TESIS DOCTORAL

2015

EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA PROPUESTA BASADA EN LA MODULARIZACIÓN

ELÍAS IRAZOQUI BECERRA

MAGISTER EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA, ORGANIZACIÓN

ESCOLAR, DIDÁCTICAS ESPECIALES

Director: Dr. D. ANTONIO MEDINA RIVILLA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA, ORGANIZACIÓN
ESCOLAR, DIDÁCTICAS ESPECIALES.
FACULTAD DE EDUCACIÓN.

EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA PROPUESTA BASADA EN LA MODULARIZACIÓN

ELÍAS IRAZOQUI BECERRA

MAGISTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

Dr. D. ANTONIO MEDINA RIVILLA

AGRADECIMIENTOS

En primer término, vayan mis sinceros agradecimientos al Director de esta Tesis, el Dr. Don Antonio Medina Rivilla, a quién conocí el año 2000 en la Universidad de Salamanca, ocasión en que nos dictó un curso dentro del programa de Maestría en Tecnología Educativa, programa que dirigía en aquel entonces el Dr. Don Francisco Xavier Tejedor, Profesor Titular de la Universidad de Salamanca. Dr. Antonio Medina Rivilla, gracias por confiar en mí y en que la realización de esta Tesis era posible, gracias por sus respuestas a mis demandas como también por el entusiasmo y metas que había que lograr para alcanzar este objetivo académico.

Hay dos personas que merecen mi agradecimiento especial: mi Señora, Doña Lucía Alicia Giordano Solar y, el amigo, el Dr. Don Hernán Guiñez, a ellos mi gratitud por su generosidad, tan escasa hoy en día, en donde los valores humanos parecen en franca retirada, pero que se hicieron patente en estas dos bellas personas por sus consejos y orientaciones en todo momento. Tampoco puedo dejar de mencionar a mi hermana Adriana Irazoqui Becerra, quien con sus sugerencias, apoyo e ideas hizo todo más fácil, mi gratitud alcance hasta ella.

Extiendo también mis agradecimientos a mis colegas de la Universidad del Bío-Bío del Departamento de Ciencias Básicas, a su Director el Dr. Don Marko Rojas Medar, y al Decano de la Facultad de Ciencias de nuestra Universidad, Don Mauricio Cataldo M., quienes con su colaboración y apoyo han permitido la concreción del desarrollo de la presente tesis doctoral.

La lista podría continuar, pero en honor a ser breve, termino estos agradecimientos expresando mi gratitud a mis dos hijos, Paula y José Luis, dos hijos maravillosos que Dios me ha dado, quienes con su forma de ver la vida e instalados en el siglo XXI, me han hecho ver de manera diferente los acontecimientos tanto cotidianos como generales y, con ello, se ha vuelto más fácil la tarea de cualquier emprendimiento a realizar, como la presente Tesis, que hoy está en vuestras manos, a ellos mis más sinceros agradecimientos, gracias hijos amados entrañablemente.

Mención especial merece también mi amada esposa Lucía, sin su apoyo y ayuda esto habría quedado a mitad de camino. Sin duda, mi gratitud a Dios, quien nos da la vida y nos provee de abundantes bendiciones expresadas de mil formas diferentes, que muchas veces no alcanzamos a percibir, dada nuestra corta sensibilidad en estas materias. La vida así se nos manifiesta expansiva y no subyugada a nuestros caprichos e intereses particulares que nos impiden ver que siempre hay más posibilidades y que nuestro gran designio es, en definitiva, producir posibilidades para quienes constituyen nuestro entorno, nuestros estudiantes y las personas a quienes amamos, y que conforman ese sentido humano y espiritual de nuestras vidas.

Por último, estas palabras de agradecimiento y gratitud, las realizo de forma extensiva a todas las personas que de una u otra forma me animaron para concretar el desarrollo de éste trabajo, meta por momentos inalcanzable, pero que, poco a poco, se fue haciendo realidad y que hoy se plasma en este documento impreso como también digital.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO VI

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

APÉNDICE DOCUMENTAL

CAPÍTULO I

PROBLEMATIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

"Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano".

Isaac Newton (1642-1727)

1.1. Delimitación del problema

En este primer acápite del capítulo inicial de esta Tesis Doctoral, se define el problema que se abordará, cual es, la problemática tanto de la enseñanza como del aprendizaje del cálculo diferencial entre los estudiantes de pre-grado de la Universidad del Bío-Bío (UBB), ubicada en la octava Región del país, Chile, y que tienen como parte de su currículo de formación inicial la asignatura de cálculo diferencial, asignada, por regla general, como Cálculo 1 en su malla curricular en las diferentes carreras que esta institución imparte en su nivel de pre-grado, donde destacan las ingenierías tanto de nivel medio, esto es, las Ingenierías de Ejecución, como las ingenierías de nivel mayor, como son las Ingenierías Civil, por citar algunas de las carreras en las que el aprendizaje del cálculo diferencial es de suyo importante. El problema de la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial se traduce, en breves palabras, en que los estudiantes no logran los conocimientos que de ellos se esperan al revisar los contenidos que esta área del conocimiento matemático involucra, y, por tanto, los malos rendimientos académicos no se hacen esperar.

Hay que tener presente además que, el cálculo diferencial e integral es sin duda un producto cultural que ha tomado su tiempo en alcanzar la concreción de sus ideas más importantes, como son la variación y, por ende, la derivación y la acumulación, esto es, la integración. Ha sido fruto de la actividad humana durante siglos, y ha tenido ocupado a personajes ilustres de la actividad matemática, lo anterior deja entrever que no se trata de cualquier conocimiento y, por tanto, tiene con creces su merecido lugar dentro de las producciones científicas de la humanidad, de modo que adquirir dicho conocimiento de la mejor manera posible reviste, sin duda, mucha importancia tanto en un curso normal de matemática como los que siguen a este que trata de la variación y la cuantificación del cambio.

Luego, avanzar en una mayor comprensión de los temas fundamentales del cálculo diferencial, por parte de los estudiantes , como son los conceptos de: función, límite y continuidad de funciones, derivada y sus temas relacionados resulta sin duda una ventaja para su formación académica presente y futura, de ahí entonces que como académicos responsables del quehacer docente, ocuparse en generar propuestas de innovación curricular para lograr un mejor desempeño académico de los estudiantes que se traduzca en aprendizajes con entendimiento, sea un hecho de gran importancia docente.

Es claro además que, hoy en día, el centro del discurso educativo ha pasado de la enseñanza al aprendizaje, bajo ese mismo predicamento la institución (UBB), donde tiene lugar la presente investigación, ha generado como consecuencia de ello un modelo educativo que da cuenta de este cambio de paradigma para realizar el proceso de enseñanza aprendizaje con sus estudiantes. Lo anterior se constituye así en un referente importante al momento de ejercer la docencia del pregrado en todas las asignaturas del currículo de las diferentes carreras que ofrece la institución al servicio de la región como del país, incluidos sus estudiantes extranjeros.

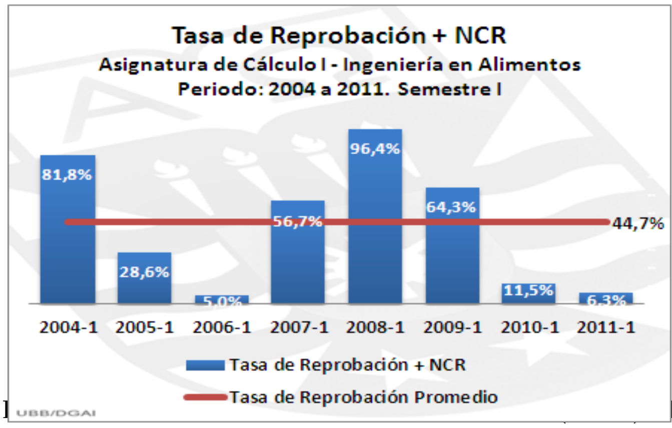
La importancia que reviste conocer bien esta materia, como parte de la formación académica para el estudiante resulta innegable, pues ella, sin duda contribuirá a una mejor y más fácil comprensión de los temas que se tratarán más adelante en el currículo de su carrera, independientemente de la carrera a la cual pertenezca, su justificación, por tanto, no admite reparo alguno.

1.2. Antecedentes del problema

La enseñanza y, por ende, el aprendizaje de la Matemática constituye un quebradero de cabeza para quienes la ejercen como docentes, en todos sus niveles. Contribuye a ello el hecho arraigado en la población que es una asignatura difícil de aprender. Por otro lado, por regla general, los padres trasmiten a sus hijos esta fobia o el escaso éxito que ellos tuvieron cuando fueron estudiantes y la Matemática fue su dolor de cabeza, junto a otras disciplinas de carácter científico, como la Física, la Química y la Biología. Amén de lo anterior, se puede señalar que las Carreras: Ingeniería en Alimentos e Ingeniería en Recursos Naturales, donde se inicia este estudio de investigación, tienen en la Matemática bajos rendimientos académicos, constituyéndose así, en asignatura crítica y, por tanto, emprender una política de mejora como la que se está iniciando con esta investigación, constituye un aliciente no sólo para el cuerpo académico sino también para quienes dirigen estas carreras universitarias y, en definitiva, para toda la Institución en su conjunto. No se debe olvidar que los procesos de Acreditación a que las Instituciones de Educación Superior deben someterse, contemplan el tiempo de permanencia que presentan los estudiantes de las Carreras en estudio y la deserción que en ellas se producen, junto a otros factores que dan cuenta si un estudiante cursa la Carrera en el tiempo que se estipula para su normal desarrollo en ella, de manera que una reprobación de tan sólo una asignatura de Matemática implicará un mayor tiempo en la Universidad, con el consiguiente costo monetario que ello significa para el estudiante y su familia y una mala evaluación de los pares evaluadores en el proceso de Acreditación de las carreras, ello significa que una no acreditación implica no financiar con dineros del estado el curso de la carrera para los estudiantes.

Como una forma de evidenciar el grave problema de la Reprobación en la asignatura de Cálculo 1, en la Carrera de Ingeniería en Alimentos, por ejemplo, se muestra a modo de resumen la Tasa Reprobación + NCR (No Cumple Requisito) entre los años: 2004 y 2011, en el primer semestre:

Tabla nº 1. Tasa de reprobación: Cálculo1, Ing. en Alimentos, 2004-2011, S-I.

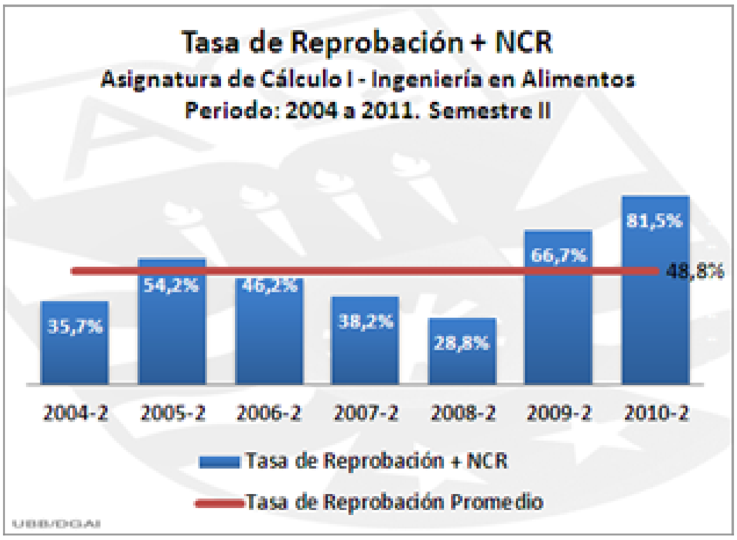


I BB.

Sorprende la inferencia que el gráfico anterior proporciona, donde se puede apreciar una baja en la tasa de Reprobación en los últimos años, 2010 y 2011, con un 11, 5% el año 2010-1, y un 6, 3 % para el año 2011-1. Lo anterior se puede atribuir, en gran medida, a la oportuna intervención de políticas de mejora que se han venido implementando en los últimos años y que se explicarán en el transcurso de la presente Tesis Doctoral (DGAI, 2012).

Un hecho curioso se presenta durante los segundos Semestres académicos (Semestre II), para esta misma asignatura, la que se imparte entre los meses de agosto a diciembre de cada año lectivo. En ella se aprecia una tasa de Reprobación por debajo del promedio entre los años 2004-2 y 2008-2 y un aumento significativo de Reprobación para los años 2009-2 y 2010-2.

Tabla nº 2. Tasa de reprobación: Cálculo1, Ing. en Alimentos, 2004-2011, S-II.

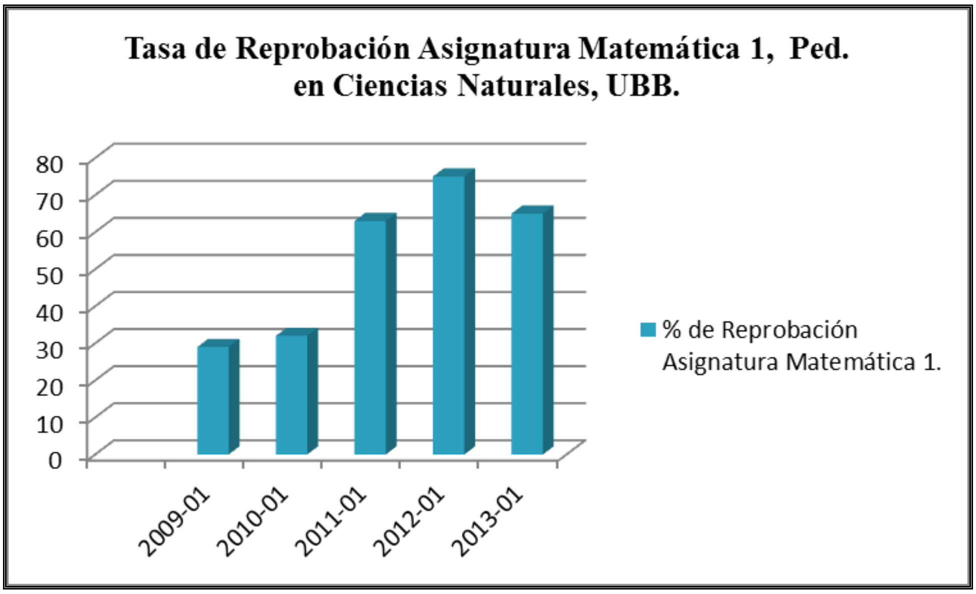


Fuente: DGAI – UBB.

Los gráficos presentados, los cuales resumen un estudio estadístico de varios años, están indicando de manera clara y precisa la elevada tasa de Reprobación Promedio que los estudiantes logran al cursar la Asignatura de Cálculo 1 en esta Carrera universitaria, con una tasa del orden del 44,7 % para el Primer Semestre y de un 48,8% para el Segundo Semestre. Esta situación no sólo se presenta en esta carrera en particular, sino que es común a las otras Ingenierías, como también en la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales de la institución, por citar otro referente al respecto.

En efecto, prueba fehaciente de ello es lo que ha ocurrido en esta carrera de formación docente en ciencias, donde los índices de reprobación para la asignatura de cálculo en los últimos años son bastante elevados, según las actas del registro académico de la institución. El cuadro siguiente sintetiza estos comentarios claramente.

Tabla n°3. Tasa de reprobación: Matemática 1, Pedagogía en Ciencias Naturales, 2009-2013.



Fuente: DGAI- UBB-Chillán.

Los hechos anteriores, con las evidentes consecuencias que ello trae aparejado, han servido de motivación para considerar esto como un verdadero problema, donde claramente los estudiantes no sólo reprueban esta asignatura, sino que además, no aprenden Cálculo de manera satisfactoria.

Por otro lado, según estudios recientes, este escaso logro de resultados de aprendizaje de parte de los alumnos se debería, entre otros factores, a la mala formación que tuvieron los actuales maestros de aula que fueron sus profesores cuando los actuales estudiantes cursaron su enseñanza Secundaria, Enseñanza Media en el contexto chileno.

Como se sabe, los maestros en su gran mayoría, replican los modelos docentes que ellos mismos recibieron en los centros de formación de profesores. Según Vergara y Miño (2009), las actividades académicas realizadas por estos profesores se han manifestado, en términos generales, en:

- *Una **baja interacción** con los estudiantes en el momento de impartir la asignatura*

- *Una **clase centrada** básicamente **en el profesor***

- *Los **aprendizajes memorísticos** están por sobre la comprensión de los conceptos fundamentales de las Ciencias.*

Esta síntesis del análisis realizado por los investigadores Vergara y Miño estaría dando, en cierta medida, la respuesta a los bajos rendimientos alcanzados por los estudiantes que hoy están en la Universidad.

Lo expuesto afianza la idea que los estudiantes ***no poseen las competencias mínimas*** para abordar los temas que se deben tratar en la Universidad y, por tanto, los malos rendimientos no se hacen esperar. Se puede agregar a lo anterior el desconocimiento por parte de los estudiantes de temas tan fundamentales como: el ***concepto de función*** y el de una ***correcta operatoria del álgebra básica.*** Esto que se afirma se constata año tras año al recibir nuevos estudiantes universitarios, con el agravante que cada vez poseen menos conocimientos previos para aprender las materias que el Cálculo Diferencial contempla.

Los hechos anteriores configuran un panorama desalentador hoy en día, donde el profesor no encuentra el eco a su propuesta educativa, se suma a ello el no querer hacerse cargo de esta situación y endosar la responsabilidad de este fracaso a los propios estudiantes y a los profesores del colectivo anterior, como ya se ha dicho. En definitiva, una cadena de culpabilidades que en nada resuelve el problema de fondo, pero que ha estado presente en los diversos colectivos educativos como una forma de justificar los pésimos resultados que los estudiantes obtienen en el aprendizaje de las Matemáticas en la enseñanza superior.

Una forma parcial de remediar la situación anterior y poder revertir tales hechos, consiste en intentar cambiar las prácticas de los profesores de la Enseñanza Secundaria, pero una intervención en los maestros en ejercicio ha revelado un escaso cambio en dichas prácticas, ya que sólo se logran cambios en la estructura de la clase, en la que se incorporan ***“actividades de inicio y desarrollo”***, pero no se logra un cierre pedagógico de ella. En estas condiciones, la capacitación no permite un logro en la modificación de las representaciones sobre la enseñanza de las ciencias en general y, por ende, menos aún en la Matemática (Vergara y Miño, 2009).

En vista de lo anterior, las posibilidades de intervención pedagógica y didáctica se han de centrar, por un lado, en la formación inicial de maestros, y por otro lado, en la Capacitación de los Profesores en ejercicio de la propia Universidad, tratando de que estos últimos puedan realizar una gestión de aula más acorde con los conocimientos previos de los estudiantes y las orientaciones que las propias carreras se dan en sus perfiles de egreso de sus estudiantes.

1.3. El problema y su importancia

1.3.1. Justificación del problema

Los hechos relatados sobre los malos rendimientos académicos de los estudiantes constituyen en sí el problema que se desea abordar y, por tanto, el presente trabajo representa un denodado intento por cambiar estas prácticas de aula y, junto a ello, mejorar los aprendizajes de los estudiantes que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial. La importancia entonces de una intervención pedagógica que dé respuesta a esta problemática de bajos rendimientos académicos, está más que justificada. No se puede continuar ejerciendo una docencia que hasta ahora se considera como tradicional, en la que el profesor es el centro de dicho proceso educativo, produciendo con ello una clase unidireccional y en donde se privilegian los contenidos más que el verdadero aprendizaje en sí. En suma, las Matemáticas ***se siguen enseñando en blanco y negro***, esto es, como siempre. De continuar con esta forma de realizar la docencia, los resultados seguirán siendo los mismos, algunos cursos bien, otros mal y la rueda del tiempo seguirá su curso. Tal vez el cambio más notorio es la sustitución de las antiguas tablas de trigonometría y logaritmos unido a las reglas de cálculo por calculadoras de bolsillo y ordenadores portátiles que manejan mejor los estudiantes de hoy que sus propios maestros.

Es más, como el contenido matemático permanece inalterable, lo que no sucede con otras disciplinas, el docente se limita, las más de las veces, a copiar en la pizarra una selección de temas que se encuentran en los textos más frecuentes, creyendo con esto que el conocimiento ha pasado de la pizarra al estudiante, craso error, pues con el paso del tiempo las deficiencias en sus conocimientos se manifiestan claramente en las evaluaciones de los estudiantes.

Además de lo señalado anteriormente, los contenidos matemáticos siempre resultan ser los mismos, independientemente del estudiante que se tenga en frente, sea este un profesional que se forma en Química, Ciencias Económicas o en las Matemáticas puras, por citar tan sólo un ejemplo. Con esto se quiere recalcar que se produce una enseñanza alejada del contexto para el cual se imparte y, por tanto, desvinculada completamente de las situaciones en las que se forma el futuro profesional. De esta manera, la Matemática resulta sin ningún sentido de aplicación y su carácter de sirvienta de todas las ciencias no es tal, sino sólo de reina sin ningún sentido práctico para quien la recibe (Gómez, 2002).

Hay muchas razones que justifican la práctica docente actual, tal vez, la más socorrida ***es la escasa importancia que la Docencia de Pregrado*** tiene en la Carrera Académica. Además, muchas Instituciones han iniciado una política que ***privilegia la Investigación sobre la Docencia*** en materia de estímulos económicos para los docentes. Ya se puede suponer, entonces, cual ha sido el resultado de dicha política. Bien lo decía Ortega y Gasset hace ya mucho tiempo atrás en su obra “Misión de la Universidad” de 1930:

> *“… uno de los males extraídos de la confusión de la ciencia y universidad ha sido ofrecer las cátedras, según la manía del tiempo, a los investigadores, los cuales son, casi siempre, pésimos profesores que sienten la enseñanza como un robo de horas de su trabajo de laboratorio o archivo”*
>
> *(Ortega y Gasset, 1930, p. 18)*

Esta situación descrita por Ortega y Gasset se sigue repitiendo hoy en día en muchos docentes, con ello no se quiere afirmar que todos los investigadores tengan esta postura, pero se da en una buena parte de ellos y, de manera irrefutable.

Los bajos rendimientos académicos que los estudiantes obtienen semestre tras semestre, resultan ser la consecuencia natural de la baja comprensión de los conceptos fundamentales que configuran el Cálculo Diferencial, ello, por lo demás, ha sido reportado por un sin número de investigadores de la Didáctica de la Matemática respecto de esta materia (Artigue, 1995; Azcárate, 1996; Tall, 1990, 1996; Hitt, 2003, 2007; Salinas y Alanis, 2009; Rojas, 2010; Engler, 2011; García y Dolores, 2012). Situación que se repite año tras año, hasta la actualidad.

Así, se impone con fuerza el hecho de intentar la generación de una propuesta que cambie, en alguna medida, las prácticas habituales sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, de modo tal de poder avanzar en la comprensión del concepto de la derivada, que es su concepto fundamental y, de este modo, dotar a los estudiantes de las competencias necesarias para que puedan resolver los problemas que el cálculo diferencial hace posible con las herramientas de las que dispone sin más.

Es importante entonces sumarse a esta iniciativa de proveer de una propuesta didáctica que nace del seno de esta Institución y, por ende, ***ajustada a su contexto*** y pertinente por tanto a su realidad educativa presente, que es la que en definitiva mejor se conoce. Es claro entonces que la validez de esta propuesta depende del entorno cultural y social en la cual se desarrolla y, por tanto, ajustada en este espacio-tiempo donde se hace carne, sin embargo, los alcances de ella no son fáciles de identificar y el tiempo se encargará de ser el mejor juez de dicha propuesta. Por ahora se realiza este viaje, lleno de ilusiones, tratando de esta forma llenar una necesidad sentida y ajustada al momento histórico que corresponde vivir, imprimiendo así de sentido a la docencia de hoy.

Ahora bien, generar una propuesta de innovación didáctica en cualquier materia, no pasa solamente por una persona, en este caso el Doctorando, sino que se necesita la voluntad y participación de otros docentes y, sin duda, de un colectivo de estudiantes donde poder realizarla. De lo contrario, todo se traduce en un mero ejercicio intelectual sin ningún sentido práctico y de trascendencia para el contexto en el que se está inmerso. Lo anterior supone, en alguna medida, fijar la atención en los maestros, tanto de Secundaria como del colectivo universitario, es allí donde se debe poner atención para que en conjunto se pueda generar una propuesta ajustada a contexto y con plena participación de los actores directos del cambio que se desea producir.

Ha pasado ya mucho tiempo de recriminaciones mutuas entre los maestros de Secundaria y Universitaria, es hora ya de sentar las bases de un nuevo trato que genere los cambios necesarios para producir prácticas de aula más acordes a lo que se necesita hoy en día, dejando naturalmente, el espacio necesario para que cada docente realice su tarea en libertad y como fruto del consenso intelectual que nace de la propia interacción entre sus pares, sin dejar de lado, claro está, las directrices que personas más capacitadas ven como absolutamente necesarias de realizar en el aula con los estudiantes, por parte de sus profesores.

Pero, si un diálogo fecundo se hace necesario con los maestros de Secundaria, también es necesario poner atención a la actual formación inicial de maestros para este nivel educativo. Se debería imprimir en ellos un deseo permanente de superación personal que se traduzca en un perfeccionamiento continuo a lo largo de su vida

Profesional, que es la manera natural como se entiende hoy el ejercicio profesional, una continua profesionalización a lo largo de la vida y en contacto permanente con quienes están a cargo de la formación profesional de los maestros de hoy, esto es algo de lo cual se carece, la formación profesional, se puede decir una vez más, no termina con el hecho de abandonar la Universidad, ha de continuar siempre.

Así, la esfera de acción no se limita, tan sólo a los maestros de Secundaria (Enseñanza Media en Chile) en pleno ejercicio profesional sino, como ya se ha expuesto, en los futuros maestros. Son ellos los que en definitiva pueden producir un cambio en las generaciones de estudiantes que el día de mañana ingresará a las aulas universitarias. De este modo cobra importancia la formación inicial de Profesores, ello obliga, por tanto, a no descuidar tan importante patrimonio cultural en este ámbito de trabajo educativo.

Como puede apreciarse, todos los sectores educativos son importantes, la Enseñanza Básica, la Enseñanza Secundaria y también la Universitaria, un tránsito defectuoso, con bajos aprendizajes en cualquiera de ellos traerá sus consecuencias que no se harán esperar. En la esfera más inmediata, la preocupación está centrada en una formación académica lo más profesional posible en el colectivo docente universitario. De producirse tal profesionalización debería ejercer su influencia benéfica tanto en la formación inicial de maestros como en la docencia universitaria para estudiantes de carreras no matemáticas, como es el caso de los estudiantes que se forman como futuros ingenieros para atender las necesidades del país en las materias que a ellos les incumbirá.

No se debe olvidar que la Universidad del Bío-Bío, como institución de carácter público y estatal de la región del Bío-Bío (Chile), se ha propuesto, entre una de sus misiones fundamentales:

> *"Formar profesionales de excelencia capaces de dar respuesta a los desafíos de futuro, con un modelo educativo cuyo propósito esencial es la formación integral del estudiante a partir de su realidad y sus potencialidades, que le conduzcan naturalmente a una óptima realización personal"*
>
> *(Plan General de Desarrollo Universitario, 2010-2014)*[1]

Al señalar esto, se intenta dar la debida importancia que el ***Modelo Educativo*** debe tener como foco orientador no sólo de esta propuesta educativa para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, sino para la dictación de las demás asignaturas que conformarán el Currículo de los futuros egresados, de no ser así, dicho Modelo Educativo se constituye en letra muerta y sin ningún sentido como una más de las iniciativas que se impulsan desde la propia Universidad.

Hay dos aspectos más que guardan relación con la Justificación e importancia de una investigación como la que da vida a la presente Tesis Doctoral.

El primer punto se refiere al hecho de ***incrementar el saber didáctico*** **en esta materia,** esto es, en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial. Contribuir a este conocimiento es de suyo importante, en atención a que avanzar en este sentido constituye conocimiento útil para el profesorado, tanto en ejercicio como para el que

[1] Plan General de Desarrollo Universitario en:
http://www.ubiobio.cl/miweb/webubb.php?id_pagina=4572

recién se forma e inicia en la arena educativa, donde si se dispone de mayor conocimiento se estará, por consecuencia lógica, mejor capacitado para enfrentar los desafíos que la educación va presentando con las nuevas generaciones de estudiantes.

El segundo punto, aunque de carácter tácito, y ya mencionado en la Introducción de este Capítulo inicial, faculta al doctorando para sentar las bases de futuras investigaciones en temas que guardan estrecha relación con el presente estudio, como podrían ser los considerados elementos esenciales del Cálculo Diferencial, a saber, los subtemas: ***"Funciones"*** *y* ***"Límites y Continuidad"***. Ambas áreas de estudio constituyen el llamado ***Pre-Cálculo*** y conforman sendos sectores de mucha importancia para un buen conocimiento del Cálculo Diferencial.

Por último, resulta de interés abordar la temática adyacente al cálculo diferencial, cual es, el ***cálculo integral***, que aunque su génesis es anterior al cálculo diferencial, hoy en día, por lo general se enseña a continuación del cálculo diferencial, salvo en muy pocos casos, como se puede apreciar en el texto de Cálculo escrito por Apostol (1990) y, en con un enfoque en paralelo en una reciente Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias, defendida por Rojas (2010).

1.3.2. Formulación del problema

¿Existen diferencias significativas en el aprendizaje del cálculo diferencial entre estudiantes que cursan esta materia bajo un diseño curricular modular versus un modelo tradicional de enseñanza?

1.4. Hipótesis

La Hipótesis general de trabajo que se ha planteado se puede expresar en los siguientes términos:

"La implementación de un diseño curricular modular genera mayores aprendizajes en el cálculo diferencial, el cual se expresa en un mejor rendimiento académico final entre los estudiantes que cursan esta asignatura bajo esta modalidad de trabajo versus aquellos que lo hacen de manera tradicional"

1.5. Variables, conceptualización, operacionalización

1.5.1. Variables:

- *Diseño curricular modular*
- *Método de enseñanza tradicional*
- *Aprendizaje del cálculo diferencial.*

1.5.2. Definiciones conceptuales:

***Diseño curricular Modular*:** se entenderá, para los efectos de esta investigación, por diseño curricular modular un diseño instruccional que permite disponer todas las unidades didácticas que comprende un curso normal de cálculo diferencial en dos módulos de trabajo consecutivos, un módulo 1 y un módulo 2.

Con la consiguiente ventaja que si el estudiante reprueba el módulo 1 debe cursar inmediatamente dicho módulo mientras se dicta el módulo 2, si reprueba por segunda vez el módulo1, habrá reprobado la asignatura, en caso contrario debe cursar el módulo 2 en un período intensivo, de aprobar este segundo módulo aprobará la asignatura, con el promedio aritmético obtenido en ambos módulos de trabajo.

***Método de enseñanza tradicional**:* se entenderá por método de enseñanza tradicional al método que ha sido la tónica para impartir las asignaturas de pregrado en la Universidad del Bío-Bío, esto es, con un carácter semestral en su duración en el tiempo y que consta de 16 semanas lectivas de clase y donde la nota final del curso se obtiene por medio de un promedio ponderado de las calificaciones parciales que obtiene el estudiante durante el transcurso del mismo.

Aprendizaje del cálculo diferencial. Respecto de ***aprendizaje propiamente tal*** se entenderá, aparte de la concebida como al *"nombre colectivo para designar diversos procesos complejos que conducen al cambio de conducta, se agregan las siguientes definiciones inspiradas en explicaciones de la teoría del aprendizaje;*

- *Producción de asociaciones entre representaciones;*

- *Producción de reacciones mediante asociación de un estímulo condicionado con otro no condicionado, con lo que el estímulo condicionado adquiere la capacidad de desencadenar la reacción (natural) en el incondicionado (condicionamiento clásico de Pavlov);*

- *Adquisición de una nueva reacción instrumental mediante selección y composición de movimientos realizados con éxito bajo estímulo –control, motivada por el impulso (D) y dependiente de refuerzos (condicionamiento instrumental u operante: Hull, Skinner);*

- *Reorganización de la situación mediante la formación de nuevas estructuras; por tanto, nueva articulación (organización) del material de aprendizaje mediante clasificación o formación de cluster (psicología de la Gestalt, elaboración de la información.*

A lo anterior hay que agregar que la idea de aprendizaje como adquisición de conocimientos, memorización, grabación mediante repetición, repetición de actos, es errónea, porque equipara el hecho del ejercicio con el auténtico proceso global que puede llevar a un cambio de la conducta.

Además, en la investigación del aprendizaje se distinguen:

a) *presentación de un material de aprendizaje;*
b) *ejercicio: intentar repetidamente resolver una tarea*
c) *auténtico proceso de aprendizaje;*
d) *retención;*
e) *reproducción, ejecución (perfomance);*
f) *olvido.* *(Dorsch, 2005, p. 53).*

Ahora bien, en lo que atañe al ***aprendizaje del cálculo diferencial***, se entenderá como la apropiación de las ideas, conceptos y procedimientos relacionados con los infinitésimos y los procesos infinitos en la búsqueda de: tangentes a las curvas, determinación de máximos y mínimos para una función, la resolución de problemas de optimización, de interpolación o de aproximación. Esta área de la Matemática comprende además el estudio de las temáticas de: ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en derivadas parciales (Bouvier y George, 2000). Su principal concepto es la derivada, la cual permite cuantificar y predecir las variaciones entre variables relacionadas las cuales sirven para modelar una situación problemática en particular (Stewart, 2010).

1.5.3. Definición operacional

Existirá aprendizaje del cálculo diferencial cuando se observe en el estudiante la capacidad de:

1. *Determinar el dominio, rango y gráfico de una función de una variable;*
2. *Estimar el valor del límite de una función en un punto y cuando x es grande positivo o negativo, según sea el caso;*
3. *Determinar las condiciones de continuidad para una función en un punto y en su dominio de definición;*
4. *Calcular, usando la definición clásica, el valor de la derivada en sentido local y global;*

5. *Comprender el significado geométrico y físico de la derivada, que le permita calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado y, la estimación de la velocidad y aceleración de una partícula.*

6. *Estimar, usando los criterios de la primera y/ o segunda derivada, el comportamiento creciente o decreciente de una función de variable real, de manera tal de determinar los máximos y/o mínimos locales y/o globales de una función;*

7. *Resolver, usando las técnicas del cálculo diferencial, los problemas de optimización en las que están en juego las variables que modelan una situación problemática específica.*

Así, en atención a los indicadores dados arriba existirán los siguientes niveles de aprendizaje, a saber:

Alto: *cuando se observen en el estudiante los siete puntos anteriores;*

Medio*: cuando se observen sólo los primeros seis puntos anteriores;*

Regular*: cuando se observen sólo los primeros cuatro puntos anteriores;*

Bajo: *cuando se observen sólo los primeros dos puntos anteriores;*

Lo anterior se traducirá, para los efectos operacionales, en una escala de medición que oscila entre uno (1) y siete (7) puntos, de manera tal que al aplicar el instrumento de medición (Pre-Post-Test de Cálculo) a los estudiantes, se considerará su aprendizaje como de nivel:

Alto si obtienen una puntuación igual o superior a seis;

Medio si su puntuación oscila entre cinco y seis puntos;

Regular: *si obtienen una puntuación entre tres y cuatro coma nueve;*

Bajo: *si su puntuación es menor que tres puntos.*

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general:

Probar que el diseño curricular modular genera aprendizajes significativos, el cual se expresa en un mejor rendimiento académico final de la asignatura de cálculo diferencial, comparado con el método tradicional de enseñanza usado con los estudiantes de la Universidad del Bío-Bío.

1.6.2. Objetivos específicos:

1. *Reunir evidencias suficientes que permitan dar cuenta de la aplicación del diseño curricular modular en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial respecto del rendimiento final de los cursos, en la propia institución.*

2. *Realizar una experiencia de campo de la aplicación del diseño curricular modular para un grupo curso de cálculo diferencial.*

3. *Medir inicialmente entre los estudiantes participantes de un nuevo curso de cálculo diferencial por medio de la aplicación de un Pre-Test tanto al grupo control como al grupo experimental.*

4. *Elaborar para el grupo experimental las actividades didácticas de aprendizaje, las cuales tomarán como referencia: el aporte de los investigadores, la aplicación de dos cuestionarios a docentes de cálculo, sobre los temas de "límite y derivadas" y, el análisis de diez*

textos de cálculo sobre estos mismos temas, amén de la experiencia docente.

5. *Poner en ejecución en el grupo experimental el diseño curricular modular, usando las actividades didácticas de aprendizaje.*

6. *Desarrollar para el grupo control la enseñanza tradicional del cálculo diferencial.*

7. *Aplicar a ambos grupos que conforman la investigación, esto es, al grupo control y al grupo experimental el correspondiente Post- Test.*

1.7. Sobre este estudio y sus proyecciones iniciales

A pesar que en el desarrollo de la presente tesis se dedica un capítulo completo, como es lógico, a las conclusiones y prospectiva del mismo (Capítulo VI), se ha estimado conveniente realizar algunos comentarios de entrada, de manera que el lector posea de antemano algunos aspectos, que en cierto modo dan orientación y sentido al trabajo y, por lo demás, resultan oportunos para cerrar este Capítulo inicial.

Lo cierto es que, pretender generar un propuesta de innovación curricular en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial que esté al alcance del docente y, como es lógico, se pueda desarrollar in situ, pasa por la participación decidida de muchos actores: profesores, alumnos y también el estamento administrativo de la Universidad, de no ser así resulta muy difícil de realizar, por no decir imposible.

Lo anterior como punto de partida, que aunque parezca claro, de no ser así toda propuesta muere antes de ser realizada. Segundo, se hizo bastante hincapié en la necesidad de cambiar o, al menos avanzar en la generación y puesta en escena de prácticas docentes innovadoras, apartándose de las tradicionales clases realizadas por los docentes, donde prima la clase expositiva y el estudiante no pasa de ser un simple espectador en ellas. Cambiar este paradigma educativo en los docentes al momento de realizar la trasposición didáctica no es tarea fácil, prueba fehaciente de ello es lo que nos recuerda Stenhause (2004), quien comenta que sólo el profesor puede cambiar al profesor, del mismo modo se podría afirmar entonces que: sólo la institución puede cambiar a la institución.

De ahí entonces que son las propias instituciones las que deben caminar hacia un cambio de renovación en sus prácticas educativas y, con ello, conformar un nuevo paradigma si desean realizar progresos en sus procesos de enseñanza, buscando nuevas y mejores metodologías de trabajo a nivel de aula para lograr avances en su desempeño educacional, sean éstos en materia de: contenidos disciplinares, respecto de qué enseñar y cómo hacerlo, como también suplir las falencias en materia de formación integral en su sentido más amplio posible y, de esta manera, formar profesionales más capaces y competentes, con ello se estará, en alguna medida, cumpliendo con la misión y visión que la Institución se ha dado a sí misma en materia docente.

Los buenos resultados académicos de los estudiantes, logrados con este diseño curricular modular como base, unido a otras iniciativas docentes, comienzan a dar sus frutos. En consecuencia, nuevas carreras de pregrado ven como una necesidad imperiosa reformular su quehacer docente, bajo esta modalidad de trabajo y, con ello, poder replicar el éxito que hasta ahora ha tenido esta nueva modalidad de trabajo para las asignaturas de ciencias básicas en los primeros años de estudio de pregrado donde se ha usado.

Sin embargo, tampoco se trata de aplicar dicha modalidad de trabajo, sin un previo análisis del rendimiento anterior en las asignaturas y de auscultar con qué capacidades docentes instaladas se cuenta para realizar tal innovación. Además, si el cuerpo docente no está convencido de que un tal cambio es pertinente y adecuado, su realización tiene muchos visos de fracasar o traducirse en más de lo mismo.

Mayores antecedentes sobre este acápite se expondrán, in extenso, en el Capítulo referido a las *Conclusiones y Prospectiva* del estudio tratado en esta tesis.

Por último, ya fuera del contexto de la presente tesis, y como es obvio en base a lo comentado, se realizarán estudios de otras experiencias de aulas, donde el diseño curricular Modular articulará al conjunto de propuestas docentes, con el claro objetivo de mejorar la propuesta de innovación inicial que da sustento y da forma a este trabajo de investigación de índole tanto teórico como experimental en sus primeros pasos.

*

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

"Educar no es dar carrera para vivir, sino templar el alma para las dificultades de la vida" *Pitágoras.*

2.1. Introducción

En este capítulo se desarrollan las ideas y principios que sustentan a la presente tesis doctoral, respecto de sus antecedentes y estado de la cuestión. Para ello, en primer término, se revisa la Didáctica en aspectos fundamentales como son: definición, perspectivas y objetivos. A continuación la Didáctica de la Matemática en dos de sus ocupaciones centrales referidas a la enseñanza y aprendizaje ocupan las líneas, con el concurso de diversos aportes de estudios al respecto. Ahora bien, respecto del aprendizaje de la Matemática, propiamente tal, nadie en su sano juicio pretende dar con la solución definitiva a semejante problema. Sin embargo, con este trabajo se pretende contribuir en ciertos aspectos que, con una visión de conjunto, armonicen una propuesta válida y pertinente como fruto de la experimentación y los años dedicados a la docencia universitaria, no sólo en materia de la enseñanza del cálculo de una variable, sino también en otras materias afines, como son: la introducción al álgebra y el cálculo integral, materias que los estudiantes deben cursar como parte de su plan de estudio curricular en su proceso de formación académica para la obtención del título al que aspiran en el contexto universitario donde toma lugar esta investigación, la Universidad del Bío-Bío (UBB), Sede Chillán, Chile.

A continuación se aborda el cálculo diferencial bajo diversos aspectos. En primer término, algunos antecedentes históricos, necesarios, dado que su evolución y origen han sido ocupación de diversas personas a través de la historia de la Matemática, y desde larga data, aportando cada uno de ellos su contribución a objeto de poder construir paso a paso este magnífico territorio matemático desligado del álgebra, la geometría y la aritmética, llamado cálculo diferencial.

En segundo término se revisan algunas dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, a continuación se presentan diversas propuestas para su aprendizaje, junto al aporte de investigadores que se han ocupado de los dos temas centrales sobre los cuales se articula el cálculo, el concepto de límite y el concepto de derivada. Cada uno de estos conceptos se trata de manera individual. Finaliza este acápite con el examen a varias propuestas para el aprendizaje del cálculo desde un enfoque general.

El trabajo en este capítulo continúa con la consideración del diseño curricular modular, sobre la cual se construye la propuesta como marco de referencia. Se explica en qué consiste este diseño y cómo funciona. Un aspecto importante a desarrollar dentro de este modelo curricular modular estriba en la elaboración de las actividades didácticas de aprendizaje, las cuales se usarán para implementar cada uno de los dos módulos que contempla este diseño. Como una forma de acrecentar el saber didáctico en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo fue la elaboración y posterior aplicación de dos cuestionarios sobre los temas de límite y derivada, dichos cuestionarios se administraron a veinte docentes universitarios, de cuatro instituciones universitarias y de distintos lugares del país. De ellos se obtuvieron importantes resultados para satisfacer parte de los objetivos específicos enunciados en el capítulo inicial de esta tesis.

Acto seguido y, tomando en consideración, en cierto sentido, los resultados de los cuestionarios aplicados, se realizó una investigación exhaustiva de diez (10) textos de cálculo, sobre los mismos temas tratados (límite y derivada). Lo anterior con el claro propósito de poner especial cuidado en la forma y en los prerrequisitos que cada uno de los autores de estos textos ha puesto para contribuir con el aprendizaje de estos conceptos, cimientos fundamentales para avanzar en la comprensión del cálculo diferencial. Todo ello, sin duda, acrecienta el acervo didáctico en el sentido de cómo abordar estos temas a la hora del diseño de las actividades didácticas y en el momento de realizar la transposición didáctica en el aula por parte del docente.

Se revisan además, otros elementos que se han considerado esenciales a tener en cuenta para generar la propuesta didáctica, como son:

- *El Modelo Educativo de la Universidad del Bío-Bío.*
- *El perfil de egreso de los estudiantes, tanto genérico como referido a las carreras donde se realizó el estudio.*
- *El programa de la asignatura.*
- *El uso de los recursos informáticos y*
- *La resolución de problemas.*

Por último se vuelven a considerar las ***Actividades Didácticas de Aprendizaje*** *(ADA) propiamente tal.*

De paso, se puede decir que otras disciplinas científicas como la Física y la Química, han incursionado con propuestas de mejora para su enseñanza y aprendizaje, usando como idea central para su concreción el diseño curricular modular, naturalmente con los ajustes propios que estas disciplinas tienen y, de manera más específica, en lo que dice relación con su trabajo tanto teórico como práctico, esto es, de laboratorio.

Como es de suponer, no se da cuenta de esos estudios en el presente trabajo de tesis, lo que sí se puede afirmar es que se camina en esa misma dirección, en pos de mejores instancias de aprendizajes para los estudiantes donde las ciencias básicas son fundamentales en su formación inicial académica de pregrado en el contexto en el cual se desarrolló la investigación.

2.2. La Didáctica: definición, perspectivas y objetivos

Toda acción educativa, que se precie de tal requiere de una teoría y de una práctica. La teoría la proporciona la Pedagogía, que es la ciencia de la Educación, y la práctica, es decir, el cómo hacerlo, lo proporciona la Didáctica, generando teorías y modelos propios.

Como una primera aproximación al concepto de la didáctica, el diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su versión online ilustra al respecto con las siguientes acepciones: ***didáctico, ca.*** *(Del gr. διδακτικός).*

1. *adj. Perteneciente o relativo a la enseñanza.*

2. *adj. Propio, adecuado para enseñar o instruir. Método, género didáctico, Obra didáctica.*

3. *adj. Perteneciente o relativo a la didáctica. Aplicado a las personas.*

4. *f. Arte de enseñar.*

(http:// www.rae.es)

Como se puede apreciar, todas sus acepciones guardan estrecha relación con el quehacer del presente trabajo.

Ahora bien, según ***Nérici*** (1985), la palabra didáctica fue usada por primera vez, en su sentido de enseñar, en 1629, por Ratke, en su libro Principales Aforismos Didácticos. El término, sin embargo, fue consagrado por Juan Amos Comenio, en su obra "Didáctica Magna", publicada en 1657.

Con el paso del tiempo, la Didáctica pasó a ser conceptualizada como Ciencia y Arte de Enseñar iniciándose las investigaciones referentes a cómo o cuál es la mejor forma de enseñar.

Actualmente la Didáctica, está destinada al estudio de todos los principios y técnicas válidas para la enseñanza de cualquier materia o disciplina. Estudia el problema de la enseñanza de modo general, sin las especificaciones que varían de una disciplina a otra. Procura ver la enseñanza como un todo, estudiándola en sus condiciones más generales, con el fin de iniciar procedimientos aplicables en todas las disciplinas y que den mayor eficiencia a lo que se enseña. La Didáctica está constituida también por la metodología abordada, es decir, por una serie de procedimientos, técnicas y demás recursos, por medio de los cuales se da el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Algunos autores como los que se citan a continuación han planteado sus concepciones sobre la Didáctica, a saber:

Para **Nérici,** (1985, p. 57) la Didáctica se interesa por el cómo se va a enseñar. Señala que *"La didáctica es el estudio del conjunto de recursos técnicos que tienen por finalidad dirigir el aprendizaje del alumno, con el objeto de llevarle a alcanzar un estado de madurez que le permita encarar la realidad, de manera consciente, eficiente y responsable, para actuar en ella como ciudadano participante y responsable".*

Para **Ferrández, Sarramona, Tarín** (1978, p. 45), en su Tecnología Didáctica, le adjudican a la Didáctica un carácter eminentemente práctico, aunque no excluyen que tenga también un carácter teórico especulativo, pero su practicidad, señalan, es su principal razón de ser: *“La didáctica es la rama de la pedagogía que se ocupa de orientar la acción educadora sistemática, y en un sentido más amplio, orienta la dirección total del aprendizaje”*. Según ellos, *“abarca el estudio de los métodos de enseñanza y los recursos que ha de aplicar el educador para estimular positivamente el aprendizaje y la formación integral y armónica de los educandos”*

Escudero (1981, p. 117) insiste en el proceso de enseñanza-aprendizaje: al señalarla como: *"Ciencia que tiene por objeto la organización y orientación de situaciones de enseñanza-aprendizaje de carácter instructivo, tendientes a la formación del individuo en estrecha dependencia de su educación integral"*.

Fernández Huerta (1985, p. 27) apunta que la "Didáctica tiene por objeto las decisiones normativas que llevan al aprendizaje gracias a la ayuda de los métodos de enseñanza".

Freudenthal (1991, p. 45), señala que la Didáctica en cualquier tema corresponde a la organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje relevantes para una materia, luego, *“Los didactas son organizadores, desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su propio aprendizaje individual o grupal”*.

Por su parte para **Brousseau** (2004, p. 1), *“La Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los conocimientos útiles a los hombre que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan”*.

Por otro lado, **Medina y Salvador** (2009, p. 7) se refieren a ella como "*La Didáctica es la disciplina o tratado riguroso de estudio y fundamentación de la actividad de enseñanza en cuanto propicia el aprendizaje formativo de los estudiantes en los más diversos contextos; con singular incidencia en la mejora de los sistemas educativos reglados y las micro y mesocomunidades implicadas (Escolar, familiar, multiculturas e interculturas) y espacios no formales*".

Así mismo, los últimos autores citados arriba caracterizan a la didáctica como una disciplina de carácter pedagógico, con una importante proyección práctica y relacionada con los problemas concretos tanto de los docentes como de los estudiantes.

A su vez, ella se hace cargo de interrogantes como:

- *Para qué formar a los estudiantes y qué mejora profesional necesita el profesorado,*
- *Quiénes son nuestros estudiantes y cómo aprenden,*
- *Qué hemos de enseñar y qué implica la actuación del saber.*

(Medina y Salvador, 2009, p. 7)

Por otro lado, existen *diversas perspectivas de la Didáctica*: ***tecnológica, artística y profesionalizadora-indagadora***, cada uno de estos enfoques tiene su particularidad y, cuando el docente realiza su labor educativa va usando e interpretando su tarea en una combinación de ellas.

- Así, "***La visión tecnológica*** se apoya en la ciencia y en la planificación sistemática de las acciones propias de la tarea de enseñanza-aprendizaje, entendida ésta como la estructuración y justificación del conjunto de procesos y modos de intervención más adecuados y ajustados que podamos llevar a cabo" (Medina y Salvador, 2009, p. 8).

- Por su parte, ***la perspectiva artística*** encuentra en el arte (poesía y pintura) su metáfora esclarecedora, con lo que: "La acción de enseñar para que otras personas aprendan es una tarea en parte artística y en alto grado poética" (Medina y Salvador, 2009, p. 9). Ello da vuelo, para no dejar fuera de la acción docente a todo aquello que nace de una inspiración artística cultural tanto del medio local como de los grandes artistas que ha dado la humanidad para el deleite de todos, ejemplos para ello sobran.

  Tal vez, es oportuno incorporar a la música, como otro referente metafórico del cual puede nutrirse la perspectiva didáctica artística, formando de esta manera una trilogía, a nuestro juicio, más completa en lo que a arte se refiere. En ello, Europa da clase en cuanto a producción: poética, pictórica y musical. Así, el acervo cultural puede inspirar de manera fecunda la perspectiva artística de la Didáctica.

- Por último, la ***perspectiva cultural-indagadora,*** pone de relieve el imprescindible "*escenario de reflexión e indagación permanente acerca de los procesos de enseñanza- aprendizaje, orientados a formar integralmente a los estudiantes y contribuir al desarrollo profesional de los docentes, quienes se* *viven como los colaboradores más activos en el incremento del conocimiento y mejora de la práctica educativa"* (Medina y Salvador, 2009, p. 11).

En resumen, según Medina y Salvador (2009), la didáctica se constituye en una disciplina pedagógica, cuyo quid es el estudio de los procesos de enseñanza- aprendizaje en su afán de una formación óptima de los estudiantes, usando un entorno cultural netamente didáctico, con el necesario concurso de una cultura indagadora tanto del profesorado como de los colaboradores más inmediatos.

Una visión del saber didáctico se da también desde los modelos glocalizadores, con ello cobra importancia la cuidad-pueblo y el ecosistema comunal en el que se trabaja. Ello contribuye al conocimiento profundo de la realidad local, la cual no debe dejar de lado los aspectos universales de las propuestas de mejora que se desea implementar en un momento dado del quehacer docente.

Así, como el ser humano es bajo sus circunstancias de una forma que lo definen, el saber didáctico se ve influenciado por el medio al cual se debe, de esta forma puede interpretar la realidad, a la cual se debe, de la mejor manera que le es posible. Con ello se consolida la didáctica en contacto con su entorno y los valores de ella, conectando a las personas que se ven involucradas en los procesos formativos que intenta mejorar desde la práctica local.

Respecto de su ***fin u objeto central*** de la didáctica su ocupación esencial "*es la enseñanza-transformadora, que participa y tiende al logro de aprendizajes representativos,* *de calidad y relevantes de los estudiante y a la mejora profesional del profesorado"* (Medina y Salvador, 2009, p. 16).

Como puede apreciarse hay una intencionalidad que compromete tanto a los estudiantes como a los docentes, en la interacción que se produce entre sus actores más importantes. Estos mismos autores reclaman la importancia que debe tener la Didáctica General, de modo de recuperar el protagonismo conceptual como Ciencia y como Arte de la enseñanza.

Ahora bien, los límites y posibilidades de la Didáctica guardan estrecha relación con las demás disciplinas, como las Ciencias Sociales, las Humanas y por cierto la propia Educación, en las cuales se extiende y consolida como tal.

En lo que dice relación con la evolución histórica de la Didáctica, Díaz (2009) identifica dos tendencias que permiten una significativa comprensión de ella al señalar en primer lugar una:

- ***Perspectiva clásica***, esto es, centrada en el contenido, la cual hace referencia a problemas de determinación del orden de los temas que deben ser estudiados desde una secuencia lógica, de modo que los acápites precedentes permitan la comprensión de los subsecuentes, de esta forma los estudios correctamente organizados posibilitarán un mejor aprendizaje, y, finalmente, un orden del comportamiento: la disciplina escolar. Se trata de una disciplina impuesta desde el exterior, que tiene como finalidad última la formación del carácter para un desarrollo personal superior (Siglo XVII).

- A partir de finales del siglo XIX, aparece el movimiento ***Escuela activa o la Escuela nueva***, *como resultado de una* profunda crítica al modelo establecido desde el origen del saber didáctico. Los elementos que caracterizan esta tendencia representan el contrapunto a lo que se tiende a identificar como "movimiento de la didáctica clásica". Así, bajo el supuesto de la defensa del aprendizaje cuyo foco de interés es el estudiante, surgen diversas denominaciones, tales como: centros de interés, trabajo por proyectos, o imprenta escolar, entre otros. Frente a un orden único del contenido se dio paso a la concepción de un contenido vivo, que surge de la vida real y que puede ser objeto de estudio ya sea de forma individual o de manera colectiva para el trabajo en el aula.

Se trae a colación este breve comentario histórico en virtud de que los planteamientos actuales postulan la necesidad de un ***cambio de paradigma***, cual es, ***centrado en el aprendizaje***, de modo tal que los estudiantes tengan una participación activa en su proceso formativo.

Además, se refuerza la necesaria vinculación temprana de la educación superior con el medio, lo que atañe directamente con la formación inicial de los estudiantes de todas las carreras de pregrado. Lo que involucra tener presente en su formación académica una atención genuina en la resolución de problemas y situaciones posibles de la vida real, desde una enseñanza contextualizada situada auténtica y donde además esté presente el trabajo colaborativo, seguro escenario de su vida profesional en perspectiva (Moreno, 2011).

Se espera que los alcances hechos sobre la Didáctica, con la participación de los autores citados, contribuya a clarificar aspectos de su quehacer más relevante e inmediato de manera clara y concisa, como lo ha sido sin duda para ellos.

Como una forma de abordar los tres tópicos que ha supuesto este acápite, se consideran algunos de los Objetivos de la Didáctica según Nérici (1985, p. 59), a saber:

- *Hacer la enseñanza y, por consiguiente, el aprendizaje más eficaces.*
- *Orientar la enseñanza de acuerdo con la edad evolutiva del estudiante de modo de ayudarlo a desarrollarse y a realizarse plenamente, en función de sus esfuerzos de aprendizaje.*
- *Adecuar la enseñanza a las posibilidades y a las necesidades del alumno.*
- *Orientar el planteamiento de las actividades de aprendizaje de manera que haya progreso, continuidad y unidad, para que los objetivos de la educación sean suficientemente logrados.*
- *Llevar a cabo un apropiado acompañamiento y un control consciente del aprendizaje, con el fin de que pueda haber oportunas rectificaciones o recuperaciones del aprendizaje.*

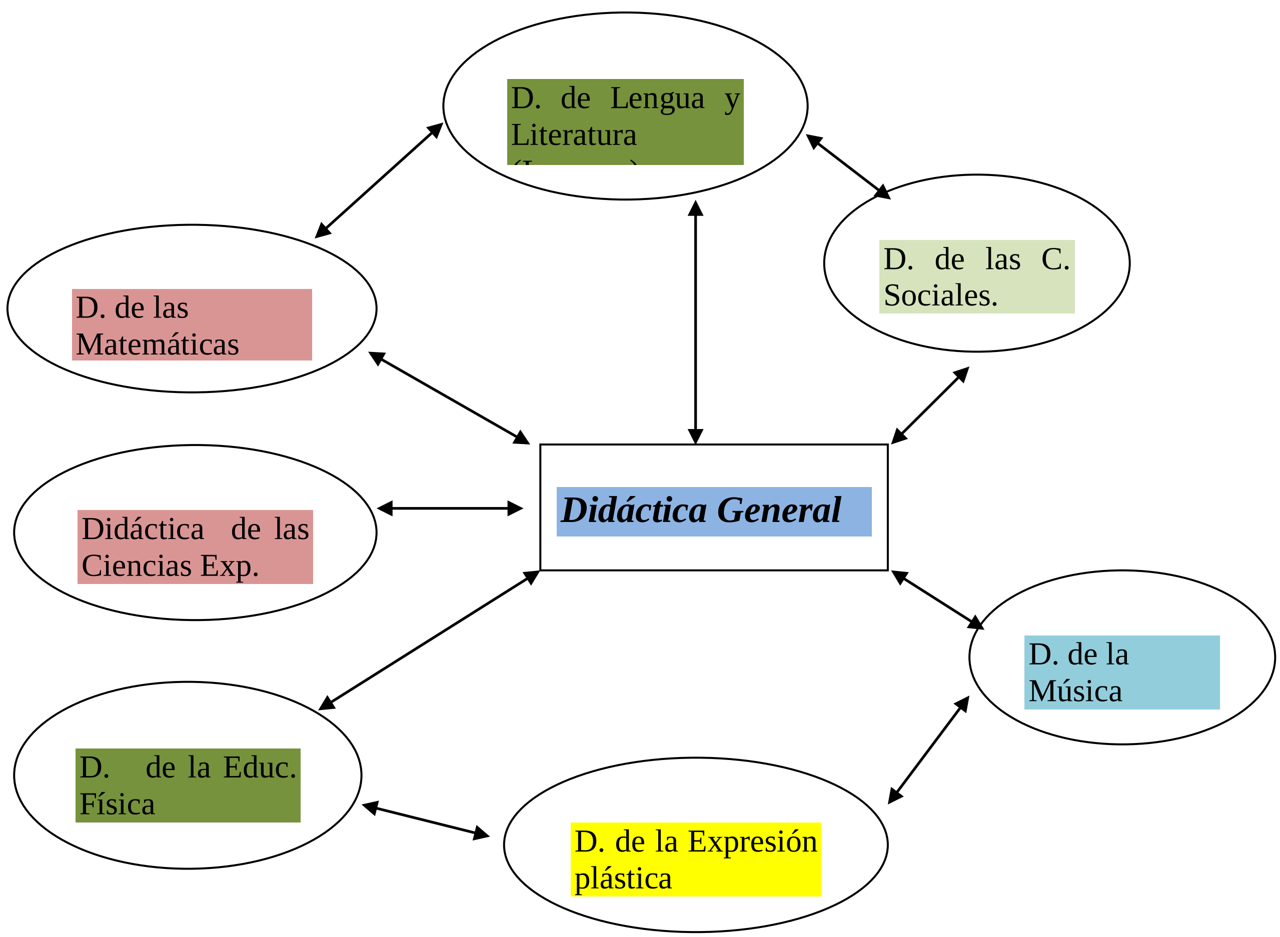
Estos son algunos, como se ha mencionado, de los diez objetivos del texto de Nérici (1985) mencionados en su obra.

Ellos son para el presente trabajo más que suficientes a la hora de realizar la acción educativa en el aula. Sin duda alguna, si ellos fuesen una constante permanente del trabajo escolar, no habría necesidad alguna de estar continuamente realizando supuestas innovaciones educativas para esperar mejores resultados académicos que los que hoy se tienen, pero la realidad supera a la ficción como siempre.

Pero, también no es menos cierto que en palabras de Medina y Salvador (2009,p.17-18) *"La Didáctica General necesita demarcarse e integrarse reencontrando el valor global y holístico de su objeto, pero ampliando los marcos y apoyándose en otros emergentes derivados de las didácticas específicas, evitando la fragmentación del saber didáctico para impulsar la recuperación del conocimiento interdisciplinar y transdisciplinar adaptado a la realidad cambiante de una escuela intercultural que forma a cada ser humano en su identidad, abierta a la tolerancia y al acercamiento multicultural."*

De esta forma recobra su valor integrador, para situarse al centro de las demás didácticas especiales, como bien se ilustra en la figura de la página siguiente, por motivos de espacio.

Figura n°1. Relación entre Didáctica General con Didácticas Específicas.



(Medina y Salvador, 2009, p. 18)

Pero si la ***Didáctica General*** tiene su innegable valor formativo y regulador como principio de la acción docente, tanto dentro como fuera del aula, no son menos importantes los marcos emergentes derivados de las didácticas específicas, como la de ***Didáctica de la Matemática*** sin duda. Así, el siguiente punto a tratar será éste, la Didáctica de la Matemática propiamente tal.

2.3. Didáctica de la Matemática

Debido a la complejidad de los procesos presentes en toda situación de enseñanza y aprendizaje, Schoenfled (1992) postula una hipótesis básica consistente en que a pesar de la complejidad, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es, por lo tanto, explicar qué es lo que produce el pensamiento productivo e identificar las capacidades que permiten resolver problemas significativos.

Para Steiner (1987) la complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas produce dos reacciones extremas, a saber:

- ***En la primera*** están los que afirman que la didáctica de la matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por lo tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte.

- ***En la segunda*** postura se encuentran aquellos que piensan que es posible la existencia de la didáctica como ciencia y reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma.

Steiner considera que la didáctica de la matemática debe tender hacia una transdisciplinariedad lo que situaría a las investigaciones e innovaciones en didáctica dentro de las interacciones entre disciplinas como: la Psicología, la Pedagogía y la Sociología, entre otras, sin olvidar a la Matemática como disciplina científica, y así poder avanzar en el conocimiento de los problemas didácticos que ella puede abordar.

La didáctica como actividad general ha tenido un amplio desarrollo en las cuatro últimas décadas de este siglo. Sin embargo, no ha acabado la lucha entre el idealista, que se inclina por potenciar la comprensión mediante una visión amplia de la matemática, y el práctico, que clama por el restablecimiento de las técnicas básicas en interés de la eficiencia y economía en el aprendizaje.

Ahora bien, no se puede hablar de Didáctica sin dejar de lado el desarrollo que la propia Matemática ha tenido a través del tiempo. Es así como a finales de los años cincuenta y comienzo de la década de los sesenta, se produce un cambio curricular importante en la enseñanza de las matemáticas escolares, conocida como la nueva Matemática o también llamada Matemática Moderna. Las bases filosóficas que sustentaron este movimiento se establecieron durante el seminario de Royamount, celebrado en 1959. En el transcurso del mismo, el famoso matemático francés ***Jean Diudonné*** exclamó: “Abajo Euclides" y propuso ofrecer a los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la Matemática y que partiera de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza axiomática de la geometría imperante en aquellos momentos. En ese mismo seminario, la intervención de otro matemático francés, ***Choquet*** también fue decisiva y, en el mismo, a saber: “… *disponemos de un excelente ejemplo, el conjunto de los números enteros, donde estudiar los principales conceptos del álgebra, como son la relación de orden, la estructura de grupo, la de anillo...".* Estas dos intervenciones se pueden considerar paradigmáticas del movimiento que se inicia, y que se denominó ***Matemática Moderna***.

La idea en principio parecía bastante lógica y coherente, con ello se pretendía enseñar a los estudiantes el carácter lógico-deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función de la llamada ***Matemática Superior***.

Chile, a pesar de lo alejado por su situación geográfica natural, no escapó a esta tendencia que se impuso paulatinamente a nivel mundial. Los que fuimos estudiantes, del nivel secundario por aquellos años, vivimos en carne propia los desajustes que esta moda de la Matemática trajo aparejada y, que en definitiva fue un completo fracaso. Es así como surgen nuevas voces, como es el caso de R. Thom, quien en el año 1973 publica un artículo titulado: "*Modern Mathematics: does it exist?*, donde se permite señalar: "*Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La geometría euclídea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más. El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática."* (Thom, 1973, p. 195)

Posterior a esta experiencia, surgen nuevos movimientos en la enseñanza de la Matemática. El primero de ellos es el denominado como "retorno a lo básico". El cual suponía retomar, para las matemáticas escolares, la práctica de los algoritmos y procedimientos básicos de cálculo. Después de un tiempo, se hizo evidente que tal retorno a lo básico no era la solución razonable a la enseñanza de las matemáticas, pues los alumnos, en el mejor de los casos, aprendían de memoria los procedimientos sin comprenderlos.

A finales de los setenta empezó a cuestionarse el eslogan "Retorno a lo Básico". Ya que, con este planteamiento, se hacía imposible enseñar matemáticas modernas. Surgen entonces nuevas interrogantes:

> ***¿Qué son las Matemáticas Básicas? ¿La resolución de problemas puede ser un nuevo foco de atención para la enseñanza de la Matemática?***

Esta última pregunta impregnó el III Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley en el verano de 1980. Convirtiendo a la resolución de problemas, en toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo en la enseñanza de la Matemática. En este congreso, intervino Freudenthal, matemático y educador de origen alemán, doctorado en la Universidad de Berlín, quien desarrolló su carrera académica y sus teorías pedagógicas en Holanda, con la ponencia titulada ***"Grandes problemas de la Educación Matemática".*** Declara que lo que realmente es un problema es cómo formular correctamente el problema y sin errores. En contra del planteamiento general que encierra la pregunta *Why can Johnny not do arithmetic?* planteada por M. Kleine, Freudenthal opta por un enfoque particular, cambiando la pregunta por *Why can Jennifer not do arithmetic?* Con lo cual pretende cambiar el problema general, representado por Johnny, en un problema particular, individual, como lo es el problema personal que Jennifer tiene con el aprendizaje de la aritmética y, sobre todo, a profundizar en qué aspectos del aprendizaje de Jennifer la han conducido al fracaso. Por primera vez se plantea que los problemas que surgen en la educación matemática son una actividad social y no sólo son un campo de investigación educativa.

Tanto Polya (1965) como Freudenthal (1991), sitúan el centro de atención sobre el ***Aprendizaje de la Matemática***, más que ***en su enseñanza***; el primero, solicitando de los profesores un ***compromiso con el aprendizaje*** de sus estudiantes dirigido hacia la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales; el segundo, en concretar, particularizar los problemas derivados de la enseñanza y en investigar los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos, y obtener ejemplos paradigmáticos de diagnóstico y prescripción de los mismos. Freudenthal hace una llamada a la conciencia de todos los profesores e investigadores para que estos ejemplos se registren y se transmitan, de tal forma que unos puedan aprender de los otros y se gestione de forma efectiva el conocimiento en educación matemática.

Freudenthal (1991) manifestó su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las innovaciones en la enseñanza vinculadas exclusivamente a la matemática, que se propiciaban a mediados del siglo pasado. Por ejemplo: la teoría de los objetivos operacionales, los test estructurados de evaluación, la investigación educativa estandarizada, la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo Piagetiano al aula; la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente; y la llamada Matemática Moderna en la escuela.

Además, Freudenthal pensaba que las estructuras matemáticas no son un conjunto de datos fijos, sino que surgen de la realidad y se expanden continuamente en procesos individuales y colectivos de aprendizaje. Los estudiantes son participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar en el contexto social del aula.

El autor que se acaba de citar, Freudenthal (1991), insistió también en que el proceso de reinvención debe ser guiado. Se debe ofrecer a los estudiantes un ambiente de aprendizaje en el que puedan construir conocimientos matemáticos y tener posibilidades de alcanzar niveles más altos de comprensión. Esto implica que se deben crear escenarios capaces de promover este crecimiento de la comprensión de la matemática según su propio nivel de estudio.

Por su parte D´Amore (2005), al referirse a la investigación en didáctica de la Matemática establece dos formas diferentes de entenderla, a las que llama didáctica A y didáctica B. Para la didáctica A, señala: "*como divulgación de las ideas, fijando la atención en la fase de la enseñanza*" (Aquí A está por Ars).

Por su parte, para la didáctica B se expresa "*como divulgación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje*" (D´amore, 205, p. 13).

No cabe duda que la didáctica A puede contribuir a resolver problemas de gran importancia como: mejorar la imagen de la Matemática, mejorar la atención, el interés y la motivación de los estudiantes.

Por otro lado, si se realizan pruebas empíricas, con oportunos y bien estudiados dispositivos experimentales, sobre los resultados cognitivos obtenidos con actividades del tipo A, entonces sí se pasa a la investigación experimental, y se está en el campo de la epistemología del aprendizaje, esto es, se pasa al punto que caracteriza la categoría B de la investigación en didáctica según D´amore (2005).

2.3.1. Sobre la enseñanza de la Matemática

Tanto la enseñanza como el aprendizaje están indisolublemente unidos, de modo que la frontera que los separa no es fácil de delimitar entre ellos. En lo que sigue se tocarán ambos temas, esto es, tanto la enseñanza como el aprendizaje, este último en la parte final de este acápite. Además, se va a considerar, como un supuesto básico, que no se intenta resolver el problema de la enseñanza de la Matemática, ni menos el de su aprendizaje. Lo que se pretende simplemente es realizar un acercamiento al tema que satisfaga los objetivos planteados en el marco del presente trabajo, junto a las proyecciones que de él se desprenden. También se puede adelantar que se han esgrimido, a través del tiempo, diversas recetas para producir un aprendizaje de la Matemática independiente del nivel que esta sea. Ahora bien, deambula en el ambiente una pregunta:

> ***¿Cómo producir un aprendizaje eficaz y con entendimiento en los estudiantes para la matemática del cambio, por ejemplo?***

Esta interrogante resulta ser la ocupación central e hilo conductor del presente trabajo, a la usanza de un faro guiará este esfuerzo para poder generar una propuesta que vaya encaminada a favorecer los aprendizajes de los estudiantes en esta porción de la matemática que hoy es materia de preocupación en este trabajo, el cálculo diferencial.

Por otro lado, no debemos ir muy lejos para darnos cuenta que la enseñanza actual de la Matemática es una enseñanza eminentemente tradicional, esto es, centrada en la clase magistral, donde el centro lo ocupa el docente.

Si el docente está en la clase, hay clase, si éste no está, sencillamente no hay clases. Lo anterior es una actitud que se viene repitiendo desde mucho tiempo y sin visos de cambio hasta ahora. La descripción anterior es el fiel reflejo que ocurre en todos los niveles educativos y de ello los docentes tienen bastante responsabilidad, por no decir toda la responsabilidad. Ahora bien, a esta clase magistral le sigue un estudio personal del estudiante, apoyada por apuntes o textos de estudio ad hoc. A continuación las consabidas evaluaciones individuales y poco más. Todo lo anterior configura la llamada enseñanza tradicional, y la Matemática no escapa a ella.

Otro hecho que se presenta en la enseñanza actual es la ***desconexión entre la génesis del conocimiento matemático y la trasmisión de éste***, por lo general suelen presentarse totalmente separados del proceso histórico que les dio origen.

También, las ideas matemáticas se exponen sintéticamente, lo que evidentemente da una indudable solidez al tema presentado, pero sin embargo, no le da al alumno la oportunidad de participar activamente en su aprendizaje. Por lo demás, el proceso de creación de la Matemática no sigue la secuencia lineal que comúnmente se presenta en los libros. La Matemática crece por procesos mixtos de análisis y síntesis, de inducción y deducción. Para llegar a elaborar una teoría, se comienza acumulando experiencias y observaciones, después de examinar analogías, y más tarde se abstraen los conceptos;

posteriormente se van induciendo las correspondientes leyes y construyendo deductivamente sistemas y estructuras, es la forma como se acrecienta este acervo cultural de la matemática hasta hoy. Así, esta desconexión que se ha mencionado es otro elemento que repercute en la enseñanza de la Matemática.

Pero lo anterior no es el único elemento que dificulta la enseñanza de la Matemática, al estudiante también le cabe su cuota de responsabilidad, ella se manifiesta de manera clara en su falta de motivación hacia el aprendizaje de la Matemática. Luego, para que el alumno se muestre receptivo hacia la Matemática es preciso que esté interesado por ella, esto es, motivado. Y evidentemente no hay motivación si al alumno se le condena a una actitud pasiva en una etapa de gran actividad por la que pasa cuando se es joven, si sólo se le limita a escuchar pacientemente la Matemática ya elaborada que expone el profesor, contribuyendo con ello a un aprendizaje poco significativo de esta ciencia. Con todo ello el rol del estudiante continúa siendo pasivo y sólo se limita a tratar de comprender lo que presenta el profesor y, como mucho, intentar aplicarlo a distintos tipos de problemas relacionados con la materia expuesta por el profesor.

Otra causa que se puede mencionar que dificulta el aprendizaje de la Matemática, radica en el hecho patente que, los estudiantes ***carecen de los conocimientos previos*** fundamentales para hacerse de nuevos conceptos y procedimientos matemáticos de una materia determinada. Esto que parece una perogrullada se pasa muchas veces por alto, con las consiguientes consecuencias de un escaso aprendizaje matemático.

Sume a lo anterior la dificultad provocada por la gran diferencia existente en el rendimiento y el ritmo de aprendizaje entre los distintos alumnos. Este es un problema de muy difícil solución, pues si el ritmo de la enseñanza es rápido, habrá alumnos que no puedan seguirlo y, por tanto les será más difícil la comprensión; en cambio, si es demasiado lento, tal vez algunos estudiantes se aburran y se desanimen. Llegar a un equilibrio en la forma de conducir el curso exige una gran maestría profesional. Luego, no parece fácil resolver un conflicto como éste.

Si ahora volvemos la mirada hacia los profesores, se encontrará que en ellos se evidencian hechos como los siguientes:

- *Desconocimiento de ciertas materias donde puedan aplicarse las matemáticas.*
- *Se sienten demasiados viejos para incursionar en innovaciones, como el uso de los recursos informáticos por ejemplo.*
- *Es preferible enseñar las materias como ellos la recibieron de sus anteriores maestros sin más.*
- *Incluir nuevos datos y temas de actualidad en la formulación de problemas es un trabajo y esfuerzo adicional que no están dispuestos a pagar. Todo ello hace ver la Matemática como una ciencia descontextualizada y ajena a toda realidad.*

(Gómez, 2002).

Bajo lo dicho anteriormente, el que puede resultar incompleto y, donde las responsabilidades no suelen ser únicamente de los docentes, cabe, sin embargo, una pregunta que puede representar un punto de inflexión en el quehacer docente de hoy y del mañana inmediato, como lo es:

¿Es posible mejorar la enseñanza de la Matemática?

Al respecto puede ser útil atender algunas consideraciones generales, las que están ***instaladas en el acervo cultural didáctico de los docentes*** y, que bien valdría la pena tener en cuenta si se desea lograr un mejor aprendizaje de la Matemática por parte de los estudiantes, así por ejemplo, son dignos de mención los siguientes aspectos:

- *Un* ***diagnóstico inicial*** debería estar presente ***antes de comenzar un curso o una unidad didáctica***. Por tanto, evaluar los conocimientos y experiencias previas de sus aprendizajes anteriores resulta de interés para enlazar el nuevo conocimiento en su estructura cognitiva. De lo contario, la memorización será el recurso más inmediato que usará el estudiante al carecer de los pre-requisitos de modo de hacer un continuo en las materias de estudio y, por tanto, un mejor aprendizaje de ellas.

- ***No descuidar la parte afectiva*** en el trabajo del aula, ello debe mover al docente a motivar a los estudiantes en el sentido que con optimismo y perseverancia en su trabajo, ellos pueden salvar las dificultades con las cuales deberán lidiar, para alcanzar los aprendizajes que de ellos se espera. Y, lo anterior debería ser un trato que alcance a todos por igual. Luego, todos son igualmente importantes para el docente sin exclusiones y favoritismos de ninguna especie, esto es muy relevante y difícil de logar por el docente.

- ***Proveer a los estudiante de actividades*** que los motiven al auto aprendizaje, siendo el docente un mero mediador de ellos, en definitiva hacerlo responsable de su aprendizaje, él es el centro del proceso educativo.

- ***La resolución de problemas*** debería ser la ***actividad central*** de la enseñanza y, por ende, del aprendizaje de la Matemática, en todos sus niveles. Ella es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido, y por tanto se postula que conocer matemática es hacer matemática, es reconstruirla en la medida de lo posible, sin pretender descubrir la rueda, claro está. Resolver problemas se constituye de esta forma en la oportunidad para explorar, formular conjeturas y probar, por medio de casos particulares, regularidades que adquieren connotaciones especiales en términos de resultados, esto es, pequeños lemas a los que siguen teoremas de mayor envergadura.

- ***El uso de los recursos tecnológicos,*** requiere de la presencia de la ***calculadora, el ordenador, los videos, etc***. que motiven al estudiante y lo involucren en la construcción de su propio aprendizaje. Ya no se puede escapar a esta realidad educativa que está presente en los centros formadores de todos los niveles educativos. Los medios están, el saber usarlos adecuadamente por parte del docente es la tarea que se tiene por delante.

- ***El trabajo colaborativo,*** va siendo el medio que, poco a poco, comienza a instalarse para lograr aprendizajes entre los estudiantes. No se puede olvidar que los problemas que hoy enfrenta la humanidad, en la mayoría de sus áreas, pasa por tener una actitud de colaboración entre los actores involucrados.

No será posible enfrentar con éxito los desafíos del mañana si los futuros profesionales que hoy se forman en los centros universitarios carecen de la capacidad de trabajar en equipo para abordar los problemas. Ante esta realidad insoslayable, no se tiene otra alternativa que la colaboración, de modo que proveer de actividades que propicien esta competencia profesional de formación inicial va en la dirección correcta. De paso, la convivencia social entre maestros y estudiantes puede llegar a ser más solidaria y tolerante a la vez.

- ***La historia de la matemática***, está cargada de anécdotas y problemas interesantes, por ejemplo: en la búsqueda de hallar las tangentes a las curvas se gesta, en parte, el cálculo diferencial. Así, recorrer junto a los estudiantes cómo se fueron gestando las ideas directrices que dieron origen a distintas ramas de la matemática se puede constituir en un elemento motivador para la clase. Aquí, la consecuencia del trabajo en equipo puede ponerse en acción, exponiendo los resultados que la historia de la matemática pone ante sus cultores de todas las épocas. A modo de ejemplo, el concepto de límite tardó alrededor de dos mil años para su cristalización definitiva, siendo usado, sin la formulación rigurosa que hoy ostenta, aunque parezca increíble.

- ***La contextualización de la matemática,*** este es un aspecto que se descuida normalmente. Por lo general, los docentes trasmiten las formas de enseñanza que han recibido de sus antecesores y, cambiar esta postura resulta difícil y casi imposible de alterar.

  Ahora bien, una manera para que el estudiante dote de significado a lo que aprende está en poder resolver, con la matemática que revisa, algún problema que le sea familiar.

  Atendiendo a este requerimiento, en alguna medida se da respuesta a la consabida interrogante habitual: ¿y esto para qué sirve?

- ***La evaluación,*** muchas veces se toma como un castigo por parte del docente y no como un instrumento que le permita evaluar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. La evaluación debe servir, en parte, para detectar los errores más comunes en los cuales incurren los estudiantes y, debe ser pensada como un instrumento de medida para la mejora tanto para quien aprende como para quien enseña una materia. Otros fines, ajenos a estas ideas centrales, poco aportan en la consecución de aprendizajes con entendimiento. Por último, aunque se ha considerado al final de esta lista, debería haberse puesto en su inicio según algunos educadores, de forma de oreintar toda la enseñanza.

Todos estos elementos, que por lo demás ***no son nuevos***, *están, como ya se ha comentado*, ***en la memoria colectiva de los docentes***, al considerarlos y ponerlos en evidencia se desea resaltar la importancia y vigencia que ellos tienen para articular una mejor enseñada y, por tanto, un aprendizaje de calidad y trascendencia como el que se busca a diario en las aulas.

Sin perjuicio de lo expresado anteriormente, se citan a continuación algunos autores, quienes hacen hincapié en aspectos muy precisos y a los cuales también habría que poner atención, así por ejemplo:

De ***Roanes (1983)*** son atendibles sugerencias como:

- ***No al método expositivo***. El método expositivo está superado en la enseñanza de la Matemática elemental. En este método, el alumno es un elemento pasivo de la clase, y cabe preguntarse hasta qué punto se aumenta la capacidad de pensar del estudiante por este procedimiento.

- ***Enseñanza "viva***". Como consecuencia de la reflexión anterior, se impone la enseñanza "viva" de la Matemática, tomando como punto de partida situaciones concretas, simples y familiares, a partir de las cuales, comenzar el proceso de abstracción posterior.

En ***Toranzos*** (1963) se encuentran las siguientes ideas, a saber:

- ***Enseñanza activa***. Hay que dar importancia preponderante a los procedimientos que contribuyen a desarrollar la capacidad para la actividad original, respondiendo al ideal de la escuela activa. Resulta así restringido el uso de procedimientos de memorización y aplicación mecánica.

- ***Dar cabida a la intuición*** para lograr una comprensión de los conceptos y razonamiento matemático pero, claro está, no como método de demostración en sustitución de razonamientos lógicos.

Por último, de ***Polya (1967),*** citado por Bellot (2003), se exponen ***cinco de los diez mandamientos del profesor***, los que sin duda se deben atender dada la trascendencia de ellos en la enseñanza, como son:

- ***Demuestre interés por su materia***
- ***Domine su materia.***
- ***Trate de leer en el rostro de sus estudiantes, intente adivinar sus esperanzas y sus dificultades; póngase en su lugar.***
- ***Enseñadles a demostrar.*** *"Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento demostrativo"*
- ***No inculquéis por la fuerza, sugerid.*** *Se trata de dejar a los estudiantes tanta libertad e iniciativa como sea posible, teniendo en cuenta las condiciones existentes de la enseñanza. Dejad que los estudiantes den respuestas; o bien dad respuestas que ellos mismos sean capaces de dar.*

Ahora bien, a modo de conclusión y con las sugerencias dadas por Peralta (1995) se dan las siguientes indicaciones:

- Es necesario ***que la Matemática sea*** para cada alumno ***una construcción personal.***

- No debe considerarse a la matemática como un conjunto de conocimientos exteriores organizados y ajenos a uno, sino como un sistema de pensamiento que se construye en sí mismo.

  Por supuesto que nadie piensa que los alumnos, al reconstruir la Matemática, vayan a rehacer por sí mismos el trabajo de tantos siglos, pero los cursos contienen demasiadas definiciones y demostraciones por «ex-abrupto» que, seguramente correctas en su aspecto lógico, no son, al mismo tiempo, inteligibles en el contexto de una construcción matemática que no da ninguna razón para hacerla comprensible.

- A los alumnos no se les debe enseñar solamente a reproducir y buscar demostraciones de los teoremas, a enseñarles definiciones y a resolver problemas totalmente elaborados. Para que tengan un papel más creador, es importante ***que aprendan*** también ***a encontrar los enunciados de las proposiciones***, a expresar las definiciones, a descubrir y formular problemas. El profesor marchará con sus alumnos por el camino de la exploración Matemática, para que aprendan a experimentar sobre ejemplos. El profesor ya no es el dispensador único de la ciencia, es ahora el coordinador, el guía, el consejero.

- Estimulación y contacto psicológico con el estudiante. En otro orden de cosas, debido a que los adolescentes están muy interesados en afirmarse a sí mismos, en caso de fracaso, los que tienen mejor concepto de su personalidad abandonan frecuentemente la matemática. Para evitar esto, es conveniente en cualquier circunstancia que tengan algún éxito. No se trata de otorgarles, porque sí, calificaciones engañosas, sino de hacerles experimentar la alegría de descubrir algo, aunque no sea más que un problema sencillo, de acuerdo con sus posibilidades.

- Y la mejor motivación para su trabajo es el placer que el estudiante pueda sentir en el despliegue de su propia actividad matemática. En estas condiciones, ***resolver un problema viene a ser un desafío consigo mismo.*** Puede tomarse casi como norma, que en cada colección de problemas propuestos, se debe procurar que haya siempre al menos uno que todos puedan resolver.

Por último, y sin perjuicio de lo ya dicho y, con un punto de vista más general, se pueden mencionar ***diferentes estilos o enfoques para la enseñanza de la Matemática*** como son*: el estructuralismo, el mecanicismo, el empirismo y el realista (García, 2014).*

Para el ***estructuralismo***, la matemática es una ciencia lógico deductiva y ese carácter es el que debe informar la enseñanza de la misma. El estilo estructuralista hunde sus raíces históricas en la enseñanza de la geometría euclidiana y en la concepción de la matemática como logro cognitivo caracterizado por ser un sistema deductivo cerrado y fuertemente organizado. Es por lo que, a los ojos de los estructuralistas, a los alumnos se les debe enseñar la matemática como un sistema bien estructurado, siendo además la estructura del sistema la guía del proceso de aprendizaje. Ese fue, y sigue siendo, el principio fundamental de la reforma conocida con el nombre de Matemática Moderna y cuya consecuencias llegan hasta nuestros días.

El estilo ***mecanicista*** se caracteriza por la consideración de la matemática como un conjunto de reglas. A los alumnos se les enseñan las reglas y las deben aplicar a problemas que son similares a los ejemplos previos. Raramente se parte de problemas reales o cercanos al alumno, más aún, se presta poca atención a las aplicaciones como génesis de los conceptos y procedimientos, y mucha a la memorización y automatización de algoritmos de uso restringido. El ataque más demoledor a este planteamiento de enseñanza proviene de H. Freudenthal (1991): “De acuerdo con la filosofía mecanicista el hombre es como una computadora, de tal forma que su actuación puede ser programada por medio de la práctica. En el nivel más bajo, es la práctica en las operaciones aritméticas y algebraicas (incluso geométricas) y la solución de problemas que se distinguen por pautas fácilmente reconocibles y procesables. Es en éste, el más bajo nivel dentro de la jerarquía de los más potentes ordenadores, donde se sitúa al hombre". Freudenthal termina su alegato con la siguiente pregunta dirigida a sus propagadores:

> *¿Por qué enseñar a los alumnos a ejecutar tareas, al nivel en el que los ordenadores son mucho más rápidos, económicos y seguros? Digna de reflexión esta última interrogante.*

El empirismo por su parte toma como punto de partida la realidad cercana al alumno, lo concreto. La enseñanza es básicamente utilitaria, los alumnos adquieren experiencias y contenidos útiles, pero carece de profundización y sistematización en el aprendizaje. El empirismo está enraizado profundamente en la educación utilitaria inglesa.

El estilo realista que parte de la realidad, pero al contrario del empirismo éste profundiza y sistematiza en los aprendizajes, poniendo la atención en el desarrollo de modelos, esquemas, símbolos, etc. El principio didáctico es la reconstrucción o invención de la matemática por el alumno, así, las construcciones de los estudiantes son fundamentales. Es una enseñanza orientada básicamente a los procesos. Este estilo surgió en los Países Bajos partiendo de las ideas de Freudenthal y ha sido desarrollado por los actuales miembros del Freudenthal Institut de la Universidad de Utrecht.

Como una forma de cerrar un tema que no admite clausura, se hace referencia a un aspecto que se puede considerar crucial para el proceso de enseñanza aprendizaje, se trata ni más ni menos que de la Resolución de Problemas. Con Polya, este tema comenzó a adquirir notoriedad, la cual se mantiene hasta nuestros días. A decir verdad, sin resolver problemas no se puede aprender Matemáticas. Dejamos hasta aquí estas consideraciones, en el entendido que dicho tema será considerado nuevamente en un momento previo al tratar sobre el diseño de las Actividades Didácticas de Aprendizajes para el cálculo diferencial.

2.3.2. Sobre el aprendizaje de la Matemática

A continuación la atención se centra sobre el ***aprendizaje de la Matemática***, hecho que está íntimamente ligado a la enseñanza. Pues, como es obvio, es más probable tener un buen aprendizaje, como consecuencia de una buena enseñanza. Lo cierto del caso es que ambos temas resultan inseparables uno del otro.

Se ha señalado con anterioridad que la enseñanza y el aprendizaje de toda área del conocimiento están indisolublemente unidos, de modo tal que no se puede mencionar la enseñanza sin su correspondiente aprendizaje. La Matemática no escapa a esta situación y haber tratado previamente la enseñanza ha sido simplemente por motivos de presentación y, además porque se ha producido un cambio de paradigma muy importante, se ha pasado de la enseñanza al aprendizaje, en ello se cifran hoy los discursos educativos de forma preferente.

Se ha expresado, al inicio, y se vuelve a reiterar que, no se pretende resolver tan "***complicado problema sobre el aprendizaje de la Matemática"***, ni menos para el caso de la Matemática del cambio, como lo es el cálculo diferencial. Sin embargo, aunque esta es la situación, no por eso se intenta dar con una solución aproximada al tema, a la usanza de cómo se resuelven muchos de los problemas de orden matemático.

Los comentarios anteriores, aunque muy generales, se sitúan de manera realista en la condición en la que actualmente se encuentra el aprendizaje de la Matemática, ***hay avances***, ***pero no soluciones definitivas*** y, en ese predicamento se enmarca el presente trabajo, otra postura sería de una arrogancia supina.

Así, las consideraciones que se puedan realizar bajo este apartado tienen un ***carácter orientativo***, como se podrá apreciar al momento de considerar los distintos estilos de aprendizaje hoy en boga y sus posibles propuestas para mejorar dichos estilos por parte de los estudiantes.

Ahora bien, las investigaciones hacen cada vez más patente el hecho que el ***rendimiento académico*** está relacionado con los ***procesos de aprendizaje***. Además, Alonso et al. (1999, p. 61-62) advierten que el panorama de trabajos sobre Rendimiento Académico y Estilos de Aprendizaje es amplio y, después de analizar las distintas investigaciones, se llega a la conclusión de que parece suficientemente probado que los estudiantes aprenden con más efectividad cuando se les enseña atendiendo a los Estilos de Aprendizaje en los que son predominantes.

Pero, lo anterior no determina de manera única el rendimiento de los estudiantes, están también los ***factores emocionales y sociales***, ello hace relacionar aspectos vinculados con la inteligencia emocional como son: la confianza, la curiosidad, la intencionalidad, el autocontrol, la capacidad de comunicación y de cooperación (Goleman, 1998).

En este mismo sentido Guzmán (2007, p. 28), afirma que: "*es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros*".

Como se puede apreciar, por lo ya acotado, las variables que intervienen en el aprendizaje de los estudiantes son múltiples y diversas, es lo mismo que pretender caracterizar de manera única y absoluta todas las variables intervinientes en el proceso educativo.

Agregue a lo anterior el hecho comentado por Flores (2002) en el sentido que: ***por muy bien que enseñe*** un profesor, o crea que lo hace, ***jamás podrá garantizar*** que su esfuerzo se traducirá en ***un aprendizaje del estudiante***, ello naturalmente no implica que no deba hacerse un genuino esfuerzo para conseguir tales fines.

Sin perjuicio de lo dicho, se necesita crear una visión del aprendizaje que permita que el mayor número posible de estudiantes se sientan incluidos. Si se parte del supuesto que los estudiantes poseen capacidades de aprender y sus maestros son capaces de generar actividades que propicien su aprendizaje, entonces la tarea educativa será más fácil y placentera y, sin duda, con mejores resultados que los que hasta ahora se tienen. Para lograr ello es fundamental usar una gran variedad de estrategias de enseñanza de modo de poder atender los distintos estilos de aprendizaje de los estudiantes.

Ahora bien, consecuentes con el modelo educativo hoy imperante en la Institución, el que será presentado más adelante como parte integrante de los antecedentes de la presente Tesis, se puede adelantar el hecho que, el estudiante ocupa el centro de la acción educativa, así todas las acciones que se generen deben dar cuenta de este epicentro en pos de mejores aprendizajes por parte de los estudiantes.

Luego, las acciones educativas deberían considerar los distintos estilos de aprendizaje de los estudiantes, ello según Gallego y Nevot (2008) constituyen el primer paso para mejorar la tarea docente, así resulta aconsejable realizar un diagnóstico de los estilos de aprendizaje, es lo que estos autores hicieron al realizar un estudio con estudiantes de Bachillerato, aplicando el Test CHAEA y, como consecuencia de este conocimiento propusieron un plan de acción para aspectos que bloquean el aprendizaje, dando propuestas y sugerencias en pos de la mejora en la enseñanza de la Matemática.

En este mismo sentido se enmarca el trabajo realizado por Clausen-May (2005) en su libro titulado: "*Teaching maths to pupils with different learning styles*", en el que se muestran diferentes maneras de enseñar matemáticas de modo tal que resulten estimulantes para los estudiantes con estilos de aprendizaje diferente. Así, propone a los docentes que usen la mayor variedad posible de métodos de enseñanza distintos y, ofrece una gama de modelos e imágenes para ayudar a que los estudiantes, sobre todo aquellos con predominancia en los estilos visual y cinético, realicen un aprendizaje basado en la comprensión y sean capaces de reconocer las relaciones y los vínculos entre los distintos conceptos matemáticos que se vayan encontrando.

Lo cierto del caso es que, los estudios e informes educativos hallados coinciden en que ***los conceptos matemáticos deben ser presentados desde distintos enfoques y utilizando diferentes métodos de enseñanza*** de manera que ***independientemente del estilo de aprendizaje que tengan, todos los alumnos puedan crear las interconexiones necesarias para que su aprendizaje sea significativo***. Este enfoque de ver los procesos educativos está en consonancia con la forma en que se concibe el aprendizaje matemático hoy en día.

Sin perjuicio de lo dicho, Flores (2002) enumera algunas de las cualidades del aprendizaje matemático según la concepción actual, al señalar aspectos que conviene tener en cuenta como:

- *El aprendizaje matemático se realiza a través de experiencias concretas.*
- *El aprendizaje tiene que arrancar de una situación significativa para los estudiantes.*
- *La forma en que los aprendices pueden llegar a incorporar el concepto a su estructura mental es mediante un proceso de abstracción que requiere de modelos.*
- *Una de las formas de conseguir que el aprendizaje sea significativo para los estudiantes es mediante el aprendizaje por descubrimiento.*
- *No hay un único estilo de aprendizaje matemático para todos los estudiantes.*

(Flores, 2002, p. 6-8)

Cada una de las aseveraciones anteriores debería ser tomada en cuenta al momento de realizar la acción docente en el aula con los estudiantes.

A estas alturas se supone que el conocimiento que se tiene de los estudiantes referidos a sus estilos de aprendizaje, provee de información suficiente para abordar un tratamiento para cada uno de ellos, como son el ***Estilo Activo***, el ***Estilo Reflexivo,*** el ***Estilo Teórico*** y el ***Estilo Pragmático***.

Consecuente con lo anterior, se considera el trabajo que realiza Nevot (2001), quien expone para cada uno de los estilos de aprendizaje su caracterización, bloqueos y sugerencias de propuestas didácticas a considerar.

Se revisa entonces los diversos estilos de aprendizaje, resaltando en cada uno de ellos sus preferencias y dificultades, unido a las posibles sugerencias didácticas que involucran cada uno de ellos.

Sobre el estilo Activo. Los estudiantes con este marcado estilo poseen una serie de preferencias y dificultades como las que señala Nevot (2001, p. 1), a saber:

Tabla n° 4. Estilo activo: preferencias y dificultades.

Preferencias	***Dificultades***
▪ Intentar cosas nuevas. ▪ Resolver problemas. ▪ Competir en equipo. ▪ Dirigir debates. ▪ Hacer presentaciones. ▪ No tener que escuchar sentado mucho tiempo. ▪ Realizar actividades diversas.	▪ Exponer temas con mucha carga teórica. ▪ Prestar atención a los detalles. ▪ Trabajar en solitario. ▪ Repetir la misma actividad. ▪ Limitarse a cumplir instrucciones precisas. ▪ Estar pasivo: oír conferencias, explicaciones. ▪ No poder participar.

Ahora bien, los bloqueos más habituales que impiden el desarrollo de este estilo activo se manifiestan en aspectos como:

- Miedo al fracaso y a la equivocación en algunas tareas.
- Manifestación de ansiedad ante hechos nuevos, es un tema de preocupación e inquietud.
- Sensación de estar obligados a realizar una tarea que no se desea.
- Falta de confianza en sí mismo, y por tanto, una desconfianza en las capacidades individuales.

Algunas ***sugerencias de propuestas didácticas*** para este ***Estilo Activo*** serían:

- Practicar la resolución de problemas de manera grupal.
- Cambiar de actividad en el transcurso de la clase. Se hace necesario disponer de una serie de actividades distintas para los estudiantes con predominancia en este estilo.
- Puesta en común. Una vez finalizada una actividad realizar la correspondiente exposición, a modo de cierre de ella, aclarando dudas y corrigiendo errores que faciliten la comprensión de los temas tratados.
- Permitir la realización de ejercicios en los que una técnica haya sido explicada previamente, ello contribuye a adquirir confianza en las capacidades individuales.

- Plantear preguntas que incentiven el diálogo entre los participantes, de modo de poner en ejercicio un razonamiento crítico que dichas preguntas conllevan.

Sobre el estilo Reflexivo. Los estudiantes con este marcado estilo, según Nevot (2001, p. 3) manifiestan preferencias y dificultades que se expresan de manera cercana al mismo nombre con el cual se designa a este estilo, esto es, reflexivo. Se manifiestan como:

Tabla n° 5. Estilo reflexivo: preferencias y dificultades.

Preferencias	***Dificultades***
▪ Observar y reflexionar. ▪ Llevar su propio ritmo de trabajo. ▪ Tener tiempo para asimilar, escuchar, preparar. ▪ Trabajar concienzudamente. ▪ Oír los puntos de vista de otros. ▪ Hacer análisis detallados y pormenorizados.	▪ Ocupar el primer plano. ▪ Actuar de líder. ▪ Presidir reuniones o debates. ▪ Participar en reuniones sin planificación. ▪ Expresar ideas espontáneamente. ▪ Estar presionado de tiempo. ▪ Verse obligado a cambiar rápidamente de una actividad a otra.

Ahora los bloqueos más frecuentes que impedirían el desarrollo del estilo reflexivo serían:

- Carecer de tiempo para planificar y pensar.
- Verse obligados a cambiar rápidamente de actividad.
- La impaciencia, que se traduce en falta de tranquilidad, de paz. Si se está movido por la prisa, las decisiones que se tomen no siempre son las mejores.
- El trabajo de manera impulsiva e irreflexiva, por lo general, no conlleva a las mejores soluciones, por el contrario las buenas soluciones son fruto de la reflexión.

Algunas ***sugerencias de propuestas didácticas*** para acrecentar el ***Estilo Reflexivo*** serían:

- Participar en el pizarrón con la solución de un problema o una tarea, de modo tal que ella genere una actuación regular de los estudiantes y a su vez procure satisfacción después de realizada.
- Elaborar protocolos, que den cuenta de la solución de un problema, de una demostración o de un simple ejercicio rutinario.
- Experimentar la alegría que significa resolver un problema, admitiendo la claridad y belleza que supone su solución.
- Mantener el interés por la materia que se trata, conectando el nuevo conocimiento con los conocimientos previos. Hacer un uso adecuado de ilustraciones y ejemplos que contribuyan en esta dirección.

- Propiciar el hecho que a toda práctica le sigue un período de reflexión. El profesor procura que se escuchen mutuamente y entiendan lo que sus compañeros dicen. Oye sus reflexiones, ayuda a interpretarlas y las hace comprensibles para los alumnos; destaca las ideas importantes; expresa de nuevo lo que los estudiantes han expuesto con vaguedad; repite varias veces lo importante de un tópico determinado.

- El maestro hace uso del principio asistencia mínima, en el sentido de captar lo que el grupo curso es capaz de hacer por sí mismo, de una forma autónoma. Paulatinamente irá tomando la dirección, guiará entonces hacia los conocimientos que considere esenciales.

Sobre el estilo Teórico. Con este marcado estilo los estudiantes manifiestan preferencias y dificultades expresadas por Nevot (2001, p. 5) como:

Tabla n° 6. Estilo teórico: preferencias y dificultades.

Preferencias	***Dificultades***
▪ Sentirse en situaciones claras y estructuradas. ▪ Participar en sesiones de preguntas y respuestas. ▪ Entender conocimientos complicados. ▪ Leer u oír hablar sobre ideas y conceptos bien presentados. ▪ Leer u oír hablar sobre ideas y conceptos que insistan en la racionalidad y la lógica. ▪ Tener que analizar una situación completa.	▪ Verse obligado a hacer algo sin un contexto o finalidad clara. ▪ Tener que participar en situaciones donde predominen las emociones y los sentimientos. ▪ Participar en actividades no estructuradas ▪ Participar en problemas abiertos. ▪ Verse, por la improvisación, ante la confusión de métodos o técnicas alternativas.

Ahora, los bloqueos más frecuentes, según Nevot (2001), que impiden el desarrollo del estilo teórico son:

- Preferir la intuición y la subjetividad. Así, por ejemplo, la rigidez mental impide la flexibilidad de pensamiento necesaria para cambiar estrategias o simplemente modificarlas.

- La excesiva dependencia de los demás, en este contexto, del profesor y su demás compañeros de estudio. De no contar con esa ayuda están completamente perdidos.

- Dificultad para pasar del pensamiento a la acción. Esto es, hacer Matemáticas.

- Dificultad para terminar y llevar a cabo los trabajos. Se entrampan en el camino, sin llegar a feliz término con una tarea específica.

Respecto de las ***sugerencias de propuestas didácticas*** para mejorar el ***estilo Teórico***, se pueden mencionar:

- Leer con atención y de forma pausada asuntos como: un teorema, una proposición, una propiedad o el simple enunciado de un problema. Acto seguido, ser capaz de resumir lo leído con sus propias palabras.

- Avanzar en la formulación algebraica, dotando a las fórmulas y a las frases de sentido, explicándolas y justificando el lenguaje usado. Así, los símbolos usados cobran significado para el estudiante.

- Dar oportunidad a los estudiantes para que apliquen los conceptos adquiridos en temas tanto prácticos como teóricos.

- Reconocer la importancia del aprendizaje memorístico, en fórmulas y reglas, ellas también forman parte del conocimiento matemático del estudiante.

Por último se revisa el ***Estilo Pragmático***, recorriendo los mismos puntos tratados en los estilos ya tratados. Con ello se consigue una forma uniforme de tratar cada uno de los cuatro estilos que se han definido para abordar el aprendizaje.

Estilo Pragmático. Los estudiantes con una predominancia alta de este estilo de aprendizaje manifiestan preferencias y dificultades que se expresan de la manera siguiente:

Tabla n° 7. Estilo pragmático: preferencias y dificultades.

Preferencias	***Dificultades***
▪ Aprender técnicas inmediatamente aplicables. ▪ Percibir muchos ejemplos y anécdotas. ▪ Experimentar y practicar técnicas con asesoramiento de un experto. ▪ Recibir indicaciones prácticas y técnicas.	▪ Aprender cosas que no tengan una Aplicabilidad inmediata. ▪ Trabajar sin instrucciones claras sobre cómo hacerlo. ▪ Considerar que las personas no avanzan con suficiente rapidez.

Los bloqueos más comunes que impiden el desarrollo del estilo Pragmático serían:

- Considerar las técnicas útiles exageradas.
- Dejar los temas abiertos. En la fase inicial de un determinado problema concédete la oportunidad de volar libremente, déjate llevar por conjeturas imaginativas, por tu fantasía, todo ello por encima de planteamientos lógicos. Ya vendrá el rigor (Guzmán, 2007).
- La distracción y la falta de concentración. Hay personas que se distraen con mucha facilidad y suelen tener breves lapsos de atención y, como consecuencia de ello, no suele cundirles mucho. El profesor debe proporcionar a sus alumnos un ambiente adecuado para trabajar y animarles a lograr sus objetivos.

Respecto de las sugerencias de propuestas didácticas para mejorar el estilo Pragmático se pueden mencionar:

- Realizar la corrección de los ejercicios con su posterior autoevaluación.
- Proveer de medios donde se pueda experimentar y observar. La experimentación es una de las técnicas más fructíferas para el descubrimiento y la resolución de problemas. De la observación surge una conjetura, se continúa experimentando y se contrasta.

- Realizar ejercicios. Proponer problemas que tengan como finalidad el uso de las distintas técnicas, algoritmos y destrezas matemáticas en contextos distintos de los que se han aprendido y enseñado.

- Hacer uso de imágenes. Muchos ejercicios y problemas se hacen más asequibles cuando se utiliza una representación adecuada de los elementos que en ellos intervienen. Se piensa generalmente mejor con el apoyo de imágenes que con palabras, números, símbolos y fórmulas.

- Generar entornos virtuales de aprendizaje mediados por el ordenador. Así, los estudiantes pueden investigar cualquier tema de interés por su cuenta o en colaboración con otros estudiantes, intercambiando información, como resultado de esta interacción entre ellos. También cabe la posibilidad de consultar los temas con expertos de otros lugares sobre un tema específico, todo por medio de Internet.

- Recibir información de su actuación en clase, como puede ser después de haber realizado una presentación o en el desarrollo de la exposición de un problema.

Nevot (2001), cierra este análisis haciendo ver, a quienes se dedican a la tarea docente que, esta es una actividad viva y en constante cambio, por tanto, se ha de estar atento a las aportaciones que se hacen de los reportes de investigación como a las sugerencias que otros docentes puedan hacer a los temas objeto de enseñanza aprendizaje.

Con todo ello, la actitud en el aula resulta ser un claro espejo de la actitud del maestro frente a la vida.

No olvidar que la enseñanza es un arte y el aprendizaje es fruto de este mismo arte, quién no lo entienda de esta manera tiene pocas posibilidades de sobrevivir en esta difícil empresa que es educar hoy.

Lo difícil, sin duda, es combinar todas estas sugerencias didácticas en el aula, donde se tendrá estudiantes con distintos estilos de aprendizaje. Es esta una tarea titánica, que al maestro sobrepasa sin duda, pero al menos lo intenta. A esto apunta al hacer de la educación un arte, cada vez que una nueva jornada lo reclama. Hay en ello mucho de quijotesco, por decir lo menos.

Por último, los temas no se agotan con estas consideraciones, sólo se bosquejan en caracteres de una concreción que es fruto del estudio, del análisis y, del paso inexorable del tiempo.

Se finalizan estas consideraciones sobre el aprendizaje haciendo hincapié en la diferencia entre lo que debe entenderse por ***aprendizaje profundo*** versus un ***aprendizaje superficial.***

En primer lugar se debe reconocer el hecho que las condiciones actuales de los estudiantes que hoy se incorporan a las aulas universitarias distan mucho de las de antaño, donde los estudiantes ingresaban mejor preparados en cuanto a contenidos matemáticos y conductas de entrada, esto es, más responsables y motivados en su carrera de ingreso. La situación actual, de mayor cobertura de acceso a las universidades, dada la gran oferta de instituciones, tanto públicas como privadas, ha cambiado notoriamente el escenario educativo. Hay mayor acceso, pero se aprecia menor calidad del estudiantado, así, si antes bastaba la clase magistral, la práctica unida a una tutoría semanal, hoy eso difícilmente da resultado.

Lo anterior tipifica ***dos tipos muy diferentes de estudiantes***, como lo relata Biggs (2010), a saber: por un lado, está la estudiante que denomina ***Susan,*** con sus características como: alumna comprometida, le interesan sus estudios y se esfuerza por hacerlo bien; en cambio, por el otro lado, está ***Robert,*** a quien atribuye cualidades como las siguientes: sólo quiere conseguir un título que le permita conseguir un puesto de trabajo el día de mañana, no tiene mayor interés en las materias, asiste a clases con casi ninguna pregunta y se esfuerza lo justo solo para aprobar sus asignaturas.

Ante este escenario, el cual está presente en la mayoría de las universidades, este autor (Biggs, 2010), ***insta a que Robert se acerque a Susan***, sólo de esta manera la institución estará cumpliendo el cometido a la que ha sido llamada y que ha explicitado en su misión y visón que la define, hacer y construir un profesional competente y que pueda adaptarse al cambio de la sociedad del conocimiento de hoy.

Lo cierto es que las aulas universitarias están repletas de estudiantes como Robert y hay muy pocas Susan en ellas. La pregunta natural es entonces: ***¿cómo hacer para que los estudiantes como Robert se transformen en Susan en el sentido académico?***

Biggs (2010) adelanta una solución para producir una mejor enseñanza, cree necesario que las instituciones inviertan en una mejor capacitación en su colectivo docente, pues son los profesores quienes experimentan los problemas y, con ayuda tendrán que generar las soluciones. Ahora esas soluciones no pasan por revisar unos cuantos trucos docentes, los cuales pueden o no ser útiles en los contextos específicos de cada docente, sino más bien en ***reflexionar sobre la práctica*** (rsp) y como resultado de ello deducir sus propias formas de abordarlos en el particular contexto en el que les corresponde actuar. Esto por simple que parezca tiene una vital importancia si de veraz se desea avanzar en dar solución a los problemas docentes, esto es lo primero.

2.4. El cálculo diferencial

2.4.1. Algunos antecedentes históricos

Dado que el ***cálculo diferencial*** está estrechamente unido al ***cálculo integral***, a través del ***Teorema Fundamental del Cálculo***, no se puede dejar de referirse a este último al hacer un breve paso por la historia, aunque sea a grandes zancadas. Con ello se quiere dar un justo y merecido reconocimiento a sus personajes más destacados, también es cierto que el nacimiento del Cálculo se fue gestando paulatinamente a través del tiempo y, los nombres en los que hoy se reconoce tal descubrimiento o invención tuvieron la capacidad de sintetizar muchos de los avances que ya había en ese momento.

En primer término, se puede decir que el ***cálculo integral*** tiene sus raíces históricas con Arquímedes, en Siracusa alrededor del año 215 a. C. cuando inicia la búsqueda sobre la medida del círculo. Las tres proposiciones que dan inicio a su trabajo son:

- *Todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro al perímetro del círculo.*

- *El área del círculo es al cuadrado de su diámetro como 11 es a 14.*

- *El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentado en un segmento comprendido entre 10/71 y 1/7 de dicho diámetro.*

Lo importante de este tratado es que Arquímedes encontró la expresión que hoy se usa para estimar el área del círculo, para ello necesitó la relación entre la circunferencia y, por tanto, del número π (pi), de valor aproximado igual a: 3,14…, lo que le llevó a estimar dicha área por aproximación de polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

Es en base a lo anterior donde se encuentran los gérmenes del Cálculo Integral al estimar áreas bajo curvas, a través de sucesivas aproximaciones de polígonos inscritos y circunscritos de una figura en estudio.

Es más, Eutocius de Ascalón (480-540 d.C.) citado por Torija (2007, p. 114), decía que si hubiese que ordenar los trabajos de Arquímedes por su importancia, ellos serían:

> "*Sobre la esfera y el cilindro*",
>
> "***Sobre la medida del círculo***" y el último,
>
> "*Sobre el equilibrio de los planos*"

Ello pone de manifiesto la importancia del segundo tratado escrito por Arquímedes.

Es claro además que, el ***Cálculo Integral*** no es menos importante que el ***Cálculo Diferencial***, ambos están estrechamente unidos, como ya se ha mencionado. De los textos de estudio para la enseñanza del Cálculo, son pocos los que presentan dentro de su desarrollo la primacía del Cálculo Integral sobre el Cálculo Diferencial, el texto escrito por Apostol (1990) es uno de ellos.

