21e22)
- P2e4.MAT (P2e24, P2enom24, q2e24)
- P23e4.MAT (P23e24, P23enom24, q23e24)
- P2e6.MAT (P2e26, P2enom26, q2e26)
- P25e6.MAT (P25e26, P25enom26, q25e26)
- P2e8.MAT (P2e28, P2enom28, q2e28)
- P27e8.MAT (P27e28, P27enom28, q27e28)
- P2e2w.MAT (P2e22w, P2enom22w, q2e22w)
- P21e2w.MAT (P21e22w, P21enom22w, q21e22w)
- P2e4w.MAT (P2e24w, P2enom24w, q2e24w)
- P23e4w.MAT (P23e24w, P23enom24w, q23e24w)
- P2e6w.MAT (P2e26w, P2enom26w, q2e26w)
- P25e6w.MAT (P25e26w, P25enom26w, q25e26w)
- P2e8w.MAT (P2e28w, P2enom28w, q2e28w)
- P27e8w.MAT (P27e28w, P27enom28w, q27e28w)
- ndP2e2.MAT (nq2e22, dq2e22, nP2e22, dP2e22)
- ndP21e2.MAT (nq21e22, dq21e22, nP21e22, dP21e22)

- ndP2e4.MAT (nq2e24, dq2e24, nP2e24, dP2e24)
- ndP23e4.MAT (nq23e24, dq23e24, nP23e24, dP23e24)
- ndP2e6.MAT (nq2e26, dq2e26, nP2e26, dP2e26)
- ndP25e6.MAT (nq25e26, dq25e26, nP25e26, dP25e26)
- ndP2e8.MAT (nq2e28, dq2e28, nP2e28, dP2e28)
- ndP27e8.MAT (nq27e28, dq27e28, nP27e28, dP27e28)

QENOM2.M, QENOM2B.M, QENOM2C.M: Equivalentes a los anteriores programas pero para la obtención de los elementos inversos en forma compleja de las plantillas $q1e2_j$ ($j=1,3,5,7$). Los resultados se almacenan en:

- q1e1.MAT (q1e21)
- q3e3.MAT (q13e23)
- q5e5.MAT (q15e25)
- q7e7.MAT (q17e27)
- q1e1w.MAT (q1e21w)
- q3e3w.MAT (q13e23w)
- q5e5w.MAT (q15e25w)
- q7e7w.MAT (q17e27w)
- ndq1e1.MAT (nq1e21, dq1e21)
- ndq3e3.MAT (nq13e23, dq13e23)
- ndq5e5.MAT (nq15e25, dq15e25)
- ndq7e7.MAT (nq17e27, dq17e27)

ESPECIF2.M: Definición de especificaciones y búsqueda de “bounds” para todos los subsistemas del segundo lazo. Los resultados se almacenan en:

determinación del Prefiltro del lazo6 (f61, f62, f63, f65, f66, f67). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL6.MAT (g6, g6w, f61, f62, f63, f65, f66, f67, nc6, dc6).

MIMO8.M: Procesamiento del segundo lazo para la planta efectiva8, realizando Tratamiento de bounds (agrupamiento e intersección), ajuste de la Función de Lazo (g8) y determinación del Prefiltro del lazo8 (f88). Los resultados se almacenan en:

- CONTROL8.MAT (g8, g8w, f88, nc8, dc8).

RACW.M: función de RACionalización de respuestas en frecuencia para disminución del orden de compensación, de entrada compleja y salida la función de transferencia (numer/denom) correspondiente, según el vector frecuencia w suministrado. Utilizada para la reducción del nº de ceros y nº de polos obtenidos inicialmente para las funciones almacenadas en CONTROL*.MAT (*=1,2,3,4,5,6,7,8)

ANALISIS.M: Programa que llama a rutinas que cargan datos para analizar en frecuencia los resultados obtenidos sobre uno de los 4 subsistemas MIMO [2,2]. Procesamiento definitivo en frecuencia de resultados de Márgenes de estabilidad robusta, Sensibilidades, Tracking, Esfuerzos de Control para Regulación y Esfuerzos de Control para Seguimiento. Los resultados se almacenan en:

- ANA1.MAT (t11, t12, t13, t15, t16, t17, t21, t22, t23, t25, t26, t27, s11, s12, s21, s22)
- ANA2.MAT (t31, t32, t33, t35, t36, t37, t41, t42, t43, t44, t45, t46, t47, s31, s32, s41, s42)
- ANA3.MAT (t51, t52, t53, t55, t56, t57, t61, t62, t63, t65, t66, t67, s51, s52, s61, s62)
- ANA4.MAT (t71, t72, t73, t75, t76, t77, t88)

ANALIT.M: Programa que llama a rutinas que cargan datos para analizar temporalmente los resultados obtenidos sobre uno de los 4 subsistemas MIMO [2,2]. Trabaja con los resultados del análisis en frecuencia ANALISIS.M. Utiliza los programas WD2TD*.M (*=1,2,3,4) para trasladar los resultados anteriores en formato complejo a formato polinómico numerador/denominador.

Si en la resolución del problema se aplica “compatibilidad de especificaciones en el esfuerzo de control”, la estructura cambia al incorporar algunos otros programas.

Inicialmente, se parte de:

PLANTA.M->PNOM.M->PNOMW.M->QNOM.M->QNOMW.M ->ESPECIF1.M

Seguido de los siguientes programas:

COMPA.M: Se trata de buscar la compatibilidad entre especificaciones de tracking y las de esfuerzo de control para seguimiento. Esta viene dada por la obtención de resultados LTI dentro de todo el rango de frecuencias aplicable. Aplicación de hipótesis de restricción fuerte: compatibilidad fuerte. Al no estar resuelto el primer lazo, las plantas efectivas del segundo lazo se aproximan al valor de los elementos diagonales correspondientes. Los resultados se almacenan en:

- COMPA1.MAT(Wecs11, Wecs13, Wecs15, Wecs17, beta11, beta33, beta55, beta77, beta12, beta13, beta15, beta16, beta17, beta31, beta32, beta35, beta36, beta37, beta51, beta52, beta53, beta56, beta57, beta71, beta72, beta73, beta75, beta76)
- COMPA2.MAT (beta22, beta44, beta66, beta88, beta21, beta23, beta25, beta26, beta27, beta41, beta42, beta43, beta45, beta46, beta47, beta61, beta62, beta63, beta65, beta67)

ESPEC12.M: Definición de especificaciones y búsqueda de “bounds” para todos los subsistemas del primer lazo, aplicando resultados de COMPA.M.

MIMO12.M, MIMO32.M, MIMO52.M, MIMO72.M: Diseño del primer lazo sobre plantas efectivas impares, aplicando resultados de ESPEC12.M

QENOM.M->QENOMB.M->QENOMC.M->QENOM2.M->QENOM2B.M->QENOM2C.M

COMPA2.M: Aplicación de hipótesis de restricción fuerte: compatibilidad fuerte. Con el primer lazo resuelto, las plantas efectivas del segundo lazo son correctas.

ESPEC22.M: Definición de especificaciones y búsqueda de “bounds” para todos los subsistemas del segundo lazo, aplicando resultados de COMPA2.M.

MIMO22.M, MIMO42.M, MIMO62.M, MIMO82.M: Diseño del segundo lazo sobre plantas efectivas pares, aplicando resultados de ESPEC22.M

ANALISIS.M->ANALIT.M

A8.3.6 Detalles de los Programas Propuestos para resolución del problema modelo de aeronave civil dinámica longitudinal [2,8]

Todos los programas desarrollo del problema modelo de aeronave civil dinámica longitudinal [2,8] están organizados según la estructura de carpetas indicada a continuación y adjuntos en el DVD que acompaña a esta Tesis.

Carpeta ESPECIF.

TD2WD.M: Traslado de especificaciones del TD al WD, aproximadas a un sistema de 2º orden de pares (wn, ro), excepto en la opción ‘aproximación a envolvente’, donde se ofrece un sistema de orden superior. Se consideran aplicadas entradas escalón.

$function [nummin, denmin, nummax, denmax]=td2wd(mp, tr, ts, desv, wiw)$
--

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- 'mp', sobreelongación máxima en tanto por ciento del valor de asentamiento.
- 'tr' y 'ts', tiempos de alcance y de asentamiento máximos.
- 'desv', valor de desviación máxima para asentamiento permitida. Por defecto 0.02.

Los parámetros de entrada sólo exigen límite inferior en frecuencia. El límite superior se define con el parámetro 'wiw'.

- 'wiw', nº de veces la w_n definida para el límite inferior en frecuencia; por defecto $wiw=5$.

ARGUMENTOS DE SALIDA :

- función de transferencia del límite inferior en el WD (nummin/denmin).
- función de transferencia del límite superior en el WD (nummax/denmax).

Aplicación de la Técnica1 que NO utiliza las hipótesis clásicas con las que se comete un error importante de transferencia de datos. Hace llamada a la función INTI.M para la integración de parámetros 'tr' y 'ts', que a su vez llama a la función BUSCAR.M donde se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros temporales.

Hace uso de la función RACWE.M para obtener una FT aproximada a la envolvente que se pretende definir: $w_{inferior}$ o $w_{superior}$.

INTI.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo.

function [tr,ts]=inti (ro, para, tal, tas, wn)

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- ‘ro’: coeficiente de amortiguamiento; la función ofrece resultados en el intervalo $ro=[0.0001, 0.99]$.
- ‘wn’: frecuencia natural. 1 rad/s, por defecto.
- ‘para’: parámetro que indica si la función ofrece sólo tiempo de alcance (‘para=1’), o bien tiempo de asentamiento y tiempo de alcance (‘para=2’). El valor por defecto de ‘para’ es 1.
- ‘tal’ y ‘tas’: parámetros márgenes de tiempos de alcance y asentamiento respectivamente. Para tiempo_alcance de 0% a 95%, ‘tal=95’. Para tiempo_asentam. de $\pm 2\%$, ‘tas=2’. Por defecto, ‘tal=90’ y ‘tas=1’.

Si sólo se usan dos parámetros de entrada, éstos indican ‘ro’ y ‘para’.

ARGUMENTOS DE SALIDA :

- ‘tr’ : tiempo de alcance ; 90% por defecto.
- ‘ts’ : tiempo de asentamiento ; $\pm 1\%$ defecto.

Trabaja con respuestas a señales ESCALÓN y funcionamiento con amortiguamiento subcrítico. La función indica el semiperiodo de la señal de respuesta en que se consigue el tiempo_asentamiento.

Obtención de tiempos de asentamiento:

Se trata de ir observando cada pico máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo de asentamiento estará en el primer semiciclo, en el intervalo de ascenso, antes de dicho pico. Si no es así, cuando se encuentre un pico máximo dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; si no, el tiempo de asentamiento será éste tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal.

BUSCAR.M: Función asociada a INTI.M para la determinación de 'ts'.

function ts=buscar(ro, mas, i1, i2, wn, gh)

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- 'mas' : parámetro margen de tiempo de asentamiento en tanto por uno.
- 'i1' e 'i2' : intervalos de interpolación.

RACWE.M: Función de RACionalización de respuestas en frecuencia (complex vs. W). Inversa de la función FREQRESP.M. Función llamada por los programas TD2WD.M y ESENSIB.M para definir la FT de la envolvente dada inicialmente por parámetros magnitud-fase.

function [numer,denom,er]=racwe(c, w, n, m)

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- 'c' : vector [N,1], función compleja de entrada.
- 'w' : vector [N,1] de rango de frecuencias.
- 'n' y 'm' : n^o de polos y de zeros, respectivamente, para la función de transferencia buscada (numer/denom).

M2P.M: Función de cálculo de Fases, a partir de Magnitudes. Determinación de la fase 'pp' en los puntos 'ww', dada la magnitud 'vv' en dBs en los puntos 'cc'. Si hay polos o zeros en el origen 'o1=1', sino 'o1=0'. Si hay exceso de polos o zeros 'o2=1', sino 'o2=0'.

function pp=m2p(ww,cc,vv,o1,o2)

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- ‘ww’ : vector [1,q], frecuencia de puntos de fases.
- ‘cc’ : vector [1,n], frecuencia de puntos de magnitudes.
- ‘v’ : vector [1,n], magnitudes

TD2WD1.M: Al igual que en TD2WD.M, ‘trmax’ y ‘tsmax’ con ‘Mp’, son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.

Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, ‘tr_sup’ y ‘ts_sup’ con ‘Mp_sup’. Con estos parámetros se determina el límite $w_{inferior}$, dado por la envolvente inferior de las curvas de pares (ro,wn) y definido por la FT obtenida con ‘nummin’ y ‘denmin’. Hay que tener en cuenta que wn en cada una de estas curvas es el valor MAYOR del correspondiente a cada tiempo ‘tr’ y ‘ts’.

Por tanto, la técnica funciona variando los valores de los 3 parámetros TD, hasta obtener valores adecuados para todo el rango de frecuencias.

No existiendo como dato de entrada el límite $t_{inferior}$, el sistema lo tiene en cuenta considerando límite superior en WD para cada par de curvas (ro,wn), ‘wiw’ veces el valor de wn, siendo ‘wiw’ la definición del límite inferior. Los parámetros ‘tr_inf’ y ‘ts_inf’ con ‘mp_inf’ en TD, determinan el límite $w_{superior}$, definido por la envolvente superior en WD de las respuestas de pares (ro,wn*wiw).

TD2WD1.M: Simplificación de la Función TD2WD_1.M, aplicando la Técnica 1_Modificada NO Clásica. Igual que en TD2WD1.M, ‘trmax’ y ‘tsmax’ con ‘Mp’, son los Datos de Entrada.

A partir de estos parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'tr_sup' y 'ts_sup' con 'Mp'. Con estos últimos parámetros se determina el límite w_inferior, definido por la FT dada por 'nummin' y 'denmin'. El dato 'Mp' se mantiene constante e, inicialmente, el dato 'ts' (ts_sup=tsmax), variando el valor de 'tr'; si no es posible, la estrategia cambia manteniendo constante 'Mp', disminuyendo 'ts' hasta obtener un valor de 'tr' adecuado.

No existiendo como dato de entrada el límite t_inferior, el sistema lo tiene en cuenta considerando límite superior en WD la respuesta dada por el par (ro,wn) del límite inferior, desplazada 'wiw' veces el valor de wn. Los parámetros 'tr_inf' y 'ts_inf' con 'mp' en TD, determinan el límite w_superior definido por la envolvente superior en WD de la respuesta de par (ro,wn*wiw).

TD2WD2.M: Traslado de especificaciones del TD al WD para seguimiento de entradas escalón, aplicando la Técnica2 que utiliza hipótesis clásicas.

function [numt, dent]=td2wd2(mp, tr, ts, desv)

Sólo admite como desviaciones de asentamiento los valores típicos de ± 0.02 y ± 0.05 , esto es 2% o 5%. Devuelve función de transferencia del límite inferior en el w-domain (numt/dent).

Técnica2 que utiliza las hipótesis clásicas: 'tr' definido de 0 a 100% de señal y 'ts' aproximado a los valores típicos 4T o 3T, siendo 'T' la constante de tiempo del sistema.

Las variables 'trmax' y 'tsmax' con 'mp', indican el límite t-superior. Con estos parámetros se determina el límite w_inferior. El dato 'Mp' se mantiene constante e, inicialmente, el dato 'ts' (ts_sup=tsmax), variando el valor de 'tr'; si no es posible, la estrategia cambia manteniendo constante 'Mp', disminuyendo 'ts' hasta obtener un valor de 'tr' adecuado.

ESENSIBQ.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros 'wn' y 'ro', aplicadas entradas escalón de valor 'in', que generan una respuesta tipo impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor 'out' y debe desaparecer en un tiempo inferior a 'T'. El pico máximo de la respuesta debe ser entonces 'out'.

*function [nums ,dens ,nums2]=**esensibq**(out, in, T, desv, asen)*

Debido a la simplificación de la interpolación inversa, se exige 'out' mínimo de 0.465. Para valores inferiores normalizar usando, por ejemplo, 'out=0.5' e 'in=0.5*in/out'.

'asen' 1 o 2, indica cómo se va a considerar el valor 'desv' para considerar nula la señal:

- 1) Modo absoluto. Desviación función de la señal referida a la unidad. Por defecto.
- 2) Modo relativo. Desviación función de la señal referida a out.

Devuelve función de transferencia del límite en el WD en forma, (nums/dens) para entrada “impulso” o (nums2/dens) para entrada “step”.

Técnica que NO utiliza las hipótesis clásicas, con las que se comete un error importante de transferencia de datos. Hace llamada a las funciones INTIPI.M e INTITAS.M para la integración de parámetros 'ro' y 'ts', respectivamente. INTITAS.M llama a su vez a la función BUSCAR2.M

Se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros.

