

# TESIS DOCTORAL

## Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento

Miryam B. Sánchez Sánchez

Ingeniero Industrial por la Universidad Pontificia de Comillas: I.C.A.I

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

MADRID, 2013

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

# Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento

Miryam B. Sánchez Sánchez

Ingeniero Industrial por la Universidad Pontificia de Comillas: I.C.A.I

Director de Tesis

Prof. Dr. José I. Pedrero Moya

Codirector de Tesis

Prof. Dr. Miguel Pleguezuelos González

# Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a los Profesores D. José Ignacio Pedrero Moya y D. Miguel Pleguezuelos Gonzalez por la atención dedicada y por la ayuda prestada durante la realización de esta tesis.

Me gustaría dar las gracias, además, a las personas que me han soportado y animado constantemente durante la realización de la tesis: Álvaro, mis padres y mi hermana.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xviii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xxv</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xxvii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xxix</b>
<b>1. Estado del conocimiento</b>	<b>1</b>
1.1. Modelos de distribución de carga . . . . .	2
1.2. Estudios y modelos de cálculo a presión superficial . . . . .	8
1.3. Estudios a flexión y modelos de cálculo a rotura en la base . . . . .	13
1.4. Modelos de pérdidas y estimación del rendimiento . . . . .	21
1.4.1. Pérdidas debidas a efectos rotacionales . . . . .	22
1.4.2. Pérdidas mecánicas . . . . .	25
<b>2. Geometría del perfil de evolvente</b>	<b>29</b>
2.1. La evolvente de circunferencia . . . . .	30
2.1.1. Longitud de la evolvente entre dos puntos . . . . .	32
2.2. Tallado de ruedas dentadas con cremallera . . . . .	33
2.2.1. Geometría de la cremallera . . . . .	33
2.2.2. Circunferencia primitiva . . . . .	36

2.2.3.	Ruedas helicoidales y con desplazamiento . . . . .	36
2.2.4.	Generación de un perfil de evolvente mediante una herramienta de perfil de corte recto . . . . .	39
2.2.5.	Ecuación del perfil en la base del diente . . . . .	40
2.2.6.	Fenómeno de penetración . . . . .	44
2.2.7.	Espesor del diente. Condición de no apuntamiento . . . . .	47
2.2.8.	Ángulo de hélice a un radio cualquiera . . . . .	49
2.3.	Engrane de ruedas con dentadura de perfil de evolvente . . . . .	49
2.3.1.	Relación de transmisión . . . . .	50
2.3.2.	Línea de presión. Ángulo de presión de funcionamiento . . . . .	52
2.3.3.	Intervalo de contacto . . . . .	54
2.3.4.	Grado de recubrimiento . . . . .	55
2.3.5.	Holgura . . . . .	57
2.3.6.	Condición de no interferencia . . . . .	62
2.3.7.	Condición de engrane en vacío . . . . .	63
<b>3.</b>	<b>Modelo de distribución de carga</b>	<b>65</b>
3.1.	Potencial de deformación de un diente . . . . .	67
3.2.	Potencial de deformación de una pareja de dientes en contacto . . . . .	73
3.2.1.	Adimensionalización de la posición de engrane . . . . .	76
3.3.	Potencial de deformación de varias parejas de dientes en contacto . . . . .	80
3.4.	Potencial de deformación de infinitas parejas. Engranajes helicoidales	82
3.5.	Aproximación de la función potencial inverso . . . . .	86
3.5.1.	Aproximación de la función potencial unitario inverso para engranajes convencionales . . . . .	86
3.5.2.	Aproximación de la función potencial inverso para engranajes HTCR estándar . . . . .	90
3.5.3.	Aproximación de la función potencial unitario inverso para engranajes no estándar . . . . .	96
3.5.3.1.	Reducción de la altura del diente o engrane en vacío	98

3.5.3.2.	Alargamiento de la altura del diente . . . . .	105
3.5.3.3.	Modificación de la distancia entre centros . . . . .	107
3.5.4.	Precisión del método . . . . .	110
3.5.4.1.	Precisión del método para engranajes convencionales	110
3.5.4.2.	Precisión del método para engranajes HTCR . . . . .	115
3.5.4.3.	Ejemplo de engranajes no estándar . . . . .	119
3.6.	Análisis del reparto de carga mediante el MEF . . . . .	122
3.6.1.	Desarrollo del modelo de elementos finitos . . . . .	122
3.6.2.	Definición del mallado de elementos finitos . . . . .	126
3.6.3.	Análisis del reparto de carga . . . . .	128
3.6.4.	Reparto de carga para engranajes rectos . . . . .	129
3.6.5.	Reparto de carga para engranajes helicoidales . . . . .	135
<b>4.</b>	<b>Modelo de cálculo a presión superficial</b>	<b>141</b>
4.1.	Introducción . . . . .	142
4.2.	Cálculo de la tensión de contacto según ISO 6336-2 . . . . .	143
4.3.	Propuesta de modelo de cálculo a presión superficial . . . . .	147
4.3.1.	Tensión de contacto crítica para engranajes rectos . . . . .	149
4.3.1.1.	Tensión de contacto crítica para engranajes rectos estándar . . . . .	150
4.3.1.2.	Tensión de contacto crítica para engranajes rectos no estándar . . . . .	154
4.3.2.	Tensión de contacto crítica para engranajes helicoidales . . . . .	158
4.3.2.1.	Tensión de contacto crítica para engranajes heli- coidales estándar . . . . .	159
4.3.2.2.	Tensión de contacto crítica para engranajes heli- coidales no estándar . . . . .	173
4.4.	Validación de la tensión de contacto mediante MEF . . . . .	178
4.4.1.	Tensión contacto para engranajes rectos . . . . .	179
4.4.2.	Tensión de contacto para engranajes helicoidales . . . . .	181

4.4.3. Conclusiones del análisis de tensiones . . . . .	182
4.5. Comparación en la tensión de contacto con el método de ISO 6336-2 . . . . .	183
<b>5. Modelo de cálculo a rotura en la base . . . . .</b>	<b>189</b>
5.1. Introducción . . . . .	189
5.2. Cálculo de tensión nominal en la base del diente según ISO 6336-3 . . . . .	192
5.3. Tensión nominal en la base para dentado recto . . . . .	193
5.4. Tensión nominal en la base para dentado oblicuo . . . . .	195
5.5. Propuesta de modelo de cálculo a rotura en la base . . . . .	196
5.5.1. Tensión crítica en la base del diente para engranajes rectos . . . . .	205
5.5.1.1. Tensión crítica en la base del diente para engranajes rectos estándar . . . . .	205
5.5.1.2. Tensión de crítica en la base del diente para engranajes rectos no estándar . . . . .	210
5.5.2. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales . . . . .	214
5.5.2.1. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales estándar . . . . .	214
5.5.2.2. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales no estándar . . . . .	223
5.6. Validación de la tensión de rotura en la base mediante el MEF . . . . .	225
5.6.1. Tensión de rotura en la base para engranajes rectos . . . . .	225
5.6.2. Tensión de rotura en la base para engranajes helicoidales . . . . .	227
5.7. Comparación de la tensión de rotura en la base con ISO 6336-3 . . . . .	228
<b>6. Modelo de rendimiento . . . . .</b>	<b>233</b>
6.1. Introducción . . . . .	233
6.2. Planteamiento general del modelo . . . . .	235
6.2.1. Engranajes rectos . . . . .	236
6.2.2. Engranajes helicoidales . . . . .	238

6.2.3. Modelo de coeficiente de fricción . . . . .	239
6.3. Modelo de rendimiento . . . . .	243
6.3.1. Modelo de rendimiento para engranajes rectos . . . . .	243
6.3.2. Modelo de rendimiento para engranajes helicoidales . . . . .	246
6.3.3. Comparación con resultados experimentales . . . . .	248
6.3.4. Discusión de resultados . . . . .	254
6.4. Modelo aproximado de la potencia perdida . . . . .	255
6.4.1. Estudio de la influencia de los parámetros que afectan a la potencia perdida . . . . .	257
6.4.2. Propuesta de modelo . . . . .	261
<b>7. Conclusiones</b>	<b>271</b>
7.1. Generalización del modelo de distribución de carga de mínimo potencial de deformación . . . . .	272
7.2. Formulación de un modelo de cálculo a presión superficial de engranajes HTCR . . . . .	274
7.3. Formulación de un modelo de cálculo a rotura en la base para engranajes HTCR . . . . .	277
7.4. Desarrollo de un modelo de rendimiento de engranajes HTCR . . . . .	279
<b>8. Futuras líneas de investigación</b>	<b>281</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>283</b>



# Nomenclatura

## Caracteres latinos

$b$	Ancho de cara del diente
$b_0$	Coficiente dependiente del grado de recubrimiento transversal
$C$	Distancia entre centros
$C_0$	Distancia entre centros nominal
$e(y)$	Espesor del diente en la sección de ordenada $y$
$E$	Módulo de elasticidad
$F$	Fuerza en la sección transversal
$F_n$	Fuerza normal al perfil del diente
$F_t$	Carga tangencial transversal
$G$	Módulo de elasticidad transversal del material
$h$	Factor de holgura
$h_a$	Adendo o altura de cabeza del diente Altura de pie de la herramienta de generación
$h_{a0}$	Dedendo o altura de pie del diente Altura de cabeza de la herramienta de generación

---

$h_b$	Factor de holgura en la base
$h_F$	Brazo del momento flector
$l_c$	Longitud de la línea de contacto
$\mu$	Coefficiente de Poisson Coefficiente de rozamiento
$m$	Modulo
$m_n$	Módulo equivalente en la sección normal
$m_t$	Módulo equivalente en la sección transversal
$M$	Momento flector
$N$	Esfuerzo axial
$p$	Paso circular
$P$	Potencia transmitida
$P_h$	Presión máxima
$P_s$	Potencia total transmitida
$P_u$	Potencia perdida por rozamiento
$q_s$	Parámetro de entalladura
$r$	Coordenada polar del perfil
$r_{out}$	Radio exterior o radio de cabeza
$r_b$	Radio de base
$r_E$	Radio de entronque evolvente-trocoide
$r_f$	Radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta

---

$r_p$	Radio primitivo de referencia
$r_r$	Radio de la circunferencia de rodadura
$R$	Coefficiente de reparto de carga
$R_{eq}$	Radio de curvatura equivalente del perfil del diente
$s_F$	Espesor en la sección crítica
$S$	Rugosidad RMS de la superficie
$SR$	Coefficiente que relaciona el deslizamiento y la velocidad media
$T$	Esfuerzo cortante
$u$	Potencial unitario
$U$	Potencial de deformación de una pareja de dientes de engranaje
$U_n$	Potencial de deformación debido a compresión
$U_s$	Potencial de deformación debido a cortadura
$U_x$	Potencial de deformación debido a flexión
$U_T$	Potencial total de la transmisión
$v$	Potencial unitario inverso
$V_e$	Velocidad media de las velocidades de rodadura
$V_s$	Diferencia de las velocidades de rodadura
$W_s$	Energía total transmitida
$W_u$	Energía perdida por rozamiento
$x$	Factor de desplazamiento
$Y_\beta$	Factor de ángulo de hélice

---

$Y_F$	Factor de forma
$Y_S$	Factor de corrección de tensiones
$Z$	Número de dientes del engranaje
$Z_{B/D}$	Factor de contacto único
$Z_E$	Factor de elasticidad
$Z_H$	Factor de forma
$Z_\beta$	Factor de ángulo de hélice
$Z_\varepsilon$	Factor de grado de recubrimiento

**Caracteres griegos**

$\alpha_C$	Ángulo de carga
$\alpha_n$	Ángulo de presión normal
$\alpha_t$	Ángulo de presión de referencia en la sección transversal
$\alpha'_t$	Ángulo de presión de funcionamiento en la sección transversal
$\beta$	Ángulo de hélice de referencia
$\beta_b$	Ángulo de hélice en la base
$\eta$	Rendimiento
$\varepsilon_\alpha$	Grado de recubrimiento transversal
$\varepsilon_\beta$	Grado de recubrimiento en el salto
$\varepsilon_\gamma$	Grado de recubrimiento total
$\varepsilon'_\alpha$	Grado de recubrimiento transversal ficticio
$\varphi$	Parámetro de la trocoide

$\gamma$	Espesor angular del diente
$\gamma_b$	Espesor angular del diente en la circunferencia de base
$\gamma_p$	Espesor angular del diente en la circunferencia primitiva
$\lambda$	Parámetro de longitud del intervalo de presión
$\nu_o$	Viscosidad absoluta dinámica
$\omega$	Velocidad de rotación
$\rho$	Radio de curvatura en la sección transversal
$\rho_n$	Radio de curvatura en la sección normal
$\sigma_F$	Tensión nominal en la base
$\sigma_{F0}$	Tensión nominal en la base calculada por el método ISO
$\sigma_H$	Tensión nominal de contacto
$\sigma_{H0}$	Tensión nominal de contacto calculada por el método ISO
$\theta$	Ángulo de rodadura de los puntos de perfil de evolvente
$\theta_E$	Ángulo correspondiente al punto de entronque evolvente-trocoide
$\xi$	Parámetro adimensional que define la posición de engrane
$\xi_0$	Parámetro $\xi$ en el punto en contacto de la sección transversal de referencia
$\xi_m$	Parámetro adimensional para el valor máximo de la función $v(\xi)$

### **Subíndice**

1	Piñón
2	Rueda

<i>b</i>	Base del diente
<i>cui</i>	Contacto único inferior
<i>cus</i>	Contacto único superior
<i>inn</i>	Punto inferior del intervalo de contacto o punto más bajo de engrane
<i>out</i>	Cabeza del diente

# Lista de Figuras

2.1.	Evolvente de circunferencia. . . . .	31
2.2.	Geometría de la herramienta de tallado. . . . .	33
2.3.	Tallado de un engranaje cilíndrico helicoidal. . . . .	37
2.4.	Efecto del desplazamiento en la forma del diente. . . . .	38
2.5.	Centro instantáneo de rotación durante el proceso de tallado. . . . .	39
2.6.	Generación del perfil de evolvente mediante herramienta de flanco recto. . . . .	41
2.7.	Determinación de las ecuaciones del perfil de trocoide. . . . .	42
2.8.	Caso límite de engranaje sin penetración. . . . .	45
2.9.	Engranaje con penetración. . . . .	46
2.10.	Espesores angulares del diente. . . . .	48
2.11.	Posición de la rueda en un punto de engrane. . . . .	51
2.12.	Variación del ángulo $\alpha'$ en función de la posición de los centros. . . . .	53
2.13.	Relación geométrica entre parámetros geométricos de piñón y rueda. . . . .	54
2.14.	Intervalo de contacto durante el engrane. . . . .	55
2.15.	Recubrimiento en el salto. . . . .	57
2.16.	Holgura de cambio de sentido. . . . .	59
2.17.	Condición de no interferencia. . . . .	62
2.18.	Condición de engrane en vacío. . . . .	64
3.1.	Parámetros geométricos para el cálculo del potencial de deformación. . . . .	69
3.2.	Parámetros geométricos para el cálculo del potencial en función del punto $C$ (izquierda) y en función del punto $F$ (derecha). . . . .	72

3.3.	Espesor del diente. . . . .	73
3.4.	Ángulo de carga. . . . .	74
3.5.	Pareja de dientes en contacto. . . . .	75
3.6.	Potencial elástico en la evolvente. . . . .	78
3.7.	Potencial elástico en la trocoide. . . . .	79
3.8.	Potencial elástico total de la pareja de dientes. . . . .	79
3.9.	Potencial elástico de deformación total en una transmisión con grado de recubrimiento entre 1 y 2. . . . .	81
3.10.	Aspecto típico de la función potencial unitario inverso. . . . .	82
3.11.	Variación del ángulo $\theta$ a lo largo de la línea de contacto en cada instante, en un diente de un engranaje helicoidal. . . . .	83
3.12.	Geometría del contacto en engranajes helicoidales. . . . .	84
3.13.	Distribución de carga en engranajes helicoidales. . . . .	85
3.14.	Aspecto típico de la función unitario inverso $v(\xi)$ . . . . .	87
3.15.	Reparto de carga para engranajes estándar con $\varepsilon_\alpha$ entre 1 y 2. . . . .	88
3.16.	Forma típica de las gráficas de la función $I_v(\xi_0)$ . . . . .	89
3.17.	Factor $R^2$ de ajuste de $v(\xi)$ . . . . .	91
3.18.	$R^2$ de $R(\xi)$ en función de $\varepsilon_\alpha$ . . . . .	92
3.19.	Error máximo: $E_{max}$ . . . . .	92
3.20.	Ajuste de la función $v(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua). . . . .	93
3.21.	Ajuste de la función $R(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua). . . . .	94
3.22.	Factor $R^2$ en función de $\varepsilon_\alpha$ . . . . .	95
3.23.	Error máximo: $E_{max}$ . . . . .	96
3.24.	Reparto de carga para engranajes HTCR. . . . .	96
3.25.	Engrane en vacío. . . . .	97
3.26.	Reducción de la altura del diente de la rueda. . . . .	98
3.27.	Potencial unitario inverso obtenido mediante integración numérica. . . . .	99
3.28.	Reparto de carga para engranajes con adendo efectivo reducido en la rueda. . . . .	100

3.29.	Reparto de carga para engranajes HTCR con adendo efectivo reducido en la rueda. . . . .	101
3.30.	Adendo efectivo reducido en el piñón. . . . .	102
3.31.	Función $R(\xi)$ con adendo efectivo reducido en el piñón. . . . .	102
3.32.	Adendo efectivo reducido en el piñón y en la rueda. . . . .	103
3.33.	Función $R(\xi)$ con adendo efectivo reducido en el piñón y en la rueda. . . . .	104
3.34.	Adendo efectivo alargado en el piñón y en la rueda. . . . .	106
3.35.	Función $R(\xi)$ con adendo efectivo alargado en el piñón y en la rueda. . . . .	106
3.36.	Reparto de carga para engranajes convencionales con adendo efectivo ampliado en el piñón y adendo efectivo reducido en la rueda. . . . .	107
3.37.	Incremento de la distancia entre centros. . . . .	108
3.38.	Función $R(\xi)$ con incremento de la distancia entre centros. . . . .	109
3.39.	Ajuste de la función $v(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua). . . . .	113
3.40.	Ajuste de la función $R(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua). . . . .	114
3.41.	Ajuste de la función $v(\xi)$ : $v(\xi)$ numérica (punteada); $v(\xi)$ analítica (continua). . . . .	118
3.42.	Ajuste de la función $R(\xi)$ : $R(\xi)$ numérica (punteada); $R(\xi)$ analítica (continua). . . . .	118
3.43.	Comparación entre los cálculos numéricos (punteada) y analíticos (continua) del ejemplo . . . . .	121
3.44.	Keypoints del piñón y de la rueda . . . . .	123
3.45.	División de la superficie del diente y división de las líneas . . . . .	123
3.46.	Mallado de los dientes . . . . .	124
3.47.	Condiciones de contorno para el modelo de elementos finitos . . . . .	126
3.48.	Definición del mallado de elementos finitos . . . . .	127
3.49.	Funciones para transmisión no estándar (negro) y para la misma transmisión estándar (gris). . . . .	130
3.50.	Resultados de la simulación del modelo de MEF para una determinada posición de contacto . . . . .	131

3.51.	Tensión de contacto obtenida con <i>ANSYS</i> para cada posición de contacto simulada, $\theta$ , a lo largo de la cara del diente, $b$ . . . . .	132
3.52.	Comparación del reparto de carga entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF (punteado). . . . .	133
3.53.	Funciones para transmisión HTCR no estándar (negro) y para la misma transmisión estándar (gris). . . . .	133
3.54.	Tensiones de Von Mises en el piñón para un modelo de engranajes rectos con tres dientes en contacto . . . . .	134
3.55.	Comparación del reparto de carga entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF (punteado). . . . .	135
3.56.	Potencial unitario inverso para la transmisión dada (línea continua) y para la no estándar (punteado). . . . .	137
3.57.	Resultados de la simulación del modelo de MEF para un engranaje helicoidal.	138
3.58.	$\sigma_H^2$ obtenida por MEF y curva de regresión aproximada. . . . .	138
3.59.	Comparación entre la función potencial unitario inverso: analítico (negro) y MEF (gris). . . . .	139
4.1.	Tensión de contacto crítica en engranajes rectos con máximo en el punto $C_2$ .	151
4.2.	Tensión de contacto crítica en engranajes rectos HTCR. . . . .	152
4.3.	Localización del máximo de la tensión de contacto: $A_3$ (negro), $B_2$ (azul) y $C_2$ (rojo). . . . .	153
4.4.	Diferencias entre la tensión máxima numérica y la analítica. . . . .	154
4.5.	Tensión de contacto cuando se produce reducción del adendo del piñón. . . . .	155
4.6.	Tensión de contacto cuando se produce reducción del adendo de la rueda. . . . .	156
4.7.	Tensión de contacto cuando se alarga el adendo de rueda y piñón. . . . .	157
4.8.	Forma típica de las gráficas de la función $I_v(\xi_0)$ . . . . .	162
4.9.	Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con $d_\alpha + d_\beta < 1$ . . . . .	164
4.10.	Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con $d_\alpha + d_\beta > 1$ . . . . .	165
4.11.	Errores cometidos entre la Ec. 4.41 y la Ec. 4.56. . . . .	167
4.12.	Localización del máximo de la función $\phi(\xi)$ . . . . .	168

4.13.	Coeficiente de desplazamiento relativo para evaluar el error en la localización de la abscisa del máximo de la función $\phi(\xi)$ . . . . .	169
4.14.	Error en la estimación del máximo de la función $\phi(\xi)$ , $\phi(\xi_{\max R})$ . . . . .	170
4.15.	Error al suponer $(\phi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \phi_{\max}/I_{v\min}$ con respecto al modelo analítico. . . . .	171
4.16.	Error cometido por suponer $(\phi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \phi_{\max}/I_{v\min}$ con respecto al modelo numérico. . . . .	172
4.17.	Localización del máximo de la función $\phi(\xi)$ : negro $\eta_1$ ; azul $\eta_P$ . . . . .	177
4.18.	Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado). . . . .	180
4.19.	Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado). . . . .	180
4.20.	Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado). . . . .	181
4.21.	Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP. . . . .	186
4.22.	Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP para engranajes HTCR . . . . .	187
4.23.	Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP para engranajes helicoidales HTCR. . . . .	188
5.1.	Consideraciones ISO en el cálculo de la resistencia a flexión en la base del diente. . . . .	194
5.2.	Sección crítica. . . . .	197
5.3.	Base del diente. . . . .	198
5.4.	Determinación de la sección crítica según las recomendaciones del Comité ISO. . . . .	201
5.5.	Espesor de la sección crítica, brazo del par y ángulo de carga. . . . .	202
5.6.	Forma típica de la función $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$ . . . . .	206

5.7.	Máximo de la función $\Upsilon(\xi)$ : localizado en un punto intermedio del intervalo superior de contacto doble. . . . .	207
5.8.	Máximo de la función $\Upsilon(\xi)$ : localizado en el punto $D_2$ y en el punto $E_2$ . . . . .	207
5.9.	Localización del máximo de la función $\Upsilon(\xi)$ . . . . .	208
5.10.	Resultados del estudio del máximo de la función $\Upsilon(\xi)$ . . . . .	209
5.11.	$\sigma_F(\xi)$ para acortamiento de la cabeza del piñón. . . . .	211
5.12.	$\sigma_F(\xi)$ para acortamiento de la cabeza de la rueda. . . . .	212
5.13.	Forma típica de la función $\Pi(\xi)$ . . . . .	216
5.14.	Resultados del estudio de localización del máximo de la función $\Pi(\xi)$ . . . . .	217
5.15.	Error en la determinación del máximo de la función $\Pi(\xi)$ dado por la Ec. 5.58. . . . .	217
5.16.	Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con $d_\alpha + d_\beta \leq 1$ . . . . .	219
5.17.	Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con $d_\alpha + d_\beta \geq 1$ . . . . .	221
5.18.	Error en la determinación del máximo de la función $\Sigma(\xi, \xi_0)$ dado por la Ec. 5.70. . . . .	223
5.19.	Comparación de la tensión de rotura en la base entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF. (punteado). . . . .	226
5.20.	Tensión de rotura en la base para engranajes rectos HTCR con modelo analítico (línea continua) y con el obtenido por M.E.F. (punteado). . . . .	227
5.21.	Tensión de rotura en la base para engranajes helicoidales no estándar con modelo analítico (línea continua) y con el obtenido por M.E.F. (punteado). . . . .	228
5.22.	Comparación entre la tensión de rotura en la base calculada por el método de ISO y MEP para engranajes HTCR . . . . .	230
5.23.	Comparación entre la tensión de rotura en la base calculada por el método de ISO y MEP para engranajes helicoidales HTCR. . . . .	231
6.1.	Comparación entre formulaciones empíricas de $\mu$ y los datos medidos, Xu [89]. . . . .	241
6.2.	Potencia perdida en función del momento torsor y de la velocidad angular variando, para cada gráfica, un parámetro de la geometría y fijando el resto. . . . .	245

6.3.	Potencia perdida en función de $\beta$ y $M_t$ para una transmisión con $Z_1 = 23$ , $\alpha_n = 20^\circ$ y $u = 1$ . . . . .	247
6.4.	Relación entre la potencia perdida en helicoidales y en rectos. . . . .	248
6.5.	Potencia perdida para la transmisión 23T con momento torsor de 413 Nm. . . . .	249
6.6.	Potencia perdida para la transmisión 23T con velocidad de rotación de 6000 rpm. . . . .	250
6.7.	Potencia perdida para la transmisión 23T incluyendo la resolución numérica con el $\mu$ propuesto por ISO. . . . .	250
6.8.	Potencia perdida para la transmisión 40T. . . . .	251
6.9.	Diferencia entre la potencia obtenida por métodos experimentales y por métodos numéricos. . . . .	251
6.10.	Potencia perdida para la transmisión 40T incluyendo la resolución numérica con el $\mu$ propuesto por ISO. . . . .	252
6.11.	Potencia perdida para la transmisión 23B para $\omega = 2000$ rpm. . . . .	253
6.12.	Potencia perdida para la transmisión 23B para $\omega = 4000$ rpm. . . . .	253
6.13.	Potencia perdida para la transmisión 23B para $\omega = 6000$ rpm. . . . .	254
6.14.	Coefficiente de fricción de Xu. Casos 23T y 40T de Petry-Johnson. . . . .	256
6.15.	Influencia del ángulo de hélice $\beta$ en la potencia perdida. . . . .	258
6.16.	Influencia de $h_a$ en la potencia perdida. . . . .	259
6.17.	Influencia de $h_{a0}$ y de $r_f$ en la potencia perdida . . . . .	259
6.18.	Influencia de los coeficientes de desplazamiento $x$ en la potencia perdida. . . . .	260
6.19.	Influencia de la distancia entre centros, $x_c$ , en la potencia perdida. . . . .	260
6.20.	Influencia de $v_o$ sobre la potencia perdida . . . . .	261
6.21.	Ajuste del término $\Delta P_{sFit}$ para $Z_1 = 40$ , $\alpha_n = 20^\circ$ y $u = 1$ . . . . .	264
6.22.	Ajuste de los coeficientes $C_0$ , $C_1$ , $C_2$ y $C_3$ para $Z_1 = 40$ , $\alpha_n = 20^\circ$ . . . . .	265
6.23.	Error relativo entre la potencia perdida numérica y la obtenida con la Ec. 6.51 para el caso: $Z_1 = 40$ y $\alpha_n = 20^\circ$ . . . . .	269



# Lista de Tablas

2.1.	Herramientas normalizadas AGMA . . . . .	35
2.2.	Herramientas normalizadas ISO . . . . .	35
3.1.	Estudio 1: valor de los parámetros modificados. . . . .	92
3.2.	Estudio 2: valor asignado a los parámetros. . . . .	95
3.3.	Resultados de los estudios de precisión para engranajes convencionales. . . . .	111
3.4.	Resultados de los estudios de precisión para engranajes HTCR. . . . .	117
6.1.	Coefficientes de regresión de la ecuación del coeficiente de fricción de Xu. . . . .	242
6.2.	Valores de los parámetros para los estudios de engranajes rectos. . . . .	244
6.3.	Valores de los parámetros para el estudio de engranajes helicoidales. . . . .	247
6.4.	Valores de los parámetros para el estudio de rendimiento. . . . .	262
6.5.	Valores de los parámetros para engranajes con bajo grado de recubrimiento. . . . .	263
6.6.	Valores de los parámetros para engranajes con alto grado de recubrimiento. . . . .	263
6.7.	Coefficientes de $C_0$ y $C_1$ para engranajes con bajo grado de recubrimiento. . . . .	266
6.8.	Coefficientes de $C_2$ y $C_3$ para engranajes con bajo grado de recubrimiento. . . . .	267
6.9.	Coefficientes de $C_0$ y $C_1$ para engranajes con alto grado de recubrimiento. . . . .	267
6.10.	Coefficientes de $C_2$ y $C_3$ para engranajes con alto grado de recubrimiento. . . . .	268
6.11.	Errores del modelo aproximado para engranajes con bajo grado de recubrimiento. . . . .	268
6.12.	Errores del modelo aproximado para engranajes con alto grado de recubrimiento. . . . .	269



# Resumen

El objetivo de esta Tesis Doctoral ha sido el desarrollo de un modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente de alto grado de recubrimiento transversal (*High Transverse Contact Ratio*, HTCR), entendiéndose como tales los engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2. Se trata de un tipo de transmisiones que, por su mejor reparto de carga entre las distintas parejas de dientes en contacto, proporcionan mayor capacidad de carga a igualdad de tamaño, pero que exigen una elevada precisión tanto en la fabricación como en el montaje, para asegurar el contacto simultáneo entre tres parejas de dientes, durante determinados periodos del intervalo de engrane. Precisamente la dificultad impuesta por estos requerimientos de precisión es la causa fundamental de que este tipo de transmisiones no haya despertado especial interés en el pasado, como se refleja en la escasísima atención que le dedican normas internacionales como ISO -que propone unos métodos de cálculo altamente conservadores y muy débilmente justificados-, o en la explícita exclusión del alcance de sus objetivos que hacen otras, como AGMA.

Todavía hasta hoy no se han realizado intentos serios de normalización de los engranajes de alto grado de recubrimiento. Aunque los requerimientos de precisión mencionados son ya sobradamente alcanzables, y los engranajes HTCR de hecho ya se utilizan en aplicaciones de transmisión de potencia, las técnicas de simulación numérica, y en especial el Método de los Elementos Finitos (MEF), permiten un cálculo resistente suficientemente preciso, aunque quede restringido a la transmisión en concreto, objeto del estudio.

Para establecer un modelo de cálculo resistente que pueda ser de utilidad para

cálculos preliminares o como propuesta de normalización, es fundamental asegurar una suficiente precisión que garantice la validez de los resultados que se obtengan. En este sentido, está ampliamente contrastado que los modelos sencillos de la teoría lineal de la elasticidad para los cálculos a flexión (ecuación de Navier) o las ecuaciones de Hertz del contacto entre cilindros para los cálculos a presión superficial, proporcionan resultados de muy aceptable precisión, razón por la cual son sistemáticamente utilizados por la totalidad de las normas de engranajes existentes. Queda, sin embargo, bastante camino por recorrer en otros temas de considerable influencia, como la carga dinámica, las deformaciones bajo carga, las modificaciones del perfil o la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto.

Precisamente este último factor, la distribución de carga, ha despertado notable interés en muchos investigadores en los últimos años. Si bien las normas más difundidas (ISO, DIN, AGMA) consideran siempre un reparto informe de la carga, que posteriormente corrigen mediante factores de sobrecarga que procuran ajustar los valores críticos de la tensión, las considerables discrepancias en los planteamientos de unas y otras (en los valores de los factores de sobrecarga, en la localización de las condiciones críticas de carga, incluso de las longitudes de contacto efectivas a utilizar) dan una idea de la precariedad de la validez de las hipótesis utilizadas. Ciertamente, estudios más precisos llevados a cabo mediante el MEF arrojan notables discrepancias con los resultados proporcionados por ISO y AGMA, que también entre sí discrepan, en ocasiones en más de un 50 % en la capacidad de carga estimada.

El problema de estos estudios realizados mediante el MEF estriba en que resulta muy complicado generalizar los resultados obtenidos para una transmisión determinada a un conjunto de transmisiones, y más aún a una transmisión cualquiera dentro del rango de una norma; y ello por muchas razones, entre ellas el alto coste computacional de cada simulación.

El Equipo de Investigación en Engranajes del Departamento de Mecánica de la UNED desarrolló un modelo de distribución de carga basado en la hipótesis de mínimo potencial de deformación, que aplicó a engranajes convencionales (con grado de

recubrimiento transversal entre 1 y 2), obteniendo buenos resultados. La aportación más significativa de este modelo consiste en que se obtuvo una formulación analítica de la carga por unidad de longitud en cada punto de contacto, de notable simplicidad y elevada precisión, que permitió hacer cálculos analíticos para la búsqueda de valores críticos, con los que se formuló una propuesta mejorada de cálculo.

En esta Tesis, ese mismo modelo de distribución de carga se ha aplicado a engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, en busca de una propuesta de cálculo similar, tanto a presión superficial como a rotura en la base. A continuación se presentan con un mínimo detalle las actividades realizadas y los resultados alcanzados.

### **1. Adecuación del modelo de distribución de carga a altura efectiva de engrane no estándar**

El modelo de distribución de carga de partida y su formulación analítica aproximada eran perfectamente válidos para engranajes con altura de cabeza igual al módulo. Sin embargo, para conseguir elevados valores del grado de recubrimiento transversal puede resultar necesario alargar la altura de los dientes o reducir el ángulo de presión, lo que puede ocasionar la aparición de penetración en la base del diente del piñón, lo que no estaba contemplado en el modelo inicial. La primera actividad, y el primer resultado de este trabajo, es la generalización de la formulación del modelo de distribución de carga a geometrías no estándar, con modificaciones en la altura de cabeza de los dientes (incluido el caso de alturas diferentes en piñón y rueda) o en distancia entre centros de operación. El estudio incluye un análisis de la precisión del modelo analítico, que se compara con los resultados obtenidos por integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad, por un lado, y con resultados de simulaciones por elementos finitos, por otro.

### **2. Formulación de un modelo de cálculo a presión superficial de engranajes HTCR**

Para evaluar la presión superficial en un punto de la línea de contacto (en la

posición de engrane correspondiente a esa línea de contacto) se introdujo la expresión analítica de la carga por unidad de longitud en la ecuación de Hertz. A continuación se desarrolló un método aproximado para la determinación del valor máximo de la tensión, a lo largo de la línea de contacto y en un ciclo completo de engrane. A partir de esos resultados se estableció un método de cálculo analítico para la presión de contacto nominal y las correspondientes condiciones críticas de carga. Esa tensión de contacto nominal se comparó con los resultados obtenidos por resolución numérica del problema de maximización, con resultados de simulaciones por elementos finitos y con los resultados del método propuesto por ISO.

### **3. Formulación de un modelo de cálculo a rotura en la base de engranajes HTCR**

Siguiendo un procedimiento totalmente paralelo al anterior, para evaluar la tensión de flexión en la base del diente se introdujo la expresión analítica de la carga por unidad de longitud en la ecuación de Navier y se evaluó la tensión en la sección crítica de ISO (aquella cuya tangente al perfil forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje de simetría del diente) en cada una de las secciones transversales del diente, para todas las condiciones de carga del diente correspondientes a un ciclo completo de engrane. A continuación se desarrolló un método aproximado para la determinación del valor máximo de la tensión, a partir de cuyos resultados se estableció un método de cálculo analítico para la tensión en la base nominal y las correspondientes condiciones críticas de carga. Esa tensión en la base nominal se comparó con los resultados obtenidos por resolución numérica del problema de maximización, con resultados de simulaciones por elementos finitos y con los resultados del método propuesto por ISO.

### **4. Desarrollo de un modelo de rendimiento de engranajes HTCR**

Aunque el rendimiento no forma parte del cálculo resistente de los dientes de engranaje, disponer de un modelo analítico, simple y preciso, de la fuerza por

unidad de longitud en cada punto de la línea de contacto permite establecer un modelo de rendimiento mucho más preciso que los modelos analíticos sencillos publicados en la bibliografía -basados en un reparto uniforme de la carga-, y tan preciso como otros resultados puntuales obtenidos por integración numérica de las ecuaciones de la lubricación elastohidrodinámica, pero de formulación más sencilla. Para su desarrollo se escogió un modelo de coeficiente de fricción, variable con la posición de engrane y que toma en consideración todas las variables, geométricas y de funcionamiento de la transmisión, así como las propiedades del lubricante. Con ese coeficiente de fricción, la fuerza normal por unidad de longitud en cada punto de la línea de contacto el deslizamiento relativo de las superficies en contacto también en cada punto, se evaluó la potencia perdida por integración de las pérdidas elementales a lo largo de un ciclo de engrane. Este resultado se comparó con algunos resultados experimentales encontrados en la bibliografía así como con un método simple publicado por ISO. Aunque la complejidad del problema no ha permitido, en este caso, la formulación de un modelo analítico aproximado general, se ha desarrollado un método semianalítico, que se apoya en valores tabulados de parámetros de correlación, válido para engranajes rectos, dentro de un rango razonablemente amplio de valores de los parámetros geométricos.

Resultado de todo lo anterior, las Tesis propone un nuevo modelo de cálculo resistente, a presión superficial y a rotura en la base, de engranajes cilíndricos, rectos y helicoidales, de perfil de evolvente de alto grado de recubrimiento transversal, que pueda servir de herramienta de evaluación de diseños preliminares, y especialmente de fundamento de un método de estimación de la capacidad de carga suficientemente consistente para fines de normalización.



# Capítulo 1

## Estado del conocimiento

Si a cualquiera de nosotros, expertos, aficionados, o al más lego en la materia, nos preguntan por un tipo de mecanismo, quizás a todos nos venga al recuerdo la imagen de una pareja de engranajes. Las transmisiones por engranajes representan el ejemplo más simple, común y útil de un mecanismo, son ampliamente empleadas en la industria para transmitir potencia y movimiento entre dos o más ejes, así como para la reducción o multiplicación de la velocidad y del par transmitido. Los engranajes llevan existiendo desde la invención de las máquinas rotativas y, por su propiedad de multiplicación del par, los primeros ingenieros los empleaban para el desplazamiento de materiales particularmente pesados y también en molinos de agua o viento, para aumentar o disminuir la velocidad de rotación disponible. En la actualidad, el campo de aplicación de los engranajes es prácticamente ilimitado; los encontramos en las centrales de producción de energía eléctrica, hidroeléctrica, en los elementos de transporte terrestre, marítimo, aviones, en la industria siderúrgica, química y farmacéutica, en maquinaria textil, de alimentación, minas y astilleros, etc., incluso en los más simples movimientos de accionamiento manual. Toda esta gran variedad de aplicaciones del engranaje puede decirse que tiene por única finalidad la transmisión de la rotación o giro de un eje a otro distinto, reduciendo o aumentando la velocidad del primero.

Para muchas de estas aplicaciones, hoy en día, se demanda mayor capacidad de carga con un volumen y peso inferior. Un ejemplo claro de una aplicación donde

se exigen estas condiciones es la industria aeronáutica y automovilística, donde además de estas características también se requiere una disminución del ruido y de las vibraciones. Una forma simple de aumentar la capacidad de carga de una pareja de engranajes consiste en repartir la carga entre un mayor número de parejas en contacto simultáneo, lo que se denomina engranajes con alto grado de recubrimiento transversal (*High Transverse Contact Ratio*, HTCR), entendiéndose como tales los engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, en donde la carga, en cualquier instante, se comparte entre dos, tres, o más parejas de dientes simultáneamente.

La utilización de este tipo de engranajes tiene una serie de ventajas con respecto a los engranajes convencionales (engranajes con grado de recubrimiento menor que 2) entre las que caben destacar su mayor capacidad de carga, una transmisión más uniforme del par, la disminución del nivel de ruido durante el funcionamiento y menores esfuerzos de flexión y de contacto. Sin embargo, el funcionamiento de estas transmisiones implican mayores deslizamientos entre los flancos de los dientes durante el contacto, lo que provoca un aumento de las pérdidas por fricción y una menor resistencia al desgaste; además exigen una mayor precisión tanto en la fabricación como en el montaje, para asegurar el contacto simultáneo entre tres parejas de dientes, durante determinados periodos del intervalo de engrane. Los engranajes HTCR se pueden obtener mediante el aumento del adendo del diente, reduciendo la distancia entre centros de operación o reduciendo el ángulo de presión.

## 1.1. Modelos de distribución de carga

Los métodos de cálculo de engranajes rectos y helicoidales que proponen las normativas internacionales tanto la *American Gear Manufacturers Association*, AGMA, como la *International Organization for Standardization*, ISO, utilizan modelos simples de la teoría de elasticidad para evaluar la tensión de flexión [7] y la presión superficial [6], al considerar que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la línea de contacto; aunque se sabe que la distribución de la carga depende de la rigidez de la pareja de dientes que engrana, que es diferente para cada punto de

contacto, lo que significa que la carga por unidad de longitud es también diferente en cualquier punto de la línea de contacto. Sin embargo ambas normas discrepan en la longitud de la línea de contacto a considerar, AGMA [8] considera la longitud mínima de contacto producida durante el engrane e ISO emplea una longitud efectiva de contacto, que además es diferente para el cálculo a flexión y a presión superficial. Esta hipótesis de distribución uniforme de carga obliga a las normas a incluir una serie de factores de corrección para corregir los valores calculados de las tensiones de flexión y de contacto en el punto más desfavorable y aproximarlos más a los valores reales experimentales, para así determinar la capacidad de carga de la transmisión.

Dicha hipótesis de reparto de carga uniforme, aunque ampliamente utilizada, se sabe que no es correcta y que es origen de fuentes de error, por ello, numerosos autores han estudiado las variaciones de la rigidez en función del punto de contacto del perfil del diente. Niemann [61] estudió la influencia de la variación de la rigidez en la distribución de carga, aunque finalmente en sus resultados no presenta una formulación matemática de la distribución de carga sino que propone la aplicación de un factor de distribución longitudinal de carga en función de la rigidez media de dientes en contacto.

Todo ello implica la necesidad de abordar un estudio detallado de la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto que sea más próximo a la realidad, y, tomándolo como partida, plantear modelos de comportamiento frente a presión superficial y a rotura en la base, entre otros, como se indica en capítulos posteriores.

Los primeros trabajos que aplican el potencial elástico de deformación a la formulación de problemas de engranajes aparecen a mediados del siglo XX y son formulados por Weber [19]. Weber supone el diente de engranaje como una viga en voladizo de sección variable y calcula las deformaciones debidas a la flexión mediante un modelo analítico basado en la suma de las deformaciones producidas por las tensiones de contacto y a las deformaciones de flexión producidas en la base. La hipótesis de partida de Weber es la teoría del contacto elástico de Hertz entre cilindros y un reparto de carga uniforme, cuyas fórmulas son el origen de las propuestas para el

cálculo a flexión por la norma ISO-6336.

En las últimas décadas, el avance tecnológico ha permitido el uso extendido de métodos numéricos que conllevan una gran carga computacional pero que mediante simulaciones pueden obtener resultados con una elevada precisión. Una de las técnicas más utilizadas para realizar este tipo de estudios es el método de los elementos finitos. Este método ha sido utilizado por numerosos autores para obtener resultados muy interesantes sobre la influencia diferentes parámetros sobre la distribución de carga o el efecto que producen determinados errores sobre las características y propiedades de la transmisión. Vedmar [55] realizó un estudio sobre el diseño de dientes de engranajes helicoidales, en el cuál obtiene la distribución de carga de los dientes en contacto sobre el plano de engrane mediante técnicas de elementos finitos.

Otros autores combinan la técnica de elementos finitos con otro tipo de análisis analíticos o numéricos para realizar estudios más completos. Este es el caso de Ishida [77] que realiza una combinación entre el método de elementos finitos y un programa matemático para analizar la distribución de carga y la tensión de contacto en un engranaje recto, o Brauer [33], que en el año 2003, desarrolló un método mixto de cálculo, combinando un modelo analítico con un modelo mediante elementos finitos (MEF). Mediante el MEF se determinan las cargas de contacto entre los dientes, empleando para ello un algoritmo paramétrico, que realiza un mallado más denso en la zona del contacto, y grosero en el resto del modelo, y así se consigue disminuir la carga computacional del proceso. Conocidas las cargas que interactúan entre los dientes, aplicando expresiones analíticas basadas en la teoría de Hertz, se determinan las tensiones de contacto. El desgaste en un punto del camino de contacto se calcula mediante la integración del producto del deslizamiento en dicho punto por la presión de contacto existente durante el tiempo en que éste se produce.

En 2004, Sainsot [66], basándose en los trabajos de O'Donnell [88] y la tesis doctoral de Seager [20], opta por una función de reparto de carga del tipo cúbica, para las tensiones normales, y del tipo parabólico, para las tensiones de cortadura, producidas en la base del diente. Con dicho modelo analítico realiza el cálculo de la

rigidez del diente, distribución de carga y error de transmisión, aunque el propio autor reconoce en sus conclusiones que las deformaciones calculadas son de una limitada aproximación (entre el 2 % y el 7 % de error) frente a modelos semejantes resueltos mediante la técnica de elementos finitos bidimensionales.

En 2005, Ajmi [56] plantea la validez de los modelos clásicos de distribución de carga y propone un modelo de reparto de carga en engranajes, tanto para situaciones cuasiestáticas como dinámicas, basado en acoplamientos elásticos entre las superficies en contacto, modelizados mediante la técnica de los elementos finitos, resolviendo simultáneamente las ecuaciones del movimiento y del contacto, teniendo en cuenta errores de tallado y desalineamiento de ejes, en el que mantiene la hipótesis de que las secciones transversales a los dientes permanecen planas antes y después de la deformación. Los resultados numéricos obtenidos ponen de manifiesto que las deformaciones del diente, tanto para el análisis estático como para el dinámico, resultan ser mucho más significativas que los problemas debidos al contacto superficial, salvo en el caso en que, debido a desalineamientos de montaje o desviaciones en la forma del perfil, el camino de contacto se vea reducido de forma drástica, en cuyo caso predominan los problemas debidos al contacto. Los resultados de distribución de carga que obtiene para engranajes rectos resultan en consonancia con los adoptados por las normas de diseño (AGMA) en cuanto a un reparto de carga lineal para dos parejas de dientes en contacto (entre valores que rondan desde un tercio a dos tercios de la carga total, creciente entre el punto de contacto inferior y el punto de contacto único inferior, y decreciente entre el punto de contacto único superior y el último punto de contacto de la pareja), con la aportación de que la distribución obtenida varía con el ancho de cara.

Fernández del Rincón [9], en un estudio publicado en 2013, describe un modelo avanzado para el análisis de las fuerzas de contacto y deformaciones en transmisiones de engranajes rectos. La deformación en cada punto de contacto del engranaje se formula como una combinación de un término de deformación global y un término local. El primero se obtiene por medio de un modelo de elementos finitos y el último

se describe por un enfoque analítico que se deriva de la teoría de Hertz, aplicando el modelo de Weber-Banashek. Las condiciones de compatibilidad dan lugar a un sistema de ecuaciones no lineales sometidos a restricciones de desigualdad que deben ser resueltos una vez que la posición del centro de cada rueda es conocido. Mediante la resolución de modelos de comportamiento cuasiestático de engranajes rectos se obtiene el error de transmisión para varios niveles de carga, así como el reparto de carga o la rigidez del conjunto.

El método de los elementos finitos es un método ampliamente utilizado para calcular la rigidez del conjunto de parejas de dientes en contacto, así como los errores de transmisión. Este método puede considerar el efecto de los errores de tallado, errores de montaje o modificaciones del perfil del diente. Sin embargo, los modelos MEF para el cálculo de la rigidez del conjunto requieren precisos algoritmos de refinamiento de malla, computacionalmente muy costosos. Por otro lado, existen métodos analíticos que producen buenos resultados, frente a los modelos de elementos finitos a un coste computacional muy reducido, para el cálculo aproximado de la rigidez de las parejas en contacto. Además, todos estos estudios sobre la distribución de carga que proporcionan resultados obtenidos por técnicas numéricas o métodos de elementos finitos, presentan el problema de la no generalidad de los resultados obtenidos: todos de ellos permiten obtener algunas conclusiones con respecto a la pareja de engranajes considerada, pero resulta muy difícil extraer conclusiones generales, válidas para cualquier par de engranajes.

Los métodos de cálculo para engranajes rectos y helicoidales con alto grado de recubrimiento transversal, nunca han sido rigurosamente desarrollados. Las normas internacionales, AGMA [4, 8] no consideran pares de engranajes con una relación de contacto transversal superior a 2. El ámbito de aplicación de la norma ISO [6] incluye dientes de engranaje cilíndricos con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5, sin embargo propone unos métodos de cálculo altamente conservadores y muy débilmente justificados.

Los estudios profundos que existen en la literatura técnica son bastante escasos,

además van más dirigidos a evaluar el efecto que producen la variación determinados parámetros, como el adendo o a el ángulo de presión, necesarios para conseguir grados de recubrimiento mayores, pero no aparecen métodos de cálculo específicamente desarrollados para este tipo de transmisiones. Tal vez la elevada precisión necesaria tanto en la fabricación como en el montaje para asegurar el contacto simultáneo de tres parejas de dientes, durante determinados periodos del intervalo de engrane, no era fácil de alcanzarse en el pasado. De todos modos, ni los diseñadores ni los investigadores han estado nunca interesados en estudiar este tipo de transmisiones en profundidad. Sin embargo, con los procesos de fabricación modernos y las nuevas técnicas de montaje se consigue la precisión necesaria para este tipo de trasmisiones, lo que requiere el desarrollo de nuevos métodos de cálculo precisos para engranajes con alto grado de recubrimiento transversal.

En 1998 Lin [30] realizó un estudio paramétrico de un sistema de engranajes rectos mediante un análisis numérico que implementó en un programa de simulación dinámica de engranajes con el fin de determinar el comportamiento dinámico de un sistema de engranajes rectos. Además estudió el efecto que tiene el grado de recubrimiento transversal de un engranaje recto sobre la carga dinámica, para lo que hizo variar el grado de recubrimiento desde valores de 1,20 a 2,40 mediante la modificación del adendo del diente. Los resultados del estudio demostraron que los engranajes con grado de recubrimiento cercano a 2 presentan un rendimiento dinámico más favorable.

En 2003, Mohanty [74] sugiere un método analítico para calcular la distribución de carga de dientes de alto grado de recubrimiento transversal durante el ciclo de engrane. Se basa en la suposición de que desviaciones del diente para cada pareja en contacto es igual en todos los casos y que la suma de las cargas normales sobre cada pareja en contacto es igual a la carga normal total. Se supone un coeficiente de fricción constante entre la pareja de dientes que engrana para el cálculo tensión de contacto.

Li [72], en 2008, utiliza el método de los elementos finitos junto con un programa matemático para realizar un estudio sobre la influencia que tiene la variación del

adendo de los dientes en la tensión de contacto, en la distribución de carga y en la tensión debida a flexión en la base del diente.

En 2010, Rameshkumar [59] realiza un análisis para AGMA y compara los resultados obtenidos sobre el reparto de carga, la tensión de contacto y la tensión debida a flexión en la base del diente con un engranaje convencional y un engranaje HTCR; la transmisión es la misma pero se ha modificado el adendo del diente para obtener un grado de recubrimiento mayor que 2. Los resultados están basados en un modelo de dos dimensiones resuelto mediante la técnica de los elementos finitos. Lógicamente, los resultados obtenidos con un modelo de dos dimensiones no tienen toda la precisión que deberían. A partir de sus ejemplos concluye que la máxima tensión de flexión es un 18 % menor en un engranaje HTCR que en un engranaje convencional, y la tensión de contacto es un 19 % menor.

Uno de los últimos trabajos publicados donde consideran engranajes HTCR es el escrito por Chen [95] en el que propone un modelo general de análisis de la rigidez de la transmisión que incluye el efecto de errores de dientes, y establece la relación entre los errores de geometría y la rigidez total del contacto, el reparto de carga entre las diferentes parejas en contacto y el error de transmisión estático. Desarrolla dicho modelo tanto para grado de recubrimiento estándar como para transmisiones de alto grado de recubrimiento, con los que estudia el efecto de, además del error del perfil, la influencia de la potencia transmitida y el inicio de grieta, sobre el error de transmisión estático (LSTE).

## **1.2. Estudios y modelos de cálculo a presión superficial**

Entre los modos de fallo en engranajes recogidos en la literatura técnica los más frecuentes, con mucha diferencia respecto al resto, son: fallo por fatiga a flexión, fatiga superficial, desgaste y gripado. Existen múltiples factores que pueden incidir en el desencadenamiento de fallos en los sistemas de transmisión por engranajes, los cuales deben ser conocidos, para poder controlar sus efectos negativos sobre estos fenómenos. La norma AGMA [4] tiene contemplados más de una veintena de modos de fallo

agrupados en siete clases generales: desgaste, gripado, deformación plástica, fatiga por contacto, agrietamiento, rotura y fatiga por flexión.

Una de las causas de fallo que se presenta con mayor frecuencia es la fatiga superficial o picadura, que aparece progresivamente y termina alterando las características de la transmisión, introduciendo ruido, vibraciones y sobrecargas, que pueden llegar a alcanzar valores inaceptables.

El fallo por fatiga superficial se caracteriza por una especie de desmoronamiento en la zona de rodadura, en cuya superficie se produce desprendimiento de material, en forma de conos, muy característico de este fenómeno. Es una forma de deterioro habitual a través de la cual pequeñas partículas de material del flanco activo de los dientes se rompen y desprenden, normalmente en el dedendo del diente. La distribución de presiones en la superficie, en la región próxima al punto de contacto, crea un estado tensional en la subsuperficie del diente, que depende tanto de la geometría de los dientes en contacto como de las características de la lubricación. La máxima tensión de cortadura producida por esta distribución subsuperficial localiza el origen de la grieta, caso de rebasarse el valor de la tensión de fatiga admisible para los ciclos de carga establecidos. Esta grieta producida en la zona de mayor tensión, que puede estar a nivel superficial o cerca de la superficie, que produce su propagación de forma sensiblemente paralela a la superficie del diente, antes de dirigirse hacia esta, y, cuando ha crecido lo suficiente como para desprender una minúscula porción de material, produce una microrotura. Pueden aparecer diversas microroturas similares agrupadas produciendo una mayor. Es un proceso que acaba apareciendo, incluso a reducidos niveles de tensión, no es más que cuestión de tiempo. De ahí que el diseño tenga en cuenta este fenómeno y prevea una vida útil y de operación antes de la aparición de defectos. Asimismo, cuando se trabaja con aceros endurecidos, el riesgo de aparición de picaduras suele ser muy superior al de rotura, lo que determina la necesidad de un buen modelo de comportamiento, del que se puedan extraer predicciones fiables.

Existe un fenómeno particularmente severo de dañado superficial en el que se produce un arranque de material en forma de escamas producido por la soldadura entre

las superficies de los flancos, debido principalmente a la alta temperatura. Este fallo se denomina fallo por desgaste, gripado o *scuffing* y es más frecuente su aparición cuando las velocidades de deslizamiento son altas. El riesgo de fallo por desgaste varía con las propiedades de los materiales de los engranajes, la velocidad de deslizamiento, la rugosidad de los flancos, la carga y principalmente por el lubricante utilizado. Una vez iniciado este fenómeno, puede conducir a una degradación de la superficie de los flancos, con aumento de la pérdida de energía, sobrecargas dinámicas, ruido y desgaste, e incluso producir la rotura de los dientes si no se reduce la severidad de las condiciones de funcionamiento. En la mayoría de los casos, la resistencia de los engranajes a este fallo puede aumentarse utilizando un adecuado lubricante, incluso añadiendo aditivos con propiedades para presiones muy elevadas, aunque el uso de estos aditivos puede tener efectos secundarios adversos como corrosión, deterioro de elastómeros, etc. Las altas temperaturas de las superficies, debido a cargas elevadas y a altas velocidades de deslizamiento, pueden provocar la rotura de la película de lubricante. Para relacionar la temperatura con la rotura de la película de lubricante existen dos métodos distintos recogidos por la norma ISO/TR 13989, el método de flash de temperatura [2] y el método de la temperatura integral [3].

Todos estos fenómenos se han estudiado experimentalmente con bancos de ensayo dedicados a estudiar materiales y condiciones de lubricación, o bien, mediante modelos teóricos, normalmente apoyados en resultados obtenidos mediante la experimentación y técnicas de modelado numérico mediante la técnica de los elementos finitos. Para el estudio mediante métodos experimentales, suele ser habitual el empleo de bancos de ensayos, FZG [31], en los que piñón conductor y rueda conducida a ensayar, ambos con igual número de dientes, se montan en ejes paralelos, y se emplean grandes masas para producir el momento torsor a vencer por la transmisión durante su ensayo, a lo largo del cual se miden las tensiones y temperaturas producidas en las superficies de los dientes en contacto.

Mediante estudios experimentalmente, Blake [51] y Faure [54], modelizaron teóricamente la vida del engranaje como suma del tiempo de inicio de grieta y el tiempo

de su crecimiento hasta la producción de la picadura. Abersek [14] estableció incluso un modelo de dislocaciones para determinar el tiempo de origen de grieta. Cheng [70] estableció las condiciones de origen de grieta cuando existen entallas en la superficie.

En 2003 Krantz [83] realizó ensayos acelerados de fatiga superficial para comparar la vida en servicio de transmisiones de helicópteros con tratamiento y sin tratamiento superficial, obteniendo un número de ciclos, antes de la aparición de síntomas de fallo por fatiga, seis veces superior para las transmisiones con tratamiento superficial, comprobando que dicha diferencia es estadísticamente significativa. Tanto para los engranajes con superficie tratada, como para los que no la tuvieron, el proceso de engrane y los ciclos de funcionamiento hacen variar las propiedades de las superficies, ya que en ambos casos existe un proceso de pulido mutuo entre las superficies en contacto; lo que ocurre es que dicho proceso de micropulido o superacabado es mucho más veloz en los engranajes cuyas superficies fueron sometidas al tratamiento superficial, reduciendo en mucha mayor medida los efectos debidos a la interacción de la aspereza mutua de las superficies. En este sentido, los métodos de deposición han sido los más empleados, consiguiendo acabados de extraordinaria dureza superficial y muy bajos coeficientes de rozamiento. Los requerimientos cada vez más exigentes de la técnica aeroespacial para las transmisiones por engranajes se basan en altas densidades de potencia, larga duración y muy altas fiabilidades.

En 2007, Hedlund y Lehtovaara [34] realizan un estudio detallado del comportamiento de engranajes helicoidales sobre el ciclo de vida y el desgaste debido a la fricción. El estudio se centra en la modelización de contacto del engranaje helicoidal con deflexión diente. El modelo combina un análisis del contacto y un análisis mediante MEF.

Moldovean [28] estudia la influencia de diversos parámetros sobre la tensión de contacto y establece que el número de dientes del piñón, la relación de transmisión y el adendo del diente son los principales parámetros que influyen en la localización del punto de máxima tensión de contacto para engranajes cilíndricos. Además sugiere como recomendación el cálculo de la tensión crítica en el punto de rodadura y en los

dos puntos extremos del intervalo de contacto único.

La importancia de la composición del material utilizado, así como la influencia de los diferentes tratamientos en la resistencia a la fatiga del material y su dureza, e incluso los diferentes acabados o recubrimientos superficiales pueden variar cuantitativamente la resistencia a la fatiga de un engranaje y la probabilidad de la aparición de picaduras, *pitting*, o micropicaduras, *micropitting*, por ello numerosos autores han estudiado estos efectos [84, 18].

Para predecir el comportamiento del material frente a los fenómenos de fatiga, las normas internacionales de diseño, en particular las dos más extendidas, AGMA e ISO, formulan un modelo basado en la distribución de presiones de Hertz para el contacto entre sólidos. El contacto entre dos dientes de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, ya sean rectos o helicoidales, se produce siempre a lo largo de una línea recta, siempre que no existan errores de alineamiento o de otra naturaleza. Según esto, la presión de contacto en un punto cualquiera de la línea de contacto se puede determinar mediante la ecuación de Hertz para el caso de contacto entre cilindros paralelos, sin más que sustituir los radios de los cilindros por el radio de curvatura de los puntos de contacto del perfil normal equivalente.

Estas normas localizan el punto de máxima presión superficial y su valor, para a partir de ellos determinar el valor crítico de la tensión de cortadura en la subsuperficie y compararlo con la resistencia correspondiente. Como se ha explicado anteriormente, la carga normal se supone uniformemente distribuida a lo largo de la línea de contacto, cuya longitud varía a lo largo del engrane, y la resistencia se estima en función de la dureza del material y los ciclos de carga previstos, si bien, para facilitar los cálculos y a la vista de la proporcionalidad entre la tensión de cortadura máxima y la presión superficial en el punto de contacto, dichos valores de la resistencia se ven afectados de ese factor de proporcionalidad, para ser comparados directamente con la presión de Hertz en el punto de contacto. Sin embargo, los puntos donde las dos normas anteriores localizan la presión de contacto crítica no coinciden. Mientras ISO considera como punto crítico el punto de rodadura, AGMA toma, para engranajes

helicoidales, el llamado punto medio del piñón, que sólo coincide con el de rodadura cuando la distancia entre centros de funcionamiento coincide con la nominal, y para engranajes rectos el punto de contacto único inferior del piñón, que no coincide con el de rodadura más que en algunos casos muy particulares. Sin embargo la introducción de diversos factores corrigen los valores obtenidos aproximándolos a los valores obtenidos mediante experimentación, de forma que aunque el modelo no es preciso, estos ajustes proporcionan unos valores más eficaces.

Sin embargo, ninguna de las dos normas establecen claramente el método de cálculo de la tensión de contacto en engranajes rectos y helicoidales con alto grado de recubrimiento transversal. La norma AGMA [4, 8], directamente, no considera pares de engranajes con una relación de contacto transversal superior a 2. El ámbito de aplicación de la norma ISO [6], incluye dientes de engranaje cilíndricos con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5, sin embargo propone unos métodos de cálculo altamente conservadores y muy débilmente justificados.

### **1.3. Estudios a flexión y modelos de cálculo a rotura en la base**

Las tensiones de flexión pueden reducir la vida de los engranajes causando fallos catastróficos bajo picos de carga, es a lo que se denomina fallo por rotura en la base. La rotura se puede producir por sobrecarga, que produce una rotura violenta en la base del diente debido a la aplicación de cargas bruscas, como ocurre en prensas martillos u otras clases de máquinas de acción similar. Este fallo puede ser considerado como defecto de cálculo o de fabricación del engranaje. El otro tipo de rotura puede ocasionarse por la repetición constante de esfuerzos, que ocasiona la formación de grietas, que aumentan progresivamente hasta provocar la rotura. Este tipo de rotura también se puede dar como consecuencia de una repetición de esfuerzos no previstos, producidos por vibraciones u otro tipo de circunstancia, que obligan al engranaje a trabajar fuera de las condiciones previstas.

Desde los primeros trabajos de Lewis [87] en 1893, se han publicado numerosos trabajos y estudios sobre el cálculo de flexión en la base del diente [10, 39]. Lewis toma varias hipótesis de partida: la distribución de carga uniforme a lo ancho del diente, supone que el punto más desfavorable se da cuando la carga actúa en la cabeza del diente, y desprecia la tensión producida por la componente radial de la carga. Lewis llegó a la conclusión de que la sección en la que se produce la máxima tensión de flexión se encuentra en el punto donde el perfil del diente es tangente a una parábola cuyo vértice está situado en la intersección del eje diente y la línea de acción cuando la carga se aplica en la cabeza del diente.

Las normas americanas AGMA [4, 8] basándose en el modelo de Lewis, aplican la parábola de Lewis para determinar la sección crítica, sin embargo el modelo de AGMA considera las tensiones de compresión debidas a la componente radial de la carga, aunque mantiene la hipótesis del reparto uniforme de carga a lo largo de la línea de contacto. AGMA determina que, para una serie de casos específicos, las condiciones críticas de carga se pueden dar con la carga actuando en el punto de contacto único superior e introduce una serie de coeficientes de corrección de esfuerzos, para corregir los errores que se puedan dar de aplicar la ley de Navier a un diente de engranaje donde la distancia desde el punto de aplicación de la carga al punto de análisis de tensiones no es grande y dichos factores también corrigen los efectos debidos a la inclinación de la línea de aplicación de la carga. Para el estudio de los engranajes helicoidales, AGMA utiliza la geometría de un engranaje recto virtual equivalente, basada en un número virtual de dientes que depende del ángulo de hélice del engranaje helicoidal.

Los efectos de forma de diente, de concentración de esfuerzo, de posición de la carga y de distribución de la carga entre las líneas oblicuas de contacto en engranajes helicoidales se han agrupado en un solo factor geométrico de resistencia a la flexión, denominado factor J. Su determinación requiere la posición del punto crítico a flexión: el punto de tangencia de la parábola de Lewis y el perfil del diente. La localización de dicho punto era calculada de modo gráfico en las primeras versiones de la norma, estudios analíticos posteriores ofrecían como resultado interminables tablas para casos

concretos de diseño, o procesos en los que se requieren cálculos iterativos sólo abordables mediante uso del ordenador. En cualquier caso, la norma actual de diseño ofrece una solución poco flexible basada en tablas de resultados aplicadas a un número limitado de combinaciones de diseño.

Sin embargo, Fuentes [10, 39] desarrolló un método iterativo aproximado para la determinación del parámetro de la sección crítica, mucho más sencillo que el anterior, y que asegura la convergencia al resultado exacto con la precisión que se desee. Además, estableció unas correlaciones a partir de las tablas anteriores que, si bien no aproximan con precisión dicho parámetro, tomándose como valor de partida del método aproximado, arrojan resultados con una precisión superior al 99 % con un solo bucle, es decir, sin iteración. Por otro lado, el método propuesto por AGMA encuentra el punto de tangencia de la parábola de Lewis con la trocoide del pie del diente. Sin embargo, Fuentes demostró que existen casos en los que la tangencia con el perfil se produce en la zona de evolvente, para los cuales el método no es válido, pues la tangencia con la trocoide se produce en un punto imaginario, que no es del perfil. A este respecto, Fuentes, en su tesis [10], establece la condición de tangencia en el perfil de evolvente, y propone un método para la determinación de la tensión en este caso, encontrando que en esta situación, la sección crítica viene definida por el punto de entronque de los dos perfiles del diente, evolvente y trocoide, y que la tensión se puede determinar analíticamente.

La norma ISO [7] plantea el cálculo a flexión de engranajes rectos y helicoidales, partiendo de unas hipótesis similares a las normas americanas: desprecia la tensión producida por la componente radial de la carga, establece como sección crítica del diente en la que aparece la tensión máxima aquella cuya tangente al perfil forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje del diente, y para los cálculos de engranajes helicoidales considera la geometría del engranaje recto virtual equivalente. Se adoptan igualmente una serie de factores de corrección: por concentración de tensiones, sobrecargas de aplicación, sobrecargas dinámicas, desigual distribución de carga a lo ancho del diente, desigual reparto entre los dientes en contacto simultáneo, duración, fiabilidad, tamaño,

sensibilidad a la entalladura y rugosidad. Define un factor denominado factor de forma que utiliza para englobar los mismos efectos que engloba el factor J de AGMA. Para engranajes helicoidales, la tensión de flexión nominal se corrige además por un factor de inclinación, que tiene en cuenta el hecho de que la longitud de la línea de contacto es, en engranajes helicoidales, superior al valor del ancho de cara.

Los métodos propuestos tanto por AGMA como por ISO, exigen un complicado proceso de introducción de la información y la obtención de resultados intermedios y coeficientes de corrección y ponderación, la mayoría de los casos mediante el empleo de tablas y ábacos.

El estudio del desplazamiento elástico producido en el punto de aplicación de la carga constituye la base para determinar la rigidez del diente. Este desplazamiento engloba las deformaciones de ambos dientes, de la unión de ambos y del eje. Los estudios teóricos se enfocan hacia la propia deformación del diente y de su rueda por separado, comparándolos posteriormente con modelos realizados por elementos finitos. Al igual que el estudio del análisis de tensiones es de vital importancia, también lo son el estudio en los errores de transmisión, en la predicción de ruido y cargas dinámicas, para de este modo evitar la rotura ocasionada por la repetición constante de esfuerzos.

Determinados estudios se han focalizado en estudiar modelos de comportamiento de dientes, que toman en consideración la deformación del diente y la energía de deformación acumulada. Existen estudios referidos a un solo diente o a una pareja de dientes en contacto, en los que se aborda el análisis de las tensiones de contacto y la rigidez del sistema. Los modelos suelen realizarse con un único grado de libertad rotacional, en el que las únicas deformaciones consideradas son las debidas a la flexión del diente. Una de los primeros investigadores acerca de este tema fue Harris [75] que empleó modelos fotoelásticos para tratar los errores de transmisión y considera los errores de tallado, la variación de la rigidez en el proceso de engrane y no linealidades en el mismo como fuentes de excitaciones dinámicas. Posteriormente se comenzaron a usar modelos matemáticos del engrane de múltiples grados de libertad torsional y se

sugiere que la calidad de la transmisión se encuentra determinada principalmente por los errores de transmisión más que por los errores de tallado.

Posteriormente se presentaron estudios sobre modelos dinámicos de la transmisión que permiten estudiar tanto la flexión y la torsión del eje, como la rigidez a flexión de los dientes y el efecto de los apoyos. Estos modelos incluyen la rigidez de estas partes y su efecto en la variación de la rigidez del conjunto a lo largo de la línea de engrane [76]. Cornell [69] obtuvo la relación entre las curvaturas de los dientes en el punto de contacto y la variación de las tensiones en la base en engranajes rectos, así como la respuesta dinámica de la transmisión en función de la posición de engrane. Estos análisis tensionales, basados en las características elásticas de los dientes y en las ecuaciones de los perfiles en contacto, obtuvieron buenos resultados comparativos frente a los resultados obtenidos mediante ensayos y análisis de modelos de elementos finitos. Umezawa [1] desarrolla un nuevo método, de base analítica, para predecir las vibraciones en una pareja de dientes de engranajes cilíndrico helicoidales y posteriormente, en 1987, Umezawa [53] desarrolló un modelo de comportamiento dinámico.

El avance de las tecnologías ha permitido realizar estudios con herramientas informáticas más complejas que permiten la implementación de la técnica de los elementos finitos o simulaciones en programas de simulación y cálculo matemático y simbólico de propósito general, como *Matlab* y *Simulink*, que permiten el modelizado de excitaciones dinámicas y el estudio de efectos acoplados de vibraciones a flexión y torsión. En 2001, Howard [32] emplea *Matlab* y *Simulink* para realizar un modelo simplificado para analizar la influencia del rozamiento en el proceso de engrane sobre el comportamiento vibratorio de una caja de engranajes y realiza una comparación de los resultados obtenidos con y sin el efecto de las fuerzas de rozamiento propuestas. En 2002, Cheng [90] examina la tensión de contacto y la tensión de flexión en un engranaje helicoidal, incluyendo el contacto de los rodamientos, mediante un análisis de elementos finitos. Presenta además varios ejemplos para demostrar la influencia de los parámetros de diseño del engranaje sobre la distribución de tensión en diferentes

posiciones de contacto.

En 2003, Deng [24] estudia para aquellas transmisiones que sólo funcionan en una única dirección, donde siempre engrana el mismo lado del diente, la influencia de la utilización de un perfil asimétrico sobre las tensiones de flexión del diente. Realiza varios ejemplos utilizando diferentes ángulos de presión estándar para cada lado del diente. Calcula tanto la tensión en la base del diente como la resistencia a flexión mediante la técnica de los elementos finitos. Los resultados del estudio predicen que con la utilización de ángulos de presión mayores en la parte posterior del diente, aumenta la sección crítica del diente y disminuye considerablemente la tensión crítica de flexión, además la resistencia a flexión en el diente se incrementa uniformemente, aunque esto no provoca cambios significativos en la distribución de carga. Por otro lado, Kapelevich [11] mediante un análisis de elementos finitos, concluye que las modificaciones del perfil en la base del diente pueden reducir las tensiones críticas debidas a la flexión entre un 10 % y un 30 %.

En el año 2010, Pedersen [63] estudia la unión conjunta de estos dos efectos: la utilización de perfil asimétrico con diferentes ángulos de presión en cada lado del diente, que provoca un aumento de la sección crítica, y la modificación del perfil en la base, que produce un cambio de la forma en la base del diente donde se producen concentraciones de esfuerzos. A través de una herramienta de optimización calcula los ángulos de presión óptimos para cada transmisión, con los que la tensión crítica de flexión puede llegar a reducirse hasta un 44,3 % y propone unos valores de ángulo de presión estándar. Sin embargo, determina que para transmisiones con alto número de dientes la diferencia entre la utilización de los ángulos de presión estándar y los óptimos no da diferencias significativas. Aunque ninguno de estos tres autores considera un modelo analítico con distribución de carga no uniforme.

Del mismo modo, Wang [92] realizó una completa revisión de los conceptos básicos, modelos matemáticos y métodos de solución para el estudio de la dinámica no lineal en engranajes utilizados hasta la fecha, prestando especial atención a la holgura angular y a la variación de la rigidez a lo largo de la línea de engrane. En 2006

Kawalec [12] desarrolló un análisis comparativo de la tensión en la base del diente con los métodos de evaluación dados por ISO y AGMA, verificándolo mediante el método de elementos finitos. Posteriormente, Li [71] estudió la tensión de contacto y la resistencia a flexión para engranajes rectos con errores de mecanizado, errores de montaje y modificaciones en los dientes mediante un modelo de tres dimensiones de MEF.

En 2010, Raptis [52] comparó los resultados de máxima tensión en la base de un diente helicoidal cuando se carga en su punto más desfavorable (punto de contacto único superior) utilizando tanto métodos numéricos y como métodos experimentales. Utiliza el MEF para el análisis de tensión numérica y aplica la fotoelasticidad para la investigación experimental para la obtención de la tensión. Sin embargo, sólo estudia engranajes convencionales.

Otros estudios realizan un modelo completo de la caja de engranajes, lo que supone una mayor complejidad. Las cajas de cambios es el mecanismo más importante en la maquinaria industrial, especialmente en aplicaciones de automoción, así como en cualquier aplicación cotidiana en la que haya que transmitir energía cinética, proporcionar cambios de velocidad de rotación y/o cambiar la dirección de un movimiento. Las vibraciones en las parejas de engranajes habitualmente se producen debido al cambio en la potencia instantánea transmitida, o al cambio de la velocidad de transmisión, incluso por las excitaciones internas debidas a las variaciones de rigidez del sistema mecánico de transmisión. En lo que respecta a transmisiones por engranajes, aparecen cargas cíclicas de excitación variables en el tiempo, dependientes de la velocidad de rotación, debidas a la rigidez instantánea, variable en cada instante, de las parejas de dientes en contacto, y debidas a errores de transmisión.

En 1991, Lim y Singh [82] realizan estudios dinámicos de cajas completas en los que estudian el efecto de la rigidez en cajas y acoplamientos. Posteriormente, Sabot y Perret-Liaudet [36] presentan un estudio del análisis del ruido en cajas de engranajes: la función de errores de transmisión en engranajes se analiza como una de las principales fuentes de ruido y vibraciones, que se extiende por todo el sistema

mecánico, hasta el habitáculo de vehículos automóviles o la cabina de camiones. En 2008, Hotait y Kahraman [60] utilizan un banco ensayos que consta de 2 pares de engranajes soportados por un par de rodamientos de rodillos de bolas, todo ello lubricado mediante inyección para reducir al mínimo los efectos adversos de fricción, para estudiar la influencia combinada de errores de alineación de los ejes y el rebaje del perfil en la cabeza del diente en la distribución de carga y en la tensión de flexión del diente.

Mucho más complicado es encontrar estudios sobre la tensión de flexión en engranajes HPCR. En 1998 Lin [30] estudió el efecto del grado de recubrimiento sobre el comportamiento dinámico de un sistema de engranajes rectos. El incremento del grado de recubrimiento se consiguió con el aumento de la cabeza del diente. Lin demostró que la tensión dinámica aumenta a medida que se incrementa el grado de recubrimiento transversal, pero cuando el grado de recubrimiento llega a 2 la tensión dinámica disminuye considerablemente, obteniéndose valores mucho menores para todo el rango de grado de recubrimiento entre 2 y 2,4. Por tanto, los efectos dinámicos son muchos mayores para engranajes convencionales que para engranajes HPCR. En engranajes convencionales los efectos dinámicos mejoran y se obtienen resultados óptimos para grados de recubrimiento muy próximos a 2, sin embargo, para engranajes HPCR, el valor óptimo de grado de recubrimiento depende de la velocidad de operación. A altas velocidades la respuesta dinámica del sistema está mucho menos influenciada por el grado de recubrimiento que a bajas velocidades.

En 2008 Li [72] estudia la influencia que tiene la variación del adendo de los dientes en la tensión debida a flexión en la base del diente y establece que la tensión por flexión en la base del diente se incrementa si se aumenta el adendo del diente y el grado de recubrimiento transversal no cambia. Pero se puede reducir cuando se incrementa este grado de recubrimiento, aunque esto no garantiza que se compense el efecto del incremento de tensión debido al aumento del adendo. La tensión de contacto prácticamente no varía si se aumenta el adendo pero se mantiene el grado de recubrimiento. Pero se reduce significativamente, si se incrementa el número de

dientes en contacto a través del incremento del adendo.

En lo que se refiere a las normas internacionales con respecto a modelos de cálculo de flexión, al igual que ocurre para presión superficial, AGMA no considera engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, y establece de forma explícita que los métodos de cálculo que presenta no son aplicables a este tipo de transmisiones. La versión de la norma ISO [7] recomienda calcular la tensión con la totalidad de la carga aplicada en el punto inferior del intervalo de contacto triple para engranajes con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5. Este procedimiento no es demasiado conservador, incluso no siempre el error cometido será en el sentido de la seguridad. En todo caso, el procedimiento está muy débilmente justificado y habrá de ser objeto de revisión en las siguientes versiones de la norma.

## **1.4. Modelos de pérdidas y estimación del rendimiento**

Los sistemas de transmisión de potencia por engranajes son conjuntos de muy alto rendimiento en los que las pérdidas de energía, en relación a la transmitida, es muy pequeña, sin embargo, las pérdidas de energía de los sistemas de transmisión de engranajes se están convirtiendo en un tema de investigación cada vez más importante debido a la regulación ambiental, cada vez más estricta, al aumento de precio de los combustibles y por su influencia significativa en los costes de funcionamiento directos y en el ciclo de vida del sistema. El aumento de la eficiencia de los engranajes permite el ahorro de combustible en un vehículo al mismo tiempo que se reducen las emisiones de carbono. Una mejor eficiencia reduce la demanda de lubricación y disminuye la generación de calor dentro del sistema, lo que afecta positivamente a la mayoría de los modos de fallo, como el fallo por desgaste y el fallo por fatiga superficial.

Los engranajes son ampliamente utilizados en muchas aplicaciones, para transmitir potencia y movimiento de rotación de un eje a otro. En este proceso, parte de la energía se pierde inevitablemente debido a la fricción entre las superficies en contacto y la fricción causada por la atmósfera alrededor de los engranajes. La pérdida total de eficiencia en un sistema de engranajes se debe a pérdidas por fricción de deslizamiento

y de rodadura por el contacto entre las superficies de los engranajes y de los cojinetes, las pérdidas *windage* o las pérdidas derivadas a las interacciones complejas con el aire que rodea a los engranajes, pérdidas denominadas *oil churning* o pérdidas por las turbulencias creadas por el batido del aceite que producen pérdidas en el interior de la caja de cambios. Mientras que las pérdidas *windage* y *oil churning* se encuentran mayormente relacionadas con la geometría y velocidad, y son por tanto, independientes de la carga, existen otras pérdidas, que son las pérdidas por fricción, que se asocian principalmente con velocidades de deslizamiento y con las condiciones de carga.

### 1.4.1. Pérdidas debidas a efectos rotacionales

Las pérdidas de energía debidas a los efectos rotacionales están directamente relacionadas con el método de lubricación. Estas pérdidas se dividen en las pérdidas *windage* o las pérdidas derivadas debido a las interacciones complejas con el aire que rodea a los engranajes, y en las pérdidas denominadas *oil churning* o pérdidas por las turbulencias creadas por el batido del aceite que producen pérdidas en el interior de la caja de cambios.

Las pérdidas de tipo *oil churning* aparecerán cuando los elementos rotacionales se encuentran parcialmente sumergidos en un baño de lubricante, que es a lo que se denomina lubricación por inmersión o barbotaje. Es el método de lubricación más simple, el cárter está inmerso en un baño de lubricante en el que está inmersa la parte inferior de una de las ruedas, que por su rotación proyecta el lubricante sobre la otra rueda y a través de conductos de lubricación sobre los cojinetes. En este tipo de lubricación el aceite está continuamente agitado y, por tanto, las impurezas que se crean y no son eliminadas, circulan continuamente entre los dientes de los engranajes.

Una alternativa a la lubricación por barbotaje es la lubricación por inyección, que se utiliza cuando la capacidad térmica del reductor es insuficiente o cuando las condiciones de velocidad no permiten el otro tipo de lubricación. En la lubricación por inyección el aceite se proyecta sobre la zona de engrane por medio de unas pipetas de inyección. Las pérdidas en este tipo de lubricación se denominan pérdidas *windage* y

se atribuyen a las pérdidas debida a la compresión e interacción de la mezcla de aceite-aire que rodea a los engranajes y a las pérdidas por arrastre debido a la resistencia del aire que rodea a los engranajes

La lubricación por barbotaje se utiliza a menudo en cajas de cambio para transmisiones de automóviles de menor velocidad o en aplicaciones industriales. Cuando las velocidades de operación son relativamente altas se utiliza la lubricación por inyección, al ser la velocidad es significativamente mayor no se permite la acumulación de aceite dentro de la caja de cambios y así se evitan las pérdidas de tipo *oil churning*.

En general, el método de lubricación determina el tipo de pérdida de potencia dominante, aunque existen excepciones. Petry-Johnson [79] demostró experimentalmente que en la lubricación con barbotaje con bajo nivel de aceite pueden existir significativas pérdidas de tipo *windage*, debido a que las gotas de lubricante que se desprenden de los dientes de engranaje debido a las fuerzas centrífugas, crean una fina capa de aceite que se queda suspendida dentro de la carcasa del engranaje. El efecto de este aceite aumenta la resistencia de fricción de *windage*.

Ambos tipos de pérdidas rotacionales implican complejos fenómenos hidrodinámicos que son difíciles de describir mediante formulaciones analíticas. Como resultado, la mayoría de los modelos publicados o fórmulas se basan en análisis dimensional o en datos experimentales. Esto significa que dichos modelos sólo serán válidos en muy estrictas condiciones de contorno. Hasta ahora estos fenómenos son conocidos y descritos en el campo de la investigación de engranajes, sin embargo existe todavía un debate sobre cuáles son los parámetros que tienen el mayor efecto sobre este tipo de pérdidas.

En 2009, Seetharaman [73] examinó los diferentes parámetros de diseño para cuantificar el impacto en las pérdidas rotacionales en la lubricación por barbotaje. Los experimentos muestran que el aumento de la velocidad conduce a un aumento en las pérdidas por fricción. El aumento de la viscosidad a bajas velocidades conduce a una mayor pérdida, mientras que disminuye las pérdidas para velocidades más altas,

pero este efecto es bastante limitado. La anchura de los engranajes y la dirección de rotación también juegan un papel importante al aumentar la velocidad. La duplicación de la anchura puede conducir a un aumento de 100 % de la pérdida de potencia. A velocidades de hasta 6000 rpm la dirección de rotación puede amplificar las pérdidas hasta un 40 %.

En el trabajo publicado en 2010, Stavitsky [85], hace una revisión de los modelos de pérdidas de potencia independientes de la carga. Los investigadores coinciden en que el módulo del diente tiene poca influencia sobre las pérdidas de tipo *oil churning* y reconocen el importante papel de la velocidad.

Sin embargo, en el estudio mencionado anteriormente [79], Petry-Johnson demuestra que los cambios en el módulo del engranaje tienen un gran impacto en las pérdidas totales, mientras que el ancho de cara es de menor importancia. Es fácil entender que el tipo de mezcla de aceite/aire influye en la compresión entre los dientes y, por lo tanto, la densidad del aceite tiene un efecto significativo en la eficiencia.

Desde que la lubricación por inyección se utiliza para aplicaciones de alta velocidad, la velocidad es sin duda el factor más dominante. Cuando la carga es pequeña, las pérdidas *windage* dominan la pérdida total de una caja de cambios.

Los modelos más conocidos sobre pérdidas de tipo *oil churning* son válidos para casos específicos. Terekhov en 1975 [13] llevó a cabo numerosos experimentos con lubricante de alta viscosidad (200-2000 Cst), baja velocidades de rotación y engranajes con módulo de 2 a 8 mm. La expresión analítica que propone se basa en el análisis dimensional y difiere de acuerdo con el régimen de flujo. La investigación llegó a la conclusión de que las pérdidas son independientes de la geometría del diente y sólo dependen débilmente de la viscosidad del lubricante. Lauster y Boos (1983) [22] utilizan un enfoque similar pero para el caso específico de una transmisión de camiones. Adoptan la misma ecuación que Terekhov, pero alteran uno de los coeficientes al correlar las fórmulas con sus propios experimentos. Changenet [15] llevaron a cabo los mismos experimentos, ya que dudaban de la insignificante influencia de los módulos. Finalmente utilizan la misma ecuación para el cálculo de las

pérdidas, pero la investigación dio como resultado una nueva expresión del coeficiente correlado por Lauster y Boos.

Con respecto a los modelos más utilizados para el cálculo de las pérdidas por *windage*, Dawson [64, 65] propone una ecuación que se basa en una formulación empírica obtenida a través de una serie de experimentos a baja y media velocidad. Handschuh [68] centró su investigación en engranajes helicoidales a alta velocidad, llegando a la conclusión de que las pérdidas por *windage* es la fuente más dominante de pérdidas de energía en aplicaciones a alta velocidad y baja carga. También examina el efecto de la rugosidad y hace evidente que su influencia no puede ser despreciada. Petry-Johnson [79] propone una ecuación con un mínimo de parámetros, pero no reconoce la influencia del módulo sobre las pérdidas, por consiguiente, no alcanza una buena estimación para la mayoría de los casos.

### 1.4.2. Pérdidas mecánicas

Las pérdidas mecánicas se componen de pérdidas por deslizamiento y pérdidas por rodadura.

Las pérdidas por deslizamiento se deben a por las asperezas de las superficies en contacto y el cizallamiento del fluido. Su valor instantáneo es una función de la velocidad de deslizamiento y la fuerza de fricción, mientras que la fuerza de fricción es una función de la carga instantánea del diente y el coeficiente instantáneo de fricción. La magnitud de la velocidad de deslizamiento depende de la posición de contacto a lo largo de la línea de contacto y se define como la diferencia entre ambos vectores de velocidad de los engranajes. Estas pérdidas son la principal fuente de pérdidas mecánicas.

Las pérdidas por resistencia de rodadura resultan de la resistencia del fluido viscoso a la rodadura en la zona de contacto de engrane de los dientes. Cuando los dientes engranan, una película de lubricante elastohidrodinámica se produce entre los dientes en contacto. La pérdida de rodadura se define como el producto de la fuerza de fricción de rodadura y la velocidad media de los engranajes. En la mayoría de los casos, este

tipo de pérdidas se consideran secundarias y se desprecian.

Las pérdidas mecánicas son más fáciles de modelar que las debidas a efectos rotacionales. La geometría de los engranajes juega un papel muy importante, ya que tiene un impacto directo sobre la velocidad y la dirección de la carga. El coeficiente de fricción viene determinado principalmente por el lubricante, la rugosidad de los engranajes, la carga y la geometría de los engranajes en contacto.

Durante más de un siglo, pero especialmente durante los últimos cuarenta años, el interés de muchos investigadores se ha centrado en el análisis de este tipo de pérdidas y en la determinación del coeficiente de fricción; por lo que se pueden encontrar numerosas publicaciones acerca de este tema, que se pueden agrupar según tres enfoques diferentes. Algunos autores se han centrado en la medición directa de la eficiencia sobre engranajes reales o mediante resultados experimentales sobre bancos de ensayos. Otra serie de autores ha realizado una predicción de la eficiencia basándose en coeficientes de fricción constantes o empíricos. Un último grupo de investigaciones están basadas en la predicción analítica de la eficiencia mediante el cálculo de coeficiente de fricción utilizando un modelo de lubricación elastohidrodinámica (EHL).

Los modelos más simples de eficiencia de engranajes disponibles en la literatura técnica [29, 21, 26, 81, 25, 91] toman como hipótesis un coeficiente de fricción constante y una distribución de carga uniforme a lo largo de la trayectoria de contacto. Ninguna de las dos hipótesis es realista, sin embargo están justificados por los altos niveles de eficiencia que posee una transmisión de engranajes y porque en el pasado no se requerían cálculos demasiado precisos. Sin embargo, los errores inducidos por suponer una distribución de carga uniforme puede llegar a ser altos, en particular, si los errores se expresan en términos de pérdidas de potencia. El enfoque de suponer un coeficiente de fricción constante, aunque puede resultar útil como modelo preliminar para comprender los efectos de la geometría del engranaje en la pérdida de potencia, no tiene en cuenta varios parámetros que afectan a un contacto típico de engranajes.

Ciertos estudios experimentales [80, 81, 17, 78] se han centrado en la medición de

las pérdidas de energía de los sistemas de engranajes, demostrando que las pérdidas de potencia en un engranaje están influenciadas por un gran número de factores, como el método de lubricación y los parámetros del lubricante, la velocidad de operación, las condiciones de carga y temperatura, la rugosidad de las superficies en contacto, así como diversos parámetros de diseño de los engranajes.

Otra serie de estudios adoptaron un modelo de contacto más simple, empleando un par de discos cilíndricos (*twin-disks*) para medir el coeficiente de fricción, bajo unas ciertas condiciones simulan el contacto entre dos engranajes, y obtuvieron fórmulas empíricas del coeficiente de fricción como función de un gran número de parámetros, como las velocidades de deslizamiento y rodadura, parámetros relacionados con la carga por unidad de longitud o la presión de contacto, la rugosidad de las superficies en contacto, la viscosidad del lubricante y los radios de curvatura de las superficies en contacto. Dichas fórmulas son muy conocidas en la actualidad y ampliamente utilizadas, tales como la obtenida por Misharin [93], Benedict y Kelley [27], O'Donoghue y Cameron [50] y Drozdov y Gavrikov [94]. Sin embargo, las velocidades de deslizamiento incluidas en estas fórmulas empíricas son normales a la línea de contacto y uniformes a lo largo de ella, puesto que en el contacto entre dos discos no hay deslizamiento en la dirección de la línea de contacto; por consiguiente, estas fórmulas basadas en experimentos de doble disco pueden aplicarse al contacto entre un par de engranajes rectos pero no se pueden utilizar en otro tipo de engranajes, como los helicoidales.