Al tenor de estos hechos se puede decir que hay quienes prefieren empezar un curso tratando en primer lugar el Cálculo Integral, y después de ello emprender el Cálculo Diferencial, aduciendo que el tema en sí es más fácil de abordar y más intuitivo para quien lo enseña y para quien lo aprende, pues uno de los problemas que resuelve el Cálculo Integral es el problema del área, concepto éste que se ha venido desarrollando en el estudiante, no así los problemas que aborda el cálculo diferencial, donde el problema de la tangente a una curva difícilmente se trata en los cursos anteriores y, menos aún, en la enseñanza Secundaria (Enseñanza Media en el contexto chileno).

En lo que respecta al Cálculo Diferencial, y más precisamente al concepto de derivada y los problemas que ella resuelve, como es el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva dada, se encuentra en las *Cónicas de Apolonio* de Pérgamo (262-190 a. C.), en su libro II, un estudio relativo a las tangentes de una cónica, como caso particular obviamente, y en el libro V un estudio sobre máximos y mínimos (Ortega y Sierra, 1998).

Durante la Edad Media es poco el desarrollo Matemático en esta área, pero en él se preparan las condiciones para que su avance se haga patente en las personas de los insignes matemáticos: ***Isaac Newton,*** quien vivió entre los años 1643 y 1727, y ***Gottfried Wilhelm Leibniz***, quien vivió entre los años 1646 y 1716, desarrollando de manera independiente avances importantes sobre el cálculo diferencial.

La historia relata también el episodio sabroso de la autoría de esta materia, de quien verdaderamente lo descubrió. El nombre como tal de Cálculo Diferencial e Integral se debe a Leibniz.

Un aspecto digno de destacar es la forma en que estos insignes personajes de la Matemática concebían las funciones, mientras para Newton era el resultado de una partícula que se movía a través del tiempo, para Leibniz una curva era el resultado de pequeños segmentos de rectas unidos entre sí, con lo que una curva no es más que un polígono de un número suficientemente grande de lados, por no decir de infinitos lados.

Sin embargo, para otros el verdadero germen del cálculo diferencial se encuentra en los trabajos realizados por el francés *Fermat,* quien vivió entre los años 1601 y 1665, él crea un método para resolver los problemas de máximos y mínimos. Famoso es el problema de dividir un segmento dado de modo tal que su producto sea máximo. Este problema lo resuelve Fermat sin disponer del concepto de límite y menos del de Derivada. Es claro, con este ejemplo y los desarrollos que hicieron tanto Newton como Leibniz que, en sus comienzos el Cálculo no presentó el nivel de desarrollo que hoy tiene. Por ejemplo, los conceptos matemáticos de: "Límite y continuidad" son obras de Cauchy (1789-1857) y, posteriormente en un refinamiento, debido a Weierstrass (1815-1897), a quien se considera el verdadero padre del análisis matemático, una versión refinada del cáculo infinitesimal. Otros matemáticos destacados que también contribuyeron a su desarrollo fueron: Gauss, Riemann, Gibs y Skovalevsky, y Lebesgue (Boyer, 1999).

Durante el siglo XX, lo importante está en las aplicaciones del Cálculo a diferentes áreas del conocimiento, sobre todo en las ciencias naturales y en las ingenierías, por citar algunas de ellas (Purcell y Varberg, 2000; Durán, 2011).

Con estas breves notas, y sin entrar en los aspectos matemáticos propiamente tal del desarrollo del Cálculo, se ha querido resaltar esta importante obra matemática en sus personajes principales, quienes la gestaron y le dieron vida. Por lo demás, estos breves comentarios históricos resultan más que suficientes para los fines que persigue esta presentación.

2.4.2. Dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo

Es conocido el hecho que la enseñanza del cálculo y, por ende, su aprendizaje, presenta dificultades, y que son numerosas las investigaciones e intentos por revertir esta situación (Ortega y Sierra, 1998; Turégano, 1994; Artigue, 1995; Tall, 1996; Hitt, 2003; Salinas et al., 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011; Rincón et al, 2014). De ahí entonces que se han generado, a través del tiempo, una serie de propuestas educativas de diversa índole con la esperanza de poder hacer el aprendizaje de esta materia más comprensible y asequible a los estudiantes.

Una iniciativa que ha impulsado la Universidad de Monterrey, México, ha consistido en que sus estudiantes deben rendir una evaluación, que sirve de pre- requisito para cursar el curso de Cálculo, si aprueban dicho “Examen” pueden cursar el curso de Cálculo Diferencial e Integral, en caso contrario, deben cursar un propedéutico de Pre cálculo, el que lo dejará en mejores condiciones para afrontar con mayor éxito la línea de los cursos de Cálculo. Hasta ahora, una investigación llevada a cabo para valorar tal iniciativa remedial ha dado muestra de ser exitosa, dejando entrever una correlación alta entre aquellos estudiantes que cursaron el curso Propedéutico y después cursaron su curso de Cálculo Diferencial e Integral (Cantú, Arenas y Flores, 2012).

Otras instituciones, como es el caso de la Universidad Austral de Chile, ha optado por someter a sus estudiantes a un curso previo de preparación remedial, en las materias que consideran fundamentales y que debían haber sido aprendidas en su enseñanza secundaria, media para el caso de Chile. El mencionado curso remedial se realiza durante las dos semanas iniciales de sus cursos y de forma intensiva, con esta iniciativa se logra paliar en parte las deficiencias de su formación escolar previa.

Lo anterior no hace otra cosa que mostrar lo importante que resultan ser los ***conocimientos previos*** para poder rendir con relativo éxito los cursos de Cálculo. Y, si los estudiantes no poseen dichos conocimientos, difícilmente sortearán con éxito las exigencias que esta rama de la Matemática impone a sus cultores.

En un sentido similar a lo anterior, el cálculo conjuga varios subtemas que están íntimamente relacionados, como son: funciones, límite y continuidad, ello indica que un manejo deficiente de ellos, que para algunos se trata de lo llamado pre-cálculo dificultará sin duda un aprendizaje del cálculo en lo que sigue a ellos (Hitt, 2003).

Ahora bien, un concepto básico y fundamental que debería haberse aprendido en la etapa secundaria es el concepto de ***"Función",*** lamentablemente el desconocimiento de dicho concepto y su alcances más inmediatos representa una seria dificultad para el aprendizaje del Cálculo. No se debe olvidar que, en buena medida, la matemática no es más que el estudio de las funciones, junto a las relaciones que se pueden establecer con ella. Lo advertido hace pensar que si los estudiantes supiesen este concepto con relativa claridad, la tarea para el docente se vería facilitada con creces.

Otro aspecto no menos importante es el desconocimiento evidenciado en la operatoria algebraica de los números reales junto a las operaciones sobre potencias, raíces, polinomios, etc. Ello indudablemente también representa una dificultad para su enseñanza. Su incompetencia se une a la lista de carencias que evidencias los estudiantes y, por ende, agravan el aprendizaje del cálculo.

A lo ya dicho, se suma el hecho que casi el 70% de los estudiantes proceden de los quintiles 1 y 2, esto es, de los menores ingresos familiares y son además primera generación de estudiantes universitarios de sus respectivas familias, ello configura un cuadro social de escasos recursos económicos familiares. Ahora bien , sin pretender culpar a las variables socioeconómicas de los estudiantes, ni menos a sus conocimientos previos, las que sin duda son importantes para un buen aprendizaje ulterior, hay consenso también en señalar que por lo general ***la enseñanza del Cálculo se centra en demasía en su parte netamente algorítmica,*** lo que se traduce en la realización de unas cuantas rutinas que el estudiante aprende sin acceder a la comprensión de lo que realmente hace, es simplemente un hacer por hacer. Sume a ello el hecho que, por regla general, los procesos de evaluación responden al mismo patrón, esto es, se evalúan procesos algorítmicos y por tanto rutinarios. Lo anterior se repite año tras año, con ello no se desea desmerecer dichos procesos algorítmicos, son necesarios, pero no suficientes, si lo que se pretende es lograr una comprensión más significativa de la ***derivada*** y *los temas con ella relacionada*, como son ***sus aplicaciones*** más inmediatas: ***el estudio de máximos y mínimos*** para una función y ***los problemas de optimización*** de una variable que ella puede resolver.

Por otro lado, a veces ***se comete el error de presentar esta materia en forma muy rigorosa,*** más ***cercana al análisis matemático*** y, como consecuencia de ello la comprensión de los conceptos de manera cabal se ve dificultada.

Luego, ya sea presentar el Cálculo como un mero conjunto de reglas que hay que aplicar o hacerlo desde una postura más cercana al análisis matemático, en ambas posturas se ve dificultado un buen aprendizaje de esta materia.

Si se opta por la primera postura, se alimenta la creencia entre los estudiantes el hecho que aprender cálculo consiste en memorizar una cuantas reglas, pues esto es lo que los maestros evaluarán (Orton, 1983; Carpenter y Hebert, 1996). Por otro lado, presentarla con todo detalle y, más bien, hacerlo desde el Análisis, promueve entre los estudiantes una cierta aversión que les hace pensar que el Cálculo no es para ellos, con los consecuentes problemas que esto trae consigo, como pueden ser: la pérdida de la carrera o simplemente un marcado retraso en el tiempo estimado para terminar sus estudios universitarios, además de contribuir a una baja autoestima entre los estudiantes.

Los comentarios expuestos recientemente, relativos a este mal rendimiento académico de los estudiantes, se pueden situar en varios frentes, como son: ***el epistemológico*** (Sierpinska, 1985), ***el didáctico*** (Orton, 1983) y ***el psicológico*** (Tall, 1990; Vinner, 1991). Todos ellos contribuyen, en cierto sentido, a que se tengan los rendimientos que se vienen observando, es más, se advierte una suerte de pasividad dentro del cuerpo académico que atribuye toda la responsabilidad a los propios estudiantes, con esta postura el problema no es la transposición didáctica, sino más bien de orden motivacional y radicado en los propios estudiantes, según los maestros.

Una solución que salta a la vista, al considerar estos aspectos, es el intervenir el currículo de modo de secuenciarlo, al menos, bajo dos grandes líneas, ***una considerando la génesis histórica de los conceptos,*** que no es la que se ha usado la mayoría de las veces y, ***la otra, poder usar los recursos tecnológicos disponibles hoy en día.*** No se debe olvidar que los estudiantes son nativos en materia tecnológica, en cambio el cuerpo de profesores ha debido ajustarse a estos nuevos cambios que la sociedad presenta hoy en día.

Hay algo más que se puede añadir, y es la necesaria conformación de equipos de trabajo para la realización de las tareas académicas por parte de los estudiantes. La razón fundamental para apoyar esta tesis es que el mundo laboral se realiza en torno a equipos de trabajo, donde la colaboración entre sus integrantes se hace absolutamente necesaria e imprescindible. De ahí entonces que, incentivar la formación académica de cara al trabajo colaborativo, sea absolutamente relevante desde sus inicios por las razones ya comentadas.

Otro aspecto que pocas veces se toma en consideración es la falta de compromiso por parte de docente al impartir su asignatura, por lo general se culpa a los estudiantes de su mal desempeño, pero ¿***y al docente qué papel le cabe en todo el proceso educativo***? ¿***Se hace responsable de sus estudiantes***? ¿O simplemente se limita a afirmar que los estudiantes son sencillamente malos y no estudian? Estas interrogantes deambulan en las conversaciones de los docentes y cada cual intenta dar una respuesta que satisfaga sus expectativas de modo de no hacerse responsable, en lo más mínimo, si los estudiantes aprenden o no. Se limitan a afirmar: yo paso mi materia, los estudiantes no trabajan como debieran. Ahora bien, ¿***estas afirmaciones están en lo correcto?*** ¿***O la responsabilidad del docente va más allá de estas meras palabras***?

Una de las posibilidades ciertas que tienen los docentes, al menos en la UBB, es poder participar de los continuos procesos de perfeccionamiento que se ofrecen el Área de Desarrollo Pedagógico y Tecnológico (**ADPT)** desde el Área de Desarrollo, dependiente de la UBB. Con la participación de esta unidad (**ADPT**[1]) se pretende que los docentes que recién se integran a esta casa de estudios puedan acceder a cursos en materia didáctica con el objeto de poder realizar una mejor docencia de pregrado.

A continuación se muestra la oferta de cursos que ofrece ADPT para ambas sedes (http://www.ubiobio.cl/adpt/, 2014).

Figura n° 2. Oferta de curos de ADPT- Chillán.

[1] http://www.ubiobio.cl/adpt/

Figura n° 3. Oferta de cursos de ADPT-Concepción.

2.4.3. Propuestas didácticas para el aprendizaje del cálculo

El concepto clave que sustenta el cálculo diferencial es, sin duda, "***La derivada***", junto a él aparecen otros conceptos relacionados, como son:

- *El concepto de función.*
- *El concepto de "Límite de una función" y*
- *El concepto de " Continuidad de una función"*

Estos tres conceptos que, para algunos autores de textos y/o didactas son fundamentales, sostienen en buena medida el edificio del cálculo diferencial.

En vista de ello, el análisis que a continuación se presenta para evidenciar tendencias y enfoques para el aprendizaje de cálculo está basado en su pieza maestra, esto es, la "derivada".

Demás está decir que un buen manejo de los conceptos anteriores, con cierta propiedad, facilita en gran medida una mejor comprensión de la derivada como tal, en sus propiedades y alcances, como la Matemática que cuantifica el cambio.

Según Dolores (2000) la orientación y enseñanza del cálculo y, fundamentalmente el concepto de derivada, han estado marcados básicamente por ***dos tendencias***, a saber:

- ***Una tendencia clásica formal***, caracterizada por la estructura del análisis matemático y, por tanto, apegada al rigor de esta disciplina y,

- ***Una tendencia desde la resolución de problemas***, donde los conceptos se forman a partir de la actividad matemática, referida a la determinación de tangentes o de su significado físico.

Además, señala Dolores (2000), que ambas tendencias se manifiestan con ciertas variantes que denomina ***enfoques.***

Así, para la ***Primera tendencia*** (***Clásica formal***) incluye los enfoques:

- *algebraico, numérico, formal, infinitesimal, y el de aproximación local afín.*

Por su parte, para la ***Segunda tendencia*** considera enfoques como:

- *el geométrico y el variacional*.

Hace mención especial del ***enfoque computacional***, el cual no se ajusta necesariamente a las tendencias descritas anteriormente.

Este ***enfoque computacional*** se ve influenciado por el uso de la tecnología, el cual cobra cada día más interés debido al portentoso desarrollo de la tecnología, medio cada vez más en uso en el quehacer educativo de hoy.

A continuación, se hace una revisión de cada uno de estos enfoques con más detalle, de modo tal de poder advertir sus características más relevantes que los configuran.

Enfoque algebraico: pone el acento en el trabajo algorítmico. Un claro ejemplo de ello es la conocida regla de los cuatro pasos, mediante la cual se obtienen las derivadas de las funciones. Posteriormente se revisan los teoremas sobre derivadas, como es lógico. El concepto de la derivada es entonces la estimación del último paso del cociente incremental cuando delta x tiende a cero, luego:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Este es uno de los enfoques más socorridos para introducir el concepto de la derivada, la gran mayoría de los textos de Cálculo usa la expresión de arriba para definir la derivada. (Lang, 1990; Larson et al., 2009; Stewart, 2010; Zill, 2011; Flores et at., 2012).

Enfoque numérico: este enfoque, más bien clásico, se caracteriza por el uso de sucesiones numéricas, da la definición de sucesión y en base a este límite induce la definición de derivada; este enfoque que fue característico en años pasados se ha dejado completamente de lado últimamente. El texto del autor Kuratowski es un buen ejemplo de la realización de este enfoque. (Kuratowski, 1962).

Enfoque formal: sigue la secuencia clásica del contenido, el cual considera como punto de partida:

- al conjunto de los números reales, a continuación aborda el concepto de función,
- examina el límite de una función en términos de ε y δ,
- continúa con la definición rigurosa de continuidad por medio del límite,
- para llegar a la derivada como consecuencia del límite; reglas de derivación y, por último,
- las aplicaciones de la Derivada. (Este enfoque es muy próximo al análisis matemático, pero con menos rigor que él)

Enfoque infinitesimal: la estructura de los contenidos básicos del cálculo se organiza mediante una especie de isomorfismos respecto de los contenidos tradicionales. Primero se caracteriza el conjunto de los números Hiperreales $\Re^*$y se definen como: *"Un número **a** (con a en $\Re^*$) es un **infinitésimo si | a |< r**, para todo real r. Y un **infinitesimal grande** (infinito) es aquel **b** (con b en $\Re^*$) tal que **|b| > r**, para todo número real r"*

Bajo este enfoque, el concepto de la derivada se presenta como una aproximación. Tiene este enfoque una ventaja, y es que muchos de los resultados del Cálculo, que en sí son verdaderos teoremas, resultan fáciles de probar y muy intuitivos desde el punto de vista algebraico.

Se puede afirmar que este enfoque es muy similar al anterior, esto es, al enfoque formal para introducir el concepto de la Derivada.

<u>Enfoque de aproximación local afín:</u>: para introducir el concepto de derivada se parte de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante. Así, la idea de tangente se presenta como el límite de una sucesión de secantes y con ello se establece la noción de aproximación afín. Es claro que, la aproximación lineal afín es una buena aproximación al valor de la función en un entorno reducido de dicho punto.

Todos estos enfoques descritos anteriormente quedan registrados bajo la ***tendencia tradicional clásica.***. Por su parte, los que se describen a continuación resultan ser ***innovadores,*** según Dolores (2000), a saber:

<u>Enfoque geométrico</u>: aquí un referente obligado son los autores Cruse y Lehman (1982), quienes publican su texto, en su primera versión, en el año 1970, ya hace más de cuarenta años atrás. El texto comienza abordando problemas de optimización en los que claramente los métodos algebraicos no permiten su solución. A través de la solución de ellos emerge la necesidad de estimar pendientes de tangentes en un punto. El desarrollo del concepto de derivada sigue una trayectoria histórica, luego se inicia con los métodos griegos, luego le sigue la argumentación de las raíces iguales de Descartes para continuar con el Método de los límites de Fermat, ambos contemporáneos.

Una de las ventajas de este método estriba en que se privilegia el significado y la utilidad que la derivada posee en la solución de los problemas planteados al inicio del texto.

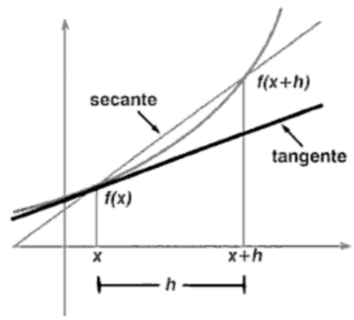
La desventaja mayor reside en que seguir esta secuencia histórica, implica demasiado tiempo, y mucho tiempo no se dispone para dictar un curso normal de Cálculo Diferencial. Los reparos sobre este enfoque van por la falta de conexión entre el significado de la cuantificación del cambio, que es lo que en verdad mide la Derivada y su carácter estático al estimar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, a pesar que se obtiene como la posición límite de las pendientes de las rectas secantes.

Esto último se expresa como:

$$m_{secante} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y de manera aproximada y de manera estática como se muestra abajo.

Figura n° 4.   Recta secante y recta tangente.



La figura anterior es clásica cuando se introduce la derivada como el límite de las pendientes de rectas secantes, obteniéndose al hacer tender “h” hacia cero, la pendiente de la recta tangente a la curva “ f ” en P= $(x_0 , f(x_0))$, la ecuación lineal, es en este caso es: $y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$.

Enfoque variacional: bajo este enfoque se propone cambiar el discurso matemático escolar desde el fondo, para ello se pone mucho énfasis a los procesos variacionales, idea que se puede introducir paulatinamente y antes que el estudiante ingrese a la Universidad, con el concepto de variación o cambio, que es la esencia del cálculo diferencial.

Lamentablemente se debe reconocer el hecho que los estudiantes no conocen el concepto de función, y menos aún se puede esperar, entonces, que conozcan sobre la variación entre las variables. Si, por el contrario, eso ocurriese la situación de entrada de los estudiantes sería muy distinta, pero esto es una situación muy escasa en el contexto educativo chileno.

Este enfoque se ha visto favorecido desde hace bastante tiempo en México gracias a la intervención de académicos como *Wenzelburger* (1993) y Cantoral entre otros investigadores. (Campero y Cantoral, 1991).

Otros autores como Salinas et al. (2009) han continuado con este discurso sobre la variación entre variables, generando una "Reconstrucción del Cálculo". El texto escrito por Salinas et al. (2010) titulado: *"Elementos del Cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza"* es un claro testimonio de este enfoque.

Por último, se hace referencia al ***Enfoque computacional.*** Enfoque éste que merece ser considerado en virtud del creciente desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, de la cual el proceso de enseñanza aprendizaje no puede permanecer ajeno hoy en día.

Enfoque computacional: la incorporación de los ordenadores en casi todas las actividades de trabajo del ser humano, ha facilitado enormemente las tareas tanto rutinarias como aquellas en donde la creación y el trabajo en equipo se hace necesario. La enseñanza y aprendizaje de la Matemática no puede estar ajena a esta realidad insoslayable. Además, es evidente el gran número de programas informáticos diseñados para apoyar la tarea docente en todas las áreas del saber y la Matemática, como ya se ha expresado, no puede sustraerse a esta realidad.

Un recurso que no se puede dejar de mencionar, y que en cierto modo está resultando invisible al trabajo docente, lo constituye ***Internet,*** y de manera más específica el buscador Google. Resulta difícil de cuantificar las posibilidades que ofrece la red en materia educativa, sea como un buscador o como un medio por donde viaja el conocimiento en su creación y almacenamiento hoy en día.

Figura 5. Buscador Google.

En su momento se hará referencia con más detalle a las posibilidades que puede ofrecer el considerar dentro de esta propuesta el ***Enfoque computacional,*** *entendido como la posibilidad cierta de poner de manifiesto dos aspectos muy importantes del quehacer matemático en su proceso de enseñanza aprendizaje, como son: la* ***Visualización y la Simulación de conceptos y procesos de orden matemático.*** Hay además otro punto que resulta importante y vital en la forma en la cual se concibe el mundo del trabajo, e imbricar a los estudiantes en esa dinámica es muy importante, es ni más ni menos que el trabajo en equipo, las tecnologías lo hacen posible y cada vez de manera más fácil.

2.4.4. Aportes de investigadores al tema

Considerar el aporte de investigadores destacados en materia de propuestas innovadoras es lo razonable en este acápite. Ellos representan, con su contribución, ***conocimiento didáctico*** que sirve como ***ejemplo e inspiración*** para materializar la enseñanza y, por ende, el aprendizaje del cálculo.

Para los efectos del desarrollo de este acápite se ha convenido en presentar, en primer lugar, las contribuciones en materia del concepto de ***"límite".*** A continuación se considerará el concepto de *"**la derivada**"*. Aunque ambos conceptos están indisolublemente unidos se abordan los aportes de manera separada.

Cada uno de los dos temas anteriores, esto es, el concepto de límite como el de derivada, da con creces abundante tema para ser tratado en una sola tesis doctoral. En este caso, dado que se aborda el aprendizaje del cálculo diferencial como un todo, esto es, para un curso completo, se tratan ambos conceptos. Uno a continuación del otro, aunque este no es el orden lógico de su desarrollo histórico.

En la parte final de este acápite se tratan ***algunas propuestas de orden general*** sobre la enseñanza del cálculo diferencial, las que sin duda constituyen valiosas sugerencias didácticas a la hora de intentar la propuesta que se pretende sustentar en la presente tesis doctoral respecto de un mejor aprendizaje del cálculo.

2.4.4.1. Sobre el concepto de límite

1. Aportaciones sobre el concepto de límite desde su historia

- Unos breves trazos históricos se pueden esbozar de partida desde su larga evolución en el tiempo, de casi veinte siglos para un reglón de conocimiento matemático aceptado por la comunidad científica matemática. No fue sino hasta el siglo XIX, en su última estación, para que matemáticos de la talla de Cauchy, Bolzano y de Weierstrass dieron con su formulación rigurosa, tal como se le conoce hoy en día, en términos de épsilon y delta, consiguiendo con ello la aritmetización del análisis que tantos problemas da a estudiantes como profesores.

- En la larga evolución del concepto, desde la matemática griega hasta el siglo XIX, se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción que se utiliza de forma implícita desde la época griega y que no llega a su forma actual hasta recién en el siglo XIX, como ya se ha comentado.

- Así, de Eudoxo de Cnido hasta el siglo XVIII, se percibe una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite.

  No existe el concepto como tal, ya que ni siquiera se ha explicitado el concepto de función, pero sí aparece como proceso implícito en algunos métodos utilizados, básicamente para resolver cuatro tipos de problemas:

- *Dada la fórmula del espacio en función del tiempo, obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio.*

- *Obtención de la tangente a una curva. En óptica es necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general, cuando surgen nuevas curvas, pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva sólo sirve para algunas cónicas.*

- *Estudio de máximos y mínimos de una función, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, etc.*

- *Cálculo de áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria.*

(Ferrante, 2009, p. 3)

Ya en la segunda mitad del siglo XVIII surgen, a partir de las aportaciones de Newton de las razones primeras y últimas de sus infinitésimos grandes y pequeños las soluciones para muchos de los problemas.

D'Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. Así, en el tomo IX de la Encyclopédie, da la siguiente definición de límite, a saber:

> *"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable"*

(Ferrante, 2009, p. 7)

Ya a finales de siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, el aporte de varios matemáticos se traduce en la necesidad objetiva de una construcción de una teoría general sobre el concepto de límite apoyado en el concepto de función, entre estos matemáticos destacan, como ya se ha dicho Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Así, la noción de límite ya es un constructo matemático que sirve de base para otros conceptos como: la continuidad, la derivada y la integral.

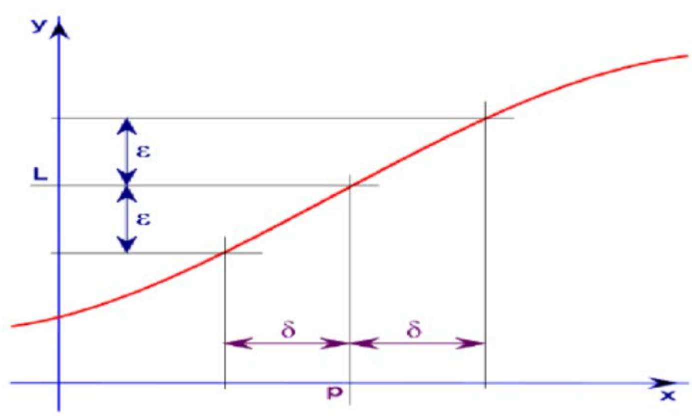
Como resultado de todo este esfuerzo intelectual, hoy se puede presentar la siguiente definición formal:

Decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si dado $\epsilon > 0, \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Esta es la famosa definición dada en términos de épsilon y delta con la cual maestros y estudiantes muchas veces tienen que lidiar. Pretender su asimilación en unas pocas clases es una proeza casi imposible, con razón se necesitaron dos mil años para su formulación rigurosa y exhaustiva.

Lo anterior se traduce gráficamente como:

Figura n° 6. Ilustración del concepto de límite.



Pero, el asunto no termina aquí, una nueva definición desde un punto de vista topológico en términos de entornos, se puede considerar. Así, la nueva definición de límite en base a entornos y de un carácter más general es ahora:

$$\forall U(L), \text{ existe } U^*(a) \,/\, \forall x \in [U^*(a) \wedge D(f)],\ f(x) \in U(L)$$

Ella es equivalente a la dada en términos de épsilon y delta, si el lector tiene el cuidado de hacer una buena lectura de ella.

2. ***Dificultades relacionadas con el aprendizaje del concepto de límite***

Investigadoras como Vrancken et al. (2005) señalan que las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite son patentes y están relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración. Aseveran además que, a pesar de tener los estudiantes los conocimientos necesarios tanto de álgebra como de geometría de igual manera pueden fracasar en el estudio del cálculo. En ese orden de considerandos se debe tener presente que la construcción del conocimiento no es un proceso continuo, él surge de desequilibrios, quiebres con los conocimientos anteriores y, por tanto, responde a reconstrucciones personales con el trato de nuevas materias de estudio.

Agregan además estas autoras en su trabajo que los obstáculos, que en definitiva son dificultades que se presentan en el sistema didáctico, se pueden clasificar de acuerdo a su origen en: obstáculos de origen ontogénico; de origen didáctico, propios del sistema de enseñanza y, obstáculos de origen epistemológico, derivados del rol constitutivo del saber mismo.

Teniendo en cuanta lo anterior, estas investigadoras, como una forma de corroborar las dificultades latentes en materia de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite, elaboraron una serie de actividades para los estudiantes donde analizaron, después de haberlas aplicado, los errores cometidos por sus educand@s en un total de cuarenta y nueve trabajos.

Las concusiones y reflexiones a las que llegaron después de su estudio de campo, se resumen en:

- ***Dificultades relacionadas con el concepto de función***, traducidas en la incapacidad para representar gráficas de funciones, para determinar el dominio de una función y para distinguir entre variable independiente y dependiente.

- ***Dificultades relacionadas con el concepto de límite,*** que se traducen en una falta de comprensión que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto; incapacidad para reconocer e interpretar límites laterales; como para comprender que el cálculo de límite no siempre resulta de una sustitución.

- ***Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro***, lo cual queda de manifiesto al no relacionar expresiones de límites con su correspondiente gráfica o en su proceso inverso.

(Vracken et al., 2005, p. 17).

En base a este estudio, las citadas investigadoras hacen hincapié en el necesario uso de la visualización, utilizando para ello diferentes representaciones para la construcción del concepto de límite. Proponen además, para superar la enseñanza, una metodología más activa y una aproximación más intuitiva para introducir el tema.

3. ***Algunas propuestas para el aprendizaje del concepto de límite***

En primer lugar se presenta la propuesta desarrollada por Engler et al. (2007) cuyo objetivo es analizar una secuencia de actividades para el aula con estudiantes universitarios de la Universidad del Litoral de Argentina, que pertenecen a la carrera de ingeniería agronómica, de tal forma que ellos gestionen con sentido el conocimiento matemático para que resulte vivo y, también sea funcional al permitirles resolver problemas, según sus creadoras.

En este trabajo, las autoras citadas, presentaron a sus estudiantes un total de siete actividades para que ellos desarrollaran en parejas, obteniendo cincuenta y nueve producciones, las que fueron estudiadas, después de su implementación, con cada uno de los grupos participantes de esta experiencia educativa.

Las actividades propuestas fueron variadas, en ellas se evidenció preparación y esmero. Además el uso de cambios de registro se hizo patente, con lo que la posibilidad de acceder a la comprensión del concepto de límite se facilitó. En su trabajo se incorporan, a modo de ejemplo, algunas producciones de los estudiantes.

Dos de las siete Actividades propuestas, con algunos comentarios se presenta a continuación, corresponden a las Actividades 4 y 7, en efecto:

Actividad 4: *Dada la función* $f(x) = (x^2 - 9) / (x-3)$

a) *Determine su dominio*

b) *Complete los cuadros:*

x	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)				
x	3,0001	3,001	3,01	3,1
f(x)				

c) *Represente gráficamente la función*

d) Considere el intervalo (6 - 0.5, 6 + 0.5) alrededor de y=6. Encuentre un intervalo abierto sobre el eje x alrededor de x=3 que verifique que para cualquier x de ese intervalo, salvo quizás para 3, sus imágenes se encuentran en el intervalo dado. Interprete gráficamente.

e) *Realice el mismo procedimiento* que en el inciso **c)** con el intervalo: (6 - 0.25, 6 + 0.25). ¿El intervalo encontrado es mayor o menor que el anterior? Interprete gráficamente.

f) *Considere ahora el intervalo (6 - 0.10, 6 + 0.10). ¿Qué puede observar?*

g) *¿Podría repetir el procedimiento con cualquier intervalo que incluya a 6?*

Esta actividad resulta muy sugerente para preparar al estudiante en vista de la definición formal de límite, al decir de sus autoras y de la propia experiencia al enseñar este tema a los estudiantes.

__Actividad 7:__ *Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas utilizando gráficos.*

a) Si lím f(x) cuando x tiende a 2 es 3 entonces f (2)=3.

b) Si f(2)=3 entonces lím f(x) cuando x tiende a 2 es 3.

c) Si -3 no pertenece al dominio de f entonces no existe el lím f(x) cuando x tiende a -3.

d) Si no existe lím f(x) cuando x tiende a -3 entonces -3 no está en el dominio (f).

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes, se observa que ellos consideran la doble implicación, compuesta por ***a) y b)*** *como válida, lo que en general no es cierto.*

Algunos comentarios que Engler et al. (2007) consideran al finalizar su trabajo para una futura implementación y readecuación de la situación estudiada serían ***la discusión en grupos de trabajo***, dado que al trabajar distintos profesores con diferentes grupos de estudiantes, se hace absolutamente necesario debatir y analizar entre todos, para poder identificar las dificultades que tendrían los estudiantes al trabajar las actividades propuestas.

Si las actividades son variadas en la enseñanza de un concepto, se aumenta la posibilidad de que el estudiante actúe, realice los procesos de observación, establezca relaciones, generalice y llegue a la concreción del concepto de límite, final último de toda propuesta que se precie de tal.

Por último, se permiten señalar que: *"Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite decidir, diseñar, implementar y experimentar estrategias de acción para obtener un aprendizaje de calidad"*

(Engler at al., 2007, p. 130)

A continuación se presenta el trabajo, de los autores Bucari, Bertero y Trípoli (2007), que lleva por título: "***Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de cálculo"***

En este trabajo se analizan dos presentaciones diferentes del concepto de límite implementadas en un curso de cálculo diferencial para estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata, Argentina, en dos períodos diferentes, la primera entre los años 1992 y 2000 (ocho años), y la segunda entre los años 2003 al 2007, con un rango de cuatro años.

Señalan dichos autores que, el propósito de su exposición es encontrar indicios de las concepciones epistemológicas subyacentes en las diferentes propuestas y relacionarlos con los modelos de enseñanza predominantes en los cursos en cada una de las fases que estudian.

Ahora bien, en la etapa fundacional del cálculo el instrumento básico utilizado fueron las cantidades infinitesimales, por sus inventores reconocidos a nivel mundial como son: Newton y Leibniz; la idea de límite, como se sabe, comenzó a utilizarse posteriormente, hasta llegar a la definición satisfactoria del concepto, lo que ocurrió a mediados del siglo XIX.

Así, el proceso de fundamentación del cálculo no terminó hasta fines del siglo XIX, y a partir de hechos relacionados como: la definición en términos de ε- δ dada por Weierstrass, el trabajo sobre los números reales debido a Dedekind y, por último, lo hecho por Cantor sobre la teoría de conjuntos. Desde entonces, para esta área de la Matemática, el límite pasó a ser un antecedente necesario para la definición de derivada, con ello quedó establecida para la posteridad la secuencia lógica: *Números reales, límites y derivadas*

Después de referirse a esta presentación sucinta de carácter histórica epistemológica, que sin duda ha marcado la agenda de los textos de estudio del cálculo, estos autores revisan las dos etapas de su estudio, basándose en los textos utilizados en este período para realizar la transposición didáctica.

Así, ***para la primera*** de las dos etapas, ***se comienza con el estudio de sucesiones***, para enseguida abordar el concepto de límite de una función cuando x tiende a infinito, posterior a ello se formula la definición de límite dada en términos de ε- δ, como se sabe: "El número real L es límite de la función f en el punto x_0, si se cumple que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Como crítica a esta presentación, estos autores realizan los siguientes comentarios:

- *El estudio del límite de una sucesión –en forma previa al límite funcional –no se justifica como estrategia de enseñanza puesto que el límite de una variable discreta no es menos complicado que el de una variable continua. Son de alguna manera, de dificultad equivalente y conceptualmente son cosas diferentes… La analogía entre ambos límites ni siquiera es formal.*

- *En este apunte se puede observar la rigurosidad en el orden, el lenguaje y la disposición muy similar a la de un texto clásico de matemática, que siempre resulta complicado de leer e interpretar.*

- *La postergación de la idea de derivada –o cambio instantáneo- hasta la obtención del concepto de límite, separa la introducción al cálculo diferencial de los problemas que le dieron origen.*

(Bucari et al., 2007, p. 1)

Así, el concepto de límite aparece sólo justificado por su propia definición, y como un nexo para los desarrollos posteriores, con ello la necesidad de su existencia se hará notoria más tarde, cuando se le use para las siguientes definiciones como son: la continuidad y la derivada propiamente tal, de esta forma, la matemática se presenta al estudiante como acabada, sólo hay que entenderla y con no poca dificultad para el estudiante.

En esta ***primera etapa*** la metodología de trabajo se basó en exposiciones teóricas a cargo del profesor, seguidas de clases prácticas, lugar donde los estudiantes podían consultar sus dudas referentes a las guías de trabajo prácticas dadas, además de ver desarrollar algún ejercicio en el pizarrón por el profesor para este segmento del curso. Bajo estas condiciones, el proceso de enseñanza-aprendizaje responde a un modelo normativo, esto es, centrado en el docente, quien es el que posee el saber y su función es transferirlo a los estudiantes. Así, el estudiante no pasa de ser un simple receptor de conocimientos y, por tanto, tiene un rol pasivo en todo el proceso educativo.

La ***segunda etapa,*** comprendida entre los años 2003 al 2007, se caracteriza por una ***reforma curricular para las carreras de ingeniería***, la que incluyó estrategias que favorecieran un aprendizaje constructivo, colaborativo y que implicaran a la vez la resolución de problemas de manera grupal sobre situaciones relacionadas con los temas examinados en clase y con la participación de los docentes.

En lo que respecta al tema de límite se tomaron las siguientes decisiones:

- *La secuencia de contenidos establecida fue ahora:*

Variación total, variación promedio, variación instantánea y derivadas

Esta nueva secuencia permitió tratar los problemas motivadores del cálculo diferencial, como son: ***la velocidad instantánea*** y ***la recta tangente*** sin priorizar al límite como herramienta previa.

Este enfoque queda de manifiesto en el texto de Lang (1990), por ejemplo, el cual se revisará con más detalle sobre este mismo punto. Luego, lo que se puede afirmar respecto de esta segunda etapa es lo siguiente:

- *En los primeros cursos, después de dar la formalización de la derivada como el límite del cociente de Newton, se pasaba al estudio de los límites, usando como base los registros tabulares y gráficos. La experiencia obtenida en estos cursos evidenció que esta forma de trabajo creaba los siguientes obstáculos en el aprendizaje:*

    - *Los límites quedaban unidos a los cocientes incrementales, dificultando con ello el considerar límites funcionales más generales.*

    - *Para el cálculo de límites, algunos estudiantes usaban únicamente una tabla de valores de la función con números próximos al valor en estudio, sin emplear las propiedades de los límites.*

    - *En relación con lo anterior, en la concepción predominante se resaltaba la cualidad de aproximación del límite.*

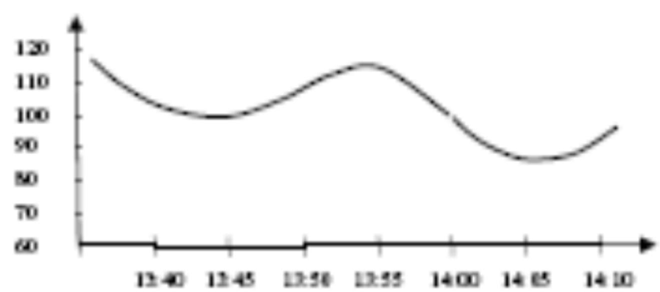
Como una forma de paliar estos problemas se consideraron los siguientes cambios:

- *Se completó el estudio sobre las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena, unido a la resolución de problemas geométricos y de razones de cambio. Posterior a ello se pasó al estudio de los límites, separados en el tiempo de la definición de derivada.*

- *Se recurrió al concepto provisorio de "**valor esperado**" como introductorio a una idea de límite alejada del modelo aproximativo. La actividad que se propuso a los estudiantes fue la siguiente:*

"Un dispositivo registra los valores de la frecuencia cardiaca de un paciente internado, generando una gráfica. Debido a una falla en el mecanismo de impresión, en la gráfica no aparece el valor correspondiente a las 14 horas. Así, la figura que se obtuvo fue:

Figura n° 7. Frecuencia cardiaca de un paciente.



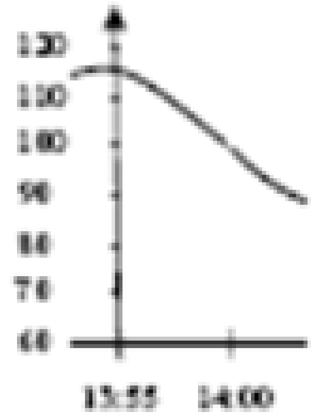
Preguntas:

1. *¿Qué valor esperan ustedes que haya tenido la frecuencia cardiaca a las 14:00 horas?*

2. *Para responder lo anterior ¿qué intervalo o intervalos de tiempo tuvieron en cuenta? ¿Por ejemplo: importan los valores de la función antes de las 13:50?*

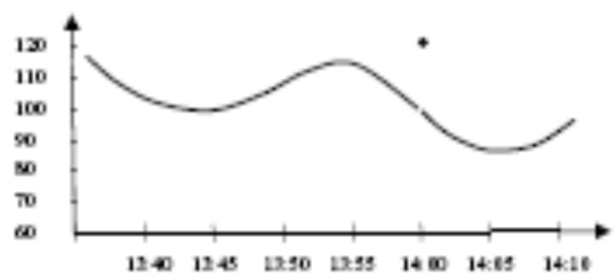
   Si el gráfico suministrado hubiera sido el siguiente ¿cuál hubiera sido el valor esperado para la frecuencia cardiaca a las 14:00?

Figura n° 8.   Frecuencia cardiaca sin valor para las 14:00 horas.



3. *Supongamos ahora que la gráfica es la que sigue ¿cuál esperan Uds. que sea el valor de la frecuencia cardiaca a las 14:00?*

Figura n° 9. Frecuencia cardiaca con valor para las 14:00 horas.



(Bucari et al., 2007, p. 8)

Por último, las conclusiones de este análisis, permiten evidenciar para la primera etapa, de qué manera ciertas concepciones sobre lo que es la Matemática condicionan el modelo de enseñanza.

Luego, al identificar Matemática como una ciencia de carácter lógico deductiva, lo que en cierto modo es, la enseñanza bajo este paradigma se traduce en un ***modelo de enseñanza normativo***, centrado en el contenido, así, la relación predominante fue la del profesor junto al saber y, por tanto, los problemas hicieron el papel de *control* sobre el aprendizaje.

Por otro lado, la decisión de llevar adelante procesos de enseñanza y aprendizaje ***basados*** en gran manera ***en la actividad de los estudiantes***, indujo a encontrar miradas sobre la matemática que tienen en cuenta los procesos de construcción históricos. Admitiendo que la búsqueda, el error y el debate, inseparables de todo proceso educativo auténtico se dan al interior del aula y, de esta forma se insinuó un ***modelo de enseñanza apropiativo***, centrado en la construcción del conocimiento por parte del estudiante, donde los problemas que conforman las actividades para el aula son usados como verdaderos recursos de aprendizaje.

A continuación se revisa el trabajo, de Molfino y Buendía (2010), que lleva por título: ***"El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización"***

A modo de resumen, este es un artículo que relata sobre los fenómenos de producción, adquisición y difusión del concepto de límite funcional en el contexto escolar en el Uruguay. Tiene como uno de sus objetivos centrales explicar cómo se constituyó el concepto de límite en un saber validado y aceptado social y culturalmente, tanto en el ámbito académico como en la secundaria, ello a través del análisis de las prácticas sociales que lo generaron.

Dicho análisis, según sus autores les permitió elaborar la hipótesis sobre la existencia de un proceso de institucionalización del concepto de límite, el cual atraviesa por diferentes momentos y que, en su conjunto, explicaría el papel del límite en el discurso matemático escolar actual.

Como marco teórico de referencia se apoyan en la socioepistemología, hecho que les permite explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático teniendo como base las prácticas sociales. Como se sabe, en la escuela se desarrollan actividades, que al instituirse en un contexto específico, resultan en normas y visiones determinadas, ellas son por tanto las que van configurando una institucionalización del concepto de límite a través del tiempo, el cual tiene avances y retrocesos en los procesos de adquisición del conocimiento por parte de los estudiantes, en una situación de constante cambio por la naturaleza propia del devenir del tiempo.

Antes de entrar en materia propiamente tal, se permiten hacer un recorrido por la historia que ha tenido el concepto de límite, ello lo concretan en cuatro etapas, ***la primera etapa*** referida a la época griega, donde el límite aparece en un ambiente geométrico-estático, en que los problemas de área y volumen son los agentes motivadores para asociar a esta época un incipiente concepto de límite. Hipócrates, Eudoxo y Arquímedes son las figuras legendarias de esta etapa inicial. Así el método de exhausción se revela como medio en el tránsito al concepto de límite.

La ***segunda etapa*** que consideran la sitúan en el siglo XVII, caracterizada por la búsqueda de resultados de problemas de orden físico y astronómico, usando los recursos infinitesimales. Matemáticos de la talla de Kepler, Fermat, Barrow, Newton y Leibniz se encuentran dentro de este período (Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez et al., 2006; Boyer, 2010). Aquí el límite se presenta nuevamente de forma implícita, relacionado con los problemas de cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos. Los matemáticos de esta época desarrollan sus teorías en un ambiente intuitivo, motivados por el afán de conseguir resultados por sobre la búsqueda de argumentos y fundamentaciones sólidas de la Matemática (Kline, 1994).

La ***tercera etapa*** corresponde al siglo XVIII, la cual se caracteriza por la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal. Se destacan en esta época los trabajos de Euler, D'Alembert y Lagrange, quienes intentan fundar el cálculo en bases independientes de la geometría, utilizando el álgebra.

La ***cuarta etapa*** la sitúan entre el siglo XIX y comienzos del siglo XX, para este período histórico del concepto de límite los trabajos de Cauchy y Weierstrass se caracterizan por dar un sentido aritmético al análisis.

El impulso dado por Weierstrass concretiza una conceptualización que es la que hasta hoy se usa para los cursos de cálculo, a saber:

> *Si dado cualquier* ε *positivo, existe un* δ *tal que para* $0 < n < \delta$, *la diferencia* $f(x_0 + n) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε*, entonces se dice que L es el límite de f(x) para* $x=x_0$*.* *(Blázquez y Ortega, 2002, p. 77)*

Por último, y como es obvio por el desarrollo propio de la Matemática, el límite obedece a una concepción topológica, en términos de entornos o vecindades y no tan estrechamente vinculada con una determinada definición de distancia y aplicable a funciones cuyo dominio y rango no son subconjuntos de números reales, en general.

La sucinta exposición anterior deja al descubierto que la definición del concepto de límite responde a necesidades e intereses de cada época y, por tanto, varía según el contexto socio-histórico en el que se considera, y no tiene por qué coincidir con la definición formal, actualmente válida por la comunidad matemática.

Los autores del presente artículo, en su afán de develar el proceso de institucionalización del concepto de límite abordan el discurso matemático escolar uruguayo en la voz principal de sus docentes, pues ellos, más que nadie, se han encargado a través del tiempo en realizar la transposición didáctica en el aula y, de esta forma validar un conocimiento aceptado por la comunidad matemática, saber sabio, en saber enseñado.

Entendido este ***discurso matemático*** como la manifestación del conocimiento normado por las concepciones del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. Así, el discurso modela el desarrollo de la clase y establece prioridades sobre lo que se debe estudiar; el tipo y características de las actividades, la forma de evaluar y los planteamientos y ejercicios considerados (Cordero y Flores, 2007).

Una de las hipótesis de estos autores transita bajo el supuesto que el discurso matemático favorece un tratamiento, en general, de corte algorítmico, sin considerar actividades variacionales o predictivas, propias del enfoque socioepistemológico. Lo anterior los llevó a analizar el quehacer docente respecto de las clases de los docentes y los libros de texto que ellos usan como referencia.

Indagaron, en primer lugar, por medio de un cuestionario basado en diez preguntas. Así, la primera pregunta pretendió evidenciar las creencias de los docentes acerca de la pertinencia del tratamiento del tema en la Secundaria. Las siguientes cuatro preguntas apuntaron a conocer qué definición proponen y cómo: qué tipos de ejemplos y actividades introductorias presentan y la importancia que le otorgan al uso de cuantificadores en la presentación. Las preguntas 6 a 9 pretendieron evidenciar sus creencias sobre aspectos cognitivos del proceso de aprendizaje del concepto, y la última tiene como intención averiguar si la práctica de los docentes se ciñe a un libro de texto específico o no.

Las respuestas dadas por lo docentes a la primara pregunta pone en evidencia que sí es importante la presencia del límite funcional en el programa del último año de la Educación Secundaria. Las razones dadas se pueden agrupar en tres grupos: *intramatemáticas*, referidas a la necesidad del concepto para construir y formalizar otros conceptos como: la continuidad, derivación, etc.; *cognitivas*, según las cuales el tratamiento del límite favorece un determinado nivel de abstracción; y *extramatemáticas*, como herramienta de interpretación y modelización.

Tres de los docentes encuestados manifestaron trabajar con el concepto a nivel intuitivo sin presentar la definición formal en términos de épsilon y delta.

En resumen, se puede comentar, que todos los profesores otorgan al concepto de límite un rol protagónico y central para la estructuración del cálculo y en sus cursos, en particular. Sólo algunos profesores mencionaron que podría omitirse su tratamiento en determinados cursos orientados a una formación con poco énfasis en las ciencias. Así, se deduce de las respuestas emitidas por los docentes que, ***el límite es entendido como esencial*** para la construcción por parte de los estudiantes del resto de los conceptos a tratar en el curso, como son la continuidad y la derivada.

Otro aspecto considerado, para esta indagatoria de la institucionalización del concepto de límite consistió en un análisis de textos, que agruparon de antaño y actuales.

Entre los de ***antaño***, se refirieron a los textos de:

- *Elementos de Análisis Algebraico de* Rey Pastor (1962), y al
- *Análisis Matemático* de Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1952).

En relación con el primer texto, sólo se trabaja con el concepto de límite de sucesiones, en el marco de la formalización del concepto de número real.

En cambio en el segundo sí se aborda el concepto de límite de funciones de una variable real, como un concepto fundamental en la estructuración del Cálculo. Así, es utilizado como generador de los demás conceptos tratados en Análisis, como son: la continuidad, la derivación y la integración que se da en términos de límite de sumas de Riemann.

Otro hecho, no menor es que el segundo texto, todavía es usado por algunos profesores en la actualidad. Esto que podría parecer paradojal, por el año de edición y su larga data de edición, no es impedimento para su utilización. Hay que tener en cuenta que en Matemáticas lo que realmente interesa es el contenido de los textos, más que su forma, aspecto en lo que han variado básicamente los textos actuales.

La crítica sobre estos textos la deslizan estos autores que se viene comentando al señalar que: "*La ausencia de preguntas abiertas que no tienen una respuesta inmediata en el texto, actividades de exploración, problemas o ejercicios resueltos o para que el estudiante resuelva, traduce una idea de una matemática ya hecha, externa al estudiante y autocontenida, ya que tampoco se analizan fenómenos extramatemáticos que evidencien la necesidad del tratamiento de los conceptos involucrados" (Molfino y Buendía, 2010, p. 35).* Por su parte, entre los textos ***actuales*** se mencionaron a:

- *Matemática A para 6º año. Funciones reales, de* Giovannini (2001).
- *Introducción al análisis matemático*, de Belcredi, Deferrari y Zambra (2001).

Señalan de estos textos que: "*los autores declaran la intencionalidad explícita de que los libros sean un apoyo para estudiantes de 6º año de Secundaria. Afirman que en los mismos se utiliza un "**lenguaje simple**, evitando el uso de cuantificadores,* priorizando el entendimiento al excesivo formalismo y las introducciones intuitivas".

A pesar de ello, comentan que *"los tipos de problemas que presentan tanto en la introducción como de aplicación son intramatemáticos y los ejercicios de aplicación requieren de la utilización correcta de los cuantificadores o de "reglas" algebraicas establecidas inmediatamente después de enunciada la definición formal de límit*e" (Molfino y Buendía, 2010, p. 35).

Para el ***primer texto***, el de Giovannini (2001), el capítulo referido al límite comienza con una serie de ejemplos, a partir de los cuales se introduce la definición de límite, dando en primer lugar la introducción intuitiva, para pasar a su forma verbal como: *"Se dice que el límite de f(x) es b para x tendiendo al valor a y lo notaremos* $lim_{x \to a} f(x)$ *si para todo entorno de centro b, existe un entorno reducido de centro a, inluido en su dominio, tal que: si x pertenece a ese entorno reducido los correspondientes valores funcionales pertenecen al entorno de centro b". (Giovannini, 2001, p. 58)*

Posterior a esto, se dan diversas versiones de la definición, ahora en términos simbólicos, haciendo uso de los consabidos cuantificadores. Prosigue con las propiedades del límite con sus respectivas demostraciones, sin introducir ejemplos o ejercicios resueltos que den claridad sobre la necesidad de introducir el concepto en el curso.

En lo que se refiere al segundo texto de los autores Belcredi, Deferrari y Zambra (2001), el tratamiento previo del contenido dado antes presentar el concepto de límite es similar al texto de Giovannini (2001), esto es, números reales, la definición y propiedades del concepto de función, y a continuación se desarrolla el concepto de límite, que sirve de cimiento para el resto de los conceptos tratados. Eso sí, trabajan previamente con sucesiones y límite de sucesiones para posterior a ello dar paso al concepto de límite en funciones de variable real.

Para Molfino y Buendía (2010), surge entonces una pregunta natural, a saber: *¿Por qué se hace necesario confeccionar apuntes habiendo tantos textos para el mismo?"* y, las dos razones básicas que esgrimen para ello son: por una parte, la falta de textos disponibles en el país y, por otro lado, la disconformidad con los textos existentes.

A diferencia de los textos para Secundaria, en estos apuntes los ejercicios propuestos son de tipo no rutinario, lejos de enfatizarse el aspecto algorítmico del concepto, se promueve la reflexión sobre los conceptos relativos al de límite con actividades intra-matemáticas. Como ejemplo de apuntes analizados por ellos citan a De Olivera (2008).

Por último, antes de revisar las conclusiones que Molfino y Buendía harán para este trabajo sobre la institucionalización del concepto de límite, relatan la entrevista hecha a un profesor de vasta experiencia, más de cincuenta años en la docencia de nivel secundario como universitario en el país. Así el objetivo de esta entrevista fue: *"conocer sus creencias acerca de la construcción de la vida escolar del concepto, más allá de lo que puedan indicarnos documentos oficiales o libros de texto"* (Molfino y Buendía, 2010, p. 36).

Así, las preguntas, de inicio, que permitieron que este profesor hiciese sus aportes al tema fueron: *"¿Por qué los profesores del momento insistían tanto con cursos tan rigurosos que ni siquiera los libros de texto que había en el momento se adecuaban a esos cursos? (p.37).* La respuesta dada por él fue: *"en la década del '50 (y muy posiblemente también en la del '40) se dictaban regularmente cursos en Facultad de Ingeniería y en*

Preparatorios para Ingeniería (dependientes de Secundaria) en los cuales se usaba sistemáticamente la definición épsilon-delta para límites". Es más, los cursos eran más rigurosos que ahora, por ejemplo en los años 30, allí no se daba límite de sucesiones ni funciones reales, sino funciones de varias variables, funciones de variable compleja y ecuaciones diferenciales; el cálculo diferencial de una variable se dejaba para preparatorios (actualmente Bachillerato preuniversitario, este sólo comentario lo dice todo" (Molfino y Buendía, 2010, p. 37).

Agrega también que existían acuerdos implícitos y que se podían llevar a la práctica, como el hecho de demostrar todo, lo que indica el grado de rigurosidad de los cursos de cálculo, ello a juicio del entrevistado permitió transferir esta postura a los futuros docentes, siendo un orgullo del sistema escolar uruguayo para la forma en la que se dictaban los cursos de antaño. Pero esta bonanza llegó a su térmico producto de la masificación escolar, y al no contar ahora con docentes preparados para dictar esos cursos, desaprovechando según él, la magnífica oportunidad que significa contar con estudiantes entre 16 y 17 años de edad, los cuales están en su mejor momento para un aprendizaje al máximo, que les permite comprender una teoría formal como la Matemática. Lo anterior, explica en parte, la situación actual, *"el pantano que todos conocemos"*.

Con estos extractos de la entrevista realizada se desea legitimar la importancia sobre la tradición oral-escrita en las prácticas de aula transmitida de docentes a profesores sucesivamente para establecer los procesos de institucionalización del Cálculo en general y particularmente del concepto de límite en este contexto latinoamericano uruguayo.

Las conclusiones que deja la presentación de este trabajo se pueden resumir bajo el supuesto que en el desarrollo se han presentado elementos para comenzar a describir los procesos de institucionalización del límite, para lo cual se han considerado dos aspectos, por un lado en el "*seno de la comunidad matemática (grupos científicos) y, por otro lado, la situación actual en el ámbito escolar*" de la república uruguaya, así se tiene:

- Respecto al primero de los aspectos, ***el análisis socio-histórico*** dio cuenta de las etapas que transcurrió el concepto de límite desde sus inicios hasta lo que se conoce actualmente, con su formulación rigurosa en términos de épsilon y delta.

- Respecto de la ***situación escolar*** que da cuenta de cómo se introduce el concepto, el cuestionario realizado y la entrevista relatada ***permitió darse cuenta cuán arraigada está la idea que este concepto es el que permite estructurar toda la teoría*** y, por tanto, construir los conceptos de continuidad y derivada. Los profesores también coinciden en que es un contenido necesario en todo curso de cálculo, esto por convicción de algunos y otros porque simplemente lo exige el programa curricular.

- Otro hecho no menor es que los cursos impartidos en la primera mitad del siglo XX marcaron una gran influencia sobre las prácticas actuales, ello al tenor dado a los "***apuntes de clase***" más que a libros de texto. Dichos apuntes perpetuaron una tradición oral transmitida entre las diferentes generaciones de estudiantes y docentes.

- Los libros de texto utilizados en la actualidad, aunque poseen una presentación visual diferente a la de antaño, mantienen características similares, en el sentido de *una concepción de la Matemática como una ciencia ya hecha y ajena a quien la aprende*, con el consiguiente rol pasivo que asume el estudiante en la construcción de su aprendizaje.

- Como corolario del actual análisis del discurso matemático escolar puede pensarse que la forma como es enseñado el concepto de límite en la mayoría de los cursos de cálculo en Uruguay, ***responde más bien a una necesidad de la comunidad matemática, y no a una decisión didáctica de la comunidad de profesores*** y mucho menos a una ***necesidad de los estudiantes.***

Por último, al concluir su trabajo estos autores esperan que la lectura de él "*promueva una reflexión colectiva acerca de por qué cada docente prepara y lleva a la práctica los cursos de la manera en que lo hace y ello permita la búsqueda de propuestas alternativas y el compromiso con ellas*" (Molfino y Buendía, 2010, p. 38).

Un trabajo que está en la línea ***de la utilización de los recursos informáticos*** y más precisamente con el uso de Applets es el de ***Henning y Hoffkamp*** (2013), titulado: "***El desarrollo de un concepto intuitivo de límite al aproximarse a la función derivada",*** en él se relata que los problemas observados en los cursos de cálculo en el nivel secundario son, preferentemente, el resultado de la tensión que existe entre el aprendizaje y la enseñanza de rutinas, y el desarrollo de una comprensión más profunda de los conceptos implícitos.

Esta postura de enseñar básicamente rutinas en el cálculo y, de esta forma esquivar la presentación de actividades para una mayor comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo no es nueva. Estos autores, citan a Toeplitz (1928), quien insta sacar el cálculo de las escuelas secundarias si los profesores no son capaces de entregar algo más que enseñanza de meras rutinas. Esto que ya se advertía casi un siglo atrás, es lo que con mucha frecuencia pasa también en los primeros años universitarios con la enseñanza del cálculo actualmente. Luego, las propuestas que se han examinado van en la línea de poder revertir de alguna manera esta situación que posee características globales en la enseñanza del cálculo y advertida por muchos investigadores y docentes de la matemática del cambio.

Por tanto, los profesores se ven enfrentados a la necesidad de tomar decisiones didácticas de cómo enseñarán tal concepto, la que oscila entre una postura intuitiva a una más formal. Naturalmente una presentación formal y rigurosa de los conceptos no garantiza su comprensión. Sin embargo, siempre existen recomendaciones didácticas que bien vale la pena tener en cuenta, como lo relatan estos autores al indicar que el plan de estudio de la educación secundaria de Berlín, Alemania, exige explícitamente la enseñanza de un enfoque intuitivo o propedéutico de los conceptos de cálculo para el término del 10° grado. Dicho requisito se logra a través de la introducción de un ‘Módulo’ especial llamado “Describiendo el cambio con las funciones”. Bajo este contexto, uno de estos autores, Hoffkamp (2009, 2011) diseñó e investigó diversas actividades, las que pueden conducir hacia una fundamentación intuitiva y sustentable de algunos conceptos de cálculo.

Luego, teniendo presente el papel que posee el concepto de límite en el cálculo, la situación descrita necesita una atención particular. Por una parte, el plan de estudio de la educación secundaria berlinesa para el grado 11º menciona que el concepto de límite sólo puede enseñarse de manera propedéutica, dado que las nociones precisas necesarias, como series, criterios de convergencia, entre otras, no están disponibles para los estudiantes. Por otro lado, es necesario que los profesores presenten la derivada como el límite del cociente diferencial, es lo que ellos afirman (Henning y Hoffkamp, 2013).

Argumentan además que, desde un punto de vista matemático, parece imposible realizar cálculo sin conocer con precisión la noción de límite. Desde luego que esto no es cierto, puesto que es bastante natural abordar los conceptos o problemas matemáticos de manera intuitiva. Ello les da pie para avanzar en la generación de sus actividades, que básicamente son ***applets*** para que el estudiante interactúe con ellas y, de esta forma pueda acceder a una comprensión intuitiva del concepto de límite de una función y a continuación al de la derivada de una función.

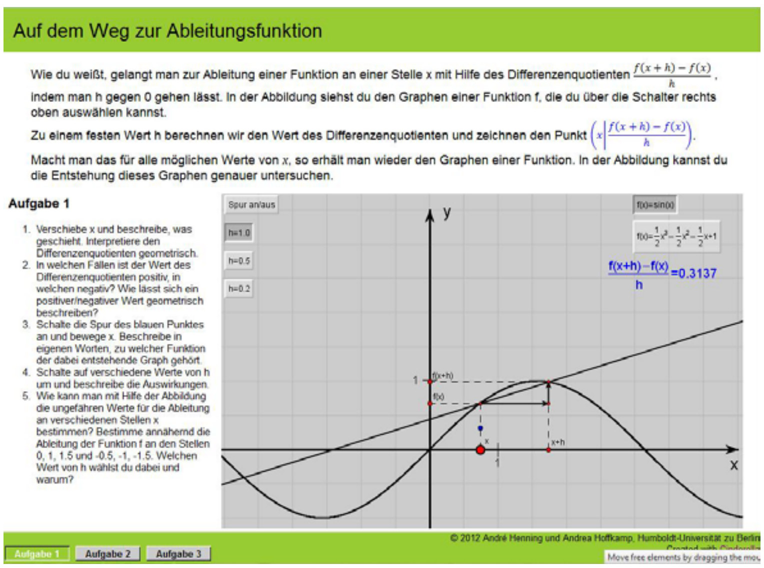
Advierten además que han planificado la implementación de estas actividades para un curso de grado 11º, de una escuela secundaria berlinesa. Comprometen realizar y analizar tal estudio, el cual se realizará en parejas de estudiantes. Los resultados de dicho estudio serán presentados en un CERME posterior.

Las actividades se pueden encontrar en el sitio Web: http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~hoffkamp/Material/ableitungsfunktion.html. Agregan que para realizar la actividad no se necesita ningún software especial, excepto Java y un buscador de internet.

La estructura básica de ellas consiste en un sitio web Html que contiene los applets Java interactivos provisto de instrucciones y tareas en base a textos.

Una descripción gráfica del inicio de dichas actividades se muestra en la página siguiente.

Figura n° 10. Muestra de las actividades interactivas.



Las citadas actividades tienen como propósito aproximar el concepto de derivada, bajo una presentación intuitiva del concepto de límite, donde se usa la visualización y la interacción con el usuario.

Por último, los citados autores de este trabajo mencionan algunas preguntas de investigación que esperan puedan orientar su trabajo futuro, como:

- *¿De qué manera puede un enfoque dinámico-visual respaldar el desarrollo de una concepción sustentable de límite y de los conceptos matemáticos relacionados?*

- ¿***Qué concepciones del límite desarrollan*** *los estudiantes cuando se enfrentan con actividades como las presentadas en este trabajo?*

Estas, entre otras preguntas, se prevé conduzcan a sus autores a futuras tareas, desarrollando y analizando otras actividades con o sin el uso de la tecnología.

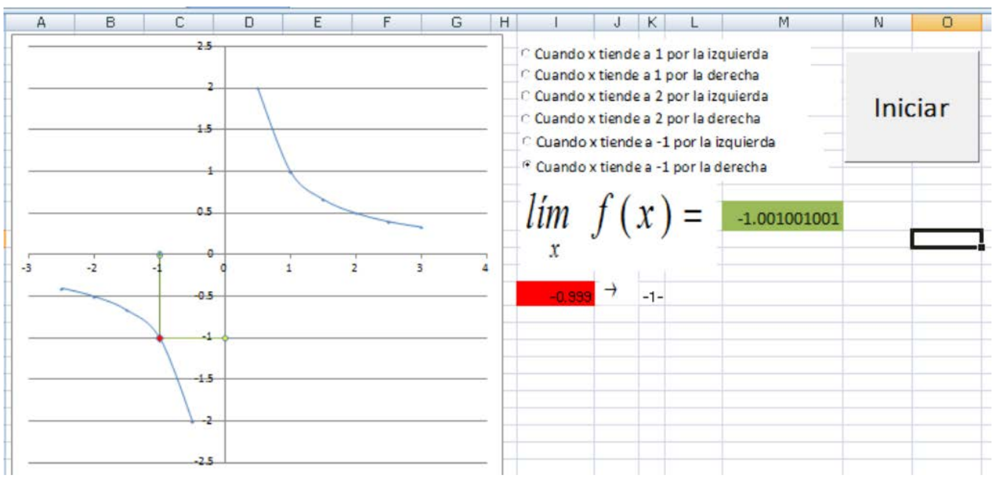
Por lo demás, estas actividades pretenden ser un ejemplo y, en ningún caso son la única vía para la introducción del concepto de límite. Se requiere más trabajo, de modo de ver la enseñanza como una ciencia del diseño de actividades, advierten finalmente estos autores (Henning y Hoffkamp, 2013).

Para finalizar esta presentación de algunos aportes sobre el concepto de límite, y sin pretender ser exhaustivo con el tema, se considera el aporte que hacen Díaz et al. (2013), con su trabajo titulado: ***"Herramienta interactiva en la comprensión del límite de una función".***

En este trabajo los autores desean poner de manifiesto las bondades que tiene el uso de la tecnología por medio de la interactividad. Para ello realizan un estudio correlacional con un diseño cuasi- experimental, que involucró la aplicación de pre test y post test a 45 estudiantes en dos grupos, conformados por el grupo control de 23 de ellos y el grupo experimental de 22 estudiantes que recibieron la propuesta relativa al uso de la tecnología, la cual se limitó al diseño e implementación del uso de la hoja de cálculo Excel.

La figura adjunta, a modo de muestra, queda de manifiesto en su trabajo.

Figura n° 11. Aplicación de la hoja de cálculo Excel.



Es claro de inicio que las "*las tecnologías de la información y comunicación (TIC) están influyendo en los sistemas educativos, tanto así, que su inserción se ve reflejada en las disposiciones deseables de las instituciones de educación superior (IES) como herramientas didácticas que apoyan el proceso de aprendizaje*" (Díaz et al., 2013, p. 1899). Luego, las TIC están siendo usadas con mayor frecuencia en la educación matemática.

Agregan más estos autores al señalar que *"estas herramientas tecnológicas deben brindar más que la instrucción para tener un cambio en la conducta del estudiante, en otras palabras, deben ser herramientas de construcción de conocimiento para generar las competencias deseadas en el aprendiz"* (Díaz et al., 2013, p. 1900).

La motivación de estos autores para generar esta propuesta usando medios tecnológicos, está inspirada en la necesidad de planear alternativas de actividades de aprendizaje que se aparten de las que habitualmente se han venido realizando y estén acordes con el Modelo educativo que la institución que los cobija les impone a sus docentes como algo insoslayable para estos tiempos. Como puede apreciarse instancias de cambio en el diseño de actividades de aprendizaje para los estudiantes se producen en todas las latitudes del planeta y esta institución, la Universidad Autónoma del Carmen de México, tampoco escapa a esta realidad.

En la aplicación Excel que los autores de este trabajo exponen, se pueden encontrar, para el uso de los estudiantes, actividades que permiten revisar de manera gráfica los límites laterales, límites al infinito y la continuidad de una función.

Lo anterior debería permitir al estudiante visualizar tanto gráfica como numéricamente el comportamiento de una función en un punto o cuando x tiende a infinito. Con ello la representación del conocimiento se manifiesta en dos registros, lo cual está en sintonía con un mejor aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Otro aspecto, no menos importante, es la posibilidad de la interactividad con este tipo de actividades, donde el sujeto está al mando de ella y puede interactuar a voluntad, observando los resultados de su intervención personal.

Los resultados de la aplicación de esta "***herramienta interactiva***", como la llaman sus autores, se apoyan, en los dos momentos, esto es, al inicio y después de aplicada la experiencia, en la prueba t de Student.

- *En primer término para probar la homogeneidad entre los grupos en cuanto al nivel de comprensión de la forma gráfica del límite de una función.*

- *Observando la diferencia de medias de ambos grupos, de 4,7 para el grupo control, y de 7,3 para el grupo experimental.*

- *Aplicando nuevamente la prueba t-Student, la cual indicó con un valor de p menor al 0.05 la existencia de diferencia estadística significativa entre el grupo experimental y el grupo control.*

Es decir, el grupo experimental y de control tuvieron diferente nivel de comprensión del límite de una función de forma gráfica, favoreciendo al grupo experimental.

Para completar su trabajo aplicaron una encuesta a los estudiantes del grupo experimental, de modo de conocer el grado de aceptación de la herramienta interactiva usada. El resultado de ello fue que un 77 % de los estudiantes estuvieron de acuerdo que *la* ***herramienta interactiva***, es una estrategia novedosa, motivadora y atractiva que propicia el aprendizaje de los límites.

Por último hacen notar que: *“el recurso didáctico por sí solo no genera aprendizaje, sino que debe contar la disposición del docente como del alumno para su adecuada ejecución. Además este tipo de actividades interactivas deben insertarse en la programación del curso, ya que su aplicación en el aula o fuera de ella no debe ser resultado de la casualidad o de una moda pasajera” (Díaz et al., 2103, p. 1906).*

Lo anterior debe constituirse en una fuente de inspiración para otros docentes, al generar actividades donde el uso de los recursos informáticos estén disponibles tanto para el docente que imparte clases como para el estudiante en su afán de aprendizaje de sus materias de estudio, cualquiera ésta sea. Ya no se puede vivir a espalda de esta realidad tecnológica educativa que impone el siglo XXI.

2.4.4.2 Sobre la derivada: propuestas de aprendizaje

En primer lugar se examina la propuesta didáctica de la profesora, ya fallecida, la ***Dra. Elfriede Wenzelburger***, que vivió en México, su trabajo tuvo una honda repercusión en la didáctica de la Matemática no solo en aquel país, como se podrá apreciar posteriormente. Autora del libro que lleva por título: ***“Didáctica del Cálculo Diferencial”***, editado en México el año 1993. En dicho texto se exponen una variedad de ejemplos de la vida real, en donde el concepto de variación entre variables está presente, a continuación aborda la razón de cambio entre estas variables, para pasar a la posición límite y de esta forma introducir el concepto de Derivada. Muchos académicos, tanto de México como fuera de esas tierras, recibieron el influjo de sus ideas de cómo introducir la derivada, concepto que está en el corazón del cálculo diferencial. Fue autora además del texto ***"Didáctica–Cálculo Integral"***, que resulta ser el tema que sigue, por lo general, al cálculo diferencial, en muchos casos.

Autores como: Núñez y Cortez (2000), Barba et al. (2001) del país azteca prosiguieron cultivando esta forma de introducir el concepto de la derivada desde el punto de vista variacional. También es oportuno destacar la participación de Cantoral (1999), él ha ejercido una enorme influencia en la enseñanza del cálculo y del análisis al destacar la importancia del pensamiento y lenguaje variacional, el que se sitúa de manera central en la matemática del cambio, como este autor lo ha hecho notar en sus numerosos artículos al respecto.

Otra propuesta que está en la misma línea que la anterior, pero en un contexto distinto, es la que han realizado las profesoras argentinas: **Vrancken, Engler y Müller** (2008), todas ellas docentes de la Universidad del Litoral, de la República Argentina. Dichas autoras, en un artículo titulado: ***"Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados"***, ilustran de manera clara y convincente su experiencia de aula al trabajar en su universidad con sus estudiantes que no son alumnos de la carrera de Matemáticas, sino del área de ingeniería agronómica.

La razón de cambio es también la forma que ellas usan para introducir el concepto de la Derivada, a través de variados ejemplos. Como ellas mismas los señalan en su artículo, en las conclusiones de su trabajo:

"Un escaso desarrollo de los procesos de cambio impedirá lograr profundidad en las concepciones relativas al cálculo. Este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada" (Vrancken et al., 2008. p. 45).

A modo de ejemplo, se presentan dos actividades con la que dichas autoras introducen el concepto de derivada desde la razón de cambio, dichas actividades son:

Actividad n° 1 La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por: $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla.

Tabla n° 8. Estimación de Δs y de $\Delta s / \Delta t$.

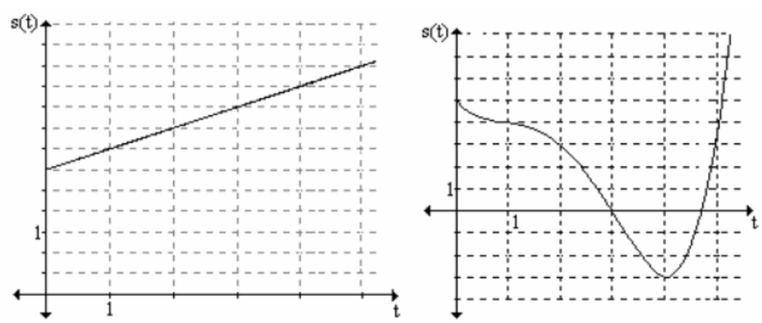
Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$		
$1 \leq t \leq 2$		
$2 \leq t \leq 3$		
$3 \leq t \leq 4$		

¿Qué significado tienen los valores obtenidos en cada columna?

Determine las unidades en las que expresan los mismos. ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en su trayectoria? Estime la velocidad de la piedra a los tres segundos de iniciado el movimiento. Realice la representación gráfica e interprete en dicho gráfico las medidas: $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$

Actividad n° 2 Las gráficas muestran el espacio recorrido s(t) por dos partículas respecto del tiempo demorado en recorrerlo. Para cada una complete una tabla como la que sigue.

Figura n° 12. Sobre la Actividad n° 2.



Intervalos	Δs
$0 \leq t \leq 1$	
$1 \leq t \leq 2$	
$2 \leq t \leq 3$	
$3 \leq t \leq 4$	
$4 \leq t \leq 5$	

> *¿Cómo se comportan en cada caso los cambios de estas Δ s? ¿En qué intervalos los cambios fueron más rápidos? (Vrancken et al., 2008, p. 39).*

Estas investigadoras sugieren que desarrollar el tema de la derivación bajo este enfoque, dejando de lado lo meramente abstracto y/o rutinario, permitirá dar un verdadero significado a los estudiantes, aunque ellos manifiesten una clara aversión por la Matemática, al considerarla una disciplina difícil de abordar y con muy poco éxito al intentar aprenderla.

Además, dichas autoras recomiendan el uso de distintas representaciones en el estudio de las funciones, asunto que si se atiende, permitirá al estudiante acercar los conceptos desde diversas perspectivas y, de paso, poner en juego la visualización de las ideas matemáticas contribuyendo de esta forma en una mejor comprensión de este importante tema de la Matemática.

Pero, si el concepto de la derivada es piedra angular del cálculo diferencial, también es importante y previo, el concepto de ***"Límite de una función en un punto".***

No se puede olvidar que sin la estimación del límite del cociente de Newton no se puede acceder de manera precisa a la estimación de la derivada de una función en un punto. Así, el estudio del concepto de "límite" es primordial, al menos, desde una postura intuitiva. Estas autoras ponen entonces de manifiesto la importancia de los temas relacionados con el concepto de derivada, como son el concepto de función y el concepto de límite.

Todo lo anterior muestra la clara interdependencia que hay entre los conceptos matemáticos como un todo, y ya no vistos de manera parcial para conformar un verdadero aprendizaje del cálculo diferencial.

Otro trabajo es el que realizaron tres profesores de la Universidad de Groningen de Holanda, ellos son: *Gerrit Roorda, Pauline Vos y Martin Goedhart* (2009). Parte de la extensa investigación que ellos realizaron está plasmada en el artículo: ***"Derivates in applications: how to describe students' understanding"*** Dicha investigación se realizó en un período de tres años, con alumnos de los grados 10 al 12, correspondiente a los últimos años de la enseñanza secundaria, en Holanda. En dicho país, se contempla la enseñanza de la derivada a partir del décimo grado (grado 10). El marco teórico usado para realizar este trabajo se basó, en un principio, en los trabajos realizados por Zandieh (2000) y Kendal y Stacey (2003). Por otro lado, uno de los aspectos importantes de este trabajo brinda estriba en las diversas representaciones que el concepto de ***"Derivada"*** permite para iluminar su comprensión (Roorda et al. 2009).

Se puede agregar además que, la investigación corresponde más bien a un exhaustivo estudio de caso, que se realizó con seis estudiantes, dos por cada grado y en donde ellas analizaron las producciones de los estudiantes, de modo de poder visualizar las estrategias de solución que ellos abordaban al momento de resolver los problemas propuestos.

El cuadro que da cuenta de las representaciones matemáticas y sus diferentes aplicaciones resulta ser muy esclarecedor a la hora de comprender las conexiones y relaciones entre los procedimientos que usan los estudiantes para resolver un problema específico sobre la aplicación de la derivada, es ésta su mayor contribución del estudio realizado. El trabajo comentado fue presentado en: **CERME 6**, *Congreso Europeo de Educación Matemática*, evento de carácter mundial, realizado en Lyon, Francia el año 2009.

Un trabajo más reciente el que expone García (2011), titulado: ***"Derivada: una propuesta para su comprensión"***, realizado en el contexto universitario y motivado por la escasa comprensión que logran lo estudiantes sobre el concepto de derivada. Ello inspiró la realización de una propuesta que tuvo como principales ejes directrices a la variación y a la transición entre registros al examinar este concepto. La investigación propiamente tal se realizó en la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Como una forma de poner en evidencia el cocimiento que dichos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas poseían, autora aplicó a ellos una encuesta formada por sólo una pregunta, a saber: "¿***Qué es la derivada de una función?",*** el resultado de esta encuesta arrojó que tan solo un 15 % evidenció tener una idea más clara de dicho concepto, identificándolo con: la pendiente de la recta tangente, con un límite o con una razón de cambio.

La situación anterior permitió, al igual que otras investigaciones, identificar un problema concreto de la práctica escolar y en un escenario preciso. Así, el objetivo de esta investigación fue el diseño y puesta en escena de una propuesta que de algún modo contribuyera a la mejora de la comprensión de la derivada en estos estudiantes del contexto universitario al cual se ha hecho referencia.

Se habla, en este trabajo, de comprensión de un concepto cuando el sujeto (en este caso el estudiante) sepa del concepto:

> *¿Qué es?, ¿cómo se define?, indique ejemplos, conozca y utilice correctamente el concepto, pueda nombrar propiedades de él e indicar contraejemplos, casos especiales y casos límites.*
>
> *Conozca además, relaciones con otros conceptos, sepa de definiciones alternativas y cuando pueda dar un uso y aplicación del concepto.*
>
> *(García, 2011, p. 3)*

Como puede apreciarse la comprensión involucra una serie de hechos a los cuales el docente debería estar atento a la hora de medir si existe o no comprensión de un concepto como tal.

El sustento teórico en el que se apoya es la Teoría de la Actividad, la cual argumenta que una actividad se articula en torno a:

- *Un* ***sujeto,*** esto es, la persona comprometida con la actividad
- *El* ***objeto***, del que se hace cargo el sujeto y
- ***Las acciones***, tareas y ***operaciones***, que son las acciones realizadas de forma automática.

Al mismo tiempo, la actividad tiene cuatro momentos principales en los cuales transcurre, ello son: la orientación, la ejecución, el control y la corrección.

Para la elaboración del concepto de derivada se transita por tres momentos: consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del mismo. Como se ha comentado, los ejes directrices de la propuesta fueron la variación y la transición entre los registros; geométrico, numérico, algebraico, físico y verbal.

La forma de evaluar la propuesta fue un examen, en estricto rigor. El que se aplicó antes y después de la propuesta. La propuesta en sí tuvo una duración de tres semanas lectivas de clase. El análisis de las producciones de los estudiantes permitió observar que:

> *" "No hubo mejoría significativa en los estudiantes que participaron en la prueba, pero si una comprensión aceptable en un 18% de la población con la que se trabajó. Este porcentaje de estudiantes realizaron aceptablemente todas las actividades propuestas, actividades mediante las cuales se contribuye al desarrollo de habilidades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión de conceptos. Un 78% presenta una comprensión aun débil del concepto en cuestión, y un 4%, que representa a un estudiante, no logró mejorar su comprensión, pues los resultados obtenidos en el cuestionario de evaluación, en lugar de aumentar la cantidad de respuestas favorables, ésta disminuyó" (García, 2011, p. 6)*

La autora concluye que su propuesta logra una mejoría aceptable del concepto de derivada que alcanza al 18% de los estudiantes que participaron de la propuesta, resultado que le parece favorable y la anima a proseguir con una experimentación de esta índole.

Agrega un dato más a tener en consideración, al señalar que los estudiantes que lograron mejorar su comprensión fueron aquellos que participaron de todas las clases, interviniendo, discutiendo con sus compañeros, y entregando todas las tareas asignadas.

Por el contrario, los que no mostraron un avance en la comprensión del concepto fueron aquellos estudiantes que no estuvieron presentes en todas las clases, con escasa participación y no realizaron las tareas propuestas.

Como se puede apreciar, los factores externos a la actividad escolar influyen significativamente en el desempeño de los estudiantes. Nada nuevo bajo el sol.

A continuación se revisa un trabajo de grado para acceder al título de Matemático en la Universidad de Colombia, cuyo tema es: ***"Desarrollo del concepto de derivada sin la noción de límite"***, cuyo autor es Lozano (2011), y dirigida por la Profesora Yenny Carvajal Caminos.

La propuesta, la cual se desarrolla partir del capítulo 4 de esta tesis, se describe como: "***Propuesta didáctica para enseñar el concepto de la derivada a partir del cociente de incrementos",*** está orientada a estudiantes de último año de secundaria y/o primer semestre de la universidad, se agrupa en cinco secciones, a saber:

1. *Conceptos previos como velocidad, pendiente y cociente incremental.*
2. *Definición de derivada.*
3. *Interpretación geométrica.*
4. *Reglas de derivación.*
5. *Problemas de Aplicación.*

(Lozano, 2011, p. 33)

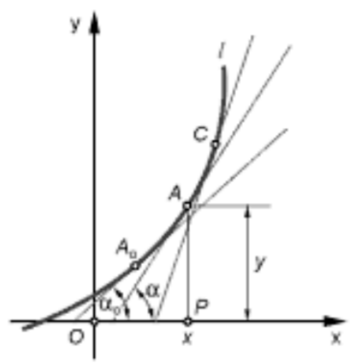
Desarrolla cada uno de los cinco puntos anteriores, y a lo que atañe para esta sección define previamente: ***Cociente incremental.***

Afirmando que los incrementos son variaciones en las variables. Los incrementos generalmente se indican con la letra Δ. Así Δx es la variación que se produce en la variable x, es decir: $\Delta x = x_1 - x_0$. Y Δy el incremento resultante entre la función y, es decir: $\Delta y = y_1 - y_0$

Por su parte Leibniz utiliza la siguiente notación para el cociente incremental: Δy / Δx = y_1-y_0 / x_1- x_0. Hechos estos alcances se puede definir la derivada a partir de este cociente incremental en los siguientes términos:

Sea y =f(x) una función continua. Si se hace variar x la y puede crecer con x o decrecer, o pasar de un estado decreciente a otro creciente o viceversa. Como ejemplo se supone la función y =f(x) crezca con la x y sea su grafica la figura siguiente. Considerando un punto A de la curva con coordenadas (x, y).

Figura n° 13. Gráfica de la función y=f(x).



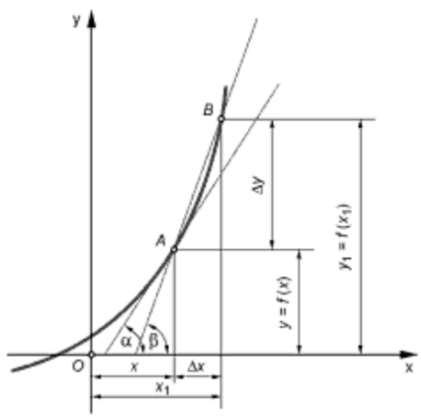
El incremento $\Delta y = y_1 - y_0$, puede entonces expresarse como:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, y dividiendo ambos miembros por Δx, se tiene: $\Delta y / \Delta x = [f(x+\Delta x) - f(x)] / \Delta x$. Expresión que recibe el nombre de cociente incremental de la función f(x).

Si ahora Δx tiende a un número infinitesimal pequeño, el cociente incremental recibe el nombre de derivada de la función dada f(x).

A continuación se revisa un ejemplo, el que corresponde a la función cuadrática, $y= 2x^2+4x$. La interpretación geométrica ocupa las siguientes líneas, haciendo ver que: "*La derivada de una función f(x), en un punto A cualquiera, es la tangente trigonométrica del ángulo de la tangente que se forma en ese punto y con el eje x*". Geométricamente la situación es:

Figura n° 14. Recta secante hacia recta tangente.



Con lo que: $\Delta y / \Delta x$ = *tangente α =tangente β*, cuando el punto B tiende al punto A, para que ello ocurra Δx debe ser una cantidad infinitamente pequeña.

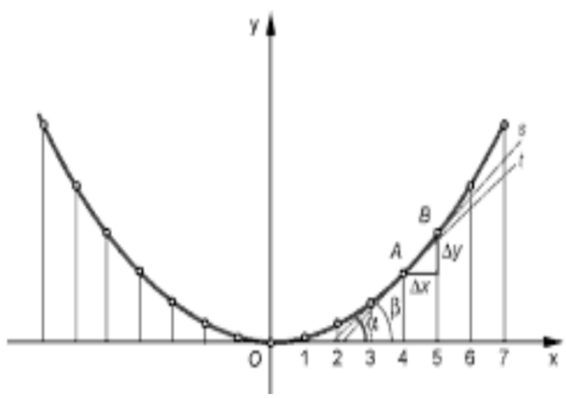
El siguiente ejemplo que examina corresponde a la función $y = x^2 / 10$. Para ello exhibe una tabla de valores y su gráfico, elementos que se ilustran a continuación.

Tabla n° 9. Valores de la función $y = x^2 / 10$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9

Por su parte el grafico de esta función es:

Figura n° 15. Gráfico y pendiente de recta secante entre puntos A y B.



Así, la pendiente de la secante AB de la figura anterior es: $\Delta y / \Delta x = [2{,}5 - 1{,}6] / 5-4 = 0{,}9$, donde el incremento inicial de x del punto A al punto B es 1. Usa ahora incrementos de Δx de 0,1; 0,01;…, 0,0001, los que consigna en un tabla, para concluir que el valor de la pendiente de la tangente en el punto A es 0,8.

Por último, realiza una estimación analítica, estimando para ello el cociente incremental para la función en estudio.

Los cálculos realizados para tal efecto dan un valor de: $\Delta y / \Delta x = x/5 + \Delta x/10$. Así, con x= 4 y $\Delta x = 0{,}0001$ se obtiene un valor de $\Delta y / \Delta x$ aproximado de 0,8. Valor que hace ver como el incremento diferencial hacia el cual tiende los valores de la pendiente cuando la secante se acerca a la tangente en el punto A, corresponde a derivada de la función en dicho punto, para un Δx infinitamente pequeño.

En el siguiente punto de sus tesis, Lozano (2011) se encarga de revisar las reglas de derivación usando convenientemente el cociente incremental, para cada una de la situación en estudio, partiendo con la función constante, la cual expresa como: $\Delta y / \Delta x = 0/ \Delta x = 0$, así la derivada de una constante es cero. Le sigue el turno a la función identidad, y así siguiendo.Las conclusiones por tanto no se hacen esperar y en el capítulo 5, de este trabajo expresa ideas como:

- *El concepto de la derivada, como un cociente incremental infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos a través de la historia, es así como Cornu (1983) afirma: "La derivada no es una aplicación del concepto de límite sino todo lo contrario, el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto".*

- *El término infinitesimal se puede asociar a un incremento siguiendo a Newton quien la definió como "el incremento de una variable en un intervalo de tiempo infinitamente corto". A si mismo Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores de todos los reales positivos.*

(Lozano, 2011, p. 63)

Esta propuesta, pensada como una introducción a la derivada, tiene la virtud de no hacer uso del concepto de límite para su tratamiento. Ello pone de manifiesto que más bien es la derivada la que debe llevar a la conceptualización del concepto de límite, permitiendo con ello hacer justicia en su desarrollo histórico.

Hay además, dos maestras que merecen una mención especial, en primer lugar se menciona a la profesora Rojas (2010), con su trabajo de Tesis denominado: ***“El aprendizaje basado en problemas (ABP) como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en paralelo con derivadas y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en informática de Inacap, Chillán”***, en segundo término se señala a Salinas et al. (2011) con su trabajo denominado: “***Calculo de un variable. Reconstrucción para su aprendizaje y enseñanza”***. Ambos trabajos resultan novedosos por su enfoque, el cual se aparta bastante de la enseñanza tradicional.

En el primer trabajo, la novedad lo constituye la exposición en paralelo de la integral indefinida con la derivación, además de hacer uso de la metodología activa de la enseñanza basada en problemas, los que son contextualizados al momento que se dicta la asignatura, unido a la activa participación de los estudiantes. La profesora Rojas (2010) afianza en la exposición de su trabajo la Hipótesis de trabajo planteada en el sentido que los estudiantes mejoran su rendimiento académico al verse enfrentados con este diseño curricular presentado.

Por su parte Salinas et al. (2011), comienza considerando en su introducción una mención a organismos internacionales como la UNESCO y la OECD que invitan a que la educación científica –tecnológica se considere como un instrumento para el logro del desarrollo sostenible y la reducción de la pobreza, de ahí entonces la importancia del aprendizaje de estas materias, pues se advierte que los sistemas actuales de enseñanza han perdido pertinencia al no adaptarse a los cambios actuales en materia de ciencia y tecnología.

Estos autores proponen un cambio de paradigma para enseñar el cálculo, donde las nociones, procedimientos y resultados de esta área de le Matemática se manifiesten como resultado de considerar problemas relacionados con la práctica de predecir una valor de una magnitud que está cambiando. Junto con ello han elaborado un texto denominado: “Elementos de Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza”, Salinas et al. (2010).

Ahora bien a la hora de intentar diseñar la propuesta que este trabajo de Tesis se propone es útil y pertinente tener en consideración los aportes de estos investigadores en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo, sin embargo se ha tener presente que las realidades educativas difieren mucho unas de otras, de modo que no se trata de aplicar recetas que en algunos contextos pueden funcionar muy eficientemente, más bien es pertinente atenderlas en algunos aspectos, no perdiendo de vista el irrepetible momento histórico que vive cada entidad educativa con sus vicios y virtudes propias.

Por último, Vrancken y Engler (2014), han publicado recientemente el trabajo: ***"Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de universidad"***, trabajo que se encarga de analizar su propuesta para introducir el concepto de la derivada en estudiantes de la carrera de ingeniería Agronómica de la Universidad del Litoral, Argentina.

El sustento teórico del trabajo se apoya en el pensamiento y lenguaje variacional. En el diseño de las actividades se inspiraron en el aporte de Wenzelburguer (1993), Dolores (1999, 2007) y en Azcárate et al. (1996), quienes hacen hincapié en considerar las concepciones previas de los estudiantes en torno a la velocidad, usar gráficas de las funciones para visualizar las ideas y, de manera especial lo referente a la razón de cambio promedio como pendiente de una recta secante que en el límite deviene en pendiente de la recta tangente y, de esta manera poder construir el concepto de derivada de una función en un punto.

Las actividades que se analizan en este trabajo son diversas, y corresponden a algunas de las producciones realizadas por sus estudiantes. El uso del cambio de registro queda patente en ellas, con ello se intenta que los estudiantes avancen en la institucionalización del concepto de derivada, como resultado de las propias prácticas de aulas con dichas actividades y, con la participación del docente moderando y concretizando junto a ellos, los resultados que cada actividad se propone.

A modo de ejemplo se presenta una de las actividades comentadas en dicho trabajo, él se expone en la página siguiente, a saber:

Figura n° 16. Acercamientos por derecha e izquierda a la velocidad media.

Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1{,}9 \leq t \leq 2$	$1{,}99 \leq t \leq 2$	$1{,}999 \leq t \leq 2$	… →	2	← …	$2 \leq t \leq 2{,}001$	$2 \leq t \leq 2{,}01$
Δt	0,1	0,01	0,0001	… →	0	← …	0,001	0,01
Δs	1,141	0,119401	0,011994	… →	0	← …	0,012	0,120
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994	… →	12	← …	12,	12

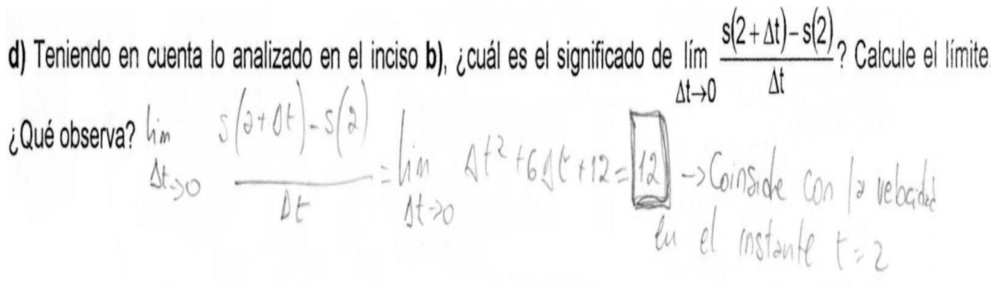
b) Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura? la velocidad en t=2 es Aprox 12cm/seg
Si, se sigue cumpliendo la conjetura

A partir de este registro, las autoras comentan que *"aproximadamente la mitad de los grupos lograron conjeturar sobre la velocidad de la partícula en el instante y el comportamiento en el caso de que los intervalos sean infinitamente pequeños.*

Su resolución permitió que reconozcan la necesidad de realizar el paso al límite para determinar la razón de cambio instantánea".

Prosiguiendo con esta actividad se calcularon analíticamente los cambios y razones de cambio. Con la consiguiente respuesta de las mayores dificultades en el trabajo algebraico y su interpretación física y geométrica de los resultados. A pesar de ello, algunos estudiantes dieron con las relaciones buscadas, lo cual se ilustra en la siguiente figura.

Figura n° 17. Cálculo e interpretación de la razón de cambio instantánea.


d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa? $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t^2+6\Delta t+12=\boxed{12}$ -> Coinside con la velocidad en el instante $t=2$

(Vrancken y Engler, 2014, p. 465)

Por último, algunas de las reflexiones que estas investigadoras comentaron al final de su trabajo fueron:

- *Las situaciones planteadas permitieron* ***trabajar distintos aspectos variacionales.***

- *Las actividades propuestas* ***lograron motivar a los alumnos*** *y movilizar sus concepciones.* ***Los alumnos sentían que eran capaces de resolverlas*** *y el conocimiento esperado fue emergiendo tanto en las discusiones de los pequeños grupos como en la puesta en común de toda la clase.*

- ***El uso de la visualización formó parte del diseño****, ya que se buscó que el alumno obtenga información relevante y explique sus conjeturas a través de las gráficas presentadas en las diferentes actividades.*

- ***La exigencia de las producciones escritas y el debate oral f****avoreció el tratamiento y conversión entre representaciones de los registros numérico, gráfico, analítico y verbal, lo cual es imprescindible para la comprensión.*

- ***La definición de derivada surgió de manera natural*** *al final de este desarrollo, planteado a partir de la necesidad de cuantificar los cambios en un instante.*

- *Estamos convencidas de que, con nuestro trabajo,* **facilitamos que produzcan conocimiento matemático,** *reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.*

- ***La secuencia cumplió con nuestras expectativas: promover la comprensión de la derivada****. La misma secuencia, distribuida en más sesiones, puede llevar a mejores resultados.*

- ***Creemos que el mayor valor de esta investigación radica en efectivizar una propuesta en el aula universitaria.***

(Vrancken y Engler, 2014, p. 466-467)

La pertinencia de este trabajo radica en dos aspectos, por un lado, la continuidad que se observa en estas investigadoras al tratar con los temas fundamentales del cálculo diferencial, sean estos el límite o la derivada y, por otro lado, en la actualidad del mismo, año 2014.

También es dingo de mención el hecho que se trata de una experiencia de aula de nivel universitario, donde los estudios son escasos y, menos aún, con estudiantes donde la matemática no es su materia de estudio prioritario.

Lo expuesto, junto con situar la problemática, provee sin duda, líneas orientadoras dignas de ser tomadas como referente, dado que representan el fruto de estudios realizados por personas que, sin duda, han demostrado experticia en el tema.

Con las palabras anteriores no se pretende cerrar la mirada a los aportes siempre emergentes en esta materia. En educación, como se sabe, nunca hay verdades definitivas, todo está por construirse siempre y, esta es una de esas ocasiones.

Así, *se han tratado*, ***el concepto*** *de* ***límite*** *y el* ***concepto de derivada*** en materia de ***propuestas didácticas para su aprendizaje***.

Finalizamos esta revisión considerando por último, algunas ***propuestas de orden general*** sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, con ello no se pretende ser exhaustivo al tratar el tema pero, sin duda, las que se consideren serán de importancia y relevantes para el presente trabajo de tesis.

2.4.4.3. Propuestas sobre el aprendizaje del cálculo diferencial

Se considera en primer lugar el trabajo titulado: *“**Ebp como metodología activa para la enseñanza del Cálculo Diferencial.** Discusión y reflexión sobre algunos problemas de cálculo en las ciencias económicas”* de García, Moreno y Azcárate (2007). En él, los autores proponen como metodología de trabajo para el estudiante una mayor participación de éstos, de modo que puedan construir su propio conocimiento frente a una mera trasmisión de éste al estudiante. La postura que estos académicos ponen de manifiesto en su artículo está en ***perfecta sintonía*** con el ***Modelo Educativo*** que la institución (Universidad del Bío-Bío, UBB) intenta plasmar en la docencia universitaria hoy en día.

Ahora bien, no resulta fácil dar vida en el aula a un modelo educativo que pone en el centro del proceso educativo al estudiante, si la gran mayoría de docentes, por no decir todos, han estado por muchos años ejerciendo una docencia centrada en ellos y en el contenido de los cursos que deben impartir. Erradicar en parte esta práctica no será tarea fácil si se desea implementar el Modelo aludido, hay en ello mucha tarea por delante de un convencimiento que se está en el camino correcto al tener como referente a las directrices que dicho Modelo sugiere para la acción docente que se desea.

Retomando el estudio hecho por los últimos investigadores aludidos, la estrategia didáctica sugerida por ellos se materializa por parte del estudiante en la ***“Resolución de Problemas”***, donde se mezclan problemas rutinarios como no rutinarios.

Polya (1965) con su obra insigne ***"Cómo plantear y resolver problemas" (How to solve it)***, ha rescatado para la Matemática la importancia de la resolución de problemas como un medio eficaz para el aprendizaje activo de la matemática en todos sus niveles.

Autores posteriores a él, no han hecho otra cosa que continuar con sus clásicos pasos para abordar la resolución de problemas.

Este artículo sitúa, además, la problemática actual de la enseñanza del Cálculo dentro de un proceso de cambio que se vive en Europa, relacionado con el proceso de convergencia y adaptación de los estudios universitarios al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) y al nuevo sistema de Créditos, lo que debe homogeneizar muchas posturas educativas actuales, con todo ello se desea que el estudiante pase a ser el protagonista de su aprendizaje, como ya se ha comentado y, el profesor asuma un postura de guía imprescindible en dicho proceso educativo.

Los autores señalan también sobre la realidad latinoamericana de las universidades en el sentido que se evidencia un cambio en materia de innovación educativa metodológica, donde, como ya se ha advertido, se espera que el estudiante desempeñe un papel más activo y de mayor participación en su proceso de aprendizaje, ésta es la idea central que no ha de perderse de vista.

Además de lo ya dicho sobre este trabajo, interesan de manera especial, dos de los cuatro objetivos que ellos presentan, a saber:

- *“Abrir un espacio de diálogo y reflexión con un grupo de profesores de Matemáticas de la Universidad sobre su práctica docente con estudiantes de Ciencias Económicas; y así, generar discusión sobre modelos innovadores en la Enseñanza de las matemáticas aplicadas a la economía”*

- *“Discutir la propuesta, desde el punto de vista de la gestión y organización de las clases, y su validez como herramienta constructiva de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos”*

(García et al. 2007, p. 3).

Estos dos objetivos resultan altamente orientadores de cara a generar propuestas educativas para el aprendizaje del Cálculo Diferencial, el que se espera concretizar con el diseño de las actividades didácticas de aprendizaje.

También resulta de interés resaltar la diferencia que se hace entre la ***Enseñanza tradicional*** versus la ***Enseñanza Basada en Problemas (EBP)***, estableciendo un paralelo entre ambas propuestas didácticas. La tabla, que comienza en esta página, así lo expone, a saber:

Tabla n° 10. Cuadro comparativo: enseñanza tradicional versus EBP.

El protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje es el profesor.	*El protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje es el alumno.*

El contenido curricular está basado en las Matemáticas y es complementado con temas de Economía (generalmente llamado de aplicaciones).	*El contenido curricular se basa de manera simultánea en temas de matemáticas y economía, es decir, partiendo de situaciones de economía se construye el conocimiento matemático.*
Por lo general los alumnos trabajan de forma Individualizada.	*Los alumnos trabajan en grupos de discusión y Reflexión.*
El estudiante está obligado a memorizar los contenidos para su posterior aplicación en áreas afines.	*La interconexión entre áreas afines les permite a los alumnos mantener "frescos" los conceptos de diversas áreas.*
Los problemas o ejercicios que se trabajan en clases son derivados de las propias matemáticas o son vistos como aplicaciones de éstas.	*Los problemas que se trabajan en clases están relacionados, generalmente, con la vida real y con el campo de estudio de los alumnos.*
La clase presenta una estructura sistemática y rutinaria, marcada por unas pautas bien diferenciadas unas de otras.	*La clase se introduce por medio de un problema, no necesariamente de matemáticas pero donde éstas estén involucradas, generando la necesidad de conceptos y teorías para resolverlo.*
Se parte de un currículo diseñado y se aplica a través de una estrategia didáctica que poco contribuye a rediseñar el currículo	*Se puede concebir como una estrategia para confeccionar o diseñar currículo, ya que éste, generalmente, tiene estructura multidisciplinar.*

(García et al., 2007, p. 6).

No cabe duda que aunque esta propuesta de enseñanza pretenda usar técnicas innovadoras, se tienen, lamentablemente, muchos visos de realizar una enseñanza tradicional, ello se entiende a la luz de la enseñanza que se recibió como estudiantes y, por tanto, replicar dichos modelos de enseñanza resulta cómodo y natural.

Por otro lado, los resultados que se han obtenido con el correr del tiempo, que aunque no óptimos del todo, dejaban un cierto grado de satisfacción al realizar la docencia.

Ahora bien, desmarcarse del paradigma anterior no resulta nada de fácil, pero se intentará, es más, se espera que esta propuesta sea percibida de manera distinta y atrayente por los estudiantes y, en definitiva, puedan ellos avanzar en una mayor comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial, ello incentiva a impartir una educación de mayor calidad que día a día se reclama con más insistencia por todos los sectores de la sociedad.

Se finaliza la consideración de este artículo, exponiendo las conclusiones de estos investigadores. Dicho trabajo, al igual que el anterior, tiene la virtud de ser altamente inspirador para desarrollar propuestas que nazcan del seno del colectivo de profesores que consideren que un espacio de reflexión didáctica es constructivo y generador de nuevas y mejores propuestas educativas para desarrollar in situ.

Las conclusiones a la que ellos arribaron son las siguientes:

> *"Era la primera vez que todos los profesores participaban en un espacio como el llevado a cabo durante el seminario. Se acordó generar un espacio interdisciplinario (matemáticas y economía) de discusión con profesores de*

ambas áreas, donde se afinen las necesidades de los estudiantes y además redefinir los objetivos específicos de los cursos de cálculo para las carreras en cuestión, tomando en cuenta el perfil del profesional actual"

"La necesidad de talleres de formación para el profesorado de matemáticas es una realidad latente, no sólo por el contenido económico en particular, sino en materia de diseño y gestión del trabajo en el aula a través de la EBP"

"Con la implementación del seminario, destacamos dos elementos de carácter innovador en el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario".

(García et al., 2007, p. 12).

Algunos comentarios atingentes a lo recién expuesto son los siguientes: en primer lugar, la creación de un espacio de discusión sobre una propuesta curricular como instrumento de investigación en didáctica de la matemática y la participación, *in situ*, del profesor para modificar o complementar el material discutido es algo valioso y digno de ser considerado.

Segundo, la reflexión que el profesor realiza sobre su formación profesional y práctica docente de un determinado tema matemático, pero que se puede hacer extensiva a todo el contenido de la asignatura es pertinente y adecuada en cualquier etapa de su desarrollo profesional.

Si los considerandos anteriores se pasan por alto o se ven con un cierto desdén por parte de los profesores, ello no es un buen indicio que se esté en el camino de un desarrollo profesional acorde con los tiempos que corren.

Un ***segundo trabajo*** bajo éste acápite lleva por título: ***¿Es posible innovar en la enseñanza del cálculo diferencial?,*** de Engler (2011), trabajo en el que reflexiona sobre este tema y circunscrita al concepto de derivada. Ella, al igual que otros autores que se han mencionado, se adscribe a la postura del pensamiento y lenguaje variacional, donde las prácticas sociales que se desarrollan a nivel de aula cobran vital importancia para construir aprendizajes contextualizados y pertinentes.

Citando a Dolores (2007), afirma que *"Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función" (Engler, 2011, p. 748).* Ello dado que la ocupación central de su trabajo es naturalmente la derivada.

Después de situar su postura sobre la cual descansará su propuesta hace mención a la ineludible incorporación de la informática en el ámbito escolar, de este modo la educación no puede estar ajena al potencial que estos medios pueden ofrecernos. Otro hecho en relación con el uso del ordenador en el ámbito educativo dice relación con la posibilidad de las distintas representaciones del conocimiento, hay en ello aún mucho por hacer.

Luego, incorporar los recursos informáticos implica acciones como *"adoptar, adaptar e integrar las nuevas herramientas al trabajo cotidiano, a fin de tornarlo más eficaz y productivo atendiendo al progreso y a las transformaciones sociales"* (Engler, 2011, p. 749).

Volviendo de nuevo a la interrogante que da título al presente trabajo y, citando a Balbuena (1996) en Engler (2011, p. 749), cree necesario en relación con la idea de innovación exponer lo siguiente:

> *Como punto de arranque, considero la innovación aplicada a nuestro campo, como aquellas experiencias que suponen acciones prácticas y sistemáticas por medio de las cuales se intenta producir y promover ciertos cambios tanto en la forma de aprender y de enseñar matemáticas, como para conseguir actitudes más positivas en torno a nuestra disciplina.*
>
> *(…) conseguir que los estudiantes se acerquen a las matemáticas de una forma distinta a como suele hacerse, que se superen ciertos tabúes e ideas preconcebidas, que la vean y la consideren como una amiga.*

En este mismo sentido y consciente de la necesidad imperiosa de producir mejoras en los procesos educativos, regidos por innovaciones que se puedan materializar en los contextos educativos a los cuales se está adscrito se permite decir que pensar en cambios en la enseñanza del cálculo significa:

- *animarnos a realizar modificaciones en el "contenido tradicional",*
- *realizar cambios metodológicos tendientes a ver cómo hacemos para que el estudiante se apropie de los conocimientos,*
- *lograr "alejarnos" de la organización de los contenidos indicados en los programas donde predomina un enfoque abstracto con escasa relación con fenómenos de variación,*

- *preguntarnos si los conceptos, procesos, objetos deben ser introducidos en forma verbal, numérica, gráfica o de una manera simbólica y cómo influyen una y otra de estas representaciones en las imágenes que los estudiantes se forman de los conceptos,*

- *poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas,*

- *incorporar en nuestra actividad docente los recursos que nos brindan las nuevas tecnologías de la comunicación y la información,*

- *propiciar actividades que favorezcan el desarrollo de los procesos y conceptos propios del cálculo (función, límite, continuidad y derivada) en base a ideas variacionales.*

(Engler, 2011, p. 750-751).

Ahora, la propuesta en sí, fue diseñada para tratar los siguientes contenidos del cálculo diferencial y su relación inmediata como son:

- *La* ***Razón de cambio media*** y su relación con la pendiente de la recta secante.

- *La* ***Razón de cambio instantánea*** y su relación con la pendiente de la recta tangente.

- *La* ***Derivada de una función*** en un punto.

Agrega además que, la puesta en escena de la propuesta supuso para el docente un papel de mediador del aprendizaje, así, la clase se desplaza de magistral a un simple taller de trabajo, que es como debería ser siempre en la práctica.

El trabajo con las actividades se realizó en parejas, para finalizar con un cierre, el cual permitió dar cabida a la formalización de los aspectos relevantes de cada actividad, esta es la forma, ya casi común que se viene repitiendo en distintos escenarios donde el desarrollo de las actividades de parte de los estudiantes tiene lugar.

A modo de ejemplo se presentan dos de las actividades propuestas en este artículo, a saber, la Actividad 1 y la Actividad 9, ellas son:

Actividad 1. Los datos de la tabla muestran los valores de la temperatura T de cierto volumen de agua tomadas en los tiempos t señalados.

Tiempo t en minutos	0	5	10	15	20	25
Temperatura T en °C	15	25,5	55,7	95	85	62

Complete la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo Δt	Cambio de temperatura ΔT	Cambio de la temperatura respecto al tiempo $\Delta T / \Delta t$
De t=0 a t=5		
De t=5 a t=10		

De t=10 a t=15		
De t=15 a t=20		
De t=20 a t=25		

Lea atentamente el problema. A partir de los datos de la tabla:

a) *Realice la interpretación geométrica en un intervalo.*

b) *¿Qué significado tienen las mediciones hechas en cada columna de la tabla?*

c) *¿Es posible que algunos valores de la tercera columna sean positivos y otros negativos? ¿Qué interpretación le da a esta situación?*

d) *Defina a que llamaría usted razón de cambio media.*

Actividad 9. *Un científico encontró que si calienta cierta sustancia, la temperatura en grados centígrados después de t minutos donde $0 < t < 5$, está dada por: $g(t) = 2t^2 + 4t + 10$.*

a) *Encuentre la razón media de cambio de la temperatura durante el intervalo [1, 2]. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta que une los puntos de abscisa 1 y 2 respectivamente.*

b) *Encuentre la razón de cambio en $t = 1{,}5$. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en $t = 1{,}5$.*

Para reflexionar: ¿Es posible establecer alguna relación entre razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, recta secante y recta tangente?

Para finalizar discuta e intercambie ideas con sus compañeros, a modo de resumen, con relación a todos los aspectos considerados en la guía resaltando los conceptos más importantes: razón de cambio media, razón de cambio instantánea, pendiente recta secante, pendiente recta tangente y derivada de una función en un punto.   (Engler, 2011, p. 752-755)

Con lo expuesto esta autora intenta apelar a una necesaria innovación en el proceso de aprendizaje del cálculo, incorporando para ellos diferentes recursos, unido a la participación decisiva de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, por medio de prácticas sociales en el aula con un carácter de compromiso con las actividades propuestas, fin último de su supuesta innovación para la enseñanza del cálculo.