'out', 'in' y 'T', son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.

Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'T_out' y 'Mp_out', ajustados a 'T'. Con estos parámetros se determina la FT en el WD.

INTIPI.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del pico del impulso, aplicando Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable coeficiente de amortiguamiento, con ω_n (frecuencia natural).

function [ro]=intipi(mp, wn)

Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.

La función ofrece resultados en el intervalo $mp=[.36813,.99843]$, para $\omega_n=1$; este intervalo cambia como 'mpwn= ω_n *mpwn1'.

Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

INTITAS.M: Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa del tiempo de asentamiento. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con ω_n (frecuencia natural). Trabaja con respuestas a señales IMPULSO.

function [ts]=intitas(ro, wn, tas)

'tas' es el parámetro correspondiente a la desviación máxima permitida para el asentamiento.

La función indica el semiperiodo de la señal de respuesta en que se consigue el tiempo de asentamiento. Trabaja con respuestas a señales IMPULSO. Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

Para la obtención de tiempos de asentamiento, hay que ir observando cada pico máximo de la señal. Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, no habrá tiempo de asentamiento.

Por tanto, si un pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; si no, el tiempo de asentamiento será éste tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo, hasta que el pico-valle de la función esté dentro del canal.

La búsqueda de ‘ts’ se realiza entre un pico-valle (fmax) y un cero.

BUSCAR2.M: Función asociada a INTITAS.M para la determinación de ‘ts’. Aproximaciones sucesivas mediante interpolación inversa. Método de Newton, por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden, sobre la variable tiempo, con ω_n (frecuencia natural) = 1 rad/s, por defecto.

```
function ts=buscar2(ro, mas, i1, i2, wn, gh)
```

ARGUMENTOS DE ENTRADA :

- 'mas': parámetro margen de tiempo de asentamiento en tanto por uno.
- 'i1' e 'i2' : intervalos de interpolación.

La función ofrece resultados en el intervalo $ro=[.00001,.99]$.

Funcionamiento con amortiguamiento subcrítico.

ESENSIB.M: Traslado de especificaciones del t-domain al w-domain, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros ' ω_n ' y ' ro '. Se consideran aplicadas entradas escalón de valor ' in ', que generan una respuesta tipo impulso subamortiguado cuya amplitud no debe exceder el valor ' out ' durante más tiempo que ' T '.

```
function [nums, dens, nums2]=esensib(out, in, T, rest)
```

El pico máximo de las respuestas obtenidas no debe exceder 'rest' veces el valor 'out'. Se exige que 'rest>1' y por defecto 'rest=2'.

Devuelve función de transferencia del límite inferior o superior en el WD según elección de mínimos o máximos, en forma, (nums/dens) para entrada impulso o (nums2/dens) para entrada "step".

Técnica que NO utiliza las hipótesis clásicas. Hace llamada a la función INTI2.M para la integración de parámetros 'tr' y 'ts', que a su vez llama a la función BUSCAR2.M donde se aplica un método de aproximaciones sucesivas para interpolación inversa de parámetros temporales.

'out', 'in', 'T' y 'rest', son los Datos de Entrada, esto es, las especificaciones TD originales.

Con los parámetros TD originales se obtiene la respuesta temporal de parámetros TD posibles, es decir, 'T_out', 'tr_out' y 'ts_out', ajustados a 'T'. Con estos parámetros se determina el límite w_inferior, dado por la envolvente inferior de las curvas de pares (ro,wn) y definido por la FT obtenida con 'nums' y 'dens'.

La técnica funciona variando los valores de los 3 parámetros 'Mp', 'tr' y 'ts' de la respuesta impulso subamortiguado, hasta obtener valores adecuados para todo el rango de frecuencias.

- Los pares (ro,wn) considerados válidos son aquellos que dan lugar a respuestas con: $0 < (ts - tr) \leq T$, es decir, 'fmax' sobrepasa 'out' aunque no sobrepasa 'rest*out'.
- 'Mp_max' puede exceder el valor 'in'.

En la elección de mínimos, 'tr_out' y 'ts_out' con 'T', indican el límite t-superior.

- Aumentar wn (para bajas frecuencias) o disminuir ro (para altas frecuencias): los picos máximos se desplazan a la izquierda.

Con estos parámetros se ha determinado el límite w-inferior, definido por la envolvente inferior de las curvas de pares (ρ, ω_n).

Para el límite t-inferior, la elección es de máximos, determinando el límite w-superior.

- Disminuir ω_n (para bajas frecuencias) o aumentar ρ (para altas frecuencias): los picos máximos se desplazan a la derecha.

En cada caso, se escoge como solución la curva más restrictiva de la envolvente:

- La primera para bajas frecuencias o la última para altas frecuencias.

INTI2.M: Equivalente a INTITAS.M, pero asociado a ESENSIB.M.

```
function [tr, ts, ind]=inti2(ro, para, tal, tas, wn)
```

ETRAC.M: Traslado de especificaciones de tracking acoplado del TD al WD, aproximadas a un sistema de 2º orden de parámetros ' ω_n ' y ' ρ '. Se consideran aplicadas entradas escalón de referencia, con valor máximo ' r_{max} '. Para tales entradas se generan salidas en forma de impulsos de amplitud máxima ' y_{max} '.

```
function [num, den]=etrac(y_max, r_max)
```

Se busca la función de transferencia de parámetros ' ω_n ' y ' ρ ' que describe la relación ' y_{max}/r_{max} ', con magnitud en el WD máxima para el rango de frecuencias seleccionado: función de transferencia del límite superior en el w-domain.

La función de transferencia $T(j\omega)$ definida considera entradas ' R_{max} ' en forma de impulso.

Como ' R_{max} ' son entradas tipo escalón, la FT definitiva será ' $s^*T(j\omega)$ '.

Carpeta RPLANTI.

GPLANTA.M: Grid de plantas. Programa para la obtención de plantillas (“templates”) para el modelo de aeronave civil con incertidumbre. Por cada par [entrada(in), salida(out)] se obtiene una función de transferencia parametrizada. Para ello, se define inicialmente como planta nominal la dada por los valores nominales del ‘trimming’ del modelo de aeronave civil. Se varía entre el mínimo y el máximo cada uno de los valores parámetros del modelo sin tocar el resto (en una configuración predefinida por combinatoria), construyendo así gráficamente en el Diagrama de Nichols una superficie cuyo valor y perímetro sean lo más amplios posible.

Además:

- Incorpora Función de Transferencia de Actuadores y Motor (bandwidth y “rate limiter” en lazo cerrado; con “limited integrator” y constante de tiempo).
- Incorpora retraso por procesamiento de señales de control.
- Ejecuta Trim Sin perturbaciones para la Planta_Avión.
- Ejecuta Trim Con perturbaciones (viento/turbulencia) para la Planta_Perturbaciones.

Se hace uso de la función T12.M para la obtención de cada FT, por cada conjunto de valores parámetro del modelo de aeronave. Utiliza como valores_parámetro los que van a ser argumentos de entrada a T12.M, usándolos como vectores definidos por 3 valores característicos, [mínimo, nominal, máximo]. De esta manera, se tiene como intervalos de funcionamiento para cada parámetro los siguientes:

- $par1=[100000, 120000, 150000]$ kg.
- $par2=[0.15, 0.23, 0.31]$ x MAC m.
- $par4=[0, 0, 0.21]$ x MAC m.
- $va=[52, 80, 90]$ m/s.

- $\gamma=[6, 0, -6]^\circ$.
- $\chi=[0, 0, 359]^\circ$.
- $\text{posi1}=[0, 0, -23500]$ m.
- $\text{posi2}=[0, 0, 19000]$ m.
- $\text{posi3}=[-1000, -1000, 0]$ m.
- $\text{del}=[0, 0, 0.1]$ s.
- $\text{gu1}=[2, 0, -2]$ m/s.
- $\text{gu2}=[2, 0, -2]$ m/s.
- $\text{gu3}=[2, 0, -2]$ m/s.
- $\text{ws1}=[20, 0, -20]$ m/s.
- $\text{ws2}=[20, 0, -20]$ m/s.
- $\text{ws3}=[20, 0, -20]$ m/s.
- Valores Nominales, $v=[120000, 0.23, 0, 80, 0, 0, 0, 0, -1000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Las entradas y salidas se separan, según los canales longitudinal y lateral, definidas por posición, aplicando el criterio siguiente:

- Salidas Canal Longitudinal: $y_{lon}=[1,2,3,4,5,6,7,17,18,19]$.
- Entradas Canal Longitudinal: $u_{lon}=[2,4,5,8,11]$
- Salidas Canal Lateral: $y_{lat}=[8,9,10,11,12,13,14,15,16,20,21]$
- Entradas Canal Lateral: $u_{lat}=[1,3,6,7,9,10]$

T12.M: Trimming y linealización para el modelo de aeronave civil de 12 estados, sobre cada entrada (*in) y cada salida (**out) concretas. Devuelve la función de transferencia solicitada en forma [num/den] grabada en archivos ‘templa*-.mat’. Además:

- Considera ganancia, “Limits”, “Rate_Limits”, retraso de actuadores y retraso por procesamiento.

- Realiza ajustes de masa- $V_{a_{min}}$, considerando $V_a > 1.10V_{stall}$ siempre. (La realidad es que $V_{a_{MCA}} > 1.23V_{stall}$).
- Trim y linealización de planta sólo con entradas de control, sin viento/turbulencia.
- Trim y linealización de planta sólo con entradas de perturbación.
- Inclusión de la constante K:

$$\begin{cases} K=1, \text{ si step} \rightarrow u_{lon}(2,4,5,8) \text{ y } u_{lat}(1,3,6,7) \\ K=s, \text{ si impulso} \rightarrow u_{lon}(11) \text{ y } u_{lat}(9,10) \end{cases}$$

function f=t12(p1,p2,p4,v0,gamma0,chi0,pos1,pos2,pos3,delay, g1,g2,g3,w1,w2,w3,cc)

ARGUMENTOS DE ENTRADA:

- p = Masa [100000, 150000] kg, y CoG ([0.15, 0.31],-, [0, 0.21])xMAC m, $p(3)$ es cgy (no se usa para vuelo simétrico).
- $v0$ = VA_{trim} [52 , 90] m/s ; $V_{a_{min}}$ es para 120000Kg. Para 150000Kg $V_{a_{min}}$ es de 59 m/s.
- $chi0$ = Ángulo de seguimiento inercial [0 , 359] °.
- $gamma0$ = Ángulo de la Trayectoria inercial de vuelo [6, -6] °.
- pos = Posición del CoG en FE [m, m, m]': $x[0,-23500]$, $y[0,19000]$, $z[-1000,0]$.
- $delay$ = Retraso de tiempo por procesamiento [0, 0.1] s ; Primer orden.
- $gust$ = Turbulencia en FB [WxB, WyB, WzB]: [2, -2](m/s).
- $wspeed$ = Viento constante en FE [WxE, WyE, WzE]: [20, -20] (m/s).
- cc = Contador (nº de plantas por familia (in,out)).
- in = Entrada $u[1 ,11]$.
- out = Salida $y[1 ,21]$.

RCAM12.M: Definición del Modelo de aeronave civil de 12 Estados.

$$\text{function [sys, x0]} = \text{rcam12}(t, x, u, \text{flag}, p)$$

ARGUMENTOS DE ENTRADA:

- t : tiempo (s).
- x : vector de estados.
- u : vector de entradas.
- flag : parámetro de decisión inicial.
- p : vector datos por defecto de masa y posición cdg.

ARGUMENTOS DE SALIDA:

- sys : vector de salidas.
- x0 : vector de estados inicializados.

FTRIM2.M: Encuentra las condiciones de equilibrio del Modelo, es decir, optimización de los vectores de estados, entradas y salidas generados una vez ejecutado el trimming inicial.

$$[x0, u0, y0] = \text{ftrim2}(\text{aeronave}, xini, uini, yini, \text{par}, ef)$$

ARGUMENTOS DE ENTRADA:

- aeronave : inicialización (evaluación) interna del modelo de aeronave.
- xini: vector de estados inicial.
- uini: vector de entradas inicial.
- yini: vector de salidas inicial.

ARGUMENTOS DE SALIDA:

- x0 : vector de estados optimizado.
- u0 : vector de entradas optimizado.
- y0 : vector de salidas optimizado.

FMINV2.M: Minimización de un vector de funciones para cada una de las variables.

Programa llamado desde FTRIM2.M

```
function [X0,U0,Y0]=fminv2(funfcn, vec, x0, r, options, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10)
```

ARGUMENTOS DE ENTRADA:

- funfcn: vector de funciones.
- vec: variable seleccionada.
- x0: valores iniciales.
- r: rango de incertidumbre.
- P_i ($i=1,\dots,10$): valores de la variable seleccionada.

ACEVAL.M: Evaluación de la aeronave.

```
function [f, funtxt, X0, U0, Y0]=aceval(x, xini, uini, yini, par, ef, giro, aeronave)
```

ARGUMENTOS DE ENTRADA:

- x: vector con variables de entrada libres.
- giro: con o sin alabeo.

ARGUMENTOS DE SALIDA:

- f : vector función de coste ensamblado.
- funtxt : vector función de coste de texto.

LIMITS.M: Definición de límites de variables, función de las condiciones iniciales.

```
function[ub,vb,wb,pb,qb,rb,phi,the,psi,da,dt,dr,th,ubr,vbr,wbr,pbr,qbr,rbr,phir,ther,psir,dar,dt  
r,drr,thr]=limits (xini, uini, yini)
```

APAR.M: Ejecuta la configuración combinatoria asignada (tipo) a través de GPLANTA.M para la obtención de los valores_ parámetro que se van a utilizar en el Diagrama de Nichols.

function par=apar(h, xm, xn, xx, xvar, tipo)

PROCESO.M: Procesamiento elemental de cada plantilla obtenida con APAR.M haciendo llamamiento a T12.M.

Carpeta REFREC.

GPLANTA3.M: Obtención de plantillas para la planta RCAM12 sin viento/turbulencia. En principio, funciona igual que la GPLANTA.M de RPLANTI, apoyándose en APAR.M y PROCESO.M, pero se utiliza no para la definición de plantillas, sino de los eigenvalores de la matriz del espacio de estados 'A', a partir de los que se obtienen un par de vectores con los parámetros 'wn' rango de frecuencia natural y 'ro' coeficiente de amortiguamiento correspondiente, para sistemas de 2º orden.

Se hace uso de la función T12.M para la obtención de cada Función de Transferencia por cada conjunto de valores parámetro del modelo de aeronave civil.

Ofrece los valores extremos (max y min) correspondientes al rango de frecuencias 'wn'y su homólogo 'ro' en el archivo de almacenamiento matricial 'MAXMINWN.MAT', con nombre 'mmwn': [modo, valor wn(max/min) o ro(max/min)].

- MAXMINWN.MAT (mmwn , ff): matriz [6x4] donde,
 - mmwn es el modo de oscilación: Heading (1), Periodo Corto(2), Fugoide(3), Dutch Roll(4), Divergencia Espiral(5), Roll Subsidence(6).
 - ff es el valor usado: $w_{n_{max}}$, $r_{o_{max}}$, $w_{n_{min}}$, $r_{o_{min}}$.

Carpeta RACOP.

TRIM17.M: Trimming and linealización del modelo RCAM17

RCAM17.M : Modelo de aeronave civil de 17 estados: convencionales (9) + Posición (3) + Entradas(5). Ampliación de RCAM9.

function [sys, x0]=rcam17(t, x, u, flag, p)

TRIM23.M: Trimming and linealización del modelo RCAM23

RCAM23.M : Modelo de aeronave civil de 23 estados: convencionales (9) + Posición (3) + Entradas(5) + Perturbac(6). Ampliación de RCAM17.

function [sys, x0]=rcam23(t, x, u, flag, p)

ACOPLAMIENTOS.DOC: Sobre cada uno de los modelos RCAM17.M y RCAM23.M, apoyados en TRIM17.M y TRIM23.M, respectivamente, ofrece resultados de acoplamiento/desacoplamiento entre entradas y salidas, para diferentes situaciones de vuelo. Para ello, se utilizan las siguientes funciones matemáticas:

- $[v,d]=\text{eig}(A)$ Obtención de eigenvectores (v) y eigenvalores (d) a partir de la Matriz A [9,9] de estados básicos.
- $o=\text{abs}(C*v)$ Grado de acoplamiento de los diferentes estados (9+3+5+6) con las salidas (21) a partir de la Matriz que los relaciona C [21,9].
- $o(:,13:23)$ Acoplamiento entradas/salidas definido por la Matriz dada de tamaño [21,11], donde las entradas son las de control más las perturbaciones, consideradas anteriormente también como estados.