Otro enfoque es incluir, directamente, el comportamiento de lubricación elastohidrodinámica en el modelo. Xu [89] propuso una metodología para la predicción de la eficiencia mecánica basada en la EHL utilizando el modelo dado por Cioc [16] para predecir el coeficiente de fricción para cada combinación de parámetros de contacto considerada, y aplicó un análisis de regresión lineal para la obtención de una única fórmula del coeficiente de fricción. Esta formulación incluye parámetros importantes como las velocidades de rodadura y de deslizamiento, los radios de curvatura, la viscosidad del lubricante y la rugosidad de las superficies. En 2009,

Vaidyanathan [86] propone una metodología para la medición tanto de las pérdidas dependientes de la carga como las independientes. Realiza una serie de experimentos en los cuales mide las pérdidas de potencia a varias velocidades de rotación y valores de par sobre un conjunto de engranajes helicoidales con diversos módulos, ángulos de presión y ángulos de hélice, lubricados mediante inyección.

Los estudios de eficiencia en engranajes HTCR que se pueden encontrar en la literatura técnica son bastante escasos. En 1984, Anderson realizó un estudio para la NASA [62] sobre la influencia de la modificación de la altura del diente y de la distancia entre centros, y el efecto que tenía sobre la potencia perdida. Este estudio concluyó que este tipo de engranajes pueden reemplazar a los engranajes convencionales con un incremento modesto de la energía perdida a pesar del aumento que conllevan estos engranajes en las velocidades de deslizamiento. La mejor manera de conseguir altos grados de recubrimiento transversal es disminuyendo el ángulo de presión y aumentando el adendo de los dientes, lo que conlleva un aumento de la potencia perdida.

En 2003 [74], Mohanty sugiere un método analítico para calcular la distribución de carga de dientes de alto grado de recubrimiento transversal durante el ciclo de engrane. Con este método estudia la influencia sobre el deslizamiento del aumento del grado de recubrimiento a través del incremento del adendo de los dientes. Comprueba que, con grados de recubrimiento menores y con el aumento del adendo, el deslizamiento en este tipo de engranajes se incrementa.

En 2007 Basan [67], realizó un análisis sistemático de diversas combinaciones de parámetros geométricos de engranajes HTCR con el fin de establecer una base para la cuantificación de la influencia del ángulo de presión normal y el adendo del diente sobre las tensiones en la base del diente y establecer la cuantía de las pérdidas por fricción debido al deslizamiento entre los perfiles de los dientes que engranan. Los resultados obtenidos demuestran que a través de una elección óptima de estos parámetros se puede mantener el grado de recubrimiento transversal y conseguir, incluso, una disminución de la tensión de flexión y las pérdidas por fricción.

## Capítulo 2

# Geometría del perfil de evolvente

En el presente capítulo se van a estudiar los engranajes con geometría de perfil de evolvente, sus relaciones geométricas y de funcionamiento. Las relaciones geométricas dependen de las propiedades de la herramienta de tallado y de su posición relativa respecto del cilindro tallado. Por el contrario, las relaciones de funcionamiento dependen no sólo de la geometría de ambas ruedas por separado, también del tipo de transmisión que forman.

Se comenzará el capítulo definiendo las propiedades de la curva evolvente de circunferencia, así como la generación de este perfil y sus ecuaciones paramétricas. A continuación se analizará la geometría de la rueda tallada a partir de los parámetros geométricos de la herramienta que la talla. El estudio se restringirá al tallado mediante cremallera.

A continuación se determinarán las ecuaciones del perfil del diente que la herramienta genera en el tallado, tanto por encima del radio de base, cuyo perfil corresponde a la ecuación de una curva evolvente, como por debajo del mismo, el cual corresponde a una curva denominada trocoide. Además se presentarán los principales problemas que surgen durante el tallado: penetración y apuntamiento. Posteriormente se tratará el engrane de ruedas con dentadura de perfil de evolvente, definiendo los conceptos de intervalo de contacto, grado de recubrimiento y condición de no interferencia.

Por último, se analizará el fenómeno de la penetración de engranajes, estableciendo las condiciones a partir de las cuales ésta puede aparecer y analizando, posteriormente, el caso particular de transmisiones con engrane en vacío.

Se aborda inicialmente el estudio de engranajes rectos para, a continuación, generalizar al caso de engranajes helicoidales, considerándolos como una sucesión de infinitos engranajes rectos de espesor diferencial. Cada uno de estos infinitos dientes rectos de espesor diferencial estará en contacto en un punto de radio diferente a los anteriores y posteriores, por lo que dicho radio de contacto, y por tanto, el correspondiente potencial de deformación será diferente para cada punto de la línea de contacto.

## 2.1. La evolvente de circunferencia

La evolvente de circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos de un plano que verifican que la tangente por ellos a una circunferencia, llamada circunferencia de base, define un punto de tangencia que dista del punto considerado una distancia igual a la longitud del arco de la circunferencia base limitado por el punto de tangencia y uno dado de la circunferencia. Es decir, en la figura 2.1, los puntos  $P$  de la evolvente cumplen que la distancia  $\overline{QP}$  es igual al arco  $QP_0$ .

El punto  $P_0$  es el punto de la evolvente a partir del cual se inicia la misma y se le denominará origen de evolvente. El perfil de evolvente puede ser generado por un punto  $P$  de una recta que rueda sin deslizar sobre la circunferencia de base de radio  $r_b$ , llamado radio de base.

Si se definen unos ejes cuyo origen de radios está en el centro de la circunferencia de base, y su origen de ángulos en la recta que pasa por el origen de radios y el origen de evolvente, las ecuaciones paramétricas de cualquier punto  $P$  de la evolvente en coordenadas polares vienen dadas por las ecuaciones:

$$\rho = \sqrt{r_b^2 + r_b^2 \theta^2} = r_b \sqrt{1 + \theta^2} \quad (2.1)$$

$$\beta = \theta - \text{arc tg } \frac{r_b \theta}{r_b} = \theta - \text{arc tg } \theta \quad (2.2)$$

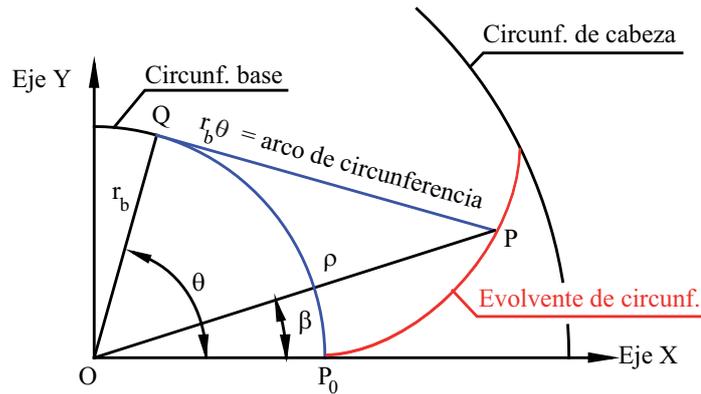


Fig. 2.1: Evolvente de circunferencia.

donde  $r_b$  es el radio de base, y  $\theta$  es el ángulo que abarca el arco de circunferencia limitado por el origen de la evolvente  $P_0$  y un punto cualquiera de la circunferencia de base  $Q$ .

Se puede demostrar [37] que la tangente a la evolvente en un punto es paralela al radio del punto de la circunferencia de base que define el punto de la evolvente; por consiguiente la normal a la evolvente coincidirá con la normal al radio, y por tanto con la tangente de la circunferencia, de modo que se puede decir que la normal a una evolvente en un punto de la misma es siempre tangente a la circunferencia de base, como se observa en la Fig. 2.1.

El radio de curvatura de la evolvente en un punto es igual al arco de la circunferencia de base entre el origen de la evolvente y el punto de la misma que define el punto considerado del perfil [37]. Entonces, si se tiene presente la definición dada de la evolvente, se concluye que el radio de curvatura de la evolvente en un punto es igual a la distancia del mismo al punto en que la normal por él es tangente a la circunferencia de base

### 2.1.1. Longitud de la evolvente entre dos puntos

Si se toman como partida las ecuaciones paramétricas de la evolvente y se deriva respecto del parámetro  $\theta$ , se obtiene:

$$d\rho = r_b \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta \quad (2.3)$$

$$d\beta = \left(1 - \frac{1}{1 + \theta^2}\right) d\theta = \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} d\theta \quad (2.4)$$

empleando la expresión del elemento diferencial de curva en coordenadas polares

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\beta^2 = \left(r_b^2 \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} + r_b^2 (1 + \theta^2) \frac{\theta^4}{(1 + \theta^2)^2}\right) d\theta^2 = r_b^2 \theta^2 d\theta^2 \quad (2.5)$$

$$dl = r_b \theta d\theta \quad (2.6)$$

lo que permite expresar la longitud de la evolvente entre dos puntos de dos maneras diferentes

- en función del ángulo  $\theta$  de cada punto

$$dl = \frac{r_b}{2} d(\theta^2) \quad (2.7)$$

$$l = \frac{r_b}{2} (\theta_2^2 - \theta_1^2) \quad (2.8)$$

- en función de los radios polares de cada punto

$$\theta^2 = \frac{\rho^2}{r_b^2} - 1 \quad (2.9)$$

$$d(\theta^2) = \frac{1}{r_b^2} d(\rho^2) \quad (2.10)$$

de manera que

$$dl = \frac{1}{2 r_b} d(\rho^2) \quad (2.11)$$

$$l = \frac{1}{2 r_b} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \quad (2.12)$$

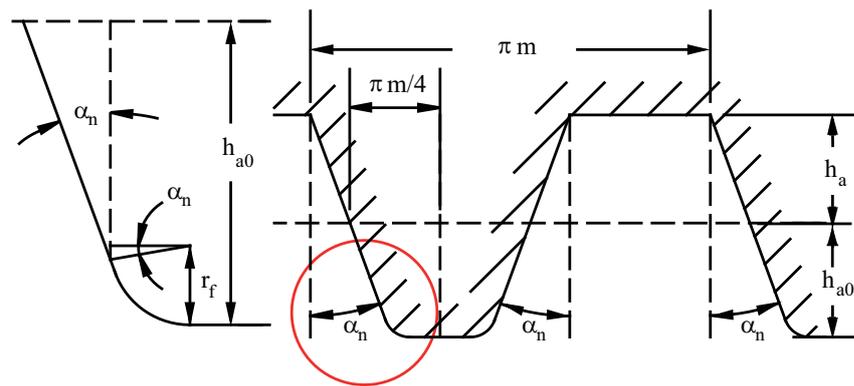


Fig. 2.2: Geometría de la herramienta de tallado.

## 2.2. Tallado de ruedas dentadas con cremallera

Los dientes de perfil de evolvente se pueden tallar mediante herramientas de perfil rectilíneo, en las que la herramienta de corte avanza a medida que la rueda gira sobre su centro. De entre los diversos tipos de tallado de engranajes por generación, se estudiará el tallado con cremallera, en el cuál la herramienta tiene forma de cremallera y su modulo va a ser el mismo que el del engranaje a tallar. El movimiento de corte de la herramienta es un movimiento de vaivén en la dirección del eje del cilindro base para engranajes rectos y para engranajes helicoidales con un determinado ángulo respecto del eje. Con este método se generan las dos caras del diente simultáneamente. Además existe otro movimiento, en donde la rueda que se quiere tallar se mueve como si estuviera engranando con la superficie generadora, por consiguiente, el perfil obtenido en la rueda será un perfil conjugado del de la superficie generadora, o sea, un perfil de evolvente.

### 2.2.1. Geometría de la cremallera

Las herramientas de tallado están definidas a través de una serie de variables geométricas que permiten, según sus valores, su clasificación y distinción.

La figura 2.2 muestra la geometría de una herramienta de tallado cualquiera. A

continuación se definirán cada una de las variables geométricas que en ella aparecen. Los flancos de los dientes de la cremallera son de perfil rectilíneo y si tienen la misma inclinación con la dirección del eje de simetría del diente se generan dientes simétricos.

- (1) **Línea de referencia.** Se llama línea de referencia ó línea primitiva a la recta trazada siguiendo la dirección del eje longitudinal de la herramienta, a una altura tal, que su intersección con las rectas que forman los flancos de los dientes determina en ella segmentos que representan el espesor de los dientes y de los huecos, o intervalos entre dientes, de forma que el segmento correspondiente al espesor del diente sea igual al del hueco.
- (2) **Ángulo de presión.** El ángulo que forman los flancos de los dientes con la perpendicular a la línea primitiva, es lo que se conoce como ángulo de presión de la herramienta,  $\alpha_n$ .
- (3) **Paso circular.** El paso circular,  $p$ , se define como la distancia sobre la línea de referencia entre dos puntos semejantes de dos dientes consecutivos. Esta misma distancia se hace igual a  $\pi$  por el módulo, de forma que, de la Fig. 2.2:

$$p = m\pi \quad (2.13)$$

- (4) **Módulo.** El módulo es un factor de escala del tamaño, y representa la unidad del sistema de engranajes normalizados. El módulo es el índice del tamaño de los dientes en el Sistema Internacional.
- (5) **Adendo (altura de cabeza) y dedendo (altura de pie).** La altura de cabeza, conocida por adendo,  $h_{ao}$  según la nomenclatura utilizada por ISO, es la distancia desde la línea primitiva al plano de cabeza de la cremallera. Se convertirá en la altura de pie del engranaje generado. La altura de pie de la cremallera, conocida como dedendo,  $h_a$  según la nomenclatura utilizada por ISO, es la distancia desde la línea primitiva al plano de pie de la cremallera.
- (6) **Radio de acuerdo de cabeza.** El radio de acuerdo en la cabeza, también llamado radio de cabeza de la herramienta, está limitado por los parámetros anteriores, es

decir, ángulo de presión, adendo y dedendo: para que no haya apuntamiento de la herramienta, es decir, que tenga un espesor mayor que cero, se ha de cumplir que:

$$r_f \leq \frac{\frac{\pi m}{4} - h_{ao} \operatorname{tg} \alpha_n}{1 - \operatorname{sen} \alpha_n} \cos \alpha_n \quad (2.14)$$

$$\frac{\pi m}{4} - h_{ao} \operatorname{tg} \alpha_n \geq 0 \quad (2.15)$$

$$h_{ao} \leq \frac{\pi m}{4 \operatorname{tg} \alpha_n} \quad (2.16)$$

Teniendo en cuenta esto, las principales agencias de estandarización y diseño, AGMA (American Gear Manufacturers Association) e ISO (International Organization for Standardization) han adoptado como herramientas normalizadas más usuales las mostradas en las Tablas 2.1 y 2.2.

	$\alpha_n$	$h_a$	$h_{ao}$	$r_f$
Herramienta 1	25°	1,0	1,25	0,30
Herramienta 2	20°	1,0	1,25	0,30
Herramienta 3	20°	1,0	1,40	0,35
Herramienta 4	25°	1,0	1,35	0,24
Herramienta 5	20°	0,8	1,00	0,30

Tabla 2.1: Herramientas normalizadas AGMA

	$\alpha_n$	$h_a$	$h_{ao}$	$r_f$
Herramienta 1	20°	1,0	1,25	0,25
Herramienta 2	20°	1,0	1,25	0,38
Herramienta 3	20°	1,0	1,35	0,30
Herramienta 4	20°	1,2	1,50	0,30
Herramienta 5	22,5°	1,0	1,25	0,40
Herramienta 6	22,5°	1,0	1,25	0,32

Tabla 2.2: Herramientas normalizadas ISO

Se puede comprobar que estas herramientas cumplen las limitaciones anteriores. El adendo, el dedendo y el radio de acuerdo de la cabeza que figuran en la tabla coinciden con las dimensiones reales de los engranajes o cremalleras cuando el módulo tiene por valor la unidad. Para los restantes casos, habrá que multiplicarlas por el módulo del engranaje correspondiente.

### 2.2.2. Circunferencia primitiva

El tallado se lleva a cabo de forma que mientras la rueda va girando alrededor de su centro, la herramienta de tallado se desplaza de manera que una circunferencia de la rueda, llamada circunferencia primitiva, rueda sin deslizar sobre un plano de la herramienta, al que es tangente en todo momento.

El radio de esta circunferencia primitiva, para el caso de engranajes rectos, vendrá dado por:

$$r_p = \frac{mZ}{2} \quad (2.17)$$

donde  $Z$  es el número de dientes del engranaje.

Se conoce como radio de base de un engranaje,  $r_b$ , al radio de la circunferencia a partir de la cual se generan las evolventes que forman los dientes en el mismo:

$$r_b = r_p \cos \alpha_n = \frac{m_n Z}{2} \cos \alpha_n \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Ruedas helicoidales y con desplazamiento

En ruedas helicoidales, la herramienta incide sobre el cilindro a tallar, de forma que sus caras frontales forman un ángulo con las generatrices de dicho cilindro, Fig. 2.3, conocido como ángulo de hélice, el cual se designará por  $\beta$ . Cada cara perpendicular al eje de la rueda, llamada sección frontal o transversal del engranaje helicoidal, será un engranaje recto de espesor diferencial, que estará desplazado un ángulo, también diferencial, respecto al anterior.

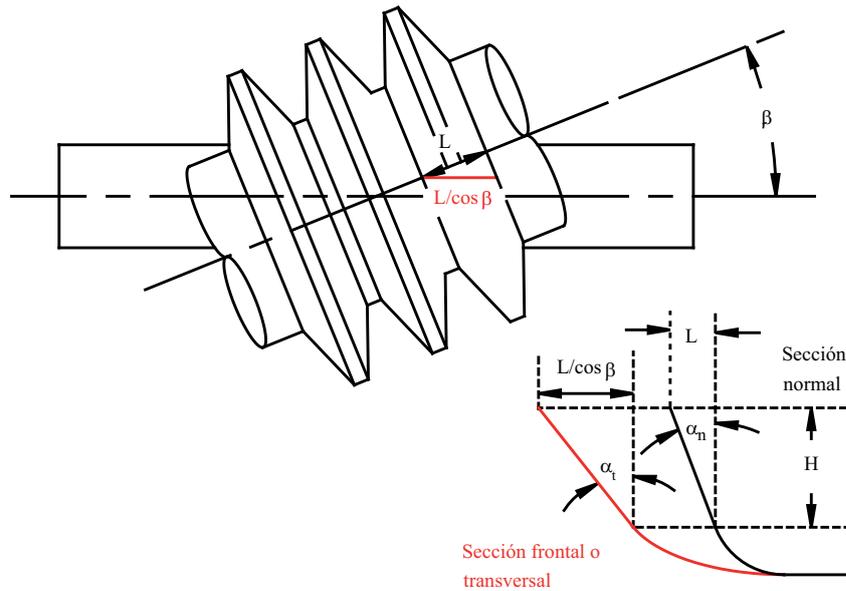


Fig. 2.3: Tallado de un engranaje cilíndrico helicoidal.

De acuerdo con la Figura 2.3, la sección frontal corresponde a un engranaje recto que hubiese tallado con un ángulo de presión:

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\frac{L}{\cos \beta}}{H} = \frac{1}{\cos \beta} \frac{L}{H} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \quad (2.19)$$

y un módulo:

$$m_t = \frac{m}{\cos \beta} \quad (2.20)$$

Por tanto, para el estudio del engranaje helicoidal, se podrá considerar éste como una sucesión de engranajes rectos de espesor diferencial, tallados con estos valores del módulo y del ángulo de presión  $m_t$  y  $\alpha_t$  a los que se designará por módulo y ángulo de presión en la sección frontal, respectivamente. En engranajes rectos,  $\alpha_t$  es igual a  $\alpha_n$  y  $m_t$  igual a  $m$ .

El radio primitivo del engranaje helicoidal, es decir, el radio en el que se produce rodadura sin deslizamiento respecto de la herramienta durante el tallado vendrá dado por:

$$r_p = \frac{m_t Z}{2} = \frac{m_n Z}{2 \cos \beta} \quad (2.21)$$

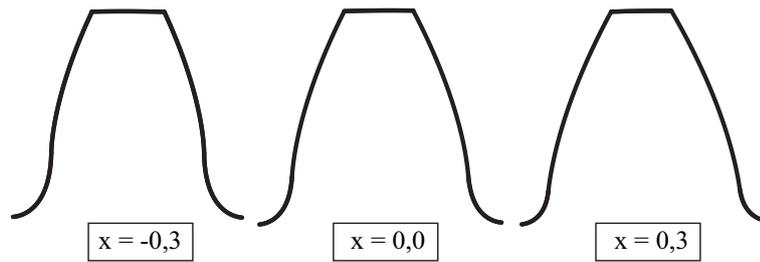


Fig. 2.4: Efecto del desplazamiento en la forma del diente.

que no es más que una generalización de la ecuación 2.17 obtenida anteriormente para engranajes rectos.

De igual manera, se puede generalizar la expresión del radio de base obtenida para engranajes rectos (Ec. 2.18), para su uso para engranajes helicoidales:

$$r_b = r_p \cos \alpha_t = \frac{m_n Z}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t \quad (2.22)$$

En lo sucesivo, se sustituirá  $m_n$  (módulo normal) por  $m$ , que coincidirá con el módulo de la herramienta de tallado.

Se denomina desplazamiento de la herramienta a la distancia entre el plano primitivo de la misma y la circunferencia primitiva de la rueda durante el tallado. En consecuencia, una rueda sin desplazamiento se talla con el plano primitivo de la herramienta situado a una distancia del centro de la rueda igual al radio primitivo de ésta.

En general, el desplazamiento se expresa como un número de veces el módulo, y a ese número, que se representará por  $x$ , se le conoce como coeficiente de desplazamiento o simplemente desplazamiento. El desplazamiento se entenderá como positivo cuando la herramienta se aleja de la rueda y como negativo en caso contrario. Así mismo, es bastante intuitivo el hecho de que un desplazamiento positivo da lugar a un diente más ancho en la base, y por tanto más robusto, mientras que un desplazamiento negativo genera un diente más delgado y débil, Fig. 2.4.

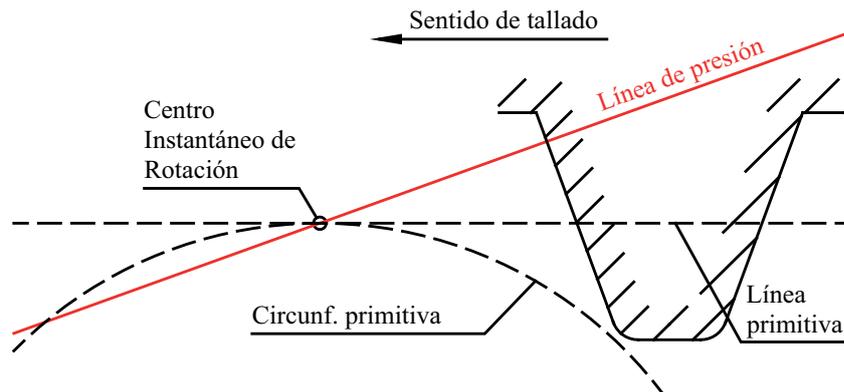


Fig. 2.5: Centro instantáneo de rotación durante el proceso de tallado.

#### 2.2.4. Generación de un perfil de evolvente mediante una herramienta de perfil de corte recto

Puesto que en el proceso de tallado, a lo largo de la circunferencia primitiva de la rueda, tiene lugar un movimiento de rodadura sin deslizamiento entre rueda y herramienta, el punto de dicha circunferencia tangente al plano primitivo de la herramienta en cada instante, Fig. 2.5, será el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo entre rueda y herramienta. El punto generado por la herramienta en cada instante es aquel que tiene velocidad relativa con componente normal a ambas superficies de contacto nula.

El lugar geométrico de los puntos de generación será la línea perpendicular al filo de la herramienta, en cada instante, y que pase por el centro instantáneo de rotación. Como el ángulo  $\alpha_n$  es constante, dicho lugar geométrico será una línea recta que permanece fija en el espacio y que se denomina línea de presión.

La figura 2.6 describe el movimiento de la herramienta durante el tallado. En ella el sistema de ejes coordinados  $X_i$  e  $Y_i$  se desplaza solidario a la rueda.

El primer punto generado por la herramienta, denominado  $a$ , coincide con la intersección entre la línea de presión y la circunferencia de cabeza de la rueda, quedando la posición de ésta última, en dicho instante, definida por la posición 0 del eje  $X$ .

El último punto del perfil evolvente, denominado  $b$ , vendrá determinado por la intersección entre la línea de presión y una posición del eje  $X$  que haga que ambas rectas sean perpendiculares. Este punto determina la circunferencia de base de la rueda y la distancia desde dicho punto al centro de la rueda es el radio de base,  $r_b$ .

Considerando un instante cualquiera del tallado, se tendrá que la herramienta genera en dicho instante un punto  $P$  del perfil del diente sobre la línea de presión y la posición de la rueda queda definida por la posición 1 del eje  $X$  solidario a ella.

Supóngase ahora que la rueda pasa a ocupar la posición definida por el instante 2 del eje  $X$  tras un giro  $\theta_1$  alrededor de su centro. La herramienta se desplazará hacia la izquierda una distancia  $r_p \theta_1$ , debido al movimiento de rodadura sin deslizamiento y su perfil, que en el instante 1 estaba sobre el diente generando el punto  $P$ , pasará a situarse sobre el punto  $b$  que corresponde al punto final de la evolvente.

Como se observa en la figura 2.6, la distancia entre los puntos  $P$  y  $b$  puede expresarse como:

$$r_b \theta_1 = r_p \theta_1 \cos \alpha_t \quad (2.23)$$

Por tanto, pueden escribirse las coordenadas polares de un punto cualquiera  $P$  del perfil generado por la herramienta en función del ángulo  $\theta$ . Esto proporciona las ecuaciones de una curva evolvente, tal y como se obtuvieron en el capítulo 2.1:

$$\rho = \sqrt{r_b^2 + r_b^2 \theta^2} = r_b \sqrt{1 + \theta^2} \quad (2.24)$$

$$\beta = \theta - \arctg \frac{r_b \theta}{r_b} = \theta - \arctg \theta \quad (2.25)$$

Queda demostrado, por lo tanto, que el perfil generado por el flanco recto de la herramienta de tallado por encima de un radio  $r_p \cos \alpha_n$  es una evolvente de circunferencia.

### 2.2.5. Ecuación del perfil en la base del diente

Los puntos de la zona redondeada de la cabeza de la herramienta generan un perfil, denominado trocoidal, que no es de evolvente, cuyas ecuaciones se determinan en este apartado. Se demostrará que los puntos de la parte recta de la misma que intentaran

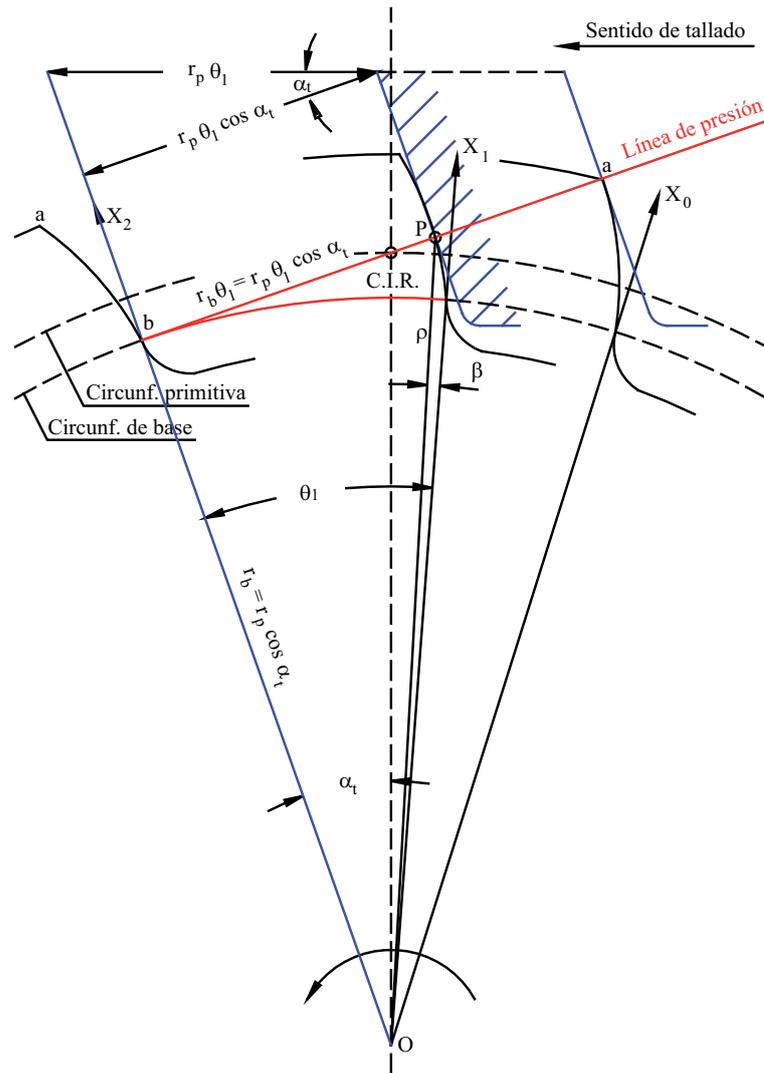


Fig. 2.6: Generación del perfil de evolvente mediante herramienta de flanco recto.

tallar por debajo del radio de base, no generan perfil, sino que son siempre eliminados por algún punto de la cabeza de la cremallera. El desarrollo se realizará para el caso de ruedas helicoidales talladas con herramienta con acuerdo de cabeza.

Las secciones frontales de un engranaje helicoidal son talladas por secciones de la cremallera cuyo acuerdo de cabeza se transforma de una circunferencia a una elipse, cuyo semieje vertical vale  $r_f$  y su semieje horizontal  $r_f / \cos \beta$ . Durante el tallado existe rodadura sin deslizamiento en el punto de tangencia de la circunferencia primitiva de la rueda con el plano horizontal de la herramienta que es tangente a ella. Por

consiguiente, este punto es el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo, y en consecuencia, el punto del acuerdo que talla en un instante dado es aquel cuya normal a la elipse de cabeza pasa por el punto de rodadura.

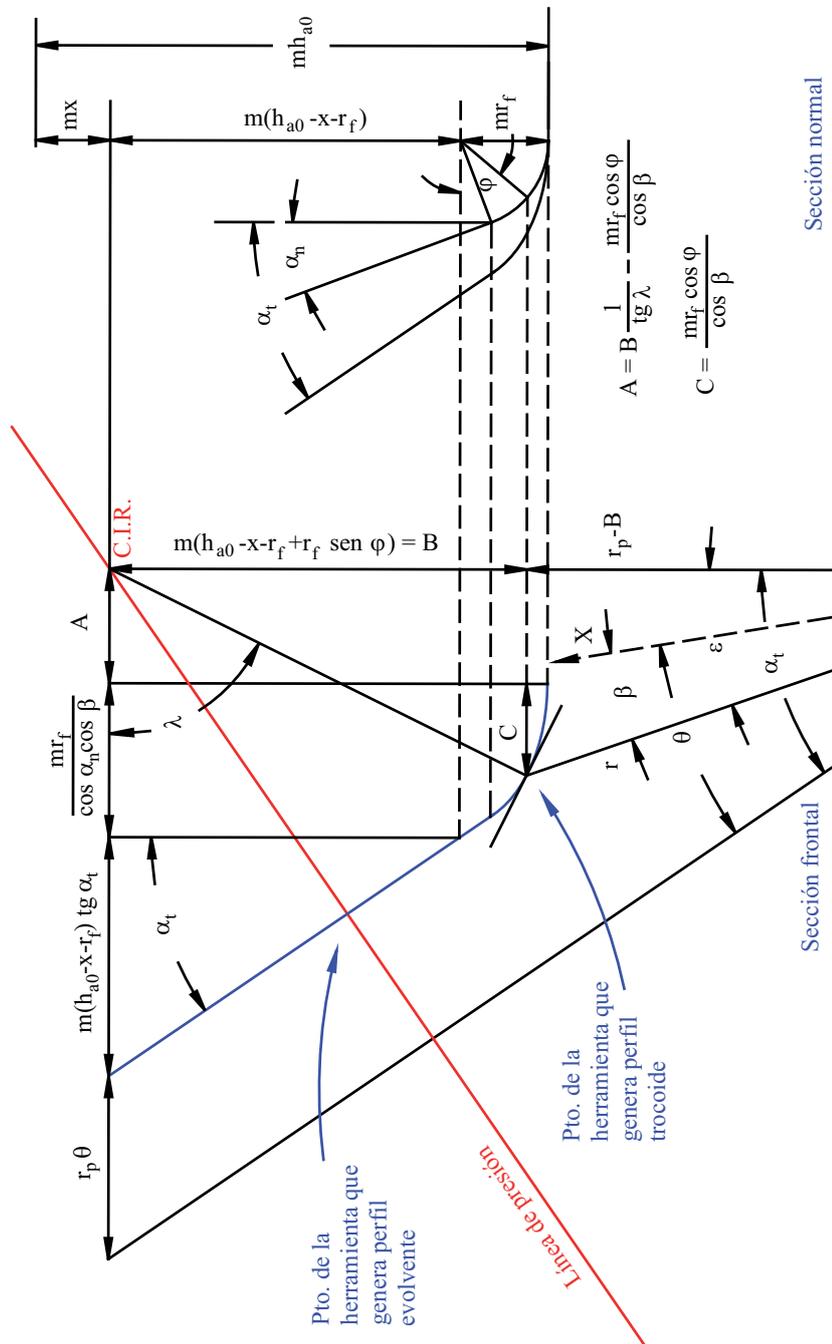


Fig. 2.7: Determinación de las ecuaciones del perfil de trocoide.

Se define una variable denominada  $\varphi$  que determina el punto de la herramienta que talla la trocoide, es decir, el punto caracterizado por  $\varphi$  estará contenido en una de las secciones normales de la herramienta, sobre la cual el acuerdo tiene una forma de circunferencia.  $\varphi$  es precisamente el ángulo que forma el radio de esa circunferencia por el punto considerado con la recta primitiva de la herramienta en la sección considerada, es decir, con una recta horizontal. El rango de variación de  $\varphi$  en los puntos del acuerdo es de  $\alpha_n$  a  $\pi/2$ , tal y como se muestra en la Fig. 2.7

Con la variable  $\varphi$ , se pueden formular las ecuaciones de la elipse de cabeza como:

$$x = r_x \cos \varphi = \frac{r_f}{\cos \beta} \cos \varphi \quad (2.26)$$

$$y = r_y \sin \varphi = r_f \sin \varphi \quad (2.27)$$

A partir de las ecuaciones de la elipse de cabeza, se puede obtener el ángulo que forma la normal a dicha elipse con una recta horizontal:

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{r_f \sin \varphi}{\cos \beta}}{r_f \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta} \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta la Fig. 2.7, el radio  $r$  del punto de la base del diente que esta siendo tallado, es decir, el punto generado en cada instante por el flanco curvo de la herramienta vendrá dado por:

$$r = \sqrt{\left[ r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \sin \varphi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} m(h_{a0} - x - r_f + r_f \sin \varphi) \right]^2} \quad (2.29)$$

o si tenemos en cuenta la Ec. 2.28:

$$r = \sqrt{\left[ r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \sin \varphi) \right]^2 + \left[ \frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi} m(h_{a0} - x - r_f + r_f \sin \varphi) \right]^2} \quad (2.30)$$

En cuanto a la coordenada  $\beta$  del punto de generación del perfil de trocoide, vemos que:

$$\beta = \theta - [\alpha_t - \varepsilon] = \theta - \alpha_t + \varepsilon \quad (2.31)$$

Para determinar el valor del ángulo  $\varepsilon$ , es necesario definir previamente una serie de variables que simplifican notablemente las ecuaciones:

$$B = m(h_{a0} - x - r_f + r_f \sin \varphi) \quad (2.32)$$

$$C = mr_f \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \quad (2.33)$$

A partir de las ecuaciones 2.28, 2.32 y 2.33, se obtiene un nuevo parámetro A:

$$A = \frac{B}{\operatorname{tg} \lambda} - C = m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi) \frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi} - mr_f \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \quad (2.34)$$

Se observa fácilmente que la tangente del ángulo  $\varepsilon$  se puede expresar como:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A}{r_p - A} = \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi) \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda}}{r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi)} \quad (2.35)$$

Por otro lado, de la Fig. 2.7 obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{r_p \theta + m(h_{a0} - x - r_f) \operatorname{tg} \alpha_t + \frac{mr_f}{\cos \alpha_n \cos \beta} + A}{r_p} \quad (2.36)$$

y despejando de la Ec. 2.35 obtenemos:

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha_t - \frac{m(h_{a0} - x - r_f) \operatorname{tg} \alpha_t}{r_p} - \frac{mr_f}{r_p \cos \alpha_n \cos \beta} - \frac{A}{r_p} \quad (2.37)$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} \beta = & \operatorname{tg} \alpha_t - \frac{m(h_{a0} - x - r_f) \operatorname{tg} \alpha_t}{r_p} - \frac{mr_f}{r_p \cos \alpha_n \cos \beta} - \\ & - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi) \frac{\cos \beta}{r_p \operatorname{tg} \varphi} - \alpha_t + \\ & + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi) \frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi}}{r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ecuación que, junto a la Ec. 2.30, constituyen las ecuaciones paramétricas del perfil del diente en la base, que corresponden a las de una curva trocoide.

## 2.2.6. Fenómeno de penetración

Durante el tallado, el filo recto de la herramienta va generando el perfil evolvente desde la circunferencia de cabeza hasta la circunferencia de base, arrancando el

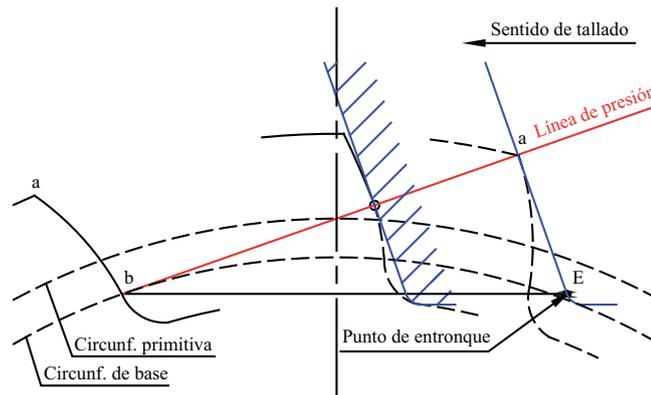


Fig. 2.8: Caso límite de engranaje sin penetración.

material que se encuentra por debajo del punto de generación. Por otro lado, el filo circular de la herramienta va generando el perfil trocoidal desde donde termina el perfil de evolvente hasta la circunferencia de pie, donde  $\varphi = \pi/2$ . El punto donde se unen evolvente y trocoide se denomina entronque.

En el caso de que no haya penetración el entronque entre la trocoide y la evolvente se produce con la misma tangente, es decir, se describe una trayectoria continua sin puntos angulosos. En el momento que talla el punto de entronque de la herramienta se han de encontrar ambas envolventes; por un lado la envolvente de las trayectorias de los puntos de cabeza (trocoide) y por otro lado la envolvente de los puntos de la cara recta. Por ser envolventes, han de ser tangentes a la trayectoria del punto de entronque, por lo que la tangente ha de ser común (Fig. 2.8).

En el caso de que se produzca penetración esto no ocurre, pues las dos envolventes se encuentran en un punto que no se talló simultáneamente, es decir, se producirá cuando el punto  $E$  de la herramienta se encuentre por debajo de la horizontal correspondiente al punto  $b$ , en el cual, el filo circular de la herramienta arranca parte del perfil evolvente generado previamente, Fig. 2.9.

En los engranajes de perfil de evolvente, el fenómeno de la penetración del diente por la cremallera durante el proceso de generación, está influenciado principalmente por el número de dientes y el ángulo de presión.

La penetración en el proceso de tallado es una circunstancia no deseable, al menos

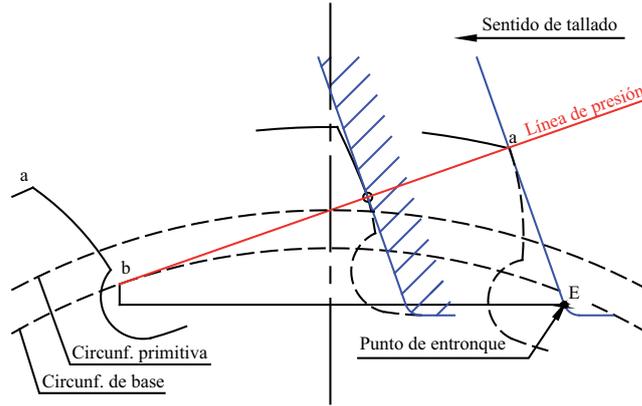


Fig. 2.9: Engranaje con penetración.

por encima de ciertos límites, ya que debilita la base del diente, justamente en el punto donde las tensiones que se producen cuando el engranaje está cargado, son mayores.

La condición de no penetración, puede escribirse en la forma:

$$r_p + m x - m h_{a0} + m r_f - m r_f \operatorname{sen} \alpha_n \geq r_p \cos^2 \alpha_t \quad (2.39)$$

$$r_p \operatorname{sen}^2 \alpha_t + m x - m h_{a0} + m r_f (1 - \operatorname{sen} \alpha_n) \geq 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{m Z}{2 \cos \beta} \operatorname{sen}^2 \alpha_t + m x - m h_{a0} + m r_f (1 - \operatorname{sen} \alpha_n) \geq 0 \quad (2.41)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se deduce la expresión de la condición general de no penetración:

$$\frac{Z \operatorname{sen}^2 \alpha_t}{2 \cos \beta} + x - h_{a0} + r_f (1 - \operatorname{sen} \alpha_n) \geq 0 \quad (2.42)$$

que puede ser igualmente expresada como una condición de número mínimo de dientes del engranaje:

$$Z \geq \frac{2[h_{a0} - x - r_f(1 - \operatorname{sen} \alpha_n) \cos \beta]}{\operatorname{sen}^2 \alpha_t} \quad (2.43)$$

o bien como condición de mínimo desplazamiento:

$$x \geq h_{a0} - r_f(1 - \operatorname{sen} \alpha_n) - \frac{Z \operatorname{sen}^2 \alpha_t}{2 \cos \beta} \quad (2.44)$$

Utilizar valores del desplazamiento y número de dientes de acuerdo con las expresiones anteriores, que no permiten en absoluto penetración, constituye un excelente criterio de diseño. No obstante, condicionado por las altas relaciones de

transmisión a emplear, en la práctica es admisible una cierta penetración, siempre que no se rebasen valores que debiliten en exceso el diente. El fenómeno de la penetración, siempre relacionado con un debilitamiento de la sección en la base, puede llevar asociado otros efectos mediante una conveniente selección de los parámetros de diseño, como el aumento del grado de recubrimiento, con el consiguiente aumento de la longitud de contacto efectiva y la consecuente disminución de las presiones, por lo que pueden existir casos particulares en que dicho fenómeno pueda ser tolerado e incluso beneficioso [44].

### 2.2.7. Espesor del diente. Condición de no apuntamiento

Cuando una herramienta talla una rueda con un desplazamiento  $x$ , la circunferencia primitiva del engranaje rueda sin deslizar sobre el plano situado a una distancia  $m x$  por debajo del plano primitivo de la herramienta.

El espesor de la herramienta en este plano de rodadura será:

$$e = \frac{\pi m_t}{2} - 2 m x \operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\pi m}{2 \cos \beta} - 2 m x \operatorname{tg} \alpha_t \quad (2.45)$$

Puesto que durante el tallado en este plano se tiene rodadura sin deslizamiento, dicho espesor coincidirá con el hueco a una distancia  $r_p$  del centro, medido sobre la circunferencia primitiva. Por consiguiente, según se observa en la Fig. 2.10, el ángulo abarcado por el diente a un radio  $r_p$  será:

$$\gamma_p = \frac{2\pi}{Z} - \frac{e}{r_p} = \frac{2\pi}{Z} - \frac{\frac{\pi m}{2 \cos \beta} - 2 m x \operatorname{tg} \alpha_t}{\frac{mZ}{2 \cos \beta}} = \frac{2\pi}{Z} - \frac{\pi}{Z} + \frac{4x \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta}{Z} \quad (2.46)$$

$$\gamma_p = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n \quad (2.47)$$

Según la figura 2.10 resultará:

$$\gamma + 2\beta = \gamma_p + 2\beta_p \quad (2.48)$$

$$\gamma = \gamma_p + 2\beta_p - 2\beta \quad (2.49)$$

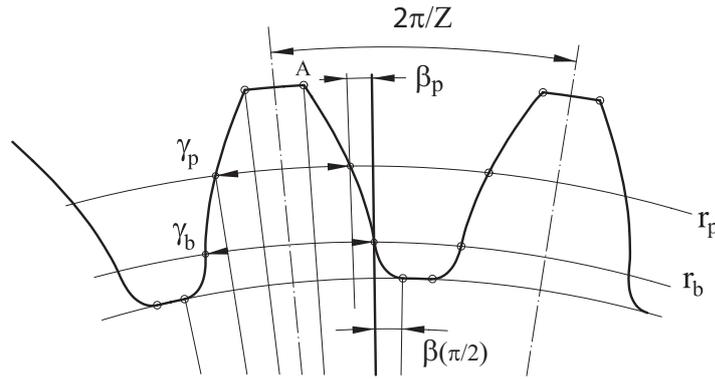


Fig. 2.10: Espesores angulares del diente.

pero, puesto que tanto  $r$  y  $\beta$  como  $r_p$  y  $\beta_p$  verifican la ecuación de la evolvente, se obtendrá:

$$\beta = \theta - \text{arc tg } \theta = \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} \quad (2.50)$$

$$\beta_p = \sqrt{\frac{r_p^2}{r_b^2} - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{r_p^2}{r_b^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_t} - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_t} - 1} = \text{tg } \alpha_t - \alpha_t \quad (2.51)$$

Siendo  $\beta_p$  el ángulo  $\beta$  para el punto  $P$  del perfil que se sitúa sobre la circunferencia primitiva, es decir, a una distancia del centro igual al  $r_p$ . Sustituyendo en la Ec. 2.49, se obtendrá:

$$\gamma = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \text{tg } \alpha_n + 2(\text{tg } \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} \right) \quad (2.52)$$

Esta expresión del espesor angular de un diente a un radio cualquiera refleja que dicho espesor disminuye a medida que aumenta el radio. Esto quiere decir que existe un valor máximo, para el radio de cabeza de la rueda designado por  $r_{out}$  a partir del cual se eliminaría todo el material durante el tallado. La condición de no apuntamiento absoluto es:

$$\frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \text{tg } \alpha_n + 2(\text{tg } \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_{out}^2}{r_b^2} - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{r_{out}^2}{r_b^2} - 1} \right) > 0 \quad (2.53)$$

No obstante, no es conveniente llegar a un espesor nulo en la punta del diente, por lo que, por ejemplo, AGMA recomienda que dicho espesor no sea inferior a 0.3 veces

el módulo, es decir

$$\frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_{out}^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{r_{out}^2}{r_b^2} - 1} \right) > \frac{0,3 m}{r_{out}} \quad (2.54)$$

Para ruedas sin desplazamiento el radio de cabeza nominal vale:

$$r_{out} = r_p + m a \quad (2.55)$$

### 2.2.8. Ángulo de hélice a un radio cualquiera

Si sobre un diente helicoidal se traza la curva que une todos los puntos situados a una distancia  $r$  del eje de la rueda, es decir, se toma en cada sección frontal el punto del perfil situado a una distancia  $r$  del centro, se obtiene una hélice. Pero el ángulo de dicha hélice varía con  $r$ .

El ángulo de hélice a un radio cualquiera vendrá dado por:

$$\operatorname{tg} \beta_r = \frac{r}{r_b} \operatorname{tg} \beta_b \quad (2.56)$$

siendo  $\beta_b$  el ángulo de hélice en la base. Lógicamente, para el caso del radio primitivo, en ángulo de hélice para dicho radio no será otro que el ángulo de hélice  $\beta$ , es decir,  $\beta_p = \beta$ . Por consiguiente, particularizando la ecuación anterior para el radio primitivo se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{r_p}{r_b} \operatorname{tg} \beta_b = \frac{1}{\cos \alpha_t} \operatorname{tg} \beta_b \\ \operatorname{tg} \beta_b &= \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_t \end{aligned} \quad (2.57)$$

## 2.3. Engrane de ruedas con dentadura de perfil de evolvente

En el apartado 2.2 se han deducido las propiedades geométricas de una rueda a partir de la herramienta que la talla. Cuando el estudio se amplía al engrane de una

pareja de ruedas, aparecen algunas propiedades que caracterizan el funcionamiento del conjunto de la transmisión y que dependen tanto del montaje de la transmisión como de las características geométricas de cada una de las ruedas por separado. Dichas características son las denominadas propiedades funcionales o de funcionamiento de la transmisión y van a ser de gran importancia en el estudio de otros aspectos de la transmisión, como son las tensiones a las que esta sometida dicha transmisión o el rendimiento de la misma.

Según el apartado 2.1, la normal al perfil del diente en un punto del mismo es siempre tangente a la circunferencia de base. Por consiguiente, cuando se ponen dos dientes en contacto, tanto la normal como la tangente a ambos perfiles en el punto de contacto son comunes. Puede establecerse que el contacto entre dos dientes de perfil de evolvente se produce siempre en la tangente común a las dos circunferencias de base, denominada línea de engrane o línea de presión. Además una de las propiedades fundamentales de los perfiles de evolvente, que no existe en otros tipos de perfiles, es que aunque se varíe la distancia entre centros, los dos perfiles siguen siendo conjugados y pueden engranar entre sí correctamente.

### 2.3.1. Relación de transmisión

La relación de transmisión es un parámetro característico de una transmisión y se define como la relación entre los ángulos girados entre piñón y rueda entre dos puntos de engrane.

Cada punto del perfil evolvente puede definirse en función de su ángulo  $\theta$  como se puede apreciar en la Fig. 2.11. Dicho ángulo nos proporciona las coordenadas  $r$  y  $\beta$  del punto del perfil evolvente, según las ecuaciones paramétricas de la evolvente Ecs. 2.1 y 2.2, deducidas en el apartado 2.1.

Se pretende buscar la relación geométrica entre el ángulo  $\theta_1$  del piñón en el punto de contacto del perfil evolvente y el ángulo  $\theta_2$ , correspondiente a dicho punto de contacto, pero referente al perfil evolvente de la rueda.

Por las propiedades del perfil de evolvente, se sabe que, si el engrane se produce

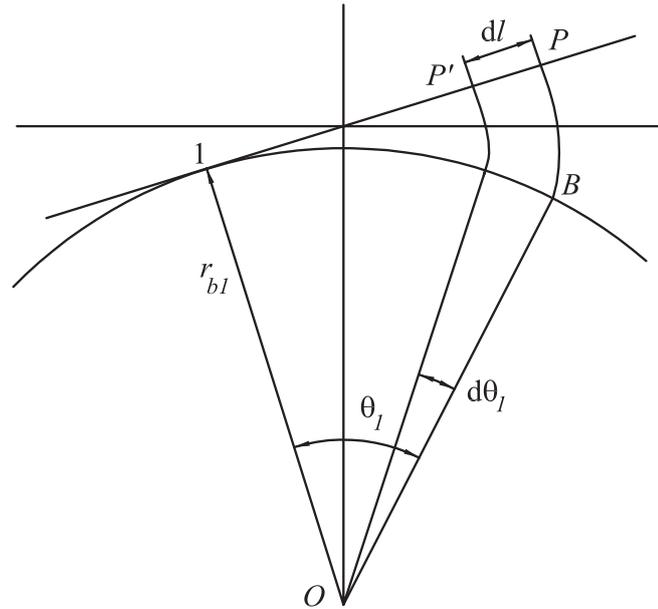


Fig. 2.11: Posición de la rueda en un punto de engrane.

en un cierto instante en el punto  $P$ , en la figura 2.11, la distancia del punto 1 al punto  $P$  es:

$$l_{1P} = r_{b1} \theta_1 \quad (2.58)$$

y, un instante después, el engrane pasa al punto  $P'$ , situado a una distancia  $dl$  del punto  $P$  medida sobre la línea de presión, que es tangente a la circunferencia de base en el punto 1 y pasa por  $P$ :

$$l_{1P'} = r_{b1} \theta_{1P'} = r_{b1}(\theta_1 - d\theta_1) \quad (2.59)$$

donde  $d\theta_1$  es el ángulo que gira el piñón, que se corresponde con el ángulo que gira el origen de al evolvente, punto  $B$ . Por consiguiente,

$$dl = l_{1P} - l_{1P'} = r_{b1}\theta_1 - r_{b1}(\theta_1 - d\theta_1) = r_{b1} d\theta_1 \quad (2.60)$$

Además como piñón y rueda están engranando, la rueda se habrá movido la misma distancia  $dl$ , puesto que su punto de contacto habrá pasado de  $P$  a  $P'$ , por lo que para la rueda también se cumple que:

$$dl = r_{b2} d\theta_2 \quad (2.61)$$

siendo  $d\theta_2$  el ángulo girado por la rueda entre los mismos dos puntos de contacto, por consiguiente:

$$r_{b1} d\theta_1 = r_{b2} d\theta_2 \quad (2.62)$$

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.63)$$

en consecuencia, la relación de transmisión entre dos engranajes de perfil de evolvente se mantiene constante en todo momento, y es igual a la relación entre los números de dientes de uno y de otro.

### 2.3.2. Línea de presión. Ángulo de presión de funcionamiento

Cuando dos dientes están en contacto tanto la normal como la tangente a ambos perfiles en el punto de contacto son comunes, por consiguiente, el contacto entre dos dientes de perfil de evolvente se produce siempre en la tangente común a las dos circunferencias de base. Esta tangente común es la que se conoce como línea de presión.

Se define el ángulo de presión de funcionamiento, denominado  $\alpha'_t$ , como el ángulo que forma la línea de presión y la línea perpendicular a la línea que une los centros de las ruedas. El valor de dicho ángulo varía en función de la distancia entre centros de funcionamiento  $C$  (Fig. 2.12). Concretamente, a mayor separación entre piñón y rueda en el montaje de la transmisión, mayor será el ángulo de presión de funcionamiento.

La línea de presión es perpendicular al perfil evolvente puesto que la circunferencia de base es el lugar geométrico de los centros de curvatura de dicha curva evolvente.

Para cada una de las dos ruedas se puede definir una familia de circunferencias concéntricas con las ruedas. Cada una de ellas será tangente a una de la otra familia, de tal manera que la suma de los radios de ambas a de ser igual a la distancia entre centros.

A la pareja de circunferencias tangentes entre si y concéntricas a piñón y rueda, respectivamente, que verifican que la velocidad tangencial del punto de tangencia de una y de otra es idéntica, se las denomina circunferencias de rodadura.

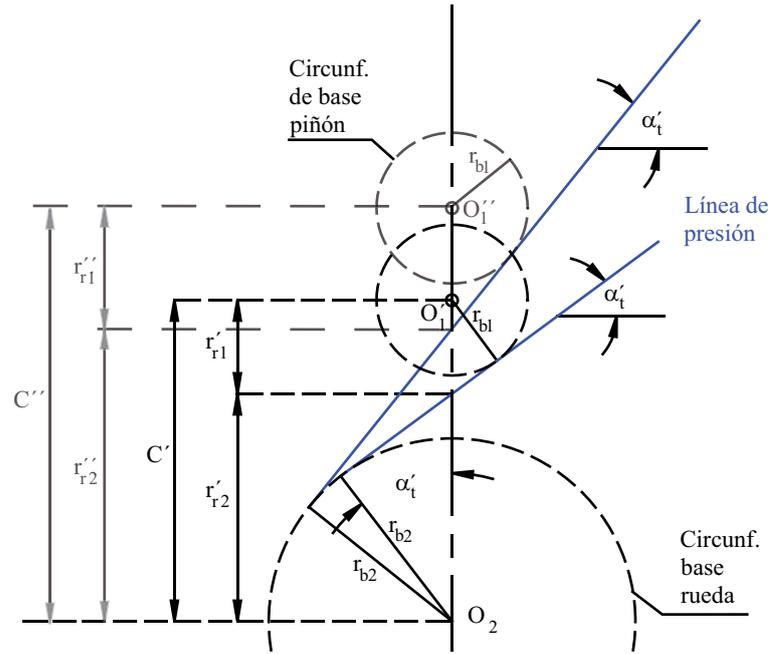


Fig. 2.12: Variación del ángulo  $\alpha'_t$  en función de la posición de los centros.

Designando por  $r_r$  al radio de la circunferencia de rodadura, llamado radio de rodadura o radio primitivo de funcionamiento, se observa que:

$$r_r = \frac{r_b}{\cos \alpha'_t} \quad (2.64)$$

Se cumple que la distancia entre centros de funcionamiento, denominada  $C$ , se calcula como:

$$C = r_{r1} + r_{r2} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha'_t} \quad (2.65)$$

Cuando el ángulo de presión de funcionamiento,  $\alpha'_t$ , coincide con el ángulo de presión de tallado en la sección frontal,  $\alpha_t$ , se cumple que la distancia entre centros de funcionamiento es la llamada distancia entre centros nominal,  $C_0$ , es decir:

$$C_0 = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha'_t} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha'_t} + \frac{r_{b2}}{\cos \alpha'_t} = r_{p1} + r_{p2} \quad (2.66)$$

Si la distancia entre ejes es la nominal, las circunferencias de rodadura coinciden con las primitivas.

De la figura 2.13 se deduce que la relación entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  viene dada por:

$$r_{b1}\theta_1 + r_{b2}\theta_2 = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (2.67)$$

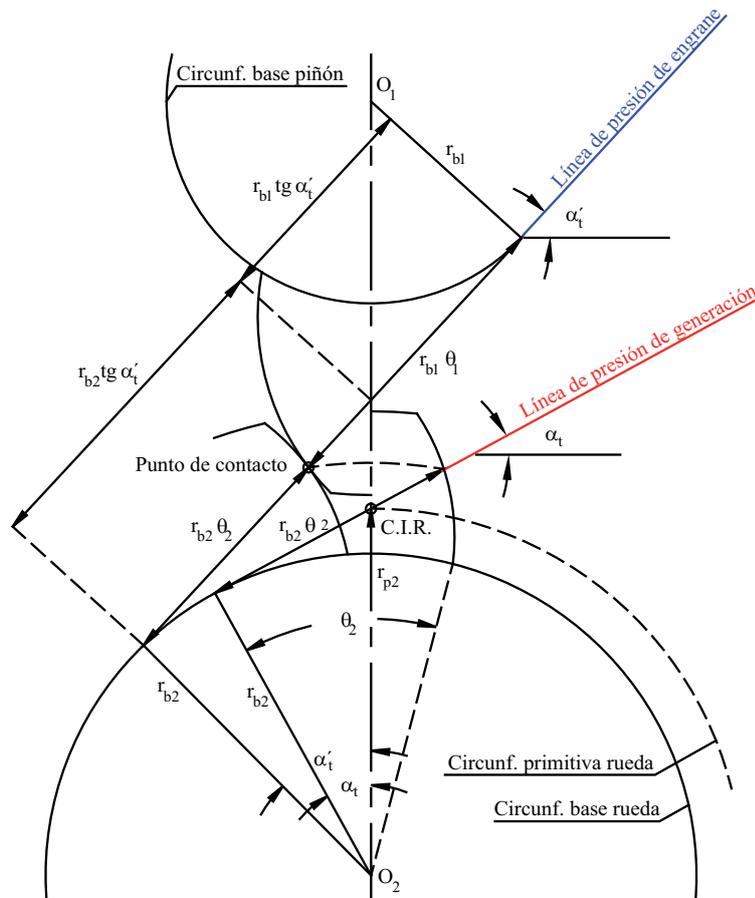


Fig. 2.13: Relación geométrica entre parámetros geométricos de piñón y rueda.

### 2.3.3. Intervalo de contacto

El contacto entre una pareja de dientes, piñón y rueda, se produce a lo largo de la línea de presión, la cual permanece constante en el espacio, puesto que el ángulo de presión de funcionamiento también permanece constante. Sin embargo, dicho contacto se produce únicamente durante un intervalo determinado y limitado por dos instantes: el instante donde comienza el contacto entre ambos dientes que se corresponde con engrane de la cabeza del piñón y el instante donde termina dicho contacto que se produce cuando engrana la cabeza de la rueda. Dicho intervalo de contacto está representado en la Fig. 2.14.

El límite superior del intervalo de contacto se obtendrá al sustituir el radio de

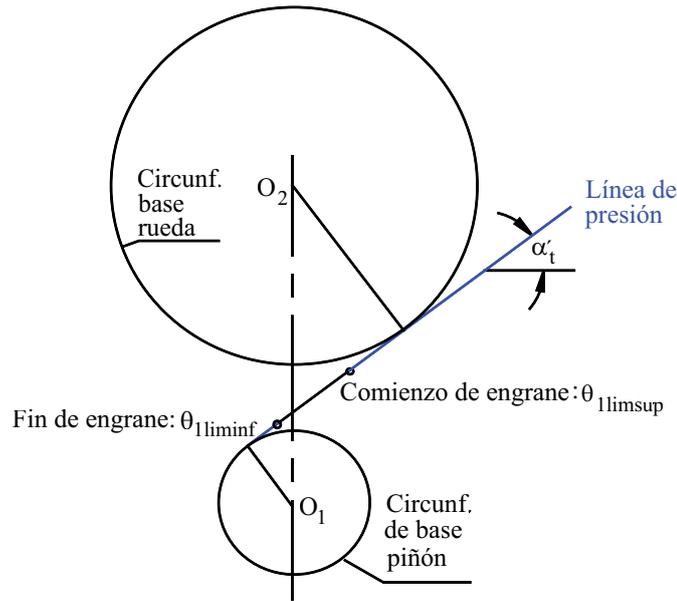


Fig. 2.14: Intervalo de contacto durante el engrane.

cabeza del piñón  $r_{a1}$  en una de las ecuaciones paramétricas de la evolvente,

$$\theta_{limsup} = \theta_{1max} = \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} \quad (2.68)$$

y el límite inferior de dicho intervalo de contacto se obtendrá de igual forma, pero utilizando el radio de cabeza de la rueda:

$$\theta_{2max} = \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}}\right)^2 - 1} \quad (2.69)$$

y empleando la Ec. 2.67, se obtiene el límite inferior del intervalo de contacto respecto del piñón:

$$\theta_{liminf} = \theta_{1min} = \frac{1}{r_{b1}} [(r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - r_{b2} \theta_{2max}] \quad (2.70)$$

y el radio en este punto se calcula como:

$$r_{liminf}^2 = r_{b1}^2 + \left(C \operatorname{sen} \alpha'_t - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}\right)^2 = r_{b1} \sqrt{1 + \theta_{liminf}^2} \quad (2.71)$$

### 2.3.4. Grado de recubrimiento

El ángulo girado por un diente en su movimiento de engrane vendrá dado por la diferencia entre los ángulos correspondientes a dos puntos de la línea de presión. De

esta forma si consideramos el intervalo de contacto durante el engrane, el ángulo girado por el piñón podrá expresarse de la siguiente forma:

$$\Delta\theta = \omega_{a-fin} = \theta_{1a} - \theta_{1fin} = \theta_{1max} - \theta_{1min} \quad (2.72)$$

El grado de recubrimiento de un par de engranajes es el número medio de dientes en contacto, o lo que es lo mismo, el ángulo girado por una rueda desde que comienza el engrane de un diente hasta que acaba, dividido por el ángulo girado desde que comienza el engrane de ese diente hasta que comienza el engrane siguiente, o sea,  $2\pi/Z$ :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\omega_{a-fin}}{\frac{2\pi}{Z_1}} = \frac{\theta_{1max} - \theta_{1min}}{\frac{2\pi}{Z_1}} \quad (2.73)$$

y sustituyendo en la expresión anterior las Ecs. 2.68 y 2.70 se obtiene:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{Z_1}{2\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} - \frac{1}{r_{b1}} \left( (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - r_{b2} \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} \right) \right] \quad (2.74)$$

En un engranaje recto, el grado de recubrimiento coincide con el grado de recubrimiento en la sección frontal, pero no ocurre lo mismo en uno helicoidal.

En la figura 2.15 el punto  $a$  es el punto del perfil situado en la cabeza de un diente, en el momento en que comienza su engrane en la sección frontal anterior. A partir de ese instante, la rueda girará un ángulo igual a  $2\pi\varepsilon_\alpha/Z$  hasta que finalice su engrane. Sin embargo, la cara posterior comenzó su engrane antes, concretamente en el instante en que la cabeza del diente de dicha sección estaba situada en el punto  $a'$ , por lo que habrá de considerarse también la contribución de ese tramo al grado de recubrimiento.

Cuando se talló el punto  $a$ , la herramienta se había desplazado una distancia  $\delta$  respecto al instante en que tallaba el punto  $a'$ , cuyo valor es

$$\delta = b \operatorname{tg} \beta \quad (2.75)$$

El ángulo girado por la rueda desde que se talla  $a'$  hasta que se talla  $a$  vendrá dado por

$$\Delta\omega = \frac{\delta}{r_p} = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\frac{mZ}{2 \cos \beta}} = \frac{2b \operatorname{sen} \beta}{mZ} \quad (2.76)$$

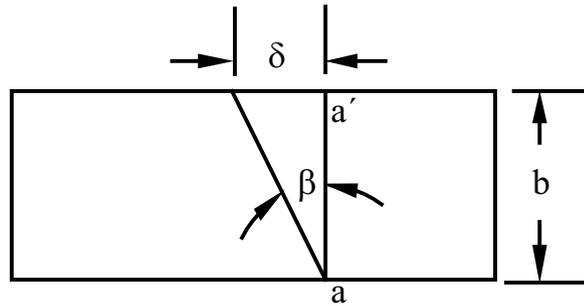


Fig. 2.15: Recubrimiento en el salto.

que es el mismo ángulo que gira la rueda desde que engrana  $a'$  hasta que engrana  $a$ , por lo que el recubrimiento debe aumentarse en la cantidad

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{2b \operatorname{sen} \beta}{mZ} \frac{Z}{2\pi} = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\pi m} \quad (2.77)$$

que es lo que se conoce como recubrimiento en el salto.

Naturalmente, el grado de recubrimiento total vendrá dado por la suma del recubrimiento en la sección frontal más el recubrimiento en el salto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma} &= \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( Z_1 \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2} - 1 + Z_2 \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}}\right)^2} - 1 - (Z_1 + Z_2) \operatorname{tg} \alpha'_i \right) + \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\pi m} \end{aligned} \quad (2.78)$$

### 2.3.5. Holgura

La holgura es un factor importante en el funcionamiento correcto del engranaje. Todos los engranajes deben disponer de una serie de holguras para permitir las tolerancias de concentricidad y forma de los dientes. Una insuficiente holgura causa un rápido fallo debido a sobrecarga. Una holgura excesiva incrementará la fuerza de contacto reduciendo, también, la vida del engranaje.

Se conoce como holgura de paso, o simplemente holgura, a la diferencia entre el hueco entre dientes y el espesor del diente de la rueda contraria, medido sobre

las circunferencias de rodadura. De la expresión obtenida para el espesor angular del diente en la Ec. 2.52, se deduce que el espesor angular en el radio de rodadura vale

$$\begin{aligned}
 \gamma_{r1} &= \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_{r1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{r_{r1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \right) \\
 \gamma_{r1} &= \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \\
 &\quad - 2 \left( \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha'_t} - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha'_t} - 1} \right) = \\
 \gamma_{r1} &= \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2(\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

En consecuencia, el espesor del diente del piñón en la circunferencia de rodadura será

$$\begin{aligned}
 e_{r1} &= \gamma_r r_r = \gamma_r C \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \\
 &= \frac{\pi C}{Z_T} + \frac{4x_1 C}{Z_T} + \frac{2CZ_1}{Z_T} (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - \frac{2CZ_1}{Z_T} (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

El espesor del diente de la rueda en la circunferencia de rodadura vendrá dado por una expresión similar, cambiando  $x_1$  y  $Z_1$  por  $x_2$  y  $Z_2$ . La suma de ambos espesores será:

$$e_{r1} + e_{r2} = \frac{2\pi C}{Z_T} + \frac{4x_T C}{Z_T} \operatorname{tg} \alpha_n + 2C (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2C (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) \quad (2.81)$$

La suma de los espesores de ambos dientes en la circunferencia de rodadura más la holgura ha de ser igual al arco entre los dos dientes en la misma circunferencia, en consecuencia, si se designa por  $h$  el factor de holgura, se verifica que:

$$e_{r1} + e_{r2} + mh = \frac{2\pi}{Z_1} r_{r1} = \frac{2\pi C Z_1}{Z_1 Z_T} = \frac{2\pi C}{Z_T} \quad (2.82)$$

por consiguiente, la holgura vale

$$mh = 2C (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - 2C (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - \frac{4x_T C}{Z_T} \operatorname{tg} \alpha_n \quad (2.83)$$

Una medida interesante de la holgura es el ángulo que giraría en vacío la rueda conductora si se invirtiera el sentido de giro. Esta medida adquiere un especial interés para el caso de accionamientos de posicionadores, por ejemplo de un robot, nos permite obtener la condición que se debe verificar para que este giro sea nulo.

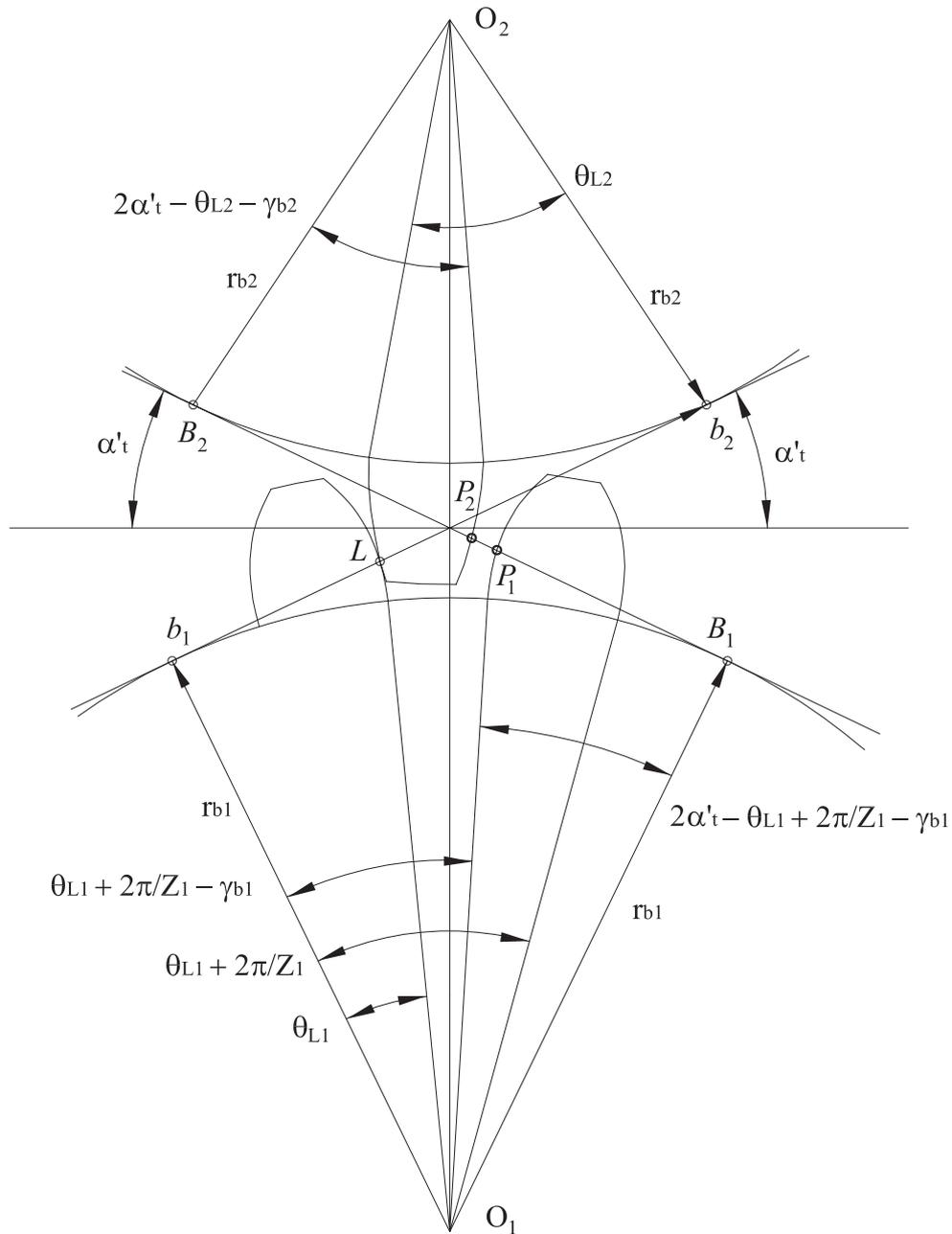


Fig. 2.16: Holgura de cambio de sentido.

En la Fig. 2.16 se representa el contacto entre dos ruedas en un punto  $L$ . En la figura, la rueda conductora es la superior y gira en sentido horario, si se cambia el sentido de giro, la rueda tendría que recorrer en vacío un cierto ángulo hasta que el contacto se produjese en el punto  $P_1$ , en la otra línea de presión, pero tal y como se aprecia en la figura, no sería el punto  $P_2$  el que contactara con  $P_1$ . La distancia  $l_{P_1P_2}$

verifica

$$l_{P_1P_2} = l_{B_1B_2} - l_{B_1P_1} - l_{B_2P_2} \quad (2.84)$$

cuyos valores, deducidos de la Fig. 2.16, son:

$$l_{B_1P_1} = r_{b1} \left( 2\alpha'_t - \theta_{L1} - \frac{2\pi}{Z_1} + \gamma_{b1} \right) \quad (2.85)$$

$$l_{B_2P_2} = r_{b2} (2\alpha'_t - \theta_{L2} + \gamma_{b2}) \quad (2.86)$$

$$l_{B_1B_2} = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (2.87)$$

$$\theta_{L1} = \frac{l_{b_1L_1}}{r_{b1}} = \frac{l_{b_1b_2} - l_{b_2L_1}}{r_{b1}} = \frac{(r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - r_{b2}\theta_{L2}}{r_{b1}} \quad (2.88)$$

y operando con estas ecuaciones

$$\begin{aligned} l_{B_1P_1} &= r_{b1} \left( 2\alpha'_t - \frac{(r_{b1} + r_{b2})}{r_{b1}} \operatorname{tg} \alpha'_t + \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \theta_{L2} - \frac{2\pi}{Z_1} + \gamma_{b1} \right) = \\ &= r_{b1} \left( 2\alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} + \gamma_{b1} \right) - (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t + r_{b2}\theta_{L2} \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} l_{B_1P_1} + l_{B_2P_2} &= r_{b1} \left( 2\alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} + \gamma_{b1} \right) - (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t + r_{b2}\theta_{L2} + \\ &+ r_{b2} (2\alpha'_t - \theta_{L2} + \gamma_{b2}) = \\ &= (r_{b1} + r_{b2}) (2\alpha'_t - \operatorname{tg} \alpha'_t) + r_{b1} \left( \gamma_{b1} - \frac{2\pi}{Z_1} \right) + r_{b2}\gamma_{b2} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Por lo tanto, la distancia  $l_{P_1P_2}$ , será la holgura de paso de base, que igualada al módulo por el factor de holgura de paso de base, da como resultado:

$$\begin{aligned} l_{P_1P_2} &= m h_b = (r_{b1} + r_{b2}) (2\alpha'_t - \operatorname{tg} \alpha'_t) + r_{b1} \left( \gamma_{b1} - \frac{2\pi}{Z_1} \right) + r_{b2}\gamma_{b2} = \\ &= (r_{b1} + r_{b2}) 2 (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - r_{b1}\gamma_{b1} - r_{b2}\gamma_{b2} + r_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Si ahora se sustituyen los espesores angulares en la circunferencia de base por sus expresiones obtenidas en el apartado 2.2.7, se obtiene

$$\begin{aligned} r_{b1}\gamma_{b1} &= r_{b1} \left( \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \right) = \\ &= \frac{m Z_1}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t \left( \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_n \right) + 2r_{b1}(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \end{aligned} \quad (2.92)$$

y recordando que

$$\cos \alpha'_t = \frac{m Z_T}{2 C \cos \beta} \cos \alpha_t \quad (2.93)$$

se tiene

$$\begin{aligned} r_{b1} \gamma_{b1} &= \frac{C Z_1}{Z_T} \cos \alpha'_t \left( \frac{\pi}{Z_1} + \frac{4x_1}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_n \right) + 2r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) = \\ &= \frac{C \cos \alpha'_t}{Z_T} (\pi + 4x_1 \operatorname{tg} \alpha_n) + 2r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Por consiguiente

$$r_{b1} \gamma_{b1} + r_{b2} \gamma_{b2} = \frac{C \cos \alpha'_t}{Z_T} (2\pi + 4x_T \operatorname{tg} \alpha_n) + 2(r_{b1} + r_{b2}) (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \quad (2.95)$$

Finalmente

$$r_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} = \frac{m Z_1}{2 \cos \beta} \cos \alpha'_t \frac{2\pi}{Z_1} = 2\pi \frac{C \cos \alpha'_t}{Z_T} \quad (2.96)$$

y sustituyendo las anteriores expresiones en la Ec. 2.91 de holgura de paso de base, se obtiene

$$\begin{aligned} m h_b &= (r_{b1} + r_{b2}) 2 (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - \frac{C \cos \alpha}{Z_T} (2\pi + 4x_T \operatorname{tg} \alpha_n) - \\ &\quad - (r_{b1} + r_{b2}) 2 (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2\pi \frac{C \cos \alpha'_t}{Z_T} = \\ &= 2 (r_{b1} + r_{b2}) [(\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t)] - \frac{4C x_T}{Z_T} \cos \alpha'_t \operatorname{tg} \alpha_n \end{aligned} \quad (2.97)$$

y teniendo en cuenta que

$$r_{b1} + r_{b2} = C \cos \alpha'_t \quad (2.98)$$

resulta

$$\begin{aligned} m h_b &= 2C \cos \alpha'_t [(\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t)] - \frac{4C x_T}{Z_T} \cos \alpha'_t \operatorname{tg} \alpha_n = \\ &= 2C \left[ (\operatorname{tg} \alpha'_t - \alpha'_t) - (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - \frac{2x_T}{Z_T} \operatorname{tg} \alpha_n \right] \cos \alpha'_t \end{aligned} \quad (2.99)$$

que verifica

$$h_b = h \cos \alpha'_t \quad (2.100)$$

por lo tanto, la holgura de paso no puede ser negativa, y cuando es cero los perfiles de los dientes que no transmiten carga, permanecen en contacto durante el engrane.

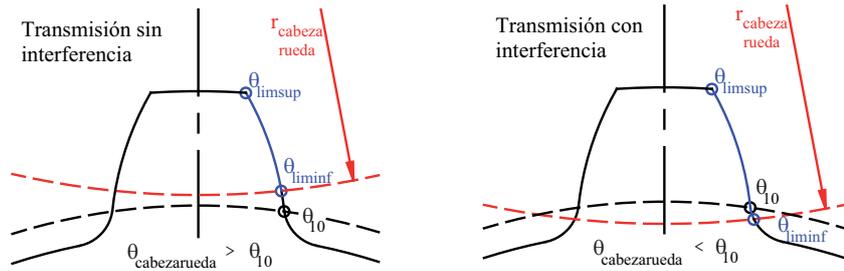


Fig. 2.17: Condición de no interferencia.

### 2.3.6. Condición de no interferencia

En el apartado 2.2.5 se dedujo la ecuación de la base del diente para el caso general de engranajes helicoidales con desplazamiento. Se demostró que, en el caso de que no exista penetración, el punto de entronque entre la evolvente y la trocoide, designado por la letra  $E$ , será aquel correspondiente a  $\varphi = \alpha_n$ , es decir, sustituyendo este valor en la Ec. 2.30 del radio de un punto del perfil de trocoide, obtenemos el radio del punto  $E$  respecto del piñón.

$$r_{E1} = \sqrt{\left(r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \alpha_n)\right)^2 + \left(\frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \alpha_n} m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \alpha_n)\right)^2} \quad (2.101)$$

y puesto que  $E$  es un punto que pertenece tanto a la curva trocoide como a la evolvente, el ángulo  $\theta$  respecto al piñón, correspondiente al punto de entronque, vendrá dado, según la Ec. 2.1 por la expresión:

$$\theta_{1E} = \theta_{10} = \sqrt{\left(\frac{r_{E1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} \quad (2.102)$$

Si algún punto del perfil de evolvente del diente de la otra rueda, intentara engranar por debajo del punto de entronque  $E$  se encontraría con que, antes de llegar al punto de la evolvente del perfil considerado, que es el que buscaría para engranar con él, tropieza con el perfil de trocoide del diente. Este fenómeno se conoce con el nombre de interferencia, Fig. 2.17

Evidentemente, la interferencia se evita si la cabeza de la rueda engrana con un

punto por encima de dicho punto de entronque, es decir,

$$\theta_{cabezarueda} \geq \theta_{10} \quad (2.103)$$

donde el ángulo de la cabeza de la rueda respecto del piñón vendrá dado por,

$$\theta_{cabezarueda} = \theta_1 [\theta_{a2}] = \frac{1}{r_{b1}} [(r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - r_{b2} \theta_{a2}] \quad (2.104)$$

en la que  $\theta_{a2}$  representa al ángulo  $\theta_2$  correspondiente a la cabeza de la rueda.

Por consiguiente, la condición de no interferencia es:

$$\frac{1}{r_{b1}} [(r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - r_{b2} \theta_{a2}] \geq \sqrt{\left(\frac{r_{E1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} \quad (2.105)$$

que operando obtenemos:

$$r_{b1}^2 + \left( (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \right)^2 \geq r_{E1}^2 \quad (2.106)$$

### 2.3.7. Condición de engrane en vacío

En el caso de que no haya penetración el entronque entre la trocoide y la evolvente se produce con la misma tangente, es decir, describe una trayectoria continua sin puntos angulosos. En el momento que talla el punto de entronque de la herramienta se han de encontrar ambas envolventes; por un lado la envolvente de las trayectorias de los puntos de la cabeza (trocoide) y por otro lado la envolvente de los puntos de la cara recta. Por ser envolventes, han de ser tangentes a la trayectoria del punto de entronque, por lo que la tangente ha de ser común.

En el caso de penetración esto no ocurre, pues las dos envolventes se encuentran en un punto que no se tallo simultáneamente. En este caso, el punto de entronque puede obtenerse mediante la siguiente expresión aproximada [42]:

$$\theta_{1E} = 0,523191\zeta \quad (2.107)$$

donde  $\zeta$  debe expresarse en radianes y vendrá dado por:

$$\zeta = \arccos \left[ \frac{r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \alpha_n)}{r_b} \right] \quad (2.108)$$

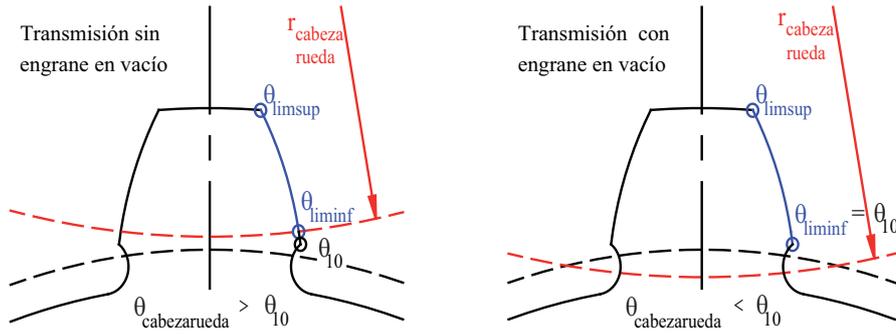


Fig. 2.18: Condición de engrane en vacío.

Puede ocurrir que, si el grado de penetración en el diente es muy alto, algún punto del perfil de evolvente del diente de la otra rueda intentase engranar por debajo del punto de entronque  $E$ . En este caso, se produciría el fenómeno de engrane en vacío, puesto que la rueda intenta engranar con una parte del perfil de evolvente del piñón que no existe, al haber sido dicha parte eliminada por la herramienta en la penetración, Fig. 2.18.

El fenómeno de engrane en vacío se produce si, en un diente penetrado, la cabeza de la rueda engrana con un punto por debajo del punto de entronque, esto es,

$$\theta_{\text{cabesarueda}} = \frac{1}{r_{b1}} [(r_{b1} + r_{b2}) \text{tg } \alpha'_t - r_{b2} \theta_{a2}] \leq \theta_{10} \quad (2.109)$$

Evidentemente, si no hay penetración no puede darse el engrane en vacío.

## Capítulo 3

# Modelo de distribución de carga

Los modelos de cálculo de engranajes frecuentemente utilizan la hipótesis de reparto uniforme de carga a lo largo de la línea de contacto [4, 8, 6]; sin embargo, se sabe que la distribución real de la carga depende de la rigidez de la pareja de dientes en contacto y que es diferente en cada punto de engrane, lo que significa, que la carga por unidad de longitud es también diferente en cualquier punto de la línea de contacto. Por esta razón, se introducen determinados factores que se emplean para corregir los valores teóricos de la tensión de flexión y de la presión superficial [4, 5].

Se pueden encontrar diversos estudios, [55, 77, 56, 72, 59, 95] entre otros, sobre la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto, pero todos ellos proporcionan resultados obtenidos mediante técnicas de resolución numérica o de elementos finitos y presentan sus resultados para transmisiones particulares de engranajes, lo que hace difícil extraer conclusiones de validez general, aplicables a cualquier par de engranajes.

En estudios anteriores [41, 45], el Departamento de Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la UNED desarrolló un nuevo modelo de distribución de carga a lo largo de la línea de contacto, para dientes de engranajes cilíndricos rectos, basado en el principio de minimización del potencial elástico de deformación. Partiendo de la geometría de los dientes de perfil de evolvente en su parte activa, se obtuvieron las expresiones analíticas de los potenciales correspondientes a flexión, compresión y cortadura, en función del punto de contacto y de la fuerza

aplicada. A continuación, mediante métodos variacionales, se calculó la distribución de carga que minimiza dicho potencial, resultando una distribución de carga no uniforme, que varía a lo largo de la línea de contacto así como a lo largo de la línea de engrane. Se utilizó el mismo enfoque para engranajes helicoidales, considerando el engranaje helicoidal como una sucesión de infinitos engranajes rectos de ancho de cara diferencial, cuya geometría coincidirá con la de la sección transversal del diente, y extendiendo las integrales a lo largo de la línea de contacto. Este enfoque permitió obtener el valor de la carga por unidad de longitud para cualquier punto de la línea de contacto y en cualquier posición de engrane. Inicialmente, se proporcionaron los resultados numéricos obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad [41].

Posteriormente, se desarrolló una ecuación analítica aproximada del potencial unitario inverso (la inversa del potencial elástico de una pareja de dientes por unidad de carga y ancho de cara) [58, 45], lo que permite calcular la carga por unidad de longitud en cualquier punto de la línea de contacto y en cualquier posición del ciclo de engrane a partir de dicha ecuación analítica aproximada del potencial. A partir de este modelo, se han desarrollado algunos estudios generales sobre la capacidad de carga [40, 48, 47] y el rendimiento [43, 46, 49], permitiendo realizar nuevas propuestas sobre métodos de cálculo, adecuados para diseños preliminares o con fines de normalización.

Una de las más importantes conclusiones de estos estudios fue que la distribución de carga se ve muy ligeramente afectada por algunos parámetros geométricos, tales como el número de dientes, el coeficiente de desplazamiento, el ángulo de presión, el radio de acuerdo de la herramienta o el ángulo de hélice. Esto permite expresar el potencial unitario inverso como una función de dos únicos parámetros: el grado de recubrimiento transversal y un parámetro del perfil correspondiente al punto de contacto inferior del piñón. Por el contrario, la distribución de carga se ve afectada de forma significativa por todos los parámetros que tienen influencia sobre la longitud de contacto, tales como la altura del diente, la distancia entre los centros de operación o la presencia de engrane en vacío.

En este capítulo se extenderá el estudio del modelo de distribución de carga basado en la minimización del potencial elástico a transmisiones de engranajes rectos y helicoidales no estándar, es decir, con valores no estándar de altura del diente (incluyendo diferentes valores para piñón y rueda) o para modificaciones de la distancia entre centros. Asimismo, se estudiará la validez de la formulación analítica aproximada para engranajes de alto grado de recubrimiento transversal y se corregirá dicha formulación analítica para que se adapte a los engranajes no estándar, mediante la consideración de un valor adecuado para el grado de recubrimiento transversal ficticio.

### 3.1. Potencial de deformación de un diente

Se define el potencial de deformación, denominado también potencial elástico o energía interna de deformación, como una función de estado asociada al trabajo realizado en el proceso de deformación de la carga y descarga en el dominio de comportamiento elástico del material. Su variación en un ciclo cerrado es nula. Si se desprecia la generación de calor producida por el proceso de deformación, el campo de tensiones deriva de un potencial, denominado energía elástica:

$$\vec{\sigma} = \frac{\partial U(\vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\varepsilon}} \quad (3.1)$$

y recíprocamente, el campo de deformaciones  $\vec{\varepsilon}$  deriva de un potencial,  $W(\vec{\sigma})$ , denominado energía complementaria:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\partial W(\vec{\sigma})}{\partial \vec{\sigma}} \quad (3.2)$$

El trabajo realizado sobre un cuerpo inicialmente no deformado, es decir, considerando que la energía elástica inicial sea nula hasta un estado tensional determinado podría calcularse del modo:

$$\tau = \int_0^A \vec{\sigma} d\vec{\varepsilon} = \int_0^A \frac{\partial U(\vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\varepsilon}} d\vec{\varepsilon} = \int_0^A dU = U_A \quad (3.3)$$

Se va a considerar el diente de un engranaje recto como una viga en voladizo de sección rectangular de espesor uniforme (igual al ancho de cara del diente) y anchura variable (el espesor del diente en cada punto del perfil), realizado con un material homogéneo e isótropo, cuya rigidez será diferente en cada punto del perfil. Del mismo modo, una pareja de dientes en contacto tendrá una rigidez conjunta igual a la suma de la rigidez del primer diente cuando la carga actúa en uno de sus puntos más la rigidez del segundo diente cuando la carga actúa en el correspondiente punto de engrane con el primero. Al ser el proceso de engrane una acción conjugada entre los dos perfiles, los puntos de contacto simultáneo en ambas parejas están relacionados entre sí, por lo que la rigidez de ambos dientes está igualmente relacionada.