Una propuesta que hace ***uso de los recursos informáticos*** y, de manera específica, usando ***Webquest*** es la de Proleón y García (2013), en la que abordan el aprendizaje del cálculo diferencial con estudiantes de primer ciclo de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola en Lima, Perú.

Dichos autores usan la herramienta ***Google Apps*** como soporte para implementar las ***Webquest.***

El objetivo de la actividad es motivar a los estudiantes tempranamente en la investigación y, de paso, reforzar sus conocimientos matemáticos entre otros.

En su exposición presentan, a modo de ejemplo, una actividad referida a optimizar la construcción de una lata de aluminio de forma cilíndrica, con ello lo que persigue es determinar las dimensiones óptimas de dicho envase con el claro propósito de contribuir con una menor contaminación del medio ambiente.

Las ***Webquest*** surgen en el campo educativo a partir de las ideas de aprendizaje colaborativo y de procesos de investigación para la construcción del saber. Creadas por Dodge (1995), tienen como principio básico conducir a los estudiantes para que incursionen en la investigación usando los recursos de internet para resolver un problema que produzca un aprendizaje significativo o para la reflexión y debate sobre un tema o situación social de interés de los estudiantes.

Así, una ***Webquest*** deviene en un tipo de actividad didáctica basada en los postulados constructivistas del aprendizaje y, que además usa la técnica de proyectos de manera grupal.

Con lo anterior se pretende que los estudiantes sigan un esquema de investigación en grupo, diseñado por el profesor, pero que puede conducirles a resultados inesperados y creativos a la vez.

Webquest, proviene de dos palabras, por un lado de la ***Web*** (World Wide Web) y, por otro lado, de la palabra ***Quest***, la cual significa búsqueda, siendo de esta forma la principal actividad de aprendizaje de los estudiantes. Según los autores de este trabajo, la estructura básica de una ***Webquest*** considera los siguientes aspectos, a saber:

- ***Introducción****, que presenta el tema y propone una pregunta central a partir de él.*

- ***Tarea****, con la propuesta de trabajo y el producto esperado.*

- ***Proceso,*** *que contiene la descripción de las etapas para la elaboración del producto a ser presentado y compartido por los demás estudiantes.*

- ***Recursos****, en donde se encuentran disponibles los diversos documentos, en formato digital, como textos, páginas web, videos, software para que los estudiantes puedan consultar y realizar la tarea que se les propone en la webquest.*

- ***Evaluación****, que establece los criterios de los productos y de la actuación de los estudiantes.*

- ***Conclusión****, resume el propósito de la investigación realizada sobre el punto de vista de sus creadores.*

Los objetivos al trabajar usando estos medios fueron, según sus autores:

- ***Motivar*** *a los estudiantes a la investigación en el área de matemática*

- ***Reforzar sus conocimientos matemáticos***

- ***Aplicar la matemática en situaciones reales***

- ***Desarrollar el trabajo colaborativo*** *y la competencia digital de los estudiantes*

- ***Introducir las tecnologías de la información y comunicación (TIC)*** *en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y*

- ***Desarrollar el aprendizaje autónomo de los estudiantes***

(Proléon y García, 2013, p. 2038).

A modo de ejemplo, se presenta una figura de la Webquest ***“Latas de aluminio”***, elaborada por uno de los grupos participantes de esta experiencia educativa.

Figura n° 18. Wesquest de análisis matemático.

Por último, citamos algunas de las conclusiones que este trabajó significó para sus autores en términos educativos, entre las más significativas se pueden mencionar:

- *La realización de las Webquest permitió que los estudiantes* ***aplicaran sus conocimientos matemáticos*** *en problemas de contexto real.*
- *En las diversas webquests se* ***incorporaron herramientas TICs*** *tales como: GeoGebra, Wiris, WinPlot y Excel que aportaron al desarrollo de la competencia digital de los estudiantes.*
- *Los estudiantes* ***desarrollaron sus habilidades interpersonales*** *lo cual ayudo a la realización de las webquets de una manera colaborativa fomentando la investigación y el trabajo en equipo.*

(Proleón y García, 2013, p. 2042)

La realización de este trabajo muestra la posibilidad cierta de innovar en el uso de recursos informáticos con los estudiantes, teniendo presente que son ellos los nativos digitales y, por tanto, con mayores competencias en este ámbito de la virtualidad, aspecto que no debe dejarse de lado para que participen de manera más activa en su propio aprendizaje, en ello hay mucho por aprender aún.

La ***siguiente propuesta*** se desarrolla en el contexto colombiano, y se debe a *Morales y Peña* (2013), quienes hacen uso de la ***modelización matemática*** como una ***herramienta didáctica*** para la enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación de ingenieros de ese país. El título de su trabajo es: "***Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática".***

Las razones principales que estos autores aducen para implementar su propuesta se basan en el hecho que *"a pesar de la inclusión de las herramientas tecnológicas en el aula, los estudiantes de ingeniería, no reconocen la importancia de la matemática que estudian… Por otro lado el quehacer docente, parece estar muy alejado de las teorías propuestas al respecto. Las clases de matemáticas y los libros utilizados para orientar los cursos, no asumen el modelamiento de situaciones como su principal objetivo matemático" (Morales y Peña, 2013, p. 577).*

Otro antecedente que los mueve a incursionar con esta propuesta se apoya en las recomendaciones emanadas de la "Asociación colombiana de facultades de ingeniería" (Acofi), plasmadas en el texto:

“*El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación”*, en el cual se plantean algunas competencias esenciales para los futuros ingenieros como son: *la capacidad para modelar fenómenos, para resolver problemas mediante la aplicación de las ciencias naturales y las matemáticas, usando el lenguaje simbólico”* (Acofi, 2007, p. 52).

Por lo demás, hay otra componente que dificulta una mejor formación para los ingenieros, ella radica en la propia universidad, institución muy resistente a los cambios en materia de enseñanza. Lo dicho se manifiesta en el citado texto de Acofi al señalar que: “*Los estudiantes están buscando experiencias educativas que los preparen para una gran variedad de trabajos y, sin embargo, el currículo y los paradigma educacionales en ingeniería han permanecido prácticamente sin cambio durante los últimos cincuenta años”* (Acofi, 2007, p. 182).

Un escenario mundial en constate cambio, como el actual, obligará sin duda a realizar reformas educativas del currículo de formación inicial en todas las formaciones profesionales. Ante este escenario, que se prevé difícil, por el nivel de competencias en la que están todos los países emergentes, obliga a estar alertas y realizar su contribución en materia de enseñanza de las ciencias básicas. En ello estos autores, Morales y Peña (2013) no se equivocan al observar el panorama mundial que se avecina y, que ya está como una realidad insoslayable.

En resumen, si se ha contribuir significativamente en la formación del futuro ingeniero, se hace absolutamente necesario reformar su currículo, como ya se ha dicho, para que la formación del estudiante de ingeniería esté a la altura del perfil profesional que se intenta delinear como posible.

Ante las evidencias presentadas, la modelación matemática se constituye para los autores de este artículo en ***“una herramienta didáctica de primer orden”,*** con la cual creen producir aprendizajes en sus estudiantes.

A su vez, apoyados en Camarena (2011) complementan lo que se entiende por ***modelación matemática*** al mencionar que: “…se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto” (2011, p. 190). Complementan lo anterior con el concurso de Villa y Ruiz (2009), quienes se refieren a la modelación matemática vista como un proceso, la cual implica una serie de fases o acciones que hacen que la construcción de un modelo no se realice de forma instantánea en el aula, sino que conlleva acciones que conforman el ciclo de la modelización.

En atención a que los estudiantes con los cuales trabajaron estos investigadores, revisan como parte de su currículo el software Matlab en la solución de problemas, ello les permitió como inicio realizar lo que denominaron una ***pre-modelación***, lo cual implicó:

- *El desarrollo de ciertas estrategias, como la presentación de los contenidos del programa, a partir de modelos conocidos.*
- *La aplicación de proyectos establecidos por otros autores; y finalmente,*
- *La intervención de los estudiantes buscando ejemplos a partir de la realidad”*

(Morales y Peña, 2013, p. 580).

Hacen notar en su trabajo la dificultad de instaurar un nuevo método de enseñanza aprendizaje, reconociendo la importancia de considerar como punto de partida el contexto, es decir, los modelos que la realidad nos proveen para usar la modelización en la formación de los futuros ingenieros.

Este intento de usar la modelización debe ser gradual a juicio de ellos y se debe tomar como referencia el contenido de los cursos de cálculo diferencial e integral. Así, ellos eligieron cuatro modelos, de situaciones en contexto, las cuales fueron propuestas a los estudiantes. Los cuatro modelos los denominaron: *Avión, Esfero-carro, Logo-mundial y Caras.*

En los anexos incluyen ejemplos de cada uno de los temas trabajados por los estudiantes, a modo de ejemplo se incluye el tema relacionado con el *"Logo Mundial: Brasil 2014 y logo del mundial definido funcionalmente por medio de Geogebra"*

Figura n°19. Logo del mundial de futbol, Brasil 2014.

Más que conclusiones, presentan en su documento avances y resultados de su *“primera etapa de sensibilización con los docentes y estudiantes”*, les parece importante el uso de software empleado como Matlab y Geogebra, para el desarrollo de esta investigación. Ven en la incorporación de las nuevas tecnologías facetas como: una herramienta de trabajo, un apoyo en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje o como simplemente un medio por sí mismo.

Por último, manifiestan que los modelos abordados fueron pertinentes, dado que mantuvieron el interés de los estudiantes durante el tiempo que duró la experiencia y, no sólo a ellos sino que también varios profesores que no formaban parte de la investigación manifestaron interés en vincularse, desde su propias disciplinas, con el proyecto, de modo de aportar de forma más eficaz en el desarrollo de esta propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral basada en la modelación matemática, para los programas de ingeniería de la Universidad de San Buenaventura de las Sede Bogotá.

Finalmente, se expone el trabajo de Rincón, Cienfuegos, Galván y Fabela (2014), titulado: ***"El aprendizaje activo como estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo"***. Dichos autores apelan a que por lo general ***el aprendizaje del cálculo*** es más bien ***algorítmico*** y con ***escasa profundidad*** en sus contenidos, además de la ***actitud pasiva*** que por lo general asume el estudiante. Por tal motivo, y consecuente con ello, a partir del año 1995, la institución donde se llevó a cabo la experiencia asumió un proceso de rediseño educativo en el cual el estudiante tuviese un rol más protagónico en su proceso de aprendizaje, sin embargo los contenidos didácticos continuaban basándose en los textos tradicionales de cálculo, los que no facilitaban el rol que se esperaba que los estudiantes tuviesen en el desarrollo de las competencias matemáticas solicitadas por el entorno. Ante este escenario descrito por estos autores, Rincón et al. (2014), surgió la iniciativa de desarrollar un propuesta didáctica que, además de considerar el modelo educativo de la institución se orientará hacia "***el aprendizaje activo y basada en la técnica de la pregunta***" (p. 500), la cual pone al estudiante en un ambiente de construcción y reflexión, y teniendo ahora como base de la propuesta el texto elaborado por Galván, Cienfuegos, Fabela, Rincón, Rodríguez, Romero y Elizondo (2011).

Teniendo como base lo anterior, el marco teórico de referencia usado por los autores de este trabajo, es el ***constructivismo***, con ello se espera situar al estudiante en un rol protagónico de su propio aprendizaje.

La propuesta entonces, que se comenta, se inició en el mes agosto de 2005 en todos los cursos de cálculo diferencial para económicas y ciencias sociales en una universidad privada ubicada en Monterrey, Nuevo León, México, la cual ofrece periodos académicos semestrales, en promedio conformada por ocho (8) grupos por periodo de 40 estudiantes por grupo. Según sus autores la estrategia didáctica consistió en que las temáticas se aborden promoviendo la participación activa de los estudiantes mediante la técnica de la pregunta y el aprendizaje colaborativo a través de la incorporación de actividades que motivasen al estudiante no sólo a resolver problemas sino a reflexionar acerca del trabajo realizado y a interpretar los resultados obtenidos. Como es lógico, cada unidad temática contempló situaciones relacionadas con el área de estudios o entorno y se usaron para construir o descubrir los conceptos que debían ser estudiados.

Figura n° 20. Un ejemplo de actividad para los estudiantes.

CONSTRUCCIÓN La siguiente tabla de datos representa una población de conejos *P*, como una función del tiempo *t*.

Analiza los datos para encontrar un patrón de comportamiento para esta función; para ello, reflexiona y contesta en las líneas lo que se pide.

t (meses)	0	1	2	3	4	5
P (número de conejos)	3	6	12	24	48	

¿La tabla dada corresponde a un modelo lineal?

____

¿Por qué? ______________________________

____

¿Cómo crece la población de conejos? ________

¿Qué población de conejos esperas que haya para el quinto mes? ______________________

¿Qué hiciste para obtener la cantidad anterior?

____

La actividad anterior debía continuar con la construcción del modelo matemático y de su respectiva gráfica, haciendo uso de la tecnología, de modo de relacionar, lo numérico, lo algebraico y lo gráfico en un entorno de aprendizaje activo.

Bajo las condiciones descritas, se espera que el rol del docente sea de un facilitador del aprendizaje, y que promueva en el estudiante la reflexión, el análisis, la modelación, la toma de decisión, la búsqueda de información y la responsabilidad, entre otras cualidades. Todo ello como resultado de un uso eficiente de las actividades propuestas por los docentes, las cuales debían trabajarse de forma plenaria o en grupos colaborativos.

La secuencia de actividades continuaba bajo estos mismos predicamentos de forma de ir construyendo paulatinamente nuevos conceptos, trabajando colaborativamente entre ellos. También se contempló la realización de tareas, ya sea para recuperar conocimientos previos, construir un nuevo tema o para simplemente abordar dicha temática en el aula.

Por último, estos autores, Rincón et al. (2014), hacen uso de los recursos estadísticos para poner de manifiesto la bondad de la implementación de la propuesta del uso de la estrategia activa basada en la técnica de la pregunta, mostrando valores en el promedio de las calificaciones antes de la propuesta, período del 1995 al 2001 de: 73, 42, a un valor promedio de 79,11 para el período de los años 2005 al 2011, en el cual se hizo uso de la propuesta en el aula. Agregue a ello los porcentajes de reprobados de 30,81% para antes de la aplicación de la propuesta a un 17,64% una vez implementada.

Lo expuesto es seguramente una muestra burda del uso de la estadística, pero se valen de otras técnicas para probar que la implementación de su propuesta si reduce significativamente el porcentaje de reprobados y mejora sustancialmente el promedio de las calificaciones del curso.

Por lo demás: "*En cuanto al proceso de aprendizaje, se ha observado a lo largo de este tiempo, que el alumno tiene una presencia activa durante las clases en cuanto al hacer y al pensar a través de la construcción de su aprendizaje y a partir de situaciones relacionadas a su área de especialidad, lo que favorece a que su aprendizaje sea significativo*" (Rincón et al., 2014, p. 504).

No cabe ninguna duda que los ejemplos abordados, bajo este acápite, sirven como un referente de propuestas, en un sentido amplio y con una visión de conjunto, al tratar el aprendizaje del cálculo diferencial con los estudiantes en los diferentes contextos aludidos.

2.5. El diseño curricular modular como base de la propuesta

2.5.1. Antecedentes del diseño curricular modular

Hay que reconocer, de inicio, que la participación del Ministerio de Educación del Gobierno de Chile ha sido desde un tiempo hasta esta parte decisivo en impulsar un Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Enseñanza Superior (MECESUP) con el claro propósito de perfeccionar e impulsar la enseñanza de las ciencias básicas en el país. Por tal motivo año tras años, promueve distintas iniciativas que ayuden a mejorar la Calidad de la enseñanza superior. Hay aquí una lectura que realizan algunos docentes en el sentido que las pautas del desempeño académico de las Universidades viene ya elaborado desde la esfera del Gobierno de turno o, más aún, que las políticas de actuación las fija el Banco Mundial al ofrecer grandes sumas de dólares que los gobiernos no pueden rechazar de antemano. Ahora bien, independiente de cual sea el caso, lo cierto es que las Universidades Regionales, como sucede con la Universidad del Bío-Bío, necesitan mejorar los índices de aprobación de sus asignaturas críticas, como sucede con las de las ciencias básicas. Además es una de las pocas fuentes de financiamiento que poseen si de verdad quiere exhibir mejores índices de aprobación y una menor tasa de deserción en los primeros años de estudio de sus carreras de ingeniería por ejemplo.

Lo bueno del hecho descrito anteriormente radica en que siempre hay docentes que aceptan el desafío presentado por parte del Ministerio de Educación y están dispuestos a generar proyectos de Mejoramiento de la Calidad de la Educación (MECESUP) con el claro propósito de mejorar la Educación que hoy se imparte a nivel universitario en el país.

Es así como nace el proyecto. ***UCO 0607, "Diseño de planes de nivelación en ciencias básicas para el primer año de Ingeniería Civil"*** (Sánchez, 2008). La ejecución de este proyecto se proponía paliar en parte el grave déficit que presentaban los estudiantes en sus inicios en la vida universitaria tanto en contenidos básicos de Matemática o Física, como en hábitos de estudio.

Si duda que la ejecución del Proyecto anterior (UCO 0607) marcó un punto de inflexión en el quehacer docente de la UBB. (Sánchez, 2008)

Así, la realización del Proyecto anterior (UCO 0607), sirvió como fuente de inspiración para la postulación de un nuevo proyecto docente, rotulado después de su adjudicación como el proyecto MECESUP UBB 0809, denominado: "***Implementación de un plan de nivelación de competencias básicas en ciencias básicas para alumnos de ingeniería".*** Hay que señalar también la decisiva participación de la UTEP (Universidad de Texas en El Paso, Estados Unidos de América), quienes prestaron la primera asesoría de nivel Internacional para socializar el proyecto que se debía realizar. Como se sabe, nadie es profeta en su tierra, de modo que la participación de dos docentes de esta Universidad del Paso, Texas, hizo ver el proyecto como interesante y digno de su realización posterior.

Así, entonces dichos académicos manifestaron que en el ámbito de las carreras de la ciencia y la ingeniería, una de las estrategias que ha demostrado un buen nivel de efectividad es la ***modularización de asignaturas de matemáticas.***

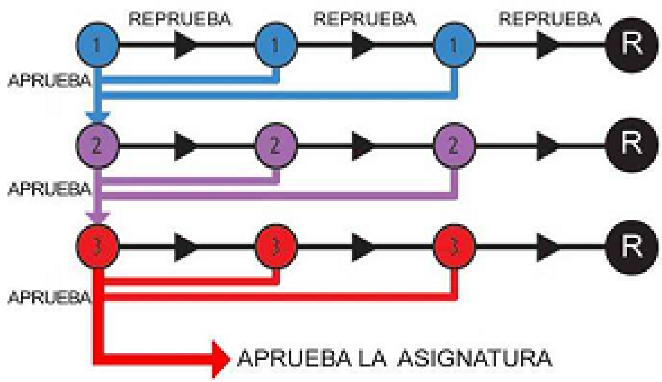
Es más, dicha estrategia ha tomado cierto arraigo en universidades estatales que tienen como misión fundamental ofrecer oportunidades de educación a grupos sociales desfavorecidos. Lo anterior concuerda plenamente con la situación actual que evidencia la UBB, de modo que atender de esta manera la posibilidad de abordar bajo el diseño curricular modular las asignaturas tanto de Matemática como de Física resultó a la postre lo más aconsejable, más aún si la sugerencia venía del extranjero. Se debe reconocer con lo dicho que instalar un cambio en el diseño curricular, por simple que este sea, necesita de una buena dosis de socialización y convencimiento de parte de los actores involucrados, de lo contrario el éxito difícilmente puede estar asegurado.

Lo anterior también debe hacerse en los niveles directivos de la Universidad, de modo que puedan estar convencidos de la posible efectividad del nuevo diseño curricular que se desea implementar. Con ello queda de manifiesto que la Universidad debe funcionar de manera mancomunada si pretende logros efectivos en la mejora de los aprendizajes que intenta impartir para sus estudiantes.

2.5.2. El diseño curricular modular: esquema y funcionamiento

Por un ***diseño curricular modular*** se debe entender la realización de la asignatura en unidades más pequeñas de conocimiento que acortan los tiempos de evaluación. En sí, el contenido de las asignaturas no cambia considerablemente pero se da un espacio al reordenamiento de los contenidos de manera oportuna. De esta forma el alumno que puede demostrar que domina el contenido de una unidad (Módulo) avanza al siguiente módulo mientras que el alumno que tiene dificultades con un módulo puede y debe retomar el mismo nivel un máximo de “n” veces sin tener que repetir la asignatura entera como se ilustra a continuación.

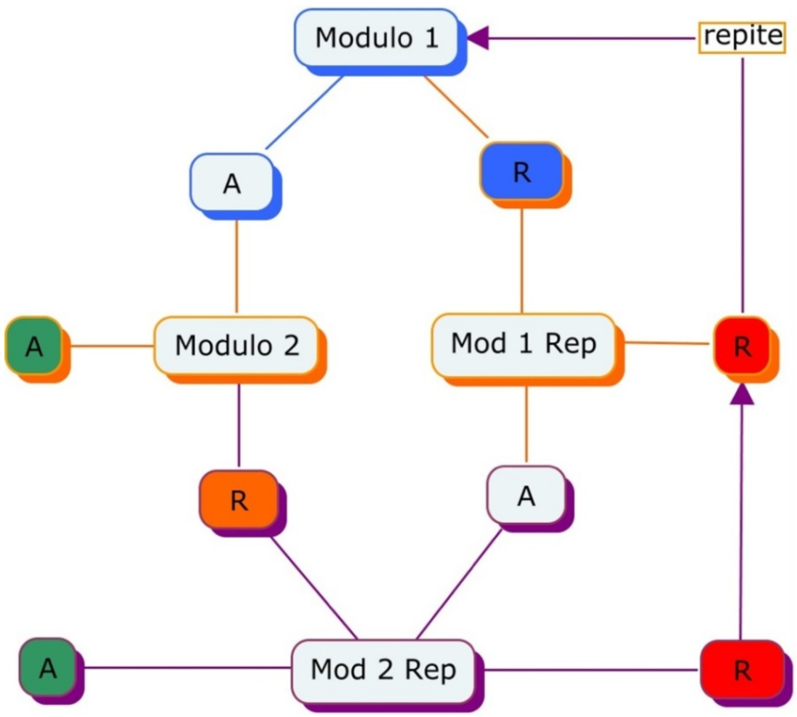
Figura n° 21. Ilustración del diseño modular en base a tres módulos.



Lo anterior significa la secuencia en el tiempo de la implementación del diseño curricular modular en base a tres Módulos. La propia práctica, se ha encargado de demostrar que, en virtud de los medios económicos disponibles y, la propia idiosincrasia de la institución ha sido pertinente y adecuado trabajar con sólo dos módulos en lugar de tres, un buen aprendizaje que se obtiene como fruto del trabajo de este diseño en el aula.

Así, el diseño curricular modular al trabajar con dos módulos en lugar de tres como se hizo en su inicio dio lugar al siguiente esquema de representación. Se insiste en ello pues facilita la comprensión del trabajo modular para los profesores que por primera vez trabajaron bajo esta modalidad curricular. Así, el nuevo modelo queda representado como:

Figura n° 22. Ilustración del diseño modular en base a dos módulos.



La aplicación de este diseño curricular ***Modular*** de trabajo para desarrollar la asignatura de cálculo, no es un mero capricho, las estadísticas y grado de satisfacción que han mostrado los estudiantes que han llevado cursos bajo esta modalidad dan, en principio, la razón (Lazo, 2011). Más adelante se mostrarán estadísticas con los ***Rendimientos Finales*** obtenidos por los estudiantes que han seguido sus cursos de Matemática bajo este diseño curricular de trabajo.

Aquí, las mediciones hechas y, los ajustes realizados han resultado piezas fundamentales para continuar con este trabajo que comenzó el año 2010 de manera piloto y que hoy en día la Universidad comienza a implementar de manera más extensa y que, por lo tanto, va siendo un sello de su quehacer docente para las asignaturas de los primeros años de vida universitaria.

Una de las ventajas, que salta a la vista, sobre esta modalidad de trabajo es el hecho que el estudiante debe responder académicamente por unidades de conocimientos más breves en su proceso de aprendizaje y, por consiguiente, el proceso de evaluación es más exigente en el tiempo, lo que obliga al estudiante a un estudio más continuo y sistemático al llevar el curso en forma Modular, ya no puede especular tanto con los promedios de notas que obtiene, pues se ve obligado a aprobar el Módulo 1, si desea avanzar en la realización completa del curso. No existe tampoco un período de renuncia de la asignatura como ocurre en la Modalidad Tradicional, se avanza en la finalización correcta del curso en la medida que apruebe los Módulos y se supone, por tanto, que el estudiante mejora en compromiso consigo mismo y en el aprendizaje del Cálculo propiamente tal.

También está el grado de satisfacción expresado por los propios estudiantes que han participado de esta modalidad de trabajo bajo el sistema Modular. Agradecen con creces el hecho de poder contar con otra oportunidad para poder repetir el Módulo, cuando su rendimiento no ha sido el óptimo.

Por último, se revisa con algo más de detalle el Proyecto MECESUP UBB 0809, en el cual ha crecido y se ha desarrollado el diseño curricular Modular. En primer término se puede afirmar que la realización de este proyecto se inserta dentro del nuevo Modelo Educativo de la Universidad del Bío-Bío. Junto a ello también su ejecución contribuyó a que la Facultad de Ciencias se fortalezca y se prepare adecuadamente para responder a los requerimientos que se le harán desde las otras Facultades que han iniciado ya el proceso de renovación curricular en la UBB. Lo que sin duda, conlleva un mejor aprovechamiento y complementariedad de los recursos, que por lo general son escasos en materia educativa a nivel del país.

Ahora bien, en lo dice relación el objetivo del Proyecto ellos se expresaron como Objetivo General y Objetivos Específicos, ellos se exponen para una mejor comprensión de los mismos y, por tanto, para una mayor claridad de sus acciones futuras, se tiene entonces:

Objetivo General:

> *"Implementar un plan de nivelación de competencias básicas y genéricas en asignaturas de ciencias básicas para las carreras de ingeniería civil, con el fin de mejorar las posibilidades de éxito académico de los estudiantes de primer y segundo año (ciclo inicial). El proceso de implementación involucra a la Facultad de Ciencias en aspectos multidimensionales, dado que se contempla el diagnóstico de habilidades y conocimientos de los alumnos que ingresan, y que cursan sus dos primeros años en esta Facultad, reforma curricular de las asignaturas de Ciencias, la renovación metodológica de las prácticas docentes, apoyo permanente a estos estudiantes y la gestión académica ad hoc"*

Objetivos específicos:

> *El plan de nivelación a implementar comprende tres grandes etapas que en sí constituyen algunos objetivos específicos del proyecto:*

Objetivo específico 1:

Realizar la renovación curricular de las asignaturas semestrales de Matemáticas y Física en módulos con resultados de aprendizaje. Para las carreras de Ingeniería. La idea es programar los módulos del plan de nivelación por "competencias genéricas y específicas que deben adquirir los estudiantes para aprobar cada módulo".

Objetivo específico 2:

***Aplicar** de manera experimental el plan de nivelación en la Carrera de Ingeniería Civil. Dicho plan se aplicará en las asignaturas de Física 1 y Matemáticas (álgebra, álgebra lineal y cálculo I y II) del primer año de la carrera. Ya que la modularización de ellas se llevará a cabo el 2010 en el marco del Convenio de Desempeño*

Objetivo específico 3:

Implementación del plan de nivelación de competencias básicas y genéricas para las otras carreras de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería, con las correcciones y modificaciones necesarias obtenidas de la experiencia piloto realizada en la carrera de Ingeniería Civil. (1)

Objetivo específico 4:

Formar una Unidad de Apoyo Pedagógico para la Facultad de Ciencias, la cual considerará dos ámbitos, *a) El destinado a los docentes, con el fin de actualizarlos y acompañarlos permanentemente en la aplicación de metodologías activas y colaborativas, uso de TIC's, etc.; y*

b) Hacia los alumnos tutores, con el objeto de formarlos y realizar el seguimiento necesario para fortalecer en el ámbito de las ciencias básicas el programa de apoyo al estudiante, mediante tutorías permanentes.

Objetivo específico 5:

Diseñar un sistema de gestión académica para la coordinación, el seguimiento y la evaluación de la aplicación de la nueva estructura curricular propuesta, e incorporar la dotación de recurso humano necesario.

Objetivo específico 6:

Proveer la infraestructura física, tecnológica y el equipamiento necesario, que satisfaga los requerimientos de gestión docente para la renovación curricular que se implementará y para las metodologías activas que se utilizarán en la ejecución de este proyecto.

(http://mecesup.ubiobio.cl/PROYECTOS/UBB0809/obj_proy.php, 2014)

Sin duda que los objetivos en cualquier proyecto marcan el desarrollo posterior del mismo y, son altamente orientadores desde su inicio, 11 de noviembre de 2009, hasta su fecha de término, acaecida el 10 de noviembre del 2012. Lo anterior, como una forma de fijar temporalmente la ejecución del Proyecto propiamente tal.

Sirva entonces lo anterior para situar en contexto la propuesta del diseño curricular modular y, con ello, hacer ver desde un principio que su justificación y desarrollo responde a los problemas ya expuestos en el capítulo inicial de esta Tesis, cuando se evidenció la problemática existente en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial.

2.5.3. Las actividades didácticas de aprendizaje: temas previos

Lo que a continuación se describe constituye los elementos vertebradores de la conformación de la propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, bajo el diseño curricular modular. Todas estas componentes contribuirán a la conformación final de las ***Actividades Didácticas de Aprendizaje***. Luego, a la usanza de una orquesta, serán los instrumentos a tener en cuenta para producir con un cierto grado de armonía la pieza didáctica que se desea exponer, evaluar y mejorar como instrumento de mediación de los aprendizajes de los estudiantes bajo el diseño curricular modular, el cual sirve como árbol en el cuál cobijar la propuesta en sí.

Así, los elementos que se considerarán para conformar las actividades didácticas de aprendizaje serán:

- *El resultado de dos cuestionarios aplicados a docentes universitarios sobre los temas de: límite y derivada.*
- *Un análisis exhaustivo a diez (10) textos de cálculo donde se revisarán los conceptos de: límite y derivada.*
- *El modelo educativo de la Universidad del Bío-Bío.*
- *El perfil de egreso de las dos carreras donde se aplicó la propuesta.*
- *El programa de la asignatura.*
- *El uso de los recursos informáticos y*
- *La resolución de problemas.*

Todos estos elementos de manera conjunta pretenden, al igual que cada uno de los instrumentos de una orquesta, producir las actividades didácticas de aprendizaje, que se conjugan bajo el diseño curricular modular ya explicado en su sentido y propósito para producir un mejor rendimiento académico final del curso, el que se debería traducirse en un aprendizaje efectivo del cálculo diferencial.

Luego, se revisa entonces a continuación cada uno de los puntos señalados anteriormente y en el mismo orden en que han sido presentados.

2.5.3.1. Resultados de la aplicación de dos cuestionarios

- ***Presentación y fundamentación :*** a continuación se exponen los resultados de la aplicación de dos cuestionarios a docentes universitarios del país (Chile), pertenecientes a cuatro instituciones de educación superior a lo largo del país, entre ellas: La Universidad de Tarapacá, la más al norte de país; La Universidad Santo Tomás de la Región Metropolitana y, la Universidad de Concepción y la del Bío-Bío de la octava región del país. Dichos cuestionarios fueron contestados por veinte docentes de las universidades mencionadas. El cuestionario es, sin duda, un elemento que permite conocer, en alguna medida, asuntos tan importantes como son el concepto de límite y derivada en aspectos didácticos como su presentación y los recursos que los docentes usan para introducir dichos conceptos y, con ello, pretender producir aprendizajes en sus estudiantes, esto como fundamental en su aplicación.

- ***Objetivos:*** sin perjuicio de lo ya acotado y, como resultado de su aplicación, también se desea dar cumplimiento a uno de los objetivos específicos de la presente tesis, el quinto para ser más precisos y, en segundo término poder recabar conocimiento en lo que respecta a: los conocimientos previos que se requieren para tratar estos temas (límite y derivadas y sus aplicaciones). También resulta de interés saber que textos usan para realizar la transposición didáctica en el aula o si prefieren sus propias notas de trabajo que han ido construyendo con el paso del tiempo, entre otras

- ***Análisis de ambos cuestionarios*:** una vez aplicados cada uno de estos cuestionarios se procedió al análisis de cada uno de ellos, examinando cada una de las preguntas formuladas, para cada uno de ellos. En algunos fue necesario realizar una síntesis por categoría, de modo de poder agrupar respuestas similares y, de esta forma poder efectuar un recuento de las mismas. En otros casos bastó el simple recuento de respuestas afines. Con ello, como es obvio se desea conformar respuestas consensuadas de forma de plasmar a modo de síntesis las respuestas que los docentes dieron a ambos cuestionarios. Dado el tamaño de la muestra, n=20, no fue necesario la aplicación de un software estadístico para su análisis, el simple recuento en cada una de las variables estudiadas bastó para su análisis y posterior interpretación de los resultados obtenidos.

Agregar, por último, que conseguir las respuestas para ambos cuestionarios, aun para un valor n=20, no resultó un tarea fácil de lograr, una de la razones que salta a la vista es la baja cooperación que existe entre las instituciones de educación superior, por los general se las mira con recelo y el marcado individualismo presente en la sociedad actual se traslada de igual forma a las instituciones, las que son competidores en su afán por buscar los "clientes", así llamados los estudiantes de hoy en muchos lugares.

Como parte del *Apéndice Documental* de la tesis se incluyen ambos cuestionarios, los que fueron debidamente validados por el coeficiente Alfa de Cronbach.

Luego, en primer lugar, se expone el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del Cuestionario n° 1, referido al concepto de "límite". A continuación se procede con el análisis de las respuestas dadas al segundo Cuestionario, el que se relaciona con el concepto de "derivada y sus aplicaciones".

Para dar mayor claridad a la exposición, se exponen cada una de las Preguntas formuladas y sus respectivas respuestas para ambos cuestionarios.

En primer lugar se presenta los resultados y análisis del *Cuestionario sobre el concepto de límite.*

Resultado y análisis del cuestionario sobre límite

Pregunta 1: *En el contexto de la enseñanza y aprendizaje del cálculo de una variable para carreras no matemáticas ¿considera importante el concepto de límite?* ***Sí: _____No: ____*** *Justifique su respuesta.*

Esta pregunta fue contestada con un ***85%*** para la ***opción*** **Sí**. Uno de los argumentos que resume tal preferencia fue: *"Central para el Cálculo Diferencial e Integral, además contribuye al desarrollo del pensamiento abstracto".*

Por consiguiente, la ***opción NO obtuvo el 15%*** de las preferencias. Una de las razones esgrimidas fue*: "Concepto difícil de entender para los alumnos de primer año que no sean estudiantes de Matemática".*

Pregunta 2: *A su juicio, ¿qué conceptos previos considera necesarios para introducir el límite de una función en un punto?*

Esta pregunta relacionada con los conceptos previos arrojó el siguiente resultado, por orden de preferencia:

1. *Funciones (dominio, recorrido, evaluar funciones, entre otras), 44 alusiones*
2. *Álgebra Básica (factorización, productos notables, uso de cuantificadores, etc.) 18 alusiones.*
3. *Subconjuntos de números reales (intervalos, inecuaciones y vecindades) con 8 alusiones*
4. *Límite de una sucesión y series, con tan solo 4 alusiones docentes.*

Pregunta 3 *¿Cómo introduce el concepto de límite? ¿Qué tipo de recursos y / o ejemplos usa?*

Esta pregunta fue contestada por los académicos, atendiendo a la mayor frecuencia observada en los siguientes términos:

- *Uso de aproximación gráfica, con 13 alusiones.*
- *Uso de aproximación tabular por izquierda y derecha, con 8 alusiones.*
- *Uso de recursos informáticos, con 6 menciones.*
- *Uso de funciones definidas a trozos o donde se producen indeterminaciones, con 3 menciones.*
- *Uso de la definición formal, con tres alusiones.*

La simple ordenación de esta secuencia por orden de preferencia, genera la conclusión obvia de cuáles son los recursos más usados por los docentes encuestados para introducir el concepto de Límite.

Esta forma de presentar el concepto, no dista mucho a lo que sucede en otros sitios universitarios al momento de impartir un curso de Cálculo regular.

Se puede objetar como una aseveración temeraria en virtud del tamaño de la muestra, pero el sentido común, más estos resultados, avalan esta forma de presentación canónica.

Pregunta 4 *¿Qué texto(s) de cálculo o apunte(s) usa como apoyo para su enseñanza-aprendizaje?*

La respuesta a esta pregunta se resume en las siguientes cifras:

1. *J. Stewart, con 7 preferencias*
2. *Apuntes propios, con 6 preferencias*
3. *R. Larson et al. , con 6 preferencias*
4. *L. Leithold, con 3 preferencias*
5. *Textos de autores como: F. Ayres, Thomas, Ellis y Gulick, con dos preferencias cada uno de ellos*
6. *Otros autores de textos mencionados fueron: Stein, Hoffmann y Edwards, Lang con sólo una mención.*

Claramente la opción de los textos escritos por: ***J. Stewart y R. Larson*** marcan la diferencia, sin desconocer el uso de ***Apuntes propios***, generados por los docentes encargados de dictar estas materias.

Pregunta 5 *¿Cuáles son las dificultades que usted ha identificado, sobre la enseñanza del límite? Explicítelas.*

Esta pregunta tiene distintos ámbitos de respuesta, por tal motivo se resumen en aspectos como:

- *Relacionadas con el propio concepto, dada la dificultad intrínseca que éste posee.*

- *En lo que concierne al estudiante, se requiere de él un mayor grado de conocimiento tanto del álgebra básica como de las funciones.*

- *En materia de recursos, se advierte una carencia de material bibliográfico que contemple ejercicios de aplicación a situaciones contextualizadas.*

Pregunta 6 *Algún comentario que desee hacernos, sobre la enseñanza del cálculo de una variable, no sólo sobre el concepto de límite, será bien recibido, muchas gracias.*

Del análisis hecho de las respuestas dadas a esta pregunta se puede inferir:

- *Se hacen necesarios los conocimientos previos de parte de los estudiantes, tanto en el álgebra básica como en el tema de las funciones y lo que ello comporta.*

- *Al docente le cabe centrar su enseñanza en lo esencial, no usar ejemplos demasiado complejos, que en nada facilitan la comprensión de los conceptos matemáticos.*

- *Algunas líneas de acción docente podrían ser: la generación de material didáctico, la creación de talleres donde la participación de los* *estudiantes sea un pilar fundamental de modo de poder ayudarlos para una mejor comprensión de la Matemática que deben aprender, incorporar las TIC y, por último, conectar la disciplina con la Historia de la Matemática, asunto que está siempre latente pero que sin embargo se deja de lado.*

Ahora, en lo que dice relación con este segundo cuestionario aplicado, se sigue la misma exposición hecha anteriormente, esto es, se exponen tanto cada una de las preguntas con la síntesis los resultados obtenidos de las respuestas dadas por los docentes encuestados, como es obvio.

Resultado y análisis del cuestionario sobre la derivada y sus aplicaciones

Pregunta 1: *¿Qué conceptos previos considera necesarios para enseñar la derivada en el contexto de un curso de cálculo?*

Las preferencias de los docentes encuestados están consignadas por números entre paréntesis (n).

- ***Álgebra Básica***, que incluyó aspectos como: factorización (4), productos notables (4), resolución de ecuaciones (2), entre otros, el recuento final fue de 17 preferencias.
- ***Las funciones***, que considera un conocimiento previo en: evaluación de funciones (2), gráfica de funciones (13), dominio y recorrido (2). Así, el recuento para este tema fue de 17 preferencias, las mismas que en el tópico anterior.
- ***Límite de una función*** concitó 16 preferencias.
- Bajo el nombre de ***Geometría Analítica***, que involucra la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, noción de recta secante para concluir en recta tangente se manifestaron con 11 preferencias.
- ***La noción de continuidad***, acaparó 9 preferencias y, por último
- ***Trigonometría y Sucesión de números reales*** con una preferencia cada una.

Lo anterior indica la tendencia natural expuesta por la casi mayoría de los textos de Cálculo, revelando claramente que el enfoque previo a la presentación de la Derivada es la canónica y, por tanto, la que se sigue en la mayoría de los casos.

<u>Pregunta 2</u>: *¿Cómo introduce el concepto de derivada, y qué definición da?*

Las respuestas dadas, a la primera parte de esta pregunta ***P2***, revelan que la ***Interpretación Geométrica*** es la más usada por los docentes, obteniendo 15 preferencias. Ello indica además que una vez analizado el aspecto geométrico, el siguiente paso es su ***Definición formal,*** en términos del límite del cociente de Newton, con 12 preferencias. Se hace mención también al necesario conocimiento del concepto de Límite de una función en un punto, dado que la Derivada, en su sentido local, resulta de la estimación de un Límite en un punto específico.

Otros encuestados hicieron mención a interpretaciones como el costo marginal, en carreras de las ciencias económicas. Por otro lado, en carreras de Ingeniería las estimaciones de la velocidad y aceleración ocuparon las preferencias de los encuestados. Con ello, hay conciencia que es muy importante el contexto para el cual se dicta una Asignatura de Cálculo y, por tanto, es un aspecto a tener en cuanta cada vez que se imparte la asignatura en cuestión.

Lo cierto del caso es que se introduce la interpretación geométrica en primer lugar y a continuación se procede con la formalización en términos del límite del cociente incremental. Esta es la conclusión obtenida del análisis de las repuestas dadas para esta pregunta por los encuestados.

Pregunta 3: *¿Qué recursos didácticos (apuntes, uso de plataforma, software, otros,…) utiliza para apoyar el proceso de enseñanza- aprendizaje y, que den muestra de su efectividad?*

Los recursos, que se podrían agrupar como clásicos, como el uso de apuntes, textos, listados de ejercicios para desarrollar en las clases prácticas, unido a los test semanales representan los medios más usados por los docentes encuestados, 14 preferencias.

Por otro lado, y con una menor preferencia están los recursos que se podrían enunciar como innovadores, entre ellos se mencionaron: el uso de distintos tipos de software (Geogebra, Excel, Matlab, Mathplot, Graphmatic), el uso de Plataformas virtuales, uso de presentaciones digitales para exponer los contenidos del curso como los resúmenes de las mismas materias tratadas, con 8 preferencias. Hubo también, aunque en menor escala, quienes se manifestaron por un uso combinado de ambos tipos de recursos, esto es, tradicionales como innovadores. Donde innovador se entiende como recurso digital, con 6 preferencias.

Hay que señalar además que los encuestados no se pronunciaron por la efectividad de los medios mencionados, más bien se limitaron a enunciarlos sin más.

El análisis hecho a las respuestas dadas a esta pregunta revela que el ***uso de recursos tradicionales se sigue imponiendo*** como la forma más habitual para impartir la docencia del Cálculo, al menos en los medios encuestados, situación que se repite en muchos otros centros educativos universitarios del país donde se enseña Cálculo Diferencial hoy en día.

Pregunta 4: *Respecto de las aplicaciones de la derivada, ¿cuáles considera más importantes de abordar en orden de preferencia?*

El consenso sobre las respuestas dadas a esta pregunta se resume en dos grandes temas, y que por orden de preferencia serían:

- *Los problemas sobre la* ***determinación de máximos y mínimos para una función*** *en su dominio más amplio (15) y*

- ***Los problemas sobre optimización*** *(10), donde los contextos para quienes se dicta la asignatura deben ser tomados en consideración, de modo de hacer ver que el Cálculo representa una poderosa herramienta para abordar los problemas de Optimización que se pueden reducir a maximizar o minimizar funciones de una sola variable.*

Pregunta 5: *¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes, que usted ha detectado, en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones?*

La dificultad mayor evidenciada por los docentes estriba en la falta de la utilización correcta del álgebra básica, esto es, de las propiedades de los números reales, este hecho fue mencionado por once (11) docentes. Otro aspecto que le sigue a éste es la falta del aprendizaje cabal del concepto de función, con cuatro menciones.

A continuación se nombró la falta de comprensión del concepto de límite y su consecuente aplicación, con tres menciones. A lo anterior le sigue la falta de visión geométrica para comprender el paso de una recta secante a una recta tangente en un punto, ello deja en evidencia la escaza comprensión de la interpretación geométrica de la Derivada y, por consiguiente también la escasa comprensión de su Definición formal, esto con 4 menciones.

Por último, se hizo mención al hecho que los estudiantes, en su gran mayoría, no poseen hábitos de estudio, se muestran indiferentes a enfrentar nuevos desafíos, carecen de responsabilidad y madurez para enfrentar con éxito la vida universitaria propiamente tal. Esto, que puede ser un rasgo insignificante, queda de manifiesto a la hora de producirse un acercamiento entre maestros y discípulos.

Ahora, en lo que dice relación con las ***aplicaciones de la derivada***, las dificultades radican en la falta de capacidad para entender la pregunta formulada en el problema y, cómo formalizar, en términos de una ecuación, la función a estudiar que da con la solución de la situación en estudio.

Además se mencionó la falta de capacidad de síntesis en el momento de resolver un problema de máximo o mínimo.

En suma, se evidencian carencias en la comprensión lectora de los problemas de aplicación, con su consecuente vía de solución al momento de formalizar la o las ecuaciones que modelan la situación en estudio y sobre la cual se desea hallar una solución óptima, trátese de un máximo o de un mínimo.

Pregunta 6: *¿Qué textos de cálculo usa preferentemente como apoyo a su labor docente? Marque su respuesta con una X.*

Larson :.... Stewart: … Leithold: ….. Ayres:……Thomas:…Lang:…
Apostol:…. Spiegel:…. Edwards y Penney:… Ellis y Gulick: … Zill: ……
Juan de Burgos: ….. Otro texto:……

El análisis de la respuesta dada a esta pregunta ***P6*** reveló que la lista de textos mencionada en ella resultó corta, los docentes encuestados agregaron más nombres a la lista, como quedará de manifiesto.

Así, las preferencias se manifestaron, citando al autor en:

- *Larson, 10 menciones, Leithold, 7 menciones*
- *Stewart, 6 menciones, Juan de Burgos, 5 menciones*
- *Apuntes docentes propios y Thomas, con 4 menciones cada uno*
- *Ellis Gulick, Zill, Ayres y Lang, con 3 menciones cada uno*
- *Apostol, 2 menciones, Fraleight, Edwards y Penney, Kuratowski, Spivak, Strang, Hoffmann, Spiegel, todos ellos con una mención.*

En base a lo expuesto queda claro cuáles son los textos más usados por los docentes en atención a las respuestas dadas por ellos.

Debe quedar claro además que, por regla general, se usa más de un texto como medio de consulta para desarrollar el currículo.

Hay que tener presente que ciertos textos se ponen de moda, como ocurre con el Texto de Larson y el de Stewart, además el número de ejemplares disponibles en Biblioteca supera con creces a otros ejemplares, sume a ello su impresión a color de algunas de sus páginas, como ocurre con el texto de Larson, en su octava edición, por ejemplo.

Pregunta 7: *Algún comentario que desee expresarnos respecto de la enseñanza del cálculo diferencial será bien recibido. Muchas gracias por vuestro tiempo.*

Esta pregunta fue contestada solo por el 50% de los encuestados. La revisión dada a esta pregunta reveló que todos los aspectos mencionados son dignos de consideración a la hora de trazar posibles líneas de acción docente, para la enseñanza y aprendizaje del cálculo. En síntesis las respuestas fueron:

- ***Usar un texto*** *como* ***guía.***
- ***No olvidar el tratamiento conceptual de los temas****, realizando una selección adecuada de los ejemplos para la presentación de los mismos, sin perjuicio que el curso se dicte para estudiantes no matemáticos.*
- ***Desarrollar material didáctico de bajo costo*** *para los estudiantes sobre los temas tratados. Hacer uso de metodologías activas, como la resolución de problemas de manera individual y grupal.*
- *Se evidencia una* ***falta de cursos de perfeccionamiento por parte de los docentes****, relacionados con la enseñanza del Cálculo con el apoyo de software.*
- ***Las condiciones de entrada de los estudiantes resultan primordiales*** *para enfrentar con éxito el curso, por muchos medios que usen los docentes para impartir la asignatura.*
- *Por último,* ***el Cálculo Diferencial e Integral constituyen una poderosa herramienta*** *que si se comprende bien es aplicable a diversas situaciones en ciencias y, va más allá que el simple hecho de derivar e integrar.*

Lo anterior refleja responsabilidades y acciones futuras tanto para los docentes como para los estudiantes. Así, sólo un trabajo mancomunado entre estos actores podrá exhibir mejores resultados académicos que los que hoy se tienen. Luego, la tarea ha de ser compartida, sólo de esta forma se podrá avanzar en pos de mejoras educativas en estas materias.

A ***modo de síntesis***, el resultado anteriormente presentado sobre la aplicación de estos dos Cuestionarios a docentes universitarios, pertenecientes a cuatro Instituciones de Educación superior del país (Chile), ***constituyen una excelente fuente de inspiración*** a tener en cuenta a la hora de considerar la elaboración de las Actividades Didácticas de Aprendizaje para el cálculo de una variable.

A continuación y, prosiguiendo con lo ya señalado, se aborda ***el estudio de los textos de cálculo*** en los dos temas centrales de esta temática, como son: el concepto de límite y el de derivada. Todo ello con miras a acrecentar el conocimiento didáctico del cálculo en pos del diseño de las actividades didácticas para su aprendizaje.

2.5.3.2. El cálculo diferencial a través de los textos

En primer lugar se debe reconocer la influencia que han tenido los textos de estudio en la forma en la que se ha desarrollado el currículo de matemática al enseñar el cálculo diferencial. Si en un primer momento estuvo marcado por una línea más próxima al Análisis Matemático, hoy en día se aprecia una postura distinta y más abierta a producir innovaciones en su enseñanza. Así, en muchos países se advierten signos de cambio, donde nuevas propuestas se generan desde el ámbito docente, como se ha puesto en evidencia cuando se presentaron diversas propuestas para su aprendizaje en un acápite anterior.

También se ha observado a lo largo de los años que ciertos textos de cálculo se ponen de moda, los que prontamente dan paso a otros y así sucesivamente. Por otro lado, las propias Universidades generan para sus estudiantes diversos tipos de Apuntes, que si bien es cierto no representan un texto de estudio en sí, al menos, sirven de base para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática del cambio.

Se debe reconocer también que el texto es un objeto tangible y, por tanto en condiciones de ser analizado, donde el saber matemático se convierte en objeto de enseñanza. Se parte del supuesto básico que sus autores realizan un esfuerzo, en el sentido didáctico, para introducir, explicar y demostrar con variados ejemplos los conceptos que configuran el cálculo diferencial, como son el concepto de límite y de derivada, sin excluir a las funciones y a los números reales.

El conocimiento matemático se expresa en resultados que la comunidad científica avala o rechaza, una vez que dicho conocimiento es aceptado sufre alteraciones antes de convertirse en objeto a ser enseñado, esto es, sufre cambios que obedecen a su intención instruccional. A este respecto, es Chevalard (1991) quien introduce la expresión ***transposición didáctica***, para indicar el proceso de transformación mediante el cual un conocimiento pasa de ser "***un objeto del saber***", propio de los matemáticos, a "***objeto a enseñar"***, para por último transformarse en "*objeto de enseñanza*" cuando tiene un tratamiento didáctico que se supone incorporan los autores de texto de estudio. Luego, los textos presentan una propuesta del saber a enseñar, que corresponde a su índice temático y un tratamiento didáctico como son las definiciones, explicaciones, gráficos, ejemplos ilustrativos, etc., los cuales constituyen una forma de enseñar las temáticas consideradas (Bravo y Cantoral, 2012).

El análisis que se hará sobre los textos de cálculo contempla, como se podría esperar, tan sólo dos temas: el concepto de "*límite*" y el concepto de "*derivada*". En atención a que en la mayoría de los textos, se aborda en primer término el concepto de "límite", se sigue este mismo orden para su estudio en los textos que se revisarán.

Se describe acto seguido, qué aspectos se considerarán al realizar el estudio de ambos temas centrales del cálculo diferencial. Ellos serán:

1. ***Rescatar**, en lo posible, **de manera textual**, un pequeño comentario sobre lo que el autor o autores declaran de inicio sobre el tema en estudio.*

2. ***Señalar** cuales son **los temas que aborda en primer término** y que, por ende, se pueden considerar como prerrequisitos para desarrollar y comprender de mejor forma el tema tratado.*

3. ***El tratamiento dado al concepto** propiamente tal, en su parte introductoria. Esbozando la **trayectoria didáctica que sigue,*** revisando de esta forma los ejemplos ilustrativos que dan cuenta de la presentación del concepto en sí.

4. ***Emitir una valoración** general **sobre la importancia dada al concepto**.*

Respecto al punto cuatro (4.), la valoración será:

- ***Alta,*** cuando el tratamiento del tema sea exhaustivo y relevante para el autor o los autores en el desarrollo de la temática presentada.

- ***Regular,*** cuando sólo se usen los conceptos de forma instrumental, esto es, como meros soporte para el ulterior tratamiento del cálculo.

- ***Baja*** cuando a pesar de ser los conceptos medios para el desarrollo del tema, su tratamiento es escaso y se obvia su estudio en beneficio de una presentación esencialmente intuitiva y desprovista de toda formalidad matemática.

El estudio que se presentará corresponde a un total de ***diez (10) textos*** de ***cálculo***. Dicho estudio es el resultado, en cierto modo, de los ***dos Cuestionarios aplicados,*** donde se indagó sobre temas como: los textos más usados, que recursos utilizan para introducir los conceptos y, cuáles eran las dificultades más notorias presentes en los estudiantes cuando ellos realizan la transposición didáctica en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo, entre otros aspectos.

A modo de resumen, se presentará al final de cada uno de los dos estudios, sendos cuadros comparativos que contempla una síntesis de los aspectos analizados en cada uno de los textos.

<u>Análisis del tratamiento dado al concepto de "límite" en los textos</u>

Para dar comienzo a este análisis didáctico sobre el concepto de "*límite*" se considera en primer término el texto escrito por el profesor Lang, en su edición en español del año 1990. Quizás, el año de edición puede parecer antiguo pero, hay que tener presente que los resultados que conforman el acervo matemático permanecen vigentes a pesar del tiempo. Hecho que otras disciplinas científicas no pueden garantizar de manera tan estable en el tiempo, como si ocurre con la Matemática, en general.

<u>Texto 1</u> ***Lang (1990)***

Según declara este autor, dicho texto ha sido escrito pensando en los estudiantes. Ahora, en lo que respecta al concepto de límite, se pronuncia diciendo que los estudiantes no poseen la base psicológica adecuada para revisar este concepto en su definición formal, esto es, en términos de ε y δ, además se resisten a ello de manera notoria. Agrega también que, una revisión del concepto de *"límite"* bajo estos términos formales, debería quedar completamente fuera de un curso normal de cálculo.

<u>Temas abordados en primer término</u>

No es sino hasta el tercer Capítulo, donde expone la derivada, cuando comienza con el concepto de límite, en atención a que la derivada se define como el límite del cociente de Newton se ve obligado a considerar el estudio del límite, pues su aplicación no sólo tiene relación con la diferenciación, sino que también con la integración, como sucede con el caso de la estimación de integrales impropias, por ejemplo.

En vista de lo anterior los temas previos al concepto de límite por Lang son los siguientes:

Capítulo 1. Números y funciones.

Capítulo 2. Gráficas y curvas.

Capítulo 3. La derivada.

El concepto de Límite propiamente tal

La revisión del concepto de límite, se circunscribe a dar un listado de propiedades que usará posteriormente en el resto del texto. Dichas propiedades constituyen sendos Teoremas para otros autores, en cambio para él, no pasan de ser instrumentos con los cuales desarrolla las principales reglas de derivación.

Incluye también, por medio de ejemplos ilustrativos, la estimación de algunos límites. Como también qué ha de entenderse por el ***lím F (h),*** cuando h tiende a cero.

Dado el poco valor que este concepto tiene para este autor, no incluye en su listado de ejercicios la estimación de límites de funciones en un punto determinado, más bien se centra en la estimación del cálculo de derivadas, donde considera más importante la regla de la cadena y la derivación implícita. Ello da pábulo para afirmar, bajo el prisma de este autor, que aquel que sabe aplicar correctamente tanto la regla de la cadena como la derivación implícita, sabe por tanto derivar.

En vista de lo expuesto, la ***importancia*** que este autor le atribuye al concepto de límite es relativamente ***Baja***. Y, por ende, no se detiene en demasía en su análisis y estudio, a pesar que dicho concepto se puede revisar como parte del Apéndice que este autor desarrolla al final del texto (Lang, 1990, p. 444).

Texto 2 ***Apostol (1990)***

La revisión del concepto de límite por este autor se realiza en el contexto del estudio de las funciones continuas, que corresponde al tercer capítulo de este texto. Antes habrá abordado el tema de la Integración, lo que representa una novedad en la presentación del cálculo, dado que, por regla general, el tema de la integración se trata por la mayoría de los autores después de haber analizado la derivación.

Temas abordados en primer término

En el párrafo anterior se adelantó el hecho que la integración se expone antes que la derivación. Por regla general, la continuidad de una función también se aborda después de considerar el concepto de límite, en cambio este autor considera, aunque de manera intuitiva la continuidad de las funciones. Se refiere al hecho que fueron los trabajos de Joseph Fourier, relativos a la Teoría del Calor, los que obligaron a examinar con más cuidado los conceptos de función y continuidad. Lo anterior hizo que matemáticos de la talla de Augustin Louis Cauchy se ocupara de dar una definición más precisa del concepto de límite y, de paso del concepto de continuidad, definición que por lo demás se usa hasta el día de hoy.

Resumiendo, los temas abordados con anterioridad al concepto de límite por Apostol (1990) son:

Capítulo 1. Los conceptos del Cálculo Integral.

Capítulo 2. Algunas aplicaciones de la Integración.

Capítulo 3. Funciones Continuas.

<u>El concepto de Límite propiamente tal</u>

La expresión matemática: ***lím f(x) =A, cuando x tiende a p,***

> *"Implica la idea que f(x) puede hacerse tan próximo a "A" como queramos, con tal que x se elija suficientemente próximo al valor de p"*
>
> *(Apostol, 1990, p. 157).*

Con esta idea introduce el concepto de límite, es más, declara que el objetivo es desarrollar el significado de estos símbolos en función de los números reales. Para ello ve la necesidad de introducir el concepto de "*Entorno de un punto*".

Ello le permitirá definir *límite* en función de dicho concepto. Esta es una idea poco explotada por otros autores, en ella se puede apreciar una idea global del proceso de estimar el Límite de una función que vale la pena considerar cuando se está empeñado en que los estudiantes comprendan cuál es el significado real de la expresión:

lím f(x) =A, si x tiende a un valor p.

Acto seguido los entornos se traducen en términos de desigualdad, así la definición de *límite* queda expresada como se conoce habitualmente, esto es:

Lím f(x) =A, si x tiende a p < = > ***Para cada ε > 0, existe un δ >0 tal que***

| f(x) - A| < ε siempre que 0 < |x - p| < δ

Luego de esto, considera dos ejemplos donde determina los respectivos entornos para las funciones: constante e identidad.

Los límites laterales es su próximo tema, dando a conocer cuál es el significado de ellos en términos de entornos.

Ejemplifica lo anterior examinando tres funciones, a saber: ***la función parte entera*** (la cual no posee límite en los valores enteros de su dominio, dado que los límites laterales son distintos en aquellos puntos), la siguiente función es $\boldsymbol{f(x) = 1/x^2}$ (que no posee límite en x=0), y por último, realiza un examen para la función definida a trozos, como es: f(x)= 1, si x ≠0 y de valor 0 en f(0).

Luego del análisis descrito, con las funciones usadas a modo de ejemplos, se ocupa del concepto de Continuidad de una función. En resumen, la importancia que este autor le atribuye al concepto de límite es ***Regular.***

Texto 3   ***Zill y Wright (2011)***

Este es un texto que tiene bastante uso por los estudiantes, su presentación es amigable y está dotado de variadas figuras para ilustrar el concepto de límite.

> *"Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del Cálculo se han usado dos problemas: el problema de la recta tangente y el problema del área. En este capítulo y en los capítulos posteriores veremos que la solución de ambos problemas implica el concepto de Límite"*
>
> *(Zill y Wright, 2011, p. 67).*

Temas abordados en primer término

Estos autores sólo consideran un Capítulo previo antes de abordar el concepto de límite. Dicho Capítulo se refiere al estudio de las funciones, las que abordan con bastante detalle. Algunas de las funciones que examinan son: polinómica, racionales, trascendentes, exponenciales y logarítmicas.

El examen de estas funciones provee de una gran cantidad de ejemplos para examinar con toda propiedad el concepto de límite. Por último, antes de finalizar el primer capítulo consideran una sección que denominan: *"De las palabras a las funciones"*, como una instancia previa al momento de considerar, por ejemplo, las aplicaciones de la Derivada e Integral que tratarán en capítulos posteriores y donde se hace necesario plasmar en una ecuación lo que se formula de modo verbal.

Alcanzar una realización como la descrita supone un cierto grado de comprensión y aplicación del cálculo que los estudiantes deberían alcanzar una vez que el curso esté en su etapa de finalización.

<u>El concepto de Límite propiamente tal</u>

El capítulo referido al "límite" contempla el tratamiento del concepto de manera exhaustiva, comenzando con un enfoque informal para terminar de manera formal. Entre estos dos temas consideran: los teoremas sobre límites, la continuidad, los límites trigonométricos y los límites relacionados con el infinito. El enfoque informal, que les sirve para introducir el concepto, lo realizan a través de la *función racional*:

$$f(x) = (16-x^2)/\,(4+x).$$

Con la función anteriormente expuesta realiza una aproximación tanto gráfica como tabular, donde en la aproximación tabular se consideran valores próximos a x= - 4, tanto por la derecha como por la izquierda.

Después de lo anterior, se permiten dar una definición informal del Límite. Explicando además el sentido de tender por la derecha y por la izquierda, con ello pueden definir los límites laterales y de este modo asegurar la existencia del límite en base a la existencia e igualdad de los límites laterales.

Usan la función racional modificada en x= - 4, donde ahora asume el valor 5, para hacer notar que la existencia del límite de una función en un punto no depende de si f(x) esté o no definida en el lugar donde se desea estudiar su límite, sino que ella debe estar definida para x cerca del punto en estudio, en este caso particular en una vecindad del valor $x = -4$.

Ponen de manifiesto además que si los límites laterales, en un punto, son distintos o no existen, entonces el límite en dicho punto no existe.

A continuación ***revisan ocho (8) Ejemplos*** antes de dar su primer listado de Ejercicios, que consta de 50 Problemas.

Se podrá evidenciar que una vez que finalice el estudio realizado tanto para el concepto de Límite como el de Derivada que, dichos autores elaboran extensos listados de problemas, que en un curso normal no pueden revisarse de manera exhaustiva ni en clase ni por los propios estudiantes fuera de ella.

Lo expresado anteriormente amerita entonces esta intervención didáctica, seleccionando los Problemas más representativos de todos los textos y, de este modo: poder concebir las ***Actividades Didácticas de Aprendizaje***. Ello justifica plenamente un objetivo de realización alcanzable y cierto, el que quedará plasmado como parte sustantiva del Apéndice de la presente Tesis Doctoral.

Los ocho ejemplos examinados por estos autores se agrupan en:

- *Tres donde el límite existe, Ejemplos: 1, 2 y 7.*
- *Cinco donde el límite no existe, Ejemplos: 3, 4, 5 6 y 8.*

Las funciones más usadas, por estos autores, son aquellas definidas a trozos. Donde el valor de la función cambia de izquierda a derecha en un punto donde se estudia su límite.

En casi todos los Ejemplos presentados el recurso por excelencia es la ***Aproximación gráfica*** y la ***Aproximación tabular por derecha e izquierda***. Ello permite con bastante claridad deducir el valor del límite en estudio.

Los recursos de aproximación, son usados en general por casi todos los autores como se podrá apreciar una vez hecho el análisis de todos los textos. Una de las funciones más usadas también es la hipérbola equilátera definida como: f(x)=1/x, la cual no posee límite en x=0. El Ejemplo 6 de estos autores así lo ratifica.

El estudio del concepto de límite continúa con la revisión de los Teoremas sobre límites, dichos Teoremas se enuncian sin su demostración. Sólo se muestran aplicaciones de cada uno de ellos. A esta presentación le sigue un segundo listado de Ejercicios, conformado por 64 Problemas. En ellos prima la ejercitación de la estimación del límite de una función en un punto, donde el uso de los Teoremas presentados se hace necesario. Le sigue posteriormente la presentación del concepto de continuidad, la que se define en términos de Límite.

Otras secciones relacionadas con el concepto de Límite son: Límites trigonométricos (sección 2.4) y límites que involucran el infinito (sección 2.5). En la penúltima sección presentan el ***"enfoque formal"*** de este concepto, esto es, en términos de ***épsilon y deltas***. Se valen para ello de cinco ejemplos, donde la estimación del delta correspondiente está presente. Terminan con un relato histórico referido a: Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) y Karl Wilhelm Weiertrass (1815 -1897), referido a las contribuciones realizadas por ellos en la clarificación y formalización del concepto de límite, tal como hoy en día se usa y conoce.

Por tanto, este texto se constituye en un excelente medio de apoyo para realizar una presentación clara y exhaustiva de todos los temas que el concepto de límite supone para su aprendizaje.

De los comentarios hechos sobre la revisión de este texto, se puede colegir que la importancia dada a este concepto por dichos autores es ***Alta.***

<u>Texto 4</u> ***Steiner (2005)***

Este es un texto que está escrito por un químico y, por tanto, con una clara orientación para servir como texto guía para las carreras en donde la química es la disciplina fundamental de su formación profesional. Luego, por el tratamiento dado a algunos temas matemáticos es importante su revisión.

> *"Una característica de este libro es el uso extenso de ejemplos para ilustrar todos los conceptos y métodos importantes del texto"*
>
> *(Steiner, 2005, p. 5)*

Temas abordados en primer término

Este autor, contrariamente a lo que realizan otros autores, no dedica gran espacio al concepto de límite. Es más, se permite abordar temas como la derivada y la continuidad, que requieren de dicho concepto, antes de considerar el concepto de límite. Ello resulta paradojal, si se tiene presente que, el edificio del saber matemático se construye paso a paso y con conocimientos previos que lo anteceden en su configuración estructural. Hecho este alcance preliminar, se exponen los temas previos que redacta y que configuran los capítulos antes de considerar el concepto de límite propiamente tal, dichos capítulos son:

Capítulo 1. ***Números, variables y álgebra.***

Capítulo 2. ***Funciones algebraicas.***

Capítulo 3. ***Funciones trascendentes.***

Capítulo 4. ***Derivación.***

Es en este último capítulo donde aborda el concepto de "Límite", no sin antes haberse detenido en la derivación y en la continuidad de una función.

Al definir la derivada se ve obligado a recurrir al concepto de límite y lo hace afirmando que ***"El proceso de tomar límite se llama derivación"*** **(**Steiner, 2005, p. 78).

Lo mismo ocurre con la continuidad de una función en un punto afirmando que: "Si $f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1 - \Delta x)$ tienden ambos al mismo valor $f(x_1)$ cuando Δx tiende a cero, se dice que la función es continua en x_1" (Steiner, 2005, p. 79).

Expone esto para hacer ver que dicho concepto requiere del uso del concepto de Límite. Además, la definición de continuidad, en sí es novedosa desde el punto de vista gráfico y analítico.

El concepto de Límite propiamente tal

Ya avanzado el cuarto capítulo, dedicado a la derivación, se detiene a examinar en su sección 4.4 el concepto de límite. Para ello usa una función racional, donde el denominador se anula, allí procede a estimar el valor del límite de la función. Este hecho confirma, una vez más, el uso reiterado de funciones racionales para introducir el concepto de límite y estudiarlo en aquellos puntos donde su valor se torna indeterminado.

Para los fines propuestos de la estimación del límite anterior, usa una aproximación tabular derecha e izquierda, como resultado de la exhibición de dicha tabla deduce el valor del límite. Hace notar que la estimación de un límite, por regla general, entraña una indeterminación del tipo: 0/0.

También suelen darse indeterminaciones como: ∞/∞ y $\infty - \infty$, frecuentes en las ciencias físicas. Ellas se resuelven, de ser el caso, manipulando las expresiones que las definen convenientemente. Cierra la presentación del concepto, considerando tan sólo tres ejemplos. En dos de ellos, el primero y el último, estima el comportamiento de la función cuando x es grande positivo, esto es, cuando x tiende a infinito. En el segundo, examina qué le pasa a la función cuando x tiende a cero.

Se puede inferir de lo expuesto que el tratamiento dado al concepto de Límite, por este autor, es ***Bajo.*** Es más, dedica tan sólo 11 ejercicios de los 80 problemas que contempla el listado referido a este capítulo que lo incluye como uno de sus temas, entre otros.

Texto 5 ***Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2009)***

Texto muy popular hoy en día, su presentación con variadas figuras a color lo hacen el preferido de muchos estudiantes y las bibliotecas universitarias poseen un gran número de ejemplares para atender esta demanda estudiantil y del profesorado. Respecto del concepto de límite sus autores se pronuncian en los siguientes términos:

> *"El límite es un concepto fundamental del Cálculo. Una técnica que se puede utilizar para estimar un límite consiste en trazar la función y luego determinar el comportamiento de la gráfica a medida que la variable independiente se acerca a un valor específico ...aprenderá a encontrar los límites de las funciones de manera analítica, gráfica y numérica"*

(Larson et al., 2009, p. 41)

Temas abordados en primer término

La tabla de contenido por sí sola, sugiere bastante al lector sobre los contenidos que se tratan previamente. Así, los capítulos previos que estos autores consideran son:

Capítulo 1. Los números reales.

Capítulo 2. Funciones.

Dichos capítulos son los mínimos necesarios para adentrarse en el estudio de los límites dado que los elementos constitutivos del concepto de límite comprenden a: los números reales, la función distancia y el concepto de función en sus distintas representaciones, gráfica, tabular o numérica y, por cierto analítica.

Respecto del primer capítulo se puede decir que él contempla la identificación de los números reales con la recta numérica, las propiedades de los reales con sus distintos axiomas que lo conforman, como son los axiomas de cuerpo, de orden y el axioma de completitud. La clasificación de los distintos intervalos de números de reales también se considera.

El estudio de las desigualdades en los que la función valor absoluto está involucrada, es un asunto de importancia para estos autores, con ello se prepara el camino para entender con más facilidad la definición formal del concepto de límite. Tal vez, estos tópicos referidos a los números reales pueden resultar novedosos para quien recién se inicia en el estudio del cálculo, no así lo relacionado con el concepto de función, el cual se estudia en variadas instancias durante el transcurso de la Enseñanza Secundaria (Enseñanza Media en el contexto chileno).

El Capítulo 2, relacionado con las funciones no amerita mayores comentarios, tal vez lo único sea su revisión con un grado de mayor profundidad. La composición de funciones y las transformaciones que se originan por traslación horizontal o vertical sea una novedad, también pueden serlo las reflexiones respecto de los ejes coordenados o del origen, con todo ello se añade un mayor grado de conocimiento de las funciones en general. Conviene tener presente que, con mucha razón suele decirse que la Matemática es el estudio de las funciones.

El concepto de Límite propiamente tal

Los subtítulos que estos autores utilizan en el desarrollo de las secciones que conforman el Capítulo dedicado a: "Límites y continuidad" resultan ser orientadores para el lector. Así, *la Introducción a los límites la realizan utilizando una función racional*, específicamente la función: ***$f(x)= (x^3-1)/(x-1)$,*** que no está definida en x=1. Luego, es en ese valor (x=1), donde se estudia su límite. Para ello realizan una aproximación gráfica y una aproximación tabular (Derecha e izquierda), de modo de poder deducir bajo estos lineamientos el valor del límite en dicho punto.

Después de exhibir el ejemplo anterior, se solicita al lector estudie el límite de otra función racional en el punto donde el denominador se anula, para ello se sugiere usar la aproximación tanto gráfica como tabular.

Se examinan ***8 Ejemplos*** de estimación del valor de un límite antes de entregar el primer listado de Ejercicios, el cual se conforma de 76 Problemas.

En los *Ejemplos 1 y 2,* se usan los recursos de aproximación comentados (gráfico y tabular). Pero se deja explícito que la idea es avanzar en la estimación del límite de manera analítica, esto es, usando la definición formal, dada en términos de épsilon y delta. Luego, hecho lo anterior, en los Ejemplos 6, 7 y 8 proceden a estimar los valores de delta para épsilon dados.

Las funciones de los últimos Ejemplos analizados corresponden a funciones lineales para dos de estos Ejemplos (Ej. 6 y 7), y una función cuadrática, la función $y=x^2$, que corresponde al Ejemplo 8.

La presentación continúa con las Propiedades sobre Límites y el cálculo de ellos, a modo de aplicación. Dichas Propiedades se enuncian sin demostración. Esta sección finaliza con el Teorema del encaje y el resultado de dos límites trigonométricos importantes, como son:

lím sen(x) / x ***cuando x tiende a cero***

lím (1-cos(x)) / x ***cuando x tiende a cero***

Estos límites permiten la estimación de otros trigonométricos, donde además, los recursos algebraicos se hacen necesarios para dar con la solución de los problemas que ellos involucran. Los autores dedican las siguientes secciones a considerar: los límites laterales, los límites infinitos y sus propiedades, todo ello les permiten definir asíntotas tanto verticales como horizontales.

En general*, la importancia dada por estos autores al concepto de límite es* ***Alta.*** Luego, este texto, se constituye en una excelente referencia bibliográfica si se desea abordar el concepto de límite en profundidad y, de este modo, avanzar de manera segura en la comprensión de él, cuando se resuelven una buena cantidad de los problemas que en cada sección se proponen. Si se deja de lado la resolución de problemas, no es posible aprender matemática.

***<u>Texto 6</u>* Stewart, J. (2010)**

Año tras año este texto ha ido concitando más adeptos. Es un verdadero compendio del cálculo y, por lo tanto resulta voluminoso en su trato físico. Además de este texto, se ha ocupado de escribir otros, entre los cuales está un tratamiento del pre-cálculo. Realiza una muy buen conexión entre los conceptos que trata y eso es algo positivo y útil de destacar. Como bien lo expresa su autor en los siguientes términos:

> *"El tipo especial de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades da lugar a la idea central del Cálculo Diferencial, la derivada. ... Así, es apropiado iniciar nuestro estudio del Cálculo, investigando limites y propiedades"*
>
> *(Stewart, 2010, p. 89)*

Temas abordados en primer término

Este autor, antes de considerar el concepto de Límite, revisa como apartados previos a él dos temáticas, la primera ***"Una vista previa al cálculo",*** que podríamos considerar como un capítulo 0 y, un segundo apartado que corresponde al Capítulo 1 propiamente tal. En la *"Vista previa al cálculo"*, este autor considera los siguientes temas:

- ***El problema del área***, que corresponde a la temática central del Cálculo Integral, permite dar respuestas a: volumen de un sólido, longitud de una curva, la masa y centro de gravedad de una varilla, etc.

- ***El problema de la tangente***, que se obtiene como el límite de las pendientes entre dos puntos, uno de los cuales se mantiene fijo y el otro se hace tender al anterior, a lo largo de la curva en estudio. Este problema dio lugar a lo que hoy se conoce como Cálculo Diferencial. Tema que ha sido desarrollado con posterioridad al Cálculo Integral.

- ***La Velocidad***, que resulta del límite de la razón de cambio promedio de la posición de una partícula en el tiempo.

- ***El límite de una sucesión***, que relaciona con una de las paradojas de Zenón, la referida a la carrera entre Aquiles y la tortuga, donde Aquiles da una ventaja inicial a la tortuga. Zenón afirma que en estas condiciones Aquiles jamás podrá rebasar a la tortuga, dado que si Aquiles parte de la posición a_1 y la tortuga está en la posición t_1, cuando Aquiles llegue a la posición a_2, la tortuga ya se ha movido un trecho y está ahora en la posición t_2, y así siguiendo. Ahora bien, las sucesivas posiciones, tanto de Aquiles como de la tortuga, dan origen a sendas sucesiones como: $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para todo n. Ambas sucesiones tienen el mismo límite p, es en ese punto donde Aquiles sobrepasa a la tortuga.

- ***Suma de una serie***, aquí nuevamente usa otra paradoja de Zenón para introducir este concepto. Lo cierto es que si se desea estimar la cuantía de una serie, se debe recurrir nuevamente al concepto de límite, donde la convergencia de la sucesión de sumas parciales da cuenta del valor de la serie en estudio.

Hechos los alcances de esta *"Vista preliminar al Cálculo"*, este autor se adentra en el desarrollo del ***Capítulo 1***, dedicado al tema de ***"Las funciones y modelos"***.

Lo interesante del Capítulo 1, (*Funciones y modelos*) es la mención explícita del hecho que una función puede ser representada de diferentes maneras, como son su representación verbal, gráfica, tabular y analítica. Esta multiplicidad en la representación de una función es una faceta que a juicio de diversos investigadores debe ser utilizada cada vez que se desea introducir un nuevo concepto y dicho concepto lo permite por las características que él posee intrínsecamente. Se logra apreciar, a lo largo de esta exposición que, el concepto de límite puede ser tratado bajo distintas aproximaciones, con ello se espera que el estudiante esté en mejores condiciones de alcanzar un grado de comprensión mayor de dicho concepto.

Da término a este primer capítulo, revisando aspectos que dicen relación con la Resolución de Problemas. Asunto trascendental en el aprendizaje de las Matemáticas. Aquí, los aportes de Polya (1965), son su fuente de inspiración de cómo abordar la ***Resolución de un Problema*** de índole matemático. Las ideas centrales usadas por Polya y, que él revisa son: *entender el problema, pensar en un plan, llevar a cabo dicho plan y volver hacia atrás.*

Para ejemplificar estas recomendaciones utiliza ***cuatro Ejemplos***, en los cuales trata de identificar qué principios o ideas se hacen presentes.

Por último, da un listado de 20 problemas, con los cuales da término a este capítulo previo antes de considerar el concepto de límite.

El concepto de Límite propiamente tal

Este autor introduce el concepto de Límite examinando dos temas:

- *El problema de la recta tangente y*
- *El problema de la velocidad.*

Para el *primer problema,* usa la socorrida función cuadrática $y = x^2$, donde se propone hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P= (1,1). Para ello determina distintas pendientes entre P y Q. En una de las listas de estas estimaciones usa como abscisa del punto Q valores x próximos a 1, pero menores que 1, realizando una aproximación por la izquierda. Para la otra lista de estimaciones usa valores de x mayores que 1, con lo que realiza una aproximación por la derecha.

El análisis hecho le permite inferir que:

Lím $(x^2-1)/(x-1)$ es 2, cuando x tiende a 1.

Así, la pendiente de la recta tangente a y $=x^2$ en el punto P= (1,1) es m=2. Con lo que el problema planteado está resuelto, y por tanto: *y -1= 2(x-1) es la ecuación de la recta tangente a la función en el punto P = (1,1).*

Para el *segundo problema*, referido a la estimación de la velocidad de un objeto, considera velocidades promedios, las que resultan ser razones entre cambios de posición de un objeto en el tiempo versus la variación de dicho tiempo.

En ambos problemas la representación gráfica es importante, con ello el autor advierte la estrecha relación entre los dos problemas considerados. Una vez hecha esta presentación preliminar se adentra al estudio del concepto de límite sin más.

Da comienzo al estudio del límite revisando la función cuadrática: $y=x^2-x+2$, donde desea estimar el límite de esta función cuando x tiende a dos. Para ello realiza una aproximación tanto gráfica como tabular, lo anterior le permite expresar que el límite es cuatro cuando x tiende a dos. Formaliza además diciendo que:

> *"Lím f(x) = L, cuando x tiende a L si podemos hacer los valores de f(x) arbitrariamente cercanos a L al tomar x suficientemente cercano a "a", pero no igual al valor de a"*

Hace hincapié en el hecho que no es necesario definir x en "a" para que el límite de f(x) exista. Ilustra lo anterior con tres ejemplos gráficos, en donde, en cada uno de ellos, el valor del límite existe, pero la función toma distintos valores en x=a.

Luego ***revisa nueve (9)*** Ejemplos para ilustrar tanto la existencia como la no existencia del Límite de una función en un punto. Los dos últimos Ejemplos le sirven para revisar "Límites laterales".

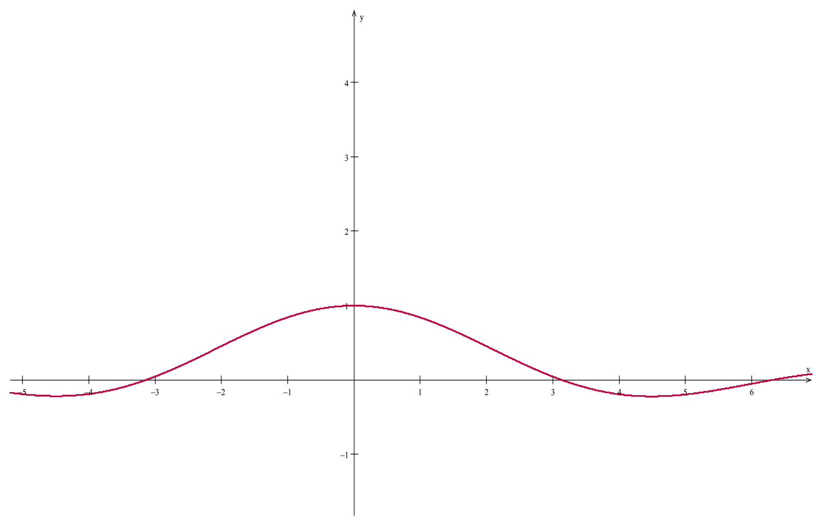
A continuación, se analizan los nueve ejemplos junto a los recursos que este autor dispone para su desarrollo.

Ejemplo 1. Se pide estimar el límite de la función: f(x)= (x-1)/(x^2-2), cuando x tiende a 1. A partir de valores numéricos, esto es, usando una aproximación tabular de valores menores que 1 y valores mayores que 1, pero en ambos casos tendiendo al valor x=1, infiere el valor del límite. Recurre además al gráfico de f, para corroborar la estimación del límite hecha.

Ejemplo 2. Ilustra el valor del límite de la función f (t)= (sqrt (t^2+9) – 3)/t^2, cuando t tiende a cero. La forma de responder a la estimación de este límite la hace a través de una aproximación tabular en ambos sentidos, pero usando una calculadora, lo que induce a creer que si t= 0.00001, entonces f(0.00001) es cero, lo mismo ocurre si t=-0.00001. Sin embargo, el valor de este límite es 1/6, como se podrá apreciar en la próxima sección, es lo que comenta este autor. Y de hecho ese es su valor. La aproximación gráfica también puede inducir a un error, como lo demuestran las gráficas que él expone en el texto. Además, la revisión de este segundo Ejemplo obliga a usar un procesador gráfico como Winplot, por ejemplo.

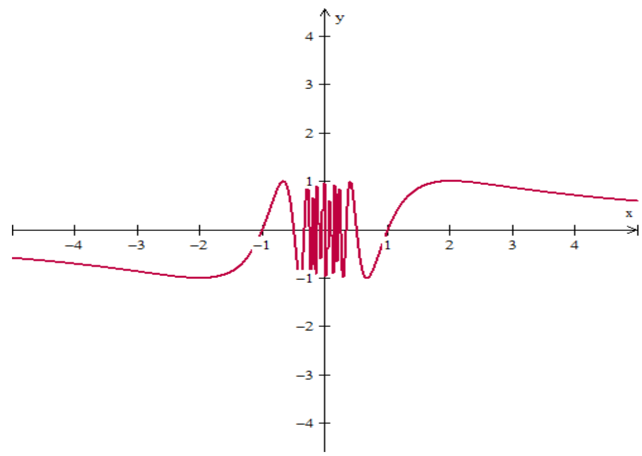
Ejemplo 3. Contempla el examen del conocido límite sin(x)/ x, cuando x tiende al cero. Para ello usa tanto la aproximación gráfica como tabular. La figura para ilustrar el Ejemplo 3 se muestra a continuación.

Figura n° 23. Gráfico de la función y= sen(x) / x.



Ejemplo 4. Un límite que no existe. Se vale de la función oscilante f(x)= sin(π/x) y se pregunta por el valor del límite de esta función cuando x tiende a cero. Esta función, tiene un comportamiento oscilante cerca de cero, así para valores de x como: 1, ½, 1/3, ¼, 0.1, 0.01, etc. su valor es 1. Pero, para otros valores próximos a cero la función toma el valor 1, como se puede apreciar en el gráfico adjunto.

Figura n° 24. Gráfico de la función y = sen (π/x).

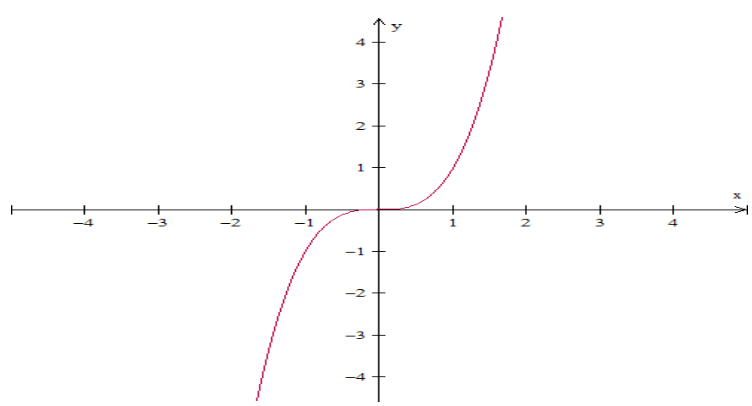


Luego, se puede concluir que el límite para esta función no existe cuando x tiende a cero. Más aún, los valores de f(x) oscilan entre 1 y -1.

Ejemplo 5. Aquí se solicita examinar el valor del límite de la función:

$f(x)= x^3 + \cos(5x)/10000$, cuando x tiende a cero. La gráfica de esta función es la que se muestra a continuación, usando Winplot.

Figura n°25. Gráfico de $y= x^3 + \cos(5x)/10000$.



Se aprecia en ella que para valores próximos a cero, las imágenes tienden a 0.0001.

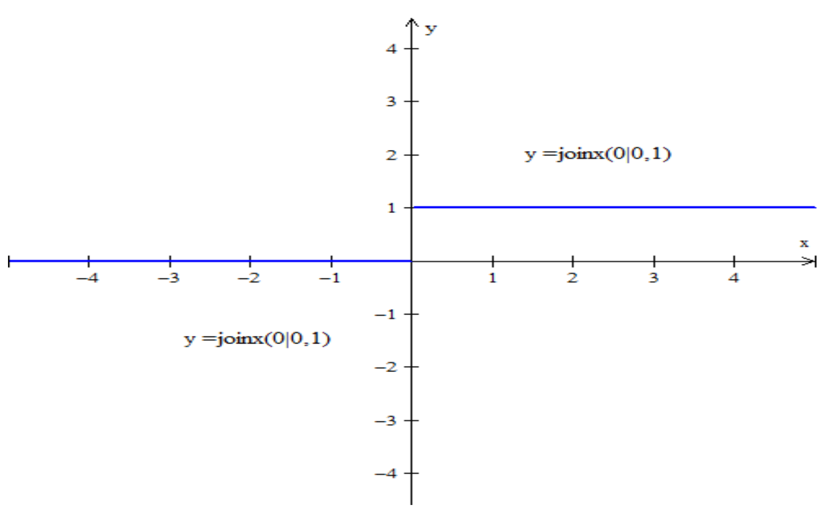
La aproximación tabular también sugiere el mismo valor como límite para esta función en el punto x=0.

Ejemplo 6. Constituye un ejemplo más de una función que no posee límite en x=0. Para ello define la función definida a trozos:

$$H(t) = 0, \text{ si } t < 0 \quad \text{y} \quad 1, \text{ si } t \text{ es } \geq 0.$$

Esta función se conoce con el nombre de Heaviside. Hace alusión a su gráfica, afirmando que el límite no existe cuando x tiende a cero. Ahora bien, la gráfica de dicha función corresponde a: **joinx(0|0,1*)*** en el contexto del procesador gráfico Winplot. La figura siguiente corresponde a dicha función.

Figura n° 26. Gráfico de la función H(t).



Límites laterales. Este es un aspecto muy importante cuando se trabaja con el concepto de límite, por lo que este autor conecta el ejemplo anterior con los límites laterales, los que básicamente se refieren a los valores de aproximación que se usan para la estimación de ellos. Así, para el caso del límite lateral por la izquierda en un punto "c", se consideran valores menores que c, pero lo más próximos a él; en tanto para la estimación del límite por la derecha los valores deben ser mayores que c, pero muy próximos a dicho valor.

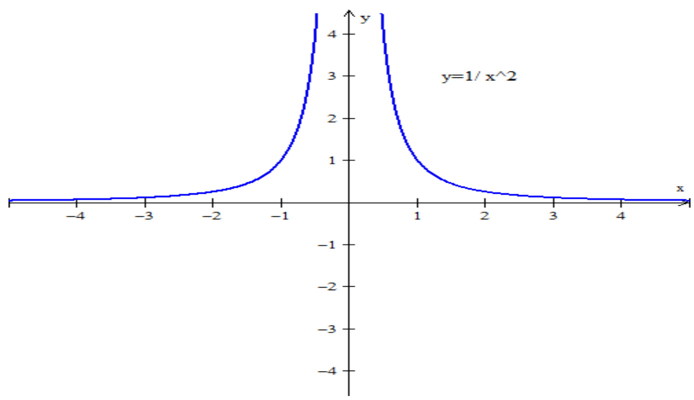
Con la explicación dada anteriormente, el autor declara que los límites laterales son distintos, 0 para el límite por la izquierda y 1 para el límite por la derecha.

Lo anterior le permite dar la condición necesaria y suficiente para que un límite exista, esto es, que sus límites laterales existan y sean iguales. La referencia hecha a los límites laterales le permite considerar los ***Ejemplos 7 y 8***, en donde el límite que se propone examinar no existe para algunos valores específicos. Dichos ejemplos son:

Ejemplo 7. A partir de una gráfica se estiman los límites laterales, la gráfica en cuestión está definida a trozos, ella cambia a ambos lados de uno de los puntos en estudio y en el otro valor donde se considera el límite la función posee límite, pero no coincide con el valor en dicho punto, esto es, no es continua allí, como suele decirse en el sentido matemático estricto.

Ejemplo 8. Se solicita estimar el límite de la función $y=1/x^2$, en el punto $x=0$. La aproximación gráfica y tabular derecha como de izquierda le permite deducir que el límite en cuestión no existe. La gráfica en este caso es la siguiente:

Figura n° 27. Gráfico de la función $y= 1/x^2$.



Ejemplo 9. Este ejemplo resulta ser una buena aproximación al concepto de límite dado en su versión rigurosa. El autor, al igual que muchos docentes de experiencia, llega a configurar una ilustración gráfica como la que aquí se expone. De manera literal, el autor solicita para la función $y=x^2 - x+2$ dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿Qué tan cerca de 2 tiene que estar x para asegurar que f(x) esté dentro de una distancia de 0.1 del número 4?

Lo anterior no es otra cosa que estimar delta a partir de un épsilon dado igual a 0.1. Además, este autor señala que la idea que hay detrás de este ***Ejemplo*** es una magnífica oportunidad para formular de manera precisa la definición del límite.

Asunto que él tampoco trata en esta ocasión, sino que deja como parte del Apéndice que va construyendo a medida que desarrolla el texto.

Después del examen de estos nueve Ejemplos entrega su primer listado de Ejercicios, que consiste de 32 Problemas.

En la siguiente sección, la 2.3, considerará los conocidos ***Teoremas sobre Límites***, dados sin demostración, pero los cuales ejemplifica en todos los casos. Termina con dos resultados, que constituyen para él dos teoremas, uno en el que la desigualdad entre dos funciones está presente y, el otro, el conocido ***Teorema sobre la compresión***, sándwich como también suelen llamarlo otros autores. Después de ello entrega su segundo listado de ejercicios, conformado por 50 Problemas.

La continuidad de una función en un punto, será la siguiente ocupación en el desarrollo del texto por este autor.

Del análisis hecho a la revisión de este texto de Cálculo se puede inferir que, aunque este autor no trata de manera formal el concepto de límite, *la importancia dada a dicho concepto es* ***ALTA.*** Por tanto, se constituye en un excelente texto como guía para orientar el aprendizaje del cálculo diferencial.

Texto 7 ***Leithold, L. (1998)***

Este es un texto clásico dentro de los textos de cálculo, y un número bastante grande de docentes que ejercen la docencia universitaria actualmente estudiaron con dicho texto. Es de un amplio espectro de aplicación como lo señala su propio autor, a saber:

> *"El Cálculo 7 (EC7) es una obra diseñada tanto para los cursos especializados en matemáticas como para los estudiantes cuyo interés primario radica en la ingeniería, las ciencias físicas y sociales, o los campos tecnológicos. La exposición está adecuada a la experiencia y madurez del principiante. Los estudiantes deben estar conscientes de que las demostraciones de los teoremas son necesarias. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, no para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas matemáticos"*
>
> *(Leithold, 1998. p. 4)*

Temas abordados en primer término

Uno de los aspectos que llama la atención de esta versión, la versión EC7, es la *consideración Pedagógica* que realiza el autor durante el Prólogo de su obra, afirmando que *"Cada capítulo comienza con una introducción titulada "Visión preliminar"*. Es más, añade que en la parte final de cada capítulo se da una lista de sugerencias para su revisión. Todo ello con el claro objetivo de preparar de la mejor manera posible al estudiante para su evaluación final.

Ahora bien, los temas que este autor aborda antes del concepto de Límite son mínimos, pero los suficientes y necesarios. Le basta con detenerse en ***"Funciones",*** sobre el cual considera sólo las tres primeras secciones del Cap. 1, denominado: "*Funciones, límites y continuidad. Luego,* las secciones que desarrolla son:

1.1 Funciones y sus gráficas.

1.2 Operaciones con funciones y tipos de funciones.

1.3 Funciones como modelos matemáticos.

(Leithold, 1998, p. 1).

Después de desarrollar estos temas está en condiciones de abordar el concepto de límite desde una perspectiva gráfica y tabular, usando para ello ***tres Ejemplos*** de carácter ***Ilustrativo,*** como él mismo los denomina. Dichos ejemplos resultan valiosos si de verdad se entienden a cabalidad.

No se debe olvidar que el conocimiento matemático se adquiere poco a poco y, además, los conocimientos previos de la disciplina cobran verdadera importancia para sostener los conocimientos posteriores. La matemática no es la única ciencia que posee esta acendrada característica, las demás ciencias naturales también la poseen.

Antes de considerar el concepto de límite, conviene hacer notar lo que el propio autor declara respecto de dicho concepto, al señalar que las operaciones básicas del Cálculo, como son la derivada y la integral, descansan sobre la "*noción de límite, probablemente el concepto más importante en Cálculo*". Esta declaración de principios alimenta esperanza que el concepto de "límite" será tratado en profundidad y de la mejor manera posible por este autor. Lo anterior indica entonces la gran importancia que Louis Leithold da a este trascendental tema.

<u>El concepto de Límite propiamente tal</u>

La introducción que este autor realiza sobre el tema descansa sobre consideraciones gráficas y tabulares que se generan a partir de los tres ejemplos ilustrativos señalados en el acápite anterior. Comentamos brevemente cada uno de estos Ejemplos Ilustrativos, donde se va estableciendo un cierto grado de conexión con la definición formal que el autor desea tratar a posteriori.

<u>Ejemplo Ilustrativo 1</u>. Consiste en considerar la función $y=2x^2 +x -1$ y en ella dos puntos, como son: P= (1,2) y un punto $Q=(x, 2x^2 +x -1)$, con dichos puntos estima la pendiente de la recta que pasa por ellos, la cual se reduce a considerar la nueva función: $f(x)= (2x^2+x-3)/(x-1)$. Es esta función donde estimará el límite de ella cuando x tiende a uno (1).

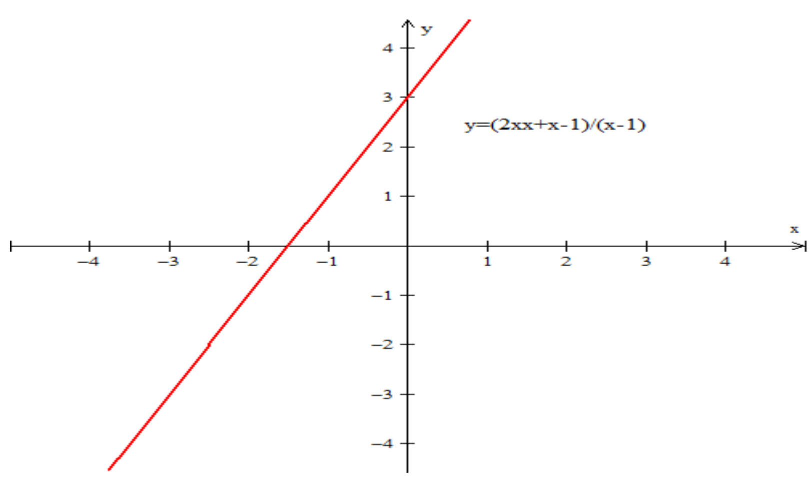
Para ello construye sendas tablas de valores, en una de ellas realiza aproximaciones por la izquierda en 1, y en la otra realiza estimaciones por la derecha en torno de 1. Este análisis tabular le permite inferir que el límite buscado es cinco. Lo rescatable de este proceso de estimación de valores f(x) para x muy próximos a x=1, se reduce a sostener que cuando x difiere de 1 por más o menos 0.001, esto es x=0.999 o x=1.001, las imágenes f(x) difieren de 5 en más o menos 0.002, es decir, f(x)= 4.998 o f(x)= 5.002.

Con el análisis anterior lo que se desea conseguir son aproximaciones cada vez más cerca al valor del límite, que para este caso es cinco, a condición de ajustar convenientemente los valores próximos a x=1. Así, la definición del límite comienza a dibujarse tenuemente.

Ya al final de este primer ejemplo, los valores de épsilon y deltas aparecen ajustando los entornos que son necesarios para la definición del límite. Hay además, presente en el cálculo de este límite, la estimación de la derivada de ***$y=2x^2+x-1$, en P= (1,2).***

Si se observa con detenimiento la función $f(x)= (2x^2+x-3)/(x-1)$, ella corresponde a una recta, dado que el numerador se puede descomponer como el producto de dos factores lineales, y por lo tanto la estimación del límite se hace sin problema. Correspondiendo entonces su gráfico a una simple recta, como la que se muestra a continuación. Notar que la función, no está definida en x=1.

Figura n°28. Gráfico de la función y= (2x^2+x-1)/(x-1).



Ejemplo Ilustrativo 2. Aquí la función que se presenta para su estudio, la denomina g(x) y está definida para todo $x \neq 1$ como la función lineal: 2x+3, y para x=1 con valor 7. Un procesador gráfico es muy posible que no distinga esta sutileza, con lo que simplemente graficará una recta para la función g en estudio. Notar que la función g se puede identificar con lo que quedó después del proceso de simplificación hecho en el ***Ejemplo Ilustrativo 1,*** anterior, cuyo límite se estimó en cinco. Así, se puede aplicar la misma argumentación hecha anteriormente, con lo que dado épsilon se puede escoger un delta conveniente de modo tal que si:

$$0 < | x-1| < \text{delta} \quad \text{entonces} \quad |g(x) – 5 | < \text{ épsilon}$$

Hace notar además, que si bien el límite existe en x=1, este valor no coincide con g (1), el cual tiene un valor igual a siete. Lo que realmente importa nuevamente es ajustar delta para un épsilon dado.

Ejemplo Ilustrativo 3. Aquí, pasa a definir una nueva función que denomina h(x), la cual define como: h(x)= 2x+3, que corresponde a una recta sin agujeros, dado que está definida para todos los números reales. Este ejemplo no difiere del ***Ejemplo Ilustrativo 2,*** de modo que se puede aplicar la misma argumentación, con lo que dado épsilon se puede determinar el correspondiente delta para que la expresión matemática:

$$0 < | x-1| < \delta \quad \text{implique que} \quad |h(x) – 5 | < \varepsilon$$

Luego, el lím h(x)= 5, cuando x tiende a 1.

Después de haber examinado estos tres ***Ejemplos Ilustrativos***, este autor pasa a revisar seis ejemplos, en los que la definición formal del concepto de ***"Límite"*** se hace cada vez más evidente y, en donde la estimación del valor del delta es lo que interesa, si dicho valor se puede estimar, por cierto, en cada uno de los ejemplos que a continuación se revisan.

Es interesante notar que en los tres ***Ejemplos Ilustrativos***, concurre "casi" la misma función. Se revisan ahora los seis ejemplos dados por este autor.

Ejemplo 1. Se refiere a la función lineal: $f(x)= 4x-5$. Para un valor de $\varepsilon =0.1$, se solicita estimar el correspondiente δ (ε), ayudándose de la representación gráfica que ello supone, para poder hacer ver que si:

$$0 < | x- 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3 | < \varepsilon$$

Aquí, la representación gráfica es muy importante a la hora de estimar el valor del delta correspondiente, las intersecciones de f(x) con las rectas que definen: $y= 3 -0.1$ por un lado e $y= 3+0.1$ por otro son decidoras. Después de ello se consideran las proyecciones de estos puntos sobre el eje X, para estimar luego las distancias de estos valores al punto en estudio, esto es, x=2. Así, el valor de delta es: 0.025. Con lo que el problema planteado está resuelto.

Ejemplo 2. Se solicita confirmar analíticamente la elección de $\boldsymbol{\delta}$ del ejemplo anterior. Usando las propiedades de las desigualdades. La solución que presenta Leithold (1998) discurre tras una cadena de desigualdades, todas equivalentes, partiendo de:

$|f(x) - 3| < 0.1$, $|(4x\text{-}5)\text{-}\ 3\ 1 < 0.1$

$4\ |\ x\ \text{-}2\ | < 0.1$ entonces $|\ x\ \text{-}2\ | < (0.1\ /\ 4) = 0.025$

Así, la elección de delta es la correcta para el caso particular: $\varepsilon = 0.1$

Ejemplo 3. Para la función cuadrática $y=x^2$ se solicita usar una figura en la que un valor de $\varepsilon = 0.3$ está en juego y, con ello determinar el correspondiente valor de delta (positivo) tal que si

$0 < |\ x\text{-}\ 2| < \delta$ entonces $|f(x) - 4\ | < 0.3$

En este ***Ejemplo 3***, lo novedoso resulta ser la adecuada elección de delta. Se debe tomar el mínimo entre dos deltas que se derivan naturalmente de las consideraciones gráficas de su solución.

Ejemplo 4. Al igual que en el ***Ejemplo 2***, ahora se solicita confirmar analíticamente la elección del correspondiente delta, usando las desigualdades necesarias para ello.

La solución que presenta el autor transita primero por realizar una acotación previa dada la descomposición de $x^2 - 4$ en $(x\text{-}2)(x+2)$, por tal motivo se considera un valor de delta previo menor o igual a 0.1.

Después de la cadena de desigualdades que se originan se llega a la conclusión que el valor de delta debe ser el mínimo entre: 0.1 y 3/41. Así, el entorno que la desigualdad define como:

$$0< | x-2| < 3/41 \text{ hace que } |f(x) – 4 | < 0.3.$$

Los dos últimos ***Ejemplos*** que considera Leithold (1998), el 5 y el 6, están relacionados con situaciones revisadas en la sección anterior, la 1.3.

Específicamente el Ejemplo 1, que versa sobre el volumen de un gas a presión constante y que es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175 grados Celsius, ocupando un volumen de 100 m^3. Con estos datos la función que resulta es: f(x)= (4/7) x.

Ejemplo 5. ¿Cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79,5 y 85,5 m^3?

La solución a este problema discurre por medio de la definición del Límite, así la temperatura debe estar entre: 139,125 y 140,875 grados Celsius.

Ejemplo 6. Constituye el último de los ejemplos planteados por este autor antes e dar la definición formal del límite que hace en la siguiente sección, la 1.5 para ser exactos. El ejemplo se refiere a estimar la medida aproximada del radio de una mesa que tiene un área que difiere de 225 π $pulg.^{2.}$

Después de haber examinado estos seis ejemplos está en condiciones de dar el primer listado de Ejercicios, conformado por 44 Problemas. En la sección que sigue, presenta con mucho detalle, tanto de manera gráfica como analítica, la definición formal del concepto de Límite. Luego de esto, ilustra dicha definición haciendo ver que el

lím (4x-5) =3, cuando x tiende al valor 2.

A continuación, los Teoremas sobre límite ocupan su atención, entre ellos el límite de una función lineal, para el cual realiza una demostración formal. Los demás teoremas se enuncian sin ser demostrados, sólo se ejemplifica cada uno de ellos.

El estudio de los límites laterales da vida a la sección 1.6 del primer capítulo de su libro. Con el consiguiente uso de funciones definidas a trozos para mostrar la existencia o no de un límite en un punto en particular. A cada sección desarrollada le acompaña el correspondiente listado de Ejercicios, los que por regla general son numerosos en todos los autores hasta aquí tratados.

Lo expuesto hasta ahora por este autor, evidenciado en los múltiples ejemplos que este autor expone en el texto, de manera gradual, hasta tratar el concepto de forma rigurosa, indica claramente que la importancia dada al concepto de Límite es ***Alta.***

<u>Texto 8</u> ***Flores, F., Vidal, C, y Villarroel, O. (2012*)**

Este es un texto de apoyo, elaborado con el objeto que sirva como material de referencia docente para desarrollar los dos Módulos del curso de cálculo diferencial y como una guía docente para los estudiantes. Está pensado para alumnos de carreras no matemáticas y de manera más específicas para las carreras de ingeniería de ejecución.

Sus autores manifiestan de inicio que:

> *"La palabra límite en primera instancia se nos asemeja al concepto de aproximación. El límite de una función f cuando x se aproxima o tiende al punto a, significa estudiar el comportamiento de la función f cuando la variable x está muy cercana o muy próxima punto a"*
>
> *(Flores et al., 2012, p. 66)*

<u>Temas abordados en primer término</u>

Consideran los temas tradicionales, esto es, los temas que la mayoría de los textos tratan, a saber: los ***números reales y las funciones.***

Ellos son abordados con bastante prolijidad y detalle, tal vez de manera excesiva en algunos acápites de ellos, como por ejemplo, introducir relaciones y después revisar el concepto de función como una relación especial y vista desde en términos de la notación conjuntista.

El concepto de límite propiamente tal

Introducen el concepto de manera intuitiva, considerando como primer ejemplo una función lineal, f(x)= x-2. Realizan para ello una aproximación tabular para responder al comportamiento de esta función en el punto x=3, con valores menores que tres y valores mayores que tres, concluyendo que el límite de esta función en dicho punto está próximo al valor 1.

A continuación, y como segundo ejemplo, consideran la función racional definida en todo los números reales, excepto en x=3, f(x)= (x^2-5x+6)/ (x-3). Aquí lo lógico es abordar el límite para esta función en el punto x=3, es lo hacen, después de poner en evidencia que f (3) no está definida. Así, una simplificación de la expresión original de la función permite su aproximación y por tanto la estimación de su límite.

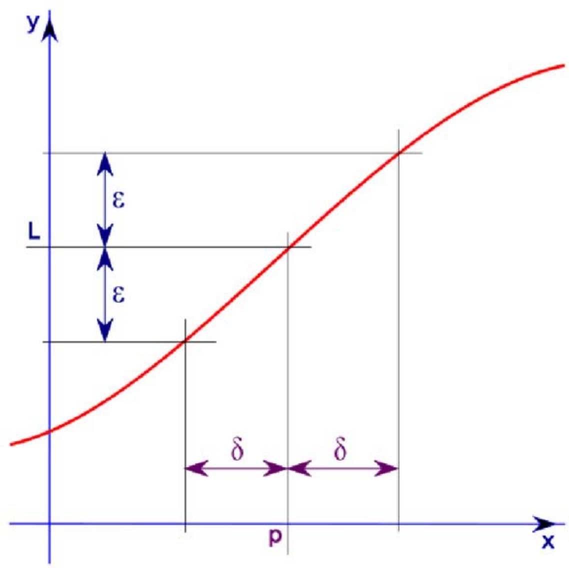
La función siguiente: f(x)= abs(x) / x, les permite una vez que la representan gráficamente estudiar su límite en el punto x=0, donde la aproximación tabular indica valores distintos para x próximos a cero por derecha e izquierda, con ello afirman que el bajo estas circunstancias el límite no existe.

El último ejemplo que consideran antes de dar la definición formal en términos de épsilon y delta es la función: y =f(x) = 1/ x^2.

La aproximación gráfica y tabular les permite decir que cuando x tiende a cero el límite para esta función no existe.

Revidado estos cuatro ejemplos, de manera intuitiva, dan la definición formal de límite, de todos conocida. Con el siguiente gráfico ilustran esta definición:

Figura n° 29. Ilustración geométrica del límite de una función en p.



Después consideran nueve ejemplos, en donde para todas las funciones existe el límite, razón por la cual, dado el valor de épsilon, de forma general, ha de hallarse el correspondiente valor de delta.

A lo anterior sigue el álgebra de límites. Al tenor de lo expuesto, se puede inferir que el tratamiento dado al concepto de límite es riguroso y formal y, por lo tanto su tratamiento dado es de importancia por estos autores con lo que la importancia dada al concepto es ***Alta.***

***<u>Texto 9</u>* Cruse, A. y Lehman, M. (1982)**

Este texto es muy especial, por el enfoque dado por sus autores, el cual está compuesto por una serie de lecciones, 20 para ser más precisos. La primera lección la ocupan para presentar dos problemas de optimización. Como se sabe, la solución de dichos problemas constituye una de las aplicaciones fundamentales de la derivada.

En la segunda lección se comenta el problema de las tangentes desde un punto de vista geométrico, la lección tres se ocupan de comentar el *aporte dado por Descartes* a este problema, *"el de la raíces iguales"*, solución que no sirve si la curva en estudio corresponde a una función cúbica.

La forma de sortear esta dificultad está en la lección 4, donde el "*método de límites de Fermat"* provee de un medio para determinar la tangente a cualquier curva y en el punto que se desee. Para ello utiliza el punto en estudio y un punto auxiliar de la propia curva, con ellos estima la pendiente, para luego alcanzar la pendiente de la recta tangente por el paso al límite, cuando el punto auxiliar tiende al punto en estudio a través de la curva. Así, en lección 5, pueden resolver los dos problemas de optimización planteados en la lección inicial, determinando en que abscisa (x) el valor de la pendiente es cero, y de esta forma alcanzar el máximo o el mínimo, según sea el caso.

Finalmente, en la lección 6, consideran algunas reglas para fórmulas de predecir pendientes, como $y=x^n$ y la regla para las suma de funciones.

Estos autores expresan de manera elocuente la orientación dada al texto, al señalar que:

> *"Nuestro enfoque es concreto y operacional más que abstracto y deductivo. Es informal y aplicado, así como opuesto a lo riguroso y teórico"*
>
> *(Cruse y Lehman, 1982, p. 6)*

<u>Temas abordados en primer término</u>

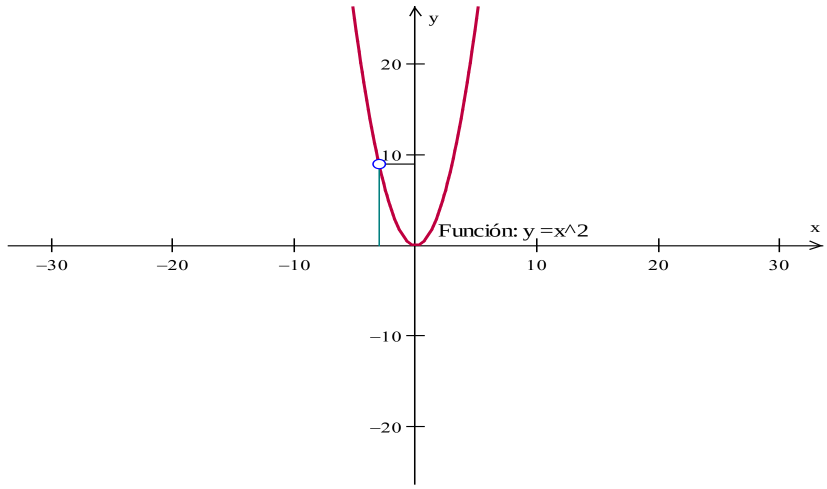
La formulación de problemas de optimización le sirve de contexto para introducir el concepto de límite a través de las sucesivas Lecciones que se han comentado en el párrafo anterior. La resolución del problema de las tangentes a una curva.