Carpeta R8.

Basado en el Procedimiento de Compensación de “squaring-up”:

PLANTA.M: A partir de los datos almacenados en los archivos TEM*-.**.MAT del Canal Longitudinal, seleccionando las entradas (*) DT(2) y TH(4+5) y Salidas(**) Z(5) , Va(6), Wv(4), V(7), alpha(18), gamma(19), nz(3) y nx(2), se define la planta [2,8] MIMO. Problema de Tracking y Regulación. Se añade el sistema de perturbaciones de tamaño [2,1] obtenido con las entradas Wzb(11) y Wz(8).

Las plantillas obtenidas se guardan en los archivos cuadrados [2,2], P1.MAT, P2.MAT, P3.MAT y P4.MAT, para la planta, y PD1.MAT, PD2.MAT, PD3.MAT y PD4.MAT, para las perturbaciones, a partir de los parámetros que definen cada una de las FT de los numeradores y denominadores de cada elemento de todas las matrices.

PNOM.M y PNOMW.M: Cargando los archivos de plantillas obtenidas como resultados con PLANTA.M, se define inicialmente el rango de frecuencias de trabajo, w lineal y $w1$ logarítmico, respectivamente. Para PNOM.M, aplicando un procedimiento de búsqueda de extremos (máximos/mínimos) se eligen los elementos de cada matriz del sistema que van a definir la Planta Nominal además de las respuestas en frecuencia sobre w de los elementos de todas las plantillas de la planta, almacenados en PNOM1.MAT, PNOM2.MAT, PNOM3.MAT y PNOM4.MAT y la Planta de perturbaciones en PDNOM1.MAT, PDNOM2.MAT, PDNOM3.MAT y PDNOM4.MAT. Para PNOMW.M, se utiliza el mismo procedimiento sobre $w1$, obteniendo así PNOM1W.MAT, PNOM2W.MAT, PNOM3W.MAT y PNOM4W.MAT y la Planta de perturbaciones en PDNOM1W.MAT, PDNOM2W.MAT, PDNOM3W.MAT y PDNOM4W.MAT.

QNOM.M: Cargando los archivos de planta nominal, se define inicialmente los determinantes cuadrados [2,2] de la misma, a partir de los cuales, junto a las respuestas en frecuencia w de los elementos de las plantillas, se obtienen los elementos inversos de plantillas guardados en QNOM1.MAT, QNOM2.MAT, QNOM3.MAT y QNOM4.MAT.

Por último, se definen los parámetros equivalentes inversos del primer lazo para cada planta impar que se guardan en PE1.MAT, PE3.MAT, PE5.MAT y PE7.MAT.

QNOMW.M: Cargando el archivo de planta nominal para $w1$, se define inicialmente el determinante [2,2] de la misma, a partir del cual, junto a las respuestas en frecuencia $w1$ de los elementos de las plantillas, se obtienen los elementos inversos de plantillas guardados en QNOM1W.MAT, QNOM2W.MAT, QNOM3W.MAT y QNOM4W.MAT.

Por último, se definen los parámetros equivalentes inversos del primer lazo para cada planta impar que se guardan en PE1W.MAT, PE3W.MAT, PE5W.MAT y PE7W.MAT.

ESPECIF1.M: Cargando los archivos con las respuestas en frecuencia de las plantillas, planta y sistema de perturbaciones nominales, desde PNOM*.MAT y PDNOM*.MAT, elementos inversos de plantillas tipo QNOM*.MAT (*=1,2,3,4) y parámetros equivalentes inversos del primer lazo desde PE**.MAT (**=1,3,5,7), se obtienen las diferentes especificaciones en frecuencia y Bounds correspondientes del lazo nº 1..

MIMO*.M (* impar=1,3,5,7): Inicialmente se procede a la carga de los datos ya obtenidos desde todos los PNOM*.MAT, PDNOM*.MAT, QNOM*.MAT (*=1,2,3,4), PE**.MAT, BOUNDS**.MAT y ESPEC**.MAT(lazo1)(**=1,3,5,7). Con ellos se efectúa el procesamiento del primer lazo:

- Agrupamiento de contornos de todas las especificaciones.
- Intersección de contornos de todas las especificaciones.
- obtención de la función del Lazo “g*”o elemento impar del compensador diagonal

- Determinación de los elementos del Prefiltro del lazo1.

QENOM.M, QENOMB.M, QENOMC.M: Determinación de los elementos inversos en forma compleja de las plantillas $q_{e_{ij}}$ ($i=1,2$ y $j=1$ a 8), además de las plantillas efectivas para el lazo2 Pe_k ($k=2,4,6,8$). Se define para cada conjunto $q_{e_{ij}}$ y Pe_k una plantilla nominal, calculada buscando mínima magnitud y máxima fase en el DN. QENOMB.M hace lo mismo pero utilizando un array de frecuencias logarítmico $w1$. QENOMC.M ofrece el resultado de QENOM.M pero en formato num/den polinómico

QENOM2.M, QENOM2B.M, QENOM2C.M: Obtención de los elementos inversos en forma compleja de las plantillas q_{1e2_j} ($j=1,3,5,7$).

ESPECIF2.M: Cargando los archivos con las respuestas en frecuencia de las plantillas, planta y sistema de perturbaciones nominales, desde PNOM*.MAT y PDNOM*.MAT, elementos inversos de plantillas de QNOM*.MAT (*=1,2,3,4) y resultados del primer lazo (g_1, g_3, g_5, g_7 y elementos de prefiltro impares) desde CONTROL**.MAT (**=1,3,5,7), se realiza el procesamiento de elementos equivalentes inversos del segundo lazo a efectos de obtener los Bounds correspondientes al lazo n° 2.

MIMO*.M (*_par=2,4,6,8): Inicialmente se procede a la carga de los datos ya obtenidos desde todos los PNOM*.MAT, PDNOM*.MAT, QNOM*.MAT (*=1,2,3,4), PE**.MAT, BOUNDS**.MAT, ESPEC**.MAT (lazo2) (**=2,4,6,8) y CONTROL***.MAT (***=1,3,5,7).

Con ellos se efectúa el procesamiento del lazo 2:

- Agrupamiento de contornos de todas las especificaciones.
- Intersección de contornos de todas las especificaciones.
- obtención de la función del Lazo “g*”o elemento par del compensador diagonal
- Determinación de los elementos del Prefiltro del lazo2.

RACW.M: Las funciones almacenadas en CONTROL*.MAT (*=1,2,3,4,5,6,7,8) suelen tener un nº de ceros y nº de polos elevado. Con esta función, aplicando un proceso de RACionalización adecuado, se consigue disminuir el orden de las funciones de compensación, de entrada compleja y salida la función de transferencia (numer/denom) correspondiente, según el vector de frecuencia w suministrado.

ANALISIS.M: Cargados todos los resultados ya obtenidos a través de PNOM*.MAT, PDNOM*.MAT, QNOM*.MAT (*=1,2,3,4), PE**^a.MAT (lazo1)(**^a=1,3,5,7), PE**^b.MAT (lazo2) (**^b=2,4,6,8), ESPEC***.MAT, CONTROL***.MAT (***=1,2,3,4,5,6,7,8), se procesa el grado de cumplimiento de los Márgenes de estabilidad robusta, Sensibilidades, Tracking, Esfuerzos de Control para Regulación y Esfuerzos de Control para Seguimiento definitivos, que representan la analítica en frecuencia del sistema.

ANALIT.M: Cargados los resultados obtenidos a través de ANA*.MAT (*=1,2,3,4), resultados del análisis en frecuencia con ANALISIS.M, los programas WD2TD*.M (*=1,2,3,4) trasladan los resultados anteriores de formato complejo a formato numerador/denominador. Con ello, se determinan en el tiempo los Márgenes de estabilidad robusta, Sensibilidades, Tracking, Esfuerzos de Control para Regulación y Esfuerzos de Control para Seguimiento definitivos del sistema.

Anexo8.4: Obtención del rango de frecuencias de trabajo de la planta (Carpeta REFREC).

Llamando al programa GPLANTA3.M se obtienen los eigenvalores de la matriz del espacio de estados 'A', es decir, los modos de oscilación de la planta, variables en función de las condiciones de vuelo impuestas (trimming). Realiza un barrido por las 881 situaciones de vuelo diferentes propuestas, definiendo valores extremos (max y min) correspondientes al

rango de frecuencias 'wn' y su homólogo 'ro', que se almacenan en el archivo MAXMINWN.MAT, con nombre 'mmwn': [modo, valor wn(max/min) o ro(max/min)]. Este archivo se estructura del siguiente modo:

- MAXMINWN.MAT (mmwn , ff): matriz [6x4] donde,
 - mmwn es el modo de oscilación: Heading (1), Periodo Corto(2), Fugoide(3), Dutch Roll(4), Divergencia Espiral(5), Roll Subsidence(6).
 - ff es el valor utilizado: wn_{max} , ro_{max} , wn_{min} , ro_{min} .

Los resultados obtenidos para el problema del modelo de aeronave civil que nos ocupa son los dados en la *Tabla_A8.2* a continuación.

Tabla_A8.2: Datos de frecuencia/coeficiente_amortiguamiento extremos función de la dinámica de vuelo

<u>Dinámica</u>	<u>Modo\Valor</u>	wn_{max}	ro_{max}	wn_{min}	ro_{min}
Longitudinal	Periodo corto	1.3946	0.66	0.2461	0.0299
	Fugoide	1.5381	1	0.0975	0.1648
Lateral	Dutch roll	1.5374	1	0.1330	1
	Divergencia espiral	1.5374	1	0	1
	Roll Subsidence	1.5374	1	0.0682	0.1473
	Heading	0	1	0	1

El programa GPLANTA3.M trabaja con T12.M (RCAM12), es decir, con 12 estados, no siendo necesario utilizar RCAM17 (17 estados), ya que los eigenvalores de estos estados añadidos son constantes. Los estados adicionales no considerados son los de los actuadores/motor, cuyos eigenvalores fijos se describen en la *Tabla_A8.3*.

Tabla_A8.3: Datos de frecuencia función de la dinámica de Actuadores/Motor

<u>Dinámica</u> <u>Actuador/Motor</u>	<u>Modo\Valor</u>	Eigenvalor = $\sigma \pm j\omega$	$W_n = \sqrt{\sigma^2}$
Lateral	Alerones	-2.9232	2.9232
	Dirección	-1.4616	1.4616
Longitudinal	Elevators	-1.7539	1.7539
	TH1	-0.0187	0.0187
	TH2	-0.0187	0.0187

Para definir el rango de frecuencias de trabajo de la planta para cada canal (longitudinal y lateral), nos fijamos en los valores extremos de w_n (max-min) definidos entre las dos Tablas A8.2 y A8.3. De esta manera, se obtienen los resultados finales dados en la Tabla_A8.4.

Tabla_A8.4: Rango de frecuencias de trabajo de la planta función de su dinámica

<u>Dinámica</u>	Rango de w_n	Rango práctico de w_n
Longitudinal	(0.0374 a 1.7539)	(0.03 a 1.8)
Lateral	(0.0682 a 2.9232)	(0.06 a 3)

En la práctica, para el problema que nos ocupa de dinámica longitudinal y, observando en el Diagrama de Nichols la distribución funcional en magnitud-fase de las diferentes plantillas, se concluye que es necesario reducir el rango de frecuencias de trabajo que hemos obtenido en la Tabla_A8.4.

Finalmente, se va a trabajar en el canal longitudinal con el rango de frecuencias (0.5 a 1.7) rad/s.

Anexo8.5: Acoplamientos entradas/salidas sobre el modelo de aeronave civil (Carpeta RACOP).

Sobre cada uno de los modelos RCAM17.M y RCAM23.M, apoyados en TRIM17.M y TRIM23.M, respectivamente, se ofrecen resultados de acoplamiento/desacoplamiento entre entradas y salidas, para diferentes situaciones de vuelo. Para ello, se utilizan las siguientes funciones matemáticas:

- $[v,d]=\text{eig}(A)$: Obtención de eigenvectors (v) y eigenvalores (d) a partir de A [9,9].
- $o=\text{abs}(C*v)$: Grado de acoplamiento de los diferentes estados (9+3+5+6) con las salidas (21) a partir de la Matriz que los relaciona C [21,9].
- $o(:,13:23)$: Acoplamiento entradas/salidas definido por la Matriz dada [21,11], donde las entradas son las de control más las perturbaciones.

Se han considerado las tres situaciones de vuelo nominales descritas en la *Tabla_A8.1*, que incorporan a la planta tanto dinámica de actuadores/motor, como perturbaciones, ofreciendo los siguientes resultados.

Situación1: Sin Viento – Sin Turbulencia

Tabla_A8.5: Trimming nominal sin viento y sin turbulencia

Flight conditions		Trim settings controls	
VA	80.00 m/s	DA	0.00 deg
GAMMA	0.00 deg	DT	-6.58 deg
ALPHA	1.62 deg	DR	0.00 deg
THETA	1.62 deg	THROTTLE1	4.36 deg
BETA	0.00 deg	THROTTLE2	4.36 deg
PHI	0.00 deg		
PSI	0.00 deg		

Tabla_A8.6: Eigenvalores para la dinámica de la situación1

Modos (variables)	Heading	(X,Y,Z)	Periodo Corto	Roll Subsidiense	Fugoide	Dutch Roll	Diverg. Espiral
Eigenvalues A-matrix	0	(0,0,0)	-0.8303 ± 1.1069i	-1.3017	-0.0114 ± 0.1264i	-0.2360 ±0.5954i	-0.1837
Modos (fijos)	Alerones	Elevator	Dirección	Throttle1	Throttle2		
Eigenvalues A-matrix	-2.9232	-1.7539	-1.4616	-0.0187	-0.0187		

Tabla_A8.7: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación1

Salidas	Entradas de Control					Perturbaciones					
	Aileron	Tail	Rudder	Throttle1	Throttle2	Wx	Wy	Wz	Wxb	Wyb	Wzb
Pitch Rate(q)	0.0004	0.0147	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0030	0.0005	0.0000	0.0029
Factor C.Hor.(nx)	0.0003	0.0072	0.0001	0.0000	0.0000	0.0038	0.0000	0.0025	0.0039	0.0000	0.0024
Factor C.Ver.(nz)	0.0030	0.0555	0.0006	0.0000	0.0000	0.0155	0.0001	0.0248	0.0147	0.0001	0.0251
V.Inercial Z FE(wv)	0.0182	0.3147	0.0078	0.0002	0.0001	0.1513	0.0027	0.2426	0.1436	0.0027	0.2457
Posición Z FE (z)	0.0062	0.1794	0.0053	0.0091	0.0079	0.1513	0.0027	0.2426	0.1436	0.0027	0.2457
Velocidad Aire (va)	0.0002	0.0161	0.0004	0.0003	0.0001	0.9336	0.0006	0.0459	0.9342	0.0006	0.0685
Veloc. Inercial (V)	0.0002	0.0161	0.0004	0.0003	0.0001	0.0457	0.0000	0.0465	0.0474	0.0000	0.0452
Sideslip (beta)	0.0009	0.0000	0.0124	0.0000	0.0000	0.0000	0.0078	0.0000	0.0000	0.0078	0.0000
Roll Rate (p)	0.4402	0.0000	0.0243	0.0000	0.0000	0.0000	0.0063	0.0000	0.0000	0.0063	0.0000
Yaw Rate (r)	0.0034	0.0000	0.0190	0.0000	0.0000	0.0000	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	0.0000
Roll Angle (phi)	0.1506	0.0000	0.0163	0.0000	0.0000	0.0000	0.0062	0.0000	0.0000	0.0062	0.0000
V.Inercial X FV(uv)	0.0039	0.0180	0.0517	0.0007	0.0010	0.0473	0.0063	0.0586	0.0494	0.0063	0.0573
V.Inercial Y FV (vv)	0.5079	0.0000	0.0799	0.0187	0.0187	0.0000	0.1671	0.0000	0.0000	0.1671	0.0000
Posición Y FE (y)	0.1737	0.0000	0.0547	0.9993	0.9985	0.0000	0.1671	0.0000	0.0000	0.1671	0.0000
Track (chi)	0.0064	0.0000	0.0010	0.0002	0.0002	0.0000	0.0021	0.0000	0.0000	0.0021	0.0000
Heading (psi)	0.0012	0.0000	0.0130	0.0002	0.0002	0.0000	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	0.0000
Pitch (tetha)	0.0001	0.0084	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0030	0.0005	0.0000	0.0029
Ang. Ataque (alpha)	0.0006	0.0123	0.0001	0.0000	0.0000	0.0015	0.0000	0.0045	0.0016	0.0000	0.0045
FPA (gamma)	0.0002	0.0039	0.0001	0.0000	0.0000	0.0019	0.0000	0.0030	0.0018	0.0000	0.0031
Posición X FE (x)	0.0013	0.0103	0.0354	0.0358	0.0537	0.0473	0.0063	0.0586	0.0494	0.0063	0.0573
Factor C.Lateral (ny)	0.0013	0.0000	0.0041	0.0000	0.0000	0.0000	0.0108	0.0000	0.0000	0.0108	0.0000