El diente se supondrá empotrado en su base y la carga actuando en su eje, que coincide con la línea neutra del mismo; la sección del empotramiento se define por los puntos de tangencia del perfil del diente con la circunferencia de pie, a ambos lados del eje del mismo, y se aplicará la teoría de vigas para pequeñas deformaciones.

El potencial de deformación de un diente de engranaje cilíndrico recto sometido a una fuerza normal a su superficie  $F$ , en función de las componentes de ésta, puede expresarse como suma de los potenciales debidos a flexión,  $U_x$ , a compresión,  $U_n$ , y a cortadura,  $U_s$ .

$$U = U_x + U_n + U_s \quad (3.4)$$

Las correspondientes expresiones para cada uno de estos potenciales son:

Potencial debido a flexión:

$$U_x = \int_{y_P}^{y_C} \frac{M^2}{2EI} dy \quad (3.5)$$

Potencial debido a compresión:

$$U_n = \int_{y_P}^{y_C} \frac{N^2}{2E\Omega} dy \quad (3.6)$$

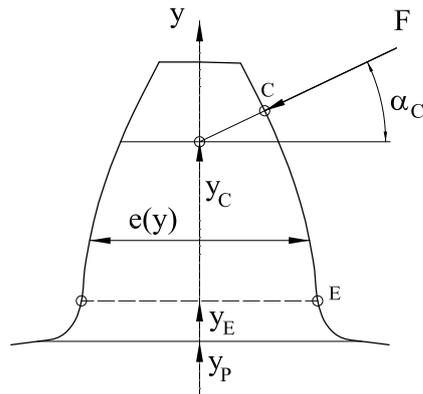


Fig. 3.1: Parámetros geométricos para el cálculo del potencial de deformación.

Potencial debido a cortadura:

$$U_s = C \int_{y_P}^{y_C} \frac{T^2}{2G\Omega} dy \quad (3.7)$$

donde, como se muestra en la figura 3.1, la variable  $y$  se mide sobre el eje de simetría del diente desde el centro del engranaje e indica la sección a considerar:  $y_P$  es el valor de  $y$  correspondiente a la sección de empotramiento e  $y_C$  es el valor de  $y$  correspondiente al punto de aplicación de la carga. El punto de aplicación de la carga se encuentra definido por la intersección de la recta de acción de  $F$  (que coincide con la normal al perfil) con eje de simetría del diente.

Los coeficientes  $E$  y  $G$  son respectivamente los módulos de elasticidad y de elasticidad transversal del material. El coeficiente  $C$  es un factor de corrección del potencial debido a cortadura que, de acuerdo con el teorema de Colignon, tiene en consideración la distribución no uniforme de las tensiones de cortadura de la sección. Para secciones rectangulares, dicho coeficiente toma el valor  $C = 1,5$ .

$M$ ,  $N$  y  $T$  representan el momento flector, el esfuerzo axial y el esfuerzo cortante que produce la fuerza que actúa en dirección normal al perfil, que se representa como  $F$ . Tanto el momento flector como los esfuerzos mencionados, así como los momentos de inercia y de área, dependen del punto de contacto según las siguientes ecuaciones:

$$M = F \cos \alpha_C (y_C - y) \quad (3.8)$$

$$N = F \operatorname{sen} \alpha_C \quad (3.9)$$

$$T = F \operatorname{cos} \alpha_C \quad (3.10)$$

$$I = \frac{b e(y)^3}{12} \quad (3.11)$$

$$\Omega = b e(y) \quad (3.12)$$

donde  $\alpha_C$  es el ángulo de carga o ángulo que forma la recta de acción de  $F$  con la perpendicular al eje del diente,  $b$  es el ancho de cara y  $e(y)$  es el espesor del diente en la sección de ordenada  $y$ . Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones del potencial se obtiene que:

Potencial debido a flexión:

$$U_x = 6 \frac{F^2 \operatorname{cos}^2 \alpha_C}{E b} \int_{y_P}^{y_C} \frac{(y_C - y)^2}{e(y)^3} dy \quad (3.13)$$

Potencial debido a compresión:

$$U_n = \frac{1}{2} \frac{F^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_C}{E b} \int_{y_P}^{y_C} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.14)$$

Potencial debido a cortadura:

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{F^2 \operatorname{cos}^2 \alpha_C}{G b} \int_{y_P}^{y_C} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.15)$$

En las expresiones anteriores, Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15, tanto los valores de la ordenada  $y$ , como el espesor del diente  $e(y)$ , dependen de la geometría del perfil del diente por lo que será necesario diferenciar si están referidas a la parte del perfil de evolvente o a la parte del perfil constituida por la trocoide.

Las expresiones que aparecen en las integrales anteriores son notablemente complejas, especialmente en la parte correspondiente a la trocoide, por lo que su resolución necesariamente requiere el empleo de métodos numéricos.

Los límites de integración entre los que se extienden las expresiones del potencial de deformación pueden descomponerse en dos zonas de geometría claramente diferenciada: la correspondiente a la zona de evolvente y la correspondiente a la zona

de trocoide, de ahí que, la resolución numérica de cada componente del potencial de deformación se subdivida a su vez en otras dos, cada una correspondiente a los tramos antes mencionados. El valor límite de una y otra vendrá dado por la ordenada del punto de entronque  $E$  (Fig. 3.1), punto de unión de los tramos de evolvente y trocoide, que puede calcularse de forma analítica si no existe penetración. Así pues, las Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15 se pueden escribir de nuevo de la forma:

Potencial debido a flexión:

$$U_x = U_{xtr} + U_{xev} \quad (3.16)$$

siendo

$$U_{xtr} = 6 \frac{F^2 \cos(\alpha_C)^2}{E b} \int_{y_P}^{y_E} \frac{(y_C - y)^2}{e(y)^3} dy \quad (3.17)$$

$$U_{xev} = 6 \frac{F^2 \cos(\alpha_C)^2}{E b} \int_{y_E}^{y_C} \frac{(y_C - y)^2}{e(y)^3} dy \quad (3.18)$$

Potencial debido a compresión:

$$U_n = U_{ntr} + U_{nev} \quad (3.19)$$

siendo

$$U_{ntr} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \sin(\alpha_C)^2}{E b} \int_{y_P}^{y_E} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.20)$$

$$U_{nev} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \sin(\alpha_C)^2}{E b} \int_{y_E}^{y_C} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.21)$$

Potencial debido a cortadura:

$$U_s = U_{str} + U_{sev} \quad (3.22)$$

siendo

$$U_{str} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \cos(\alpha_C)^2}{G b} \int_{y_P}^{y_E} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.23)$$

$$U_{sev} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \cos(\alpha_C)^2}{G b} \int_{y_E}^{y_C} \frac{dy}{e(y)} \quad (3.24)$$

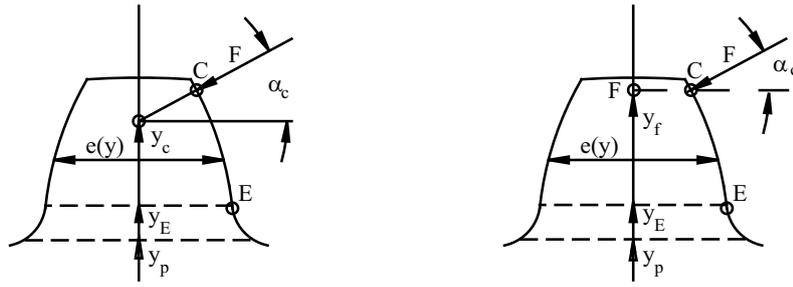


Fig. 3.2: Parámetros geométricos para el cálculo del potencial en función del punto  $C$  (izquierda) y en función del punto  $F$  (derecha).

El momento flector  $M$ , el esfuerzo axial  $N$  y el esfuerzo cortante  $T$  que produce la fuerza  $F$ , se pueden expresar en vez de en función del punto  $C$ , se pueden expresar en función del punto  $F$  que viene definido por la intersección de la recta perpendicular al eje de simetría del diente que pasa por el punto  $C$  y dicho eje, tal y como se observa en la Fig. 3.2.

De esta forma, el momento flector y los esfuerzos axial y cortante, se pueden expresar en función del punto  $F$  como:

$$M = F \cos \alpha_C (y_F - y) - F \operatorname{sen} \alpha_C \frac{e(y_F)}{2} \quad (3.25)$$

$$N = F \operatorname{sen} \alpha_C \quad (3.26)$$

$$T = F \cos \alpha_C \quad (3.27)$$

y para el cálculo de los potenciales de deformación, los límites de integración de los potenciales cambiarán y la integración se realizará desde  $y_p$  hasta  $y_F$ ; por consiguiente, el potencial debido a flexión queda:

$$U_x = 6 \frac{F^2}{E b} \int_{y_p}^{y_F} \frac{[\cos \alpha_C (y_F - y) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_C e(y_F)]^2}{e(y)^3} dy \quad (3.28)$$

Potencial debido a compresión:

$$U_n = \frac{1}{2} \frac{F^2}{E b} \int_{y_p}^{y_C} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_C}{e(y)} dy \quad (3.29)$$

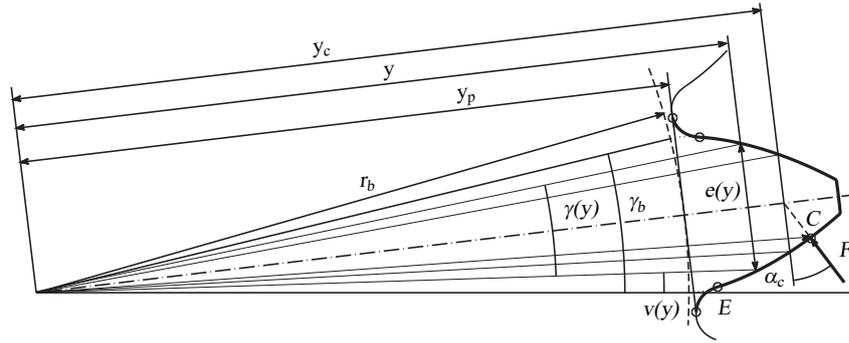


Fig. 3.3: Espesor del diente.

Potencial debido a cortadura:

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{F^2}{G b} \int_{y_p}^{y_c} \frac{\cos^2 \alpha_c}{e(y)} dy \quad (3.30)$$

### 3.2. Potencial de deformación de una pareja de dientes en contacto

A partir de la geometría del diente de perfil de evolvente y de la figura 3.3 puede escribirse el espesor del diente como:

$$e(y) = 2 r(y) \operatorname{sen} \frac{\gamma(y)}{2} \quad (3.31)$$

donde  $r(y)$  es la distancia del punto del perfil al centro de la rueda y  $\gamma(y)$  es el espesor angular del diente en el punto considerado.

En la sección 2.2.7, se definió el espesor angular del diente a un radio cualquiera de la forma:

$$\gamma(y) = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left[ \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} \right] \quad (3.32)$$

ecuación en la cual  $Z$  es el número de dientes,  $x$  el coeficiente de desplazamiento,  $\alpha_n$  el ángulo de presión de referencia y  $\alpha_t$  el ángulo de presión en la sección transversal.

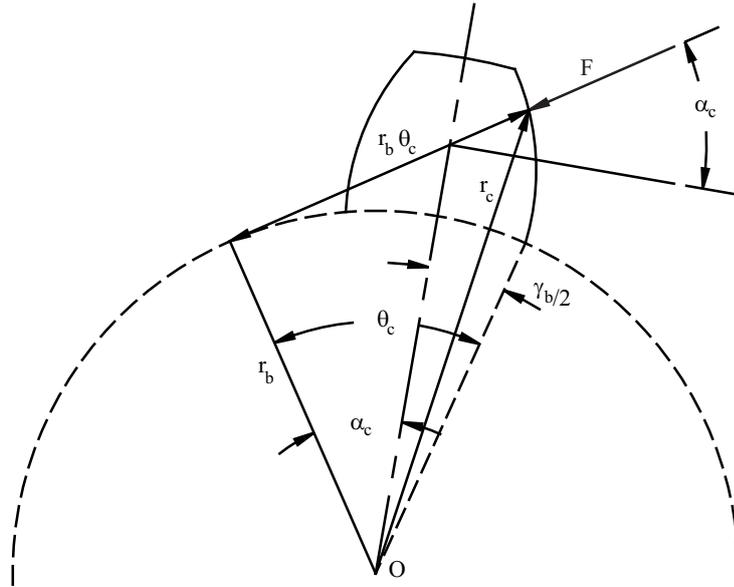


Fig. 3.4: Ángulo de carga.

Igualmente, según la Fig. 5.5, se puede expresar el ángulo de carga  $\alpha_C$  en función del es el espesor angular del perfil de evolvente en la circunferencia de base  $\gamma_b$  y de la distancia del punto de contacto al centro de la rueda  $r_C$ , según la siguiente ecuación:

$$\alpha_C = \theta_C - \frac{\gamma_b}{2} = \sqrt{\frac{r_C^2}{r_b^2} - 1} - \left( \frac{\pi}{2Z} + \frac{2x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \right) \quad (3.33)$$

Por consiguiente, se puede expresar el potencial de deformación de un diente en función del radio del punto de contacto correspondiente de cada engranaje:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{x1} + U_{n1} + U_{s1} = U_1(r_{C1}) \\ U_2 &= U_{x2} + U_{n2} + U_{s2} = U_2(r_{C2}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pero en ruedas de perfil de evolvente, atendiendo a la Fig. 3.5, la suma de los radios de curvatura de los perfiles en el punto de contacto, medida sobre la línea tangente común a ambas circunferencias de base, es una cantidad constante:

$$\rho_1 + \rho_2 = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (3.35)$$

$$\sqrt{r_{C1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{C2}^2 - r_{b2}^2} = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (3.36)$$

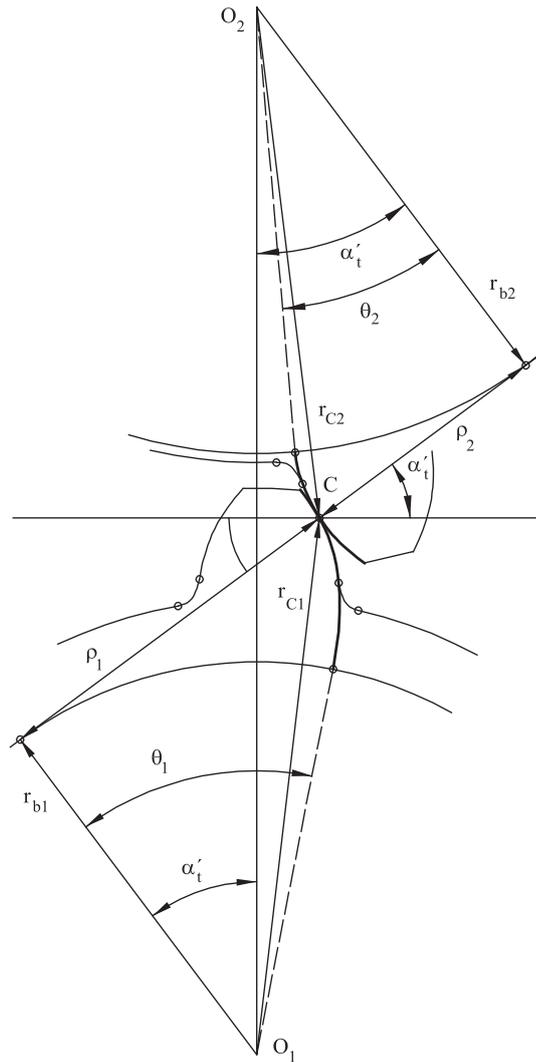


Fig. 3.5: Pareja de dientes en contacto.

donde los subíndices 1 y 2 denotan el piñón y la rueda, respectivamente, por lo que se puede afirmar que:

$$r_{c2} = f(r_{c1}) \quad (3.37)$$

De este modo, el potencial de deformación de una pareja de dientes en contacto, suma del potencial del piñón más el potencial de la rueda, puede expresarse en función de una única variable:

$$U = U_1(r_{c1}) + U_2(r_{c2}) = U_1(r_{c1}) + U_2(r_{c1}) = U(r_{c1}) \quad (3.38)$$

### 3.2.1. Adimensionalización de la posición de engrane

Según la Ec. 3.38 el potencial total de una pareja de dientes en contacto depende de una única variable  $r_{C1}$ . En la Fig. 3.5 se observa que la variable  $r_{C1}$  se puede expresar, fácilmente, en función del ángulo  $\theta_1$  que define la posición del punto de contacto dada por el ángulo abarcado por el radio de base del piñón en el sistema de referencia de la evolvente.

Puede definirse una nueva variable  $\xi$ , a partir del ángulo  $\theta_1$ , mediante una transformación que lo adimensionaliza. Dicha variable especifica igualmente la posición de engrane, a través de la expresión:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \theta_1 = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \quad (3.39)$$

De este modo puede definirse el potencial unitario inverso y los límites del intervalo de contacto como función de  $\xi$ . Para cada extremo se define la variable adimensional  $\xi$  con el valor del ángulo  $\theta_1$  correspondiente: para el punto más bajo de contacto,  $\xi_{inn}$ , y para el punto más alto de contacto, es decir, el punto de cabeza del piñón,  $\xi_{out}$ .

En la sección 2.3.4 se definió el grado de recubrimiento en la sección frontal,  $\varepsilon_\alpha$ , como el ángulo girado por un diente desde que comienza su engrane hasta que lo finaliza dividido por el paso angular, Ec. 2.74. Dicho grado de recubrimiento corresponde, en la variable adimensionalizada  $\xi$ , al valor del intervalo de contacto. Por tanto, se puede escribir:

$$\xi_{out} = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \quad (3.40)$$

Del mismo modo, la variación de  $\xi$  entre un mismo punto de contacto de dos dientes consecutivos vendrá dada por el ángulo girado entre dichas posiciones, que obviamente corresponde a un incremento de ángulo  $\theta_1 = 2\pi / Z_1$ , luego

$$\Delta\xi(Z_i, Z_{i+1}) = \Delta\theta_1(Z_i, Z_{i+1}) \frac{Z_1}{2\pi} = \frac{2\pi}{Z_1} \frac{Z_1}{2\pi} = 1 \quad (3.41)$$

Según lo anterior, la energía potencial elástica de un diente puede expresarse como función de un único parámetro del perfil que determina el punto de contacto  $U = U(\xi)$ .

Por supuesto, esto es válido, tanto para el diente del piñón como para el diente de la rueda, de modo que:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(\xi) \\ U_2 &= U_2(\xi_2) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan el piñón y la rueda, respectivamente, aunque por simplicidad el parámetro del perfil del piñón se denota por  $\xi$ , sin subíndice. La suma de los radios de curvatura de los dos perfiles transversales en el punto de contacto es constante a lo largo la línea de acción, y es igual a la distancia entre los puntos de tangencia de la línea de presión de funcionamiento con las circunferencias de base de piñón y de la rueda, lo que proporciona una relación entre los parámetros del perfil del piñón y la rueda:

$$\xi + \xi_2 = \lambda = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_i \quad (3.43)$$

donde  $\alpha'_i$  es el ángulo de presión de funcionamiento en la sección transversal y  $\lambda$  la distancia entre los dos puntos de tangencia dividido por el radio de base y el paso angular del piñón. La energía potencial de un par de dientes en contacto es la suma de los potenciales del piñón y la rueda, que de acuerdo con Eq 5.20, se puede expresar en función del parámetro de perfil del piñón:

$$U = U_1 + U_2 = U(\xi) \quad (3.44)$$

Por consiguiente, para calcular el potencial en la evolvente habrá que realizar, primeramente, el cambio de  $y$  a  $\theta$  y posteriormente de  $\theta$  a  $\xi$ . Para ello, es necesario, expresar tanto el espesor del diente como el espesor angular en función de  $\xi$ , cambiar los límites de integración: el límite inferior denominado  $\xi_{10}$  se corresponderá con el punto de corte entre la evolvente y la trocoide, que en el caso de no existir penetración, será el punto de entronque entre evolvente y trocoide, y el límite superior se corresponderá con el  $\xi$  del punto  $F$  y por último, será necesario realizar el cambio de variable en la integración:  $(dy/d\theta)(d\theta/d\xi)$ .

Por consiguiente, los potenciales debidos a flexión, compresión y cortadura son,

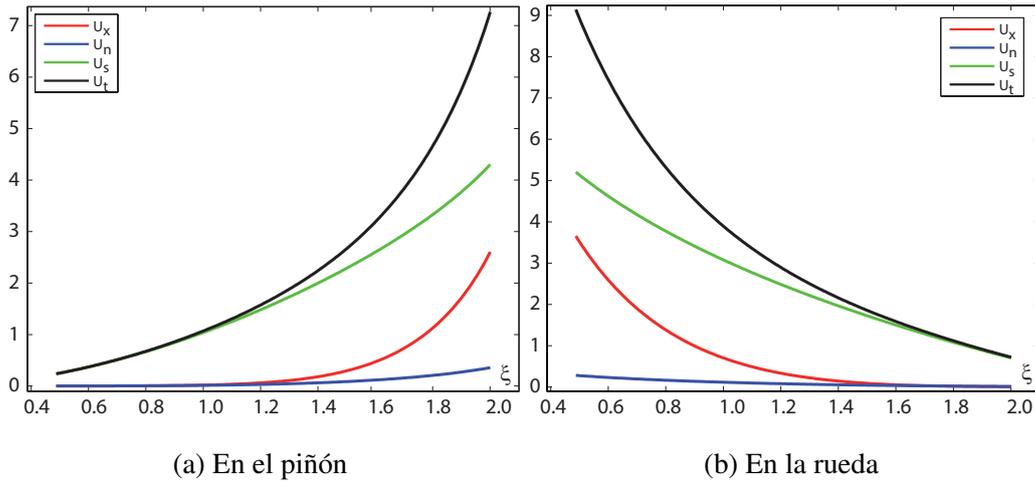


Fig. 3.6: Potencial elástico en la evolvente.

respectivamente:

$$U_{xev} = 6 \frac{F^2}{E b} \int_{\xi_{10}}^{\xi_F} \frac{[\cos \alpha_C (y_F - y(\xi)) - \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_C e(y_F)]^2}{e(y(\xi))^3} \frac{dy}{d\xi} d\xi \quad (3.45)$$

$$U_{nev} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{E b} \int_{\xi_{10}}^{\xi_F} \frac{\text{sen}(\alpha_C)^2}{e(y(\xi))} \frac{dy}{d\xi} d\xi \quad (3.46)$$

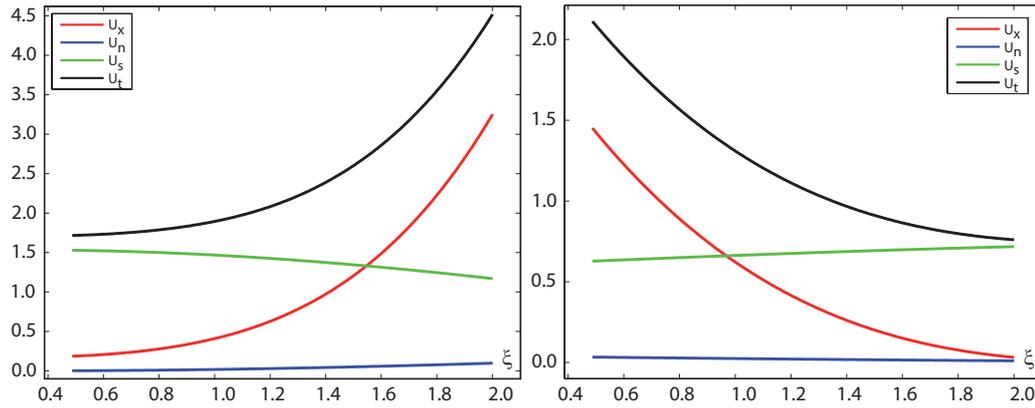
$$U_{sev} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{G b} \int_{\xi_{10}}^{\xi_F} \frac{\cos(\alpha_C)^2}{e(y(\xi))} \frac{dy}{d\xi} d\xi \quad (3.47)$$

En la figura 3.6 se muestran los diferentes potenciales de deformación en la evolvente del piñón y en la evolvente de la rueda. El potencial debido a flexión  $U_x$  se representa en rojo, el debido al esfuerzo normal  $U_n$  en azul, en verde el debido al esfuerzo cortante  $U_s$  y finalmente en negro se representa la suma de los tres potenciales.

Del mismo modo, para calcular el potencial en la trocoide se realizará el cambio de variable de  $y$  a  $\varphi$ , y los potenciales correspondientes serán:

$$U_{xtr} = 6 \frac{F^2}{E b} \int_{\pi/2}^{\varphi_{10}} \frac{[\cos \alpha_C (y_F - y(\varphi)) - \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_C e(y_F)]^2}{e(y(\varphi))^3} \frac{dy}{d\varphi} d\varphi \quad (3.48)$$

$$U_{ntr} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{E b} \int_{\pi/2}^{\varphi_{10}} \frac{\text{sen}(\alpha_C)^2}{e(y(\varphi))} \frac{dy}{d\varphi} d\varphi \quad (3.49)$$



(a) En el piñón

(b) En la rueda

Fig. 3.7: Potencial elástico en la trocoide.

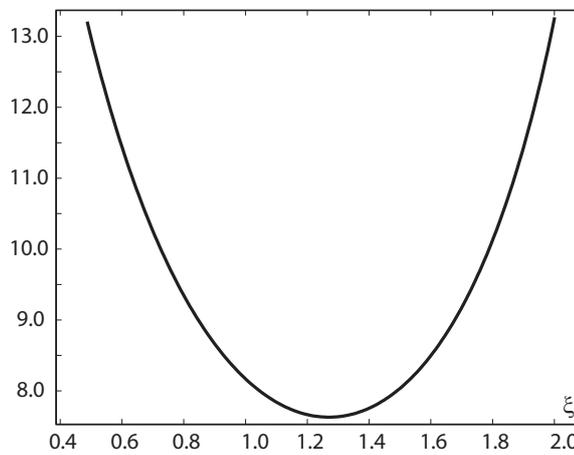


Fig. 3.8: Potencial elástico total de la pareja de dientes.

$$U_{str} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{G b} \int_{\pi/2}^{\varphi_{10}} \frac{\cos(\alpha_c)^2}{e(y(\varphi))} \frac{dy}{d\varphi} d\varphi \quad (3.50)$$

En la figura 3.7 se muestra el potencial de deformación en la trocoide del piñón y en la trocoide de la rueda. El potencial debido a flexión  $U_x$  se representa en rojo, el debido al esfuerzo normal  $U_n$  en azul, en verde el debido al esfuerzo cortante  $U_s$  y finalmente en negro se representa la suma de los tres potenciales.

En la figura 3.8 se muestra el aspecto típico de la variación con la posición de contacto, del potencial total de deformación de la pareja de dientes.

### 3.3. Potencial de deformación de varias parejas de dientes en contacto

De las expresiones generales de los potenciales, puede observarse que son proporcionales al cuadrado de la fuerza que actúa en dirección normal al perfil, e inversamente proporcionales al ancho de cara; por lo que podría definirse un potencial unitario por unidad de ancho de cara y por unidad de fuerza,  $u(\xi)$ , que verificaría:

$$U(\xi) = \frac{F^2}{b} u(\xi) \quad (3.51)$$

Pudiera ocurrir que, durante el intervalo de contacto de una pareja de dientes y en función del grado de recubrimiento de la transmisión,  $\varepsilon_\alpha$ , existiera más de una pareja de dientes en contacto simultáneo; por ejemplo, en la figura 3.9 se muestra el potencial elástico de deformación de una transmisión con grado de recubrimiento entre 1 y 2. En cada instante, el potencial total de la transmisión será la suma de los potenciales de todas las parejas en contacto:

$$U_T = \sum_i U_i(\xi_i) = \sum_i \frac{F_i^2}{b} u_i(\xi_i) = \frac{1}{b} \sum_i F_i^2 u_i(\xi_i) \quad (3.52)$$

en donde, si  $P$  es la potencia transmitida y  $\omega$  la velocidad angular de rotación, se debe verificar que:

$$\sum_i F_i = F = \frac{P}{\omega_1 r_{b1}} \quad (3.53)$$

La función potencial interno de deformación permite obtener la distribución de la carga a lo largo del intervalo de contacto, mediante la minimización de dicha función potencial por el método de los multiplicadores de Lagrange, Ec. 3.52, con la restricción dada por la Ec. 3.53, obteniéndose el siguiente resultado:

$$F_i(\xi_i) = \frac{\frac{1}{u_i(\xi_i)}}{\sum_{j=0}^{Z_1-1} \frac{1}{u_j(\xi_j)}} F \quad (3.54)$$

La solución anterior representa la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto pues, como ya se ha visto, los respectivos potenciales dependen de la posición

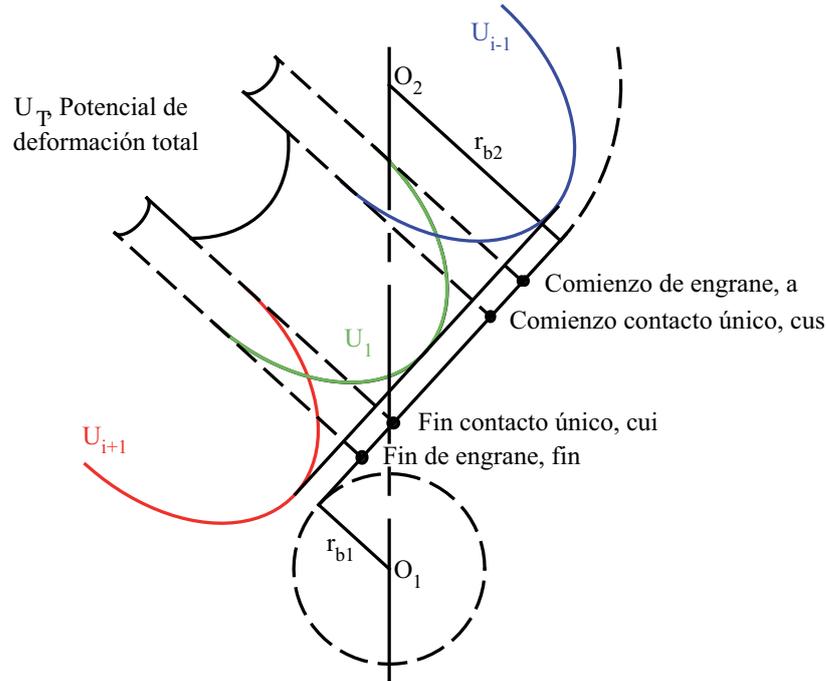


Fig. 3.9: Potencial elástico de deformación total en una transmisión con grado de recubrimiento entre 1 y 2.

del punto de contacto. Dicha expresión muestra que la carga que está actuando en un instante en una pareja  $i$  es igual a la inversa de su potencial unitario dividida por la suma total de las inversas de los potenciales unitarios de todas las parejas de dientes en contacto en dicho instante y multiplicado por la carga total transmitida.

Si se define el potencial unitario inverso  $v(\xi)$  como la función inversa de la función potencial unitario  $u(\xi)$ ,  $v(\xi) = u(\xi)^{-1}$  (Fig. 3.10), la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto queda de la forma

$$F_i(\xi_i) = \frac{v_i(\xi_i)}{\sum_{j=0}^{Z_i-1} v_j(\xi_j)} F \quad (3.55)$$

donde  $F_i(\xi_i)$  y  $v_i(\xi_i)$  son la carga y el potencial unitario inverso del diente  $i$  cuando el contacto se produce en el punto del perfil correspondiente a  $\xi_i$ ,  $F$  es la carga total transmitida, y se supone  $v_i(\xi_i) = 0$  fuera del intervalo de contacto  $\xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ , donde  $\xi_{inn}$  es el parámetro del perfil correspondiente al punto inferior de contacto del piñón. De acuerdo con esto, la relación de intercambio de carga  $R(\xi)$  (o la fracción de

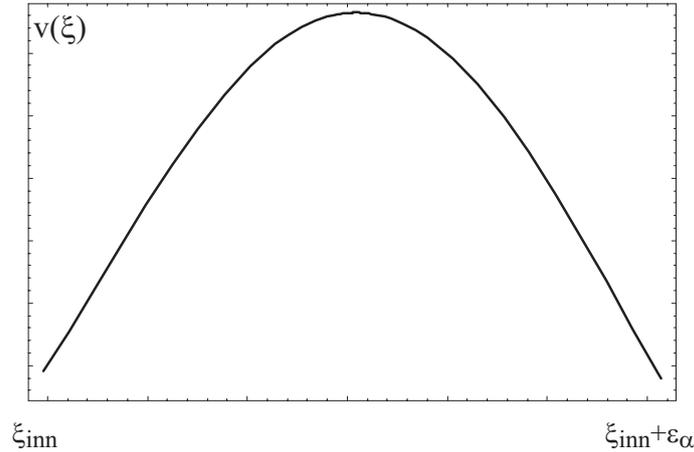


Fig. 3.10: Aspecto típico de la función potencial unitario inverso.

la carga soportada por la pareja de dientes considerada) está dada por:

$$R_i(\xi_i) = \frac{F_i(\xi_i)}{F} = \frac{v_i(\xi_i)}{\sum_{j=0}^{Z_1-1} v_j(\xi_j)} = \frac{v(\xi_i)}{\sum_{j=0}^{Z_1-1} v(\xi_i + (j - i))} \quad (3.56)$$

### 3.4. Potencial de deformación de infinitas parejas. Engranajes helicoidales

La distribución de carga que describe la Ec. 3.55, es constante a lo largo del ancho del diente en el caso de engranajes rectos, puesto que todos los puntos de la línea de contacto están definidos por el mismo ángulo  $\theta$ . Por el contrario, no ocurre lo mismo en el caso de engranajes helicoidales, en donde la línea de contacto, en cada instante, abarca un rango de posiciones desde la primera sección del diente, que entra en contacto, hasta la última sección de dicho diente, Fig. 3.11.

Se puede utilizar el mismo enfoque para engranajes helicoidales dividiendo el diente helicoidal en infinitas rebanadas, perpendiculares al eje del engranaje, de tal manera que se puede considerar un diente helicoidal como una sucesión de infinitos dientes rectos de espesor diferencial girados entre sí el ángulo de hélice. Luego, definiendo la variable  $l$  como la coordenada lineal a lo largo de la línea de contacto

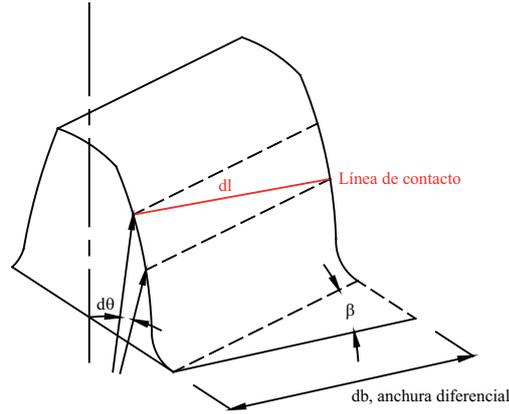


Fig. 3.11: Variación del ángulo  $\theta$  a lo largo de la línea de contacto en cada instante, en un diente de un engranaje helicoidal.

y teniendo en cuenta que dicha línea puede estar constituida por una o más parejas de dientes en contacto simultáneo, se tiene que el potencial unitario de deformación es función de  $l$ , ya que como se ha visto, el radio vector que define la posición del punto de contacto también es función de dicha variable.

Considerando que el potencial unitario de deformación en un engranaje recto es independiente del ancho de cara, puede generalizarse la Ec. 3.54 o la Ec. 3.55 sin más que sustituir el sumatorio por una expresión integral extendida a lo largo de la línea de contacto, de longitud total  $l_c$  (considerando todas las parejas de dientes en contacto en cada instante), y la fuerza actuante  $F$  por su equivalente  $f(l) dl$ , siendo  $f(l)$  la fuerza por unidad de longitud.

$$f(l) = \frac{1}{\int_{l_c} \frac{dl}{u(l)}} F = \frac{v(l)}{\int_{l_c} v(l) dl} F \quad (3.57)$$

La función potencial unitario inverso tiene la forma característica mostrada en la Fig. 3.10, correspondiente para los sucesivos dientes de espesor diferencial considerados a lo largo del engrane.

Se puede realizar un cambio de variable para transformar la variable  $l$ , coordenada lineal a lo largo de la línea de contacto, en la variable  $\xi$ , sin más que estudiar la

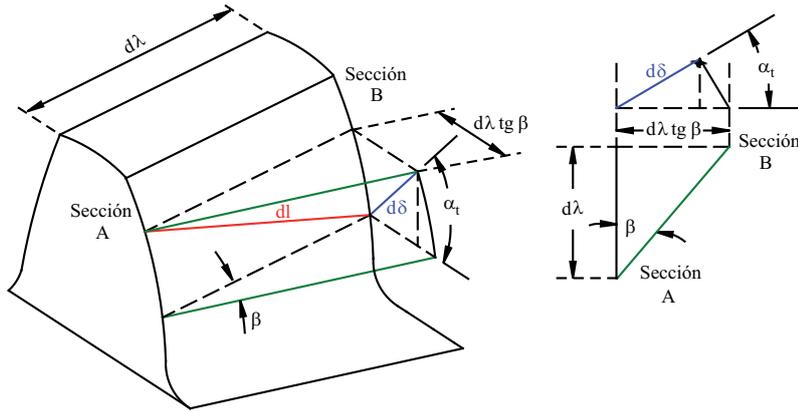


Fig. 3.12: Geometría del contacto en engranajes helicoidales.

proyección de la dirección de  $l$  sobre el plano transversal de la transmisión Fig. 3.12. Si se designa por  $\delta$  la proyección de  $l$  sobre el plano transversal, y sabiendo que  $d\xi$  es la diferencia entre los valores  $\xi$  correspondientes a los puntos de contacto de dos secciones transversales separadas una distancia  $d\lambda$ , las relaciones que ligan dichas variables son

$$d\xi = \frac{Z_1}{2\pi} d\theta_1 \quad (3.58)$$

$$d\delta = -r_{b1} d\theta_1 \quad (3.59)$$

$$d\delta = d\lambda \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_t \quad (3.60)$$

Si se considera que la primera sección del piñón en entrar en contacto es la sección coincidente con el plano del papel, la coordenada  $l$  se mide penetrando en este plano, de ahí el signo negativo de la anterior Ec. 3.59. De las anteriores ecuaciones se obtiene que la relación entre las variables  $\xi$  y  $\lambda$  es:

$$d\xi = -\frac{\varepsilon_\beta}{b} d\lambda \quad (3.61)$$

donde la variable  $\varepsilon_\beta$  representa el grado de recubrimiento en el salto y como se definió en la Ec. 2.77 es:

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\pi m} \quad (3.62)$$

Se deduce, por tanto, que  $d\xi$  es la contribución al salto de un intervalo de contacto correspondiente a un intervalo en la dirección del ancho de cara de valor  $d\lambda$ .

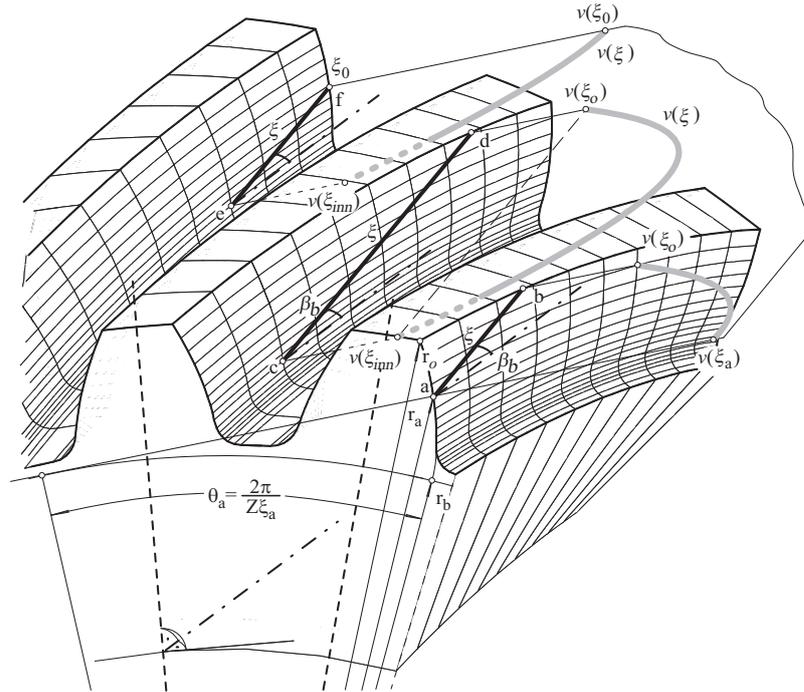


Fig. 3.13: Distribución de carga en engranajes helicoidales.

De la figura 3.13, se observa que la longitud de la línea de contacto  $\Delta l_c$ , cuando un tramo de longitud  $\Delta b$  del ancho de cara está en contacto, será igual a:

$$\Delta l_c = \frac{\Delta b}{\cos \beta_b} \tag{3.63}$$

Se puede escribir la relación entre  $dl$  y  $d\xi$  a partir de las ecuaciones 3.61 y 3.63:

$$dl = -\frac{b}{\varepsilon_\beta \cos \beta_b} d\xi \tag{3.64}$$

relación que resulta ser lineal y demuestra que a cada punto de la línea de contacto le corresponde un valor de  $\xi$ ; por consiguiente, se puede efectuar un cambio de variable en la Ec. 3.57 para realizar la integral en función de la variable  $\xi$ :

$$f(\xi) = \frac{v(\xi)}{\int_{\xi} v(\xi) d\xi} F \tag{3.65}$$

resultando, como combinación de las anteriores ecuaciones y una vez simplificada, la

siguiente ecuación:

$$f(\xi, \xi_0) = \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta_b}{b} \frac{v(\xi)}{I_v(\xi_0)} F \quad (3.66)$$

en la que  $\xi_0$  es el parámetro correspondiente al punto en contacto de la primera sección transversal del diente considerado. La función  $I_v$ , depende sólo de dicha variable, y vale:

$$I_v(\xi_0) = \int_{l_c} v(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+j-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+j} v(\xi) d\xi \quad (3.67)$$

donde la variable  $l_c$  de la primera integral denota que la integral se extiende a lo largo de la línea de contacto, la variable  $\xi_0$  define la posición del engrane, mientras que  $\xi$  caracteriza cada uno de los puntos de la línea de contacto. La figura 3.13 muestra la variación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  a lo largo de la línea de contacto, que es proporcional a la distribución de carga para un valor dado de  $\xi_0$ . La sección transversal de referencia puede ser cualquier sección transversal arbitraria del diente helicoidal, sin embargo la expresión de  $I_v(\xi_0)$  depende de la sección elegida, que para la Ec. 3.67 se corresponde con la sección extrema de menor  $\xi$ .

## 3.5. Aproximación de la función potencial inverso

### 3.5.1. Aproximación de la función potencial unitario inverso para engranajes convencionales

En los apartados precedentes se han formulado ecuaciones del potencial de deformación en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, tanto rectos como helicoidales, lo que permite obtener expresiones para el reparto de carga, determinándose un reparto no uniforme a lo largo de la línea de contacto.

El problema radica en que las Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15 del potencial de deformación, resultan extremadamente complejas y su resolución ha de hacerse necesariamente, por métodos numéricos. No obstante, puede calcularse el potencial total de una transmisión, o su valor inverso, para cada posición de engrane.

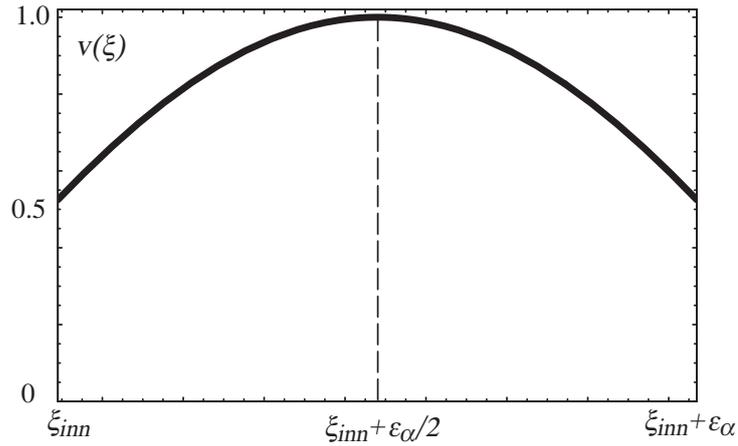


Fig. 3.14: Aspecto típico de la función unitario inverso  $v(\xi)$ .

El desarrollo de modelos de cálculo ha de basarse en formulaciones analíticas de aplicación genérica y lo más simples posible para que su uso y aplicación sea sencillo y extendido, sin perder precisión en los resultados y abarcando los casos de diseño habituales.

Por ello, era necesario, visto que no era posible un desarrollo totalmente analítico, encontrar una función aproximada para la función potencial unitario inverso, a partir del modelo de distribución de carga no uniforme a lo largo de la línea de contacto presentado en este capítulo.

Según el planteamiento de buscar expresiones analíticas elementales y de amplio rango de validez, en [58], se intentó aproximar la función potencial unitario inverso por diferentes tipos de funciones (polinómicas, trigonométricas...). Se demostró que se obtenía una buena aproximación del potencial unitario inverso con una función coseno del tipo:

$$v(\xi) = \cos[b_0(\xi - \xi_m)] \quad (3.68)$$

Para determinar el valor del coeficiente  $b_0$  y de  $\xi_m$  del modelo anterior se emplearon los valores que ofrece la función de reparto de carga para engranajes rectos, que, para el modelo propuesto, ha quedado deducida en la Ec. 3.54, cuyos valores son prácticamente constantes para cualquier transmisión y su uso está ampliamente

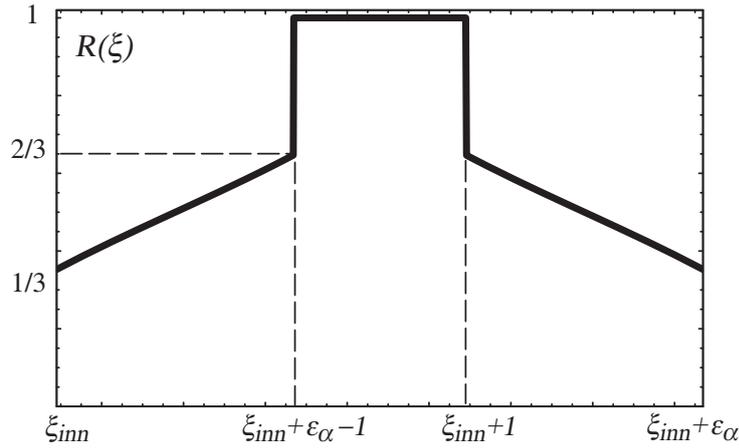


Fig. 3.15: Reparto de carga para engranajes estándar con  $\varepsilon_\alpha$  entre 1 y 2.

aceptado por las normas de diseño [37]. De este modo se obtuvo la expresión:

$$\xi_m = \xi_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha \quad (3.69)$$

lo que supone que la distribución es simétrica respecto del punto medio del intervalo de contacto,  $\xi_m$ . Además, en dicho punto medio se alcanza el valor máximo de la función aproximación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$ .

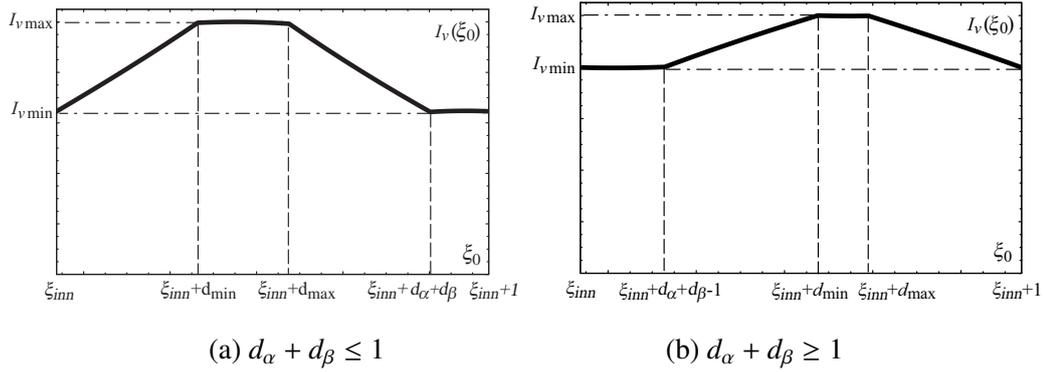
Con el valor de  $\xi_m$  se dedujo el valor del parámetro  $b_0$ , obteniendo la expresión:

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \quad (3.70)$$

Este valor del parámetro  $b_0$ , junto con el valor para  $\xi_m$ , aplicados a la Ec. 3.68 constituyen la aproximación para la función potencial unitario inverso.

De acuerdo con las ecuaciones 3.55, 3.66 y 3.67, la amplitud de  $v(\xi)$  no tiene ninguna influencia en la distribución de la carga, por consiguiente, se puede tomar una amplitud de valor unitario, como en la Ec. 3.68, y trabajar con la función  $v(\xi)$  normalizada, cuyo valor máximo se hace igual a 1. La figura 3.14 muestra el aspecto típico de la función  $v(\xi)$ .

Según lo anterior, el reparto de carga para engranajes rectos se puede obtener reemplazando la Ec. 3.68 en la Ec. 3.55, con lo que se obtiene los siguientes resultados

Fig. 3.16: Forma típica de las gráficas de la función  $I_v(\xi_0)$ .

para engranajes con grado de recubrimiento entre 1 y 2:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \frac{\cos[b_0(\xi - \xi_m)]}{\cos[b_0(\xi - \xi_m)] + \cos[b_0(\xi + 1 - \xi_m)]} && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha} - 1 \\
 R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha} - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\
 R(\xi) &= \frac{\cos[b_0(\xi - \xi_m)]}{\cos[b_0(\xi - 1 - \xi_m)] + \cos[b_0(\xi - \xi_m)]} && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

el cual está representado en la Fig. 3.15. Se puede apreciar que la variación de  $R(\xi)$  en los distintos tramos es prácticamente lineal. Por otro lado, las ordenadas de los puntos singulares de la función reparto de carga, se encuentran siempre muy próximos a 0.33 y 0.67, por lo que la función reparto de carga dada en la Ec. 3.72 puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi - \xi_{inn}}{\varepsilon_{\alpha} - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha} - 1 \\
 R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha} - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha} - \xi}{\varepsilon_{\alpha} - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_{\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Para engranajes helicoidales, la carga por unidad de longitud en un punto de contacto (descrito por  $\xi$ ) en una posición de engrane (descrita por la variable  $\xi_0$ ) viene dada por la Ec. 3.66, en la cuál  $v(\xi)$  e  $I_v(\xi_0)$  vienen dadas por las Ecs. 3.68 y 3.67, respectivamente.

La función  $I_v(\xi_0)$  se puede expresar a partir de las Ecs. 3.67 y 3.68 como:

$$\begin{aligned} I_v(\xi_0) &= \sum_{j=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+j-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+j} \cos[b_0(\xi - \xi_m)] d\xi = \\ &= \frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{E_\gamma} \left[ \text{sen} \left[ b_0 \left( \zeta_{i,sup} - \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right) \right] - \text{sen} \left[ b_0 \left( \zeta_{i,inf} - \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde

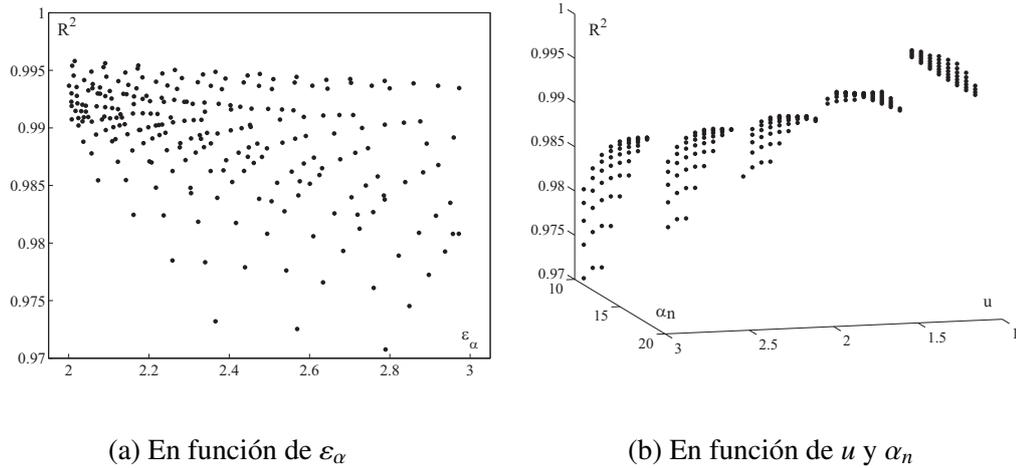
$$\begin{aligned} \zeta_{i,sup} &= \xi_0 + i + \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \text{mín}(\xi_0 + i, \xi_{inn}) - \text{máx}(\xi_0 + i, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \\ \zeta_{i,inf} &= \xi_0 + i - \varepsilon_\beta + \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \text{mín}(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn}) - \text{máx}(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \end{aligned} \quad (3.74)$$

De este modo, la función  $I_v(\xi_0)$  toma diferentes formas dependiendo de si la suma de las partes decimales del grado de recubrimiento transversal y en el salto es menor o mayor que 1, tal y como se representa en la Fig. 3.16.

### 3.5.2. Aproximación de la función potencial inverso para engranajes HTCR estándar

Para engranajes helicoidales con alto grado de recubrimiento transversal (*High Transverse Contact Ratio*, HTCR), se ha comprobado que la función potencial unitario inverso sigue teniendo la misma forma que para engranajes convencionales (Fig. 3.14). Por consiguiente, cabe esperar que la aproximación del potencial unitario inverso mediante la función de tipo coseno definida en la Ec. 3.68 siga siendo válida.

Para verificar la validez de la aproximación del potencial unitario inverso mediante la Ec. 3.68, se ha estudiado la aproximación global de ambas curvas (numérica y analítica) mediante el coeficiente de determinación múltiple ajustado, denotado por  $R^2$  o con las siglas *ARS* (*Adjusted Regression Squared*). Este coeficiente es una medida descriptiva que sirve para evaluar la bondad del ajuste del modelo a los datos porque mide la capacidad predictiva del modelo ajustado; si se expresa en tanto por ciento, representa el porcentaje de información que explica el modelo. Además del coeficiente

Fig. 3.17: Factor  $R^2$  de ajuste de  $v(\xi)$ .

$R^2$ , se evaluará el error máximo que se produce entre ambas curvas de potencial; este error máximo se ha calculado según:

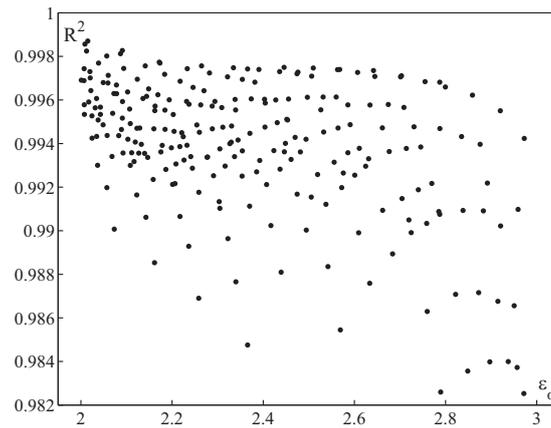
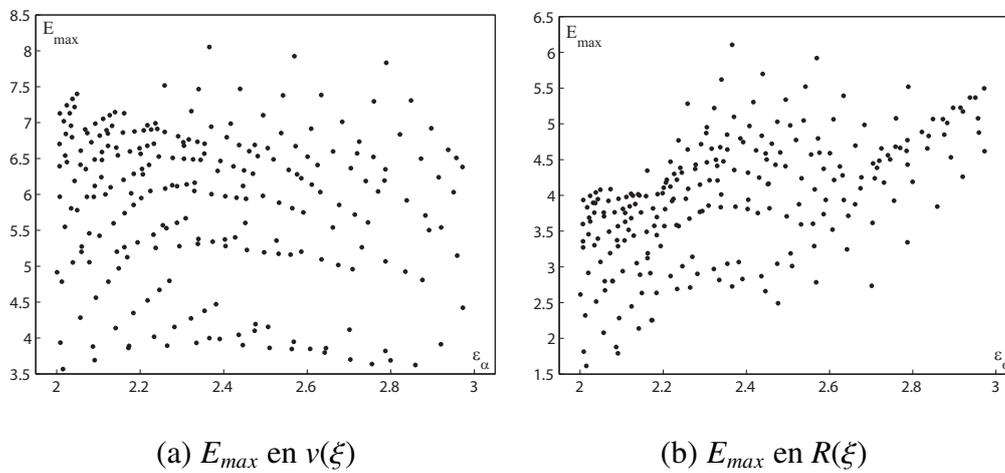
$$E_{max} = \max \left( \frac{v_{num}(\xi) - v_{cos}(\xi)}{v_{num}(\xi)} 100 \right) \quad (3.75)$$

o para el caso del reparto de carga se calcula con la ecuación:

$$E_{max} = \max \left( \frac{R_{num}(\xi) - R_{cos}(\xi)}{R_{num}(\xi)} 100 \right) \quad (3.76)$$

Se han realizado una serie de estudios, modificando los principales parámetros geométricos dentro de unos rangos, con el objetivo de verificar la función de aproximación analítica propuesta y determinar qué parámetros influyen en ella; para ello, se ha cubierto el rango de valores del grado de recubrimiento transversal desde valores ligeramente superiores a 2 hasta valores cercanos a 3. Para conseguir grados de recubrimiento transversal cercanos a 3, a menudo es necesario considerar engranajes con tan elevado número de dientes que en la realidad no se fabrican, pero permite demostrar que el modelo propuesto es válido para el rango de grado de recubrimiento transversal considerado.

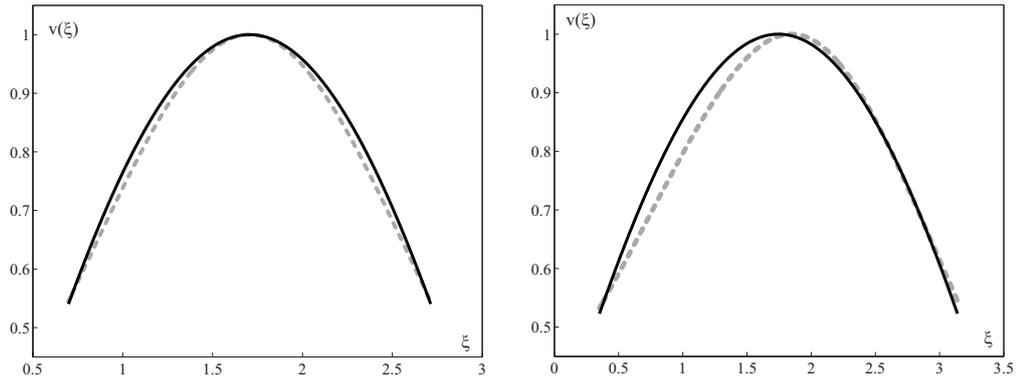
Primeramente, se ha realizado un estudio con los valores de los parámetros de diseño mostrados en la tabla 3.1. Estos valores dan un total de 315 combinaciones, de los cuales, únicamente se considerarán las 242 combinaciones que cumplen que tienen grado de recubrimiento entre 2 y 3 y en las cuales no se produce engrane en vacío. La

Fig. 3.18:  $R^2$  de  $R(\xi)$  en función de  $\varepsilon_\alpha$ .Fig. 3.19: Error máximo:  $E_{max}$ .

validación de la función aproximación del potencial unitario inverso para engranajes helicoidales quedaría también demostrada con este estudio, puesto que un engranaje helicoidal sería una sucesión de infinitos engranajes rectos girados un ángulo de hélice y tallados con el ángulo de presión equivalente.

Número de dientes del piñón ( $Z_1$ )	40   50   60   70   80   90   100
Relación de transmisión ( $u$ )	1   1,5   2   2,5   3
Ángulo de presión ( $\alpha_n$ )	10   11   12   13   14   15   16   17   18

Tabla 3.1: Estudio 1: valor de los parámetros modificados.



(a) Mejor ajuste

(b) Peor ajuste

Fig. 3.20: Ajuste de la función  $v(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua).

En la figura 3.17 se muestra el coeficiente de determinación múltiple ajustado  $R^2$  para el potencial unitario inverso obtenido en este estudio. En la gráfica de la izquierda se observa dicho coeficiente en función del grado de recubrimiento transversal y a la derecha en función de la relación de transmisión y del ángulo de presión. Se observa que dicho coeficiente disminuye a medida que disminuye el ángulo de presión o aumenta la relación de transmisión. El motivo de que el error aumente con la relación de transmisión, se debe a que la asimetría de la función potencial unitario inverso aumenta a medida que la relación de transmisión se aleja de 1, mientras que la función aproximación de tipo coseno siempre es simétrica. La disminución del ángulo de presión y el aumento de la relación de transmisión son necesarios para llegar a grados de recubrimiento cercanos a 3, aunque en la práctica dichos valores no se suelen utilizar.

Mientras que el coeficiente de determinación múltiple ajustado  $R^2$  para la función  $v(\xi)$  es de 0,971 en el peor de los casos, dicho coeficiente calculado para la función  $R(\xi)$ , en todos los casos, supera el 0,982 (Fig. 3.18).

En la figura 3.19, en la gráfica de la izquierda o gráfica (a), se muestran los errores máximos para el potencial unitario inverso calculado con la Ec. 3.75 y en la gráfica de la derecha los errores máximos para  $R(\xi)$  (Ec. 3.76).

En la figura 3.20 se compara la función  $v(\xi)$  obtenida mediante integración

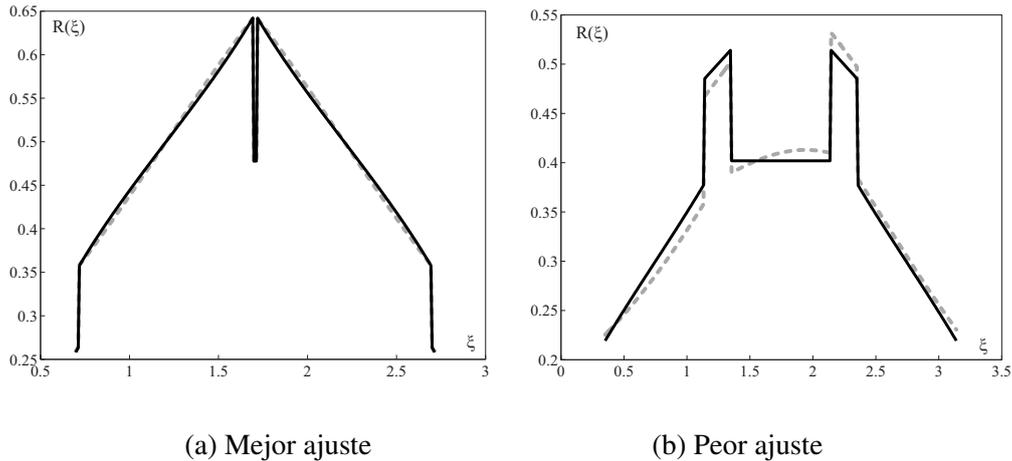


Fig. 3.21: Ajuste de la función  $R(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua).

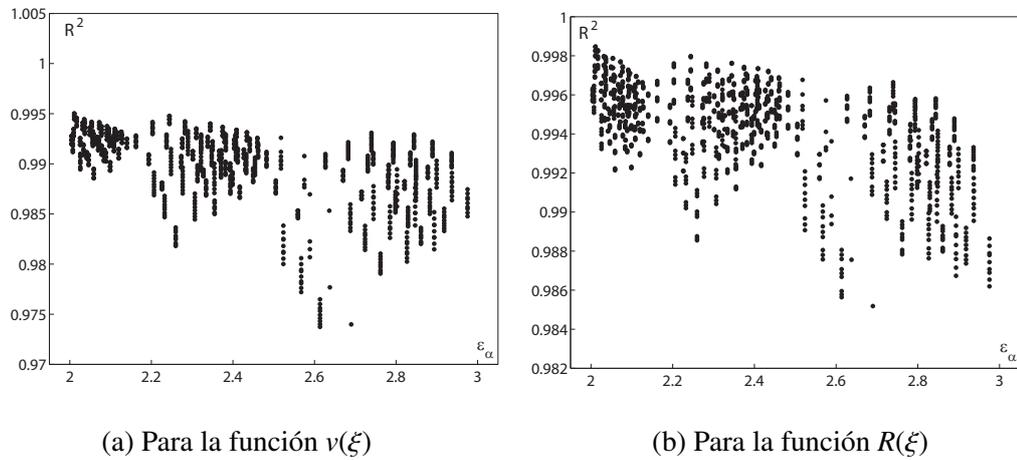
numérica y mediante la ecuación analítica propuesta, en los casos extremos en los cuales se ha obtenido el valor del factor  $R^2$  más alto y más bajo, respectivamente. Y en la figura 3.21 se muestra la comparación entre la función  $R(\xi)$  numérica y analítica, para aquellos casos con mejor y peor coeficiente de ajuste  $R^2$ .

Se ha realizado un segundo estudio para comprobar la escasa influencia sobre el potencial unitario inverso que tienen determinados parámetros, tales como el radio de acuerdo, la altura de pie y los coeficientes de desplazamiento tanto de la rueda como del piñón y que, por tanto, el modelo aproximado de tipo coseno (Ec. 3.68) sigue siendo válido ante variaciones de dichos parámetros. En este estudio se ha considerado los valores de los parámetros de diseño mostrados en la tabla 3.2, con los cuales se obtiene un total de 1458 combinaciones, pero 180 serán descartadas por producirse engrane en vacío o tener un grado de recubrimiento fuera del rango considerado.

En la figura 3.22 se muestran los factores de ajuste  $R^2$  entre la función numérica y analítica para el potencial unitario inverso y para el reparto de carga obtenidos para este estudio. En la figura 3.23 se muestra el valor del error máximo para  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$ . Según se aprecia en ambas figuras, los resultados para este estudio son similares a los obtenidos en el estudio anterior, los valores del factor  $R^2$  obtenidos permanecen en el mismo rango y los errores máximos tampoco se ven modificados cualitativamente, quedando demostrado que, para el rango de valores considerado, existen ciertos

Número de dientes del piñón ( $Z_1$ )	50   70   90
Relación de transmisión ( $u$ )	1,5   2
Ángulo de presión ( $\alpha_n$ )	11°   14°   17°
Coefficiente de desplazamiento del piñón ( $x_1$ )	0   0,1   -0,1
Coefficiente de desplazamiento de la rueda ( $x_2$ )	0   0,1   -0,1
Radio de acuerdo del piñón y de la rueda ( $r_f$ )	0,2   0,25   0,3
Altura de pie del piñón y de la rueda ( $h_{a0}$ )	1,2   1,25   1,3

Tabla 3.2: Estudio 2: valor asignado a los parámetros.

Fig. 3.22: Factor  $R^2$  en función de  $\varepsilon_\alpha$ .

parámetros con escasa influencia sobre el potencial unitario inverso y sobre el reparto de carga.

Tras estos estudios, se puede concluir que la función de aproximación del potencial unitario inverso (Ec. 3.68) sigue siendo válida para engranajes HTCR y que dicha función se puede expresar en función de dos únicos parámetros: el grado de recubrimiento transversal  $\varepsilon_\alpha$  y el parámetro que define el perfil del piñón en el punto de contacto inferior denominado  $\xi_{inn}$ , como se muestra en las Ecs. 3.68, 3.69 y 3.70. Como la función de reparto de carga, para engranajes rectos, se ha definido a partir de la función  $\nu(\xi)$  con la Ec. 3.55, dicho reparto de carga dependerá, a su vez, únicamente de estos dos parámetros:  $\varepsilon_\alpha$  y  $\xi_{inn}$ . Por consiguiente, el reparto de carga para engranajes

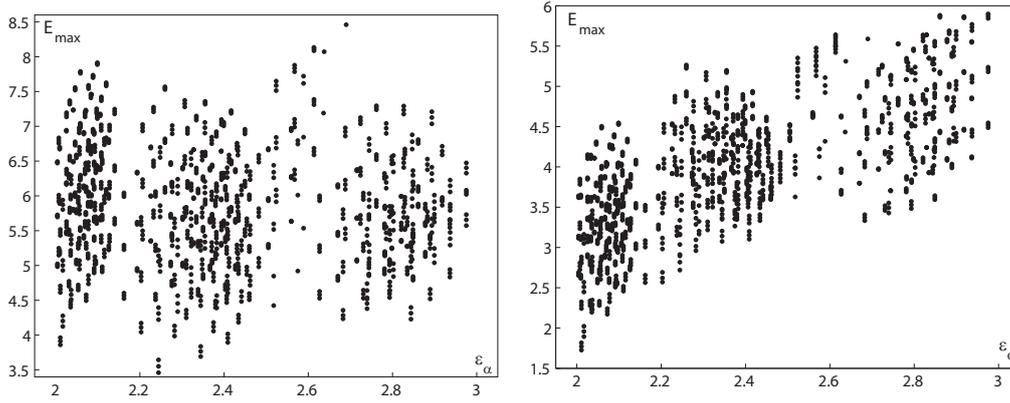
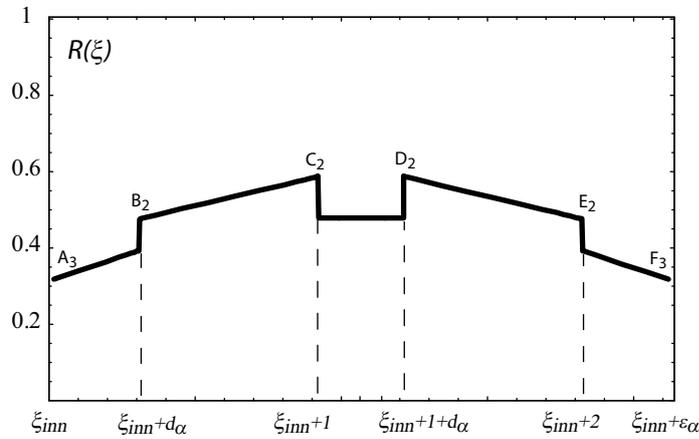
(a)  $E_{max}$  en  $v(\xi)$ (b)  $E_{max}$  en  $R(\xi)$ Fig. 3.23: Error máximo:  $E_{max}$ .

Fig. 3.24: Reparto de carga para engranajes HTCR.

HTCR se puede calcular utilizando la Ec. 3.68 como:

$$R(\xi) = \frac{v(\xi)}{v(\xi - 2) + v(\xi - 1) + v(\xi) + v(\xi + 1) + v(\xi + 2)} \quad (3.77)$$

representada en la Fig. 3.24.

### 3.5.3. Aproximación de la función potencial unitario inverso para engranajes no estándar

Tal y como se ha concluido en el apartado anterior y en el estudio [45], tanto para engranajes convencionales como para engranajes con alto grado de recubrimiento

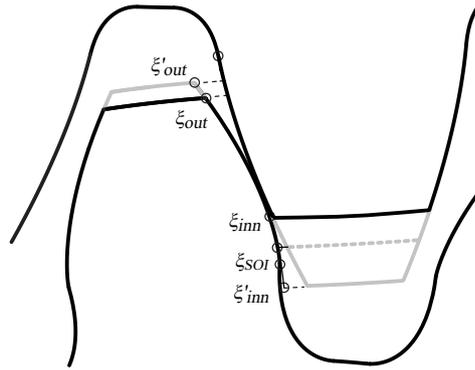


Fig. 3.25: Engrane en vacío.

transversal, es posible expresar la función potencial unitario inverso  $v(\xi)$  como una función de dos parámetros:  $\varepsilon_\alpha$  y  $\xi_{inn}$ , tal y como se muestra en las Ecs. 3.68, 3.69 y 3.70. Sin embargo, en todos los estudios considerados, la altura de cabeza del diente o adendo se mantuvo constante con valor  $m_n$ , la altura de pie o dedendo se fijó a  $1,25m_n$  y el diámetro exterior se calculó en función de la distancia entre centros, de manera que la holgura radial, es decir, la distancia entre la circunferencia de cabeza del engranaje considerado y la circunferencia de pie del engranaje con el que se engrana, sea igual a  $0,25m_n$ .

Además, el estudio [45] concluyó que la existencia de penetración en la base del diente no tiene influencia sobre la distribución de carga, excepto si el área recortada debida a la penetración es lo suficientemente grande como para causar que los puntos exteriores del perfil de la rueda no encuentren puntos del perfil activo del piñón con los cuales engranar, como se representa en la Fig. 3.25. A esto se le denomina engrane en vacío.

En este apartado se va a estudiar la función potencial unitario inverso cuando existe una variación en la altura de cabeza de los dientes del piñón o de la rueda respecto a la que se ha denominado estándar (que toma el valor de  $m_n$ ), cuando existe el fenómeno de engrane en vacío, o para los casos en los que la holgura radial sea diferente de  $0,25m_n$ . Se definirá un modelo del potencial unitario inverso modificado válido para estos casos.

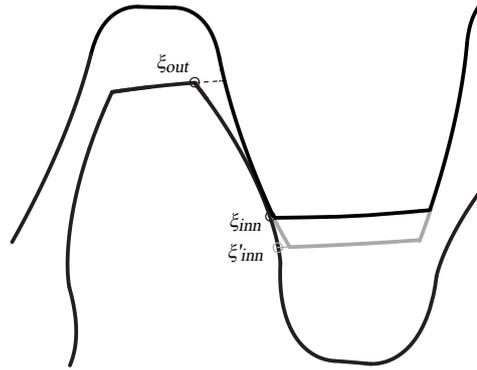


Fig. 3.26: Reducción de la altura del diente de la rueda.

### 3.5.3.1. Reducción de la altura del diente o engrane en vacío

Si existe engrane en vacío, el diámetro exterior efectivo de la rueda es más pequeño que el real (Fig. 3.25), pero según las Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15, las integrales para calcular el potencial elástico son exactamente las mismas, con la única diferencia de que no existe contacto entre el punto inferior de contacto  $\xi_{inn}$  y el punto inferior de contacto ficticio  $\xi'_{inn}$ . Este punto ficticio del perfil del piñón que debería engranar con el punto de cabeza de la rueda real, se puede obtener aplicando la ecuación 5.20. Es decir, que el valor del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  será exactamente el mismo para una pareja de engranajes con penetración que para una pareja igual pero en la que no existe penetración, excepto en el intervalo  $[\xi'_{inn}, \xi_{inn}]$  que se corresponde con la zona gris de la Fig. 3.26 de la derecha.

Es obvio que la existencia de engrane en vacío en la raíz del diente del piñón produce el mismo efecto sobre la distribución de carga que una reducción de la altura de cabeza en el diente de la rueda, tal y como se aprecia en la Fig. 3.25. Tanto las integrales del potencial unitario inverso (Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15) como los intervalos de contacto son exactamente iguales. Por consiguiente, la forma del potencial unitario inverso cuando existe engrane en vacío en la raíz del piñón o cuando se reduce la altura de cabeza de la rueda, será tal como se representa en la Fig. 3.27 y viene descrito por

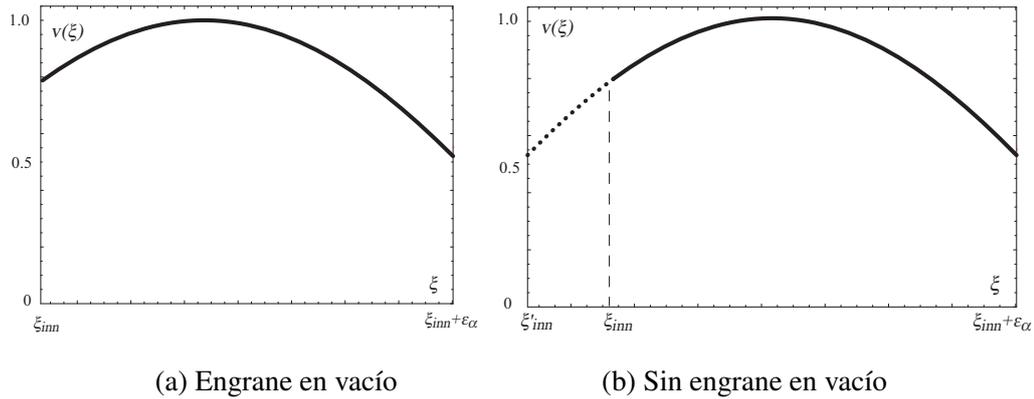


Fig. 3.27: Potencial unitario inverso obtenido mediante integración numérica.

la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= \cos[b'_0(\xi - \xi'_m)] & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \\
 v(\xi) &= 0 & \text{para } \xi < \xi_{inn} \text{ o } \xi > \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \xi'_m &= \xi'_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha \\
 b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \\
 \varepsilon'_\alpha &= \varepsilon_\alpha + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn} = \varepsilon_\alpha + (\xi_{inn} - \xi'_{inn})
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

La variable  $\varepsilon'_\alpha$  es el grado de recubrimiento transversal ficticio que se corresponde con el grado de recubrimiento transversal que tendría una pareja de engranajes con igual geometría pero sin engrane en vacío o con la altura de cabeza de la rueda estándar, es decir, con un adendo efectivo no reducido.

En la figura 3.28 se muestra el reparto de carga obtenido para una transmisión con adendo efectivo no reducido (línea punteada) y para la misma transmisión con adendo efectivo de la rueda reducido (línea continua). Se observa como el punto inferior del intervalo de contacto y el punto de contacto único superior se desplazan hacia la derecha sobre las mismas líneas rectas que se obtenían con adendo no reducido, puesto que, como se ha dicho anteriormente, la forma y los valores del potencial unitario

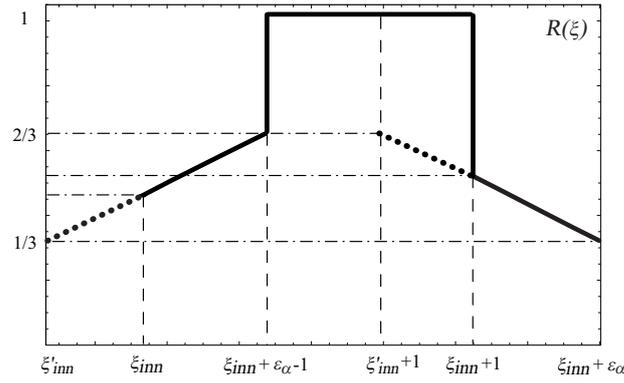


Fig. 3.28: Reparto de carga para engranajes con adendo efectivo reducido en la rueda.

inverso son los mismos en las dos situaciones, excepto en el intervalo  $[\xi'_{inn}, \xi_{inn}]$  en la que deja de existir el contacto y el potencial vale cero.

El valor del reparto de carga se puede calcular usando las Ecs. 3.55, 3.78 y 3.79, aunque se puede obtener una buena aproximación mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi - \xi'_{inn}}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \\
 R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi'_{inn+1} + \varepsilon'_\alpha - \xi}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

En el caso de engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, el reparto de carga se muestra en la Fig. 3.29, donde el reparto obtenido para una transmisión con adendo efectivo no reducido se muestra con línea punteada y la misma transmisión con adendo efectivo de la rueda reducido se muestra en línea continua. De nuevo se observa que los puntos singulares del reparto se desplazan sobre las líneas rectas de la función de reparto de carga que había para engranajes estándar.

Para engranajes helicoidales, la carga por unidad de longitud se puede calcular a través de las Ecs. 3.66, 3.67, 3.78 y 3.79. Si se sustituyen las ecuaciones 3.78 y 3.79 en la Ec. 3.67, se obtiene la expresión específica  $I_v(\xi_0)$  para engranajes con adendo efectivo reducido en la rueda:

$$I_v(\xi_0) = \frac{1}{b'_0} \sum_{i=0}^{E_y} \left[ \text{sen} \left[ b'_0 \left( \zeta_{i,sup} - \frac{\varepsilon'_\alpha}{2} \right) \right] - \text{sen} \left[ b'_0 \left( \zeta_{i,inf} - \frac{\varepsilon'_\alpha}{2} \right) \right] \right] \tag{3.81}$$

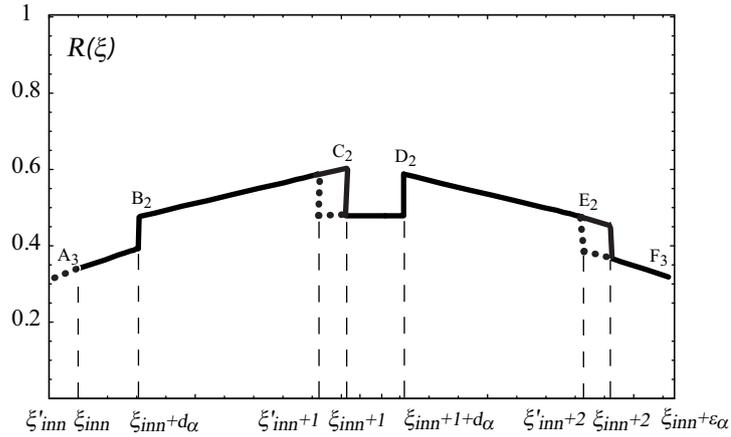


Fig. 3.29: Reparto de carga para engranajes HTCR con adendo efectivo reducido en la rueda.

donde

$$\begin{aligned}\zeta_{i,sup} &= \xi_0 + i + 2\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \xi'_{inn} - \min(\xi_0 + i, \xi_{inn}) - \max(\xi_0 + i, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \\ \zeta_{i,inf} &= \xi_0 + i - \varepsilon_\beta + 2\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \xi'_{inn} - \min(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn}) - \max(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha)\end{aligned}\quad (3.82)$$

Al igual que para engranajes estándar, la función  $I_v(\xi_0)$  toma diferentes formas dependiendo de si la suma de la parte decimal de los grados de recubrimiento transversal y en el salto es mayor o menor que 1. Su representación gráfica es la misma que la mostrada en la Fig. 3.16.

En la figura 3.30 se muestra, en la figura de la izquierda, la forma del diente cuando existe adendo efectivo reducido en el piñón y en la derecha la forma del potencial unitario inverso. De nuevo el valor del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  será exactamente el mismo para una pareja de engranajes estándar que para una pareja con adendo reducido en el piñón, excepto en el intervalo  $[\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha, \xi_{inn} + \varepsilon'_\alpha]$  donde el potencial se hace nulo. La reducción del adendo en el piñón produce el mismo efecto sobre la distribución de carga que si se produjese engrane en vacío en la base de la rueda.

La ecuación de aproximación del potencial unitario inverso para adendo efectivo reducido en la rueda (Ec. 3.78) es válida para el caso de adendo reducido en el piñón,

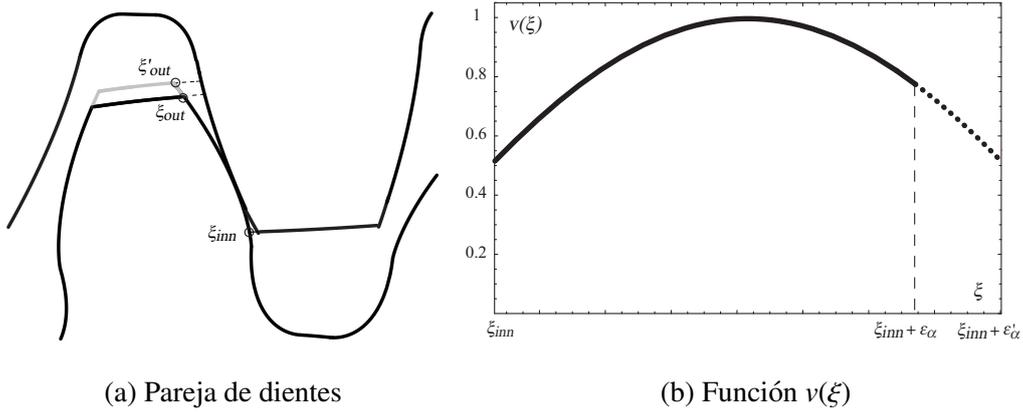
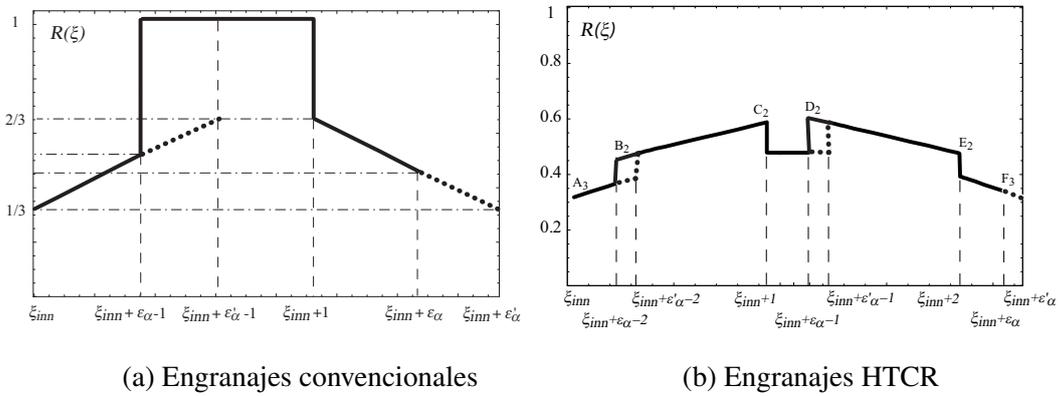


Fig. 3.30: Adendo efectivo reducido en el piñón.

Fig. 3.31: Función  $R(\xi)$  con adendo efectivo reducido en el piñón.

pero en este caso, de acuerdo con la Fig. 3.30:

$$\xi'_m = \xi_{inn} + \frac{1}{2}\epsilon'_\alpha$$

$$b'_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}}$$

$$\epsilon'_\alpha = \epsilon_\alpha + (\Delta\epsilon_\alpha)_{out} = \epsilon_\alpha + (\xi'_{out} - \xi_{out}) \quad (3.83)$$

donde  $\xi'_{out}$  es el parámetro del perfil del piñón del punto ficticio exterior de contacto (correspondiente al punto exterior del perfil del piñón si el adendo no se hubiese reducido) y  $\xi_{out}$  es el parámetro del perfil del actual punto exterior de contacto del piñón (considerando la reducción del adendo o el engrane en vacío en la raíz del diente de la rueda).

Para engranajes rectos, el reparto de carga para adendo efectivo reducido en el

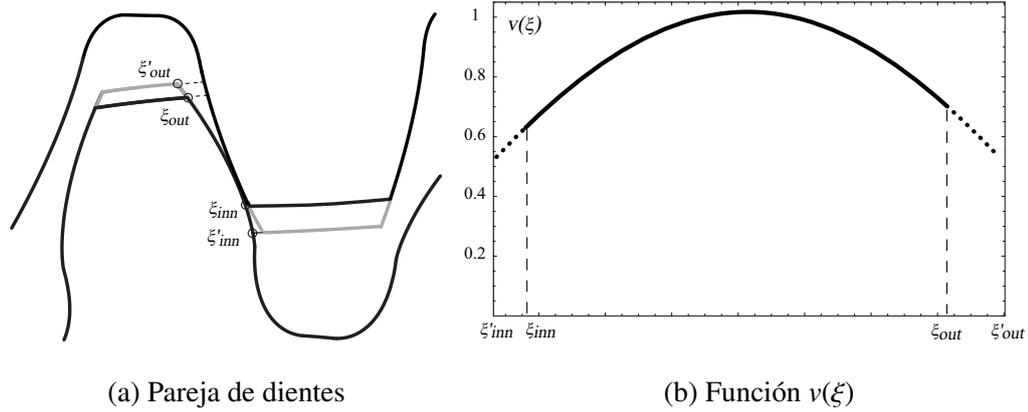


Fig. 3.32: Adendo efectivo reducido en el piñón y en la rueda.

piñón se puede calcular a través de las Ecs. 3.55, 3.78 y 3.83. Para engranajes convencionales, se puede obtener una buena aproximación calculando el reparto de carga con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi - \xi_{inn}}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \\
 R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi_{inn} + \varepsilon'_\alpha - \xi}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

En la figura 3.31 se muestra la forma típica del reparto de carga para engranajes rectos convencionales (a) y HTCR (b) cuando se produce engrane en vacío en la raíz del diente de la rueda o cuando los dientes del piñón tienen el adendo reducido.

Para engranajes helicoidales, la carga por unidad de longitud se calcula con las Ecs. 3.66, 3.67, 3.78 y 3.83 y la función  $I_v(\xi_0)$  se calcula a partir de la Ec. 3.81 donde los límites de integración son los mismos que para engranajes con adendo reducido en la rueda, es decir, los definidos en la Ec. 3.82; aunque en este caso las variables  $\xi'_{inn}$  y  $\xi_{inn}$  tomarán el mismo valor. La forma que tomará la función  $I_v(\xi_0)$  dependerá, de nuevo, de si el valor de la suma de las partes decimales es mayor o menor que 1, según la Fig. 3.16.

La misma aproximación puede ser utilizada cuando existe adendo reducido efectivo en ambos engranajes, incluso cuando existen diferentes reducciones en el piñón y en la rueda. De acuerdo con la Fig. 3.32, el potencial unitario inverso vendrá dado por la

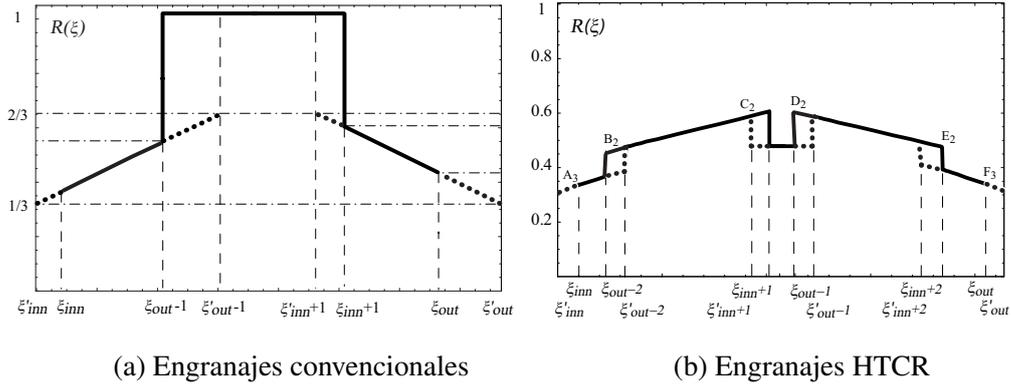


Fig. 3.33: Función  $R(\xi)$  con adendo efectivo reducido en el piñón y en la rueda.