<u>El concepto de límite propiamente tal</u>

Aparece ante la necesidad de estimar la pendiente de la recta tangente a la curva y=x^2, en el punto T = (2,4), para ello usa otro punto de la curva, que denomina P, de coordenadas (w, v). A continuación se estima la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos mencionados. El límite de estas pendientes cuando P tiende a T, da con la pendiente buscada. El siguiente ejemplo que usa es la estimación de la pendiente al círculo de ecuación: x^2 +y^2 =25, en el punto T = (-3, 4). La técnica empleada es la misma, con ello el concepto de límite se va insinuando y usando a la vez, poco a poco.

Vuelve a considerar de nuevo la función f(x)=x^2, pero ahora cambiando el punto donde se debe determinar la pendiente de la recta tangente, ahora en T= (-3, 9). Gráficamente la situación descrita usando Winplot es:

Figura n° 30. Gráfico de la función cuadrática $y=x^2$.



La lección cuatro concluye con 10 de ejercicios, en los que la estimación de los límites se hace patente.

El texto que se ha comentado, no trata el concepto de límite de una forma particular, sino más bien su incorporación se hace presente ante la necesidad de estimar pendientes de rectas tangentes, en un primer momento, de manera que la valoración que se puede hacer de su presentación es ***Baja.*** A pesar de ello, lo anterior pone de manifiesto que el concepto en sí es más bien una herramienta para resolver problemas, de ahí entonces su importancia en el contexto de las soluciones problemáticas que él permite abordar y definir, como lo es sin duda el concepto de la derivada, asunto que se tratará en la siguiente sección del análisis de este texto.

Texto 10 ***Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Lock, P., Flath. D. et al. (2008)***

Este es un texto producido por el Consorcio de Cálculo, que inicialmente fue fundado por la *National Science Foundation Grant*. En el prefacio de esta obra sus autores expresan su intencionalidad como también el enfoque que desean darle, como es la comprensión de los conceptos. Luego, se pueden citar frases como las siguientes:

> *"Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión clara de las nociones del cálculo, con el fin de que tengan una base sólida para los cursos siguientes… Debido a que la mayoría de los estudiantes aprenden más cuando desarrollan más actividad, este libro contiene una gran cantidad de ejercicios, los cuales son de primordial importancia"*
>
> *(Hughes –Hallett et al., 2008, p. 5)*

Temas abordados en primer término

Estos autores consideran como temas previos al concepto de límite, en su comportamiento final, esto es, cuando x es grande positivo o negativo, todo lo relacionado con las funciones en diez apartados. Luego, ya al finalizar el capítulo inicial, abordan esta temática desde un enfoque teórico, que en realidad no es tal, pues usan el registro gráfico para establecer los resultados, sin usar las definiciones formales más propias del análisis matemático.

Lo acotado permite presentar los capítulos que estos autores consideran como previos, a saber:

Cap. 1. Funciones y cambio

Cap. 2. Razón de cambio: la derivada

<u>El concepto de límite propiamente tal</u>

El tema de los límites, que en muchos textos es tratado de manera explícita, aquí se trata al considerar la razón de cambio, de forma tabular cuando se revisa la velocidad instantánea, la cual es el resultado de estimar velocidades promedios cada vez más pequeñas en torno a un instante de tiempo t particular. Ese proceso se conoce como tomar el límite, señalan sus autores (Hughes-Hallett, et al, 2008, p. 95).

Lo que estos autores denominan *enfoque teórico*, les sirve de contexto para tratar con algo más de detenimiento el concepto de límite, al finalizar su segundo capítulo, el cual trata todo lo referente a la razón de cambio, esto es, a la derivada.

Se valen de solo cuatro ejemplos para ilustra el concepto de límite, alternado la aproximación tabular y grafica para los tres primeros ejemplos y, para el último, sólo lo trata de manera algebraica cuando estudian el límite de la expresión:

[(3+ h) ^2 – 9] /h cuando h tiende a cero.

Después de ello examinan la continuidad de una función en términos de límite, para posteriormente revisar el cálculo de derivadas usando la definición formal, esto es, en términos del límite del cociente de Newton.

Dan termino a esta sección con un listado que denominan: “*Problemas de límites y la definición de la derivada*”, el que está compuesto de 29 ejercicios.

El análisis realizado a este texto, indica una valoración ***Baja*** para el tratamiento de concepto de límite, ya que sólo se usa de manera instrumental y la definición que de él se da es de forma intuitiva y carente de la rigurosidad exhibida por otros autores, en general.

Antes de dar término al estudio realizado sobre el *concepto de límite* en estos textos, se presentan a modo de Síntesis, tres ***Cuadros comparativos*** en las *Tablas n° x , la Tabla n° y y la Tabla n° z* , que resumen los aspectos más relevantes tratados sobre el concepto de límite para los diez textos examinados.

La primera de ellas, la *Tabla n° x*, resume los aspectos esenciales de los primeros cuatro textos, ella se expone en la página siguiente, para una mejor visualización y lectura.

Tabla n° 11. Cuadro comparativo: límite, cuatro textos.

	Lang	***Apostol***	***Zill***	***Steiner***
Conocimientos Previos.	Números y funciones. Gráficas y curvas.	Integración y continuidad.	Funciones y Gráficas. Función exponencial y logarítmica.	Número, Variables y Algebra. Funciones Algebraicas. Funciones trascendentes. Derivación.
Formas de Abordarlo.	Pendiente de una curva en un punto.	Concepto de entorno. Definición del Límite en base a entornos.	De manera informal. Ap. Gráfica y Ap. Tabular (D e I) Límites laterales, continuidad. Definición formal.	Uso de una función racional. Ap. Tabular (D e I).
Trayectoria.	Límite abordado de manera intuitiva.	Aborda el límite desde una concepción topológica.	Es un texto recomendable por su buena presentación.	Texto enfocado a los estudiantes donde la química es fundamental.
Importancia del tema.	BAJA	REGULAR	ALTA	BAJA

En análisis resumido del análisis de los tres textos siguientes se presenta en la tabla asignada como la n° 12, a saber:

Tabla n° 12. Cuadro **c**omparativo: límite, tres textos.

	Larson	***Stewart***	***Leithold***
Conocimientos Previos.	Gráficas y Modelos. Funciones y sus gráficas.	Funciones y modelos. Distintas formas de representar funciones.	Funciones y sus gráficas. Funciones como modelos matemáticos.
Formas de Abordarlo.	Problema de la recta tangente y uso de función racional.	Problema de la tangente y de la velocidad. Ap. Gráfica y Ap. Tabular (D e I)	Pendiente a una curva en un punto. Ap. Gráfica y Ap. Tabular (D e I). Estudio de las desigualdades del límite.
Trayectoria.	Usa 3 ejemplos para abordar la definición formal $\varepsilon - \delta$	No usa aproximación analítica $\varepsilon - \delta$	Excelente texto para revisar la definición formal del Límite $\varepsilon - \delta$
Importancia del tema.	ALTA	ALTA	ALTA

Por último se presenta la Tabla n° 13, que resume el análisis de los tres últimos textos sobre el estudio del concepto de límite.

Tabla n° 13.   Cuadro **c**omparativo: límite, tres últimos textos.

	Flores et al.	***Cruse /Lehman***	***Hughes-Hallett et al.***
Conocimientos Previos.	Gráficas y Modelos. Funciones y sus gráficas.	Funciones y modelos. Distintas formas de representar funciones.	Funciones y sus gráficas. Funciones como modelos matemáticos.
Formas de Abordarlo.	Problema de la recta tangente y uso de función racional.	A través de la estimación de pendientes para una curva en un punto de ella.	Pendiente a una curva en un punto. Ap. Gráfica y Ap. Tabular (D e I). Estudio de las desigualdades del límite.
Trayectoria.	Usa 3 ejemplos para abordar la definición formal $\varepsilon - \delta$	No usa aproximación analítica $\varepsilon - \delta$	Excelente texto para revisar la definición formal del Límite $\varepsilon - \delta$
Importancia del tema.	ALTA	BAJA	ALTA

El trabajo de análisis realizado de estos diez textos de cálculo en torno al concepto de límite, permite extraer ***"Algunas Conclusiones",*** las que se pueden considerar como un referente a la hora de avanzar en la configuración de la propuesta a desarrollar en su fase experimental a posteriori para el presente trabajo.

Así, las ***Conclusiones*** que se extraen se este estudio se pueden expresar en los siguientes términos:

1. ***No hay textos mejores que otros***. *Luego, todo depende del Programa que se desea desarrollar y, en virtud de ello, se debe selecionar el texto más adecuado para que sirva de inspiración y guia no sólo para el maestro, sino también para los propios estudiantes.*

2. *De* ***"La presentación"*** *analizada en todos los textos, sobre el concepto de limite, se desprende que* ***ir de aproximaciones gráficas y tabulares*** *(por derecha o izquierda)* ***hacia una aproximación analítica*** *y, por tanto formal,* ***es lo más aconsejable*** *y de sentido común. Independiente de si el objetivo final es abordar el límite desde su definición formal, esto es, en términos de épsilon y delta.*

3. ***Los listados de ejercicios que los textos*** *disponen al final de cada tema, por lo general,* ***son muy extensos y repetitivos***. ***Ello obliga a una selección*** *y, por ende, a la creación de Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), en casi todos los temas que contempla el Cálculo Diferencial. Así, se justifica plenamente la creación de dichas actividades de aprendizaje.*

4. ***Haber revisado en varios textos*** *la forma en que presentan y tratan el concepto de límite,* ***ha significado,*** *no sólo* ***conocimiento disciplinar***, *sino también* ***conocimiento didáctico***. *En ello radica la mayor virtud de todo el* estudio *realizado hasta ahora.*

Estas ***resumidas,*** pero importantes conclusiones, representan, con mucho, aspectos a tener en cuenta, como ya se ha expresado, de cara a generar las ***Actividades Didácticas de Aprendizaje*** sobre el cálculo diferencial, en lo que al "***concepto de límite***" se refiere, en una primera instancia.

A continuación el análisis se centrará en el ***"concepto de la derivada",*** tema que junto al del ***"límite",*** representa la columna vertebral del cálculo diferencial.

Análisis del tratamiento dado a la derivada en los textos

El análisis que a continuación se presenta corresponde a los mismos textos de cálculo considerados en el estudio sobre el concepto de "Límite", tratado en el acápite anterior. De esta manera se establece una continuidad para este trabajo y, por tanto, sirve de valioso antecedente para el ulterior propósito de la propuesta didáctica final, la que se traduce en el diseño e implementación de las Actividades Didácticas de Aprendizaje, con el claro propósito de contribuir en el aprendizaje del cálculo diferencial de los estudiantes. De esta manera, se consideran los dos *temas* sobre los cuales se articula el cálculo diferencial, el concepto de ***"límite"*** y de ***"derivada",*** los cuales constituyen la columna vertebral sobre la cual descansa el presente trabajo para su posterior aplicación en su fase empírica.

Los aspectos que se considerarán para efectuar el análisis de los textos serán básicamente los mismos que los atendidos para el concepto de "límite", luego el estudio y secuencia discurrirá en los siguientes términos:

1. *Una **cita textual,** de modo que se conozcan la o las concepciones sobre el tema.*

2. *La referencia a los **temas previos** que se constituyen, sin duda, en los prerrequisitos necesarios para acceder a una mejor comprensión del tema.*

3. ***Cómo abordan** el tema en sí, esto es, qué **recursos y ejemplos** usan para facilitar el acercamiento y, por ende, el aprendizaje del concepto.*

En resumen, la ***trayectoria didáctica implementada****, la que se expresa, con algo más de detalle, en ejemplos que pretenden clarificar la existencia o no de una derivada de manera local y su estimación de manera general como una función, por ejemplo.*

4. *Una mirada de conjunto que signifique* **la valoración dada al texto** *en el tratamiento de la derivada, en términos de una evaluación alta, regular o baja.*

Es oportuno señalar que, el conocimiento matemático, al menos en lo que respecta al cálculo diferencial e integral, no ha sufrido grandes cambios en materia de contenidos, así, un texto del año 1980 podría tener plena vigencia en cuanto a sus contenidos. Esta validez de la que hace gala el conocimiento matemático, no es igual en otras disciplinas científicas, como podrían ser las ciencias médicas, por ejemplo, donde los saberes tienen una probabilidad mayor de ser modificados o ampliados con nuevo conocimiento tanto teórico como práctico, lo que sin dada significa un notorio avance de la Medicina en general. Esto que se acota ya se había expresado con anterioridad, pero se vuelve a insistir en ello, por lo viejo o atiquizado que pudiese resultar un texto cualquiera de matemáticas.

Damos comienzo entonces, en las próximas páginas, al análisis de los mismos textos, fijando ahora la atención en el concepto de la ***derivada,*** con todo lo que ella comporta en su presentación al lector y, por ende, a sus usuarios más inmediatos, esto es, docentes y discentes en el estudio de esta materia.

<u>Texto 1</u> ***Lang (1990)***

Es muy claro al señalar de inicio cual debería ser el objetivo de un primer curso de cálculo, en sus propias palabras señala:

> *"El objetivo de un primer curso de cálculo es enseñar a los estudiantes los conceptos fundamentales de derivada e integral, y las técnicas básicas y aplicaciones relacionadas con ellas"*
>
> *(Lang, 1990, p. 3).*

<u>Temas abordados previamente</u>

Considera tan solo dos capítulos previos antes de tratar con la derivación, ellos le sirven de sustento teórico- práctico para presentar el tema de la derivación, dichos capítulos son:

Capítulo 1. Números y funciones.

Capítulo 2. Gráficas y curvas.

El Capítulo 1, versa sobre los diversos tipos de números, desigualdades, funciones y potencias. Por su parte, el Capítulo 2, aborda la recta, distancia entre puntos y las curvas: círculo, parábola, elipse e hipérbola.

La derivada propiamente tal

Este autor se propone como uno de los objetivos centrales el hecho que el estudiante aprenda a diferenciar funciones, esto es, que sea capaz de obtener la derivada de cualquier clase de función, compuesta o simple.

Pospone las técnicas de Integración, dado que el conocimiento de las derivadas de las funciones le permitirá establecer la conexión con el proceso de integración, operación inversa de la diferenciación, como se sabe.

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Lang (1990)* es:

- ***La pendiente de una curva.*** Utiliza la función $y= x^2$, para determinar la pendiente de esta curva en el punto P= (1,1). Para ello usa los puntos P y Q, con Q = $(1+h, (1+h)^2)$, comienza por estimar la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos. El resultado de esta operación no es otra que el cociente de Newton, a saber: $[f(x+ h) - f(x)] / h$. Así, en el caso descrito se obtiene: $2 + h$, se hace tender h a cero, con lo que el punto Q tiende a P. Luego, la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto P = (1,1) es 2.
- Posteriormente considera otro punto P, a saber: P= (-2,4) y *repite el mismo procedimiento,* para este nuevo caso considerado, la pendiente de la recta tangente es - 4.
- Continúa con el uso de la función $y = x^2$, pero ahora *considera un punto de abscisa x, en general, por tanto, P =(x, x^2), el otro punto Q resulta ser de abscisa x + h, con lo que Q= $(x + h, (x + h)^2)$.* Estima la pendiente entre estos dos puntos, la

que resulta ser: 2x+h. Si h tiende a cero obtiene la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto P de modo general.

- Declara que, la pendiente entre los dos puntos mencionados arriba no es otra cosa que el “***Cociente de Newton”.***

- Define el concepto de derivada como el límite de este ***Cociente de Newton.*** Así, una función será diferenciable si tiene derivada en todos los puntos donde está definida.

- Aborda otros ejemplos, como la función lineal y =2x+1, la función valor absoluto le sirve para probar que ella no es derivable en cero, para ello estima las derivadas laterales en dicho punto.

- Tal como se acota en la revisión del concepto de “Límite”, se ve ahora en la necesidad de ocuparse de este concepto, aunque de manera intuitiva, dejando para el Apéndice del texto su estudio en términos formales, esto es, usando ε y δ. Luego aborda la continuidad, dado que ella se define en base al concepto de ***“Límite”.***

- Por último, presenta las ***Reglas básicas de derivación,*** lo que le permite considerar su primer listado de ejercicios donde el cálculo de derivadas es su principal objetivo, junto a la estimación de rectas tangentes en puntos específicos de una curva dada. Los últimos problemas que presenta son problemas no rutinarios, donde el uso de la estimación de la derivada se hace necesario para avanzar en la solución de ellos.

La valoración dada al tratamiento de la derivada es ***Alta***, su desarrollo es coherente y limpio en las demostraciones que realiza con cada uno de los resultados teóricos que se construyen paso a paso como parte sustancial del tema.

Texto 2 ***Apostol (1990)***

La importancia del cálculo queda muy bien descrita, desde su inicio, al señalar este autor en palabras como:

> *"El Cálculo no sólo es un instrumento técnico, sino que contiene una colección de ideas fascinadoras y atrayentes que han ocupado el pensamiento humano durante centurias"*
>
> *(Apostol, 1990, p. 1).*

Temas abordados previamente

Este autor considera en primer término una sección introductoria en la que aborda diversos tópicos como un relato histórico, posteriormente le siguen algunos conceptos básicos sobre la Teoría de Conjuntos como uniones, intersecciones y complementos. A continuación se revisa el conjunto de axiomas para el sistema de números reales, como son los axiomas de cuerpo y de orden. También se considera la representación de los números reales por medio de decimales. Ya en la última parte de esta Introducción examina la Inducción Matemática, los símbolos sumatorios y temas relacionados. Finaliza con un listado de ejercicios varios, 23 para ser exactos. A partir de aquí los capítulos del texto se suceden de modo consecutivo y con un enfoque que para nada es el tradicional en la mayoría de los textos de cálculo hoy en día. Dichos capítulos son:

Capítulo 1. Los Conceptos del Cálculo Integral.

Capítulo 2. Algunas aplicaciones de la Integración.

Capítulo 3. Funciones continuas.

La razón fundamental para realizar esta presentación, considerando en primer lugar el Cálculo Integral antes que el Cálculo Diferencial, estriba en su desarrollo histórico. Así, según este autor, este enfoque resulta ser pedagógicamente adecuado y correcto. Lo anterior representa por tanto una novedad que, en general, los posteriores autores de textos no seguirán para presentar el cálculo de una variable.

La derivada propiamente tal

En atención a lo dicho, habrá que esperar hasta la página 191 del texto cuando recién considere el *cálculo diferencial*. Una breve pero pertinente consideración histórica inicia este capítulo, haciendo alusión al hecho que fue un problema geométrico el que originó esta materia, el problema de determinar la tangente a una curva.

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Apostol* (1990) es:

1. ***Inicia la presentación con un problema físico,*** que dice relación con el lanzamiento de un proyectil lanzado verticalmente, el cual obedece la expresión analítica: $f(t) = 45t - 5t^2$. Así, el problema es determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento.

Para ello previamente introduce el concepto de velocidad media durante un intervalo de tiempo que media entre t y t + h, el cual se define como el cociente entre: [f (t +h) – f (t)] / h.

Hecho este análisis preliminar, se detiene a considerar el caso en el que t= 2, obteniendo como cociente incremental el valor: 25-5h, así "la velocidad media tiende al límite 25 cuando h tiende a cero" (Apostol, 1986, p. 193).

El resultado de este límite corresponde a la velocidad instantánea en el valor t=2. El análisis de esta situación es válido para cualquier instante t, luego se puede escribir, una vez hechos los cálculos, que: v (t)= 45-10t. En el caso que t=2, se tiene: v***(t=2)=45-10*2=25***, que era lo que ya se había obtenido previamente. En resumen:

v(t) = lím [f(t+ h) -f(t)]/h , cuando h tiende a cero.

2. El ejemplo anterior le sirve de base para definir de manera general la derivada como el límite de la variación media entre "x" y "x + h". Así, la derivada f´(x) está definida como: ***lím [f(x + h)- f(x)]/ h, con h tendiendo a cero.***

   Con esta definición pone de manifiesto que la velocidad instantánea v(t) es un ejemplo del concepto de derivada.

3. A continuación examina siete ejemplos de estimación de derivadas, comenzando con la función constante, luego la función lineal y posteriormente la función potencial: $f(x)= x^{n}$. El último ejemplo le sirve para revisar el hecho que si una función es derivable entonces ella es continua.

El recíproco, en general, no se cumple, esto es, continua no implica derivable, como es el caso de la función valor absoluto, continua en cero pero no derivable allí.

4. Después de lo anterior, se continúa con el álgebra de derivadas, en sus reglas básicas, termina con un listado de ejercicios, 39 Problemas para ser exactos.
5. Se aboca ahora a la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la curva en un punto dado P. Comenta que el signo de la derivada guarda relación con el comportamiento de la función, en el sentido que un signo positivo de ella indica un comportamiento ascendente, y un signo negativo informa de un comportamiento descendente de la función. Por su parte, en los puntos donde ocurren máximos y mínimos para la función, la derivada tendrá un valor igual a cero.
6. Examina otras notaciones para la derivada y concluye con un segundo listado de ejercicios de 16 Problemas. Después de esto considera la derivación de funciones compuestas, que corresponde a la conocida Regla de la Cadena.

La valoración dada al tratamiento de la derivada es ***Alta,*** su desarrollo es coherente y abunda en ejemplos donde los problemas de orden físico son un ejemplo claro de la relación que existe entre ellos y el cálculo. Termina su exposición considerado la regla de la cadena, punto culminante de la técnica de derivación para su posterior uso en el cálculo integral y por ende para las ecuaciones diferenciales.

Texto 3 ***Zill y Wright (2011)***

Los comentarios que se pueden esgrimir, ahora en el contexto de la derivada, son casi los mismos realizados sobre el concepto de límite para este texto, salvo que ahora sus autores son específicos y claros al momento de introducir la derivada y adelantar su tratamiento geométrico como punto de partida, como lo señalan, a saber:

> *"El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema: encontrar la recta tangente a la gráfica de una función f"*
>
> *(Zill y Wright, 2011, p. 110).*

Temas abordados previamente

Este texto considera dos capítulos previos antes de definir el concepto de la derivada, ellos son:

Capítulo 1. Funciones

Capítulo 2. Límite de una función

El solo enunciado de estos capítulos señala que sigue una trayectoria didáctica muy distinta a la presentada por Apostol. Así, en el ***capítulo 1***, dedica bastante tiempo a analizar el tema de las funciones como: polinomiales, racionales, las trascendentes (seno, coseno,…), la función exponencial y logarítmica.

El ***capítulo 2*** lo dedica con cierto detalle al tema de límite, comenzando con un enfoque informal, para continuar con los teoremas que le son propios. Antes de terminar dicho capítulo aborda un enfoque formal del límite.

Por último, aborda el problema de la recta tangente, la cual conectará con el ***Capítulo 3***, dedicado in extenso a la derivada.

<u>La derivada propiamente tal</u>

Comienza este capítulo haciendo alusión a la última sección del capítulo anterior, sección 2.7, referida al problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto y al problema de la estimación de la velocidad media e instantánea. Estos dos problemas le servirán de base para dar comienzo al estudio del concepto de derivada, como el límite del cociente diferencial.

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Zill y Wright* es:

1. Después de haber evocado la sección 2.7 del texto, mencionada en el párrafo anterior, define la función derivada como una *"nueva función"*, derivada de la función original y=f(x), denominada ***f´ (x)***, la que se obtiene para un valor de x, en general, como el límite del cociente incremental, siempre que este límite exista. Ello permitirá, entonces, estimar la pendiente en cualquier punto x en particular.

2. Precisa de manera analítica la derivada de la función y=f(x) , como:

$$f'(x) = \text{Lím}\ [f(x + h)-f(x)] / h \quad , \quad \text{cuando}\ h \longrightarrow 0$$

Siempre que este límite exista.

3. Si en la sección 2.7 se estimó la pendiente de la recta tangente a $y=x^2 + 2$ en x=1, ahora se desea estimar la derivada de esta función en cualquier valor de x. Para ello hace alusión a cuatro pasos, donde en el último de ellos estima el valor del límite del cociente diferencial. Los cuatro pasos para estos autores son:

Paso 1. *Evaluar f(x + h).*

Paso 2. *Estimar f(x + h) - f(x).*

Paso 3. *Simplificar al máximo el cociente: [f(x + h) - f(x)] / h.*

Paso 4. *Tomar el límite del resultado del Paso 3.*

En base a lo anterior, se puede estimar la derivada en valores particulares de x. Después de esto entrega al lector el primer listado de ejercicios con un total de 61 problemas.

4. Algunos de los restantes ejemplos le sirven para obtener otras derivadas de funciones como: $y=x^2$, y= 1/x e y= sqrt(x).

5. Considera las diversas notaciones que se usan para caracterizar la derivada tanto de manera global como local.

De manera global:

$$D_x(y),\ \ D(y),\ \ dy/dx,\ \ f'(x).$$

Y de manera local, esto es, en un punto, las notaciones son:

$$f'(a),\ \ dy/dx\,|_{x=a},\ y'(a),\ \ D_x\,(y)|_{x=a}$$

6. Las derivadas laterales se definen también en esta sección, de modo tal que la existencia e igualdad de ellas condiciona el hecho que una función sea o no derivable en un punto en particular.

7. La existencia de las tangentes horizontales y verticales también ocupan el interés de estos autores, ellas serán de vital importancia cuando se desee estimar los valores extremos de una función, tema que se sitúa dentro de las aplicaciones de la derivada.

8. Dos puntos antes del cierre de la derivada en esta primera sección son: la relación entre derivada y continuidad, expresada en el conocido hecho que: *"Si una función es derivable en un punto entonces es continua allí";* el otro punto se refiere a la mención histórica de los dos grandes personajes de la Matemática como son: Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

9. Por último, los autores exponen las consabidas reglas sobre derivación, comenzando con las potencias y sumas para continuar, en las secciones restantes, con las reglas del producto y del cociente.

La valoración dada al tratamiento de la derivada es ***Alta***, su desarrollo es coherente y limpio en las demostraciones que realiza con cada uno de los resultados teóricos que se construyen paso a paso como parte sustancial del tema.

Texto 4 ***Steiner (2005)***

Como se advirtió, en el análisis anterior para este texto, su enfoque está dirigido para ser un texto guía para estudiantes de las ciencias químicas o afines a ella, por lo tanto no se detiene en demostraciones para fundamentar resultados que para un estudiante de matemáticas sí podrían ser importantes, este no es el caso y, más bien se orienta a relacionar variables de un problema de orden físico, en su motivación inicial, como bien lo señala dicho autor, a saber:

> *"En las ciencias físicas nos interesa el valor de una cantidad física y cómo se relaciona con otras cantidades físicas en cualquier estado del sistema. Además, nos interesa cómo varía el valor de la cantidad física al pasar de un estado a otro, y la tasa de variación con respecto al tiempo o con respecto a alguna otra cantidad física"*
>
> *(Steiner, 2006, p. 55).*

<u>Temas abordados previamante</u>

Este autor desarrolla previamente tres Capítulos antes de abordar el concepto de la derivada, con ello prepara el terreno para su exposición de manera prolija y concisa. El texto en sí está pensado para una carrera de química, u otra ciencia aplicada, como lo expresa claramente su autor, de manera que abundan en él asuntos relacionados con la Química. El título original de este texto es: *"The Chemestry Maths Book"*, luego se puede intuir dónde pondrá el acento respecto de las aplicaciones y ejemplos para ilustrar los conceptos que trata este texto.

Los Capítulos previos antes de considerar el concepto de derivada son los siguientes:

Capítulo 1. Números, variables y álgebra

Capítulo 2. Funciones algebraicas

Capítulo 3. Funciones trascendentes

El título del Capítulo 3 induce a pensar qué tipo de funciones considera. Sin perjuicio de ello, se explicitan las funciones que trata, a saber: funciones trigonométricas (relaciones trigonométricas), las funciones trigonométricas inversas, la función exponencial, la logarítmica y las funciones hiperbólicas, para terminar con un listado de ejercicios, 27 problemas para ser exactos, que abarcan las distintas secciones que contempla dicho capítulo. Esta forma de presentación y desarrollo de los distintos temas tratados se hace regular a lo largo del texto.

La derivada propiamente tal

En el cuarto capítulo aborda la derivación. A modo de introducción considera la ecuación de estado de los gases ideales, esto es: “***pV= nRT***”, donde las cuatro variables: ***p, V, T y n*** se pueden expresar en función de las tres restantes. Explicita la variación de V por unidad de variación de T, o la tasa de variación de V con respecto a T, esto es, $\Delta V / \Delta T$. Usa el concepto de tasa de variación promedio de una función que identifica con el gradiente de la recta que pasa por dos puntos, P y Q, donde P= (p,(f(p)) y Q= (q, f(q)).

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Steiner* es:

1. Después de haber hecho la identificación del gradiente de la recta PQ, identifica dicho gradiente como la tasa de variación de y con respecto a x entre los punto P y Q. El gradiente no es otra cosa que la pendiente de la recta determinada por los puntos P y Q.
2. A continuación aborda lo anterior de manera más general, afirmando que si la variable x, varía desde p=x hasta $q= x+ \Delta x$, la correspondiente variación en la función es la cantidad $\Delta y = f(x+ \Delta x) - f(x)$, y por tanto la variación promedio es: $\Delta y / \Delta x= [f(x+ \Delta x) -f(x)]/ \Delta x$.
3. Lo anterior lo aplica a la función cuadrática, $y= ax^2+bx+c$. Con ello obtiene el gradiente de la recta PQ, cuyo valor es:

$$\boldsymbol{\Delta y / \Delta x} = 2ax + b + a \Delta x$$

4. El proceso de tomar el límite del gradiente lo denomina ***derivación.***

5. Examina otras notaciones para el valor de este límite, como son:

$$D = d/dx, \quad D f= d f / dx$$

Con ello hace alusión al concepto de operador, el que tiene un amplio uso en las ciencias físicas, hecho que se propone considerar en los capítulos posteriores de este texto.

6. Posteriormente trata el concepto de ***"continuidad",*** la que se define en términos de un límite como:

$$\textbf{\textit{Lím}}\ f(x) = f(x_1), \quad \textbf{\textit{si}}\ x\ \textbf{\textit{tiende a}}\ x_1.$$

7. Después de todo este preámbulo recién examina el concepto de Límite. Usa para ello la función racional $f(x)=(x^2-4)/(x-2)$, donde la aproximación Tabular por derecha e izquierda le sirve para deducir que el límite de esta función cuando x tiende a dos es cuatro. Por último, revisa sólo tres ejemplos para estudiar "Límite", dos de ellos cuando x es grande positivo, el restante para estudiar cómo se comporta una función cuando x tiende a cero.

8. A continuación define cuándo una función es derivable en un punto, en base al límite del cociente diferencial. Cuando este límite existe para una función f, la denomina derivación a partir de primeros principios. Usa la conocida función valor absoluto (y =abs(x)), para hacer ver que ella no es derivable en x=0.

Termina esta sección estimando dy/dx a partir de primeros principios, lo que otros autores llaman estimación de la derivada por medio de la Definición. Son dos las funciones a las cuales aplica la Definición formal: y= 1/x e y= sqrt (x), Para la función exponencial: $y = e^{x}$, usa el desarrollo en serie, con lo que $\Delta y / \Delta x$ le resulta cómodo estimar cuando el incremento de Δx tiende a cero, y con ello la derivada resulta ser la misma función, esto es, $D_x (e^{x}) = e^{x}$.

9. Por último, para los propósitos de este estudio, considera la ***"derivación a partir de reglas"***, hecho que en definitiva resulta ser la tónica para estimar la derivada cuando se trabaja con lápiz y papel.

   Es incierto aún precisar hasta cuándo se operará de esta forma, pues cada día se acrecienta más el uso de los ordenadores y con ello los programas de cálculo simbólico para realizar estas tareas rutinarias. Derive y Matlab son dos claros ejemplos de programas informáticos capaces de realizar la estimación algebraica de una derivada por compleja que ésta sea.

10. ***La regla de la cadena***, el tratamiento de la función implícita, la derivación logarítmica y las derivadas sucesivas cubren con creces el tema de la derivación antes de entrar a puntos estacionarios y con ello adentrarse al estudio de puntos extremos, esto es, de máximos y mínimos para una función determinada y así situarse en el ámbito de las ***aplicaciones de la derivada.***

La valoración dada al tratamiento de la derivada es ***Regular***, si se lo compara con los textos ya analizados sobre esta misma temática. No por eso deja de ser un texto interesante para los estudiantes de las ciencias relacionadas con la Física y/o la Química preferentemente.

Texto 5 ***Larson, Hostetler y Edwards (2009)***

Este es uno de los textos de cálculo más usado en la actualidad, de él ha habido ya varias ediciones, con pocas diferencias entre ellas, las recientes han incorporado mejoras en su presentación con gráfico y recuadros en color, permitiendo con ello mayor agrado para su lectura. En los que es el análisis del texto y, la derivada en particular, sus autores remiten a cuatro problemas fundamentales y relacionados entre sí, señalando al respecto que:

> *"El Cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos del siglo XVII.*
>
> 1. *El problema de la tangente.*
> 2. *El problema de la velocidad y la aceleración.*
> 3. *El problema de los máximos y mínimos.*
> 4. *El problema del área.*
>
> *Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al Cálculo"*
>
> *(Larson, Hostetler y Edwards, 2009, p. 98)*

Temas abordados previamente

Estos autores desarrollan, al igual que Eric Steiner, tres capítulos antes de abordar el concepto de la derivada, con ello prepara a la usanza tradicional la exposición de este tema, el que desarrolla en el capítulo cuatro, que denomina simplemente derivadas.

Así, los capítulos previos que estos autores desarrollan son los siguientes:

Capítulo 1. Los números reales

Capítulo 2. Funciones

Capítulo 3. Límite y continuidad

Se puede apreciar, en base a los textos ya analizados, que los capítulos previos manifiestan una concordancia en cuanto a temas y orden en los que se les presenta, siendo los temas de funciones, límites y continuidad los más recurrentes como pre-requisitos para tratar el tema de la derivada y temas con ella relacionados. La simple lectura de los capítulos tratados como previos es decidora y sugerente al lector.

La derivada propiamente tal

El cuarto capítulo contempla el estudio de la derivada, para ello el problema de determinar la recta tangente se usa como introducción previa para dar con la formalización pertinente. La determinación de las pendientes de las rectas secantes como aproximación a la pendiente de la recta tangente, es lo que conlleva a la solución de este problema geométrico y, de paso, a la noción de la derivada.

Así, si se consideran dos puntos cercanos de la curva, como P y Q, donde el punto Q se genera a partir de P para un incremento pequeño Δx, se tiene que la pendiente que estos puntos definen es igual a:

$$m= (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$$

$$m_{sec}= [f(c+\Delta x)-f(c)] /(c+\Delta x) - c$$

$$m_{sec}= [f(c+\Delta x)-f(c)] /\Delta x) = \Delta y / \Delta x, \ (\text{ con } P= (x_1, y_1) \text{ y } Q=(x_2, y_2) \ )$$

Para esta última ecuación, $\Delta y / \Delta x$ corresponde al ***cociente incremental* o de *diferencias.*** Más aún, el numerador corresponde al cambio en y, en tanto el denominador corresponde al cambio en la variable independiente x.

Teniendo presente lo anterior, se puede definir la recta tangente con pendiente m como el límite del cociente incremental. Una vez hecho lo anterior, considera dos ejemplos, una recta y una cuadrática, para las cuales estima la recta tangente en puntos particulares de ellas. Lo anterior lo sitúa en el punto crucial del cálculo.

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Larson et al*. (2009) es la siguiente:

1. Hacen ver, en primer término, que el límite usado para definir la pendiente de una recta tangente se usa también para definir la derivación, una de las dos operaciones fundamentales del cálculo. Luego, la derivada en el valor x se define como el límite del cociente incremental.

2. Este proceso de estimar la derivada se denomina, por tanto, derivación.

3. Se hace alusión a las distintas notaciones para caracterizar la derivada, y que son las mismas que usan los autores ya tratados y, por tanto, se omiten en esta ocasión.

4. Revisan tres ejemplos, en donde la estimación de la derivada se realiza por medio del límite del cociente incremental. Las funciones usadas para ilustrar la Definición son: $y= x^3+2x$, y= sqrt(x) e y= 2 / t.

5. Se expone la definición alternativa de la derivada en un punto x = c, que corresponde a:

   f ´(c) =lím [f(x) –f(c)] /[x –c], cuando x tiende a c

   En base a esta definición consideran las derivadas laterales en x= c, donde la diferencia estriba en la forma en que x se aproxima a c. Por la izquierda con valores menores que c, y por la derecha considerando valores mayores que c. La definición de derivadas laterales permite analizar, para las funciones, parte entera de x e y= abs(x-2) que ellas no poseen derivada en cada uno de los enteros para la primera función, en tanto para y=abs(x-2), ella no es derivable en x=2.

6. Posteriormente, se establece la relación existente entre "*derivable y continua*", que se expresa como:

   "Si f es derivable en x=c, entonces f es continua en x=c"

Se acota el hecho que el recíproco en general no es verdadero, esto es, una función puede ser continua en un punto sin ser derivable allí.

La sección termina con el primer listado de ejercicios, conformado por un total de 104 problemas.

7. La interpretación física de la derivada les permite estimar la velocidad media para $s(t) = -16t^2+100$ en diferentes intervalos de tiempo y, con ello, definir la velocidad como el límite:

$$v(t)= \text{lím } [s(t+ \Delta t)- s(t)] / \Delta t, \quad \text{cuando } \Delta t \text{ tiende a cero.}$$

   Realizan una aplicación de la derivada calculando la velocidad para la función:

   $s(t) = -16t^2+16t+32$.

   Ello les permite resolver cuestiones particulares en el contexto de este problema específico. Terminan con el segundo listado de ejercicios, compuesto de 28 problemas.

8. Las reglas básicas sobre derivación ocupan el resto de la presentación, se incluyen además: la regla de la cadena, la derivación implícita, la derivada de la función inversa, de la exponencial y la logarítmica. Todos estos temas configuran el Capítulo cuatro, dedicado a la derivación.

La valoración dada al tratamiento de la derivada es ***Alta,*** pues trata con mucho esmero y detalle no sólo la derivada en sí, sino también los temas que siguen en una presentación normal del tema en cuestión.

Texto 6 ***Stewart, J. (2010)***

El aspecto principal que marca lã diferencia entre este libro y otros textos de cálculo, radica, según su autor, en que está versión, es más moderna. Así, por ejemplo, no existe un capítulo completo sobre técnicas de integración, no se demuestran tantos teoremas, el material sobre funciones trascendentales y sobre ecuaciones paramétricas está presente en todo el libro. Para observar una profundización más completa sobre los temas tradiconales del cálculo, se suguiere consultar sus obras: Calculus, Sexta Edición, y Calculus: Early Transcendentals, Sexta Edición. En lo que ahora atañe, esto es, el l análisis de la derivada es este texto, el autor expresa la respecto:

> *"El cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que el lector ha estudiado antes: el cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de cambio y movimiento; se refiere a cantidades que consideran otras cantidades"*

(Stewart, 2010, p. 3)

Temas abordados previamente

En las primeras siete páginas Stewart realiza "*Una vista previa al cálculo*", en ella analiza a grandes rasgos el problema del área y de la tangente identificando con el primer problema al Cálculo Integral y, con el segundo al Cálculo Diferencial.

A continuación se refiere a la velocidad, y de manera más específica, a la velocidad promedio, al hacer esto se está estimando la pendiente de la recta secante entre dos puntos.

Realiza los cómputos para puntos como: P= (2, f(2)) y Q= (t, f (t)). Así, la velocidad resulta ser ***el límite de la pendiente definida por estos dos puntos***, esto es,

v = lím [f (t) –f (2)] / (t-2), cuando t tiende a 2

Termina este preámbulo considerando el límite de una sucesión (a_n) donde la paradoja de Zenón, referida a Aquiles y la Tortuga, le sirve para conectar con este tema. Por último, considera la suma de una serie, cuyo valor resulta ser el límite de la sucesión de sumas parciales.

Estos temas le sirven para dar un vistazo general a alguno de los temas que desarrollará en el transcurso de su texto. A continuación se aboca a los dos capítulos previos y centrales referidos al cálculo diferencial a modo de inicio, dichos capítulos son:

Capítulo 1. Funciones y modelos.

Capítulo 2. Límites y derivadas.

Ahora bien, el interés primordial de este estudio se centra aquí en el segundo capítulo, espacio donde va preparando en primer lugar lo referente a límites para dar paso a la derivada.

<u>La derivada propiamente tal</u>

Este autor entrelaza *"límites y derivadas"* en un solo capítulo, de esta manera queda claro que la derivada descansa sobre el concepto de *"Límite"*.

Luego, el problema de hallar una recta tangente y determinar la velocidad de un objeto se refiere al mismo tipo de problema y, ambos descansan sobre el concepto de *"Límite"*. Una vez revisado esto, está en condiciones de definir el concepto de derivada de manera local, lo que hace para un punto de abscisa x=a.

La trayectoria didáctica para introducir la *derivada* por *James Stewart* es:

1. Define la derivada de una función f en un valor "a", que denota como f´(a) como el límite del cociente de Newton, a saber:

   f´(a) = lím [f(a + h)- f(a)] / h (Definición Clásica= D. C.)

   Cuando h tiende a cero y siempre que este límite exista.

2. Hace el cambio de variable ***x= a + h***, de donde ***h= x- a***, lo que le permite redefinir el límite anterior como:

   f´(a) = lím [f(x)-f(a)] / x-a, (Definición Alternativa =D. A.)

   (Cuando x tiende al valor a).

   Hecho esto, examina dos ejemplos usando funciones cuadráticas donde estima en el primero de ellos la derivada, usando la ***D. C (***Definición Clásica) en el valor x=a, en el segundo ejemplo se ilustra la determinación de la ecuación de la recta tangente en un punto específico.

3. A continuación considera la ***"rapidez de cambio"*** para una función que relaciona las variables x e y. Para ello considera el cambio en x y el cambio en la

variable y, los cuales corresponde a: $\Delta x = x_2 - x_1$ y a $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, lo que le permite definir el cociente de las diferencias, esto es, $\boldsymbol{\Delta y / \Delta x}$.

Dicho cociente corresponde al promedio de la rapidez de cambio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$. Cociente que se interpreta como la pendiente de la recta secante entre dos puntos:

$$\boldsymbol{P = (x_1, f(x_1) \text{ y } Q = (x_2, f(x_2)).}$$

4. El límite de estos promedios de rapidez de cambio, se bautiza con el nombre de rapidez de cambio instantánea de y con respecto a x.

   Y se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto P, con $P = (x_1, f(x_1))$.

5. Luego, la derivada f´(a) es la rapidez de cambio instantánea de y=f(x) con respecto a x cuando x= a, como él lo declara explícitamente.

6. Hecho lo anterior, analiza dos ejemplos más, en el primero considera la Derivada de una función de costo y en el segundo la Derivada de una función dada en forma Tabular, dada por una tabla de valores en la que la variable independiente es "t". Lo anterior le permite entregar su listado de ejercicios que consta de 54 Problemas.

7. La siguiente sección la dedica a definir la derivada como una función de manera global, como suelen llamarla algunos autores. Aquí la cantidad de ejemplos para ilustrar la Definición es mayor, 9 para ser exactos. Los ejemplos

se van intercalando con otros temas relacionados con la derivada. Una descripción sucinta de estos ejemplos es la siguiente:

Ejemplo 1. Se da el gráfico de una función f, se solicita construir el gráfico de su derivada, f´.

Ejemplo 2. A partir de la tabla de valores de una función B(t), la cual representa la población de Bélgica en el tiempo t, se pide construir la tabla de valores que da cuenta de la derivada de B(t), esto es B´(t).

La tabla inicial dada: [t, B(t)] posee 14 datos. Por tanto, la nueva tabla deberá contener la misma cantidad de datos para las parejas: [t, B´(t)].

Ejemplo 3. Para una función cúbica se pide, por un lado, determinar f´(x), usando la definición clásica (límite del cociente incremental) y, por otro lado, graficar ambas funciones. Lo anterior permite la comparación de ambas funciones. Para ejecutar dicha tarea se usa una calculadora que permita la realización de gráficas.

Ejemplo 4. Para la función y =sqrt(x) se pide determinar su derivada y el dominio de ella. Se usa la definición clásica, esto es, el límite del cociente incremental.

Ejemplo 5. Aborda la derivada de la función racional: f(x)= (1-x) / (2-x), usando también la definición clásica.

A esta altura de la presentación del tema, estima conveniente mencionar otras notaciones usadas para referirse a la derivada de una función, como son:

$$f'(x) = y' = dy/dx = df/dx = d\,f(x)/dx = D_x\,f(x) = D\,f(x)$$

Define una función derivable en "a" si existe f´(a) y derivable en un intervalo abierto (a, b) si es derivable en todo punto de dicho intervalo.

Ejemplo 6. Examina la función y =abs(x), y se pregunta dónde es derivable ella. Investiga los casos: x positivo y x negativo. Por último se detiene a examinar el caso x=0, del que obtiene 1, como límite por la derecha y -1 como límite lateral por la izquierda, luego f no es derivable en x=0. Lo anterior se resume en una sola función como: **f ´(x)= 1, si x>0 y -1, si x<0.**

A continuación demuestra el teorema que relaciona la derivada con la continuidad, esto es, ***"Si f es derivable en a entonces es continua en a"***. Advierte que el recíproco, en general, es falso, esto es, una función puede ser continua en un punto y no derivable allí. Como se puede apreciar con la función y=abs(x) en el punto x=0, la cual es continua en x=0, pero no derivable en dicho punto.

Caracterizar de algún modo las funciones no derivables es la siguiente discusión, muestra que funciones con esquinas o discontinuas en un punto no pueden ser derivables allí, lo mismo ocurre para funciones cuya recta tangente es vertical, esto es, cuando lím | f(x)| = ∞, cuando x tiende al valor "a", así f no puede ser derivable en dicho punto "a".

El siguiente punto se refiere a las derivadas de orden superior, con ello puede considerar el Ejemplo 7.

Ejemplo 7. Si $f(x)= x^3- x$, se pide determinar la segunda derivada, esto es, la derivada de la derivada.

Ejemplo 8. Para la misma función del ejemplo anterior se solicita ahora determinar la tercera y cuarta derivada.

La sección termina con un listado de ejercicios conformado por 55 Problemas.

8. En la sección 2.8, que corresponde al resto del capítulo, examina la relación existente entre f y su derivada y entre f y su segunda derivada, respecto de crecimiento o decrecimiento de f y de su concavidad. Las antiderivadas es su última ocupación, para terminar con el correspondiente listado de ejercicios en la mencionada sección.

9. En el siguiente capítulo se ocupará de las ***Reglas de Derivación***, asunto de carácter algorítmico en lo que a determinación de derivadas se refiere. No así en su presentación, donde la demostración de las Reglas de Derivación se pueden examinar de manera clara, precisa y elegante a partir del límite del cociente incremental, con los consabidos artilugios de que hacen gala los matemáticos para probar cada una de estas reglas que conforman el proceso de derivación.

La valoración que se puede emitir sobre el tratamiento dado a la derivada es ***Alta***. El texto tiene la virtud de entrelazar en un solo capítulo, el segundo, el tema de los límites con la noción de derivada, haciendo uso de la diversas representaciones que tanto el concepto de límite como el la derivada admiten, y con ello contribuir a una mejor comprensión de estos dos temas fundamentales del cálculo.

Texto 7 ***Leithold (1998)***

Por el año de publicación de este texto, puede parecer viejo, en cuanto a su edición, pero no así en cuanto a su contenido, tal vez ello se note en que los textos de ediciones más reciente usen en lugar de "Δx" el valor de "h", para estimar la derivada usando la definición tradicional, esto es, como el límite del cociente de Newton. Ahora bien, la introducción al tema de la derivada la realiza abordando el antiguo problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto específico. Lo anterior se ve corroborado en palabras del propio autor al afirmar que:

> *"Muchos problemas importantes en cálculo dependen de la determinación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto específico de su gráfica"*
>
> *(Leithold, 1998, p. 101)*

Temas abordados previamente

Dedica sólo el primer capítulo para abordar los contenidos previos al tratamiento que da a la derivación. Dicho capítulo resulta algo extenso y en él trata los temas de: funciones, límite y continuidad. Lo hace en casi cien páginas de 1344 que posee dicho texto, sin contar su índice. Con anterioridad, cuando se revisó el concepto de límite, fue abordado con mayor detenimiento este capítulo primero. La secuencia que este texto presenta comienza a ser ya una trayectoria recurrente, en el sentido que textos posteriores a éste replican, en cierto modo, la misma trayectoria didáctica para promover la enseñanza - aprendizaje del cálculo de una o más variables.

La derivada propiamente tal

Este autor se ocupa, en primer término, de abordar el problema de la recta tangente a una curva f en un punto dado P. Para ello considera otro punto cercano Q, así puede estimar la pendiente de la recta secante entre dichos puntos. Conforme Q tiende a P, el incremento en la variable x, esto es: $x_2 - x_1 = \Delta x$ tiende a cero.

La argumentación anterior le permite definir la pendiente de la recta tangente a f en un punto dado P, a condición de que el límite del cociente incremental exista cuando Δx tiende a cero. En el caso en que Δx al tender por la derecha o por la izquierda a cero sea ∞ ó $-\infty$, la recta tangente en el punto en estudio será la recta vertical de ecuación $x = x_1$.

El acercamiento al concepto de derivada lo va generando por medio de ***Ejemplos*** y ***Ejemplos Ilustrativos*** donde intercala las definiciones que precisa para abordar la derivada como tal. No se debe olvidar que en matemáticas rara vez un concepto se presenta de manera aislada, sino muy por el contrario, se presenta en conexión con otros temas que permiten la exposición didáctica de la Teoría como un todo. La derivada, presentada por los distintos autores tratados no escapa a este hecho.

La trayectoria didáctica para introducir la derivada por *Leithold (1998)* es:

1. Después de haber definido la pendiente de la recta tangente a f en un punto dado P, ilustra este hecho con dos ejemplos: en el primero usa una función cuadrática y en el segundo una función polinomial cúbica.

Entre ambos ejemplos, define recta normal, cuya pendiente resulta ser 1/-m, con "m" la pendiente de la recta tangente a f en el punto P.

2. Define la derivada de una función en un punto x como aquella función denotada por f´ que resulta del límite:

$$f'(x) = \text{lím}\ [f(x + \Delta x) - f(x)] / \Delta x \quad \textbf{(Def. Clásica)}$$

Con Δx tendiendo a cero y siempre que este límite exista.

La derivada se modifica en el caso de un valor particular x_1, por ejemplo.

3. Examina dos ejemplos donde usa la *Def. Clásica*, las funciones que considera son: y= 3/x e y= sqrt(x).

4. Con el primer ejemplo estima f´(2), usando la definición alternativa que resulta de realizar el conocido cambio de variable:

$$x_1 + \Delta x = x, \text{ de donde } \Delta x = x - x_1, \text{ así}$$

$$f'(x_1) = \text{lím}\ [f(x) - f(x_1) / (x - x_1), \quad \text{cuando x tiende a } x_1$$

5. Las notaciones en Matemática tienen su importancia, es por ello que este autor se refiere a ellas, así la expresión f´(x), que denota la derivada de f, la atribuye a Joseph Louis Lagrange (1736- 1813), en cambio la expresión: dy/dx, que no ha de entenderse como un cociente, se debe al alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1642-1727). Después de estos alcances históricos se imparte el primer listado de ejercicios con un total de 58 problemas.

6. Es el momento de ocuparse de la relación entre diferenciación y continuidad, donde, por diferenciación se entiende como el proceso de obtención de la derivada de una función.

   Expone algunas funciones donde ellas no son diferenciables, tal es el caso de: ***y= sqrt(x)*** ***e*** ***$y = x^{2/3}$*** **.** Las cuales no son derivables en x=0. Otra función que examina es ***y= abs(x),*** la cual no es derivable en cero.

   A continuación presenta el conocido resultado:

   "Diferenciable en x_1 implica continua en x_1"

7. Por último, define ***"derivadas laterales"***. Los ejemplos que terminan este tema corresponde a funciones definidas por trozos, que se caracterizan, por lo general, por cambiar de expresión a los lados de un número específico, como se ilustra con el ejemplo siguiente: F(x)= 2x, si x ε [0,10] y 1.4x + 6, si x ε (10, ∞). Da término a esta sección con el segundo listado de ejercicios, conformado esta vez por un total de 47 Problemas.

8. Antes de examinar las reglas sobre derivación de funciones algebraicas y las derivadas de orden superior, se detiene a considerar la derivación numérica. La que denota por ***NDER (f(x), a)*** y que define como:

   NDER (f(x), a) = [f (a + Δx) – f (a - Δx)] / 2Δx

   Finaliza considerando tres ejemplos donde aplica la derivación numérica.

La valoración que se puede emitir sobre el tratamiento dado a la derivada es, al igual que texto anterior, ***Alta***. El texto tiene la virtud de entrelazar en un solo capítulo, el segundo, el tema de los límites con la noción de derivada, haciendo uso de la diversas representaciones que tanto el concepto de límite como el la derivada admiten, y con ello contribuir a una mejor comprensión de estos dos temas fundamentales del cálculo.

<u>Texto 8</u> ***Flores, F., Vidal, C, y Villarroel, O. (2012)***

Estos autores hacen notar de inicio, de forma breve y concisa, el gran tema que ocupa al cálculo diferencial, cual es, la derivada, al señalarnos:

> *"El gran concepto del Cálculo Diferencial, la derivada, será estudiado en este capítulo. Propiedades y sus aplicaciones también serán discutidas con detalles"*
>
> *(Flores et al., 2012, p. 4)*

<u>Temas abordados previamente</u>

Todo el material de apoyo visto en el Módulo 1 de estos dos textos, sirve de antesala para considerar la derivada. Así los capítulos previos son:

Capítulo 1. Los números reales.

Capítulo 2. Funciones.

Capítulo 3. Límite de funciones. Y Capítulo 4. Continuidad.

El solo enunciado de estos capítulos indica que el tratamiento dado es el que siguen la mayoría de los textos de cálculo, por tanto, no se evidencia sorpresa alguna en la forma ni en el contenido visto por estos autores. Lo que sí se puede observar es el detalle y rigurosidad con el cual tratan cada uno de los temas previos al concepto de la derivada.

La derivada propiamente tal

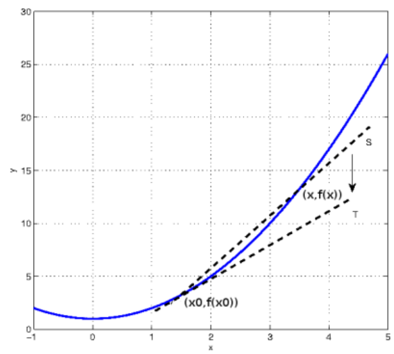
El capítulo que aborda la derivada comienza haciendo alusión a la ***"intuición física"***, para ello considera una función s=f (t) y define la velocidad media como el cociente entre el desplazamiento versus el tiempo transcurrido, y se pregunta ¿cómo se define la velocidad instantánea en el instante t? La respuesta no se hace esperar, para explicitar que como el límite del cociente antes considerado.

La trayectoria didáctica usada por estos autores Flores et al. (2012) es:

> Después de la introducción anterior consideran lo que denominan ***intuición geométrica***, para ello recuerda como estimar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, acto seguido define recta tangente a una curva en un punto dado como la recta que en una vecindad del punto x=a la toca en un solo punto, y además deja la curva a un lado de dicha recta. Después de ello define la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos, lo que le permite estimar la pendiente de la recta tangente como el límite de las pendientes de las rectas secantes, cuando x tiende a x_0.

Así, m (T) = lím $_{x \to x_0}$ [(f(x) –f(x_0)] / (x-x_0).

Figura n° 31. Recta secante y recta tangente.



Estas consideraciones les hacen avanzar al siguiente punto, para definir la derivada en un punto x_0 como el límite del cociente de Newton, a saber:

Definición 3.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $f : I \to \mathbb{R}$, f posee derivada o es derivable en el punto $x_0 \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Se denotará como $f'(x_0)$ y se lee "f prima en el punto x_0" o "la derivada de f en x_0".

Y en un sentido más general, para cualquier punto x en la Definición 4, como:

Definición 4.

f posee derivada en I o es f derivable en todo I si $f'(x)$ existe para cada $x \in I$, es decir, $\exists \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, para cada $x \in I$.

(Flores et al., 2012, p. 8)

Analizan también, la relación entre derivada y continuidad, haciendo ver en la Proposición 1, que si una función admite derivada en un punto ella es continua allí.

La función f(x)= abs(x), es usada para probar que ella no admite derivada en el punto x=0, mediante acercamientos del límite del cociente de Newton por derecha e izquierda.

Una vez que disponen de la defunción de derivada la usan en cuatro funciones, a saber: f(x)= x, f(x)= x^2, f(x)= sqrt(x) y la función constante, f(x)= c.

En la última parte de esta sección definen derivadas laterales.

Por el análisis descrito se puede afirmar que el tratamiento dado a la derivada es de una valoración ***ALTA.***

Texto 9 ***Cruse, A. y Lehman, M. (1982)***

Es claro y decidor el comentario inicial deslizados por estos autores al comienzo de la primera lección del texto, al señalar que:

> *"El cálculo se inventó para resolver problemas que están fuera del alcance de los métodos algebraicos. Nuestro estudio comienza con algunos ejemplos de estos problemas"*
>
> *(Cruse y Lehman, 1982, p. 1)*

Con el comentario presentado, dos problemas hacen de introducción motivadora para el lector, el primero, referido a optimizar la construcción de una caja sin tapa, para lo cual se dispone de un material de forma cuadrada, al cual hay que recortar en sus puntas de modo de conseguir el máximo de volumen posible; el segundo problema, optimizar una lata que debe contener 1000 centímetros cúbicos, para lo cual se debe determinar las dimensiones que debe tener la lata, de forma que se utilice la menor cantidad de material posible.

Las soluciones iniciales a estos dos problemas recurren a consideraciones gráficas y tabulares, dado que aún no se dispone de la derivada como recurso de mediación y solución para ambos problemas.

Lo que sí es importante es plantear desde un comienzo el tipo de problemas que el cálculo diferencial puede resolver y, en ello hay un acierto, que no siempre se presenta en los textos de cálculo.

<u>Temas abordados previamente.</u>

El texto discurre en la lección 2, con el problema de la determinación de tangentes a una curva. Después de ello se examina el método de Descartes sobre la raíces iguales, método que funciona bien para curvas cuadráticas, pero no así cunado al curva es un polinomio cúbico, como es el simple caso de y=x^3.

Como una forma de alanzar en la determinación de tangentes a curvas, de revisa el método de *límites de Fermat,* donde aparece claramente el concepto de límite de pendientes de rectas secantes, y de esta forma lograr la pendiente de la recta tangente.

La derivada propiamente tal

La revisión de las cuatro lecciones iniciales les permite a estos autores, Cruse y Lehman (1982), dar con la solución de los dos problemas planteados como desafíos motivadores al comienzo de este texto.

La trayectoria didáctica usada por Cruse y Lehman (1982) es la siguiente:

1. Desde su inicio, esto es, la lección 1 del texto se insinúa la derivada para dar respuesta a los dos problemas de optimización planteados, aunque ella no se usa directamente.

2. Aunque en la lección cuatro se estima la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado T, en ella está el germen de la estimación de la derivada. Así, en la lección cinco dan con la solución de los dos problemas de optimización planteados al inicio del texto.

3. Después de esto, en la lección seis se ocupan de determinar las reglas para las fórmulas de predecir pendientes, esto es, derivadas de funciones. Considerando la regla para la expresión: $y= cx^n$ y para la suma de funciones.

4. En la lección 7, aborda el problema de un cohete al cual se le agota el combustible después de 60 segundos, sabiendo que en t segundos el cohete

alcanza una altura máxima de 10 metros sobre la tierra, se pide entonces investigar por su movimiento. Lo anterior les sirve para indagar sobre la rapidez promedio y, por tanto, por su velocidad instantánea.

5. La lección 8, les permite examinar variables dependientes e independientes, como una relación funcional entre las variables.

6. En la lección 9 se revisa el dominio e imagen (recorrido) de una función, para continuar en la lección 10 con el estudio de los valores extremos locales y globales para una función dada.

7. Por su parte la lección 11 se ocupa de la razón instantánea de cambio, para ello el problema del tanque cónico es el socorrido de casi todos los autores cuando se examina este tema.

8. En la lección 12 se dan nuevas reglas de derivación, el producto y el cociente.

9. Digamos por último que, cada una de las lecciones termina con un listado de problemas.

En definitiva, la presentación descrita se aparta completamente de la tradicional revisada hasta ahora por los otros textos examinados, no deja de ser novedosa e interesante para el lector novel en la lides del cálculo diferencial y, teniendo en cuenta además que es un texto editado el año 1983, con más de treinta años de antigüedad su enfoque resulta atrayente y sugerente para un curso inicial de cálculo.

El análisis descrito permite afirmar que el tratamiento dado a la derivada es, ***Regular,*** dado que no aborda la regla de la cadena, considerado por muchos una de las reglas fundamentales de la derivación. No está tampoco el tratamiento de expresiones implícitas con su correspondiente tratamiento de la derivación implícita.

<u>Texto 10</u> ***Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Lock, P., Flath. D. et al. (2008)***

Este texto no sólo tarta el cálculo diferencial, sino que también el cálculo integral, la probabilidad, las funciones de varias variables, algo de ecuaciones diferenciales para terminar con las series geométricas, en su capítulo número once.

El cálculo diferencial es tratado en los primeros cinco capítulos del texto. Y sobre esta materia en particular se refieren sus autores afirmando que:

> *"La derivada se puede interpretar en forma geométrica como la pendiente de una curva, y físicamente, como la razón de cambio. Las derivadas se pueden utilizar para representar todo, desde fluctuaciones en las tasas de interés hasta la tasa de mortalidad de los peces, o la rapidez de crecimiento de un tumor"*
>
> *(Hughes-Hallett et al., 2008, p. 93)*

<u>Temas abordados en primer término</u>

Los temas previos y que sirven de soporte inicial para el tratamiento de la derivada son para estos autores: ***Capítulo 1. Funciones y cambio.***

Un exhaustivo tratamiento de la funciones, con variados ejemplos de aplicación, recorre este capítulo primero del texto. Cada sección se corona, como es lógico y natural para todos los textos, con una listado de ejercicios, recomendados para una mejor comprensión de cada uno de los subtemas que conforman el texto.

Los autores hacen explícita referencia a la regla de cuatro, esto es, que los temas deben presentarse en forma geométrica, numérica, analítica y verbal, con los cual están haciendo uso de los necesarios cambios de registro para una mejor comprensión de los temas, como ya se viene advirtiendo en la literatura de la didáctica de la Matemática (Duval, 2006).

La derivada propiamente tal

La derivada es tratada en el segundo capítulo del libro, siendo la *velocidad instantánea* el recurso que se usa para introducirla, como el límite de las razones de cambio de f en intervalos cada vez más cortos alrededor del punto es estudio.

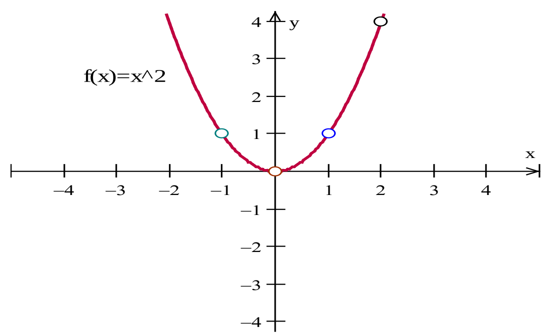
A continuación se analiza su *significado geométrico*, como la pendiente de la recta tangente, con los consabidos gráficos usados para ello.

La trayectoria didáctica usada por estos autores (Hughes et al., 2008) se expresa en tres ejemplos para ilustrar el concepto, y es la siguiente:

> ***Ejemplo 1*.** Usando la gráfica de y=x^2, determinar si cada una de la siguientes cantidades es positiva, negativa o cero: f '(1), f '(- 1), f '(2) y f '(0). Lo anterior obliga a asociar la derivada con el signo de la razón de cambio

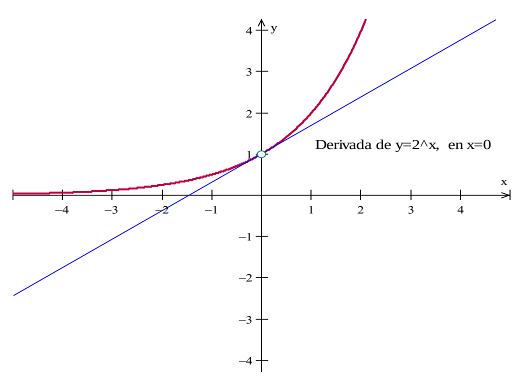
instantáneo en los puntos considerados. La ilustración gráfica señalando los puntos en estudio corresponde a:

Figura n°32. Gráfica de y=x^2.



Ejemplo 2. En este ejemplo se solicita calcular la derivada de la función: f(x)= 2^{x} en x=0, tanto gráfica como numéricamente. La situación es la que se muestra en la figura de abajo, donde la recta tangente tiene una pendiente que está entre 0.5 y 1, para ello se estima la razón promedio de cambio entre los valores: $0 \leq x \leq 0.0001$, para obtener: $[2^{0.0001} - 2^{0}] / [0.0001-0] = 0.69317$ aprox.

Figura n° 33. Derivada de y=2^{x} en x=0.



Ejemplo 3. En este ejemplo se solicita, dada una función de manera gráfica, si las siguientes cantidades son positivas o negativas, los valores solicitados son:

$$f'(1), \quad [f(3) - f(1)]/[3 - 1] \quad \text{y} \quad f(4) - f(3).$$

Con este ejemplo, las estimaciones solicitadas a partir de un gráfico se hacen patentes, hecho muy poco común en la mayoría de los textos.

Termina esta sección con la estimación de la derivada de forma numérica. Para ello se considera una tabla que exhibe para los años: 1800, 1900, 1950 y 1970, la cantidad de tierra de cosecha por persona para dichos años. En efecto:

Año	1800	1900	1950	1970
Tierra para cosechar acres/ persona)	3.51	2.03	1.24	0.84

Con estos datos se solicita:

a) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de cambio de la tierra de labranza por persona entre los años 1800 y 1970?

b) Calcule f ' (1950) y dé su respuesta en términos de labranza.

Por su parte este ***Ejemplo 3***, muestra la estimación de la derivada a partir de una tabla, hecho inusual en la mayoría de los textos de cálculo.

La sección termina con un listado de problemas donde se debe aplicar la metodología usada en estos ejemplos ilustrativos mencionados.

La siguiente sección comienza con la estimación de la derivada a partir de su gráfico, como la pendiente de la recta tangente en puntos determinados de ella.

La respuesta a la interrogante: *¿qué indica gráficamente la derivada?* les permite a estos autores asociar el signo de la derivada (positivo o negativo) con la monotonía de la función, esto es, si ella es creciente o decreciente.

En suma, los distintos enfoques para estimar la derivada indican un tratamiento ***Alto*** para este concepto, donde se asocia la razón de cambio instantánea con su valor en un punto de la función, a través de distintas representaciones, como lo señalaron sus autores al comienzo del texto y como ha quedado demostrado en el análisis hecho.

Para dar término a esta sección, se presentan tres cuadros comparativos, en donde se pretende mostrar en ***forma resumida*** los aspectos ***más relevantes*** del estudio realizado en estos diez textos. Por motivos de espacio, se presenta en primer término, cuatro de ellos, y a continuación en dos cuadros agrupados de tres en tres el análisis de los textos siguientes hasta completar el total de diez, como ya se ha mencionado.

Los cuadros aludidos corresponden a las *Tablas n° 14, n° 15 y la Tabla n° 16, ellas* se presentan en las páginas siguientes, para una mejor visualización y comprensión de las mismas.

Tabla n° 14. Cuadro comparativo: derivada, cuatro textos.

	Lang	***Apostol***	***Zill y Wright***	***Steiner***
Comentario inicial.	Enseñar los conceptos fundamentales de derivada e integral.	Colección de ideas fascinadoras y atrayentes del pensamiento humano.	El estudio del Cálculo Diferencial se motiva encontrando la recta tangente a una función.	Interesa saber cómo varía una cantidad física al pasar de un estado a otro, y la tasa de variación con respecto al tiempo, por ejemplo.
Conocimientos Previos.	Números y funciones. Gráficas y curvas.	Cálculo Integral y sus aplicaciones. Funciones continuas.	Funciones y Límite de una Función.	Número, variables y álgebra. Funciones algebraicas y trascendentes.
Forma de abordarlo.	Usa la función $y= x^2$, en P= (1,1) y en P=(x, x^2), estimando la pendiente de la recta tangente en dichos puntos.	Usa un problema físico, lanzamiento de un proyectil, cuyo modelo es: $f(t)= 45t-5t^2$.	Determinando la recta tangente a una curva en un punto y estimando la velocidad media e instantánea.	Usa la función $y= ax^2+bx+c$, estimando $\Delta y / \Delta x$, y después el límite de este cociente.
Definición.	Como límite del cociente de Newton.	Como límite de la variación media.	En cuatro pasos que conducen al límite del cociente incremental.	Como el límite del gradiente, esto es, como el límite de la tasa de variación.
Valoración	Alta	Alta	Alta	Regular

Tabla n° 15. Cuadro comparativo: derivada, tres textos.

	Larson et al.	***Stewart***	***Leithold***
Comentario.	El Cálculo se desarrolló al alero de cuatro problemas: el de la tangente, el de la velocidad y aceleración, el de máximos y mínimos y el problema del área.	Se ocupa de cambio y movimiento, esto es, se relaciona con cantidades que consideran otras cantidades.	Gran cantidad de problemas en Cálculo dependen de la estimación de la recta tangente a una función en un punto.
Conocimientos Previos.	Números reales. Funciones. Límite y continuidad.	Funciones y modelos. Límite.	Funciones. Límite y continuidad.
Forma de abordarlo.	Usa la estimación de las pendientes de las rectas secantes como aproximación a la pendiente de la recta tangente.	Haciendo ver la coincidencia entre estimar la recta tangente y la velocidad de un objeto, son el mismo problema.	Estimando la pendiente de la recta tangente a f, con f una función cuadrática y posteriormente una función cúbica.
Definición.	Como límite del cociente incremental.	Definición clásica, esto es, como el límite del cociente de Newton.	Definición clásica, esto es, como el límite del cociente incremental.
Valoración.	Alta	Alta	Alta

El cuadro comparativo de los tres últimos textos, se presenta en la página siguiente.

Tabla n° 16. Cuadro comparativo: derivada, tres últimos textos.

	Flores, Vidal y Villarroel	***Cruse y Lehman***	***Hughes –Hallett et al.***
Comentario.	El gran tema del cálculo diferencial no es otro que la derivada.	El cálculo se inventó para resolver problemas que están fuera del alcance de los métodos algebraicos.	La derivada se puede interpretar en forma geométrica como la pendiente de una curva, y físicamente, como la razón de cambio.
Conocimientos Previos.	Números reales. Funciones. Límite de funciones Continuidad.	Determinación de tangentes a una curva, por el método de Descartes. Límites de Fermat para la resolver la misma temática.	Funciones y cambio.
Forma de abordarlo.	La intuición relacionada con un problema de orden físico, la velocidad media, para dar paso a la velocidad instantánea. Y, después dar con significado geométrico como la recta tangente.	Por medio de la estimación de la pendientes a una curva en un punto dado de ella.	Estimando la velocidad instantánea, para posteriormente ver su significado geométrico, como la pendiente de la recta tangente a f en un punto dado.
Definición.	Como límite del cociente incremental.	Definición clásica, esto es, como el límite del cociente de Newton.	Como una función que toma distintos valores, referidos a la pendiente de la recta tangente a la curva en dichos puntos.
Valoración.	Alta	Regular	Alta

Del estudio realizado sobre el concepto de la “*derivada*”, referido a estos diez textos de cálculo, se pueden inferir las siguientes ***Conclusiones,*** las que se exponen a continuación.

Conclusiones sobre el *tratamiento dado al concepto de la derivada:*

1. ***No hay textos mejores que otros en esta materia***, el calificativo dado a cualquiera de ellos dependerá del programa que se desee desarrollar y qué tipo de estudio se desea llevar a cabo. Por lo tanto, es necesario tener en cuenta por un lado el programa de estudios y, por otro lado, a qué clase de estudiantes se dirigirán los esfuerzos académicos destinados a revisar el Cálculo Diferencial. Ello obliga la docente a tener presente la carrera a la que están adscritos dichos estudiantes. Si además, se conoce el perfil de egreso de dichos estudiantes, tanto mejor, pues así podrá focalizar de mejor manera sus tareas docentes encaminadas todas ellas a producir mejores aprendizajes por parte de los estudiantes.

2. ***Es evidente la evolución que han experimentado los textos de Cálculo***, de disponer de muy pocas figuras en su presentación a disponer de un número significativo de ellas. Con el claro propósito de clarificar las ideas que en él se exponen para el aprendizaje. Una forma de comprobar lo anterior es examinar los textos de *Lang (1990)* y *Larson et al. (2009),* escritos en un plazo de alrededor de 20 años entre ellos. Lo anterior no significa restar méritos al texto

de *Lang*, que en su momento fue uno de los textos disponibles para el estudio del Cálculo y, lo sigue siendo hasta ahora.

Pero, la fuerza del tiempo y de las Editoriales, poco a poco comienza a ser notoria. Además, se vive hoy en día más pendiente de las imágenes que del contenido propiamente tal.

3. ***Casi todos los textos siguen la presentación tradicional***, esto es, funciones, límites y continuidad, derivadas y sus aplicaciones. Se ha encontrado que sólo dos textos, el de ***Apostol*** *y el de* ***Cruse y Lehman*** escapan a esta regla, el primero siguiendo el desarrollo histórico que tuvo el Cálculo en sus inicios, esto es, comenzando con el estudio del cálculo integral, el otro texto, inicia motivando de entrada con dos problemas de optimización, los cuales son abordados en el transcurso del desarrollo del texto, con el concepto de la derivada una vez que esta se ha examinado.

4. En atención a lo anterior, si el texto sigue una presentación canónica, entonces ***los conocimientos previos*** que cada uno de los autores sigue ***se limitan básicamente al estudio de las funciones y al concepto de límite y continuidad***, con sus respectivas propiedades.

5. ***El recurso más usado para presentar el concepto de la derivada sigue siendo la estimación de la pendiente de la recta tangente en conjunto con algunas aplicaciones de orden físico***, como son la estimación de la velocidad y la aceleración, que corresponden a la estimación de la razón de cambio

instantánea de la función posición y de la función velocidad en cada caso. La definición clásica de la "*derivada*" corresponde al límite del cociente incremental. Para autores como ***Zill y Wright*** (2010), avanzar en su estimación mediante los cuatro pasos es lo aconsejable, desde su inicio.

6. El texto de ***Cruse y Lehman*** (1983), merece sin duda un cometario aparte en estas conclusiones. Su enfoque es muy distinto al resto, y con ello se convierte en un excelente texto para introducir a nivel de secundaria la problemática de la estimación de tangentes a una curva en un punto. La presentación de dos problemas donde su aplicación es importantes resulta atrayente y motivadora, al menos para los docentes.

Estas conclusiones, unidas a aquellas que se desprenden del estudio sobre el concepto "límite", se espera que orienten el diseño de las actividades didácticas de aprendizaje de modo de propiciar, en conjunto con el diseño curricular modular un mayor aprendizaje del cálculo diferencial.

Se espera además que, el estudio realizado, contribuya a conformar de manera clara y elocuente, en el contexto que toma lugar esta investigación, antecedentes y un estado de la Problemática que se ha venido describiendo hasta ahora, cual es, el cálculo diferencial, como materia a ser enseñada y aprendida por los estudiantes que la cursan como parte importante de su currículo de formación de pregrado.

A continuación se revisan los otros elementos necesarios, como el Modelo Educativo, para dar coherencia y sentido al desarrollo de las actividades didácticas de aprendizaje del cálculo y, que fueron explicitadas en la parte inicial del acápite 2.5.3 del presente capítulo, el II.

2.5.3.3. El modelo educativo de la Universidad del Bío-Bío

> *El Modelo Educativo de la Universidad del Bío-Bío (UBB) es un marco general que establece una base conceptual global para la docencia de toda la universidad y contiene la representación del diseño, de la estructura, de los componentes curriculares esenciales del proceso formativo y de las relaciones entre éstos. Incorpora el sello institucional a través de los ejes temáticos: compromiso, diversidad y excelencia"*
>
> *(Modelo educativo, 2010).*

Además, el ***Modelo educativo de la UBB*** se enmarca en la naturaleza de esta institución, que se define a sí misma como: ***Estatal, Pública y de carácter Regional***, e r inserta geográficamente en la octava región del país (Chile), específicamente en la Región del Bío-Bío.

Respecto del proceso de enseñanza aprendizaje, este Modelo educativo se concibe eminentemente activo, dado que la formación se orienta al logro de aprendizajes significativos, unido al desarrollo de competencias tanto genéricas como específicas.

En cuanto al estudiante, concebido como un ser social, sujeto y protagonista de las variadas interacciones sociales a la que se ve envuelto a lo largo de su vida educativa. Desarrolla, además, aprendizajes desde su experiencia marcados por contextos significativos y auténticos que le provee su contexto y la propia Institución, encaminados todos ellos a desarrollar en él capacidades y competencias para aprender y solucionar problemas.

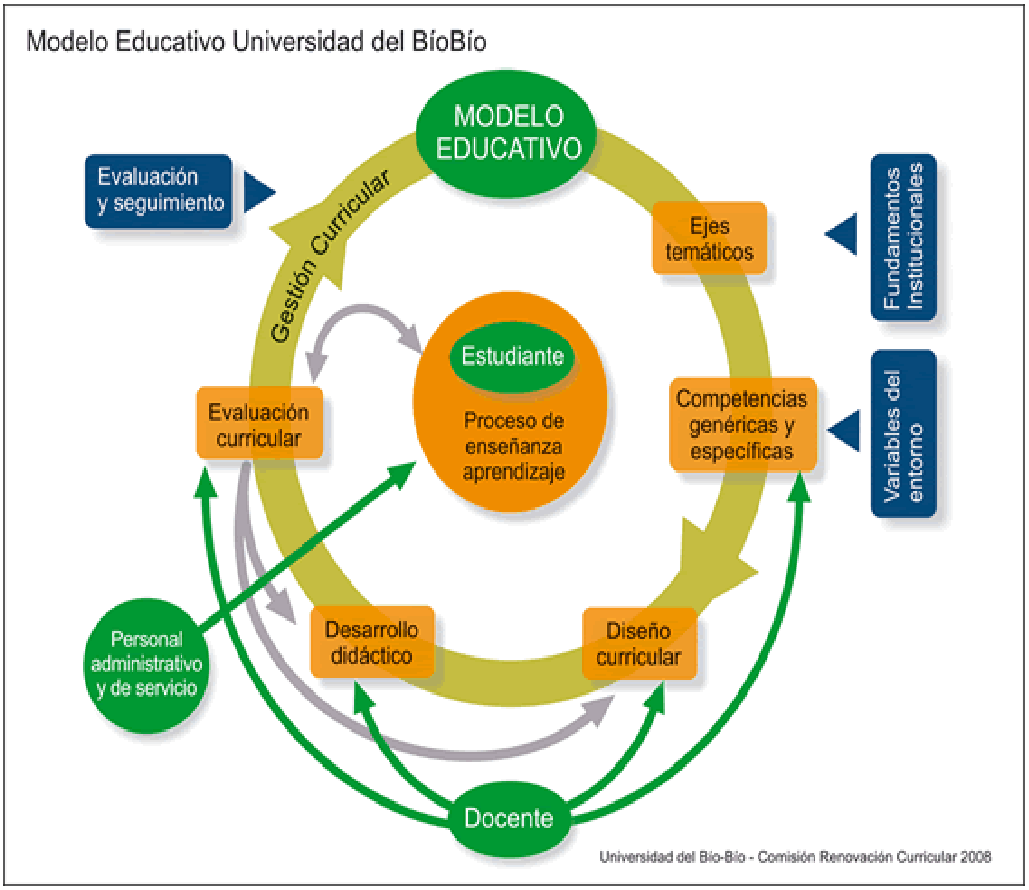
En lo que se refiere al docente, este es el encargado de desarrollar en el estudiante las diversas capacidades de modo tal que pueda ser un sujeto útil a la sociedad a la cual se debe una vez egresado. El docente, además, es el responsable de diseñar y organizar el currículo con una visión de conjunto y atendiendo a todos sus componentes que lo conforman, como son: el diseño curricular, el desarrollo didáctico y la evaluación curricular oportuna del proceso educativo.

Dado que el enfoque curricular se centra en el estudiante, la evaluación se focalizará en logros de aprendizaje que permitan verificar los conocimientos, habilidades y capacidades alcanzadas en su proceso de formación.

La concepción del soporte técnico –administrativo en la formación del estudiante se manifiesta en que colabora, acompaña , provee y gestiona los recursos humanos y materiales para atender las necesidades del estudiante y fortalecer el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje en la Universidad. Además, contempla la participación activa y coordinada de los servicios de biblioteca, desarrollo estudiantil, registro académico, servicios informáticos, secretarias de carreras y del personal auxiliar.

Todos estos aspectos, considerados con sus respectivas concepciones, configuran el Modelo Educativo de esta casa de Estudios Superiores. El diagrama que a continuación se presenta ilustra el Modelo que, en parte, se ha comentado.

Figura n° 34. Modelo Educativo de la UBB.



Como corolario de esta concisa presentación, se desprende que, en el centro del proceso de enseñanza aprendizaje el estudiante debe ser el protagonista central, al menos es lo que se deduce de la figura anteriormente expuesta y propiciada por su sostenedores (Modelo Educativo UBB, 2010).

2.5.3.4. El perfil de egreso

Se considera, en primer término, el perfil de egreso de la propia institución a ***nivel superior***. Con ello se desea manifestar la importancia que posee todo contexto educativo y, a su vez, poder entender de manera cabal bajo qué circunstancia se realizó la fase experimental de la presente tesis doctoral, asunto que será comentado en los próximos capítulos de este trabajo.

Así, el perfil de egreso del estudiante de la UBB, considera aquellas competencias genéricas contenidas en el sello institucional, estructurado en los ejes temáticos: ***compromiso, diversidad y excelencia,*** que debe poseer el profesional UBB, definidos en el Modelo Educativo. De manera textual se menciona que:

> *"El egresado de la Universidad del Bío-Bío se distingue por el compromiso permanente con su aprendizaje y por la responsabilidad social con que asume su quehacer profesional y ciudadano. Respeta la diversidad, favoreciendo el trabajo colaborativo e interdisciplinario. Potencia sus capacidades de manera integral para servir a la sociedad con innovación y excelencia".*
>
> *(Modelo Educativo, 2008, p. 32)*

En lo que dice relación con los ejes temáticos: ***Compromiso, Diversidad y Excelencia,*** se señala también explícitamente lo siguiente:

Compromiso:

DISPOSICIÓN PARA EL APRENDIZAJE:

Manifiesta una actitud permanente de búsqueda y actualización de sus aprendizajes, incorporando los cambios sociales, científicos y tecnológicos en el ejercicio y desarrollo de su profesión.

RESPONSABILIDAD SOCIAL:

Asume un rol activo como ciudadano y profesional, comprometiéndose de manera responsable con su medio social, natural y cultural.

Diversidad:

TRABAJO COLABORATIVO:

Establece relaciones dialogantes para el intercambio de aportes constructivos con otras disciplinas y actúa éticamente en su profesión. Trabaja de manera asociativa en la consecución de objetivos.

Excelencia:

CAPACIDAD EMPRENDEDORA Y LIDERAZGO:

Manifiesta convicción para innovar en su área, toma decisiones y asume riesgos. Ejerce su condición de liderazgo, potenciando las capacidades de las personas y /o grupos para alcanzar objetivos deseados.

CAPACIDAD PARA COMUNICARSE:

Posee habilidades comunicativas orales y escritas para interactuar efectivamente con los demás, expresando ideas y sentimientos. A nivel básico, se comunica en un segundo idioma"

(Modelo educativo, 2010, p. 33).

Hecho este análisis previo sobre el perfil de egreso genérico del estudiante que desea formar la UBB, se pasa ahora a considerar el perfil de egreso de la Carrera de Ingeniería en Alimentos, carrera sobre la cual se realizará el primer estudio (segunda fase) en su etapa experimental.

Así, el ***perfil de egreso*** del estudiante de la Carrera de ***Ingeniería en Alimentos es:***

"Serás un profesional con una sólida formación en ciencias e ingeniería de procesos de alimentos, altamente calificado para diseñar, desarrollar y adaptar nuevas tecnologías en el procesamiento de alimentos, formular nuevos productos alimenticios. Recibirás una formación integral que te permitirá abordar los desafíos del desarrollo de productos alimenticios, considerando las normativas sanitarias nacionales e internacionales y procurando la preservación del medio ambiente."

(http://ubiobio.cl/admision/Salud_y_Alimentos/24/Ingenieria_en_Alimentos/, 2014)

Por su parte el ***perfil de egreso*** de la Carrera de ***Pedagogía en Ciencias, mención: Biología, Química o Física*** es el siguiente:

> *"Profesional capaz de vincular teoría y práctica en un continuo, producto de la formación pedagógica y de la especialidad, con un sólido dominio de contenidos en las disciplinas de las áreas Biológica, Química y Física, así como de las Ciencias de la Educación"*
>
> *(http://ubiobio.cl/admision/Educacion_y_Humanidades/28/Pedagogia_en_Ciencias_Naturales_con_mencion_Biologia_Fisica_o_Quimica/, 2014)*

Al hacer mención del ***perfil de egreso*** de estas dos carreras, se declara implícitamente, conocerlo y hacerse cargo de qué manera se puede, desde el saber matemático, contribuir a que tal perfil de egreso sea una realidad para dichos estudiantes al finalizar sus estudios de pregrado en éstas dos carreras, donde se realizará en estudio en su fase empírica propiamente tal.

Es necesario aclarar que: estos perfiles de egreso descritos han sido el resultado de una serie de consensos del cuerpo académico que trabaja en dichas carreras, en el caso de la Ingeniería en Alimentos, por más de veinte años; por su parte en el carrera de Recursos naturales, de reciente creación, el perfil de egreso no supera los cuatro años de vida. Con ello se desea enfatizar que dichos perfiles presentados no constituyen ideas antojadizas, ni menos una serie de caprichos por parte de la Dirección de estas Escuelas de Formación académica de Pre-grado de la Institución.

2.5.3.5 El programa de la asignatura

El programa de la asignatura es otro elemento importante, por no decir fundamental a la hora de diseñar las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA).

Se debe señalar también que, al interior de esta Casa de Estudios, que sirve de contexto en el cual se realiza la presente investigación, no existe unanimidad en el tema del programa de Cálculo, razón por la cual se han considerado las carreras más afines a los propósitos fijados previamente.

A pesar de lo anterior, existen cuatro temas centrales que están presentes en todos los programas de Cálculo, ellos son:

- *La funciones.*
- *Límite y continuidad de funciones.*
- *La Derivada y*
- *Aplicaciones sobre la Derivada.*

Otro elemento que también está presente es la renovación curricular que se vive al interior de las Carreras, como resultado del proceso de Acreditación de las mismas. Todo ello configura un panorama en constante cambio, sumado a ello está también un posible cambio de Gobierno a nivel político del país, lo que significa un cambio en las políticas educativas en todos los niveles educacionales.

En el *Apéndice Documental* se incluyen los ***Programas de estudio*** de la asignatura de Cálculo 1 de las carreras donde se hizo el estudio, a saber: ***Ingeniería en Alimentos*** y ***Pedagogía en Ciencias Naturales.*** A pesar de las diferencias entre dichos programas se ha optado por considerar los elementos comunes en ambos programas, de modo tal que la propuesta diseñada e implementada sea transversal y de esta forma cubra los contenidos esenciales que contempla el cálculo diferencial propiamente tal. Ello naturalmente, se aprecia mejor una vez que se revisan dichos programas de estudio y se observan sus elementos comunes, pues diferencias prácticamente no las hay.

2.5.3.6. El uso de los recursos informáticos

El ***uso de las Tics*** (Tecnologías de la Información y la Comunicación), es un hecho innegable hoy en día en materia educativa. Cada vez son más las Instituciones involucradas en hacer uso de los medios informáticos disponibles. De esta manera, aunque las asignaturas se impartan de forma presencial, la a sincronía que estos medios virtuales poseen permiten que los estudiantes puedan revisar, cuando lo estimen conveniente, contenidos, evaluaciones, correos y foros. Para el caso particular de la fase experimental, las plataformas Adecca como Moodle, son dos excelentes sitios como gestores de contenidos, los cuales permiten además de ofrecer un ordenado tratamiento de los contenidos, la posibilidad de comunicación a través de foros y chats a los participantes de un curso (Carrillo et al., 2014).

Para los propósitos de la gestión de los contenidos, en esta investigación se ha usado ***Adecca***, cuyo link es: http://adecca.ubiobio.cl/curso/1017 Sin ir más lejos, la UNED es un ejemplo palpable de una institución que hace uso de los recursos tecnológicos para ejercer su función formadora y de comunicación entre sus estudiantes, profesores y personal administrativo en muchas partes del mundo, ella no podría tener los alcances y trascendencia que tiene si no dispusiera de un importante espacio virtual que hoy proveen los medios tecnológicos.

Otro recurso informático hoy en día lo constituyen los CAS, paquetes de cálculo simbólico. Dos claros ejemplos de ello son Mathematica y Matlab, los cuales permiten realizar cómputos simbólicos de expresiones algebraicas como determinar el valor de una derivada, de una integral o dar solución a una ecuación diferencial por ejemplo. Estos medios se comenzaron a usar a finales de la década de los 80. Así, con toda propiedad son atendibles, hoy en día, las palabras de Carrillo et al. (2014, p. 2101) al señalar que: "…*el uso de los CAS ha ido en aumento a lo largo de estos años y hoy en día no es concebible una asignatura de matemáticas en una Escuela de Ingeniería sin que tenga un Laboratorio de Matemáticas…o bien que un CAS esté integrado en la docencia al mismo nivel que otros instrumentos de enseñanza*". Lo anterior supone que de usarse estos medios como apoyo a la labor docente, el trabajo del estudiante debiera centrarse más en la comprensión de los conceptos matemáticos más que en la realización de estimación de cálculos engorrosos y que en muy poco aportan al conocimiento matemático. Esto que es muy cierto está en contraposición con el escaso saber matemático que poseen los estudiantes al inicio de sus carreras de pregrado, de modo que la realización de dichos cálculos, usando lápiz y papel está plenamente justificada por esta sencilla e importante razón, además depender de manera casi exclusiva de los medios informáticos también trae sus consecuencias que están a la vista, como no poder resolver un simple cálculo que bien puede realizarse sin estos medios.

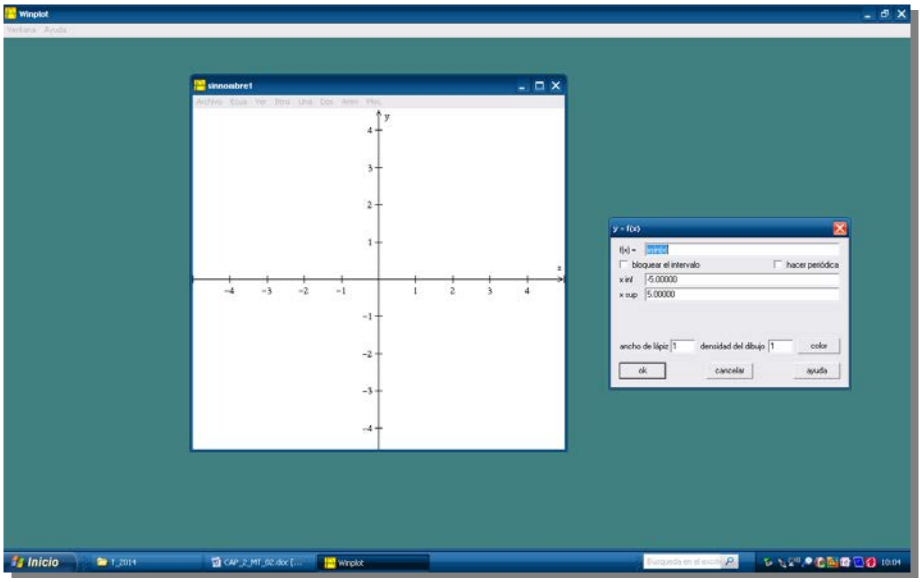
Pero el uso de las Tics no se limitan tan sólo a este ámbito de acción hoy en día, hay otro aspecto que merece la atención. Como se sabe el cálculo diferencial es en esencia la Matemática del cambio, y una de las formas de visualizar estos cambios de manera dinámica la proveen los software que han sido diseñados en la actualidad para tal efecto. Atendiendo a este hecho, la intervención didáctica cree oportuno apoyarse y materializar esta propuesta usando estos medios informáticos, como una forma de lograr una mejor y más clara comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Monge, 2011).

En virtud de lo anterior, se han usado dos software de carácter matemático para apoyar el proceso de aprendizaje, en donde tanto la ***simulación*** como la ***visualización*** juegan un papel relevante a la hora de revisar los conceptos matemáticos del cálculo de una variable. Ambos software son de dominio público y de fácil manejo para el usuario, lo que representa, sin duda, una virtud. Además su aplicación se hace cada vez más transparente, al usanza de un bolígrafo, donde la tarea a realizar es visible y el medio, en este caso, Winplot o Geogebra deberían ser invisibles para quienes lo usan.

Así, se ha incorporado en las actividades didácticas diseñadas el uso de ***Winplot*** o/y ***Geogebra***. De paso se puede agregar que, red provee de abundante material para ser usado tanto por los docentes como por los estudiantes con el claro propósito de poder ampliar el conocimiento de estos medios como de sus posibles aplicaciones didácticas, sólo es asunto de saber buscar.

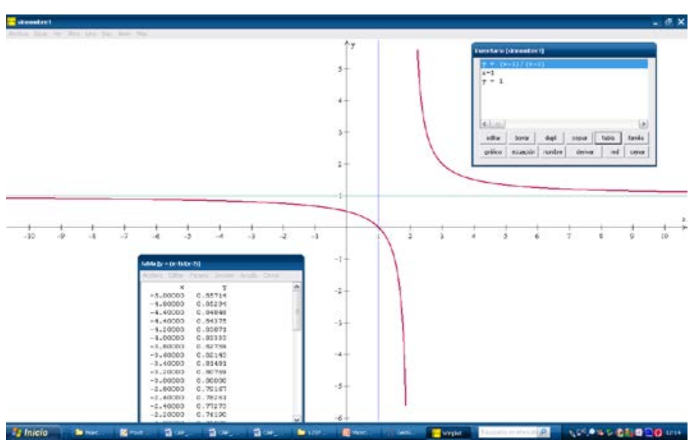
En primer término se presenta el software ***Winplot***. La pantalla de inicio de él se presenta a continuación. Se incluye además una aplicación básica del mismo, todo ello en la página siguiente, para una mejor visualización de lo que se desea exponer.

Figura n° 35. Pantalla de inicio del software Winplot.



A continuación, la pantalla muestra el gráfico de la función: ***y=1/(x-2)***, junto a una pequeña parte de su tabla de valores. También se muestra las funciones del inventario, que en este caso son: y=1 y x=1, la primera es una asíntota para la función representada. De más está decir que la ventana de salida para visualizar la gráfica en estudio se puede manejar a voluntad por el usuario.

Figura n° 36. Una muestra de aplicación del software Winplot.



Sin duda, la mayor virtud de Winplot es su capacidad de representación gráfica, tanto en dos como en tres dimensiones (2- dim, 3-dim). Así, es posible representar en el plano de dos dimensiones (2-dim) gráficas dadas en forma:

Explícita, Paramétrica, Implícita y Polar.

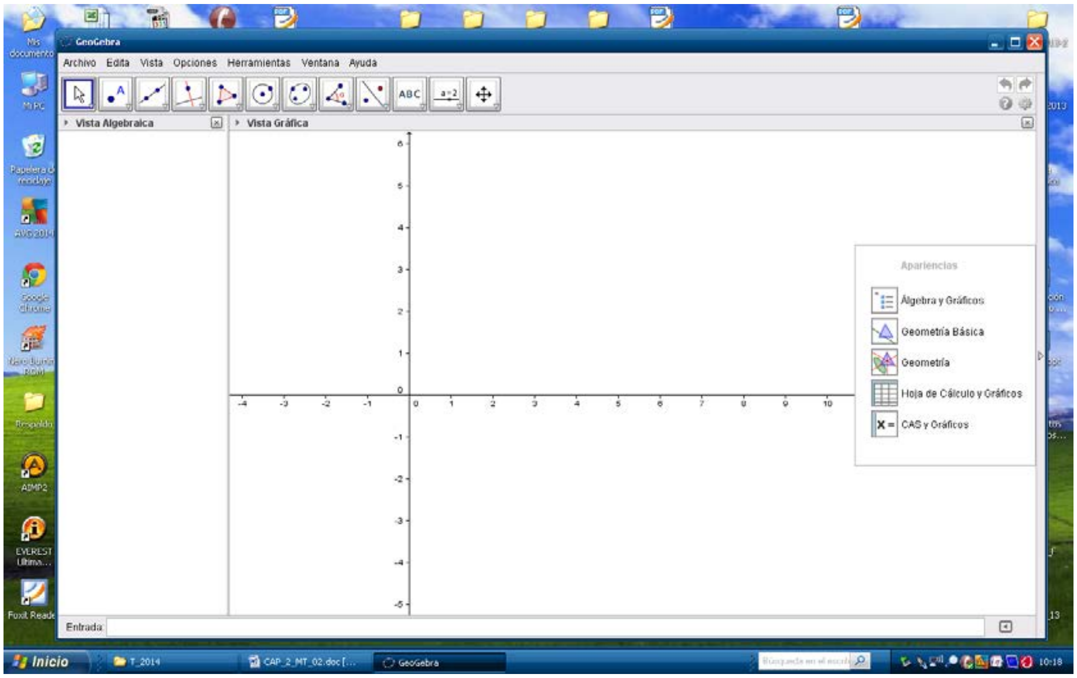
De esta manera se cubre el amplio espectro de posibilidades para representar gráficamente cualquier expresión matemática dada en cualquiera de las formas mencionadas.

Software, como el que se acaba de mencionar hay muchos, pero se ha optado por ***Winplot*** por dos motivos esenciales, a saber, su fácil uso y su carácter público, lo que lo hace accesible para todo usuario.

Por su parte ***Geogebra,*** además de poder evidenciar la representación gráfica y algebraica de una función y su derivada, permite visualizar el comportamiento de las rectas secantes entre dos puntos y cómo al mantener fijo uno de los puntos, las rectas secantes se aproximan a la recta tangente y, con ello poder visualizar la representación gráfica de la derivada en un punto, esto es, su recta tangente.

A continuación se exhibe el programa ***Geogebra,*** en su pantalla de inico, para una mejor visualización, ella se exhibe en la página siguiente.

Figura n° 37. Pantalla de inicio del software Geogebra.

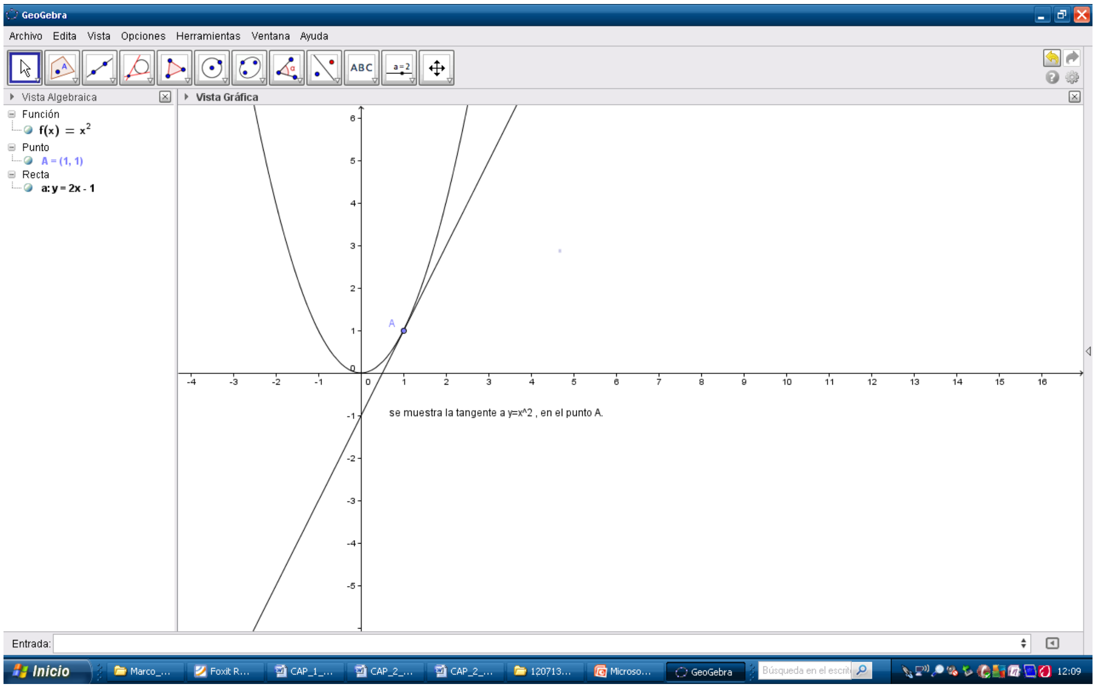


Las mismas razones esgrimidas para el uso de software anterior son también válidas para la elección de Geogebra, esto es, su fácil uso y ser un software de dominio público.

En la esta página se ilustra una de las aplicaciones descritas al inicio y, en donde la noción de la Derivada, en su interpretación geométrica queda de manifiesto.

Una aplicación del uso de Geogebra permite visualizar ***el comportamiento de la recta tangente en un punto para la función y= x^2,*** como bien se ilustra en la figura de a continuación.

Figura n°38. Ilustración de la recta tangente a una curva, su derivada.



Se insiste, una vez más, que el ***mayor aporte*** del software usado estriba en la ***Visualización y Simulación*** de los objetos matemáticos tratados; como también la posibilidad de la representación de dichos objetos en distintos registros, como son el registro algebraico, tabular y gráfico.

Sin perjuicio de las Actividades que se generan para usar Geogebra, están los recursos disponibles en la Red en forma de Applets.

Prueba fehaciente de lo dicho anteriormente lo constituye el enlace: http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/GeoGebraCalculusApplets.html , el que constituye una valiosa fuente de recursos informáticos no sólo relacionados con el Cálculo, como podrá apreciar quien visite dicha página de Internet.

2.5.3.7. La resolución de problemas

Se ha hecho mención con anterioridad, en un acápite a: "Algunos aportes de investigadores destacados", y de manera más precisa en el trabajo: "***Ebp como metodología activa para la enseñanza del Cálculo Diferencial***", de los autores: García, Moreno y Azcárate (2008), a la importancia de la ***resolución de problemas*** como uno de los más importantes recursos didácticoas para el aprendizaje de la Matemática. Se puede afirmar, sin temor a equivocarse, que en ello se cifra gran parte del aprendizaje de la Matemática, de ahí entonces su importancia desde siempre. Más aún, ello está avalado por dos grandes Matemáticos como Polya y Hamos que se permiten, al respecto, acotar lo siguiente, a saber:

> *"Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"*
>
> *(Polya citado en García (1992, p. 1).*

> *"Lo que se puede enseñar es la actitud correcta ante los problemas, y enseñar a resolver problemas es el camino para resolverlos (...). El mejor método no es contarles cosas a los alumnos, sino preguntárselas y, mejor todavía, instarles a que se pregunten ellos mismos".*
>
> *(Halmos citado en Carbó et al. (2002, p. 38).*

Como educadores se han de tener presente estas consideraciones, sumado a otros aspectos que se derivan de ellas como reconocer el hecho que ***Lo realmente importante no es dar con la solución, sino más bien abordar caminos o el camino, según sea el caso, que conduzca a la solución del problema.***

Ahora bien, la competencia para resolver problemas es una de las habilidades fundamentales que deberían adquirir los estudiantes en su período de escolaridad, de ello no se puede inferir, sin embargo, que dicha habilidad será vital para enfrentar con éxito los problemas de la vida, que sin duda son de otro tenor, pero al menos algunas de las estrategias usadas en su solución podrán ayudarles a abordar un problema humano con otros recursos, como los que proveen las estrategias insinuadas por Polya.

Si se aborda con algo más de cuidado las orientaciones dadas por Polya (1965), la metodología que presenta se describe en sus consabidos cuatro pasos, como son:

- *Entender el problema.*
- *Diseñar un plan de acción.*
- *Ejecutarlo y*
- *Comprobar si la solución es la correcta.*

Bajo el primer punto, esto es, *Entender el Problema*, caben interrogantes como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplir las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita? ¿O son insuficientes? ¿O son redundantes? ¿O son contradictorias?

Para el segundo punto, resultan atendibles las interrogantes como: ¿Se ha encontrado antes con el problema? ¿O lo ha visto antes de forma algo diferente? ¿Conoce algún problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que puede resultar útil?

Una vez diseñado un plan de trabajo, el siguiente paso para avanzar en la solución del Problema consiste en llevarlo a cabo paso a paso, comprobando cada uno de dichos pasos, con el propósito de comprobar que cada paso es correcto y que además se puede demostrar que es correcto.

Por último, es necesario examinar la solución obtenida. Por ejemplo, examinar si es posible comprobar el resultado, comprobar el razonamiento, extraer el resultado de otra manera, y finalmente, analizar si se puede utilizar el resultado o el método para algún otro problema.

En el contexto europeo el matemático español Puig Adam, aun cuando tuvo una gran influencia de Polya, criticó la insuficiencia y generalidad de los consejos dados por él en el párrafo anterior. Sin embargo, valoró mucho las aportaciones de Polya recogidas en su estudio sobre el razonamiento plausible en Matemática, pues en ella el tipo de razonamiento que se desprende de los consejos que da en su publicación "How to solve it", es reemplazado por un razonamiento fundado en la inducción, en la analogía o en la inferencia.

Otro personaje digno de mención es: ***Allan Schoenfeld*** (1985), matemático norteamericano, que propone un marco con cuatro componentes que sirvan para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas. Dichas componentes serían:

- *Los Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición de quien resuelve un problema.*
- *La Heurística: conjunto de reglas para progresar en situaciones dificultosas.*

- *El Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.*
- *El Sistema de creencias: la perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y como trabajar en ella.*

Cada uno de estas componentes explica las carencias, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de parte de quienes resuelven problemas.

Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla, se señala la ausencia de un buen control o gestor de los recursos disponibles. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que quien resuelva no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de recursos cognitivos como explicación al intento fallido en la resolución.

Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente de quien resuelve, pero sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática haga que no progrese en la resolución. La explicación, para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las creencias.

Por último están las heurísticas. La mayor parte de las veces se carece de ellas. Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución.

Las heurísticas son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución.

Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes se podrían mencionar:

- *Buscar un problema relacionado.*
- *Resolver un problema similar más sencillo.*
- *Dividir el problema en partes.*
- *Considerar un caso particular.*
- *Hacer una tabla.*
- *Buscar regularidades.*
- Empezar el problema desde atrás.
- Variar las condiciones del problema.

Sin embargo, como bien ha señalado Puig (1996), en la lista anterior aparecen demasiadas cosas juntas, que son, por otro lado, diferentes si se someten a un detenido análisis.

- *Buscar un problema relacionado es una sugerencia heurística pues se señala una dirección de trabajo, y sobre todo se recurre a la memoria del resolutor, y no a un procedimiento concreto para buscar tal problema.*

- *Considerar un caso si se refiere a un procedimiento en concreto que permite, a partir del problema dado, formular un problema relacionado con él. Puig (1996) denomina a este tipo de procedimientos, independientes del contenido y que permiten transformar el problema dado en otro, con el nombre de herramientas heurísticas. Tal observación parte de una nota marginal de Polya.*
- *Por último, hacer una tabla se podría considerar como una destreza al no poseer el carácter de transformar el problema ni al recurso de la memoria como en el caso de las sugerencias heurísticas.*

La característica más importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso-a-paso sino más bien un proceso titubeante.

En el proceso de resolución, Schoenfeld ha señalado que tan importante como las heurísticas es el control de tal proceso, a través de decisiones ejecutivas. Tales decisiones son acerca de qué hacer en un problema. La característica más importante que define a las decisiones ejecutivas y a las acciones de control, es que tienen consecuencias globales para la evolución del proceso de resolución de un problema.

Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para la resolución del problema. Son decisiones ejecutivas:

- *Hacer un plan.*
- *Seleccionar objetivos centrales y sub objetivos.*
- *Buscar los recursos conceptuales y heurísticos que parecen adecuados para el problema.*

- *Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.*
- *Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.*

Las anteriores son decisiones ejecutivas tal y como se usa ese término en Inteligencia Artificial, son equivalentes a las decisiones de gestión en el campo de los negocios, o decisiones de táctica y estrategia en el campo militar. El término metacognición se ha usado en la literatura psicológica en la discusión de fenómenos relacionados con el que aquí se trata. Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas: ¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿Para qué lo hago? ¿Cómo lo usaré después?, mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos desastrosos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces en que se fracasa en la resolución de un problema es debido a que, la persona que afronta el problema, no dispone de un *plan de solución*.

Pero hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:

- ***Inflexibilidad para considerar alternativas.*** Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.

- ***Rigidez en la ejecución de procedimientos.*** Más de una vez se intenta encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable. Esta obstinación es debida al simple hecho de que parece apropiada a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a aquella en que el procedimiento fue eficaz.
- ***Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción.*** Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta antes de ejecutar una acción pensada: cuando se haya ejecutado lo pensado ¿qué consecuencias tendrá para la resolución del problema?
- ***El efecto "túnel".*** Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se está realizando. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se está en la ejecución de una acción.

Ahora, también en el contexto español ***Miguel de Guzmán Ozámiz*** (1936- 2004), partiendo de las ideas de Polya, Mason et al. (Mason, Burton y Stacey, 1988) y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó como pensamiento productivo. Así, son suyas las siguientes ideas (Guzmán, 1991), a saber:

- ***Familiarízate con el problema.***

  Trata de entender a fondo la situación.

  Con paz, con tranquilidad a tu ritmo.

  Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

- ***Búsqueda de estrategias.***

  Empieza por lo fácil.

  Experimenta.

  Hazte un esquema, una figura, un diagrama.

  Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.

  Busca un problema semejante.

  Inducción.

  Supongamos el problema resuelto.

  Supongamos que no.

- ***Lleva adelante tu estrategia.***

  Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior.

  Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea.

  Si las cosas se complican demasiado hay otra vía.

  ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

- ***Revisa el proceso y saca consecuencias de él.***

  Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?

  Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.

  Mira si encuentras un camino más simple.

  Mira hasta dónde llega el método.

  Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

Por último, se mencionan algunas ideas que representan las ventajas del enfoque basado en la Resolución de Problemas en materia de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ellas podrían ser:

- *Tal vez no importe tanto, en una primera instancia, dar con la solución de un problema como el hecho de abordarlo y hacerlo propio, el peor error de los maestros, una vez dado un problema es darle la solución a los estudiantes.*

  Lo anterior contribuye en el aspecto formativo de los estudiantes, creando en ellos estructuras formativas que sin duda trascienden a las Matemáticas.
- *El conocimiento obtenido mediante la resolución de problemas es un conocimiento basado en la experiencia y, por tanto, más valioso para el estudiante que aquel que el docente intenta trasmitir, sin que medie un esfuerzo para adueñarse de ese conocimiento.*

- *La Resolución de Problemas, sean estos rutinarios o no rutinarios, está en el corazón de las Matemáticas, por tanto, hacer Matemáticas no es otra cosa que Resolver Problemas.*
- *Hay que tener presente que el único camino que existe para aprender a resolver problemas, es enfrentarse con ellos, aunque, como ya se dijo, no se dé con su solución.*

Estas consideraciones justifican plenamente la necesidad de transitar por medio de la Resolución de Problemas, si de verdad lo que se desea es aprender no tan sólo a resolver problemas, sino aprender Matemáticas.