Situación2: Con Viento (-20,-20,-20)m/s– Con Turbulencia (2,2,2) m/s

Tabla_A8.8: Trimming nominal con viento(-20,-20,-20)m/s y con turbulencia(2,2,2)m/s

Flight conditions		Trim settings controls	
VA	86.98 m/s	DA	-6.39 deg
GAMMA	-14.48 deg	DT	-6.27 deg
ALPHA	-0.76 deg	DR	5.14 deg
THETA	-22.48 deg	THROTTLE1	0.50 deg
BETA	3.55 deg	THROTTLE2	0.50 deg
PHI	4.93 deg		
PSI	9.04 deg		

Tabla_A8.9: Eigenvalores para la dinámica de la situación2

Modos (variables)	Heading	(X,Y,Z)	Periodo Corto	Roll Subsidiense	Fugoide	Dutch Roll	Diverg. Espiral
Eigenvalues A-matrix	-0.0073	(0,0,0)	-0.8773± 1.2031i	-1.4318	-0.0291± 0.1200i	-0.2833± 0.6962i	-0.1340
Modos (fijos)	Alerones	Elevator	Dirección	Throttle1	Throttle2		
Eigenvalues A-matrix	-2.9232	-1.7539	-1.4616	-0.0187	-0.0187		

Tabla_A8.10: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación2

Salidas	Entradas de Control					Perturbaciones					
	Aileron	Tail	Rudder	Throttle1	Throttle2	Wx	Wy	Wz	Wxb	Wyb	Wzb
Pitch Rate(q)	0.0047	0.0165	0.0053	0.0000	0.0000	0.0018	0.0004	0.0025	0.0006	0.0002	0.0029
Factor C.Hor.(nx)	0.0008	0.0062	0.0009	0.0000	0.0000	0.0041	0.0010	0.0002	0.0040	0.0002	0.0012
Factor C.Ver.(nz)	0.0350	0.0789	0.0091	0.0000	0.0000	0.0020	0.0003	0.0281	0.0143	0.0024	0.0254
V.Inercial Z FE(wv)	0.0734	0.3885	0.0162	0.0001	0.0001	0.0347	0.0151	0.2527	0.1452	0.0308	0.2217
Posición Z FE (z)	0.0251	0.2215	0.0111	0.0065	0.0072	0.0347	0.0151	0.2527	0.1452	0.0308	0.2217
Velocidad Aire (va)	0.0109	0.0191	0.0067	0.0001	0.0000	0.8343	0.1737	0.3484	0.9373	0.0489	0.0377
Veloc. Inercial (V)	0.0535	0.0390	0.0797	0.0042	0.0042	0.0595	0.0149	0.0568	0.0265	0.0303	0.0694
Sideslip (beta)	0.0018	0.0010	0.0187	0.0000	0.0000	0.0020	0.0066	0.0005	0.0006	0.0068	0.0002
Roll Rate (p)	0.1916	0.0043	0.0708	0.0000	0.0000	0.0018	0.0058	0.0005	0.0006	0.0060	0.0003
Yaw Rate (r)	0.0020	0.0013	0.0315	0.0000	0.0000	0.0004	0.0020	0.0002	0.0001	0.0020	0.0003
Roll Angle (phi)	0.0658	0.0025	0.0572	0.0000	0.0000	0.0019	0.0067	0.0004	0.0006	0.0069	0.0001
V.Inercial X FV(uv)	0.0622	0.1705	0.1289	0.0050	0.0050	0.0579	0.0130	0.1332	0.0084	0.0350	0.1401
V.Inercial Y FV (vv)	0.1659	0.0446	0.2527	0.0180	0.0180	0.0280	0.1703	0.0268	0.0117	0.1687	0.0383
Posición Y FE (y)	0.0568	0.0254	0.1729	0.9639	0.9636	0.0280	0.1703	0.0268	0.0117	0.1687	0.0383
Track (chi)	0.0028	0.0008	0.0043	0.0003	0.0003	0.0005	0.0029	0.0005	0.0002	0.0028	0.0006
Heading (psi)	0.0006	0.0001	0.0229	0.0002	0.0002	0.0002	0.0022	0.0004	0.0000	0.0022	0.0006
Pitch (tetha)	0.0017	0.0094	0.0055	0.0000	0.0000	0.0018	0.0002	0.0025	0.0006	0.0003	0.0029
Angulo Ataque (alpha)	0.0053	0.0147	0.0011	0.0000	0.0000	0.0025	0.0005	0.0033	0.0009	0.0002	0.0040
FPA (gamma)	0.0014	0.0068	0.0005	0.0000	0.0000	0.0003	0.0003	0.0045	0.0023	0.0007	0.0041
Posición X FE (x)	0.0213	0.0972	0.0882	0.2660	0.2673	0.0579	0.0130	0.1332	0.0084	0.0350	0.1401
Factor C.Lateral (ny)	0.0029	0.0016	0.0092	0.0000	0.0000	0.0017	0.0111	0.0015	0.0007	0.0112	0.0005

Situación3: Con Viento (20,20,20)m/s– Con Turbulencia (-2,-2,-2) m/s

Tabla_A8.11: Trimming nominal con viento(20,20,20)m/s y con turbulencia(-2,-2,-2)m/s

Flight conditions		Trim settings controls	
VA	80.02 m/s	DA	9.25 deg
GAMMA	14.23 deg	DT	-2.17 deg
ALPHA	-4.20 deg	DR	-10.18 deg
THETA	27.08 deg	THROTTLE1	10.00 deg
BETA	-5.68 deg	THROTTLE2	10.00 deg
PHI	-6.30 deg		
PSI	-8.34 deg		

Tabla_A8.12: Eigenvalores para la dinámica de la situación3

Modos (variables)	Heading	(X,Y,Z)	Periodo Corto	Roll Subsidiense	Fugoide	Dutch Roll	Diverg. Espiral
Eigenvalues A-matrix	-0.0058	(0,0,0)	-0.8418± 1.1316i	-1.4408	-0.0149± 0.0171i	- 0.2636± 0.6795i	0.0545
Modos (fijos)	Alerones	Elevator	Dirección	Throttle1	Throttle2		
Eigenvalues A-matrix	-2.9232	-1.7539	-1.4616	-0.0187	-0.0187		

Tabla_A8.13: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación3

Salidas	Entradas de Control					Perturbaciones					
	Aileron	Tail	Rudder	Throttle1	Throttle2	Wx	Wy	Wz	Wxb	Wyb	Wzb
Pitch Rate(q)	0.0042	0.0139	0.0049	0.0000	0.0000	0.0021	0.0002	0.0026	0.0007	0.0003	0.0031
Factor C.Hor.(nx)	0.0006	0.0002	0.0005	0.0000	0.0000	0.0030	0.0006	0.0014	0.0036	0.0002	0.0001
Factor C.Ver.(nz)	0.0374	0.0560	0.0119	0.0000	0.0000	0.0184	0.0020	0.0201	0.0075	0.0023	0.0245
V.Inercial Z FE(wv)	0.0785	0.2890	0.0507	0.0012	0.0003	0.1468	0.0303	0.1852	0.0491	0.0345	0.2160
Posición Z FE (z)	0.0269	0.1648	0.0347	0.0652	0.0184	0.1468	0.0303	0.1852	0.0491	0.0345	0.2160
Velocidad Aire (va)	0.0262	0.0332	0.0069	0.0028	0.0008	0.7607	0.1909	0.4083	0.9547	0.0807	0.0294
Veloc. Inercial (V)	0.0012	0.1119	0.0356	0.0079	0.0061	0.0524	0.0105	0.0061	0.0450	0.0145	0.0277
Sideslip (beta)	0.0056	0.0012	0.0012	0.0000	0.0000	0.0014	0.0071	0.0015	0.0010	0.0073	0.0004
Roll Rate (p)	0.1383	0.0034	0.0480	0.0000	0.0000	0.0010	0.0054	0.0014	0.0008	0.0056	0.0005
Yaw Rate (r)	0.0015	0.0014	0.0065	0.0000	0.0000	0.0007	0.0025	0.0001	0.0002	0.0025	0.0005
Roll Angle (phi)	0.0471	0.0019	0.0307	0.0001	0.0000	0.0005	0.0042	0.0016	0.0007	0.0043	0.0010
V.Inercial X FV(uv)	0.0151	0.1534	0.0024	0.0066	0.0049	0.0866	0.0152	0.0443	0.0572	0.0185	0.0744
V.Inercial Y FV (vv)	0.1842	0.0081	0.2189	0.0174	0.0180	0.0122	0.1331	0.0084	0.0035	0.1332	0.0035
Posición Y FE (y)	0.0630	0.0046	0.1497	0.9327	0.9644	0.0122	0.1331	0.0084	0.0035	0.1332	0.0035
Track (chi)	0.0022	0.0001	0.0026	0.0002	0.0002	0.0001	0.0016	0.0001	0.0000	0.0016	0.0000
Heading (psi)	0.0004	0.0001	0.0046	0.0003	0.0003	0.0011	0.0027	0.0005	0.0004	0.0027	0.0010
Pitch (tetha)	0.0015	0.0079	0.0038	0.0000	0.0000	0.0020	0.0005	0.0026	0.0007	0.0006	0.0030
Angulo Ataque (alpha)	0.0066	0.0124	0.0019	0.0000	0.0000	0.0017	0.0000	0.0048	0.0008	0.0003	0.0048
FPA (gamma)	0.0010	0.0037	0.0006	0.0000	0.0000	0.0019	0.0003	0.0022	0.0007	0.0004	0.0026
Posición X FE (x)	0.0052	0.0874	0.0017	0.3546	0.2637	0.0866	0.0152	0.0443	0.0572	0.0185	0.0744
Factor C.Lateral (ny)	0.0079	0.0017	0.0041	0.0000	0.0000	0.0000	0.0103	0.0011	0.0009	0.0102	0.0005

Anexo8.6: Obtención de Prefiltros reducidos (Carpeta R8).

Se va a describir el procedimiento de obtención de los diferentes prefiltros reducidos asociados al problema dinámica longitudinal del modelo de aeronave civil. Por otro lado, sólo se va a ofrecer el resultado gráfico de los ocho prefiltros de acoplamiento existentes, teniendo en cuenta que el procedimiento para la obtención de los demás es el mismo y que el número de prefiltros para desacoplos es muy grande y sus resultados se pueden ver con el desarrollo práctico del problema.

Se pretende buscar la FT reducida equivalente, F_{reduc} , al prefiltro original obtenido en cada paso del diseño del problema, teniendo en cuenta el rango de frecuencias de trabajo w , esto es,

$$w = (0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 10, 30) \text{ rad / s} \quad (7.5)$$

Utilizando el programa *racw.m* en Matlab, con el formato dado por la expresión,

$$[nf_{red}, df_{red}] = racw(F, w, n, m) \quad (A8.6)$$

Los parámetros n y m son los valores de prueba del número de polos y de ceros de la FT prefiltro F_{reduc} descrita polinómicamente por el numerador nf_{red} y el denominador df_{red} . Se trata de encontrar los valores n y m tal que,

- $m \leq n$. Más polos que ceros
- No polos en cero.
- Menor número de polos y de ceros de la función F_{reduc} reducida que la función prefiltro F original.
- Error de magnitud y error de fase lo más pequeño posible, dentro del intervalo de frecuencias w prefijado.
- Comportamiento parecido en el DN de ambas funciones F y F_{reduc} , para el rango de frecuencias w prefijado.

Las FTs obtenidas con el programa *racw.m* que mejor se adaptan a las condiciones anteriores son las incorporadas en el resultado del capítulo8 en la *Tabla_8.20*, siguientes:

$$F_{11} = \frac{1.8443s^2 + 3.7055s + 2.2796}{0.6885s^3 + 3.2561s^2 + 4.5787s + 2.3272} \quad (A8.7)$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo1, de orden (2,3), es decir, 2 ceros y 3 polos.

$$F_{22} = \frac{0.03865s^2 + 0.4784s + 9.0331}{s^4 + 2.5396s^3 + 8.7796s^2 + 11.4802s + 9.6241} \quad (A8.8)$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo2, de orden (2,4), es decir, 2 ceros y 4 polos.

$$F_{33} = \frac{0.0767s^3 + 1.2322s^2 + 7.8983s + 2.8309}{0.0761s^4 + 0.7996s^3 + 4.8348s^2 + 9.1144s + 2.8674} \quad (\text{A8.9})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo3, de orden (3,4), es decir, 3 ceros y 4 polos.

$$F_{44} = \frac{0.059s^2 + 0.3446s + 6.6685}{0.3725s^4 + 1.6086s^3 + 5.1436s^2 + 8.0553s + 6.7111} \quad (\text{A8.10})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo4, de orden (2,4), es decir, 2 ceros y 4 polos.

$$F_{55} = \frac{2.4498s^6 - 4.2313s^5 + 12.6252s^4 - 8.2123s^3 + 17.1853s^2 - 3.6654s + 6.4963}{-s^7 + 1.6012s^6 - 1.0159s^5 + 11.7509s^4 + 1.4521s^3 + 17.9398s^2 + 1.5141s + 7.1446} \quad (\text{A8.11})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo5, de orden (6,7), es decir, 6 ceros y 7 polos.

$$F_{66} = \frac{2.0441s + 196.61}{s^3 + 31.1233s^2 + 109.692s + 192.5904} \quad (\text{A8.12})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo6, de orden (1,3), es decir, 1 cero y 3 polos.

$$F_{77} = \frac{-5.6305s^3 + 247.6783s^2 - 353.353s + 290.3784}{s^5 + 19.2473s^4 + 163.227s^3 + 422.8857s^2 + 512.347s + 302.6807} \quad (\text{A8.13})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo7, de orden (3,5), es decir, 3 ceros y 5 polos.

$$F_{88} = \frac{0.8467s^4 + 8.5952s^3 + 8.6023s^2 + 7.6711s + 0.9703}{0.001s^7 + 0.011s^6 + 0.662s^5 + 3.649s^4 + 11.877s^3 + 11.587s^2 + 8.225s + 0.934} \quad (\text{A8.14})$$

Prefiltro de acoplamiento del lazo8, de orden (4,7), es decir, 4 ceros y 7 polos.

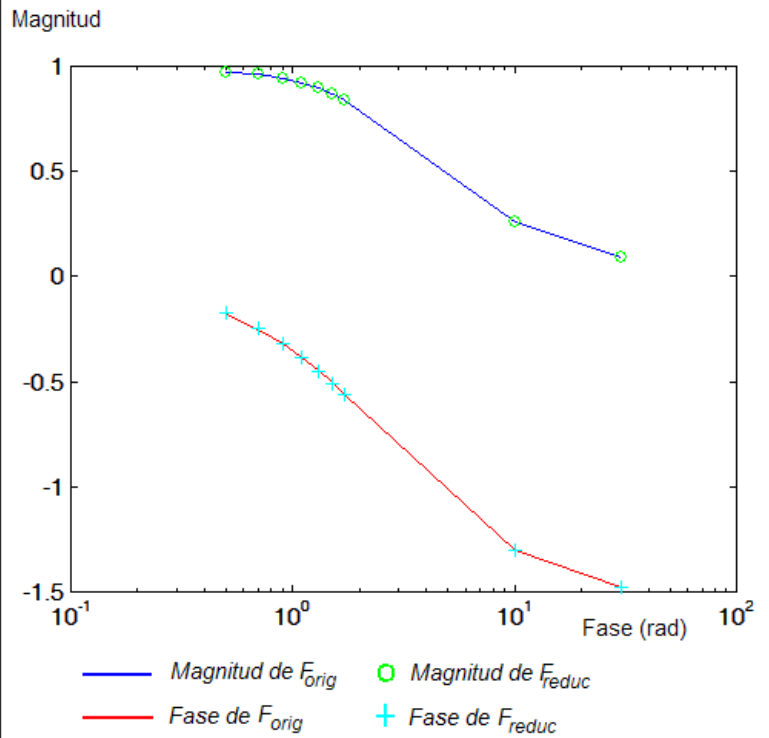
Los errores de magnitud y de fase para cada una de estas FTs reducidas respecto de las FTs originales y para el rango de frecuencias prefijado, se describen numérica y gráficamente en las figuras A8.8, A8.9, A8.10, A8.11, A8.12, A8.13, A8.14 y A8.15, a continuación.