Ec. 3.78, donde  $\xi_m$ ,  $b'_0$  y  $\varepsilon'_\alpha$  toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \xi'_m &= \xi'_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \\ \varepsilon'_\alpha &= \varepsilon_\alpha + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn} + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{out} = \varepsilon_\alpha + (\xi_{inn} - \xi'_{inn}) + (\xi'_{out} - \xi_{out}) \end{aligned} \quad (3.85)$$

La función de reparto de carga para engranajes rectos de nuevo se calculará con las ecuaciones Ecs. 3.55, 3.78 y 3.85, aunque para engranajes convencionales se puede aproximar por:

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\xi - \xi'_{inn}}{\varepsilon'_\alpha - 1}\right) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \\ R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\ R(\xi) &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\xi'_{inn} + \varepsilon'_\alpha - \xi}{\varepsilon'_\alpha - 1}\right) && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (3.86)$$

Para engranajes helicoidales la carga por unidad de longitud se calculará a partir de las Ecs. 3.66, 3.67, 3.78 y 3.85, como en los casos anteriores, al igual que la función  $I_v(\xi_0)$  y sus límites.

La reducción de la altura de pie o dedendo, tanto en el piñón como en la rueda, tiene una influencia muy pequeña, casi inapreciable, sobre la distribución de carga, al igual que las variaciones del radio de acuerdo de la herramienta. Esto se debe a que las modificaciones en ambos parámetros no tienen influencia ni en el parámetro que

define el punto inferior de contacto  $\xi_{inn}$  ni en el grado de recubrimiento transversal  $\varepsilon_\alpha$ . Obviamente, habrá que considerar la restricción de interferencia.

### 3.5.3.2. Alargamiento de la altura del diente

El alargamiento de la altura de cabeza del diente o adendo se trata de forma similar a cuando existe reducción. Las integrales para calcular el potencial elástico son exactamente las mismas, con la única diferencia de que cuando existe alargamiento de la cabeza de la rueda, el límite inferior del intervalo de contacto  $\xi_{inn}$  es menor que el que se produce cuando la altura del diente es  $m_n$ , es decir, es menor que el punto inferior de contacto ficticio  $\xi'_{inn}$ , aumentando de esta forma la longitud del intervalo de contacto. Así mismo, cuando el alargamiento se da en la cabeza del piñón, produce que el límite superior del intervalo de contacto  $\xi_{out} = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$  aumenta con respecto al que se obtenía con engranajes estándar. Y para el caso en que el alargamiento se realice en ambos engranajes, tanto el límite inferior como el límite superior del intervalo de contacto se ven modificados, tal y como se aprecia en la Fig. 3.34.

Las ecuaciones 3.78 y 3.85 son válidas para cualquiera de los casos anteriormente citados, con la siguientes peculiaridades:

- Para el alargamiento de la cabeza de la rueda  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn}$  será negativo y  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{out}$  será cero.
- Para el alargamiento de la cabeza del piñón  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{out}$  será negativo y  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn}$  será cero.
- Para aumentos de la altura de cabeza tanto en la rueda como en el piñón,  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn}$  y  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{out}$  serán negativos, como se aprecia en la Fig. 3.34.

De nuevo, la función de reparto de carga para engranajes rectos se calculará con las ecuaciones Ecs. 3.55, 3.78 y 3.85, teniendo en cuenta lo anteriormente citado, aunque para engranajes convencionales se puede aproximar por la Ec. 3.86. La función reparto de carga para engranajes convencionales y para engranajes HPCR, cuando existen

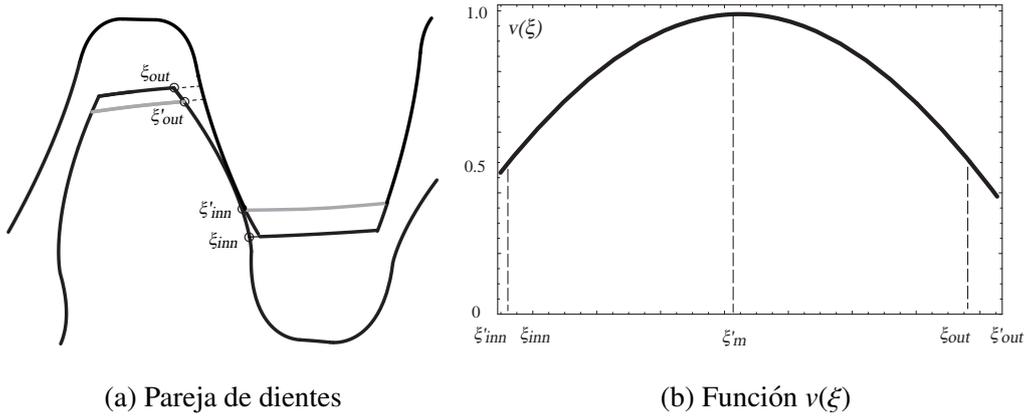


Fig. 3.34: Adendo efectivo alargado en el piñón y en la rueda.

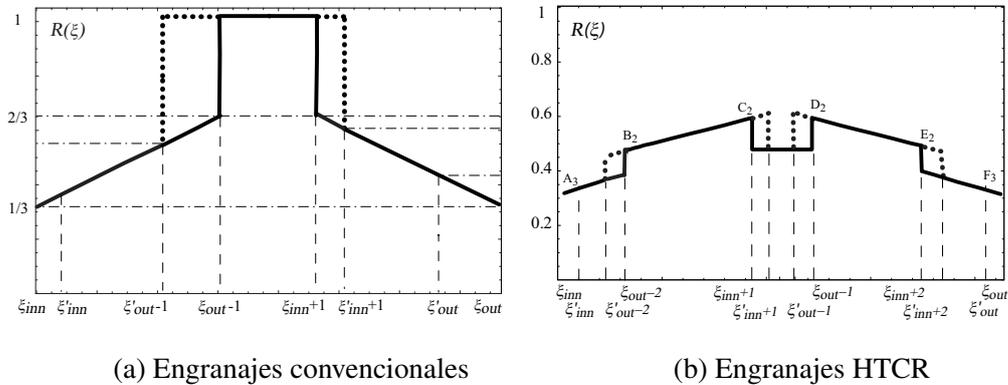


Fig. 3.35: Función  $R(\xi)$  con adendo efectivo alargado en el piñón y en la rueda.

diferentes alargamientos en la cabeza de la rueda y en al cabeza del piñón se muestra en la Fig. 3.35.

Para engranajes helicoidales las ecuaciones a aplicar son exactamente las mismas que en el apartado anterior.

Se puede estudiar, de manera similar, el caso de una pareja de engranajes en el que se aumenta el adendo de uno de los engranajes y en otro se reduce. Se utilizarán las mismas ecuaciones, considerando un  $(\Delta\varepsilon_\alpha)$  positivo y otro negativo. La figura 3.36 muestra el reparto de carga de una pareja de engranajes rectos convencionales con un adendo ampliado en el piñón y un adendo reducido en la rueda.

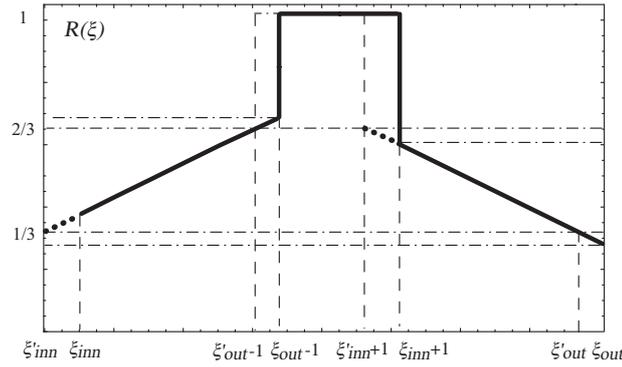


Fig. 3.36: Reparto de carga para engranajes convencionales con adendo efectivo ampliado en el piñón y adendo efectivo reducido en la rueda.

### 3.5.3.3. Modificación de la distancia entre centros

Para mantener la holgura radial para distancia entre centros no estándar, el radio exterior debe calcularse a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_{out1} &= C - r_{p2} - m_n x_2 + m_n h_a \\ r_{out2} &= C - r_{p1} - m_n x_1 + m_n h_a \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde  $r_{out}$  es el radio exterior,  $C$  es la distancia entre centros de operación,  $r_p$  es el radio primitivo,  $x$  es el coeficiente de desplazamiento y  $h_a$  es el adendo o coeficiente de altura de la cabeza. Con estos radios exteriores, la distancia entre centros tiene una ligera influencia sobre el grado de recubrimiento transversal, y las Ecs. 3.68, 3.69 y 3.70 son válidas si la altura de cabeza  $h_a$  se mantiene igual a 1.

Sin embargo, las modificaciones de la distancia entre centros tienen una fuerte influencia en el grado de recubrimiento transversal si el radio exterior permanece inalterable. En este caso, estas variaciones del grado de recubrimiento tiene una gran influencia sobre la distribución de carga, de la misma manera que lo tienen las modificaciones de la altura de cabeza.

Un incremento en la distancia entre centros se traduce en un decremento del grado de recubrimiento transversal, que se denotará por  $(\Delta \varepsilon_a)_c$ . Puesto que las circunferencias de cabeza se desplazan alejándose de la circunferencia de pie del

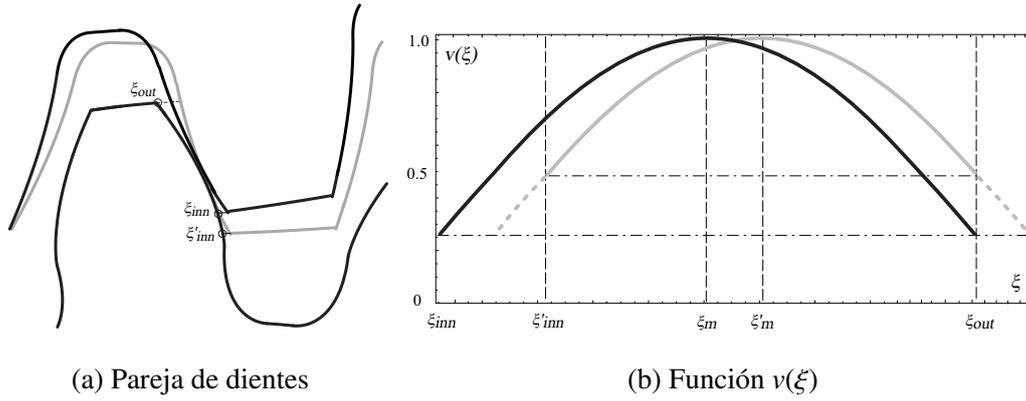


Fig. 3.37: Incremento de la distancia entre centros.

engranaje con el que engranan, el efecto del aumento de la distancia entre centros es equivalente a una reducción de las dos alturas efectivas de cabeza. En consecuencia, la curva del potencial unitario inverso debe truncarse por cada lado una cantidad de  $0,5(\Delta\varepsilon_\alpha)_c$ . Sin embargo, el parámetro del perfil que define el punto superior del intervalo de contacto  $\xi_{out}$ , calculado a través de la Ec. 3.39, no cambia, puesto que depende del radio exterior y del radio de base, que no se han modificado, y es completamente independiente de la distancia entre centros.

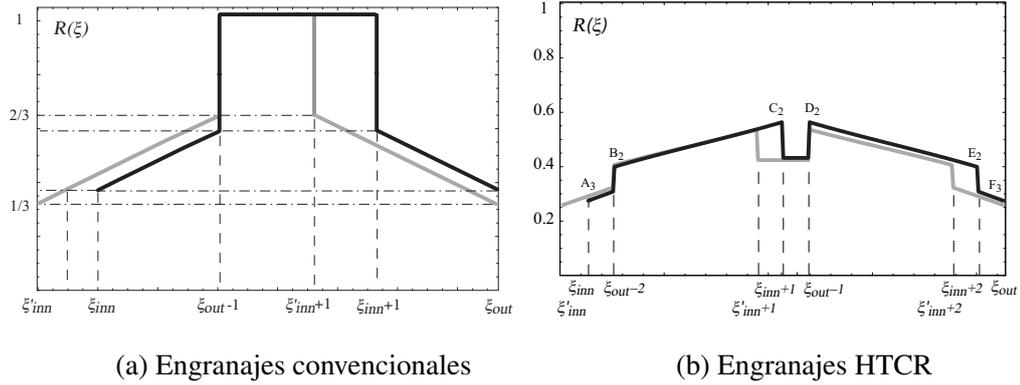
Así, la función  $v(\xi)$  se debe desplazar hacia la derecha una distancia igual a  $0,5(\Delta\varepsilon_\alpha)_c$ , para obtener la forma final que se representa en la Fig. 3.37. Según esto, el potencial unitario inverso se describirá por:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \cos[b'_0(\xi - \xi_m)] & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \\ v(\xi) &= 0 & \text{para } \xi < \xi_{inn} \text{ o } \xi > \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde:

$$\begin{aligned} \xi_m &= \xi_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \\ \varepsilon'_\alpha &= \varepsilon_\alpha + (\Delta\varepsilon_\alpha)_c \end{aligned} \quad (3.89)$$

Para engranajes rectos, el reparto de carga cuando se modifica la distancia entre centros se puede calcular a través de las Ecs. 3.55, 3.88 y 3.89. Para engranajes

Fig. 3.38: Función  $R(\xi)$  con incremento de la distancia entre centros.

convencionales, se puede obtener una buena aproximación calculando el reparto de carga con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi - \xi_{inn} + 0,5(\Delta\varepsilon_\alpha)_c}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \\
 R(\xi) &= 1 && \text{para } \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\
 R(\xi) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\xi'_{inn} + \varepsilon_\alpha + 0,5(\Delta\varepsilon_\alpha)_c - \xi}{\varepsilon'_\alpha - 1} \right) && \text{para } \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

En la figura 3.38 se muestra la forma típica del reparto de carga para engranajes rectos convencionales (izquierda) y HTCR (derecha) cuando se incrementa la distancia entre centros.

Para engranajes helicoidales, la carga por unidad de longitud se puede calcular a partir de las Ecs. 3.66, 3.67, 3.88 y 3.89. Si se sustituyen las ecuaciones 3.88 y 3.89 en la Ec. 3.67, se obtiene la expresión específica  $I_v(\xi_0)$  para engranajes con modificaciones de la distancia entre centros:

$$I_v(\xi_0) = \frac{1}{b'_0} \sum_{i=0}^{E_\gamma} \left[ \text{sen} \left[ b'_0 \left( \zeta_{i,sup} - \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right) \right] - \text{sen} \left[ b'_0 \left( \zeta_{i,inf} - \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right) \right] \right] \tag{3.91}$$

donde

$$\zeta_{i,sup} = \xi_0 + i + 2\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \xi'_{inn} - \text{mín}(\xi_0 + i, \xi_{inn}) - \text{máx}(\xi_0 + i, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha)$$

$$\zeta_{i,inf} = \xi_0 + i - \varepsilon_\beta + 2\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - \xi'_{inn} - \text{mín}(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn}) - \text{máx}(\xi_0 + i - \varepsilon_\beta, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \tag{3.92}$$

Al igual que para engranajes estándar, la función  $I_v(\xi_0)$  toma diferentes formas dependiendo de si la suma de la parte decimal de los grados de recubrimiento transversal y en el salto es mayor o menor que 1. Su representación gráfica es la misma que la mostrada en la Fig. 3.16.

Obviamente, las Ecs. 3.88 y 3.89 son también válidas cuando se disminuye la distancia entre centros, aunque para ello la variación del grado de recubrimiento transversal  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_c$  tomará valores negativos.

### 3.5.4. Precisión del método

Para comprobar la validez y la precisión de las ecuaciones anteriores se ha llevado a cabo un conjunto de estudios. Este conjunto de estudios se repetirá para engranajes convencionales y para engranajes HTCR.

#### 3.5.4.1. Precisión del método para engranajes convencionales

Cada estudio incluye 20 casos diferentes, correspondientes a la combinación de 5 valores del ángulo de presión  $\alpha_n$  (17, 19, 21, 23 y 25°) con 4 valores de la relación de transmisión  $u$  (1.1, 2, 3 y 4). El número de dientes del piñón es diferente para cada ángulo de presión (30 dientes para los valores del ángulo de presión de 17° y 19°, 25 dientes para el ángulo de presión de 21°, 20 dientes para 23° y finalmente 18 dientes para 25°), mientras que el ángulo de hélice  $\beta$  y los coeficientes de desplazamiento  $x_1$  y  $x_2$  permanecen constantes e iguales a 0.

Para cada uno de los 20 casos de cada estudio, se han comparado las funciones  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$  calculadas a través de la integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad con dichas funciones calculadas con las ecuaciones presentadas en el capítulo 3.5. La función  $v(\xi)$  se ha normalizado, de tal manera que  $v_{max} = 1$ , por tanto, los errores en los puntos cercanos al punto medio del intervalo de contacto serán pequeños; mientras que los errores en los límites del intervalo de contacto,  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out} = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ , serán más significativos.

Para cada estudio, se muestra, en la primera y segunda columna de la tabla 3.3

Estudio	Error $v(x)$				$R^2[v(x)]$ ajustado				Error $R(x)$				$R^2[R(x)]$ ajustado			
	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	
<i>Estudio 0</i> ( <i>Estandar</i> )	6,78 % (25°, 1,1)	6,45 % (25°, 1,1)	7,25 % (17°, 4,0, 0,160)	0,9995 (25°, 1,1)	0,982 (17°, 4,0)	4,30 % (25°, 1,1)	4,14 % (25°, 1,1)	4,40 % (17°, 4,0, 0,120)	0,9999 (19°, 1,1)	0,991 (17°, 4,0)	4,30 % (25°, 1,1)	4,14 % (25°, 1,1)	4,40 % (17°, 4,0, 0,120)	0,9999 (19°, 1,1)	0,991 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 1a</i> ( $h_{a1} = 0,9$ )	6,65 % (25°, 1,1)	4,22 % (25°, 1,1)	7,29 % (17°, 4,0, 0,165)	0,9995 (25°, 1,1)	0,98 (17°, 4,0)	4,2 % (25°, 1,1)	2,46 % (25°, 1,1)	4,44 % (17°, 4,0, 0,135)	0,9999 (19°, 1,1)	0,952 (17°, 4,0)	4,2 % (25°, 1,1)	2,46 % (25°, 1,1)	4,44 % (17°, 4,0, 0,135)	0,9999 (19°, 1,1)	0,952 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 1b</i> ( $h_{a1} = 0,8$ )	6,54 % (25°, 1,1)	2,65 % (25°, 1,1)	7,34 % (17°, 4,0, 0,170)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9784 (17°, 4,0)	4,1 % (25°, 1,1)	1,27 % (25°, 1,1)	4,47 % (17°, 4,0, 0,140)	0,9999 (21°, 1,1)	0,953 (17°, 4,0)	4,1 % (25°, 1,1)	1,27 % (25°, 1,1)	4,47 % (17°, 4,0, 0,140)	0,9999 (21°, 1,1)	0,953 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 1c</i> ( $h_{a2} = 0,9$ )	4,53 % (17°, 4,0)	6,34 % (25°, 1,1)	7,24 % (25°, 1,1, 0,113)	0,9996 (25°, 1,1)	0,9787 (17°, 4,0)	3,10 % (17°, 4,0)	4,05 % (25°, 1,1)	4,40 % (25°, 4,0, 0,083)	0,9999 (19°, 1,1)	0,944 (17°, 4,0)	3,10 % (17°, 4,0)	4,05 % (25°, 1,1)	4,40 % (25°, 4,0, 0,083)	0,9999 (19°, 1,1)	0,944 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 1d</i> ( $h_{a2} = 0,8$ )	6,59 % (17°, 4,0)	6,24 % (25°, 1,1)	7,23 % (25°, 4,0, 0,063)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9757 (17°, 4,0)	4,26 % (17°, 4,0)	3,97 % (25°, 4,0)	4,39 % (25°, 4,0, 0,030)	0,9999 (19°, 1,1)	0,967 (17°, 4,0)	4,26 % (17°, 4,0)	3,97 % (25°, 4,0)	4,39 % (25°, 4,0, 0,030)	0,9999 (19°, 1,1)	0,967 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 2a</i> ( $h_{a1} = 1,05$ )	6,84 % (25°, 1,1)	7,80 % (25°, 1,1)	7,80 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9826 (17°, 4,0)	4,35 % (25°, 1,1)	5,20 % (25°, 1,1)	5,20 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9999 (25°, 3,0)	0,875 (17°, 4,0)	4,35 % (25°, 1,1)	5,20 % (25°, 1,1)	5,20 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9999 (25°, 3,0)	0,875 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 2b</i> ( $h_{a1} = 1,1$ )	6,90 % (25°, 1,1)	9,30 % (25°, 1,1)	9,30 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9888 (19°, 4,0)	4,40 % (25°, 1,1)	6,42 % (25°, 1,1)	6,42 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9999 (25°, 3,0)	0,963 (17°, 2,0)	4,40 % (25°, 1,1)	6,42 % (25°, 1,1)	6,42 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9999 (25°, 3,0)	0,963 (17°, 2,0)	
<i>Estudio 2c</i> ( $h_{a2} = 1,05$ )	8,31 % (25°, 1,1)	6,50 % (25°, 1,1)	8,31 % (25°, 4,0, 0,000)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9861 (17°, 3,0)	5,50 % (25°, 1,1)	4,18 % (25°, 1,1)	5,50 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9999 (19°, 1,1)	0,919 (17°, 3,0)	5,50 % (25°, 1,1)	4,18 % (25°, 1,1)	5,50 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9999 (19°, 1,1)	0,919 (17°, 3,0)	
<i>Estudio 2d</i> ( $h_{a2} = 1,1$ )	10,05 % (25°, 1,1)	6,55 % (25°, 1,1)	10,05 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9994 (25°, 1,1)	0,9874 (19°, 4,0)	6,91 % (25°, 1,1)	4,22 % (25°, 1,1)	6,91 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9997 (19°, 2,0)	0,954 (17°, 2,0)	6,91 % (25°, 1,1)	4,22 % (25°, 1,1)	6,91 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9997 (19°, 1,1)	0,954 (17°, 2,0)	
<i>Estudio 2e</i> ( $h_{a1} = 1,1, h_{a2} = 1,05$ )	8,44 % (25°, 1,1)	9,36 % (25°, 1,1)	9,36 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9995 (25°, 1,1)	0,989 (19°, 4,0)	5,61 % (25°, 1,1)	6,47 % (25°, 1,1)	6,47 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9998 (19°, 4,0)	0,996 (19°, 4,0)	5,61 % (25°, 1,1)	6,47 % (25°, 1,1)	6,47 % (25°, 1,1, 1,000)	0,9998 (19°, 4,0)	0,996 (19°, 4,0)	
<i>Estudio 3a</i> ( $h_{a1} = 1,2$ )	5,30 % (25°, 1,1)	6,65 % (25°, 1,1)	8,79 % (17°, 4,0, 0,150)	0,9984 (25°, 1,1)	0,971 (17°, 4,0)	3,08 % (25°, 1,1)	4,65 % (25°, 1,1)	5,56 % (17°, 4,0, 0,127)	0,9997 (21°, 1,1)	0,984 (17°, 4,0)	3,08 % (25°, 1,1)	4,65 % (25°, 1,1)	5,56 % (17°, 4,0, 0,127)	0,9997 (21°, 1,1)	0,984 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 3b</i> ( $h_{a1} = 1,3$ )	8,23 % (25°, 1,1)	6,23 % (25°, 1,1)	8,23 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9985 (25°, 1,1)	0,9893 (17°, 4,0)	5,50 % (25°, 1,1)	3,61 % (25°, 1,1)	5,50 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9999 (varios)	0,955 (17°, 4,0)	5,50 % (25°, 1,1)	3,61 % (25°, 1,1)	5,50 % (25°, 1,1, 0,000)	0,9999 (varios)	0,955 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 4</i> ( $C = r_{p1} + r_{p2} + 0,05m_n$ )	3,98 % (19°, 4,0)	5,71 % (25°, 4,0)	7,50 % (17°, 4,0, 0,130)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9852 (17°, 4,0)	2,70 % (19°, 4,0)	2,24 % (19°, 4,0)	4,40 % (17°, 4,0, 0,093)	1 (23°, 1,1)	0,954 (17°, 4,0)	2,70 % (19°, 4,0)	2,24 % (19°, 4,0)	4,40 % (17°, 4,0, 0,093)	1 (23°, 1,1)	0,954 (17°, 4,0)	

Tabla 3.3: Resultados de los estudios de precisión para engranajes convencionales.

el error máximo relativo en la estimación de  $v(\xi)$  en los límites del intervalo de contacto  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$ . Junto con el valor del error máximo se dan los datos del ángulo de presión  $\alpha_n$  y relación de transmisión  $u$  correspondientes al caso específico donde se produce dicho error máximo. Además, en la tercera columna se muestra el error máximo absoluto en  $v(\xi)$  que se produce dentro del intervalo de contacto (también en este caso se corresponde con el mayor de los errores máximos de los 20 casos para cada estudio considerado). Junto con los datos del caso en el que se produce el error máximo absoluto  $\alpha_n$  y  $u$ , se muestra la localización de dicho error dentro del intervalo de contacto; para ello se ha definido una nueva variable descrita por:

$$\delta = \frac{\xi - \xi_{inn}}{\xi_{out} - \xi_{inn}} \quad (3.93)$$

También, para cada caso de cada estudio, se ha calculado el coeficiente de determinación múltiple ajustado  $R^2$  entre ambas funciones  $v(\xi)$ : la función  $v(\xi)$  resuelta mediante integración numérica y la función  $v(\xi)$  obtenida a partir de del modelo aproximado. En las columnas cuarta y quinta de la tabla 3.3, se muestran los valores máximos y mínimos de dicho coeficiente  $R^2$  obtenido entre los 20 casos de cada estudio.

De igual modo, se han calculado los mismos errores para la función  $R(\xi)$ : el error máximo relativo en  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$ , el error máximo absoluto que se produce dentro del intervalo de contacto y el valor máximo y mínimo del coeficiente  $R^2$ . Los resultados se muestran en las columnas 6<sup>a</sup> a 10<sup>a</sup>, respectivamente.

El estudio denominado estudio 0 es un estudio de referencia desarrollado para una transmisión estándar, con un coeficiente de altura de cabeza del diente de valor  $h_a = 1$ , un coeficiente de altura de pie de  $h_{a0} = 1,25$ , y un valor de la distancia entre centros igual a  $C = r_{p1} + r_{p2}$ . Este estudio no proporciona nuevos resultados con respecto a los resultados presentados en [41, 58, 45], pero se ha realizado con el fin de comparar las desviaciones que se producen con respecto a las transmisiones no estándar.

En la tabla 3.3 se muestra que para el estudio 0, el máximo error en la estimación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  fue del 7,25 %, y se obtuvo para el caso con ángulo de presión mínimo ( $\alpha_n = 17^\circ$ ) y relación de transmisión máxima ( $u = 4$ ). Para este

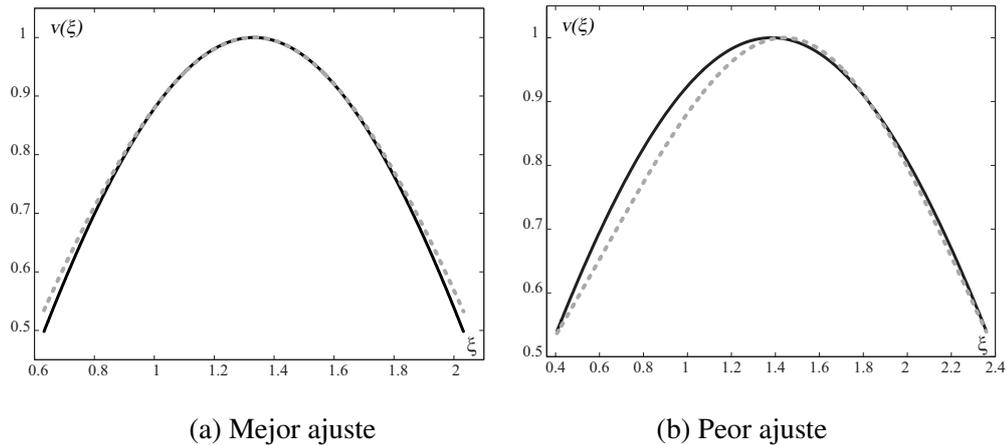


Fig. 3.39: Ajuste de la función  $v(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua).

mismo caso ( $\alpha_n = 17^\circ$  y  $u = 4$ ) también se obtiene el peor ajuste entre la función  $v(\xi)$  calculada numéricamente y con la ecuación aproximada, sin embargo, el valor obtenido del factor  $R^2$  es de 0,9820, que sigue siendo bastante alto. El mejor ajuste, con un valor de  $R^2$  de 0,9995, se obtuvo para el caso con ángulo de presión máximo ( $\alpha_n = 25^\circ$ ) y relación de transmisión mínima ( $u = 1,1$ ). En la figura 3.39 se representa el mejor y el peor ajuste conseguido entre la función  $v(\xi)$  numérica y la analítica.

Los resultados obtenidos en la estimación del reparto de carga  $R(\xi)$  son incluso mejores que los obtenidos para el potencial. El error máximo se produjo para el mismo caso de error máximo en  $v(\xi)$  pero en un punto de contacto diferente ( $\delta = 0,12$  en lugar de  $\delta = 0,18$ ) y su valor fue de 4,40 %. El valor del factor  $R^2$  más pequeño se obtuvo también para este caso, pero su valor aumentó hasta 0,9910. El valor más alto del  $R^2$  se obtuvo para el mismo caso que en  $v(\xi)$  pero su valor se incrementó en este caso hasta 0,9999. La figura 3.40 representa el ajuste entre la función  $R(\xi)$  numérica y analítica para los casos del factor  $R^2$  máximo y mínimo.

En los estudios 1a y 1b se analiza la reducción de la altura del diente del piñón; en el primer estudio se reduce la altura de cabeza un 10 % ( $h_{a1} = 0,9$ ) y en el segundo un 20 % ( $h_{a1} = 0,8$ ). Como se muestra en la tabla 3.3, las variaciones del máximo error en la función  $v(\xi)$  no son significativas y las variaciones del máximo error de  $R(\xi)$  son muy pequeñas también. Además, los errores que se producen en los límites del intervalo

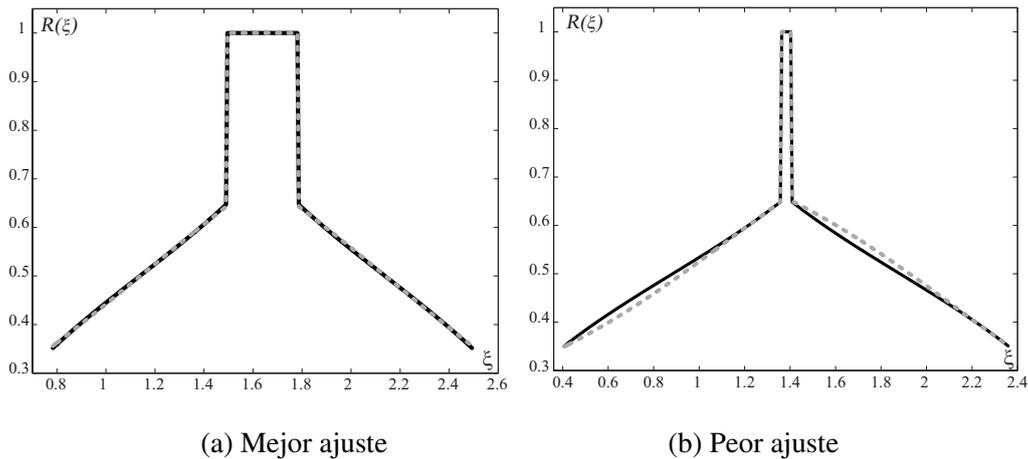


Fig. 3.40: Ajuste de la función  $R(\xi)$ : numérica (punteada); analítica (continua).

de contacto son aún más pequeños, puesto que las divergencias tienden a aumentar a medida que dichos límites se alejan del punto medio del intervalo de contacto. Los valores máximo y mínimo del factor  $R^2$  de las curvas  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$  son prácticamente los mismos que los obtenidos para transmisiones estándar, manteniéndose los niveles del ajuste bastante altos, e incluso se obtiene un ajuste ligeramente mejor para la función  $R(\xi)$  de peor ajuste.

Los estudios 1c y 1d, consideran una reducción en la altura de cabeza de la rueda del 10 % y del 20 % respectivamente, muestran tendencias muy similares: variaciones muy pequeñas de los errores máximos de  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$ , alrededor de 7,25 % y 4,4 % respectivamente, y unos valores similares del factor  $R^2$ , mayores que 0,99 en todos los casos. Los errores disminuyen de nuevo en los límites del intervalo de contacto.

Se han considerado varios casos con alargamiento del adendo:

- Incremento del adendo del piñón en un 5 % y un 10 %: estudios 2a y 2b respectivamente.
- Incremento del adendo de la rueda en un 5 % y un 10 %: estudios 2c y 2d respectivamente.
- Diferentes aumentos del adendo en el piñón y en la rueda: un 10 % en el piñón y 5 % en la rueda: estudio 2e.

En estos casos, como aumenta el grado de recubrimiento y los puntos límites del intervalo de contacto se alejan del punto medio de dicho intervalo, los errores aumentan ligeramente. Para incrementos del adendo del piñón el error aumenta en el punto superior del intervalo de contacto, para alargamientos en la cabeza de la rueda el error aumenta en el punto inferior del intervalo de contacto y para alargamientos tanto del piñón como de la rueda el error se incrementa en ambos límites del intervalo, tal y como se muestra en la tabla 3.3. El valor del error máximo en todo el intervalo de contacto también aumenta, porque dicho error se desplaza a los límites de dicho intervalo. Sin embargo, los niveles del error siguen siendo significativamente bajos, en particular, para la función de reparto de carga. El factor  $R^2$  mantiene valores entre 0,9875 y 0,9999 para la función  $R(\xi)$ .

Los estudios 3a y 3b muestran cómo las modificaciones de la altura de pie del diente tienen escasa influencia sobre la distribución de carga, aunque su influencia sobre el potencial unitario inverso es ligeramente mayor.

Finalmente, el estudio 4 muestra la influencia de las modificaciones de la distancia entre centros. En el caso mostrado, como la distancia entre centros aumenta, se produce una reducción del grado de recubrimiento efectivo. Los errores en los límites del intervalo de contacto disminuyen, mientras que los errores máximos son prácticamente los mismos que para una distancia entre centros nominal.

#### 3.5.4.2. Precisión del método para engranajes HTCR

Cada estudio, al igual que para engranajes convencionales, incluye 20 casos diferentes, correspondientes a la combinación de 5 valores del ángulo de presión  $\alpha_n$  (10, 12, 14, 16 y 17°) con 4 valores de la relación de transmisión  $u$  (1.1, 1.5, 2 y 2.5). El número de dientes del piñón es diferente para cada ángulo de presión (65 dientes para el valor del ángulo de presión de 10°, 47 para un ángulo de presión de 12°, 50 dientes para el ángulo de presión de 14°, 75 dientes para 16° y finalmente 110 dientes para 17°), mientras que el ángulo de hélice  $\beta$  y los coeficientes de desplazamiento  $x_1$  y  $x_2$  permanecen constantes e iguales a 0.

Para verificar la validez de las funciones  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$ , se ha realizado el mismo procedimiento con engranajes HTCR que el realizado para engranajes convencionales. Para comprobar la coincidencia entre la función  $v(\xi)$  obtenida mediante técnicas de integración numérica y la función de aproximación de  $v(\xi)$  de tipo coseno, se ha calculado el error máximo relativo entre ambas funciones en los puntos  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$ , el error máximo absoluto que se produce dentro del intervalo de contacto y el valor máximo y mínimo del coeficiente  $R^2$  (tabla 3.3, desde la 1ª columna a la 5ª). De igual modo, se han calculado los mismos errores para la función  $R(\xi)$ : el error máximo relativo en  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$ , el error máximo absoluto que se produce dentro del intervalo de contacto y el valor máximo y mínimo del coeficiente  $R^2$  (tabla 3.3, desde la 6ª columna a la 10ª).

Se ha realizado un estudio de referencia, basado en 20 casos para engranajes estándar, que servirá para la comparación con los casos no estándar. Este estudio de referencia o estudio 0, se muestra en la primera fila de la tabla 3.4. El máximo error en la estimación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  fue del 7,56 %, y se obtuvo para el caso con ángulo de presión  $\alpha_n = 12^\circ$  y relación de transmisión  $u = 2,5$ . El mínimo valor del factor  $R^2$  se obtuvo también para este mismo caso y el mejor ajuste se obtuvo para un ángulo de presión  $\alpha_n = 14^\circ$  y relación de transmisión  $u = 1,1$ . Estos dos casos extremos de mejor y peor ajuste en la función  $v(\xi)$  se encuentran representados en la Fig. 3.41. Los valores obtenidos para el reparto de carga son mejores que para el potencial, el error máximo es de 5,70 %, y los factores  $R^2$  para el mejor ajuste y para el peor toman los valores 0,9976 y 0,975, respectivamente. En la figura 3.42 se muestran el mejor y el peor ajuste obtenidos para la función reparto de carga.

En los estudios 1a y 1b se observa el efecto de la reducción de la altura de cabeza efectiva del diente en un 10 % y 20 %, respectivamente. Los errores en el límite superior del intervalo de contacto se reducen ligeramente, mientras que los errores en el resto se mantienen. Los valores obtenidos del factor  $R^2$  de las curvas  $v(\xi)$  y  $R(\xi)$  no se ven alterados por el incremento del adendo efectivo.

Los estudios 1c y 1d consideran una reducción en la altura efectiva de cabeza

Estudio	Error $v(x)$				$R^2[v(x)]$ ajustado				Error $R(x)$				$R^2[R(x)]$ ajustado			
	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{min}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{out}$ ( $\alpha_n, u$ )	$\xi_{max, err}$ ( $\alpha_n, u, \delta$ )	$max$ ( $\alpha_n, u$ )	$min$ ( $\alpha_n, u$ )	
<i>Estudio 0</i> ( <i>Estandar</i> )	2,46 % (10°, 2,5)	4,96 % (10°, 2,5)	7,56 % (12°, 2,5, 0,170)	0,9949 (14°, 1,1)	0,972 (10°, 2,5)	3,26 % (10°, 2,5)	5,26 % (10°, 2,5)	5,70 % (12°, 2,5, 0,205)	0,9976 (14°, 1,1)	0,975 (10°, 2,5)	3,26 % (10°, 2,5)	5,26 % (10°, 2,5)	5,70 % (12°, 2,5, 0,205)	0,9976 (14°, 1,1)	0,975 (10°, 2,5)	
<i>Estudio 1a</i> ( $h_{a1} = 0,9$ )	2,45 % (10°, 2,5)	4,03 % (17°, 2,5)	7,59 % (12°, 2,5, 0,175)	0,9951 (14°, 1,1)	0,97 (10°, 2,5)	3,25 % (10°, 2,5)	3,47 % (10°, 2,5)	5,42 % (12°, 2,5, 0,17)	0,9974 (14°, 1,1)	0,9816 (10°, 2,5)	3,25 % (10°, 2,5)	3,47 % (10°, 2,5)	5,42 % (12°, 2,5, 0,17)	0,9974 (14°, 1,1)	0,9816 (10°, 2,5)	
<i>Estudio 1b</i> ( $h_{a1} = 0,8$ )	2,43 % (10°, 2,5)	3,02 % (14°, 1,1)	7,61 % (12°, 2,5, 0,178)	0,9948 (14°, 1,1)	0,969 (10°, 2,5)	3,24 % (10°, 2,5)	2,52 % (10°, 2,5)	5,28 % (10°, 2,5, 0,23)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9832 (10°, 2,5)	3,24 % (10°, 2,5)	2,52 % (10°, 2,5)	5,28 % (10°, 2,5, 0,23)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9832 (10°, 2,5)	
<i>Estudio 1c</i> ( $h_{a2} = 0,9$ )	4,53 % (17°, 4,0)	6,34 % (25°, 1,1)	7,24 % (25°, 1,1, 0,113)	0,9996 (25°, 1,1)	0,9787 (17°, 4,0)	3,10 % (17°, 4,0)	4,05 % (25°, 1,1)	4,40 % (25°, 4,0, 0,083)	0,9999 (19°, 1,1)	0,9944 (17°, 4,0)	3,10 % (17°, 4,0)	4,05 % (25°, 1,1)	4,40 % (25°, 4,0, 0,083)	0,9999 (19°, 1,1)	0,9944 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 1d</i> ( $h_{a2} = 0,8$ )	6,59 % (17°, 4,0)	6,24 % (25°, 1,1)	7,23 % (25°, 4,0, 0,063)	0,9995 (25°, 1,1)	0,9757 (17°, 4,0)	4,26 % (17°, 4,0)	3,97 % (25°, 4,0)	4,39 % (25°, 4,0, 0,030)	0,9975 (19°, 1,1)	0,9823 (17°, 4,0)	4,26 % (17°, 4,0)	3,97 % (25°, 4,0)	4,39 % (25°, 4,0, 0,030)	0,9999 (19°, 1,1)	0,9967 (17°, 4,0)	
<i>Estudio 2a</i> ( $h_{a1} = 1,05$ )	2,43 % (10°, 2,0)	6,34 % (10°, 2,0)	7,55 % (12°, 2,5, 0,165)	0,9944 (14°, 1,1)	0,9771 (12°, 2,5)	3,17 % (10°, 2,0)	6,31 % (10°, 2,0)	6,31 % (10°, 2,0, 1,000)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9823 (10°, 2,0)	3,17 % (10°, 2,0)	6,31 % (10°, 2,0)	6,31 % (10°, 2,0, 1,000)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9823 (10°, 2,0)	
<i>Estudio 2b</i> ( $h_{a1} = 1,1$ )	2,36 % (10°, 1,5)	8,03 % (10°, 1,5)	8,03 % (10°, 1,5, 1,000)	0,9937 (14°, 1,1)	0,9777 (12°, 2,5)	3,08 % (10°, 1,5)	7,70 % (10°, 1,5)	7,70 % (10°, 1,5, 1,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,9879 (10°, 2,0)	3,08 % (10°, 1,5)	7,70 % (10°, 1,5)	7,70 % (10°, 1,5, 1,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,9879 (10°, 2,0)	
<i>Estudio 2c</i> ( $h_{a2} = 1,05$ )	5,57 % (10°, 2,0)	4,52 % (10°, 2,0)	7,57 % (12°, 2,5, 0,1867)	0,9944 (14°, 1,1)	0,9777 (12°, 2,5)	5,80 % (10°, 2,0)	4,92 % (10°, 2,0)	5,80 % (10°, 2,0, 0,000)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9815 (17°, 3,0)	5,80 % (10°, 2,0)	4,92 % (10°, 2,0)	5,80 % (10°, 2,0, 0,000)	0,9975 (14°, 1,1)	0,9815 (17°, 3,0)	
<i>Estudio 2d</i> ( $h_{a2} = 1,1$ )	8,33 % (10°, 1,5)	3,78 % (10°, 1,5)	8,33 % (10°, 1,5, 0,000)	0,9937 (14°, 1,1)	0,9782 (12°, 2,5)	8,07 % (10°, 1,5)	4,34 % (10°, 1,5)	8,07 % (10°, 1,5, 0,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,987 (12°, 2,5)	8,07 % (10°, 1,5)	4,34 % (10°, 1,5)	8,07 % (10°, 1,5, 0,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,987 (12°, 2,5)	
<i>Estudio 2e</i> ( $h_{a1} = 1,1, h_{a2} = 1,05$ )	4,49 % (10°, 1,1)	7,19 % (10°, 1,1)	7,54 % (12°, 2,5, 0,180)	0,9937 (14°, 1,1)	0,9788 (12°, 2,5)	4,89 % (10°, 1,1)	7,11 % (10°, 1,1)	7,11 % (10°, 1,1, 1,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,9875 (12°, 2,5)	4,89 % (10°, 1,1)	7,11 % (10°, 1,1)	7,11 % (10°, 1,1, 1,000)	0,9973 (14°, 1,1)	0,9875 (12°, 2,5)	
<i>Estudio 3a</i> ( $h_{a1} = 1,2$ )	3,09 % (17°, 2,5)	5,77 % (10°, 1,1)	9,21 % (12°, 2,5, 0,160)	0,9919 (14°, 1,1)	0,9564 (10°, 2,5)	1,83 % (10°, 2,5)	6,03 % (10°, 2,5)	6,99 % (12°, 2,5, 0,205)	0,9954 (14°, 1,1)	0,961 (10°, 2,5)	1,83 % (10°, 2,5)	6,03 % (10°, 2,5)	6,99 % (12°, 2,5, 0,205)	0,9954 (14°, 1,1)	0,961 (10°, 2,5)	
<i>Estudio 3b</i> ( $h_{a1} = 1,3$ )	4,43 % (10°, 2,5)	4,16 % (10°, 2,5)	6,18 % (17°, 1,1, 0,87)	0,9945 (14°, 1,5)	0,9832 (10°, 2,5)	4,67 % (10°, 2,5)	4,52 % (10°, 2,5)	4,67 % (10°, 2,5, 0,000)	0,9976 (14°, 1,5)	0,9853 (10°, 2,5)	4,67 % (10°, 2,5)	4,52 % (10°, 2,5)	4,67 % (10°, 2,5, 0,000)	0,9976 (14°, 1,5)	0,9853 (10°, 2,5)	
<i>Estudio 4</i> ( $C = r_{p1} + r_{p2} + 0,05m_n$ )	4,36 % (17°, 2,5)	4,51 % (17°, 2,5)	7,64 % (12°, 2,5, 0,140)	0,9954 (14°, 1,1)	0,9774 (10°, 2,5)	1,92 % (17°, 1,5)	2,01 % (17°, 1,5)	4,76 % (12°, 2,5, 0,150)	0,9979 (16°, 1,1)	0,9868 (10°, 2,5)	1,92 % (17°, 1,5)	2,01 % (17°, 1,5)	4,76 % (12°, 2,5, 0,150)	0,9979 (16°, 1,1)	0,9868 (10°, 2,5)	

Tabla 3.4: Resultados de los estudios de precisión para engranajes HTCR.

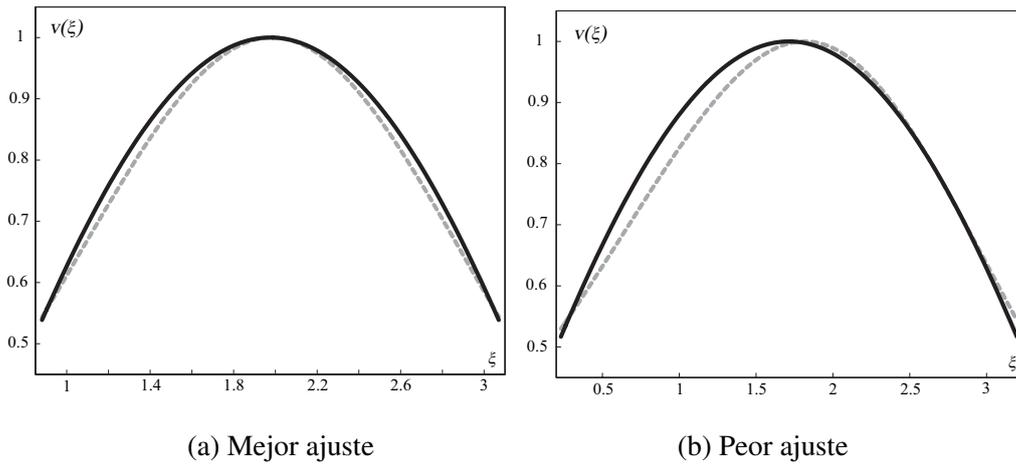


Fig. 3.41: Ajuste de la función  $v(\xi)$ :  $v(\xi)$  numérica (punteada);  $v(\xi)$  analítica (continua).

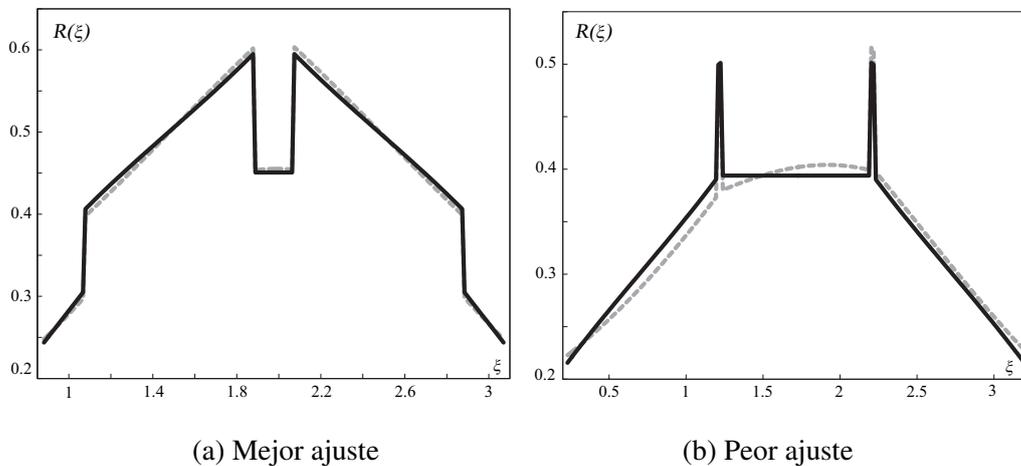


Fig. 3.42: Ajuste de la función  $R(\xi)$ :  $R(\xi)$  numérica (punteada);  $R(\xi)$  analítica (continua).

de la rueda del 10 % y del 20 % respectivamente. En la tabla 3.4 se observa cómo dichos estudios presentan tendencias muy similares, aunque disminuyen ligeramente los errores en el límite inferior del intervalo de contacto.

En los siguientes cinco estudios 2a, 2b, 2c, 2d y 2e, se analiza el efecto del incremento del adendo efectivo en el piñón en un 5 % y un 10 %, en la rueda en un 5 % y un 10 %, y finalmente una combinación de ambos un 10 % en el piñón y 5 % en la rueda. A partir de los datos mostrados en la tabla 3.4, se puede concluir que el error aumenta en el punto superior del intervalo de contacto para incrementos del adendo del piñón y, por el contrario, aumenta en el punto inferior cuando el incremento se produce en el adendo de la rueda. El valor del error máximo en todo el intervalo de contacto

también aumenta, porque dicho error se desplaza a los límites de dicho intervalo. Sin embargo, los niveles del error siguen siendo significativamente bajos, en particular, para la función de reparto de carga.

Los estudios 3a y 3b muestran cómo las modificaciones de la altura de pie del diente tienen escasa influencia sobre la distribución de carga, aunque su influencia sobre el potencial unitario inverso es ligeramente mayor.

Por último, el estudio 4 muestra la influencia del aumento de la distancia entre centros, que produce una reducción del grado de recubrimiento efectivo. Los errores en los límites del intervalo de contacto disminuyen, mientras que los errores máximos son prácticamente los mismos que para una distancia entre centros estándar. El efecto cuando se disminuye la distancia entre centros será exactamente contrario.

### 3.5.4.3. Ejemplo de engranajes no estándar

En este apartado se va a mostrar un ejemplo de engranajes con parámetros geométricos no estándar. El ejemplo consiste en una pareja de engranajes rectos con los siguientes parámetros:

- Número de dientes del piñón: 16
- Ángulo de presión:  $19^\circ$
- Relación de transmisión: 1,5
- Coeficientes de desplazamiento para el piñón y la rueda: 0
- Coeficiente de altura de cabeza o adendo: 1,1
- Coeficiente de altura de pie o dedendo: 1,25
- Distancia entre centros de operación:  $r_{p1} + r_{p2} + 0,1m_n$

La pareja equivalente de engranajes rectos estándar tendría exactamente el mismo valor de los parámetros geométricos, excepto el adendo o coeficiente de altura de cabeza que valdría 1 y tendría una distancia entre centros igual a la nominal ( $r_{p1} + r_{p2}$ ).

Despreciando el posible efecto de engrane en vacío, el valor del grado de recubrimiento transversal ficticio es  $\varepsilon'_\alpha = 1,5859$ , y el punto inferior ficticio del intervalo de contacto está definido por  $\xi'_{inn} = 0,0559$ . A partir de estos valores, es

posible calcular el valor del punto medio y el punto exterior del intervalo de contacto según las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi'_m &= \xi'_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha = 0,8489 \\ \xi'_{out} &= \xi'_{inn} + \varepsilon'_\alpha = 1,6418\end{aligned}\quad (3.94)$$

mientras que el coeficiente  $b'_0$  viene dado por:

$$b'_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} = 1,2832 \quad (3.95)$$

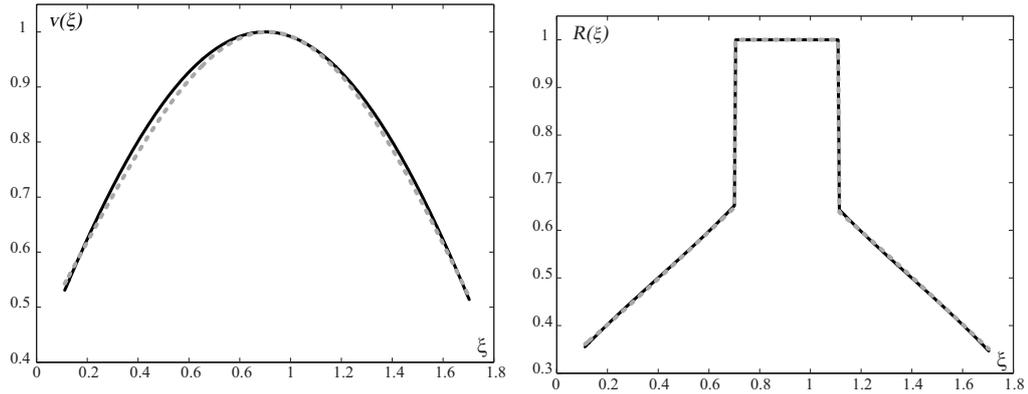
El incremento de la distancia entre centros de operación, provoca una reducción del intervalo de contacto, que se traduce en una reducción del grado de recubrimiento transversal ficticio en una cantidad igual a  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_c = 0,1013$ . Los nuevos valores de los parámetros del perfil correspondientes a punto inferior y al punto medio del intervalo de contacto vienen dados por:

$$\begin{aligned}\xi''_{inn} &= \xi'_{inn} + (\Delta\varepsilon_\alpha)_c = 0,1572 \\ \xi''_m &= \xi'_m + \frac{(\Delta\varepsilon_\alpha)_c}{2} = 0,8996\end{aligned}\quad (3.96)$$

El incremento del adendo del piñón provoca un aumento de 0,0613 del grado de recubrimiento transversal, o lo que es lo mismo, tal y como se ha definido la variable  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{out}$ , provoca un valor negativo en dicha variable de  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{out} = -0,0613$ . Por consiguiente, el punto superior del intervalo de contacto de la pareja de engranajes no estándar toma el valor:

$$\xi_{out} = \xi'_{out} + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{out} = 1,7031 \quad (3.97)$$

El incremento del adendo en la rueda produce engrane en vacío en la base del piñón, por tanto, el punto inferior del intervalo de contacto coincidirá con el comienzo de la curva de evolvente, que en este caso vale  $\xi_{inn} = 0,1113$ . La variación del grado de recubrimiento transversal debido a esto es de  $(\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn} = -0,0459$ .



(a) Potencial unitario inverso

(b) Reparto de carga

Fig. 3.43: Comparación entre los cálculos numéricos (punteada) y analíticos (continua) del ejemplo .

Resumiendo, el potencial unitario inverso de la pareja de engranajes rectos no estándar viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \cos[b'_0(\xi - \xi''_m)] \quad \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \\ v(\xi) &= 0 \quad \text{para } \xi < \xi_{inn} \text{ o } \xi > \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (3.98)$$

donde  $b'_0 = 1,12832$ ,  $\xi''_m = 0,8996$ ,  $\xi_{inn} = 0,1113$  y el grado de recubrimiento transversal efectivo es:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon'_\alpha - (\Delta\varepsilon_\alpha)_c - (\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn} - (\Delta\varepsilon_\alpha)_{out} = 1,5918 \quad (3.99)$$

El reparto de carga se puede calcular a partir de las Ecs. 3.55 y 3.98. En la figura 3.43 se muestra tanto el potencial unitario inverso como el reparto de carga, calculado con las ecuaciones analíticas anteriores y comparado con el potencial y el reparto obtenido mediante la integración numérica de las Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15.

Se puede observar un buen ajuste entre los cálculos numéricos y el modelo presentado. El error máximo relativo en la estimación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  es de 2,64 %, situado en el punto  $\delta = 0,1733$ , mientras que el factor de ajuste  $R^2$  es de 0,9975. Para la función reparto de carga  $R(\xi)$ , el error relativo máximo es de 1,56 %, que se sitúa en el punto inferior del intervalo de contacto; mientras que el factor  $R^2$  crece hasta 0,9999.

### 3.6. Análisis del reparto de carga mediante el MEF

El objetivo de este apartado consiste en la verificación del modelo propuesto del potencial unitario inverso dado por la Ec. 3.68. La verificación se realiza mediante la comparación del potencial dado por la Ec. 3.68 con el potencial obtenido a partir de los resultados de distribución de tensiones de un modelo resuelto por la técnica de los elementos finitos. Primeramente se realiza la descripción del modelo de elementos finitos creado para este propósito, para posteriormente, a partir de las tensiones de contacto que aparecen entre las superficies de los dientes en contacto, obtener la distribución de carga a partir de la ecuación de Hertz, y comprobar la coincidencia de dicha distribución con la obtenida mediante el modelo analítico aproximado propuesto.

El modelo de elementos finitos ha sido creado con el programa de propósito general ANSYS.

#### 3.6.1. Desarrollo del modelo de elementos finitos

El procedimiento empleado para la creación del modelo de elementos finitos está basado en el método desarrollado originariamente en el *Gear Research Center*, Litvin y Fuentes [23], para la generación y el estudio de geometrías de transmisiones por engranajes por el método de los elementos finitos. Se han seguido los siguientes pasos:

*Paso 1.* A partir de las ecuaciones de la evolvente de la circunferencia (Ecs. 2.1 y 2.2) y de las ecuaciones de la trocoide (Ecs. 2.30 y 2.38), se fija la posición de los keypoints. Estos keypoints se unen mediante líneas para crear el modelo en 2 dimensiones del piñón y de la rueda. El modelo se ha realizado completamente parametrizable, de tal manera que, cambiando el valor de unos parámetros se puede cambiar completamente el modelo. Los keypoints de las curvas evolvente y trocoide, durante el proceso de mallado, se transformarán directamente en los nodos que conforman el modelo. En la figura 3.44 se muestran los keypoints de un modelo en 2 dimensiones para una determinada geometría.

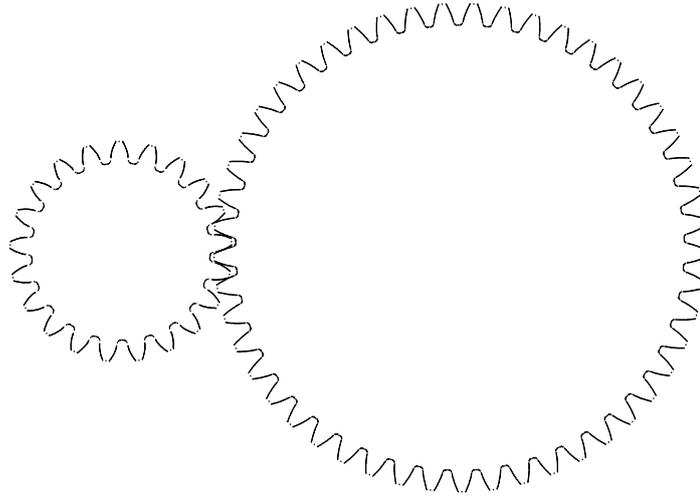


Fig. 3.44: Keypoints del piñón y de la rueda

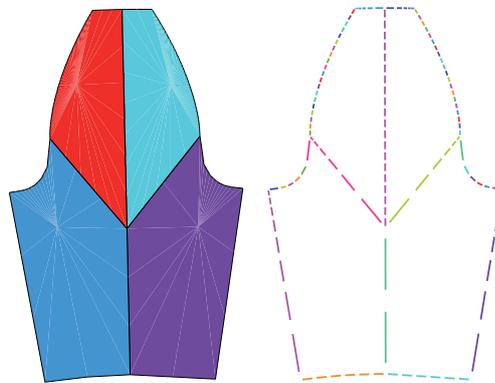


Fig. 3.45: División de la superficie del diente y división de las líneas

El número de elementos que compongan el perfil de evolvente y el perfil de la trocoide será completamente parametrizable. Además se realizará un mallado uniforme a lo largo del perfil de evolvente, para lo que será necesario realizar incrementos constantes en la longitud de la evolvente. Dichos incrementos se calculan a partir de la ecuación 2.8 definida en el capítulo 2.1.1, que permite expresar la longitud de la evolvente entre dos puntos en función del ángulo  $\theta$  de cada punto.

*Paso 2.* Se establece el número de subdivisiones de cada línea y se divide cada superficie de cada diente en 4 áreas intermedias para un mejor control de la discretización en elementos finitos de los subvolúmenes que se obtienen, Fig. 3.45.

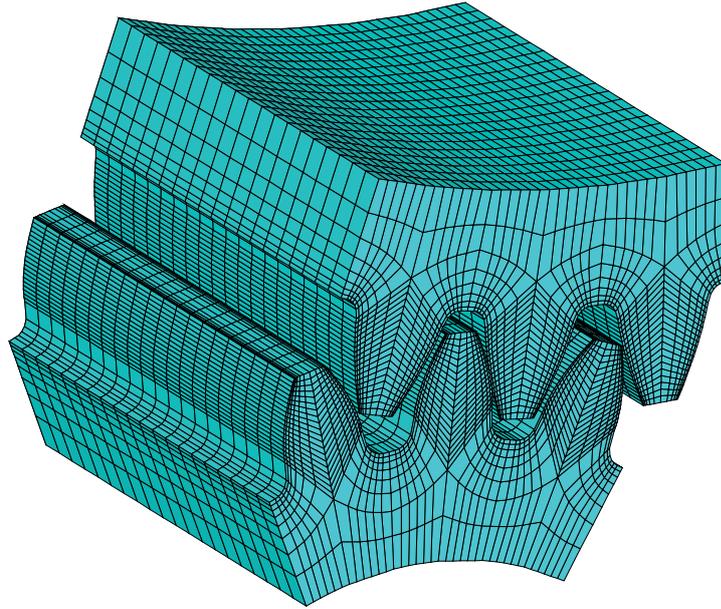


Fig. 3.46: Mallado de los dientes

*Paso 3.* Se discretiza cada una de las 4 superficies en las que se encuentra dividido el diente, con elementos de tipo rectangular. Dichas superficies en 2D servirán de patrón para la extrusión.

*Paso 4.* Se realiza una extrusión de las superficies malladas en 2D. Las propiedades y el mallado de las superficies iniciales serán usadas como patrón de la malla del volumen que se crea, Fig. 3.46. Previamente, se deben borrar las líneas concatenadas que se crearon para generar las áreas, Fig. 3.45.

*Paso 5.* Posteriormente se crean los elementos de contacto; para ello, es necesario identificar primeramente el tipo de contacto que se tendrá en este modelo, que podrá ser dicho contacto de tipo rígido-flexible o flexible-flexible. En el contacto de tipo rígido-flexible, una o más de las superficies en contacto se trata como rígida. En general, muchos de los problemas de contacto entre metales entran dentro de esta categoría. Para este modelo se ha elegido este tipo de contacto.

ANSYS, además, soporta tres tipos de modelos en contacto: contacto nodo a nodo, contacto nodo a superficie y contacto superficie-superficie. Cada tipo de modelo usa un set diferente de elementos de contacto y es apropiado para tipos específicos de

problemas.

Los elementos de contacto nodo a nodo son típicamente usados en aplicaciones cuyo contacto es punto a punto, como podría ser el modelo de una tubería donde el punto de contacto se encuentra entre la punta de la tubería y el sistema de retención. Los elementos de contacto nodo a superficie se utilizan para modelos donde existen grandes deslizamientos, grandes deformaciones o diferente mallado entre los componentes en contacto. Los elementos de contacto superficie-superficie soportan ambos tipos de contacto rígido-flexible o flexible-flexible, además tienen numerosas ventajas respecto al resto: se obtienen mejores resultados en las simulaciones para los propósitos típicos de ingeniería, tales como en cálculos de presión normal o tensiones de fricción en el contorno del objeto, además soporta elementos de mayor y menor orden para las superficies *target* y *contact* .

Para el contacto tipo superficie-superficie se ha de definir los pares en contacto. Para generar un par se define una superficie como *contact* y otra como *target* . Para crear dicho par se asigna, a la constante real que define a los elementos *target* y a los elementos *contact*, el mismo número. En este caso, se establece el piñón como *contact* y la rueda como *target* .

*Paso 6.* Se establecen las condiciones de contorno del piñón y de la rueda (Fig. 3.47) con las siguientes consideraciones:

- (i) Se consideran como empotradas las partes inferior y lateral de la base de la rueda, fijándose los seis grados de libertad de los nodos que las definen.
- (ii) La base del piñón se considera empotrada en las direcciones radial y vertical en el sistema de coordenadas cilíndricas, permitiendo el movimiento únicamente según la coordenada acimutal, es decir, en la dirección tangencial de la circunferencia de base.
- (iii) Los movimientos de las partes laterales del piñón se acoplan para que el movimiento del piñón sea similar al de un sólido rígido. Para ello se acopla el movimiento en la dirección acimutal, es decir, se acoplan los nodos en la

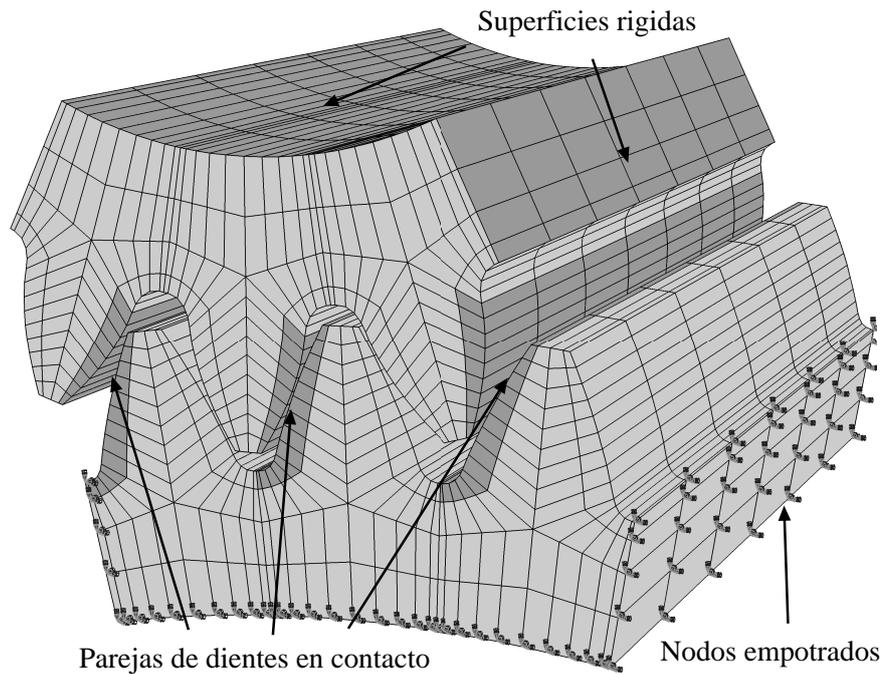


Fig. 3.47: Condiciones de contorno para el modelo de elementos finitos

dirección tangencial de la circunferencia base, de forma que todos los nodos situados a la misma distancia radial del centro del piñón giren el mismo ángulo en dicha dirección.

*Paso 7.* Las condiciones de carga (el movimiento o el momento que transmitiría el eje al piñón) se aplican en los nodos que conforman la base del piñón, de modo que se aplica, sobre cada uno de estos nodos, el desplazamiento o la fuerza tangencial equivalente de cada nodo.

La solución se realiza en dos estados de carga diferentes, un primer estado para poner en contacto los diferentes pares en contacto, donde se aplica al piñón un pequeño desplazamiento en sentido horario. Y un segundo estado en el que se borra el estado de carga inicial y se aplica la fuerza nodal equivalente al par transmitido por el eje.

### 3.6.2. Definición del mallado de elementos finitos

En la figura 3.48 se muestra esquemáticamente el procedimiento de mallado de elementos finitos. En la gráfica (a) de la figura, se observan los puntos claves del

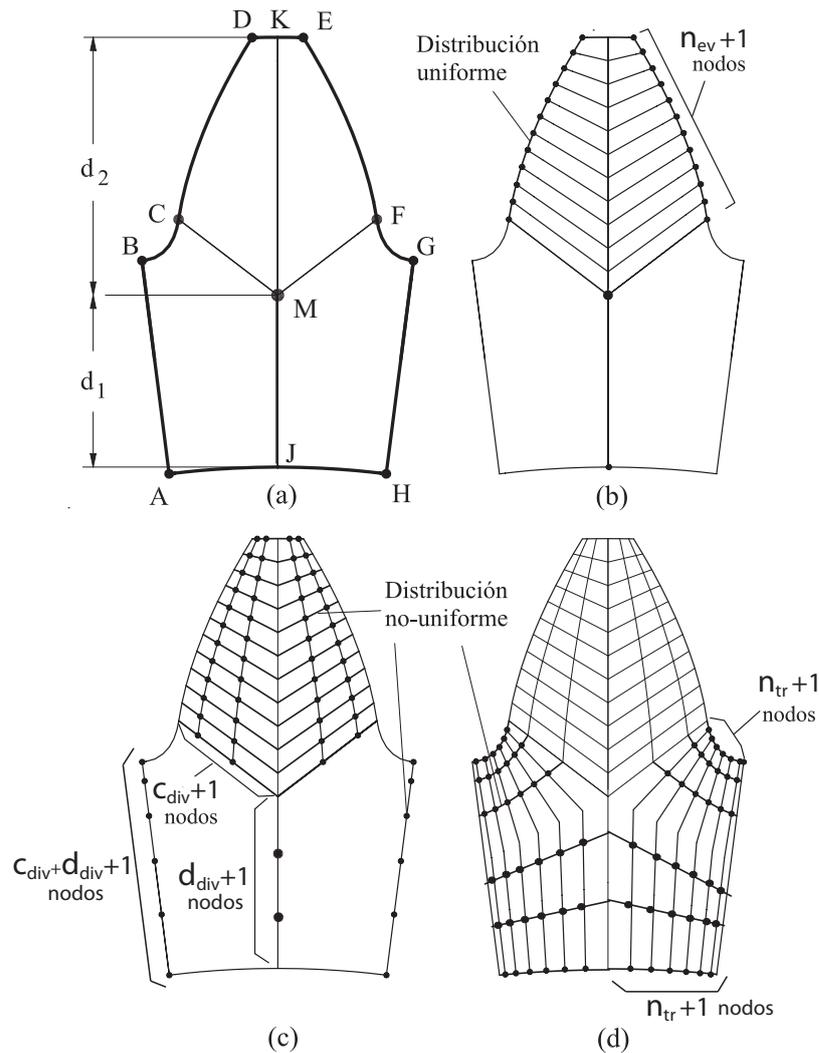


Fig. 3.48: Definición del mallado de elementos finitos

modelo. Se ha establecido la base del diente en una circunferencia de radio denominado radio de corona, que es parametrizable, pero que en este caso se ha fijado a una distancia de 2.5 veces el módulo por debajo de la circunferencia de pie. En este radio de corona se encuentran situados los puntos A, J y H. Los puntos E, K y D se encuentran en la circunferencia de cabeza del diente. Los puntos F y C corresponden al punto de corte entre evolvente y trocoide, y están contenidos en la circunferencia de pie. Los puntos G y B definen el inicio de la trocoide. Los puntos K, M y J, dividen el diente en dos mitades simétricas, donde el punto M se encuentra a una distancia igualmente parametrizable, que se ha establecido en este modelo como el valor dado por la suma

del radio de corona mas 0.4 veces la distancia entre el radio de cabeza y el radio de corona.

La estructura del mallado de cada modelo de diente se determina a partir de los parámetros  $n_{ev}$ ,  $n_{tr}$ ,  $c_{div}$  y  $d_{div}$ , que establecen la densidad de mallado o el número de elementos finitos que tendrá el modelo. En la evolvente, como se ha establecido en el apartado 3.6.1 en el paso 1 del procedimiento para la creación del modelo, se realizará una distribución uniforme de los nodos, como se observa en la Fig. 3.48 gráfica (b), se tendrá un total de  $n_{ev} + 1$  nodos.

La parte media del diente, se divide de acuerdo con los parámetros  $c_{div}$  y  $d_{div}$ , según una distribución no uniforme que irá en función de unos ratios también parametrizables, Fig. 3.48 gráfica (c). La base del diente y las divisiones en la trocoide están determinadas por el valor de  $n_{tr}$ , Fig. 3.48 gráfica (d).

Cada diente de los engranajes está discretizado en la dirección longitudinal en  $v_{div}$  divisiones. Todos los nodos del mallado se calculan en correspondencia con las  $v_{div} + 1$  secciones transversales.

### 3.6.3. Análisis del reparto de carga

En esta sección se estudiará, para una serie de transmisiones de engranajes, la distribución de la carga obtenida mediante la simulación del modelo basado en el método de los elementos finitos y se comparará con el reparto de carga obtenido con el modelo aproximado propuesto de la función potencial unitario inverso. Las transmisiones estudiadas abarcarán principalmente transmisiones de engranajes no estándar, puesto que las transmisiones estándar fueron verificadas en [58].

A partir del modelo de ANSYS especificado en los apartados anteriores 3.6.1 y 3.6.2, se obtienen las tensiones de contacto que aparecen en las superficies o flancos de los dientes en contacto. A continuación, se define un camino o *path* por los nodos de la línea de contacto, de forma que el modelo de elementos finitos obtiene la distribución de presiones de contacto a lo largo de los nodos de dicha línea. El procesador de ANSYS permite tabular los resultados obtenidos para importarlos a MATLAB y compararlos

con los obtenidos mediante el modelo aproximado de la función potencial unitario inverso.

Analíticamente, la presión de contacto que aparece durante el engrane de una pareja de dientes en un punto cualquiera de la línea de contacto, se puede determinar mediante la ecuación de Hertz para el caso de contacto entre cilindros paralelos, sin más que sustituir la altura de cabeza de los cilindros por la longitud de la línea de contacto y los radios de los mismos por los radios de curvatura de ambos perfiles normales en los respectivos puntos de contacto. En el capítulo 4 se ha desarrollado la ecuación de Hertz para aplicarla al caso de contacto entre dientes de engranajes, de forma que dicha tensión se expresa en función de la distribución de carga por unidad de longitud, es decir, en función de  $R(\xi)$  para engranajes rectos y en función de  $v(\xi)$  para engranajes helicoidales. De este modo, las tensiones de contacto obtenidas por *ANSYS* serán importadas a *MATLAB*, donde, a partir de ellas, se obtendrá la distribución de carga por unidad de longitud y se compararán con las obtenidas analíticamente a través de la función aproximada del potencial.

#### 3.6.4. Reparto de carga para engranajes rectos

La expresión general de la tensión de contacto para engranajes rectos puede escribirse en función del reparto de carga como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{1}{b} \frac{F(\xi)}{\rho(\xi)}} \quad (3.100)$$

en la que la función  $1/\rho(\xi)$  se expresa como:

$$\frac{1}{\rho(\xi)} = \frac{1}{\rho_1(\xi)} + \frac{1}{\rho_2(\xi)} \quad (3.101)$$

y la función  $F(\xi)$  puede sustituirse por:

$$F(\xi) = R(\xi)F \quad (3.102)$$

de forma que la obtención de la función de reparto de carga a partir de las tensiones de contacto obtenidas por *ANSYS* es inmediata, sin más que sustituir cada uno de los términos en la Ec. 3.100 y despejar la función  $R(\xi)$ .

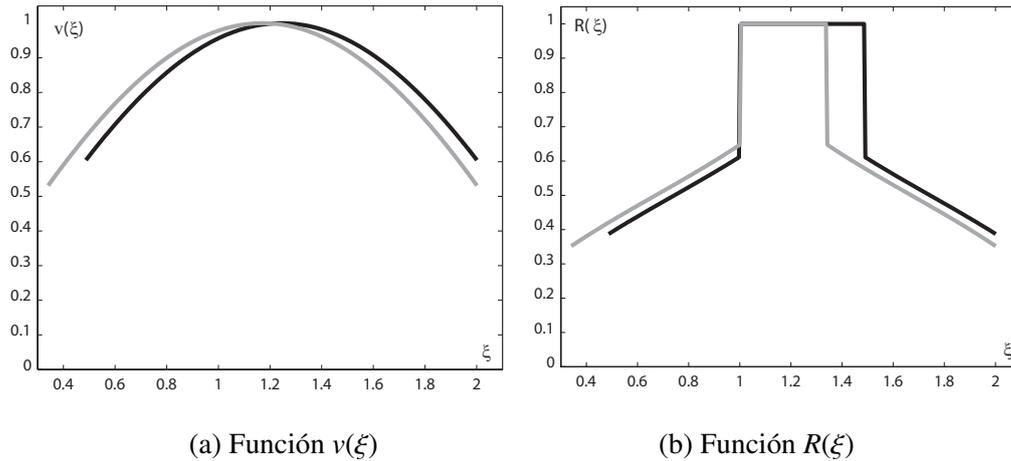


Fig. 3.49: Funciones para transmisión no estándar (negro) y para la misma transmisión estándar (gris).

### Ejemplo de engranaje recto convencional con modificación de la distancia entre centros.

Se ha estudiado una transmisión cuyos datos de diseño son:

- Número de dientes del piñón: 21
- Número de dientes de la rueda: 49
- Ángulo de presión:  $20^\circ$
- Módulo: 0,01
- Ancho del diente: 0,02
- Radio de acuerdo:  $0,25m$
- Coeficientes de desplazamiento para el piñón y la rueda: 0
- Distancia entre los centros de operación:  $r_{p1} + r_{p2} + 0,15m$

El resto de los parámetros toman el valor que han considerado como valores estándar ( $h_a = 1$ ,  $h_{a0} = 1,25$ ). La velocidad de rotación es de 100 rpm y la potencia transmitida de  $P = 6,841$  kW.

Esta transmisión tiene un grado de recubrimiento transversal de  $\varepsilon_\alpha = 1,5139$  y el punto inferior del intervalo de contacto esta descrito por  $\xi_{im} = 0,4871$ . Si consideramos una transmisión exactamente igual a la anterior pero con todos sus valores estándar, es

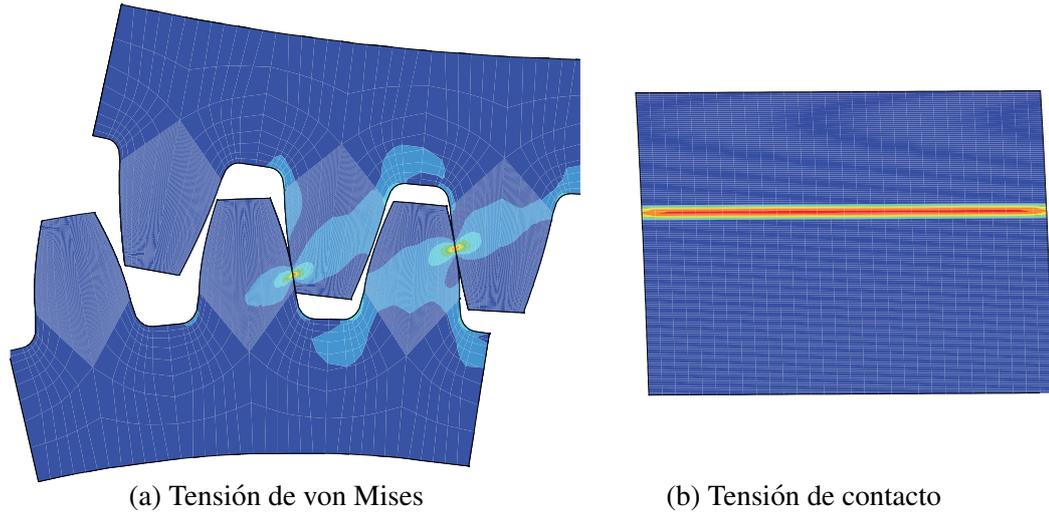


Fig. 3.50: Resultados de la simulación del modelo de MEF para una determinada posición de contacto

decir, con una distancia entre centros igual a  $r_{p1} + r_{p2}$ , tendría un grado de recubrimiento transversal ficticio de  $\varepsilon'_\alpha = 1,6601$  y el punto inferior ficticio del intervalo de contacto esta descrito por  $\xi'_{inn} = 0,3409$ . El potencial unitario inverso aproximado se obtiene a partir de la Ec. 3.88, con:

$$\begin{aligned} \xi_m &= \xi_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha = 1,2441 \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} = 1,2175 \\ (\Delta\varepsilon_\alpha)_c &= \varepsilon'_\alpha - \varepsilon_\alpha = 0,1462 \end{aligned} \quad (3.103)$$

El reparto de carga se puede calcular a través de las Ecs. 3.55, 3.88 y 3.103. En la figura 3.49 se muestra la función potencial unitario inverso y la función reparto de carga obtenidas para la transmisión con la que se esta trabajando (en negro) y para la misma transmisión pero con todos sus parámetros fijados a valores estándar (en gris).

El procedimiento para la obtención del reparto de carga para el modelo de MEF consiste en, primeramente, realizar la simulación del modelo para una determinada posición de contacto, Fig. 3.50 gráfica (a). Para cada simulación, se representan las

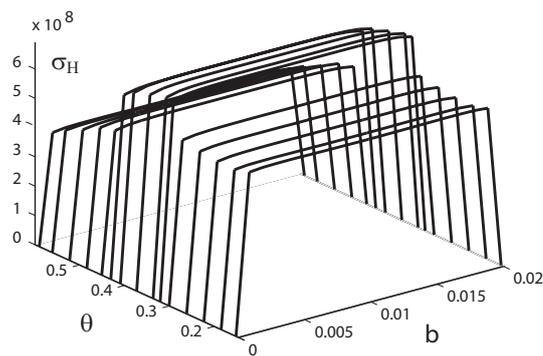


Fig. 3.51: Tensión de contacto obtenida con ANSYS para cada posición de contacto simulada,  $\theta$ , a lo largo de la cara del diente,  $b$ .

tensiones de contacto que se producen en la superficie de cada diente, Fig. 3.50 (b). Finalmente, se define un *path* sobre la línea de contacto mediante los dos nodos extremos de cada cara del diente y se obtienen la distribución de tensión a lo largo de dicho *path*.

En la figura 3.51 se representan las tensiones de contacto obtenidas a lo largo de la cara del diente,  $b$ , para cada posición de contacto simulada. La posición de contacto queda definida por el parámetro  $\theta$ .

La figura 3.52 muestra la comparación entre el reparto de carga obtenido mediante el modelo aproximado de la función potencial unitario inverso y el reparto de carga obtenido a partir de las tensiones de contacto del modelo de elementos finitos. El modelo analítico se representa con línea continua y se representan 15 puntos correspondientes a las 15 posiciones de contacto simuladas para el modelo de MEF

### **Ejemplo de engranaje recto HTCR con modificación de la distancia entre centros.**

Se ha estudiado otra transmisión de engranajes rectos pero con alto grado de recubrimiento transversal. Los parámetros geométricos del diseño son:

- Número de dientes del piñón: 50
- Número de dientes de la rueda: 100

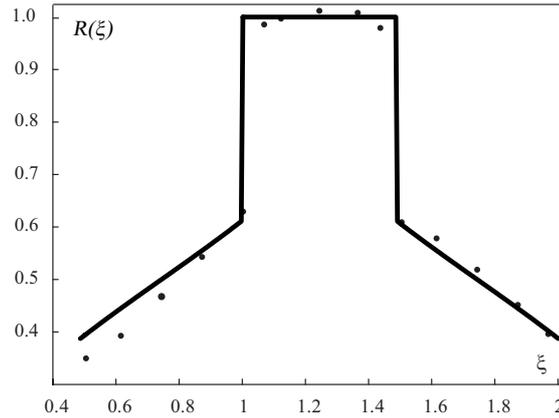


Fig. 3.52: Comparación del reparto de carga entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF (punteado).

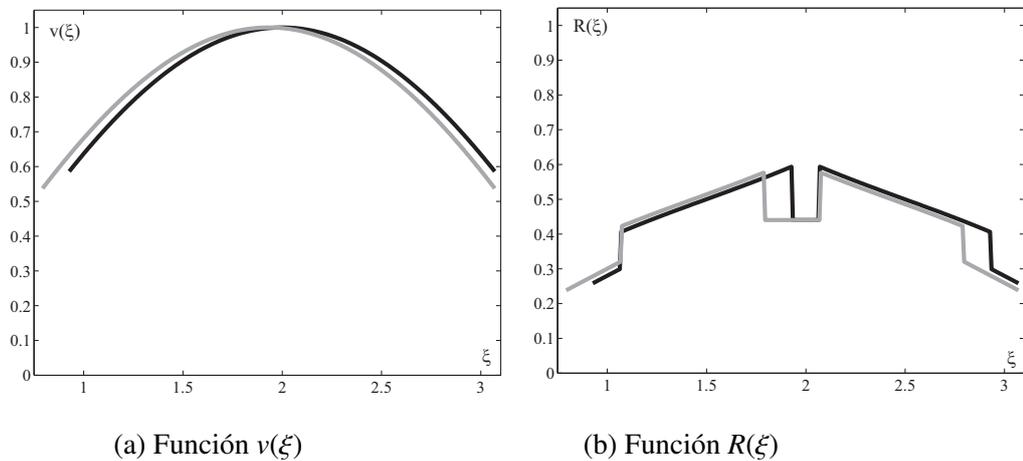


Fig. 3.53: Funciones para transmisión HTCR no estándar (negro) y para la misma transmisión estándar (gris).

- Ángulo de presión:  $14^\circ$
- Módulo: 0,01
- Ancho del diente: 0,02
- Radio de acuerdo:  $0,25m$
- Coeficientes de desplazamiento para el piñón y la rueda: 0
- Distancia entre los centros de operación:  $r_{p1} + r_{p2} + 0,1m$

El resto de los parámetros que no se han especificado toman el valor estándar. La velocidad de rotación es la misma que en el caso anterior pero la potencia transmitida

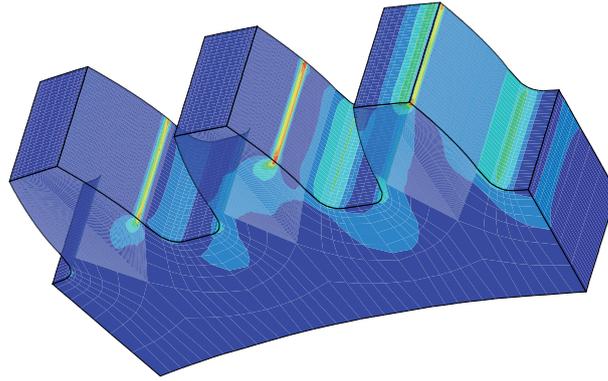


Fig. 3.54: Tensiones de Von Mises en el piñón para un modelo de engranajes rectos con tres dientes en contacto

cambia a  $P = 43,8$  kW. Esta transmisión tiene un grado de recubrimiento transversal de  $\varepsilon_\alpha = 2,1427$  y el punto inferior del intervalo de contacto está descrito por  $\xi_{inn} = 0,9274$ . Si consideramos una transmisión exactamente igual a la anterior pero con todos sus valores estándar, el grado de recubrimiento transversal ficticio vale  $\varepsilon'_\alpha = 2,2769$  y el punto inferior ficticio del intervalo de contacto está descrito por  $\xi'_{inn} = 0,7932$ . El potencial unitario inverso aproximado se obtiene a partir de la Ec. 3.88, con:

$$\begin{aligned}\xi_m &= \xi_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha = 1,9988 \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} = 0,8817 \\ (\Delta\varepsilon_\alpha)_c &= \varepsilon'_\alpha - \varepsilon_\alpha = 0,1342\end{aligned}\tag{3.104}$$

El reparto de carga se puede calcular a través de las Ecs. 3.55, 3.88 y 3.104.

En la figura 3.53 se muestra la función potencial unitario inverso y la función reparto de carga obtenidas para la transmisión con la que se está trabajando (en negro) y para la misma transmisión pero con todos sus parámetros fijados a valores estándar (en gris).

La figura 3.54 muestra las tensiones obtenidas en el piñón para la transmisión anterior, en una posición en la que existe contacto simultáneo en tres dientes.

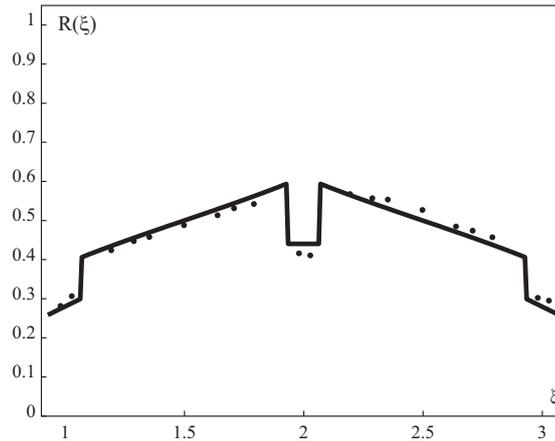


Fig. 3.55: Comparación del reparto de carga entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF (punteado).

La figura 3.55 muestra la comparación entre el reparto de carga obtenido mediante el modelo aproximado de la función potencial unitario inverso y el reparto de carga obtenido a partir de las tensiones de contacto del modelo de elementos finitos. El modelo analítico se representa con línea continua y se representan 20 puntos correspondientes a las 20 posiciones de contacto simuladas para el modelo de MEF. Se observa que los valores obtenidos con el modelo analítico encajan con bastante precisión con los obtenidos mediante técnicas de elementos finitos.

### 3.6.5. Reparto de carga para engranajes helicoidales

A partir de la ecuación 3.66, deducida en el apartado 3.4, se sabe que la distribución de carga en engranajes helicoidales es proporcional al cociente entre la función potencial unitario inverso y la función  $I_v(\xi_0)$ , que se calcula con la Ec. 3.67. Aplicando esta distribución de carga a la ecuación de Hertz, se obtiene la expresión general de la tensión de contacto para engranajes helicoidales como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta \cos \beta_b}{b} F \frac{v(\xi)}{\rho(\xi)} \frac{1}{I_v(\xi_0)}} \quad (3.105)$$

donde la función  $1/\rho(\xi)$  se expresa según la Ec. 3.101.