En definitiva, lo cierto es que ***sin Resolución de Problemas***, sean rutinarios o no rutinarios, ***no es posible aprender Matemática***, por más que se diga lo contrario, de ahí entonces que desde esta consideración trascendental para el proceso de enseñanza – aprendizaje sea fundamental su realización en la acción educativa que intenta realizar el docente, por ello el siguiente acápite no puede ser otro que el describir el diseño de las Actividades Didáctica de Aprendizaje para el Cálculo Diferencial.

2.5.3.8. Las actividades didácticas de aprendizaje propiamente tal

Las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA) representan, con mucho, el resultado de todo este análisis hecho previamente. Así, ellas se configuran en una serie de actividades en pos de un aprendizaje de parte de los estudiantes. Es a ellos a quienes está dedicado todo este esfuerzo preliminar, producto de consideraciones múltiples y como resultado también de la experiencia docente acumulada en años de trabajo con los estudiantes en el aula.

Es pertinente también mencionar que todo ello ha sido posible gracias al impulso dado por el Ministerio de Educación, quien en cierto modo fija pautas y directrices de acción para las Universidades del país en materia de Mejoramiento de la Educación Superior; claro está que si los docentes no se involucran en la participación de los recursos ofrecidos para tales acciones educativas, el resultado como tal es completamente nulo. Como es obvio también, las Universidades que aceptan tales términos del contrato están obligadas a responder tanto financieramente como humanamente a dichos contratos, todo ello, en la esperanza de mejores acciones educativas para producir aprendizajes de una mejor calidad.

Hechos los alcances anteriores, y teniendo presente que una de las mejores maneras de producir aprendizaje matemático se sustenta en la Resolución de Problemas, las ADA se configuran como una selección de problemas tanto rutinarios como no rutinarios a realizar por parte de los estudiantes y, con el decisivo apoyo de parte del profesor de aula y su ayudante como agentes mediadores de sus aprendizajes.

Cada una de las ADA, se agrupan en dos Módulos y cada módulo aborda dos temas, así se tiene:

- ***Módulo 1.*** *Tema 1: Funciones.*

  Tema 2: Continuidad de Funciones.

- ***Módulo 2***. *Tema 3: Derivada.*

  Tema 4: Aplicaciones de la Derivada y miscelánea.

Ahora bien, cada una de las Actividades responde al mismo esquema de presentación, esto es, un *"Título que circunscribe la Actividad"*, un *Objetivo central* que, en definitiva responde a los resultados de aprendizajes esperados y el correspondiente listado razonable de Problemas, que en ningún caso se asemeja a los abultados listados de Problemas en los que concluye una sección cualesquiera de un texto de Cálculo, como se ha apreciado cuando se realizó el estudio exhaustivo de los diez (10) textos de cálculo, para los cuales se hizo el estudio sobre el concepto de límite y el concepto de derivada, los dos temas centrales del cálculo diferencial.

En el apartado del *Apéndice Documental* se incluirán todas las actividades didácticas desarrolladas para cubrir los cuatro temas centrales mencionados, los cuales conforman los dos Módulos de trabajo para los estudiantes den un curso normal de cálculo diferencial.

Así, para el ***Módulo 1:***

> ***Tema de Funciones:* diez** *actividades didácticas, más una presentación para el proyector.*
>
> ***Tema de Límite y continuidad:* veinticinco** *actividades didácticas.*

Sin perjuicio de ello, agregue una presentación para cada uno de estos dos temas.

*Por su parte, el **Módulo 2** contempla las siguientes actividades:*

> ***Tema de las Derivadas:* nueve** *actividades de aprendizaje.*
>
> ***Tema de Aplicaciones de las Derivadas:* siete** *actividades para desarrollar por parte de los estudiantes. Se incluye además algunas actividades relacionadas con el tema de la integración, con **cinco** actividades de aprendizaje.*
>
> *Al igual que para el Modulo 1, se contempla una presentación para cada uno de los dos temas tratados.*

La plataforma virtual, que hace las veces de bodega, comunicación e interacción con sus usuarios albergó, además textos de Cálculo en versión digital.

Todas estas actividades didácticas descritas anteriormente se incluyen en el apartado correspondiente al *Apéndice* de esta tesis.

Por último, recordar que la propuesta para mejorar el aprendizaje del Cálculo se ha venido realizando desde el año 2010 hasta la fecha, en un continuo perfeccionamiento de su propuesta original y, con ello, fiel a su metodología de trabajo participativa de acción, además la propuesta ha tomado como *referente central* el *diseño curricular Modular* de la asignatura de Cálculo.

Como todo nuevo cambio metodológico que se desea implementar, ha tenido sus detractores y acérrimos críticos desde la propia academia. Ello ha significado, desde el inicio, una fuerte labor de sociabilización para poder instalar el tema y observar de cerca cómo este diseño curricular modular podría dar buenos resultados si se implementaba correctamente por los docentes, ello obligó entonces a participar en diversos cursos de Perfeccionamiento y Pasantías en el extranjero (Estados Unidos y México) de los profesores que en el inicio de la Implementación de la propuesta hicieron las veces de Coordinadores de las diversas materias en las que la investigación se realizó, como fueron las materias de: Álgebra, Cálculo y Física en su parte introductoria.

Así, teniendo en consideración lo expresado se puede decir lo siguiente:

- En atención a los buenos resultados académicos en materia de rendimiento final de las asignaturas de Matemáticas y de Física bajo la propuesta de trabajo modular en dichas asignaturas, las asignaturas tanto de Matemáticas como de Física, en los primeros años de estudio de la Carrera de Ingeniería Civil, avalados por los resultados estadísticos, se ha optado desde el inicio, sin pretender comparar con un grupo control, aplicar la propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo usando el diseño curricular modular como pilar fundamental y la experticia de los mejores profesores de aula para materializarla. Una forma de validar la propuesta ha llevado a comparar los resultados obtenidos antes de la aplicación de ella versus los obtenidos como resultado de su puesta en acción.

- Año a año se ha ido mejorando la praxis de acción realizada como resultado del continuo análisis de la propuesta, en ello la filosofía de la investigación acción es la que ha estado presente para hacer ver que, sin ese análisis reflexivo, no hay una mejora de ninguna acción educativa en contexto y, en donde además, los participantes juegan un rol fundamental.

- Sin perjuicio de lo anterior, se expone el resultado de una experiencia realizada, en la que se ha comparado la propuesta con la enseñanza tradicional. Ello, sin duda, representa una forma de consolidar este proceso de renovación y ajuste curricular del trabajo realizado. Los resultados y análisis obtenidos también se ponen de manifiesto en el transcurso de la tesis.

- Después de haber experimentado la metodología de trabajo, bajo las condiciones descritas en el punto anterior, se ha optado por continuar con el trabajo en los semestres lectivos posteriores de forma de validar y dar mayor sustento a la propuesta de trabajo, donde además del diseño curricular modular se han considerado otros pilares fundamentales como son: la evaluación continua, el uso de los recursos informáticos y la actividad del alumno como centro de su propio aprendizaje, para de este modo estar en plena concordancia con el modelo educativo que intenta consolidar la institución.

Los puntos señalados anteriormente representan la ruta de navegación que se desea explicitar en la fase experimental. Los resultados obtenidos, hasta ahora, consolidan la propuesta que se ha venido desarrollando a lo largo de estos años. Los indicadores del rendimiento académico final obtenido por los estudiantes están aprobando el trabajo realizado y, por cierto, mejorándolo, año tras año.

Luego, en los capítulos que siguen se exponen los resultados de las fases experimentales, no sin antes describir el contexto donde toma lugar la investigación y delinear el diseño de las fases experimentales a realizar. Con todo ello, los números se encargarán de hablar por sí mismos, pues cuando los números hablan las palabras sobran.

*

CAPÍTULO III

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

“El juicio equitativo es aquel que tiene en cuenta el contexto en el que se produce un acontecimiento, sus antecedentes y sus consecuencias”

Tzvetan Todorov

3.1. Introducción

En este capítulo se describe el contexto donde toma lugar la investigación en su fase experimental. Se recorren, entonces, tanto sus aspectos generales como particulares de la Institución, hasta concluir en la asignatura de Cálculo Diferencial propiamente tal.

Con ello, el lector que no conozca la realidad de esta casa de estudios superiores podrá formarse una idea clara y precisa del lugar que ocupa en el concierto local como dentro del contexto de las universidades chilenas.

Los temas que se consideran para configurar la ecología de la institución, llamada Universidad del Bío-Bío (UBB) serán:

- *Algunos antecedentes históricos de su creación.*
- *Visión y misión de la institución.*
- *El organigrama de la Universidad del Bío-Bío.*
- *Descripción de sus Facultades y carreras.*
- *La UBB en cifras.*
- *Otros antecedentes estadísticos.*

Las fuentes de consulta para configurar tal información serán básicamente dos: por un lado el sitio Web de la UBB – http://www.ubiobio.cl/w/- y, por otro lado, el Anuario Estadístico Institucional (2013), editado por la Dirección General de Análisis Institucional de la UBB.

3.2. Algunos antecedentes históricos

La Universidad del Bío-Bío, está ubicada en la parte sur de Chile, y situada en la *Octava Región*, de un total de quince regiones que conforman la distribución geopolítica territorial de norte a sur del país. Es heredera de la más antigua tradición de la educación superior estatal y pública para la mencionada región.

Sus orígenes se remontan a la creación de la *Universidad Técnica del Estado,* UTE, ocurrida el 9 de abril de 1947, bajo la presidencia de la República de Chile de Don Gabriel González Videla.

Dependiente del Ministerio de Educación Pública, la nueva institución fusionó en su interior la *Escuela de Ingenieros Industriales* y los grados técnicos de la *Escuela de Artes y Oficios de Santiago*; *Escuela de Minas de Antofagasta*, *Copiapó y La Serena* y las *Escuelas Industriales de Concepción, Temuco y Valdivia*, conformando de esta manera una serie de sedes a lo largo del país, en las ciudades mencionadas, esto es, en las ciudades de: *Antofagasta, Copiapó, Santiago de Chile, Concepción, Temuco, y Valdivia.*

La UTE abrió oficialmente sus puertas en el año 1952, luego que el Senado aprobara su Estatuto Orgánico, contrariando la férrea oposición de la Universidad de Chile, cuyas autoridades consideraban que la nueva casa de estudios superiores debía funcionar bajo su tuición.

En Concepción, el plantel jugaría un importante papel para responder a las necesidades y desafíos que planteaba la Región como uno de los polos del desarrollo industrial del país, no sólo a través de la docencia de pregrado sino que también mediante la investigación científica y tecnológica en sus primeros años de creación.

A las carreras técnicas de *Electricidad, Mecánica y Textil* que se impartían en 1959 se sumaron, en 1969, las de *Ingeniería de Ejecución en Electricidad, Mecánica y Madera.* También en el año 1969 se crea la carrera de Arquitectura, hecho que constituye un hito significativo para la institución, la trascendencia de este hecho sería la justificación para que, de acuerdo con la nueva Ley de Universidades dictada en el año 1980, la Sede Concepción de la UTE se transformara en una universidad autónoma, la ***Universidad de Bío-Bío,*** ello debido a que una de sus carreras principales, como era la carrera de Arquitectura, estaba contemplada dentro de este nuevo marco legal del año 1980. En total para esta nueva legislación se consideró tan sólo doce carreras con un carácter netamente universitario y Arquitectura fue una de ellas, como se ha comentado.

La otra institución, madre de la actual ***Universidad del Bío-Bío***, corresponde a la ***Sede Ñuble*** de la ***Universidad de Chile***, que venía funcionando en Chillán desde 1966. Dado que esta institución no dictaba ninguna de las doce carreras profesionales de acuerdo a la Ley de 1980, la sede Ñuble de la Universidad de Chile se transformó en el ***Instituto Profesional de Chillán***, ***IPROCH***.

La creación de la ***Sede Ñuble de la Universidad de Chile***, en la ciudad de Chillán, primero como ***Colegio Regional***, fue el fruto de un amplio movimiento ciudadano destinado a evitar que los jóvenes egresados de la Enseñanza Media tuvieran que emigrar a Santiago u otras ciudades para continuar la enseñanza superior. En sus inicios, ocupó las dependencias cedidas por la Sociedad Musical Santa Cecilia, además de un edificio en avenida Libertad, donde funcionó la Escuela de Idiomas. Posteriormente, en 1973, recibió de parte de don *Fernando May Didier* la donación de 33 hectáreas de terreno, lugar donde se ha ido construyendo el actual *Campus Fernando May* de la actual Universidad del Bío-Bío, en su sede de la ciudad de Chillán.

El patrimonio del naciente ***Instituto Profesional de Chillán (IPROCH)***, se vería incrementado con la incorporación de las antiguas instalaciones de la *Escuela Normal de Chillán,* heredera de la más trascendental escuela formadora de profesores para la enseñanza primaria del país, la que no ha sido superada hasta la fecha. En dichas dependencias de la antigua Escuela Normal de Chillán se encuentra actualmente el Campus La Castilla de la UBB. Estos dos Campus conforman actualmente la Sede Chillán de la UBB.

Luego, en el año 1988, como resultado de la fusión de la ***Universidad de Bío-Bío*** de la ciudad de Concepción y del ***Instituto Profesional de Chillán*** nacería la actual ***Universidad del Bío-Bío (UBB)***, uniendo de este modo a dos instituciones que asumieron desde esa fecha el desafío de caminar juntas y construir una historia en común.

Para dar inicio a tal institución fue necesario la dictación de un decreto con fuerza de Ley, con fecha 17 de Marzo de 1989, además de lo dispuesto en el artículo 8° de la Ley N° 18.744, según consta en Biblioteca del Congreso Nacional de la República de Chile. Mayores antecedentes de todos los apartados de esta ley se encuentran en la dirección web: http://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=3437&idParte=

La actual página Web de la Universidad del Bío-Bío (UBB), que recoge y narra la historia que se ha comentado sucintamente, junto a su actual quehacer universitario, en todos los perfiles que considera, para su completa descripción son:

- *Postulantes*
- *Empresas*
- *Empleadores*
- *Egresados*
- *Alumnos*
- *Académicos y*
- *Administrativos*

Cada uno de estos perfiles responde a necesidades específicas, de ahí entonces el necesario desglose de cada uno de ellos para poder atender de manera eficiente y rápida los requerimientos de cada usuario. Cada uno de los perfiles mencionados se encuentran en el sitio Web: http://ubb.cl/w/

3.3. Visión y misión de la institución

Visión:

- *Ser reconocida a nivel nacional como una Universidad estatal, pública, regional, autónoma, compleja e innovadora con énfasis en la formación de capital humano, vinculada al desarrollo sustentable de la Región del Biobío y que aporta a la sociedad del conocimiento y al desarrollo armónico del país.*

Misión:

- *La Universidad del Bío-Bío es una institución de educación superior, pública, estatal y autónoma, de carácter regional, que se ha propuesto por misión:*

- *Formar profesionales de excelencia capaces de dar respuesta a los desafíos de futuro, con un modelo educativo cuyo propósito es la formación integral del estudiante a partir de su realidad y sus potencialidades, promoviendo la movilidad social y la realización personal.*

- *Fomentar la generación de conocimiento avanzado mediante la realización y la integración de actividades de formación de postgrado e investigación fundamental, aplicada y de desarrollo, vinculadas con el sector productivo, orientadas a áreas estratégicas regionales y nacionales.*

- *Contribuir al desarrollo armónico y sustentable de la Región del Biobío, a través de la aplicación del conocimiento, formación continua y extensión, contribuyendo a la innovación, productividad y competitividad de* *organizaciones, ampliando el capital cultural de las personas, actuando de manera interactiva con el entorno y procurando la igualdad de oportunidades.*

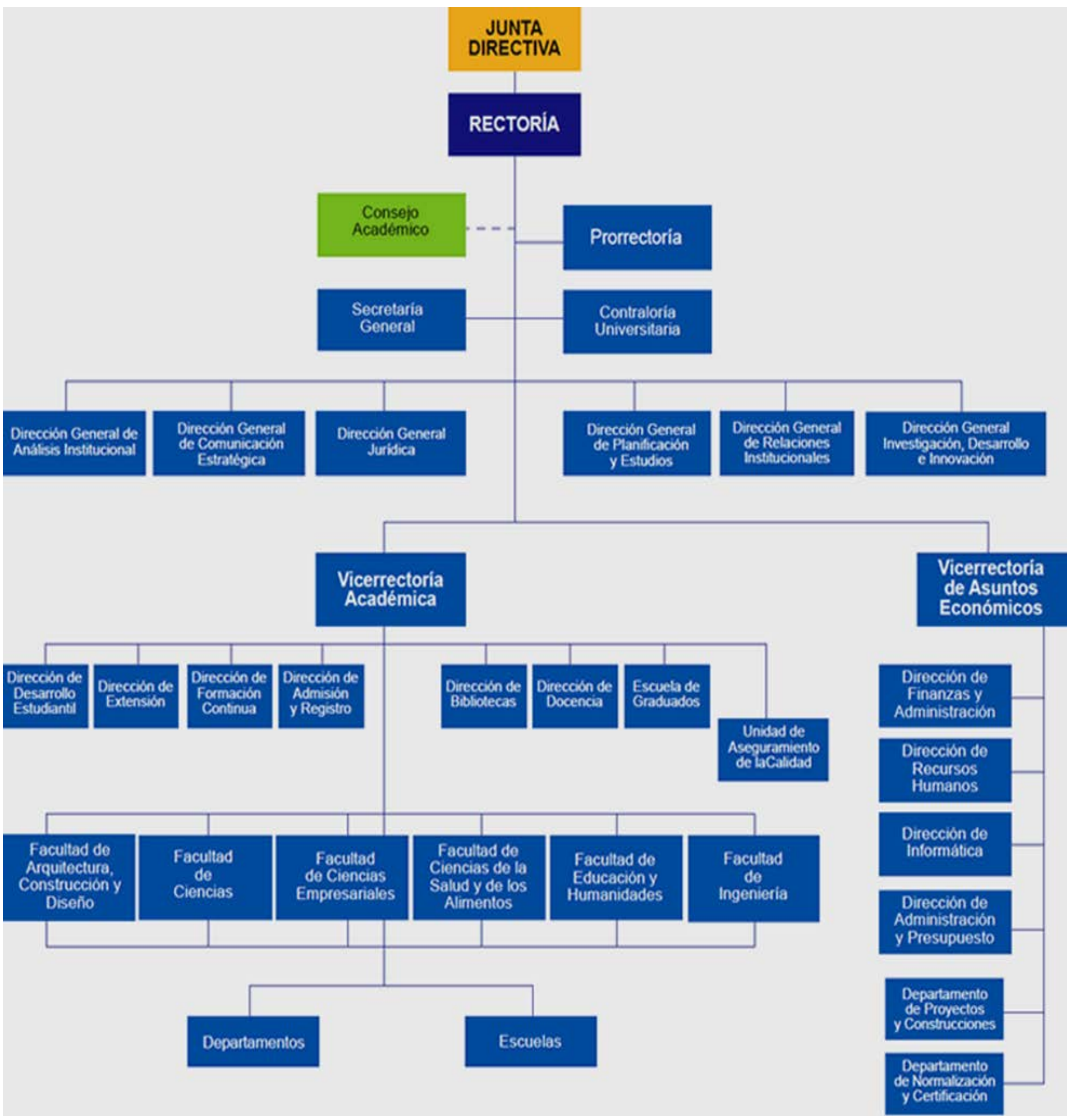
- *Desarrollar una gestión académica y administrativa moderna, eficiente, eficaz y oportuna, centrada en el estudiante, con estándares de calidad certificada que le permiten destacarse a nivel nacional y avanzar en la internacionalización.*

(URL: http://ubiobio.cl/web/mision.php, 2014).

3.4. El organigrama de la Universidad del Bío-Bío

La simple observación del organigrama de la institución permite formarse una idea de conjunto de su estructura organizacional y, por ende, de sus respectivas direcciones que la conforman como un todo para su funcionamiento institucional.

Figura n° 39. Esquema organizacional de la UBB.



De la figura anterior se puede apreciar que, por sobre la rectoría está un organismo colegiado llamado ***Junta Directiva***, la que tiene por misión fundamental velar por el buen cumplimiento que la propia institución educativa se ha impuesto sobre sí en relación con sus estatutos que la rigen y le permiten normal funcionamiento.

En la ***sede Chillán*** de la Universidad funciona una ***Pro-rectoría***, de confianza del rector. El rector por su parte ejerce su gobierno universitario en la Sede de la ciudad de Concepción, capital de la octava región del país. Lo hace a través del ***consejo académico***, cuerpo colegiado que está conformado básicamente por los decanos de las Facultades, vice-rectores académicos y de asuntos económicos entre otros.

La academia, esto es, el cuerpo tanto académico como administrativo, se agrupa en Facultades, en un total de seis, ellas son:

- *La Facultad de Arquitectura.*
- *La Facultad de Ingeniería.*
- *La Facultad de Ciencias Económicas.*
- *La Facultad de Ciencias de la Salud y los Alimentos.*
- *La Facultad de Educación y Humanidades.*
- *La Facultad de Ciencias.*

A continuación de describe brevemente cada una de estas Facultades respecto de su quehacer y misión fundamental.

Así, esta descripción permite formarse una idea de su ocupación y alcance más inmediato en lo que a ***Departamentos y carreras*** que cada una de ellas ofrece a la región y al resto del país a la población estudiantil.

3.5. Descripción de sus facultades y carreras

Facultad de Arquitectura, Construcción y Diseño

La Facultad de ***Arquitectura, Construcción y Diseño*** desarrolla sus funciones de docencia, investigación y extensión en las áreas de la Arquitectura, Urbanismo, Ciencias de la Construcción, Comunicación Visual y Diseño Industrial.

En docencia, además de las carreras de pregrado, sus escuelas ofrecen cursos de capacitación técnica a profesionales del área de la construcción y un Programa de Diplomado en Diseño y Construcción en Madera.

En el ámbito de la extensión, destaca su labor de difusión del patrimonio histórico y las realizaciones arquitectónicas actuales de relevancia en el sur del país a través de la publicación "Arquitecturas del Sur", que se complementa con los "Cuadernos de Edificación en Madera" y con el boletín "Mercado de Suelo Urbano en Concepción". En investigación, en tanto, su quehacer abarca una amplia gama, desde temas tecnológicos (como la madera y el ferrocemento) hasta estudios sobre los asentamientos humanos y la teoría de la arquitectura.

La Facultad se vincula también con los sectores público y privado, mediante numerosas acciones de asistencia técnica y capacitación.

La Escuela de Arquitectura ofrece asistencia técnica a la comunidad y a empresas en el área de la planificación urbana y tecnológica. Entre los proyectos que ha desarrollado bajo esta modalidad figuran: los planos del Parque Hualmapu, la Feria Artesanal, el estudio urbano de Talcahuano y un proyecto de aplicación de ferrocemento en la vivienda social. Por su parte, la Escuela de Ingeniería en Construcción, además de otorgar el grado de Licenciado, ofrece servicios a través de sus laboratorios de materiales de construcción, mientras que la Escuela de Diseño Gráfico, ubicada en Chillán, tiene una amplia trayectoria en la prestación de servicios de diseño a industrias y empresas de la región. La Escuela de Diseño Industrial, en tanto, centra sus actividades en la creación y equipamientos, en el uso de la madera, básicamente.

La Facultad de Arquitectura, Construcción y Diseño está formada por cuatro Escuelas y cinco Departamentos. Los Departamentos son:

Diseño y Teoría de la Arquitectura.

Planificación y Diseño Urbano.

Ciencias de la Construcción.

Comunicación Visual.

Arte y Tecnologías del Diseño.

Estos no son los únicos Departamentos que colaboran en la formación profesional de las carreras que están adscritas a esta Facultad. Por su parte, las carreras atendidas por estos Departamentos son:

Arquitectura en Concepción.

Diseño Gráfico en Chillán.

Diseño Industrial en Concepción.

Ingeniería en Construcción en Concepción.

Facultad de Ingeniería

Organizada en cinco Departamentos: *Ingeniería Eléctrica y Electrónica*, **Ingeniería Industrial,** *Ingeniería en Maderas*, *Ingeniería Mecánica* e *Ingeniería Civil*. Esta Facultad ha definido como líneas prioritarias de su desarrollo los sistemas de producción – entre ellos, la automatización y control de procesos, productividad y calidad total, gestión de operaciones, tecnología de pequeña y mediana escala y sistemas energéticos – y la ciencia y tecnología de la madera y sus derivados. En relación a esta última, se pueden mencionar como subtemas la elaboración, el desarrollo de productos, el tratamiento, la protección, el diseño, la construcción y el control de calidad.

En el ámbito de la educación continua, en tanto, anualmente ofrece los Programas de Diplomado en Ingeniería Industrial, Diplomado en Gestión Inmobiliaria, y Diplomado en Ingeniería Industrial , mientras que, en el marco de sus Escuelas de Temporadas, cada año imparte diversos cursos de actualización y capacitación en las áreas de termo-fluidos, CAD/CAM, análisis de vibraciones, tecnología de la madera, mantención de elementos de corte, gestión, planificación y control de producción, electrónica de potencia, control automático y máquinas eléctricas. Las carreras adscritas a esta Facultad son:

Ingeniería *Civil en Concepción.*

Ingeniería Civil Eléctrica en Concepción.

Ingeniería Civil en Automatización en Concepción.

Ingeniería Civil en Industrias de la Madera en Concepción.

Ingeniería Civil Industrial en Concepción.

Ingeniería Civil Mecánica en Concepción.

Ingeniería Civil Química en Concepción.

Ingeniería de Ejecución en Electricidad en Concepción.

Ingeniería de Ejecución en Electrónica en Concepción.

Ingeniería de Ejecución en Mecánica en Concepción.

Facultad de Ciencias Empresariales

Creada en 1989, la Facultad de ***Ciencias Empresariales*** tiene como objetivo prioritario el cultivo de las disciplinas de Administración, Auditoría, Finanzas, Computación e Informática, enfatizando como áreas de estudio el Desarrollo Regional, la Pequeña y Mediana Empresa, la Planificación y el Control de Gestión Estratégico, Política de Negocios y las Tecnologías de Información y Gestión Informática.

Su permanente búsqueda de este objetivo se manifiesta no sólo en la docencia regular que imparte, sino también en la creación de programas de pos título, el desarrollo de proyectos de investigación y en la realización de actividades de extensión, asistencia técnica y capacitación en las áreas recién mencionadas. La Facultad se preocupa también de desarrollar la capacidad emprendedora de sus estudiantes y de enriquecer su proceso de formación con una visión humanista e integradora de su futuro quehacer profesional.

La Facultad de Ciencias Empresariales cuenta con tres Departamentos en la Sede Concepción: *Administración y Auditoría*, *Economía y Finanzas* y *Sistemas de Información*; y dos Departamentos en Chillán, ellos son: el *Departamento de Gestión Empresarial* y *Departamento de Ciencias de la Computación y Tecnología de Información.* Por su parte las carreras dependientes de esta Facultad son:

Contador Público y Auditor en Concepción.

Contador Público y Auditor en Chillán.

Ingeniería Civil en Informática en Concepción.

Ingeniería Civil en Informática en Chillán.

Ingeniería Comercial en Concepción.

Ingeniería Comercial en Chillán.

Ingeniería de Ejecución en Computación e Informática en Concepción.

El sitio Web de esta Facultad es: http://www.face.ubiobio.cl

Facultad de Ciencias de la Salud y de los Alimentos

Ubicada en la Sede Chillán y estructurada en los Departamentos de: Ingeniería *en Alimentos; Nutrición y Salud Pública*; *Enfermería* y *Departamento de Ciencias de la Rehabilitación en Salud*, y en las escuelas de: Ingeniería *en Alimentos, Nutrición y Dietética*, *Enfermería* y *Fonoaudiología.*

Esta Facultad orienta su desarrollo hacia la ciencia y la tecnología en el ámbito de los alimentos, la nutrición aplicada y la salud comunitaria.

Busca contribuir al desarrollo regional fortaleciendo y consolidando la que ha definido como su área prioritaria: La ciencia y tecnología de los alimentos, con énfasis hortofrutícola. Para ello promueve, en el ámbito de su competencia, la creación y mantención de instancias de investigación, perfeccionamiento y de apoyo científico y tecnológico al quehacer profesional y a la optimización, control y aseguramiento de la calidad de los procesos productivos y la gestión de empresa y servicios. Las carreras adscritas a esta Facultad son:

Enfermería.

Fonoaudiología.

Ingeniería en Alimentos y

Nutrición y Dietética.

Todas ellas se imparten en la Sede Chillán de la UBB.

Facultad de Educación y Humanidades

La Facultad de Educación y Humanidades desarrolla sus actividades de docencia, investigación, extensión y capacitación en dos grandes líneas, Educación para el desarrollo y desarrollo de la identidad regional. Su estructura académica y administrativa considera cuatro Departamentos, a saber: Artes y Letras, Ciencias de la Educación y Ciencias Sociales, en la Sede Chillán, y Estudios Generales, en Concepción. Las escuelas adscritas a esta Facultad son: la de Pedagogía en Castellano y Comunicación Social, Pedagogía en Inglés y Traducción Inglés – Español, Pedagogía en Historia y Geografía, la de Educación Matemática y la de Trabajo Social.

La Facultad de Educación y Humanidades proyecta su quehacer a través de diversos programas de capacitación, de perfeccionamiento y de pos-título y desarrolla proyectos de investigación orientados, principalmente, a la problemática social y educacional. Las carreras dependientes de esta Facultad son:

Pedagogía en Castellano y Comunicación en Chillán.

Pedagogía en Ciencias Naturales en Chillán.

Pedagogía en Educación Física en Chillán.

Pedagogía en Educación General Básica en Chillán.

Pedagogía en Educación Matemática en Chillán.

Pedagogía en Educación Parvularia en Chillán.

Pedagogía en Historia y Geografía en Chillán.

Pedagogía en Inglés en Chillán.

Psicología en Chillán.

Trabajo Social en Chillán.

Trabajo Social en Concepción.

La *Facultad de Educación y Humanidades*, al igual que las restantes Facultades dispone de su sitio Web: http://www.ubiobio.cl/feduc/, en el cual se describe tanto su oferta de carreras de pregrado como el quehacer actual de la Facultad.

Facultad de Ciencias

La Facultad de ***Ciencias*** desarrolla su labor académica a través de cinco Departamentos: *Estadística, Física*, *Matemática, Química y Ciencias Básicas*, los cuatro primeros ubicados en el Campus Concepción y el quinto en el Campus Chillán de la UBB.

Esta facultad se encarga de dictar las asignaturas de las ciencias básicas, como son: la Matemática, la Física, la Química y la Biología a las carreras de pregrado y postgrado, como también a los pos título que lo requieren. Además, ofrece en ambas sedes de la Universidad, el Programa de Bachillerato en Ciencias, el que tiene una duración de cuatro semestres y que conduce al grado académico de Bachiller una vez finalizado el programa.

Desde el año 2001, se imparte la carrera de Ingeniería en Estadística, en el Campus Concepción y desde año 2011, la carrera de Ingeniería en Recursos Naturales en el Campus Chillán.

Su quehacer se proyecta hacia la comunidad a través de múltiples actividades de perfeccionamiento y actualización dirigidas a profesores de Enseñanza Media y a otros profesionales de industrias e instituciones de la región. Igualmente, sus académicos participan activamente en proyectos de investigación y en jornadas científicas, en las que los investigadores presentan los resultados y avances de sus estudios y en las que se llevan a cabo sesiones de análisis y discusión sobre temas específicos.

La Facultad de Ciencias desarrolla sus actividades académicas a través de cuatro departamentos: *Matemática, Física, Química y Ciencias Básicas.* Los cuales apoyan la formación de las siguientes carreras, dependientes de esta Facultad, como son:

Bachillerato en Ciencias en Concepción.

Bachillerato en Ciencias en Chillán.

Ingeniería en Recursos Naturales en Chillán.

Ingeniería Estadística en Concepción.

Esta Facultad posee una página Web, donde se encuentra con más detalle todo lo relacionado con su trabajo docente y de investigación. Su sitio Web es: www.ciencias.ubiobio.cl/

Resulta oportuno señalar que *La Facultad de Ciencias*, es la que cobija la presente investigación ya que ella es la encargada de dictar las asignaturas de ciencias básicas como son las temáticas relacionadas con la Matemática, la Física, la Química y la Biología.

Dentro del área de la Matemática se ubica la asignatura de Cálculo 1, que corresponde a la enseñanza del cálculo diferencial. En el Campus Concepción de la UBB esta asignatura la inscriben estudiantes de las carreras de ingeniería. Por su parte, en el Campus Chillán de la UBB, la signatura de Cálculo 1 la inscriben estudiantes de ingenierías y los estudiantes que se forman como profesores de ciencias y de matemática.

Lo anterior indica la importancia que reviste esta asignatura dentro del currículo básico de las carreras de pre-grado, para gran parte del estudiantado de la UBB. Esta Facultad es la que mayor docencia imparte a nivel de pregrado, de ahí entonces que, avanzar en una propuesta que signifique un mejor aprendizaje de esta materia reviste verdadera importancia dado el gran número de estudiantes que cursan dicha asignatura como parte esencial de su formación profesional, sea esta como ingeniero o como educador de las ciencias básicas.

De esta forma han quedado descritas las seis Facultades en las que se organiza la UBB, con sus respectivas carreras de pre-grado, tanto para la sede de Concepción como para la sede de Chillán de la UBB.

La Universidad del Bío-Bío posee también una variada oferta de post-grados en cada una de las facultades anteriormente descritas, el sitio web donde se exponen dichos programas tanto de Magister como de Doctorado es: http://www.ubiobio.cl/postgrados/ Un listado de dichos programas tanto de doctorado como de magíster es el siguiente:

Doctorados:

Arquitectura, Construcción y Diseño

- Doctorado en Arquitectura y Urbanismo --- Concepción

Ingeniería

- Doctorado en Ciencias e Industrias de la Madera---Concepción

Ciencias de la Salud y de los Alimentos

- Doctorado en Ingeniería de Alimentos---Chillán

Ciencias

- Doctorado en Matemática Aplicada---Concepción –Chillán

Magísteres:

Arquitectura, Construcción y Diseño

- Magíster en Construcción en Madera--- Concepción
- Magíster en Hábitat Sustentable y Eficiencia Energética --- Concepción

Ingeniería

- Magíster en Ciencia y Tecnología de la Madera--- Concepción
- Magíster en Ingeniería Industrial--- Concepción

Ciencias Empresariales

- Magíster en Agro-negocios ---Chillán
- Magíster en Ciencias de la Computación--- Concepción-Chillán
- Magíster en Dirección de Empresas--- Concepción-Chillán
- Magíster en Gestión de Recursos Humanos y Habilidades Directivas --- Concepción-Chillán
- Magíster en Informática---Concepción

Educación y Humanidades

- Magíster en Educación--- Chillán

- Magíster en Historia de Occidente--- Chillán
- Magíster en Liderazgo y Gestión de Establecimientos Educacionales—Chillán.

Ciencias de la Salud y de los Alimentos

Magíster en Ciencias e Ingeniería en Alimentos--- Chillán

Magíster en Salud Pública--- Chillán

Ciencias

- Magíster en Ciencias Biológicas---Chillán
- Magíster en Ciencias Físicas---Concepción
- Magíster en Ciencias Químico Ecológicas---Chillán
- Magíster en Enseñanza de las Ciencias---Chillán
- Magíster en Matemática ---Concepción

Nota: el texto resaltado en color indica la Facultad a cargo del programa de doctorado y/o magister.

Por su parte la matrícula para estos programas de postgrado para el año 2013 fue la siguiente:

Tabla n° 17. Matrícula de Postgrados, año 2013.

Matrícula de PostGrados	2013	
	Nueva	Total
Programas de Doctorados	19	44
Programas de Magíster	233	683
Total Universidad	252	727

Fuente: VRA/Dirección de Admisión, Registro y Control Académico

Algunos de estos programas de post-grados se encuentran acreditados ante la CNA, Comisión Nacional de Acreditación, lo que resulta de beneficio tanto para la Universidad como para los propios estudiantes de estos programas.

3.6. La Universidad del Bío-Bío: antecedentes y cifras

A continuación se expresan algunos antecedentes y cifras que dan cuenta, de manera general y cuantitativa, de algunos rasgos distintivos que configuran su impronta de servicio público en el contexto de la Región de Bío-Bío, a saber:

- *Así, se puede mencionar como una de sus fortalezas la presencia por ya 67 años al servicio de la región y el país.*
- *Es la única Universidad estatal y pública de la Región..*
- *Sin fines de lucro, lo que le permite reinvertir la totalidad de sus excedentes anualmente, una vez finalizado su ejercicio contable cada año.*
- *Una de las tres primeras instituciones universitarias del país con mayor transparencia en su gestión.*

Respecto de su docencia se puede afirmar lo siguiente:

- *El 75% de las carreras de pre-grado están acreditadas, con un promedio de 4,8 años de acreditación.*

- *La UBB entre las siete primeras, a nivel nacional, en calidad de la docencia de pre-grado.*
- *Entre las 10 primeras universidades, a nivel nacional, según ranking de calidad académica*
- *Entre las cinco primeras, a nivel nacional, en poseer los mayores niveles de retención de alumnos de primer año.*
- *Entre las tres primeras Universidades, a nivel nacional, con mayor porcentaje de profesores con grado de Magister y Doctor en su dotación académica.*

(DGAI-UBB, 2014)

En lo que dice relación con sus egresados se puede afirmar que el 80 % encuentra empleo el primer año, una vez que egresa (http://www.mifuturo.cl).

Ahora en lo que guarda relación con la investigación y el desarrollo se puede afirmar lo siguiente:

- *Primera, a nivel país, de las universidades docentes con proyección en investigación.*
- *Entre las quince universidades, a nivel nacional, según el ranking iberoamericano (SIR-Scimago), que evalúa la calidad científica de las publicaciones.*
- *Vinculación con más de 200 empresas e instituciones públicas.*

- *Núcleos científicos de reconocimiento internacional: Alimentos, maderas, Biomateriales, Bioquímica, arquitectura, y construcción, Matemática, Ingeniería industrial y sistemas, automática y urbanismo.*

3.7. Otros antecedentes estadísticos

De manera sucinta se exponen ***otras cifras*** de modo de poder ampliar su descripción como una institución pública e inserta en la octava región del país, Chile. Dichos antecedentes son los siguientes:

1. ***Acreditación Institucional 5 años***, en las áreas de:

   - *Gestión Institucional,*
   - *Docencia de Pregrado,*
   - *Investigación y*
   - *Vinculación con el Medio.*

2. ***Acreditación de Pregrado*** 82,14%

   Cobertura Alumnos en Carreras Acreditadas 77,4%

   Promedio Años de Acreditación 4

   Carreras y Programas de Pregrado con Ingreso Primer Año 39

   Carreras Acreditables 28

   Carreras Acreditadas 23

   Pasantías Alumnos Extranjeros en la UBB 74

Carreras y Programas de Pregrado Sede Concepción 18

Carreras y Programas de Pregrado Sede Chillán 21

3. ***Matrícula total de Pregrado Diurno:***

Tabla n° 18. Matrícula de Pregrado, año 2013.

	Matrícula 2013				
	Femenino	***%***	***Masculino***	***%***	***Total***
Sede Concepción	***1.786***	***29,1***	***4.534***	***70,9***	***6.320***
Sede Chillán	***2.940***	***62,1***	***1.854***	***37,9***	***4.794***
Total Universidad	***4.726***	***43,9***	***6.388***	***56,1***	***11.114***

Fuente: DGAI, Anuario estadístico año 2013.

Si se consideran todos los programas que imparte la UBB, la evolución de su matrícula es la siguiente:

Tabla n° 19. Evolución de la matrícula de la UBB, años: 2009 -2013.

Evolución de la Matrícula Total Programas de Formación	2009	2010	2011	2012	2013
Pregrado[2]	10.055	10.284	10.597	10.794	11.114
Doctorado[1]	18	21	35	16	44
Magíster[1]	676	615	602	556	683
Postítulos[1]	365	564	250	92	193
Diplomados[1]	161	85	158	166	203
Programas Especiales de Continuidad de Estudios[1]	966	879	960	697	913
Total Universidad	12.241	12.448	12.602	12.321	13.150

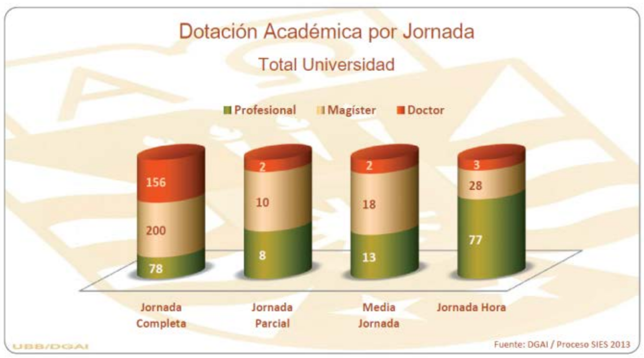
[1] Fuente: VRA/Darca

[2] Fuente: DGAI/Proceso SIES 2013

4. ***Recursos humanos:***

- *El* ***personal académico*** *se distribuye en****:*** *doctores, magíster y profesionales, en un total de 595 personas según el gráfico siguiente****:***

Figura n° 40. Dotación académica por jornada.



- *El* ***personal administrativo*** *por su parte se distribuye en: directivos y/ o jefaturas, profesionales, salud, técnicos ,administrativos y personal auxiliar del siguiente modo:*

Tabla n° 20. Personal administrativo según categorías y tipo de contrato.

Categorías	Contrata			Planta			Total Administrativos 2013		
	Femenino	Masculino	Total	Femenino	Masculino	Total	Femenino	Masculino	Total
Directivos/Jefaturas(1)	0	0	0	6	20	26	6	20	26
Profesionales	82	73	155	14	13	27	96	86	182
Salud(2)	2	0	2	1	1	2	3	1	4
Técnicos	79	30	109	84	29	113	163	59	222
Administrativos	29	8	37	33	17	50	62	25	87
Auxiliares	0	23	23	2	75	77	2	98	100
Totales	192	134	326	140	155	295	332	289	621

Fuente: VRAE/Dirección de Recursos Humanos/Diciembre 2013

(1) Excluye Académicos en cargos Directivos/Jefaturas de la estructura universitaria

(2) Incluye Profesionales de la Ley N° 15.076 (Médicos Cirujanos y Cirujanos Dentistas)

5. ***Investigación científica, tecnológica e innovación***

Al año 2013 se registran 65 proyectos de investigación fundamental, entre adjudicados y de continuidad, con recursos externos, entre los que destacan los proyectos Fondecyt Regular, de iniciación y post doctorados con 55 iniciativas vigentes. La tabla siguiente da cuenta de la situación descrita, a saber:

Tabla n° 21. Investigación: número de proyectos y montos adjudicados.

INVESTIGACIÓN FUNDAMENTAL[1]	Nº Proyectos de Continuidad	2013		
		Adjudicados	Montos M$	
FONDECYT Regular	29	11	M$	786.914
FONDECYT Iniciación	9	5	M$	390.460
FONDECYT Post Doctorado	1	-	M$	-
CONICYT Atracción Capital Humano Avanzado (MEC)	2	1	M$	8.700
CONICYT Atracción Capital Humano Avanzado (MEL)	1	-	M$	-
CONICYT Inserción en la academia (Post Doctorado)	5	1	M$	48.600
INVESTIGACIÓN FUNDAMENTAL Vigentes	47	18	M$	1.234.674

Fuente: DGI /Dirección de Investigación

Por otra parte, la UBB financia proyectos internos, ellos se desglosan como sigue:

Tabla n° 22. Proyectos internos de investigación.

PROYECTOS INTERNOS	Nº Proyectos de Continuidad	2013		
		Adjudicados	Montos M$	
Iniciación	4	11	M$	29.292
Regular	29	10	M$	23.677
Docencia	1	-	M$	-
Reinserción	-	1	M$	1.000
Fondo Especial	-	3	M$	3.000
INVESTIGACIÓN INTERNOS Vigentes	34	25	M$	56.969

Fuente: DGI /Dirección de Investigación

La investigación, hoy en día se traduce en publicaciones, siendo así el caso, ella ha tenido un serio incremento en la Universidad, pasando de 77 en el año 2009 a 142 publicaciones para el año 2013, lo anterior queda reflejado de manera clara en el cuadro y gráfico institucional siguiente:

Tabla n° 23. Número de publicaciones según categoría, año 2013.

PUBLICACIONES	2013
ISI	142
SciELO	21
Libros	12
Capítulos de Libros	31
Corriente Principal	9
Revista Interna	2
Ediciones UBB (*)	3
Total PUBLICACIONES	220

Fuente: DGI /Dirección de Investigación/Corte 31.05.2014

Figura n° 41. Evolución del número de publicaciones, años: 2009- 2013.

Un hecho digno de mención es la participación de la Facultad de Ciencias en el número total de publicaciones de la Universidad del Bío-Bío, ello se aprecia en el gráfico de a continuación.

Figura n° 42. Número de publicaciones según Facultad.

6. ***Recursos físicos:*** *la infraestructura física de ambos campus se desglosa como:.*

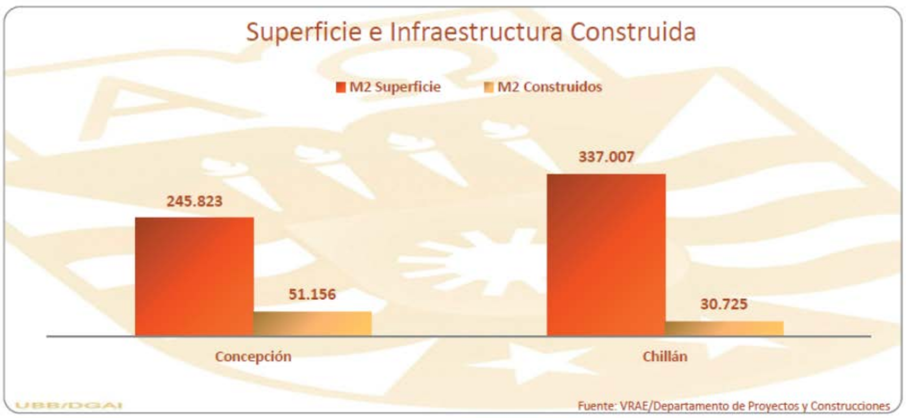
Tabla n° 24. Infraestructura física.

Infraestructura	M^2 Superficie	M^2 Construidos
Campus Concepción	245.500	50.850
Conservatorio de Música	323	306
Total Concepción	245.823	51.156
Campus Fernando May	264.700	18.517
Campus La Castilla	71.400	9.648
Casa del Arte	907	2.560
Total Chillán	337.007	30.725
Total Universidad	**582.830**	**81.881**

Fuente: VRAE/Departamento de Proyectos y Construcciones

Ahora bien, la proporción de metros cuadrados construidos en relación a la superficie que disponen ambos campus es la siguiente:

Figura n° 43. Superficie disponible versus construida, ambos campus.



La evolución de la infraestructura construida desde el año 2009 al año 2013 ha sido la siguiente, con un continuo ascenso, como podrá apreciarse en la tabla y gráfico que se muestra a continuación.

Tabla n° 25. Evolución infraestructura construida años: 2009 – 2013.

EVOLUCIÓN DE LA INFRAESTRUCTURA CONSTRUIDA

Campus y Edificios	Superficie Construida M^2				
	2009	2010	2011	2012	2013
Concepción	44.899	47.324	47.463	48.918	50.850
Fernando May	14.206	15.231	16.800	17.232	18.517
La Castilla	8.889	9.648	9.648	9.648	9.648
Centro de Extensión	2.560	2.560	2.560	2.560	2.560
Conservatorio de Música	306	306	306	306	306
TOTAL	70.861	75.069	76.777	78.664	81.881

Fuente: VRAE/Departamento de Proyectos y Construcciones

(*) No se contabiliza la infraestructura de la oficina de Santiago y de la Unidad de Programas Especiales de Los Ángeles de la Facultad de Ciencias Empresariales.

Figura n° 44. Evolución de la infraestructura construida, años: 2009-2013.

*Respecto de la **infraestructura deportiva** se tienen las siguientes cifras:*

Tabla n° 26. Infraestructura deportiva en distintos campus

INFRAESTRUCTURA DEPORTIVA

Infraestructura Deportiva	Aire Libre (M^2)	Gimnasio (M^2)	Total (M^2)
Concepción	22.641	1.616	24.257
Fernando May	13.037	1.998	15.035
La Castilla	8.216	1.312	9.528
Total Universidad	43.894	4.925	48.819

Fuente: VRAE/Departamento de Proyectos y Construcciones

Por último, en términos de ***infraestructura para la docencia***, la que se expresa en salas de estudio preferentemente, se pueden exhibir los siguientes datos, los cuales se exponen en la página siguiente, por motivos de espacio y una mejor visualización de los mismos.

La tabla que consigna la información respecto de la infraestructura física para la docencia en la institución, se presenta en la página siguiente.

Tabla n° 27. Recursos para realizar la docencia.

INFRAESTRUCTURA PARA LA DOCENCIA

Infraestructura para la Docencia	Concepción	Chillán	Total
M^2 Laboratorios Especialidad Computación y Talleres	9.250	3.060	12.310
M^2 Construidos Salas de Clases	4.860	3.788	8.648
M^2 Salas Multipropósito	460	0	460
M^2 Salas de Estudio de Escuelas	721	0	721
M^2 de Salas de Estudio de Bibiotecas (1)	2.910	2.436	5.346
Nº de Salas de Estudio Escuelas	16	0	16
Nº de Salas de Estudio de Biblioteca	7	11	18
Nº de Salas de Clases	75	55	130
Nº de Salas Multipropósito	8	0	8
Nº de Auditorios (2)	8	2	10

Fuente: VRAE/Departamento de Proyectos y Construcciones/Informe de Cuantificación de Infraestructura julio 2013

(1) Incluye Superficie total edificio de biblioteca

(2) Incluye Auditorio Centro de Extensión

7. ***Recursos informáticos:*** *toda institución, hoy en día, no puede estar al margen de una buena dotación de tales recursos, el cuadro siguiente se encarga de evidenciar tales medios para la UBB en su conjunto. Dicha tabla se expone en la página siguiente.*

Tabla n° 28. Evolución de los recursos informáticos, años: 2009- 2013.

Recursos Informáticos	2009	2010	2011	2012	2013		
					Concepción	Chillán	Total
Nº de Laboratorios con Computadores (1)	23	46	50	54	30	23	53
Nº de Computadores - PC Desktop	957	983	888	953	640	385	1025
Nº de Notebook - Pañol	-	169	220	359	146	242	388

Fuente: VRAE/Dirección de Informática

(1) Incluye Laboratorios de Especialidad con Computador(es) y Laboratorio de Computación

De esta manera se concluye este último acápite sobre "***Otros antecedentes estadísticos***", del presente capítulo.

Se espera que con la información presentada, la institución educativa: Universidad del Bío-Bío (UBB) haya quedado perfectamente delineada en sus aspectos esenciales de origen que le son propios, esto es, su visión y misión, como también su ejercicio profesional docente y de investigación a la que está llamada, con su carácter público y estatal que la definen dentro de la octava región del país, Chile.

*

CAPÍTULO IV

DISEÑO DE LA INTERVENCIÓN

“El diseño es la aplicación del intento, lo contrario del evento fortuito, y un antídoto para el accidente” *Robert L. Peters*

4.1. Introducción

El diseño de la intervención permite situarnos en el escenario - en detalle- del lugar y del contexto que fueron considerados para el presente estudio, en cada una de sus Fases donde se llevó a cabo. Se describe, además, cómo se realizó la investigación y qué elementos se tomaron en cuenta como inicio para avanzar en la Fase empírica y su posterior análisis de los resultados, que es lo que en definitiva importa para validar o rechazar la hipótesis de trabajo ya enunciado en el primer capítulo de esta tesis, acápite 1.3, para ser más exactos.

Otros aspectos que se abordan en este capítulo son el enfoque que se da a este estudio como también el diseño del mismo; a este respecto se puede afirmar que se contempla un diseño que consideró tres fases, a saber:

- ***La primera fase,*** sirve como un importante antecedente histórico que ha permitido sentar las bases para las dos siguientes fases experimentales. Así, esta fase inicial recoge los datos estadísticos de varios años de experimentación de la aplicación del diseño curricular modular para el proceso de enseñanza aprendizaje no sólo del cálculo. Ello tuvo lugar en la Sede Concepción de la Universidad del Bío-Bío.

- ***La segunda fase*** corresponde a un estudio realizado en el contexto de la Carrera de ***Ingeniería en Alimentos***, en la ***Sede Chillán de la UBB***. Aquí se trabajó con los estudiantes que conformaron el grupo curso. En él, el diseño curricular modular fue el medio utilizado para impartir la asignatura de cálculo diferencial.

- ***La tercera fase*** corresponde a la aplicación del diseño curricular modular ***también en la Sede Chillán de la*** UBB, ahora en el contexto de ***la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales,*** conformando para ello dos grupos de manera aleatoria, un grupo experimental que recibe dicho diseño curricular modular para el aprendizaje del cálculo y, otro que no lo recibe.

Estas son, en síntesis, las tres fases que conforman de manera global la ***fase experimental d***el presente trabajo de tesis.

4.2. Enfoque y tipo de estudio

El enfoque dado a la presente investigación es de carácter ***cuantitativo,*** según Sampieri (2003): *"Es el que utiliza la recolección de datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico para establecer patrones de comportamiento"*, esto es, se presentarán y analizarán los registros de los rendimientos académicos finales obtenidos por los estudiantes que participaron a través del tiempo en esta investigación. Ello no excluye un análisis de carácter cualitativo que también se realiza ya en su fase final, donde se trabaja con un solo grupo de estudiantes que conforman el curso regular de cálculo de una variable, en la que la derivada es su tema central.

Es preciso hacer notar que uno de los resultados de inicio que permitió avanzar en este estudio, lo constituyen los buenos resultados obtenidos en prácticas previas, en los que el elemento esencial de dichas experiencias educativas se articuló en torno al diseño curricular modular (llamado modularización***)*** de las asignaturas. Los resultados estadísticos preliminares, de dichas experiencias, los cuales se mostrarán en el siguiente capítulo, fueron un verdadero estímulo para emprender con ánimo y con una previsión de confianza que la propuesta diseñada y probada en el aula podría acabar con relativo éxito y, por tanto, confirmar la Hipótesis de trabajo inicial presentada. El estudio también se torna explicativo, dado que pretende explicar las causas de los resultados obtenidos, ello en función de las evidencias expresadas numéricamente, las que se manifestaron en mejores resultados del rendimiento académico final de la asignatura de cálculo, cada vez que la propuesta fue implementada en el aula con los estudiantes participantes del estudio en cuestión.

4.3. Diseño del estudio

El diseño en sí constituye el plan desarrollado para poder obtener la información que la presente investigación requiere como tal.

En términos técnicos este estudio es en sus tres Fases de corte experimental, dado que en él se recogen las experiencias realizadas en el aula y en las que en cada oportunidad se usó, como parte esencial de la propuesta, el diseño curricular Modular junto a las actividades didácticas previamente diseñadas para su desarrollo.

4.3.1. Diseño de la primera fase

La ***primera fase*** del estudio se encarga de recoger los datos empíricos realizados en el Campus Concepción de la Universidad del Bío-Bío, y en el contexto de las Carreras de Ingeniería de Ejecución, que para el caso son tres. En ellas se recoge la experiencia Modular a modo de síntesis, donde los datos que se reportan guardan relación con el rendimiento final que experimentan los cursos de Cálculo 1, cada vez que la experiencia modular tuvo lugar. Así, las variables de corte cuantitativo que se analizan son básicamente dos, a saber:

a) *El porcentaje de aprobación del curso.*

b) *El promedio de las notas que obtienen los estudiantes.*

Las variables enunciadas arriba se consideran durante varios años, tanto antes de realizar la experiencia de intervención modular como después de ella.

También es oportuno decir que, la gran mayoría de los docentes en esta Fase inicial asistieron a la capacitación ofrecida para hacer realidad en el aula esta nueva forma de mediatizar la enseñanza del Cálculo y materias como el Álgebra y Trigonometría y la Física 1, asignaturas todas del primer año lectivo de las Ingenierías ofrecidas por la Universidad como carreras de formación de pregrado. Como resultado del proyecto se elaboró ***Material de Apoyo docente para los estudiantes***, para los dos Módulos, dichos documentos fueron objeto de estudio en el Capítulo 2, en el momento de analizar los textos de cálculo usados por los docentes a la hora de realizar la acción docente en el aula.

De esta forma se observa bastante claridad respecto al uso de este nuevo diseño curricular Modular empleado, y que conforma los primeros antecedentes de la Fase experimental de inicio. Las propias estadísticas que se exhibirán en el próximo capítulo confirmarán los buenos resultados logrados para esta primera Fase empírica, dando la razón de su uso con los estudiantes.

Luego, los antecedentes aportados sobre este trabajo, dieron sustento para considerar la ***segunda fase*** empírica del estudio. Ahora en otro contexto y en otra carrera de pregrado. Es lo que se comenta a continuación.

4.3.2. Diseño de la segunda fase

La ***segunda** f**ase*** de este estudio, toma como referencia al grupo curso en su conjunto. Por consiguiente la propuesta de innovación curricular se aplica a todo el curso, ello en virtud de los buenos resultados previos obtenidos en las experiencias anteriores, esto es, los reportados en la fase 1. Aquí, la investigación acción es un valioso recurso que permite tras las sucesivas experiencias educativas realizadas en el aula, mejorar de manera paulatina cada intervención posterior, como fruto de la experiencia de la Fase anterior. Todo ello en pos de la mejora, y así dar sentido y orientación a las realizaciones posteriores de intervención en el aula.

Esta fase 2, tiene en el contexto estadístico una caracterización como la siguiente, a pesar de las múltiples mediciones que se hicieron a través de los dos módulos de trabajo, y es la siguiente: G X O, donde G corresponde al grupo curso, X es la aplicación del diseño curricular modular y O es la medición Final, que para nuestro caso corresponde al promedio obtenido por los estudiantes en los dos módulos de trabajo a lo largo del curso.

Esta segunda fase, se realizó, como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, en la carrera de ***Ingeniería en Alimentos*** de la sede Chillán de la UBB.

En el transcurso de esta segunda fase, se llevó a cabo la elaboración de dos cuestionarios, con sus respectivas validaciones por juicios de expertos, sobre los dos temas centrales del cálculo como son: los conceptos de ***"límite"*** y el de ***"derivada y sus Aplicaciones***". Con sus correspondientes estimaciones del α de Cronbach para cada uno de ellos.

La aplicación de dichos Cuestionarios fue realizada a un total de veinte docentes universitarios pertenecientes a cuatro instituciones a lo largo del país, Chile.

Otro aspecto importante, digno de mención, también ejecutado durante el transcurso de esta segunda fase y, como una consecuencia natural del estudio realizado por medio de los cuestionarios fue el análisis de algunos textos de cálculo, en un total de diez (10) de ellos. El objetivo central que inspiró dicho examen fue el tratar de develar el tratamiento didáctico dado por sus autores sobre los conceptos básicos de límite y derivada, todo ello con el claro propósito de poder tener antecedentes que permitiesen la posterior elaboración de las actividades didácticas de aprendizaje para el curso de cálculo diferencial en su última fase experimental.

En ciertos casos, estos trabajos, que corresponden a un diseño pre-experimental sirven como estudios exploratorios, al igual que lo ocurrido en la fase 1, y sus resultados deben observarse con cierta precaución, por decir lo menos. Ello no debe amilanar al investigador que se empeña en probar o rechazar un hipótesis de trabajo que da vida a todo un proyecto de investigación.

4.3.3. Diseño de la tercera fase

La ***tercera fase*** del estudio es de corte experimental de dos grupos, uno de ellos que sirve como Grupo Experimental y el otro como Grupo Control. Como es lógico, el primero de ellos recibe la propuesta de innovación curricular, en cambio el segundo Grupo, (Grupo Control) no la recibe. La propuesta para los efectos netamente explicativos se ha denominado ***"propuesta modular",*** en contraste a la "***enseñanza tradicional"*** que recibe el grupo Control.

Otros antecedentes para esta tercera fase, informan que, el estudio se realizó con un total de 56 estudiantes, los grupos fueron seleccionados al azar, esto es, de forma completamente aleatoria.

Ambos grupos tuvieron como requisito previo la asignatura cursada con anterioridad, de su plan de estudio, esto es, la asignatura de Álgebra y Trigonometría. Los estudiantes, además, estaban adscritos a la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales de la Universidad del Bío-Bío, Campus Chillán, Chile.

Ahora, poniendo el centro de atención en esta última fase de intervención, en lo que a su diseño corresponde, se puede decir lo siguiente: tanto en la mirada global del curso, como en lo que corresponde a las Unidades Didácticas que conforman los dos Módulos de trabajo, los que en definitiva dan vida al curso, se ha optado para la descripción del diseño considerar aspectos que guardan relación con los siguientes ocho puntos, los que analizados completamente configuran de manera íntegra el diseño de la intervención en esta fase final.

Los ***ocho punto***s a considerar fueron:

1. *Identificación y descripción de la Asignatura.*
2. *Objetivos.*
3. *Resultados esperados.*
4. *Contenidos.*
5. *Actividades de aprendizaje.*
6. *Medios y recursos.*
7. *Tiempo empleado para su realización, y*
8. *Evaluación.*

Así, la primera aproximación al diseño de la intervención pedagógica para esta última fase experimental describe de manera general la ***asignatura d***e ***cálculo 1***, en los puntos señalados anteriormente, y en ese mismo orden de presentación se recorren cada uno de dichos aspectos, de modo de poder conformar los lineamientos por los cuales discurrirá la propuesta de innovación en su fase experimental.

Es lo que se hace a continuación. No sin antes acotar que el programa de la asignatura, como tal, se concibe como un referente importante a la hora de concebir el diseño de la intervención para esta última fase empírica de este trabajo de Tesis.

Luego, la asignatura como tal, es la primera instancia que ocupa la atención en el diseño a seguir y, por tanto, ***la primera carta de navegación a tener presente sobre la cual poder mediatizar el aprendizaje del cálculo diferencial*** en su fase empírica posterior. Es lo que se describe a continuación.

4.3.3.1. Sobre la asignatura: aspectos generales

1. Identificación y descripción de la asignatura

Identificación

a) Nombre: Cálculo 1

b) Facultad y departamento que lo imparte: Ciencias, Departamento de Ciencias Básicas

c) Carrera: Pedagogía en Ciencias Naturales

d) Número de créditos: 6

e) Total de horas por semana: horas teóricas 4, horas prácticas: 2

f) Prerrequisitos: Introducción a la Matemática.

Descripción de la Asignatura

Asignatura de nivel básico del primer año de estudio de la carrera y del segundo semestre, que permite poner en conocimiento del estudiante los conceptos matemáticos del cálculo de una variable, como de los procedimientos que ello involucra para resolver problemas de optimización y del estudio acabado de una función de variable real.

2. Objetivos:

a) General

Lograr la formación de un lenguaje básico de la Matemática del cambio, necesario para el tratamiento de los problemas que bajo este contexto se puedan resolver, como también lo relacionado con las futuras materias del cálculo y asignaturas de especialidad donde el conocimiento del cálculo diferencial sea pieza fundamental.

b) Específicos

1) Comprender los conceptos básicos del Cálculo Diferencial, como son el concepto de límite y derivada.

2) Aplicar el Cálculo Diferencial en la resolución de problemas de diversa índole que guarden relación con las materias de su formación profesional, como son los problemas de optimización y en donde la estimación de la derivada es el punto de inicio para la consecución de su solución.

3) Establecer, en su parte final, la conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, como procesos inversos uno del otro.

3. Resultados esperados

a) Reconoce distintos tipos de funciones respecto de: dominio, rango y gráfico intuitivo, usando recursos informáticos como una forma de verificar su estudio.

b) Estima el valor del límite de funciones en: un punto, cuando x es grande positivo y /o grande negativo para una variada clase de funciones.

c) Aplica el concepto de continuidad en el estudio de funciones, tanto de manera local como en su dominio de definición.

d) Comprende el concepto de derivada, en primer término, como la pendiente de la recta tangente y, de manera paralela como el límite de las velocidades medias en su sentido físico. Reconociendo en ello la solución de un mismo problema.

e) Estima el valor de la derivada de una función, usando en primer término la definición clásica y posteriormente las reglas sobre derivación.

f) Domina la regla de la cadena y la derivación implícita para las distintas funciones y expresiones matemáticas, para la resolución de problemas.

g) Aplica correctamente todas las reglas de derivación en la solución de diversos problemas contextuales, donde la optimización es su pieza angular.

h) Establece la conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral como procesos inversos uno del otro, y en su relación con el teorema fundamental del cálculo.

4. Contenidos

Los temas a examinar durante el curso son cuatro, a saber:

a) *Las funciones de una variable real*

b) *El límite y la continuidad de funciones*

c) *La derivada*

d) *Aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral.*

5. Actividades de aprendizaje

Constituyen el quid de la propuesta, ellas se agrupan en función de los cuatro temas centrales que se han mencionado en el punto anterior, los cuales conforman los contenidos a tratar en el curso de Cálculo Diferencial.

Las actividades didácticas diseñadas han sido el resultado de un arduo análisis y estudio de revisión de los textos de cálculo, en total diez, como asimismo el fruto de la experiencia académica alcanzada en la dictación de esta materia de estudio a lo largo de más de 35 años de docencia universitaria.

Así, cada actividad didáctica está debidamente identificada, se compone de su correspondiente título, para señalar su temática y, considera además, unos objetivos junto a las actividades de aprendizaje propiamente tal, las que corresponden a una selección de problemas sobre la temática que cada una de ellas aborda de manera específica. El listado completo de ellas se incluye en el Anexo de la Tesis.

Es claro que, de su eficaz realización por parte de los estudiantes depende buena parte del aprendizaje del Cálculo.

El aprendizaje, como sabemos, no pasa del texto a la cabeza sin el debido esfuerzo del propio estudiante, decir otra cosa es apartarse completamente de la verdad, la que se constata a cada paso en la labor del aula a lo largo de los años.

6. Medios y recursos

En su aspecto central, los medios para el aprendizaje son tanto las clases teóricas como prácticas que tienen lugar semanalmente, con dos sesiones teóricas de 80 minutos cada una y una sesión práctica de 80 minutos a la semana. Lo que hacen cuatro horas semanales, que aprovechados de buena manera pueden rendir sus frutos.

Cada sesión teórica se apoya con diapositivas relacionadas con el tema en estudio, más la exposición del profesor, el que usa como recursos al pizarrón y sus correspondientes lápices.

Por su parte, las sesiones prácticas se apoyan con el trabajo de las actividades didácticas elaboradas para cada uno de los temas que se tratan durante los dos Módulos en los que se implementa el curso a lo largo del semestre.

Se usan, además, dos medios informáticos, como son los software ***Winplot*** y ***Geogebra***, ambos de dominio público y de fácil manejo. Sin perjuicio de lo anterior se usa la plataforma virtual Adecca, que sirve como un medio para colocar las actividades didácticas de cada uno de los módulos y también como un medio de comunicación e interacción con todos los participantes del curso.

Son recursos también las propias capacidades docentes, que se expresan en la comunicación oral que se establece con los estudiantes, en pos de una mejor comprensión de la materia y en la conjugación del desarrollo del curso en su conjunto, velando por el buen entendimiento entre todos los actores que participan de esta última fase empírica por desarrollar.

7. Tiempo empleado

El curso como tal se desarrolla durante un semestre, el que contempla 16 semanas de duración. Se reparte además en dos Módulos de trabajo de ocho semanas cada uno.

Una programación detallada, por semana, en cuanto a las actividades a realizar en cada uno de los Módulos y sus correspondientes repeticiones, se hará en la siguiente aproximación a este diseño que se elabora para dar cumplimiento con la siguiente y última fase empírica de la investigación.

Uno de los aspectos que no se puede dejar pasar por alto es la evaluación y, sobre todo, si se quiere constatar los aprendizajes de los estudiantes. Ello es materia del siguiente punto (8), el que se aborda con el detalle que dicho asunto amerita.

8. Evaluación

Aunque se ha dejado para el final de este primer diseño, hay algunos autores que declaran que es uno de los temas que se debería abordar en primer término y, en base a ello, ordenar todo el accionar didáctico posterior para desarrollar el curso.

Lo cierto es que, la evaluación es un tema que concita mucho interés por parte de muchos educadores y, sin duda que lo tiene, pues si se quiere constatar que se han producido o se están produciendo avances en el aprendizaje de cualquier materia que se enseñe e independientemente del nivel educativo que se esté, la evaluación no puede estar ausente. Eso sí, cuidando de realizarla ajustada a los contenidos tratados y los posibles alcances que de ella se derivan a la hora de su aplicación.

Las evaluaciones a realizar, además de considerar el Test ***Conocimientos previos,*** para cada uno de los módulos se pormenorizan a continuación y cubren completamente el semestre académico.

Las evaluaciones y sus respectivas ponderaciones se exponen en la siguiente Tabla.

Tabla n° 29. Evaluaciones para el Módulo 1.

	Evaluaciones	***Ponderación***
Módulo 1	Test n°1 y test n° 2	20 % cada uno
	Examen y Examen de Repetición.	60 % cada uno.

Observación 1: el ***Módulo 1 de Repetición***, contempla las mismas evaluaciones.

Por su parte el Módulo 2 contempla las siguientes evaluaciones, a saber:

Tabla n° 30. Evaluaciones para el Módulo 2.

	Evaluaciones	***Ponderación***
Módulo 2	Test n°1 y Test n° 2	20 % cada uno
	Trabajo grupal	20 %
	Examen y Examen de Repetición	40 %

Observación 2. El ***Módulo 2 de Repetición***, contempla la misma cantidad de evaluaciones que el ***Módulo 1,*** ello en atención a que se trata de un Módulo con un carácter intensivo y, por tanto con una duración menor en los tiempos de su dictación, aproximadamente cuatro semanas.

Observación 3. En cada uno de los módulos, sean o no de repetición, los estudiantes que obtienen una nota que va entre 3.5 y 3.9, ambas notas inclusive, tendrán derecho a rendir un Examen de Repetición.

Observación 4. La nota mínima de aprobación para cada Módulo, corresponde a un 4.0, y el rango de notas varía entre uno (1) y siete (7).

Observación 5. La aprobación de cada Módulo implica aprobar la asignatura, con una nota que resulta del promedio de ambos Módulos.

Lo que se acaba de presentar, en sus ocho puntos, constituye la primera aproximación para dar sentido y contenido al diseño que se desea implementar en la fase empírica final de la investigación.

A continuación se considera la segunda aproximación al diseño en su fase empírica tres, la que da cuenta completa de lo que debería ocurrir a lo largo de las dieciséis semanas lectivas, tiempo programado para un semestre normal de trabajo en el aula según el calendario académico vigente por la Institución, en general.

4.3.3.2. Diseño de las actividades de la asignatura por semana

La ***segunda aproximación al diseño*** de la planificación de la asignatura en función de las semanas que contempla el semestre académico, que corresponde a 16 semanas lectivas, es la que a continuación se expone. Las unidades didácticas tratadas en cada uno de los módulos, naturalmente se ajustan al programa de la asignatura, en general.

Tabla n° 31. Planificación de las actividades por semana.

Tiempo en semanas	***Actividades***
Semana 1	Aplicación de Test sobre conocimientos previos. Aspectos generales de la asignatura: Objetivos, Evaluación y explicación del diseño curricular modular de trabajo en la asignatura. Conformación de los grupos de trabajo por parte de los estudiantes. Aplicación del Pre-Test al curso, ambos grupos.
Semana 2	Repaso de los contenidos básicos del álgebra necesarios para el aprendizaje del Cálculo. ***Inicio del Módulo 1***. Unidad Didáctica 1, funciones.
Semana 3	Unidad Didáctica 1.
Semana 4	Inicio Unidad Didáctica 2, sobre límite y continuidad de funciones. Evaluación del Test n°1. Sobre funciones.

Semana 5	Continuación Unidad Didáctica 2, sobre derivada de funciones
Semana 6	Continuación de la Unidad didáctica 2, del Módulo 1, límite y continuidad de funciones. Evaluación del Test n°2. Sobre derivada de funciones
Semana 7	Continuación de la Unidad Didáctica 2, del Módulo 1, sobre derivada de funciones. Entrega de resultados de las evaluaciones realizadas.
Semana 8	Evaluación del Módulo 1, Examen. Entrega de resultados de las evaluaciones realizadas. Evaluación del Módulo 1, Examen de Repetición, estudiantes rezagados. Inicio del Módulo 1 de Repetición.
Semana 9	***Inicio del Módulo 2***. Unidad Didáctica 3, sobre derivada de funciones. ***Inicio del Módulo 1, de Repetición***: la misma planificación de la Semana 2 del Módulo 1
Semana 10	Continuación ***Módulo 2***. Unidad didáctica 3, sobre derivada de funciones ***Módulo 1 de Repetición***: la misma planificación de la Semana 3 del Módulo 1
Semana 11	Continuación del ***Módulo 2***. Unidad Didáctica 3, sobre derivada de funciones. Evaluación del Test n°1 para el Módulo 2. ***Módulo 1 de Repetición***: la misma planificación de la Semana 4 del Módulo 1

Semana 12	Inicio de la Unidad Didáctica n°4, Aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral. ***Módulo 1 de Repetición***: la misma planificación de la Semana 5 del Módulo. 1.
Semana 13	Continuación de la Unidad Didáctica n°4, Aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral. ***Módulo 1 de Repetición:*** evaluación del Test n° 2.
Semana 14	Continuación del ***Módulo 2.*** Unidad Didáctica 4, sobre aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral. Evaluación del Test n° 2 para el Módulo 2. ***Módulo 1 de Repetición***: la misma planificación de la Semana 7 del Módulo 1.
Semana 15	Exposición de trabajos dados al inicio del curso. ***Módulo 1 de Repetición***: evaluación: Examen.
Semana 16	Evaluación: examen del Módulo 2. Evaluación: examen de repetición del Módulo 2, para los estudiantes rezagados. ***Módulo 1 de Repetición.*** Evaluaciones: Examen y Ex. de Repetición del Módulo 1, para los estudiantes rezagados.

A continuación se describen las ***Actividades del período intensivo***, de cuatro semanas de duración, en las que ***se repite el Módulo 2***, para estudiantes que lo cursan por primera vez y para aquellos que lo repiten en segunda oportunidad.

Tabla n° 32. Actividades del Módulo 2 de repetición, período intensivo.

Tiempo	***Actividades***
Semana 1	Unidad didáctica 3, sobre derivada de funciones
Semana 2	Continuación Unidad Didáctica 3
Semana 3	Unidad didáctica 4, sobre aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral Evaluación Test n° 1, sobre derivada de funciones
Semana 4	Continuación Unidad Didáctica 4. Evaluación final del Módulo 2 de repetición, Examen sobre las unidades didácticas 3 y 4. Evaluación final de Repetición del Módulo 2, Unidades Didácticas 3 y 4, estudiantes rezagados, con notas entre: 3.5 y 3.9. Entrega de resultados de los exámenes realizados del Módulo 2 de Repetición. Revisión final del curso respecto de todas las evaluaciones realizadas durante el semestre.

De esta manera se concluye la ***segunda aproximación al diseño,*** en su fase 3. Se continúa con la tercera aproximación, la que se realiza sobre cada uno de los Módulos, y sobre las unidades didácticas que lo conforman, que en cada caso son dos.

Como se podrá apreciar, cada aproximación posterior del diseño resulta más fina y, por lo tanto, de mayor profundidad en los puntos que se consideraron al inicio. Todo ello con el claro propósito de dar sentido y claridad a la ejecución en su fase empírica final de la intervención pedagógica propuesta para el aprendizaje del Cálculo Diferencial, hilo conductor de la presente Tesis doctoral en su etapa final.

Así, la tercera y última aproximación al diseño se presenta considerando cada uno de los Módulos, que para el caso tratado resultan ser dos.

En primer término se aborda el diseño para el Módulo 1, junto a sus dos Unidades Didácticas: la Unidad Didáctica 1, referida al tema de Funciones y la Unidad Didáctica 2, referida al tema de límite y continuidad de funciones. A continuación se emprende el diseño del Módulo 2 y sus correspondientes Unidades Didácticas, la tres y la cuatro. La unidad Didáctica 3, referida al tema de la derivada y la Unidad Didáctica 4, que aborda el tema sobre las aplicaciones de la derivada y su conexión con el cálculo integral.

De esta manera, se contempla en toda su extensión y, con el mayor detalle posible el diseño al cual se aspira y, así implementar el curso en su fase de realización en el aula propiamente tal.

En virtud de lo expresado, se da entonces inicio al ***Diseño del Módulo 1*** con sus correspondientes ***unidades didácticas*** que él contempla, en los mismos puntos ya tratados de manera general para la asignatura, esto es, *Identificación y descripción del Módulo 1, Objetivos, Resultados esperados, Contenidos, Actividades de aprendizaje, Medios y recursos, Tiempo empleado para su realización, y Evaluación.*

4.3.3.3. Diseño del Módulo 1

1) Identificación y descripción del Módulo 1

El Módulo 1, es el primero de dos módulos que contempla la asignatura de Cálculo 1. En él han de darse entonces todas las instrucciones que expliquen a los estudiantes en qué consiste el trabajo del Módulo 1 en sí, como también exponer el uso del diseño curricular Modular en su conjunto, en cuanto a duración del Módulo en tiempo y el sistema de evaluación que se usará no sólo en el Módulo sino también durante todo el curso.

En lo que respecta al contenido, se declara revisar las primeras y fundamentales materias del Cálculo Diferencial, como son: el concepto de función y el límite y continuidad de funciones.

Además de lo anterior, es pertinente organizar el curso en grupos, una vez conocidos los distintos estilos de aprendizaje de los estudiantes que darán vida al grupo curso en sí. Por último, la aprobación del Módulo 1, da derecho para continuar con el segundo Módulo que conforma el curso, en caso contrario, esto es, de reprobar el Módulo 1, el estudiante tendrá derecho a repetir dicho Módulo por segunda vez, durante el tiempo en el cual se dicta el segundo Módulo, esto es, el Módulo 2.

2) Objetivos del Módulo 1

- Revisar los contenidos previos necesarios para lograr el aprendizaje de los principios del cálculo.
- ***Conocer en todas sus representaciones***: verbal, algebraica, tabular y geométrica el concepto de función, para una amplia clase de funciones, como: polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas contempladas para el Módulo 1.
- ***Comprender el concepto de límite*** de una función en un punto, de manera intuitiva y posteriormente teniendo como base su definición formal.
- ***Evaluar distintos tipos de límites*** *de funciones.*
- ***Demostrar usando la definición*** el valor del límite para una función lineal dada.
- ***Estimar*** matemáticamente, cuando una función es o no es continua en un punto.

3) Resultados esperados para el Módulo 1

- Distingue cuando una expresión algebraica de dos variables es o no función.
- Conoce las distintas representaciones que admite una función y es capaz de pasar de una representación a otra.

- Determina en todas sus partes el estudio de una función de variable real.

- Comprende de manera intuitiva- gráfica y tabular- el concepto de límite de una función en un punto.

- Demuestra, usando la definición formal del límite, el valor del límite para funciones sencillas, como lineales y cuadráticas.

- Examina, en base a los temas tratados, cuando una función es o no continua en un punto y en su dominio de definición.

4) Contenidos del Módulo 1

- Concepto y definición de función de una variable real. Dominio y recorrido. Diversas representaciones de una función.

- Funciones: lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. La biyectividad. Composición e Inversa de funciones. Álgebra de funciones.

- Idea intuitiva de límite y su definición formal. Límites: laterales, infinitos y al infinito. Asíntotas. Álgebra de Límites. Límites trigonométricos. El teorema del valor intermedio. Aplicaciones.

5) Actividades de aprendizaje del Módulo 1

- Las actividades de aprendizaje se sitúan tanto en las clases teóricas como en las clases prácticas.

- En las ***clases teóricas***, el docente encargado además de exponer conceptos y procedimientos matemáticos de las materias tratadas, usa varios ejemplos ilustrativos, como instancias de aprendizaje. A continuación de la exposición hecha por el docente, una actividad propicia para el aprendizaje consiste en la resolución de problemas propuestos al estudiante, quien al resolver dichos problemas está en vías de su aprendizaje, se aborden estos problemas de manera individual o grupal, su participación en la resolución de ellos se torna vital si se desea acceder al aprendizaje.

- Algo similar ocurre durante el transcurso de las ***clases prácticas***, donde los problemas han sido diseñados para afianzar y profundizar los conocimientos teóricos del curso, en su conjunto. Dichos problemas se resuelven usando distintas estrategias de solución, las que usadas correctamente contribuyen a un aprendizaje eficaz de los conceptos y procedimientos de los temas esenciales, esto es, funciones, límite y continuidad.

6) **Medios y recursos del Módulo 1**

- Para la exposición de las clases teóricas: uso el pizarrón, lápices de distintos colores, el proyector, puntero laser, diapositivas y animaciones con el software Geogebra, lo que permite hacer uso de la visualización y, con ello, un cambio de registro de los diversos conceptos que se tratan durante este módulo 1. Por su parte, en el desarrollo de las clases prácticas se usan las actividades didácticas elaboradas.

- También se contempla el uso del software Winplot, de dominio público, de fácil uso hoy en día, dado que los estudiantes son hoy nativos digitales, lo que no es el caso para una gran cantidad de profesores hoy en el ejercicio docente.

- Este software (Winplot) se usará en ambos Módulos, en el primero como un recurso para apoyar los aprendizajes del concepto de función y, en el segundo Módulo como un recurso que permitirá la comprobación del estudio de las funciones de variable real, las que se estudiarán usando las herramientas con las que cuenta el Cálculo Diferencial para su análisis.

7) **Tiempo empleado para el Módulo 1**

- ***Ocho semanas lectivas***, en la primera de ellas se organiza el curso, de modo tal que se tienen en efecto tan sólo siete ***semanas para la realización efectiva del*** *Módulo 1.*

- Para las ***horas teóricas***: 4 en cada semana, con un total de 160 minutos semanales (Una hora teórica se considera de 40 minutos). Lo anterior representa 28 horas pedagógicas, para la actividad teórica.

- Para las ***horas prácticas***: 2 en cada semana, con un total de 80 minutos por semana. Lo que configura un total de 14 horas, dado que el módulo tiene una duración de siete semanas lectivas.

En definitiva, el total de horas pedagógicas, tanto teóricas como prácticas da como resultado para el Módulo 1 un total de 42 horas pedagógicas.

8) Evaluación del Módulo 1

- Se contemplan cuatro evaluaciones, dos test de 20 % de ponderación cada uno, la tercera y quinta semana, y dos Exámenes de 60 % cada uno, el segundo reemplaza al primero, para aquellos estudiantes que obtienen una calificación ponderada final entre 3.5 y 3.9 (ambos valores incluidos) los que se realizan la octava semana, que corresponde a la finalización del primer Módulo de trabajo.

Corresponde ahora tratar, con el máximo detalle posible, cada una de las dos ***Unidades Didácticas*** contempladas para la realización del Módulo 1.

- ***La Unidad Didáctica 1: Funciones.***

- ***La Unidad Didáctica 2: Límite y continuidad.***

Cada una de estas ***Unidades*** se tratará en los ocho puntos esenciales que se han desarrollado hasta ahora, tanto en su visión general del curso como en el tratamiento dado al Módulo 1. De esta forma se presenta con bastante detalle la intervención pedagógica que se realizará posteriormente en su ***Fase Experimental.***

4.3.3.3.1. Diseño de la Unidad Didáctica 1: funciones

1. **Identificación y descripción de la Unidad Didáctica 1**

Esta es la primera de dos unidades didácticas que contempla el primer Módulo del curso de Cálculo 1, el que básicamente corresponde al Cálculo Diferencial. En él, el tema central versa sobre las Funciones, en la profundidad necesaria para entender los conceptos posteriores que serán tratados. Es este un concepto básico y esencial de la Matemática, el cual permite establecer una relación entre dos variables de dominio real.

En gran medida, el análisis de las funciones corresponde al estudio de la Matemática en sí. Sin lugar a dudas, conocer una función en sus diversas representaciones es esencial para la comprensión posterior de los demás temas, de ahí entonces su importancia y trascendencia dentro del inicio del estudio del Cálculo y en particular para dar como contenido inicial a esta primera Unidad Didáctica del Módulo 1.

2. Objetivos de la Unidad Didáctica 1

- ***Comprender el concepto de función*** en sus diversas representaciones: verbal, algebraica, tabular y gráfica.
- ***Conocer una gran variedad de funciones***, respecto del: dominio, recorrido y lo que sucede en sus puntos de indeterminación.
- ***Identificar el concepto de función como un modelo*** de varias situaciones de contexto a modo de ejemplo y aplicación.

3. Resultados esperados de la Unidad Didáctica 1

- Reconoce el valor del concepto de función.
- Es capaz de pasar de una representación a otra para una función específica.
- Determina el dominio y rango de una función de variable real.
- Trata correctamente los casos de indeterminación de una función, como un preámbulo para el estudio del límite de la función en dichos puntos.

4. Contenidos de la Unidad Didáctica 1

- El concepto de función en sus diversas representaciones.
- Dominio y recorrido de una función. Tratamiento de los puntos de indeterminación.
- Álgebra de funciones.
- La biyectividad y función inversa. La composición de funciones.
- La función exponencial y logarítmica.

- Las funciones trigonométricas y sus respectivas funciones inversas.
- La función vista como un modelo de situaciones contextuales.

5. Actividades de aprendizaje de la Unidad Didáctica 1

- Resuelve las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA) por parte del estudiante, con el apoyo del profesor ayudante, trabajo realizado de manera grupal e individual, con una puesta en escena por uno de los integrantes de los grupos conformados al inicio del curso. Para esta Unidad se han programado 10 actividades didácticas, las que se incluyen como parte del Apéndice de la Tesis.
- Estudio, por parte de los estudiantes, de los apuntes de textos radicados en la plataforma virtual Adecca.

6. Medios y recursos de la Unidad Didáctica 1

- Para las ***clases teóricas***, uso del pizarrón y del proyector. Preguntas dirigidas a los estudiantes como medio de interacción y verificación sobre el entendimiento que logran los estudiantes sobre los temas tratados.
- Para las ***clases prácticas***: uso de parte de los estudiantes de las actividades didácticas sobre los temas tratados, con el apoyo del software Winplot, como un recurso para la resolución de los problemas considerados.

Consulta de diferentes textos de Cálculo. Uso de Internet en sitios sugeridos en clase, como por ejemplo: la plataforma Adecca, y los sitios:

http://www.stewartcalculus.com/media/9_inside_homework_hints.php y
http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
http://www.youtube.com/watch?v=uuUS53gC_IY
Más los recursos encontrados en ***youtube.com***, a modo de exploración por parte de los propios estudiantes.

7. Tiempo empleado en la Unidad Didáctica 1

El tiempo empleado para la realización de esta Unidad Didáctica es de tres semanas lectivas, sin contar la primera semana de trabajo del curso propiamente tal, la que corresponde a su organización e información del curso en sus aspectos de evaluación, duración de la Unidad y temas a tratar durante él.

8. Evaluación en la Unidad Didáctica 1.

A esta Unidad Didáctica 1 le corresponde una sola evaluación, la de un Test, con una ponderación del 20 % del total de la Nota Final del Módulo, de la cual forma parte.

Así, lo anterior completa el diseño para la primera Unidad Didáctica 1, correspondiente al Módulo 1.

A continuación se revisa el diseño para la segunda Unidad Didáctica, la que también conforma el Módulo 1 en los mismos ocho puntos abordados y, por tanto, esenciales para dar vida a esta Unidad Didáctica, la número dos (2).

4.3.3.3.2. Diseño de la unidad didáctica 2: límite y continuidad

1. **Identificación y descripción de la Unidad Didáctica 2**

Esta es la segunda de dos Unidades Didácticas que contempla el primer Módulo del curso de cálculo diferencial.

Para esta unidad didáctica se tienen dos temas centrales, el límite y una aplicación, como lo es el examen de la continuidad de una función en un punto y, por tanto, en un dominio determinado. El concepto de Límite es fundamental dentro del Cálculo, pues como se sabe, la derivada y la integral definida corresponden a la estimación de un límite en su esencia.

A pesar de que hay autores de textos de Cálculo, como Lang (1990), por ejemplo, que lo relegan a un segundo plano y ven su importancia al momento de considerar el concepto de derivada, en este caso, se lo aborda inmediatamente después del estudio de las funciones.

Así, su utilidad y aplicación quedan de manifiesto al momento de ser usados como un instrumento matemático necesario para la estimación de otros objetos matemáticos, como lo es la integral, por ejemplo, en un estudio posterior al cálculo diferencial.

2. **Objetivos de la Unidad Didáctica 2**

- ***Comprender el concepto de Límite*** de una función en un punto y cuando x es grande positivo y x es grande negativo.

- ***Estimar el valor del límite*** usando los resultados más importantes relacionados con este tema.

- ***Probar usando la definición formal***, el valor del límite en un punto dado, para funciones sencillas.

- ***Decidir usando la definición de continuidad*** cuando una función es o no continua, clasificar los tipos de discontinuidad y reparar la función de modo de hacerla continúa cuando ello sea posible.

3. **Resultados esperados de la Unidad Didáctica 2**

- Aplica el concepto de límite en situaciones que representan modelos de problemas contextuales o en expresiones matemáticas donde su conocimiento se hace necesario.

- Determina el valor del límite de una función y, por ende, decide cuándo una función es o no continua en un punto dado de su dominio.

- Aplica el valor de ciertos límites trigonométricos para estimar otros límites.

- Comprende el concepto de continuidad de una función, de manera local y en el dominio de definición de ella.

4. **Contenidos de la Unidad Didáctica 2**

- El concepto de Límite: aproximación informal. Ejemplos de existencia y no existencia del límite de una función en un punto.
- Álgebra de Límites. Uso de ejemplos ilustrativos sobre ellos. Aplicación de los resultados del álgebra de límites en la estimación de nuevos límites.
- El concepto de continuidad de una función en un punto. Uso de ejemplos ilustrativos.
- Estudio de la continuidad de funciones definidas a trozos.
- Continuidad de una función en un intervalo. Álgebra de funciones continuas.
- El teorema del valor intermedio y su aplicación a la determinación de raíces de un polinomio.
- Estimación de límites trigonométricos. Límites que involucran al infinito, estimación de asíntotas para una función dada.

5. **Actividades de aprendizaje para la Unidad Didáctica 2**

- Resolución de las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA) por parte del estudiante, con el apoyo del Profesor ayudante, trabajo realizado de manera grupal e individual, con una puesta en escena por uno de los integrantes de los grupos conformados al inicio del curso.

- Para esta unidad didáctica se han diseñado cuatro actividades didácticas de aprendizaje, y cada una de ellas, con leves variantes para resolver entre los distintos grupos, de modo de abordar problemas distintos y de esta forma enriquecer el conocimiento de los temas tratados.

- Las clases teóricas también representan una instancia de actividad de aprendizaje, dado que se puede interactuar con los estudiantes en la resolución de los problemas que sirven como ilustrativos para presentar los conceptos que se deben tratar durante esta unidad.

6. Medios y recursos para la Unidad Didáctica 2

- Tanto las clases teóricas como las prácticas tienen sus propios medios y recursos. Así, para las clases prácticas se destacan el uso frecuente por parte del profesor del pizarrón y el proyector.

- Por otro lado, el diálogo con los estudiantes resulta vital a la hora de comprobar si las distintas materias se están comprendiendo a cabalidad.

- El uso de variados ejemplos ilustrativos es otro medio que se usa, para ello los recursos informáticos, como Winplot, por ejemplo, resultan de vital importancia como medio ilustrativo en las distintas representaciones que posee la estimación del valor de un límite de una función. De ahí entonces que, su uso por parte del profesor y los estudiantes, es importante cuando resuelven los problemas dados en las actividades de aprendizaje diseñadas para la ocasión.

7. Tiempo empleado en la Unidad Didáctica 2

El tiempo necesario para implementar esta Unidad didáctica es de cuatro semanas lectivas, con sus correspondientes clases teóricas y prácticas. Con ello se da término al primer Módulo de trabajo, esto es, al Módulo 1.

Una semana más que la Unidad didáctica anterior, dado que los conceptos de límite y continuidad son nuevos para la mayoría de los estudiantes, no así, el concepto de función, el que se supone debería conocerse desde la enseñanza media, secundaria para el contexto español.

En suma: 16 horas pedagógicas, para la realización de la parte Teórica y un total de 14,5 horas pedagógicas para el desarrollo de la parte práctica de esta segunda Unidad Didáctica.

8. Evaluación en la Unidad Didáctica 2

La unidad contempla tres evaluaciones:

a) Un Test, (Test n°2) con ponderación del 20% de la nota final del Módulo 1.

b) Un Examen ponderado en un 60% de la nota final, rendido la última semana del Módulo 1.

c) Un Examen de Repetición del Examen anterior, para aquellos estudiantes que obtengan una nota final que está entre 3.5 y 3.9 ambas notas inclusivas.

En el mejor de los casos, los estudiantes tan sólo rinden dos evaluaciones, los rezagados por su parte deberán rendir tres.

De esta forma se completa el diseño hecho para cada una de las dos Unidades Didácticas que comprende el Módulo 1.

Para cerrar esta tercera aproximación al diseño de la propuesta, se considera a continuación el diseño elaborado para el segundo Módulo.

Como es natural, se recorre dicho diseño en los mismos ocho puntos ya tratados y, por último, se trata el diseño de cada una de las Unidades didácticas, que para este segundo módulo resultan ser también dos.

4.3.3.4. Diseño del Módulo 2

1. Identificación y descripción del Módulo 2

El Módulo 2, es el segundo de dos Módulos que contempla la asignatura de Cálculo 1. Como tal, su dictación se ofrece para aquellos estudiantes que hayan cursado satisfactoriamente el Módulo 1, en su período regular, esto es, a continuación del Módulo 1, o en su defecto, durante su período de Repetición, el que ocurre inmediatamente después de finalizado la dictación del Módulo 2, en primera instancia.

Está compuesto por dos Unidades Didácticas que cubren completamente la materia a tratar por el Cálculo Diferencial. Así, dichas Unidades son:

a) *Unidad Didáctica 3:* ***Derivadas.***

b) *Unidad Didáctica 4:* ***Aplicaciones de la Derivada****.*

2. Objetivos del Módulo 2

- ***Comprender*** el concepto de derivada desde sus dos sentidos más usados, como son: la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado y, la velocidad instantánea de una partícula en un punto, según una trayectoria dada.

- ***Estimar la derivada*** de funciones sencillas usando la definición.

- ***Discriminar*** la existencia o no de una derivada en un punto, usando derivadas laterales.

- ***Calcular*** el valor de la derivada de una función, en las que se apliquen las reglas de derivación. Estimar derivadas de orden superior.

- ***Aplicar las derivadas*** de las funciones sen(x) y cos(x), de modo tal de poder estimar el valor de las restantes funciones trigonométricas, usando las reglas de derivación adecuadas en cada caso.

- ***Usar*** correctamente la regla de la cadena en la determinación de la derivada de funciones compuestas.

- ***Evaluar*** la derivada de expresiones implícitas, con su consecuente aplicación geométrica involucrada en un problema específico.

- ***Aplicar la regla de la cadena***, para estimar la derivada, donde las funciones exponencial y/o logarítmica estén involucradas.

- ***Usar*** el criterio de la primera y/o segunda derivada para determinar los máximos y mínimos de una función de variable real.

- ***Resolver problemas de optimización***, donde la estimación de la derivada de una función que modela el problema permite avanzar en su solución.

3. Resultados esperados para el Módulo 2

- Comprende el concepto de derivada como la posición límite de las rectas secantes entre: un punto fijo P =(x, f(x)) y un punto Q= (x +h, f(x +h)), el cual tiende a P, a medida que h tiende a cero. Para obtener la pendiente de la recta tangente en el punto P de una curva.

- Usa la definición de Derivada para estimar la función derivada de funciones sencillas.

- Deduce las reglas de derivación de: la suma, el producto y el cociente de funciones.

- Aplica la definición de: derivadas laterales, para discernir cuándo una función es o no derivable en un punto.

- Determina la derivada de funciones compuestas y de expresiones implícitas.

- Verifica, usando las reglas de derivación, cuándo una función es o no una solución de una ecuación diferencial ordinaria.

- Estima la derivada de funciones compuestas, donde las funciones exponencial y logarítmica son las protagonistas.

- Usa el criterio de la primera o segunda derivada para determinar los máximos y mínimos de una función.

- Resuelve problemas de optimización donde la función objetivo es el tema de estudio: determinando un máximo o un mínimo, según sea el caso.

4. Contenidos del Módulo 2

- Presentación de los dos problemas fundamentales: el de la recta tangente y el de la velocidad instantánea, y sus respectivas soluciones.
- La Derivada, definición. Cuatro pasos. Ejemplos ilustrativos de la definición.
- Derivadas laterales, su uso en la determinación de la derivada en ciertos puntos singulares. Relación entre derivada y continuidad. Ejemplos ilustrativos.
- Las reglas de derivación: suma, producto y cociente. Ejemplos ilustrativos.
- La derivada de las funciones trigonométricas.
- La regla de la cadena y la derivación implícita. Ejemplos ilustrativos de aplicación de ambas reglas.
- La derivada de la función exponencial. La derivada de la función logarítmica. Ejemplos ilustrativos para ambos casos. Las funciones hiperbólicas y sus respectivas derivadas.
- Razones de cambio relacionadas.
- Los extremos de una función: máximos y mínimos. Puntos críticos.
- El Teorema de Rolle y del valor medio.
- Criterio de la primera derivada. Gráficas de curvas.

- Criterio de la segunda derivada. Gráficas de curvas.
- Resolución de problemas sobre Optimización.

5. Actividades de aprendizaje del Módulo 2

Las actividades de aprendizaje se sitúan tanto en las ***clases teóricas*** como ***prácticas.***

- En la parte teórica del curso, se espera que la exposición hecha por el docente del curso contribuya al aprendizaje, al constatar a través de la interacción con los estudiantes si se están produciendo o no los aprendizajes de los conceptos involucrados para el Módulo en desarrollo.
- Por su parte, para las clases prácticas, la realización de las actividades diseñadas para el Módulo por parte del estudiante, ya sea de manera grupal o individual, constituyen las fuentes más importantes para producir los aprendizajes esperados. Se contempla además, la ***realización de tareas*** tanto individuales como grupales por parte de los estudiantes, con un porcentaje de ponderación (20 %) de la Nota Final del Módulo 2.
- La ***elaboración de una presentación final*** de cada uno de los grupos conformados, al inicio del curso, constituye una fuente más de clara actividad de aprendizaje por parte de los estudiantes.

6. Medios y recursos del Módulo 2

- Para las clases teóricas, uso del pizarrón y del proyector, como fundamentales, más otros medios menores como lápiz y transparencias naturalmente. Preguntas dirigidas a los estudiantes como medio de interacción y verificación del entendimiento que logran los estudiantes en - los temas tratados.

- Para las clases prácticas: uso de parte de los estudiantes de las actividades didácticas sobre los temas tratados, con el apoyo del software ***Winplot*** y ***Geogebra,*** como herramienta para la resolución de los problemas considerados, en su dimensión geométrica.

- Consulta a otros textos de Cálculo. Uso de internet en sitios sugeridos en clase, como por ejemplo: la plataforma Adecca, y los sitios que ellos mismos encuentren como parte de su búsqueda personal y grupal.

También “youtube.com”, es otro excelente recurso donde encontrar material dinámico para ilustrar conceptos y procedimientos del Cálculo Diferencial. A modo de ejemplo, se cita:

http://www.youtube.com/watch?v=uuUS53gC_IY

7. Tiempo empleado en el Módulo 2

El tiempo necesario para desarrollar el Módulo 2, incluida su etapa de evaluación es de ocho (8) semanas.

- Para las ***horas teóricas***: 4 en cada semana, lo que se traduce en 32 horas de clases aproximadamente de 40 minutos cada una de ellas.
- Por su parte, las ***horas prácticas***: 2 en cada semana, se expresan en un total de 16 horas de clase aproximadamente para esta actividad durante las ocho semanas que dura el Módulo 2 en su realización total.

8. Evaluación en el Módulo 2

Las evaluaciones a realizar durante el Módulo 2 serán:

a) Dos Test (n° 3 y n°4), con una ponderación de 20 % cada uno de ellos.

b) Una tarea individual junto a la exposición grupal, constituyen un 20 % de ponderación y

c) Un Examen, con una ponderación del 40 %.

d) Un Examen de Repetición, para los estudiantes que obtienen entre 3.5 y 3.9 como nota final del Módulo 2. Este certamen, al igual que el anterior tiene un 40 % de ponderación y reemplaza al Examen rendido en primera instancia. Este examen de repetición tiene una ponderación de 40 %.

Observación: la nota final del Módulo 2, se estima como el promedio ponderado de las evaluaciones descritas anteriormente. Por su parte, la ***Nota Final del curso*** resulta ser el promedio obtenido en ambos Módulos. Se aprueba la asignatura, obteniendo en cada uno de los Módulos una nota superior o igual a cuatro, como es lógico, según la escala de evaluación vigente.

De esta manera los ocho puntos tratados permiten diseñar en sus aspectos esenciales e importantes el Módulo 2 de trabajo que conforma el cálculo diferencial en su conjunto.

A continuación se diseña cada una de las dos Unidades Didácticas que forman el Módulo 2, son ellas las Unidades 3 y 4, con sus respectivos nombres, a saber:

a) *Unidad Didáctica n°3*: ***Derivada***

b) *Unidad Didáctica n°4*: ***Aplicaciones de la derivada.***

Ambas Unidades Didácticas serán tratadas en los mismos ocho puntos con las que fueron consideradas las Unidades Didácticas uno (1) y dos (2) del Módulo 1.

4.3.3.4.1. Diseño de la tercera Unidad Didáctica

1. **Identificación y descripción de la Unidad Didáctica 3**

Esta es la primera Unidad Didáctica que contempla el segundo Módulo del curso de Cálculo 1, se refiere básicamente al concepto de derivada y sus temas relacionados más inmediatos.

El tema central que domina la unidad didáctica naturalmente, como su nombre lo indica, guarda relación con el concepto de la derivada, partiendo de su interpretación geométrica, como física, aspectos estos que motivaron su surgimiento en el siglo XVII, por los insignes matemáticos Newton y Leibniz, de forma separada.

La trayectoria didáctica que dibuja el diseño de esta unidad es la canónica, con ello se quiere manifestar que se recorre a la manera tradicional. Lo anterior indica que se realiza a través de su consideración geométrica y física en su parte introductoria y motivacional. Así, conectar los conceptos matemáticos con la geometría que ellos representan es el recurso que se usa de entrada. También su relación con el fenómeno de la velocidad es importante, por tanto ella es vista como el límite de la razón de cambio de la función de posición de una partícula en el tiempo.

Lo anterior permite fijar las ideas matemáticas con imágenes y, por ende, con representaciones más fáciles de asociar a la hora de aplicar los conceptos. Es la postura que se intenta aplicar en la presentación del concepto, donde la razón de cambio simulada de manera dinámica a través de los recursos informáticos se espera que contribuya en la comprensión del concepto de la derivada, su tema central en esta Unidad.

Con el desarrollo de esta Unidad se pretende preparar al estudiante para la posterior aplicación de la derivada en la Unidad Didáctica siguiente a ésta, ello da sentido y orientación a la misma.

2. Objetivos de la Unidad Didáctica 3

- ***Comprender*** el concepto de derivada de una función en un punto, de manera local y en sentido general, esto es, cuando la derivada es otra función.

- ***Estimar*** el valor de la derivada para funciones sencillas como: lineales, cuadráticas, raíz cuadrada,… usando la definición de derivada, esto es, el límite del cociente de Newton.

- ***Decidir,*** usando la definición de derivadas laterales, cuando una función es o no derivable en un punto.

- ***Aplicar:***

a) La definición de derivada para estimar el valor de nuevas derivadas, como: la suma y diferencia de funciones, el producto de funciones y el cociente de ellas.

b) Las reglas básicas de derivación para estimar el valor de la derivada de nuevas funciones, que resultan ser expresiones algebraicas de derivadas conocidas.

c) La regla de la cadena y la derivación implícita en la determinación de derivadas en las que su uso se haga necesario, como por ejemplo, para las funciones exponencial y logarítmica.

d) El conocimiento de las derivadas de las funciones sin(x) y cos(x) para determinar el valor de las derivadas de las restantes funciones trigonométricas.

- ***Determinar:*** las derivadas de orden superior. Los puntos críticos y, por tanto, las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función dada.

- ***Comprobar*** cuando una función es o no una solución de una ecuación diferencial ordinaria.

3. **Resultados esperados para la Unidad Didáctica 3**

- ***Comprende el concepto de derivada***, como una razón de cambio continuo en el tiempo, capaz de medir la velocidad instantánea de una partícula en el tiempo, como también su sentido geométrico, esto es, como el límite de las secantes hacia una pendiente en un punto, cuando uno de los puntos tiende al otro, a lo largo de la curva.

- ***Aplica*** correctamente la definición de derivada.

- ***Determina la derivada de nuevas funciones***, aplicando, según sea el caso, la Regla de la cadena o la Derivación Implícita.

- ***Decide correctamente cuándo una función es*** o no una solución de una ecuación diferencial ordinaria.

4. Contenidos de la Unidad Didáctica 3

- Introducción al concepto de la derivada. Sentido geométrico y físico. Ejemplos ilustrativos.
- Definición formal de derivada. Ejemplos ilustrativos usando la definición.
- Distintas notaciones para caracterizar la derivada.
- Diferenciabilidad. Derivadas laterales. Ejemplos ilustrativos donde la derivada no existe.
- Relación entre diferenciabilidad y continuidad. Definición alternativa para definir la derivada. Ejemplos ilustrativos.
- Reglas sobre derivación: todas aquellas que tratan los textos de Cálculo. Ejemplos Ilustrativos de cada una de las Reglas.
- Determinación de la recta tangente y la recta normal a una función en un punto. Ejemplos ilustrativos.
- Derivadas de orden superior. Estimaciones a través de ejemplos ilustrativos.
- Funciones trigonométricas: determinación de sus respectivas derivadas.
- La regla de la cadena. Regla de potencias para funciones. Ejemplos ilustrativos.

- Derivación implícita. Ejemplos ilustrativos.
- La función exponencial y su derivada. La función logarítmica y su derivada. Ejemplos ilustrativos para el estudio de ambas funciones.
- Funciones hiperbólicas y sus respectivas derivadas.
- Ejemplos ilustrativos de recapitulación de la Unidad Didáctica 3.

5. Actividades de aprendizaje de la Unidad Didáctica 3

Las actividades de aprendizaje se sitúan, como es lógico, tanto en las clases teóricas como prácticas.

- En las ***clases teóricas*** la instancia se produce en la exposición que realiza el profesor de la clase, junto a la interacción profesor estudiante, en una continua retroalimentación de esta interacción y, como un medio para verificar de parte del profesor si los estudiantes están o no comprendiendo los contenidos que se tratan. El desarrollo, de parte de los estudiantes, de los ejemplos ilustrativos propuestos en estas clases teóricas, constituye una magnífica oportunidad de realización de actividades de aprendizaje no despreciable. No se debe olvidar que una de las mejores instancias para aprender Matemática es realizar por sí mismo los problemas propuestos por el profesor del curso, y esto es válido tanto para las clases teóricas como prácticas.

- Para las ***clases prácticas*** se contempla, por parte de los estudiantes, la realización de las actividades didácticas diseñadas con anterioridad. Ellas se incluyen en el Apéndice de la Tesis.

6. Medios y recursos para la Unidad Didáctica 3

- Para las ***clases teóricas***, uso del pizarrón y del proyector. El Pizarrón para exponer las ideas centrales de la unidad y el uso del proyector para resumir y presentar los aportes de los estudiantes cuando deban exponer las tareas que se contemplan. También están, como en las unidades anteriores, las preguntas dirigidas a los estudiantes como un medio de interacción y verificación sobre el entendimiento que van alcanzando en los temas tratados en esta unidad didáctica.

- Por su parte, para las ***clases prácticas*** se prevé el uso de las actividades didácticas diseñadas, con el correspondiente apoyo del software Geogebra, como un recurso para apoyar la resolución de los problemas considerados, en su dimensión geométrica.

- Consulta a otros textos de Cálculo. Entre ellos los textos de: Lang (1990), y Larson et al. (2006). También están los recursos disponibles en la plataforma Adecca, en el curso Cálculo 1. Además están los sitios que los propios estudiantes van descubriendo y compartiendo con el curso, como resultado de su propia búsqueda personal y/o grupal.

7. Tiempo empleado para la Unidad Didáctica 3

El tiempo empleado para esta Unidad es de cinco semanas, en las que se consideran tanto clases teóricas como prácticas.

Para la introducción de la derivada y su definición formal la primera semana.

Las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena y la derivación implícita, las dos semanas siguientes.

Por último, las dos semanas restantes se ocupan para revisar el contenido contemplado en el punto 4, de este diseño de la Unidad Didáctica 3.

8. Evaluación en la Unidad Didáctica 3

Se contempla para esta Unidad 3, dos evaluaciones:

a) Un ***Test n° 3,*** con un 20 % de ponderación, la cuarta semana

b) La realización de una tarea individual, con un 10 % de ponderación.

De esta form**a** se da término al diseño de la unidad didáctica tres, sobre derivada.

4.3.3.4.2. Diseño de la cuarta Unidad Didáctica

1. **Identificación y descripción de la Unidad Didáctica 4**

Esta es la segunda unidad didáctica que contempla el Módulo 2 del curso de cálculo 1, y se refiere a ***las aplicaciones del uso de la derivada*** en los problemas en las que ella es fundamental para su solución.

A pesar del breve tiempo para su realización, tan sólo tres semanas, representa en cierto modo la coronación del curso. Dado que la Matemática es vista como una herramienta para la solución de problemas y, además, ése ha sido uno de sus motores de desarrollo a lo largo de su historia, su aplicación al estudio de las funciones y la solución de problemas de optimización acaparan el interés en esta Unidad. Dado el tiempo contemplado estos serán los temas centrales a revisar.

Demás está decir que, un aprendizaje serio y responsable de parte de los estudiantes en las materias que consideran las cuatro Unidades Didácticas diseñadas, los prepara de manera óptima para acometer con éxito la materia que sigue a esta, el Cálculo Integral. Lo anterior, sin duda, forma parte de uno de los objetivos del curso, mirado en términos generales. Si eso se cumple al finalizar esta unidad didáctica, la misión estará más que cumplida.

El cálculo diferencial, se terminará de entender cuando el estudiante revise el cálculo integral, así valorará su importancia y la relación que los une. Esta verdad se descubre con los años y la entrega la madurez del oficio de enseñar estas materias.

2. Objetivos de la Unidad Didáctica 4

Aplicar el conocimiento de la derivada para resolver problemas sobre:

- ***El estudio de extremos*** para una función de variable real.
- ***La determinación de una solución óptima***, que signifique o bien maximizar o minimizar las condiciones de una variable involucrada en un problema.

3. Resultados esperados para la Unidad Didáctica 4

- Valora la importancia del concomimiento de la derivada, al ver que su uso contribuye y, es esencial, para la solución de los problemas del estudio de las funciones de variable real y los problemas de optimización en una variable.
- ***Resuelve problemas de aplicación de la derivada***, donde la determinación de puntos críticos y el estudio del signo de la derivada son importantes a la hora de determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función dada.

4. Contenidos de la Unidad Didáctica 4

- Movimiento rectilíneo. Razones de cambio relacionadas.
- Los extremos en las funciones: máximo y mínimo de funciones. Puntos críticos. Teorema de Rolle y del valor medio. Comportamiento de las funciones en intervalos.

- Criterio de la primera derivada para determinar máximos y mínimos.
- Criterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos.
- Estudio de la concavidad, puntos de inflexión.
- Resolución de problemas de optimización.