En estas figuras se esquematiza el proceso de racionalización a efectos de reducción de cada uno de las funciones prefiltro de acoplamiento a tratar.

Proceso de Racionalización de F11

Error de magnitud c(in)-c(out)	Error de fase Fase[c(in)-c(out)]	w (rad/s)
0.0084	-0.4679	0.5
0.0081	-0.2899	0.7
0.0024	-0.1473	0.9
0.0003	-0.0057	1.1
0.0015	0.0973	1.3
0.0026	0.1534	1.5
0.0031	0.1728	1.7
0.0000	-0.0011	10
0.0000	0.0000	30

Racionalización de F11: reducción a (2,3)

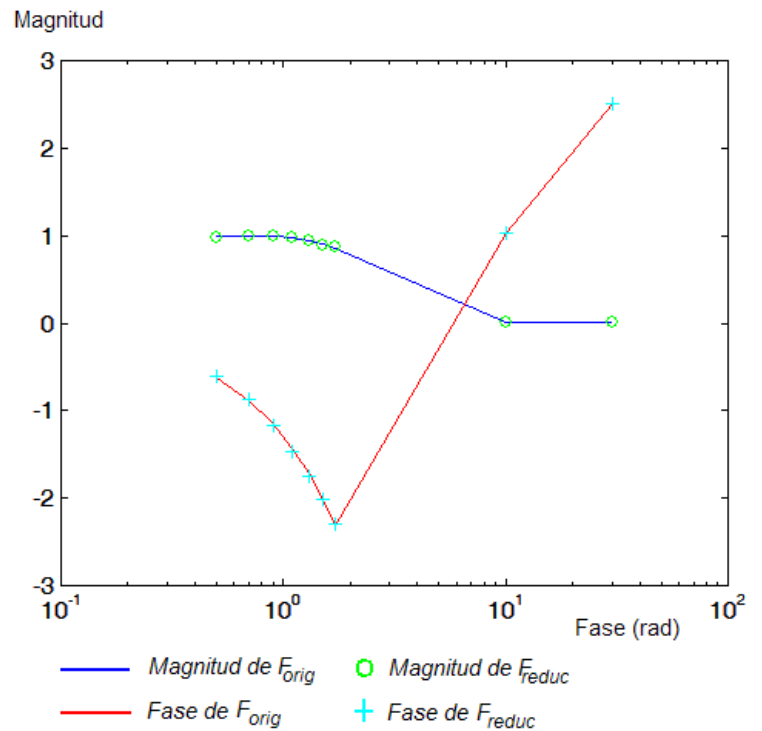


Figura_A8.8: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{11}

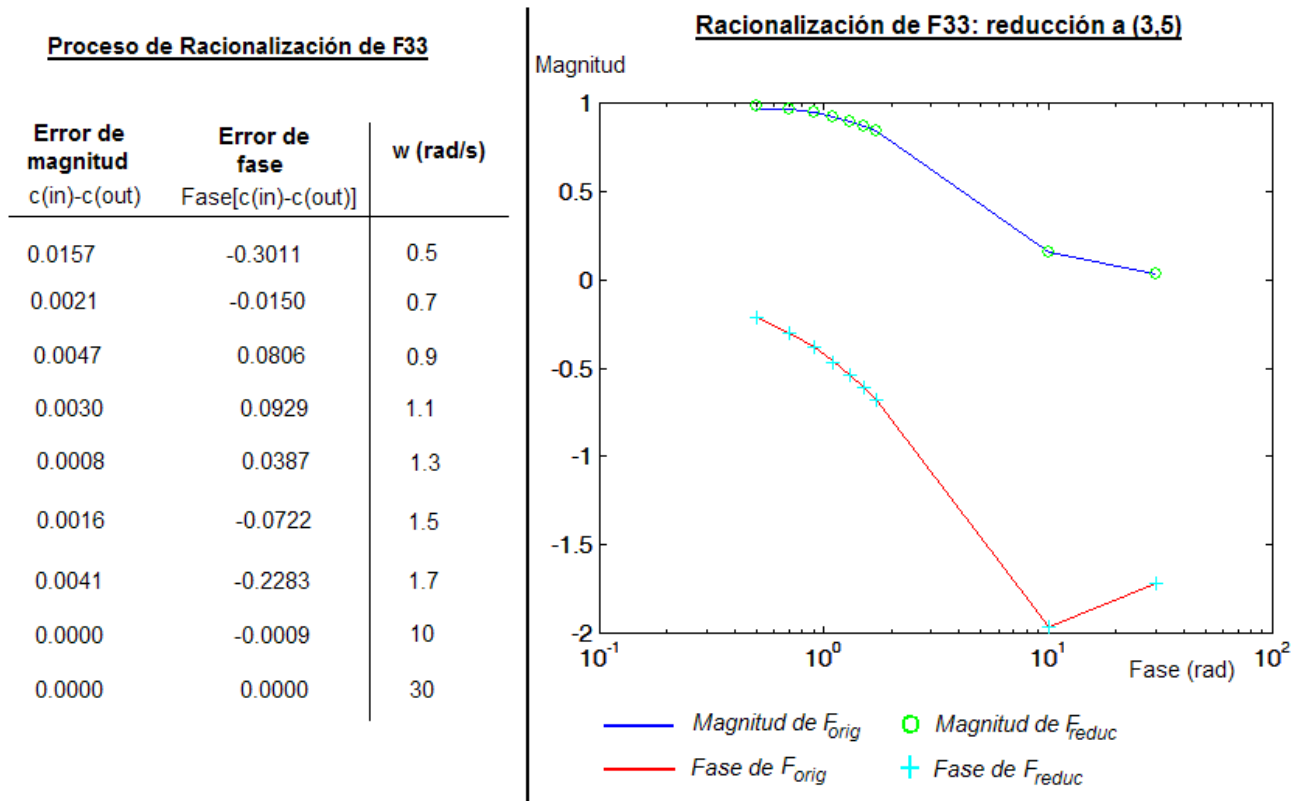
Proceso de Racionalización de F22

Error de magnitud c(in)-c(out)	Error de fase Fase[c(in)-c(out)]	w (rad/s)
0.0363	-1.4288	0.5
0.0116	-0.6169	0.7
0.0143	0.7581	0.9
0.0314	1.8479	1.1
0.0315	1.7928	1.3
0.0093	0.3984	1.5
0.0394	-1.5278	1.7
0.0000	0.1860	10
0.0000	-0.0103	30

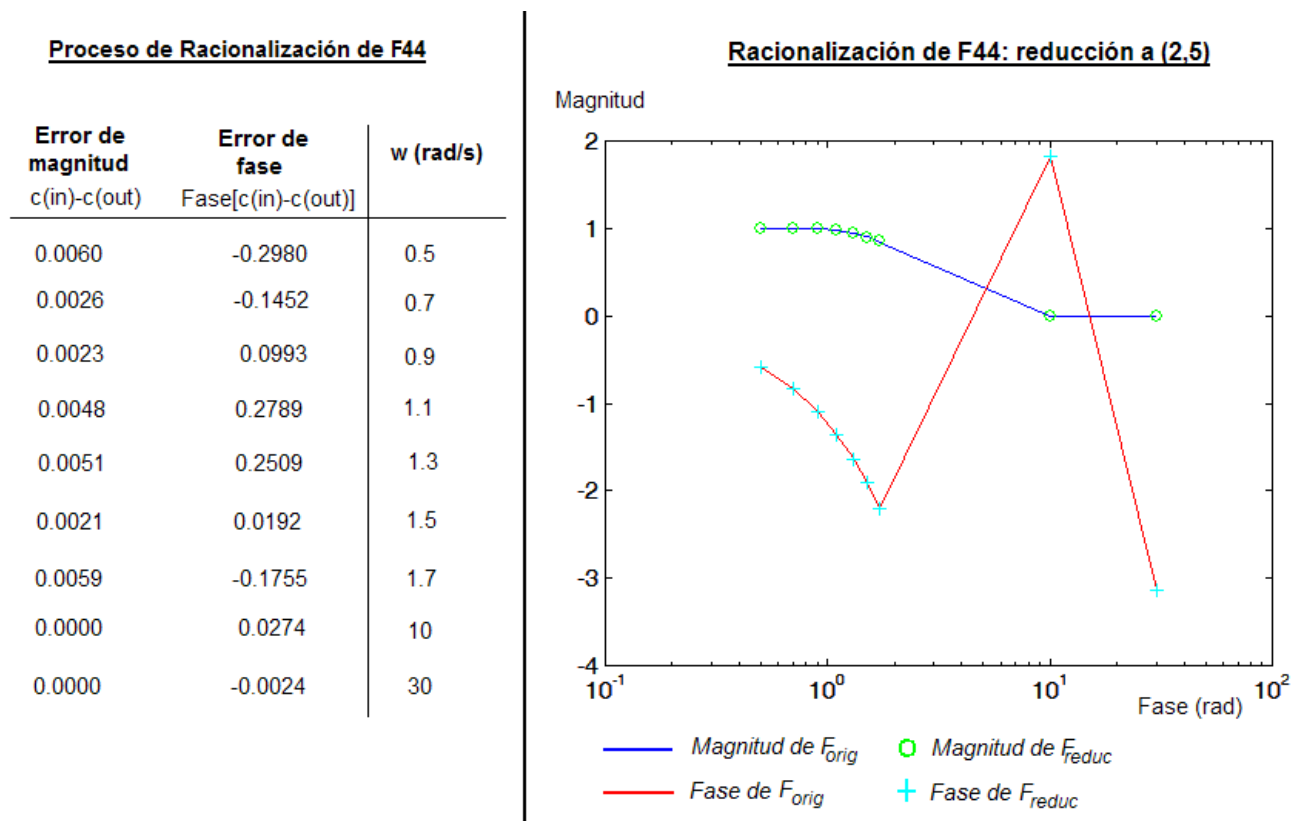
Racionalización de F22: reducción a (2,4)