Pero dado que la función  $I_v(\xi_0)$  toma un valor constante para una determinada

posición de contacto en la primera sección frontal y sabiendo que, tanto la suma de los radios de curvatura de las superficies en contacto como el coeficiente elástico  $Z_E$  tienen un valor constante, puede plantearse la proporcionalidad entre las funciones tensión de contacto  $\sigma_H$ , radios de curvatura  $\rho(\xi)$  y la función potencial unitario inverso  $v(\xi)$ , mediante la expresión:

$$v(\xi) \propto \sigma_H^2(\xi) \rho_1(\xi) \rho_2(\xi) \quad (3.106)$$

Por consiguiente, a partir de la Ec. 3.106, se puede obtener el potencial unitario inverso para el modelo de MEF a partir de las tensiones de contacto obtenidas por ANSYS y compararlo con el modelo aproximado de la función potencial unitario inverso propuesto.

Se ha estudiado una transmisión de engranajes helicoidales con los siguientes parámetros geométricos de diseño:

- Número de dientes del piñón: 30
- Número de dientes de la rueda: 30
- Ángulo de presión:  $28^\circ$
- Ángulo de hélice:  $25^\circ$
- Módulo: 0,01
- Ancho del diente: 0,065
- Radio de acuerdo: 0,2m
- Coeficientes de desplazamiento para el piñón y la rueda: 0
- Coeficiente de altura de cabeza:  $h_a = 0,9$
- Coeficiente de altura de pie:  $h_{a0} = 1,25$
- Distancia entre los centros de operación:  $r_{p1} + r_{p2}$

A esta transmisión se le ha aplicado una potencia de  $P = 160,81$  kW a una velocidad de rotación de  $\omega = 100$  rpm.

El grado de recubrimiento de la transmisión es  $\varepsilon_\alpha = 1,1118$  y el punto inferior del intervalo de contacto,  $\xi_{im}$ , toma un valor de 2,2453. Si se trabajase con una transmisión idéntica pero con altura de cabeza de dientes estándar, el grado de recubrimiento

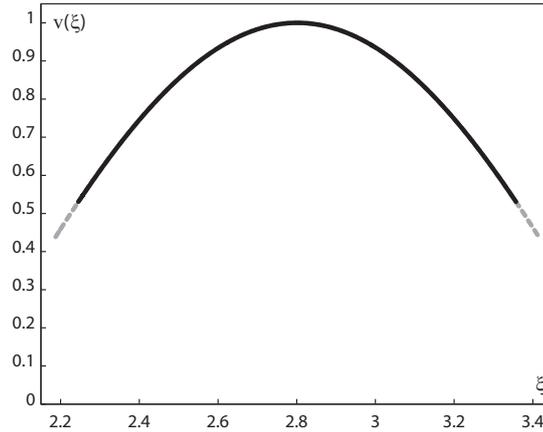


Fig. 3.56: Potencial unitario inverso para la transmisión dada (línea continua) y para la no estándar (punteado).

transversal ficticio valdría  $\varepsilon'_\alpha = 1,2274$  y el punto inferior ficticio del intervalo de contacto estaría descrito por  $\xi'_{inn} = 2,1875$ . Por tanto, el potencial unitario inverso aproximado se puede obtener a partir de las ecuaciones obtenidas en el apartado 3.5.3.1, con la Ec. 3.78 del potencial unitario inverso aproximado para engranajes con altura de diente modificada, donde  $\xi_m$  y  $b'_0$  toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\xi'_m &= \xi'_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha = 2,8012 \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} = 1,8196\end{aligned}\tag{3.107}$$

En la figura 3.56 se observa, en negro, el potencial unitario inverso obtenido para la transmisión especificada y, en gris y punteada, la misma transmisión pero con dimensiones estándar.

El procedimiento inicial para obtener el potencial unitario inverso para engranajes helicoidales es el mismo que el realizado para obtener la función de reparto de carga en rectos. Primeramente se simula el modelo de elementos finitos y se representa la distribución de tensión de contacto,  $\sigma_H$ , en el flanco del diente, Fig 3.57. Luego, se define un camino o *path* a través los nodos de la línea de contacto, en el cuál se obtiene

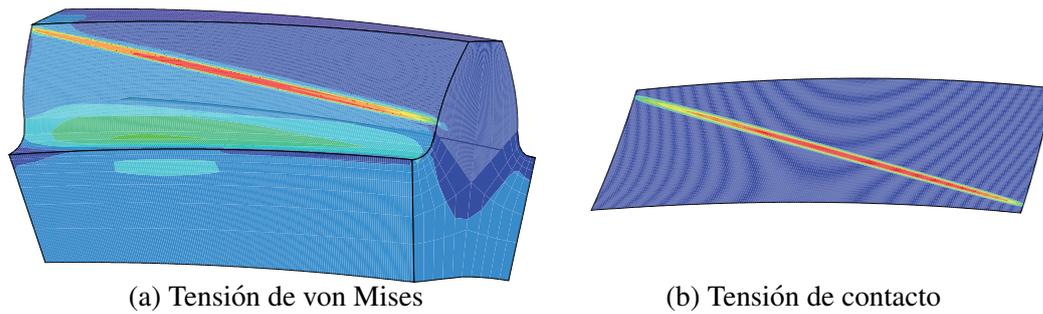


Fig. 3.57: Resultados de la simulación del modelo de MEF para un engranaje helicoidal.

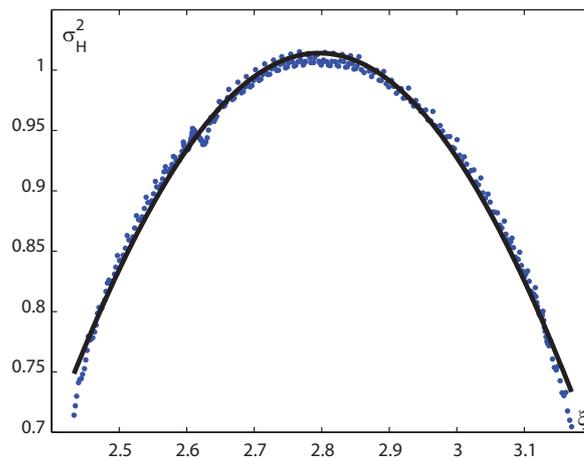


Fig. 3.58:  $\sigma_H^2$  obtenida por MEF y curva de regresión aproximada.

la distribución de presiones.

Las tensiones de contacto importadas desde *ANSYS* presentan ligeras fluctuaciones, puesto que la tensión se obtiene mediante la interpolación de los nodos más cercanos a la línea geométrica en la que se supone producido el contacto. Además, según la ecuación 3.106 obtenida, la relación entre el potencial y las tensiones es cuadrática, de forma que al elevar al cuadrado las tensiones obtenidas, dichas fluctuaciones aumentan. Por consiguiente, se ha optado por aproximar dichas tensiones por una curva de regresión de tipo senoidal, cuyo coeficiente de regresión múltiple ajustado vale 0,9889, Fig. 3.58.

La figura 3.59 representa la comparación del potencial inverso unitario (proporcional a la carga por unidad de longitud) obtenido a partir de la tensión de contacto resultante del método de los elementos finitos frente a la función analítica propuesta. La

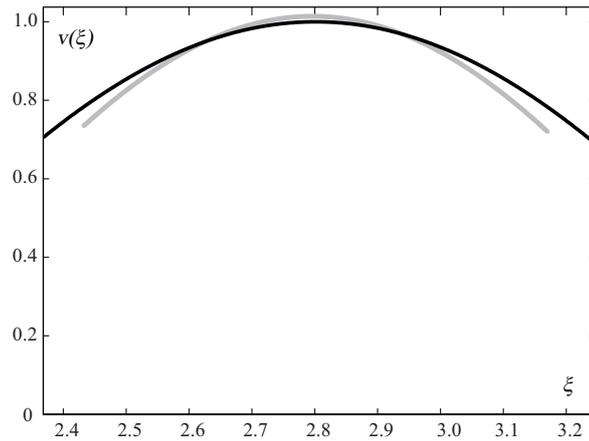


Fig. 3.59: Comparación entre la función potencial unitario inverso: analítico (negro) y MEF (gris).

función analítica se representa en todo el rango del grado de recubrimiento transversal, mientras que la obtenida por elementos finitos se representa sólo en el intervalo de contacto producido en la simulación. Se puede observar que los valores de carga obtenidos con el modelo analítico encajan con bastante precisión con los valores obtenidos por elementos finitos.



## Capítulo 4

# Modelo de cálculo a presión superficial

En el presente capítulo se estudia la evolución de la tensión nominal de contacto en todas las secciones transversales de un diente a lo largo de un ciclo completo de engrane. Los cálculos correspondientes se llevarán a cabo siguiendo el procedimiento de cálculo ISO, pero como distribución de carga se utilizará la distribución no uniforme indicada en el capítulo anterior, en lugar de la distribución uniforme supuesta por ISO. El estudio de la tensión se realizará tanto para dentado recto como para dentado oblicuo en engranajes con alto grado de recubrimiento transversal y abarcará estudios de engranajes que se han denominado estándar y estudios para engranajes no estándar: transmisiones con coeficiente de altura de cabeza del diente distinta a 1, transmisiones en las que se produce engrane en vacío, y cuando la distancia entre los centros de operación es diferente a la nominal:  $r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2)$ . Se realizará una verificación de los resultados obtenidos mediante el modelo analítico propuesto con la distribución de tensiones obtenida con un modelo resuelto mediante la técnica de elementos finitos. En último lugar, se realizará una comparación de los resultados de tensiones obtenidas aplicando el método propuesto por ISO y empleando el definido en el presente capítulo.

## 4.1. Introducción

Para el cálculo a presión superficial, las normas ISO [5, 6] y AGMA [4, 8] utilizan la ecuación de Hertz para la determinación de la tensión de contacto en un punto cualquiera de la línea de contacto. Ambos métodos de cálculo consideran la carga por unidad de longitud igual a la carga total dividida por la longitud de contacto pero, mientras que AGMA toma la longitud mínima de contacto producida durante el engrane, ISO emplea una longitud efectiva de contacto, basada en un ancho de cara virtual, que supuestamente tiene en cuenta la influencia de grados de recubrimiento transversal y en el salto mayores que 1. Aunque ambas normas utilizan las mismas hipótesis de partida -contacto elástico de Hertz entre cilindros y reparto uniforme de la carga-, discrepan en la localización del punto de máxima tensión de contacto e incluyen en sus formulaciones factores de corrección por distribución de carga diferentes.

La anterior versión de la norma ISO del año 1996 consideraba, en un principio, engranajes con grado de recubrimiento transversal hasta 3, y sugería, para el cálculo a presión superficial, suponer la totalidad de la carga actuando en el límite superior del intervalo de contacto doble. Sin embargo, no se aportaba ninguna razón que justificara esa propuesta, justificación a todas luces necesaria cuando se está considerando toda la carga actuando en un punto que, cuando está en contacto, existe otra pareja de dientes también en contacto, que soportará parte de esa carga. Se trata, por tanto, de un criterio de cálculo muy conservador, difícilmente admisible con los criterios de diseño que se manejan en la actualidad.

Esta norma se revisó y en la versión actual del año 2006 [6], en lo que respecta al cálculo a presión superficial de engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, se ha limitado a acortar el rango de validez de las formulaciones propuestas a grados de recubrimiento hasta 2,5 como máximo -sin otra finalidad que la de adecuarse al alcance que establece inicialmente la norma para el grado de recubrimiento transversal entre 1 y 2,5-, y sugiere hacer los cálculos con la carga actuando en el límite inferior del intervalo de contacto doble del piñón, pero de nuevo

sin aportar justificación de ninguna clase.

La norma AGMA [4, 8] sencillamente no considera engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, y establece de forma explícita que los métodos de cálculo que presenta no son aplicables a grados de recubrimiento mayores.

Todo lo anterior da una idea de que no se ha realizado hasta la fecha un estudio suficientemente profundo del tema, y el conocimiento que existe del mismo no es del todo consistente. Es muy posible que la principal causa de ello sea que los resultados que se obtienen al aplicar la ecuación de Hertz a este caso de engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, no se ajustan demasiado bien a los resultados experimentales, si se supone que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la línea de contacto.

Por otro lado, ninguna de las normas consideran la influencia de las modificaciones en la altura de los dientes ni el efecto que pueda tener el variar la distancia entre centros de operación o el que se produzca engrane en vacío.

El objetivo del presente capítulo es determinar las condiciones críticas de carga en engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, utilizando la distribución de carga no uniforme presentado en el capítulo 3, para a partir de ellas, calcular el valor de la tensión nominal de contacto, siguiendo el mismo procedimiento de la norma. Se describirá, en primer lugar, el método de cálculo propuesto por la norma ISO [6], para a continuación presentar el nuevo modelo que se propone. Finalmente, se ampliará el estudio a engranajes de geometría o condiciones de operación no estándar.

## **4.2. Cálculo de la tensión de contacto según ISO 6336-2**

La línea de contacto en dientes de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente tanto rectos como helicoidales, en ausencia de errores de alineación o de otra naturaleza, es siempre una línea recta. Teniendo esto en cuenta, la norma ISO 6336-2 [6] calcula la tensión nominal de contacto,  $\sigma_{H0}$ , a partir de la ecuación de Hertz para el caso de contacto entre cilindros paralelos, sin más que sustituir la altura de los cilindros por la longitud de la línea de contacto,  $l_c$ , y los radios de los mismos por los radios de

curvatura de ambos perfiles en los respectivos puntos de contacto,  $\rho_{n1}$  y  $\rho_{n2}$ :

$$\sigma_{H0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}} \sqrt{\frac{F_n}{l_c} \left( \frac{1}{\rho_{n1}} + \frac{1}{\rho_{n2}} \right)} \quad (4.1)$$

que depende de los módulos de elasticidad  $E$  y de los coeficientes de Poisson  $\mu$  de los materiales,  $F_n$  es la fuerza normal sobre las superficies de los dientes y  $\rho_{n1}$  y  $\rho_{n2}$  los radios de curvatura de los perfiles normales del piñón y de la rueda en los respectivos puntos de contacto, entendiéndose por plano normal el plano perpendicular a la línea de contacto. Los índices 1 y 2, de nuevo, hacen referencia al piñón y la rueda, respectivamente.

La norma ISO refiere la tensión de contacto a la geometría de la sección transversal del diente, y concretamente la expresa en función de la componente tangencial de la fuerza en dicha sección transversal. Así, teniendo en cuenta que el ángulo que forman el plano normal y el plano transversal es  $\beta_b$ :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{F}{\cos \beta_b} = \frac{F_t}{\cos \alpha_t \cos \beta_b} \\ \rho_n &= \frac{\rho}{\cos \beta_b} \end{aligned} \quad (4.2)$$

siendo  $F$  la fuerza en la sección transversal del diente,  $\beta_b$  el ángulo de hélice en la base,  $F_t$  la componente tangencial de la fuerza en la sección transversal,  $\rho$  el radio de curvatura del perfil en la sección transversal y  $\alpha_t$  el ángulo de presión transversal. Con ello, la tensión de contacto resulta ser:

$$\sigma_{H0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}} \sqrt{\frac{F_t}{\cos \alpha_t l_c} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)} \quad (4.3)$$

La tensión de contacto de ISO se calcula en el punto de rodadura, en el que el radio de curvatura se puede expresar como:

$$\rho = r_r \operatorname{sen} \alpha'_t \quad (4.4)$$

que, sustituido en la expresión de la curvatura equivalente, resulta:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha'_t} \left( \frac{1}{r_{r1}} + \frac{1}{r_{r2}} \right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha'_t} \frac{1}{r_{r2}} (1 + u) = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha'_t} \frac{1}{r_{r1}} \frac{1 + u}{u} \quad (4.5)$$

Dado que la relación entre el radio de base y el radio de rodadura es:

$$r_b = r_r \cos \alpha'_t \Rightarrow r_p \cos \alpha_t = r_r \cos \alpha'_t \Rightarrow r_r = r_p \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} \quad (4.6)$$

sustituyendo en la Ec. 4.5, se obtiene:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha'_t} \frac{1}{r_{r1}} \frac{1+u}{u} = \frac{\cos \alpha'_t}{\operatorname{sen} \alpha'_t \cos \alpha_t} \frac{1}{r_{r1}} \frac{1+u}{u} \quad (4.7)$$

Por otro lado, se conoce que la longitud total de la línea de contacto de un diente se puede expresar como:

$$l_c = \frac{b}{\cos \beta_b} \quad (4.8)$$

Si se sustituyen estas igualdades en la ecuación Ec. 4.3, se obtiene la siguiente expresión de la tensión de contacto:

$$\sigma_{H0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} \sqrt{\frac{F_t \cos \alpha'_t \cos \beta_b}{b \operatorname{sen} \alpha'_t \cos^2 \alpha_t} \frac{2}{d_1} \frac{1+u}{u}} \quad (4.9)$$

ISO [6] define una serie de factores que multiplican a la tensión. Algunos proceden, simplemente, de la agrupación de términos de la ecuación anterior, tales como el factor de elasticidad  $Z_E$ :

$$Z_E = \frac{1}{\sqrt{\pi \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (4.10)$$

o el factor de forma  $Z_H$ , que tiene en cuenta el efecto que la curvatura del flanco del diente tiene sobre la tensión de contacto, y se expresa como:

$$Z_H = \sqrt{\frac{F_t}{b} \frac{2 \cos \alpha'_t \cos \beta_b}{\operatorname{sen} \alpha'_t \cos^2 \alpha_t}} \quad (4.11)$$

Pero otros factores sirven para corregir la tensión y aproximar los resultados teóricos a los reales, puesto que la tensión de contacto de la Ec. 4.9 ha sido obtenida bajo las hipótesis de contacto de Hertz y reparto de carga uniforme:

Factor de grado de recubrimiento  $Z_\varepsilon$ , que considera la influencia del grado de recubrimiento en la longitud efectiva de la línea de contacto:

- Para engranajes rectos:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}} \quad (4.12)$$

- Para engranajes helicoidales:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon &= \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}(1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{para } \varepsilon_\beta < 1 \\ Z_\varepsilon &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{para } \varepsilon_\beta \geq 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Factor del ángulo de hélice  $Z_\beta$ , que independientemente de la influencia que tiene el ángulo de hélice sobre la longitud de la línea de contacto, tiene en cuenta la influencia del ángulo de hélice en la capacidad de carga de la superficie. Lógicamente, para engranajes rectos este factor vale 1.

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta} \quad (4.14)$$

Por consiguiente, la tensión nominal de contacto en el punto de rodadura en la sección transversal del diente, según ISO, puede calcularse como:

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{1 + u}{u}} \quad (4.15)$$

Por último existe un factor denominado  $Z_{B/D}$  llamado de contacto único, cuando se refiere a engranajes con grado de recubrimiento transversal entre 1 y 2, que también multiplicará a la tensión calculada en el apartado anterior 4.15. Este factor se debe considerar si la tensión de Hertz se calcula en el punto de rodadura. Los subíndices  $B$  y  $D$  hacen referencia al piñón y a la rueda respectivamente y los subíndices  $p$  y  $d$  designan el punto de rodadura y el punto considerado de carga crítica:

$$Z_{B/D} = \sqrt{\frac{(\rho_{t1}\rho_{t2})_p}{(\rho_{t1}\rho_{t2})_d}} \quad (4.16)$$

Para el caso de engranajes rectos con grado de recubrimiento transversal  $2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2,5$ , considera las condiciones críticas en el límite inferior del intervalo de contacto doble [6].

### 4.3. Propuesta de modelo de cálculo a presión superficial

En el presente epígrafe se lleva a cabo el estudio de la tensión de contacto basado en el modelo de distribución no uniforme de la carga a lo largo de la línea de contacto, obtenido a partir del principio de mínimo potencial de deformación, presentado en el capítulo 3. Para ello se estudia la evolución de la tensión nominal de contacto del diente en todas las secciones transversales del mismo a lo largo de un ciclo completo de engrane. Este estudio abarcará engranajes de perfil de evolvente, rectos y helicoidales, con alto grado de recubrimiento transversal e incluye estudios de engranajes que se han denominado estándar y estudios para engranajes no estándar, es decir, aquellas transmisiones con coeficiente de altura de cabeza del diente distinta de 1, o transmisiones en las que se produce engrane en vacío o cuando la distancia entre los centros de operación es diferente a la nominal:  $r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2)$ .

La tensión se calcula siguiendo el procedimiento usado por ISO, descrito en las sección anterior. De acuerdo con las Ecs. 4.1 y 4.10, la tensión nominal de contacto se puede expresar como:

$$\sigma_{H0} = Z_E \sqrt{\frac{F_n}{l_c} \left( \frac{1}{\rho_{n1}} + \frac{1}{\rho_{n2}} \right)} \quad (4.17)$$

donde el término  $F_n/l_c$  que aparece en esa ecuación responde a la hipótesis utilizada de reparto de carga a lo largo de la línea de contacto. Es evidente que, para considerar una distribución no uniforme de carga, este término se ha de sustituir por la fuerza por unidad de longitud  $f$ , que como se dedujo en el capítulo 3, será función de  $\xi$  para el caso de engranajes rectos y función de  $\xi$  y  $\xi_0$  para engranajes helicoidales. En consecuencia, y teniendo en cuenta la Ec. 4.2 que relaciona las variables en el plano normal con respecto al transversal, la tensión de contacto en un punto vendrá dada por la expresión:

$$\sigma_{H0} = Z_E \sqrt{f \left( \frac{1}{\rho_1(\xi)} + \frac{1}{\rho_2(\xi)} \right)} = Z_E \sqrt{f \frac{(r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t}{\rho_1(\xi) \rho_2(\xi)}} \quad (4.18)$$

- Para engranajes rectos:

$$f = f(\xi) = \frac{R(\xi)F}{b} \quad (4.19)$$

donde

$$R(\xi) = \frac{v}{\sum_i v_i} \quad (4.20)$$

- Para engranajes helicoidales:

$$f = f(\xi, \xi_0) = \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta_b}{b} \frac{v(\xi)}{I_v(\xi_0)} F \quad (4.21)$$

La suma de los radios de curvatura en la sección transversal se puede calcular como:

$$\lambda = \rho_1 + \rho_2 = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t = \left( m \frac{Z_1 + Z_2}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t \right) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (4.22)$$

y agrupando términos:

$$\lambda = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t \frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} = \lambda_\xi \frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} \quad (4.23)$$

donde se ha denominado  $\lambda_\xi$  al término:

$$\lambda_\xi = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (4.24)$$

Los radios de curvatura en la sección transversal están relacionados con el parámetro  $\xi$  mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) &= r_{b1} \theta_1 = \frac{2\pi}{Z_1} r_{b1} \xi = r_{p1} \cos \alpha_t \frac{2\pi}{Z_1} \xi = \frac{m Z_1}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t \frac{2\pi}{Z_1} \xi = \frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} \xi \\ \rho_2(\xi) &= \frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} (\lambda_\xi - \xi) \end{aligned} \quad (4.25)$$

por tanto, la curvatura equivalente se puede expresar como:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\lambda}{\rho_1(\lambda - \rho_1)} = \frac{\lambda}{\frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} \xi \left( \lambda - \frac{\pi m \cos \alpha_t}{\cos \beta} \xi \right)} = \frac{\cos \beta}{\pi m \cos \alpha_t} \frac{\lambda_\xi}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \quad (4.26)$$

e introduciendo este término en la expresión de la tensión de contacto:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{f \cos \beta_b \frac{\cos \beta}{\pi m \cos \alpha_t} \frac{\lambda_\xi}{\xi(\lambda_\xi - \xi)}} = Z_E \sqrt{\frac{\lambda_\xi \cos \beta_b \cos \beta}{\pi m \cos \alpha_t}} \sqrt{\frac{f}{\xi(\lambda_\xi - \xi)}} \quad (4.27)$$

### 4.3.1. Tensión de contacto crítica para engranajes rectos

Para engranajes rectos, la tensión de contacto viene dada por:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{R(\xi)F}{b} \left( \frac{1}{\rho_1(\xi)} + \frac{1}{\rho_2(\xi)} \right)} = Z_E \sqrt{\frac{\lambda_\xi}{\pi m \cos \alpha_n}} \sqrt{\frac{F}{b} \frac{R(\xi)}{\xi(\lambda_\xi - \xi)}} \quad (4.28)$$

De acuerdo con ello, el máximo de la tensión y las condiciones críticas de carga corresponderán al valor del parámetro  $\xi$  que haga máxima la función:

$$\phi(\xi) = R(\xi) [\rho_1(\xi)[\lambda - \rho_1(\xi)]]^{-1} = \frac{R(\xi)}{\rho(\xi)} \propto R(\xi) [\xi(\lambda_\xi - \xi)]^{-1} \quad (4.29)$$

donde

$$\frac{1}{\rho(\xi)} = \frac{1}{\rho_1(\xi)[\lambda - \rho_1(\xi)]} \propto \frac{1}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \quad (4.30)$$

Para la determinación de dicho máximo se evalúa el crecimiento y decrecimiento de los términos que componen  $\phi(\xi)$  en el intervalo de contacto, es decir, se evalúan las funciones  $R(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$  en el intervalo de contacto.

La función  $1/\rho(\xi)$  es simétrica respecto de un mínimo que se localiza en el punto  $\xi = \lambda_\xi/2$ . Esto es fácilmente demostrable denominando  $g(\xi)$  a:

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{1}{\lambda_\xi - \xi} \quad (4.31)$$

Y para encontrar el mínimo de la función es necesario derivar e igualar a cero su derivada:

$$g'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \frac{1}{\lambda_\xi - \xi} + \frac{1}{(\lambda_\xi - \xi)^2} \frac{1}{\xi} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\lambda_\xi - \xi} = 0 \Rightarrow \xi = \frac{\lambda_\xi}{2} \quad (4.32)$$

Por tanto, la función  $[\rho(\xi)]^{-1} \propto [\xi(\lambda_\xi - \xi)]^{-1}$  es decreciente en el intervalo  $[0, \lambda_\xi/2]$  y es creciente en el intervalo  $[\lambda_\xi/2, \lambda_\xi]$ . La forma que toma la función  $R(\xi)$  depende de si la transmisión de engranajes se corresponde con lo que hemos denominado una transmisión estándar (los coeficientes de altura de cabeza del piñón y de la rueda valen 1, no existe engrane en vacío y la distancia entre los centros de operación es la nominal) ó es una transmisión no estándar (cuando no se cumple alguna de las tres condiciones anteriores).

#### 4.3.1.1. Tensión de contacto crítica para engranajes rectos estándar

Cuando las transmisiones se corresponden con lo que se ha denominado transmisiones estándar, la función  $R(\xi)$  toma la forma que se muestra en la Fig. 3.24 y es simétrica respecto del punto medio del intervalo de contacto  $\xi = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$  y, por tanto, el valor de dicha función en los puntos  $A_3$ ,  $B_2$  y  $C_2$  son exactamente iguales a los valores en los puntos  $D_2$ ,  $E_2$  y  $F_3$  respectivamente.

Cuando el piñón y la rueda tienen el mismo número de dientes, ambas funciones,  $R(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$ , son simétricas respecto del mismo punto:  $\xi = \lambda_\xi/2 = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$ , por consiguiente, la función  $\phi(\xi)$  será, igualmente, simétrica respecto de este punto medio. En esta situación, cabe esperar que, en la mayor parte de los casos, el máximo se sitúe en el punto  $C_2$  (y por tanto, también en  $D_2$ ), y sólo para aquellos casos en los que se trabaja con un ángulo de presión pequeño y número de dientes pequeños para conseguir grados de recubrimiento más altos, los cuales producen valores de  $\xi_{inn}$  más bajos, el máximo se desplazará a los puntos  $A_3$  y  $B_2$  (y por tanto, también a sus simétricos  $F_3$  y  $E_2$ , respectivamente).

La Figura 4.1 representa las funciones  $\phi(\xi)$ ,  $R(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$  para engranajes rectos HPCR con valores estándar de los coeficientes de altura de los dientes y distancia entre centros nominal. El eje  $x$  representa, en términos de  $\xi$ , el intervalo de la línea de acción entre los puntos de tangencia con ambas circunferencias de base. El intervalo de contacto está definido por la intersección de la línea de acción con las circunferencias exteriores del piñón y de la rueda, de radios  $r_{out1}$  y  $r_{out2}$ , respectivamente. En esta figura, se muestra un ejemplo concreto de una transmisión en la que el máximo se sitúa en el punto  $C_2$ .

A medida que la relación de transmisión aumenta la función de reparto de carga se desplaza hacia la izquierda respecto del punto medio de la función inversa de los radios de curvatura, punto  $\xi = \lambda_\xi/2$ , por consiguiente, el punto  $\xi = \lambda_\xi/2$ . Por tanto, como la función  $1/\rho(\xi)$  es siempre decreciente hasta el punto  $\xi = \lambda_\xi/2$ , los valores que tomará la tensión de contacto en los puntos  $D_2$ ,  $E_2$  y  $F_3$  será siempre menor que el valor que toma dicha función en los puntos  $A_3$ ,  $B_2$  y  $C_2$ , respectivamente. Puede

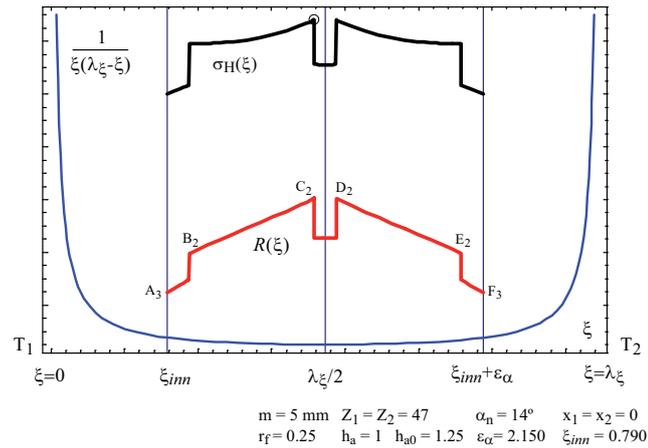


Fig. 4.1: Tensión de contacto crítica en engranajes rectos con máximo en el punto  $C_2$ .

concluirse que, cuando la relación de transmisión aumenta o cuando el ángulo de presión disminuye y el número de dientes del piñón es bajo, los valores de  $\xi_{inn}$  tienden a disminuir, y por tanto, el máximo tiende a desplazarse hacia la izquierda y aumentará el número de casos en los que el máximo se sitúe en los puntos  $A_3$  y  $B_2$ .

En la figura 4.2 se muestra la tensión de contacto crítica para engranajes rectos HTCR cuando el máximo se sitúa en los puntos  $A_3$  y  $B_2$ , respectivamente.

Para estudiar la influencia de los parámetros de diseño en la localización del punto de mayor tensión de contacto, se ha realizado un estudio en el que se han considerado una serie de engranajes rectos HTCR con unos parámetros de diseño contenidos en los siguientes rangos:

- Número de dientes del piñón entre 40 y 150
- Relación de transmisión de 1 a 3
- Ángulo de presión entre 10 y 18°

Con estos parámetros de diseño se ha logrado cubrir una amplia gama de valores del grado de recubrimiento transversal, desde valores ligeramente mayores a 2 a valores cercanos 3. Para obtener estos grados de recubrimiento es necesario utilizar engranajes con un elevado número de dientes, que pueden no ser muy realistas, pero que permite demostrar que el método propuesto es preciso en todo el rango de valores del grado de recubrimiento.

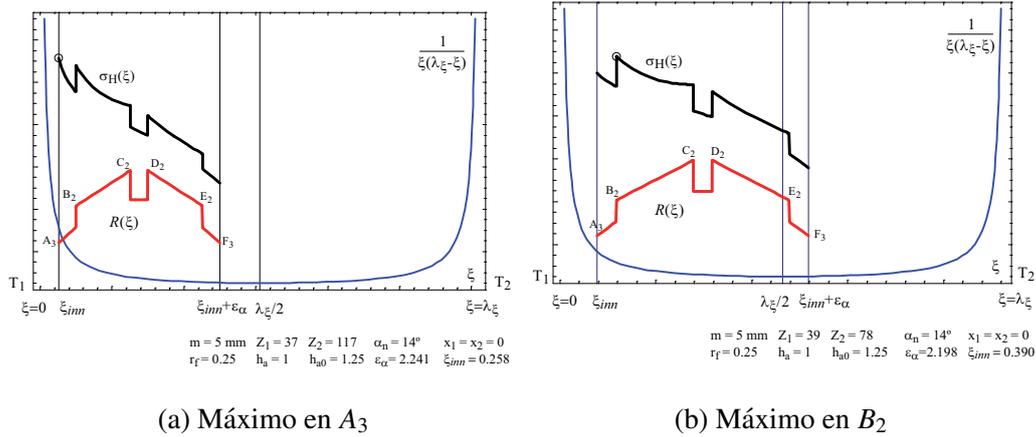


Fig. 4.2: Tensión de contacto crítica en engranajes rectos HTCR.

En la figura 4.3 se muestra la localización del máximo de la tensión de contacto para el estudio anterior. Se han representado en negro los casos en los que el máximo se localiza en el punto  $A_3$ , en azul cuando el máximo se sitúa en el punto  $B_2$  y en rojo en el punto  $C_2$ . En el eje abscisas se ha representado la variable  $\lambda_\xi/(2\xi_{inn})$  y en el eje de ordenadas se ha representado la variable  $\epsilon_\alpha$ . Se comprueba lo que se ha concluido anteriormente: para valores de la relación  $\lambda_\xi/(2\xi_{inn})$  bajos, que indican mayor proximidad entre los puntos  $\xi_{inn}$  y  $\lambda_\xi/2$ , el máximo se localiza en el punto  $C_2$ ; a medida que dicha relación aumenta, es decir, que  $\xi_{inn}$  se aleja de  $\lambda_\xi/2$ , que ocurre cuando el ángulo de presión y el número de dientes toman los valores más bajos del estudio para conseguir grados de recubrimiento mayores, el máximo pasa a situarse en los puntos  $A_3$  y  $B_2$ . Concretamente se observa que para valores de la variable  $\lambda_\xi/(2\xi_{inn})$  inferiores a 3 el máximo se localiza siempre en  $C_2$ , que cuando esta variable toma valores mayores que 4 el máximo se localiza en  $A_3$  o  $B_2$ , y para valores muy grandes, mayores que 9, el máximo se localiza siempre en  $A_3$ .

Se ha verificado que las diferencias existentes en el valor del máximo de la tensión de contacto calculando dicha tensión a partir de la función potencial unitario inverso obtenido mediante la integración numérica de las Ecs. 3.13, 3.14 y 3.15 y la tensión de contacto obtenida a partir de la aproximación propuesta para el potencial unitario inverso, Ec. 3.68, son muy pequeñas. En la figura 4.4 se comprueba que los errores

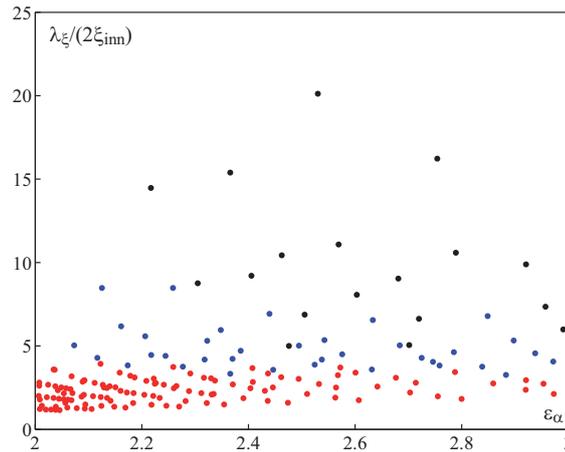


Fig. 4.3: Localización del máximo de la tensión de contacto:  $A_3$  (negro),  $B_2$  (azul) y  $C_2$  (rojo).

cometidos, calculados como:

$$\text{Error} = \frac{\sigma_{H_{num}} - \sigma_{H_{mod}}}{\sigma_{H_{num}}} \cdot 100 \quad (4.33)$$

se encuentran en todo momento acotados en el intervalo  $[-2,5\%, 2,2\%]$ , aunque los valores típicos se sitúan en un rango menor, entre  $[0\%, 1\%]$ . En esta figura 4.4 se han utilizado los mismos colores que en la figura anterior para la identificación de la localización del máximo: negro cuando el máximo se sitúa en  $A_3$ , azul cuando se localiza en  $B_2$  y rojo para el punto  $C_2$ . Además se ha identificado mediante diferentes símbolos, si el máximo obtenido mediante la resolución por métodos numéricos y por el modelo aproximado se localizan en el mismo punto (símbolo  $\cdot$ ) o si existe un error en la localización del máximo y el modelo aproximado lo sitúa en un punto diferente al modelo numérico (símbolo  $*$ ). En más de un 95 % la localización del máximo coincide. En la figura se observa, que aunque haya un error en la localización del máximo, el error que se comete en el valor de la tensión crítica de contacto sigue siendo muy pequeño y es incluso menor que en algunos casos en los cuales la localización de ambos coincide.

Por consiguiente, tras el estudio realizado y tomando en cuenta el crecimiento y decrecimiento de ambas funciones,  $R(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$ , se puede concluir que la tensión crítica de contacto se localiza en uno de los siguientes tres puntos:

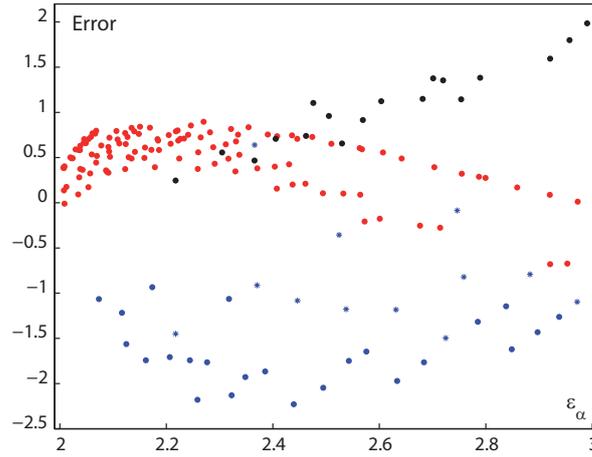


Fig. 4.4: Diferencias entre la tensión máxima numérica y la analítica.

- Punto inferior del intervalo de contacto:  $A_3$
- Punto inferior del intervalo inferior de contacto doble:  $B_2$
- Punto superior del intervalo inferior de contacto doble:  $C_2$

Todo esto es cierto si la abscisa del punto medio del intervalo de contacto  $\xi_m$  es más pequeña que la abscisa del punto medio del intervalo de la línea de acción entre los puntos de tangencia de ambas circunferencias de base  $T_1T_2$ , es decir, que  $\lambda_\xi/2$ . Por lo general, esta condición se verifica, pero puede no verificarse para relación de transmisión muy baja y coeficiente de desplazamiento en el piñón elevado. Sin embargo, la discusión es válida, incluso para estos casos, si se considera como "piñón virtual" el engranaje con menor  $\xi_{inn}$ .

Por consiguiente, la forma más sencilla de encontrar la tensión crítica es calcular la tensión de contacto es en estos tres puntos y elegir la mayor de ellas:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\lambda_\xi}{\pi m \cos \alpha_n}} \sqrt{\max_{\xi=\xi_A, \xi_B, \xi_C} \left( \frac{R(\xi)}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \right)} \quad (4.34)$$

donde  $\xi_A = \xi_{inn}$ ,  $\xi_B = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 2$  y  $\xi_C = \xi_{inn} + 1$ .

#### 4.3.1.2. Tensión de contacto crítica para engranajes rectos no estándar

Para transmisiones no estándar, es decir, aquellas en las que los coeficientes de altura de cabeza de los dientes son diferentes de 1, o se produce engrane en vacío

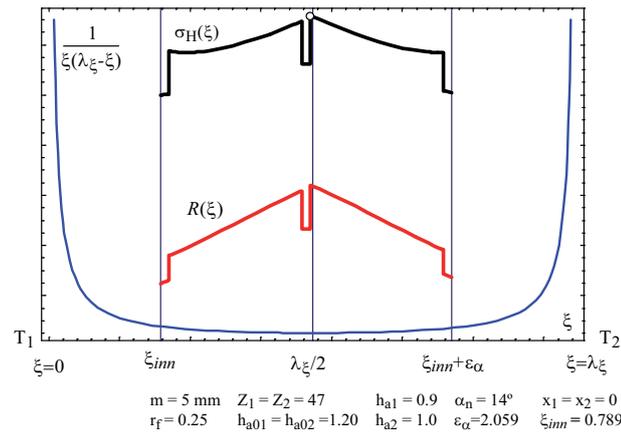


Fig. 4.5: Tensión de contacto cuando se produce reducción del adendo del piñón.

en alguno de los engranajes o la distancia entre centros de operación es diferente de la nominal, la discusión es bastante similar. Cualquier modificación de la altura del diente o de la distancia entre centros, se traduce en una pérdida de simetría de la función  $R(\xi)$ , porque existe un desplazamiento de los puntos singulares:  $A_3$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $E_2$  y  $F_3$  a lo largo de las respectivas líneas de carga o segmentos del diagrama  $R(\xi)$ . Más concretamente:

- La reducción del adendo efectivo en la rueda o el engrane en vacío en la base del piñón produce que los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  de la función  $R(\xi)$  se desplacen hacia la derecha, mientras que los puntos  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  se mantienen fijos, Fig 3.29. Por el contrario, la reducción del adendo efectivo en el piñón o el fenómeno de engrane en vacío de la rueda produce que los puntos  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  se desplacen hacia la izquierda y que el resto permanezcan fijos, Fig. 3.31 de la izquierda. Las tensiones de contacto variarán en la misma proporción que la función  $R(\xi)$ , pero dependiendo de los datos de la transmisión puede ocurrir que la localización del máximo se vea modificada o no.

Para el caso mostrado en la figura 4.2, se ha reducido el adendo del piñón a 0,9, de tal manera que el máximo pasa de localizarse en el punto  $C_2$  al punto  $D_2$ , como se observa en la figura 4.5.

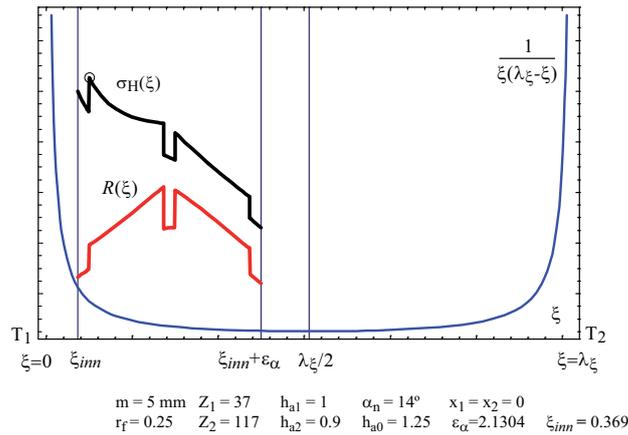


Fig. 4.6: Tensión de contacto cuando se produce reducción del adendo de la rueda.

Con respecto al ejemplo mostrado en la figura 4.3 izquierda, cuando el máximo se localizaba en el punto  $A_3$ , si el adendo de la rueda se reduce a 0,9 el máximo pasa a localizarse en el punto  $B_2$ , Fig. 4.6.

- El alargamiento del adendo del piñón produce que los puntos  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  de la función  $R(\xi)$  se desplacen hacia la derecha, mientras que los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se mantengan fijos. Por el contrario, cuando se alarga el adendo de la rueda los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se desplazan hacia la izquierda y el resto de puntos singulares permanecen en el mismo sitio, como se aprecia en la Fig. 3.35. La localización del máximo de la tensión de contacto variará en función de los parámetros del diseño y del incremento que se dará al adendo del piñón y/o rueda.

Se ha modificado el adendo del piñón y de la rueda incrementando su valor a 1,1, de forma que para el caso de la figura 4.3 de la derecha donde el máximo se localizaba en el punto  $B_2$ , el máximo pasa a localizarse en el punto  $A_3$ , Fig. 4.7.

- El incremento de la distancia entre centros de operación produce que los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se desplacen hacia la izquierda y que los puntos  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  se mantengan fijos, Fig. 3.38. La reducción de la distancia entre centros de operación produce el efecto contrario.

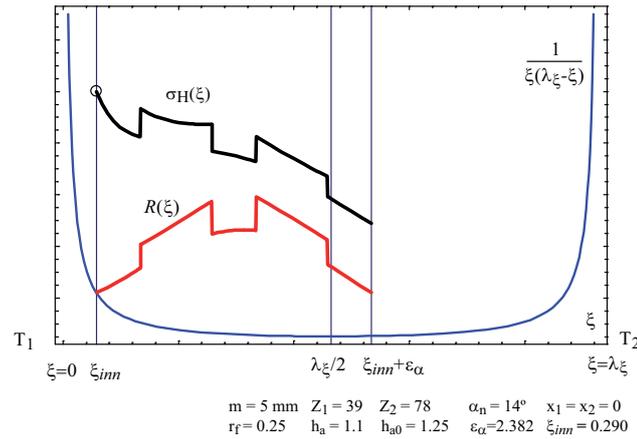


Fig. 4.7: Tensión de contacto cuando se alarga el adendo de rueda y piñón.

Puede ocurrir, por tanto, que cuando se realizan modificaciones del perfil, las modificaciones realizadas no alteren la localización del máximo de la tensión de contacto o, por el contrario, debido a las modificaciones la localización del máximo puede cambiar a otro punto, pudiendo suceder que el máximo se localice en los puntos  $D_2$ ,  $E_2$  y  $F_3$ . Cabe esperar que el máximo en los puntos  $E_2$  y  $F_3$  solo se produzca con relaciones de transmisión de valor 1 o muy cercanas a 1, puesto que para relaciones mayores la función  $R(\xi)$  se desplaza hacia la izquierda del punto  $\lambda\xi/2$  y los valores de la función  $1/\rho(\xi)$  para los puntos situados a la izquierda del punto medio del intervalo de contacto son mayores que para los puntos de la derecha. Por lo que, para simplificar, se pueden ignorar estos dos puntos y en el caso de que se cometa un error, dicho error será prácticamente despreciable.

Por consiguiente, la forma más sencilla de encontrar la tensión crítica es calcular la tensión de contacto en estos cuatro puntos y elegir la mayor de ellas:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\lambda\xi}{\pi m \cos \alpha_n}} \sqrt{\max \left( \frac{R(\xi)}{\xi(\lambda\xi - \xi)} \right)_{\xi=\xi_A, \xi_B, \xi_C, \xi_D}} \quad (4.35)$$

donde  $\xi_A = \xi_{inn}$ ,  $\xi_B = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 2$ ,  $\xi_C = \xi_{inn} + 1$  y  $\xi_D = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1$ .

### 4.3.2. Tensión de contacto crítica para engranajes helicoidales

La tensión de contacto en engranajes helicoidales se puede calcular con la Ec. 4.27, sustituyendo la variable  $f$  por la fuerza por unidad de longitud para engranajes helicoidales obtenida en el epígrafe 3 en la ecuación 3.5. De esta manera, la tensión de contacto se puede escribir como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F \varepsilon_\beta \cos \beta_b \cos \beta}{b \pi m \cos \alpha_t} \lambda_\xi} \sqrt{\frac{v(\xi)}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \frac{1}{I_v(\xi_0)}} \quad (4.36)$$

expresión que depende no sólo del punto de contacto de cada sección transversal,  $\xi$ , sino también de la posición del piñón en el ciclo de engrane, caracterizado por la variable  $\xi_0$ , como se mostraba en la Fig. 3.13.

Se tratará por tanto de encontrar las condiciones críticas de carga, es decir, los valores de  $\xi$  y  $\xi_0$  que maximizan la función:

$$\frac{v(\xi)}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \frac{1}{I_v(\xi_0)} = \frac{v(\xi)}{\rho(\xi)} \frac{1}{I_v(\xi_0)} \quad (4.37)$$

donde  $[\rho(\xi)]^{-1} = [\xi(\lambda_\xi - \xi)]^{-1}$ .

Para simplificar la notación, se define la función:

$$\phi(\xi) = \frac{v(\xi)}{\rho(\xi)} \quad (4.38)$$

Se trata, obviamente, de encontrar el máximo de la función  $[\phi(\xi)/I_v(\xi_0)]$ . Sin embargo, no es fácil establecer a priori un criterio de búsqueda, puesto que el máximo dependerá de tres condiciones:

- El valor de  $\xi$  que hace máxima la función  $\phi(\xi)$ .
- El valor de  $\xi_0$  que hace mínima la función  $I_v(\xi_0)$ .
- El dominio de existencia de ambos, que no siempre se dan simultáneamente en algún punto de engrane, lo que no permite asegurar que el máximo de  $[\phi(\xi)/I_v(\xi_0)]$  sea el cociente entre el máximo de  $\phi(\xi)$  y el mínimo de  $I_v(\xi_0)$ .

En consecuencia, se estudiará en primer lugar la localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ , a continuación se establecerán los intervalos en los que la función  $I_v(\xi_0)$

es mínima, para finalmente determinar la condición de existencia simultánea de ambos extremos.

#### 4.3.2.1. Tensión de contacto crítica para engranajes helicoidales estándar

Primeramente se analizarán estas condiciones para engranajes estándar, en los cuales, el modelo propuesto del potencial unitario inverso viene dado por las Ecs. 3.68, 3.69 y 3.70.

##### Máximo de la función $\phi(\xi)$ .

Para la localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ , se trata de resolver un problema común de extremos relativos. Para ello, en primer lugar se estudiará el crecimiento y decrecimiento en el intervalo de contacto de las funciones  $v(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$  que componen  $\phi(\xi)$ . A continuación, en función de los valores obtenidos, se determinarán igualmente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $\phi(\xi)$ , para finalmente tratar de localizar el máximo de  $\phi(\xi)$ .

Del estudio previo de engranajes rectos presentado en el epígrafe 4.3.1, se sabe que la función  $1/\rho(\xi)$  inicialmente decrece con  $\xi$  y es simétrica respecto del punto medio del intervalo de la línea de engrane contenido entre los dos puntos de tangencia con las circunferencias de base, es decir, de  $\xi = \lambda_\xi/2$ ; por consiguiente, la función  $1/\rho(\xi)$  es decreciente en el intervalo  $[0, \lambda_\xi/2]$  (su derivada en dicho intervalo es negativa) y creciente para el intervalo  $[\lambda_\xi/2, \lambda_\xi]$  (derivada positiva).

Por otro lado, la función potencial unitario inverso  $v(\xi)$  presenta un máximo en el punto medio del intervalo de contacto  $\xi_m = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$ . Por tanto, la función  $v(\xi)$  es creciente en el intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$  y decreciente en el intervalo  $[\xi_m, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$ , es decir, tiene derivada positiva en el primer intervalo, toma el valor cero en el punto medio  $\xi_m$  y es negativa entre  $[\xi_m, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$ .

Teniendo en cuenta que  $\lambda_\xi/2$  es siempre mayor o igual que la abscisa del punto medio de intervalo de engrane  $\xi_m$ , así como el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento realizado de las dos funciones que componen  $\phi(\xi)$ , se puede concluir

lo siguiente:

- En el punto de contacto  $\xi_m$ , las derivadas de las funciones  $v(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$ , toman un valor nulo y negativo, respectivamente. Por tanto, se comprueba fácilmente que la función  $\phi(\xi)$  es decreciente en el punto medio del intervalo de contacto  $\xi_m$ .
- En el punto de contacto  $\xi = \xi_{inn}$ , la derivada de la funciones  $v(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$ , toman un valor positivo y negativo, respectivamente, por tanto, la derivada en ese punto puede ser positiva o negativa indistintamente, por lo que la función  $\phi(\xi)$  podrá ser creciente o decreciente en el punto de contacto inferior. A continuación se discuten ambos casos:
  - Si la derivada es positiva la función  $\phi(\xi)$  es creciente en  $\xi_{inn}$ : si la función  $\phi(\xi)$  es creciente en  $\xi_{inn}$  y, como se ha visto anteriormente, es decreciente en el punto medio del intervalo de contacto, necesariamente debe existir un máximo local en el intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$  y obviamente, este máximo local coincidirá con el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$ .
  - Si la derivada es negativa en este punto la función  $\phi(\xi)$  es decreciente en  $\xi_{inn}$ : teniendo en cuenta que la función también es decreciente en  $\xi_m$ , dicha función será decreciente para cualquier valor de  $\xi$ . En consecuencia, no existe un máximo local y, por tanto, el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$  se localizará en el punto inferior del intervalo de contacto,  $\xi_{inn}$ .

La función  $\phi(\xi)$  se puede expresar en función de la Ec. 3.68 del modelo de la función potencial unitario inverso como:

$$\phi(\xi) = \frac{\cos[b_0(\xi - \xi_m)]}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \quad (4.39)$$

Para encontrar analíticamente el máximo de la función  $\phi(\xi)$  se habrá de obtener su derivada con respecto a  $\xi$  e igualarla a 0. El resultado es la siguiente ecuación:

$$\text{tg}[b_0(\xi - \xi_m)] + \frac{1}{b_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} = 0 \quad (4.40)$$

Esta ecuación es una ecuación fuertemente no lineal lo que no permite obtener una expresión analítica del máximo local  $\xi_{\max L}$ . Sin embargo, se puede obtener una buena aproximación con el método descrito por Pedrero en [48].

La ecuación 4.40 se puede escribir como:

$$\xi_m = \xi + \frac{1}{b_0} \operatorname{arc\,tg} \left[ \frac{1}{b_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \right] \quad (4.41)$$

Esta ecuación permite conocer el valor requerido de  $\xi_m$  para que el máximo este localizado en valor  $\xi = \xi_{\max}$ . Por consiguiente, los valores necesarios de  $\xi_m$  para que el máximo se localice en  $\xi_{inn}$  y en  $\xi_m$  son, respectivamente,

$$\xi_{m,inn} = \xi_{inn} + \frac{1}{b_0} \operatorname{arc\,tg} \left[ \frac{1}{b_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi_{inn}}{\xi_{inn}(\lambda_\xi - \xi_{inn})} \right] \quad (4.42)$$

$$\xi_{m,m} = \xi_m + \frac{1}{b_0} \operatorname{arc\,tg} \left[ \frac{1}{b_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi_m}{\xi_m(\lambda_\xi - \xi_m)} \right] \quad (4.43)$$

El máximo local de  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max L}$ , se puede estimar asumiendo que  $\xi_{inn}$ ,  $\xi_m$  y  $\xi_{\max L}$  tienen la misma relación que  $\xi_{m,inn}$ ,  $\xi_{m,m}$  y  $\xi_m$ , así:

$$\xi_{\max L} = \xi_{inn} + \frac{(\xi_m - \xi_{inn})(\xi_m - \xi_{m,inn})}{(\xi_{m,m} - \xi_{m,inn})} \quad (4.44)$$

Este máximo local  $\xi_{\max L}$  será un máximo absoluto  $\xi_{\max R}$  si se verifican las siguientes condiciones:

- Los límites de interpolación no se cruzan, es decir,  $\xi_{m,inn} < \xi_{m,m}$ .
- El máximo local  $\xi_{\max L}$  está situado dentro del intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$ .

Si alguna de estas condiciones no se cumple, el máximo absoluto estará localizado en el límite inferior del intervalo,  $\xi_{inn}$ . Así, las dos condiciones anteriores se pueden expresar como:

$$\xi_{m,inn} \leq \xi_m \leq \xi_{m,m} \quad (4.45)$$

Por tanto, el máximo absoluto de  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max R}$ , se calculará como:

$$\text{Si } \xi_{m,inn} \leq \xi_m \leq \xi_{m,m} \quad \Rightarrow \quad \xi_{\max R} = \xi_{inn} + \frac{(\xi_m - \xi_{inn})(\xi_m - \xi_{m,inn})}{(\xi_{m,m} - \xi_{m,inn})} \quad (4.46)$$

$$\text{Si } \xi_{m,inn} > \xi_m \text{ ó } \xi_m > \xi_{m,m} \quad \Rightarrow \quad \xi_{\max R} = \xi_{inn}$$

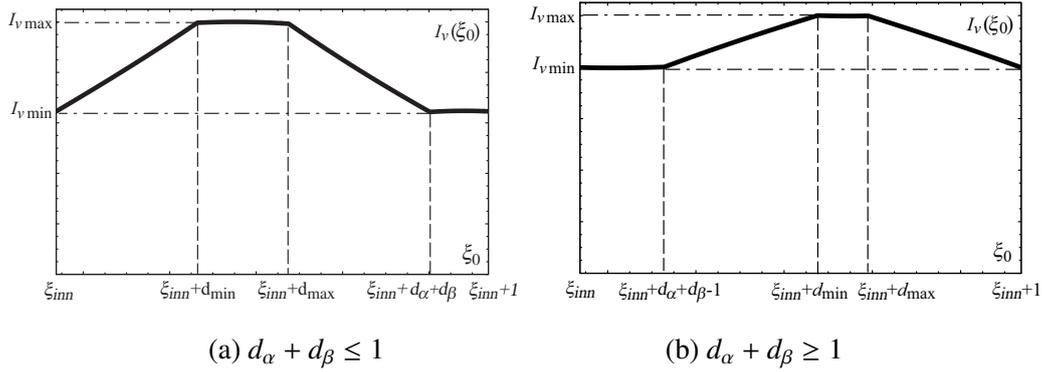


Fig. 4.8: Forma típica de las gráficas de la función  $I_v(\xi_0)$ .

donde  $\xi_{m,inn}$  y  $\xi_{m,m}$  se han calculado en la Ecs. 4.42 y 4.43, respectivamente.

Resumiendo, el máximo de la función  $\phi(\xi)$  es:

$$[\phi(\xi)]_{\max} = \phi(\xi_{\max R}) \quad (4.47)$$

donde  $\xi_{\max R}$  se calcula con la Ec. 4.46.

#### Mínimo de la función $I_v(\xi_0)$ .

La función  $I_v(\xi_0)$  para engranajes HTCR estándar está definida en la Ec. 3.73 y toma diferentes formas dependiendo de si la suma de las partes decimales del grado de recubrimiento transversal y en el salto es menor o mayor que 1, como se representa en la Fig. 4.8. Tanto si  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$  ó si  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$  existen unos intervalos donde la función  $I_v$  es mínima pero para ambos casos el punto inferior del intervalo de contacto  $\xi_{inn}$  pertenece a este intervalo. Consecuentemente, también en este caso se puede afirmar que:

$$[I_v(\xi_0)]_{\min} = I_v(\xi_{inn}) \quad (4.48)$$

#### Condición de simultaneidad.

Con los resultados obtenidos hasta ahora, es evidente que, si hay un punto de contacto con  $\xi = \xi_{\max R}$  durante el intervalo en el que la función  $I_v$  toma el valor mínimo, se tendrá:

$$\left( \frac{\phi(\xi)}{I_v(\xi_0)} \right)_{\max} = \frac{\phi_{\max}}{I_{v\min}} = \frac{\phi(\xi_{\max R})}{I_v(\xi_{inn})} \quad (4.49)$$

Esta claro también que la simultaneidad está asegurada si  $\varepsilon_\beta > 1$ , porque en este caso se puede encontrar un punto de contacto con un valor de  $\xi$  situado dentro del intervalo de contacto  $[\xi_{inn}, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$  para cualquier posición del ciclo de engrane, y en particular durante el intervalo de mínima  $I_v$ . La simultaneidad también se encuentra asegurada cuando  $\xi_{\max R} = \xi_{inn}$  porque  $\xi_{inn}$  también pertenece al intervalo de mínima  $I_v$ . Por el contrario, la simultaneidad no se encuentra asegurada si  $\xi_{\max R}$  es un máximo local, dentro del intervalo de engrane y  $\varepsilon_\beta < 1$ , como el mostrado en la Fig. 4.9.

La figura 4.9 muestra el mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con  $d_\alpha + d_\beta < 1$ ,  $d_\alpha > d_\beta$  y  $\varepsilon_\beta < 1$ . Las zonas grises representan la contribución de cada diente en la línea de contacto en cada una de las posiciones del ciclo de engrane, representadas por  $\xi_0$  en el eje de abscisas. Las zonas grises oscuras representan las zonas donde la función  $I_v(\xi_0)$  es mínima, por tanto, para que se de la condición de simultaneidad, el máximo local  $\xi_{\max R}$  se ha de localizar dentro de estas zonas, es decir, que la simultaneidad estará asegurada si  $\xi_{\max R}$  está contenida en los intervalos  $[\xi_{inn} + d_\alpha, \xi_{inn} + 1]$  o  $[\xi_{inn} + 1 + d_\alpha, \xi_m]$  ( $\xi_{\max R}$  no puede ser mayor que  $\xi_m$  y  $\xi_m = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$  es siempre mas pequeño que  $\xi_{inn} + 2$ ). En resumen, las condiciones que se ha de cumplir para que exista simultaneidad y  $\xi_{\max R}$  se convierta en máximo absoluto son:

$$\xi_{inn} + d_\alpha \leq \xi_{\max R} \leq \xi_{inn} + 1 \quad (4.50)$$

o

$$\xi_{inn} + 1 + d_\alpha \leq \xi_{\max R} \leq \xi_m \quad (4.51)$$

Igualmente, cuando  $d_\alpha + d_\beta > 1$ , para que se den las condiciones de simultaneidad, el máximo local  $\xi_{\max R}$  se ha de localizar dentro de los intervalos  $[\xi_{inn}, \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta - 1]$ ,  $[\xi_{inn} + 1 - d_\beta, \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta]$  o  $[\xi_{inn} + 2 - d_\beta, \xi_{inn} + 1 + d_\alpha + d_\beta]$ . Por tanto, las condiciones que se ha de cumplir para que exista simultaneidad y  $\xi_{\max R}$  se convierta en máximo absoluto son:

$$\xi_{inn} \leq \xi_{\max R} \leq \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta - 1 \quad (4.52)$$

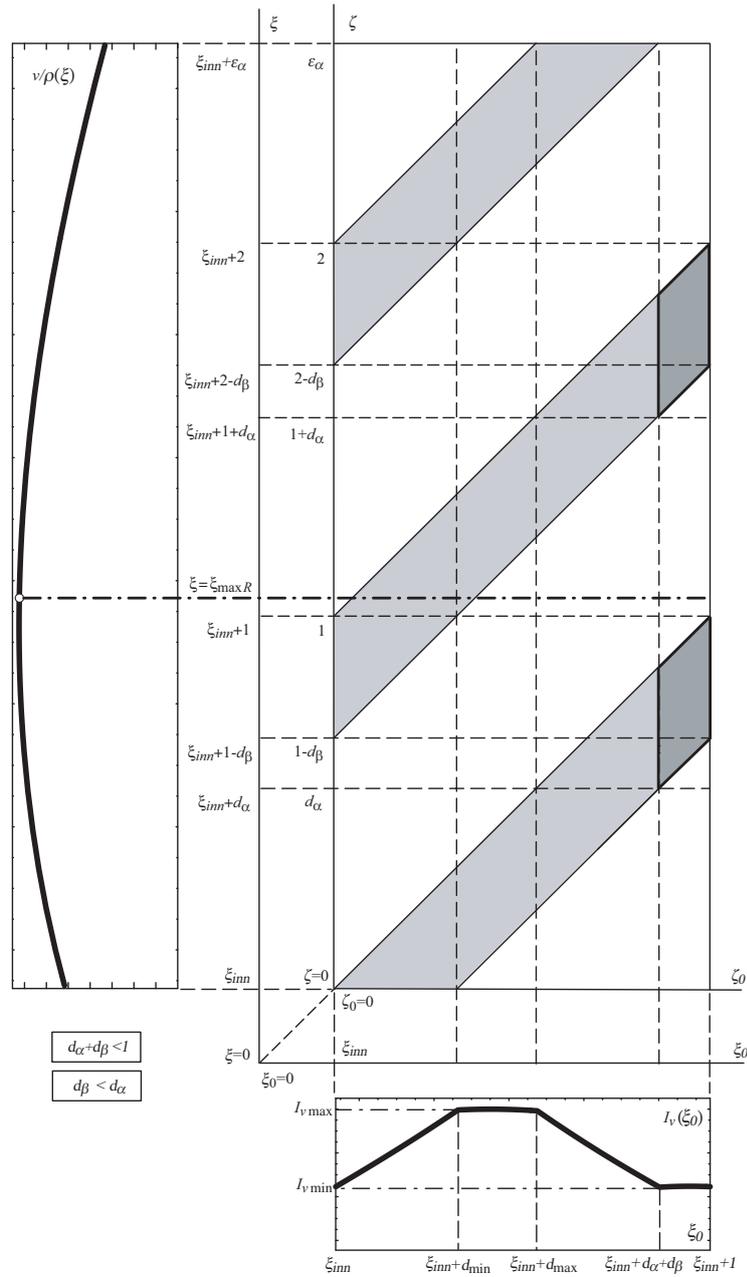


Fig. 4.9: Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con  $d_\alpha + d_\beta < 1$ .

o bien

$$\xi_{inn} + 1 - d_\beta \leq \xi_{\max R} \leq \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta \quad (4.53)$$

o

$$\xi_{inn} + 2 - d_\beta \leq \xi_{\max R} \leq \xi_{inn} + 1 + d_\alpha + d_\beta \quad (4.54)$$

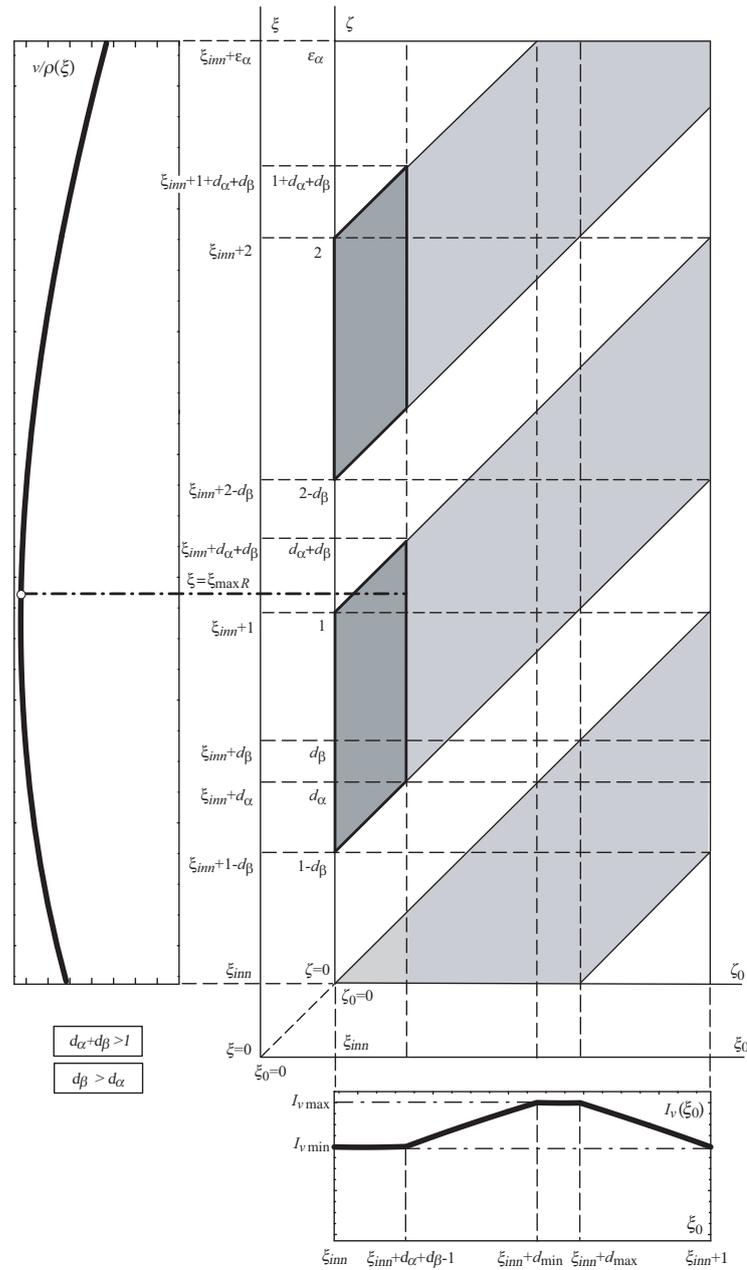


Fig. 4.10: Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con  $d_\alpha + d_\beta > 1$ .

Sin embargo, en todos los casos en los que la simultaneidad no esta asegurada, encontrar una solución exacta es complicado, pero se puede encontrar una solución aproximada que puede ser perfectamente válida para su uso en diseños preliminares y con fines de estandarización. En este sentido, es importante considerar que para casos de no simultaneidad,  $\xi_{\max R}$  es siempre un máximo local, en el que la derivada de la

función  $\phi(\xi)$  es igual a 0. Esto significa que para los puntos cercanos a este máximo local, es decir, para valores donde  $|\xi_{\max R} - \xi|$  es pequeño, el valor que toma  $\phi(\xi)$  difiere muy ligeramente del valor que toma en  $\phi(\xi_{\max R})$ . Entonces, será posible encontrar un punto en el dominio de contacto cuyo  $\xi_0$  está incluido en el intervalo de mínimo  $I_v$  y cuyo  $\xi$  se encuentra lo suficientemente cercano al máximo local  $\xi_{\max R}$ . En ese punto  $I_v = I_{v\min}$  y  $\phi \approx \phi_{\max}$ .

Por consiguiente, se puede usar la ecuación 4.49 en casos de no simultaneidad. En estos casos el error inducido será pequeño y en el sentido de la seguridad.

Se concluye por tanto, que para engranajes helicoidales HTCR estándar la tensión de contacto crítica se puede calcular como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta \cos \beta_b}{\pi m \cos \alpha_t} \lambda_\xi} \sqrt{\frac{\cos[b_0(\xi_{\max R} - \xi_m)]}{\xi_{\max R}(\lambda_\xi - \xi_{\max R})} \frac{1}{I_v(\xi_{\min})}} \quad (4.55)$$

Para estudiar la influencia de los parámetros de diseño en la localización del punto de mayor tensión de contacto se ha realizado un estudio en el que se han considerado una serie de engranajes helicoidales HTCR con unos parámetros de diseño contenidos en el siguiente rango:

- Número de dientes del piñón entre 45 y 100
- Relación de transmisión de 1 a 4
- Ángulo de presión entre 10 y 18°
- Ángulo de hélice entre 10 y 30°

Con estos parámetros de diseño se ha logrado cubrir una amplia gama de valores del grado de recubrimiento transversal, desde valores ligeramente mayores que 2 a valores cercanos 3.

Se va a evaluar una serie de errores para verificar las hipótesis:

- Método para la aproximación del valor de  $\xi_{\max R}$
- Error en la localización de la abscisa del máximo de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max R}$
- Error en la estimación del máximo de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\phi(\xi_{\max R})$
- Error al despreciar la no simultaneidad del máximo de  $\phi(\xi)$  y del mínimo de  $I_v(\xi_0)$

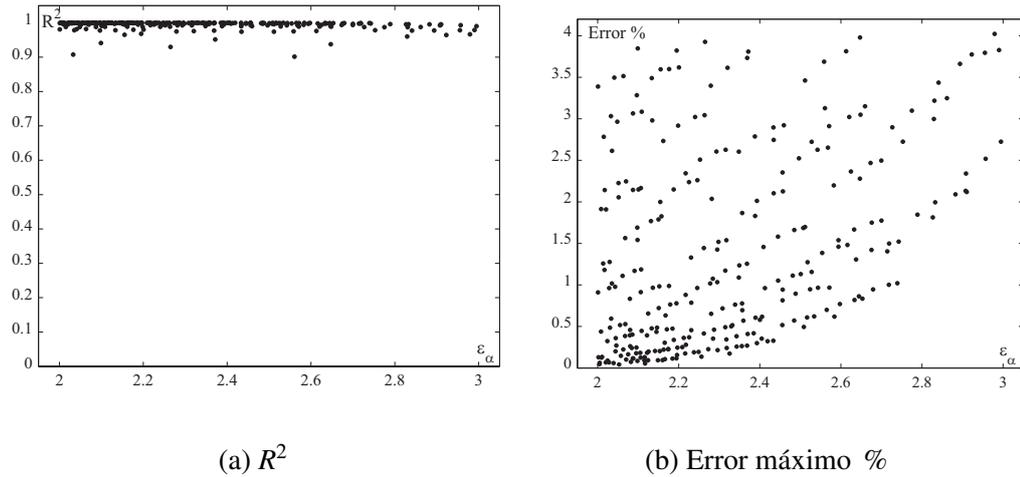


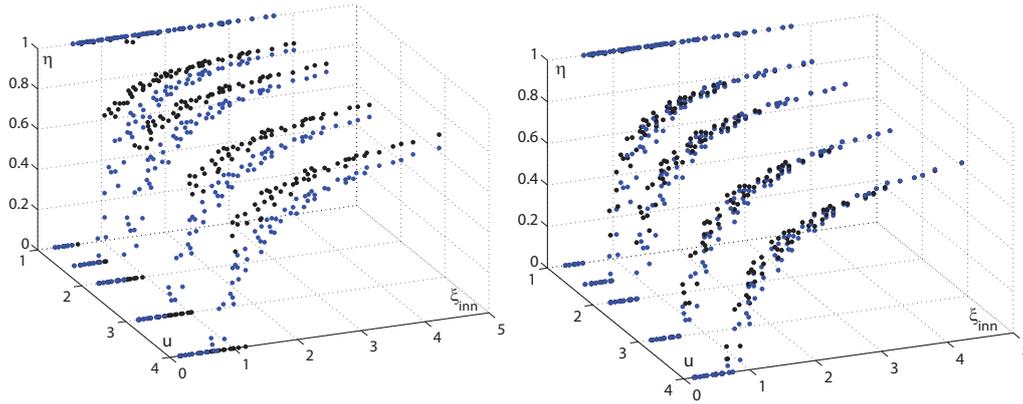
Fig. 4.11: Errores cometidos entre la Ec. 4.41 y la Ec. 4.56.

El método de aproximación para calcular  $\xi_{\max R}$  asume que  $\xi_{inn}$ ,  $\xi_m$  y  $\xi_{\max L}$  tienen la misma relación que  $\xi_{m,inn}$ ,  $\xi_{m,m}$  y  $\xi_m$ . Es decir, el método supone que el error cometido por utilizar una aproximación lineal de la Ec. 4.41, es despreciable. Para comprobarlo, se realiza un estudio de regresión entre el valor de  $\xi_m$  obtenido con la ecuación 4.41 y el valor que se obtendría con la interpolación lineal:

$$\xi_{m,lineal} = \xi_{m,inn} + \frac{(\xi_{m,m} - \xi_{m,inn})(\xi - \xi_{inn})}{(\xi_m - \xi_{inn})} \quad (4.56)$$

El estudio de regresión se realizará para los valores de  $\xi$  entre  $\xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_m$ , que se corresponde con el rango de valores donde se puede encontrar el máximo y solo se calculará en aquellos casos en los cuales se aplica dicha ecuación, es decir, cuando se cumple que  $\xi_{m,inn} \leq \xi_m \leq \xi_{m,m}$ . Los parámetros que se han elegido para la evaluación del error cometido, son el coeficiente de regresión múltiple ajustado  $R^2$  y el error máximo cometido entre el valor dado por la Ec. 4.41 y el valor dado por la interpolación Ec. 4.56 en todo el rango  $\xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_m$  para cada una de las combinaciones posibles simuladas. En la figura 4.11 se muestran ambos errores; se observa que para todos los casos abarcados, el coeficiente de correlación es mayor que de 0,9 y el error relativo máximo no sobrepasa en ningún caso el 4 %.

De acuerdo con el método propuesto anteriormente, la abscisa del máximo de la función  $\phi(\xi)$ ,  $(\xi_{\max R})_P$  se calcula con la ecuación 4.46. Para evaluar el error cometido en la localización de la abscisa del máximo de la función  $\phi(\xi)$ , se compara este valor

(a) negro  $\eta_1$ ; azul  $\eta_P$ (b) negro  $\eta_2$ ; azul  $\eta_P$ Fig. 4.12: Localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ .

con los dos valores de referencia correspondientes:

- $(\xi_{\max R})_{R1}$ : valor de  $\xi$  donde se localiza el máximo de la función  $\phi(\xi)$ , dicha función  $\phi(\xi)$  se calcula mediante la función de potencial unitario inverso  $v(\xi)$  obtenida por técnicas de integración numérica de la ecuaciones de la elasticidad.
- $(\xi_{\max R})_{R2}$ : valor de  $\xi$  donde se localiza el máximo de la función de  $\phi(\xi)$ , donde la función  $\phi(\xi)$  se obtiene a partir de la función de aproximación del potencial unitario inverso  $v(\xi)$  dada por la Ec. 3.68.

Se define una variable,  $\eta$ , que se utiliza para localizar la situación del máximo de la función  $\phi(\xi)$  dentro del intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$ , de tal forma, que los valores 0 y 1 representan los extremos del intervalo, es decir, si  $\eta = 0$  es que el máximo se localiza en  $\xi_{inn}$  y si  $\eta = 1$  es que el máximo se localiza en  $\xi_m$  y los valores intermedios entre 0 y 1 representan que el máximo se localiza dentro del intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$ :

$$\eta_{P(1,2)} = \frac{(\xi_{\max R})_{P(R1,R2)} - \xi_{inn}}{\xi_m - \xi_{inn}} \quad (4.57)$$

El subíndice  $P$  indica que el máximo se calcula con la Ec. 4.46, el subíndice 1 indica que el máximo se corresponde con la variable  $(\xi_{\max R})_{R1}$  y el subíndice 2 con  $(\xi_{\max R})_{R2}$ .

De la figura 4.12 se extrae que para valores pequeños de  $\xi_{inn}$ , el máximo tiende a localizarse en el punto  $\xi_{inn}$  y para valores de  $\xi_{inn}$  grandes tiende a localizarse en  $\xi_m$ . A

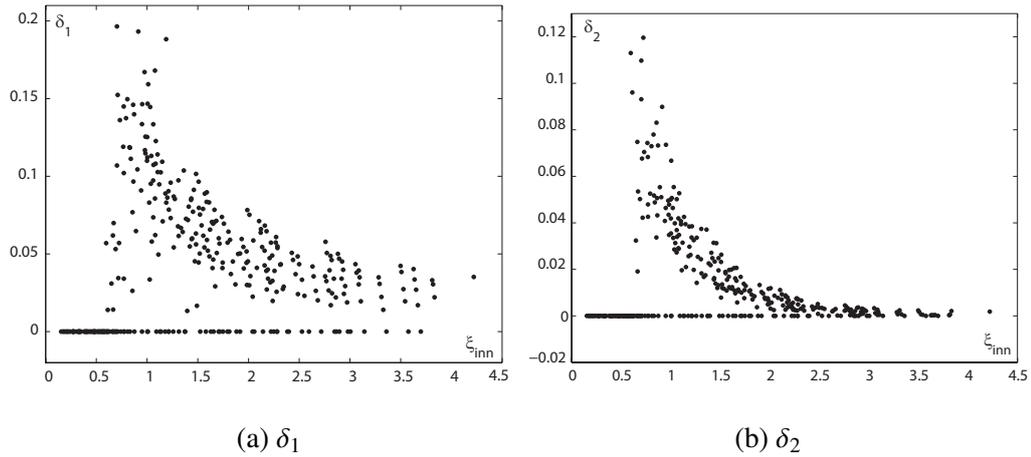


Fig. 4.13: Coeficiente de desplazamiento relativo para evaluar el error en la localización de la abscisa del máximo de la función  $\phi(\xi)$ .

medida que  $\xi_{inn}$  crece el máximo pasa de situarse en  $\xi_{inn}$  al intervalo  $[\frac{\xi_m}{2}, \xi_m]$  para el modelo numérico. En cambio, para el modelo analítico y para el máximo obtenido por la Ec. 4.46, este cambio no es tan brusco y hay valores intermedios, por tanto, será en estos casos donde el error de localización será máximo.

Para evaluar el error en la localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ , se define el coeficiente de desplazamiento relativo como la desviación del máximo de la función dentro del intervalo de contacto:

$$\delta_{1(2)} = \frac{(\xi_{\max R})_P - (\xi_{\max R})_{R1(R2)}}{\varepsilon_\alpha} \quad (4.58)$$

En la figura 4.13 se observa que ambos coeficientes de desplazamiento relativo toman valores bastante bajos, para  $\delta_1$  el valor típico se encuentra entre 0 y 0,1 pudiendo llegar el valor máximo hasta 0.2. Para el coeficiente  $\delta_2$ , los valores típicos están entre 0 y 0,05 pudiendo llegar el valor máximo a 0,12. Obviamente,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  para los casos en los cuales el máximo está localizado en el punto inferior de contacto  $\xi_{inn}$  o en el caso  $\delta_2$  también puede ocurrir en el punto  $\xi_m$  (es decir, cuando no existe un máximo local dentro del intervalo de contacto), excepto aquellos casos en los cuales la Ec. 4.46 localiza un inexistente máximo local en posiciones intermedias del intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$ . La condición cumplimiento o incumplimiento de la Ec. 4.46,  $\xi_{m,inn} \leq \xi_m \leq \xi_{m,m}$ , discrimina la existencia de un máximo local dentro del intervalo de contacto con un

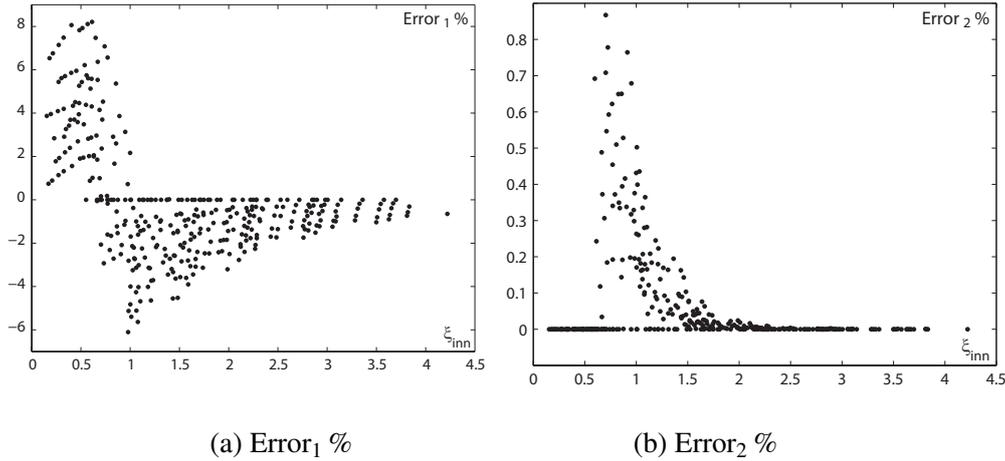


Fig. 4.14: Error en la estimación del máximo de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\phi(\xi_{\max R})$ .

99,98 % de eficacia [45].

Por el contrario, los errores en la estimación del máximo de la función  $\phi(\xi)$  por el método propuesto,  $\phi(\xi_{\max R})_P$ , respecto del primer valor de referencia,  $\phi(\xi_{\max R})_{R1}$ , son substancialmente diferentes de los obtenidos con el segundo valor de referencia,  $\phi(\xi_{\max R})_{R2}$ . Estos errores se definen como:

$$\text{Error}_{1(2)} = \frac{\phi(\xi_{\max R})_{R1(R2)} - \phi(\xi_{\max R})_P}{\phi(\xi_{\max R})_{R1(R2)}} 100 \quad (4.59)$$

El error con respecto al valor de referencia  $\phi(\xi_{\max R})_{R2}$  es siempre inferior al 0,9 % y lógicamente, en aquellos puntos donde el valor de  $(\xi_{\max R})_P$  coincide con  $(\xi_{\max R})_{R2}$  el error vale cero. Sin embargo, el error respecto del valor de referencia  $\phi(\xi_{\max R})_{R1}$  crece hasta el  $\pm 8$  %. Dichos errores máximos se producen cuando no hay coincidencia en la localización del máximo y cuando el máximo se sitúa en el punto inferior del intervalo de contacto,  $\xi_{inn}$ , puesto que como se comprobó en el capítulo anterior, capítulo 3, los errores máximos entre la  $v(\xi)$  obtenida mediante la integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad y la  $v(\xi)$  propuesta aproximada se da en muchos de los casos en los extremos del intervalo de contacto.

Aunque un error de valor 8 % parece un poco elevado, la tensión de contacto es proporcional a la raíz cuadrada del valor de  $\phi(\xi)$ ; por consiguiente, el máximo error en la estimación de la tensión de contacto será de aproximadamente  $\pm 4$  %, que se considera una buena precisión.

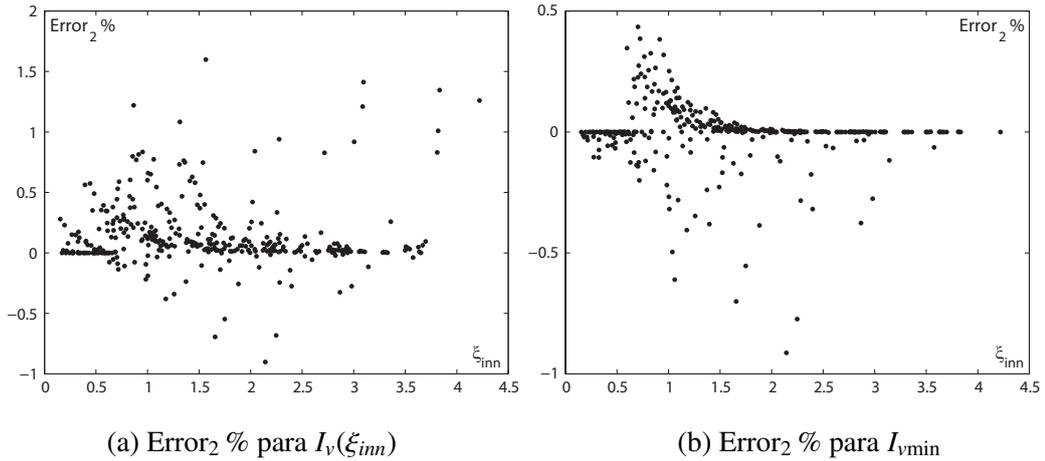


Fig. 4.15: Error al suponer  $(\phi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \phi_{\max}/I_{vmin}$  con respecto al modelo analítico.

Una vez más, los errores más elevados en la estimación del máximo de  $\phi(\xi)$  no corresponden con los valores más altos de los coeficientes de desplazamiento relativo (es decir, con los errores más grandes en la estimación de la ubicación del máximo), debido a que estos altos valores de  $\delta$  se obtienen para los casos en que la función  $\phi(\xi)$  toma valores bastante uniformes a lo largo del intervalo completo de contacto y los errores son, por lo tanto, pequeños.

Por último, un nuevo error se induce de la suposición de  $(\phi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \phi_{\max}/I_{vmin}$  cuando no se cumplen las condiciones de simultaneidad (como ocurre en la Fig 4.9). Una vez más, el error será nulo si la tensión crítica de contacto está localizada en el punto inferior del intervalo de contacto, porque bajo estas condiciones la simultaneidad está asegurada. Por el contrario, se presentarán dos errores cuando el máximo sea un máximo local: uno por la estimación del máximo de  $\phi$  y otro debido a la ausencia de simultaneidad. El efecto de ambos errores en el valor final de  $(\phi/I_v)_{\max}$  puede ser aditivo o sustractivo, dependiendo de los casos, pero el resultado importante es el error total. Y el error total es más bajo (efecto sustractivo) en los casos en los cuales el error en la estimación de  $\phi$  es alto, de modo que el error máximo es menor.

Una vez más, habrá que distinguir entre el error tomando de referencia el modelo

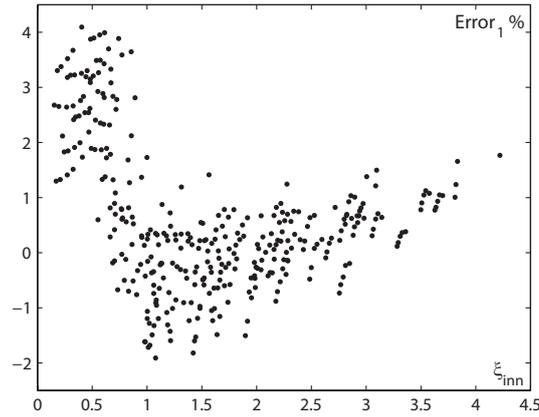


Fig. 4.16: Error cometido por suponer  $(\phi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \phi_{\max}/I_{v\min}$  con respecto al modelo numérico.

numérico o el modelo analítico, es decir, el error definido como:

$$\text{Error}_{1(2)} = \frac{\frac{\phi(\xi_{\max R})_{R1(R2)}}{I_v(\xi_{inn})} - \frac{\phi(\xi_{\max R})_P}{I_v(\xi_{inn})}}{\frac{\phi(\xi_{\max R})_{R1(R2)}}{I_v(\xi_{inn})}} 100 \quad (4.60)$$

Cabe esperar que el error cometido, según esta ecuación, con respecto al modelo analítico sea nulo cuando  $(\xi_{\max R})_P$  coincide con  $(\xi_{\max R})_{R2}$ , pero si se observa la figura 4.15 de la izquierda se demuestra que no ocurre eso exactamente, puesto que el error sería nulo para los mismos casos en los cuales el coeficiente  $\delta_2$  se hace nulo, Fig. 4.13. Esto es debido a que se ha tomado la hipótesis de que la función  $I_v$  toma un valor constante y mínimo en unos determinados intervalos y ese valor es el mismo que el que toma en el punto  $\xi_{inn}$ , pero esto no es del todo cierto, puesto que la función  $I_v$  no permanece constante en estos intervalos, sino que tiene una ligera curvatura pudiendo alcanzar valores inferiores a  $I_v(\xi_{inn})$ . En la figura 4.15 de la derecha se muestra el error calculado según la Ec. 4.60, pero en vez de usar el valor de la función  $I_v$  en  $\xi_{inn}$ , se toma el valor mínimo real de esta función. Los errores no nulos de la gráfica se mantienen entre  $-1\%$  y  $0,5\%$  y son debidos al error en la estimación de  $\phi$  y al error debido a la ausencia de simultaneidad. A estos errores hay que sumarles el efecto de los errores al considerar la hipótesis de  $I_{v\min} = I_v(\xi_{inn})$ , con lo que se obtienen los errores que se muestran en la figura 4.15 de la izquierda. Aún teniendo en cuenta este último error,

se observa que los errores son bastante bajos, con valores típicos entre  $-0,5\%$  y  $1\%$ , pudiendo alcanzar en el peor de los casos un valor de  $1,6\%$ .

Si el valor propuesto de  $\phi(\xi_{\max R})/I_v(\xi_{inn})$  es comparado con el máximo, calculado mediante técnicas numéricas, de la función  $\phi/I_v$ ,  $\phi$  e  $I_v$  basadas en el potencial unitario inverso  $v(\xi)$  calculado mediante la integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad, los errores obtenidos son inferiores al  $4\%$ , Fig. 4.16.