5. Actividades de aprendizaje para la Unidad Didáctica 4

- Para las clases teóricas las actividades de aprendizaje se producen en la exposición que realiza el profesor del curso, junto a la interacción profesor-estudiante-contenido, en una constante retroalimentación de esta interacción y, como un medio para verificar de parte del profesor si los estudiantes están o no comprendiendo los contenidos que se tratan.
- Además de la exposición del profesor, de los conceptos y procedimientos están los desarrollos de los ejemplos ilustrativos, algunos de ellos a realizar por los propios estudiantes, oportunidad propicia como actividad de aprendizaje supervisada por el maestro.
- No se debe olvidar que una de las mejores instancias para producir aprendizajes significativos en los estudiantes es intentar resolver por sí mismos los problemas propuestos por el profesor, aunque no se obtenga completamente su solución, el hecho de abordar un problema ya es un gran avance para poner en juego estrategias de solución para dichos problemas.

- Así, para las clases prácticas se contempla la realización de las actividades didácticas diseñadas con anterioridad, las que se incluyen para todas las unidades didácticas a tratar en el Apéndice. Dichas actividades estarán a cargo del profesor ayudante del curso.

- Hay además, para este Módulo 2, en su última Unidad Didáctica dos instancias de aprendizaje, una al momento de realizar las tareas y, la otra, al momento de exponerla para el grupo curso.

6. Medios y recursos para la Unidad Didáctica 4

- Los medios y recursos que se han usado para desarrollar las restantes Unidades didácticas, sirven de igual modo para la implementación de esta última unidad didáctica que contempla el curso.

- Luego, las instancias de las clases teóricas y prácticas son un excelente medio para el aprendizaje, donde los recursos son: las exposiciones del profesor, ayudado de presentaciones digitales, las tareas dadas en clase, junto al desarrollo por parte de los estudiantes de las actividades didácticas diseñadas para esta unidad didáctica específica, que versa sobre las aplicaciones de la derivada. Lo anterior no hace otra cosa que justificar el párrafo inicial de este acápite 6.

- Si al comienzo del curso, cuando se revisó la Unidad didáctica 1, se incorporó el uso del software Winplot para tratar el tema de las funciones, en esta última fase, cuando se realiza un estudio acabado de las funciones con la ayuda del Cálculo, esto es, con el uso de la Derivada y sus propiedades relacionadas, vuelve a ser importante, como una forma de verificación del trabajo realizado la participación del recurso informático Winplot.

- Otro tanto se puede decir del software Geogebra, con el cual se combinan tanto el trabajo algebraico como geométrico al solucionar un problema de optimización, sea este de máximo o mínimo. Agregar más palabras en este punto, puede resultar redundante y, sin ningún sentido.

7. Tiempo empleado en la Unidad Didáctica 4

El tiempo estimado para el desarrollo de la Unidad 4, es de tres semanas aprovechadas al máximo.

Lo anterior significa 12 horas de clase aproximación para la fase teórica y 9 horas de clase en su parte práctica para toda la Unidad didáctica 4.

Claro está que en ella se han de considerar también los momentos para la evaluación, que son tres y, los cuales se explican con detalle en el siguiente punto del diseño de esta Unidad 4.

8. **Evaluación a realizar en la Unidad Didáctica 4**

Se prevé tres instancias de evaluación, que son las siguientes:

a) Un test n° 4, con un 20 % de ponderación de la nota final del Módulo.

b) La exposición de la tarea, en forma grupal, dada al inicio del curso, con un 10 % de ponderación y

c) La realización del Examen, que da cierre al Módulo 2.

d) La realización de un Examen de Repetición, recuperativo del anterior, para aquellos estudiantes que obtienen una nota final ponderada del Módulo 2 entre 3.5 y 3.9, ambas notas incluidas.

El test se rinde al inicio de la segunda semana, la disertación durante el transcurso de la segunda semana y ambos exámenes durante la tercera y última semana de clase de esta Unidad y, por ende, del Módulo 2.

Se aprueba la asignatura aprobando ambos Módulos, en caso contrario se reprueba.

De esta forma se da por terminado el diseño de las Unidades Didácticas tres y cuatro, correspondientes al segundo Módulo. Su diseño, no es otro que guiar la Fase Empírica de la investigación de la presente Tesis doctoral, asunto que se aborda en el próximo Capítulo.

4.4 Población y muestra del estudio

Aunque el estudio se realiza en el Campus Chillán de la Universidad del Bío-Bío, se advierte una vez más, que se consideran los resultados obtenidos en la aplicación del diseño curricular llevada a cabo en el Campus Concepción, la Universidad como se explicó en el capítulo III reparte su actividad en dos Campus y, en dos ciudades de la misma región del país.

Así, la población y, por ende, la muestra para el estudio en todas sus fases experimentales es la Universidad del Bío-Bío, Chile, tanto en su ***fase inicial***, ***intermedia*** *como* ***final.*** Sólo se cambia de Campus, al inicio el Campus Concepción y en las dos restantes fases la experiencia se realiza en el Campus Chillán de la UBB.

Para mayor claridad y comprensión del estudio, éste se desglosa, como ya se ha señalado, en tres fases, a saber:

- ***Fase 1***. *Lugar:* ***Campus Concepción, Concepción***, en las carreras de *Ingeniería Civil* e *Ingeniería de Ejecución*, como son:
    - *La Ingeniería de Ejecución Eléctrica,*
    - *La Ingeniería de Ejecución Mecánica y*
    - *La Ingeniería de Ejecución Electrónica*.

En todas ellas, nuestro primordial interés está en recabar el comportamiento final del rendimiento académico que obtienen los estudiantes de Cálculo 1, cuando la metodología de innovación para el aprendizaje del Cálculo Diferencial, usa como su referente principal el diseño curricular Modular.

Algunos antecedentes de estas carreras de pregrado son:

- *Tienen una duración de sólo ocho semestres.*
- *Su malla curricular de inicio es similar para las tres carreras en lo que a la Matemática y Física se refiere, una de las mallas de esta carrera es la siguiente:*

MALLA ING. DE EJECUCIÓN EN ELECTRICIDAD.

I SEMESTRE:

Química General
Cálculo I
Álgebra y Trigonometría
Formación Integral
Introducción a la Ingeniería

II SEMESTRE:

Cálculo II
Física I
Formación Integral
Análisis de Redes Eléctricas I
Computación

En la malla expuesta están en negrita y cursiva las asignaturas que han recibido un tratamiento del diseño curricular Modular, para el primer año de estudio. La asignatura de Física, del segundo semestre, también se rige por el sistema de diseño curricular modular.

El ***perfil de egreso de la carrera de Ingeniería de Ejecución Eléctrica,*** por ejemplo es:

> *"Profesional del área de la ingeniería, con una sólida formación científica y tecnológica, con capacidad para proyectar, operar y mantener sistemas eléctricos en baja, media y alta tensión, en las áreas de potencia, control e instrumentación. Por la preparación en el conocimiento de las ciencias básicas y de especialidad está capacitado para analizar y solucionar problemas en el ámbito de la electricidad; también su preparación le permite comprender y manejar nuevas tecnologías"*

En general estas tres carreras tienen bastante demanda laboral, y son muy apetecidas por los postulantes de la Enseñanza Media, su campo laboral media entre un profesional de formación técnica y la de un Ingeniero propiamente tal.

Debemos reconocer el hecho que, en general, la calidad del estudiante que ingresa a estas carreras no es la mejor, se evidencia en ellos carencias en su formación académica, hecho que se ha notado en los bajos rendimientos que dichos estudiantes obtenían antes que el diseño curricular Modular se pusiese en marcha, como se podrá apreciar en el siguiente capítulo que dará cuenta de ello. Además, los puntajes de ingreso a estas carreras son, en general, más bajos que los puntajes de ingreso a las carreras de Ingeniería propiamente tal, ello representa un indicador que da cuenta del estado de ingreso de los estudiantes como también de su desempeño futuro en la Universidad. Este es otro elemento que se ha tenido en cuenta por qué se realizó la intervención pedagógica Modular en estas carreras de pregrado y no en otras.

Mayores antecedentes de cada una de estas carreras se pueden obtener en la propia Web institucional, relacionadas con los postulantes a ella y de manera más precisa sobre estas carreras que se han comentado.

También destaca, en esta parte inicial de su malla curricular, el predominio de las asignaturas de ciencias básicas, como es natural. Además, en estas tres carreras, la Matemática es vista como una ***asignatura de carácter instrumental*** que sirve como sustento para la formación académica profesional de las restantes asignaturas dependiendo de la formación a la que se esté adscrito, sea la Ingeniería Eléctrica, Mecánica o Electrónica del futuro profesional.

- ***Fase 2.*** *Lugar:* ***Campus Chillán, UBB***

Aquí la aplicación se realizará en la carrera de ***Ingeniería en Alimentos***, y como es obvio, en la asignatura de Cálculo 1 de su plan de estudio.

> Se concibe como: *"… un profesional con una sólida formación en ciencias e ingeniería de procesos de alimentos, altamente calificado para diseñar, desarrollar y adaptar nuevas tecnologías en el procesamiento de alimentos, formular nuevos productos alimenticios. Recibirás una formación integral que te permitirá abordar los desafíos del desarrollo de productos alimenticios, considerando las normativas sanitarias nacionales e internacionales y procurando la preservación del medio ambiente"* (*http://ubb.cl/postulantes/*, 2014)

Respecto de su malla curricular y, a lo que a este estudio compete, la asignatura de Cálculo 1 es una asignatura del segundo semestre de la carrera, como se puede evidenciar en la malla curricular que a continuación se exhibe:

Tabla n° 33. Malla de Ingeniería en Alimentos, primer año.

I SEMESTRE	***II SEMESTRE***
Álgebra *Formación General* *Introducción a la Ingeniería en Alimentos* *Química General*	*Álgebra Lineal* ***Cálculo I*** *Biología* *Química Orgánica* *Formación General*

Fuente: http://postulantes.ubiobio.cl/web.v2/?a=facultades_carreras

La carrera como tal recibe estudiantes de un nivel parecido a los que ingresan a las Carreras de Ejecución, esto es, estudiantes que presentan algunas limitaciones en su formación matemática anterior, vale decir en la Secundaria.

Como se ha venido comentando, los puntajes de ingreso a esta carrera son un buen parámetro para describir, en términos generales, al tipo de estudiante que forma parte de esta carrera de pregrado.

Los puntajes que obtienen los estudiantes en la PSU oscilan, en general, entre 400 y 850 puntos. Desde el Proceso de Admisión 2015 el puntaje PSU se calculará a partir del número total de respuestas correctas que tenga el postulante, el cual se normalizará con una media de 500 puntos y desviación estándar de 110 puntos, truncando los extremos en 150 y 850 puntos.

Los puntajes máximo y mínimo de ingreso del año 2014, para la carrera de Ingeniería en Alimentos fueron los siguientes:

Tabla n° 34. Puntaje máximo y mínimo matriculado, año 2014.

Primer matriculado año 2014 (puntaje máximo)	**Último matriculado año 2014 (puntaje mínimo)**
666,00	**476,95**

Fuente: http://postulantes.ubiobio.cl/web.v2/?c=pub&num=61&title=ingenieria-en-alimentos

Estas breves líneas sirven de algún modo para delinear el contexto de la carrera donde se llevará a cabo la segunda fase experimental.

- ***<u>Fase 3. Lugar: Campus- Chillán, UBB</u>***

Esta tercera fase experimental ocurre en la carrera de ***Pedagogía en Ciencias Naturales***, dependiente de la Facultad de Educación de la Universidad, carrera que se encuentra acreditada por la Comisión Nacional de Acreditación (CNA).

El perfil de egreso de esta carrera señala en lo sustancial formar un:

> *"Profesional capaz de vincular teoría y práctica en un continuo, producto de la formación pedagógica y de la especialidad, con un sólido dominio de contenidos en las disciplinas de las áreas Biológica, Química y Física, así como de las Ciencias de la Educación".* (http://ubb.cl/postulantes/, 2014)

Respecto de su malla curricular y, a lo que a este estudio compete, la asignatura de Cálculo es una asignatura del tercer semestre de la carrera, como se puede evidenciar en la malla curricular adjunta:

Tabla n° 35. Malla parcial de Pedagogía en Ciencias Naturales.

I SEMESTRE	***II SEMESTRE***	***III SEMESTRE***
Química General I *Biología General I* ***Introducción a la Matemática*** *Tecnologías de Aprendizajes* *Filosofía General*	*Introducción a la Física* *Química General II* *Biología General II* *Sociología General* *Estrategias de Comunicación*	*Física General I* *Química Orgánica I* ***Matemática I*** *Sociedad, Cultura y Educación* *Psicología General y del Desarrollo.*

La asignatura del tercer semestre, correspondiente a ***Matemática I***, es la que contempla examinar el cálculo diferencial propiamente tal.

Mayores antecedentes sobre esta carrera se pueden encontrar en el sitio Web: http://postulantes.ubiobio.cl/web.v2/?a=facultades_carreras

Los puntajes de ingreso de esta carrera se sitúan en los siguientes límites máximos y mínimos para su ingreso del año 2014, a saber:

Tabla n° 36. Puntaje máximo y mínimo matriculado, Ped. en Ciencias, año 2014.

Primer matriculado año 2014 (puntaje máx.)	**Último matriculado año 2014 (puntaje mín.)**
706,40	**500,15**

En general, los estudiantes que ingresan a esta carrera tienen un aceptable desempeño académico a lo largo de la carrera, las cifras que se exhiben arriba son un buen indicador de ello. La Matemática aquí se percibe como un instrumento de conocimiento que permite revisar los contenidos de la Física, para aquellos estudiantes que se adscriben a esta mención y, como una asignatura de su plan de estudio que contribuye en su formación científica inicial para aquellos estudiantes que se definen por las menciones de Química o Biología.

Esta última fase será tratada de manera especial, con el objeto de poder extraer de ella la mayor cantidad posible de información (datos) que permitan confirmar o rechazar la Hipótesis inicial de trabajo de la propuesta de innovación para el aprendizaje del cálculo diferencial.

La realización de cada una de estas fases de intervención pedagógica contó con los medios tanto humanos como técnicos para su realización, al respecto es oportuno recalcar que la ejecución de un proyecto de esta envergadura supuso la participación decisiva del Ministerio de Educación del país, en otras circunstancias, la situación habría sido imposible de llevar a la práctica.

Así, los proyectos a que hemos hecho mención en el capítulo anterior (UBB 0809 y UCO 1107), representaron el soporte económico en gran medida para su ejecución.

Tampoco es menor el involucramiento de la Institución, pues ello supone apostar por dichos proyectos, comprometiendo presupuesto que bien podría haberse usado de otra manera en el ámbito docente de pregrado, como ha ocurrido para la buena ejecución de cada una de las Fases Experimentales que el proyecto supuso en sí.

4.5. Técnicas de recolección de datos

Esta etapa de la investigación, consiste en recolectar los datos del Rendimiento académico de los estudiantes participantes, desde el año 2007, lo que configura la primera fase del estudio. Ello, sin duda sirve de base para poder avanzar en la concreción de la Hipótesis inicial presentada en el primer capítulo de la presente tesis doctoral, con su consiguiente propuesta de innovación en materia de enseñanza y aprendizaje del cálculo, que no sólo comporta el diseño curricular sino, la serie de actividades diseñadas para el aprendizaje, las que de forma conjunta se espera produzcan mayores aprendizajes en los estudiantes.

En cada una de estas Fases se fijó la atención en la variable cuantitativa, rendimiento académico final de la asignatura. Aquí los instrumentos de evaluación fueron tanto los Test como los exámenes parciales y finales aplicados en el transcurso de las dos últimas fases experimentales rendidos por los estudiantes.

La última fase experimental es la que registra el mayor número de mediciones, como quedará demostrado una vez que se presenten los datos y sus respectivos análisis estadísticos. Además, esta última fase experimental recoge de las fases anteriores la experiencia de sus realizaciones. Lo cierto es que ahora usando un grupo control y otro experimental las posibilidades de realizar mediciones aumentan y con ello también el poder confirmar o desechar la hipótesis inicial de trabajo que sustenta le presente trabajo.

4.6. Análisis de los datos

Cada fase experimental usa la estadística que se condice con los datos que se han podido recoger en cada una de ellas.

Así, para la primera fase, el análisis de los datos disponibles se reduce a mostrar porcentajes de aprobación del rendimiento académico logrado por los estudiantes en los diferentes años en los cuales la propuesta se aplicó. Ello a su vez permitió comparar los nuevos rendimientos académicos versus aquellos rendimientos anteriores a la propuesta de modularización. A pesar de lo burdo que pueda resultar este análisis inicial, él resulta decidor como antecedente a tener en cuenta para la realización de las posteriores fases de la aplicación del diseño curricular modular.

En resumen, para la ***primera Fase***, el análisis estadístico se realizará sobre el del ***Rendimiento Final*** obtenido por los estudiantes de las Carreras de Ingeniería en Ejecución, las cuales son: *Ingeniería de Ejecución Eléctrica, Ingeniería de Ejecución Mecánica e Ingeniería de Ejecución Electrónica.*

Para la ***segunda Fase*** de la experiencia modular, la cual se aplica a un solo grupo curso, se analizarán los rendimientos académicos logrados por los estudiantes en cada uno de los módulos, sean estos que se hayan dictado por primera vez o en su correspondiente repetición de los mismos. La aplicación del diseño curricular modular en esta fase corresponderá a estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos.

Aquí, como es lógico, la cantidad de datos es mayor y por tanto se pueden realizar otros análisis estadísticos, los cuales se condicen también con el tipo de datos que ha sido posible recabar para esta segunda (Fase) experiencia educativa.

Por su parte, la última Fase, esto es la ***Fase 3,*** en la que se contrastó dos grupos, el análisis estadístico corresponderá, entre otros, a la ***aplicación del Test R de Rachas***, dado que se trata de una muestra aleatoria, con observaciones independientes. Además se usará el ***Test U Mann- Withney***. Aquí no se presumirá la normalidad de la variable en estudio, dado que la muestra es pequeña, por tanto se usará para su análisis *Estadística no Paramétrica.*

Los programas ***Excel***, ***SPSS*** e ***InFostat*** bastamente conocidos, serán los soportes informáticos con los cuales se realizarán las estimaciones estadísticas hasta ahora mencionadas. Dichos medios resultan entonces esenciales a la hora de poder realizar los respectivos análisis estadísticos que los datos permiten en un estudio como el que se aborda.

En el siguiente capítulo, se mostrarán tanto los resultados como sus correspondientes análisis obtenidos en cada una de las fases descritas anteriormente. Así, todo los datos y su correspondiente análisis permitirá, sin duda, avanzar en el ámbito de las conclusiones y prospectivas que se derivan de todo este estudio realizado en sus diferentes fases de estudio experimental.

*

CAPÍTULO V

FASE EMPÍRICA

“El éxito radica en la acción sabia y bien ejecutada” Eclesiastés 10: 10 b.

5.1. Introducción

En este capítulo se realiza el análisis y discusión de los resultados obtenidos en las distintas fases experimentales por las cuales se transitó durante el transcurso de la investigación y, de este modo poder aproximarse a los Objetivos planteados en su inicio, contrastando la Hipótesis de trabajo enunciada en el ***Capítulo 1***, la que puso en evidencia la ***Problemática y Fundamentación*** del presente trabajo de tesis doctoral.

Se aborda, por tanto, el análisis de las tres fases, enumeradas como: *Fase 1, Fase 2 y Fase 3.*

Así, la ***Fase 1***, consiste en la presentación y análisis de los datos finales obtenidos al aplicar el diseño curricular modular a los estudiantes de la asignatura de cálculo 1, en el Campus Concepción de la Universidad del Bío-Bío en las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería de Ejecución, las que tienen una duración de seis (6) años y cuatro años (4) respectivamente.

Las carreras de Ingeniería civil son las siguientes:

- ***Ingeniería Civil***
- ***Ingeniería Civil Industrial***
- ***Ingeniería Civil Mecánica***

Por su parte, las carreras de Ingeniería de ejecución fueron:

- ***Ingeniería de Ejecución Eléctrica***
- ***Ingeniería de Ejecución Electrónica***
- ***Ingeniería de Ejecución Mecánica.***

Para las carreras se presentan los resultados obtenidos recientemente, como en años anteriores, a objeto de poder comparar la efectividad de la propuesta en curso, la cual, en su esencia, se traduce en la aplicación de un diseño curricular modular para impartir no sólo la asignatura de Cálculo 1 sino también de otras asignaturas más, como se podrá apreciar a continuación.

Por su parte la ***Fase 2*** contempla la experimentación en la carrera de ***Ingeniería en Alimentos***, del Campus Chillán de la UBB y, dirigida a un solo grupo de estudiantes que cursan la asignatura de cálculo diferencial, en el cual se aplica por primera vez el diseño curricular modular y todo lo que ello trae aparejado naturalmente.

Los buenos resultados exhibidos en la Fase anterior, permiten avanzar a la Fase experimental de la propuesta generada, lo que constituye la experiencia modular, realizada al igual que la anterior en el Campus Chillán de la Universidad del Bío-Bío. Así, esta última Fase experimental o ***Fase 3***, como se ha convenido en llamar, recoge los datos y análisis provenientes de la experimentación de campo realizada ahora en el contexto de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, donde se compara un Grupo Experimental, el cual recibe la propuesta del diseño curricular modular, versus un Grupo Control que no la recibe.

Las Fases dos (2) y tres (3) son de exclusiva responsabilidad de la presente investigación. Se incluyen los resultados de la Fase 1 como una forma de evidenciar el origen del diseño curricular modular en el contexto de la UBB, dar cumplimiento con el primer objetivo específico enunciado en el capítulo 1 y, por otro lado, como un antecedente promisorio por sus logros académicos, lo cual inspira y, en cierto modo, guía la presente investigación en su conjunto en las fases dos y tres de la investigación.

5.2. Resultados y análisis de las distintas fases del estudio

A continuación se presentan los resultados y análisis de las diferentes etapas que constituyen del presente estudio de investigación.

5.2.1. Resultados y análisis obtenidos en la fase 1

La primera de estas fases, denominada ***fase 1,*** para los efectos de orden y presentación, corresponde básicamente a los resultados obtenidos por los estudiantes de la institución, en la asignatura de Cálculo 1, que corresponde al cálculo diferencial en las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería de Ejecución, al emplearse como hilo conductor de la acción docente el diseño curricular modular (dcm), junto al uso de metodologías activas y la evaluación continua de los aprendizajes. Así, la experiencia que se relata se inicia el primer semestre del año 2010, en el Campus Concepción de la Universidad del Bío-Bío (UBB).

La fase descrita, además contempla el diseño curricular modular no solo en la ***Asignatura de Cálculo I***, como se podrá apreciar al presentar a modo de resumen los ***Rendimientos Finales*** obtenidos por los estudiantes, de la carrera de Ingeniería Civil. Se incluyen además los resultados obtenidos en las asignaturas de ***Álgebra y Trigonometría*** y ***Cálculo II***, de modo de permitir con ello una comprensión más acabada del diseño modular y, de este modo, ***hacer notar que*** no sólo el ***Cálculo 1*** es el propósito de ésta acción docente, sino que también incluye a otros temas de la Matemática.

Como una forma de facilitar la lectura comprensiva del texto, se precisan algunas consideraciones de orden general, dado que los datos se presenta de manera resumida y haciendo uso de estadísticas obtenidas de los estudiantes en las asignaturas que se mencionan a continuación:

- El porcentaje de aprobación de las asignaturas de Álgebra y Trigonometría, Cálculo I y Cálculo II se realiza sobre el total de estudiantes inscritos según acta, se excluyen por tanto las renuncias a dichas asignaturas.
- La escala de evaluación está comprendida entre 1,0 y 7,0. Siendo el siete coma cero (7,0) la nota del mejor académico posible y, 1,0, como es obvio, la de peor rendimiento académico.
- Se indica con ***amarillo*** las asignaturas que se encuentran bajo el diseño curricular modular **(dcm),** esto es, dictadas bajo esta nueva modalidad versus el régimen tradicional. Con ello es posible visualizar, claramente, la efectividad de la propuesta al impartir las asignaturas mencionadas.

Luego, las siguientes tablas resumen de forma estadística los resultados obtenidos, ellas se presentan en la página siguiente de modo de favorecer su comprensión y lectura.

Por tanto, en atención a lo expresado anteriormente, el resultado es el siguiente:

Tabla n° 37. Porcentaje de aprobación y promedio de notas finales de las carreras de Ing. Civil, Civil Industrial y Civil Mecánica, años 2008 al 2012, Cálculo 1.

Año	***2008-1***	***2009-1***	***2010-1***	***2011-1***	***2012-1***
Carrera	***% Aprob.*** ***Prom. Notas***	***% Aprob.*** ***Prom. Notas***	***% Aprob.*** ***Prom. Notas***	***% Aprob.*** ***Prom. Notas***	***% Aprob.*** ***Prom. Notas***
Ing. Civil	**64,6%** 3,9	78,8% 4,6	96,3% 4,9	98,9% 5	**94,7%** 5
Ing. Civil Ind.	63,6% 3.9	86,9% 4,5	93,9% 4,9	98,2% 5,2	97,6% 5
Ing. Civil Mec.	36,8% 3,4	72,3% 4,1	53,3% 3,9	89,3% 4,9	70,9% 4,2

Fuente: DGAI- UBB

El ***color amarillo*** de las celdas indica que la asignatura de ***Cálculo 1*** se dictó aplicando el ***diseño curricular modular***, en los años y carreras que la Tabla ilustra.

En la carrera de Ing. Civil se percibe ***un claro aumento*** de **30,1%** de aprobación, del **64,6%** para el año 2008-1 a un **94,7%** en el año 2012-1.

En cuanto al promedio de notas, de un **3,9** para el año 2008-1 se pasa a un **5,0** para el año 2012-1.

El aumento en dichas cifras es, sin duda, alentador e ilustra un aumento significativo en las cifras finales del rendimiento académico de los estudiantes.

Algo similar ocurre en las otras dos carreras en cuanto al ***% de Aprobación*** y el ***Promedio de notas***, en aumento, salvo el año 2012-1 para ambas carreras con un leve descenso en ambos indicadores.

Se tienen estadísticas similares para Álgebra y Trigonometría, con porcentajes de Aprobación y Promedio de Notas del curso en aumento año a año, salvo un pequeño descenso para el año 2012-1, que no resulta significativo. Un hecho que podría explicar tal descenso podría ser que el año anterior (2011) se produjeron a lo largo del país las movilizaciones estudiantiles, que tuvieron una duración de siete meses de paro, con la consiguiente pérdida de clases para el estudiantado y, por ende, con una revisión menor de contenidos en todas las asignaturas cursadas por estos estudiantes.

Ahora, una comparación para estas tres carreras de Ingeniería respecto del Porcentaje de Aprobación (% Aprob.) y el Promedio de Notas (Prom. Notas) en la asignatura de Cálculo1 en asignaturas sin dcm versus con dcm se muestra en la siguiente tabla:

Tabla n° 38. Porcentaje de aprobación y promedio de notas entre: asignaturas **sin dcm** versus **con dcm**, carreras de Ingeniería Civil, UBB- Concepción.

Método	*Rendimiento* ***sin dcm***		*Rendimiento* ***con dcm***	
Carreras	***% Aprob.***	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***
Ing. Civil	65,50%	4,1	96,60%	4,9
Ing. Civil Industrial	83,70%	4,6	97,60%	5,0
Ing. Civil Mecánica	60,10%	4,0	70,90%	4,2

Fuente: Dirección General de Apoyo Institucional, UBB**.**

De la simple observación de la tabla anterior se puede apreciar un ***sustantivo aumento*** tanto en el ***Porcentaje de aprobación*** *(% Aprob.****)*** como en el ***Promedio de las notas*** (*Prom. Notas****)*** de estos cursos en defensa del diseño curricular modular.

Una situación parecida se presenta en las asignaturas de Cálculo II, Álgebra Lineal y en Física I, donde también se observa un aumento en el porcentaje de Aprobación como en el Promedio de Notas Finales de estas asignaturas año tras año.

A continuación se presentan los datos sobre el Rendimiento Final obtenido por los estudiantes de tres carreras, denominadas: ***Ingenierías de Ejecución***, carreras que se sitúan en un nivel intermedio entre una formación de carácter técnico y una Ingeniería Civil como tal. Las Carreras a que se hace mención son: ***Ing. de Ejecución Eléctrica, Ing. de Ejecución Electrónica e Ing. de Ejecución Mecánica.***

Las carreras anteriores se imparten en el Campus Concepción de la Universidad del Bío-Bío. Se presenta entonces en la Tabla siguiente el Rendimiento Final alcanzado por los estudiantes en estas tres careras desde el año 2007 -1, al año 2009 -1, en la primera tabla. En la siguiente tabla, se consigna la información desde el año 2010-1 al año 2012-1, para la asignatura de Cálculo 1, de código 210 039.

Tabla n° 39. Porcentaje de Aprobación (% Aprob.) y Promedio de Notas (Prom. Notas), Cálculo 1, Ing(s). de Ejecución, UBB-Concepción, 2007-2009.

Carrera	***2007-1***		***2008-1***		***2009-1***	
	% Aprob.	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***
Ing. Ejec. Eléctrica	20,90%	2,7	34,70%	3	54,90%	3,4
Ing. Ejec. Mecánica.	27,30%	3,1	49,40%	3,5	74.0 %	4,3
Ing. Ejec. Electrónica	38,00%	3,3	39,70%	3,4	61,50%	4

Fuente: Dirección General de Análisis Institucional – UBB.

Los resultados obtenidos entre los años 2010 al 2012, para estas mismas carreras en términos de porcentaje de aprobación y promedio de notas obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

Tabla n° 40. Porcentaje de Aprobación (% Aprob.) y Promedio de Notas (Prom. Notas), Cálculo 1, Ing(s). de Ejecución, UBB-Concepción, 2010-2012.

Carrera	2010-1		2011-1		2012-1	
	% Aprob.	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***
Ing. Ejec. Eléctrica	50,90%	3,6	92,60%	4,8	89,20%	4,4
Ing. Ejec. Mecánica.	60,00%	4	75,60%	3.9	83,10%	4,3
Ing. Ejec. Electrónica	51,90%	3,6	84,80%	4,5	54,70%	3,5

Fuente: Dirección General de Análisis Institucional UBB.

Los datos anteriores señalan de manera clara un aumento en el Rendimiento académico observado en la Asignatura de Cálculo 1 (220 039), a partir del año 2011-1, lo que se traduce en mejores evaluaciones rendidas por los estudiantes, en general.

Por el contrario, entre los años 2007-1 y el año 2010-1, tanto los porcentajes de aprobación como la nota promedio que obtiene el curso, en las tres carreras, están por debajo de los valores obtenidos a ***partir del año 2011***. Los datos son elocuentes al respecto.

El ***año 2011*** corresponde al ***inicio de la aplicación del dcm*** en ***Cálculo 1*** para estas carreras de pregrado, Ing (s). de Ejecución, en el Campus Concepción.

Hay que consignar además dos hechos:

- En ***primer lugar***, los cursos se mantienen a lo largo de estos años en 60 estudiantes por curso, lo que obliga a considerar dos secciones de treinta estudiantes por sección, para cada una de las carreras de Ingeniería en Ejecución.

- ***Lo segundo*** es el hecho que esto que se observa en la asignatura de ***Cálculo*** también ocurre con la asignatura de ***Álgebra y Trigonometría***, donde los resultados, tanto en el promedio de notas finales y el porcentaje de aprobación, evidencian la misma tendencia a la mejora una vez que la propuesta de Modularización se puso en marcha, hecho que ocurrió al mismo tiempo para ambas asignaturas. No se consignan esos resultados pues nuestro interés está centrado en evidenciar la mejora en el rendimiento y, por ende, en un mejor aprendizaje del cálculo diferencial, el que corresponde a Cálculo 1.

Por último, se presenta el resultado obtenido el año 2013-1, referido a los mismos indicadores anteriores, junto a la comparación del Rendimiento de estas carreras sin dcm versus con dcm, desde el año 2011-1 al año 2013-1. Lo anterior se resume en la tabla siguiente:

Tabla n° 41. Rendimiento final Cálculo 1 (2013-1) y comparación entre **sin dcm** versus **con dcm**, Carreras de Ing. de Ejecución, entre 2011-1 y 2013-1.

Carreras	***2013-1 Final***		***Rendimiento sin Modularización.***		***Rendimiento con Modularización.***	
	% Aprob.	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***	***% Aprob.***	***Prom. Notas***
Ing. Ejec. Eléctrica	90,60%	4,5	60,00%	3,7	90,60%	4,5
Ing. Ejec. Mecánica.	71,90%	4,3	60,10%	3,8	71,90%	4,3
Ing. Ejec. Electrónica	73,50%	4,2	54,20%	3,7	73,50%	4,2

Fuente: DGAI - UBB

Todas las asignaturas de matemáticas aludidas anteriormente, se dictaron de manera semestral, y ***con tres módulos*** en su ejecución, no así la asignatura de Física 1, que se dictó sólo usando dos módulos, de ésta última experiencia educativa modular no se exhiben sus resultaos, pero se tiene conocimiento fehaciente que su resultados académicos también son óptimos.

Ahora bien, todo este cúmulo de experiencias de aula de aplicación del diseño curricular modular en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo, llevado a cabo en la propia institución en el Campus Concepción, ha servido de aliciente para promover las siguientes fases del estudio, ahora en el Campus Chillán, donde ocurren la segunda y tercera fase de la experimentación que a continuación se describe.

5.2.2. Resultados y análisis obtenidos en la fase 2

La segunda fase del estudio está constituida por una muestra de veintidós (22) estudiantes de la asignatura de cálculo diferencial de la carrera de Ing. en Alimentos del Campus Chillán de la UBB.

A continuación como una forma de caracterizar a dicha muestra se analizan una serie de variables previas, como son: la PSU (Prueba de Selección Universitaria, que es la prueba que deben rendir los estudiantes para su ingreso a la Universidad), las notas obtenidas en la asignatura previa al cálculo 1, esto es, la asignatura de Álgebra y Trigonometría y, el resultado de dos pruebas de conocimientos previos que los estudiantes rindieron antes de comenzar el curso de cálculo diferencial, una prueba referida al álgebra básica y otra que dice relación con el tema de funciones, tema central para el inicio del cálculo propiamente tal. El estudio de todas estas variables contribuye a configurar la muestra en estudio para esta segunda fase empírica, es lo que se hace a continuación y en ese mismo orden de presentación.

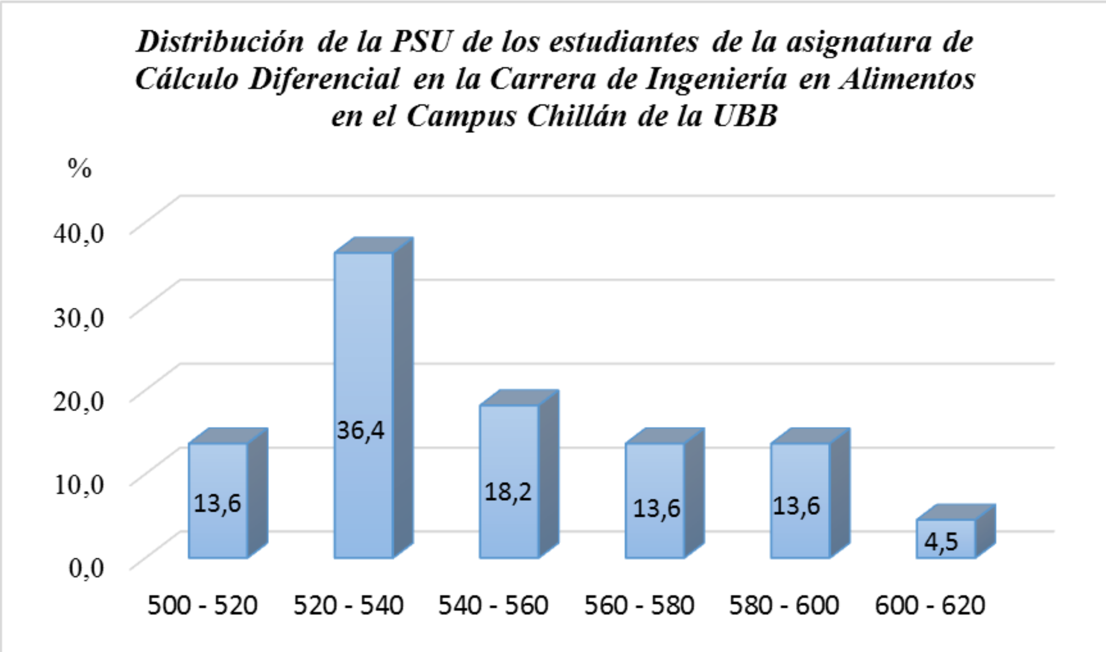
Análisis de la PSU

Para esta prueba de selección universitaria, por lo general, el rango de puntajes obtenidos por los estudiantes oscila entre 450 puntos y 850 puntos, para las mejores pruebas rendidas.

En la Figura n°45**,** se observa la distribución del puntaje obtenido en la PSU por estos estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos, estos lograron un puntaje de 547,7295 puntos en promedio, asimismo los puntajes difieren en 28,27 puntos respecto a la media, del mismo modo se observa que la distribución es sesgada hacia la derecha (0,684), se puede ver también que 36,6% de los estudiantes obtuvieron un puntaje entre

520 y 540 puntos y que solamente 4,5% obtuvo una puntuación superior a los 600 puntos ***(Ver Anexo N° 01 del Apéndice).***

Figura n° 45. Distribución de la PSU, Ing. en Alimentos, Campus-Chillán.



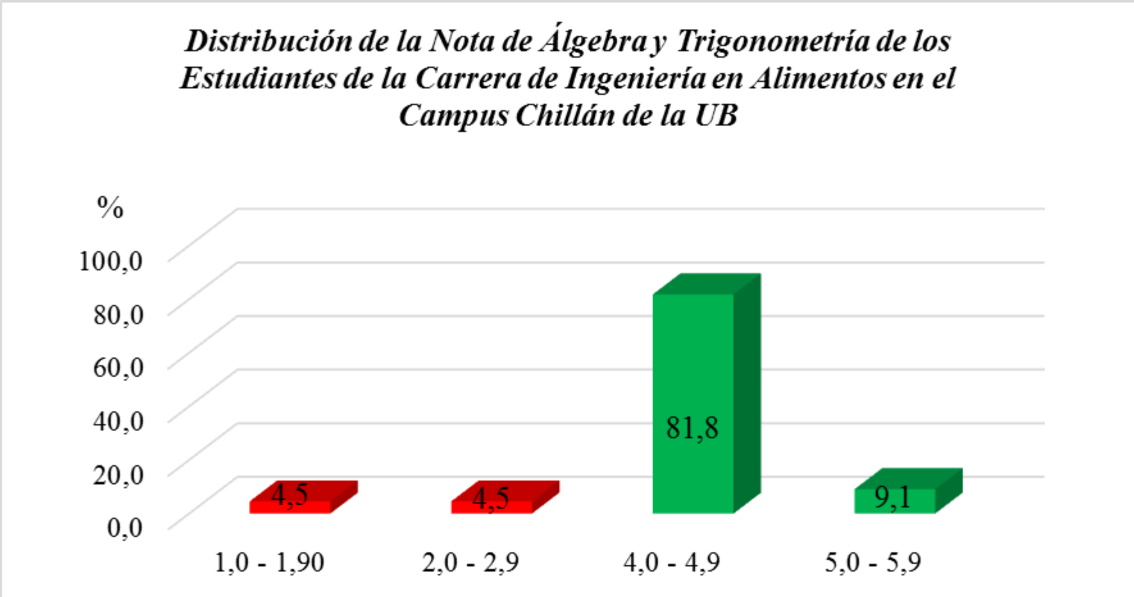
Fuente: DGAI-UBB.

A continuación se estudia la distribución que presentan las notas obtenidas por estos mismos estudiantes en la asignatura previa al cálculo, como lo es el Álgebra y la Trigonometría.

Análisis de las notas de Álgebra y Trigonometría

En la Figura n° 46, se observa la distribución de la nota lograda por los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos en el Campus Chillán de la UBB en Álgebra y Trigonometría, con un promedio 4,1182, las cuales se dispersan 1,07864 puntos en promedio respecto a la media, también se observa que 81,8 % de los estudiantes obtuvieron entre 4,0 y 4,9 puntos, mientras que solo 9,1 % de los estudiantes obtuvo una nota superior a los 5,0 puntos. De la misma Figura n° 46 se deduce que sólo un 9,0% desaprobó esta asignatura ***(Ver Anexo N° 02 en el Apéndice).***

Figura n° 46. Distribución Notas de Álgebra y Trig., Ing. en Alimentos.



Fuente: DGAI- UBB.

Continuando con el análisis de caracterización de los estudiantes de la muestra que constituye la fase dos, se analizan los resultados obtenidos por ellos respecto de la aplicación de dos test sobre conocimientos previos, tanto de álgebra básica como del conocimiento de las funciones. Dichos test fueron debidamente consensuados e inspirados en el trabajo de Stewart (2010).

Luego, los resultados de la aplicación de dichos Test fueron los siguientes y se consignan en la Tabla n° 41, la cual se presenta en la página siguiente, para una mejor presentación de la misma.

Tabla n° 42. Resultados del Test de conocimientos previos: álgebra básica.

Preguntas Test	**Puntaje Promedio**	**%. de Logro**	**Eval. Conceptual**
P1	0,406	40,6%	N. L.
P2	0,113	11,3%	N. L.
P3	0,453	45,3%	N. L.
P4	0,073	7,3%	N. L.
P5	0,073	7,3%	N. L.
P6	0	0%	N. L.
P7	0,083	8,3%	N. L.
P8	0,023	2,3%	N. L.
P9	0,293	29,3%	N. L.

Como se puede apreciar de la Tabla n°42 anterior, las nueve preguntas formuladas para ser respondidas por los estudiantes ***exhiben una bajo porcentaje de logro*** (columna 3), no superando el 50 % en ninguna de ellas. Así, la evaluación conceptual, la que está consignada en la columna cuatro no sobrepasa los mínimos esperados, por tanto, se resume con: N. L. = No logrado.

Es más, sólo un estudiante logra un máximo que se sitúa en los 4, 6 puntos de un total de nueve. El resto de los estudiantes está por debajo de esta ponderación y se ubica en torno a los dos (2) puntos, con una desviación de 0.5.

En resumen, ***los estudiantes*** participantes ***presentan serias deficiencias en conocimientos previos,*** lo que indica bajos conocimientos del álgebra escolar pre universitaria. Se advierte del análisis realizado que los estudiantes no hubiesen cursado la enseñanza Media (Secundaria) y, menos aún hubiesen aprobado la asignatura de Álgebra y Trigonometría, previa al cálculo diferencial, pero no prerrequisito para ésta.

Por su parte, el Test sobre ***"Funciones",*** tema fundamental sobre el cual se desarrolla el cálculo diferencial en su dimensión analítica y algebraica, obtuvo la siguiente ponderación para las preguntas formuladas, de un total de seis preguntas y, también inspirado en el texto de Stewart (2010).

La evaluación del resultado de éste último Test se resume en la tabla siguiente:

Tabla n° 43. Resultados del Test de conocimientos previos: funciones.

Preguntas	**Puntaje Prom.**	**% de logro**	**Evaluación Conceptual**
P1	0	0%	N.L.
P2	0,073	7,3%	N.L.
P3	0	0%	N.L.
P4	0,073	7,3%	N.L.
P5	0,04	4%	N.L.
P6	0	0%	N.L.

Nota: N.L. indica no logrado.

Sobre este tópico de la Matemática (funciones) el desconocimiento es aún mayor, pues por confesión de los propios estudiantes, muchos de ellos nunca revisaron el concepto de función en el transcurso de la enseñanza Media (Secundaria) (N. L. indica No Logrado). De ahí entonces que, el rendimiento que se exhibe en la Tabla n° 42 anterior, es con un ***escaso nivel de logro*** en este importante tópico de la Matemática básica. Lo anterior configura un grupo curso con bajos conocimientos del álgebra básica, incluido el tema de las funciones, el cual constituye un pilar fundamental sobre el que se construyen los principios del cálculo diferencial.

Ha de tenerse presente que, con mucha razón se ha dicho que, la Matemática en cierto sentido no es más que el estudio de las funciones, de ahí su importancia y trascendencia para un eficaz aprendizaje del cálculo.

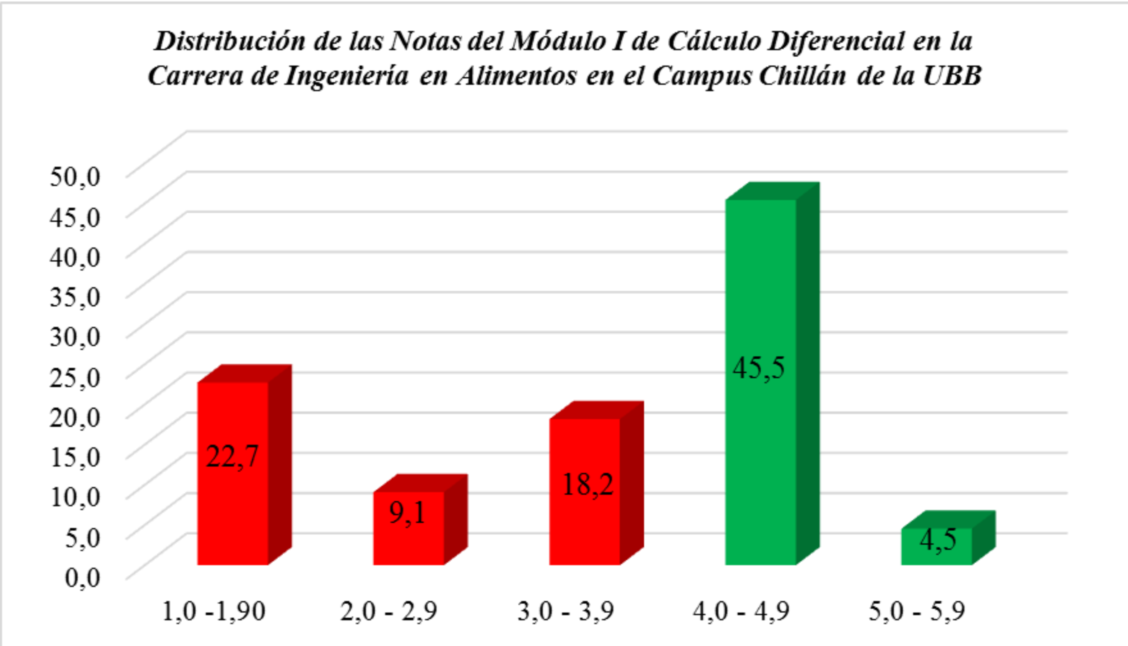
Luego, los resultados presentados configuran un panorama nada alentador para un profesor que tiene por delante la difícil misión de enseñar sobre la Matemática del cambio, pero, por otro lado, ello representa un desafío no menor en materia educativa al tratar de revertir esta situación de inicio de un escaso conocimiento matemático básico sobre el cual enseñar el cálculo diferencial a los estudiantes de esta carrera.

Realizada la experiencia para esta segunda fase de estudio, la estadística sobre el rendimiento académico de los estudiantes en cada uno de los dos Módulos de trabajo, es la que se muestra en las páginas siguientes, dicha información se resume en cada uno de los cuadros respectivos, con las estadísticas que mejor representan lo realizado como rendimiento académico por parte de los estudiantes en cada uno de los módulos de trabajo.

Análisis del Módulo I

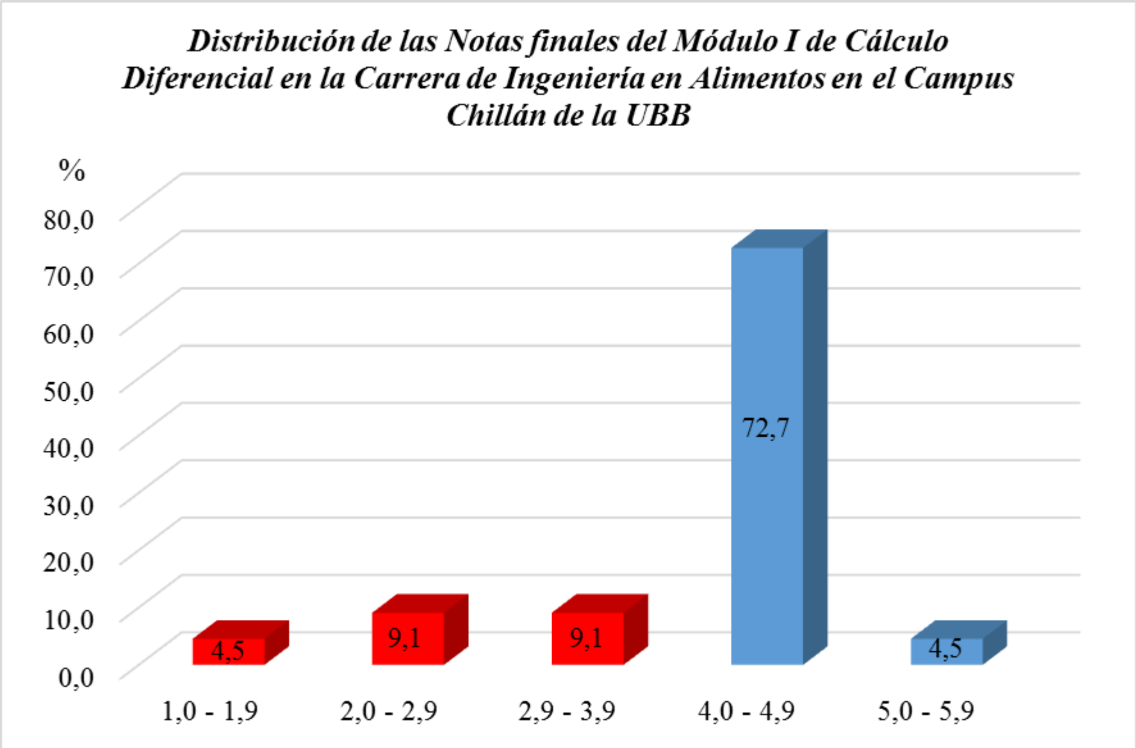
De los resultados obtenidos en el ***Módulo I*** se obtuvo que 50% de los estudiantes reprobaron lo que significa que once de ellos no lograron superar este módulo y 50% lo aprobaron lo que significa que al menos once (11) estudiantes han podido superar este módulo, para esta asignatura de cálculo diferencial de la carrera de Ingeniería en Alimentos en el Campus Chillán de la UBB; esta afirmación se ilustra en la *Fig. n° 47, a saber:*

Figura n°47. Distribución Notas del Módulo I, Ing. en Alimentos.



De los once (11) estudiantes que reprobaron el módulo I, estos repitieron este módulo y de los cuales tan solo seis (6) de estos aprobaron, y al menos cinco (5) estudiantes reprobaron. En la ***Figura n° 48***, se aprecian el resultado final de las notas obtenidas en el módulo I por los estudiantes de la asignatura de cálculo diferencial de la carrera de Ingeniería en Alimentos en el Campus Chillán de la UBB, los mismos que tienen un rendimiento promedio de 3,964 puntos. Asimismo el rendimiento promedio de los estudiantes difiere en promedio 0,7792 puntos respecto de la media, del mismo modo la distribución muestra que 72,8% de los estudiantes ha obtenido una calificación entre 4,0 y 4,9 puntos y que solo 4,5% han logrado una nota igual o superior a 5,0 puntos. Así, se tiene un 77,3% de aprobación del módulo I, lo que significa que solamente diecisiete (17) estudiantes han podido superar este módulo, mientras que el 22,7% de los estudiantes no lograron superar el módulo 1 ***(Ver Anexo n°03).***

Figura n°48. Distribución Notas Finales del Módulo I, Ing. en Alimentos.

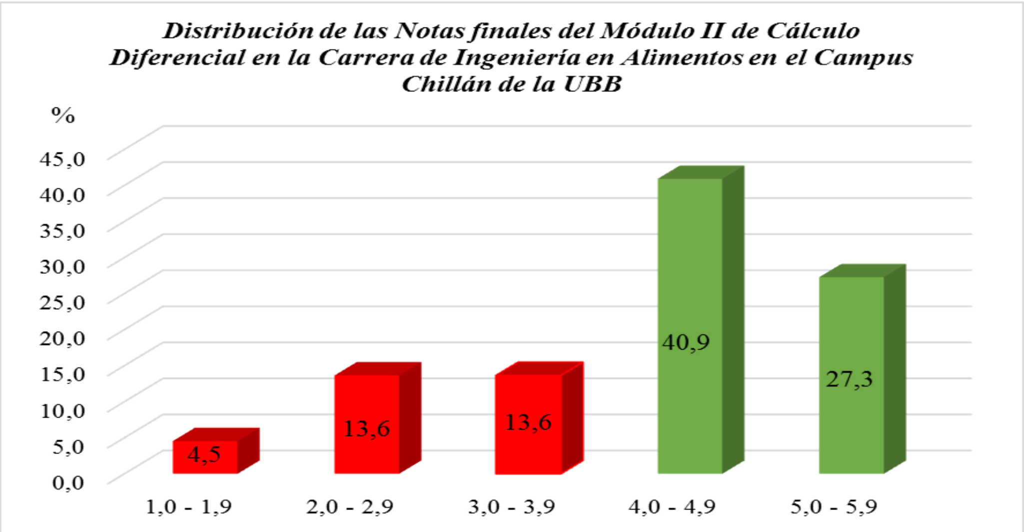


Análisis del Módulo II

De los once (11) estudiantes que aprobaron módulo I tan solo dos (2) de ellos aprobaron el módulo II, de este modo se verifica que al menos nueve (9) estudiantes reprobaron.

Ello implica que los estudiantes desaprobados repitan el módulo II, y de esta manera al repetir dicho módulo se obtuvo resultados un tanto satisfactorios, los que se pueden apreciar en la Figura n°47, en la que se observa las notas finales del módulo II de los estudiantes de cálculo diferencial de Ingeniería en Alimentos. Ellos obtuvieron un promedio de 4,136 puntos. Asimismo las notas finales de dicho módulo se dispersan en promedio 1,027 puntos respecto a la media; en cuanto a la distribución de las notas se aprecia que 40,9% obtienen una calificación entre 4,0 y 4,9 puntos, mientras que al menos 27,3% superan los 5,0 puntos en sus calificaciones. Además, el módulo 2 muestra un 68,2% de aprobación mientras que 31.8% de los estudiantes se encuentran en situación de desaprobación ***(Ver Anexo N° 04 en el Apéndice).***

Figura n° 49. Distribución Notas Finales del Módulo II, Ing. en Alimentos.



Análisis de la nota final del curso

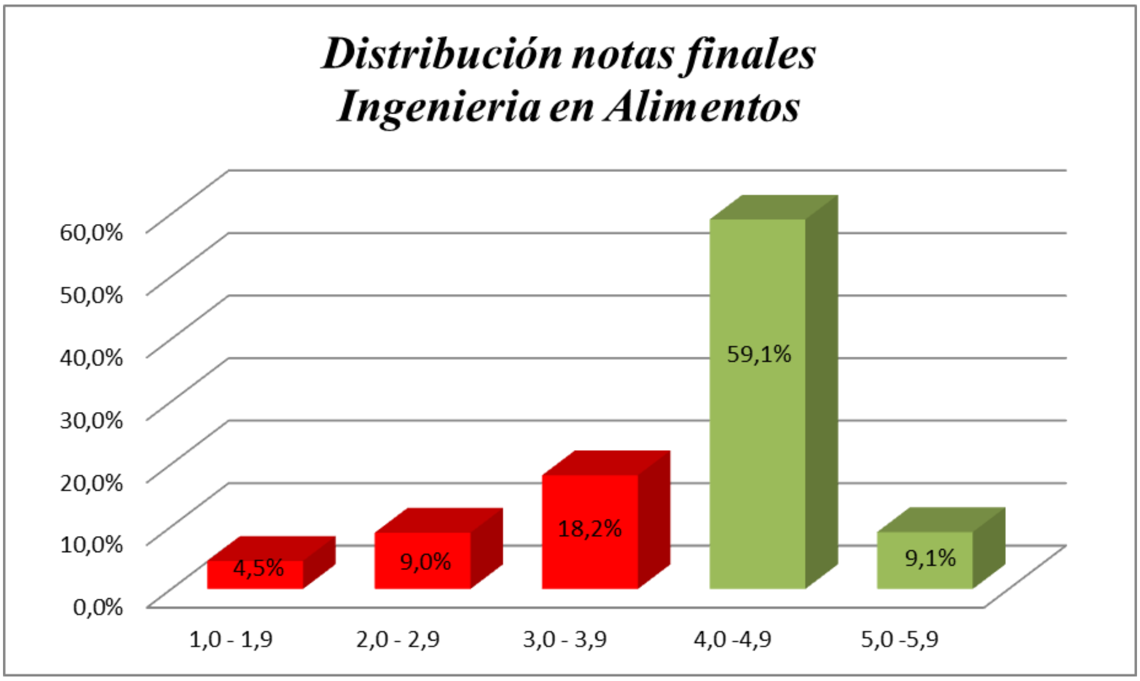
La nota Final del curso, bajo la aplicación del dcm para esta segunda fase empírica, resulta del promedio obtenido por los estudiantes en ambos módulos de trabajo. Además, para aprobar la asignatura deben necesariamente aprobar cada uno de los módulos con una nota al menos superior o igual a cuatro coma cero (4,0), en caso contrario, esto es, si reprueban cualquiera de los dos módulos en su fase de repetición, habrán reprobado la asignatura como tal.

En el Figura n°50**,** se aprecian las notas finales de los estudiantes de la asignatura de cálculo diferencial de Ingeniería en Alimentos, Campus Chillán de la UBB. Ellos obtuvieron un promedio de 4,050 puntos en la nota final y dichas notas finales discrepan en promedio 0,8392 puntos respecto a la media. En referencia a la distribución de las notas finales se aprecia que 59,1% obtienen una calificación entre 4,0 y 4,9 puntos, mientras que solamente 9,1% superan los 5,0 puntos en sus calificaciones.

Además, la calificación final de la asignatura muestra un 68,2% de aprobación mientras que 31.8% de los estudiantes se encuentran en situación de desaprobación. También se concluye que solo 9,1% de los estudiantes obtuvieron una nota superior a 5,0 puntos, lo que en traducido en términos de aprendizaje no resultan tan bueno si se quiere ***(Ver Anexo N°05 del Apéndice).***

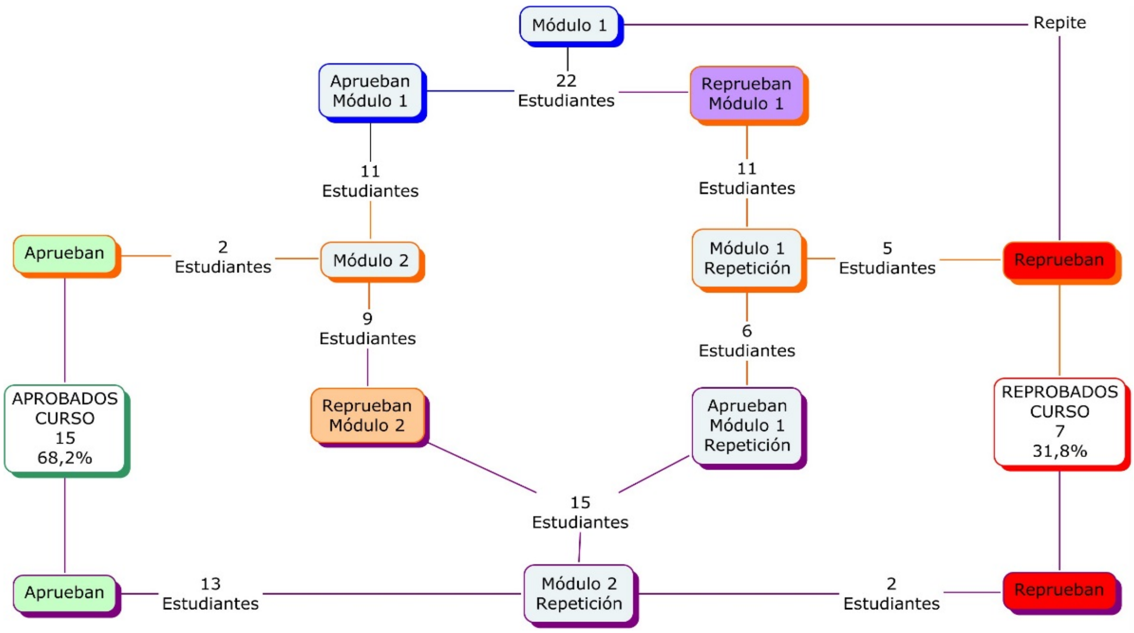
La **Figura n° 50**, aludida anteriormente, la cual se muestra en la página siguiente para su mejor visualización, da cuenta del ***68,2***% de aprobación para el curso en su conjunto, con un 59,1% para las notas que oscilan entre 4 y 4,9 y de un 9,1% para las notas comprendidas entre 5 y 5,9. Mayores calificaciones finales no se registraron. Como es obvio, se registró un 31,8 % de reprobación para el curso.

Figura n°50. Distribución de las Notas Finales del curso, Ing. en Alimentos.



Otra forma de ver el resultado de la aplicación del ***dcm*** para esta carrera, en la segunda fase y, de forma esquemática, siguiendo el flujo del desarrollo del curso en el tiempo, se presenta a continuación. Ella incluye los pormenores acaecidos en cada uno de los módulos y sus respetivas repeticiones que dieron lugar respecto a la aprobación o no de cada una de los módulos cursados por parte de los estudiantes participantes en ella. Esta información, en forma de un diagrama flujo, se presenta a en la página siguiente, para una mejor lectura y comprensión visual de la misma.

Figura n° 51. Flujo aprobados versus reprobados en cada Módulo, Ing. en Alimentos.



La ***conclusión preliminar*** para esta primera aplicación del diseño curricular modular con los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos ***es, en general, positiva***, ello en virtud de los resultados académicos obtenidos en sus calificaciones finales del curso, si se compara con los rendimientos anteriores sin usar el dcm en la dictación del curso de cálculo diferencial.

5.2.3. Resultados y análisis obtenidos en la fase 3

La última fase o fase 3, corresponde a la descripción y análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del diseño curricular modular ahora en el ***contexto** de la carrera de* ***Pedagogía en Ciencias Naturales del Campus Chillán*** de la Universidad del Bío-Bío.

Con ello se desea poner en evidencia que, ***la propuesta del diseño curricular modular*** para el aprendizaje del cálculo diferencial, en sí, resulta independiente del contexto donde se aplica, al menos en el contexto de la UBB y, de esta forma, adquiere trascendencia y validez al no estar supeditada a la formación solamente de ingenieros, sean estos: ***ingenieros civiles, ingenieros de ejecución, o ingenieros en alimentos***, como ha quedado de manifiesto al presentar el análisis de los resultados obtenidos en las dos fases descritas anteriormente, con bastante detalle en sus cifras de rendimiento académico obtenido inicialmente.

Así, teniendo como referencia los buenos rendimientos académicos obtenidos en la fase uno (1), en las carreras de ingeniería Civil y de Ejecución en las asignaturas de cálculo y física, como también los logrados en la fase dos (2), en la carrera de Ingeniería en Alimentos, se dio inicio a la experimentación del diseño curricular modular en la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales. Con ello se pretende extender el campo de aplicación de la propuesta modular, ya no supeditada a las ingenierías, sino a una carrera del ámbito de la formación de profesores en ciencias naturales y también impartida en el Campus Chillán de la UBB.

Hechos los alcances anteriores, para esta fase de experimentación, la Fase 3 para ser más precisos, *se usó un* ***Grupo Control*** de modo de poder medir y contrastar qué tan significativa era la propuesta de trabajo al impartir dicho curso de cálculo en otra carrera que no fuese una Ingeniería, como hasta ahora había ocurrido.

Así, la población de interés estuvo constituida por ***56 estudiantes*** de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, la que se dividió al azar en dos grupos de 28 estudiantes cada uno, los que constituyeron el ***Grupo Experimental*** y el ***Grupo Control***.

Los estudiantes que conformaron el ***Grupo Experimental*** realizaron el curso de cálculo bajo la propuesta didáctica basada en la Modularización. Por su parte el ***Grupo Control,*** como es obvio, recibió el curso a la usanza tradicional.

Conviene tener presente que en un comienzo -año 2010- se usaron tres módulos para impartir cada uno de los cursos que usaron el diseño curricular modular, base de la propuesta en sí. El aprendizaje de dichas experiencias de aula indicó la conveniencia de usar dos, en lugar de tres módulos para impartir las asignaturas modulares, como comúnmente se llama a ellas, tanto por los docentes como por los estudiantes.

Lo anterior se tradujo, para estas dos últimas fases, en la realización de solo dos módulos para cada uno de los cursos donde la propuesta se llevó al aula. Ello constituye un aporte del aprendizaje de la propia investigación acción in situ.

En atención a lo expresado, se pone en evidencia lo útil y necesario que resulta que las instituciones aprendan de sí mismas y, por tanto, la validez de sus propuestas en contexto adquieren una notable trascendencia para su quehacer educativo presente y futuro. Luego, como señala Stenhouse (2004, p. 45) que si: *"Sólo el profesor puede cambiar al profesor"* entonces se puede decir que *"Sólo la Institución puede cambiar a la Institución"*

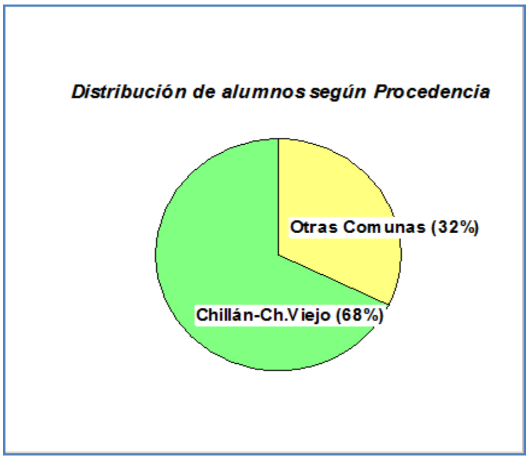
Además de usar el material de Apoyo docente elaborado por los profesores: Flores, Vidal y Villarroel (2012), se usaron para esta fase 3, las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), las que cubrieron cada uno de los temas tratados en los respectivos módulos de trabajo. Dichas actividades de aprendizaje se incluyen como parte importante del Anexo de la presente tesis doctoral.

El contexto donde toma lugar esta tercera y última fase experimental, como ya se ha dicho, es en la carrera de pregrado de formación inicial de profesor de ciencias, sean estos de: física, química o de biología. La carrera tiene una duración de cinco años, y lo habilita para ejercer como profesor en las materias señaladas de las ciencias naturales en el ámbito de la enseñanza media (secundaria).

Con relación a la formación matemática de los profesores de ciencias naturales, su maya curricular considera tres asignaturas, la primera de ellas al inicio de la carrera, en el primer semestre, la cual trata de los temas básicos del álgebra y la trigonometría esencialmente; la segunda asignatura corresponde al cálculo diferencial, la que se imparte el segundo año y en el primer semestre, por último, la tercera asignatura trata sobre el cálculo integral, las series y algunos elementos del cálculo de varias variables.

Los estudiantes, en su gran mayoría, provienen de la comuna de Chillán y Chillán Viejo, con un porcentaje en torno al 70 %, el 30% restante son de las comunas aledañas a la capital provincial, Chillán. Lo anterior queda reflejado en el gráfico que a continuación se muestra, a saber:

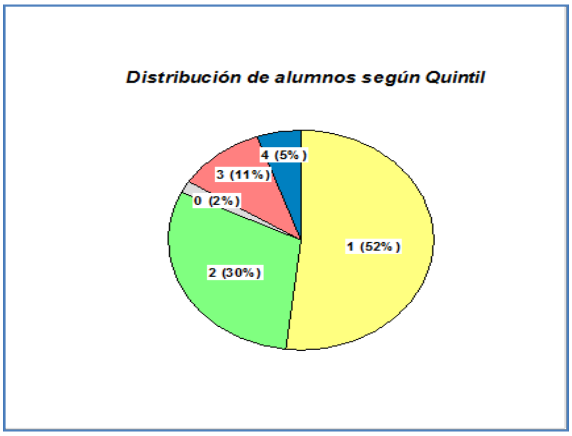
Figura n° 52. Distribución de los estudiantes, según procedencia.



Fuente: DGAI – UBB

Por su parte, el ***nivel socioeconómico*** es en general bajo, como quedará demostrado en el gráfico que consigna tales datos de los estudiantes participantes de esta fase 3, dicha información también se consigna en los anexos, en su sitio correspondiente. Se puede afirmar que la procedencia de los estudiantes en un porcentaje en torno al 52 % provine del primer quintil y un 30% corresponde al segundo quintil, cubriendo de esta forma más del 80% del curso. El gráfico que se muestra a continuación resume dicha información, en sus respectivos quintiles.

Figura n° 53. Distribución de los estudiantes según quintil.



Fuente: DGAI-UBB.

Dicho gráfico se construyó considerando como base los valores asignados por el Ministerio de Educación, el cual define los rangos de ingreso familiar de cada uno de los quintiles. Esto se muestra en la tabla siguiente: (1 CLP = **0,00135014** EUR)

Tabla n° 44. Distribución de ingresos por quintiles, pesos chilenos.

QUINTILES 2014 - MINISTERIO DE EDUCACIÓN

QUINTIL	**DESDE**	**HASTA**
I	$ 0,000	$ 71,788
II	$ 71,789	$ 120,229
III	$ 120,230	$ 184,909
IV	$ 184,910	$ 337,775
V	$ 337,776	$ 585,769

Fuente: Ministerio de Educación de Chile.

Para una mejor comprensión de la lectura de la tabla anterior los valores asignados en pesos chilenos se han expresado en euros. Así, la tabla anterior con sus correspondientes quintiles es ahora, en euros, la siguiente:

Tabla n° 45. Distribución de ingresos por quintiles, moneda EUR**.**

QUINTILES 2014- Ministerio de Educación – En euros.		
QUINTILES	DESDE	HASTA
I	0 EUR	96,91 EUR
II	96,92 EUR	162,31 EUR
III	162,32 EUR	249,63 EUR
IV	249,64 EUR	456,00 EUR
V	456,10 EUR	790,79 EUR

Fuente: Ministerio de Educación de Chile.

Los valores exhibidos en la Figura n° 50, como en la tabla anterior permiten formarse una idea de cuál es el nivel de ingreso del grupo familiar predominante en el grupo curso sobre el cual se realizó el estudio en su tercera y última fase. Así, ello se expresa en términos de porcentaje en la tabla siguiente:

Tabla n° 46. Porcentaje de estudiantes según quintil, Ped. en Ciencias.

Quintil	Porcentaje
I	52 %
II	30 %
III	11 %
IV	05 %
V	02 %

Fuente: DGAI-UBB, Chillán

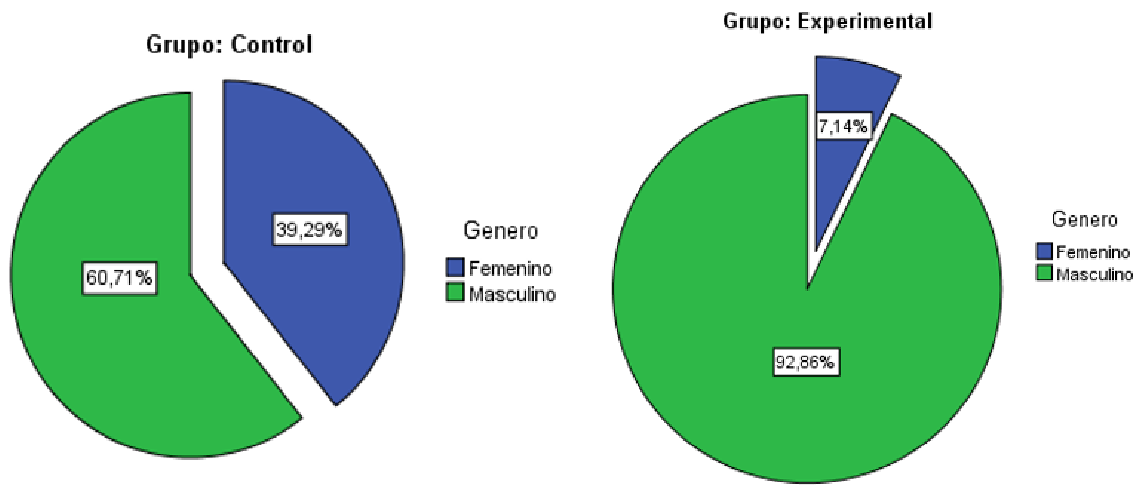
La realidad socioeconómica de los estudiantes, que se corresponde a su grupo familiar, obliga a ellos a endeudarse para poder cubrir los aranceles de la carrera, los cuales se sitúan en: $**1.782.000 pesos chilenos anuales, esto es, 2.405,70 EUR.** Cifra nada de despreciable para una carrera de pregrado y, por lo demás una de las más baratas. Además, ellos son la primera generación de estudiantes universitarios de su grupo familiar. Lo anterior se expone con el objeto de situar el contexto del cual provienen gran parte de los estudiantes no sólo de esta carrera de pregrado, sino de la mayoría de los estudiantes del UBB para el Campus Chillán, algo similar es lo que ocurre con la población estudiantil del Campus Concepción de la UBB.

Lo anterior representa con mucho, la realidad de los estudiantes de buena parte del alumnado de la UBB, en sus distintas carreras.

Se debe agregar además, el hecho de la carencia en conocimientos previos en las distintas áreas del conocimiento de las ciencias básicas (matemática, física, química y biología) y, una escasa formación en hábitos de estudio y compromiso con la vida académica estudiantil. Éste es, en suma, el contexto estudiantil sobre el cual se debe trabajar año tras año, y siendo realistas, signos de mejora en el corto plazo no se avizoran.

Asimismo es importante describir como están constituidos los grupos de estudio como son el grupo control y el grupo experimental en cuanto a género de los estudiantes. Por ello la siguiente figura ilustra dicha distribución:

Figura n°54. Distribución por género, Pedagogía en Ciencias Naturales, según grupo.



Fuente: DGAI- UBB, Chillán

Se puede observar que en ambos Grupos de estudio predomina el género masculino, con un 60,71% para el GC y un 92,86% para el GE, mientras que en menor proporción el género femenino para GC es de 39,29% y para el caso basado en el ***dcm*** (GE) es de tan solo del 7,14%.

A continuación el presente análisis se basa en el ***contraste de diferencia de medias de dos poblaciones independientes***, en este caso para comprobar si existen diferencias entre el grupo control y el grupo experimental. Para este propósito se evaluará tres supuestos básicos como son:

- *La prueba de aleatoriedad* ***(Test de rachas).***
- *La prueba de normalidad* ***(Test de Shapiro-Wilk)*** *y*
- *La prueba de Homogeneidad de varianzas* ***(Test de Levene)***

Antes de hacer la respectiva comparación. Caso contrario de no cumplirse estos supuestos antes mencionados se procederá a usar la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney.

Análisis de resultados de la PSU

De los resultados obtenidos por el grupo control en la PSU se puede afirmar que estos obtuvieron un puntaje promedio de 538,23 puntos con una desviación de más menos 30,10 puntos respecto al promedio. Así también estima que los estudiantes sometidos al método experimental lograron un puntaje de 534,80 puntos en promedio, asimismo los puntajes de estos difieren 34,50 puntos respecto a la media, lo que demuestra de forma a priori que no existen diferencias en esta instancia entre los grupos en cuestión.

De esta manera a nivel de significancia del 5% se puede concluir que la muestra el puntaje obtenido en la PSU por los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales sometidos a los métodos de control y experimentación provienen de muestras obtenidas de forma aleatoria.

Tabla n° 47. Prueba de rachas: Grupo Control y Grupo Experimental.

Prueba de rachas Grupo Control	PSU
Valor de Prueba	538,2321
Casos < Valor de prueba	13
Casos >= Valor de prueba	15
Casos totales	28
Número de rachas	14
Z	-,166
Sig. asintótica (bilateral)	,868

Prueba de rachas Grupo Experimental	PSU
Valor de Prueba	534,8036
Casos < Valor de prueba	15
Casos >= Valor de prueba	13
Casos totales	28
Número de rachas	17
Z	,608
Sig. asintótica (bilateral)	,543

Además se puede verificar que las notas del pre-test de los estudiantes bajo el método tradicional y los estudiantes sometidos al método experimental siguen una distribución normal ***(Ver Anexo N°06 y N°07)***.

Tabla n° 48. Pruebas de normalidad: estadístico Shapiro-Wilk, GC y GE.

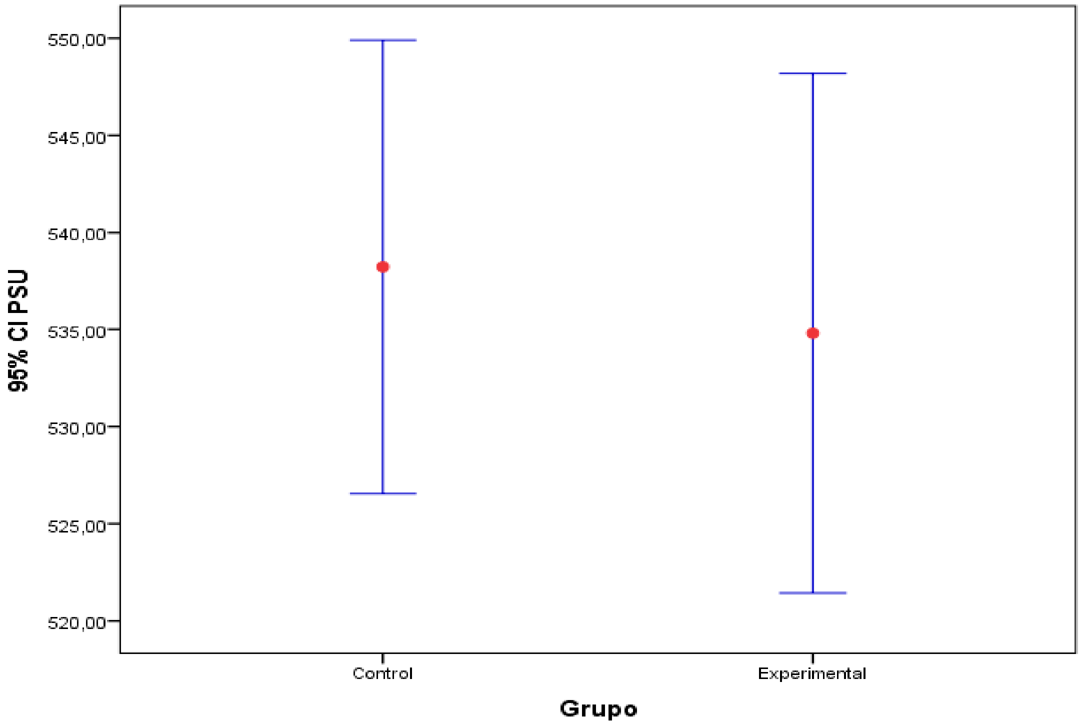
Pruebas de normalidad	**Estadístico Shapiro-Wilk**	**gl**	**Sig.**
Grupo Control	,985	28	,948
Grupo Experimental	,950	28	,201

Se verifica mediante el estadístico de contraste (F=0,396) y el **p-valor** es **0.688** que las varianzas entre ambos grupos son iguales, de lo que se afirma que los dos grupos tienen varianzas homogéneas. Asimismo para el contraste para la diferencia de medias suponiendo que las varianzas son iguales, se comprueba que ambos métodos no discrepan dado que el estadístico (t = 0,396) y el p-valor=0.693 no es significativo, lo cual demuestra que los resultados entre el ***grupo de control o tradicional*** y el ***grupo Experimental bajo la propuesta didáctica basada en la Modularización son iguales en esta instancia del pre-test***.

Tabla n° 49. Prueba t para la igualdad de medias.

t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
					Inferior	**Superior**
,396	54	**,693**	3,42857	8,65303	-13,91970	20,77685

Figura n° 55. Comparación puntaje PSU: Pedagogía en Ciencias, según método.

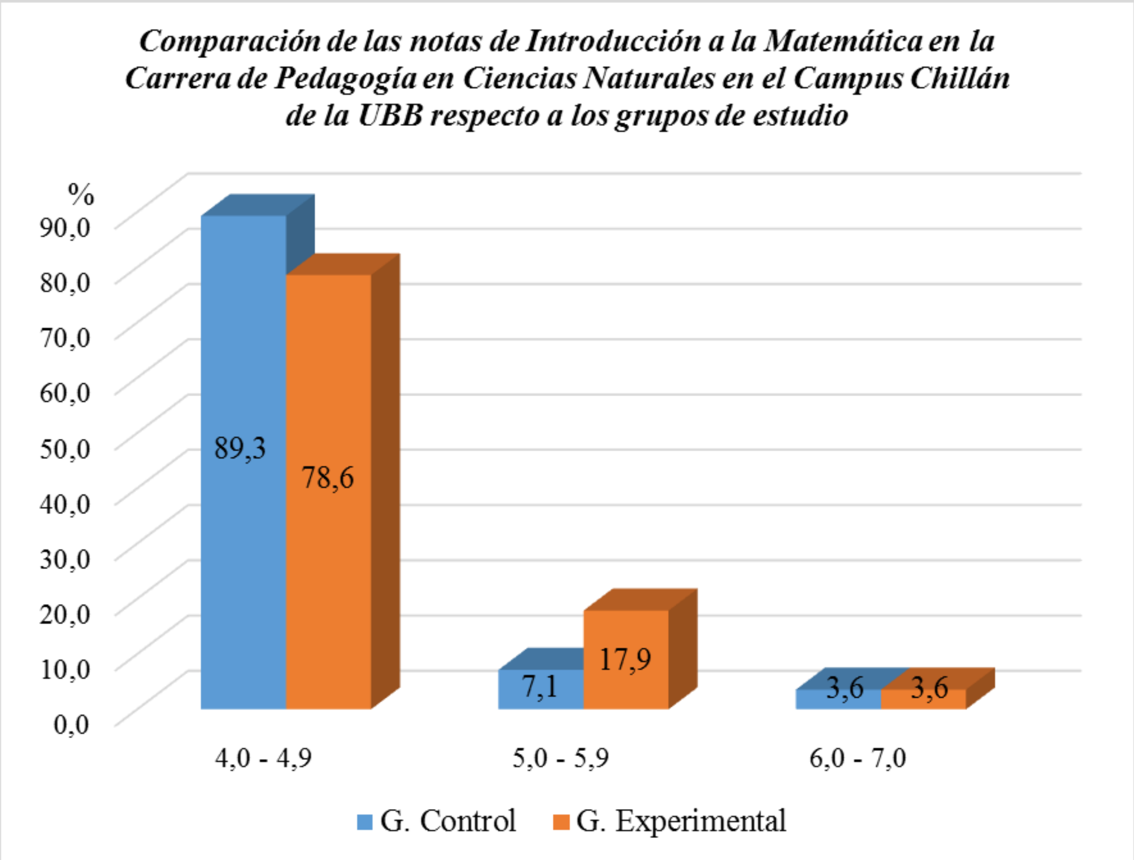


La figura anterior muestra que el rendimiento de los estudiantes a los cuales se les aplico el dcm (538,23 ± 30,10337) versus los estudiantes que recibieron el método tradicional (534,80 ± 34,50049) no presentan diferencias significativas en su rendimiento.

Análisis de los resultados de la asignatura: Intr. a la Matemática

De los resultados obtenidos por el grupo control en la asignatura de Introducción a la Matemática se puede verificar que los estudiantes obtuvieron un puntaje promedio de 4,27 puntos, con una desviación típica de 0,56 puntos respecto a la media. Del mismo modo se estima que los estudiantes sometidos al método experimental lograron un puntaje de 4,47 puntos en promedio, asimismo los puntajes de estos discrepan 0,57 puntos respecto a su media, lo que demuestra que es probable que existan diferencias esta etapa entre los grupos a comparar.

Figura n° 56. Comparación Notas de Intr. a la Matemática, ambos grupos.



A nivel de significancia del 5% se puede concluir que la muestra de las notas de Introducción a la Matemática del Grupo Control y el Grupo Experimental de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales es aleatoria.

Tabla n° 50. Prueba de Rachas: Intr. a la Matemática, GC y GE.

Prueba de rachas Grupo Control	**Nota Intro**
Valor de prueba	4,2714
Casos < Valor de prueba	22
Casos >= Valor de prueba	6
Casos totales	28
Número de rachas	11
Z	,042
Sig. asintótica (bilateral)	,967

Prueba de rachas Grupo Experimental	**Nota Intr.**
Valor de prueba	4,4786
Casos < Valor de prueba	17
Casos >= Valor de prueba	11
Casos totales	28
Número de rachas	17
Z	,867
Sig. asintótica (bilateral)	,386

Se puede verificar que las notas de la asignatura de Introducción a la Matemática de los estudiantes bajo el método tradicional y los estudiantes sometidos al método experimental no están distribuidos normalmente, esto se puede apreciar al comparar el p valor (Sig=0,000) con el nivel de significancia el mismo que se ha fijado en 5% ***(Ver Anexo n° 14 y n° 15).***

Tabla n° 51. Prueba de normalidad: estadístico Shapiro-Wilk, ambos grupos.

Pruebas de normalidad	**Estadístico Shapiro-Wilk**	**gl**	**Sig.**
Grupo Control	,564	28	**,000**
Grupo Experimental	,807	28	**,000**

En el siguiente ***Anexo N° 9 y N° 10*** (ver Apéndice) se aprecian los histogramas de las notas de la asignatura de introducción a la matemática del Grupo Control y el Grupo Experimental de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, en ellos claramente se comprueba que el comportamiento de la distribución es sesgada hacia la derecha. Así también la moda de este conjunto de datos se encuentra en una nota aproximadamente de 4,0 puntos.

La falta de normalidad obliga el uso de la prueba no paramétrica de U Mann-Whitney, para probar si existen diferencias significativas entre los tratamientos empleados.

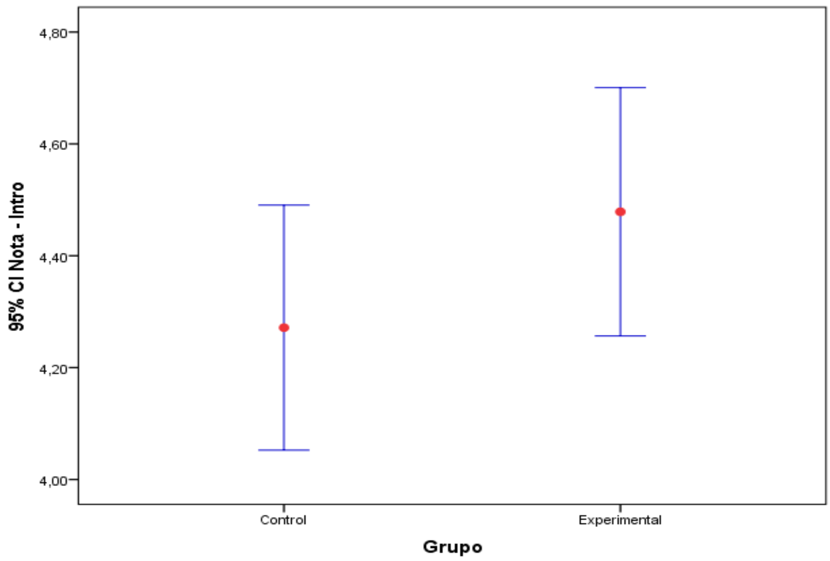
Comparando las medias de los métodos, se puede observar que el valor del estadístico (U=246,5) y el p-valor=0,011 lo cual demuestra que ***los resultados entre el grupo de Control o tradicional y el grupo Experimental son significativos bajo la propuesta didáctica basada en el diseño curricular modular no son iguales en esta instancia de la asignatura de Introducción a la Matemática.***

Tabla n° 52. Estadísticos de prueba: nota Intr. a la Matemática.

Estadísticos de prueba	**Nota Intr.**
U de Mann-Whitney	246,500
W de Wilcoxon	652,500
Z	-2,533
Sig. asintótica (bilateral)	,011

En la Figura n° 57, que se exhibe en la página siguiente se muestra la comparación del método de trabajo en Intr. a la Matemática en ambos grupos.

Figura n° 57. Comparación método de trabajo, Intr. a la Matemática.

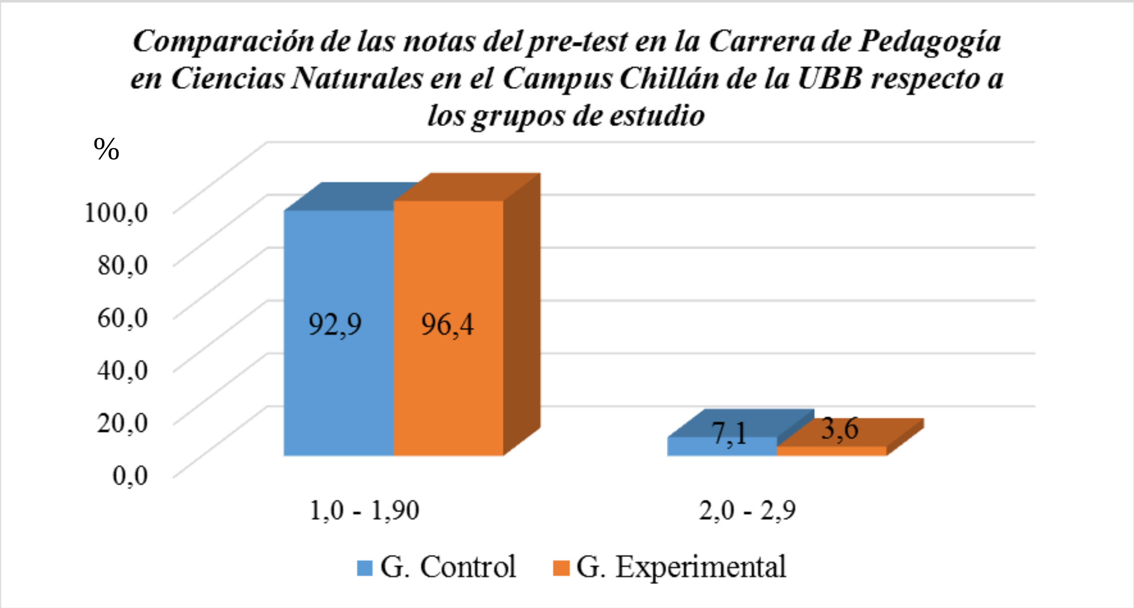


La gráfica anterior muestra que los estudiantes a los cuales se les aplico la metodología basada en la Modularización presentan un rendimiento promedio de 4,4786 puntos con una desviación típica de 0,57243 con referencia a los estudiantes que recibieron instrucción bajo el método tradicional los mismos que alcanzaron a obtener un promedio de 4,2786 puntos con una desviación de 0,56494 puntos.

Análisis de los resultados del Pre-Test

En la **Figura n° 58** que sigue, se puede apreciar que los resultados obtenidos en esta etapa por los dos grupos a consideración tienen un comportamiento idéntico, tal es el caso que el promedio del grupo control es de 1,45 puntos en el pre-test, mientras que por su parte el grupo de estudiantes a los cuales se les aplico la modulación lograron un puntaje de 1,46 puntos en promedio. Asimismo los puntajes de estos discrepan en 0,28 y 0,24 puntos respecto a su media, lo que demuestra que posiblemente no encontremos diferencias significativas entre los grupos en esta instancia.

Figura n° 58. Comparación Notas Pre-Test, Ped. en Ciencias, ambos grupos.



A nivel de significancia del 5% se puede concluir que la muestra de las notas del pre-test del grupo control y el grupo experimental de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales es aleatoria.

Ahora aplicando la prueba de rachas a ambos grupos se obtuvieron los siguientes resultados para el Pre-Test, los que se consignan en la tabla siguiente, a saber:

Tabla n° 53. Prueba de rachas: ambos grupos, Pre-Test.

Prueba de rachas Grupo Control	**Pre-Test**
Valor de Prueba	1,4536
Casos < Valor de prueba	17
Casos >= Valor de prueba	11
Casos totales	28
Número de rachas	15
Z	,058
Sig. asintótica (bilateral)	,954

Prueba de rachas Grupo Experimental	**Pre-Test**
Valor de Prueba	1,4679
Casos < Valor de prueba	12
Casos >= Valor de prueba	16
Casos totales	28
Número de rachas	17
Z	,703
Sig. asintótica (bilateral)	,482

Se puede verificar que las notas del Pre-Test de los estudiantes bajo el método tradicional no siguen una distribución normal (p-valor=0,003), mientras que las notas de los estudiantes sometidos al método experimental siguen una distribución normal (p-valor=0,368). La falta de normalidad dentro del grupo control obliga al uso de la prueba no paramétrica de ***U Mann-Whitney***, para probar si existen diferencias significativas entre los tratamientos empleados ***(Ver Anexo n° 9 y n° 10 del Apéndice)***.

Por su parte, la prueba de normalidad aplicada a ambos grupos, bajo el estadístico Shapiro-Wilk, dio como resultado lo que se expresa en la Tabla n° 54, esto es:

Tabla n° 54. Prueba de normalidad: GC y GE, Shapiro-Wilk.

Prueba de normalidad	**Estadístico Shapiro-Wilk**	**Gl**	**Sig.**
Grupo Control	,876	28	,003
Grupo Experimental	,961	28	,368

Ahora, comparando las medias de los métodos, se puede observar que el valor del estadístico (U=427,5) y el p-valor=0,557 demuestran que ***los resultados entre el Grupo Control o tradicional y el Grupo Experimental no son significativos bajo la propuesta didáctica basada en el dcm, por lo que se consideran iguales en esta instancia de la Introducción a la Matemática.***

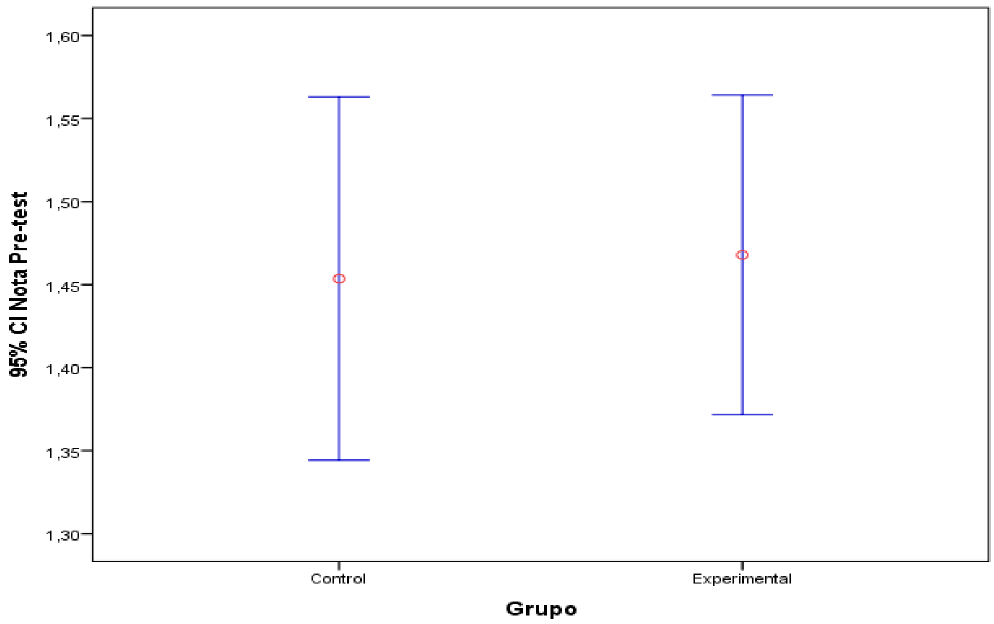
Tabla n° 55. Estadísticos de prueba, Nota Intr. a la Matemática.

Estadísticos de prueba	**Nota Intr. Mat.**
U de Mann-Whitney	427,5
W de Wilcoxon	833,5
Z	0,587
Sig. asintótica (bilateral)	0,557

La siguiente gráfica, que corresponde a la Figura n° 58, muestra que los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales a los cuales se les aplico la metodología basada en el ***dcm*** obtuvieron en promedio un puntaje de 1,4679 y los estudiantes que recibieron sus clases bajo el método tradicional obtuvieron un promedio de 1,4536 puntos, lo que conlleva a afirmar que no hay diferencias significativas entre los métodos de enseñanza empleados.

La representación gráfica de dicha Figura se muestra en la página siguiente para su mejor visualización.

Figura n° 59. Comparación del método aplicado, Pre-Test.

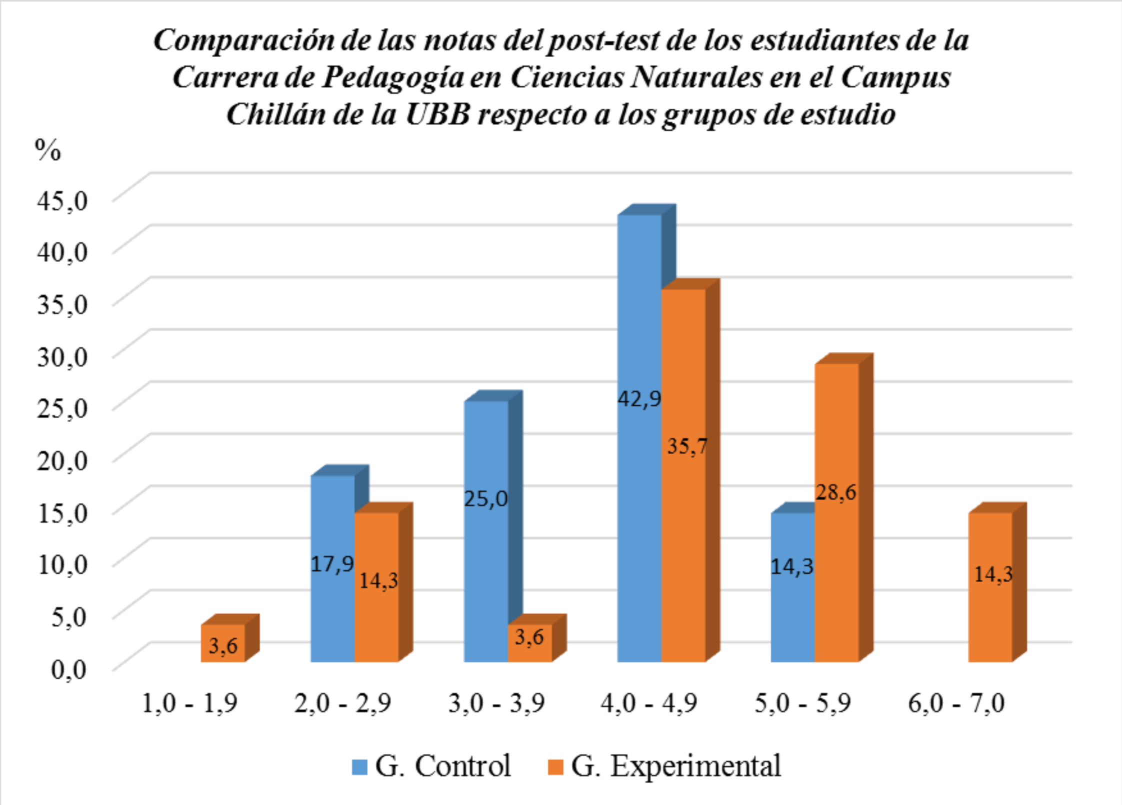


Análisis de los resultados del Post-Test

De los resultados obtenidos por el grupo control en el post-test se puede afirmar que los estudiantes obtuvieron un puntaje promedio de 3,87 puntos, con una desviación típica de 0,85 puntos respecto a la media. Por otro lado, los estudiantes sometidos al método experimental (aplicación del dcm) lograron un puntaje de 4,53 puntos en promedio, asimismo los puntajes de estos discrepan 1,3141 puntos respecto a su media, lo que demuestra que es probable que existan diferencias en esta etapa entre los grupos a comparar.

Además, en la ***Figura n° 59*** se aprecia que el 78.6% de los estudiantes bajo el ***dcm*** aprobaron el post-test, mientras que solo el 57,2% de los estudiantes del grupo control aprobaron esta instancia de medición. Así lo deja en evidencia la figura aludida, a saber:

Figura n° 60. Comparación notas Post-Test, Ped. en Ciencias Naturales.



A un nivel de significancia del 5% se puede concluir que las notas del Post-Test del Grupo Control (p-valor=0,384) cumple con el supuesto de aleatoriedad mientras que el Grupo Experimental no cumple con dicho supuesto (p-valor=0,008).

Tabla n° 56. Prueba de rachas, ambos grupos, Post-Test.

Prueba de rachas Grupo Control	**Nota Post-test**
Valor de prueba	3,8786
Casos < Valor de prueba	12
Casos >= Valor de prueba	16
Casos totales	28
Número de rachas	12
Z	-,871
Sig. asintótica (bilateral)	,384

Prueba de rachas Grupo Experimental	**Nota Post-test**
Valor de prueba	4,5393
Casos < Valor de prueba	12
Casos >= Valor de prueba	16
Casos totales	28
Número de rachas	22
Z	2,670
Sig. asintótica (bilateral)	,008

Se puede verificar que las notas del post-test de los estudiantes bajo el método tradicional siguen una distribución normal (p-valor=0,109), mientras que las notas de los estudiantes sometidos al método experimental no siguen una distribución normal (p-valor=0,037). ***(Ver Anexo n°10 y n°11)***

Tabla n° 57. Prueba de normalidad, ambos grupos, Shapiro-Wilk.

Pruebas de normalidad	**Estadístico Shapiro-Wilk**	**gl**	**Sig.**
Grupo Control	,940	28	,109
Grupo Experimental	,921	28	,037

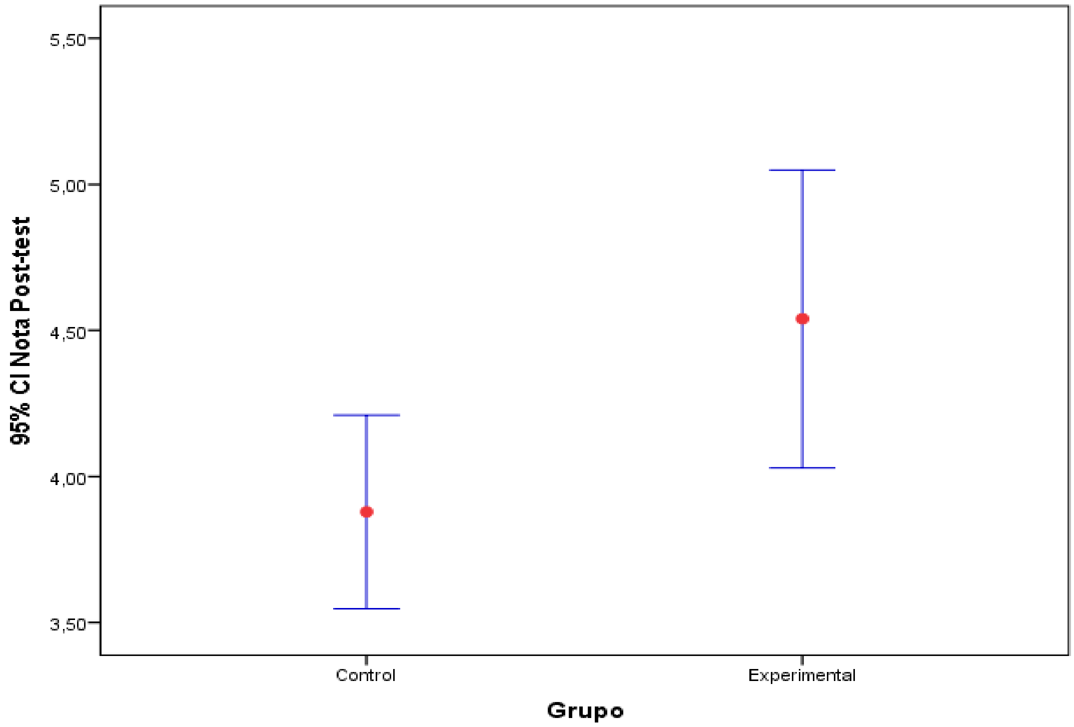
Al evaluar los supuestos anteriores se puede verificar que estos no se cumplen, por lo que resulta necesario el uso de la prueba no paramétrica. Se verifica que el valor del estadístico (U= 235,0) y el p-valor=0.010, lo cual demuestra que ***los resultados entre el grupo de control o tradicional y el grupo Experimental bajo la propuesta didáctica basada en el dcm no son iguales en esta instancia del Post-Test.***

Tabla n° 58. Estadísticos de prueba, Post-Test.

Estadísticos de prueba	**Post-Test**
U de Mann-Whitney	235,000
W de Wilcoxon	641,000
Z	-2,575
Sig. asintótica (bilateral)	,010

De manera gráfica el resultado del Post-Test se expone en la siguiente figura, que corresponde a la n° 60, a saber:

Figura n° 61. Comparación método empleado, Post-Test, Ped. en Ciencias.



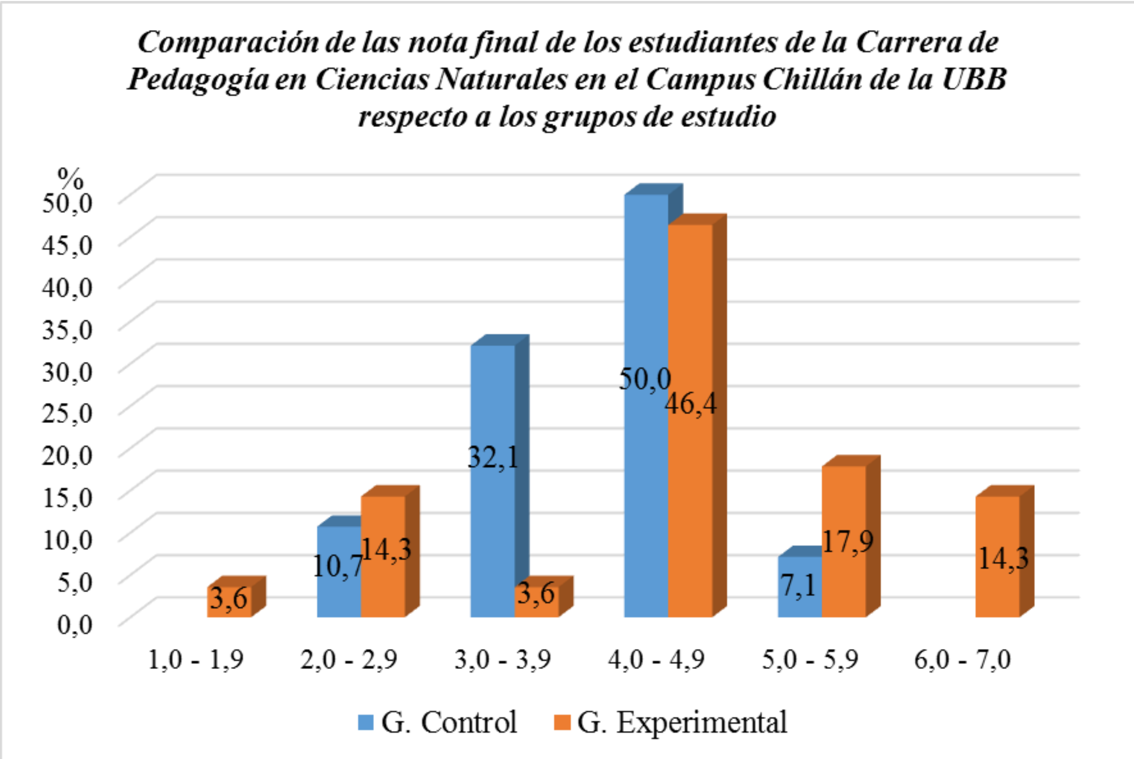
La grafica anterior muestra que los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales a los cuales se les aplico la metodología basada en el dcm tienen un rendimiento promedio de 4,5393 puntos, con una desviación estándar de 1,31412 puntos en el Post-Test, a diferencia de los resultados obtenidos con el método tradicional que, en promedio, alcanzan 3,8786 puntos con una desviación estándar de 0,85607 puntos.

Análisis de los resultados de la nota final

De los resultados obtenidos por el grupo control en la nota final se puede afirmar que los estudiantes obtuvieron un puntaje promedio de 3,92 puntos, con una desviación típica de 0,77 puntos respecto a la media. Del mismo modo se estima que los estudiantes sometidos al método experimental lograron un puntaje de 4,51 puntos en promedio, asimismo los puntajes de estos discrepan 1,28 puntos respecto a su media, lo que demuestra que es probable que existan diferencias esta etapa entre los grupos.

Además se en la ***Figura N°17*** se aprecia que 78.6% de los estudiantes bajo el método de modulación aprobaron el post-test, mientras que solo 57,1% de los estudiantes del grupo control aprobaron esta instancia.

Figura n°62. Comparación Nota Final, Ped. en Ciencias, G. C. y G. E.



A nivel de significancia del 5% se puede concluir que la muestra de las notas finales del grupo control y el grupo Experimental de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales son aleatorias.

Tabla n° 59. Prueba de rachas: ambos grupos, Nota Final.

Prueba de rachas Grupo Control	**Nota Final**
Valor de prueba	3,9286
Casos < Valor de prueba	12
Casos >= Valor de prueba	16
Casos totales	28
Número de rachas	12
Z	-,871
Sig. asintótica (bilateral)	**,384**

Prueba de rachas Grupo Experimental	**Nota Final**
Valor de prueba	4,5107
Casos < Valor de prueba	13
Casos >= Valor de prueba	15
Casos totales	28
Número de rachas	20
Z	1,770
Sig. asintótica (bilateral)	**,077**

Asimismo para verificar el supuesto de normalidad en las notas finales de los estudiantes sometidos a un método tradicional y un método Experimental de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, el estadístico de Shapiro-Wilk muestra que ambos grupos siguen una distribución normal, esto dado que p-valor es mayor que la significancia del 5%. ***(Ver Anexo N°12 y N°13)***.

Tabla n° 60. Prueba de normalidad: Shapiro- Wilk, ambos grupos.

Pruebas de Normalidad	**Estadístico Shapiro-Wilk**	**gl**	**Sig.**
Grupo Control	,972	28	**,646**
Grupo Experimental	,951	28	**,215**

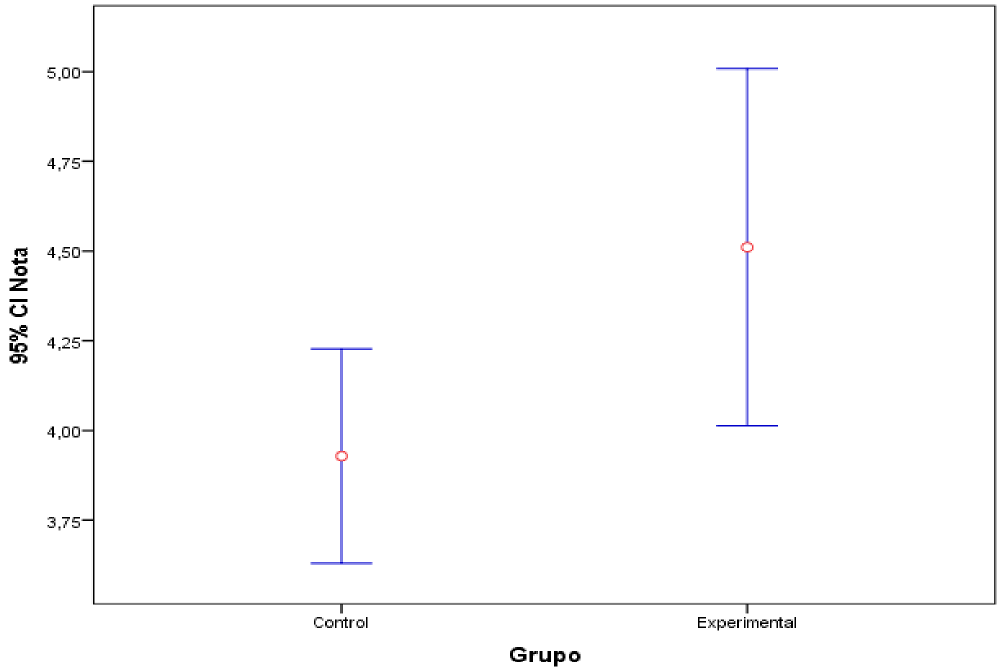
Se verifica mediante el estadístico de contraste (F=4.141) y el **p-valor** es **0.047** que las varianzas entre ambos grupos no son iguales, por lo que se concluye que los dos grupos no tienen varianzas homogéneas.