Figura_A8.9: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{22}



Figura_A8.10: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{33}



Figura_A8.11: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{44}

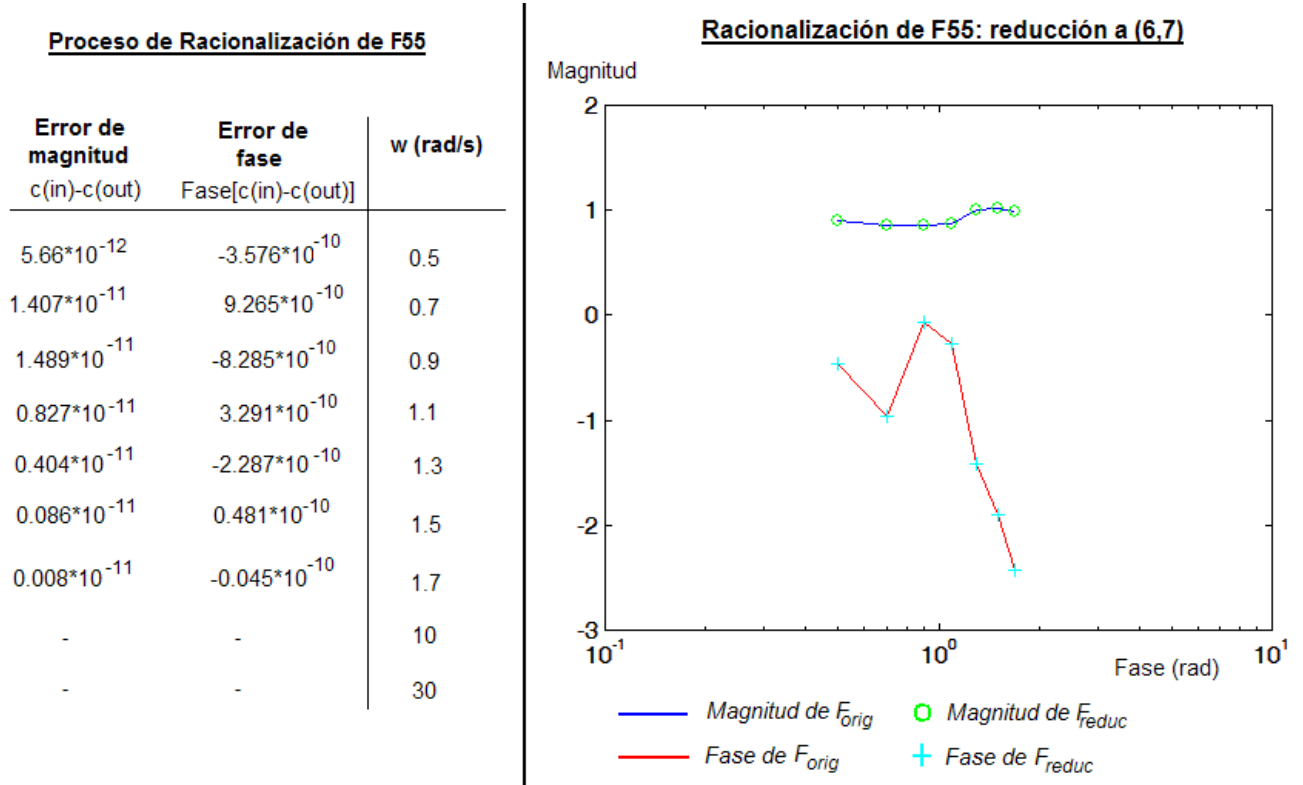


Figura A8.12: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{55}

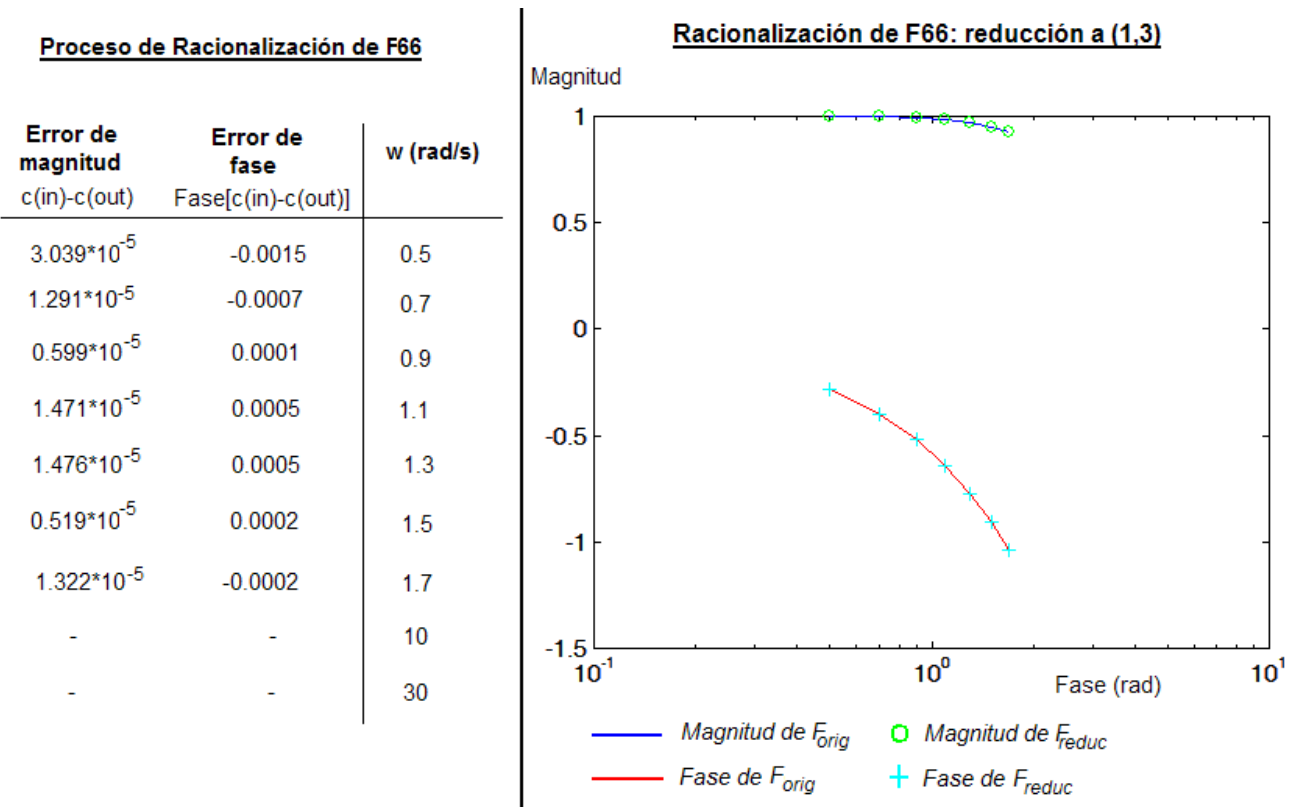


Figura A8.13: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{66}

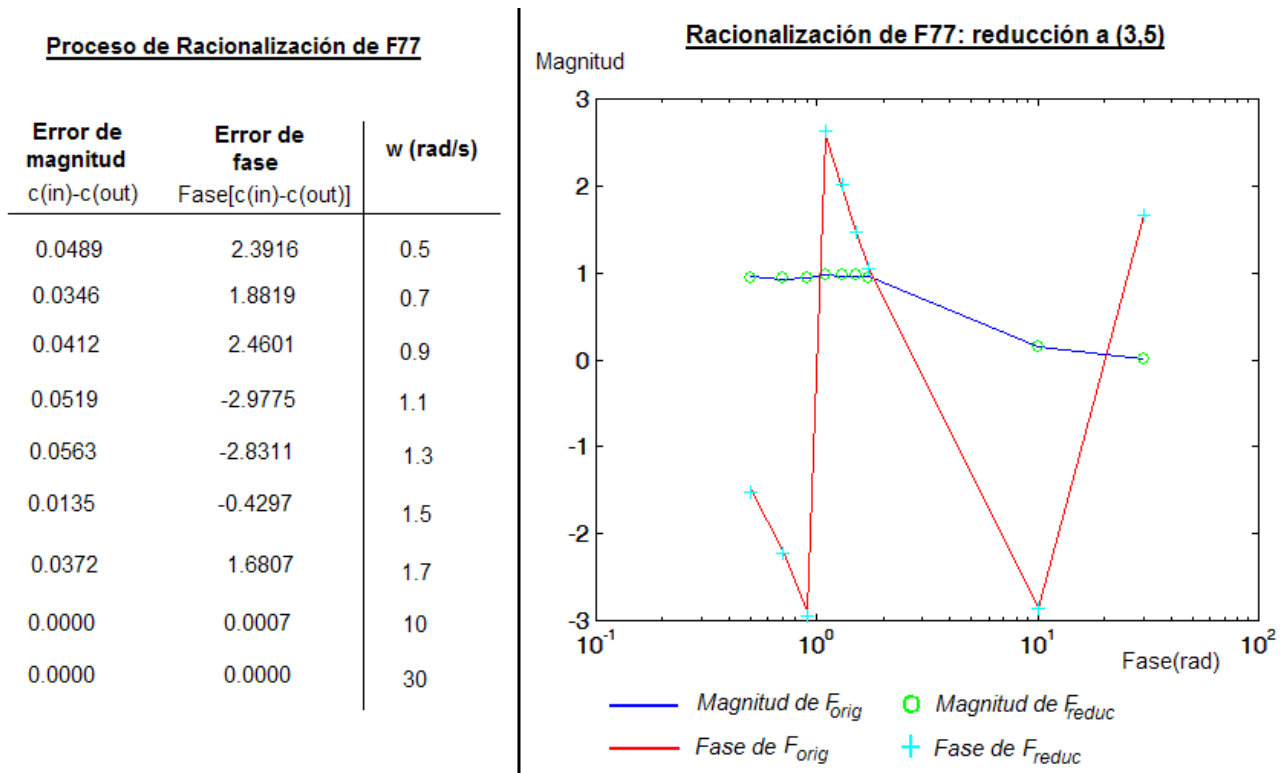


Figura A8.14: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{77}

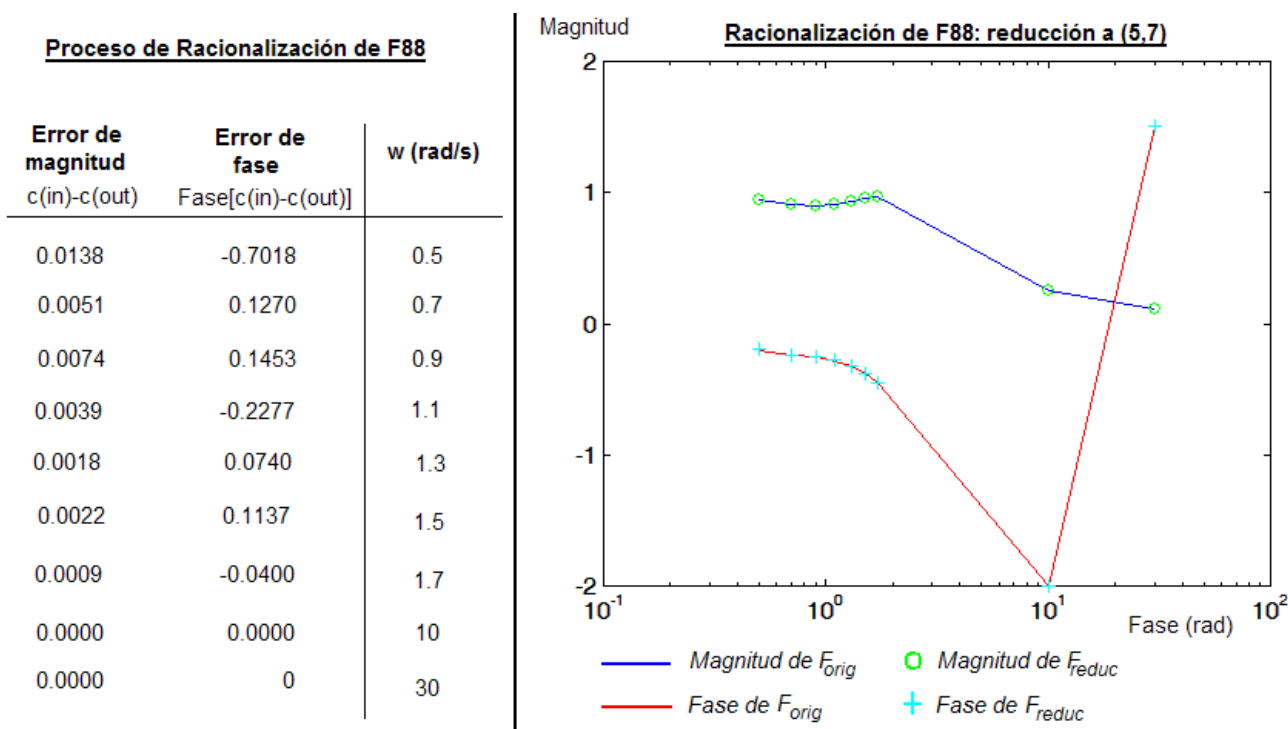


Figura A8.15: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{88}

Se puede observar que los errores de magnitud y de fase obtenidos para todas y cada de las FTs reducidas respecto de las FTs originales, dentro de todo el margen de frecuencia w , son suficientemente pequeños como para considerar adecuadas, en este sentido, las FTs reducidas.

Por último, es necesario comprobar el grado de comportamiento parecido entre las FTs reducidas y las FTs originales en el Diagrama de Bode, al tratarse de prefiltros. Para ello, comparamos gráficamente las FTs entre sí, representándolas por separado y para el mismo rango de frecuencias w .

Los resultados gráficos obtenidos en todos los casos, no generan ninguna diferencia visual, por lo que no se han representado aquí, al ser los mismos que se incorporan en la *Tabla_8.17* sobre análisis frecuencial.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura_A8.1: Nomenclatura de especificaciones para estabilidad robusta.....	431
Figura_A8.2: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para seguimiento. Relación Entradas_control/Referencias	431
Figura_A8.3: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para seguimiento. Relación Salidas/Referencias	431
Figura_A8.4: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para regulación. Relación Entradas_control/Perturbaciones.....	432
Figura_A8.5: Nomenclatura de especificaciones para esfuerzo de control para regulación. Relación Salidas/Perturbaciones.....	432
Figura_A8.6: Nomenclatura de especificaciones para sensibilidad	432
Figura_A8.7: Nomenclatura de especificaciones para tracking: prefiltro y compensador.....	433
Figura_A8.8: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{11}	481
Figura_A8.9: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{22}	481
Figura_A8.10: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{33}	482
Figura_A8.11: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{44}	482
Figura_A8.12: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{55}	483
Figura_A8.13: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{66}	483
Figura_A8.14: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{77}	484
Figura_A8.15: Resultados del proceso de Reducción del prefiltro F_{88}	484

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla_A8.1: Situaciones de vuelo consideradas para la determinación de acoplamientos.....	439
Tabla_A8.2: Datos de frecuencia/coeficiente amortiguamiento extremos función de la dinámica de vuelo	473
Tabla_A8.3: Datos de frecuencia función de la dinámica de Actuadores/Motor	474
Tabla_A8.4: Rango de frecuencias de trabajo de la planta función de su dinámica..	474
Tabla_A8.5: Trimming nominal sin viento y sin turbulencia	475
Tabla_A8.6: Eigenvalores para la dinámica de la situación1.....	476
Tabla_A8.7: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación1	476
Tabla_A8.8: Trimming nominal con viento(-20,-20,-20)m/s y con turbulencia(2,2,2)m/s	476
Tabla_A8.9: Eigenvalores para la dinámica de la situación2.....	477
Tabla_A8.10: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación2	477
Tabla_A8.11: Trimming nominal con viento(20,20,20)m/s y con turbulencia(-2,-2,-2)m/s.....	477
Tabla_A8.12: Eigenvalores para la dinámica de la situación3	478
Tabla_A8.13: Acoplamiento entradas/salidas para la dinámica de la situación3.....	478

Bibliografía

Bibliografía y Referencias

- [Astrom y Murray, 04] Astrom, K.J., Murray, R. M., (2004), "*Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*", DRAFT v0.915
- [Aranda et al., 01] Aranda, J., Cruz, J. M., Díaz, J. M., Ruipérez, P., (2001). "*Identification for robust control of a fast ferry*". Proceedings of International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods. Pamplona. pp. 73-78. ISBN: 84-95075-56-3.
- [Aranda et al., 01b] Aranda, J., Cruz, J. M., Díaz, J. M., Ruipérez, P., (2001). "*Control clásico multivariable de un ferry rápido*". XXII Jornadas de Automática (CEA-IFAC). Barcelona. ISBN: 84-699-4593-9.
- [Aranda et al., 02] Aranda, J., Cruz, J. M., Díaz, J. M., Dormido Canto, S., (2002). "*Qft Versus Classical Gain Scheduling: Study For A Fast Ferry*". 5th IFAC World Congress 2002
- [Aranda et al., 02b] Aranda, J., Revilla, J., Díaz, J. M., Ruipérez, P., (2002). "*Experimental and robustness analysis of multivariable control for vertical dynamic of a high speed craft*". IEEE Conference on Control Applications. Glasgow (United Kingdom).
- [Baños y Bailey, 98] Baños A., Bailey F.N., (1998). "*Design and validation of linear robust controllers for nonlinear plants*", International Journal of Robust Nonlinear Control, Vol 8, pp 803-816
- [Baños et al., 01] Baños A., Bailey F.N., Montoya F.J. (2001). "*Some results in nonlinear QFT*". International Journal Robust Nonlinear Control, Vol 11, pp 157-184
- [Baños et al., 02] Baños A., Barreiros A., Gordillo F., Aracil J. (2002). "*A QFT framework for nonlinear robust stability*", International Journal of robust and Nonlinear Control, Vol 12, pp 357-372

- [Baños et al., 03] Baños A., Yaniv O., Montoya F.J. (2003). “*Nonlinear QFT synthesis by local linearization*”, International Journal Control, Vol 76,Nº5, pp 429-436
- [Baños y Horowitz, 00] Baños A., Horowitz I. (2000). “*QFT design of multi-loop nonlinear control systems*” International Journal Robust Nonlinear Control, Vol 10, pp 1263-1277
- [Barbu y Caraman, 10] Barbu M., Caraman S., (2010) “*QFT robust control of wastewater treatment processes*”, Robust Control, Theory and Applications, University of Galati, Romania
- [Barreiros y Baños, 00] Barreiro A., Baños A. (2000). “*Nonlinear robust stabilization by conicity and QFT techniques*”. Automatica, 36, pp1309-1320.
- [Bartlett, 93] Bartlett, A. C., (1993). “*Computation of the frequency response of systems with uncertain parameters: a simplification*”, International Journal of Control, 57, 1293-1309.
- [Bhattacharyya et al., 95] Bhattacharyya, S., Chapellat, H., Keel, L., (1995). “*Robust Control: the parametric approach*”. Prentice Hall
- [Bode, 45] Bode, H., (1945). “*Network analysis and feedback amplifier design*”. Van Nostrand, New York.
- [Boje, 02] Boje, E., (2002), “*Multivariable Quantitative Feedback Design for tracking error specifications*”, Automática,38, pp. 131-138.
- [Boje, 02b] Boje, E., (2002), “*Non-diagonal Controllers in MIMO Quantitative Feedback Design*”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 12(4), pp. 303-320.
- [Boje, 05] Boje E., (2005), “*Squaring down design for over-actuated systems in multivariable QFT*”, IFAC.

- [Boje y Nwokah ,01] Boje, E., Nwokah, O.D.I., (2001), "*Quantitative Feedback Design using Forward Path Decoupling*", ASME Journal of the Dynamic Systems, Measurement and Control, 123, pp. 129-132.
- [Borghesani et al., 95] Borghesani, C., Chait, Y., Yaniv, O., (1995). "*Quantitative Feedback Theory Toolbox - for use with MATLAB*". The MathWorks Inc, Natick, MA.
- [Borghesani et al., 03] Borghesani, C., Chait, Y., Yaniv, O., (2003). "*The QFT control desing Toolbox - for use with MATLAB*". Terasoft Inc.
- [Bouwhuis et al., 85] Bouwuis G., Braat J., Huijser A., Pasman J., Van Rosmalen G., (1985), "*Principles of Optical Disc Drives*", Adam Hilger, Bristol.
- [Bristol, 66] Bristol, E.H., (1966). "*On a new measure of interactions for multivariable process control*". IEEE Transactions Automatica Control. AC-11; pp. 133-134.
- [Cervera, 06] Cervera J., (2006), "*Ajuste automático de controladores en QFT mediante estructuras fraccionales*", Tesis Doctoral, Universidad de Murcia.
- [Cervera y Baños, 05] Cervera J., Baños A., (2005), "*Automatic loop shaping in QFT by using a complex fractional order terms controller*", Proceedings 7th QFT and robust domain methods symposium.
- [Chait, 91] Chait, Y., (1991), "*Robust Internal Stability in Multi Input/Output Quantitative Feedback Theory*", Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, December 11-13, pp. 2970-2971.
- [Chait et al., 95] Chait Y., Borghesani C., Zheng Y., (1995). "*Single-loop QFT design robust performance in the presence of non-parametric uncertainties*", ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, 117, 420-425.