#### 4.3.2.2. Tensión de contacto crítica para engranajes helicoidales no estándar

Las transmisiones no estándar engloban aquellos casos en los cuales el coeficiente de altura de cabeza de los dientes en el piñón o en la rueda es diferente de 1, o aquellos casos en los que existe engrane en vacío en piñón o rueda, o aquellos en los que la distancia entre centros de operación no es la nominal. Para todos estos casos, en el capítulo anterior 3, se ha definido el modelo propuesto para la función potencial unitario inverso, que se resume a continuación:

- Para transmisiones con coeficientes de altura de diente diferentes de 1 o con engrane en vacío, el modelo de la función potencial unitario inverso propuesto es:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \cos[b'_0(\xi - \xi'_m)] & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \\ v(\xi) &= 0 & \text{para } \xi < \xi_{inn} \text{ ó } \xi > \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi'_m &= \xi'_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \\ \varepsilon'_\alpha &= \varepsilon_\alpha + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{inn} + (\Delta\varepsilon_\alpha)_{out} = \varepsilon_\alpha + (\xi_{inn} - \xi'_{inn}) + (\xi'_{out} - \xi_{out}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

- Para transmisiones con distancia entre centros de operación diferente de la nominal, la función aproximada de  $v(\xi)$  se define como:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \cos[b'_0(\xi - \xi'_m)] & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \\ v(\xi) &= 0 & \text{para } \xi < \xi_{inn} \text{ ó } \xi > \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde:

$$\begin{aligned}\xi_m &= \xi_{inn} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} \\ \varepsilon'_\alpha &= \varepsilon_\alpha + (\Delta\varepsilon_\alpha)_c\end{aligned}\tag{4.64}$$

Por tanto, dado que la función  $v(\xi)$  cambia con respecto a lo definido para transmisiones estándar, se analizarán de nuevo las condiciones que se han de cumplir para encontrar el máximo de la función  $[\phi(\xi)/I_v(\xi_0)]$ . No obstante, el procedimiento a seguir será el mismo que el definido anteriormente: en primer lugar se estudiará la localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ , a continuación se establecerán los intervalos en los que la función  $I_v(\xi_0)$  es mínima, para finalmente determinar la condición de existencia simultánea de ambos extremos.

### Máximo de la función $\phi(\xi)$

El procedimiento será el mismo que para engranajes estándar, consistirá en estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones que componen  $\phi(\xi)$ :  $v(\xi)$  y  $1/\rho(\xi)$ . El comportamiento de la función  $1/\rho(\xi)$  es el mismo que para engranajes estándar, sin embargo la función  $v(\xi)$  cambia para engranajes no estándar según las Ecs. 4.61 y 4.63, pudiendo perder la simetría respecto del punto medio del intervalo de contacto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$ , según se ha visto en el capítulo 3. Por consiguiente, pueden existir casos, en los que el máximo deje de localizarse en el intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$  y pase a localizarse en el punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$  situado en la otra mitad del intervalo.

Puesto que la función  $v(\xi)$  es diferente en engranajes no estándar: las Ecs. 4.41, 4.42 y 4.43 también se verán modificadas y por tanto, la ecuación para calcular el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max R}$ , será diferente a la Ec. 4.46 definida para engranajes estándar. Por consiguiente, el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max R}$ , dependerá de la forma de la función  $v(\xi)$ , lo que implica que el cálculo del máximo absoluto para engranajes no estándar sea diferente cuando existe engrane en vacío o el

coeficiente de altura de los dientes se modifique o cuando la distancia entre centros de operación no sea la nominal:

- Para transmisiones con coeficientes de altura de diente diferentes a 1 o con engrane en vacío, el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$ ,  $\xi_{\max R}$  se calcula como:

$$\begin{aligned} \text{Si } \xi'_{m,inn} \leq \xi'_m \leq \xi'_{m,m} &\Rightarrow \xi_{\max R} = \xi_{inn} + \frac{(\xi'_m - \xi_{inn})(\xi'_m - \xi'_{m,inn})}{(\xi'_{m,m} - \xi'_{m,inn})} \\ \text{Si } \xi'_{m,inn} > \xi'_m \text{ ó } \xi'_m > \xi'_{m,m} &\Rightarrow \xi_{\max R} = \xi_{inn} \text{ si } \phi(\xi_{inn}) > \phi(\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \\ \text{Si } \xi'_{m,inn} > \xi'_m \text{ ó } \xi'_m > \xi'_{m,m} &\Rightarrow \xi_{\max R} = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha \text{ si } \phi(\xi_{inn}) < \phi(\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $\xi'_{m,inn}$  y  $\xi'_{m,m}$  se expresan como:

$$\xi'_{m,inn} = \xi_{inn} + \frac{1}{b'_0} \arctan \left[ \frac{1}{b'_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi_{inn}}{\xi_{inn}(\lambda_\xi - \xi_{inn})} \right] \quad (4.66)$$

$$\xi'_{m,m} = \xi'_m + \frac{1}{b'_0} \arctan \left[ \frac{1}{b'_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi'_m}{\xi'_m(\lambda_\xi - \xi'_m)} \right] \quad (4.67)$$

- Para transmisiones con distancia entre centros de operación diferente a la nominal, el máximo absoluto de la función  $\phi(\xi)$  se computa como:

$$\begin{aligned} \text{Si } \xi_{m,inn} \leq \xi_m \leq \xi_{m,m} &\Rightarrow \xi_{\max R} = \xi_{inn} + \frac{(\xi_m - \xi_{inn})(\xi_m - \xi_{m,inn})}{(\xi_{m,m} - \xi_{m,inn})} \\ \text{Si } \xi_{m,inn} > \xi_m \text{ ó } \xi_m > \xi_{m,m} &\Rightarrow \xi_{\max R} = \xi_{inn} \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde  $\xi_{m,inn}$  y  $\xi_{m,m}$ :

$$\xi_{m,inn} = \xi_{inn} + \frac{1}{b'_0} \arctan \left[ \frac{1}{b'_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi_{inn}}{\xi_{inn}(\lambda_\xi - \xi_{inn})} \right] \quad (4.69)$$

$$\xi_{m,m} = \xi_m + \frac{1}{b'_0} \arctan \left[ \frac{1}{b'_0} \frac{\lambda_\xi - 2\xi_m}{\xi_m(\lambda_\xi - \xi_m)} \right] \quad (4.70)$$

### Mínimo de la función $I_v(\xi_0)$

La función  $I_v(\xi_0)$  para engranajes HTCR no estándar está definida:

- Para transmisiones con coeficientes de altura de diente diferentes a 1 o con engrane en vacío, por la Ec. 3.73 con los límites de integración definidos por la Ec. 3.82.

- Para transmisiones con distancia entre centros de operación diferente a la nominal, con la Ec. 3.91 donde los límites de integración vienen definidos por la Ec. 3.92.

y toma diferentes formas dependiendo de si la suma de las partes decimales del grado de recubrimiento transversal y en el salto es menor o mayor que 1, tal y como se representa en la Fig. 4.8. Tanto si  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$  ó si  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$  existen unos intervalos donde la función  $I_v$  es mínima pero para ambos casos el punto inferior del intervalo de contacto  $\xi_{inn}$  pertenece a este intervalo. Consecuentemente, también en este caso se puede afirmar que:

$$[I_v(\xi_0)]_{\min} = I_v(\xi_{inn}) \quad (4.71)$$

### Condición de simultaneidad.

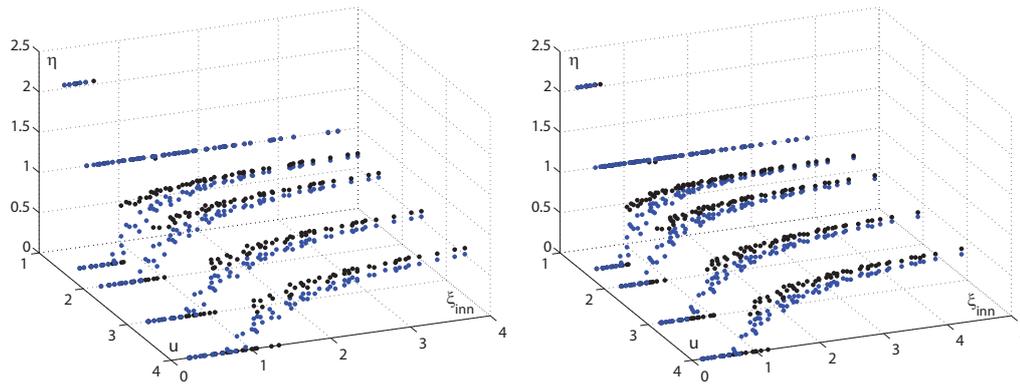
La forma de proceder para verificar las condiciones de simultaneidad es exactamente igual que para engranajes estándar, si hay un punto de contacto con  $\xi = \xi_{\max R}$  durante el intervalo en el que la función  $I_v$  toma el valor mínimo, se obtendrá:

$$\left( \frac{\phi(\xi)}{I_v(\xi_0)} \right)_{\max} = \frac{\phi_{\max}}{I_{v\min}} = \frac{\phi(\xi_{\max R})}{I_v(\xi_{inn})} \quad (4.72)$$

donde  $\xi = \xi_{\max R}$  se calculará con la Ec. 4.65 o 4.68, dependiendo del caso.

El estudio de simultaneidad será exactamente igual que en engranajes estándar con la excepción de tener que considerar en raras excepciones, que se detallaran a continuación, el punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . Pero la función  $I_v$  en este punto toma el mismo valor que en  $\xi_{inn}$ , es decir, el valor mínimo, por tanto la simultaneidad estará garantizada cuando el máximo de la función  $\phi$  se localice en este punto. Por consiguiente, se puede establecer que las condiciones de simultaneidad son las mismas que para engranajes estándar y en los casos en los que la simultaneidad no esté asegurada se puede utilizar una solución aproximada dada por la Ec. 4.72, donde el error inducido será pequeño y en sentido de la seguridad.

Se han realizado varios estudios en el que se han considerado una serie de engranajes helicoidales HTCR no estándar con el mismo rango de parámetros de



(a) Adendo reducido en la rueda

(b) Adendo alargado en el piñón

Fig. 4.17: Localización del máximo de la función  $\phi(\xi)$ : negro  $\eta_1$ ; azul  $\eta_p$ .

diseño que los utilizados en el estudio realizado para engranajes estándar, aunque en cada uno de ellos se ha modificado un parámetro para conseguir transmisiones no estándar:

- Estudio 1a:  $h_{a1} = 0,95$
- Estudio 1b:  $h_{a2} = 0,95$
- Estudio 2a:  $h_{a1} = 1,05$
- Estudio 2b:  $h_{a2} = 1,05$
- Estudio 4a:  $C = r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2) + 0,1m$

Para todos ellos se han analizado los mismos errores que los evaluados para transmisiones estándar. Del análisis cabe destacar que:

- Existen determinados casos en los cuales el máximo de la función  $\phi$  puede situarse en el punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . Lógicamente, esto ocurrirá cuando se den una serie de circunstancias:
  - La relación de transmisión tomará valor 1 ó muy cercana a 1.
  - Debe existir reducción en la altura de cabeza del diente de la rueda o alargamiento de la cabeza del piñón.
  - Se dará para valores pequeños de  $\xi_{inn}$ , en los cuales el máximo se situaba en el punto  $\xi_{inn}$  y ahora pasará a situarse en  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ .

En la figura 4.17 se muestra, para los estudios 1b y 2a, el error  $\eta_1$  definido por la Ec. 4.57 con la que se compara la localización del máximo de la función  $\phi$ , obtenido por métodos numéricos, con respecto al obtenido con la Ec. 4.65. Se observa que en algunos casos el máximo se sitúa en el punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . En estos casos, puede comprobarse que el valor de  $\phi(\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha) \approx \phi(\xi_{inn})$  y, por tanto, el error cometido si se utiliza este último valor es prácticamente despreciable. En el momento en que la relación es mayor que 1, el máximo no vuelve a situarse en el punto superior del intervalo de contacto, puesto que la función  $v(\xi)$  tiende a desplazarse hacia la izquierda del punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha/2$ , y por tanto, la función  $1/\rho(\xi)$  condiciona el valor de  $\phi$ .

- El error al despreciar la no simultaneidad del máximo de  $\phi(\xi)$  y del mínimo de  $I_v(\xi_0)$  es ligeramente mayor que el obtenido para transmisiones estándar, pudiendo llegar al 6 % en el peor de los casos del estudio 2b.

Se concluye por tanto, que para engranajes helicoidales HTCR no estándar la tensión de contacto crítica se puede calcular como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta \cos \beta_b}{\pi m \cos \alpha_t} \lambda_\xi} \sqrt{\frac{v(\xi)]}{\xi_{\max R} (\lambda_\xi - \xi_{\max R})} \frac{1}{I_v(\xi_{inn})}} \quad (4.73)$$

donde  $v(\xi)$  vendrá dado por la Ec. 4.61 ó 4.63, según el caso.

## 4.4. Validación de la tensión de contacto mediante MEF

El objetivo de este apartado consiste en validar los resultados de tensión de contacto obtenidos mediante el modelo analítico propuesto con respecto los resultados de distribución de tensiones del modelo resuelto por la técnica de los elementos finitos explicado en el apartado 3.6. El procedimiento para obtener la distribución de tensión con el modelo de MEF se ha definido en el apartado 3.6, por tanto, en este capítulo únicamente se mostrarán los resultados de las tensiones de contacto para cada uno de los ejemplos definidos en el apartado 3.6.4 y 3.6.5.

#### 4.4.1. Tensión contacto para engranajes rectos

La expresión general de la tensión de contacto para engranajes rectos puede escribirse en función del reparto de carga como:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{1}{b} \frac{F(\xi)}{\rho(\xi)}} \quad (4.74)$$

en la que la función  $1/\rho(\xi)$  se expresa como:

$$\frac{1}{\rho(\xi)} = \frac{1}{\rho_1(\xi)} + \frac{1}{\rho_2(\xi)} \quad (4.75)$$

y la función  $F(\xi)$  puede sustituirse por:

$$F(\xi) = R(\xi)F \quad (4.76)$$

En el apartado 3.6.4 se ha validado el modelo de reparto de carga propuesto obtenido a partir de la distribución de tensiones de *ANSYS*. En este apartado se verificarán directamente las tensiones de contacto obtenidas con *ANSYS* con respecto a las obtenidas mediante el modelo analítico propuesto. Primeramente se verificará la tensión de contacto obtenida para el ejemplo dado en 3.6.4 que se corresponde con un engranaje recto convencional con modificación de la distancia entre centros de operación.

Se han realizado 15 simulaciones diferentes correspondientes a 15 posiciones de contacto diferentes. Para cada una de ellas, sobre la representación de las tensiones de contacto, se define un *path* sobre la línea de contacto mediante los dos nodos extremos de cada cara del diente y se obtienen la distribución de tensión a lo largo de dicho *path*. En la figura 4.18 se comparan las tensiones de contacto obtenidas con ambos modelos, en línea continua negra se muestra la tensión de contacto obtenida con el modelo analítico y los 15 puntos representados son el resultado de la tensión de contacto obtenida mediante la simulación del modelo de MEF para cada una de las 15 posiciones de contacto simuladas.

Se ha verificado también la tensión de contacto para el 2º ejemplo definido en 3.6.4 correspondiente a un engranaje recto HTCR con modificación de la distancia

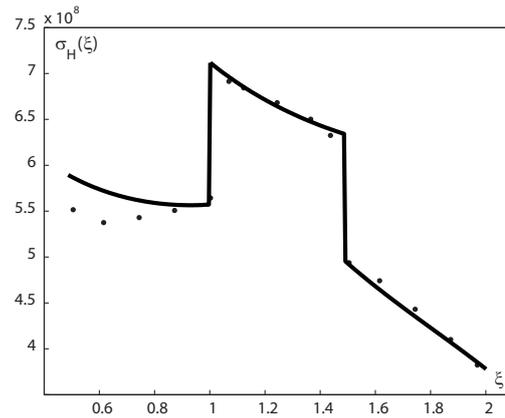


Fig. 4.18: Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado).

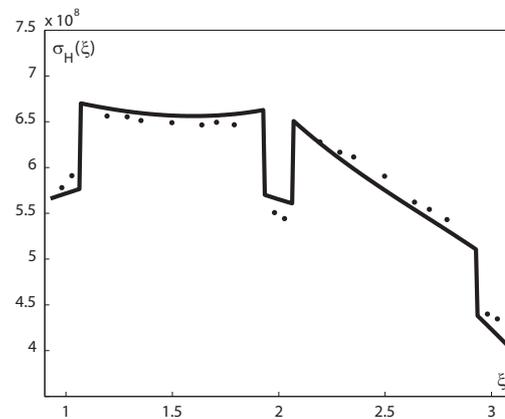


Fig. 4.19: Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado).

entre centros de operación. La figura 4.19 muestra la comparación entre la tensión de contacto obtenida mediante la implementación del modelo aproximado de la función potencial unitario inverso y la tensión de contacto obtenida a partir de la simulación del modelo de elementos finitos. El modelo analítico se representa con línea continua y se representan 20 puntos correspondientes a las 20 posiciones de contacto simuladas para el modelo de M.E.F.

Se observa que los valores obtenidos con el modelo analítico encajan con bastante precisión con los obtenidos mediante técnicas de elementos finitos.

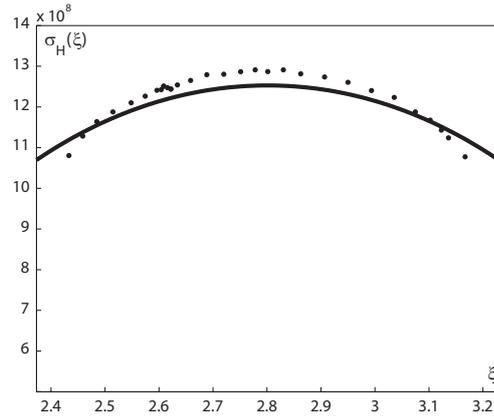


Fig. 4.20: Comparación de la tensión de contacto entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por M.E.F. (punteado).

#### 4.4.2. Tensión de contacto para engranajes helicoidales

Del apartado 4.3.2 se conoce que la expresión general de la tensión de contacto en engranajes helicoidales se puede calcular con la Ec. 4.36:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{F \varepsilon_\beta \cos \beta_b \cos \beta}{b \pi m \cos \alpha_t} \lambda_\xi} \sqrt{\frac{v(\xi)}{\xi(\lambda_\xi - \xi)} \frac{1}{I_v(\xi_0)}} \quad (4.77)$$

Se ha obtenido la distribución de tensiones para el ejemplo propuesto en el apartado 3.6.5, correspondiente a un engranaje helicoidal con distancia entre centros no estándar y adendo reducido tanto en el piñón como en la rueda.

De nuevo el procedimiento a seguir para obtener las tensiones de contacto del modelo de MEF simulado es el mismo que en para los casos anteriores, a partir de la simulación de dicho modelo, se representan las tensiones de contacto en el flanco del diente y se define un camino o *path* a través los nodos de la línea de contacto, en el que se obtiene la distribución de presiones. En la figura 4.20 se observa los resultados de las tensiones obtenidas mediante el modelo de elementos finitos y la tensión de contacto obtenida con el modelo analítico.

### 4.4.3. Conclusiones del análisis de tensiones

De los casos de engranajes rectos analizados se puede deducir que los resultados obtenidos tienen una elevada precisión, en particular en los puntos donde se produce la tensión crítica de contacto; además se observa que los errores mayores se comenten en las zonas menos solicitadas, es decir, en aquellas zonas que no son críticas y donde la importancia de obtener errores mayores es menor.

Para engranajes helicoidales se observa que las tensiones de contacto de MEF presentan unas ligeras fluctuaciones; esto es debido a que las tensiones de contacto se evalúan con los valores interpolados entre los nodos más cercanos a la línea geométrica definida por el *path* sobre la línea de contacto, pero dicha línea forma un ángulo de hélice  $\beta_b$  respecto al eje longitudinal del diente y el mallado en la sección longitudinal se ha realizado mediante elementos paralelos al eje longitudinal.

Por otro lado, en todas las simulaciones se puede apreciar un efecto borde. El efecto borde se produce cuando el contacto deja de producirse entre dos superficies y una de ellas, o las dos, pasa a convertirse en una arista.

En engranajes rectos, debido a este efecto borde, existe una dificultad añadida a la hora de realizar simulaciones en las zonas próximas en las que existen cambios de reparto de carga, puesto que no se pueden obtener datos fiables mediante el método de elementos finitos, porque si alguna pareja está engranando en las zonas extremas de su intervalo de contacto (engrana el punto más bajo de contacto del piñón con la cabeza de la rueda, o la cabeza del piñón con el punto más bajo de contacto de la rueda) existe efecto de borde a lo largo de todo el ancho del engranaje, que hace que los datos de tensiones se vean considerablemente afectados.

El efecto borde produce además una desviación de los resultados en los extremos de la línea de contacto que hace que la tensión tienda a cero en las zonas cercanas a la cara anterior y posterior del diente. Este efecto influye más en los resultados de engranajes helicoidales que en los resultados de engranajes rectos, puesto que en los engranajes rectos la línea de contacto es una línea recta, y aunque se filtren estos valores de los extremos de las caras de los dientes, el valor medio obtenido en el resto

de los datos de la línea de contacto es prácticamente el valor esperado. En cambio, en los engranajes helicoidales, al eliminar esos datos, como la tensión de contacto es diferente en cada punto de la línea de contacto, existe una pérdida de información en los extremos que hace los resultados en las zonas extremas se vean más afectados. Además, se ha apreciado que para engranajes helicoidales este efecto abarca una zona mayor, y por tanto, si las tensiones en esas zonas son menores de lo que deberían, las tensiones en el resto de la línea de contacto deben compensar este efecto, obteniéndose unas tensiones mayores de lo previsto en el resto de la línea de contacto, tal y como se aprecia en la Fig. 4.20.

## 4.5. Comparación en la tensión de contacto con el método de ISO 6336-2

En [48] Pedrero realizó un estudio completo sobre las discrepancias entre los métodos de cálculo de la tensión de contacto propuesta por ISO y los cálculos con el nuevo modelo de distribución de carga basado en la minimización del potencial elástico (MEP) para engranajes estándar. El resultado de este estudio indicaba que:

- La tensión de contacto crítica normalmente se encuentra en el punto de contacto único inferior para ambos métodos, ISO y MEP. Sin embargo, los resultados no son idénticos debido a la anchura de la cara virtual (o el factor de relación de contacto [6]) considerado por ISO. Las discrepancias dependen de los valores del grado de recubrimiento transversal, pero típicamente la tensión de contacto ISO es de un 10 % más pequeño que la tensión del contacto obtenida con MEP.
- Para valores del número de dientes del piñón pequeños, la tensión de contacto crítica de MEP se encuentra en el punto inferior del intervalo de contacto, mientras que para ISO se mantiene en el punto de contacto único inferior. En este caso, las discrepancias pueden aumentar hasta un 35 % para relaciones de transmisión mayores que 3.

Todas estas conclusiones se obtuvieron mediante un estudio de engranajes cilíndricos con dientes estándar y distancia entre centros nominal. El método de cálculo propuesto por ISO puede no encajar exactamente cuando se consideran valores no estándar de la altura del diente o distancia entre centros. Sin embargo, puede adaptarse el método de ISO para dimensiones no estándar, considerando cuatro posibles puntos determinantes de contacto: ambos límites del intervalo de contacto y los dos límites del intervalo cuando sólo existe una pareja de dientes contactando (en lugar del punto inferior del intervalo de contacto y el punto de contacto único inferior, exclusivamente [6]).

Con esta modificación del método ISO, las discrepancias entre dicho método y los cálculos del MEP para dimensiones de engranajes no estándar son similares a los de dimensiones estándar, excepto, cuando con ambos métodos las tensiones críticas de contacto se sitúan en diferentes posiciones, en donde las discrepancias obtenidas son inferiores al 20 %, mucho más pequeñas que el 35 % correspondiente a engranajes estándar. A continuación se muestra un ejemplo basado en el estudio denominado Estudio 1c, que se muestra en la tabla 3.3, donde se han utilizado los siguientes parámetros geométricos:

- Número de dientes del piñón: 25
- Ángulo de presión: 25°
- Relación de transmisión: 2
- Coeficientes de desplazamiento para el piñón y la rueda: 0
- Coeficiente de altura de cabeza del piñón: 1
- Coeficiente de altura de cabeza de la rueda: 0,9
- Distancia entre centros de operación: nominal ( $r_{p1} + r_{p2}$ )

Los valores del grado de recubrimiento transversal ficticio y del grado de recubrimiento transversal real son:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_\alpha &= 1,6385 \\ \varepsilon_\alpha &= 1,5605\end{aligned}\tag{4.78}$$

mientras que los valores del parámetro del perfil que indican el punto inferior de contacto ficticio y real son:

$$\begin{aligned}\xi'_{im} &= 0,6756 \\ \xi_{im} &= 0,7536\end{aligned}\quad (4.79)$$

De acuerdo con la Ec. 3.79,

$$\begin{aligned}\xi'_m &= \xi'_{im} + \frac{1}{2}\varepsilon'_\alpha = 1,4769 \\ b'_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon'_\alpha}{2}\right)^2 - 1}} = 1,2358\end{aligned}\quad (4.80)$$

Finalmente la Ec. 3.80 puede expresarse como:

$$\begin{aligned}R(\xi) &= -0,194 + 0,5221\xi \quad \text{para } 0,7536 \leq \xi \leq 1,3114 \\ R(\xi) &= 1 \quad \text{para } 1,3114 \leq \xi \leq 1,7536 \\ R(\xi) &= 1,5414 - 0,5221\xi \quad \text{para } 1,7536 \leq \xi \leq 2,3114\end{aligned}\quad (4.81)$$

De esta distribución de la carga, la tensión de contacto por el método de MEP es un 8,86 % superior a la tensión de contacto nominal calculada con la norma ISO, ambos calculados según se describe en [6] y [48]. En este caso, ambos métodos localizan la tensión de contacto crítica en el punto inferior del intervalo de contacto único.

La figura 4.21 presenta las discrepancias de la tensión crítica de contacto calculada por el método ISO y por el MEP para todos los casos de todos los estudios que se presentan en la Tabla 3.3 del capítulo 3. Los puntos negros representan los casos en los que las tensiones críticas para ISO y para MEP se sitúan ambos en el punto inferior del intervalo de contacto único. En estos casos, surgen discrepancias debido al factor de relación de contacto dado por ISO [6], que depende del valor del grado de recubrimiento transversal exclusivamente. Los puntos grises representan el resto de los otros casos, en los que la fuente de las discrepancias no sólo es el factor de relación de contacto, sino también la diferencia en la localización del punto crítico -y del radio de curvatura relativo- y del diferente reparto de carga considerado por cada método.

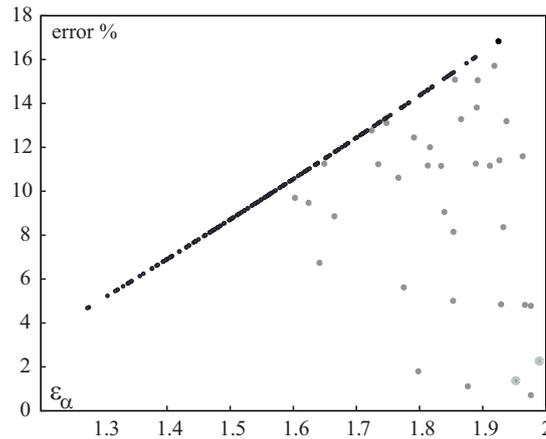


Fig. 4.21: Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP.

Para engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, ISO calcula el esfuerzo de contacto crítico con la carga actuando en el punto inferior del intervalo inferior de contacto doble (punto  $B_2$  en la figura 3.24), descrito por  $\xi = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 2$ . Sin embargo, el ámbito de aplicación se limita a engranajes con grado de recubrimiento transversal inferior a 2,5.

Para engranajes rectos HTCR, se ha realizado un estudio considerando valores de los parámetros de diseño contenidos en los siguientes rangos:

- Número de dientes del piñón entre 40 y 60
- Ángulo de presión entre  $12^\circ$  y  $18^\circ$
- Relación de transmisión entre 1 y 3
- Coeficientes de desplazamiento del piñón y de la rueda entre  $-0,1$  y  $0,1$  para ambos

Los resultados de este estudio se pueden ver en la figura 4.22. Los puntos alineados en la zona inferior de la gráfica corresponden a casos en los que se la tensión crítica de contacto con ambos métodos se encuentra en el punto  $B_2$ . En estos casos, las discrepancias entre la tensión calculada por ISO y la MEP se deben al factor de relación de contacto [6] y la diferencia en el reparto de carga considerado por cada método. Sin embargo, como el factor de relación de contacto aumenta con el grado

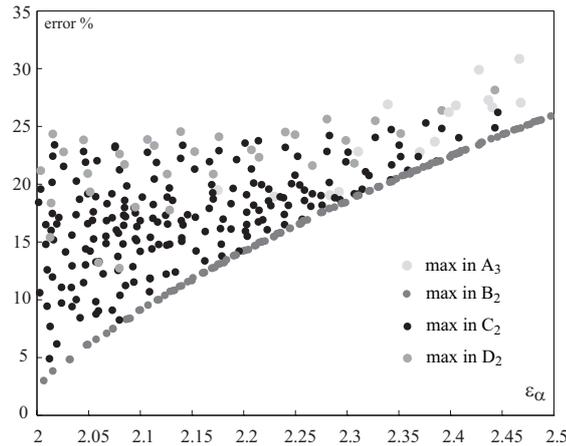


Fig. 4.22: Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP para engranajes HTCR .

de recubrimiento transversal, las discrepancias son más altas a medida que aumenta el grado de recubrimiento transversal, alcanzando valores superiores a 25 % para  $\varepsilon_{\alpha} = 2,5$ .

Los puntos superiores no alineados representan el resto de los casos, en los que la fuente de las discrepancias no son sólo debidas al factor de relación de contacto [6] y a la fracción de reparto de carga considerada por cada método, sino también a las diferencias de localización del punto de tensión crítica considerado por cada método. Obviamente, las diferencias son aún mayores para estos casos, pero este aumento es significativamente más pequeño a medida que la relación de contacto aumenta. En consecuencia, las discrepancias máximas crecen muy ligeramente, hasta un 28 %. En todos los casos la tensión de contacto crítica con MEP es mayor que con ISO.

Se ha realizado un estudio similar para engranajes helicoidales HTCR, donde se han establecido los siguientes rangos para los parámetros de diseño:

- Número de dientes del piñón: 40, 50 y 60
- Ángulo de presión entre 12° y 16°
- Relación de transmisión entre 1 y 3
- Coeficientes de desplazamiento del piñón y de la rueda entre -0,1 y 0,1 para ambos

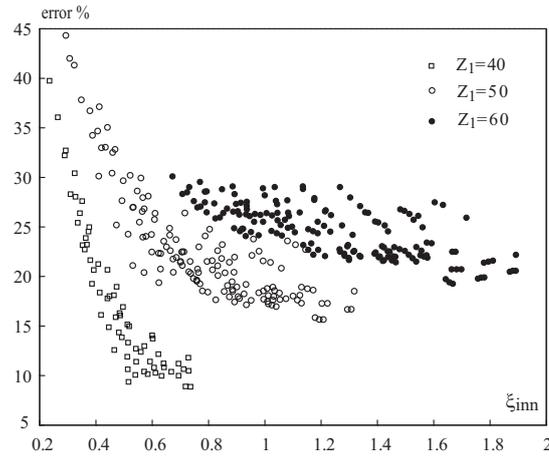


Fig. 4.23: Comparación entre la tensión de contacto crítica calculada por el método de ISO y MEP para engranajes helicoidales HTCR.

- Ángulo de hélice entre 15° y 25°

Los resultados de este estudio se puede ver en la figura 4.23. En esta figura se distinguen tres familias de puntos correspondientes a los tres valores de número de dientes del piñón considerados. Típicamente las diferencias son inferiores al 30 %, pero pueden crecer hasta el 40 % para valores bajos del parámetro del perfil del diente que determina el punto inferior de contacto,  $\xi_{inn}$ , que se dan cuando el número de dientes del piñón toma el valor más pequeño posible (en todo momento se mantiene que el grado de recubrimiento transversal es mayor que 2) y la relación de transmisión es alta. La tensión de contacto crítica calculada para MEP es siempre mayor que la de ISO, también para engranajes helicoidales.

Estas discrepancias se deben a que la norma ISO [6] considera una distribución uniforme de carga y a que supone que la ubicación de la tensión de contacto crítica se sitúa en el punto  $B_2$ , lo cual se encuentra muy débilmente justificado en la norma.

# Capítulo 5

## Modelo de cálculo a rotura en la base

En este capítulo se considerará el modelo de fallo por rotura en la base del diente; para ello, se estudiará la evolución de la tensión nominal en la base del diente a lo largo de un ciclo completo de engrane. Al igual que el modelo de presión superficial presentado en el capítulo 4, los cálculos correspondientes se llevarán a cabo siguiendo el procedimiento de cálculo ISO y estará basado en el modelo de distribución de carga no uniforme presentado en el epígrafe 3. El estudio de la tensión en la base se realizará tanto para dentado recto como para dentado oblicuo en engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, que además se extenderá a engranajes no estándar.

### 5.1. Introducción

En la literatura técnica, se pueden encontrar estudios sobre la rotura en la base a lo largo de la línea de contacto, que proporcionan resultados obtenidos mediante técnicas numéricas o mediante el método de los elementos finitos (FEM), que permiten obtener conclusiones sobre una transmisión de engranajes particular, pero que dificulta el poder extraer conclusiones de validez general aplicables a cualquier par de engranajes.

Entre la multitud de estudios y referencias que estudian la rotura en la base, cabe citar: Kawalec [12] desarrolló un análisis comparativo de la tensión en la base del diente con los métodos de evaluación dados por ISO y AGMA, verificándolo

mediante el método de elementos finitos. Li [71] estudió la tensión de contacto y la resistencia a flexión para engranajes rectos con errores de mecanizado, errores de montaje y modificaciones en los dientes mediante un modelo de tres dimensiones de MEF. Pedersen [63] propuso perfiles asimétricos para mejorar la tensión de flexión en engranajes rectos. Pero ninguno de ellos considera un modelo analítico con distribución de carga no uniforme.

A pesar de la enorme cantidad de estudios realizados hasta la fecha, en ningún caso han sido desarrollados, rigurosamente, métodos de cálculo para engranajes rectos y helicoidales con alto grado de recubrimiento transversal. Tal vez, los resultados proporcionados por los modelos simples de la teoría de la elasticidad no se corresponden con los resultados experimentales cuando la carga se supone que se distribuye uniformemente a lo largo de la línea de contacto [12]. En el pasado, la dificultad de asegurar una buena precisión cuando se produce contacto simultáneo en tres parejas de dientes, puede haber influido en que ni los diseñadores ni los investigadores hayan estado nunca interesados en estudiar este tipo de transmisiones en profundidad. Sin embargo, con los procesos de fabricación modernos y las nuevas técnicas de montaje se consigue la precisión necesaria para este tipo de transmisiones, lo que requiere el desarrollo de nuevos métodos de cálculo precisos para engranajes con alto grado de recubrimiento transversal.

Para el cálculo a rotura en la base, las normas internacionales de diseño de engranajes ISO [5, 7] y AGMA [4, 8] utilizan la ecuación de Navier para la determinación de la tensión de flexión, para lo cual se ha de establecer previamente la localización de la sección crítica, en la que se prevé que la tensión sea máxima, así como la definición de las condiciones críticas de carga. Aunque entre ambas normas existe alguna diferencia en la especificación de la sección crítica de la base del diente y en la consideración de la componente de compresión de la carga sobre el diente, ambos métodos asumen, inicialmente, una distribución de carga uniforme a lo largo de la línea de contacto, y corrigen el valor calculado de la tensión mediante una serie de factores para considerar que la distribución de carga depende de la rigidez

de la pareja de dientes que engrana, así como de errores de desalineamiento de los ejes, errores de tallado, etc., que procuran ajustar el resultado a las condiciones críticas de carga que realmente se presentan. Para determinar los diversos factores mencionados, se hace necesario el empleo de multitud de tablas y gráficos, que supone un procedimiento laborioso e incómodo, con el riesgo añadido de introducir errores por lectura o estimación de valores intermedios no coincidentes con los que figuran en las gráficas. Una solución consiste en introducir toda esta serie de gráficas y ábacos como información numérica mediante una serie de funciones de aproximación y subrutinas de interpolación [57], lo que no elimina el error de aproximación y requiere el trabajo añadido de digitalizar una extensa cantidad de información.

En lo que respecta a los engranajes HTCR, la norma AGMA [4, 8], directamente, no considera engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2, y establece de forma explícita que los métodos de cálculo que presenta no son aplicables a este tipo de transmisiones.

La versión de la norma ISO [7], publicada en 1996, consideraba engranajes con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5, y para el cálculo a flexión sugería suponer la totalidad de la carga actuando en el punto inferior del intervalo de contacto doble. Es evidente que esas condiciones de carga no se dan en ningún momento del engrane (parece que las condiciones críticas se darían con la mitad de la carga actuando en el límite superior de ese intervalo de contacto doble), pero de esta manera, según la norma, las ecuaciones empleadas para el caso de grado de recubrimiento transversal entre 1 y 2 continúan siendo aplicables, y el error cometido es siempre en sentido de la seguridad. Y efectivamente es así, pero la práctica demuestra que el método es excesivamente conservador.

Por esta razón, en revisiones posteriores y en la versión actualmente vigente publicada en el año 2006, se recomienda calcular la tensión con la totalidad de la carga aplicada en el punto inferior del intervalo de contacto triple para engranajes con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5. Este procedimiento es, desde luego, menos conservador que el anterior, pero hasta tal límite que no siempre el error cometido

será en el sentido de la seguridad. En todo caso, el procedimiento está muy débilmente justificado y habrá de ser objeto de revisión en las siguientes versiones de la norma.

## 5.2. Cálculo de tensión nominal en la base del diente según ISO 6336-3

La norma ISO 6336-3 para cálculo de tensión en la base del diente contempla, exclusivamente, engranajes rectos y helicoidales con grado de recubrimiento transversal hasta 2,5. Asimismo, calcula la tensión de flexión nominal a partir de la ley de Navier, que posteriormente se corrige mediante una serie de factores, y establece como sección crítica la correspondiente al perfil en la base cuya tangente forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje del diente. Finalmente, considera que las condiciones críticas de carga, tanto para el piñón como para la rueda, se dan para engranajes convencionales, con la carga actuando en el límite superior del intervalo de carga no compartida (punto de contacto único superior) y, para engranajes HTCR hasta un grado de recubrimiento transversal de 2,5, con la totalidad de la carga aplicada en el punto inferior del intervalo de contacto triple. Además, introduce las siguientes simplificaciones:

- Para el cálculo de la tensión en la base del diente considera únicamente la componente de flexión producida por la carga, despreciando la componente de compresión.
- El cálculo de engranajes helicoidales se realiza considerando la geometría del engranaje recto virtual equivalente.

En la norma se proponen dos métodos de cálculo para calcular la tensión máxima en la sección crítica:

- **Método A.** La máxima tensión puede determinarse mediante cualquier método apropiado (cálculo mediante técnicas de elementos finitos, cálculo integral,

procedimientos de transformación conforme, o mediante técnicas experimentales como análisis fotoelástico de tensiones, medidas extensiométricas, etc.) Este método se emplea en contados casos especiales que puedan justificar el elevado coste de cálculo necesario.

- **Método B.** Este método asume que la carga se encuentra aplicada en el punto de contacto único superior en engranajes rectos o, para los helicoidales, en el correspondiente de la geometría del engranaje recto virtual equivalente, que es el que va a producir el estado tensional más desfavorable. Es un método apropiado para cálculos mediante ordenador.

El modelo que se obtendrá en este capítulo se basará en el segundo método de la norma.

### 5.3. Tensión nominal en la base para dentado recto

ISO realiza el cálculo de la tensión nominal en la base del diente a partir de la ecuación de Navier, para ello se considera el diente de un engranaje recto como una viga empotrada en voladizo de sección rectangular de espesor uniforme e igual al ancho de cara del diente, con anchura variable e igual al espesor del diente en cada punto del perfil.

Se aplica la ecuación de Navier para obtener la tensión en la sección crítica, suponiendo que las condiciones críticas de carga se dan en el punto de contacto único superior, como se muestra en la figura 5.1:

$$\sigma_F = \frac{M_F}{I_z} y_{\max} = \frac{F_n \cos \alpha_{Fen} h_{F_e} s_{Fn}}{\frac{1}{12} b s_{Fn}^3} \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

donde  $M_F$  es el momento flector,  $I_z$  es el momento de inercia geométrico de la sección crítica,  $y_{\max}$  es la distancia desde la fibra neutra del diente al punto de la sección crítica más alejado de la misma,  $F_n$  es la fuerza sobre el diente en el plano normal,  $\alpha_{Fen}$  es el ángulo de la carga actuando en el punto de contacto único superior,  $h_{F_e}$  es el brazo del momento flector,  $b$  el ancho de cara y  $s_{Fn}$  es el espesor de la sección crítica.

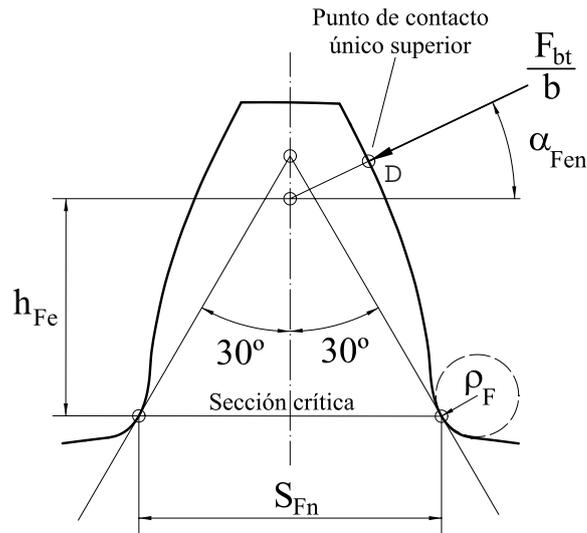


Fig. 5.1: Consideraciones ISO en el cálculo de la resistencia a flexión en la base del diente.

ISO expresa la tensión en la base en función de la fuerza tangencial en el plano transversal  $F_t$ , pero para engranajes rectos el plano normal y el transversal coinciden, por ello se expresa la fuerza en el plano normal  $F_n$ , únicamente, en función de la fuerza tangencial  $F_t$  y del ángulo de presión de referencia  $\alpha_n$ . Si se sustituye esta relación en la ecuación anterior 5.1 se obtiene la siguiente expresión para el cálculo de la tensión de flexión en la base del diente:

$$\sigma_F = 6 \frac{F_t \cos \alpha_{Fen} h_{Fe}}{b \cos \alpha_n s_{Fn}^2} \quad (5.2)$$

Si se multiplica y divide por el módulo y se agrupan los diferentes coeficientes se puede obtener un coeficiente denominado factor de forma  $Y_F$  como:

$$Y_F = 6 m \frac{\cos \alpha_{Fen} h_{Fe}}{\cos \alpha_n s_{Fn}^2} \quad (5.3)$$

resultando una tensión en la base de la siguiente forma:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm} Y_F \quad (5.4)$$

Para tomar en consideración el efecto de concentración de tensiones en la base del diente, así como el error cometido al aplicar el principio de Saint-Venant en un elemento de reducida longitud (como en un diente de engranaje), ISO introduce un

factor de corrección de tensiones  $Y_S$ . Este factor de corrección de tensiones tiene en consideración la forma geométrica del pie del diente a través de un parámetro de entalladura denominado  $q_S$ :

$$q_S = \frac{S_{Fn}}{2\rho_F} \quad (5.5)$$

donde  $S_{Fn}$  es el espesor en la sección crítica que se ha considerado y  $\rho_F$  es el radio de curvatura del perfil del diente en dicha sección. El factor de corrección de tensiones se obtiene mediante una expresión empírica en la que interviene el parámetro de entalladura  $q_S$  y el brazo del par que produce la carga aplicada sobre la sección crítica,  $h_{Fe}$

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \frac{S_{Fn}}{h_{Fe}}\right) q_S \left[ \frac{1}{1,21 + 2,3 \frac{h_{Fe}}{S_{Fn}}} \right] \quad (5.6)$$

Con ello, la tensión nominal en la base del diente se calcula con la ecuación:

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{bm} Y_F Y_S \quad (5.7)$$

## 5.4. Tensión nominal en la base para dentado oblicuo

Para engranajes helicoidales la norma ISO 6336-3 utiliza la geometría del engranaje recto virtual y supone que la sección crítica y las condiciones críticas de carga se determinan de la misma manera que para engranajes rectos. En consecuencia, todas las ecuaciones presentadas en el epígrafe anterior continúan siendo válidas si se sustituye el número de dientes  $Z$ , el radio primitivo  $r_p$  y el radio base  $r_b$  por sus valores del engranaje virtual,  $Z_v$ ,  $r_{pv}$  y  $r_{bp}$ , respectivamente.

Se puede comprobar, no obstante, que la oblicuidad de las líneas de contacto produce unos niveles de tensión en la base de los dientes helicoidales ligeramente inferiores a los valores correspondientes al engrane recto virtual utilizado en los cálculos. Por ello, ISO introduce el factor de oblicuidad  $Y_\beta$ , cuyo valor se calcula con la siguiente ecuación, que depende del ángulo de hélice de referencia  $\beta$  expresado en

grados y del grado de recubrimiento en el salto  $\varepsilon_\beta$ :

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta(^{\circ})}{120^{\circ}} \quad (5.8)$$

Cuando  $\varepsilon_\beta > 1$ , en la ecuación de  $Y_\beta$  el coeficiente  $\varepsilon_\beta$  es sustituido por 1. Y cuando en  $\beta > 30^{\circ}$ , en la ecuación de  $Y_\beta$  el coeficiente  $\beta$  es sustituido por  $30^{\circ}$ .

Con ello, la tensión nominal en la base para dientes helicoidales queda finalmente de la forma:

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{bm} Y_F Y_S Y_\beta \quad (5.9)$$

## 5.5. Propuesta de modelo de cálculo a rotura en la base

En el presente capítulo se lleva a cabo el estudio de la tensión de flexión en la base del diente basado en el modelo de distribución no uniforme de la carga a lo largo de la línea de contacto, obtenido a partir del principio de mínimo potencial de deformación presentado en el capítulo 3. Para ello se estudia la evolución de la tensión nominal de rotura en la base del diente en la sección crítica propuesta por ISO a lo largo de un ciclo completo de engrane. Este estudio abarcará engranajes de perfil de evolvente, rectos y helicoidales, con alto grado de recubrimiento transversal e incluye estudios de engranajes que se han denominado estándar y estudios para engranajes no estándar, es decir, aquellas transmisiones con coeficiente de altura de cabeza del diente distinta a 1, o transmisiones en las que se produce engrane en vacío, o transmisiones en que la distancia entre los centros de operación es diferente de la nominal:  $r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2)$ .

La tensión se calcula siguiendo el procedimiento propuesto por ISO, y descrito en los epígrafes anteriores: la sección crítica se localiza en el punto del perfil de acuerdo cuya tangente forma un ángulo de  $30^{\circ}$  con el eje del diente, despreciándose la componente de compresión.

A partir de la Ec. 5.1, tomando una sección del diente de ancho diferencial  $db$ , la tensión diferencial en la base del diente se puede expresar como:

$$d\sigma_F = \frac{f dl \cos \alpha_c h_F s_F}{\frac{1}{12} db s_F^3} \frac{s_F}{2} \quad (5.10)$$

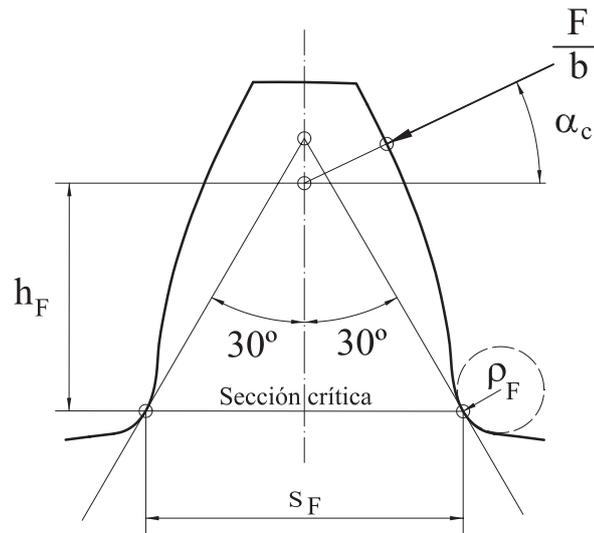


Fig. 5.2: Sección crítica.

En general, se cumple que  $dl = db / \cos \beta_b$ , aunque para engranajes rectos como la línea de contacto es paralela al eje de los engranajes se obtiene que  $dl = db$ . Si se integra la ecuación anterior a lo ancho del diente y se expresa en función de la fuerza por unidad de longitud y de la variable  $\xi$ , la tensión nominal en la base del diente se expresa como:

$$\sigma_F = \frac{6}{s_F^2 \cos \beta_b} [f \cos \alpha_c h_F](\xi) \quad (5.11)$$

Se observa que la Ec. 5.11 anterior depende del brazo del momento flector  $h_F$  y del espesor de la sección crítica  $s_F$ . A continuación se analizará el procedimiento para obtener estas variables.

#### Determinación del espesor de la sección crítica $s_F$ y del brazo del par $h_F(\xi)$

Para plantear una expresión analítica de de la sección crítica  $s_F$  y del brazo del par  $h_f(\xi)$  se hace necesaria la determinación de la sección crítica según las recomendaciones del Comité ISO. Para ello, se realiza un planteamiento analítico de la ecuación de la recta tangente al perfil de acuerdo en la base del diente que forme un ángulo de  $30^\circ$  con el eje del diente, Fig. 5.2, lo que tras ciertos desarrollos conduce a una ecuación trascendente de resolución necesariamente numérica.



tangente a la trocoide en un punto cualquiera caracterizado por el parámetro  $\lambda$  es  $\lambda - \tau$  siendo  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\gamma_d}{2} + \Delta\tau \quad (5.13)$$

donde  $\gamma_d$  es el espesor angular en el radio de pie del diente, es decir, para  $\varphi = \pi/2$ :

$$\gamma_d = \frac{4}{z} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{r_f}{\cos \alpha_n} + (h_{a0} - r_f) \operatorname{tg} \alpha_n \right] \quad (5.14)$$

y  $\Delta\tau$  es el ángulo girado por la rueda desde que la cremallera talló la raíz del diente (punto con  $\varphi = \pi/2$ ) al punto actual considerado, caracterizado por el parámetro  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{1}{r_p} \left[ \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} \cos \beta - mr_f \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \right] \\ &= \frac{m \cos \beta}{r_p} \left[ \frac{h_{a0} - x - r_f}{\operatorname{tg} \varphi} - r_f \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \beta \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

Tomando como sección crítica la especificada por la norma ISO (aquella cuya recta tangente al perfil de acuerdo en la base del diente forme un ángulo de  $30^\circ$  con el eje del diente), se debe cumplir la condición:

$$\lambda - \tau = \frac{\pi}{6} \quad (5.16)$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior, las Ecs. 5.14 y 5.15, se obtiene que la sección crítica debe cumplir:

$$\lambda - \frac{\gamma_d}{2} - \frac{m \cos \beta}{r_p} \left[ \frac{h_{a0} - x - r_f}{\operatorname{tg} \varphi} - r_f \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \beta \right] = \frac{\pi}{6} \quad (5.17)$$

Para la resolución de la ecuación trascendente anterior, ISO 6336-3 propone un método iterativo relativamente sencillo, que habitualmente converge después de tres o cuatro bucles de iteración. Posteriormente se desarrolló [39] un procedimiento muy similar, pero que proporciona un valor de partida bastante aproximado.

El valor de partida se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\varphi_0 = a_0(x + a_1)^{a_2} + \frac{b_0 + b_1 \exp^{b_2 x} \operatorname{sen}(x + b_3)}{Z^{c_0 + c_1 x}} \quad (5.18)$$

en la que los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1$  toman los valores:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,515 & b_0 &= 2,47 & b_3 &= 1,885 \\ a_1 &= 1 & b_1 &= 0,58 & c_0 &= 0,815 \\ a_2 &= 0,022 & b_2 &= 0,57 & c_1 &= 0,14 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Una vez obtenido el valor de partida, se debe introducir dicho valor en la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma_d}{2} + \frac{m \cos \beta}{r_p} \left[ \frac{h_{a0} - x - r_f}{\operatorname{tg} \varphi_0} - r_f \cos \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \beta \right] \quad (5.20)$$

Para engranajes rectos, con el valor de partida obtenido con la ecuación anterior, se consigue una buena aproximación al valor exacto, de tal manera que en un solo paso -y, consecuentemente, sin necesidad de iteración- se obtiene un valor muy preciso del parámetro de la sección crítica buscado. En cambio, para engranajes helicoidales se hace necesaria alguna iteración. Para el modelo propuesto en este capítulo se ha determinado realizar 3 iteraciones tanto para engranajes rectos como para engranajes helicoidales, con ello se consigue un valor de  $\lambda$  con error prácticamente nulo.

Una vez determinado el ángulo  $\lambda$  que caracteriza el tallado del punto perteneciente a la sección crítica, es posible determinar el espesor del diente en la sección crítica,  $s_F$ , así como la distancia hasta el punto de aplicación de la carga,  $h_F$ .

Para ello se necesitan una serie de distancias y relaciones que se obtienen de la Figura 5.4. Se llama punto 1 al punto de la trocoide de la sección crítica caracterizado por el parámetro  $\lambda$ . Se denomina  $\tau_1$  al ángulo formado por la recta que une el centro de la rueda con el punto 1 ( $\overline{O1}$ ) con respecto a la vertical  $\overline{OP}$ .

El radio primitivo se obtiene según la siguiente ecuación:

$$r_p = r \cos \tau_1 + r \operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{tg} \lambda = r \cos \tau_1 + B \quad (5.21)$$

donde, como se muestra en la figura 5.4,

$$B = m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi) \quad (5.22)$$

$$\delta = \frac{B}{\operatorname{sen} \lambda} = \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi)}{\operatorname{sen} \lambda} \quad (5.23)$$

$$r \cos \tau_1 = r_p - B = r_p - m(h_{a0} - x - r_f) - m r_f \operatorname{sen} \varphi \quad (5.24)$$

La distancia entre los puntos  $O$  y  $P_1$ , se denomina  $r_{P1}$  y toma el valor:

$$r_{P1} = r \cos \tau_1 - r \frac{\operatorname{sen} \tau_1}{\operatorname{tg} \lambda} = r \cos \tau_1 - \frac{B}{\operatorname{tg}^2 \lambda} \quad (5.25)$$

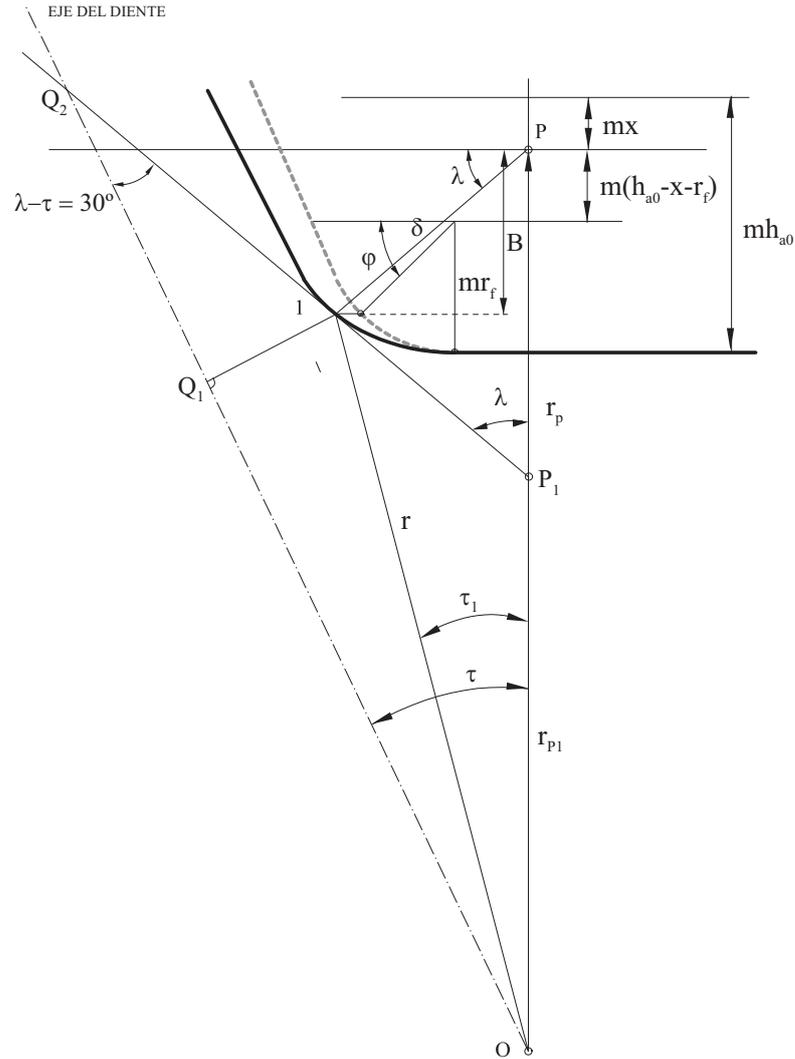


Fig. 5.4: Determinación de la sección crítica según las recomendaciones del Comité ISO.

Si se introducen las ecuaciones 5.22 y 5.24 en la ecuación anterior se obtiene:

$$r_{P1} = r_p - B \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \lambda} \right) = r_p - \frac{m_n(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \varphi)}{\operatorname{sen}^2 \lambda} \quad (5.26)$$

De la figura 5.4, aplicando el teorema del seno se obtiene el valor de las distancias  $\overline{OQ_2}$  y  $\overline{P_1Q_2}$ :

$$\frac{r_{P1}}{\operatorname{sen}(\lambda - \tau)} = \frac{\overline{OQ_2}}{\operatorname{sen} \lambda} \rightarrow \overline{OQ_2} = r_{P1} \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen}(\lambda - \tau)} \quad (5.27)$$

$$\frac{r_{P1}}{\operatorname{sen}(\lambda - \tau)} = \frac{\overline{P_1Q_2}}{\operatorname{sen} \tau} \rightarrow \overline{P_1Q_2} = r_{P1} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen}(\lambda - \tau)} \quad (5.28)$$

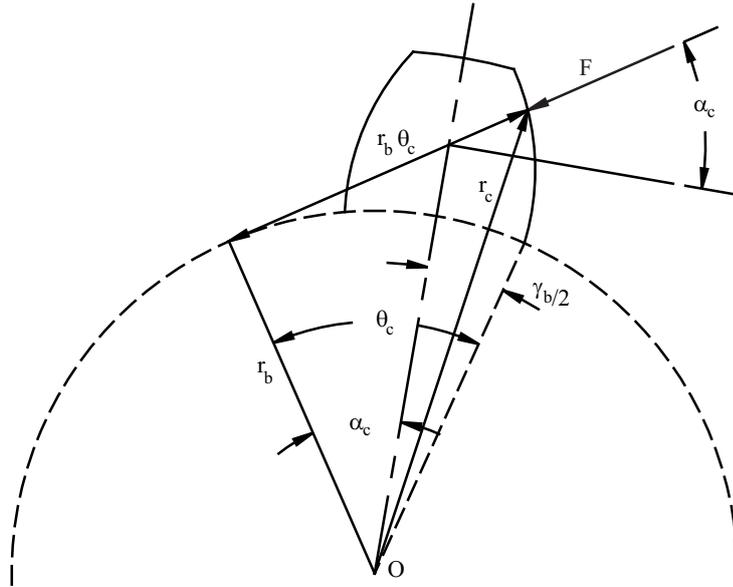


Fig. 5.5: Espesor de la sección crítica, brazo del par y ángulo de carga.

La distancia entre los puntos 1 y  $Q_2$  es:

$$\begin{aligned}
 \overline{1Q_2} &= \overline{P_1Q_2} - \frac{r \cos \alpha - r_{p1}}{\cos \lambda} = \\
 &= \left( r_p - \frac{B}{\text{sen}^2 \lambda} \right) \frac{\text{sen} \tau}{\text{sen}(\lambda - \tau)} - \frac{r_p - B - r_p + \frac{B}{\text{sen}^2 \lambda}}{\cos \varphi} = \quad (5.29) \\
 &= \left( r_p - \frac{B}{\text{sen}^2 \lambda} \right) \frac{\text{sen} \tau}{\text{sen}(\lambda - \tau)} - \frac{1}{\cos \lambda} \frac{B}{\text{tg}^2 \lambda}
 \end{aligned}$$

El espesor del diente en la sección crítica se puede expresar en función de la distancia calculada anteriormente como:

$$\begin{aligned}
 s_F &= 2 \overline{1Q_1} = 2 \overline{1Q_2} \text{sen}(\lambda - \tau) = \\
 &= 2 \left( r_p - \frac{B}{\text{sen}^2 \lambda} \right) \text{sen} \tau - \frac{2}{\cos \lambda} \frac{B}{\text{tg}^2 \lambda} \text{sen}(\lambda - \tau) \\
 &= 2 \left( r_p - \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \text{sen} \varphi)}{\text{sen}^2 \lambda} \right) \text{sen} \tau - \\
 &\quad - 2 \frac{\text{sen}(\lambda - \tau)}{\cos \lambda} \frac{m(h_{a0} - x - r_f + r_f \text{sen} \varphi)}{\text{tg}^2 \lambda} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la distancia entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q_1Q_2} &= \overline{1Q_2} \cos(\lambda - \tau) = \\
 &= \left( r_p - \frac{B}{\text{sen}^2 \lambda} \right) \frac{\text{sen} \tau}{\text{tg}(\lambda - \tau)} - \frac{\cos(\lambda - \tau)}{\cos \lambda} \frac{B}{\text{tg}^2 \lambda} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

y por tanto, la distancia entre los puntos  $O$  y  $Q_1$ , que coincide con la distancia desde el centro del engranaje hasta la sección crítica es

$$\begin{aligned}\overline{OQ_1} &= \overline{OQ_2} - \overline{Q_1Q_2} = \\ &= \left(r_p - \frac{B}{\text{sen}^2\lambda}\right) \frac{\text{sen}\lambda}{\text{sen}(\lambda - \tau)} - \left(r_p - \frac{B}{\text{sen}^2\lambda}\right) \frac{\text{sen}\tau}{\text{tg}(\lambda - \tau)} + \\ &\quad + \frac{\text{cos}(\lambda - \tau)}{\text{cos}\lambda} \frac{B}{\text{tg}^2\lambda}\end{aligned}\quad (5.32)$$

De acuerdo con la figura 5.5, la distancia  $h_F$  es:

$$h_F = \frac{r_b}{\text{cos}\alpha_c} - \overline{OQ_1}\quad (5.33)$$

Teniendo en cuenta el valor de la variable  $\delta$  definida en la Ec. 5.23, que para la sección crítica  $\lambda - \tau = \pi/6$  y que el ángulo de carga  $\alpha_c$  varía para cada posición de engrane y por tanto, este ángulo se puede expresar en función de la variable  $\xi$ ; las expresiones finales del espesor de la sección crítica  $s_F$  y el brazo del par  $h_F$  se expresan como:

$$s_F = 2 \frac{\text{sen}\tau}{\text{sen}\lambda} (r_p \text{sen}\lambda - \delta) - 2 \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{tg}\lambda} \delta\quad (5.34)$$

$$h_F(\xi) = \frac{r_b}{\text{cos}\alpha_c(\xi)} - \frac{r_p \text{sen}(\lambda) - \delta}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \frac{\text{sen}(\tau) (r_p \text{sen}\lambda - \delta)}{\text{sen}(\lambda) \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \frac{\text{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{tg}(\lambda)} \delta\quad (5.35)$$

Para tomar en consideración el efecto de concentración de tensiones en la base del diente, así como el error cometido al aplicar el principio de Saint-Venant en un elemento de reducida longitud, como un diente de engranaje, ISO introduce un factor de corrección de tensiones  $Y_S$ . Este factor de corrección de tensiones tiene en consideración la forma geométrica del pie del diente a través de un parámetro de entalladura denominado  $q_S$ :

$$q_S = \frac{s_F}{2\rho_F}\quad (5.36)$$

donde  $s_F$  es la sección crítica que se ha considerado y  $\rho_F$  es el radio de curvatura del perfil del diente en dicha sección.

Según el desarrollo [38], para un diente tallado con cremallera, el radio de curvatura del perfil del diente en la base en un punto cualquiera caracterizado por el ángulo  $\lambda$ , y

en particular para el valor de  $\lambda$  de la sección crítica, se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$\rho_F = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} \left[ B - \frac{r_p}{\frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + 1 - \frac{r_p}{mr_f \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{tg}^2 \beta - m(h_{a0} - x - r_f)}} \right] \quad (5.37)$$

El factor de corrección de tensiones, definido por ISO [7], se obtiene mediante una expresión empírica en la que interviene el parámetro de entalladura  $q_S$  y el brazo del par que produce la carga aplicada sobre la sección crítica,  $h_F$

$$Y_S = \left( 1, 2 + 0, 13 \frac{s_F}{h_F} \right) q_S \left[ \frac{1}{1, 21 + 2, 3 \frac{h_F}{s_F}} \right] \quad (5.38)$$

Como en el modelo propuesto se ha considerado una distribución de carga no uniforme, las ecuaciones se deben expresar en función de la posición de engrane definida por la variable  $\xi$ , y como el factor de corrección de tensiones depende del brazo del par que produce la carga y este, a su vez, de la posición de engrane, se puede expresar el factor de corrección de tensiones en función de  $\xi$ :

$$Y_S(\xi) = \left( 1, 2 + 0, 13 \frac{s_F}{h_F(\xi)} \right) q_S \left[ \frac{1}{1, 21 + 2, 3 \frac{h_F(\xi)}{s_F}} \right] \quad (5.39)$$

Existe otro factor definido por ISO [7] que toma en cuenta la oblicuidad de las líneas de contacto para engranajes helicoidales:

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120^\circ} \quad (5.40)$$

que, como cabe esperar, toma valor unidad para engranajes rectos.

Con todo ello, finalmente, la tensión nominal en la base del diente se calcula con la ecuación:

$$\sigma_F = \frac{6}{s_F^2 \cos \beta_b} f \cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi) Y_\beta \quad (5.41)$$

Para engranajes rectos la fuerza por unidad de longitud es:

$$f = f(\xi) = \frac{F}{b} R(\xi) \quad (5.42)$$

donde  $R(\xi)$  es la función de reparto de carga que se calculó en el capítulo 3:

$$R(\xi) = \frac{v_i}{\sum_i v_i} \quad (5.43)$$

Y para engranajes helicoidales, en el capítulo 3, se obtuvo que la fuerza por unidad de longitud equivale a:

$$f = f(\xi, \xi_0) = \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta_b}{b} \frac{v(\xi)}{I_v(\xi_0)} F \quad (5.44)$$

### 5.5.1. Tensión crítica en la base del diente para engranajes rectos

De acuerdo con las Ecs. 5.41 y 5.42, la tensión nominal en la base para dentado recto viene dada por:

$$\sigma_F = \frac{6}{s_F^2} \frac{F}{b} [R(\xi) \cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi)] \quad (5.45)$$

Si se agrupan los términos que dependen de  $\xi$  en la función  $\Upsilon(\xi)$ , el máximo de la tensión de rotura en la base y las condiciones críticas de carga corresponderán al valor del parámetro  $\xi$  que haga máxima la función  $\Upsilon(\xi)$ :

$$\Upsilon(\xi) = R(\xi) \cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi) \quad (5.46)$$

#### 5.5.1.1. Tensión crítica en la base del diente para engranajes rectos estándar

Se puede demostrar fácilmente que  $h_F$  aumenta con  $\xi$ , el factor de corrección de tensiones  $Y_S$  decrece con  $\xi$  y el  $\cos \alpha_c$  disminuye con  $\xi$  pero muy ligeramente. Por consiguiente, la función  $[\cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi)]$  puede crecer o decrecer con  $\xi$ , dependiendo de la pendiente de cada curva. Sin embargo se ha comprobado para un elevado número de casos con engranajes de proporciones estándar que la función  $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$  siempre crece a medida que aumenta  $\xi$ . El estudio que se ha llevado a

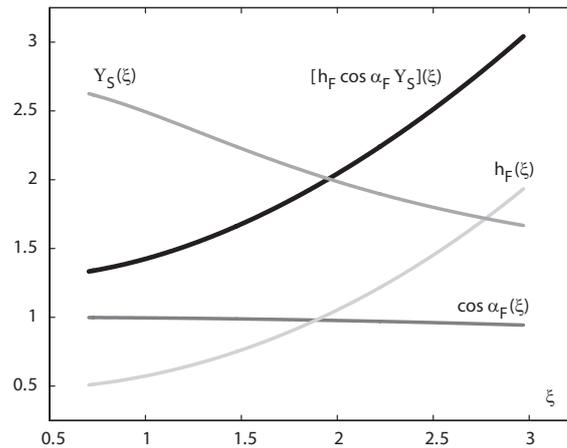


Fig. 5.6: Forma típica de la función  $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$ .

cabo para realizar esta comprobación y para otras comprobaciones posteriores, consiste en un estudio de más de 1500 casos donde se varían, entre un amplio rango de valores, los parámetros geométricos que influyen en la tensión en la base. Todos los casos se corresponden con transmisiones con alto grado de recubrimiento transversal (entre 2 y 3) y en los que no se produce engrane en vacío:

- Número de dientes del piñón  $Z_1$  entre 40 y 100
- Relación de transmisión  $u$  de 1 a 4
- Ángulo de presión  $\alpha_n$  entre  $10$  y  $18^\circ$
- Coeficiente de desplazamiento del piñón  $x_1$  entre  $-0,1$  y  $0,1$
- Coeficiente de desplazamiento de la rueda  $x_2$  entre  $-0,1$  y  $0,1$
- Coeficiente de altura de pie del diente,  $h_{a01}$  y  $h_{a02}$ , entre  $1,2$  y  $1,3$
- Radio de acuerdo del piñón y de la rueda,  $r_{f1}$  y  $r_{f2}$ , entre  $0,2$  y  $0,3$

En todos los casos, la función  $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$  crece con  $\xi$  sin excepción. La figura 5.6 muestra la forma típica de la función  $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$  para engranajes rectos. Según este resultado y si se tiene en cuenta la simetría de la función  $R(\xi)$  respecto del punto medio del intervalo de contacto para engranajes HTCR, como se muestra en la Fig. 3.24, el máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$  debe estar, necesariamente, localizado entre el punto inferior del intervalo superior de contacto doble y el punto superior del intervalo de contacto.

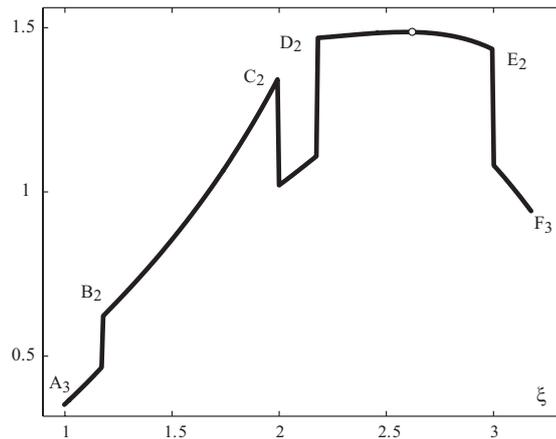


Fig. 5.7: Máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$ : localizado en un punto intermedio del intervalo superior de contacto doble.

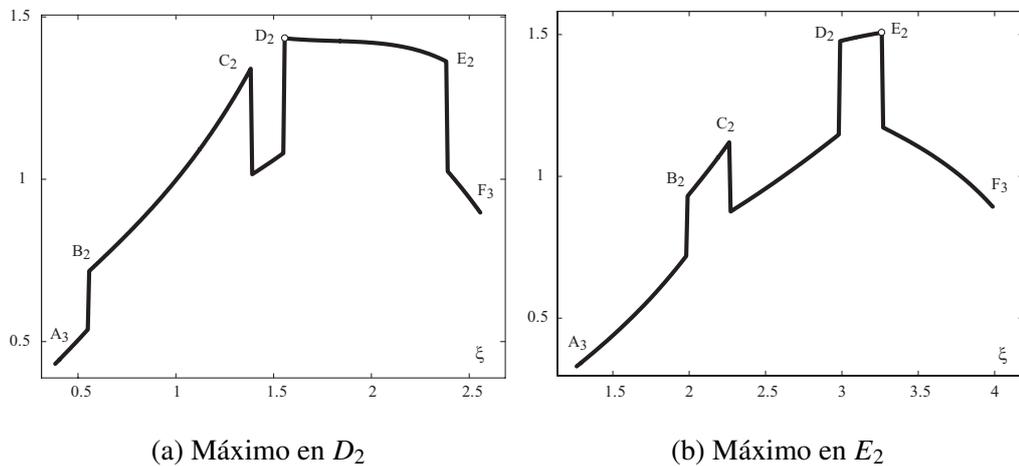


Fig. 5.8: Máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$ : localizado en el punto  $D_2$  y en el punto  $E_2$ .

Sin embargo, analizando el resultado de los más de 1500 casos del estudio, se comprueba que, sin excepción, el máximo siempre está localizado dentro del intervalo superior de contacto doble, entre  $D_2$  y  $E_2$ . Por lo general, el máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$  es un máximo local en un punto intermedio del intervalo, como se muestra en la Fig. 5.7; pero también puede estar situado en los extremos de dicho intervalo. En la figura 5.8 se representa la función  $\Upsilon(\xi)$  cuando el máximo se localiza en el extremo inferior del intervalo superior de contacto doble  $D_2$  y en el superior  $E_2$ .

En la figura 5.9 se muestra la localización del máximo para diferentes valores del grado de recubrimiento transversal y en función del parámetro  $\xi$  del punto inferior

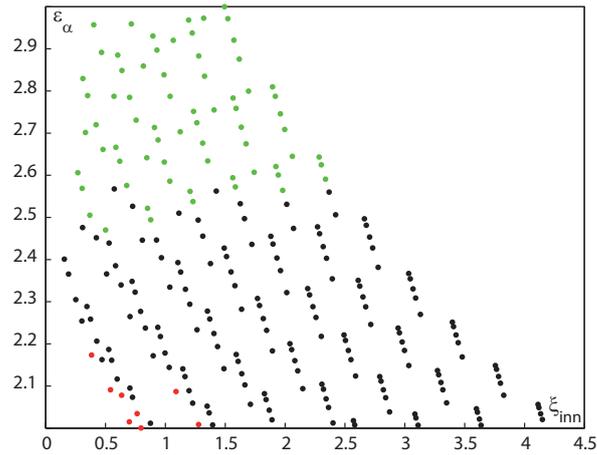


Fig. 5.9: Localización del máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$ .

del intervalo de contacto. El máximo siempre se localiza en el intervalo superior de contacto doble, en concreto, en la mayor parte de los casos, el máximo se sitúa en un máximo local dentro de dicho intervalo (puntos representados en negro) y para el resto de los casos el máximo se desplaza a los extremos del intervalo: al extremo inferior, dado por  $\xi_{out} - 1$  (puntos representados en color rojo), o al extremo superior, punto  $\xi_{inn} + 2$  (representados en verde). Se observa una relación entre el grado de recubrimiento y la localización del máximo: se puede apreciar que para grados de recubrimiento mayores a 2,5, en general, el máximo tiende a situarse en el extremo superior del intervalo superior de contacto y para valores pequeños del grado de recubrimiento y del punto inferior del intervalo de contacto,  $\xi_{inn}$ , el máximo tiende a situarse en el extremo inferior del intervalo superior de contacto doble.

La variación de la función  $\Upsilon(\xi)$  a lo largo del intervalo superior de contacto doble es muy suave para todos los casos, como se observa en las Figs. 5.7 y 5.8; por tanto, podemos tomar cualquier punto dentro del intervalo como el punto donde se localiza el máximo y los errores cometidos serán necesariamente muy pequeños. Para cada uno de los más de 1500 casos se ha dividido el intervalo superior de contacto doble en 5 puntos equidistantes en los cuales se ha calculado la tensión en la base y se ha comparado con la tensión máxima. De acuerdo a los resultados obtenidos, la tensión crítica en la base del diente puede ser calculada con el diente cargado en el punto medio del intervalo

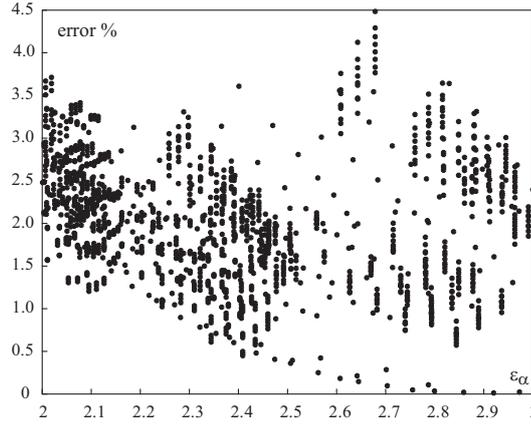


Fig. 5.10: Resultados del estudio del máximo de la función  $\Upsilon(\xi)$ .

superior de contacto doble:

$$\xi_F = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1 + \frac{\xi_{inn} + 2 - (\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1)}{2} = \xi_{inn} + \frac{\varepsilon_\alpha + 1}{2} \quad (5.47)$$

por lo que el reparto de carga en este punto se calcula como:

$$R(\xi_F) = \frac{\cos(b_0(\xi_F - \xi_m))}{\cos(b_0(\xi_F - \xi_m)) + \cos(b_0(\xi_F - \xi_m + 1))} = \frac{\cos\left(\frac{b_0}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{3b_0}{2}\right)} \quad (5.48)$$

y por tanto, la tensión de contacto crítica vendrá dada por:

$$\sigma_F = \frac{6}{s_F^2} \frac{F}{b} [R(\xi_F) \cos \alpha_c(\xi_F) h_F(\xi_F) Y_S(\xi_F)] \quad (5.49)$$

Se ha comparado, para los más de 1500 casos descritos anteriormente, la tensión crítica en la base calculada a partir de las Ecs. 5.47, 5.48 y 5.49 con la tensión máxima obtenida al resolver la Ec. 5.45 mediante técnicas numéricas. El error definido como:

$$\text{error } \% = \frac{\Upsilon(\xi_{max.num}) - \Upsilon(\xi_F)}{\Upsilon(\xi_{max.num})} 100 \quad (5.50)$$

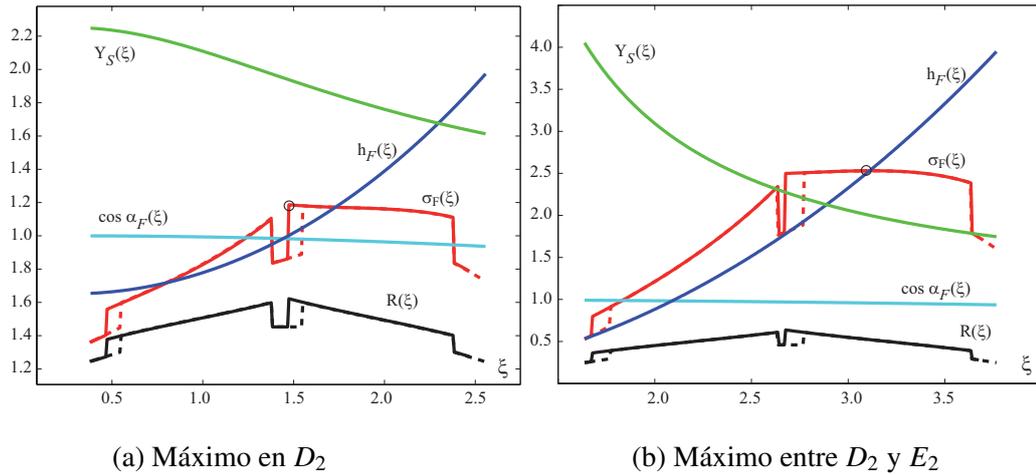
ha sido representado en la Fig. 5.10. Se observa que los errores en la estimación de  $\Upsilon(\xi)$ , y en consecuencia de la estimación del máximo de la tensión en la base, son siempre menores al 4,5 %.

### 5.5.1.2. Tensión de crítica en la base del diente para engranajes rectos no estándar

En este apartado se va a realizar un estudio sobre la tensión crítica en la base que abarca casos de engranajes no estándar. En estos casos se produce una pérdida de simetría de la función reparto de carga respecto del punto medio del intervalo de contacto y un desplazamiento de los puntos singulares. El resto de las funciones que conforman la función  $\Upsilon(\xi)$  no varían y se mantienen iguales que para la misma transmisión en condiciones estándar.

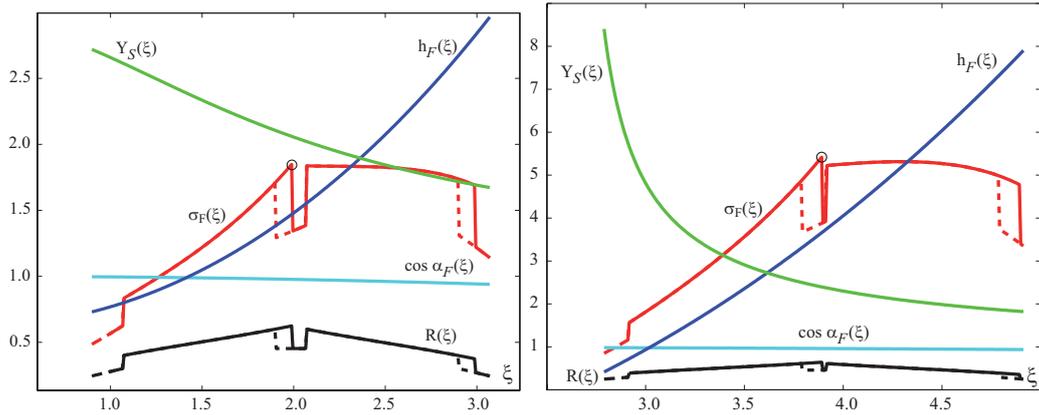
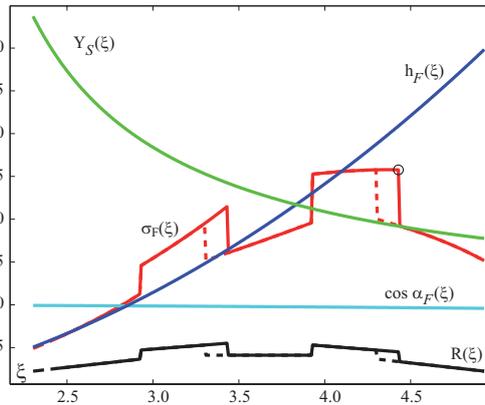
- El acortamiento de la cabeza de piñón o el engrane en vacío en la base de la rueda, produce una disminución del intervalo de contacto o del valor del punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . Esto provoca que los puntos  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 2$  ( $B_2$ ),  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha - 1$  ( $D_2$ ) y el punto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$  ( $F_3$ ) se desplacen hacia la izquierda. El valor que tomará la función  $R(\xi)$  en los puntos  $B_2$  y  $D_2$ , se obtendrá de la prolongación de las líneas rectas de los intervalos inferior y superior de contacto doble respectivamente; y el valor del reparto de carga en el punto  $F_3$  se obtendrá acortando la línea del intervalo superior de contacto triple hasta el valor nuevo de  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . Las tensiones en la base variarán en la misma proporción que la función  $R(\xi)$ , pero dependiendo de los datos de la transmisión puede ocurrir que la localización del máximo se vea modificada o no. En la Fig. 5.11 se observa, para dos transmisiones diferentes, la forma de todas las funciones que componen  $\Upsilon(\xi)$  y la tensión en la base. Para cada gráfica de la Fig. 5.11 la línea punteada representa la transmisión estándar y la línea continua la transmisión con adendo reducido del piñón. Se observa que para ambas transmisiones la reducción del adendo realizada no modifica la localización del máximo.

Por el contrario, el acortamiento de la cabeza de los dientes de la rueda o el engrane en vacío en la base del piñón, produce también una disminución del intervalo de contacto, pero en este caso los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  de la función  $R(\xi)$  se desplazan hacia la derecha, mientras que el resto de los puntos singulares permanecen fijos. La tensión de contacto variará en la misma proporción que la

Fig. 5.11:  $\sigma_F(\xi)$  para acortamiento de la cabeza del piñón.

función reparto de carga, y la localización del máximo podrá verse modificada o no. En la Fig. 5.12 se observan tres gráficas en las cuales se han representado todas las funciones que influyen en  $\sigma_F(\xi)$  para tres transmisiones diferentes. En la gráfica (a) se observa como el máximo pasa de estar situado en el punto  $D_2$  para la transmisión con adendo estándar (línea punteada) al punto  $C_2$  cuando se reduce el adendo de la rueda (línea continua). En la gráfica (b), para la transmisión estándar el máximo se localizaba en un punto dentro del intervalo superior de contacto doble y cuando se reduce el adendo pasa a situarse en el punto  $C_2$ . Y por último en la gráfica (c) el máximo pasa de localizarse en un punto dentro del intervalo superior de contacto doble al punto  $E_2$ .

- El alargamiento de la cabeza del piñón produce un aumento del intervalo de contacto y, por tanto, produce que los puntos singulares  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  de la función  $R(\xi)$  se desplacen hacia la derecha, mientras que los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se mantienen fijos. Por el contrario, cuando el alargamiento se produce en la rueda, el intervalo de contacto también aumenta porque el punto inferior de dicho intervalo disminuye, y produce que los puntos singulares de  $R(\xi)$   $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se desplazan hacia la izquierda mientras que el resto permanecen fijos. Al igual que en los casos anteriores, las tensiones de rotura en la base aumentarán o disminuirán en la misma proporción que la función reparto de carga y, por tanto,

(a) El máximo pasa de  $D_2$  a  $C_2$ (b) El máximo pasa de estar entre  $D_2$  y  $E_2$  a  $C_2$ (c) El máximo pasa de estar entre  $D_2$  y  $E_2$  a  $E_2$ Fig. 5.12:  $\sigma_F(\xi)$  para acortamiento de la cabeza de la rueda.

la localización del máximo de la tensión se puede ver modificada.

- Cuando aumenta o disminuye la distancia entre centros, la función de reparto de carga es la misma que la obtenida para una distancia de centros nominal, pero desplazada un valor igual a la mitad de la variación total del el grado de recubrimiento y recortada o ampliada un valor igual por cada extremo. Por tanto, con un aumento de la distancia, los puntos  $A_3$ ,  $C_2$  y  $E_2$  se desplazan hacia la izquierda y que los puntos  $B_2$ ,  $D_2$  y  $F_3$  se mantienen fijos, mientras que la reducción de la distancia entre centros de operación produce el efecto contrario.

Por consiguiente, la tensión crítica en la base, en rasgos generales, se mantiene dentro del intervalo superior de contacto doble (entre los puntos  $D_2$  y  $E_2$  incluyendo ambos puntos), aunque puede ocurrir que el máximo se desplace al extremo superior

del intervalo inferior de contacto doble, es decir, al punto  $C_2$ . Esto únicamente ocurrirá cuando los puntos  $C_2$  y  $D_2$  estén muy próximos uno del otro, es decir, para grados de recubrimiento transversal ligeramente superiores a 2. Consecuentemente, incluso en estos casos, el valor que toma la función  $\Upsilon(\xi)$  en ambos puntos es muy parecido y, por tanto, el valor del máximo de  $\Upsilon(\xi)$  se podrá seguir calculando en el punto medio del intervalo superior de contacto doble:

$$\xi_F = \xi_{inn} + \frac{\varepsilon_\alpha + 1}{2} \quad (5.51)$$

y la tensión en la base crítica vendrá dada por la misma ecuación que para engranajes estándar:

$$\sigma_F = \frac{6}{s_F^2} \frac{F}{b} [R(\xi_F) \cos \alpha_c(\xi_F) h_F(\xi_F) Y_S(\xi_F)] \quad (5.52)$$

donde  $R(\xi_F)$  se calcula con a partir de las Ecs. 3.55, 3.78 y 3.85 para engranajes con altura del diente modificada o cuando existe engrane en vacío, o con las Ecs. 3.55, 3.88 y 3.89 para distancia entre centros de operación modificada.

Se ha realizado un estudio que abarca más de 300 casos para cada una de las siguientes condiciones: adendo reducido en el piñón (o engrane en vacío en la base de la rueda), adendo reducido de la rueda (o engrane en vacío en la base del piñón), incremento del adendo del piñón, incremento del adendo de la rueda y modificaciones en la distancia entre centros. El resultado de estos estudios revela que los errores en la estimación del máximo de  $\Upsilon(\xi)$  son similares a los obtenidos con transmisiones estándar, incluso el valor máximo del error decrece a 3,5 % en la mayoría de los casos, excepto con grados de recubrimiento transversal entre 2 y 2,05 cuando se disminuye la altura de la cabeza de la rueda o se incrementa la altura de cabeza del piñón, donde el error puede alcanzar el 5 %.

## 5.5.2. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales

De acuerdo con las Ecs. 5.41 y 5.44, la tensión nominal en la base para dentado helicoidal viene dada por:

$$\sigma_F = \frac{6\varepsilon_\beta Y_\beta}{s_F^2 b} F \frac{[v(\xi) \cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi)]}{I_v(\xi_0)} \quad (5.53)$$

que depende no sólo del punto de contacto de cada sección transversal  $\xi$ , sino también de la posición en el ciclo de engrane, que viene caracterizada por  $\xi_0$ . Para simplificar la notación, se agrupan los términos que dependen de  $\xi$  en la función  $\Pi(\xi)$ :

$$\Pi(\xi) = v(\xi) \cos \alpha_c(\xi) h_F(\xi) Y_S(\xi) \quad (5.54)$$

Las condiciones críticas de carga corresponderán con los valores de  $\xi$  y  $\xi_0$  que hacen máxima la Ec. 5.53 y si se define la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$  como:

$$\Sigma(\xi, \xi_0) = \frac{\Pi(\xi)}{I_v(\xi_0)} \quad (5.55)$$

estos valores de  $\xi$  y  $\xi_0$  harán máxima también la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$ .

El máximo de la tensión de rotura en la base será el máximo de la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$ . Sin embargo, no es fácil establecer a priori un criterio de búsqueda, puesto que dependerá del valor de  $\xi$  que hace máxima la función  $\Pi(\xi)$ , del valor de  $\xi_0$  que hace mínima la función  $I_v(\xi_0)$  y del dominio de existencia de ambos, ya que no siempre coinciden en algún punto del engrane, lo que no asegura que el máximo de  $\Sigma(\xi, \xi_0)$  sea el cociente entre el máximo de  $\Pi(\xi)$  y el mínimo de  $I_v(\xi_0)$ . En consecuencia se estudiará, en primer lugar, la localización del máximo de la función  $\Pi$ , a continuación se estudiarán los intervalos de  $I_v$  mínima, para finalmente, determinar la condición de existencia simultánea de ambos valores.