También el contraste para la diferencia de medias suponiendo que las varianzas no son iguales, en la tabla muestra el valor del estadístico (t =-2,057) y el p-valor=0.046 son significativos, lo cual demuestra que ***los resultados entre el Grupo de Control y el Grupo Experimental bajo la propuesta basada en el dcm no son iguales.***

Tabla n° 61. Prueba t para la igualdad de medias.

t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
					Inferior	Superior
-2,057	44,238	,046	-,58214	,28304	-1,15248	-,01180

Figura n°63. Comparación del método empleado, Ped. en Ciencias, Notas Finales.



La grafica anterior muestra que los estudiantes a los cuales se les aplico la metodología basada en la Modularización obtienen en promedio de 4.5107 puntos con una desviación típica de 1,2839 puntos, por lo que este método es más eficiente que el método tradicional del cual los estudiante consiguen en promedio 3,9286 puntos con una deviación estándar de 0,77117.

Del grupo control o método tradicional se obtuvo un ***57,1% de aprobación****, es decir* ***16 estudiantes aprobaron satisfactoriamente la asignatura*** *y un* ***42,9% la reprobaron****, es decir que 12 estudiantes reprobaron la asignatura.*

Del grupo experimental o propuesta didáctica basada en el diseño curricular modular (dcm) se obtuvo un ***78,6% de aprobación****, es decir* ***22 estudiantes aprobaron satisfactoriamente la asignatura*** *mientras que solamente un* ***21,4% la reprobaron****, es decir que 6 estudiantes reprobaron la asignatura.* Recordemos que ambos grupos (Control y Experimental) estuvieron conformados por 28 estudiantes.

Todo lo anterior permite concluir, que hay evidencias estadísticas para asegurar que los estudiantes que desarrollaron su proceso de aprendizaje bajo el diseño modular obtuvieron, ***en promedio***, ***mejores calificaciones*** que aquellos sometidos a la metodología tradicional y que constituyeron el Grupo Control.

Las ***conclusiones y proyecciones*** que se desprenden del análisis de esta tercera fase son auspiciosas. Así, a partir del año 2014, nuevas asignaturas de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales de la UBB se sumarán al cálculo diferencial, ***usando como propuesta didáctica el*** **dcm para ser impartidas**, entre ellas estarán las asignaturas de: *Química I y Química II, Introducción a la Física e Introducción a la Matemática*, esta última asignatura previa al cálculo diferencial.

Todas estas asignaturas corresponden al *primer año de su plan de estudio*. La elección de dichas asignaturas obedece básicamente a dos hechos: en primer lugar, ***el mal rendimiento académico*** obtenido por los estudiantes, hecho que se ha venido reportando desde varios años y, en segundo lugar, ***los resultados auspiciosos*** obtenidos de la aplicación del ***dcm,*** como ha quedado de manifiesto hasta ahora en cálculo.

Lo señalado anteriormente no hace otra cosa que proyectar la perspectiva del trabajo actual a las otras disciplinas científicas, como son la Física y la Química, de modo tal que los profesores de estas disciplinas incursionen en la enseñanza de las mismas con nuevas propuestas didácticas innovadoras y, en donde la Modularización, les sirva de pilar fundamental para realizar la trasposición didáctica en el aula con resultados de aprendizajes más óptimos que los que hoy se han tenido en estas disciplinas científicas de currículo de formación profesional de esta Carrera de pregrado.

Por último, los estudios de investigación, por lo general, se inspiran y sustentan en proyectos de mayor envergadura, tal ha sido el caso del presente estudio, donde tanto el ***Proyecto Mecesup 0809*** y el Proyecto Institucional **"Convenio de Desempeño",** han sido las bases que han permitido la ejecución del presente trabajo.

El proyecto institucional aludido ha tenido entre una de sus finalidades principales *"Disminuir significativamente la deserción de los estudiantes de la Universidad del Bío-Bío, con especial énfasis en los alumnos de grupos social y económicamente vulnerables"*. No cabe la menor duda que, a la luz de los resultados logrados hasta ahora bajo esta propuesta didáctica, ella se constituye en una posibilidad cierta para mejorar los rendimientos de los estudiantes, e general. Ello implicará necesariamente, una revisión permanente de las asignaturas que se dicten bajo esta modalidad de trabajo, con el claro objetivo de poder aprender de los errores cometidos y, así, poder mejorar la propuesta inicialmente formulada. De no ser así, se traducirá en una propuesta más, como tantas otras sin ninguna trascendencia futura.

Validez y Confiabilidad

Para evaluar la fiabilidad de la consistencia interna de los instrumentos o cuestionarios (nota intro, pre-test y post-test) se utiliza el método basado en el alfa de Cronbach para estimar la fiabilidad de cada uno de los instrumentos de medida a través de un conjunto de cinco (5) ítems por cada instrumento. Los resultados de dicho análisis se presentan en la siguiente tabla:

Tabla n° 62. Cuestionarios: Alfa de Cronbach.

Cuestionario	**Alfa de Cronbach**	**Alfa de Cronbach basada en elementos estandarizados**	**N° de ítems**
Nota Intr	0,801	0,870	5
Pre-Test	0,678	0,774	6
Post-Test	0,905	0,949	6

Como se puede apreciar el instrumento utilizado en Intr. (0,801) muestra una consistencia interna muy buena, así también el pre-test (0,678) muestra una consistencia lo que demuestra que tiene fiabilidad alta y por último el post-test (0,905) muestra que el instrumento utilizado es fiable.

*

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

"Más vale el fin de algo que su principio" Eclesiastés 6:8.

6.1. Introducción

Este es el último capítulo, se desea resumir, en cierto modo, los logros y resultados más importantes de este trabajo, junto a su prospectiva más inmediata que se puede vislumbrar como corolario de todo este ejercicio académico investigativo desarrollado por varios años de estudio, cavilaciones, retrocesos y avances del mismo.

Por de pronto, se insiste sobre el problema que significa el aprendizaje del cálculo diferencial, rescatamos su importancia en el devenir inicial de la formación de pregrado en la Matemática del cambio para los estudiantes de hoy.

Segundo, se revisa en qué medida la ***Hipótesis inicial*** de trabajo pudo validarse o rechazarse, tras las sucesivas fases empíricas desarrolladas a lo largo del desarrollo de la tesis.

Tercero, se revisará tanto el *Objetivo General c*omo los *Objetivos Específicos* enunciados al inicio respecto de su cumplimiento o no para darle sentido y propósito a toda la investigación.

Lo anterior significará evocar la fase empírica diseñada en el capítulo 4 y puesta en escena en el siguiente, el cual revisa y analiza los distintos resultados a que se arribaron como conclusión de su puesta en escena.

Por último, se desea esbozar en líneas generales, las posibles líneas futuras a desarrollar como prospectiva de todo el trabajo realizado, y de esta forma dar por concluida la presente tesis doctoral.

6.2. Conclusión referida a la hipótesis

La hipótesis de trabajo que marcó el hilo conductor de esta tesis doctoral fue formulada en el capítulo inicial y en el acápite 1.4 del mismo. Ella pretendía hacer ver que un mejor aprendizaje era posible del cálculo diferencial cuando la forma de implementar el curso en el aula se ceñía a un diseño curricular modular.

La asertividad de la mencionada hipótesis de trabajo ha quedado demostrada en las tres fases empíricas por las que transitó la investigación, a saber:

- *Para la primera cuando se reunió evidencias suficientes en la dictación del curso de cálculo diferencial e n el Campus Concepción, tanto en las carreras de Ingeniería Civil como de Ejecución. Aquí se pudo observar un notorio mayor rendimiento académico final de los estudiantes que cursaron su asignatura bajo el diseño curricular modular (dcm).*

- *La segunda fase experimental, ocurrida en el Campus Chillán, en la carrera de Ingeniería en Alimentos, también dio muestras en la misma línea de confirmar la Hipótesis de trabajo planteada.*

- *La última fase empírica, ocurrida también en el Campus Chillán y en la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, usando un grupo experimental que recibió el diseño curricular modular, para el aprendizaje del cálculo, versus un grupo control que sólo recibió una enseñanza tradicional dio muestras, en base a los resultados estadísticos exhibidos el confirmar la hipótesis planteada.*

Luego, en base a los resultados estadísticos hechos patentes en el capítulo 5 de ésta tesis, más los comentarios expresados anteriormente podemos afirmar la confirmación de la hipótesis de trabajo.

6.3. Conclusión referida al objetivo general

El objetivo general formulado se ha cumplido a cabalidad en cada una de las fases experimentales realizadas. Para ello fue necesario conformar un marco teórico que diera sustento a las fases que dependieron directamente de la investigación realizada en el Campus Chillán de la Universidad del Bío-Bío. Lo anterior se tradujo, ya en su parte final, en la implementación y ejecución de las Actividades Didácticas de Aprendizaje para el cálculo diferencial. Además ellas representan el concurso de tres aspectos centrales, como fueron, por un lado los antecedentes y estado de la cuestión en materia del aprendizaje de los conceptos de límite, derivada y del tratamiento del cálculo diferencial desde una perspectiva global, por otro lado, la indagación que se realizó a través de dos cuestionarios aplicados a docentes universitarios y, por último, el estudio y análisis a diez textos de cálculo sobre los mismos temas indagados en los cuestionarios aplicados, esto es, sobre los conceptos de límite y derivada y sus aplicaciones. Todos estos aspectos ocuparon buena parte del marco teórico para sustentar la propuesta de aplicación del diseño curricular modular que permitió cumplir con el Objetivo General de la presenta tesis al probar in situ mejores rendimientos académicos de los estudiantes sometidos al diseño curricular modular en contrates con aquellos estudiantes que no se vieron bajo esta modalidad de trabajo.

En resumen, se puede afirmar que el objetivo general propuesto se ha probado bajo los lineamientos que cada una de las fases empíricas supuso para ello.

6.4. Conclusiones sobre los objetivos específicos

A continuación se da cuenta de cada uno de los objetivos específicos propuestos, y en el mismo orden en los cuales ellos fueron enunciados.

1. El ***primer objetivo*** específico, el de reunir evidencias suficientes de la aplicación del diseño curricular modular (dcm) en la propia institución, quedó de manifiesto tanto en el diseño como en la fase experimental propiamente tal. Ello quedó ilustrado con los datos estadísticos exhibidos en la fase 1 de esta investigación. Además no sólo se mostraron aplicaciones del dcm en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo, sino que también en otras disciplinas afines a ella.

2. El ***segundo objetivo específico***, decía relación con el hecho de llevar a cabo una experiencia de campo en un solo grupo curso, ello también se cumplió al contemplar en el diseño y posterior aplicación de la segunda fase empírica de la investigación. En ella se dio cuenta de la puesta en escena del dcm para un grupo curso de la carrera de Ingeniería en Alimentos de la UBB, Campus Chillán.

3. El ***tercer objetivo específico***, significó hacerse cargo de una nueva aplicación del diseño curricular modular, y por tanto, para un nuevo curso, en esta ocasión para realizarla en la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales. Ello supuso además, preparar un instrumento de evaluación, denominado Pre-Test y Post-Test, debidamente validado para aplicar a ambos grupos, el grupo control y el grupo experimental en los cuales se dividió de forma aleatoria este nuevo curso, que para los efectos de orden de la investigación correspondió a la fase empírica tres o tercera fase. Así, este objetivó tuvo un cumplimiento total.

4. En concordancia con el objetivo anterior, el ***cuarto objetivo específico*** contempló para su realización el diseño y de las actividades didácticas de aprendizaje, para ambos Módulos (1 y 2), en cada una de las unidades didácticas definidas para la realización de la tercera fase empírica. Como testimonio de ellos dichas actividades se presentan formando parte del Apéndice General de la presente tesis.

5. El de ***quinto objetivo específico*** la presente tesis, fue la puesta en escena de la aplicación de dichas actividades didácticas como un apoyo a las clases teóricas y prácticas de la experimentación en la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales. Este objetivo se cumplió con creces, más aún, se aplicaron actividades complementarias a las previstas, que relacionaron el cálculo diferencial con el cálculo integral, como parte de las aplicaciones de la última Unidad Didáctica, denominada: Derivada y Aplicaciones. Con lo anterior el cálculo diferencial cobra inusitado interés, dado que se enlaza con la materia que sigue a ésta, el llamado cálculo integral.

6. Como es obvio, el grupo control recibió el tratamiento tradicional para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Lo anterior permitió poner evidencia que las mediciones realizadas para ambos grupos de estudio no tuviesen sesgos, dado que los profesores participantes tenían características similares en cuanto a años de servicio en la Universidad como a formación académica si se quiere, aunque esta variable es un poco difícil de controlar en la práctica.

7. Por último, el ***séptimo objetivo*** fue aplicar para ambos grupos, control y experimental el correspondiente Post-Test, de modo de cuantificar por medio del rendimiento de este instrumento la efectividad de la aplicación del diseño curricular modular en el grupo experimental. Este objetivo y sus correspondientes resultados se ha puesto en evidencia en la parte final de la tercera fase empírica y sus resultados analizados. Objetivo cumplido al igual que los seis restantes.

En resumen, la revisión de cada uno los objetivos específicos permite señalar que ellos se cumplieron completamente y las conclusiones que de ellos se derivan son las que se esperaban y confirmaron de manera fehaciente la hipótesis de trabajo planteada al inicio de la tesis.

6.5. Conclusión general y prospectiva del estudio

Las distintas fases experimentales por las cuales transcurrió la investigación han dado cuenta de la efectividad de un mejor rendimiento académico logrado por los estudiantes. Si lo anterior o se ve como dependiente de un mayor aprendizaje por parte de ellos y, en atención a los resultados estadísticos obtenidos, se puede afirmar que la propuesta de aprendizaje del cálculo diferencial se vio favorecida al usar el diseño curricular modular como base para implementar la propuesta didáctica en sí, junto a todos los elementos que fue posible considerar de manera conjunta.

Hay aún camino por recorrer para mejorar dicha propuesta y, lo que es más importante todavía es lograr un consenso dentro del cuerpo académico que tal propuesta puede rendir los frutos que de ella se espera, al ser mejorada y puesta en escena nuevamente, como lo señala la investigación acción. Si este convencimiento de los docentes no se da, difícilmente podrá mantenerse en el tiempo tal propuesta y, menos aún podrá ser mejorada, como proceso de una práctica socialmente construida e incorporada a la cultura de la institución.

Los buenos o malos resultados académicos de una propuesta se replican o se rechazan de plano. En el presente caso, todo hace suponer que nuevas materias, tanto de la Matemática como de las otras ciencias básicas pueden considerar esta propuesta como un referente de prospectiva para el ejercicio docente por venir, en ello, tal vez, radica el mayor mérito de éste trabajo, por cierto, sin dejar de considerar los alcances hechos en el párrafo anterior. Por de pronto, el cálculo integral será la tarea inmediata a asumir, la que podrá ser abordada bajo este diseño curricular modular expuesto en esta tesis.

BIBLIOGRAFÍA

Acofi (2007). *El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación.* Recuperado de: http://www.acofi.edu.co/portal/documentos/EL_INGENIERO_COLOMBIANO_DEL_2020.pdf (22 de septiembre de 2014).

Alonso, C., Gallego, D. y Honey P. (1999). *Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora.* Bilbao: Ediciones Mensajero.

Apostol, T. (1990). *Cálculo. Volumen I.* México: Editorial Reverté.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería Didáctica en educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casdevall, M.; Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.

Balbuena, L. (1996). *Innovación Educativa: un reto profesional*. En Alsina, C.; Alvarez, J; Hodgson, B.; Laborde, C. y Pérez, A. (Eds.). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática. Selección de Conferencias*. (pp.31-42). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Barba, M.; Catillo, A.; Valero, M.; Ventura, M. (2001). Propuesta para la enseñanza del cálculo desde un punto de vista variacional. *Memorias: Conferencia Internacional sobre uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Noveno Encuentro de*

Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán.

Belcredi, L.; Deferrari, M. y Zambra, M. (2001). *Introducción al análisis matemático*. Montevideo: Ediciones de la Plaza.

Bellot, F. (2003). Los diez mandamientos del Profesor. Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Número 10. Recuperado de: http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero10/numero10.pdf (8 de octubre de 2014).

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones.* Tesis de Licenciatura en Matemática. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Biggs, J. (2010). *Calidad del aprendizaje universitario*. *Cuarta Edición.* Madrid: NARCEA, S.A. de Ediciones.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 189-209.

Bouvier, A., y George, M. (2000). Diccionario de Matemáticas. Madrid: Ediciones Akal, S. A.

Boyer, C. (2010). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Bravo, A. y Cantoral R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, 24(2) 91-122. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525862005 (9 de septiembre de 2014).

Brousseau, G, (2004). Investigaciones en educación matemática. Recuperado de: http://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/brusseau-investigaciones-matemc3a1ticas.pdf (2 de octubre de 2014).

Bucari, N.; Bertero, M. F.; Trípoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo [En línea]. 1º Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado de: http://www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.254/ev.254.pdf (2 de agosto de 2013).

Camarena, P. (2011). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. Recuperado de: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/10568 (12 de agosto de 2014).

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. En R. Farfán (Ed.) *Acta latinoamericana de matemática educativa, Vol. 12, tomo 1*, 41-48.

Cantú, I., Arenas, R. y Flores, M. (2012). Impacto de pre-cálculo en cálculo. *Revista Números*, Vol. 80, 135-144.

Carbó, C., Farell, M., Fortuny, J., Galera, P., Mora, J., Pérez, R., Ruiz, J. y Segarra, L. (2002). *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Barcelona: Editorial GRAÓ.

Carpenter, T. y Hebert, J. (1996). *Learning and Teaching with Understanding. International Handbook of Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didáctica. Del saber sabio al saber enseseñado.* Argentina: Aique Grupo Editor.

Clausen May, T. (2005). *Teaching maths to pupils with different learning styles.* London: Hawker Brownlow Education.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10* (1), p. 7-38.

Cruse, A. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de Cálculo 1*. México: Fondo Educativo Interamericano.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la Matemática*. México: Editorial Reverté, S. A.

De Olivera, F. (2008). *Análisis en una variable real. Nivel terciario*. *Apuntes para estudiantes de Análisis I.* Montevideo: material no publicado.

Díaz, A. (2009). *Pensar la didáctica.* Buenos Aires: Amorrortu.

Díaz, J., Herrera S., Recio, C. y Saucedo, M. (2013). Herramienta interactiva en la comprensión del límite de una función. Flores R. (Ed.). (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Dodge, B. (1999). *Cinco reglas para escribir una fabulosa webquest*. Recuperado de: http://www.eduteka.org/Profesor10.php (7 de septiembre de 2014).

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (Coord.). México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 155-181.

Dorchs, F. (1994). Diccionario de Psicología. Barcelona: Editorial Herder.

Durán, A. (2011). *La verdad está en el límite. El cálculo infinitesimal.* Barcelona: RBA libros, S. A.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*; Vol 9.1, pp 143-168. Madrid, RSME. Recuperado de: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf (20 de marzo de 2013).

Engler, A.; Vrancken, S. y Müller, D. (2003). La derivada: actividades que favorecen su comprensión. *Revista Novedades Educativas 146*, p. 75-83.

Engler, A. , Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D. y Gregorini, M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable real. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Número 11, p. 113-132.

Engler, A. (2011). ¿Es posible innovar en la enseñanza del cálculo diferencial? trabajamos con la derivada. Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 24. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Escudero, J.M. (1981): Modelos didácticos. Barcelona: Oikos-Tau.

Fernández Huerta, J. (1973). *Acepciones y divisiones de la Didáctica. En Enciclopedia de Didáctica Aplicada.* Barcelona: Labor, 1r. Vol., pp. 20-30.

Ferrández, A., Sarramona, J. y Tarrin, L. (1978). Tecnología Didáctica. Barcelona: Ceac.

Ferrante, J. (2009). Una introducción al concepto de límite. Recuperado de http://www.edutecne.utn.edu.ar/guias_de_estudio/limites.pdf (9 de septiembre 2014).

Flores, F., Vidal, C, y Villarroel, O. (2012). *Apuntes Módulo1 y Módulo 2.* Concepción: Ediciones Universidad del Bío-Bío.

Flores, P. (2002). Aprendizaje en Matemáticas. Recuperado de: http://www.ugr.es/~pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI.pdf. (8 de mayo de 2013).

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Gallego, D. y Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de Educación.* Vol. 19 Núm. 1 (2008), pp. 95-112.

Galvan, D., Cienfuegos, D., Romero, J., Fabela, M., Rincón, E., Elizondo, I. y Rodriguez, A. (2011). *Cálculo Diferencial, un enfoque constructivista*. México: Cengage Learning.

García, J. (1992). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. *Revista Aula de Innovación Educativa*, 6.

García, J. (2014). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. Recuperado de: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm (12 de noviembre de 2014).

García, M. (2011). Derivada: una propuesta para su comprensión. *Actas XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

García, M. y Dolores, C. (2012). Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada. Flores, R. (Ed.). (2012). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Giovannini, E. (2001). *Matemática A para 6º año. Funciones reales*. Montevideo: Editorial Tradinco.

Golemann, D. (1998). *La inteligencia emocional*. Barcelona: Kairos.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Ediciones Paidós, Ibérica, S. A.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamerica de Educación.* N° 43, pp. 19-58.

Henning, A.; Hoffkamp, A. (2013). Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. Recuperado de: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG15/WG15_Henning.pdf (28 de mayo 2014).

Hitt, F. (2003). Las dificultades en el aprendizaje del Cálculo. Recuperado de http://uqam.academia.edu/FERNANDOHITT/Papers (fecha de consulta: 20 de octubre de 2013).

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematical Education.* Lyon.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus – design principles and empirical results. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43, 3, pp. 359-372.

Hughes- Hallett, D. , Gleason, A. , Lock, P. , Flath, D. et al. (2008). *Cálculo Aplicado*. México: Grupo Editorial Patria, S. A. de C. V.

Kline, M. (1994). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. (Vols. I, II y III). Trad. Martinez y otros. Madrid: Alianza Editorial.

Kuratowski, K. (1962). *Introduction to calculus.* Massachusettes: Addison Wesley Publishing Company Inc.

Lang, S. (1990). *Cálculo*. México: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Diferencial*. México: Mc Graw Hill Interamericana, S.A. de C. V.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México: Oxford University Press, S. A.

Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite. *Trabajo de Grado para Optar por el Título de Matemático*. Recuperado de: http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO_DE_LA_DERIVADA_SIN_LA%20NOCION_DEL_LIMTE.pdf (fecha de consulta: 20 de marzo de 2013).

Medina, A. y Salvador, F. (2009). (Cords.) *Didáctica General.* Madrid: Pearson Educación.

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. REIEC.* Año 5, Número 1, p. 27-41.

Morales, J, y Peña, L. (2013). Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática**.** *Actas del VII CIBEM. Montevideo.*

Moreno, M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.* En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 81-96). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Moreno, T. (2011). Didáctica de la Educación Superior: nuevos desafíos en el siglo XXI. *Revista Perspectiva Educacional*, Vol. 50, N° 2, 26-54.

Nérici, I. (1985). *Hacia una didáctica general dinámica*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz, S.A. Tercera Edición.

Nevot, A. (2001) Etilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
Recuperado de: http://estilosdeaprendizaje.es/ANevot.pdf (fecha de consulta: 22 de junio de 2013).

Nuñez, E., Cortés C. (2000). La derivada en el Bachillerato: una versión Curricular. *Memorias del VIII encuentro interinstitucional de profesores de matemáticas del nivel medio superior.* México: Morelia.

Ortega y Gasset, J. (Ed.) (2001). *Misión de la Universidad*. Buenos Aires: Raúl J. A. Palma.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación de profesores.* N° 32, pp. 87- 115.

Orton, A. (1983). Students` Understanding of Differentiation . *Educational Studies in Mathematics*. 14/3. Springer, Netherlands. p. 235-250.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática.* Madrid: Huerga y Fierro.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Proleón, P.; García, D. (2013). El aprendizaje del cálculo diferencial mediante la webquest. Flores R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Purcell, E. y Varberg, D. (2000). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Pearson.

Rey Pastor, J. (1962) *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Herederos de Julio Rey Pastor, Editores.

Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P. Trejo, C. A. (1952). *Análisis matemático*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Rincón, E., Cienfuegos, D., Galván, D. y Fabela, M. (2014). El aprendizaje activo como estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo. Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Roanes, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Anaya.

Roorda, G.; Vos, P. y Goedhart. M. (2009). Derivatives and applications; development of one student's understanding. *Proceedings of CERME 6,* Lyon, France.

Rojas, P. (2010). *El aprendizaje basado en problemas (ABP) como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la integral indefinida en paralelo con* *derivadas y su incidencia en el rendimiento académico delos estudiantes de ingeniería en informática de Inacap, Chillán*. Tesis para optar al grado académico de Magister en enseñanza de las ciencias, mención Matemática.

Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.

Salinas P.; Alanís, A,; Pulido, R. ;, Santos, F.; Escobedo, J. y Garza J. (2010). *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México: Editorial Trillas.

Schoenfled, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, sense – making in Mathematics. Handbook for research on Mathemaitcs teaching and learning.* Groups Edition.

Sierpinska , A. (1985). La notion d´obstacle épistémological dans l´enseignement des Mathématics. *Proceedings of the 37th CIEAEM´s Meeting*, Leiden, 73-93.

Steiner, E. (2005). *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Madrid: Editorial Reverté.

Steiner, H. (1987). Theory of Mathematics Education: an introduction. *For the learning of mathematics*, 5 (2), pp. 11-17.

Stenhouse, L. (2004). *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid: Ediciones Morata.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos.* México: Cengage Learning Latinoamericana. Cuarta edición.

Tall, D. (1990). Inconsistencies un the learning of calculus and analysis. In *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3 y 4, pp. 49-63.

Tall, D. (1996). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. *Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference*, Shell Centre, Nottingham, 8, p. 1-8.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist?. *Developments in Mathematics Education.* A.G. Howson (Ed.) Cambridge: Cambridge University Press. pp. 194-209.

Toeplitz, O. (1928). Las tensiones entre las tareas y los objetivos de la Matemáticas en la universidad y en la escuela secundaria. Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Vorträge auf der 90. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg, 11. Folge, Heft 10.

Toranzos, F. (1963). *Enseñanza de la Matemática.* Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

Torija, R. (2007). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* Madrid: NIBOLA libros y ediciones, S. L.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften desdeutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Vorträge auf der 90. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärztein Hamburg*, 11. Folge, Heft 10.

Vergara, C. y Miño, F. (2009). Resistencia de profesores de ciencia en los cambios de si práctica de aula y sus representaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, Número extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias.* Recuperado de: http://ensciencias.uab.es/congreso09/numeroextra/art-3514-3517.pdf (25 de junio 2013).

Villa, J.; Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102/202 (25 de septiembre de 2014).

Vrancken, S., Gregorini,M. Adriana Engler, A. Daniela Müller, D. y Hecklein, M. (2005). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf (10 de septiembre 2013).

Vrancken, S., Engler A. y Müller, D, (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/38%20Vrancken.pdf (12 de agosto de 2013).

Vrancken, S., Engler A. y Müller, D. (2012). Construcción de la derivada desde la variación. Resultados de una evaluación. *Veiga, D. (Ed.). Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática.* Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Vrancken, S., Engler A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de universidad *Bolema, Rio Claro (SP),* V. 28, n. 48, 449-468.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 68-81. London: Kluwer Academics Publishers.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5(2), 93-123.

Zill, D. y Writght, W. (2011). *Cálculo de una variable.* México: Mc Graw Hill.

*

Cuestionario n° 1: " Sobre límite de un función"

"Ciertamente, el conocimiento, es una cerradura cuya llave es la pregunta"
Ya´ far As- Sadiq (702-765).

La encuesta es una instancia generadora de ideas y proyectos que contribuyen tanto al desarrollo profesional docente como a un aprendizaje efectivo de la Matemática por parte de nuestros estudiantes.

Agradecemos a usted, estimado colega, contestar las siguientes preguntas:

Pregunta 1 *En el contexto de la enseñanza y aprendizaje del cálculo de una variable para carreras no matemáticas ¿considera importante el concepto de límite?*

Sí: _____No: ____ Justifique su respuesta.

Pregunta 2 *A su juicio, ¿qué conceptos previos considera necesarios para introducir el límite de una función en un punto?*

Pregunta 3 *¿Cómo introduce el concepto de límite? ¿Qué tipo de recursos y / o ejemplos usa?*

Pregunta 4 *¿Qué texto(s) de cálculo o apunte(s) usa como apoyo para su enseñanza-aprendizaje?*

Pregunta 5 *¿Cuáles son las dificultades que usted ha identificado, sobre la enseñanza del límite? Explicítelas.*

Pregunta 6 *Algún comentario que desee hacernos, sobre la enseñanza del cálculo de una variable, no sólo sobre el concepto de límite, será bien recibido, muchas gracias.*

Cuestionario n° 2: "Sobre derivada y sus aplicaciones"

"Ciertamente, el conocimiento, es una cerradura cuya llave es la pregunta"
Ya´ far As- Sadiq (702-765).

***La indagación** es una instancia generadora de ideas y proyectos que contribuyen tanto al desarrollo profesional docente como a un aprendizaje efectivo de la Matemática por parte de nuestros estudiantes.*

Agradecemos a usted, estimado colega, contestar las siguientes preguntas:

Pregunta 1 *¿Qué conceptos previos considera necesarios para enseñar la derivada en el contexto de un curso de cálculo?*

Pregunta 2 *¿Cómo introduce el concepto de derivada, y qué definición da?*

Pregunta 3 *¿Qué recursos didácticos (apuntes, uso de plataforma, software, otros,…) utiliza para apoyar el proceso de enseñanza- aprendizaje y, que den muestra de su efectividad?*

Pregunta 4 *Respecto de las aplicaciones de la derivada, ¿cuáles considera más importantes de abordar en orden de preferencia?*

Pregunta 5 *¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes, que usted ha detectado, en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones?*

Pregunta 6 *¿Qué textos de cálculo usa preferentemente como apoyo a su labor docente? Marque su respuesta con una X.*

Larson:.... Stewart:… Leithold:..... Ayres:… Thomas:… Lang:… Apostol:…. Spiegel:…. Edwards y Penney:… Ellis y Gulick::…… Zill: …… Juan de Burgos: ..... Otro texto:……

Pregunta 7 *Algún comentario que desee expresarnos respecto de la enseñanza del cálculo diferencial será bien recibido. Muchas gracias por vuestro tiempo.*

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
La Libertad del Conocimiento

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO
VICERRECTORIA ACADEMICA – DIRECCION DE DOCENCIA

ASIGNATURA : CALCULO I
CODIGO : 240023

I. IDENTIFICACION

1.1 CAMPUS : CHILLAN

1.2 FACULTAD : CIENCIAS

1.3 UNIDAD (DEPTO) : CIENCIAS BASICAS

1.4 CARRERA : INGENIERIA EN ALIMENTOS

1.5 Nº Créditos: 06

1.6 TOTAL DE HORAS: 07 HT: 05 HP: 02 HL:

1.7 PREREQUISITOS DE LA ASIGNATURA (Señale Nombre y código de la asignatura/s):
1.7.1 NO TIENE

II. DESCRIPCION

Asignatura de nivel básico, que permite familiarizar al alumno con los conceptos matemáticos del Cálculo, como de la operatoria que ello involucre.

III. OBJETIVOS

a) Generales

- Formación de un lenguaje básico, necesario para el tratamiento de futuras materias, estimulando el razonamiento deductivo y la capacidad de abstracción.

b) Específicos

- Aplicar el cálculo diferencial a problemas concretos de Economía y a la optimización de funciones de variable real.
- Conocer y comprender los conceptos básicos del cálculo diferencial de funciones de variable real.
- Aplicar el cálculo diferencial a problemas concretos de Economía y a la optimización de funciones de variable real.
- Desarrollar una capacidad de análisis y planteamiento de problemas que se puedan resolver con las herramientas que posee el cálculo diferencial.

IV. UNIDADES PROGRAMATICAS

UNIDADES	HORAS
Unidad 1: Números reales y propiedades	04
Unidad 2: Sistema de coordenadas y elementos de geometría analítica	04
Unidad 3: Funciones reales	04
Unidad 4: Límite y continuidad	12
Unidad 5: La derivada y sus aplicaciones	24

V. CONTENIDO UNIDADES PROGRAMÁTICAS

UNIDADES	CONTENIDO
Unidad 1: Números reales y propiedades	- El cuerpo de los números reales. - Inecuaciones. Valor absoluto e inecuaciones con valor absoluto.
Unidad 2: Sistema de coordenadas y elementos de geometría analítica	- Sistema de coordenadas. Noción de distancia en IR^2. - Ecuación de la recta en sus diferentes formas. - Secciones cónicas.
Unidad 3: Funciones reales	- Función, dominio, codominio, recorrido y gráfico. - Funciones: lineal, cuadrática, polinomial, racional, exponencial, logarítmica y trigonométricas. - Biyectividad. Composición e inversa de funciones. Algebra de funciones.
Unidad 4: Límite y continuidad	- Idea intuitiva de límite y definición formal. - Algebra de límites. - Límites: laterales, infinitos y al infinito. Asíntotas. - Continuidad de funciones y tipos de discontinuidad. - Teorema del valor intermedio. Aplicaciones.
Unidad 5: La derivada y sus aplicaciones	- Definición de derivada en un punto y función derivada. - Teoremas sobre derivación. - Rectas tangentes. Interpretación de la derivada como razón de cambio. - Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Derivación implícita. - Derivada de funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas inversas. - Variaciones relacionadas. - Valores máximos y mínimos. Teoremas: valores extremos, Rolle y valor medio. - Criterios de la primera y segunda derivada. Aplicaciones de los valores extremos. - Concavidad y puntos de inflexión. - Aplicaciones: gráficos, regla de L'Hôpital.

VI. METODOLOGÍA

Los contenidos de la asignatura se entregarán mediante clases teóricas (expositivas) y reforzados con clases prácticas de ejercicios. Los distintos tópicos serán ilustrados con ejemplos de aplicación. Habrá un horario de atención de consultas, de acuerdo a la disponibilidad profesor-alumno. Se aplicarán tests en las horas teóricas y/o prácticas. Por cada ítem de materia se entregará una guía de problemas, para la ejercitación del alumno, lo que constituirá una base para las pruebas.

VII.TIPOS DE EVALUACIÓN (PROCESO Y PRODUCTO)

Consiste en tres pruebas parciales (certámenes: C1, C2, C3), más tests y/o tareas. Se considerará el 80% de los test (mejores notas) y se promediarán con los trabajos, dando como resultado una nota fina de los Test.

La ponderación de los certámenes será de 20 % para C1, 25% para C2 y 35% para C3, la nota final del promedio de Test será de 20% de la nota final.

La inasistencia a algún certamen deberá ser debidamente justificada a través del Jefe de Carrera, de lo contrario se calificarán con UN punto. Dicha prueba se aplicará en periodo de recuperación de certámenes y tendrá carácter acumulativo.

VIII. BIBLIOGRAFIA: La bibliografía debe formularse de acuerdo a las normas estipuladas por la Biblioteca de nuestra Universidad. Para ello ir a la página de la UBB, pinchar donde dice ***"red de bibliotecas",*** luego pinchar "***Web Biblioteca Werken UBB",*** se abrirá la página y al costado izquierdo en Temas de Interés podrá encontrar la GUÍA DE REDACCIÓN REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS, en la cual aparece claramente estipulada la forma de presentar la bibliografía. Es importante destacar que debe estar claramente diferenciada a la bibliografía básica de la complementaria.

- **Básica**

1. Apostol, Tom M. "Calculus". Barcelona: Reverté. (515.15 Ap46).
2. Granville, William A. "Cálculo diferencial e integral". México: Limusa. (515.33 G767C).
3. Hoffmann, L.D."Cálculo para administración, economía/" Bogotá: McGraw-Hill. (515 H675C).
4. Kreyszig, Erwin "Matemáticas avanzadas para ingeniería". México: Limusa (515.35 K889)
5. Larson, Roland E. "Cálculo y geometría analítica". Madrid: McGraw-Hill, 1999. (515.15 L329).
6. Leithold, Louis. "El cálculo". México: Oxford University Press, 1998. (515.15 L536).
7. Stein, Sherman K. "Cálculo y geometría analítica". Bogotá: McGraw-Hill, c1995.(515.15 St34).

- **Complementaria**

1. Lang, Serge "Cálculo". Argentina: Addison-Wesley Iberoamericana, c1990 (515 L256C).
2. Spivak, Michael "Cálculo infinitesimal". Barcelona: Reverté (515 Sp49C).

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
VICERRECTORÍA ACADÉMICA – DIRECCION DE DOCENCIA

PROGRAMA DE ASIGNATURA

I. IDENTIFICACIÓN

Nombre asignatura: Cálculo 1 (Matemática I)
Código:
Tipo de Curso: Obligatorio Ciencias-Básicas

Carrera: Pedagogía en Ciencias Naturales	**Departamento**: Ciencias Básicas	**Facultad**: Ciencias
Nº Créditos SCT: 5	**Total de horas:** cronológicas 150 Pedagógicas 225	**Año/ semestre** 2do año/ 2do semestre

Horas presenciales: 90 **HT:** 3 **HP:** 2 **HL**:	**Horas trabajo autónomo: 135** **HT: 2** **HP: 6** **HL:**
Prerrequisitos: Asignatura: Introducción a la Matemática Código:	**Correquisitos:** Asignatura: Código:

II. DESCRIPCIÓN

II.1. **Presentación: Relación de la Asignatura con las Competencias del Perfil de Egreso**

Es una asignatura de segundo año-segundo semestre. Está destinada a entregar las nociones del cálculo diferencial de una variable.

La asignatura contribuye a la competencias específicas tales como.

- Comprender los fenómenos naturales que se rigen por ecuaciones de una variable.

Así mismo, contribuye al desarrollo de las competencias de perfil genérico de la UBB.

- Manifestar una actitud permanente de búsqueda y actualización de sus aprendizajes, incorporando los cambios sociales, científicos y tecnológicos en el ejercicio de su profesión.
- Asumir un rol activo como ciudadano y profesional, comprometiéndose de manera responsable con su medio social, natural y cultural.
- Establecer relaciones dialogantes para el intercambio de aportes constructivos con otras disciplinas y actuar éticamente en su profesión, trabajando de manera asociativa en la consecución de objetivos.

II.2. **Descriptor de competencias** (metas de la asignatura)

Resolver problemas contextualizados relativos a relaciones y funciones, límite, continuidad y diferenciabilidad de funciones reales de una variable.

II.3. **Aprendizajes Previos**

Identifica conceptos básicos de aritmética y algebra tales como operatoria en los distintos conjuntos numéricos, proporcionalidad directa e inversa, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, proposiciones y conjuntos. Como del uso de potencias y raíces.

III. RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Resultados de Aprendizaje	**Criterios de Evaluación**	**Contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.**
1. Grafica las funciones reales interpretando modelos de teorías económicas y contables.	1.1 Identifica los distintos tipos de funciones. 1.2 Grafica funciones en el plano cartesiano. 1.3 Relaciona los distintos tipos de funciones con problemas económicos.	**Conceptuales** • Sistema cartesiano. • Relaciones y Funciones. • Dominio, recorrido y gráfica. • Tipos de funciones: Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva • Función compuesta e inversa. • Funciones Polinómicas, Racionales, Exponencial y Logarítmica. **Procedimentales** • Identificación Dominio y recorrido. • Distinción de tipos de funciones. • Elaboración de gráficas de funciones reales. • Análisis de gráficas. • Aplicación de funciones reales en la resolución de problemas verbales. • Planteamiento de funciones en contexto económico. **Actitudinales** • Orientación al trabajo colaborativo. • Rigurosidad en el manejo del lenguaje matemático verbal y escrito.
2. Aplica los conceptos de límite en modelos o fórmulas en	2.1 Reconoce el concepto de límite de funciones.	**Conceptuales** • Definición de límite de

general.	2.2 Calcula límites de funciones. 2.3 Identifica continuidad de funciones. 2.4 Aplica límites de funciones que modelan diversos comportamientos.	funciones reales. • Algebra de límites. • Continuidad de funciones. • Asíntotas. • Modelos económicos. **Procedimentales** • Verificación de límites de funciones reales. • Resolución de límites de funciones reales. • Reconocimiento de los distintos tipos de discontinuidad. • Representación de asíntotas. • Aplicación de límites a modelos económicos. **Actitudinales** • Orientación al trabajo colaborativo. • Rigurosidad en el manejo del lenguaje matemático verbal y escrito.
3. Aplica las propiedades fundamentales de las reglas de derivación de funciones reales para la resolución de problemas de diversos contextos.	3.1 Reconoce el concepto de derivada de funciones reales. 3.2 Calcula derivadas de funciones reales. 3.3 Aplica derivadas de funciones reales a problemas que modelan comportamiento económico.	**Conceptuales** • Definición de derivadas de funciones reales. • Reglas de derivación. • Máximos y mínimos. • Trazado de curvas. • Modelos económicos. **Procedimentales** • Interpretación del concepto de derivadas de funciones reales. • Ejercitación de derivadas de funciones reales. • Aplicación de la derivada a diversos contextos, sean estos biológicos, físicos y/o químicos. **Actitudinales** • Orientación al trabajo colaborativo. • Rigurosidad en el manejo del lenguaje matemático verbal y escrito.

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
La Libertad del Conocimiento

IV. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN

Resultados de Aprendizaje	Actividades de Aprendizaje (*Nombrar las actividades que el estudiante va a realizar*)	Actividades de Evaluación	Tiempo Estimado
1. Grafica las funciones reales la cuales interpretan a diferentes modelos.	**1.1 El Profesor:** • Expone los contenidos de funciones reales con apoyo de tics. • Elabora guías de ejercicios y apuntes. • Formula ejercicios con actividades individuales y grupales. • Contextualiza los contenidos. **1.2 Los Estudiantes:** • Analiza los contenidos entregados en cada clase. • Resuelve guías de ejercicios en actividades colaborativas. • Interpreta problemas de diversos ámbitos.	• Elaboración de informes individuales y grupales. • Test parciales. • Certamen escrito.	**Horas Presenciales** HT:10 HP:10 HL: **Horas de Trabajo Autónomo** HT:15 HP:15 HL:
2. Aplica los conceptos de límite en modelos o fórmulas en sentido amplio.	**2.1 El Profesor:** • Expone los contenidos de límites de funciones reales con apoyo de tics. • Elabora guías de ejercicios y apuntes. • Formula ejercicios con actividades individuales y grupales. • Contextualiza los contenidos. **2.2 Los Estudiantes:** • Analiza los contenidos entregados en cada clase. • Resuelve guías de ejercicios en actividades colaborativas. • Interpreta problemas del ámbito contable y financiero.	• Elaboración de informes, los cuales se incluirán en el portafolio de evidencias. • Test parciales. • Certamen escrito.	**Horas Presenciales** HT:10 HP:10 HL: **Horas de Trabajo Autónomo** HT:15 HP:15 HL:

3. Aplica las reglas de derivación de funciones reales para la resolución de problemas de diversos contextos.	**3.1 El Profesor:** • Expone los contenidos de límites de funciones reales con apoyo de tics. • Elabora guías de ejercicios y apuntes. • Formula ejercicios con actividades individuales y grupales. • Contextualiza los contenidos. **3.2 Los Estudiantes:** • Analiza los contenidos entregados en cada clase. • Resuelve guías de ejercicios en actividades colaborativas. • Interpreta problemas de diversos ámbitos.	• Elaboración de informes individuales y grupales. • Test parciales. • Certamen escrito.	**Horas Presenciales** HT:16 HP:16 HL: **Horas de Trabajo Autónomo** HT:24 HP:24 HL:

V. **SISTEMA DE EVALUACIÓN**

- Certamen 1: 20%
- Certamen 2: 25%
- Certamen 3: 35%
- Promedio de Test y Trabajos: 20%

VI. **BIBLIOGRAFÍA**

Fundamental:

- Lang, S. (1990). *Cálculo*. México: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Diferencial*. México: Mc Graw Hill Interamericana, S.A. de C. V.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos.* Cálculo. México: G Cengage Learning Latinoamericana. Cuarta edición.

Complementaria:

- Purcell, E. y Var Purcell, E. y Varberg, D. (2000). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Pearson.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Módulos 1 y 2

Actividades Didácticas de Aprendizaje
(ADA)

Preparado por: Profesor Elías Irazoqui Becerra.

Algunas consideraciones previas importantes:

1 Las actividades didácticas de aprendizaje (ADA) han sido pensadas para que su desarrollo se realice en forma individual o grupal, dentro o fuera del aula y con la participación del profesor titular o el profesor ayudante en sus respectivas horas de clase.

2 Debeis realizarla y reflexionar sobre vuestro hacer, ello os ayudará en el aprendizaje, fin último de ellas.

3 Debeis esforzaos en captar la esencia de los conceptos tratados, aprender cálculo diferencial es más que aprender meras rutinas o algoritmos que os llevan a la solución de los problemas planteados.

Chillán, diciembre, 2014.

Índice Módulo 1

Índice Módulo 2

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1

Funciones

Objetivos:

- Definir el concepto de función y sus conceptos asociados como son: dominio y recorrido.
- Examinar las distintas representaciones que posee el concepto (verbal, algebraica, numérica y gráfica) con la ayuda del software Winplot u otro.
- Estudiar la función lineal: $y = ax + b$ en sus distintas representaciones.

P1 En sentido amplio, "una función es una regla que asocia un elemento a otro elemento". Así, a cada valor de x en un cierto conjunto A, le asociamos un valor $f(x)$ en otro conjunto que podemos llamar B.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \longmapsto & f(x) \in B \end{array}$$

El dominio, o conjunto de partida, es el conjunto de valores para los cuales es posible definir la función. Por su parte, el rango o recorrido, será el conjunto de llegada, esto es, el conjunto de valores que toma la función para sus correspondientes valores de x de su dominio.

La representación de un concepto en Matemática resulta importante para su eventual comprensión, y más aún, si dicho concepto admite diversos registros como representación.

El caso que nos ocupa (función), admite diversas representaciones, como quedan de manifiesto a continuación:

Ejemplo ilustrativo. Suponga que se define la función: "A cada x asocie su cuadrado, esto es, x^2". Admitimos además que su dominio, conjunto de partida, son los números reales ($\mathbb{R}$). Luego, las distintas representaciones que se pueden asociar con esta función serían:

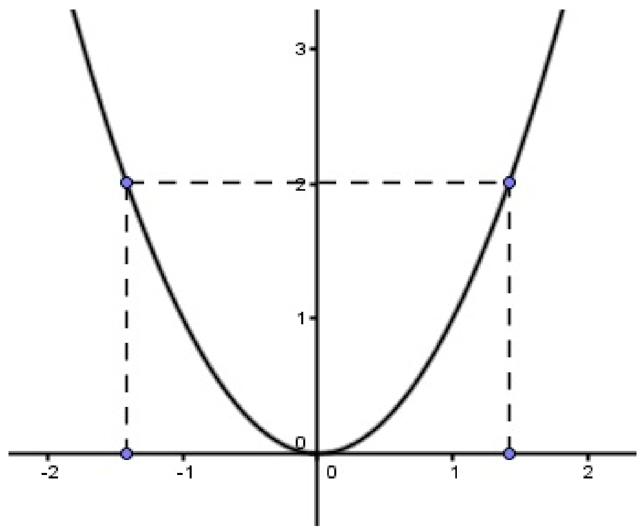
1) **Representación algebraica.**

$$y = x^2 \quad \text{ó} \quad f(x) = x^2$$

2) **Representación tabular.** Que corresponde a su tabla de valores como:

x	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$(0)^2 = 0$	$(1)^2 = 1$	$(2)^2 = 4$	$(3)^2 = 9$	...

3) **Representación gráfica.** Que corresponde a su gráfico en el plano bidimensional, esto es, $\mathbb{R}^2$. En este caso se tiene:



En general, el gráfico de una función corresponde a la representación en el plano del conjunto: $\{(x, f(x)) : x \in \textit{Dominio } (f)\}$

Observación: Estas tres representaciones para una función serán posibles de visualizar para cada una de las funciones que se estudien cuando se use como recurso informático el software Winplot o Geogebra.

P2 Una de las funciones más sencillas de estudiar corresponde a la función lineal, $y = ax + b$, con "a" y "b" números reales.

Hay dos casos particulares de esta función que conviene tener presente, a saber:

1) **La función constante**, que corresponde al valor de a igual a cero, esto es, $a = 0$, con lo que $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) es una función constante.

   Grafique y examine su tabla de valores para el caso $b = 2$, esto es, $y = 2$. Use Winplot, de su dominio y recorrido.

2) **La función identidad**, que se obtiene a partir de $y = ax + b$ con $a = 1$ y $b = 0$. Entonces $y = x$ es la función identidad o idéntica.

   Examine su gráfico y tabla de valores usando Winplot o Geogebra.

Observación: Si ahora "a" y "b" son números distintos de cero, entonces $y = ax + b$ es una función lineal y su gráfico es una linea recta en el plano $\mathbb{R}^2$.

P3 Representa gráficamente, usando Winplot, cada una de las funciones lineales. Observe cómo influye el valor de "a", su inclinación, para los distintos valores de ella.

1) $y = \frac{1}{2}x$
2) $y = 2x$
3) $y = 3x$
4) $y = 5x$
5) $y = -\frac{1}{2}x$
6) $y = -2x$
7) $y = -3x$
8) $y = -5x$

Sume un valor "b", por ejemplo $b = 2$ a cada función ¿Qué observa?. Si ahora $b = -2$ ¿Qué le pasa a cada una de las funciones?

P4 Represente gráficamente la función lineal $y = x + 1$.

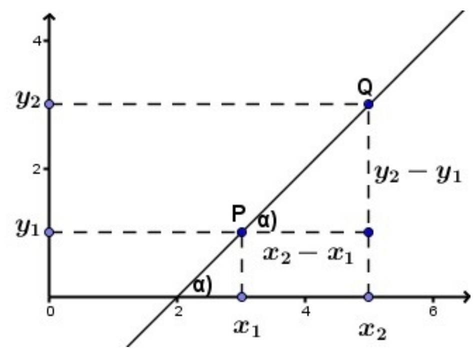
¿Cómo obtiene una recta paralela a ella? ¿y una recta perpendicular?

Para $y = -x + 1$, realice el mismo trabajo. Anote sus conclusiones.

P5 En el plano una recta queda determinada por dos puntos por donde ella pasa. Dichos puntos nos permiten determinar su pendiente. Así, si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ son dos puntos de una recta entonces su pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ \textit{con} \ x_1 \neq x_2$$

***La pendiente no se define para rectas verticales ¿Por qué?**



Conocida la pendiente, esta es, la inclinación de una recta y un punto por donde ella pasa, es posible determinar la recta que ella define. Luego, si $P = (x_1, y_1)$ es uno de los puntos por donde pasa y "m" es su pendiente, entonces la ecuación de dicha recta es:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \ \text{(Notar que } m = \tan(\alpha))$$

conocida como ecuación punto-pendiente de una recta.

De la ecuación que pasa por $P = (-1, 0)$ y $Q = (0, 1)$.

P6 Represente gráficamente cada una de las funciones lineales, usando Winplot.

1) $f(x) = ax + b$, con $a > 0$ y $b > 0$
2) $f(x) = ax + b$, con $a > 0$ y $b < 0$
3) $f(x) = ax + b$, con $a = 0$ y $b > 0$; $a = 0$ y $b < 0$
4) $f(x) = ax + b$, con $a < 0$ y $b > 0$; $a < 0$ y $b < 0$

Observe las características comunes que tienen estas funciones según los valores de "a" y "b".

P7 Use Winplot para representar gráficamente una recta vertical, esto es, paralela al eje Y. ¿Es ella una función? Justifique su respuesta. ¿Puede mostrar su tabla de valores por medio de este software?

P8 ¿Qué relación existe entre las pendientes de rectas paralelas?

¿Qué relación existe entre las pendientes de dos rectas perpendiculares?

Ponga ejemplos que ilustren las dos interrogantes anteriores, use Winplot para ilustrar sus respuestas.

P9 ¿Cuál es el dominio y recorrido de una función lineal? ¿Puede distinguir algunos casos?

P10 A modo de resumen, las siguientes ecuaciones representan lineas rectas en el plano.

1) $Ax + By + C = 0$, A y $B \neq 0$
2) $x = a$, recta vertical
3) $y = b$, recta horizontal
4) $y - y_1 = m(x - x_1)$, forma punto-pendiente
5) $y = mx + b$, forma pendiente-intersección

Ponga un ejemplo en cada caso, con su correspondiente gráfico.

Actividad Didáctica de Aprendizaje N$^{\underline{o}}$2

Funciones

Objetivos:

- Repasar la función lineal.
- Examinar diversas funciones, en las cuales se estudia su dominio, rango, gráfico y su comportamiento en el cociente de Newton.
- Examen de ciertas funciones cuando x es grande positivo y cuando x es grande negativo.
- Estudio de funciones definidas por tramos. Uso de Winplot para su representación gráfica.

P1 En la actividad anterior se ha examinado el modelo lineal $y = ax + b$, con a y b números reales. Ponga ejemplos de la vida real donde se aplique este modelo de función.

Indicación: Use las cuentas de pago de luz y agua, por ejemplo.

P2 Para la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 2x + 1$, evalúe:

1) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
2) ¿Qué sucede con la expresión anterior si h está próximo a cero, o dicho de otro modo, es muy pequeño?
3) Recorra los puntos (1) y (2) anteriores para $a = 1$ y $a = -1$
4) Grafique las situaciones anteriores.

P3 Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ determine:

1) Dominio, rango y gráfico.
2) Estime: $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ¿Qué sucede si h está próximo a cero?
3) Estudie el comportamiento de $f(x)$ si x es grande positivo y si x es grande negativo, concluya.

P4 Para las siguientes funciones determine su dominio, rango y gráfico. Para su representación gráfica use Winplot.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$

Observe regularidades de su representación gráfica. ¿Qué sucede con estas funciones si x es grande positivo?

P5 Una caja rectangular sin su parte superior posee un volumen de 100 cm^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. Si el costo del material de la base es de 120 pesos y el de los lados es de 50 pesos, exprese el costo total de la fabricación de esta caja como función del ancho de su base.

P6 La gráfica de una función en el plano es una curva, pero no todas las curvas son gráficas de funciones. El software Winplot distingue claramente cuando dos expresiones algebraicas en sus variables x e y corresponde o no a una función.

Represente gráficamente las expresiones:

1) $y = x^2 - 2$
2) $x = y^2 - 2$
3) $x^2 + y^2 = 25$

Indicación. Use:

Ventana, 2-dim(F2).

Ecua-1. Explícita para el caso (1).

Ecua-3. Implícita para los casos (2) y (3).

¿Cuál de las expresiones dadas corresponde a una función?. Justifique.

Examine la tabla de valores para los casos (2) y (3). ¿Qué sucede?

P7 Funciones definidas por tramos (o por partes). Son aquellas que toman distintos valores a un lado y al otro de un punto x_0. A modo de ejemplo considere:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{, si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{, si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En este caso el punto x_0 es 1. Grafique esta función usando Winplot.

Indicación. Use:

Ecua-1. Explícita y el comando $joinx(2-x|1, x^2)$.

¿Cuál es el valor de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$?

P8 Use dos formas en Winplot para representar la función valor absoluto ($y = |x|$).

P9 Represente gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ 2 - x & , \text{si} \quad x \in (1, 2] \\ \\ 0 & , \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Use para ello Winplot, de su dominio y rango.

P10
1) De un ejemplo de una función definida por tramos (partes) cuyo dominio sea [0,5] y su rango sea [1,3].
2) De un ejemplo de la vida diaria donde una función definida por tramos representa dicha situación

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3

Funciones

Objetivos:

- Estudiar la simetría de las funciones.
- Definir función creciente y decreciente.
- Evaluar el cociente de Newton para las funciones.
- Expresar en términos de funciones algunas situaciones dadas.

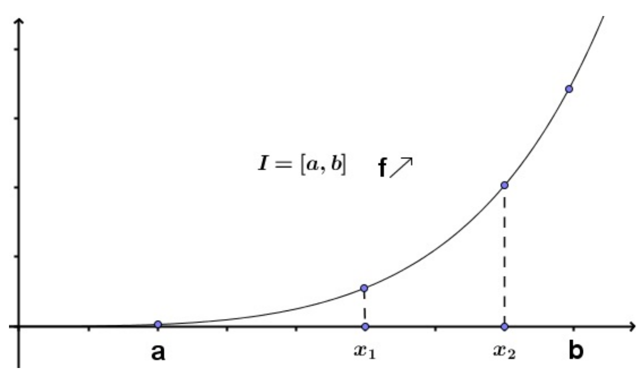
P1 La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto al eje Y si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in X$, tal función se denomina par. Ejemplo, la función $y = x^2$ es par.

Si ahora se cumple que para todo $x \in X$, $f(x) = -f(-x)$ decimos que f es impar, ejemplo de ello es $y = x^3$. En este último caso, la función es simétrica respecto al origen.

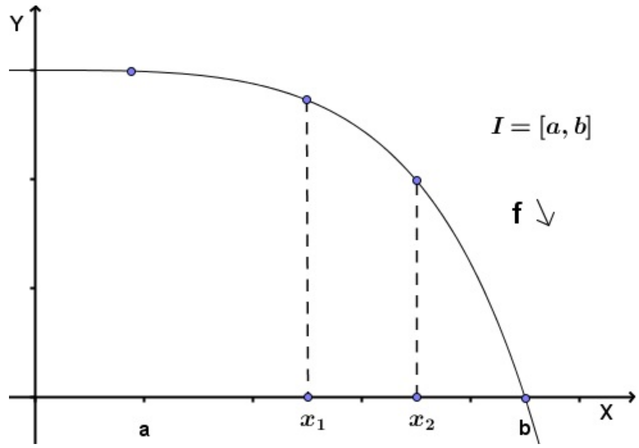
Grafique tanto $y = x^2$ como $y = x^3$ para verificar que una de ellas es par y la otra impar.

Examine también las funciones $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $f(x) = x^3+1$, $f(x) = x^5+x$, $f(x) = 1+x^4$ y $f(x) = 2x - x^2$.

P2 Una función f se dice creciente en un intervalo I si siempre que $x_1 < x_2$ en I, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Gráficamente:



Por otro lado, f se dirá decreciente en I si siempre que $x_1 < x_2$ en $I \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



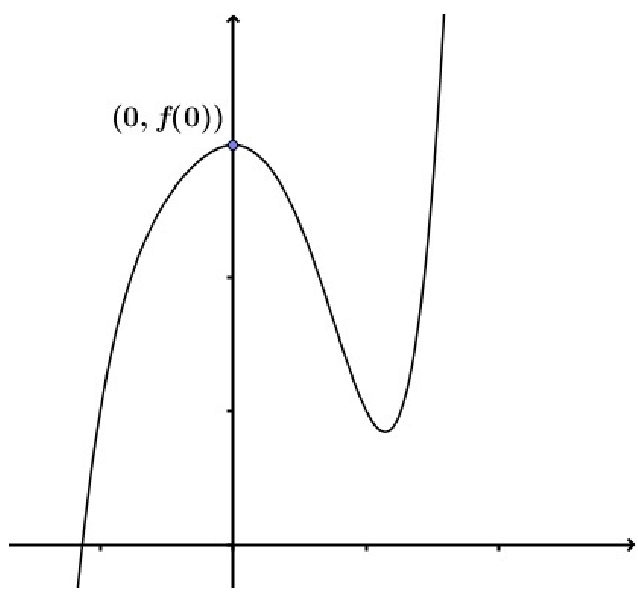
a) De ejemplos de funciones lineales crecientes y decrecientes. ¿Qué relación tienen con la pendiente?

b) Estudie la función cuadrática $y = x(x-4)$, ¿dónde ella es creciente? ¿dónde es decreciente?

c) ¿Qué otra situación gráfica ilustra funciones crecientes y funciones decrecientes?

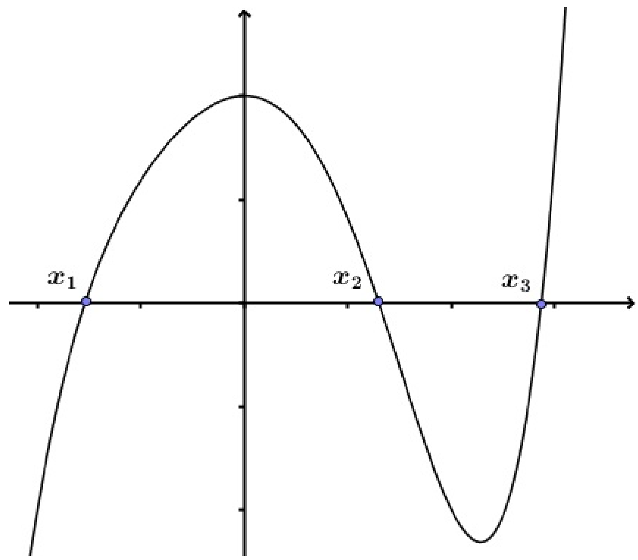
P3 Al estudiar una función, son de interés las intersecciones que ésta tiene con los ejes. Así, si 0 es un elemento del dominio de f, $P = (0, f(0))$ es el punto de intersección con el eje Y.

Gráficamente:



Las intersecciones con el eje X, si las hubiera, se obtienen resolviendo la ecuación: $f(x) = 0$.

Gráficamente:



$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$
Luego en $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ hay intersecciones con el eje X.

Estudie las intersecciones con el eje X y el eje Y, si las hubiera, para las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

e) $f(x) = -2x + 1$

P4 Una función f puede estar definida por dos o más expresiones, en tal caso se dice que f se define por partes, a modo de ejemplo:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si} \quad x < 1 \\ x + 1 & \text{, si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{, si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{, si} \quad x = 0 \\ x + 1 & \text{, si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Grafique estas funciones y observe que sucede con sus gráficas en puntos de cambio como $x = 1$ en (a) y en $x = 0$ en (b).

P5 Para las siguientes funciones evalúe, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, luego de esto trate de responder ¿Que sucede con esta expresión si h está próximo a cero?

1) $f(x) = x$
2) $f(x) = 2$
3) $f(x) = x^2$
4) $f(x) = x^3$
5) $f(x) = x^4$
6) $f(x) = \sqrt{x}$
7) $f(x) = \sqrt{x}$
8) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

P6 A modo de repaso, estime el dominio para las funciones:

1) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x-4}$
3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

P7 Una función que se define para los números naturales $(1, 2, 3, ..., n)$ se denomina sucesión. Para la sucesión $f(n) = n!$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...n$. Se pide estimar:

1) $f(2)$, $f(3)$ y $f(5)$
2) ¿Es $f(n+1) = (n+1)f(n)$?
3) Simplifique: $\dfrac{f(5)}{f(4)}$, $\dfrac{f(7)}{f(5)}$ y $\dfrac{f(n+3)}{f(n)}$

P8 Suponga que $S(n)$ representa la suma de los n primeros enteros positivos al cuadrado, esto es, $S(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ se sabe que $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1) Determine el valor de la suma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$
2) ¿Es posible determinar n tal que $S(n)$ esté entre 300 y 400?

P9 Para las siguientes funciones determine su dominio, rango y gráfico.

1) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2) $g(x) = x+2$
3)
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \text{si} \quad x \neq 2 \\ 4 & , \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$
4)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \text{si} \quad x \neq 2 \\ 6 & , \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

* Observe las diferencias que se producen entre ellas.

P10 La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina "Modelo matemático", el puede ser tan complicado como varias ecuaciones simultáneas o tan simple como una sola ecuación.

Un ejemplo sencillo de lo que decimos es el cobro del servicio postal, el que depende del peso (gramos) del sobre que se envíe por este servicio. A modo de ejemplo suponga que se tiene lo siguiente:

$$c(p) = \begin{cases} \$500 & \text{, si} \quad 0 < p < 100 \\ \\ \$1.500 & \text{, si} \quad 100 \leq p < 200 \\ \\ \$2.000 & \text{, si} \quad 200 \leq p \leq 300 \end{cases}$$

donde p se mide en gramos.

En este mismo sentido, del uso de modelos que describen una situación se puede exponer:

-Expresar el área de un rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados (x *o* y) sabiendo que su perímetro es P.

La solución de la situación anterior discurre como sigue:

Si $P = 2x+2y$ es su perímetro, siendo x e y las longitudes del rectángulo, al despejar y se tiene que:

$$2y = P - 2x => y = \frac{P-2x}{2} = \frac{P}{2} - x$$

Como el área es: xy

$$=> A = x \cdot y = x(\frac{P}{2} - x)$$

$$=> A(x) = x(\frac{P}{2} - x)$$

Con lo que el área se ha expresado como función de uno de sus lados, en este caso x. Exprese ahora el área en función de y.

P11 Teniendo como base el problema anterior (P10), se pide:

1) Si un rectángulo tiene un área de $25m^2$, expresar el perímetro del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

2) Expresar el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud de un lado.

3) Exprese el área supeficial de un cubo como función de su volumen.

4) Una caja rectangular abierta con volumen $2m^3$ tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de un lado de la base.

   Indicación: Haga un dibujo de la situación. Sol. $A(x) = x^2 + \frac{8}{x}$, con x lado de la base de la caja.

P12 Una compañía eléctrica cobra a sus usuarios por mes la siguiente tarifa:

1) Tarifa base de $ 1000, como costo fijo.
2) Más $ 600 por KWh por los primeros 1200 KWh de consumo.
3) Si se excede de este consumo el valor del KWh es de $ 800.

Exprese el costo mensual $C(x)$ en función de la cantidad de x de KWh consumida. Grafique dicha función.

P13 Suponga que el impuesto sobre la renta se evalúa como sigue:

1) No hay impuestos por rentas menores a $ 1.000.000.
2) Para ingresos superiores al millón de pesos se grava con una tasa de 10%, hasta un ingreso de $1.500.000.
3) Para cualquier ingreso de más de un millón y medio, se grava en un 15%.

* Trace la gráfica que describe la situación anterior. De su dominio y recorrido.

P14
a) Suponga que tanto f como g son funciones pares ¿qué puede afirmar de $f+g$? justifique su respuesta.
b) Si ahora f y g son impares ¿Cómo es fg?. Justifique su respuesta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4

Funciones

Objetivos:

- Combinar funciones mediante operaciones aritméticas y a través de la composición de funciones.
- Examinar la transformación de funciones por diferentes traslaciones de una función.

P1 Suponga que tanto f como g son dos funciones definidas en $I \subseteq \mathbb{R}$ con valores reales, esto es:

$$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En estas condiciones tiene sentido definir $f+g$ y $f \cdot g$ como nuevas funciones definidas para todo $x \in I$ como:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = h(x),\ p(x) = (fg)(x) = f(x)g(x);$$

Ejemplo: Si $f(x) = 4x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= 4x + 5 + x^2 - 2x = x^2 + 2x + 5 = \\ &= h(x) \blacksquare \end{aligned}$$

También se puede definir:

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (4x+5)(x^2 - 2x) = \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 5x^2 - 10x \\ &= 4x^3 - x^2 - 10x = h(x) \blacksquare \end{aligned}$$

Determine la adición y multiplicación de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x - 2$

(b) $f(x) = \sqrt{4 - x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{3 + x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

Poner atención al dominio de estas nuevas funciones.

P2 También tiene sentido definir el cuociente de funciones, a condición de que el denominador sea distinto de cero.

Determine $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para las funciones definidas en **P1**.

P3 Suponga que $g : I \longrightarrow A$ y $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces se puede definir la función compuesta, denotada por $F = h \circ g$, la cual se define como:

$$F(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))$$

El dominio de esta nueva función será

$$Dom(h \circ g) = \{x : x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(h)\}.$$

Para las funciones: $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^2 + 1$. Determine tanto $g \circ h$ como $h \circ g$ y sus respectivos dominios.
¿Es $g \circ h = h \circ g$?

P4 Ponga ejemplos de funciones: f, g y h de modo de comprobar las propiedades:

(a) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
(b) $f \circ g \neq g \circ f$
(c) $f \circ i = i \circ f = f$, donde $i(x) = x, \forall x$.

P5 A partir de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x-1},\ g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ y } h(x) = \frac{1}{x}$$

Determine:

(a) $f \circ g \quad , \quad g \circ f$
(b) $f \circ f \circ f$
(c) $f \circ h \quad , \quad h \circ f$
(d) $g \circ g$

P6 Tipos especiales de funciones.

(a) **Función inyectiva** o uno a uno, es aquella función tal que para todos los $x_1, x_2 \in Dom(f)$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, o de manera equivalente:

$$\text{si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Haga ver que la función lineal $f(x) = 2x - 1$ es inyectiva, en cambio $y = x^2$ no lo es.

(b) **Función sobreyectiva** Suponga que f es una función con dominio X y codominio Y, esto es, $f : X \longrightarrow Y$

Una función f se dirá sobreyectiva si $Rec(f) = Y$, esto es, si para todo $y \in Y$, existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$

(c) **Función biyectiva** Es aquella función que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplos

(1) $y = ax + b$ (con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) es biyectiva

(2) $y = b$ (con $b \in \mathbb{R}$) no es biyectiva. ¿Por qué?

P7 Toda función biyectiva admite una función inversa, denotada por f^{-1} (note que $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$).

$$\text{Si } f : X \longrightarrow Y \Rightarrow f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

Además se cumple que:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, \forall y \in Y$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \forall x \in X$$

(a) Estime la inversa de la función lineal $y = 2x+1$ y compruebe que $f \circ f^{-1} = i$.

(b) Para $y = x^3$, estime su inversa y compruebe que $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ f = x$.

(c) Estime las inversas de:

(1) $y = \operatorname{sen} x$

(2) $y = \cos x$

(3) $y = \sqrt{1 + x^2}$, si las hubiese.

(d) Haga lo mismo para:

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$$

Evaluando $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.

P8 Exprese las funciones siguientes como una descomposición de funciones, esto es, si $h(x) = (f \circ g)(x)$, expresando claramente el valor de $f(x)$ y el de $g(x)$.

(a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

(b) $h(x) = \operatorname{sen}(x + 1)$

(c) $h(x) = (1 + x + x^3)^7$

P9 **Traslación de funciones** A partir de la función $f(x) = |x| = abs(x)$. Grafique éstas nuevas funciones.
Las siguientes funciones resultan ser traslaciones de la función $y = |x|$, con un respectivo cambio de variable.

(a) $y = f(x - 3) = |x - 3|$

(b) $y = f(x + 3) = |x + 3|$

(c) $y = f(x) + 2 = |x| + 2$

(d) $y = f(x) - 2 = |x| - 2$

(e) $y = f(x - 3) + 2$

Observe en cada caso una traslación de $y = |x|$ (horizontal o vertical).

P10 Estudie ahora a partir de la función $y = x^3 + x^2$ las nuevas funciones:

(a) $y = (x + 1)^3 + (x + 1)^2$

(b) $y = (x - 1)^3 + (x - 1)^2$

(c) $y = x^3 + x^2 + 2 \quad , \quad y = x^3 + x^2 - 2$

(d) $y = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 - 2$

P11 Generalice los resultados anteriores al comparar las gráficas de $y = f(x)$ con:

(a) $y = f(x - h) \quad (h > 0 \text{ y } h < 0)$

(b) $y = f(x) + k \quad (k > 0 \text{ y } k < 0)$

(c) $y = f(x - h) + k$

P12 A partir de la gráfica $y = \sqrt{x} \quad (y = sqr(x))$ grafique:

(a) $y = \sqrt{x - 3}, \quad y = \sqrt{x + 3}$

(b) $y = \sqrt{x} + 2, \quad y = \sqrt{x} - 2$

(c) $y = \sqrt{x - 3} + 1$

Compruebe sus respuestas usando un graficador (Winplot o Geogebra).

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº5

Funciones

Objetivo:

- Examinar la función polinomial y racional, respecto de sus dominios, gráficos y comportamiento para valores grandes positivos y negativos.

P1 Una función polinomial tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ para todo i y n un entero no negativo.

Así, las funciones ya estudiadas como $y = 2$, $y = x + 1$, $y = x^2 + x + 2$, son ejemplos de funciones polinomiales.

El dominio de una función polinomial es todo $\mathbb{R}$, a menos que se diga lo contrario.

Grafique $y = x^3 - x^2 + x + 1$

¿Cuáles son las intersecciones con los ejes para esta función?

P2 Ayudado por un graficador (Winplot o Geogebra) grafique las siguientes funciones:

(a) $y = 5x^4 - 2x^2$

(b) $y = 7x^5 + 2x^3 + x$

(c) $y = -x^7 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$

¿Cuál de ellas es par? ¿Cuál impar?
¿Qué sucede con cada una de ellas si x es grande positivo? ¿si y es grande negativo?
¿A qué valor tienden cada una de ellas?

P3 Determine las intersecciones con los ejes de las funciones anteriores, ayudado por su gráfico.

P4 Comportamiento final. En general, el comportamiento final de cualquier función f es simplemente la forma en que se comporta para valores muy grandes de $|x|$. Para el caso de la función polinomial, que nos ocupa, y de grado n, su gráfica se asemeja a la de $y = a_n x^n$.

Así, por ejemplo $y = 3x^3 + 5x^2 + 1$ se parece a la gráfica de $y = 3x^3$.

Basta observar que si

$$\begin{aligned} y &= 3x^3 + 5x^2 + 1 \\ \Rightarrow y &= x^3(3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}) \approx 3x^3, \text{ cuando } |x| \to \infty \end{aligned}$$

ya que tanto $\frac{5}{x}$ como $\frac{1}{x^3}$ tienden a cero cuando x es grande positivo o negativo.

En base a lo anterior examine el comportamiento final de $f(x)$ y $g(x)$ si:

(a) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

(b) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x + 2$

¿A qué valores tienden $f(x)$ y $g(x)$ si x es grande negativo? ¿y si x es grande positivo?

P5 Clasifique el comportamiento de una función polinomial de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(a) Para x grande positivo.

(b) Para x grande negativo.

Considere lo casos:

(1)

$a_n > 0$ y n par	Tiende a

(3)

$a_n < 0$ y n par	Tiende a

(2)

$a_n > 0$ y n impar	Tiende a

(4)

$a_n < 0$ y n impar	Tiende a

Ponga ejemplos en cada caso.

P6 Aplique los resultados del problema anterior para estudiar el comportamiento de las funciones:

(a) $f(x) = (1-x)(1+x)^2$
(b) $g(x) = -(1-x)(1+x)^3$

Cuando x es grande positivo y cuando x es grande negativo.
Compruebe sus respuestas usando un graficador.

P7 Funciones racionales. Se definen como el cuociente de dos polinomios, así, si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios entonces $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional.
El dominio de $f(x)$ será el conjunto de números reales menos los números donde $q(x) = 0$

Algunos ejemplos de funciones racionales son:

- $y = \dfrac{1}{x}$, $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- $y = \dfrac{2}{x-1}$, $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$
- $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$

Represente gráficamente cada una de estas funciones ayudado por Winplot o Geogebra.

Es particularmente útil examinar el comportamiento de estas funciones en los puntos donde el denominador se anula y para x grande positivo y x grande negativo.
Ello es una preparación intuitiva para estudiar el límite de estas funciones en esos puntos.

A modo de ejemplo considere la función racional $y = \dfrac{x-1}{x}$

Solución:

(1) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
(2) Los puntos de corte con los ejes serán:

(a) Eje X, $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} = 0$
$\Rightarrow x = 1$
(b) Eje Y, $x = 0 \Rightarrow f(0)$ no definida, luego, no existe punto de corte con el eje Y.

(3) ¿Qué sucede con y para valores próximos a $x = 0$?

Aquí, se debe analizar la función en dos sentidos:

(a) Cuando x tiende a cero por la derecha, lo que se escribe como $x \to 0^+$.
Así, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \dfrac{1}{x}) = -\infty$
(Que $x \to 0^+$ significa que $x \to 0$ y que $x > 0$)

(b) Cuando x tiende a cero por la izquierda, que significa que $x \to 0$ y que $x < 0$.
Luego, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 - \dfrac{1}{x}) = \infty$

(4) ¿Qué sucede con $y = \dfrac{x-1}{x}$ cuando x es grande positivo?

Responder esta pregunta significa considerar
$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} (1 - \dfrac{1}{x}) = 1$
Responda por $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x}$

(5) Grafique $y = \dfrac{x-1}{x}$

(6) Las ecuaciones $x = 0$ e $y = 1$ son las asíntotas para la función $y = \dfrac{x-1}{x}$, la primera ecuación, $x = 0$ es una asíntota vertical, la segunda $y = 1$ es la asíntota horizontal.

P8 Estudie ahora la función $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ en los mismos seis (6) puntos examinados en el ejemplo anterior.

P9 Las ganancias de una empresa, en miles de pesos, se ajustan a la función:

$$f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}, \text{ con } x \geq 0.$$

Donde x representa los años de vida de la empresa.

(1) Represente gráficamente $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

(2) ¿A partir de que año las ganancias superan a las pérdidas?

(3) A medida que transcurre el tiempo ¿están limitados sus beneficios? ¿Cuál es su límite?

P10 Represente gráficamente las dos funciones siguientes:

(1)

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{, si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2x-1}{3} & \text{, si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(2)

$$y = \begin{cases} -x-1 & \text{, si} \quad x \leq -1 \\ 2x^2-2 & \text{, si} \quad x \in (-1,1) \\ x+2 & \text{, si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

P11 Estudie la función

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1},\ x \geq 0$$

Respecto de

(1) $f(x) > 0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº6

Funciones

Objetivo:

- Estudiar las funciones trigonométricas respecto a su dominio, rango y gráfico.

P1 La función $\operatorname{sen}(x)$. La gráfica de esta función ($y = \operatorname{sen}(x)$) se puede obtener usando un graficador, ella como la función $y = \cos(x)$ son periódicas y con un periodo de valor 2π, esto significa que para todo valor de x, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$ y $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Represente estas funciones usando Winplot o Geogebra y observe el valor de su periodo y lo que ello significa respecto de su gráfico.
¿Cuál es su dominio?¿Cuál es su rango para ambas funciones?

P2 Recordemos que $f(x)$ es una función par si $f(x) = f(-x)$, para todo x, y $f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x.
¿Cuál de ellas ($\operatorname{sen} x$ ó $\cos x$) es par?¿Cuál de ellas es impar?

P3 Se dice que x_0 es cero para $f(x)$ si $f(x_0) = 0$. Determine los ceros de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y de $g(x) = \cos x$.

Solución:

$$\operatorname{sen} x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$
$$\cos x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

P4 Valores importantes para las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son:

x	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

P5 Existen cuatro funciones trigonométricas que se definen a partir de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Ellas son:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad , \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad , \quad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Represente gráficamente cada una de estas funciones con un graficador, determine además para cada una de ellas su dominio, recorrido y asíntotas.

<u>Solución:</u>

- El dominio de $\tan(x)$ y de $\sec(x)$ es $\{x | x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- El dominio de $\cot(x)$ y $\csc(x)$ es $\{x | x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Para examinar el rango de $\sec(x)$ y $\csc(x)$ observe que:

$$\begin{aligned} |\sec(x)| &= \left|\frac{1}{\cos(x)}\right| = \frac{1}{|\cos(x)|} \geq 1 \\ |\csc(x)| &= \left|\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right| = \frac{1}{|\operatorname{sen}(x)|} \geq 1 \end{aligned}$$

Luego, de $|\sec(x)| \geq 1$, se deduce que $\sec(x) \geq 1$ ó $\sec(x) \leq -1$ con lo que el rango para $\sec(x)$ es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. El mismo argumento se aplica a $|\csc(x)| \geq 1$.

P6 A partir del gráfico de $y = \tan(x)$ y de $y = \cot(x)$ se puede deducir que el periodo es π, esto es:

$$\begin{gathered} \tan(x+\pi) = \tan(x) \text{ y} \\ \cot(x+\pi) = \cot(x) \end{gathered}$$

Grafique tanto $\tan(x+\pi)$ como $\tan(x)$, de modo de comprobar lo anterior.

P7 Algunas identidades trigonométricas que conviene tener presente para el futuro son:

(1) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(2) $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

(3) $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$

Deduzca (2) y (3) a partir de (1).

P8 Sabiendo que:
$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \cos a\ \text{sen}\,b$ y que
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b$

Exprese $\text{sen}\,2x$ y $\cos 2x$ en términos de $\text{sen}\,x$ y $\cos x$.

Indicación: $2x = x + x$

P9 Suponga que $y = D + A\ \text{sen}\,(Bx + C)$, con A y B positivos, C y D reales.

El número $|A|$ se denomina "amplitud".
El periodo es $\dfrac{2\pi}{B}$, $(B > 0)$ y así el intervalo $[0, \dfrac{2\pi}{B}]$ corresponde a su ciclo de su gráfico.

Represente gráficamente la función $y = \text{sen}\,2x$, dando su amplitud y su periodo. Haga lo mismo con:

(a) $y = 4\text{sen}\,\pi x$
(b) $y = -3\cos 2\pi x$
(c) $y = 2 - 4\text{sen}\,x$

P10 Aplique los conceptos revisados en **P9** para la función $y = 30\text{sen}\left(\dfrac{120\pi}{t}\right)$, donde t es el tiempo medido en segundos.
Dibuje un ciclo de la gráfica. ¿Dónde ocurre el máximo y cuál es su valor?

P11 Sea $T(t) = 50 + 10\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(t - 8)\right)$ con t variando entre 0 y 24.

Determine:

(a) $T(t = 8)$.
(b) Valores de t para los cuales $T(t) = 50$.
(c) Grafique $T(t)$.
(d) Determine el máximo y mínimo para $T(t)$ y dónde ocurre.

P12 Compare los gráficos de:

(a) $y = \text{sen}\,x$, con $y = |\text{sen}\,x|$
(b) $y = \cos x$, con $y = |\cos x|$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº7

Funciones

Objetivo:

- Examinar las funciones inversas de las trigonométricas, respecto a: su dominio, recorrido y gráfico.

P1 Hemos definido la inversa de f como aquella función denotada por $f^{-1}(x)$ y tal que si f tiene dominio X y rango Y, esto es:

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$\Rightarrow f^{-1} : Y \longrightarrow X, \text{ y además:}$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in Y$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X$$

La existencia de f^{-1} está garantizada si f es uno a uno, esto es, inyectiva.

Algunas propiedades de la función inversa son:

(1) $Dom(f^{-1}) = Rango(f)$.
(2) $Rango(f^{-1}) = Dom(f)$.
(3) f^{-1} es uno a uno (inyectiva).
(4) La inversa de f^{-1} es f.
(5) La inversa de f es única.

* Para hallar f^{-1}, resuelva $y = f(x)$ para la variable x en términos de y.
Así, se obtiene $x = f^{-1}(y)$
Cambie las variables, de modo de obtener $y = f^{-1}(x)$

A modo de ejemplo vuelva a estimar $f^{-1}(x)$ para $y = ax + b$ (a y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$)

Solución:

$$\begin{gathered}
y = ax + b \\
y - b = ax,\ ax = y - b \\
\Rightarrow x = \frac{y-b}{a} = \frac{y}{a} - \frac{b}{a} \\
x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a} \\
\text{Así, } y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} = f^{-1}(x)
\end{gathered}$$

Compruebe que: $(f \circ f^{-1})(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Estime $f^{-1}(x)$ para $f(x) = x^3$.
Grafique f y f^{-1}, ¿Qué observa?

P2 Para $y = x^2 + 2$, restrinja el dominio de modo que allí sea ahora uno a uno, entonces proceda a estimar su inversa, grafique tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$, compruebe que $f^{-1} \circ f = Id$, $f \circ f^{-1} = Id$ i, con $Id(x) = x, \forall x$.

P3 Lo anterior permite considerar las funciones inversas de la trigonométricas, sabiendo que ellas no son inyectivas en general, pero, si se restringe su dominio son uno a uno, lo que permite considerar sus inversas.

A modo de ejemplo, considere:

$y = \operatorname{sen} x$ definida en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, así su rango es $[-1, 1]$ y por tanto ahora $y = \operatorname{sen} x$ es inyectiva o uno a uno.

$$\begin{gathered}
\text{sen } : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \\
\text{arc sen} = \text{sen}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
\end{gathered}$$

Represente gráficamente tanto sen como arc sen.

P4 Así, $y = \text{sen}^{-1}(x) = \text{arc sen } (x) \Leftrightarrow x = \text{sen}\,(y)$ con $x \in [-1, 1]$, $\frac{-\pi}{2} \leq \text{y} \leq \frac{\pi}{2}$

Estudie la inversa de $y = \cos x$.
Respecto de su dominio, gráfico y definición de la misma.

Sol: $Dom(\cos x) = [0, \pi]$, etc, ...

P5 Algunos cómputos de arc sen son:

(a) arc sen $\dfrac{1}{2} = ?$

(b) arc sen $\dfrac{-1}{2} = ?$

(c) arc sen $(-1) = ?$

Solución:
(a)

$$\text{arc sen: } [-1,1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{luego arc sen } \frac{1}{2} \text{ estará entre } \frac{-\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Como sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ y además } \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

(c)

$$y = \text{sen}^{-1}(-1) \Rightarrow \text{sen}\, y = -1, \text{ como}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \text{ luego } y = \frac{-\pi}{2}$$

Nota: Los valores anteriores puede estimarlos usando una calculadora.

P6 Si consideramos la función $y = \tan x$ con dominio $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ entonces podemos definir su inversa $y = \tan^{-1} x$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Represente gráficamente tanto $y = \tan x$ como $y =$arc tan$x = \tan^{-1}(x)$

P7 Determine los dominios y rangos de las inversas de: (puede consultar algún texto)

(a) $y = \cot x$

(b) $y = \sec x$

(c) $y = cscx$

Represente tanto f como sus inversas para cada caso.

P8 Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x + 5$, entonces tanto f como g poseen inversas.

Estime dichas inversas y compruebe que ellas satisfacen la igualdad:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

P9 A partir de la ecuación:

$$\frac{X}{L} = \frac{c}{1+c^2}(c + \tan\alpha)$$

(a) Determine α si: $X = L$ y $c = 1$

(b) Determine α si: $X = \dfrac{3L}{4}$ y $c = 0.5$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº8

Funciones

Objetivo:

- Estudiar la función exponencial y logarítmica respecto de sus propiedades más importantes.

P1 Sea $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces una función exponencial $y = f(x)$ es una función de la forma $f(x) = b^x$.
El número b corresponde a la base y x es el exponente.
El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$.

Represente las funciones exponenciales para los valores de b que se indican:

$$b = \frac{1}{2},\ b = 2,\ b = 3,\ b = \frac{1}{3}$$

Use un graficador para ello.
¿Qué observa respecto a su rango?
¿Para qué valores de b, $f(x)$ es creciente?
¿Para qué valores de b, $f(x)$ es decreciente?

P2 Reglas sobre los exponentes

Suponga que tanto a como b son positivos y x_1, x_2 son números reales, entonces se cumplen:

(1) $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$

(2) $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

(3) $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2}$

(4) $\dfrac{1}{b^{x_1}} = b^{-x_1}$

(5) $(ab)^{x_1} = a^{x_1} b^{x_1}$

(6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x_1} = \dfrac{a^{x_1}}{b^{x_1}}$

Tener presente estas reglas para el futuro.

P3 Represente gráficamente:

(a) $y = 4^x$

(b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Examine su tabla de valores para x grande positivo, esto es, cuando x tiende a ∞, y cuando x es grande negativo, esto es, cuando x tiende a $-\infty$.

Examine además las intersecciones con los ejes.

P4 En base a **P3** caracterice la función exponencial dependiendo del valor de b.

$$\begin{array}{l} \text{(a) con } b \in]0,1[\\ \\ \text{(b) con } b \in]1,\infty[\end{array} \Rightarrow y = b^x$$

Respecto de su representación gráfica, ¿en qué caso $f(x)$ es creciente?
¿Cuál es la asíntota para esta función?

P5

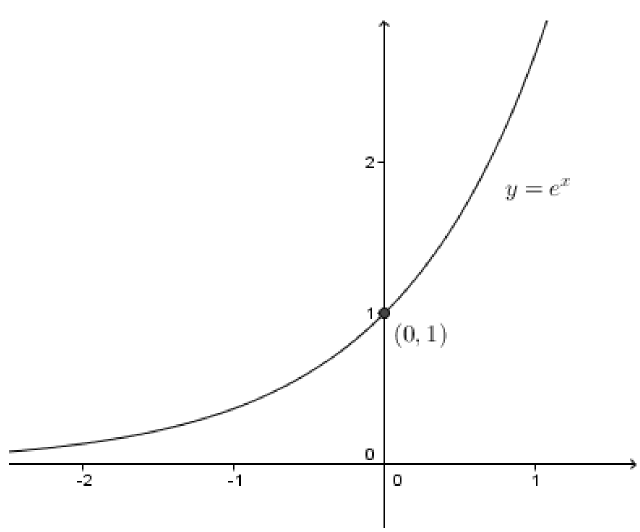
(1) Confeccione una lista con todas las propiedades de $f(x) = b^x$.

(2) Compare $y = 2^x$ con $y = 3^x$.

(3) Compare $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ con $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Respecto de creciente o decreciente.

P6 Cuando se considera $b = e$ en $y = b^x$ se está en presencia de la función exponencial natural, $y = e^x$ ($e = 2,71828.. \in \mathbb{I}$). Como $e > 1$ es de imaginar que su gráfica sera como:



P7 Como $y = b^x$ es inyectiva, entonces admite inversa, así:

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y$$
$$\text{o también si } y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

Lo anterior significa que:

$$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$$
$$\log_8 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2 = 8^{\frac{1}{3}}$$
$$\log_{10} 0.001 = -3 \Leftrightarrow 0.001 = 10^{-3}$$

Represente las funciones $y = 3^x$ e $y = log_3 x$ en un mismo plano cartesiano. ¿Qué se observa respecto de la diagonal principal $y = x$?

P8 Propiedades de la función logarítmica $y = log_b x$

(1) $Dom(y) = \mathbb{R}^+ =]0, \infty[$

(2) $Rango(y) = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

Represente las funciones $y = log_b x$ si:

(1) $b > 1$

(2) $b \in]0, 1[$

¿Cuál es su comportamiento gráfico?

P9 Es necesario tener presente los siguientes valores:

(a) $log_b 1 = 0$, dado que $b^0 = 1$

(b) $log_b b = 1$, dado que $b^1 = b$

(c) $x = b^{log_b x}$, $y = log_b b^y$

Luego, $2^{log_2 10} = 10$ y $log_5 5^7 = 7$

P10 <u>Propiedades de los logaritmos</u>. Suponga que $b > 0$ y $b \neq 1$.

Entonces se cumple que:

(1) $log_b MN = log_b M + log_b N$

(2) $log_b \dfrac{M}{N} = log_b M - log_b N$

(3) $log_b M^c = c log_b M$

Use estas propiedades para estimar:

(a) $\dfrac{1}{2}\ln 9 + 2\ln 3 + \ln e$

(b) $\ln \sqrt[3]{e}$

(c) $\ln \dfrac{1}{e^2}$

(d) $\ln 7e + \ln 5e - \ln 3e$

P11 Para las siguientes ecuaciones determine el valor de x.

(a) $\ln(2x+5) = \ln(4x-1) + \ln 2$, Sol: $x = \dfrac{7}{6}$

(b) $7 = e^{10x}$, Sol: $x \approx 0.2$

P12 Suponga que $2^x = 3$, entonces:

$$\begin{aligned} \ln 2^x &= \ln 3 \\ \Rightarrow x\ln 2 &= \ln 3 \\ \Rightarrow x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

Pero, como $2^x = 3 \Rightarrow log_2 3 = x$

$$\Rightarrow log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Ahora, en general, se puede expresar el algoritmo de cualquier base $b > 0$ como una función del logaritmo natural.
Así, si $x = log_b N \Rightarrow b^x = N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln b^x &= \ln N \\ \Rightarrow x\ln b &= \ln N \\ \Rightarrow x &= \frac{\ln N}{\ln b} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow x = log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}}$$

P13 Resuelva para x en las expresiones:

(a) $2^{5+x} = 9$
(b) $2e^{1+x} = 5^x$
(c) $\ln 3 = \ln(x-2) + \ln(x)$
(d) $\ln 4(x+1) = \ln(2x-1) + \ln 3$

P14 Determine el dominio de:

(a) $f(x) = \ln(4 - x^2)$
(b) $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$

P15 ¿Dónde estriba la diferencia entre $f(x) = \ln x$ y $f(x) = \ln |x|$?
Represente gráficamente ambas funciones.

P16 Un modelo exponencial para el número de una especie de un cultivo en el tiempo t está dado por $P(t) = A_0 e^{kt}$, donde A_0 es la población inicial y k es la constante de crecimiento.

(a) Si al cabo de 2 horas ($t = 2$), se observa que el número inicial se ha duplicado. Deterine el modelo de crecimiento exponencial para $P(t)$.
(b) Según la expresión hallada en (a) para $P(t)$. ¿Qué ocurre cuando $t = 5$?
(c) Determine el instante para que el cultivo alcance diez veces su tamaño inicial.

P17 Represente gráficamente

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Demuestre que $f(x)$ es impar, esto es, $f(x) = -f(-x)$.

P18 Estime $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$ y simplifique si

(a) $f(x) = -x^2 + x^2 - x + 1$
(b) $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{3}{x}$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$
(d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Actividad Didáctica de Aprendizaje N$^{\underline{o}}$9

Funciones

Objetivo:

- Expresar de manera algebraica la relación existente entre variables que involucran un problema a resolver.

P1 La suma de dos números positivos es 7. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de dichos números.

Solución:

Sean x e y los números positivos. Entonces, $x + y = 7$, luego $y = 7 - x$.
Así, el produto será:

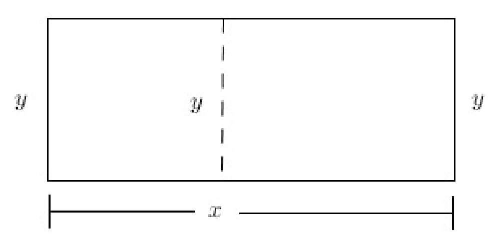
$$P = xy^2 = x(7-x)^2$$
$$\Rightarrow P(x) = x(7-x)^2$$

Observación: Notar que la ecuación $x+y = 7$, constituye la restricción del problema. Ahora, si en lugar de despejar y se despeja x de la restricción, entonces $x = 7 - y$ con lo que si:

$$Q = x^2y = (7-y)^2y$$
$$\Rightarrow Q(y) = (7-y)^2y$$

es otra función que también expresa las condiciones del problema.
¿Cuál es el dominio para $P(x)$?
$P(x) = x(7-x)^2$, (Sol. $Dom(P) =]0, 7[$).

P2 Suponga que se desea cercar un terreno de forma rectangular, de área igual a $100m^2$. El terreno contempla una división interior como el de la figura adjunta.



Exprese la cantidad de reja usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno.

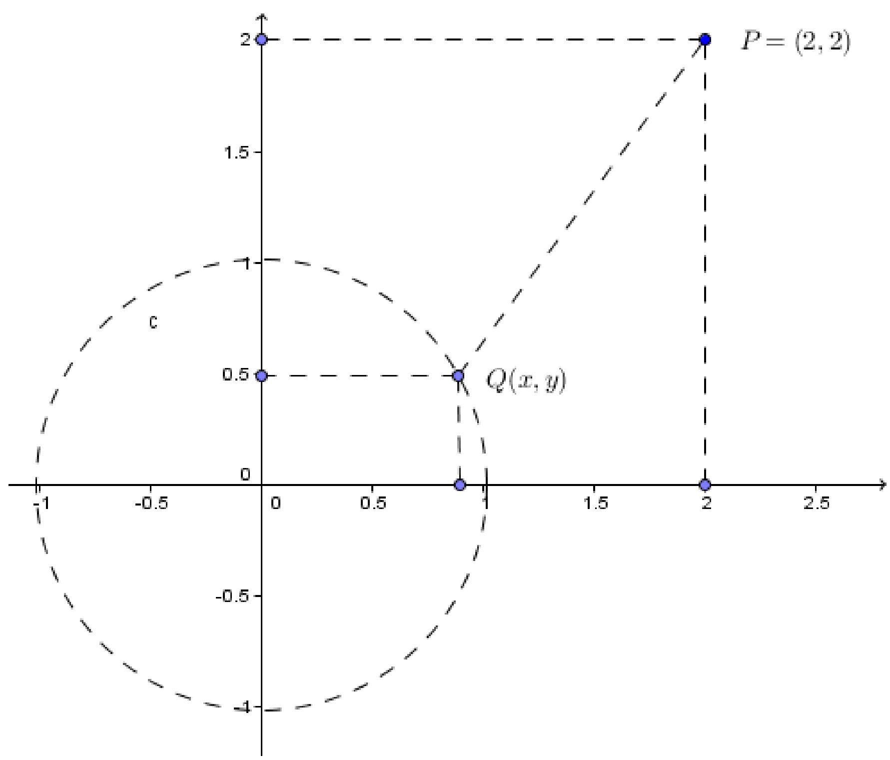
Solución:
Suponga que P representa el perímetro del terreno, entonces:

$$P = 2x + 3y, \text{ como } xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$
$$\text{luego, } P = 2x + 3\left(\frac{100}{x}\right) = 2x + \frac{300}{x}$$

P3 Dentro del semicírculo: $x^2 + y^2 = 9$, se inscribe un rectángulo. Exprese el área de dicho rectángulo como una función de x.

Ind. Construya un gráfico de la situación descrita, la solución es : $A(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$.

P4 Considere ahora un círculo de radio 1 y centrado en el origen. Exprese la distancia del punto $P = (2, 2)$ a un punto $Q = (x, y)$ que está en el círculo.



¿En qué punto Q del círculo se tiene la menor distancia al punto $P = (2, 2)$?

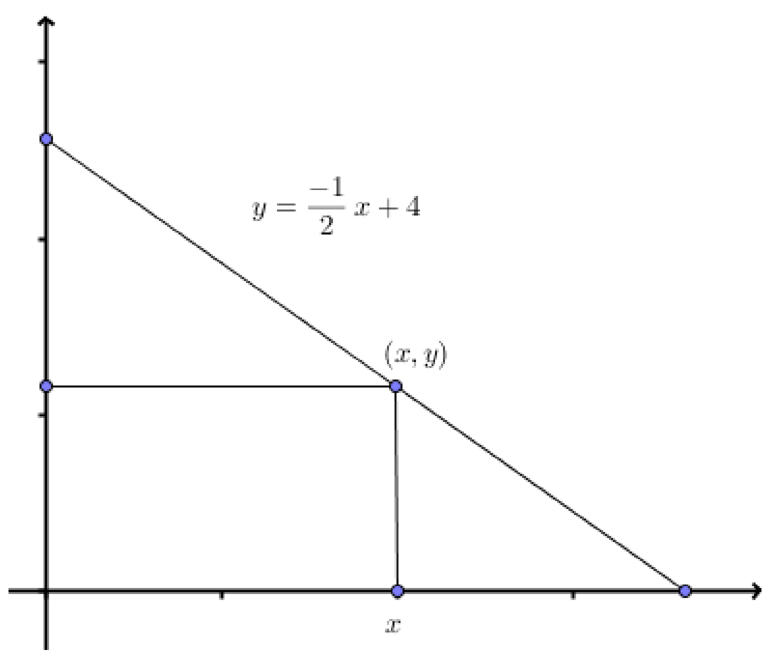
P5 Un arbusto de altura h se ubica a 5 mts. de la base de una luminaria de altura 10 mts. Exprese la longitud de la sombra del arbusto como función de su altura.
(Sol. $S(h) = \dfrac{5h}{10 - h}$)

P6 El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.
Sol. $S(x) = x + \frac{50}{x}$ $(x > 0)$

P7 La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro como una función de uno de los números.
Sol. $S(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $x \in [0, 1]$

P8 El perímetro de un rectángulo es 100cm. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.
Sol. $A(x) = x(50 - x)$, $x \in [0, 50]$

P9 Exprese el área del rectángulo situado en el primer cuadrante y con uno de sus vértices en la recta $y = \frac{-1}{2}x + 4$. Ver figura.



P10 Exprese como una función de x la distancia al cuadrado de un punto (x, y) de la recta: $y = -x + 1$ al punto $P = (2, 3)$.

P11 Exprese el perímetro de un cuadrado como una función de su área.

P12 Exprese el área de un círculo como una función de su diámetro d.

P13 Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de su altura h.
(Sol. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$)

P14 Un alambre de longitud x se dobla en forma de círculo. Exprese el área del círculo como una función de x.
Sol. $A(x) = \dfrac{1}{4\pi}x^2$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº10

Funciones

Objetivo:

- Extraer conclusiones de las observaciones gráficas de las funciones representadas.

P1 Resolver gráficamente:

$$|x| \leq 2,\ |x| = 2,\ |x| > 2$$

Indicación: Represente cada función, ejemplo:

- $f(x) = |x| = abs(x)$
- $g(x) = 2$

¿Para qué valores del dominio de ambas funciones se cumple $|x| \leq 2$?

P2 Lo mismo que en **P1** ahora para:

$$|x-1| < 2;\ |x-1| \leq 1$$

P3

$$|x+1| > 1;\ |x+1| > 2$$

P4

$$|x-1| < \epsilon;\ (\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n})$$

P5

$$|x| \leq \epsilon;\ (\epsilon = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, ..., n)$$

P6 Determine para que valores del dominio de $f(x) = \dfrac{(x-2)}{(x^2-3x-4)}$, $f(x)$ resulta ser mayor que cero.

¿Dónde $f(x) < 0$?

P7 Resuelva:

(a) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$
(b) $(x-5)^2(x+10) \leq 0$
(c) $x^2(x-1) \geq 0$
(d) $(x-5)^4(x+10) \leq 0$
(e) $0 < |x+2| < 1$

P8 Resuelva gráficamente la desigualdad:

$$|x^2-1| \leq \sqrt{(x+2)}$$

Indicación: $f(x) = |x^2-1| = abs(x^2-1)$; $g(x) = sqr(x+2)$

P9 ¿Tiene la ecuación: $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$, alguna solución real entre -1 y 0?

P10 Halle las raíces reales, si las hubiera para:

(a) $x^3 + x^2 + x + 1$
(b) $x^3 - 1$
(c) $x^4 - 5x^2 + 4x$

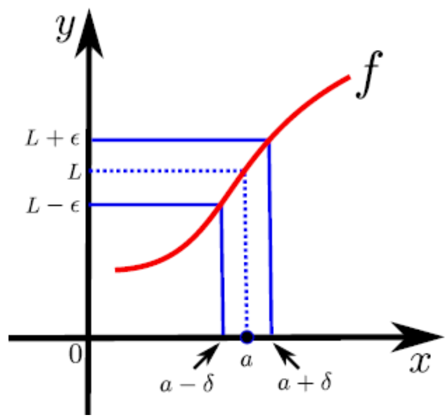
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1 - A

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Realizar estimaciones tanto numérica (tablas) como en un gráfico cerca de un punto, con la intención de hallar el límite allí.

  Definición (Preliminar): f converge a L cuando x tiende a "a" si para todo $x \approx a$ $(x \neq a)$ se tiene que $f(x)$ esta próximo a L, esto es, $f(x) \approx L$ $(f(x) \longrightarrow L)$.



P1. Para $y = x - 1$, construya su gráfico usando Winplot y examine su "tabla" de valores. ¿Qué sucede con los valores de y si x esta próximo a los valores de $x = 2$? ¿Tiende a un valor determinado?

P2. Use Winplot, si lo estima necesario, para graficar:

(a) $f(x) = 3$ (Explícita)

Si x tiende a 1 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(b) $f(x) = x$ (Función Identidad)

Si x tiende a 0 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(c) Concluya con: $\lim\limits_{x\to 3} 3 =$? y $\lim\limits_{x\to 0} x =$?

P3. Estudio de la función cuadrática $y = x^2 - x + 2$ para valores próximos a x cerca de $x = 2$.

Indicación: A partir del gráfico (Winplot) examine su tabla de valores. Modifique la opción "Param".

- Concluya con el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$
- ¿Es igual a $f(2)$ el límite anterior?

P4. Estudio de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Para determinar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Indicación: Graficar y examinar la tabla de valores de $f(x)$ entorno a $x = 1$, tanto para valores $x < 1$ ($x \to 1^-$) y $x > 1$ ($x \to 1^+$).

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$
- luego $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Está definida $f(x)$ en $x = 1$?
- ¿Qué sucede con $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?

P5. Para la función $H(t)$ definida como

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$

Indicación: Examine el valor de los límites laterales de $H(t)$ cuando $t \to 0$.

- ¿Existe el límite de $H(t)$ cuando $t \to 3$? ¿Cuál es su valor?¿Por qué?
- Grafique $H(t)$ con Winplot e indique el comando usado para ello.

P6. Estudio de la función $y = \dfrac{1}{x}$ cerca de $x = 0$. Estime el valor de:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{x} =$

Indicación: Use Winplot y examine su tabla de valores ¿Es $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = f(0)$?

P7. Estudio de $y = \dfrac{1}{x-3}$ en valores próximos a $x = 3$.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

¿Es su límite igual a $f(3)$?

¿Es $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$?

Represente graficamente $f(x)$ para mayor claridad. ¿Qué tipo de función es?

Indicación: Considerar las observaciones dadas en **P6**.

P8. Para la función $f(x) = x^2 - x + 2$

¿Qué entorno del punto $x = 2$ debemos considerar para asegurarnos que $f(x) \in (3.9, 4.1)$?

Indicación: Aborde el problema geométricamente para avanzar en su solución algebraica, determinando las intersecciones de las rectas: $y = 3.9$ con $f(x)$ y de $y = 4.1$ con $f(x)$. Examine las proyecciones de estos puntos sobre el eje x para contestar la pregunta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2 - A

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Estimar el valor de ciertos límites, por simple sustitución del valor en la función, manipulando la expresión dada hasta poder estimar el valor del límite..

P1. Estimar el valor de los límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x^3+3x+2} =$

(b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh+3}{x^2-2h} =$

(c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2-h}{h^3+2h} =$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1} =$

(e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2} =$

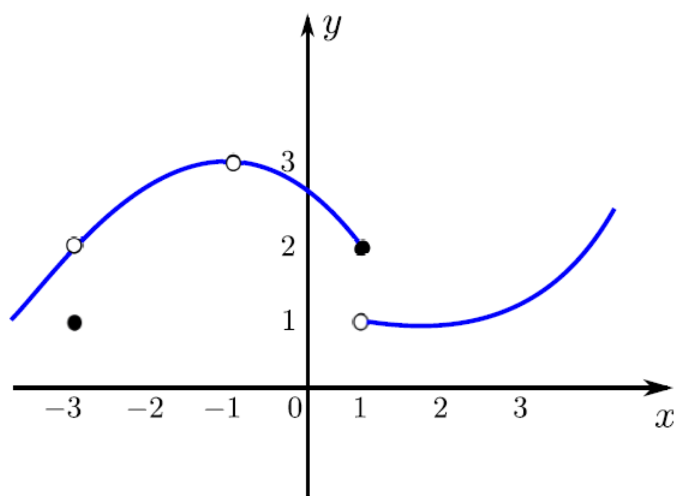
(f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2} =$

(g) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} =$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-h}-1}{h} =$

(i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2-x)}{h} =$

P2. En base al gráfico de la función f estime:



(a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)\,,\ f(-3)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\,,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)\,,\ f(1)\,,\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(c) $f(-1)\,,\ \lim\limits_{x \to -1} f(x)$

P3. A partir de la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } x \in (0,1) \\ 1+x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estime el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\,,\ f(0)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)\,,\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\,,\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)\,,\ f(1)$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)\,,\ f(-1)\,,\ \lim\limits_{x \to 5} f(x)$

(d) **Definición:** f se dice continua en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ¿Es f continua en $x_0 = 0$?

¿En $x_0 = 1$?

¿En $x = 5$?

P4. Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ si $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

¿Es continua $f(x)$ en $x = 2$ y en $x = -3$? **P5.** Si $P = \left(3, \sqrt{3}\right)$ y $Q = \left(3+h, \sqrt{3+h}\right)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es:

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{3+h-3} = \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$

Si $h \to 0$ entonces $Q \to P$. Estime $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$

¿A que valor corresponde este límite?

Indicación: Represente graficamente la situación en estudio usando Geogebra.

P6. (a) Haga un bosquejo para una función f que satisfaga las cuatro condiciones siguientes.

a) $D_f = [0, 4]$

b) $f(n) = 1$, si $n = 0, 1, 2, 3, 4$

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 1$

d) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

(b) ¿Es f continua en $x = 1$ y $x = 3$?. Justifique su respuesta.

P7. Dos límites importantes:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

(i) Use (a) para hacer ver (b).

(ii) Busque la demostración de (a)

Indicación: Use Winplot para graficar ambas funciones y examinar su tabla de valores.

P8. Use uno de los resultados dados en **P7** para estimar los siguientes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} =$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} =$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3(1 - \cos x)}{x} =$

(d) $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta \tan\theta}{\theta} =$

P9. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $g(x)$ es acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$. Use este resultado para estimar $\lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)$.

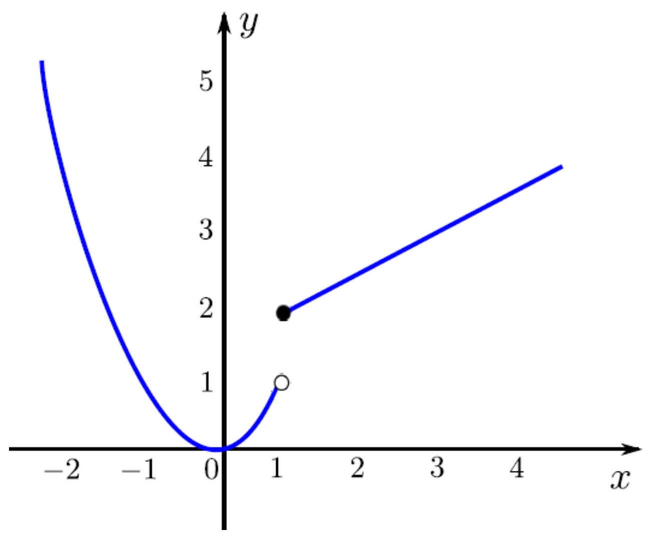
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3 - A

Límite y Continuidad

Objetivos:

- Avanzar en la comprensión del concepto de límite dado en términos de ε y δ.
- Revisar la continuidad de una función en un punto, estimando límites laterales.

P1. Según la gráfica adjunta estime:



(a) El valor de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1.

(b) Si en el eje y consideramos el intervalo abierto en torno a $y = 2$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(c) ¿Es posible hallar un intervalo alrededor de $x = 1$, tal que sus imágenes $f(x)$ estén en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$?

(d) ¿Estime el límite de $f(x)$ en $x = 1$?

(e) y en $x = 2$, ¿existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

(f) Para el intervalo $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ del eje y. Halle un intervalo en el eje x en torno de $x = 3$, digamos: $(3 - \delta, 3 + \delta)$ tal que si $x \in (3 - \delta, 3 + \delta) \Rightarrow f(x) \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

P2. El $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ilustre gráficamente esta definición.

P3. A partir de la definición dada en **P2**, una vez estimado el valor del límite, para un ε dado hallamos el correspondiente $\delta(\varepsilon)$. Como $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 2) = 4$ se tiene que establecer una relación entre:

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \text{ y } |x - 2| < \delta.$$

En efecto:

$|f(x) - 4| = |(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$ luego, basta tomar

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ con lo que si $x \in \left(2 - \dfrac{\delta}{3}, 2 + \dfrac{\delta}{3}\right) \Rightarrow f(x) \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$.

(a) Como un caso particular, para $\varepsilon = 0.1$ determine $\delta(\varepsilon)$ para verificar que si $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 0.1$.

(b) Ilustre la situación anterior graficamente.

(c) Considere ahora un $\varepsilon = 0.01$, halle el correspondiente $\delta(0.01)$ y verifique que se cumple:

$$0 < |x - 2| < 0.01 \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon = 0.01$$

P4. Usamos la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

a) Debemos entonces establecer una relación entre ε y δ tal que nos garantice que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

b) Así, $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2|$, ahora para todo $x \in (1, 3)$, se tiene que

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < x + 2 < 5 \text{ y } |x + 2| < 5$$

c) Si consideramos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ se tendrá que

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

d) Use la definición formal $(\varepsilon - \delta)$ para probar que: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 + 1\right) = 2$

P5. En términos generales, una función f es continua si su gráfica es una curva sin interrupciones. De manera formal es continua en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 3$ para

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x > 0 \\ x-1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Indicación: Use el comando join(.......) para graficarla

¿Es posible hacerla continua en $x_0 = 0$?

¿Es continua en $x_0 = -3$?

P6. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 0$?