- [Chait et al., 93] Chait Y., Park M.S., (1993), "*Disturbance Rejection in Flexible Structures via the Quantitative Feedback Theory*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, 16(5), pp. 970-973.
- [Chait et al., 94] Chait Y., Park M.S., Steinbuch, M., (1994), "*Design and Implementation of a QFT Controller for a Compact Disc Player*", Journal of Systems Engineering, 4, pp. 107-117.
- [Chait y Yaniv, 93] Chait Y., Yaniv O., (1993). "*Multi-Input/single -output computer aideed control design using the Quantitative Feedback Theory*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol.3,pp.47-54
- [Chen y Ballance, 99] Chen, W. H., Ballance, D. J., (1999). "*Plant template generation for uncertain plants in Quantitative Feedback Theory*". ASME ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, 121, pp 358-364.
- [Chen y Ballance, 01] Chen, W.-H., Balance, D.J., (2001), "*QFT design for uncertain non-minimum phase and unstable plants revisited*", International Journal of Control, 74(9), pp. 957-965.
- [Chiang y Safanov, 92] Chiang, R.Y., Safanov, M.G., (1992), "*Robust Control Toolbox User's Guide*", MathWorks, South Natick.
- [Choi et al., 99] Choi, S.B., Cho, S. S., Park, Y. P., (1999), "*Vibration and position tracking control of piezoceramic-based smart structures via QFT*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, 121, pp 27-33.
- [Cohen et al., 94] Cohen, N., Chait, Y., Yaniv, O., Borghesani, C., (1994), "*Stability Analysis using Nichols Charts*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4, pp. 3-20.
- [Crespo, 11] Crespo Moreno J., (2011), "*Diseño de controladores de sistemas multivariables basados en técnicas de*

asignación de autoestructuras aplicados a vehículos espaciales rígido-flexibles", Tesis, Depto. Informática y Automática, UNED

- [Croulard et al., 00] Croulard V., Godoy E., Boichot J. (2000), "*QFT controller optimization for automatic design*", Proceedings of the 39th IEEE conference on decision and control, Sidney, pp 4735-4740
- [Cruz y Aranda, 97] Cruz J.M., Aranda J. (1997). "*Método de asignación de autoestructura para diseño de sistemas MIMO*", XVII Curso de automática en la Industria. AEIA.
- [Cruz et al., 99] Cruz J.M., Aranda J., Ruiperez P., Díaz J.M. (1999). "*Identificación de modelos lineales con intervalos de confianza de la dinámica vertical de un buque de alta velocidad*", XX Jornadas de automática CEA-IFAC, pp279-283
- [Davison y Wang, 85] Davison, E. J., Wang, S. H., (1985), "*A Characterization of Decentralized Fixed Modes in Terms of Transmission Zeros*", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30, pp. 81-82.
- [D'Azzo y Houpis, 95] D'Azzo, J. J., Houpis, C., H., (1995). "*Linear control system analysis and design conventional and modern*", Cap18, 4^aEd, McGraw-Hill, New-York.
- [D'Azzo y Houpis, 98] D'Azzo, J., Houpis, C., H., (1998). "*Feedback control systems analysis and synthesis*", Prentice Hall.
- [De Bedout y Franchek, 02] De Bedout, J.M., Franchek, M., (2002), "*Stability conditions for the sequential design of non-diagonal feedback controllers*", International Journal of Control, 75(12), pp. 910-922.
- [Díaz et al., 04] Díaz J.M., Dormido S., Aranda J. (2004). "*SISO-QFTIT Manual del usuario 1.0*", Departamento de Informática y automática. ETSI Informática, UNED.

- [Dormido et al., 01] Dormido, S., Aranda, J., Díaz, J. M., Dormido Canto, S., (2001) "*Interactive educational environment for design by QFT methodology*", Proceeding of 5th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods. Public University of Navarra, Pamplona, Spain. 23 - 24 August, 2001.
- [Doyle, 78] Doyle, J.C., (1978), "*Robustness of Multiloop Linear Feedback Systems*", IEEE Conference on Decision and Control, pp. 12-18.
- [Doyle, 82] Doyle, J.C., 1982, "*Analysis of feedback systems with structured uncertainties*", IEE Proceedings - Control Theory and Applications, 129(6), pp. 242-250.
- [Doyle, 86] Doyle, J.C., (1986), "*Quantitative feedback theory (QFT) and robust control*", Proceedings of the 1986 American Control Conference, Seattle, WA, June 18-20, pp. 1691-1698.
- [Doyle et al., 92] Doyle, J.C., Francis, B., Tannenbaum, A., (1992), "*Feedback Control Theory*", Macmillan Publishing Company.
- [Eitelberg, 00] Eitelberg E., (2000), "*Quantitative feedback design for tracking error tolerance*", Automatica 36 (2000), pp.319-326
- [Franchek y Herman, 98] Franchek, M.A., Herman, P.A., (1998), "*Direct connection between time-domain performance and frequency-domain characteristics*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 8, pp. 1021-1042.
- [Franchek y Nwokah, 95] Franchek, M.A., Nwokah, O.D.I., (1995), "*Robust multivariable control of distillation columns using nondiagonal controller matrix*", IMECE, ASME Journal of Dynamic Systems and Control, 57-1, pp. 257-274.

- [Franchek et al., 97] Franchek, M.A., Herman, P.A., Nwokah, O.D.I., (1997), "*Robust nondiagonal controllers design for uncertain multivariable regulating systems*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 119, pp. 80-85.
- [Franchek y Jayasuriya, 95] Franchek, M.A., Jayasuriya, S., (1995), "*Controller design for performance guarantees in uncertain regulating systems*", International Journal of Control, 61(1), pp. 127-148.
- [Frecker, 03] Frecker, M.I., (2003), "*Recent advances in optimisation of smart structures and actuators*", Journal of Intelligent Materials, Systems and Structures, 14(4), pp. 207-216.
- [García de Jalón et al., 97] García de Jalón J., Goñi R., Sarriegui J.M., Girón I., rodriguez I., Brazalez A., Funes P., (1997), "*Aprenda Matlab 4.2 como si estuviera en primero*", ESII, Univers. de Navarra.
- [Garcia-Sanz y Ostolaza, 00] Garcia-Sanz, M. y Ostolaza, J., (2000), "*QFT-control of a biological reactor for simultaneous ammonia and nitrates removal*", International Journal on Systems, Analysis, Modelling and Simulation, SAMS, 36, pp. 353-370.
- [Garcia-Sanz y Torres, 04] Garcia-Sanz, M. y Torres, E., (2004), "*Control y experimentación del aerogenerador síncrono multipolar de velocidad variable TWT1650*", RIAI, Vol1 (3), pp. 53-62.
- [Garcia-Sanz, 05] Garcia-Sanz, M., (2005), "*Control robusto cuantitativo QFT: historia de una idea*", Revista Iberoamericana de automática e informática industrial, VOL 2, pp. 25-38.
- [Garcia-Sanz y Egaña, 02] Garcia-Sanz, M., Egaña, I., (2002), "*Quantitative non-diagonal controller design for multivariable systems with uncertainty*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 12, pp. 321-333.

- [García-Sanz et al., 08] García-Sanz M., Eguinoa I., Barreras M., Bennani S.,(2008),“ *Nondiagonal MIMO QFT Controller Design for Darwin-Type Spacecraft With Large Flimsy Appendages*”. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control.
- [GARTEUR, 97] GARTEUR Action Group FM(AG08), Cruz J.M, Ruipérez P., Aranda J.(1997). “*RCAM design challenge presentation document: an eigenstructure assignment approach*”, GARTEUR/TP-088-22.
- [GARTEUR, 96] GARTEUR Action Group FM(AG08)(1996). “*Communication handbook*”, GARTEUR/TP-088-5.
- [GARTEUR, 97b] GARTEUR Action Group FM(AG08)(1997). “*Robust control techniques tutorial document*”, GARTEUR/TP-088-7.
- [GARTEUR, 97c] GARTEUR Action Group FM(AG08)(1997). “*Robust flight control design challenge. Problem formulation and manual: the research civil aircraft model (RCAM)*”, GARTEUR/TP-088-3.
- [GARTEUR, 97d] GARTEUR Action Group FM(AG08)(1997). “*Robust flight control design challenge. Problem formulation and manual: the high incidence research model (HIRM)*”, GARTEUR/TP-088-4.
- [Gera y Horowitz, 80] Gera, A., Horowitz, I., (1980), “*Optimization of the loop transfer function*”, International Journal of Control, 31(2), pp. 389-398.
- [Gil, 08] Gil-Martínez M.,(2008), “*Síntesis de controladores robustos mediante el análisis de la compatibilidad de especificaciones e incertidumbre*”, Tesis, Servicio publicaciones, Universidad de la Rioja
- [Gil y García, 03] Gil-Martínez M., García_Sanz M. (2003), “*Simultaneous meeting of robust control specifications in QFT*”, International Journal of robust and nonlinear control, 13, pp643-656

- [Goblev y Horowitz, 82] Goblev, B., Horowitz, I., (1982), "*Plant rational transfer approximation from inputoutput data*", International Journal of Control, 36(4), pp. 711-723.
- [Goodwin et al., 00] Goodwin G.C., Graebe, S.F., Salgado, M.E., (2000), "*Control system design*", Valparaiso.
- [Green y Limebeer, 95] Green, M., Limebeer, D. J. N., (1995). "*Linear Robust Control*", Prentice Hall.
- [Grimble, 94] Grimble, M.J., (1994). "*Robust industrial control*". Prentice Hall.
- [Güvenc et al., 10] Güvenc B.A., Güvenc L., Karaman S., (2010), "*Robust MIMO disturbance observer analysis and design with application to active car steering*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol20, pp. 873-891
- [Guzman, 06] Gúzman Sanchez, J.L., (2006), "*Diseño interactivo de sistemas de control*", Tesis, Dpto. de lenguajes de computación, Universidad de Almería
- [Hecker, 06] Hecker S., (2006), "*Generation of low order LFT representations for robust control applications*", Thesis, Technischen Universität München
- [Hespanha,12] Hespanha J.P., (2012), "*Writing a control paper*",
- [Horn y Johnson, 99] Horn, R.A., Johnson, C.R., (1999), "*Matrix Analysis*", Cambridge University Press, New York.
- [Horowitz, 59] Horowitz, I. M., (1959). "*Fundamental theory of automatic linear feedback control systems*", Transactions on Automatic Control, VOL4, pp 5-19.
- [Horowitz, 63] Horowitz, I. M., (1963). "*Synthesis of feedback systems*", Academic Press, New York.

- [Horowitz, 75] Horowitz, I., (1975), "*A synthesis theory for linear time-varying feedback systems with plant uncertainty*", IEEE Transactions on Automatic Control, VOL AC-20, pp. 454-463.
- [Horowitz, 76] Horowitz, I., (1976), "*Synthesis of feedback systems with non-linear time-varying uncertain plants to satisfy quantitative performance specifications*", IEEE Proceedings, VOL 64, pp. 123-130.
- [Horowitz, 79] Horowitz, I., (1979), "*Quantitative synthesis of uncertain multi input-output feedback systems*", International Journal of Control, 30(1), pp. 81-106.
- [Horowitz, 82] Horowitz, I., (1982), "*Quantitative Feedback Theory*", IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 129(6), pp. 215-226.
- [Horowitz, 82b] Horowitz, I., (1982), "*Improved design technique for uncertain multiple input-output feedback systems*", International Journal of Control, 36, 977-988.
- [Horowitz, 91] Horowitz, I. M., (1991). "*Survey of Quantitative Feedback Theory (QFT)*", International Journal of Control, 53, 255-291.
- [Horowitz, 92] Horowitz, I. M., (1992). "*The Quantitative Feedback Theory, vol.1*", QFT Publishers, Boulder, Colorado
- [Horowitz, 01] Horowitz, I. M., (2001). "*Survey of Quantitative Feedback Theory (QFT)*", International Journal of Robust and nonlinear Control, 11, pp887-921.
- [Horowitz, 03] Horowitz, I. M., (2003). "*Some ideas for QFT research*", International Journal Robust Nonlinear Control, 13, pp 599-605
- [Horowitz y Azor, 83] Horowitz, I., Azor, R., (1983), "*Quantitative synthesis of feedback systems with distributed uncertain plants*", International Journal of Control, Vol 38(2), pp. 381-400.

- [Horowitz et al., 85] Horowitz, I., Neuman, L., Yainiv O., (1985), "*Quantitative synthesis of uncertain cascade multi-input multi-output feedback systems*", International Journal of Control, Vol42(2), pp. 273-303.
- [Horowitz y Liao, 84] Horowitz, I., Liao, Y.-K., (1984), "*Limitations on non-minimum-phase feedback systems*", International Journal of Control, 40(5), pp. 1003-1013.
- [Horowitz y Liao, 02] Horowitz, I. M., (2002). "*It was not easy: a personal view*", International Journal Robust Nonlinear Control, 12, pp 289-293
- [Horowitz, Oldak y Yaniv, 86] Horowitz, I., Oldak, S., Yaniv, O., (1986), "*An important property of nonminimum-phase multiple-input multiple-output feedback systems*", International Journal of Control, 44(3), pp. 677-688.
- [Horowitz y Shaked, 75] Horowitz, I., Shaked, U., (1975), "*Superiority of Transfer Function Over State-Variable Methods in Linear Time-Invariant Feedback System Design*", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-20(1), pp. 84-97.
- [Horowitz y Sidi, 72] Horowitz, I. M., Sidi, M., (1972). "*Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time domain tolerances*". International Journal of Control, 16, 287-309.
- [Houpis et al, 94] Houpis, C. H., Sating, R. R., Rasmussen, S., Sheldon, S., (1994). "*Quantitative Feedback theory technique and applications*", International Journal of Control, 59, 39-70.
- [Houpis y Rasmussen, 99] Houpis, C. H., Rasmussen, S. J., (1999), "*Quantitative Feedback Theory: fundamentals and applications*". Marcel Dekker, New York.
- [Houpis y Pachter, 97] Houpis, C. H., Pachter, M., (1997), "*Application of QFT to control system design. An outline for engineers*", International Journal of Robust and Non-linear Control.

- vol. 7. pp.515-531
- [Houpis, 02] Houpis, C. H., (2002) " *Quantitative Feedback Technique (QFT): Bridging the Gap*", RTO-EN-SCI-142
- [Hovd y Skogestad, 94] Hovd, M., Skogestad, S., (1994), " *Sequential design of decentralised controllers*", Automatica, 30, pp. 1601-1607.
- [Hwang y Yang, 02] Hwang C., Yang S. (2002), " *QFT template generation for time-delay plants based on zero-inclusion test*", Systems & controls letters, 45, pp 179-191
- [Ismail, 01] Ismail A., (2001), " *Robust QFT-based TBT control of MSF desalination plants*", Elsevier, Desalination 133, pp. 105-121
- [Jayasuriya, 92] Jayasuriya, S., (1992), " *QFT type design for maximizing tolerable disturbances in structured uncertain systems*", International Journal of Control, 56(1), pp. 67-85.
- [Jayasuriya, 93] Jayasuriya, S., (1993). " *Frequency domain design for robust performance under parametric, unstructured, or mixed uncertainties*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 115, 439-451.
- [Jayasuriya, 01] Jayasuriya S. (2001). " *A new QFT design methodology for feedback systems under input saturation*", Journal of dynamics systems, measurement and control. Vol123
- [Jayasuriya, 02] Jayasuriya S. (2002). " *A QFT design methodology for neutrally stable plants under input amplitude saturation*", Proceedings of the American control conference Anchorage.
- [Jayasuriya y Zhao, 94] Jayasuriya, S., Zhao, Y., (1994), " *Robust Stability of Plants with Mixed Uncertainties and Quantitative Feedback Theory*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 116, pp. 10-16.

- [Jia, 06] Jia G., (2006), "*Adaptative observer and sliding mode observer based actuator fault diagnosis for civil aircraft*", Thesis, Simon Fraser University, Canada
- [Johansson y Rantzer, 99] Johansson, K.H., Rantzer, A., (1999), "*Decentralized Control of Sequentially Minimum Phase Systems*", IEEE Transactions on Automatic Control, 44(10), pp.1909-1913.
- [Kerr et al., 03] Kerr M., Jayasuriya S., Asokanthad S. (2003) "*Robust stability in sequential MIMO QFT*", Proceedings of the American control conference, Denver Colorado.
- [Kerr , 04] Kerr M., (2004) "*Robust control of an articulating flexible structure using MIMO QFT*", Thesis, University of Queensland.
- [Kerr et al., 05] Kerr M.,Jayasuriya S., Asokanthad S. (2005) "*On stability in nonsequential MIMO QFT designs*", Trans. of the ASME, Vol127.
- [Kerr y Jayasuriya, 03] Kerr M.,Jayasuriya S.(2003) "*Sufficient conditions for robust stability in nonsequential MIMO QFT*", Proceedings 42 IEEE CDC.
- [Kerr y Jayasuriya, 05] Kerr M.,Jayasuriya S. (2005). "*An improved non-sequential MIMO QFT design method*", 2005 American Control Conference. Pp. 2857-2862
- [Krishnan y Cruickshanks, 77] Krishnan, K.R., Cruickshanks, A., (1977), "*Frequency-domain design of feedback systems for specified insensitivity of time-domain response to parameter variation*", International Journal of Control, 25(4), pp. 609-620.
- [Lan, Kerr y Jayasuriya, 04] Lan, C-Y., Kerr, M.L., Jayasuriya, S., (2004), "*Synthesis of controllers for nonminimum phase and unstable systems using non-sequential MIMO QFT*", Proceedings of the

American Control Conference.