### 5.5.2.1. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales estándar

Se ha realizado un estudio que abarca más de 600 casos en el que se ha variado los parámetros más influyentes (en el epígrafe 5.5.1.1 se demostró que existen parámetros

tales como el radio de acuerdo, la altura de pie del diente y los coeficientes de desplazamiento de piñón y rueda que tienen escasa influencia en la tensión crítica en la base) para asegurar en engranajes estándar que se cubren grados de recubrimiento superiores a 2 y ligeramente inferiores a 3:

- Número de dientes del piñón  $Z_1$  entre 45 y 100
- Relación de transmisión  $u$  de 1 a 4
- Ángulo de presión  $\alpha_n$  entre 10 y 18°
- Ángulo de hélice  $\beta$  entre 10 y 30°

Primeramente, se ha validado el procedimiento utilizado para obtener el valor de  $\lambda$  que define la sección crítica (procedimiento especificado en el epígrafe 5.5). Se ha comprobado que, para el estudio anterior de engranajes helicoidales, el valor obtenido con la Ec. 5.20 en la tercera iteración, con respecto al obtenido al resolver analíticamente el corte de la recta tangente al perfil de acuerdo en la base del diente que forme un ángulo de 30° con el eje del diente, produce en todos los casos un error relativo menor al 0,06 %.

Por tanto, se trata de encontrar el máximo de la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$  mediante un estudio que consiste en tres partes:

- El valor de  $\xi$  que hace máxima la función  $\Pi(\xi)$ .
- El valor de  $\xi_0$  que hace mínima la función  $I_v(\xi_0)$ .
- El dominio de existencia de ambos, que no siempre asegura su coincidencia algún punto de engrane, lo que no permite asegurar que el máximo de  $[\Pi(\xi)/I_v(\xi_0)]$  sea el cociente entre el máximo de  $\Pi(\xi)$  y el mínimo de  $I_v(\xi_0)$ .

#### Máximo de la función $\Pi(\xi)$

Al igual que en engranajes rectos, en engranajes helicoidales la función  $[\cos \alpha_c h_F Y_S](\xi)$  también crece con  $\xi$  y tiene una forma similar a la mostrada en la Fig. 5.6.

La función potencial unitario inverso  $v(\xi)$ , representada en la Fig. 3.10, es simétrica respecto del punto medio del intervalo de contacto  $\xi_m = \xi_{im} + \varepsilon_\alpha/2$  en el que

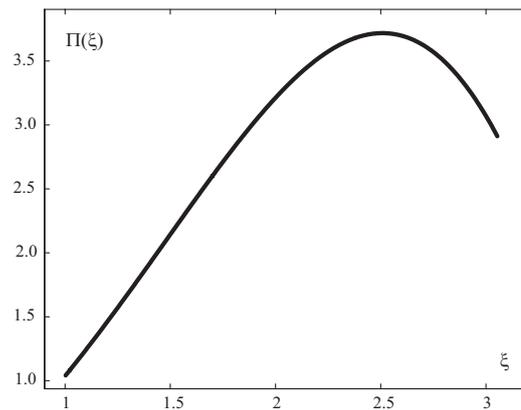


Fig. 5.13: Forma típica de la función  $\Pi(\xi)$ .

presenta un máximo. Por tanto, la función  $v(\xi)$  es creciente en el intervalo  $[\xi_{inn}, \xi_m]$  y decreciente en el intervalo  $[\xi_m, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$ , es decir, tiene derivada positiva en el primer intervalo, toma el valor cero en el punto medio  $\xi_m$  y es negativa entre  $[\xi_m, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$ .

Por tanto, cabe esperar que el máximo de la función  $\Pi(\xi)$  se localize necesariamente entre el punto medio del intervalo de contacto  $\xi_m$  y el punto superior del intervalo de contacto  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ . En la figura 5.13 se muestra la forma típica de la función  $\Pi(\xi)$  y se observa que el máximo de la función tiende a localizarse en un punto intermedio entre  $[\xi_m$  y  $\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$ .

De los mas de 600 casos analizados, con los que se ha cubierto un rango de valores del grado de recubrimiento transversal desde 2,01 a 2,99, el máximo de  $\Pi(\xi)$  se localizó siempre dentro del intervalo:

$$\xi_{\max} \in [\xi_{inn} + 0,70\varepsilon_\alpha, \xi_{inn} + 0,74\varepsilon_\alpha] \quad (5.56)$$

La figura 5.14 muestra el resultado de este estudio. A simple vista se observa que el máximo se localiza aproximadamente en la mitad del intervalo dado en la Ec. 5.56. Pero para fijar exactamente el punto de ese intervalo donde el error es mínimo, se divide el intervalo en 4 puntos equidistantes y se analizan los errores relativos entre el máximo de la función y el valor de la función en dichos puntos, evaluando el error

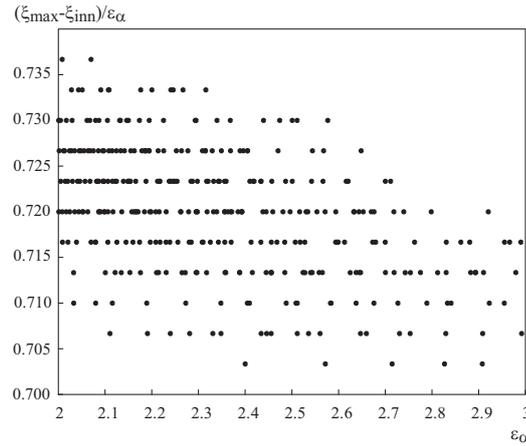


Fig. 5.14: Resultados del estudio de localización del máximo de la función  $\Pi(\xi)$ .

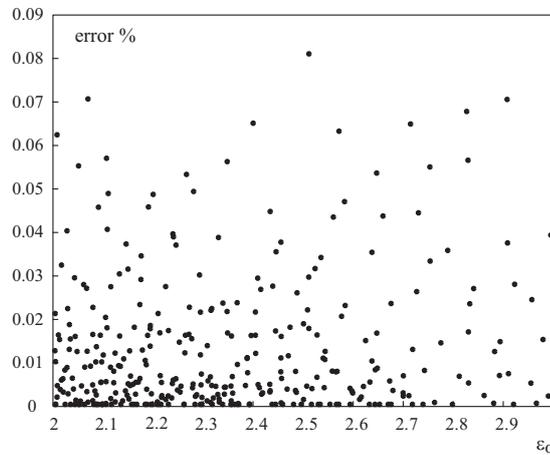


Fig. 5.15: Error en la determinación del máximo de la función  $\Pi(\xi)$  dado por la Ec. 5.58.

como:

$$\text{error \%} = \frac{\Pi(\xi_{max\_num}) - \Pi(\xi_{max\_prop})}{\Pi(\xi_{max\_num})} 100 \quad (5.57)$$

El punto en el que se cometen los errores más pequeños es:

$$\xi_{max} = \xi_{inn} + 0,72\varepsilon_{\alpha} \quad (5.58)$$

Los errores en este punto son siempre inferiores al 0,1 % según lo representado en la Fig. 5.15. Si el potencial unitario inverso se calcula mediante la integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad en lugar de hacerlo con la ecuación propuesta aproximada, el error se incrementa ligeramente hasta un 2 %.

### Mínimo de la función $I_v(\xi_0)$

La función  $I_v(\xi_0)$  para engranajes HTCR estándar está definida en la Ec. 3.73 y toma diferentes formas dependiendo de si la suma de las partes decimales del grado de recubrimiento transversal y en el salto es menor o mayor que 1, como se representa en la Fig. 4.8.

Tanto si  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$  ó si  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$  existen unos intervalos donde la función  $I_v$  permanece casi constante alrededor de valores cercanos al mínimo. Estos intervalos son  $[\xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta, \xi_{inn} + 1]$  para  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$  y  $[\xi_{inn}, \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta - 1]$  para  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$ . Además, en ambos casos, el punto  $\xi_{inn}$  también pertenece al intervalo de mínima  $I_v$ . Consecuentemente, en este caso se puede afirmar que:

$$[I_v(\xi_0)]_{\min} = I_v(\xi_{inn}) \quad (5.59)$$

### Condición de simultaneidad

Es evidente que si existe un punto con  $\xi = \xi_{\max}$  durante el intervalo de mínima  $I_v$  se cumplirá que:

$$\Sigma(\xi, \xi_0)_{\max} = \left[ \frac{\Pi(\xi)}{I_v(\xi_0)} \right]_{\max} = \frac{\Pi_{\max}}{I_{v\min}} \quad (5.60)$$

Esta claro también que la simultaneidad está asegurada si  $\varepsilon_\beta > 1$ , porque en este caso se puede encontrar un punto de contacto con un valor de  $\xi$  situado dentro del intervalo de contacto  $[\xi_{inn}, \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha]$  para cualquier posición del ciclo de engrane, y en particular durante el intervalo donde  $I_v$  es mínima.

En los casos en los que  $\varepsilon_\beta < 1$ , se debe estudiar la condición de simultaneidad, con la ayuda de los mapas de contacto, para ambos casos (para  $d_\alpha + d_\beta$  mayor o menor que 1). La figura 5.16 muestra el mapa de contacto para engranajes helicoidales con  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$ ,  $d_\alpha > d_\beta$  y  $\varepsilon_\beta < 1$ . Las zonas grises representan la contribución de cada diente a la línea de contacto en cada posición de engrane, la posición de engrane se representa por la variable  $\xi_0$  en el eje de ordenadas. Las zonas grises oscuras representan las condiciones de engrane dentro del intervalo de mínima  $I_v$ . La simultaneidad estará garantizada cuando existe al menos un punto con ordenada

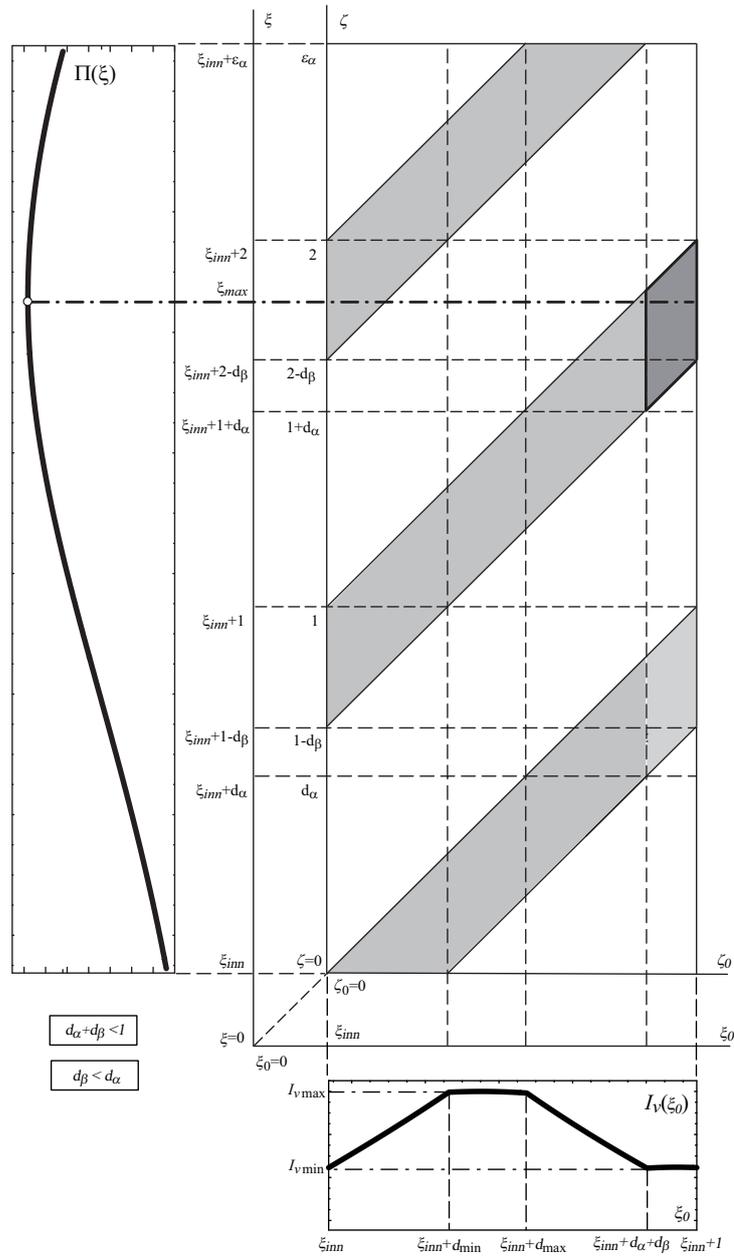


Fig. 5.16: Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$ .

$\xi = \xi_{\max}$  en esta zona. De acuerdo con la Fig. 5.16, para  $d_\alpha + d_\beta \leq 1$  el intervalo de mínima  $I_v$  es:

$$\xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta \leq \xi_0 \leq \xi_{inn} + 1 \tag{5.61}$$

mientras que la contribución del diente previo en la línea de contacto viene dado por:

$$\xi_0 + 1 - \varepsilon_\beta \leq \xi \leq \xi_0 + 1 \quad (5.62)$$

por consiguiente, la simultaneidad esta asegurada si el máximo de  $\Pi(\xi)$ ,  $\xi_{\max}$ , está contenido en el intervalo:

$$\xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta + 1 - \varepsilon_\beta \leq \xi_{\max} \leq \xi_{inn} + 2 \quad (5.63)$$

que reemplazando la Ec. 5.58 y teniendo en cuenta que  $\varepsilon_\beta < 1$  y por tanto  $\varepsilon_\beta = d_\beta$  resulta:

$$\xi_{inn} + d_\alpha + 1 \leq \xi_{inn} + 0,72\varepsilon_\alpha \leq \xi_{inn} + 2 \quad (5.64)$$

La condición de la izquierda se puede expresar como  $d_\alpha < 1,571$ . Esta condición se verifica siempre porque  $d_\alpha$  tiene que ser menor que 1. Sin embargo, la condición de la derecha implica que  $d_\alpha < 0,778$ , condición que no tiene porque cumplirse.

Para  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$  se obtienen resultados similares. En este caso el mapa de contacto se representa en la Fig. 5.17. En este caso el intervalo donde la función  $I_v$  toma el valor mínimo es:

$$\xi_{inn} \leq \xi_0 \leq \xi_{inn} + d_\alpha + d_\beta - 1 \quad (5.65)$$

La contribución del diente previo en la línea de contacto viene dado por el intervalo:

$$\xi_0 + 2 - \varepsilon_\beta \leq \xi \leq \xi_0 + 2 \quad (5.66)$$

por tanto, teniendo en cuenta la Ec. 5.58, la simultaneidad esta asegurada si el máximo de  $\Pi(\xi)$  esta contenido en el intervalo:

$$\xi_{inn} + 2 - \varepsilon_\beta \leq \xi_{inn} + 0,72\varepsilon_\alpha \leq \xi_{inn} + d_\alpha + \varepsilon_\beta + 1 \quad (5.67)$$

La condición de la izquierda se puede expresar como  $0,28\varepsilon_\alpha < d_\alpha + d_\beta$ , que siempre se verifica puesto que  $\varepsilon_\alpha < 3$  y  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$ . Por el contrario, la condición de la derecha se puede escribir como  $\varepsilon_\beta > 1 - 0,28\varepsilon_\alpha$ , que no tiene porque verificarse necesariamente.

Matemáticamente, la búsqueda del máximo en situaciones de no simultaneidad no es fácil de resolver, pero se puede encontrar una solución aproximada al problema,

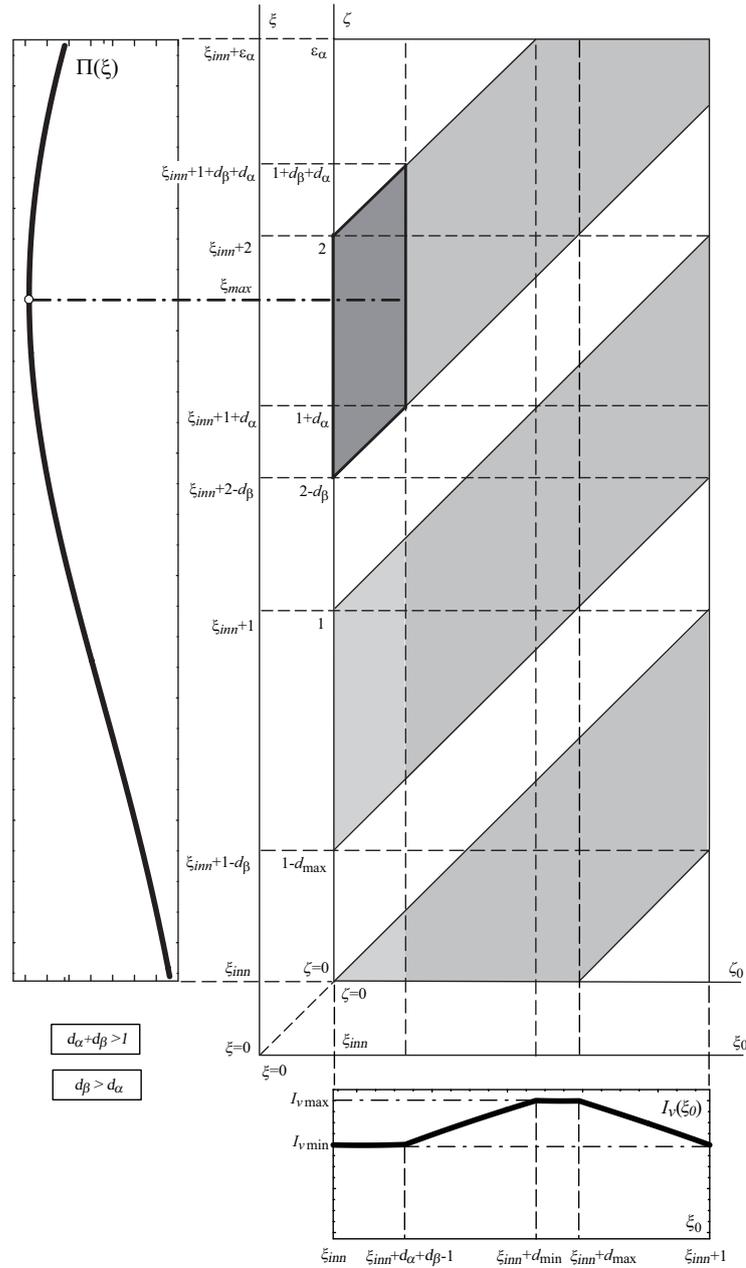


Fig. 5.17: Mapa de contacto para engranajes helicoidales HTCR con  $d_\alpha + d_\beta \geq 1$ .

válida para diseños preliminares o con fines de normalización. En este sentido, es importante tener en cuenta que para los casos en los que no existe simultaneidad,  $\xi_{max}$  es siempre un máximo local, en el que la derivada de la función  $\Pi(\xi)$  es siempre igual a cero. Esto significa que para puntos no muy lejanos a este máximo local, es decir, para valores donde  $|\xi_{max} - \xi|$  toma valores pequeños, el valor que toma  $\Pi(\xi)$  difiere

muy poco del valor que toma en  $\Pi(\xi_{\max})$ . Por consiguiente, será posible encontrar un punto dentro del dominio de contacto cuyo valor de  $\xi_0$  esté incluido en el intervalo de mínima  $I_v$  y cuyo valor de  $\xi$  se encuentre lo suficientemente cercano al máximo local  $\xi_{\max}$ , como se observa en las Figs. 5.16 y 5.17, y que por tanto en este punto  $I_v = I_{v\min}$  y  $\Pi \approx \Pi_{\max}$ .

Por consiguiente, se puede demostrar fácilmente que, si se usa la Ec. 5.60 para los casos de no simultaneidad el error inducido será pequeño y siempre en el sentido de la seguridad. De este modo, la tensión crítica para rotura en la base en engranajes helicoidales HTCR estándar se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_F = \frac{6 \varepsilon_\beta Y_\beta}{s_F^2 b} F \frac{[v(\xi_{\max}) \cos \alpha_c(\xi_{\max}) h_F(\xi_{\max}) Y_S(\xi_{\max})]}{I_v(\xi_{inn})} \quad (5.68)$$

donde

$$\xi_{\max} = \xi_{inn} + 0,72\varepsilon_\alpha \quad (5.69)$$

El error inducido de suponer que  $(\Pi(\xi)/I_v(\xi_0))_{\max} = \Pi_{\max}/I_{v\min}$  no se presenta siempre, puesto que la simultaneidad esta asegurada bajo ciertas condiciones como  $\varepsilon_\beta > 1$ . Sin embargo, si se presenta, aparece siempre en combinación con el error en la estimación del máximo de  $\Pi(\xi)$  que se presentó en la Fig. 5.15. Obviamente, el efecto de ambos errores en el valor final de  $(\Pi/I_v)_{\max}$  puede ser aditivo o sustractivo, dependiendo de los casos, pero no tendría ningún sentido estimar ambos errores por separado para posteriormente sumarlos, puesto que el resultado no se correspondería con el error total. Será mucho mas indicativo calcular directamente el error total.

De acuerdo con esto, se ha calculado el error en la estimación del máximo de  $\Sigma(\xi, \xi_0)$  con la Ec. 5.60 con respecto al valor teórico obtenido de maximizar la Ec. 5.55 mediante técnicas numéricas según:

$$\text{error } \% = \frac{\left(\frac{\Pi}{I_v}\right)_{\max.\text{num}} - \frac{\Pi(\xi_{\max.\text{prop}})}{I_v(\xi_{inn})}}{\left(\frac{\Pi}{I_v}\right)_{\max.\text{num}}} 100 \quad (5.70)$$

El resultado obtenido al evaluar este error para los más de 600 combinaciones posibles dada en el estudio anterior se muestra en la Fig. 5.18. El error típico oscila ente

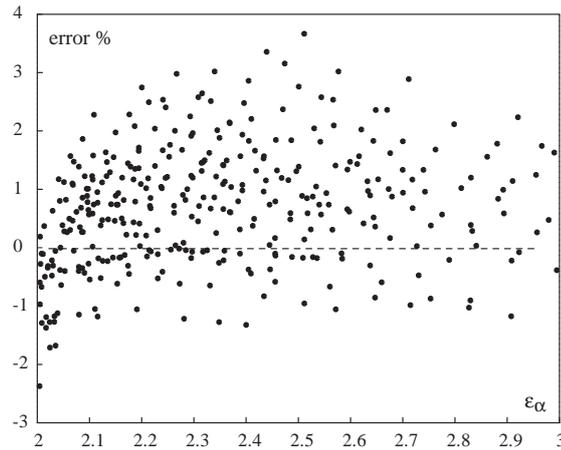


Fig. 5.18: Error en la determinación del máximo de la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$  dado por la Ec. 5.70.

el  $-1,5\%$  al  $3,5\%$ , aunque para los valores más bajos del grado de recubrimiento transversal entre 2 y 2,05) los errores negativos pueden alcanzar el  $-2,5\%$ . Sin embargo, estos niveles de error para cálculos de resistencia son muy aceptables.

#### 5.5.2.2. Tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales no estándar

El procedimiento seguido para obtener la tensión nominal en la base del diente para engranajes helicoidales no estándar es el mismo que para engranajes estándar.

Se han realizado varios estudios, cada uno de ellos formado por los más de 600 casos simulados para engranajes helicoidales HTCR en condiciones estándar, definidos en el epígrafe anterior (5.5.2.1), pero con la excepción de que en cada uno de ellos se han modificado los siguientes parámetros para establecer condiciones no estándar:

- Estudio 1a:  $h_{a1} = 0,9$
- Estudio 1b:  $h_{a2} = 0,9$
- Estudio 2a:  $h_{a1} = 1,1$
- Estudio 2b:  $h_{a2} = 1,1$
- Estudio 4a:  $C = r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2) + 0,1m$

Para diferentes alturas del piñón y de la rueda, o engrane en vacío en la base de cualquiera de los engranajes, la función  $v(\xi)$  pierde la simetría, y será exactamente

igual a la obtenida para la misma transmisión en condiciones estándar pero truncada o alargada por uno o ambos lados, dependiendo del caso. El máximo de la función  $\Pi(\xi)$  se localizará entre el punto medio del intervalo de contacto ficticio  $\xi = \xi'_{inn} + \varepsilon'_\alpha/2$  y el punto exterior del intervalo de contacto  $\xi = \xi'_{inn} + \varepsilon'_\alpha = \xi_{inn} + \varepsilon_\alpha$ .

Para cada uno de los estudios, se ha representado la localización del máximo de la función  $\Pi(\xi)$ . Obviamente, si se utilizan los valores ficticios de los parámetros, se obtendrán los mismos resultados que para engranajes estándar, es decir, que el máximo de  $\Pi(\xi)$  se localiza dentro del siguiente intervalo:

$$\frac{\xi_{\max} - \xi'_{inn}}{\varepsilon'_\alpha} \in [0,7 \div 0,74] \quad (5.71)$$

y, puesto que se ha demostrado que los errores serían pequeños, se podría utilizar un valor aproximado del parámetro del perfil de evolvente para las condiciones críticas de carga:  $\xi'_{inn} + 0,72\varepsilon'_\alpha$ .

Sin embargo, si se utilizan los valores reales de los parámetros, el intervalo donde se localiza el máximo se desplazará hacia valores mayores cuando el adendo del piñón disminuya (o exista engrane en vacío en la base del diente de la rueda) o cuando el adendo de la rueda aumente, el intervalo se desplazará hacia valores menores cuando el adendo del piñón aumente o cuando el adendo de la rueda se reduzca (o exista engrane en vacío en la base del piñón) y el intervalo se mantendrá para modificaciones de la distancia entre centros. Sin embargo, si se mantiene la aproximación dada por la Ec. 5.58 para la localización del máximo de  $\Pi(\xi)$  ( $\xi_{\max} = \xi_{inn} + 0,72\varepsilon_\alpha$ ), los errores aumentan de forma prácticamente inapreciable sobre el error final de la tensión y se tiene una serie de ventajas, puesto que se simplifica la notación al utilizar la misma Ec. 5.58 para la localización del máximo para engranajes estándar y no estándar y se evita que la posibilidad de que el máximo se calcule en un punto ficticio que podría no existir. Los errores en la localización del máximo de la función  $\Pi(\xi)$  al usar la Ec. 5.58 son en todo momento menores al 0,5 %.

Los intervalos en donde la función  $I_v(\xi_0)$  alcanza su valor mínimo son exactamente iguales que para engranajes estándar y se han definido en el epígrafe 5.5.2.1.

Puesto que se ha utilizado la misma ecuación para la localización del máximo

de la función  $\Pi(\xi)$  que engranajes estándar y como los intervalos de mínima  $I_v(\xi_0)$  son los mismos, las condiciones de simultaneidad y las conclusiones obtenidas para engranajes estándar son similares para engranajes no estándar. Así pues, la tensión crítica para rotura en la base en engranajes helicoidales HTCR no estándar se puede calcular mediante la Ec. 5.68, donde el punto  $\xi_F$  se calcula a partir de la Ec. 5.58.

Para engranajes no estándar el error en la estimación del máximo de la función  $\Sigma(\xi, \xi_0)$ , y por tanto el error en la estimación de la tensión crítica en la base, se encuentra en un rango del  $-2,0\%$  al  $4,0\%$ . Para distancias entre centros diferentes a la nominal, el error se mantiene al mismo nivel que para engranajes estándar.

## 5.6. Validación de la tensión de rotura en la base mediante el MEF

Para validar el modelo de resistencia a flexión presentado anteriormente, modelo del mínimo potencial elástico que designaremos por las siglas MEP (*minimum elastic potential*), se ha realizado un estudio comparándolo con la distribución de tensiones en la base del diente obtenido mediante el modelo, explicado en el apartado 3.6, resuelto por la técnica de elementos finitos (MEF).

### 5.6.1. Tensión de rotura en la base para engranajes rectos

En este apartado se van a validar los resultados de tensión en la base para los ejemplos dados en el epígrafe 3.6.4. El primero de ellos se trata de un ejemplo de engranaje recto convencional con modificación de la distancia entre centros. Se ha obtenido la distribución de tensión en la base para las mismas 15 posiciones de contacto simuladas en los capítulos 3 y 4, donde se verificó el modelo de distribución de carga y el modelo de presión superficial.

Para cada simulación, se define un *path*, en la zona donde la tensión en la base se hace máxima, mediante la elección de dos nodos extremos de cada cara del diente. ANSYS obtiene la distribución de tensiones a lo largo de dicho *path*. La figura 5.19

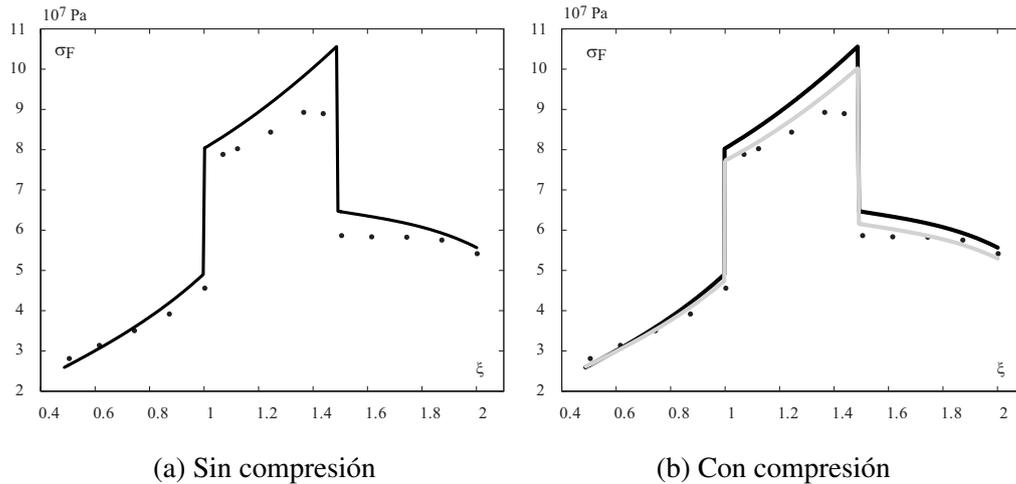


Fig. 5.19: Comparación de la tensión de rotura en la base entre modelo analítico (línea continua) y el obtenido por MEF. (punteado).

(a) muestra la comparación entre la tensión en la base del diente obtenida por MEP y los resultados proporcionados por el análisis de MEF para cada una de las 15 posiciones de contacto simuladas. Se puede observar una tendencia similar, pero la tensión obtenida con MEF es un poco menor que la obtenida mediante MEP. Esto es debido a la tensión en la base del diente por MEP, de acuerdo con la norma ISO 6336-3 [7], se calcula a partir de la componente de flexión de la tensión, sin tener en cuenta la compresión (Ec. 5.1), mientras que *ANSYS* calcula la tensión teniendo en cuenta todas las componentes. Como el esfuerzo de compresión es negativo, la tensión en la base del diente por MEF es menor que la del modelo desarrollado. De hecho, si la tensión de MEP se modifica considerando el esfuerzo de compresión producido por la componente radial de la carga, los valores modificados obtenidos encajan con mayor precisión con los valores para el modelo resuelto por MEF, como se muestra en la Fig. 5.19 (b).

El segundo ejemplo consiste en un engranaje recto HPCR con modificación de la distancia entre centros de operación. De nuevo, la tensión obtenida por MEP tiene la misma tendencia que la obtenida por el método de elementos finitos, pero con valores superiores. Si se tiene en cuenta el efecto de la compresión, la tensión en la base del diente con el modelo propuesto encaja con bastante exactitud a la tensión obtenida por

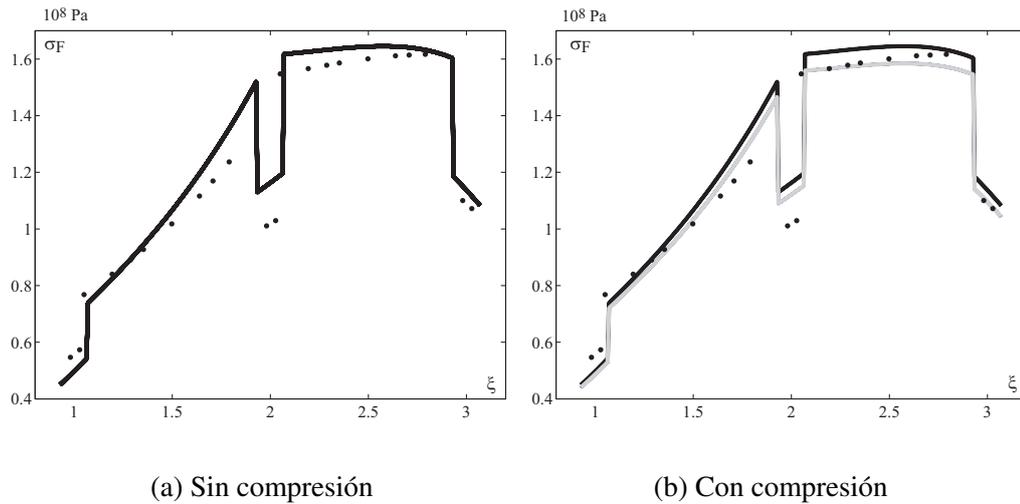


Fig. 5.20: Tensión de rotura en la base para engranajes rectos HTCR con modelo analítico (línea continua) y con el obtenido por M.E.F. (punteado).

la técnica de elementos finitos, como se muestra en la Fig. 5.20.

### 5.6.2. Tensión de rotura en la base para engranajes helicoidales

El objetivo de este apartado es comparar el modelo de resistencia a flexión dado en el epígrafe anterior para una transmisión de engranajes helicoidales con distancia entre centros diferente a la nominal y con adendo reducido en el piñón y en la rueda. Los datos de esta transmisión se dieron en el apartado 3.6.5, donde se validó el modelo de distribución de carga para transmisiones de engranajes helicoidales no estándar.

La tensión de von Mises obtenida por el análisis de MEF no es la misma tensión de flexión en la sección del diente calculada por la norma ISO 6336-3 [7] o por el modelo MEP, y las diferencias entre ellas son más altas que en los engranajes de dientes rectos, debido a la naturaleza en tres dimensiones de la distribución de tensión. Por ello ha sido necesaria una conversión de las tensiones de von Mises dadas por *ANSYS* a la tensión dada en los mismos ejes de coordenadas que se obtienen con la norma ISO y por el modelo MEP.

En la figura 5.21 se muestra, para un engranaje helicoidal, la comparación de la tensión en la base del diente obtenida con el modelo propuesto por MEP y los resultados proporcionados por el análisis mediante MEF, en 17 secciones transversales

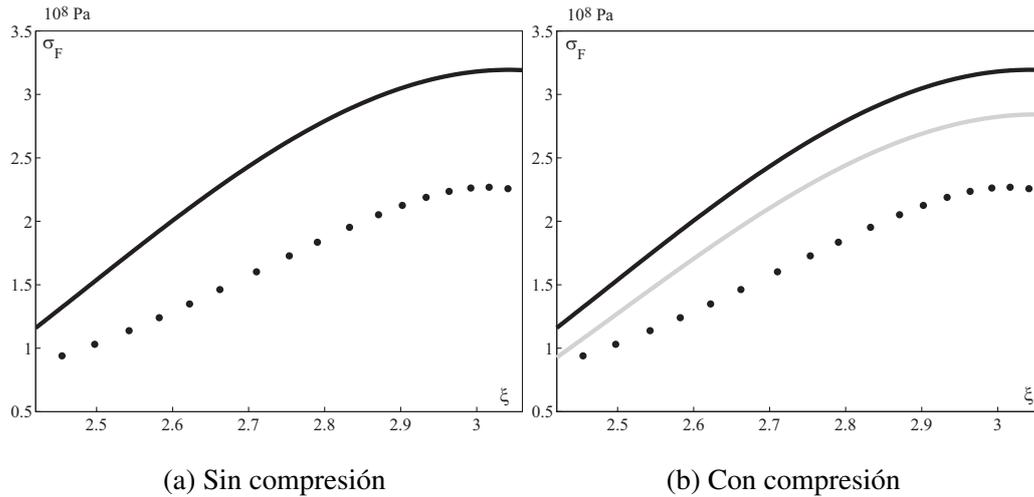


Fig. 5.21: Tensión de rotura en la base para engranajes helicoidales no estándar con modelo analítico (línea continua) y con el obtenido por M.E.F. (punteado).

correspondientes a 17 puntos de engrane a largo de la línea de contacto. En este caso, aunque los resultados tienen buena precisión, las discrepancias son mayores que para dientes rectos, pero hay algunos aspectos que deben ser evaluados. Por un lado, se ha obtenido un efecto de borde en los límites de la línea de contacto, lo que conlleva una pérdida de información en los extremos puesto que ha sido necesario eliminar estos datos. Además, según se observaba en la Fig. 4.20, las tensiones de contacto obtenidas para engranajes helicoidales son mayores en el modelo MEF, y por tanto las tensiones en la base resultan ligeramente inferiores, ya que al final la suma de todas ellas deben de ser iguales para ambos modelos.

## 5.7. Comparación de la tensión de rotura en la base con ISO 6336-3

El objetivo de este capítulo es contrastar los resultados obtenidos con el modelo propuesto en el apartado 5.5 con respecto al método dado por la norma ISO [7]. La norma ISO calcula la tensión crítica en la base de un engranaje recto con la Ec. 5.7 y establece que, para engranajes con alto grado de recubrimiento transversal, la tensión crítica tiene lugar con la totalidad de la carga actuando en el punto inferior de contacto

triple, es decir, con la totalidad de la carga actuando en el punto  $\xi_{inn}$ . Sin embargo, en el modelo propuesto en el epígrafe 5.5.1.1, se establecía que las condiciones críticas de carga para un engranaje recto HTCR se calculan con la carga actuando en el punto medio del intervalo de contacto doble denominado  $\xi_F$ , Ec. 5.48, y la tensión crítica venía dada por la Ec. 5.49.

Se ha realizado un estudio para comprobar el grado de coincidencia entre la tensión crítica con el método ISO y con el método propuesto anteriormente. Para ello se han considerado valores de los parámetros de diseño contenidos en los siguientes rangos:

- Número de dientes del piñón entre 40 y 60
- Ángulo de presión entre 12° y 18°
- Relación de transmisión entre 1 y 3
- Coeficientes de desplazamiento del piñón y de la rueda entre -0,1 y 0,1 para ambos

En la figura 5.22 se muestran las diferencias, para el estudio previo, en la tensión crítica en la base entre ambos modelos. El error se ha calculado como:

$$\text{error } \% = \frac{\sigma_F(\xi_{inn})_{ISO} - \sigma_F(\xi_F)_{prop}}{\sigma_F(\xi_{inn})_{ISO}} 100 \quad (5.72)$$

Se observa que los errores se sitúan en un rango bastante amplio, entre el -45 % y el 25 %, puesto que los valores de tensión crítica según el método ISO se ven fuertemente influenciados por los valores de los parámetros de diseño de cada transmisión. Las tensiones obtenidas con ISO pueden ser incluso un 45 % inferiores a las obtenidas con el método propuesto, lo que significa que, con el método propuesto por ISO, los errores pueden llegar hasta tal límite que no siempre el error cometido sea en el sentido de la seguridad. De hecho, se comprueba que esto ocurre en muchas ocasiones para transmisiones con grado de recubrimiento hasta 2,5, que justamente es el rango de grado de recubrimiento establecido en la norma.

Para engranajes helicoidales, la norma ISO [7] calcula la tensión crítica en la base con la misma ecuación que para engranajes rectos, Ec. 5.7, pero utilizando los datos de la geometría del engranaje recto virtual equivalente y establece que se calculará,

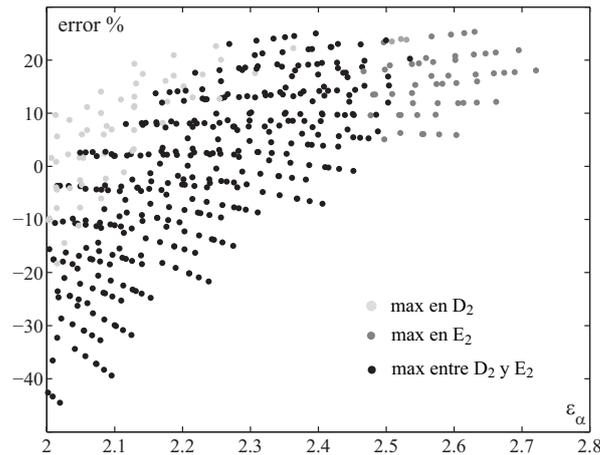


Fig. 5.22: Comparación entre la tensión de rotura en la base calculada por el método de ISO y MEP para engranajes HTCR .

al igual que para engranajes rectos, con la totalidad de la carga actuando en el punto inferior de contacto triple. Sin embargo, el método propuesto en el epígrafe 5.5.2, establece que la tensión crítica se da con la carga correspondiente a la distribución de tensión en el punto  $\xi_{inn} + 0,72\varepsilon_\alpha$  y se calcula con la Ec. 5.68.

Para establecer los niveles de error se ha realizado un estudio similar para engranajes helicoidales HTCR, donde se han establecido los siguientes rangos para los parámetros de diseño:

- Número de dientes del piñón: 40, 50 y 60
- Ángulo de presión entre  $12^\circ$  y  $16^\circ$
- Relación de transmisión entre 1 y 3
- Coeficientes de desplazamiento del piñón y de la rueda entre  $-0,1$  y  $0,1$  para ambos
- Ángulo de hélice entre  $15^\circ$  y  $25^\circ$

Con este estudio se ha verificado que, al igual que para engranajes rectos, las tensiones críticas en la base con el método ISO no son demasiado fiables, puesto que se llegan a cometer errores bastante elevados y no siempre en el sentido de la seguridad. En este caso, como se observa en la Fig. 5.23, los errores, calculados con la Ec. 5.72, se establecen entre un rango del  $-30\%$  y el  $50\%$ .

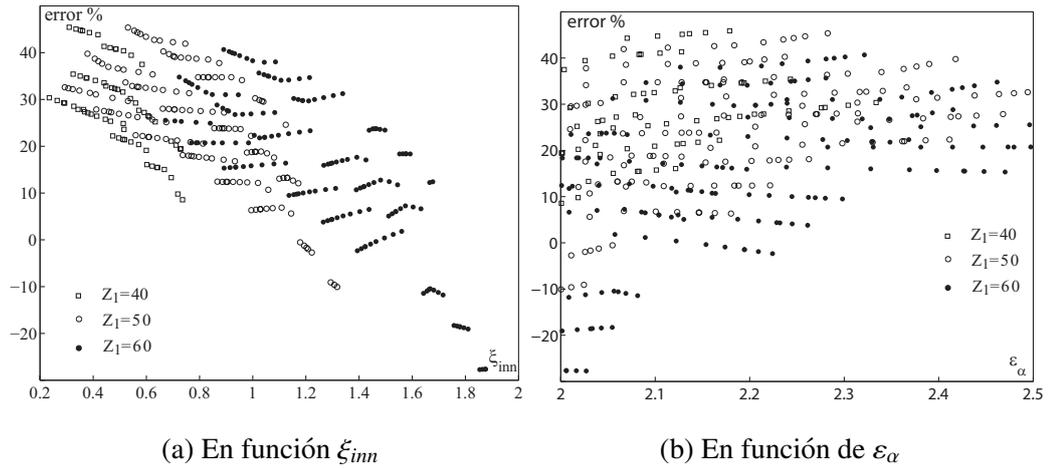


Fig. 5.23: Comparación entre la tensión de rotura en la base calculada por el método de ISO y MEP para engranajes helicoidales HTCR.

Todo lo anterior hace evidente que no se ha realizado hasta la fecha un estudio suficientemente profundo del tema y que lo propuesto en la norma ISO no es del todo consistente. Si se analizan las revisiones de la norma desde el año 1996 hasta que se publicó la última versión en 2006, se observa que hubo varias modificaciones, bastante dispares entre sí, en las recomendaciones que la norma hacía sobre este tema, lo que demuestra que en el fondo el método propuesto no se encuentra claramente establecido.



# Capítulo 6

## Modelo de rendimiento

### 6.1. Introducción

El estudio de las pérdidas de energía en un sistema mecánico constituye cada vez más un importante aspecto que influye en el diseño del mismo, además de los requisitos de resistencia o durabilidad. El rendimiento de las transmisiones de engranajes puede tener una influencia significativa no sólo en los costes de funcionamiento directos y en el ciclo de vida del sistema, sino también en el impacto ambiental asociado a la pérdida de potencia. El rendimiento de los engranajes de perfil de evolvente es generalmente alto, pero fenómenos de fricción sin control pueden dar lugar a la generación de defectos superficiales; que surgen tras períodos de funcionamiento más cortos de los esperados. Estos defectos producen mayores pérdidas por fricción, además de ruido, vibraciones y generación de calor durante el funcionamiento de la transmisión, lo que puede provocar unas condiciones muy desfavorables del mecanismo.

Los sistemas de transmisión de engranajes son muy utilizados en la industria del automóvil, pero debido al aumento de precio de los combustibles y a reglamentos más rigurosos sobre el medio ambiente, las pérdidas en estos sistemas se ha convertido en un importante tema de investigación. Una de las principales fuentes de pérdidas viene de la caja de cambios, y aunque las pérdidas de potencia de cada par de engranajes son bastante pequeñas y puede tener una eficiencia de más del 99 %, la pérdida de

potencia aumenta significativamente cuando se utiliza una reducción de engranajes multi-etapa. El rendimiento mecánica de un tren de engranajes formado por pares de engranajes en serie es el producto de el rendimiento de los engranajes individuales. Por tanto, un enfoque muy importante para incrementar el rendimiento de los sistemas de transmisión es la reducción de pérdidas de cada par de engranajes.

Las pérdidas en una caja de cambios se pueden dividir en dos grupos, como se ha explicado en el epígrafe 1.4. El primer grupo se compone de aquellas pérdidas que son función de la carga o pérdidas mecánicas, debidas principalmente al contacto entre las superficies de los engranajes y de los cojinetes, es decir, son las pérdidas de deslizamiento y de resistencia a la rodadura entre las superficies de engrane. Las pérdidas del segundo grupo son independientes de la carga y se refieren a las pérdidas de potencia debido a efectos rotacionales, relacionadas principalmente con la geometría y la velocidad.

Los primeros modelos de rendimiento de engranajes, así como otros más simples, disponibles en la literatura técnica [29, 21, 26, 81, 25, 91] toman como hipótesis un coeficiente de fricción constante y una distribución de carga uniforme a lo largo de la trayectoria de contacto. Ninguna de las dos hipótesis son reales, sin embargo están avalados por los altos niveles de eficiencia que posee una transmisión de engranajes y que en el pasado no se requerían cálculos demasiado precisos. Sin embargo, los errores inducidos al suponer una distribución de carga no uniforme pueden llegar a ser altos, en particular, si los errores se expresan en términos de pérdidas de potencia. El enfoque de suponer un coeficiente de fricción constante, aunque puede resultar útil como modelo preliminar para comprender los efectos de la geometría del engranaje en la pérdida de potencia, no tiene en cuenta varios parámetros que afectan a un contacto típico de engranajes. Numerosos autores, como Yada [80], Naruse [17] o Petry-Johnson [78] entre otros, demostraron a través de una serie de investigaciones experimentales, que existen numerosos parámetros como el deslizamiento, la velocidad de rodadura, la carga, la rugosidad de la superficies en contacto e incluso algunas propiedades del lubricante como la viscosidad, que tienen un efecto significativo sobre el coeficiente

de fricción.

Algunos autores estudiaron un contacto más sencillo, entre dos discos cilíndricos (*twin-disks*), y obtuvieron fórmulas empíricas del coeficiente de fricción que bajo unas ciertas condiciones pretenden simular el contacto entre dos engranajes. Dichas fórmulas son muy conocidas en la actualidad y ampliamente utilizadas, tales como la obtenida por Misharin [93], Benedict y Kelley [27], O'Donoghue y Cameron [50] y Drozdov y Gavrikov [94]. Estos modelos proporcionan una mejor aproximación del coeficiente de fricción constante, sin embargo, la exactitud de estos modelos depende de las condiciones experimentales sobre las que se obtuvo dicha formulación.

Otro enfoque es incluir, directamente, el comportamiento de lubricación elastohidrodinámica (EHL) en el modelo. Xu [89] propuso una metodología para la predicción de el rendimiento mecánica basado en la EHL utilizando el modelo dado por Cioc [16] para predecir el coeficiente de fricción para cada combinación de parámetros de contacto considerados, y aplicó un análisis de regresión lineal para la obtención de una única fórmula del coeficiente de fricción. Esta formulación incluye parámetros importantes como las velocidades de rodadura y de deslizamiento, los radios de curvatura, la viscosidad del lubricante y la rugosidad de las superficies.

De investigaciones anteriores [91, 35], se conoce que la magnitud de las pérdidas de rodadura son muy pequeñas en comparación con las pérdidas de deslizamiento, por tanto en este capítulo se va a plantear un modelo para el cálculo de las pérdidas debidas al deslizamiento basándose en el modelo de distribución no uniforme de la fuerza a lo largo de la línea de contacto obtenido en el capítulo 3. El coeficiente de fricción utilizado para predecir las pérdidas por deslizamiento será el coeficiente de Xu [89]. Además, se formulará una ecuación aproximada para el cálculo de la potencia perdida para engranajes rectos.

## 6.2. Planteamiento general del modelo

En el presente apartado se realiza un estudio del rendimiento en dientes de engranajes, basándose en un modelo de distribución no uniforme de la fuerza a lo

largo de la línea de contacto, obtenido a partir del principio de mínimo potencial de deformación, desarrollado en el capítulo 3.

El rendimiento de una transmisión de engranajes se puede expresar como:

$$\eta = 1 - \frac{W_s}{W_u} \quad (6.1)$$

donde  $W_s$  y  $W_u$  representan la energía transmitida y la energía perdida por rozamiento, respectivamente, para todas las parejas en contacto en un ciclo completo de engrane. La energía transmitida por un engranaje en un ciclo completo de engrane (entendido el ciclo de engrane como el intervalo comprendido desde que una pareja de dientes engrana en una determinada posición hasta que la siguiente se encuentra en la misma posición, es decir, cuando  $\Delta\xi = 1$ ), puede expresarse como:

$$W_u = Fr_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \Delta\xi = Fr_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \quad (6.2)$$

Del mismo modo, la pérdida de la energía total mecánica durante una pequeña rotación del piñón se puede expresar como el coeficiente de fricción  $\mu$ , multiplicado por el elemento diferencial de fuerza normal y por el deslizamiento específico en ese punto. Todos estos parámetros, incluido el coeficiente de rozamiento, no son constantes, sino que dependen del punto de contacto y consecuentemente pueden expresarse como una función de  $\xi$ :

$$d^2W_s = \mu(\xi)(fdl) \left| \left( r_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right) d\theta_1 - \left( r_{b2} \frac{2\pi}{Z_2} \xi_2 \right) d\theta_2 \right| \quad (6.3)$$

si en esta ecuación se sustituyen las Ecs. 2.61, 3.35 y 3.39 se obtiene:

$$d^2W_s = \mu(\xi)(fdl) \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \frac{2\pi}{Z_1} \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \text{tg } \alpha'_i \right| d\xi \quad (6.4)$$

donde  $\alpha'_i$  es el ángulo de presión de funcionamiento en la sección transversal.

### 6.2.1. Engranajes rectos

Para engranajes rectos, la distribución de carga se obtiene por métodos variacionales, minimizando la función potencial, como se ha descrito en el epígrafe

3.3. Si se expresa el elemento diferencial de fuerza normal a través de la función de reparto de carga y en función de la variable  $\xi$ , para engranajes rectos se obtiene:

$$F_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j} F = R(\xi)F \quad (6.5)$$

que sustituyendo en la ecuación 6.3 se obtiene la siguiente expresión:

$$dW_s = \mu(\xi)FR(\xi)\frac{r_{b1}}{r_{b2}}(r_{b1} + r_{b2})\frac{2\pi}{Z_1} \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1}\xi \right| d\xi \quad (6.6)$$

Si se integran las pérdidas por rozamiento sobre un ciclo completo de engrane del diente se obtiene:

$$W_s = F\frac{r_{b1}}{r_{b2}}(r_{b1} + r_{b2})\frac{2\pi}{Z_1} \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi)R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1}\xi \right| d\xi \quad (6.7)$$

Si se sustituyen las Ecs. 6.2 y 6.7 en la expresión del rendimiento:

$$\eta = 1 - \frac{W_s}{W_u} = 1 - \frac{r_{b1} + r_{b2}}{r_{b2}} \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi)R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1}\xi \right| d\xi \quad (6.8)$$

que puede escribirse en función de la relación de transmisión  $u = Z_2/Z_1$ , en la forma:

$$\eta = 1 - \left(1 + \frac{1}{u}\right) \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi)R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1}\xi \right| d\xi \quad (6.9)$$

Esta expresión puede simplificarse si se expresa en función de la variable  $\zeta = \xi - \xi_{inn}$ . Con este cambio de variable, el intervalo correspondiente al ciclo de engrane queda definido por los valores  $0 \leq \zeta \leq 1$ , y el engrane completo de una sección transversal del diente al intervalo  $0 \leq \zeta \leq \varepsilon_\alpha$ . Si se definen el grado de recubrimiento correspondiente al intervalo de acercamiento, desde la cabeza de la rueda al punto de rodadura, como  $\varepsilon_{\alpha 1}$ :

$$\varepsilon_{\alpha 1} = \frac{Z_1}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t - \xi_{inn} \quad (6.10)$$

y la relación de recubrimiento como  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{\alpha 1}}{\varepsilon_\alpha} \quad (6.11)$$

la expresión anterior del rendimiento queda de la forma:

$$\eta = 1 - 2\pi \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \int_0^{\varepsilon_\alpha} \mu(\zeta)R(\zeta) |\zeta - \lambda \varepsilon_\alpha| d\zeta \quad (6.12)$$

### 6.2.2. Engranajes helicoidales

En engranajes helicoidales el contacto se produce sobre puntos cuya distancia al centro del piñón no es constante y tampoco lo es, por tanto, su correspondiente parámetro  $\xi$ , como se muestra en la Fig. 3.13. Se puede comprobar, como se demostró en el epígrafe 3.4, que la relación entre la distancia de dos puntos de la línea de contacto y la diferencia entre los parámetros  $\xi$  correspondientes de esos dos puntos viene dada por:

$$dl = \frac{b}{\varepsilon_\beta \cos \beta_b} d\xi \quad (6.13)$$

La distribución de carga en cada una de las secciones transversales se obtuvo en el capítulo 3, mediante la minimización de la función potencial, obteniéndose como resultado que:

$$f(\xi, \xi_0) = \frac{\varepsilon_\beta \cos \beta_b}{b} \frac{v(\xi)}{I_v(\xi_0)} F \quad (6.14)$$

donde  $f(\xi, \xi_0)$  es la fuerza por unidad de longitud que actúa en el punto de la línea de contacto caracterizado por  $\xi$ , en la posición de engrane en la cuál el punto de contacto de la primera sección transversal de la pareja de dientes considerada corresponde a  $\xi_0$ ,  $\varepsilon_\beta$  es el grado de recubrimiento en el salto,  $\beta_b$  el ángulo de hélice en la base, e  $I_v$  se definió en el epígrafe 3.4 como :

$$I_v(\xi_0) = \sum_{j=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+j-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+j} v(\xi) d\xi \quad (6.15)$$

En consecuencia, sustituyendo las expresiones 6.13 y 6.14 en la Ec. 6.4 e integrando a lo largo de toda la línea de contacto para una posición de engrane determinada, se obtiene:

$$dW_s = \mu(\xi) F \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \frac{1}{I_v(\xi_0)} \left[ \sum_{i=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+i-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+i} v(\xi) \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \text{tg } \alpha'_i \right| d\xi \right] d\theta_1 \quad (6.16)$$

Es evidente que el giro diferencial del piñón puede expresarse como:

$$d\theta_1 = \frac{2\pi}{Z_1} d\xi_0 \quad (6.17)$$

si se sustituye en la Ec. 6.16 y se integra a lo largo del ciclo de engrane, se tiene:

$$W_s = F \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \frac{2\pi}{Z_1} \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn}+1} \frac{1}{I_v(\xi_0)} \left[ \sum_{i=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+i-\varepsilon\beta}^{\xi_0+i} \mu(\xi)v(\xi) \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \text{tg } \alpha'_i \right| d\xi \right] d\xi_0 \quad (6.18)$$

Finalmente, con las Ecs. 6.1, 6.2 y 6.18, la expresión del rendimiento queda:

$$\eta = 1 - \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn}+1} \frac{I_{\eta v}(\xi_0)}{I_v(\xi_0)} d\xi_0 \quad (6.19)$$

donde  $u$  es la relación de transmisión e  $I_{\eta v}$  la función:

$$I_{\eta v} = \sum_{i=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+i-\varepsilon\beta}^{\xi_0+i} \mu(\xi)v(\xi) \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \text{tg } \alpha'_i \right| d\xi \quad (6.20)$$

### 6.2.3. Modelo de coeficiente de fricción

Las pérdidas por fricción son una de las principales fuentes de pérdidas que se producen durante el engrane. Para el cálculo de estas pérdidas es necesario utilizar un modelo del coeficiente de fricción dependiente de la posición de contacto, como muestran las Ecs. 6.9 y 6.19. Dado que los valores de rendimiento que se alcanzan en transmisiones de engranajes son muy elevados, la minimización de las pérdidas o el alcanzar un determinado rendimiento no supone un criterio de diseño; por lo que en muchos estudios se utiliza un coeficiente de fricción constante para el cálculo del rendimiento [29, 21, 26, 81, 25, 91]. Sin embargo, si se quieren estimar las pérdidas por deslizamiento con mayor exactitud, es necesario utilizar un coeficiente de fricción lo más preciso posible.

A partir de muchos resultados experimentales, se sabe que el valor del coeficiente de fricción no es ni mucho menos constante, sino que depende de muchos parámetros tales como las velocidades de rodadura y deslizamiento, la viscosidad del lubricante, la carga o incluso la rugosidad de las superficies en contacto.

En su tesis doctoral Xu [89] comparó las formulaciones del coeficiente de fricción más utilizadas, las dadas por Misharin [93], Benedict y Kelley [27], O'Donoghue y Cameron [50], Drozdov y Gavrikov [94] y la propuesta por ISO [3], con respecto al

obtenido mediante resultados experimentales. Todas estas formulaciones son bastante diferentes unas de otras, tanto en los parámetros que incluyen como en el rango de validez de dichos parámetros. Por ejemplo, las fórmulas de Drozdov y Gavrikov [94] y la de Misharin [93] no incluyen ningún parámetro de rugosidad de la superficie y, por tanto, con dichas fórmulas no se puede estudiar la influencia de la variación de dicho parámetro en el rendimiento. Del mismo modo, estas fórmulas también excluyen el radio de curvatura, mientras que la ecuación propuesta por ISO excluye el parámetro  $SR$  (*Sliding to Roll Ratio*) que relaciona el deslizamiento y la velocidad media. Por otro lado, las ecuaciones de Misharin [93] y de O'Donoghue y Cameron [50] suponen un coeficiente de fricción independiente de la carga. Además cada una de estas ecuaciones es válida únicamente dentro de ciertos rangos de parámetros del sistema.

Xu [89] realizó una comparación para un ejemplo de valores de los parámetros concretos y los comparó con los resultados obtenidos experimentalmente. En la figura 6.1 se observa los resultados que obtuvo y que publicó su tesis doctoral [89], figura 3.20. Cuando  $SR$  es cero, el coeficiente de fricción medido es prácticamente nulo, mientras que los resultados obtenidos con todas las ecuaciones predicen valores más grandes del coeficiente de fricción. Esto implica que el coeficiente de fricción es mayor en el punto donde no existe deslizamiento relativo, que entra en total conflicto con la intuición física. Cuando  $SR$  aumenta, el valor de  $\mu$  disminuye para todas las fórmulas excepto para la dada por ISO, que no considera este parámetro y por tanto se mantiene constante para todo los valores de  $SR$ . Sin embargo, los resultados experimentales muestran que  $\mu$  aumenta a medida que se incrementa  $SR$ . La discrepancia más importante se halla en que el valor obtenido experimentalmente es bastante inferior al obtenido con todas las ecuaciones empíricas. Por todo ello, Xu propuso un nuevo coeficiente de fricción cuyos resultados se aproximan mucho mejor a los resultados experimentales.

Por todo esto, para la aplicación al rendimiento del modelo de distribución de carga propuesto se ha utilizado la ecuación del coeficiente de fricción sugerido por Xu [89]. Xu propone un modelo del coeficiente de fricción variable, que obtiene mediante

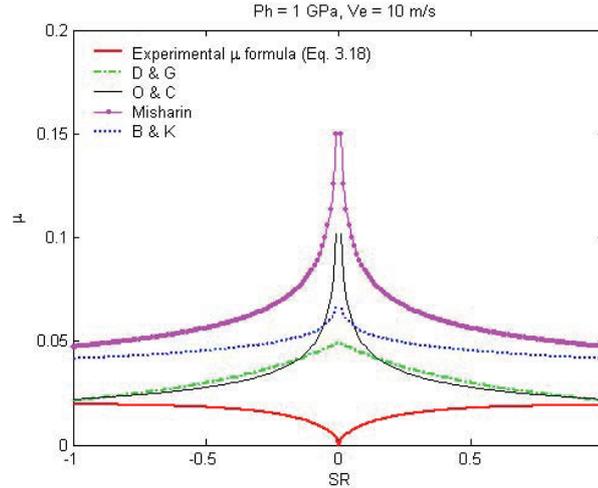


Fig. 6.1: Comparación entre formulaciones empíricas de  $\mu$  y los datos medidos, Xu [89].

un análisis de regresión lineal múltiple de predicciones EHL masivas bajo diferentes condiciones de contacto, con el fin de evaluar el coeficiente de fricción para cada punto a lo largo de la línea de contacto. La ecuación propuesta por Xu es:

$$\mu = e^{f(SR, P_h, \nu_o, S)} P_h^{b_2} |SR|^{b_3} V_e^{b_6} \nu_o^{b_7} R_{eq}^{b_8} \quad (6.21)$$

donde

$$f(SR, P_h, \nu_o, S) = b_1 + b_4 |SR| P_h \log_{10}(\nu_o) + b_5 e^{-|SR| P_h \log_{10}(\nu_o)} + b_9 e^S \quad (6.22)$$

En dichas ecuaciones,  $P_h$  es la máxima presión de contacto evaluada en GPa, el coeficiente  $\nu_o$  es la viscosidad absoluta dinámica del aceite a la temperatura de entrada medida en cPs. El coeficiente  $S$  es la rugosidad RMS de la superficie en  $\mu\text{m}$ . Los coeficientes de regresión  $b_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 9$ , toman el valor mostrado en la tabla 6.1. El coeficiente denominado  $SR$  (*Sliding to Roll Ratio*) es la relación entre el deslizamiento y la velocidad media expresado como:

$$SR = \frac{V_s}{V_e} = 2 \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \quad (6.23)$$

donde  $V_s$  es la diferencia de las velocidades de rodadura y  $V_e$  es la velocidad media de las velocidades de rodadura de la rueda y del piñón. Finalmente, el parámetro  $R_{eq}$  es el radio de curvatura equivalente del perfil del diente calculado en metros, este

$b_1$	-8.916465
$b_2$	1.03303
$b_3$	1.036077
$b_4$	-0.354068
$b_5$	2.812084
$b_6$	-0.100601
$b_7$	0.752755
$b_8$	-0.390958
$b_9$	0.620305

Tabla 6.1: Coeficientes de regresión de la ecuación del coeficiente de fricción de Xu.

parámetro es denominado por Xu como  $R$ , pero para evitar confusiones con la función distribución de carga se ha renombrado como  $R_{eq}$ :

$$R_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (6.24)$$

En este apartado se va a utilizar el modelo del coeficiente de fricción de Xu pero introduciendo en vez del coeficiente  $P_h$  la presión superficial para cada punto de la línea de contacto, obtenida mediante el modelo analítico de presión superficial  $\sigma_H(\xi)$  desarrollado en el capítulo 4, dada por la Ec. 4.28 para engranajes rectos y por la Ec. 4.36 para engranajes helicoidales.

Además, los coeficientes  $SR$ ,  $R_{eq}$  y  $V_e$  serán diferentes para cada punto de la línea de contacto, es decir, se expresarán en función de la variable  $\theta$  respectiva de cada engranaje:

$$SR(\theta_1, \theta_2) = 2 \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = 2 \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2} = 2 \frac{\omega_1 r_{b1} \theta_1 - \omega_2 r_{b2} \theta_2}{\omega_1 r_{b1} \theta_1 + \omega_2 r_{b2} \theta_2} \quad (6.25)$$

$$R_{eq}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{r_{b1} \theta_1 r_{b2} \theta_2}{r_{b1} \theta_1 + r_{b2} \theta_2} \quad (6.26)$$

$$V_e(\theta_1, \theta_2) = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} = \frac{\omega_1 r_{b1} \theta_1 + \omega_2 r_{b2} \theta_2}{2} \quad (6.27)$$

y sabiendo que:

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{Z_1} \xi \quad (6.28)$$

$$r_{b1}\theta_1 + r_{b2}\theta_2 = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (6.29)$$

el paso de  $SR(\theta_1, \theta_2)$ ,  $R_{eq}(\theta_1, \theta_2)$  y  $V_e(\theta_1, \theta_2)$  a funciones dependientes de la variable  $\xi$ ,  $SR(\xi)$ ,  $R(\xi)$  y  $V_e(\xi)$ , es inmediata:

$$SR(\xi) = 2 \frac{(1+u) \left[ \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \operatorname{tg} \alpha'_t \right]}{\frac{2\pi}{Z_1} (u-1)\xi + (1+u) \operatorname{tg} \alpha'_t} \quad (6.30)$$

$$R_{eq}(\xi) = \frac{\pi m \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta}}{(1+u) Z_1 \operatorname{tg} \alpha'_t} \xi \left[ (1+u) \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_2} \xi \right] \quad (6.31)$$

$$V_e(\xi) = \frac{\omega_1 r_{b1}}{2u} \left[ \frac{2\pi}{Z_1} \xi (u-1) + (1+u) \operatorname{tg} \alpha'_t \right] \quad (6.32)$$

Si se introducen las expresiones anteriores en la ecuación 6.21, finalmente, se obtiene la particularización del modelo de fricción variable de Xu, a los valores dados en esta tesis de reparto de carga, tensión de contacto y relaciones cinemáticas, en cada punto de contacto, en función de  $\xi$ .

$$\mu(\xi) = e^{f(SR(\xi), P_h(\xi), v_o, S(\xi))} P_h(\xi)^{b_2} |SR(\xi)|^{b_3} V_e(\xi)^{b_6} v_o^{b_7} R_{eq}(\xi)^{b_8} \quad (6.33)$$

## 6.3. Modelo de rendimiento

### 6.3.1. Modelo de rendimiento para engranajes rectos

Normalmente, a la hora de realizar cualquier diseño o trabajar con cualquier tipo de transmisión, los datos proporcionados se dan en términos de potencias y no de energías. El rendimiento se puede expresar en función de las potencias:

$$\eta = 1 - \frac{P_s}{P_u} \quad (6.34)$$

donde  $P_s$  es la potencia perdida por fricción y  $P_u$  es la potencia transmitida por el engranaje durante un ciclo de engrane. La potencia transmitida por el engranaje en un ciclo completo de engrane, se puede definir como:

$$P_u = W_u \omega \frac{Z_1}{2\pi} = F r_{b1} \omega \quad (6.35)$$

La potencia perdida se puede obtener como el cociente entre la energía perdida y el tiempo que dura un ciclo completo de engrane, por tanto, se puede expresar como:

$$P_s = \frac{W_s}{t} = \frac{W_s}{\frac{2\pi}{Z_1} \frac{1}{\omega}} = W_s \omega \frac{Z_1}{2\pi} \quad (6.36)$$

donde  $W_s$  viene dada por la Ec. 6.7. Si se sustituye dicha ecuación en la expresión de la potencia perdida se obtiene:

$$\begin{aligned} P_s &= F \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \omega_1 \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi) R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \\ &= M_t \frac{1+u}{u} \omega_1 \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi) R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \end{aligned} \quad (6.37)$$

Se han implementado las anteriores ecuaciones en Matlab, lo que ha permitido resolver numéricamente las integrales, y de este modo, verificar que las expresiones y los resultados obtenidos de la potencia perdida o del rendimiento utilizando el modelo de distribución de carga propuesto, son bastante precisos. Para ello se han utilizado datos similares a los que usó Petry-Johnson [78], donde fijó el módulo a 3.95mm y el ancho del diente a 19.5mm. Se ha fijado la viscosidad absoluta del aceite a 10,7cPs (viscosidad dada para el lubricante de tipo A a 110°C) y la rugosidad de las superficies a 0,32 $\mu$  m. Sin embargo, en nuestro caso el estudio inicial abordará aquellos parámetros que condicionan los valores de transmisión de potencia: momento torsor y velocidad de rotación; y los parámetros geométricos más importantes: número de dientes del piñón, relación de transmisión y ángulo de presión. Los valores de los parámetros se dan en la tabla 6.2.

Momento torsor ( $M_t$ ), Nm	140, 275, 413, 546, 684
Velocidad de rotación ( $\omega_1$ ), rpm	2000, 4000, 6000, 8000, 10000
Número de dientes del piñón ( $Z_1$ )	23, 27, 33, 40, 60
Relación de transmisión ( $u$ )	1, 1.5, 2, 2.5, 3
Ángulo de presión ( $\alpha_n$ )	20, 22.5, 25, 26.5, 28

Tabla 6.2: Valores de los parámetros para los estudios de engranajes rectos.

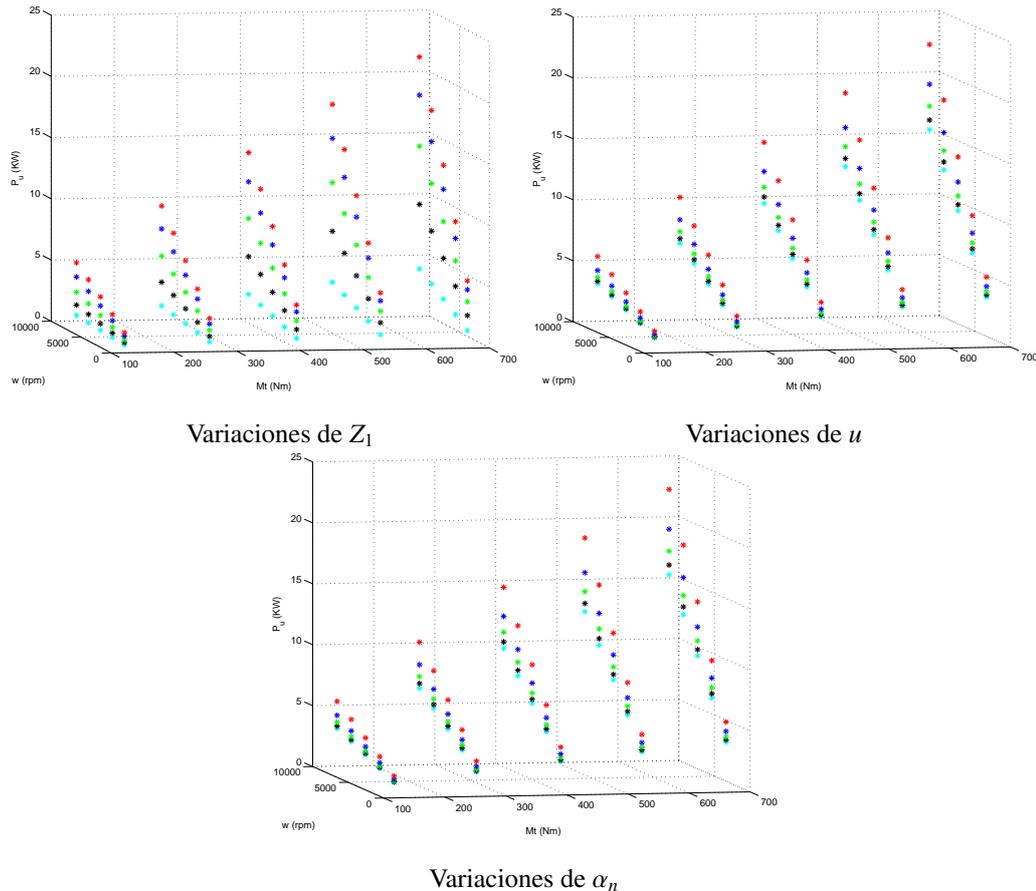


Fig. 6.2: Potencia perdida en función del momento torsor y de la velocidad angular variando, para cada gráfica, un parámetro de la geometría y fijando el resto.

En la figura 6.2 se muestra la potencia perdida obtenida al resolver las ecuaciones propuestas para los diferentes valores del momento torsor y de la velocidad angular. En cada una de las gráficas se muestra la influencia sobre la potencia perdida de la variación del número de dientes del piñón, de la relación de transmisión o del ángulo de presión. En cada gráfica se ha variado un único parámetro y se han fijado los otros dos. En la primera gráfica se ha fijado la relación de transmisión a 1 y el ángulo de presión a  $22,5^\circ$  y se ha variado el número de dientes del piñón entre los 5 valores definidos en la tabla 6.2. En la segunda gráfica, se muestra la potencia perdida para diferentes valores de la relación de transmisión con un número de dientes del piñón de 23 y un ángulo de presión de  $20^\circ$ . Y en la tercera gráfica se muestra la influencia sobre la potencia perdida de las variaciones del ángulo de presión para un  $Z_1$  de 23 y  $u$  de 1. Los colores

identifican cada uno de los 5 valores del parámetro que se ha modificado, de menor a mayor se corresponden con los colores: rojo, azul, verde, negro y cian. En la figura se observa que la potencia perdida crece a medida que aumenta el momento torsor y la velocidad de rotación. Además se observa la elevada influencia que tiene  $Z_1$  sobre la potencia perdida: la potencia decrece considerablemente a medida que aumenta el número de dientes del piñón. Igualmente, se observa que la relación de transmisión y el ángulo de presión también influyen notablemente sobre la potencia perdida: a medida que aumentan dichos parámetros la potencia perdida disminuye.

### 6.3.2. Modelo de rendimiento para engranajes helicoidales

En engranajes helicoidales, el rendimiento se puede calcular a partir de la Ec. 6.34, en donde la potencia transmitida se calcula con la Ec. 6.35 y la potencia perdida se obtiene sustituyendo la Ec. 6.18 en la Ec. 6.36, que se puede expresar como:

$$P_s = M_t \frac{1+u}{u} \omega_1 \int_{\xi_{inn}}^{\xi_{inn}+1} \frac{1}{I_v(\xi_0)} \left[ \sum_{i=0}^{Z_1-1} \int_{\xi_0+i-\varepsilon\beta}^{\xi_0+i} \mu(\xi)v(\xi) \left| \frac{2\pi}{Z_1}\xi - \text{tg } \alpha'_i \right| d\xi \right] d\xi_0 \quad (6.38)$$

La complejidad de la ecuación se incrementa con respecto a la de engranajes rectos, puesto que, si para éstos el número de parámetros de los que dependía la potencia era elevado, ahora depende de un parámetro más: el ángulo de hélice  $\beta$ . Se han repetido los mismos estudios realizados que para engranajes rectos, pero se ha incorporado el ángulo de hélice, como se muestra en la tabla 6.3. Se ha realizado el estudio para engranajes convencionales y engranajes HTCR, utilizando los valores de  $Z_1$  y  $u$  que aparecen en las tablas 6.5 y 6.6, dando un total de 21875 combinaciones para cada tipo de engranaje.

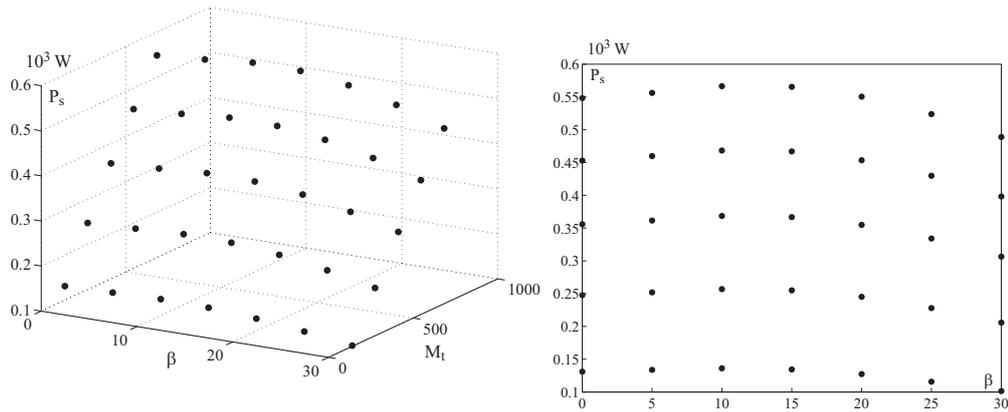


Fig. 6.3: Potencia perdida en función de  $\beta$  y  $M_t$  para una transmisión con  $Z_1 = 23$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$  y  $u = 1$ .

Módulo ( $m$ ), m	0.001, 0.002, 0.005, 0.01
Coefficiente de ancho de cara ( $C_b$ )	2, 5, 10, 20
Coefficiente de momento torsor ( $C_{M_t}$ )	70, 140, 275, 413, 546, 684
Viscosidad absoluta del aceite ( $\nu_o$ ), cPs	10.7, 20, 30, 40, 50
Relación de transmisión ( $u$ )	1, 1.5, 2, 2.5, 3
Ángulo de hélice ( $\beta$ )	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30

Tabla 6.3: Valores de los parámetros para el estudio de engranajes helicoidales.

La influencia de los parámetros geométricos sobre la potencia perdida son similares que para engranajes rectos y las gráficas son semejantes a la Fig. 6.2 donde se mostraba la potencia perdida para engranajes rectos. En la figura 6.3 se muestra la influencia del ángulo de hélice sobre la potencia perdida para una transmisión con  $Z_1 = 23$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$  y  $u = 1$  para todas las combinaciones de momentos torsores y ángulos de hélice que aparecen en la tabla 6.3. Se percibe una ligera curvatura de la potencia en función del ángulo de hélice, que es más perceptible a simple vista a medida que aumenta el momento torsor porque la potencia perdida crece, como se muestra en la Fig. 6.3.

Sin embargo, si se obtiene la relación entre la potencia perdida en engranajes helicoidales y rectos, se comprueba que es para momentos torsores menores cuando se obtienen relaciones más extremas, Fig. 6.4.

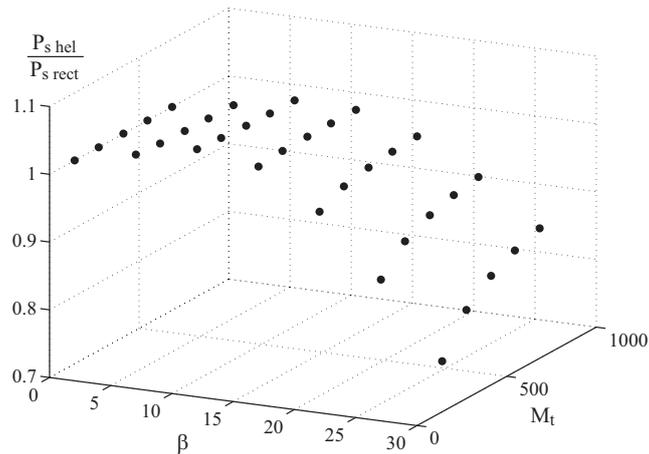


Fig. 6.4: Relación ente la potencia perdida en helicoidales y en rectos.

### 6.3.3. Comparación con resultados experimentales

Petry-Johnson [78] realiza un estudio experimental sobre el rendimiento en engranajes rectos, para ello utiliza dos transmisiones diferentes, y hace variar el lubricante y la rugosidad de la superficie para observar su influencia sobre la potencia perdida y por tanto, sobre el rendimiento. Petry-Johnson, en su ensayo experimental, mide las pérdidas totales de la transmisión, que se corresponde con la suma de los dos tipos de pérdidas: las dependientes de la carga y las independientes de la carga. Para separar estas dos pérdidas realiza una medida de la potencia perdida en dos fases diferentes; una primera medida con la transmisión bajo condiciones de carga y otra segunda medida con la transmisión sin carga. La diferencia entre ambas medidas son las pérdidas dependientes de la carga que las denomina pérdidas mecánicas. Estas pérdidas son la suma de las pérdidas por deslizamiento entre las superficies que engranan, las pérdidas de resistencia a la rodadura y las pérdidas de potencia en los cojinetes. Las pérdidas de potencia en los cojinetes se pueden calcular pero las pérdidas de deslizamiento y rodadura no pueden medirse por separado.

En este apartado se va a comparar, para ambas transmisiones, el modelo para las pérdidas de fricción propuesto en el epígrafe anterior con los resultados experimentales de pérdidas mecánicas que obtiene Petry-Johnson. Sin embargo, las pérdidas de

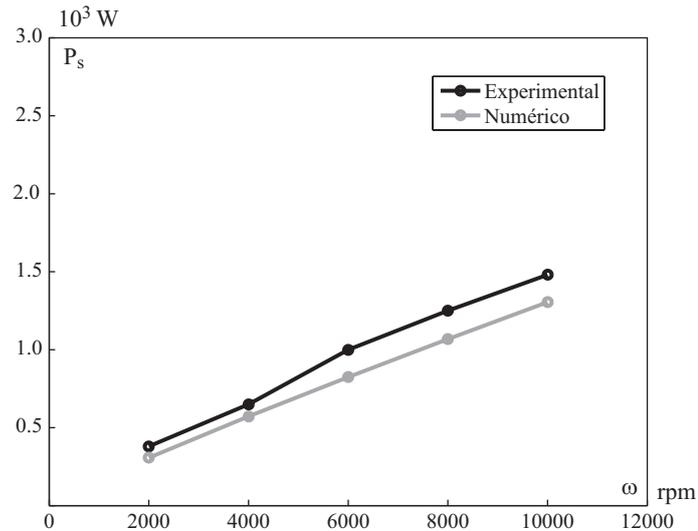


Fig. 6.5: Potencia perdida para la transmisión 23T con momento torsor de 413 Nm.

energía mecánica que presenta Petry-Johnson no son exactamente las mismas que las pérdidas de deslizamiento estimadas con el modelo propuesto pues faltaría considerar las pérdidas por rodadura, por tanto, las pérdidas obtenidas con nuestro modelo deberían tener una tendencia similar aunque deberían ser algo menores que las experimentales.

En concreto se reproducirán los resultados que aparecen en la figura 5 de [78]. Los datos de potencia que aparecen en esta figura han sido obtenidos con el lubricante denominado tipo A a una temperatura de 110°C y la rugosidad correspondiente a cada transmisión con el lubricante A que aparece en la tabla 5 del artículo.

En la figura 6.5 se observan los resultados de la potencia mecánica perdida obtenida mediante experimentación (línea negra), que se corresponde con los datos de la figura 5a del artículo de Petry-Johnson [78]. En gris se muestran los datos de potencia perdida debidos al deslizamiento obtenidos mediante la resolución numérica de la Ec. 6.37 para cada una de las velocidades de rotación dadas. Como era de esperar, la potencia perdida obtenida experimentalmente es ligeramente mayor que la obtenida mediante el modelo propuesto, puesto que las medidas experimentales incluyen también la pérdidas por rodadura, aunque se observa que la tendencia para ambas es muy similar.

En la figura 6.6 se muestra la comparación, para diferentes momentos torsores,

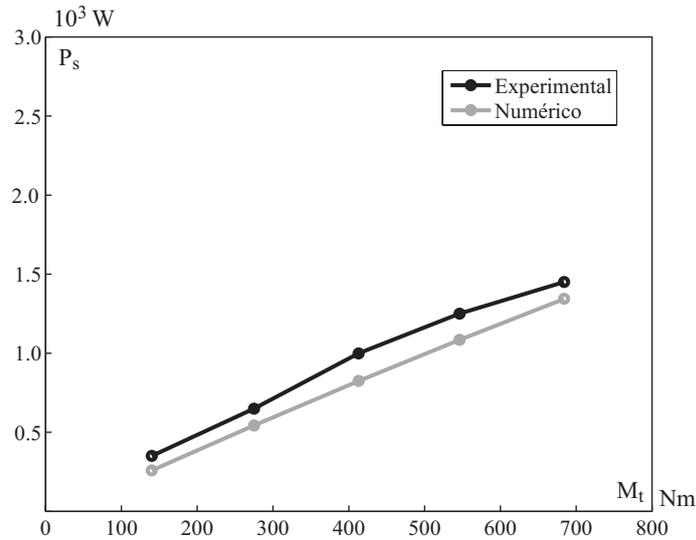


Fig. 6.6: Potencia perdida para la transmisión 23T con velocidad de rotación de 6000 rpm.

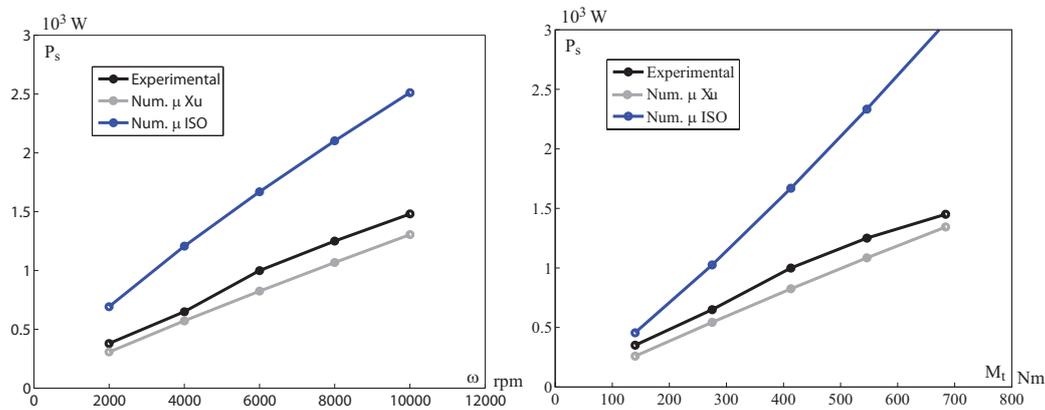


Fig. 6.7: Potencia perdida para la transmisión 23T incluyendo la resolución numérica con el  $\mu$  propuesto por ISO.

entre los resultados de potencia perdida obtenidos resolviendo numéricamente la Ec. 6.37 y los resultados experimentales de Petry-Johnson, que se corresponden con los datos de potencia perdida que se muestran en la figura 5b de [78]. En negro se representan los datos experimentales y en gris los obtenidos por resolución numérica para cada momento torsor. De nuevo, la potencia perdida medida en los ensayos es ligeramente mayor que la obtenida mediante el modelo propuesto, aunque la tendencia es muy similar.

Si se resuelve el numéricamente la Ec. 6.37 utilizando el coeficiente de fricción

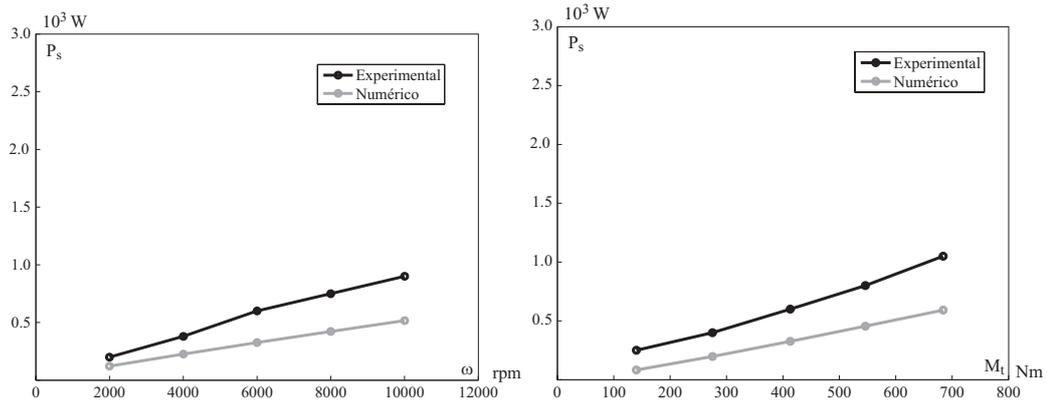


Fig. 6.8: Potencia perdida para la transmisión 40T.

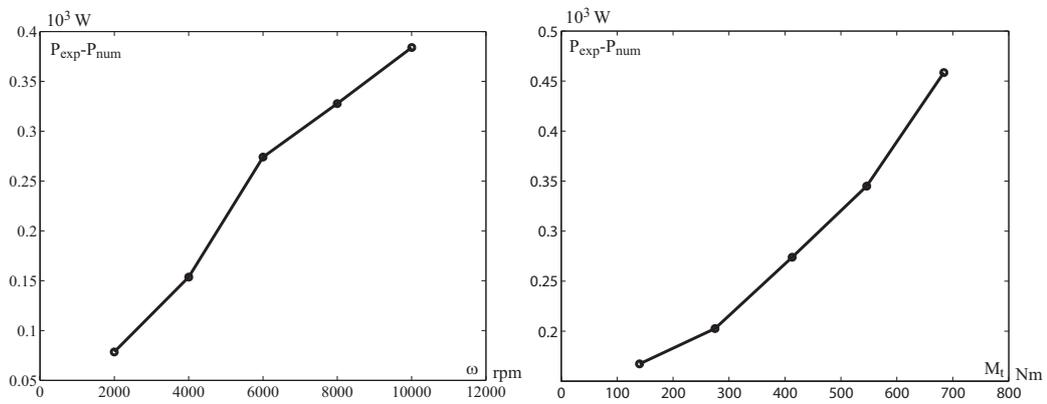


Fig. 6.9: Diferencia entre la potencia obtenida por métodos experimentales y por métodos numéricos.

propuesto por la norma ISO [3], se observa que la potencia perdida que se obtiene es bastante mayor que la obtenida utilizando el coeficiente de Xu, incluso es mayor que los datos experimentales obtenidos por Petry-Johnson, que tienen en cuenta la potencia de pérdidas por deslizamiento y por rodadura. En la figura 6.7, en la gráfica de la izquierda, se observan los datos mostrados en la Fig. 6.5 pero se ha introducido la potencia perdida por fricción obtenida con el coeficiente de ISO. En la gráfica de la derecha se muestran las potencias cuando se varía el momento torsor.

En la figura 6.8 se muestra la potencia perdida para la otra transmisión estudiada, la denominada 40T. Se han representado dos gráficas, la equivalente al estudio mostrado en la figura 5a del artículo ,donde se obtiene la potencia perdida en función de la velocidad de rotación para un momento torsor fijo, y la equivalente a la figura 5b, para

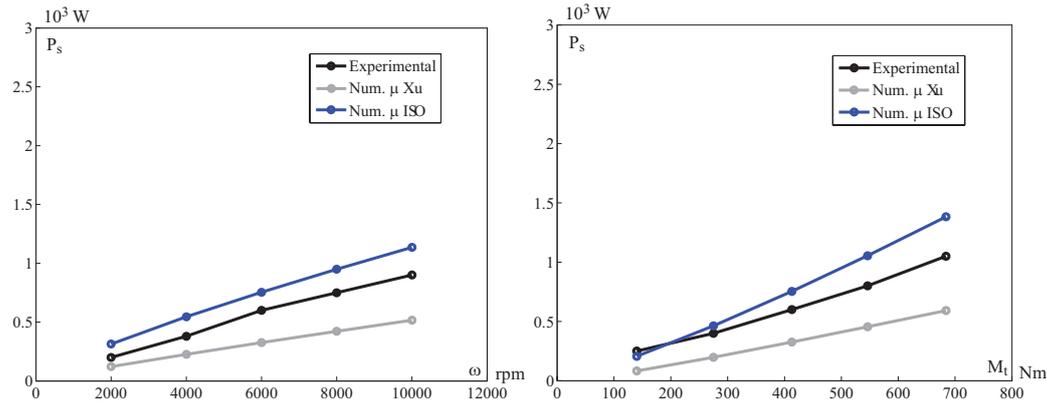


Fig. 6.10: Potencia perdida para la transmisión 40T incluyendo la resolución numérica con el  $\mu$  propuesto por ISO.

una velocidad de rotación de 6000 rpm y diferentes valores del momento torsor. De nuevo, en negro, se representan los resultados experimentales y en gris los resultados obtenidos mediante la resolución numérica del modelo propuesto. Se puede observar a simple vista, que para esta transmisión las diferencias entre ambas son algo mayores, lo que hace suponer que las pérdidas de rodadura tienen en este caso más influencia.

Existen numerosos parámetros que influyen en las pérdidas por rodadura, sin embargo, en cada una de las gráficas mostradas únicamente se varía la velocidad de rotación o el momento torsor. Se sabe que las pérdidas de rodadura son directamente proporcionales a la suma de las velocidades tangenciales y a la carga, que a su vez, dependen directamente de la velocidad de rotación y del momento torsor, respectivamente. Por consiguiente, si se representa la diferencia entre la potencia experimental y la potencia debida a la fricción se obtienen las pérdidas por rodadura, que como muestra la Fig. 6.9, se incrementan a medida que aumenta la velocidad de rotación y a la carga.

La potencia debida a la fricción calculada con el coeficiente dado por ISO, sigue siendo mayor que la potencia experimental, Fig. 6.10, lo que nos indica que el coeficiente de fricción de Xu se aproxima más a la realidad.

Para engranajes helicoidales se han utilizado los resultados experimentales proporcionados por Vaidyanathan en sus tesis doctoral [86]; en particular, se muestran

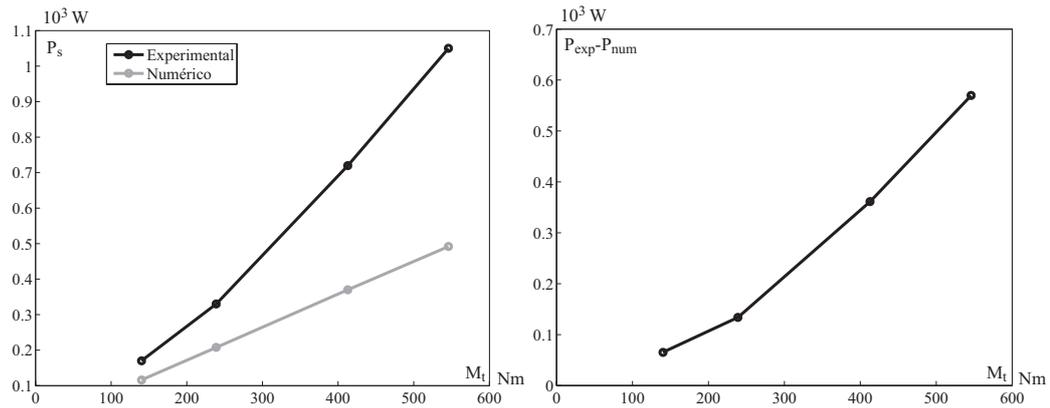


Fig. 6.11: Potencia perdida para la transmisión 23B para  $\omega = 2000$  rpm.

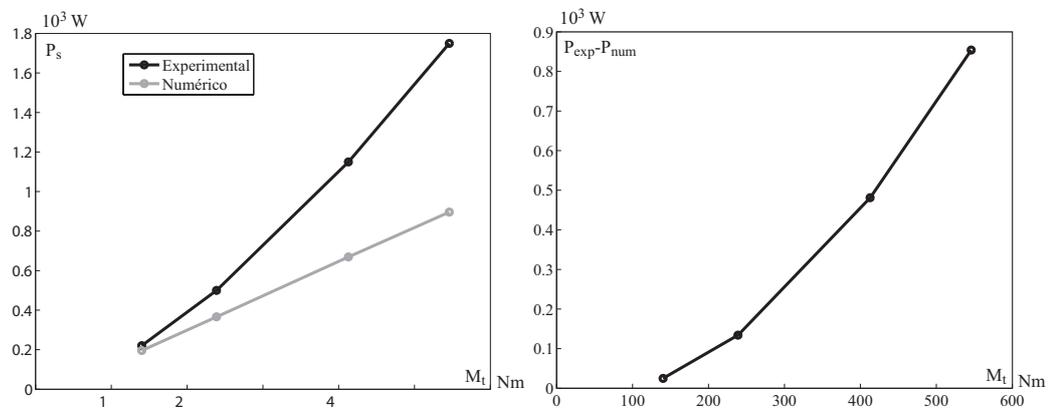


Fig. 6.12: Potencia perdida para la transmisión 23B para  $\omega = 4000$  rpm.

los resultados de la Figura 3.3 de su tesis, realizados para la transmisión que ha denominado 23B. Se han representado en tres figuras diferentes los resultados de potencias para las diferentes velocidades de rotación. En la Fig. 6.11, en la gráfica de la izquierda, se muestra la comparación entre los resultados experimentales y los resultados del modelo numérico para  $\omega = 2000$  rpm y en la gráfica de la derecha la diferencia entre ambas. En la Fig. 6.12 se muestran los resultados para  $\omega = 4000$  rpm y en la Fig. 6.13 para  $\omega = 6000$  rpm. Se observa que en las gráficas donde se muestra la diferencia entre los resultados experimentales y los numéricos, es decir, lo que serían las pérdidas por rodadura, aumentan a medida que se incrementa el momento torsor, y que además los valores de las pérdidas de rodadura son superiores para velocidades mayores, como debería ser.

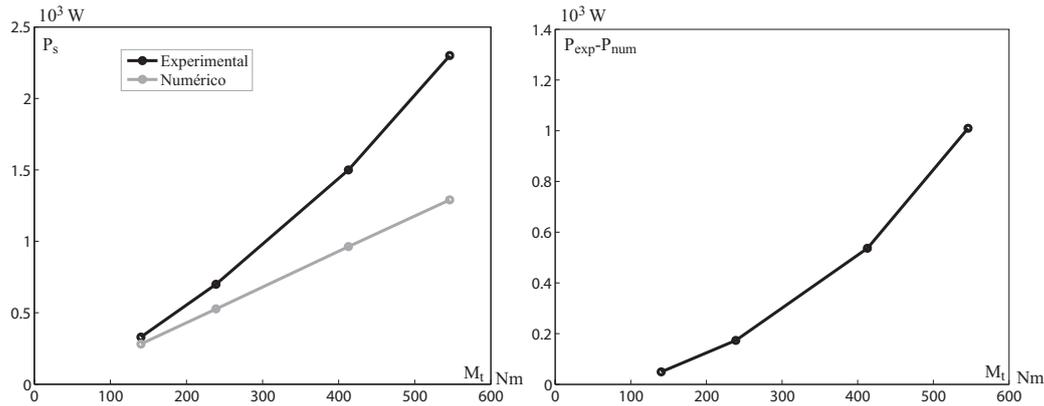


Fig. 6.13: Potencia perdida para la transmisión 23B para  $\omega = 6000$  rpm.

### 6.3.4. Discusión de resultados

La resolución de la integral que aparece en la Ec. 6.18, usada para el cálculo del rendimiento, es extremadamente compleja; además a dicha complejidad hay que añadirle el elevado número de parámetros de los que depende. Además, si a dicha integral se le introduce el coeficiente de fricción de Xu, Ecs. 6.33 y 6.37, la complejidad del conjunto aumenta considerablemente y hace que la ecuación del rendimiento dependa tanto de todas las variables geométricas, como de las variables propias del lubricante, de la rugosidad de la superficie y de las condiciones dinámicas (potencia o momento torsor aplicado y velocidad de rotación).

Debido a la enorme complejidad del problema, se hace imposible obtener una expresión analítica precisa del rendimiento y por tanto se trataría de encontrar una expresión aproximada para el cálculo de rendimiento que contemple simultáneamente el efecto de todas las variables mencionadas, pero incluso la obtención de una ecuación aproximada que abarque y sea válida para todas las variables de las que depende, en todos sus rangos, es una tarea de enorme dificultad. Si se analizan otros estudios realizados sobre este tema por diversos autores, epígrafe 1.4.2, se observa que los modelos o conclusiones obtenidos sólo son válidos para una determinada transmisión o una determinada variación de un parámetro. No se ha encontrado ningún estudio en el que se haya dado un modelo de rendimiento con más amplia validez.

## 6.4. Modelo aproximado de la potencia perdida

El objetivo de este apartado es obtener una expresión aproximada de la potencia perdida que sea simple y a la vez de suficiente precisión, válida para un amplio conjunto de variables de diseño; para así poder obtener, de forma sencilla, el rendimiento de una transmisión.

Para abordar el problema, primeramente, se intentó obtener un modelo simplificado del coeficiente de fricción de Xu, para ello se simularon las dos transmisiones que aparecen en el artículo de Petry-Johnson [78], denominadas 23T y 40T, donde la única diferencia entre ambas es la variación del número de dientes de 23 a 40 y una ligera variación del ángulo de presión. En la figura 6.14 se muestra la forma del coeficiente de fricción calculado con la ecuación 6.33 para ambas transmisiones, 23T en azul y 40T en rojo. Se observa que el coeficiente de fricción varía considerablemente.

También se analizó el coeficiente de fricción para todas las transmisiones resultantes de todas las combinaciones posibles entre los parámetros de la tabla 6.2. Se observó que el coeficiente de fricción variaba entre un amplio rango de valores, dependiendo enormemente de todas las variables que lo conforman, sin poder establecer una tendencia o un comportamiento del coeficiente de fricción en función de cada variable. Además, considerando todas las combinaciones del estudio posibles, el valor del coeficiente de fricción para un punto determinado de  $\xi = \xi_{inn}$  podía valer desde 0,005 hasta 0,05. E incluso, se observó que la forma del coeficiente de fricción a lo largo de la línea de contacto varía cualitativamente dependiendo de la transmisión: puede ser asimétrico, puede ser prácticamente decreciente desde los extremos al punto de deslizamiento nulo (como se obtenía para las transmisiones utilizadas por Petry-Johnson, Fig. 6.14) o puede aparecer una joroba justamente antes de hacerse nulo en el punto de rodadura y alcanzar valores hasta un 20 % mayores de los que aparecen en el punto  $\xi = \xi_{inn}$ .

Dado que el coeficiente de fricción es tan variable, la idea inicial de obtener un modelo sencillo de dicho coeficiente se descartó, pero además era fácil prever que la

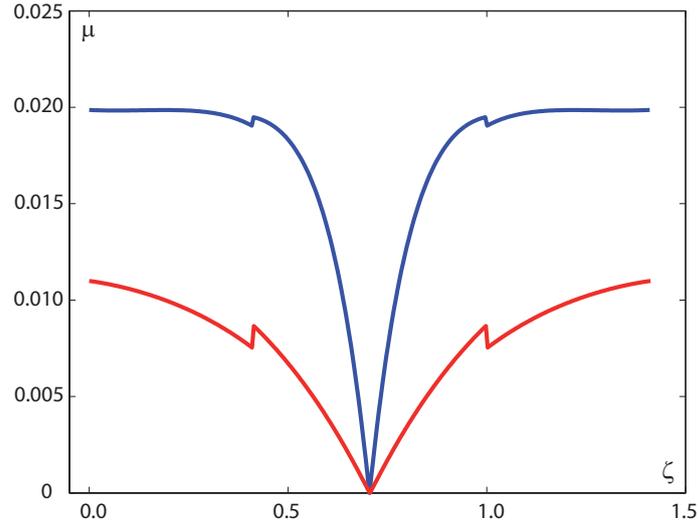


Fig. 6.14: Coeficiente de fricción de Xu. Casos 23T y 40T de Petry-Johnson.

potencia perdida se encontraba fuertemente influenciada por todos los parámetros de los que depende el rendimiento; por tanto, se decidió buscar una ecuación aproximada de la integral completa.

Si se analiza la Ec. 6.37 se observa que existen determinados factores dentro de la integral, en concreto dentro del coeficiente de fricción, que al no depender de  $\xi$  se pueden extraer de la integral. La ecuación del coeficiente de fricción de Xu se puede escribir como:

$$\mu(\xi) = e^{b_1} e^{b_4 |SR(\xi)| P_h(\xi) \log_{10}(v_o)} e^{b_5 e^{-|SR(\xi)| P_h(\xi) \log_{10}(v_o)}} e^{b_9 e^S} P_h(\xi)^{b_2} |SR(\xi)|^{b_3} V_e(\xi)^{b_6} v_o^{b_7} R_{eq}(\xi)^{b_8} \quad (6.39)$$

donde aparecen términos que dependen de  $\xi$  y otros que son completamente independientes de esta variable. Para facilitar la notación, se han agrupado los términos que no dependen de  $\xi$  en una variable denominada  $\mu_{cte}$ , donde también se ha incluido aquellos términos de  $V_e$  y  $R_{eq}$ , Ecs. 6.31 y 6.32, que no dependen de  $\xi$ .

$$\mu_{cte} = e^{b_1} e^{b_9 e^S} \left[ \frac{\omega_1 r_{b1}}{2u} \right]^{b_6} v_o^{b_7} \left[ \frac{\pi m \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta}}{(1+u) Z_1 \operatorname{tg} \alpha'_t} \right]^{b_8} \quad (6.40)$$

Y a los términos dependientes de  $\xi$  se les ha agrupado en la variable  $\mu_{var}(\xi)$ :

$$\mu_{var}(\xi) = e^{b_4 |SR(\xi)| P_h(\xi) \log_{10}(v_o)} e^{b_5 e^{-|SR(\xi)| P_h(\xi) \log_{10}(v_o)}} P_h(\xi)^{b_2} |SR(\xi)|^{b_3} \left[ \frac{2\pi}{Z_1} \xi (u-1) + (1+u) \operatorname{tg} \alpha'_t \right]^{b_6} \left[ \xi \left( (1+u) \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_2} \xi \right) \right]^{b_8} \quad (6.41)$$

Finalmente, si se introduce en la ecuación de la potencia perdida, Ec. 6.37, las expresiones anteriores del coeficiente de fricción  $\mu$ , se obtiene que la potencia perdida se puede expresar como:

$$P_s = M_t \frac{1+u}{u} \omega_1 \mu_{cte} \int_{\xi_{im}}^{\xi_{im} + \varepsilon_a} \mu_{var}(\xi) R(\xi) \left| \operatorname{tg} \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \quad (6.42)$$

Para obtener una ecuación aproximada de la potencia perdida se van a establecer una serie de valores a las variables, y para cada combinación de variables, se calculará la potencia perdida con Matlab resolviendo la Ec. 6.42 mediante integración numérica. Si a los resultados numéricos se les divide por los términos independientes de  $\xi$ , se obtiene un término completamente independiente de la velocidad de rotación y del factor de rugosidad de las superficies.

$$\Delta P_{sFit} = \frac{P_{snum}}{M_t \frac{1+u}{u} \omega_1 \mu_{cte}} \quad (6.43)$$

Aunque de esta forma se reduce ligeramente el número de variables de las que depende el término a ajustar, este término sigue ligado a multitud de variables. Para poder establecer un modelo aproximado se va a estudiar las diferentes variables que influyen en la potencia perdida.

### 6.4.1. Estudio de la influencia de los parámetros que afectan a la potencia perdida

En este apartado se va a realizar un estudio sobre la influencia que tienen los diferentes parámetros geométricos y los parámetros propios del lubricante. En el apartado anterior, en la Fig. 6.2, se muestra la gran influencia que tienen el momento torsor, el número de dientes, el ángulo de presión y la relación de transmisión sobre

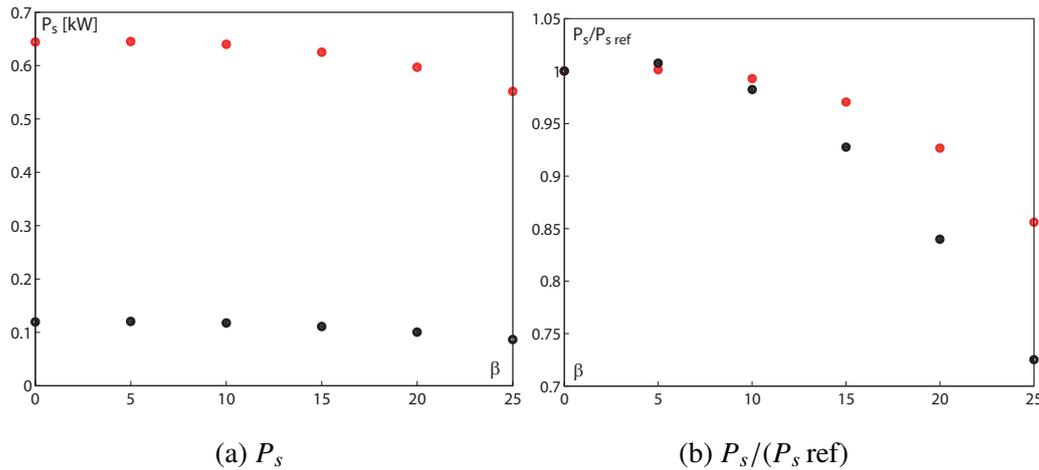
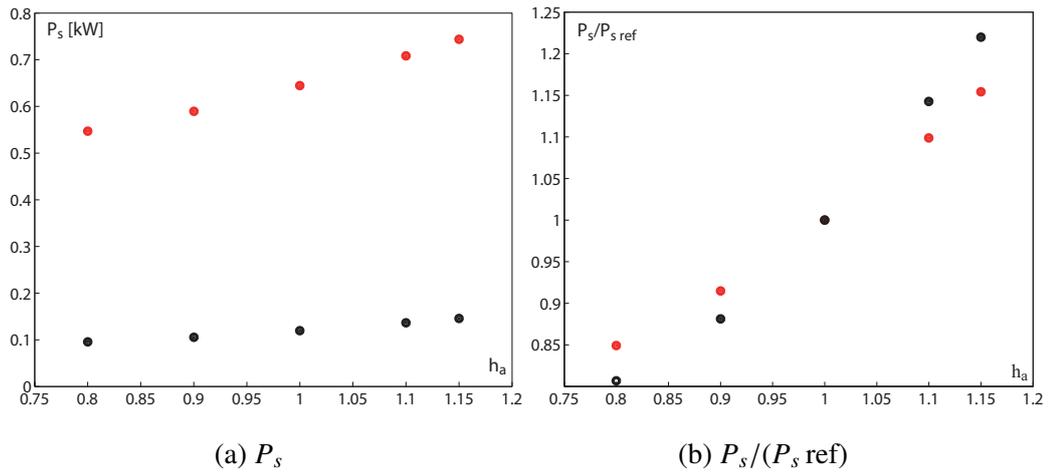
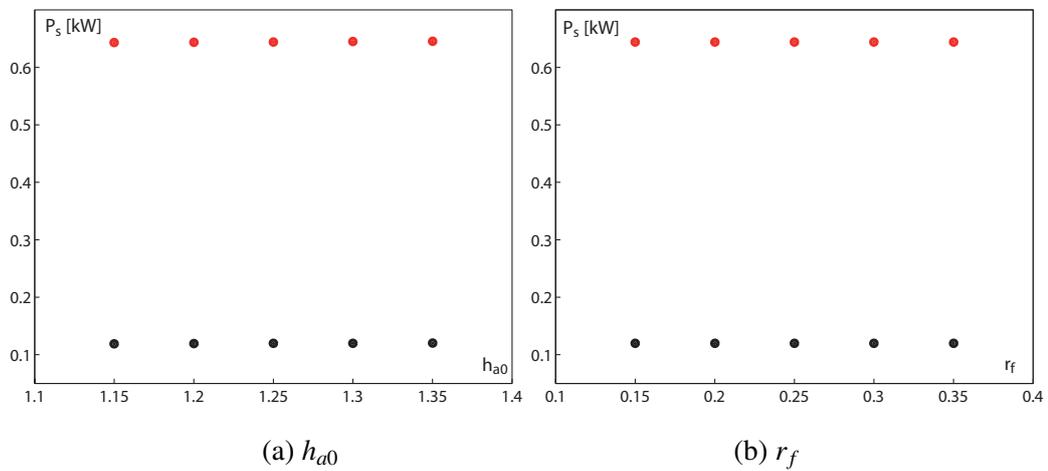


Fig. 6.15: Influencia del ángulo de hélice  $\beta$  en la potencia perdida.

la potencia perdida, por tanto, estos parámetros no se estudiarán en este apartado. Ni tampoco se estudiará si se producen modificaciones de la potencia perdida ante variaciones del módulo y del ancho del diente, puesto que analizando las ecuaciones de la tensión de contacto se hace evidente su dependencia. Por otro lado, en la Ec. 6.43 se había conseguido que el término  $\Delta P_{s \text{ Fit}}$  sea independiente de la velocidad de rotación y de la rugosidad de las superficies, por tanto, tampoco será necesario su estudio. Pero se estudiarán otras variables como la viscosidad del lubricante, el ángulo de hélice, la altura de la cabeza y del pie del diente, el radio de acuerdo y los desplazamientos.

Para el estudio se utilizarán dos transmisiones diferentes, una con  $Z_1 = 24$ ,  $u = 1,5$  y  $\alpha_n = 22,5^\circ$  que se representará en rojo y otra con  $Z_1 = 40$ ,  $u = 2,5$  y  $\alpha_n = 25^\circ$  que se representará en negro. Para cada transmisión se obtendrá la potencia perdida en función del parámetro modificado y así se podrá comparar la variación en la potencia perdida al variar el parámetro.

En la Fig. 6.15, en la gráfica de la izquierda, se muestra la influencia del parámetro  $\beta$  sobre la potencia perdida para estas dos transmisiones. Como se concretó para engranajes helicoidales, si se representa la potencia perdida en función del ángulo de hélice, se tiene una curva que es ligeramente creciente para ángulos de hélice pequeños y decreciente para ángulos de hélice mayores. En la gráfica de la derecha se ha representado la relación entre la potencia perdida para engranajes helicoidales

Fig. 6.16: Influencia de  $h_a$  en la potencia perdida.Fig. 6.17: Influencia de  $h_{a0}$  y de  $r_f$  en la potencia perdida

con respecto a rectos, es decir, se muestra el cociente entre la potencia perdida para diferentes ángulos de hélice y la potencia perdida para engranajes rectos o cuando  $\beta = 0$ .

La variación de la altura de cabeza afecta al reparto de carga y a la tensión de contacto, como se ha demostrado en los capítulos 3 y 4. En la figura 6.16 se muestra la influencia que tiene sobre la potencia perdida la modificación de la altura de cabeza en piñón y rueda. En la gráfica (a) se observa cómo, para ambas transmisiones, la potencia aumenta a medida que aumenta la altura de cabeza de los engranajes: una variación de 0,8 a 1,15 puede producir un aumento en las pérdidas de más de 100W. En la gráfica (b) se muestra la potencia perdida en cada caso con la que se ha denominado de referencia,

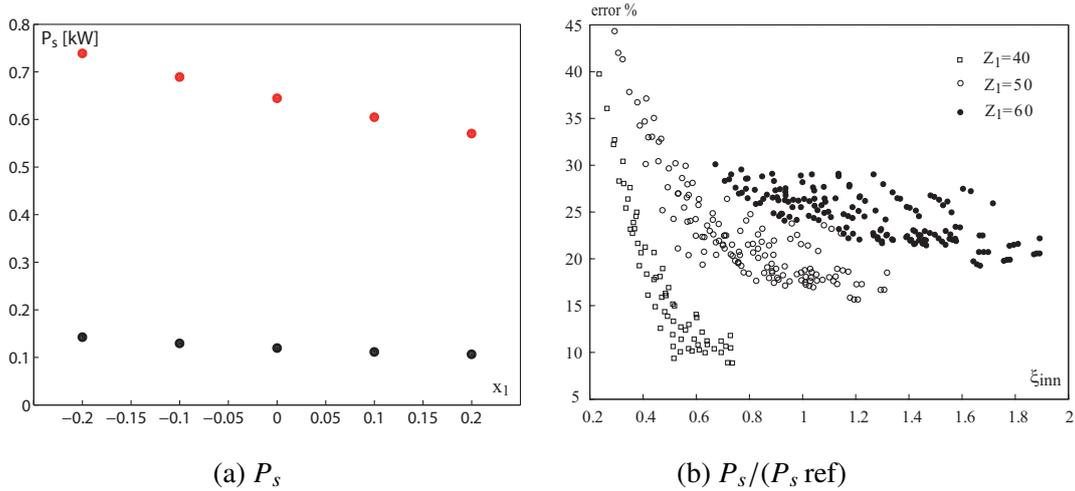


Fig. 6.18: Influencia de los coeficientes de desplazamiento  $x$  en la potencia perdida.

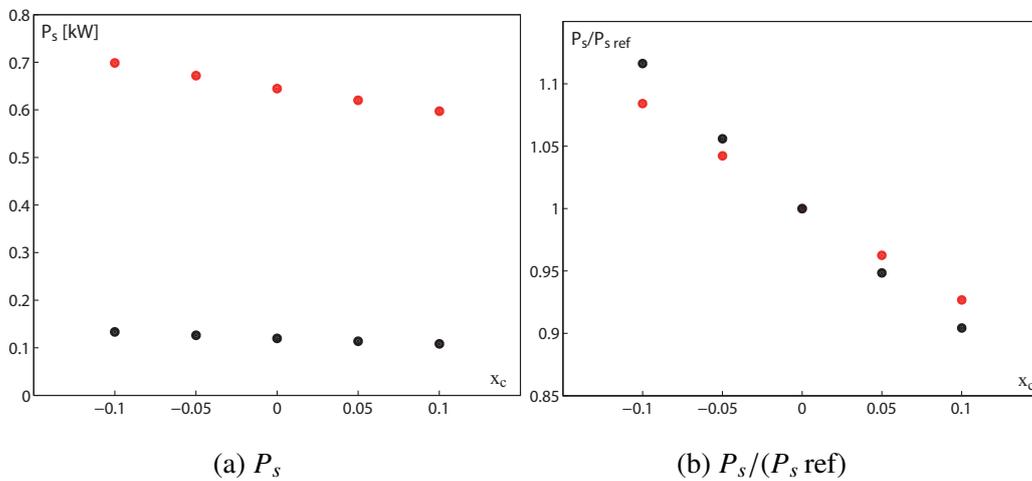
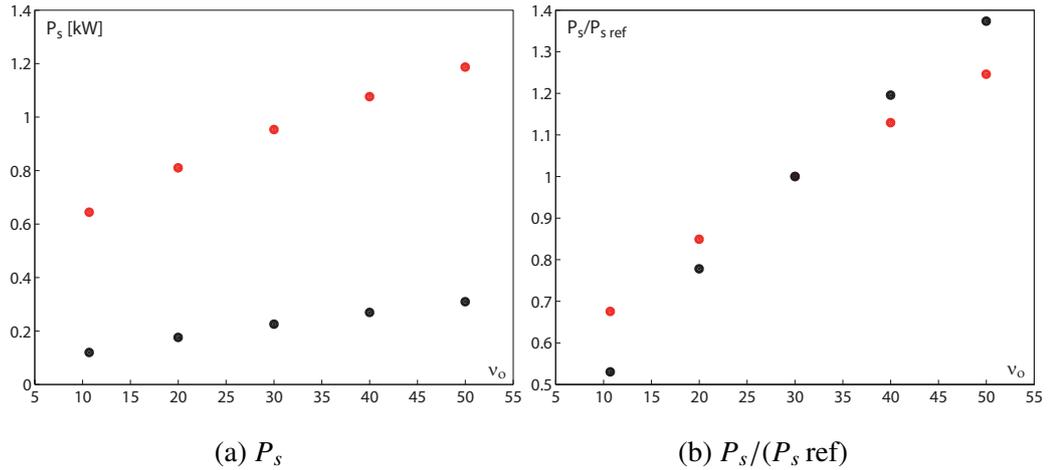


Fig. 6.19: Influencia de la distancia entre centros,  $x_c$ , en la potencia perdida.

que corresponde con la potencia perdida obtenida con  $h_a = 1$ . Se observa que para el mismo incremento o decremento de la altura de cabeza, las variaciones en la potencia difieren ligeramente entre las dos transmisiones.

Cabe esperar que las variaciones de la altura de pie y del radio de acuerdo de la cabeza de los dientes no influyan en la potencia perdida, puesto que se ha demostrado que ambos parámetros no influyen prácticamente en la distribución de carga ni en la tensión de contacto, y tampoco aparecen en la Ec. 6.42 de potencia perdida. En la figura 6.17 en la gráfica de la izquierda se muestra la nula influencia sobre la potencia perdida de las modificaciones en la altura de pie. Y en la gráfica de la derecha, la influencia del radio de acuerdo para ambas transmisiones.

Fig. 6.20: Influencia de  $\nu_o$  sobre la potencia perdida

La influencia del coeficiente de desplazamiento se muestra en la Fig. 6.18, para coeficientes de desplazamientos negativos la potencia perdida aumenta y para positivos disminuye. La relación entre las dos transmisiones se ve que es similar, aunque para desplazamientos negativos se incrementa la diferencia entre ellas.

Si se modifica el coeficiente  $x_c$  se modifica la distancia entre centros de la siguiente forma:

$$c = r_{p1} + r_{p2} + mx_1 + mx_2 + mx_c \quad (6.44)$$

Se produce una variación del grado de recubrimiento transversal que puede llegar a ser significativa. Por tanto la potencia perdida se ve modificada según se representa en la Fig. 6.19.

La viscosidad del lubricante afecta sobre la potencia perdida porque aparece en el coeficiente  $f$  del coeficiente de rozamiento, Ec. 6.22, y en el coeficiente de rozamiento  $\mu$  directamente, Ec. 6.21. Como demuestra en la figura 6.20 no mantiene la relación de proporcionalidad para diferentes transmisiones.

### 6.4.2. Propuesta de modelo

Como abarcar todas las variables simultáneamente, incluso a nivel computacional, es prácticamente imposible, se comienza estableciendo los rangos y los valores, únicamente, de aquellas variables de las que se ha comprobado que tienen más

influencia. Tras el estudio de los parámetros se ha elegido realizar un primer ajuste en función de la presión de contacto, de la viscosidad, del módulo y del ancho y se ha dejado para un segundo paso el ajuste de las variables típicas geométricas: número de dientes del piñón, relación de transmisión y ángulo de presión.

Lógicamente, si se establecen varios valores predeterminados para cada una de las variables, al variarlas simultáneamente y realizar todas las combinaciones posibles entre los diferentes valores de ellas, puede ocurrir que la presión de contacto tome valores demasiado extremos o que el engranaje tenga una geometría poco realista, por tanto, se ha establecido que el ancho de cara del diente sea dependiente del módulo y que el momento torsor dependa a su vez del módulo y del ancho de cara, para así evitar este tipo de situaciones. De este modo, tomando de referencia los valores utilizados por Petry-Johnson [78] y según la relación existente entre la presión de contacto, el momento torsor, el ancho de cara y el módulo se establece que:

$$\begin{aligned} b &= C_b m [m] \\ M_t &= C_{M_t} \frac{bm^2}{b_{PJ}m_{PJ}^2} [Nm] \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde  $b_{PJ}$  y  $m_{PJ}$  son los valores del ancho de cara y del módulo utilizados por Petry-Johnson en la transmisión 23T. Los coeficientes  $C_b$  y  $C_{M_t}$  y el resto de variables toman los valores:

Módulo ( $m$ ), m	0.001, 0.002, 0.005, 0.01
Coficiente de ancho de cara ( $C_b$ )	2, 5, 10, 20
Coficiente de momento torsor ( $C_{M_t}$ )	70, 140, 275, 413, 546, 684
Viscosidad absoluta del aceite ( $\nu_o$ ), cPs	10.7, 20, 30, 40, 50
Relación de transmisión ( $u$ )	1, 1.5, 2, 2.5, 3

Tabla 6.4: Valores de los parámetros para el estudio de rendimiento.

Se ha trabajado en todo momento con engranajes estándar (altura de cabeza del diente  $h_a = 1$  y distancia entre centros nominal) y coeficientes de desplazamiento nulos. El número de dientes del piñón y el ángulo de presión necesarios para cubrir un

amplio rango de valores de grado de recubrimiento pueden llegar a ser muy diferentes, por ello se han definido dos tablas con los valores que deben tomar estos parámetros para alcanzar menor o mayor grado de recubrimiento. Con los valores de  $Z_1$  y  $\alpha_n$  definidos en la tabla 6.5 se consiguen valores bajos de  $\varepsilon_\alpha$ , entre 1,4 y 1,8; con los valores definidos en la tabla 6.6 se alcanzan valores más altos, desde 1,85 a 2,45.

Número de dientes del piñón ( $Z_1$ )	24, 30, 40
Ángulo de presión ( $\alpha_n$ )	20, 22.5, 25

Tabla 6.5: Valores de los parámetros para engranajes con bajo grado de recubrimiento.

Número de dientes del piñón ( $Z_1$ )	40, 50
Ángulo de presión ( $\alpha_n$ )	13, 15, 17

Tabla 6.6: Valores de los parámetros para engranajes con alto grado de recubrimiento.

Considerando todas las combinaciones posibles de los parámetros definidos en las tablas anteriores la tensión máxima de presión superficial se sitúa en todo momento entre 0,25 GPa y 2 GPa.

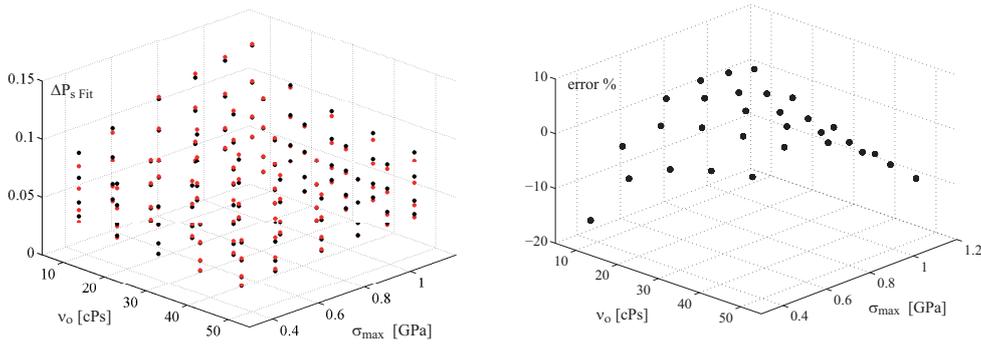
Para la obtención del modelo aproximado de la potencia se ha recurrido a técnicas de regresión. Se ha optado por un modelo de regresión no lineal cuya estimación se basa en métodos de búsqueda de optimización que minimizan la norma de un vector residual. Concretamente los parámetros del modelo se han obtenido mediante el método de los mínimos cuadrados. El principal dilema es el tipo de ecuación a usar.

Tras analizar las Ecs. 6.41 y 6.42 y después de diversos ajustes de regresión, se ha optado por realizar un ajuste de regresión del término de la potencia  $\Delta P_{sFit}$  de la siguiente forma:

$$\Delta P_{sFit} = C_0 \left( \frac{M_t}{b} \right)^{C_1} (\log_{10}(v_o))^{C_2} m^{C_3} \quad (6.46)$$

según esto, la potencia perdida se obtiene con la siguiente ecuación:

$$P_{sFit} = M_t \frac{1+u}{u} \omega_1 \mu_{cte} \left[ C_0 \left( \frac{M_t}{b} \right)^{C_1} (\log_{10}(v_o))^{C_2} m^{C_3} \right] \quad (6.47)$$



(a) Ajuste

(b) Error relativo

Fig. 6.21: Ajuste del término  $\Delta P_{sFit}$  para  $Z_1 = 40$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$  y  $u = 1$ .

donde el parámetro  $\mu_{cte}$ , dado por la Ec. 6.40, agrupa todos los términos del coeficiente de fricción que no dependen de  $\xi$  y los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  dependen del grado de recubrimiento transversal según las siguientes ecuaciones:

$$C_0 = C_{00} + \frac{C_{01}}{\varepsilon_\alpha} + \frac{C_{02}}{\varepsilon_\alpha^2} \quad (6.48)$$

$$C_i = C_{i0} + C_{i1}\varepsilon_\alpha + C_{i2}\varepsilon_\alpha^2 \quad (6.49)$$

donde  $i = 1, 2, 3$  y  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{i0}$ ,  $C_{i1}$  y  $C_{i2}$  son los coeficientes del modelo que, a su vez, también se obtienen mediante técnicas de regresión.

Sin embargo, aunque inicialmente se simplificó la integral al máximo y se extrajeron de la integral el mayor número de términos posibles, se ha comprobado que, para el mismo modelo de  $\Delta P_{sFit}$  dado por la Ec. 6.46, se produce un mejor ajuste con la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{sFit} = \frac{P_{snum}}{M_t \frac{1+u}{u} e^{b_1} e^{b_9 e^S} \omega_1^{1+b_6} r_{b1}^{b_6} v_o^{b_7} ((1+u) \cos \beta \operatorname{tg} \alpha'_t)^{b_8}} \quad (6.50)$$

y por tanto, la potencia perdida aproximada se calcula con la siguiente ecuación:

$$P_{sFit} = M_t \frac{1+u}{u} e^{b_1} e^{b_9 e^S} \omega_1^{1+b_6} r_{b1}^{b_6} v_o^{b_7} ((1+u) \cos \beta \operatorname{tg} \alpha'_t)^{b_8} \left[ C_0 \left( \frac{M_t}{b} \right)^{C_1} (\log_{10}(v_o))^{C_2} m^{C_3} \right] \quad (6.51)$$

donde los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  vienen dados por las Ecs. 6.48 y 6.49.

El procedimiento para obtener el valor de los coeficientes es el siguiente:

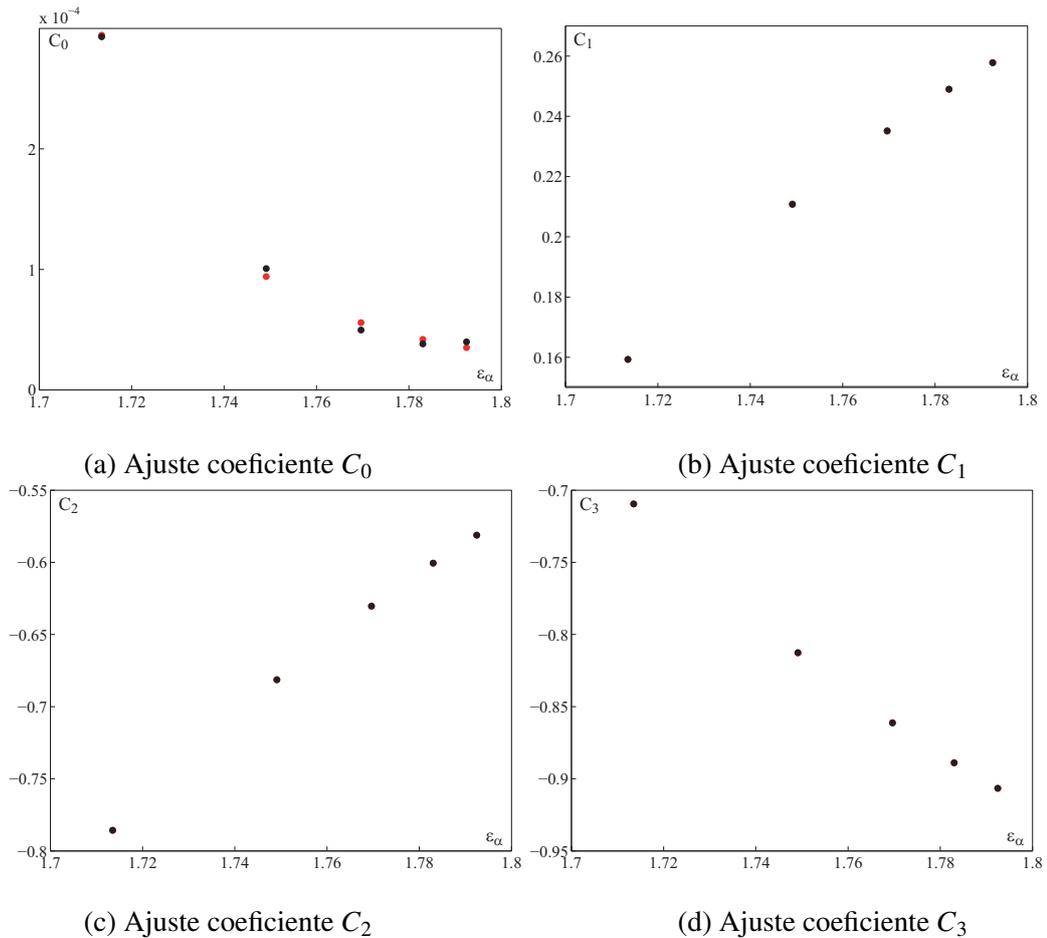


Fig. 6.22: Ajuste de los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  para  $Z_1 = 40$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$ .

- Resolviendo numéricamente las integrales se obtiene el valor de la potencia perdida para todas las combinaciones posibles de los parámetros de diseño y funcionamiento y con la Ec. 6.50 se calcula, para cada caso, el valor el término  $\Delta P_{sFit}$  a ajustar.
- Para cada combinación de valores de  $Z_1$ ,  $\alpha_n$  y  $u$ , se obtiene el valor de los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , ajustando el término obtenido en el paso anterior con la Ec. 6.46. En la figura 6.21 en la gráfica (a) se observa el ajuste que se obtiene cuando  $Z_1 = 40$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$  y  $u = 1$ , en rojo se representa el resultado numérico, es decir, los datos a ajustar y en negro se representa el ajuste conseguido. En la gráfica (b) se muestra el error relativo cometido. Cabe destacar que el ajuste obtenido para el resto de combinaciones de parámetros es similar

$\alpha_n$	$Z_1$	$C_{00}$	$C_{01}$	$C_{02}$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$
20°	24	1.46301E+01	-4.96430E+01	4.21430E+01	-1.08726E+01	1.22145E+01	-3.41201E+00
20°	30	2.32780E+00	-8.08416E+00	7.02158E+00	-1.44357E+01	1.59832E+01	-4.37484E+00
20°	40	1.44064E-01	-5.14361E-01	4.59236E-01	-1.60701E+01	1.73327E+01	-4.58783E+00
22,5°	24	7.57545E+00	-2.40415E+01	1.90808E+01	-1.41374E+01	1.69176E+01	-5.01088E+00
22,5°	30	9.16150E-01	-2.96736E+00	2.40331E+00	-1.69129E+01	1.99453E+01	-5.79486E+00
22,5°	40	5.40512E-02	-1.79229E-01	1.48604E-01	-1.80664E+01	2.08919E+01	-5.91831E+00
25°	24	4.05763E+00	-1.21558E+01	9.10556E+00	-1.72290E+01	2.17245E+01	-6.76071E+00
25°	30	4.28806E-01	-1.30750E+00	9.96829E-01	-1.95849E+01	2.44093E+01	-7.48146E+00
25°	40	2.57930E-02	-8.02352E-02	6.24062E-02	-2.07152E+01	2.54935E+01	-7.68630E+00

Tabla 6.7: Coeficientes de  $C_0$  y  $C_1$  para engranajes con bajo grado de recubrimiento.

al mostrado.

- Posteriormente para cada combinación de  $Z_1$  y  $\alpha_n$  se realiza el ajuste de los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , según las Ecs. 6.48 y 6.49, en función del grado de recubrimiento transversal obtenido al variar la relación de transmisión entre los 5 valores especificados en la tabla 6.2. En la figura 6.22 se muestra el ajuste obtenido para cada uno de los coeficientes, los puntos rojos son los valores a ajustar y en negro se representa el ajuste realizado. Se ha observado que el coeficiente  $C_0$  tiene gran influencia sobre los resultados de la potencia y pequeños errores en dicho coeficiente incrementan considerablemente los errores en la potencia ajustada. Como los diferentes valores de  $Z_1$  y  $\alpha_n$  producen variaciones notables de los niveles de potencia, se ha optado por realizar un ajuste solo en función del grado de recubrimiento transversal, y tabular los diferentes coeficientes.

Este procedimiento se ha repetido para cada una de las combinaciones posibles de  $Z_1$  y  $\alpha_n$ . Los coeficientes para las transmisiones definidas para conseguir bajo grado de recubrimiento transversal se muestran en las tablas 6.7 y 6.8. Los coeficientes correspondientes a los valores de  $Z_1$  y  $\alpha_n$  necesarios para conseguir valores mayores de  $\varepsilon_\alpha$ , se muestran en las tablas 6.9 y 6.10

En las tablas 6.11 y 6.12 se muestra el coeficiente múltiple ajustado,  $R^2$ , obtenido para cada combinación de  $Z_1$  y  $\alpha_n$ , que determina la bondad del ajuste de nuestro

$\alpha_n$	$Z_1$	$C_{20}$	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{30}$	$C_{31}$	$C_{32}$
20°	24	-1.61759E+01	1.65907E+01	-4.51265E+00	2.13542E+01	-2.44291E+01	6.82403E+00
20°	30	-2.27890E+01	2.36360E+01	-6.33294E+00	2.84805E+01	-3.19665E+01	8.74968E+00
20°	40	-2.93697E+01	3.01509E+01	-7.86072E+00	3.17493E+01	-3.46654E+01	9.17566E+00
22,5°	24	-2.08160E+01	2.30524E+01	-6.62221E+00	2.78837E+01	-3.38351E+01	1.00218E+01
22,5°	30	-2.77119E+01	3.08518E+01	-8.75945E+00	3.34348E+01	-3.98905E+01	1.15897E+01
22,5°	40	-3.45617E+01	3.82850E+01	-1.06949E+01	3.57418E+01	-4.17839E+01	1.18366E+01
25°	24	-2.51778E+01	2.95323E+01	-8.85708E+00	3.40671E+01	-4.34489E+01	1.35214E+01
25°	30	-3.30389E+01	3.90854E+01	-1.16897E+01	3.87789E+01	-4.88186E+01	1.49629E+01
25°	40	-4.10811E+01	4.87362E+01	-1.45179E+01	4.10395E+01	-5.09871E+01	1.53726E+01

Tabla 6.8: Coeficientes de  $C_2$  y  $C_3$  para engranajes con bajo grado de recubrimiento.

$\alpha_n$	$Z_1$	$C_{00}$	$C_{01}$	$C_{02}$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$
13°	40	6.78542E+00	-3.15462E+01	3.67089E+01	-1.25813E+01	1.06672E+01	-2.25572E+00
13°	50	6.82242E-01	-3.28262E+00	3.95167E+00	-1.46734E+01	1.20848E+01	-2.46435E+00
15°	40	2.32132E+00	-9.92265E+00	1.06099E+01	-1.42051E+01	1.29960E+01	-2.94837E+00
15°	50	2.17710E-01	-9.57231E-01	1.05262E+00	-1.53250E+01	1.36515E+01	-2.99519E+00
17°	40	6.67129E-01	-2.63988E+00	2.61280E+00	-1.49498E+01	1.47225E+01	-3.57991E+00
17°	50	7.12139E-02	-2.88853E-01	2.93011E-01	-1.29214E+01	1.22852E+01	-2.85188E+00

Tabla 6.9: Coeficientes de  $C_0$  y  $C_1$  para engranajes con alto grado de recubrimiento.

modelo. Además, en las tablas se muestran los valores más característicos de los errores relativos de los 2400 casos simulados para cada combinación de  $Z_1$  y  $\alpha_n$ : error relativo medio  $E_{mean}$ , error relativo máximo  $E_{max}$  y error relativo mínimo  $E_{min}$ . El error relativo se calcula como:

$$E = \frac{P_{snum} - P_{sFit}}{P_{snum}} * 100 \quad (6.52)$$

Los resultados que se observan en las tablas muestran que el ajuste conseguido en todos los casos es bastante bueno, el coeficiente  $R^2$  siempre es mayor a 0,98 y los errores relativos medios que se obtienen son bastante pequeños. Sin embargo, los errores relativos para determinados casos pueden llegar hasta el 36 %, aunque siempre en el sentido de la seguridad y en valores de potencia, que traducido a rendimiento, estos errores no son significativos.

En la figura 6.23 se observa el aspecto de los errores relativos cuando  $Z_1 = 40$  y  $\alpha_n = 20^\circ$ , aunque el aspecto típico de los errores y las tendencias de dichos errores

$\alpha_n$	$Z_1$	$C_{20}$	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{30}$	$C_{31}$	$C_{32}$
13°	40	-2.01100E+01	1.59787E+01	-3.34101E+00	2.47716E+01	-2.13344E+01	4.51144E+00
13°	50	-2.61189E+01	2.04879E+01	-4.14531E+00	2.89558E+01	-2.41695E+01	4.92870E+00
15°	40	-2.33937E+01	2.02086E+01	-4.52782E+00	2.80192E+01	-2.59919E+01	5.89674E+00
15°	50	-2.85404E+01	2.42870E+01	-5.28267E+00	3.02590E+01	-2.73029E+01	5.99039E+00
17°	40	-2.58622E+01	2.41573E+01	-5.79930E+00	2.95087E+01	-2.94450E+01	7.15983E+00
17°	50	-2.47645E+01	2.22764E+01	-5.10131E+00	2.54518E+01	-2.45705E+01	5.70376E+00

Tabla 6.10: Coeficientes de  $C_2$  y  $C_3$  para engranajes con alto grado de recubrimiento.

$\alpha_n$	$Z_1$	$R^2$	$E_{mean}$	$E_{max}$	$E_{min}$
20°	24	0.9928	-0.2784	12.8074	-21.7724
20°	30	0.9886	-0.4470	16.4690	-30.1583
20°	40	0.9912	-0.7399	14.8044	-29.6915
22,5°	24	0.9871	-0.2530	17.2065	-30.9562
22,5°	30	0.9865	-1.3378	16.9318	-35.7889
22,5°	40	0.9938	0.3704	14.0746	-24.4767
25°	24	0.9822	1.5560	21.9924	-34.1181
25°	30	0.9873	1.1487	19.5087	-31.3027
25°	40	0.9956	-0.0277	11.7580	-21.4864

Tabla 6.11: Errores del modelo aproximado para engranajes con bajo grado de recubrimiento.

para el resto de combinaciones de  $Z_1$  y  $\alpha_n$  son similares a los mostrados en esta figura. Se observa que la mayoría de los errores se encuentran dentro de una banda y que, para valores pequeños de la viscosidad y para valores pequeños de la tensión máxima, los errores se incrementan. El signo nos indica que el error se producirá en el sentido de la seguridad por lo que los resultados de potencia perdida obtenidos son ligeramente superiores a los reales.

Por tanto, la potencia perdida para un engranaje recto con coeficientes de desplazamiento nulos, con altura de cabeza para piñón y rueda estándar y con distancia entre centros nominal, se calcularía con la Ec. 6.51 y los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  con las Ecs. 6.48 y 6.49 donde  $i = 1, 2, 3$  y  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{i0}$ ,  $C_{i1}$  y  $C_{i2}$  son los coeficientes del modelo que se obtendrían de las tablas mostradas anteriormente.

$\alpha_n$	$Z_1$	$R^2$	$E_{mean}$	$E_{max}$	$E_{min}$
13	40	0.9912	0.5145	15.7395	-20.7845
13°	50	0.9886	0.0719	17.8502	-26.6589
15°	40	0.9848	-0.3814	19.1079	-31.2476
15°	50	0.9859	0.0642	19.6202	-32.7057
17°	40	0.9898	0.0770	16.6223	-28.1199
17°	50	0.9930	0.8495	15.2537	-24.9769

Tabla 6.12: Errores del modelo aproximado para engranajes con alto grado de recubrimiento.

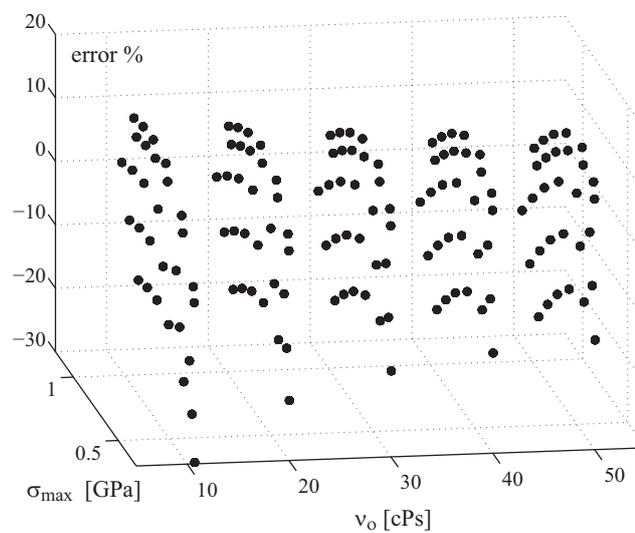


Fig. 6.23: Error relativo entre la potencia perdida numérica y la obtenida con la Ec. 6.51 para el caso:  $Z_1 = 40$  y  $\alpha_n = 20^\circ$ .

La potencia perdida para cualquier otro tipo de transmisión se debería de calcular implementando y resolviendo numéricamente las Ecs. 6.37 y 6.38 propuestas para el cálculo de el rendimiento; aunque como aproximación para un cálculo inicial podría ser válida la potencia obtenida con la Ec. 6.51 para los mismos datos de la transmisión, pero haciendo que el ángulo de hélice sea cero, los coeficientes de desplazamiento nulos, la altura de cabeza para piñón y rueda estándar y la distancia entre centros nominal. Incluso se podría obtener una mejor aproximación multiplicando la potencia obtenida por la Ec. 6.51 por un factor que se obtendría de las gráficas donde se muestran la relación sobre la potencia perdida de estos parámetros con respecto a lo que

se ha denominado potencia de referencia, Figs. 6.15, 6.16, 6.18 y 6.19. Lógicamente el error cometido en el cálculo de la potencia sería mayor que el mostrado en las tablas 6.11 y 6.12, pero incluso en estos casos el error puede llegar a ser inferior al que se obtendría de calcular la potencia perdida con otro coeficiente de fricción, como se ha mostrado en el epígrafe 6.3.3 y como aproximación para un cálculo inicial podría ser válido.

# Capítulo 7

## Conclusiones

El objetivo de esta Tesis Doctoral quedó establecido en el desarrollo de un modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente de alto grado de recubrimiento transversal (High Transverse Contact Ratio, HTCR), esto es, con grado de recubrimiento transversal mayor que 2. Se trata de proporcionar una herramienta válida para la realización de diseños preliminares, evitando el alto coste computacional de las simulaciones por elementos finitos, o que pueda servir de fundamento de un método de cálculo de la capacidad de carga, suficientemente consistente para una propuesta de normalización. Ciertamente, es muy escasa la atención que hasta la fecha han prestado los distintos comités de normalización -ISO y AGMA como más representativos- a este tipo de transmisiones, que sin embargo son cada vez más utilizadas en la industria por su mejor reparto de carga entre las distintas parejas de dientes en contacto, que proporciona una mayor capacidad de carga a igualdad de tamaño o peso.

Para el desarrollo del modelo se han seguido las mismas directrices, ampliamente contrastadas, que la totalidad de las normas de engranajes existentes utilizan en sus métodos de cálculo: modelos sencillos de la teoría lineal de la elasticidad para los cálculos a flexión (ecuación de Navier), las ecuaciones de Hertz del contacto entre cilindros para los cálculos a presión superficial, o modelos de pérdidas por fricción a lo largo del engrane debidas al deslizamiento de las superficies para la estimación del

rendimiento. Todo ello, a partir de un modelo de distribución de carga a lo largo de la línea de contacto no uniforme, que tiene en cuenta la diferente rigidez de la pareja de dientes en cada punto de contacto, obtenida a por aplicación del principio de mínimo potencial de deformación.

En el itinerario seguido para realización de estas tareas se pueden distinguir cuatro etapas:

1. Generalización del modelo de distribución de carga de mínimo potencial de deformación.
2. Formulación de un modelo de cálculo a presión superficial de engranajes HTCR.
3. Formulación de un modelo de cálculo a rotura en la base de engranajes HTCR.
4. Desarrollo de una propuesta de cálculo del rendimiento.

A continuación se presentan con detalle las actividades desarrolladas y las conclusiones alcanzadas en cada una de ellas.

## **7.1. Generalización del modelo de distribución de carga de mínimo potencial de deformación**

El modelo de distribución de carga de mínimo potencial de deformación se expresa a partir del potencial unitario inverso, y de su integral (o sumatorio, en el caso de engranajes rectos) a lo largo de la línea de contacto. Para este potencial unitario inverso se había conseguido una formulación analítica aproximada sumamente sencilla, mediante una función cosenoidal, que venía expresada en función de dos únicos parámetros: el grado de recubrimiento transversal y el parámetro del perfil del punto inferior de contacto. Pese a su simplicidad, esta función cosenoidal había dado excelentes resultados en la aproximación de la fuerza por unidad de longitud en infinidad de estudios realizados. Sin embargo, perdía precisión en algunos casos de interferencia de tallado en la base del diente del piñón -no en todos-, en los que la

función potencial unitario inverso no se ajustaba a una curva cosenoidal, incluso perdía su simetría.

Enseguida se vio que el ajuste era muy bueno para dientes con altura de cabeza igual al módulo y radios de cabeza ajustados a la distancia entre centros de operación, de manera que se mantuviese la holgura radial establecida (lo que se ha venido en llamar altura efectiva de contacto igual a dos veces el módulo). Eso dejaba de ocurrir en dentaduras con penetración, no tanto por la eliminación de material, que apenas tiene influencia, como por la posible aparición de engrane en vacío, es decir, la ausencia de contacto entre los puntos de la cabeza del diente contrario y los que, por efecto de la penetración, han sido eliminados del perfil. El mismo efecto se presentaba cuando, sin interferencia de tallado, se rebajaba la cabeza del diente contrario, eliminando igualmente el contacto en ese intervalo de la línea de engrane.

Como era de esperar, se ha comprobado que la asimetría introducida por la reducción de la altura efectiva de cabeza se representa por la misma función cosenoidal troncada en el extremo, con una reducción del dominio de definición igual al intervalo en que no se produce contacto. Del mismo modo, un alargamiento de la altura de cabeza de los dientes se representa mediante un alargamiento del intervalo de contacto, y por tanto del intervalo de definición de la función potencial inverso, pero la formulación cosenoidal continúa siendo perfectamente válida.

Se ha comprobado, asimismo, que la modificación de la distancia entre centros de operación -sin ajuste de la altura de cabeza, es decir, con modificación de la holgura radial- no introduce ninguna nueva asimetría en la función potencial unitario inverso, por lo que el alargamiento o acortamiento del intervalo de contacto -según los ejes se acerquen o se alejen- habrá de afectar por igual a ambos extremos del dominio de definición de la función. Sin embargo, puesto que esta modificación no afectará en ningún caso al parámetro del perfil del punto de cabeza del piñón (que define el límite superior del dominio de la función), una vez troncada o alargada la función en ambos extremos, será necesaria una traslación de ejes, para dejar el punto superior de contacto en el mismo sitio en que estaba.

Todo lo anterior se ha formulado con la misma ecuación cosenoidal, considerando un grado de recubrimiento ficticio y un punto inferior de contacto ficticio, y limitando el dominio de definición al intervalo real de engrane (definido por el parámetro del punto inferior de contacto y el grado de recubrimiento efectivos).

Y, como es natural, todo esto es válido para cualquier valor de la modificación de la distancia entre centros de operación, sin más restricción que la de que el engrane sea posible, es decir, que no se viole la restricción de interferencia, así como de los alargamientos o acortamientos de las cabezas de los dientes, incluyendo el caso de alturas de cabeza diferentes en rueda y piñón. Ello hace que el modelo mejorado desarrollado sea válido para todos los dientes exteriores de perfil de evolvente, cualesquiera que sean sus dimensiones, normalizadas o no.

Los resultados obtenidos mediante esta formulación analítica aproximada de la distribución de carga se han comparado con los obtenidos por integración numérica de las ecuaciones de la elasticidad, y se ha demostrado que los niveles de error son sumamente pequeños en todos los casos, proporcionando valores del coeficiente de determinación múltiple ajustado  $R^2$  superiores a 0,995 en la mayoría de los casos. También se ha comparado la función potencial unitario inverso con la que correspondería a la distribución de presiones de contacto obtenidas a través de una simulación por elementos finitos, encontrándose de nuevo un ajuste muy razonable entre ambas curvas.

## **7.2. Formulación de un modelo de cálculo a presión superficial de engranajes HTCR**

El modelo a presión superficial se ha desarrollado siguiendo un proceso totalmente paralelo al que la norma ISO propone en su método de cálculo: se utiliza la ecuación de Hertz para el contacto entre cilindros y se calcula la tensión con los radios de curvatura de los perfiles en cada punto de contacto. La única diferencia consistió en la fuerza por unidad de longitud considerada, que corresponde, naturalmente, con la

distribución de carga desarrollada, y que se aplicó al cálculo a engranajes de alto grado de recubrimiento transversal. Se calculó el valor de la tensión en todos los puntos de la línea de contacto, extendiendo el análisis a todas las líneas de contacto en un ciclo de engrane completo. Mediante el empleo de técnicas de cálculo numérico se determinó el valor máximo de la tensión en el ciclo de engrane (la tensión crítica), así como el punto de contacto y la posición de engrane en la que se presenta (es decir, las condiciones críticas de carga). Finalmente, y tras el análisis de toda esa información, se formuló la siguiente propuesta de cálculo de la tensión de contacto crítica:

1. Para engranajes rectos, la tensión de contacto crítica se localiza siempre en uno de estos cuatro puntos:
  - El límite inferior del intervalo de contacto.
  - El límite inferior del intervalo inferior de contacto doble.
  - El límite superior del intervalo inferior de contacto doble.
  - El límite inferior del intervalo superior de contacto doble.

Se entiende siempre que los puntos se refieren a la rueda con parámetro del punto inferior de contacto menor (designada por *piñón virtual*), que aunque habitualmente coincide con el piñón, puede no serlo en transmisiones con baja relación de transmisión -próxima a 1- y elevado desplazamiento en el piñón. La manera más simple de obtener la tensión de contacto crítica consiste en calcular la tensión en los cuatro puntos, y seleccionar la mayor. En el caso de engranajes con altura efectiva de contacto estándar (dos veces el módulo) el último de los puntos nunca puede ser crítico.

2. Para engranajes helicoidales, la tensión de contacto crítica se localiza siempre en uno de los siguientes puntos:
  - El límite inferior del intervalo de contacto.
  - Un máximo local entre el límite inferior y el punto medio del intervalo de contacto.

Como en el caso anterior, está referido siempre al *piñón virtual*. Para el parámetro del perfil del máximo local se ha proporcionado una ecuación aproximada, obtenida por interpolación lineal entre los valores del parámetro del punto medio requeridos para localizar el máximo en cada extremo (límite inferior y punto medio), que arroja resultados de elevada precisión en los valores de la tensión. También se ha establecido la condición para que el máximo esté en uno u otro punto. En todos los casos, los cálculos se llevan a cabo admitiendo la coincidencia de extremos de las funciones  $\phi(\xi)$  e  $I_v(\xi_0)$ ; que aunque puede no darse cuando el máximo es local y el recubrimiento en el salto es menor que 1, el error que introduce no sólo es pequeño, sino que estadísticamente reduce el error cometido en la estimación del máximo.

Los resultados de este modelo de tensión de contacto se compararon con los obtenidos por resolución numérica del problema de maximización, obteniéndose unos valores del error muy pequeños, para engranajes rectos siempre inferiores a  $\pm 2,5\%$  y para engranajes helicoidales típicamente en torno al  $\pm 2\%$ , y muy aceptables errores máximos, que no superaron el nivel del  $6\%$ .

También se han comparado resultados del modelo con resultados de simulaciones por elementos finitos y con resultados del método de cálculo propuesto por ISO. Los análisis realizados por elementos finitos arrojaron no sólo valores muy parecidos de las tensiones de contacto críticas, sino también de la distribución de tensiones a lo largo de toda la línea de contacto, en todo el ciclo de engrane. Sin embargo el análisis comparativo con ISO arroja mayores discrepancias. En efecto, sucede con frecuencia que el punto de contacto crítico del modelo desarrollado no coincide con el que ISO utiliza para los cálculos, como tampoco la fuerza por unidad de longitud considerada. Pero las mayores discrepancias son debidas al factor de relación de contacto que introduce ISO que, seguramente pensado para engranajes convencionales, toma valores muy altos para grado de recubrimiento por encima de 2.

### **7.3. Formulación de un modelo de cálculo a rotura en la base para engranajes HTCR**

También el modelo a rotura en la base se ha desarrollado siguiendo un proceso paralelo al que ISO propone en su método de cálculo: se utiliza la ecuación de Navier para la flexión y se calcula la tensión en la sección de la base del diente que utiliza ISO para la tensión crítica -aquella cuya tangente al perfil forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje de simetría del diente-, introduciendo el mismo factor de corrección de tensiones que introduce ISO para tomar en consideración tanto el efecto de concentración de tensiones en la base como el error que se comete al aplicar el principio de Saint-Venant en secciones no alejadas de los puntos de aplicación de las cargas, como ocurre en los dientes de engranaje. En el caso de engranajes helicoidales también se introduce el factor de ángulo de hélice, que tiene en cuenta la oblicuidad de las líneas de contacto. Se introdujo en esas ecuaciones la expresión analítica de la carga por unidad de longitud obtenida y se evaluó la tensión en cada una de las secciones transversales del diente, para todas las condiciones de carga del diente correspondientes a un ciclo completo de engrane.

Se desarrolló, mediante el empleo de técnicas de cálculo numérico, un método aproximado para la determinación del valor de la tensión crítica y de las condiciones críticas de carga, en toda la sección crítica del diente y en todo el ciclo de engrane. A partir de ese análisis se formuló la siguiente propuesta de cálculo de la tensión flexión en la base crítica:

1. Para engranajes rectos, la tensión de flexión se calcula en el punto medio del intervalo superior de contacto doble.

Se ha comprobado que el máximo absoluto siempre se localiza en algún punto de dicho intervalo superior de contacto doble, cerca del límite inferior del intervalo -o en el mismo límite- para grados de recubrimiento transversal pequeños (ligeramente superiores a 2), y sobre el límite superior para grados

de recubrimiento transversal próximos a 3. Incluso, para engranajes con altura efectiva de contacto no estándar, el máximo se puede desplazar al límite superior del intervalo inferior de contacto doble. Sin embargo, en todos los casos los valores de la tensión crítica son muy similares a los de las tensiones en el punto medio del intervalo superior de contacto doble, ya que en todo ese intervalo la tensión experimenta siempre una variación muy ligera, de manera que el error cometido por localizar la tensión crítica en el punto medio del intervalo es, por lo general, muy pequeño, y en cualquier caso, inferior al 5 %.

2. Para engranajes helicoidales, la tensión de flexión crítica se calcula en el punto de contacto correspondiente a una rotación del 72 % de la rotación de una sección transversal del diente desde el engrane en el punto inferior de contacto hasta el engrane en la cabeza.

Ha quedado probado que el máximo se encuentra siempre entre el 70 % y el 74 % de dicho giro, y que el error introducido al considerar el punto medio de ese intervalo de giro es insignificante. También se ha comprobado que, en el caso de altura de efectiva de contacto no estándar, el error es aún menor si se considera el 72 % de giro ficticio, es decir, calculado a partir de los valores ficticios del grado de recubrimiento y del parámetro del punto inferior de engrane. Sin embargo, la diferencia en los valores de la tensión calculados con los valores ficticios o los efectivos es tan pequeña, que es preferible una formulación homogénea para ambos casos, que complicar el cálculo por una mejora en la precisión que no alcanza el 0,5 %.

Al igual que en modelo a presión superficial, los cálculos se llevan a cabo admitiendo la coincidencia de extremos de las funciones  $\Upsilon(\xi)$  e  $I_v(\xi_0)$ ; que aunque no se dará cuando el recubrimiento en el salto sea menor que 1, el error que introduce permanece dentro de los niveles admisibles requeridos para los cálculos.

Los resultados de este modelo de tensión de flexión se compararon con los

obtenidos por resolución numérica del problema de maximización, obteniéndose unos valores del error muy pequeños (típicamente en torno al  $\pm 2\%$ ), y muy aceptables errores máximos, que no superaron el nivel del  $-2,5\%$  al  $4\%$ .

También se han comparado resultados del modelo con resultados de simulaciones por elementos finitos y con resultados del método de cálculo propuesto por ISO. Los análisis realizados por elementos finitos arrojaron valores de las tensiones ligeramente inferiores a los del modelo propuesto, con mayor diferencia en el caso de engranajes helicoidales que en el de rectos, aunque las tendencias eran paralelas en los dos casos. Gran parte de esta discrepancia se corrige si se considera el alivio en la tensión en la base que proporciona la componente de compresión de la carga sobre el diente, que ISO no considera para asegurar un pequeño margen de seguridad adicional, y por esa misma razón tampoco se ha considerado en el modelo propuesto. Si se toma en cuenta esta corrección por compresión, las diferencias en el caso de engranajes rectos prácticamente desaparecen, y se reducen notablemente en los engranajes helicoidales, aunque no desaparecen del todo debido fundamentalmente a que la tensión de Von Mises que proporciona el modelo de elementos finitos y la tensión de Navier que calcula el modelo propuesto no representan exactamente la misma magnitud.

El estudio comparativo con ISO, en este caso arroja discrepancias de tal magnitud (del orden del  $\pm 40\%$ ) que no permiten ningún análisis mínimamente consistente. La conclusión a la que se ha llegado es que la norma requiere, en este punto, una urgente revisión; y lo corrobora el hecho de que, para el cálculo de la tensión crítica, ISO proponga unas condiciones de carga que no se dan en ningún momento del engrane: la totalidad de la carga actuando en el punto inferior de contacto del diente.

## **7.4. Desarrollo de un modelo de rendimiento de engranajes HTCR**

El modelo de rendimiento desarrollado se basó en un planteamiento simple de cálculo de las pérdidas como el producto del coeficiente de fricción, por la fuerza

normal y por el deslizamiento relativo de las superficies, pero todos ellos definidos en cada punto de la línea de contacto. Para el coeficiente de fricción se utilizó un modelo desarrollado en la Ohio State University, variable con la posición de engrane y que toma en consideración todas las variables, geométricas y de funcionamiento, de la transmisión, así como las condiciones de carga y las propiedades del lubricante. La fuerza normal por unidad de longitud se calculó a partir la distribución de carga aquí presentada, y el deslizamiento relativo en cada punto se calculó a partir de las ecuaciones del perfil. Esas pérdidas se integraron a lo largo de toda la línea de contacto y de un ciclo completo de engrane, y a partir de ellas y la potencia transmitida se evaluó el rendimiento mecánico.

Este modelo no ha podido compararse con resultados experimentales, sencillamente porque no hay publicados datos experimentales de rendimiento de engranajes HTCR. No obstante, y puesto que el modelo planteado es válido también para engranajes convencionales, se pudo comparar con algunos resultados experimentales encontrados en la bibliografía, así como con un método simple publicado por ISO. Aunque se aprecia alguna discrepancia en los resultados numéricos, se puede apreciar que las tendencias son bastante coincidentes.

Aunque la complejidad del problema no ha permitido, en este caso, la formulación de un modelo analítico aproximado general, se ha desarrollado un método semianalítico, que se apoya en valores tabulados de parámetros de correlación, válido para engranajes rectos, dentro de un rango razonablemente amplio de valores de los parámetros geométricos. Este método, aunque comete un error de cierta significación en la evaluación de la potencia perdida, muestra unas tendencias de variación con los parámetros de diseño bastante parecidas a las que se obtienen por integración numérica, lo que proporciona una herramienta de diseño útil por su bajo coste computacional.

# Capítulo 8

## Futuras líneas de investigación

En lo que se refiere al modelo de cálculo resistente presentado, y con el propósito de adecuarlo a los requerimientos de un documento de normalización, se habrán de acometer en el futuro una serie de trabajos, entre los que cabría destacar los siguientes como más inmediatos:

1. Replanteo del cálculo de factores de influencia relacionados con la distribución de carga. Los factores de distribución de carga tienen en cuenta multitud de factores que intervienen en el contacto (desde la distancia entre apoyos del eje hasta el ancho de cara del engranaje), pero el objetivo final es ajustar al valor máximo de la tensión en el diente que realmente se presenta al que calcula mediante el procedimiento que establece. Es evidente que esa relación entre el máximo estimado y el máximo real depende directamente de la hipótesis de distribución de carga empleada en el cálculo, y el empleo de una distribución de carga no uniforme exige un nuevo factor de corrección que contemple esta nueva relación.
2. Validación experimental del modelo. En la actualidad, la información experimental publicada de engranajes de alto grado de recubrimiento transversal es escasísima, lo que no ha permitido realizar una validación experimental del modelo. Pero es evidente que ningún comité de normalización aceptará una propuesta de norma que no haya sido validada experimentalmente.

En lo que se refiere al modelo de rendimiento, también cabría plantear la posibilidad de una nueva propuesta de normalización, que hasta ahora no ha desarrollado ningún comité. Sin embargo, serían necesarios una serie trabajos previos, entre los que destacan:

1. Validación experimental del modelo. Tampoco en este caso hay publicados datos experimentales de rendimiento de engranajes HTCR, y apenas unos cuantos ensayos con engranajes convencionales.
2. Formulación analítica aproximada del modelo. En la Tesis se ha presentado un método semianalítico, válido para engranajes rectos, útil por su bajo coste computacional, pero que presenta unos márgenes de error un poco elevados. Será necesario mejorar la precisión del método, y generalizarlo al caso de engranajes helicoidales.

Por último, y aunque no forman parte del alcance de esta tesis, existen otros tipos de transmisiones a los que se podría aplicar el mismo procedimiento para obtener una distribución de carga que tenga en cuenta la rigidez de la pareja de dientes en cada punto de contacto, y a partir de ella sus modelos de cálculo resistente:

1. Engranajes de dentado interior, que cada vez se utilizan más en la transmisión de potencia entre ejes paralelos, y que apenas han sido tenidos en cuenta por los comités de normalización.
2. Engranajes con modificaciones del perfil, incluidos aquéllos que presentan contacto puntual localizado, pues el reparto entre parejas en contacto simultáneo nunca será uniforme.
3. Engranajes con perfiles asimétricos, muy estudiados en la actualidad por su buen comportamiento a presión superficial, por el menor ángulo de presión en el perfil por el que contactan, y a rotura en la base, por el ángulo de presión mayor en el perfil opuesto, lo que produce una mayor anchura en la base del diente.

Todas ellas son susceptibles de alcanzar grados de recubrimiento transversal mayores que 2, lo que deberá ser también objeto de estudio.



# Bibliografía

[1]

[2] ISO Technical Report 13989-1:2000. *Calculation of scuffing load capacity of cylindrical, bevel and hypoid gears*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2000.

[3] ISO Technical Report 13989-2:2000. *Calculation of scuffing load capacity of cylindrical, bevel and hypoid gears*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2000.

[4] AGMA Standard 2001-D04. *Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth*. American Gear Manufacturers Association, Alexandria, 2004.

[5] ISO Standard 6336-1: 2006. *Calculation of load capacity of spur and helical gears- Part 1:Basic principles, introduction and general influence factors*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.

[6] ISO Standard 6336-2: 2006. *Calculation of load capacity of spur and helical gears- Part 2:Calculation of surface durability (pitting)*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.

[7] ISO Standard 6336-3: 2006. *Calculation of load capacity of spur and helical gears- Part 3:Calculation of tooth bending strength*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.

- [8] AGMA Information Sheet 908-B89. *Geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth*. American Gear Manufacturers Association, Alexandria, 1989.
- [9] Fernandez del Rincon A., Viadero F., Iglesias M., García P., A. de Juan, y Sancibrian R. *A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions*. *Mechanism and Machine Theory*, 61:30–58, 2013.
- [10] Fuentes A. *Modelo de Cálculo a Flexión de Engranajes Cilíndricos de Perfil de Evolvente*. PhD thesis, UNED, Madrid, 1996.
- [11] Kapelevich A. y Shekhtman Y. *Direct Gear Design: Bending Stress Minimization*. *Gear Technology*, páginas 44–47, September/October 2003.
- [12] Kawalec A., Wiktor J., y Ceglarek D. *Comparative analysis of tooth-root strength using ISO and AGMA standards in spur and helical gears with FEM-based verification*. *Journal of Mechanical Design*, 128 (5):1141–1159, 2006.
- [13] Terekhov A.S. *Hydraulic losses in gearboxes with oil immersion*. *Vestnic Mashinostroeniya*, 55 (5):13–15, 1975.
- [14] Abersek B. y Flasker J. *Numerical methods for evaluation of service life of gear*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (15):2531–2545, 1995.
- [15] Changenet C. y Velez P. *A model for the prediction of churning losses in geared transmissions - preliminary results*. *Journal of Mechanical Design*, 129 (1):128–133, 2007.
- [16] Cioc C., Cioc S., Kahraman A., y Keith A. *A non-Newtonian thermal EHL model of contacts with rough surface*. *Tribology Transactions*, 45:556–562, 2002.
- [17] Naruse C., Nemoto R., Haizuka S., y Takahashi H. *Influences of tooth profile in frictional loss and scoring strength in the case os spur gears*. En JSME

- International Conference on Motion and Power Transmissions, páginas 1078–1083. Hiroshima, Japan, 1991.
- [18] Santus C., Beghini M., Bartilotta I., y BeFacchinighini M. *Surface and subsurface rolling contact fatigue characteristic depths and proposal of stress indexes*. International Journal of Fatigue, 45:71–81, 2012.
- [19] Weber C. *The deflection of loaded gears and the effects on their load carrying capacity*. Dept. of Scientific and Industrial Research, Germany, Report n° 3, 1949.
- [20] Seager D.L. *Some Elastic Effects in Helical Gear Teeth*. PhD thesis, University of Cambridge, 1967.
- [21] Buckingham E. *Analytical Mechanics of Gears*. McGraw–Hill, 1949.
- [22] Lauster E. y Boos M. *Zum Wärmehaushalt mechanischer Schaltgetriebe für Nutzfahrzeuge*. VDI-Berichte, 488:45–55, 1983.
- [23] Litvin F. y Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [24] Deng G., Nakanishi T., y Inoue K. *Bending load capacity enhancement using an asymmetric tooth profile*. JSME International Journal, Series C, 46 (3), 2003.
- [25] Henriot G. *Engrenages. Conception, Fabrication, Mise en Oeuvre*. 7e edition, Dunod, Paris, 1999.
- [26] Niemman G. y Winter H. *Maschineelement, vol. 2*. Springer, 1989.
- [27] Benedict G.H. y Kelly B.W. *Instantaneous coefficients of gear tooth friction*. En Transactions of ASLE, ASLE Lubrication Conference, páginas 57–70, 1960.
- [28] Moldovean Gh., Velicu D., y Velicu R. *On the maximal contact stress point for cylindrical gears*. Besançon, France, 2007.
- [29] Merrit H.E. *Gears*. Sir Isaac Pitman and Sons, 1946.

- [30] Lin H.H. y Liou C. *A parametric study of spur gears dynamics*. The university of Memphis, Tennessee, 1998.
- [31] Lin H.H. y Liou C. [http : //www.fzg.mw.tum.de/](http://www.fzg.mw.tum.de/). Institute for Machine Elements, Gear Research Center (FZG), 2005.
- [32] Howard I. *The Dynamic Modeling of Spur Gear in Mesh Including Friction and A Crack*. Mechanical System and Signal Processing, 15:831–853, 2001.
- [33] Brauer J. y Andersson S. *Simulation of wear in gears with flank interference - a mixed FE and analytical approach*. Wear, 254, 2003.
- [34] Hedlund J. y A.Lehtovaara. *Modeling of helical gear contact with tooth deflection*. Tribology International, 40):613–619, 2007.
- [35] Kuria J. y Kihui J. *Prediction of overall efficiency in multistage gear trains*. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering, 5 (3):171–177, 2011.
- [36] Perret-Liaudet J. *Dynamics of Truck Gearbox*. En 6th International Power Transmission and Gearing Conference, páginas 249–258. Arizona, USA, 1994.
- [37] Pedrero J.I. *Análisis Dinámico de Engranajes Cilíndricos de Perfil de Evolvente*. UNED, Madrid, 1996.
- [38] Pedrero J.I. *Análisis dinámico de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente*. UNED, Madrid, 1996.
- [39] Pedrero J.I., Rueda A., y Fuentes A. *Determination of the ISO tooth form factor for involute spur and helical gears*. Mechanism and Machine Theory, 34 (1):89–103, 1999.
- [40] Pedrero J.I., Vallejo II., y Pleguezuelos M. *Calculation of tooth bending strength and surface durability of high trasverse contact ratio spur and helical gear drives*. Journal of Mechanical Design, 129:69–74, 2007.

- [41] Pedrero J.I., Artés M., y Fuentes A. *Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente*. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, 3, 1999.
- [42] Pedrero J.I., Artés M., y García-Masiá C. *Determination of Effective Path of Contact of Undercut Involute Gear Teeth*. Journal Mechanical Engineering Science, 218:751–760, 2004.
- [43] Pedrero J.I., Estrems M., y Fuentes A. *Determination of the efficiency of cylindrical gear sets*. En IV world congress on gearing and power transmissions, Vol. 1. Paris, Francia, 1996.
- [44] Pedrero J.I. y Pleguezuelos M. *Influencia de la interferencia de tallado en la capacidad de transmisión de engranajes cilíndricos*. En Actas VI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, volumen 2, páginas 1279–1284. Coimbra, 2003.
- [45] Pedrero J.I., Pleguezuelos M., Artés M., y Antona J.A. *Load distribution model along the line of contact for involute external gears*. Mechanism and Machine Theory, 45:780–794, 2010.
- [46] Pedrero J.I., Pleguezuelos M., y Muñoz M. *Simplified calculation method for the efficiency of involute spur gears*. En International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE). San Diego, 2009.
- [47] Pedrero J.I., Pleguezuelos M., y Muñoz M. *Contact stress calculation of undercut spur and helical gear teeth*. Mechanism and Machine Theory, 46:1633–1646, 2011.
- [48] Pedrero J.I., Pleguezuelos M., y Muñoz M. *Critical stress and load conditions for pitting calculations of spur and helical gear teeth*. Mechanism and Machine Theory, 46:425–437, 2011.

- [49] Pedrero J.I., Pleguezuelos M., y Sánchez M.B. *Simplified calculation method for the efficiency of involute helical gears*. En *New trends in mechanism science*. Cluj-Napoca, Rumania, 2010.
- [50] O'Donoghue J.P. y Cameron A. *Friction and temperature in rolling sliding contacts*. En *ASLE Transactions*, 9, páginas 186–194, 1966.
- [51] Blake J.W. y Cheng S. *A Surface Pitting Life Model for Spur Gears: Part II Failure Probability Prediction*. *Journal of Tribology*. Trans. ASME, 113 (3):719–724, 1991.
- [52] Raptis K., Costopoulos T., Papadopoulos G., y Tsolakis A. *Rating of Spur Gear Strength Using Photoelasticity and the Finite Element Method*. *American J. of Engineering and Applied Sciences*, 3 (1):222–231, 2010.
- [53] Umezawa K., Suzuki K., y Ishikawa J. *On the Design of a Low-Vibration of Helical Gear for Automobiles*. En *Proc. 4th Int. Pacific Conf. On Automotive Eng.*, 1987.
- [54] Faur L. y Cheng S. *Micro Endommagements de surface des dents D'Engranges cémentes Trempes Rectifies*. En *Proceedings International Congress. Contact Mechanics.*, páginas 96–97. Burdeos, Francia, 1994.
- [55] Vedmar L. *n the design of external involute helical gears*. *Transaction of Machine Elements Division*, Lund Technical University, 1981.
- [56] Ajmi M. y Vex P. *A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears*. *Mechanism and Machine Theory*, 40, 2005.
- [57] García-Masiá M. *Optimización del diseño de engranajes por análisis paramétrico*. PhD thesis, UNED, Madrid, 1994.
- [58] Pleguezuelos M. *Modelo de distribución de carga de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente*. PhD thesis, UNED, Madrid, 2006.

- [59] Rameshkumar M., Venkatesan G, y Sivakumar P. *Finite Element Analysis of High Contact Ratio Gear*. En AGMA Technical Paper, 2010.
- [60] Hotait M.A., Talbot D., y Kahraman A. *An Investigation of the Influence of Shaft Misalignment on Bending Stresses of Helical Gears with Lead Crown*. Gear Technology, November/December, 2008.
- [61] Niemman N. *Tratado teórico-práctico de elementos de máquinas*. Labor, 1993.
- [62] Anderson N.E. y Loewenthal S.H. *Efficiency of Nonstandard and High Contact Ratio Involute Spur Gears*. En Fourth International Power Transmission and Gearing Conference. Massachusetts, 1984.
- [63] Pedersen N.L. *Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization*. Mechanism and Machine Theory, 45 (11):1707–1720, 2010.
- [64] Dawson P. *Windage Loss in Larger High-Speed Gears*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 198A (1):51–59, 1984.
- [65] Dawson P. *High-Speed Gear Windage*. GEC Review, 4 (3):164–167, 1988.
- [66] Sainsot P., Vex P., y Duverger O. *Contribution of Gear Body to Tooth Deflections - A New Bidimensional Analytical Formula*. Transactions of the ASME, 126, 2004.
- [67] Basan R., Franulovic M., y Lovrin N. *Influence of HCR-Gears geometric parameters on their load carrying capacity and frictional losses*. SMOLENICE, 2007.
- [68] Handschuh R. y Kilmain C. *Preliminary comparison of experimental and analytical efficiency results of high speed helical gear trains*. En ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Chicago, Illinois, USA, 2003.

- [69] Cornell R.W y Westervelt W.W. *Dynamic load on the teeth of spur gears*, volumen 100. *Dynamic Tooth Loads and Stressing for High Contact Ratio Spur Gears*, 1978.
- [70] Cheng S., Cheng H.S., Keer L.M., y Ai X. *Surface Crack Initiation Under Contact Fatigue: Experimental Observation and Contact Analysis*. *Journal of Tribology*. Trans. ASME, 115 (3):658–665, 1993.
- [71] Li S. *Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications*. *Mechanism and Machine Theory*, 42 (1):88–114, 2007.
- [72] Li S. *Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears*. *Mechanism and Machine Theory*, 43 (12):1557–1584, 2008.
- [73] Seetharman S., Kahraman A., Moorhead M., y Petry-Johnson T. *Oil churning Power losses of a gear pair: Experiments and model validation*. *Journal of Tribology*, 131 (2), 2009.
- [74] Mohanty S.C. *Tooth Load Sharing and Contact Stress Analysis of High Contact Ratio Spur Gears in Mesh*. *IE(I) Journal-MC*, 87, 2003.
- [75] Harris S.L. *Dynamic load on the teeth of spur gears*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 172, 1958.
- [76] Aida T. *Fundamental Research on Gear Noise and Vibration I*. *Transaction of the Japanese Society of Mechanical Engineering*, 35:2113–2119, 1969.
- [77] Ishida T. y Li S. *A method for analyzing tooth load distribution and contact stress of a thin wall spur gear using FEM and a mathematical programming method*. *Trans. JSME Series C*, 63 (606):585–591, 1997.
- [78] Petry-Johnson T. *Experimental investigation of spur gear efficiency*. Las Vegas, Nevada, USA, 2007.

- [79] Petry-Johnson T., Kahraman A., Anderson N., y Chase D. *An experimental investigation of spur gear efficiency*. ASME Journal of Mechanical Design, 130 (6), 2008.
- [80] Yada T. *The measurement of gear mesh friction losses*. ASME 72-PTG-35, October 8-12, 1972.
- [81] Yada T. *Review of Gear Efficiency Equation and Force Treatment*. JSME International Journal, Series C (40), 1997.
- [82] Lim T.C. *Vibration Transmission through Rolling Element Bearings, Part III : Geared Rotor System Studies*. Journal of Sound and Vibration, 153 (1):31–54, 1991.
- [83] Krantz T.L., Cooper C.V., Townsend D.P., y Hansen B.D. *Increased surface fatigue lives of spur gears by application of a coating*. 2003.
- [84] Moorthy V. y Shaw B.A. *Contact fatigue performance of helical gears with surface coatings*. Wear, 276-277:130–140, 2012.
- [85] Stavitsky V., Nosko P., Fill P., Karpov A., y Nelychko N. *Load independent power losses of gear systems: a review*. TEKA Kom. Mot. I Energ. Roln., 10 (B):205–213, 2010.
- [86] A. Vaidyanathan. *An experimental investigation of helical gear efficiency*. PhD thesis, The Ohio State University, 2009.
- [87] Lewis W. *Investigations of the Strength of Gear Teeth*. Proc. of Engineers Club of Philadelphia, 1893.
- [88] O'Donnell W.J. *Stresses and Deflections in Built-In Beams*. ASME, Journal Eng. Ind., 1963.
- [89] H. Xu. *Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs*. PhD thesis, The Ohio State University, 2005.

- [90] Chen Y. y Tsay C. *Stress analysis of a helical gear set with localized bearing contact*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38:707–723, 2002.
- [91] Michlin Y. y Myunster V. *Determination of power loss in gear transmission with rolling and sliding friction incorporated*. *Mechanism and Machine Theory*, 37 (2):167–174, 2002.
- [92] Wang Y. *Survey of Nonlinear Vibration of Gear Transmission Systems*. *Appl. Mech. Rev*, 56 (3), 2003.
- [93] Misharin Y.A. *Influence of the friction condition on the magnitude of the friction coefficient in the case of rollers with sliding*. En *Proc. Int. Conf. On Gearing*, páginas 159–164. *Inst. Mech. Eng. London*, 1958.
- [94] Drozdov Y.N. y Gavrikov Y.A. *Friction and scoring under the conditions of simultaneous rolling and sliding of bodies*. En *Wear*, páginas 291–302, 1967.
- [95] Chen Z. y Shao Y. *Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack*. *Mechanism and Machine Theory*, 62:63–74, 2013.