- [Lasky y Ravani, 97] Lasky, T. A., Ravani, B., (1997). "*Use of convex hulls for plant template approximation in QFT design*", ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, 119, 598-600.
- [Lee, Chait y Steinbuch, 00] Lee, J.W., Chait, Y., Steinbuch, M., (2000), "*On QFT tuning of multivariable μ controllers*", Automatica, 36, pp.1701-1708.
- [Maciejowski, 89] Maciejowski, J. M., (1989). "*Multivariable feedback design*", Addison-Wesley
- [Magni et al., 97] Magni J.F., Bennani S., Terlouns J. (eds) (1997) "*Robust flight control. A design challenge*". LNCIS 224. Springer 1997.
- [May y Jayasuriya, 03] May, D., Jayasuriya, S., (2003), "*A new method for convex approximation of QFT controller bounds*", Proceedings of IMECE ASME International Mechanical Engineering Congress and R&D Expo, Washington, DC, November 15-21.
- [Mayne, 79] Mayne, D.Q., (1979), "*Sequential design of linear multivariable systems*", Proceedings of the IEE, 126, pp. 568-572.
- [Melchior, 09] Melchior P., Inam, C., Oustaloup, A., (2009), "*Path tracking design by fractional prefilter extension to square mimo systems*", Proceedings of the ASME 2009 design engineering technical conferences, San Diego CA.
- [Montoya, 98] Montoya, F. J., (1998), "*Diseño de sistemas de control no lineales mediante QFT: Análisis computacional y desarrollo de una herramienta CACSD*", Tesis Doctoral. Universidad de Murcia. Departamento de Informática y Sistemas Informáticos.

- [Muñoz-Mansilla,07] Muñoz-Mansilla R. (2007), "*Control multivariable mediante técnicas QFT: aplicaciones a sistemas navales*", Tesis doctoral. UNED
- [Muñoz-Mansilla et al.,12] Muñoz-Mansilla R., Aranda.J, Diaz J.M., Chaos D., (2012), "*Aplicación de técnicas de control robusto QFT a sistemas navales*", Revista Iberoamericana Automática e Informática industrial 9 (2012) 231–243
- [Nam y Hong, 02] Nam Y., Hong S.K. (2002). "*Force control system design for aerodynamic load simulator*", Control Engineering Practice 10, pp 549-558
- [Nandakumar et al., 02] Nandakumar, Halikias, Zolotas (2002). "*An optimisation algorithm for designing fixed-structure controllers using the QFT methodology*", IEEE International Symposium CACSD.pp157-162
- [Nataraj y Sardar, 00] Nataraj, P.S.V., Sardar, G., (2000). "*Template generation for continuous transfer functions using interval analysis*", Automatica, 36, 111-119.
- [Nataraj y Sardar, 00b] Nataraj, P.S.V., Sardar, G., (2000). "*Computation of QFT bounds for robust sensitivity and gain-phase margin specifications*". ASME Transactions of the ASME, 528, Vol122.
- [Nataraj, 02] Nataraj, P.S.V., (2002), "*Interval QFT: a mathematical and computational enhancement of QFT*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 12, pp. 385-402.
- [Nataraj, 02b] Nataraj, P.S.V., (2002), "*Computation of QFT bounds for robust tracking specifications*", Automática 38, pp 327-334.
- [Niederlinski, 71] Niederlinski, A., (1971). "*A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems*",

Automatica, vol.7, pp.691-701.

- [Niksefat y Sepheri, 02] Niksefat N., Sepheri N. (2002) “A QFT fault-tolerant control for electrohydraulic positioning systems”, IEEE transactions on control systems technology, Vol10, pp626-632
- [Nordgren et al., 94] Nordgren, R. E., Nwokah, O. D. I., Franchek, M. A., (1994). “New formulations for Quantitative Feedback Theory”. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4, 47-64.
- [Nwokah et al., 01] Nwokah, O.D.I., Happawana, G.S., Taha, E., (2001), “Quantitative Feedback Theory Revisited”, Dynamics and Control, 11, pp. 71-80.
- [Nwokah, 84] Nwokah, O.D.I., (1984), “Synthesis of controllers for uncertain multivariable plants for described time domain tolerances”, International Journal of Control, 40, pp. 1189-1206.
- [Nwokah y Thompson, 89] Nwokah, O.D.I., Thompson, D.F., (1989), “Algebraic and topological aspects of quantitative feedback theory”, International Journal of Control, 50(4), pp. 1057-1069.
- [Nwokah et al., 90] Nwokah, O.D.I., Thompson, D.F., Perez, R.A., (1990), “On some existence conditions for QFT controllers”, ASME Winter Annual General Meeting, Dallas, TX, pp. 1-9.
- [Nwokah y Yau, 93] Nwokah, O.D.I., Yau, C.-H., (1993), “Quantitative Feedback Design of Decentralised Control Systems”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 115, pp. 452-464.
- [Ogata, 93] Ogata, K. (1993), “Ingeniería de control moderna”, Prentice Hall
- [Pachter et al.,97] Pachter M., Houppis C.H., Kang K., (1997), “Modelling and control of an electro-hydrostatic actuator”, Int. Journal of

Robust and Nonlinear Control, Vol7, pp. 591-608.

- [Patil et al,10] Patil M.D., Patil P.G., Patil R.S., (2010), "*Multivariable Control System Design for Quadruple Tank Process using Quantitative Feedback Theory (QFT)*", *Proc. of Int. Conf. on Control, Communication and Power Engineering*, pp71-75.
- [Park, Chait y Steinbuch, 94] Park, M.S., Chait, Y., Steinbuch, M., (1994), "*A New Approach to Multivariable Quantitative Feedback Theory: Theoretical and Experimental Results*", *Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, June 29-July 1*, pp. 340-345.
- [Park, Chait y Steinbuch, 97] Park, M. S., Chait, Y., Steinbuch, M., (1997). "*Inversion-free design algorithms for multivariable Quantitative Feedback Theory: an application to robust control of a CD-ROM*", *Automatica*, 33, 915-920.
- [Piedmonte et al., 98] Piedmonte, M. D., Meckl, P. H., Nwokah, .O. D., Francheck, M. A., (1998), "*Multivariable vibration control of a coupled flexible structure using QFT*", *International Journal of Control*, 69, 475-498.
- [Philips, 89] Philips W.D.,(1989), "*Frequency sensitive QFT weighting matrix*", Thesis, AFIT/GAE/ENG/88D-01
- [Philips et al., 97] Philips S.N., Pachter M., Houppis C.H. (1997) "*A QFT subsonic envelope flight control system design*", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol 7, pp 581-589
- [Piguet, 99] Piguet, Y., (1999). "*Sysquake user manual, version 1.0*". Calerga. Lausanne (Switzerland).
- [Prakash et al., 91] Prakash, O., Adams, N.J., Appelby, B.D., (1991), "*Multivariable Control of the Space Shuttle Remote Manipulator System*", *Proceedings of the AIAA Guidance*,

- Navigation and Control Conference, New Orleans, August 12-14, pp. 1923-1931.
- [Pritchard y Widorowitz, 97] Pritchard, C.J., Widorowitz, B., (1997), "*Improved method of determining timedomain transient performance bounds from frequency response uncertainty regions*", International Journal of Control, 66(2), pp. 311-327.
- [Rasmussen, 91] Rasmussen S.J, (1991), "*Application of nonlinear QFT to flight control design for high angle of attack maneuvers with thrust vectoring*", Thesis, AFIT/GE/EN/91D-44
- [Rheinboldt y Vandergraft, 73] Rheinboldt, W.C., Vandergraft, J.S., (1973), "*A Simple Approach to the Perron-Frobenius Theory for Positive Operators and General Partially-Ordered Finite-Dimensional Linear Spaces*", Mathematics of Computation, 27(121), pp. 139-145.
- [Rauw, 01] Rauw M.O., (2001), "*FDC1.2 – A simulink toolbox for flight dynamics and control analysis*". Thesis
- [Rosenbrock, 72] Rosenbrock, H.H., (1972), "*The stability of multivariable systems*", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-17, pp. 105-107.
- [Rosenbrock, 74] Rosenbrock, H.H., (1974), "*Computer-aided Control System Design*", Academic Press, New York.
- [Rueda et al., 01] Rueda Rodriguez, T.M., Velasco Gonzalez, F.J., Moyano Pérez, E., Lopez García, E., (2001), "*Robust QFT controller for marine course-changing control*", IFAC
- [Rueda et al., 03] Rueda Rodriguez, T.M., Velasco Gonzalez, F.J., Lopez García, E., Moyano Pérez, E., (2003), "*Metodología para la selección de modelos reducidos: aplicación al modelo del turbo ferry TF120*", servicio publicaciones, Universidad de Cantabria

- [Rueda et al., 05] Rueda Rodriguez, T.M., Velasco Gonzalez, F.J., Moyano Pérez, E., Lopez García, E., de la Cruz, J.M. (2005), "*Application of a robust qft linear control method to the course changing manoeuvring of a ship*", Journal of Maritime Research, VOL2, N^o1, pp 69-86
- [Shams et al., 10] Shams S., Farahani S., Hemati R., Nikzad M., (2010), "*Robust decentralized load frequency control in multi-area electric power system using QFT*", Scientific Research and Essays, Vol5(20), pp. 3082-3094.
- [Shinskey, 95] Shinskey, F.G., (1995). "*Process control systems*". McGraw-Hill.
- [Shrikant y Sen, 99] Shrikant R., Sen I. (1999) "*Robust tuning of power system stabilizers using QFT*", IEEE transactions on control systems technology, Vol7, pp478-486
- [Sidi, 97] Sidi, M., (1997), "*Gain-bandwidth limitations of feedback systems with non-minimumphase plants*", International Journal of Control, 67(5), pp. 731-743.
- [Sidi, 01] Sidi, M., (2001), "*Design of Robust Control Systems from Classical to Modern Practical Approaches*", Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- [Sidi, 02] Sidi, M., (2002), "*A combined QFT/ H^∞ design technique for TDOF uncertain feedback systems*", International Journal of Control, 75(7), pp. 475-489.
- [Sigmon, 92] Sigmon K.,(1992), "*Introduccion a Matlab*", Universidad de Florida.
- [Skogestad y Postlethwaite, 96] Skogestad, S., Postlethwaite, I., (1996). "*Multivariable feedback control. Analysis and design*". John Wiley & Sons.
- [Spee,95] Spee J.B.R.M., (1995). "*Determining requirements for a*

- computational aircraft control engineering environment (CACEE) based on a literature survey*, National Aerospace Laboratory NLR, GARTEUR/TP-088-1, 1995
- [Spee and Bijwaard, 97] Spee J.B.R.M., Bijwaard D.J.A. (1997). "*Computational aircraft control engineering environment (CACEE) overview document*", GARTEUR/ TP-088-10, 1997
- [Taylor et al, 84] Taylor, H.; Frederick, D.K., (1984). "*An expert system architecture for computer-aided control engineering*", Proceedings of the IEEE, Vol. 72, No. 12, December 1984, pp. 1795-1805
- [Thompson, 98] Thompson, D.F., (1998), "*Gain-Bandwidth Optimal Design for the New Formulation Quantitative Feedback Theory*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 120, pp. 401-403.
- [Thompson y Nwokah, 91] Thompson, D.F., Nwokah, O.D.I., (1991), "*Frequency Response Specifications and Sensitivity Functions in Quantitative Feedback Theory*", Proceedings of the 1991 American Control Conference, Boston, MA, June 26-28.
- [Thompson y Nwokah, 94] Thompson, D.F., Nwokah, O.D.I., (1994), "*Analytic Loop Shaping Methods in Quantitative Feedback Theory*", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 116, pp. 169-177.
- [Thompson y Pruyn, 99] Thompson, D.F., Pruyn, J.S., (1999), "*On characterizing sensitivity-based and traditional formulations for quantitative feedback theory*", International Journal of Control, 72(6), pp. 536-545.
- [Velasco et al., 03a] Velasco Gonzalez, F.J., Lopez García, E., Rueda Rodriguez, T.M., Moyano Pérez, E., Bravo Sanchez, L., Perez Cagigal, N. (2003), "*Controladores clásicos para la disminución de la aceleración vertical de un buque de alta velocidad*", Servicio publicaciones, Universidad de

Cantabria.

- [Velasco et al., 03b] Velasco Gonzalez, F.J., Rueda Rodriguez, T.M., Lopez García, E., Moyano Pérez, E., Nanclares López, J.L. (2003), "*Aplicación del control QFT robusto a la maniobra de cambio de rumbo de un buque*", Servicio publicaciones, Universidad de Cantabria.
- [Vries et al.,12] Vries T.J.A. de, Coelingh H.J., Holterman J., (2012), "*Robust Controller Design in the presence of Physical Parameter Uncertainty*", Drebbeel Institute, University of Twente, The Netherlands
- [Wang et al., 06] Wang Z., Chen Z., Sun Q., Yuan Z., (2006) "*GPC design technique based on MQFT for MIMO uncertain system*", International Journal of ICIC, Vol2, N°3, pp519-526.
- [Werner et al., 03] Werner H., Korba P., Yang T.C. (2003) "*Robust tuning of power system stabilizers using LMI-techniques*", IEEE transactions on control systems technology, Vol11, pp147-152
- [Wu y Jayasuriya, 00] Wu W., Jayasuriya S., (2000), "*A QFT design methodology for feedback systems under input saturation*", Proceedings of the American control conference, Chicago, 1250-1254
- [Wu et al., 98] Wu S.F., Grimble M.J, Breslin S.G, (1998), "*Introduction to quantitative Feedback Theory for lateral robust flight control systems design*", Control Engineering Practice 6, Pergamon, 805-828
- [Yang, 08] Lan Chen_Yang (2008). "*A novel feedback design method for MIMO QFT with application to the X-29 flight control problem*". Office of graduate studies of Texas A&M university.
- [Yaniv, 91] Yaniv, O., (1991), "*Arbitrary Small Sensitivity in Multiple-input-output Uncertain Feedback Systems*", Automatica,

- 27(3), pp. 565-568.
- [Yaniv, 92] Yaniv, O., (1992), "*Synthesis of uncertain MIMO feedback systems for gain and phase margins at different channel breaking points*", *Automatica*, 28(5), pp. 1017-1020.
- [Yaniv, 95] Yaniv. O., (1995), "*MIMO QFT using Non-diagonal Controllers*", *International Journal of Control*, 61(1), pp. 245-253.
- [Yaniv, 99] Yaniv, O., (1999), "*Quantitative feedback design of linear and nonlinear control systems*", Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.
- [Yaniv y Chait, 92] Yaniv, O., Chait, Y., (1992), "*A Simplified Multi-Input Multi-Output Formulation for the Quantitative Feedback Theory*", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 114, pp. 179-185.
- [Yaniv y Gutman, 02] Yaniv, O., Gutman, P.-O.F., (2002), "*Crossover Frequency Limitations in MIMO Nonminimum Phase Feedback Systems*", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (9), pp. 1560-1564.
- [Yaniv y Horowitz, 86] Yaniv, O., Horowitz, I., (1986), "*A quantitative design method for MIMO linear feedback systems having uncertain plants*", *International Journal of Control*, 43, pp. 401-421.
- [Yaniv y Horowitz, 87] Yaniv, O., Horowitz, I., (1987), "*Quantitative feedback theory – reply to criticisms*", *International Journal of Control*, 46(3), pp. 945-962.
- [Yaniv y Horowitz, 90] Yaniv, O., Horowitz, I., (1990). "*Quantitative Feedback Theory for active vibration control synthesis. International Journal of Control*", 51, pp. 1251-1258.
- [Yaniv y Schwartz, 91] Yaniv, O., Schwartz, B., (1991), "*Criterion for loop stability in MIMO feedback systems having an uncertain plant*",

International Journal of Control, 53(3), pp. 527-539.

- [Yaniv, 99] Yaniv, O., (1999), "*Quantitative feedback design of linear and nonlinear control systems*". Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts
- [Yousfi et al,12] Yousfi N., Melchior P., Rekik C., Derbel N., Oustaloup A.,(2012), "*Design of Centralized CRONE Controller Combined with MIMO-QFT Approach Applied to Non Square Multivariable Systems*", *International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 45– No.16*.
- [Zhao y Jayasuriya, 96] Zhao, Y., Jayasuriya, S., (1996), "*A New Formulation of Multiple-Input Multiple-Output Quantitative Feedback Theory*", *ASME Journal of the Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118, pp. 748-752.
- [Zhao y Jayasuriya, 96b] Zhao, Y., Jayasuriya, S., (1996). "*Robust stability of closed-loop systems resulting from nonsequential MIMO-QFT design*", *ASME Journal of the Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118, pp. 753-756.
- [Zhou et al., 96] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, (1996). "*Robust and Optimal Control*", Prentice Hall,
- [Zirilli et al., 01] Zirilli, A., Tiano, A., Roberts, G., N., Sutton, R., (2001). "*Autopilot designed with fuzzy set theory*". Proceeding of IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems. CAMS 2001. Glasgow (UK).
- [Zolotas y Halikias, 99] Zolotas, Halikias (1999). "*Optimal design of PID controllers using the QFT method*", *IEEE Proc. CTA*