- ¿Se puede reparar dicha discontinuidad?
- ¿En $x_0 = 2$ es continua $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

P7. Determine el valor de k de modo que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ k - 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la función $g(x)$ de modo que ella sea continua en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 4, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Redefina la función g para que sea continua en todo real x.
- Grafique las funciones anteriores asando Winplot una vez estudiadas la continuidad de ella en los puntos indicados.

P8. Estudie la función $y = \dfrac{1}{x-3}$ en valores próximos a $x = 3$.

- ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?
- ¿Es su límite igual a $f(3)$?
- ¿$\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$?, ¿Es f continua en $x = 4$?
- Grafique $f(x)$, use Winplot o Geogebra.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4 - A
Complementaria - Límites

P1. Límite al infinito

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Significa que la función se apróxima a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Asi, x es grande y positivo.

Ejemplos:

Estimar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada una de la funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = e^{-x}$

Solución: (1) Usando Winplot vemos su gráfica y su tabla de valores.

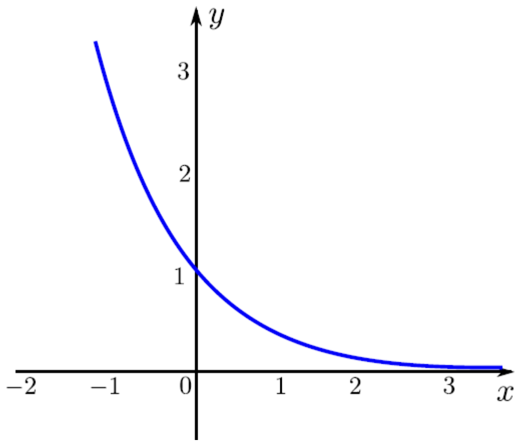
Si x aumenta sin límite entonces $f(x) = x^2$ también lo hace, luego $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Si x disminuye sin límite entonces x^2 aumenta y es grande positivo ello implica que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

(3) $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

Su gráfico es:



Así, si x es grande positivo entonces $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = \dfrac{1}{e^x} \to 0$, si $x \to \infty$,

luego $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Ahora si x es grande negativo entonces $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ es grande positivo

luego $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

(2) Tarea de manera grupal.

P2. Comparación de funciones para valores grande positivo

A mode de ejemplo considere el gráfico de $y = 2^x$ con $y = x^3$ en:

a) $D_f = [2, 4]$

b) $D_f = [4, \infty)$

Concluya del análisis gráfico y tabular que función domina sobre la otra, esto es, $2^x \leq x^3$ o $x^3 \leq 2^x$.

P3. Comportamiento final de funciones polinomicas.

En general, si $a_n \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$$

Lo mismo es válido si se cambia $x \to \infty$ por $x \to -\infty$ (valores grandes pero negativos)

P4. Para los polinomios $p\left(x\right)$ examine su comportamiento para $x\to\infty$ y $x\to-\infty$.

(a) $p\left(x\right)=-2x^3+2x^2+x-1$

(b) $p\left(x\right)=x^4+3x^2+7$

Indicación: Use el resultado dado en **P3**

P5. Use Winplot para examinar las funciones:

(a) $f\left(x\right)=x^{1/2}=\sqrt{x}=sqr\left(x\right)=sqrt\left(x\right)$

(b) $f\left(x\right)=x^{2/3}$

En ambos casos considere $x\geq 0$.

¿Qué función domina cuando $x\to\infty$?

P6. Determine el valor de los límites

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}-10x^6,\ \lim\limits_{x\to-\infty}-10x^6$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x,\ \lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}4\left(1-e^{-x}\right),\ \lim\limits_{x\to-\infty}4\left(1-e^{-x}\right)$

P7. Trace una gráfica para $f\left(x\right)$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty$

(c) De expresiones algebraicas para cada una de las funciones que satisfacen (a) y (b).

Evaluación sobre límite y continuidad - A

Objetivos:

- Percibir mediante la resolución de estos problemas el grado de comprensión alcanzado de estos conceptos.

P1. Use Winplot para estudiar la tabla de valores de las gráficas de cada una de las funciones dadas, estimando así el límite de ellos. Resuelva por otro medio, algebraico, dichos límites. Examine además la continuidad en los puntos donde se estima el valor del límite.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 2x + 1\right)$

(c) $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{2h^2 + 1}{h}$

(d) $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{\sqrt{h-1} - 1}{h - 2}$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(g) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$

P2. Estime el valor de los límites, haga una simplificación previa de modo de poder calcular los límites propuestos.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

(c) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t - 1}{\sqrt{t} - 1}$

(d) $\lim\limits_{u \to -1} \dfrac{u^2 + 2u + 1}{u^2 + 3u + 1}$

(e) $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{\sqrt{h+3} - 2}{h - 1}$

P3. Suponga que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$

Estime el valor de:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} [2f(x) + 4g(x)]$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)+2}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \left[f(x) \cdot [g(x)]^3\right]$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{f(x) + g(x)}$

P4. Grafique (Winplot) las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$$

$$g(x) = \frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}$$

Para $x \in [-2, 2]$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Estime $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

P5. Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$

$f(x) =$

$g(x) =$

Ilustra lo anterior gráficamente.

P6. Da una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.

$\lim\limits_{x\to} \qquad\qquad = 3$

$\lim\limits_{x\to} \qquad\qquad = 3$

Dibuja tal función en el plano.

P7. Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en $x = 2$.

$f(x) =$

Represéntala graficamente.

Construye su tabla de valores.

P8. Estudie la existencia de los límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, ¿Es continua en $x = 0$?

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$, ¿Es continua en $x = 1$?

P9. Determine todos los valores de c tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ \\ x, & x > c \end{cases}$$

P10. Use la definición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 4}\left(4 - \frac{x}{2}\right) = 2$$

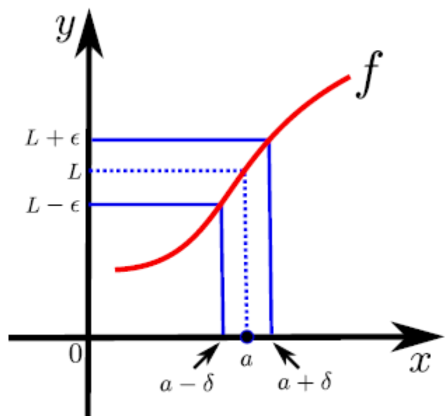
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1 - B

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Realizar estimaciones tanto numérica (tablas) como en un gráfico cerca de un punto, con la intención de hallar el límite allí.

  Definición (Priliminar): f converge a L cuando x tiende a "a" si para todo $x \approx a$ $(x \neq a)$ se tiene que $f(x)$ esta próximo a L, esto es, $f(x) \approx L$ $(f(x) \longrightarrow L)$.



P1. Para $y = x + 1$, construya su gráfico usando Winplot y examine su "tabla" de valores. ¿Qué sucede con los valores de y si x esta próximo a los valores de $x = 1$? ¿Tiende a un valor determinado?

P2. Use Winplot, si lo estima necesario, para graficar:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{3}$ (Explícita)

Si x tiende a 2 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(b) $f(x) = -x$

Si x tiende a -1 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(c) Concluya con: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{3} = ?$ y $\lim\limits_{x \to -1} -x = \ ?$

P3. Estudio de la función cuadrática $y = x^2 - 2x$ para valores próximos a x cerca de $x = 2$.

Indicación: A partir del gráfico (Winplot) examine su tabla de valores. Modifique la opción "Param".

- Concluya con el valor de $\lim_{x \to 2} f(x) =$
- ¿Es igual a $f(2)$ el límite anterior?

P4. Estudio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Para determinar $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Indicación: Graficar y examinar la tabla de valores de $f(x)$ entorno a $x = 1$, tanto para valores $x < 1$ ($x \to 1^-$) y $x > 1$ ($x \to 1^+$).

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$
- luego $\lim_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Está definida $f(x)$ en $x = 1$?
- ¿Qué sucede con $\lim_{x \to -1} f(x)$?

P5. Para la función $H(t)$ definida como

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0 \\ 0, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine $\lim_{t \to 0} H(t)$

Indicación: Examine el valor de los límites laterales de $H(t)$ cuando $t \to 0$.

- ¿Existe el límite de $H(t)$ cuando $t \to 3$? ¿Cuál es su valor?¿Por qué?
- Grafique $H(t)$ con Winplot e indique el comando usado para ello.

P6. Estudio de la función $y = \dfrac{1}{x-1}$ cerca de $x = 1$.

- Estime el valor de:

  (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} =$

  (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} =$

Indicación: Use Winplot y examine su tabla de valores ¿Es $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} = f\,(1)$?

P7. Estudio de $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ en valores próximos a $x = 3$.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 3} f\,(x)$?

¿Es su límite igual a $f\,(3)$?

¿Es $\lim\limits_{x\to 4} f\,(x) = f\,(4)$?

Represente graficamente $f(x)$ para mayor claridad. ¿Qué tipo de función es?

Indicación: Considerar las observaciones dadas en **P6**.

P8. Para la función $f\,(x) = 2x^2 - 4$

¿Qué entorno del punto $x = 2$ debemos considerar para asegurarnos que
$f\,(x) \in (3.9, 4.1)$?

Indicación: Aborde el problema geométricamente para avanzar en su solución algebraica, determinando las intersecciones de las rectas: $y = 3.9$ con $f\,(x)$ y de
$y = 4.1$ con $f\,(x)$. Examine las proyecciones de estos puntos sobre el eje x para contestar la pregunta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2 - B

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Estimar el valor de ciertos límites, por simple sustitución del valor en la función, manipulando la expresión dada hasta poder estimar el valor del límite.

P1. Estimar el valor de los límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x + 1} =$

(b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + 2}{x^2 - h} =$

(c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h - h^2}{h + h^3} =$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} =$

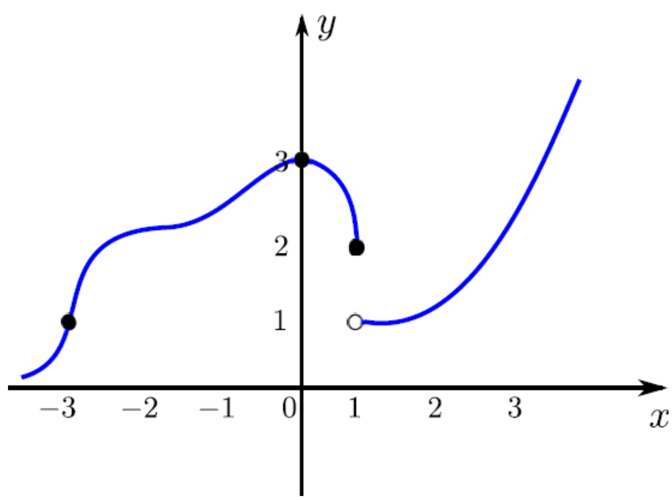
(f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} =$

(g) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} =$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} =$

(i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x - h)^2 + (x - h) - (x^2 - x)}{h} =$

P2. En base al gráfico de la función f estime:



(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\,,\; f(0)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\,,\; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)\,,\; f(1)\,,\; \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(c) ¿Es f continua en $x = 1$?

P3. A partir de la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ -x, & \text{si } x \in (0,1) \\ 2+x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estime el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)\,,\ f(0)\,,\ f(1)$

(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)\,,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)\,,\ \lim_{x\to 1} f(x)$

(c) $\lim_{x\to -2} f(x)\,,\ f(-2)\,,\ \lim_{x\to 3} f(x)$

(d) **Definición:** f se dice continua en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

¿Es f continua en $x_0 = 0$?

¿Es f continua en $x_0 = 1$?

P4. Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ si $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

¿Es $f(x)$ continua en $x = 2$?
Justifique su respuesta

P5. Si $P = \left(2, \sqrt{2}\right)$ y $Q = \left(2+h, \sqrt{2+h}\right)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es:

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{2+h-2} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

Si $h \to 0$ entonces $Q \to P$. Estime $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

¿A que valor corresponde este límite?

Indicación: Represente graficamente la situación en estudio usando Geogebra.

P6. (a) Haga un bosquejo para una función f que satisfaga las cuatro condiciones siguientes.

a) $D_f = [0,3]$

b) $f(n) = 2$, si $n = 0,1,2,3,4$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2,\ \ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

(b) ¿Es f continua en $x = 2$ y $x = 3$?. Justifique su respuesta.

P7. Dos límites importantes:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

(i) Use (a) para hacer ver (b).

(ii) Busque la demostración de (a)

Indicación: Use Winplot para graficar ambas funciones y examinar su tabla de valores.

P8. Use uno de los resultados dados en **P7** para estimar los siguientes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} =$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x} =$

(d) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta} =$

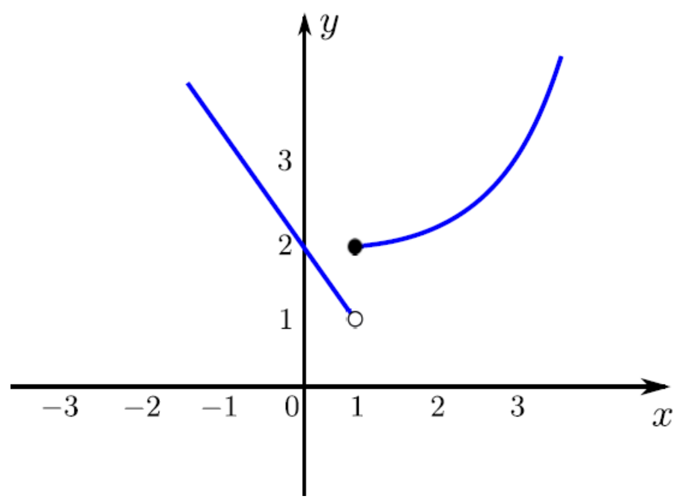
P9. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $g(x)$ es acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$. Use este resultado para estimar $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3 - B
Límite y Continuidad

Objetivos:

- Avanzar en la comprensión del concepto de límite dado en términos de ε y δ.
- Revisar la continuidad de una función en un punto, estimando límites laterales.

P1. Según la gráfica adjunta estime:



(a) El valor de $f(x)$ cuando:

  (a) $x \longrightarrow 1^+$
  (b) $x \longrightarrow 1^-$

(b) Si en el eje y consideramos un intervalo abierto en torno de $y = 2$ como: $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, ¿es posible hallar un intervalo en torno de $x = 1$, tal que sus imagenes $f(x)$ estén en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$?

(c) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?. Justifique.

(d) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

P2. El $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ilustre gráficamente esta definición.

P3. A partir de la definición dada en **P2**, una vez estimado el valor del límite, para un ε dado hallamos el correspondiente $\delta(\varepsilon)$. Como $\lim_{x \to 1}(3x + 1) = 4$ se tiene que establecer una relación entre:

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \text{ y } |x - 1| < \delta.$$

En efecto:

$|f(x) - 4| = |(3x + 1) - 4| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta = \varepsilon$ luego, basta tomar

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ con lo que si $x \in \left(1 - \dfrac{\delta}{3}, 1 + \dfrac{\delta}{3}\right) \Rightarrow f(x) \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$.

(a) Como un caso particular, para $\varepsilon = 0.1$ determine $\delta(\varepsilon)$ para verificar que si $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 0.1$.

(b) Ilustre la situación anterior graficamente.

(c) Considere ahora un $\varepsilon = 0.01$, halle el correspondiente $\delta(0.01)$ y verifique la definición de éste límite.

P4. Usamos la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

a) Debemos entonces establecer una relación entre ε y δ tal que nos garantice que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

b) Así, $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2|$, ahora para todo $x \in (1, 3)$, se tiene que

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < x + 2 < 5 \text{ y } |x + 2| < 5$$

c) Si consideramos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ se tendrá que

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

d) Use la definición formal $(\varepsilon - \delta)$ para probar que: $\lim_{x \to 2}\left(x^2 + 2\right) = 6$

P5. En términos generales, una función f es continua si su gráfica es una curva sin interrupciones. De manera formal es continua en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 3$ para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ \\ x - 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Indicación: Use el comando join(.......) para graficarla

¿Es posible hacerla continua en $x_0 = 0$?

¿Es continua en $x_0 = -3$?

P6. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(-x) = \dfrac{-1}{x}$ en $x_0 = 0$?

- ¿Se puede reparar dicha discontinuidad?
- ¿En $x_0 = 2$ es continua $f(x) = \dfrac{-1}{x}$?

P7. Determine el valor de k de modo que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 \operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ \\ k - x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la función $g(x)$ de modo que ella sea continua en $x = 1$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ \\ 8, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Redefina la función g para que sea continua en todo real x.
- Grafique las funciones anteriores asando Winplot una vez estudiadas la continuidad de ella en los puntos indicados.

P8. Estudie la función $y = \dfrac{1}{3-x}$ en valores próximos a $x = 3$.

- ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?
- ¿Es su límite igual a $f(3)$?
- ¿$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = ?$, ¿Es f continua en $x = 4$?
- Grafique $f(x)$, use Winplot o Geogebra.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4 - B

Complementaria - Límites

P1. Límite al infinito

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

Significa que la función se apróxima a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Asi, x es grande y positivo.

Ejemplos:

Estimar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ para cada una de la funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = e^{-x}$

Solución: (1) Usando Winplot vemos su gráfica y su tabla de valores.

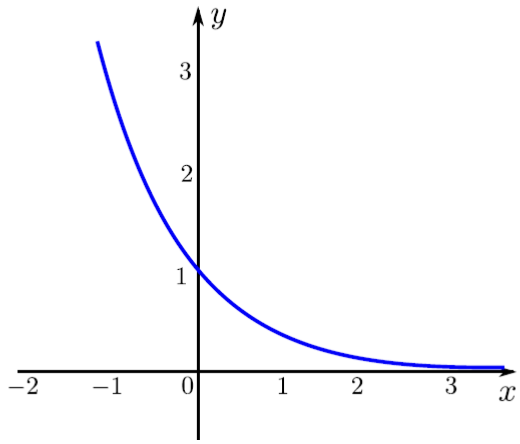
Si x aumenta sin límite entonces $f(x) = x^2$ también lo hace, luego $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Si x disminuye sin límite entonces x^2 aumenta y es grande positivo ello implica que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

(3) $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

Su gráfico es:



Así, si x es grande positivo entonces $\left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} \to 0$, si $x \to \infty$,

luego $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Ahora si x es grande negativo entonces $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ es grande positivo

luego $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

(2) Tarea de manera grupal.

P2. Comparación de funciones para valores grande positivo

A mode de ejemplo considere el gráfico de $y = 3^x$ con $y = x^5$ en:

a) $D_f = [2, 4]$

b) $D_f = [4, \infty)$

Concluya del análisis gráfico y tabular que función domina sobre la otra, esto es, $2^x \leq x^3$ o $x^3 \leq 2^x$.

P3. Comportamiento final de funciones polinomicas.

En general, si $a_n \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$$

Lo mismo es válido si se cambia $x \to \infty$ por $x \to -\infty$ (valores grandes pero negativos)

P4. Para los polinomios $p(x)$ examine su comportamiento para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

(a) $p(x) = 2x^3 + 2x - 1$

(b) $p(x) = -x^6 + 2x^2 + x + 2$

Indicación: Use el resultado dado en **P3**

P5. Use Winplot para examinar las funciones:

(a) $f(x) = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1} = sqr(x-1) = sqrt(x-1)$

(b) $f(x) = x^{2/3}$

En ambos casos considere $x \geq 1$.

¿Qué función domina cuando $x \to \infty$?

P6. Determine el valor de los límites

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} -10x^4, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} -10x^4$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} 2\left(1 - e^{-x}\right), \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(1 - e^{-x}\right)$

P7. Trace una gráfica para $f(x)$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(c) De expresiones algebraicas para cada una de las funciones que satisfacen (a) y (b).

Evaluación sobre límite y continuidad

Objetivos:

- Percibir mediante la resolución de estos problemas el grado de comprensión alcanzado de estos conceptos.

P1. Use Winplot para estudiar la tabla de valores de las gráficas de cada una de las funciones dadas, estimando así el límite de ellos. Resuelva por otro medio, algebraico, dichos límites. Examine además la continuidad en los puntos donde se estima el valor del límite.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 2x + 1\right)$

(c) $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{2h^2 + 1}{h}$

(d) $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{\sqrt{h-1} - 1}{h - 2}$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(g) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$

P2. Estime el valor de los límites, haga una simplificación previa de modo de poder calcular los límites propuestos.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

(c) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t - 1}{\sqrt{t} - 1}$

(d) $\lim\limits_{u \to -1} \dfrac{u^2 + 2u + 1}{u^2 + 3u + 1}$

(e) $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{\sqrt{h+3} - 2}{h - 1}$

P3. Suponga que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -1$

Estime el valor de:

(a) $\lim_{x\to 2} [2f(x) + 4g(x)]$

(b) $\lim_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)+2}\right]$

(c) $\lim_{x\to 2} \left[f(x)\cdot [g(x)]^3\right]$

(d) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)+g(x)}$

P4. Grafique (Winplot) las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$$

$$g(x) = \frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}$$

Para $x \in [-2, 2]$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Estime $\lim_{x\to 0} g(x)$

P5. Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$

$f(x) =$

$g(x) =$

Ilustra lo anterior gráficamente.

P6. Da una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.

$\lim_{x\to} \qquad\qquad = 3$

$\lim_{x\to} \qquad\qquad = 3$

Dibuja tal función en el plano.

P7. Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en $x = 2$.

$f(x) =$

Represéntala graficamente.

Construye su tabla de valores.

P8. Estudie la existencia de los límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, ¿Es continua en $x = 0$?

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-1}$, ¿Es continua en $x = 1$?

P9. Determine todos los valores de c tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ \\ x, & x > c \end{cases}$$

P10. Use la definición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 4}\left(4 - \frac{x}{2}\right) = 2$$

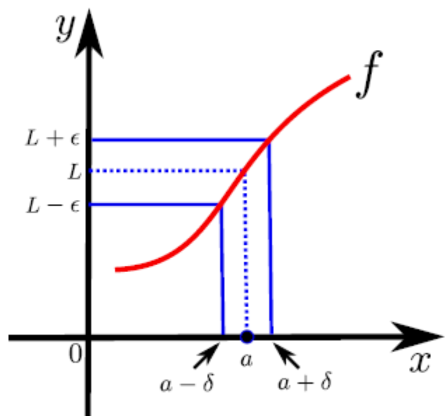
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1 - C

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Realizar estimaciones tanto numérica (tablas) como en un gráfico cerca de un punto, con la intención de hallar el límite allí.

  Definición (Priliminar): f converge a L cuando x tiende a "a" si para todo $x \approx a$ $(x \neq a)$ se tiene que $f(x)$ esta próximo a L, esto es, $f(x) \approx L$ $(f(x) \longrightarrow L)$.



P1. Para $y = -x + 2$, construya su gráfico usando Winplot y examine su "tabla" de valores. ¿Qué sucede con los valores de y si x esta próximo a los valores de $x = 2$? ¿Tiende a un valor determinado?

P2. Use Winplot, si lo estima necesario, para graficar:

(a) $f(x) = 2$ (Explícita)

Si x tiende a 3 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(b) $f(x) = -2x$

Si x tiende a 0 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(c) Concluya con: $\lim\limits_{x \to 3} 2 = \,?$ y $\lim\limits_{x \to 0} -2x = \;?$

P3. Estudio de la función cuadrática $y = -x^2 + 2x$ para valores próximos a x cerca de $x = 1$.

Indicación: A partir del gráfico (Winplot) examine su tabla de valores. Modifique la opción "Param".

- Concluya con el valor de $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Es igual a $f(1)$ el límite anterior?

P4. Estudio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Para determinar $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Indicación: Graficar y examinar la tabla de valores de $f(x)$ entorno a $x = 2$, tanto para valores $x < 2$ ($x \to 2^-$) y $x > 2$ ($x \to 2^+$).

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$
- luego $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$
- ¿Está definida $f(x)$ en $x = 2$?
- ¿Qué sucede con $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$?

P5. Para la función $H(t)$ definida como

$$H(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0 \\ \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$

Indicación: Examine el valor de los límites laterales de $H(t)$ cuando $t \to 0$.

- ¿Existe el límite de $H(t)$ cuando $t \to 3$? ¿Cuál es su valor?¿Por qué?
- Grafique $H(t)$ con Winplot e indique el comando usado para ello.

P6. Estudio de la función $y = \dfrac{1}{x+1}$ cerca de $x = -1$.

- Estime el valor de:

  (a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x+1} =$

  (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} =$

Indicación: Use Winplot y examine su tabla de valores ¿Es $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x+1} = f(-1)$?

P7. Estudio de $y = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ en valores próximos a $x = 3$.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

¿Es su límite igual a $f(3)$?

¿Es $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$?

Represente graficamente $f(x)$ para mayor claridad. ¿Qué tipo de función es?

Indicación: Considerar las observaciones dadas en **P6**.

P8. Para la función $f(x) = x^2 + 2x - 4$

¿Qué entorno del punto $x = 2$ debemos considerar para asegurarnos que $f(x) \in (3.9, 4.1)$?

Indicación: Aborde el problema geométricamente para avanzar en su solución algebraica, determinando las intersecciones de las rectas: $y = 3.9$ con $f(x)$ y de $y = 4.1$ con $f(x)$. Examine las proyecciones de estos puntos sobre el eje x para contestar la pregunta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2 - C

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Estimar el valor de ciertos límites, por simple sustitución del valor en la función, manipulando la expresión dada hasta poder estimar el valor del límite.

P1. Estimar el valor de los límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1} =$

(b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{2+3xh}{h+x^2} =$

(c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{h^2-h}{4h+h^3} =$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} =$

(e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} =$

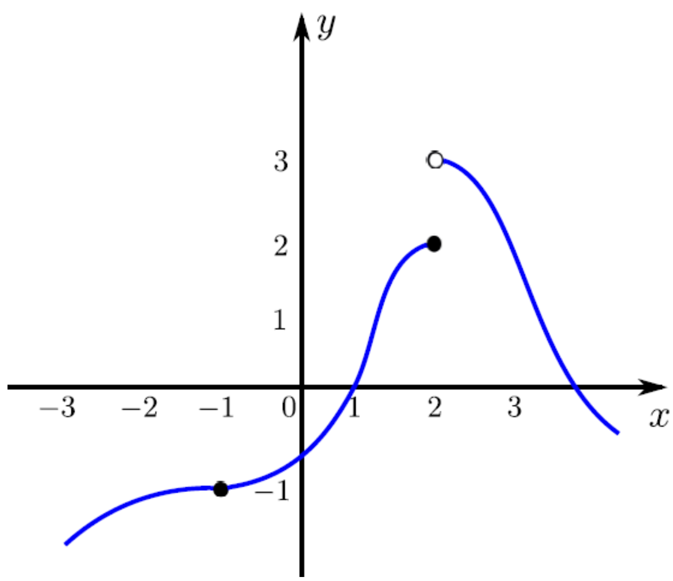
(f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1} =$

(g) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} =$

(h) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

(i) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} =$

P2. En base al gráfico de la función f estime:



(a) $\lim_{x\to -1} f(x)\,,\ f(-1)$

(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)\,,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)\,,\ f(2)\,,\ \lim_{x\to 2} f(x)$

(c) ¿Es f continua en $x = 2$?

P3. A partir de la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estime el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $f(2)$

(b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $f(3)$

(c) **Definición:** f se dice continua en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

¿Es f continua en $x_0 = 2$?

¿Es f continua en $x_0 = 3$?

P4. Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ si $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

¿Es $f(x)$ continua en $x = 2$?
Justifique su respuesta

P5. Si $P = (4, 2)$ y $Q = \left(4 + h, \sqrt{4+h}\right)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es:

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{4 + h - 4} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

Si $h \to 0$ entonces $Q \to P$. Estime $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

¿A que valor corresponde este límite?

Indicación: Represente graficamente la situación en estudio usando Geogebra.

P6. (a) Haga un bosquejo para una función f que satisfaga las cuatro condiciones siguientes.

a) $D_f = [0,2]$

b) $f(n) = 3$, si $n = 0, 1, 2, 3, 4$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(3)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

(b) ¿Es f continua en $x = 1$ y $x = 2$?. Justifique su respuesta.

P7. Dos límites importantes:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

(i) Use (a) para hacer ver (b).

(ii) Busque la demostración de (a)

Indicación: Use Winplot para graficar ambas funciones y examinar su tabla de valores.

P8. Use uno de los resultados dados en **P7** para estimar los siguientes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} =$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x} =$

(d) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta} =$

P9. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $g(x)$ es acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$. Use este resultado para estimar $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

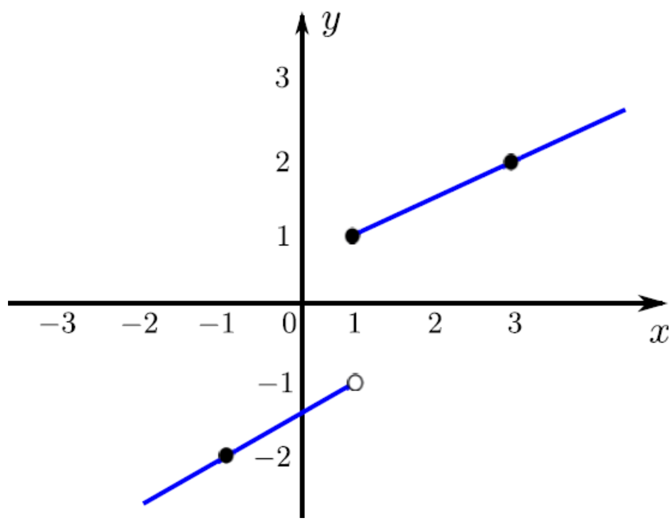
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3 - C

Límite y Continuidad

Objetivos:

- Avanzar en la comprensión del concepto de límite dado en términos de ε y δ.
- Revisar la continuidad de una función en un punto, estimando límites laterales.

P1. Según la gráfica adjunta estime:



(a) El valor de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1^+$ y $x \longrightarrow 1^-$.

(b) ¿Es posible hallar un intervalo alrededor de $x = 1$ (eje x), como: $(1-\delta, 1+\delta)$ tal que sus imágenes $f(x)$ estén en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$?

(c) Para el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ del eje y, halle un intervalo en torno de $x = 2$, como $(2-\delta, 2+\delta)$ tal que sus imagenes estén en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(d) ¿Existe límite de $f(x)$ en $x = 2$? ¿Cuál es su valor?

P2. El $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ilustre gráficamente esta definición.

P3. A partir de la definición dada en **P2**, una vez estimado el valor del límite, para un ε dado hallamos el correspondiente $\delta(\varepsilon)$. Como $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 2) = 4$ se tiene que establecer una relación entre:

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \text{ y } |x - 1| < \delta.$$

En efecto:

$|f(x) - 4| = |(2x + 2) - 4| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$ luego, basta tomar

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ con lo que si $x \in \left(1 - \dfrac{\delta}{2}, 1 + \dfrac{\delta}{2}\right) \Rightarrow f(x) \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$.

(a) Como un caso particular, para $\varepsilon = 0.1$ determine $\delta(\varepsilon)$ para verificar que si $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 0.1$.

(b) Ilustre la situación anterior graficamente.

(c) Considere ahora un $\varepsilon = 0.01$, halle el correspondiente $\delta(0.01)$ y verifique la definición de éste límite.

P4. Usamos la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

a) Debemos entonces establecer una relación entre ε y δ tal que nos garantice que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

b) Así, $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2|$, ahora para todo $x \in (1, 3)$, se tiene que

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < x + 2 < 5 \text{ y } |x + 2| < 5$$

c) Si consideramos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ se tendrá que

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

d) Use la definición formal $(\varepsilon - \delta)$ para probar que: $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 1\right) = 0$

P5. En términos generales, una función f es continua si su gráfica es una curva sin interrupciones. De manera formal es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 3$ para

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x > 0 \\ \\ -1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Indicación: Use el comando join(.......) para graficarla

¿Es posible hacerla continua en $x_0 = 0$?

¿Es continua en $x_0 = -3$?

P6. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ en $x_0 = 0$?

- ¿Se puede reparar dicha discontinuidad?
- ¿En $x_0 = 2$ es continua $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$?

P7. Determine el valor de k de modo que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ \\ k - 3x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la función $g(x)$ de modo que ella sea continua en $x = 1$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ \\ -4, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Redefina la función g para que sea continua en todo real x.
- Grafique las funciones anteriores asando Winplot una vez estudiadas la continuidad de ella en los puntos indicados.

P8. Estudie la función $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ en valores próximos a $x = 3$.

- ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?
- ¿Es su límite igual a $f(3)$?
- ¿$\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$?, ¿Es f continua en $x = 4$?
- Grafique $f(x)$, use Winplot o Geogebra.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4 - C

Complementaria - Límites

P1. Límite al infinito

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Significa que la función se apróxima a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Asi, x es grande y positivo.

Ejemplos:

Estimar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada una de la funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x^3$

c) $f(x) = e^{-x}$

Solución: (1) Usando Winplot vemos su gráfica y su tabla de valores.

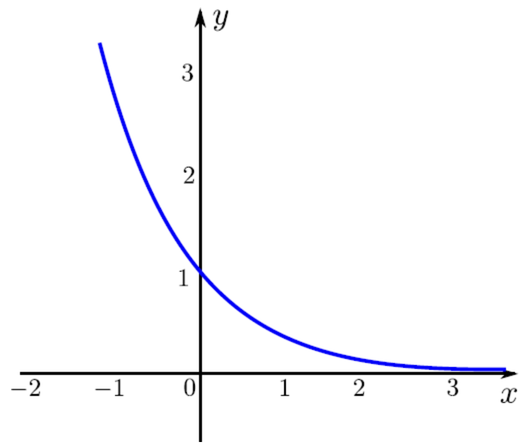
Si x aumenta sin límite entonces $f(x) = x^2$ también lo hace, luego $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Si x disminuye sin límite entonces x^2 aumenta y es grande positivo ello implica que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

(3) $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

Su gráfico es:



Así, si x es grande positivo entonces $\left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} \to 0$, si $x \to \infty$,

luego $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Ahora si x es grande negativo entonces $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ es grande positivo

luego $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

(2) Tarea de manera grupal.

P2. Comparación de funciones para valores grande positivo

A mode de ejemplo considere el gráfico de $y = 2^x$ con $y = x^4$ en:

a) $D_f = [2, 4]$

b) $D_f = [4, \infty)$

Concluya del análisis gráfico y tabular que función domina sobre la otra, esto es, $2^x \leq x^3$ o $x^3 \leq 2^x$.

P3. Comportamiento final de funciones polinomicas.

En general, si $a_n \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$$

Lo mismo es válido si se cambia $x \to \infty$ por $x \to -\infty$ (valores grandes pero negativos)

P4. Para los polinomios $p(x)$ examine su comportamiento para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

(a) $p(x) = -x^5 + x^4 + 20$

(b) $p(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x$

Indicación: Use el resultado dado en **P3**

P5. Use Winplot para examinar las funciones:

(a) $f(x) = (x-2)^{1/2} = \sqrt{x-2} = sqr(x-2) = sqrt(x-2)$

(b) $f(x) = x^{1/3}$

En ambos casos considere $x \geq 2$.

¿Qué función domina cuando $x \to \infty$?

P6. Determine el valor de los límites

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} -10x^3, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} -10x^3$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} 5^x, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} 3(1-e^x), \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 3(1-e^x)$

P7. Trace una gráfica para $f(x)$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(c) De expresiones algebraicas para cada una de las funciones que satisfacen (a) y (b).

Evaluación sobre límite y continuidad

Objetivos:

- Percibir mediante la resolución de estos problemas el grado de comprensión alcanzado de estos conceptos.

P1. Use Winplot para estudiar la tabla de valores de las gráficas de cada una de las funciones dadas, estimando así el límite de ellos. Resuelva por otro medio, algebraico, dichos límites. Examine además la continuidad en los puntos donde se estima el valor del límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+1\right)$

(c) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{2h^2+1}{h}$

(d) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{\sqrt{h-1}-1}{h-2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$

P2. Estime el valor de los límites, haga una simplificación previa de modo de poder calcular los límites propuestos.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

(c) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$

(d) $\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u^2+2u+1}{u^2+3u+1}$

(e) $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{h+3}-2}{h-1}$

P3. Suponga que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 2} g(x) = -1$

Estime el valor de:

(a) $\lim_{x \to 2} [2f(x) + 4g(x)]$

(b) $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x) + 2}\right]$

(c) $\lim_{x \to 2} \left[f(x) \cdot [g(x)]^3\right]$

(d) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x) + g(x)}$

P4. Grafique (Winplot) las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$$

$$g(x) = \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}$$

Para $x \in [-2, 2]$ se cumple que $f(x) \le g(x) \le h(x)$

Estime $\lim_{x \to 0} g(x)$

P5. Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$

$f(x) =$

$g(x) =$

Ilustra lo anterior gráficamente.

P6. Da una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.

$\lim_{x \to} \qquad = 3$

$\lim_{x \to} \qquad = 3$

Dibuja tal función en el plano.

P7. Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en $x = 2$.

$f(x) =$

Represéntala graficamente.

Construye su tabla de valores.

P8. Estudie la existencia de los límites:

(a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, ¿Es continua en $x = 0$?

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$, ¿Es continua en $x = 1$?

P9. Determine todos los valores de c tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ x, & x > c \end{cases}$$

P10. Use la definición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right) = 2$$

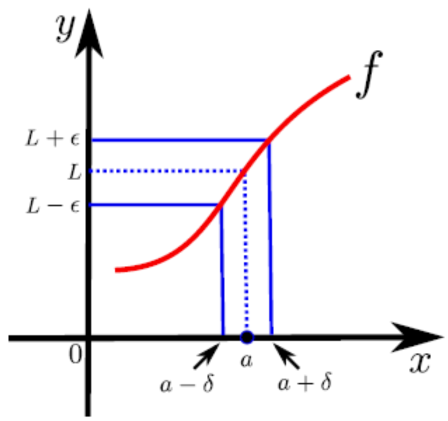
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1 - D

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Realizar estimaciones tanto numérica (tablas) como en un gráfico cerca de un punto, con la intención de hallar el límite allí.

  Definición (Priliminar): f converge a L cuando x tiende a "a" si para todo $x \approx a$ $(x \neq a)$ se tiene que $f(x)$ esta próximo a L, esto es, $f(x) \approx L$ $(f(x) \longrightarrow L)$.



P1. Para $y = -2x+3$, construya su gráfico usando Winplot y examine su "tabla" de valores. ¿Qué sucede con los valores de y si x esta próximo a los valores de $x = -1$? ¿Tiende a un valor determinado?

P2. Use Winplot, si lo estima necesario, para graficar:

(a) $f(x) = -2$ (Explícita)

Si x tiende a -1 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x$

Si x tiende a -2 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(c) Concluya con: $\lim\limits_{x \to -1} -2 = \,?$ y $\lim\limits_{x \to -2} -\dfrac{1}{2}x = \,?$

P3. Estudio de la función cuadrática $y = -x^2 - 2x$ para valores próximos a x cerca de $x = -1$.

Indicación: A partir del gráfico (Winplot) examine su tabla de valores. Modifique la opción "Param".

- Concluya con el valor de $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$
- ¿Es igual a $f(-1)$ el límite anterior?

P4. Estudio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$. Para determinar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Indicación: Graficar y examinar la tabla de valores de $f(x)$ entorno a $x = 1$, tanto para valores $x < 1$ ($x \to 1^-$) y $x > 1$ ($x \to 1^+$).

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$
- luego $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Está definida $f(x)$ en $x = 1$?
- ¿Qué sucede con $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?

P5. Para la función $H(t)$ definida como

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0 \\ \\ \text{-}1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$

Indicación: Examine el valor de los límites laterales de $H(t)$ cuando $t \to 0$.

- ¿Existe el límite de $H(t)$ cuando $t \to 3$? ¿Cuál es su valor?¿Por qué?
- Grafique $H(t)$ con Winplot e indique el comando usado para ello.

P6. Estudio de la función $y = \dfrac{-1}{x}$ cerca de $x = 0$.

- Estime el valor de:

  (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x} =$

  (b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-1}{x} =$

Indicación: Use Winplot y examine su tabla de valores ¿Es $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x} = f(0)$?

P7. Estudio de $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ en valores próximos a $x = 3$.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

¿Es su límite igual a $f(3)$?

¿Es $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$?

Represente graficamente $f(x)$ para mayor claridad. ¿Qué tipo de función es?

Indicación: Considerar las observaciones dadas en **P6**.

P8. Para la función $f(x) = 3x^2 - 8$

¿Qué entorno del punto $x = 2$ debemos considerar para asegurarnos que $f(x) \in (3.9, 4.1)$?

Indicación: Aborde el problema geométricamente para avanzar en su solución algebraica, determinando las intersecciones de las rectas: $y = 3.9$ con $f(x)$ y de $y = 4.1$ con $f(x)$. Examine las proyecciones de estos puntos sobre el eje x para contestar la pregunta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2 - D

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Estimar el valor de ciertos límites, por simple sustitución del valor en la función, manipulando la expresión dada hasta poder estimar el valor del límite.

P1. Estimar el valor de los límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{x-1} =$

(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{xh+2}{x^3-2h} =$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{h-h^2}{4h+h^2} =$

(d) $\displaystyle\lim_{h\to 1} \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} =$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} =$

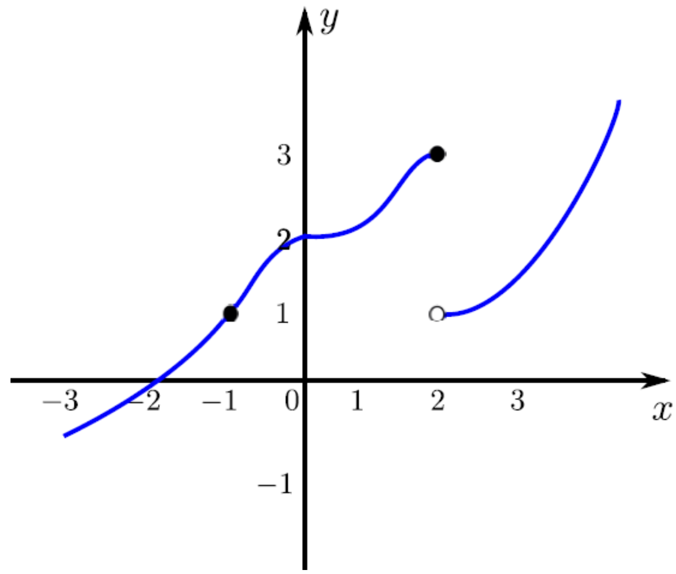
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|} =$

(g) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left[\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}\right] =$

(h) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left[\frac{\dfrac{-1}{x+h}+\dfrac{1}{x}}{h}\right] =$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^4-1} =$

P2. En base al gráfico de la función f estime:



(a) $\lim_{x \to -1} f(x)\,,\ f(-1)$

(b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)\,,\quad \lim_{x \to 2^+} f(x)\,,\ f(2)\,,\ \lim_{x \to 2} f(x)$

(c) ¿Es f continua en $x = 2$?

P3. A partir de la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estime el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)\,,\ f(0)$

(b) $\lim_{x \to 2} f(x)\,,\ f(2)$

(c) **Definición:** f se dice continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

¿Es f continua en $x_0 = 0$?

¿Es f continua en $x_0 = 2$?

P4. Para $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ estudie la continuidad en $x = 2$

¿Es continua en $x = 0$?

P5. Si $P=(1,1)$ y $Q=\left(1+h,\sqrt{1+h}\right)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es:

$$m_{PQ}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{1+h-1}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

Si $h\to 0$ entonces $Q\to P$. Estime $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

¿A que valor corresponde este límite?

Indicación: Represente graficamente la situación en estudio usando Geogebra.

P6. (a) Haga un bosquejo para una función f que satisfaga las cuatro condiciones siguientes.

a) $D_f=[0,5]$

b) $f(n)=0$, si $n=0,1,2,3,4$

c) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 4}f(x)=3$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$

(b) ¿Es f continua en $x=2$ y $x=1$?. Justifique su respuesta.

P7. Dos límites importantes:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

(i) Use (a) para hacer ver (b).

(ii) Busque la demostración de (a)

Indicación: Use Winplot para graficar ambas funciones y examinar su tabla de valores.

P8. Use uno de los resultados dados en **P7** para estimar los siguientes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}=$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}=$

(d) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}=$

P9. Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ y $g(x)$ es acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$. Use este resultado para estimar $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

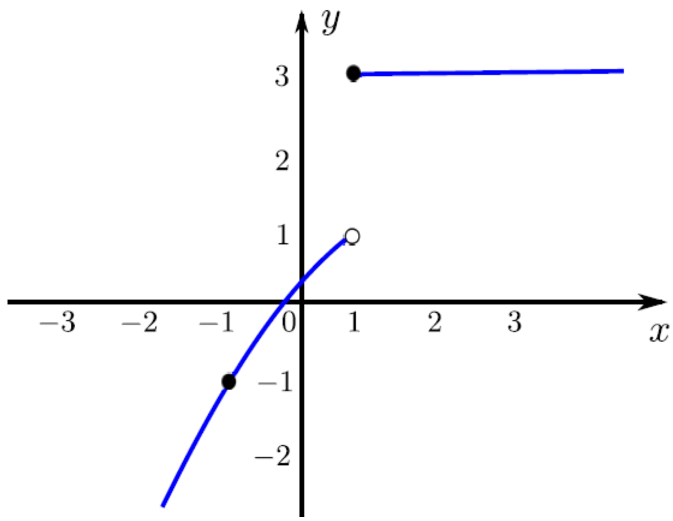
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3 - D

Límite y Continuidad

Objetivos:

- Avanzar en la comprensión del concepto de límite dado en términos de ε y δ.
- Revisar la continuidad de una función en un punto, estimando límites laterales.

P1. Según la gráfica adjunta estime:



(a) El valor de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1^+$ y $x \longrightarrow 1^-$.

(b) Para el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ del eje y, ¿Es posible hallar un intervalo en torno de $x = 1$, como $(1-\delta, 1+\delta)$ tal que sus imágenes esten en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$?

(c) Estime $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

(d) Para $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ del eje y, ¿existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (2-\delta, 2+\delta)$
$\Longrightarrow f(x) \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$?

P2. El $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ilustre gráficamente esta definición.

P3. A partir de la definición dada en **P2**, una vez estimado el valor del límite, para un ε dado hallamos el correspondiente $\delta(\varepsilon)$. Como $\lim_{x \to 1}(2x) = 2$ se tiene que establecer una relación entre:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \text{ y } |x - 1| < \delta.$$

En efecto:

$|f(x) - 2| = |(2x) - 2| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$ luego, basta tomar

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ con lo que si $x \in \left(1 - \dfrac{\delta}{2}, 1 + \dfrac{\delta}{2}\right) \Rightarrow f(x) \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$.

(a) Como un caso particular, para $\varepsilon = 0.1$ determine $\delta(\varepsilon)$ para verificar que si $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 0.1$.

(b) Ilustre la situación anterior graficamente.

(c) Considere ahora un $\varepsilon = 0.01$, halle el correspondiente $\delta(0.01)$ y verifique la definición de éste límite.

P4. Usamos la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

a) Debemos entonces establecer una relación entre ε y δ tal que nos garantice que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

b) Así, $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2|$, ahora para todo $x \in (1, 3)$, se tiene que

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < x + 2 < 5 \text{ y } |x + 2| < 5$$

c) Si consideramos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ se tendrá que

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

d) Use la definición formal $(\varepsilon - \delta)$ para probar que: $\lim_{x \to 1}\left(x^2 + 20\right) = 21$

P5. En términos generales, una función f es continua si su gráfica es una curva sin interrupciones. De manera formal es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 3$ para

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } x>0 \\ \\ x+1, & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Indicación: Use el comando join(.......) para graficarla

¿Es posible hacerla continua en $x_0=0$?

¿Es continua en $x_0=-3$?

P6. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en $x_0=0$?

- ¿Se puede reparar dicha discontinuidad?
- ¿En $x_0=2$ es continua $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$?

P7. Determine el valor de k de modo que la función $f(x)$ sea continua en $x=0$ si

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-7\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x<0 \\ \\ k-x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la función $g(x)$ de modo que ella sea continua en $x=1$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{si } x\neq 1 \\ \\ 3, & \text{si } x=1 \end{cases}$$

- Redefina la función g para que sea continua en todo real x.
- Grafique las funciones anteriores asando Winplot una vez estudiadas la continuidad de ella en los puntos indicados.

P8. Estudie la función $y=\dfrac{1}{|x-3|}$ en valores próximos a $x=3$.

- ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?
- ¿Es su límite igual a $f(3)$?
- ¿$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=$?, ¿Es f continua en $x=4$?
- Grafique $f(x)$, use Winplot o Geogebra.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4 - D

Complementaria - Límites

P1. Límite al infinito

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Significa que la función se apróxima a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Asi, x es grande y positivo.

Ejemplos:

Estimar $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ para cada una de la funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x^5$

c) $f(x) = e^{-x}$

Solución: (1) Usando Winplot vemos su gráfica y su tabla de valores.

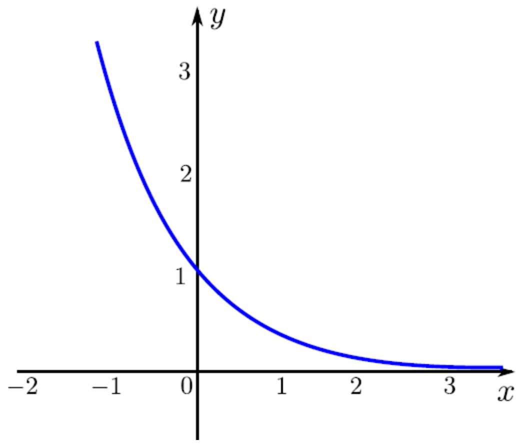
Si x aumenta sin límite entonces $f(x) = x^2$ también lo hace, luego $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$

Si x disminuye sin límite entonces x^2 aumenta y es grande positivo ello implica que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$

(3) $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

Su gráfico es:



Así, si x es grande positivo entonces $\left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} \to 0$, si $x \to \infty$,

luego $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Ahora si x es grande negativo entonces $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ es grande positivo

luego $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

(2) Tarea de manera grupal.

P2. Comparación de funciones para valores grande positivo

A mode de ejemplo considere el gráfico de $y = 3^x$ con $y = x^3$ en:

a) $D_f = [2, 4]$

b) $D_f = [4, \infty)$

Concluya del análisis gráfico y tabular que función domina sobre la otra, esto es, $2^x \leq x^3$ o $x^3 \leq 2^x$.

P3. Comportamiento final de funciones polinomicas.

En general, si $a_n \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$$

Lo mismo es válido si se cambia $x \to \infty$ por $x \to -\infty$ (valores grandes pero negativos)

P4. Para los polinomios $p(x)$ examine su comportamiento para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

(a) $p(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$

(b) $p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 1$

Indicación: Use el resultado dado en **P3**

P5. Use Winplot para examinar las funciones:

(a) $f(x) = (x-3)^{1/2} = \sqrt{x-3} = sqr\,(x-3) = sqrt\,(x-3)$

(b) $f(x) = x^{2/3}$

En ambos casos considere $x \geq 3$.

¿Qué función domina cuando $x \to \infty$?

P6. Determine el valor de los límites

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} -5x^4, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} -5x^4$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} 4^x, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} 2\left(1-e^{-x}\right), \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(1-e^{-x}\right)$

P7. Trace una gráfica para $f(x)$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

(c) De expresiones algebraicas para cada una de las funciones que satisfacen (a) y (b).

Evaluación sobre límite y continuidad

Objetivos:

- Percibir mediante la resolución de estos problemas el grado de comprensión alcanzado de estos conceptos.

P1. Use Winplot para estudiar la tabla de valores de las gráficas de cada una de las funciones dadas, estimando así el límite de ellos. Resuelva por otro medio, algebraico, dichos límites. Examine además la continuidad en los puntos donde se estima el valor del límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+1\right)$

(c) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{2h^2+1}{h}$

(d) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{\sqrt{h-1}-1}{h-2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$

P2. Estime el valor de los límites, haga una simplificación previa de modo de poder calcular los límites propuestos.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

(c) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$

(d) $\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u^2+2u+1}{u^2+3u+1}$

(e) $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{h+3}-2}{h-1}$

P3. Suponga que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -1$

Estime el valor de:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} [2f(x) + 4g(x)]$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \left[f(x) \cdot [g(x)]^3\right]$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x) + 2}\right]$

(d) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{f(x) + g(x)}$

P4. Grafique (Winplot) las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$$

$$g(x) = \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}$$

Para $x \in [-2, 2]$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Estime $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

P5. Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$

$f(x) =$

$g(x) =$

Ilustra lo anterior gráficamente.

P6. Da una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.

$\lim\limits_{x \to} \qquad\qquad = 3$

$\lim\limits_{x \to} \qquad\qquad = 3$

Dibuja tal función en el plano.

P7. Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en $x = 2$.

$f(x) =$

Represéntala graficamente.

Construye su tabla de valores.

P8. Estudie la existencia de los límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ¿Es continua en $x = 0$?

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, ¿Es continua en $x = 1$?

P9. Determine todos los valores de c tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ x, & x > c \end{cases}$$

P10. Use la definición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right) = 2$$

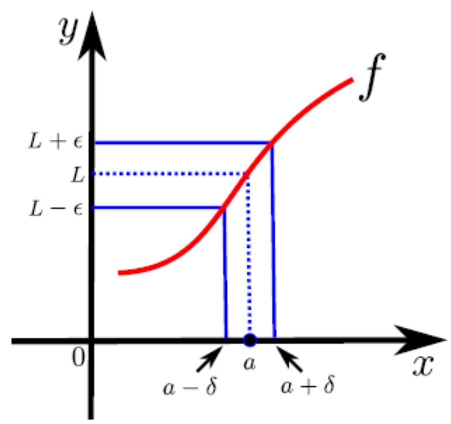
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1 - E

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Realizar estimaciones tanto numérica (tablas) como en un gráfico cerca de un punto, con la intención de hallar el límite allí.

  Definición (Priliminar): f converge a L cuando x tiende a "a" si para todo $x \approx a$ $(x \neq a)$ se tiene que $f(x)$ esta próximo a L, esto es, $f(x) \approx L$ $(f(x) \longrightarrow L)$.



P1. Para $y = \dfrac{1}{3}x + 2$, construya su gráfico usando Winplot y examine su "tabla" de valores. ¿Qué sucede con los valores de y si x esta próximo a los valores de $x = 3$? ¿Tiende a un valor determinado?

P2. Use Winplot, si lo estima necesario, para graficar:

(a) $f(x) = -1$ (Explícita) Si x tiende a 2 ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(b) $f(x) = 2x$ Si x tiende a $\dfrac{3}{2}$ ¿A qué valor tiende $f(x)$?

(c) Concluya con: $\lim\limits_{x\to 2} -1 =$? y $\lim\limits_{x\to 3/2} 2x =$?

P3. Estudio de la función cuadrática $y = 2 - 2x + 2x^2$ para valores próximos a x cerca de $x = 1$.

Indicación: A partir del gráfico (Winplot) examine su tabla de valores. Modifique la opción "Param".

- Concluya con el valor de $\lim_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Es igual a $f(1)$ el límite anterior?

P4. Estudio de la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. Para determinar $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Indicación: Graficar y examinar la tabla de valores de $f(x)$ entorno a $x = 1$, tanto para valores $x < 1$ ($x \to 1^-$) y $x > 1$ ($x \to 1^+$).

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$
- luego $\lim_{x \to 1} f(x) =$
- ¿Está definida $f(x)$ en $x = 1$?
- ¿Qué sucede con $\lim_{x \to -1} f(x)$?

P5. Para la función $H(t)$ definida como

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 2, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine $\lim_{t \to 0} H(t)$

Indicación: Examine el valor de los límites laterales de $H(t)$ cuando $t \to 0$.

- ¿Existe el límite de $H(t)$ cuando $t \to 3$? ¿Cuál es su valor?¿Por qué?
- Grafique $H(t)$ con Winplot e indique el comando usado para ello.

P6. Estudio de la función $y = \dfrac{2}{x-2}$ cerca de $x = 2$.

- Estime el valor de:

  (a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{x-2} =$

  (b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{x-2} =$

Indicación: Use Winplot y examine su tabla de valores ¿Es $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{x-2} = f\,(2)$?

P7. Estudio de $y = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$ en valores próximos a $x = 3$.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x \to 3} f\,(x)$?

¿Es su límite igual a $f\,(3)$?

¿Es $\lim\limits_{x \to 4} f\,(x) = f\,(4)$?

Represente graficamente $f(x)$ para mayor claridad. ¿Qué tipo de función es?

Indicación: Considerar las observaciones dadas en **P6**.

P8. Para la función $f\,(x) = 5x^2 - 16$

¿Qué entorno del punto $x = 2$ debemos considerar para asegurarnos que
$f\,(x) \in (3.9, 4.1)$?

Indicación: Aborde el problema geométricamente para avanzar en su solución algebraica, determinando las intersecciones de las rectas: $y = 3.9$ con $f\,(x)$ y de
$y = 4.1$ con $f\,(x)$. Examine las proyecciones de estos puntos sobre el eje x para contestar la pregunta.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2 - E

Límite y Continuidad

Objetivo:

- Estimar el valor de ciertos límites, por simple sustitución del valor en la función, manipulando la expresión dada hasta poder estimar el valor del límite.

P1. Estimar el valor de los límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{2x+3} =$

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h+2}{-2h+x^2} =$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-h^3}{1-h} =$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} =$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} =$

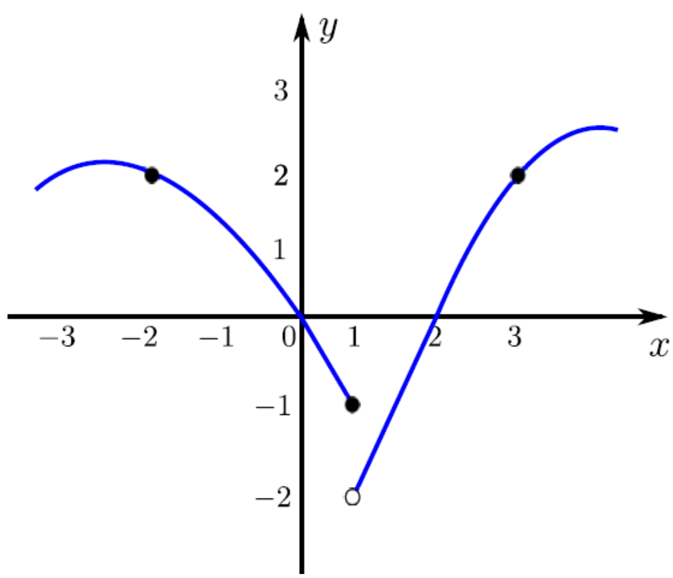
(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} =$

(g) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-5} =$

(h) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} =$

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\,(x+h)+2-(2x+2)}{h} =$

P2. En base al gráfico de la función f estime:



(a) $\lim\limits_{x\to -2} f\,(x)\,,\ f\,(-2)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\,(x)\,,\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f\,(x)\,,\ f\,(1)\,,\ \lim\limits_{x\to 1} f\,(x)$

(c) ¿Es f continua en $x = 1$?

P3. A partir de la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x < 0 \\ \\ -x+3, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estime el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\,,\ f(0)$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)\,,\ f(2)$

(c) **Definición:** f se dice continua en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

¿Es f continua en $x_0 = 0$?

¿Es f continua en $x_0 = 2$?

P4. Para $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$ estudie la continuidad en $x = -1$ y $x = 3$

P5. Si $P = \left(5, \sqrt{5}\right)$ y $Q = \left(5+h, \sqrt{5+h}\right)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es:

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{5+h-5} = \frac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h}$$

Si $h \to 0$ entonces $Q \to P$. Estime $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h}$

¿A que valor corresponde este límite?

Indicación: Represente graficamente la situación en estudio usando Geogebra.

P6. (a) Haga un bosquejo para una función f que satisfaga las cuatro condiciones siguientes.

a) $D_f = [0,4]$

b) $f(n) = 1$, si $n = 0,1,2,3,4$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3, \ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1, \ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$

(b) ¿Es f continua en $x = 1$ y $x = 3$?. Justifique su respuesta.

P7. Dos límites importantes:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

(i) Use (a) para hacer ver (b).

(ii) Busque la demostración de (a)

Indicación: Use Winplot para graficar ambas funciones y examinar su tabla de valores.

P8. Use uno de los resultados dados en **P7** para estimar los siguientes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} =$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x} =$

(d) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta \tan\theta}{\theta} =$

P9. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $g(x)$ es acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$. Use este resultado para estimar $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right)$.

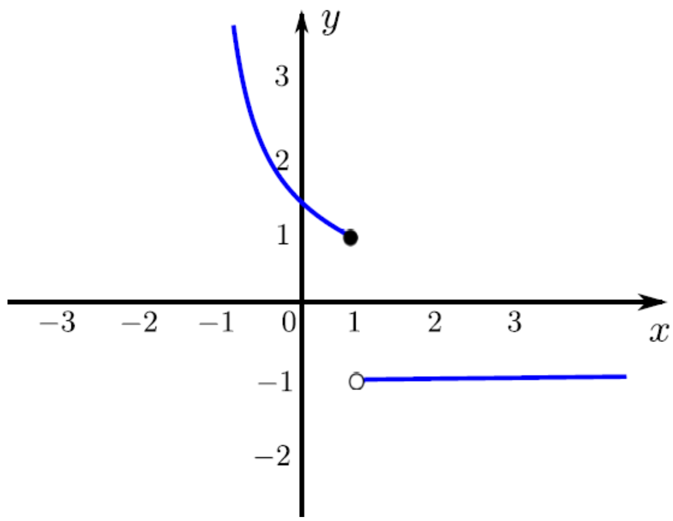
Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3 - E

Límite y Continuidad

Objetivos:

- Avanzar en la comprensión del concepto de límite dado en términos de ε y δ.
- Revisar la continuidad de una función en un punto, estimando límites laterales.

P1. Según la gráfica adjunta estime:



(a) El valor de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1^{+}$ y $x \longrightarrow 1^{-}$.

(b) Considere el intervalo en el eje y; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ ¿es posible hallar un intervalo abierto del eje x, $(1-\delta, 1+\delta)$ tal que si $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow f(x) \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$?

(c) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Justifique, usando los correspondientes entornos que hacen posible la existencia de tal límite.

P2. El $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ilustre gráficamente esta definición.

P3. A partir de la definición dada en **P2**, una vez estimado el valor del límite, para un ε dado hallamos el correspondiente $\delta(\varepsilon)$. Como $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$ se tiene que establecer una relación entre:

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \text{ y } |x - 1| < \delta.$$

En efecto:

$|f(x) - 5| = |(2x + 3) - 5| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$ luego, basta tomar

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ con lo que si $x \in \left(1 - \dfrac{\delta}{2}, 1 + \dfrac{\delta}{2}\right) \Rightarrow f(x) \in (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

(a) Como un caso particular, para $\varepsilon = 0.1$ determine $\delta(\varepsilon)$ para verificar que si $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.1$.

(b) Ilustre la situación anterior graficamente.

(c) Considere ahora un $\varepsilon = 0.01$, halle el correspondiente $\delta(0.01)$ y verifique la definición de éste límite.

P4. Usamos la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$ para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

a) Debemos entonces establecer una relación entre ε y δ tal que nos garantice que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

b) Así, $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2|$, ahora para todo $x \in (1, 3)$, se tiene que

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < x + 2 < 5 \text{ y } |x + 2| < 5$$

c) Si consideramos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ se tendrá que

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

d) Use la definición formal $(\varepsilon - \delta)$ para probar que: $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 - 2\right) = -1$

P5. En términos generales, una función f es continua si su gráfica es una curva sin interrupciones. De manera formal es continua en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 3$ para

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x > 0 \\ \\ x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Indicación: Use el comando join(.......) para graficarla

¿Es posible hacerla continua en $x_0 = 0$?

¿Es continua en $x_0 = -3$?

P6. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ en $x_0 = 0$?

- ¿Se puede reparar dicha discontinuidad?
- ¿En $x_0 = 2$ es continua $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$?

P7. Determine el valor de k de modo que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ \\ k - kx, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la función $g(x)$ de modo que ella sea continua en $x = 1$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Redefina la función g para que sea continua en todo real x.
- Grafique las funciones anteriores asando Winplot una vez estudiadas la continuidad de ella en los puntos indicados.

P8. Estudie la función $y = \dfrac{1}{(3 - x)^2}$ en valores próximos a $x = 3$.

- ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?
- ¿Es su límite igual a $f(3)$?

- ¿$\lim_{x \to 4} f(x) = ?$, ¿Es f continua en $x = 4$?
- Grafique $f(x)$, use Winplot o Geogebra.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4 - E
Complementaria - Límites

P1. Límite al infinito

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Significa que la función se apróxima a L a medida que los valores de x aumentan cada vez más. Asi, x es grande y positivo.

Ejemplos:

Estimar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada una de la funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^7$

c) $f(x) = e^{-x}$

Solución: (1) Usando Winplot vemos su gráfica y su tabla de valores.

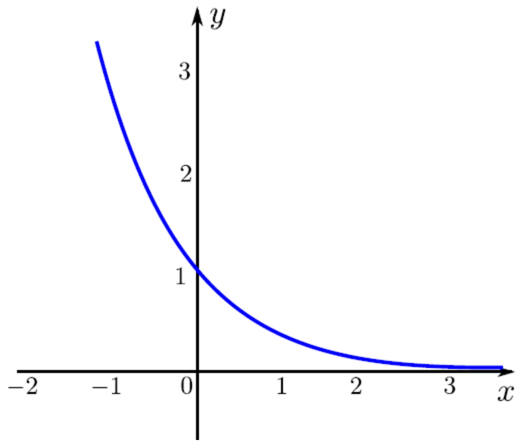
Si x aumenta sin límite entonces $f(x) = x^2$ también lo hace, luego $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Si x disminuye sin límite entonces x^2 aumenta y es grande positivo ello implica que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

(3) $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

Su gráfico es:



Así, si x es grande positivo entonces $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = \dfrac{1}{e^x} \to 0$, si $x \to \infty$,

luego $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Ahora si x es grande negativo entonces $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ es grande positivo

luego $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

(2) Tarea de manera grupal.

P2. Comparación de funciones para valores grande positivo

A mode de ejemplo considere el gráfico de $y = 2^x$ con $y = x^5$ en:

a) $D_f = [2, 4]$

b) $D_f = [4, \infty)$

Concluya del análisis gráfico y tabular que función domina sobre la otra, esto es, $2^x \leq x^3$ o $x^3 \leq 2^x$.

P3. Comportamiento final de funciones polinomicas.

En general, si $a_n \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$$

Lo mismo es válido si se cambia $x \to \infty$ por $x \to -\infty$ (valores grandes pero negativos)

P4. Para los polinomios $p(x)$ examine su comportamiento para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

(a) $p(x) = -x^7 + x^4 + 2x^3 + 1$

(b) $p(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$

Indicación: Use el resultado dado en **P3**

P5. Use Winplot para examinar las funciones:

(a) $f(x) = (x-4)^{1/2} = \sqrt{x-4} = sqr\,(x-4) = sqrt\,(x-4)$

(b) $f(x) = x^{1/3}$

En ambos casos considere $x \geq 4$.

¿Qué función domina cuando $x \to \infty$?

P6. Determine el valor de los límites

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} -2x^3, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} 4^x, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (1-e^x), \quad \lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^x)$

P7. Trace una gráfica para $f(x)$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(c) De expresiones algebraicas para cada una de las funciones que satisfacen (a) y (b).

Evaluación sobre límite y continuidad

Objetivos:

- Percibir mediante la resolución de estos problemas el grado de comprensión alcanzado de estos conceptos.

P1. Use Winplot para estudiar la tabla de valores de las gráficas de cada una de las funciones dadas, estimando así el límite de ellos. Resuelva por otro medio, algebraico, dichos límites. Examine además la continuidad en los puntos donde se estima el valor del límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+1\right)$

(c) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{2h^2+1}{h}$

(d) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{\sqrt{h-1}-1}{h-2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$

P2. Estime el valor de los límites, haga una simplificación previa de modo de poder calcular los límites propuestos.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

(c) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$

(d) $\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u^2+2u+1}{u^2+3u+1}$

(e) $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{h+3}-2}{h-1}$

P3. Suponga que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -1$

Estime el valor de:

(a) $\lim_{x\to 2} [2f(x) + 4g(x)]$

(b) $\lim_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)+2}\right]$

(c) $\lim_{x\to 2} \left[f(x)\cdot[g(x)]^3\right]$

(d) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)+g(x)}$

P4. Grafique (Winplot) las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$$

$$g(x) = \frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}$$

Para $x \in [-2, 2]$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Estime $\lim_{x\to 0} g(x)$

P5. Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$

$f(x) =$

$g(x) =$

Ilustra lo anterior gráficamente.

P6. Da una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.

$\lim_{x\to} \qquad\qquad = 3$

$\lim_{x\to} \qquad\qquad = 3$

Dibuja tal función en el plano.

P7. Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en $x = 2$.

$f(x) =$

Represéntala graficamente.

Construye su tabla de valores.

P8. Estudie la existencia de los límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ¿Es continua en $x = 0$?

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, ¿Es continua en $x = 1$?

P9. Determine todos los valores de c tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ x, & x > c \end{cases}$$

P10. Use la definición formal de límite para demostrar que

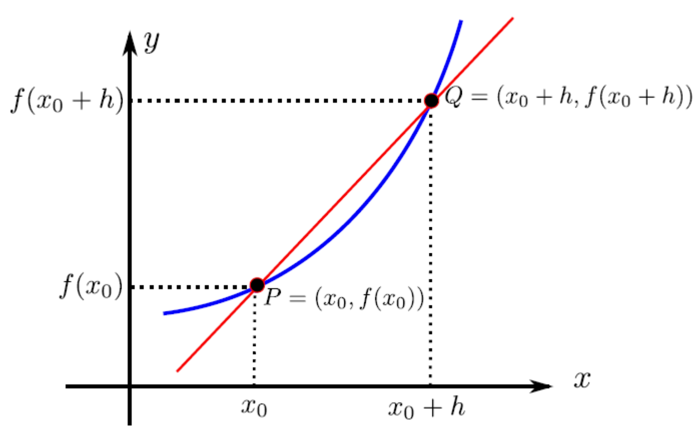
$$\lim_{x \to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right) = 2$$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1
Derivadas

Objetivos:

- Introducir el concepto de derivada tanto en su sentido físico como geométrico, a partir de la razón de cambio.
- Definir el concepto de derivada.
- Estimar la derivada para funciones sencillas usando la definición.
- Mostrar ejemplos donde la derivada en un punto no existe.
- Abordar problemas relacionados con el concepto del cálculo.

P1. Una de las formas tradicionales de presentar el la derivada es hacerlo desde su sentido geométrico, como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto P, donde tras sucesivas aproximacciones de la pendiente entre P y otro punto Q de la curva, el cual tiende a P, se obtiene finalmente, por un proceso del límite de estas pendientes secantes obtenemos la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto P. Geométricamente la situación descrita se representa como:



$$\Longrightarrow m_{PQ} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\Longrightarrow \lim_{Q \to P} m_{PQ} = m_P = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Nota: Una forma dinámica de ver la situación anterior es usar el programa Geogebra y en él construir la función $y = x^2$, poniendo dos puntos $P = (1, 1)$ y $Q = (x, x^2)$ sobre la curva, determinar la recta que pasa por ellas y hacer tender Q a P.

P2. Velocidad Promedio y Velocidad Instantánea.

Considere la tabla siguiente, la que vamos a suponer corresponde a un fenómeno físico que deseamos estudiar.

t (seg.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s(t)$ (m.)	2	37	62	77	88	77	62	37	2

la fórmula entre la razón $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ mide la velocidad promedio en un intervalo de tiempo t. Con estos datos podemos construimos la siguiente tabla.

I (Intervalo)	Velocidad Promedio
$[0,1]$	$\dfrac{s(1)-s(0)}{1-0} = 37-2 = 35m/s$
$[1,2]$	$\dfrac{s(2)-s(1)}{2-1} = \dfrac{62-37}{2-1} = 25m/s$
$[2,3]$	$\dfrac{s(3)-s(2)}{3-2} = \dfrac{77-62}{3-2} = 15m/s$
$[3,4]$	....

Luego, la velocidad promedio en el intervalo $[a,b]$ viene dada por: $[s(b)-s(a)]\,/\,[b-a]$

Observe que: en el intervalo: $[7,8] \to$ vel. promedio $= \dfrac{2-37}{8-7} = -35m/s$

¿Le indica esto, algo a usted?

Ahora, si podemos cuantificar este fenómeno físico de modo de poder generar una nueva tabla, más fina que la anterior, en torno al tiempo $t=2$ tendríamos algo como lo siguiente:

t (seg.)	1.8	1.9	2	2.1	2.2
$s(t)$ (m.)	57.80	59.95	62	63.95	65.80

Podemos ahora nuevamente estimar velocidades promedios en tormo a $t = 2$

I (Intervalo)	Velocidad Promedio
$[1.8, 2]$	$\dfrac{s(2) - s(1.8)}{2 - 1.8} =$
$[1.9, 2]$	$\dfrac{s(2) - s(1.9)}{2 - 1.9} =$
$[2, 2.1]$	$\dfrac{s(2.1) - s(2)}{2.1 - 2} =$
$[2, 2.2]$	$\dfrac{s(2.2) - s(2)}{2.2 - 2} =$

Nota: Las mediciones de éste fenómeno podrián ser más finas aún. La conclusión importante es que al estimar estas aproximaciones al valor $t = 2$, tendríamos lo que se llama "velocidad instantánea" en ese punto de tiempo t en particular.

Así,

$$\text{Vel. Inst.} = \lim_{t \to 2} \frac{v(t) - v(2)}{t - 2}$$

Ello nos indica que para obtener la velocidad instantánea en $t = t_0$ se ha de obtener el límite de las razones promedios entre $[t_0, t]$, esto es:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v(t_0) = s'(t_0)$$

Así, la verdad está en el límite. De ahí la importancia de haber revisado el concepto de límite como previo al estudio de la "Derivada".

Vamos ahora a realizar un cambio de variable, la velocidad promedio es $[s(b) - s(a)] / [b - a]$ si $b - a = h \Rightarrow b = a + h$ y si $b \to a \Rightarrow h \to 0$

luego,

$[s(b) - s(a)] / [b - a] = [s(a + h) - s(a)] / h$ y la velocidad instantánea es entonces:

$$\lim_{b \to a} [s(b) - s(a)] / [b - a] = \lim_{h \to 0} [s(a + h) - s(a)] / h = s'(a) = v(a)$$

Note que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h} = s'(a) = v(a)$

Que es el mismo límite presentado en P1. Así, la estimación de la recta tangente corresponde al mismo fenómeno que estimar la velocidad instantánea de una curva con expresión $s(t)$ en un punto en particular.

P3. En P1 y P2 hemos abordado un asunto que tiene un carácter local, $t = 2$ en P2 y $x = x_0$ en P1.

Pero, la derivada puede ser vista en un sentido general, prescinde de lo local como simplemente.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = f'(x) = s'(t)$$

- Así, la derivada se nos presenta como una función, la función derivada $f'(x)$ con dominio propio y $D_{f'} \subseteq D_f$.
- No debemos entonces perder de vista este doble sentido que posee la derivada, uno local y otro general, visto como una nueva función de estudio.
- Para $y = x^2$, examine $f'(1)$ y $f'(x)$. Algebráicamente y geométricamente.

P4.

(a) Para la función $y = \sqrt{x}$ estime $f'(2)$ y $f'(x)$.

Indicación: Estime en primer lugar $f'(x)$ y luego $f'(2)$ será un caso particular.

(b) Costruya la ecuación de la recta tangente a $y = \sqrt{x}$ en $x = 2$. Algebráicamente y geométricamente.

Indicación: Use geogebra para ilustrar (b)

P5. Usando la definición de derivada, estime $f'(x)$ para

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = x$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = x^4$

Sol: de (a). En este caso $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{x - x - h}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \frac{-1}{x(x+h)}
\end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad = \quad \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} \quad = \quad -\frac{1}{x^2}$$

No olvidar que para $x=2$, $f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$ y este valor corresponde a la pendiente de la recta tangente a $y=\frac{1}{x}$ en $p=\left(2,\frac{1}{2}\right)=(x_0,y_0)$.

Así, dicha recta tangente es:

$$\begin{aligned} y-y_0=f'(x)(x-x_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\\ &\Longleftrightarrow \quad y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\\ &\Longleftrightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x+1 \end{aligned}$$

¿Existe $f'(0)$? ¿Cuál es el dominio de f'?

P6. Es necesario conocer otras notaciones que se usan para función derivada, al respecto podemos señalar:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=y'=D_x(x)=D(y)$$

Ahora si $z=t^2$ entonces:

$$\frac{dz}{dt}=2t=z'(x)$$

También se puede encontrar, en algunos textos de cálculo, en lugar de h la expresión Δx, así

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

Ahora el valor de la derivada en un punto $x=a$ se anota de diversas maneras como:

$$f'(a)=\frac{dy}{dx}\mid_{x=a}=y'(a)=D_x y\mid_{x=a}$$

El proceso de estimar la derivada de una función se denomina "**diferenciación**". De este modo dicho proceso adquiere el rango de un operador que actúe sobre el conjunto de las funciones, algunas de las cuales serán diferenciales y otras (las menos, para nuestros casos) no lo serán. Puede ocurrir también que para una cierta función no exista $f'(a)$, en cuyo caso la función no será diferenciable o derivable allí. A modo de ejemplo de lo que acabamos de acotar podemos decir que $f'(0)$ no existe para $f(x)=|x|=abs(x)$.

P7. Si dada $f(x)$, el límite que define a la derivada existe para un valor x_0, entonces se dice que f es diferenciable en x_0.

Si f es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que f es diferenciable en todas partes.

Una función f es diferenciable sobre $[a,b]$ cuando f es diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ existen donde:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

$f'_+(a)$ corresponde a la derivada por la derecha en $x = a$

$f'_-(b)$ corresponde a la derivada por la izquierda en $x = b$

Ahora, una función es diferenciable en $x = c \in (a,b) \Leftrightarrow f'_+(c) = f'_-(c)$

P8. Sea $f(x) = |x| = abs(x)$, examinanos la derivada de $f(x)$ en $x = 0$.

(a) $f'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = 1$

(b) $f'_-(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} -1 = -1$

Luego, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, con lo que $f'(0)$ no existe.

P9. Use la definición de "Derivada" para hallar $f'(x)$ en cada caso.

(a) $f(x) = 5$

(b) $f(x) = -2x+3$

(c) $f(x) = -x^2+2x+2$

(d) $f(x) = (x+1)^2$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

(j) $f(x) = 2x^3 + x^2$

P10.

(a) Estudie $f'(0)$ para:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & , x < 0 \\ \\ -4x & , x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Estudie $f'(2)$ para:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & , x \leq 2 \\ \\ 2x-3 & , x > 0 \end{cases}$$

P11. Sea $f(x)$ una función tal que su gráfico es la recta que pasa por $P = (-a, 0)$ y $Q = (0, a)$ con $a > 0$. Halle $f'(x)$ y $f'(0)$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2

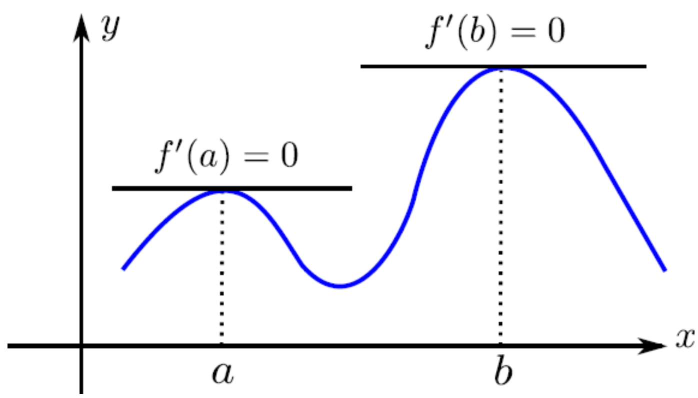
Derivadas

Objetivos:

- Revisar los diversos tipos de tangentes presentes en una curva.
- Establecer la relación entre diferenciabilidad y continuidad.
- Resolver problemas donde la estimación de la derivada es necesaria para avanzar en su solución.

P1.Tangentes horizontales. Si $y = f(x)$ es continua en un número $x = a$ y $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente en $(a, f(a))$ es horizontal.

Graficamente la situación es:



Escriba la ecuación de la recta tangente horizontal a $y = -x^2 + 2$

Haga lo mismo para la curva $y = -x^2 + 4x + 1$ (Sol. $y = 5$).

P2. Una función no posee derivada en $x = a$ si:

i) La función no es continua en $x = a$, o

ii) La gráfica de f tiene un pico en $(a, f(a))$, o

iii) En el punto $(a, f(a))$ la recta tangente es vertical.

- Así, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no posee derivada en $x = 0$, pues la función $\dfrac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$.

- La función $y = -|x| + 1$ no es diferenciable en $x = 0$, pues f tiene un pico allí.

- Note que $f(x) = x + 1$, si $x < 0 \Rightarrow f'_{-}(0) = 1$ y que $f(x) = -x + 1$, si $x \geq 0 \Rightarrow f'_{+}(0) = -1$ luego $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$ y por lo tanto $f(0)$ no existe.

- ¿Existe $f'(2)$ si $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 2 \\ 2 & , x \geq 2 \end{cases}$?

  Justifique su respuesta.

P3. Tangente Vertical

Sea $y = f(x)$ continua en $x = a$. Si $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = \infty$, entonces decimos que la gráfica de f tiene una tangente vertical en $(a, f(a))$. Una función que tiene una tangente vertical es $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ en $(a = 0, f(0) = 0) = (0, 0)$.

Se puede probar que si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} |f'(x)| = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x^{2/3}} \right| = \infty$$

Luego en $(0, f(0) = 0)$ se tiene una tangente vertical. Gráfique $y = x^{1/3}$ y su derivada usando Winplot para evidenciar la existencia de la tangente horizontal en el origen, esto es, en $(0, 0)$.

P4. Relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Si f es diferenciable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.
La demostración del hecho anterior discurre como sigue:

$f'(a)$ existe, esto es,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si ahora $x = a + h$, entonces si $h \to 0$, $x \to a$ luego

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Notar que: $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Así, $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, con lo que f es continua en $x = a$.

Nota: La continuidad de una función en un punto $x = a$ no garantiza que la función sea diferenciable allí. Ponga ejemplos que ilustren este hecho.

P5. Use internet para averiguar a quienes se les atribuye la mayor contribución en el desarrollo del cálculo. Escriba un pequeño comentario sobre ellos.

P6. Vimos en **P4** que la derivada en $x = a$ también puede definirse como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ siempre que este límite exista.}$$

Use esta definición alternativa para estimar $f'(a)$ en las funciones que se indican.

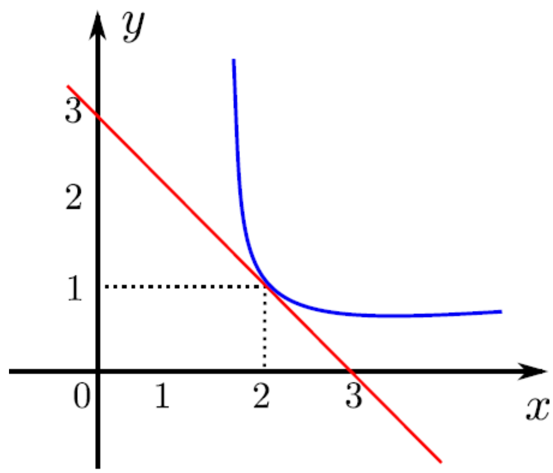
(a) $f(x) = x^4$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{2 - x}$

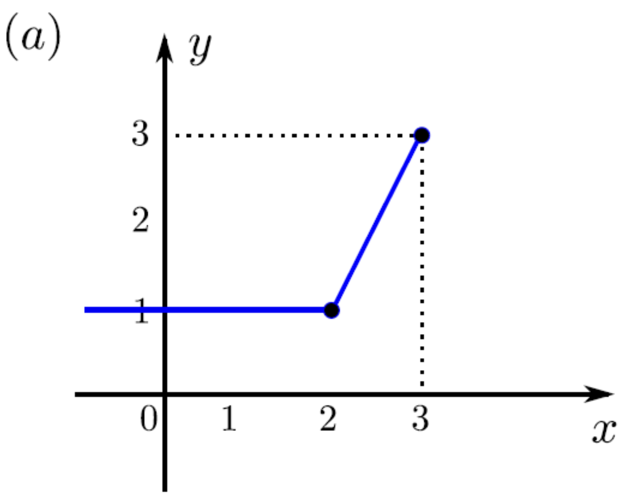
(c) $f(x) = \sqrt{x}$

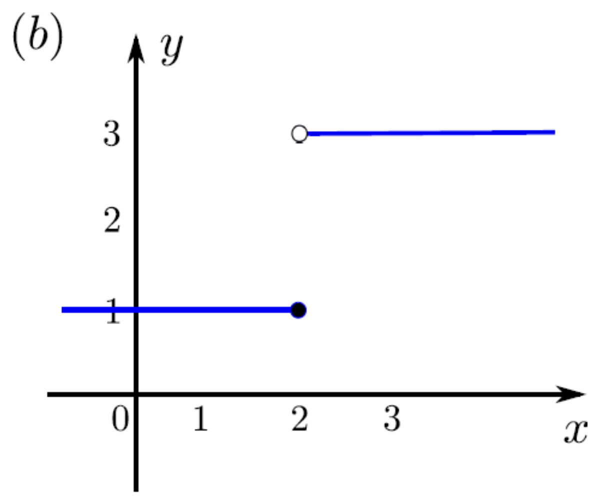
(d) $f(x) = x^3$

P7. Examine el gráfico siguiente, determine el valor de $f\,(2)$ y de $f'\,(2)$.



P8. A partir de la gráfica de f, trace la gráfica de f'. Indique donde $f'\,(x)$ no existe y porque.





P9. Use la definición:

$$f'\,(a) = \lim_{x\to a} \frac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a}$$

para estimar $f'\,(a)$ si $f\,(x) = x^{1/3}$

Indicación: $x - a = \left(x^{1/3}\right)^3 - \left(a^{1/3}\right)^3 = \left(x^{1/3} - a^{1/3}\right)\left(x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}\right)$

P10. Sabemos que $y = f\,(x)$, continua en $x = a$, tiene una tangente vertical allí si $\lim\limits_{x\to a} |f'\,(x)| = \infty$. Use este hecho para determinar donde $y = (x-2)^{1/3}$ e $y = \sqrt{x+1}$ tienen una tangente vertical.

Indicación: Gráfique dichas funciones y su respectivas derivadas usando Winplot.

P11. A partir de la definición clásica de $f'(x)$, como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y suponiendo que f es diferenciable para todo x y además satisface:

(a) $f(0) = 1$

(b) $f'(0) = 1$

(c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, haga ver que en estas condiciones $f'(x) = f(x)$ para todo x.

Indicación: Estime la derivada de f.

P12. La función $y = x^2$ es par (esto es, $f(x) = f(-x)$, $\forall x$), en tanto su derivada $y' = 2x$ es impar, esto es, $f(-x) = -f(-x), \forall x$. ¿Será verdad que toda función par y diferenciable en $(-\infty, \infty)$ tiene por derivada una función impar, esto es, $f'(-x) = -f'(x)$?

Indicación: Use la definición de clásica de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

P13. Dibuje funciones f tales que en $[0,1]$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ ¿Qué tienen en común tales f?. Y si ahora $f'(x) < 0, \forall x \in [0,1]$ ¿Qué tienen en común tales funciones?

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3

Derivadas

Objetivos:

- Aplicar las reglas de derivación para estimar la derivada de una función.
- Resolver problemas relacionados con la determinación de rectas tangentes y normales a $f(x)$ en un punto dado.
- Resolver problemas donde la derivada se usa.

P1. Use las reglas de derivación para estimar $f'(x)$ en cada caso.

a) $y = -12$

b) $y = x^7$

c) $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y = \dfrac{2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2}{x^2}$

e) $y = (4\sqrt{x} + 1)^2$

f) $y = \pi^6$

g) $y = 6x^2 + 3x^7 + 10$

h) $y = \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

P2. Determinar la derivada de cada función.

(a) $g(r) = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^3}$

(b) $Q(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$

P3. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor de x dado.

(a) $y = 3x^3 - 1$, en $x = 1$

(b) $y = -x + \dfrac{1}{x}$, en $x = 2$ (Geogebra)

P4. Encuentre el o los puntos de la gráfica de f dada donde la recta tangente es horizontal.

(a) $y = x^2 - 8x + 5$

(b) $y = x^4 - 4x^3$

Comprueba tus respuestas usando Geogebra o Winplot.

P5. Hallar la segunda derivada para la función dada.

(a) $y = (-4x + 5)^2$

(b) $y = x + \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3$

P6. Para las funciones dadas determine

(a) $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = 4x^6 + 5x^5 + 6x^4 - 2$

(b) $\dfrac{d^5y}{dx^5}$, si $y = x^5 - \dfrac{10}{x}$

P7. Determine donde $f'(x) > 0$ y donde $f'(x) < 0$ si

(a) $f(x) = x^2 + 8x - 4$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

P8. Determine los intervalos donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$ si

(a) $f(x) = (x - 1)^3$

(b) $f(x) = x^3 + x^2$

P9. Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina ecuación diferencial, por ejemplo $y'' - 4y' = 0$.

Demuestre que la función dada satisface la ecuación diferencial correspondiente.

(a) $y = \dfrac{1}{x} + x^4,\ x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

(b) $y = 4 + x + x^3,\ x^2y'' - 3xy' - 3y = 12$

P10. Halle el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y = 4$.

P11. La altura s por sobre el nivel del suelo del movimiento de un objeto en el instante "t" está dada por $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$, donde g, v_0 y s_0 son constantes. Determine la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.

P12. Determine los valores de A y B de la función $y = Ax^2 + Bx$ que satisfaga el ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.

P13. Halle los valores de a y b tales que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $P = (1, 4)$ sea -5.

P14. Determine una función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que:

$f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$

P15. Suponga que f es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Determine $f^{(100)}(x)$.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4

Derivadas

Objetivos:

- Estimar el valor de la derivada de una función donde las reglas del producto y el cociente se usen.
- Resolver problemas donde la derivada de una función, sea necesaria para su solución.

P1. Halle $\frac{dy}{dx}$ en cada caso:

(a) $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(3x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$

(b) $y = (7x-1)\left(x^4 - x^3 + 2x\right)$

(c) $y = \frac{1}{1+x^2}$

(d) $y = \frac{2x+1}{1+3x}$

(e) $y = \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}\right)\left(x^5 - 2x + 1\right)$

(f) $y = \frac{x^2}{1+x+x^3}$

P2. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor de x indicado.

(a) $y = \frac{2x}{1+x^3}$, $x = 1$

(b) $y = \left(1 + 5x + x^7\right)\left(2x^2 - 4\right)$, $x = 0$

P3. Determinar el o los puntos de la función donde la recta tangente es horizontal.

(a) $y = (x-1)^2 x$

(b) $y = \frac{x^2}{1+x^4}$

P4. Encuentre el o los puntos de la función donde la recta tangente $(f'(x))$ tiene la condición señalada.

(a) $y = \dfrac{x+4}{5+x}$, perpendicular a $y = -x$

(b) $y = \dfrac{x}{1+x}$, papalela a $y = \dfrac{1}{4}x$

P5. Halle el valor de k tal que la recta tangente a la función $f(x) = (x+k)/x^2$ tiene pendiente 5 en $x = 2$.

(Solución, $k = -21$)

P6. Suponga que tanto f como g son funciones diferenciables. Determine para cada caso $F'(1)$ sabiendo que: $f(x) = 2$, $f'(1) = -2$, $g(1) = 5$ y $g'(1) = 3$.

(a) $F(x) = 3f(x)g(x)$

(b) $F(x) = xf(x)g(x)$

(c) $F(x) = \dfrac{f(x)x}{g(x)}$

P7. Suponga que $H(x) = f(x)\sqrt{x}$ y f es diferenciable. Determine $H''(2)$ si $f(2) = -2$, $f'(2) = 2$ y $f''(2) = 1$.

(Solución: $H''(2) = \dfrac{17}{4\sqrt{2}}$)

P8. Sea $H(x) = f(x)/x$, con f una función diferenciable. Determine $H''(x)$.

P9. Determine los intervalos donde $f'(x) > 0$ y donde $f'(x) < 0$ para:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 2x}$

(d) $f(x) = \dfrac{3 + x^2}{1 + x}$

(e) $f(x) = (4x+7)(-2x+6)$

P10. Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable

(a) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = f(x)\, f(x)$

(b) Lo mismo para $y = f(x)\, f(x)\, f(x)$

(c) ¿Qué sucede con $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = [f(x)]^n$ y n es un entero positivo?

P11. Aplique el resultado hallado en P10 (c) a la determinación de $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = [p(x)]^{10}$, con $p(x)$ un polinomio de grado dos.

P12. La expresión $F = km_1m_2/r^2$, con k constante, m_1 y m_2 las masas de dos cuerpos separados por una distancia r se conoce como ley de gravitación universal.

Determine la razón de cambio instantánea de F con respecto a r cuando $r = 0.5$ km.

P13. La energía potencial U entre dos átomos en una molécula está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, donde q_1 y q_2 son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. Si $F(x) = -U\prime(x)$, estime $F(\dfrac{2q_1}{q_2})$.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº5
Derivadas

Objetivos:

- Estimar la derivada $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ usando el valor de ciertos límites.
- Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ donde las funciones trigonométricas estén presentes.

P1. Sabiendo que: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$ y que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$. Estime el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ si:

(a) $y = \operatorname{sen} x$

(b) $y = \cos x$

Indicación: Use el cociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en ambos casos y luego haga tender $h \to 0$

P2. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$. Ilustre lo anterior usando el programa Geogebra al hacer variar el valor de x entre 0 y π.

P3. Conocido el hecho que: $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ y $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$. Estime el valor de las derivadas de las restantes funciones trigonométricas, esto es, $\dfrac{d}{dx}(\tan x)$, $\dfrac{d}{dx}(\cot x)$, $\dfrac{d}{dx}(\sec x)$ y $\dfrac{d}{dx}(\csc x)$.

P4. Determine la segunda derivada de $y = \sec x$.

Solución: $y'' = \sec^3(x) + \sec x \tan^2 x$

P5. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ para cada función:

(a) $y = 2 + 6\cos x + \tan x$

(b) $y = x \cdot \operatorname{sen} x$

(c) $y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$

(d) $y = (\csc x)^{-1}$

(e) $y = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$

(f) $y = x^3 \operatorname{sen} x \cot x$

(g) $y = \dfrac{2 + 2\operatorname{sen} x}{x \cos x}$

P6. Determine una ecuación de la recta tangente a la función dada en el valor indicado.

(a) $y = \cos x \quad , x = \dfrac{\pi}{2}$

(b) $y = \tan x \quad , x = \pi$

P7. Use una identidad trigonométrica para expresar la función y luego halle su derivada.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

(b) $f(x) = \cos 2x$

P8. Halle una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto señalado, esto es, en $P = (x, f(x))$.

(a) $f(x) = \cos x \qquad , x = \pi$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{2 + \operatorname{sen} x} \qquad , x = \dfrac{\pi}{2}$

Ilustre lo anterior usando Winplot.

P9. Halle $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

(c) $f(x) = \tan x$

(d) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$

P10. Haga ver que las funciones indicadas satisfacen la ecuación diferencial.

(a) $y = A \cdot \cos x + B \cdot \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cdot \cos x \qquad , y'' + y = \operatorname{sen} x$

(b) $\frac{A \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + \frac{B \cdot \cos x}{\sqrt{x}} \qquad , x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

Nota: A y B son constantes a los casos (a) y (b).

P11. Use Geogebra para estimar dos puntos distintos P_1 y P_2 de la gráfica de $y = \cos x$ tal que la recta tangente en P_1 sea perpendicular a la recta tangente en P_2.

P12. Use Geogebra para estimar dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea paralela a la reca tangente en P_2. ¿Cuántos de estos puntos existen que satisfacen esta condición?. Resuelva ahora algebraicamente este problema.

P13. Determina la ecuación de la recta tangente a la función $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi$. Verifique su respuesta usando Winplot o Geogebra.

Solución: $y = -x$

P14. $P(r) = \frac{cr}{k+r}$ se le conoce como la curva de crecimiento de Monod de una población P, donde c y k son constantes positivas y r es la cantidad disponible de una cierta materia prima. Si la materia prima r varía periódicamente en el tiempo t como: $r(t) = 10 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{6}) + 10$. Determine $\frac{dP}{dt}$.

P15. Considere como dominio para las funciones $[0, 2\pi]$. Determine el o los valores de x tales que la tangente es horizontal si:

(a) $f(x) = 2\cos x + x$

(b) $f(x) = \frac{1}{\cos x + x}$

Resuelva usando Geogebra y algebraicamente.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº6

Derivadas

Objetivo:

- Estimar la derivada de funciones que resultan ser la composición de otras funciones, aplicando las reglas comunes de derivación y la Regla de la Cadena según sea el caso.

P1. Suponga que se desea estimar la derivada de la función $y = (1+x^4)^3$ ¿ Cómo podría resolver esto de manera sencilla y sin tener que desarrollar

$$(1+x^4)^3 = (1+x^4)(1+x^4)(1+x^4)?$$

Dar respuesta a esta interrogante es una tarea que se resuelve usando la regla de potencias y, por ende, haciendo, uso de la Regla de la Cadena.

Solución (1) Aplicar la regla del producto sobre la derivación, así:

$$\begin{aligned}
y' &= (1+x^4)'[(1+x^4)(1+x^4)] + (1+x^4)[(1+x^4)(1+x^4)]' \\
&= (1+x^4)'[\%] + (1+x^4)[(1+x^4)'(1+x^4) + (1+x^4)(1+x^4)'] \\
&= 4x^3[\%] + (1+x^4)[4x^3(1+x^4) + (1+x^4)4x^3] \\
&= 4x^3[(1+x^4)(1+x^4)] + 4x^3(1+x^4)(1+x^4) + 4x^3(1+x^4)(1+x^4) \\
&= 3[(4x^3)(1+x^4)(1+x^4)] \\
&= 12(1+x^4)^2x^3 = 3(1+x^4)^2 4x^3
\end{aligned}$$

Solución (2) Se puede aplicar el siguiente resultado: Si n es un número real y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces:

$$\frac{d}{dx}([g(x)]^n) = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

ó

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Luego en $y = (1 + x^4)^3$, $g(x) = 1 + x^4$ y $n = 4$, así

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= 3(1 + x^4)^2(1 + x^4)' \\ &= 3(1 + x^4)^2(4x^3) \\ &= 12(1 + x^4)x^3 \end{aligned}$$

P2. Use el resultado dado en **P1** solución (2), para estimar la derivada de

a) $Y = (1 + x +^3)^6$

b) $Y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

c) $Y = \dfrac{1}{(5x^7 - x^3 + 1)^5}$

d) $Y = \tan^4(x)$

e) $Y = \dfrac{(1 + 5x)^3}{(1 + x^2)^7}$

f) $Y = \sqrt{1 + x^2}$

g) $Y = \sqrt{\dfrac{2x + 4}{1 + x}}$

P3. Regla de la Cadena

Si f es diferenciable en $u = g(x)$ y g es diferenciable en x, entonces la composición $y = (fog)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$y\prime = \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

También se escribe como: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

P4. La derivada de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable g se presenta útil para poder aplicar la *Regla de la Cadena.* Algunos ejemplos de ellos:

a) $y = \cos(3x)$, aqui $u = g(x) = 3x$ y $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f \ o \ g)(x) &= f(g(x)) = \\ \cos(g(x)) &= \cos(3x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y' &= \cos'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\text{sen}\,(3x) \cdot (3x)' \\ &= -3\text{sen}\,(3x) \end{aligned}$$

b) $y = \tan(1 + x^2)$, así

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \tan'(1 + x^2) \cdot (1 + x^2)' \\ &= \sec^2(1 + x^2)(2x) \\ &= 2xsec^2(1 + x^2) \end{aligned}$$

c) $y = (1 + 5x^3)^2 \sec(3x)$, estime $y\prime$.

Indicación: Debe usar la regla del producto y la Regla de la Cadena

P5. Escriba la derivada de las seis funciones trigonométricas, considerando:

$$y = \text{sen}\,(u) \Rightarrow u = g(x)$$

Así, por ejemplo, para $y = \text{sen}\,(u)$ se tiene :$\dfrac{d}{dx}\text{sen}\,(u) = \cos(u) \cdot \dfrac{du}{dx}$ y así siguiendo...

P6. Para las siguientes funciones estime $\dfrac{dy}{dx}$

a) $y = (-3x)^{10}$

b) $y = \left(\dfrac{5}{x}\right)^{13}$

c) $y = (1 + 3x^5)^{100}$

d) $y = \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)^5$

e) $y = \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)^5$

f) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$

g) $y = \operatorname{sen}(\pi x + 2)$

h) $y = 3\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$

i) $y = \operatorname{sen}^3(5x)$

j) $y = 3\cos^2\sqrt{x}$

k) $y = x^2\cos x^2$

l) $y = \operatorname{sen}(2x)\cdot\cos(3x)$

m) $y = (\sec(4x) + \tan(2x))^3$

n) $y = \operatorname{sen}^2(2x)\cos^3(3x)$

o) $y = \operatorname{sen}^2(3x^2 + 1)$

p) $y = \tan(\tan x)$

q) $y = [1 + (1 + (1 + x^2)^3)^4]^5$

r) $y = \left[x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)\right]$

P7. Determine la pendiente de la recta tangente a la función dada en el valor de x indicado.

a) $y = (1 + x^2)$, $x = -1$

b) $y = \dfrac{1}{(1 + 2x)^3}$, $x = 0$

c) $y = \operatorname{sen}(2x) + 3\cos(4x)$, $x = \pi$

P8. Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa indicado.

a) $Y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6x}\right)\cdot\cos(\pi x^2)$, $x = \dfrac{1}{2}$

b) $Y = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $x = \pi$

P9. Determine la derivada indicada para $f(x)$

a) $f(x) = \cos(\pi x)$, $f''(x)$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $f''(x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $f''(x)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(1 + 3x)$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

P10. Determine el o los puntos sobre la gráfica de f(x) donde la recta tangente es horizontal,¿ posee alguna tangente vertical?

a) $y = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$

b) $y = e^{2x+\operatorname{sen} x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

P11. Determine los valores de "t" en los que la razón de cambio instantánea de :

$$f(x) = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos 2t$$

es cero.

Ind. Use Winplot y desarrollo algebraicamente para verificar su respuesta.

P12. Si $f(x) = (1-x)^4$, determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f''(x)$ en $x = 1$. Ilustre gráficamente esta situación.

P13. Sea $R(\sigma) = \left(\dfrac{V_o^2}{g}\right) \operatorname{sen}(2\sigma)$ la representación de un proyectil lanzado en un ángulo σ con respecto a la horizontal con una velocidad inicial V_o. Suponga que tanto V_o como g son constantes. Determine los valores de σ para los cuales $\dfrac{dR}{d\sigma} = 0$.

P14. Suponga que $x(t) = x_o \cos(wt) + \dfrac{V_o}{w}\operatorname{sen}(wt)$, con $w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

a) Verificar que $x(t)$ satisfaga la ecuación: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$

b) Compruebe que $x(t)$ satisface las condiciones iniciales: $x(0) = x_o$ y $x'(0) = V_o$

P15. Determine el valor de la n-ésima derivada para las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} \text{ y } f(x) = \sqrt{1+2x}$$

P16. Use la información dada para estimar: $g'(1)$ si:

$g(t) = h(f(t))$, $f(1) = 3$, $f'(t) = 5$ y $h'(3) = -2$

Ind. Use la Regla de la Cadena para estimar g'(t).

P17. Con la siguiente información estime $\dfrac{d^2 f(g(x))}{dx^2}$ en $x = 1$, sabiendo que

$$g(1) = 2,\ g'(1) = 3,\ g''(1) = 1,\ f'(2) = 4 \ \text{ y } \ f''(2) = 3$$

Ind. La misma del problema anterior.

P18. Si f es una función par y diferenciable.

- ¿Qué se puede afirmar respecto de su función derivada?
- ¿Será par o impar? Ponga un ejemplo y demuéstralo usando la Regla de la Cadena.

P19. Si ahora f es impar. Conteste las mismas interrogantes del problema anterior **(P18)**.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº7

Derivadas

Objetivo:

- Estimar las derivadas de expresiones implícitas con su consecuente aplicación geométrica involucrada en cada problema.

P1. Hasta ahora, la mayoría de las funciones estudiadas se han expresado de manera, explícita, por ejemplo $y = 3x^2 + 2$ esta escrita explícitamente como una función de x. Sin embargo, esto no siempre es así, tal es el caso de la expresión:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Sin embargo, aquí se puede expresar y en función de x, a saber:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ y 2) $y = -\sqrt{4 - x^2}$

Lo que da origen a dos funciones y podemos entonces derivar cada una de ellas por separado.

Pero expresiones como:

a) $7y + y^3 - x^4 = 0$

b) $x^3 + xy^2 + y\left(\dfrac{5}{x}\right) - 5 = 0$

Resultan más difícil y tal vez imposible despejar y en función de x. En tales circunstancias para derivar se ha de usar la derivación implícita. Lo que se debe tener presente es que cuando aparezca y será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se supone que y está definida implícitamente como función derivable de x. Algunos ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\dfrac{dy}{dx}$

b) $\dfrac{d}{dx}(xy^4) = \dfrac{d}{dx}(x) \cdot y^4 + x4y^3 \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1 \cdot y^4 + 4xy^3\dfrac{dy}{dx} = y^4 + 4xy^3\dfrac{dy}{dx}$

Las anteriores pueden ser estimaciones de expresiones particulares. Veamos ahora un ejemplo un poco más general. Estime $\dfrac{d}{dx}$ en $x^2 + x^2y^3 - y^5 = 5x + y$

Aplicamos a ambos lados de la expresión dada el operador $\dfrac{d}{dx}$, así se tiene:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + x^2y^3 - y^5) &= \frac{d}{dx}(5x + y)\\
\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(y^5) &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{dy}{dx}\\
\Rightarrow 2x + 2xy^3 + x^2 3y^2\frac{dy}{dx} - 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} &= 5 + \frac{dy}{dx}\\
\Rightarrow (3x^2y^2 - 5y^4 - 1)\frac{dy}{dx} &= 5 - 2x - 2xy^3\\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{5 - 2x - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4 - 1}
\end{aligned}$$

P2. Usando la técnica descrita en **P1** estime $\dfrac{dy}{dx}$ para la expresión implícita:

$$x^3 - y^3 - 7y = 0$$

Solución: Aplique el operador $\dfrac{d}{dx}$ para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

P3. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $P = (3, -4)$ y en $Q = (3, 4)$ ¿Dónde se intersectan dichas rectas?.

P4. Estime la pendiente de la recta tangente a las curvas dadas en el punto indicado.

a) $x^3 - 6xy + y^3 = 0$, $P = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

b) $4x^2y = (x^2 + y^2)^2$, $P = (1, 1)$

c) $x^3 = (4 - x)y^2$, $P = (2, 2)$

Grafique usando Winplot y estimando además la recta tangente en cada caso.

P5. Halle $\dfrac{dy}{dx}$ para:

a) $\operatorname{sen} x + 2\cos(2y) = 1$

b) $(\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi y))^2 = 2$

c) $x = \sec\left(\dfrac{1}{y}\right)$

d) $y = \operatorname{sen}(xy)$

e) $\sqrt{xy} = x - 2y$

f) $\tan(x + y) = x$

P6. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ y la ecuación de la recta tangente a las curvas dadas en el punto indicado.

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4,\ P = (9, 1)$

b) $y^2 = \dfrac{(x-1)}{(x^2+1)},\ P = \left(2, \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$

Ind. Use Winplot para representar estas curvas y las rectas encontradas como solución.

P7. Ayudado por Winplot localizar los punto de las curvas donde la recta tangente es horizontal y/o vertical.

a) $25x^2 + 16y^2 + 200x = 160y - 400$

b) $4x^2 + y^2 + 4y = 8x - 41$

P8. Determine los puntos de $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente es igual $\dfrac{3}{4}$.

P9. Determine los puntos de $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ donde la pendiente es cero. Represente la ecuación y sus pendientes con el uso de Winplot.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº8

Derivadas

Objetivo:

- Estudiar la función exponencial y estimar su derivada.

P1. La función esta definida en base b ($b > 0$ y $b \neq 1$) como: $y = b^x$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su recorrido $(0, +\infty)$. Para estimar su derivada se debe notar que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+b} - b^x}{h} = \frac{b^x(b^h - 1)}{h}$$

así,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

dependerá del valor de b, luego $f'(x) = b^x m(b)$, siendo $m(b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{b^h - 1}{h}$

¿ Existe alguna base b para el cual $m(b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{b^h - 1}{h} = 1$?

La respuesta es afirmativa, basta tomar $b = e$ $(2,71828...)$, luego si:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x m(e) = e^x.$$

Para el caso en que $b \neq e$, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \ln b} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{d}{dx} e^{x \ln b} = e^{x \ln b} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln b) \\
&= e^{x \ln b} \cdot \ln b \\
&= b^x \ln b
\end{aligned}$$

Lo anterior se puede resumir como: Si $u = g(x)$ es diferenciable, entonces.

a) $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

b) $\dfrac{d}{dx}(b^u) = b^u lnb \cdot \dfrac{du}{dx}$

P2. Use los últimos resultados dados en **P1** para estimar $\dfrac{dy}{dx}$ si

a) $y = e^{-x}$

b) $y = e^{1/x}$

c) $y = 2^{5x}$

P3. Determine el punto de la gráfica de$f(x) = e^{-x}$ donde la recta tangente en paralela a la recta $y = -2x$

P4. Para cada una de las funciones hallar su función derivada:

a) $y = e^{\sqrt{x}}$

b) $y = e^{\operatorname{sen}(2x)}$

c) $y = e^{2x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{1 + e^2 x}$

f) $y = \dfrac{1}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$

g) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

P5. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + e^x)^2$, en $x = 0$

P6. Determine la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$, en $x = 0$

P7. Ayudado por Winplot determine el o los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal ¿ Dónde ocurren máximos y mínimos?

a) $f(x) = (\operatorname{sen} x)e^{-x}$

b) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

P8. ¿ En qué punto de $y = 2x+e^{3x}$ la recta tangente es paralela $y = 5x$? Ilustre gráficamente esta situación.

P9. Determine la derivadas de orden superior indicadas para las funciones dadas.

a) $y = e^{x^2}; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

b) $y = \dfrac{1}{1+e^x}; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

c) $y = \operatorname{sen}(e^{3x}); \ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

d) $y = x^2 \cdot e^x; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

P10. Haga ver que la función dada satisface la ecuación diferencial.

(a) $y = e^{x^2}$; $y'' + y' - ey = 0$;(A y B ctes)

(b) $y = C \cdot e^{kx}$; $y' = ky$;(C y k ctes)

(c) $y = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(2x)$; $y'' + 2y' + 5y = 0$

P11. Haga ver que la función $f(x) = e^{\cos x}$ es periódica con periodo $x = 2\pi$. Halle además los puntos de su gráfica donde la tangente es horizontal, grafique $f(x)$.

P12. La función $P(t) = \dfrac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{at}}$, con a y b constantes positivas corresponde a un modelo para una población en crecimiento pero limitada.

(a) Haga ver que P(t) satisface la ecuación.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P(a - bP)$$

(b) ¿Es $P(0) = P_0$?

(c) Si $a = 2$, $b = 0$ y $P_0 = 1$, halla asíntotas horizontales para la gráfica de $P(t)$ al estimar los límites

$$\lim_{t\to-\infty} P(t) \text{ y } \lim_{t\to+\infty} P(t)$$

(d) Grafique $P(t)$ (Winplot)

(e) Halle t para los cuales $P''(t) = 0$

P13. ¿Existe un punto de $y = e^x$ donde la recta tangente sea paralela a $y = -2x + 1$?. Represente gráficamente la situación.

P14. Determine todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = e^x$ que pasan por el origen.

P15. Determine:

a) $\dfrac{d^n}{dx^n}(xe^{-x})$

b) $\dfrac{d^n}{dx^n}(\sqrt{e^x})$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº9

Derivadas

Objetivo:

- Examinar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial y determinar su derivada en problemas relacionados con esta función.

P1. Si $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$, con lo que $y = e^x$ resulta ser la inversa de la función logarítmica natural.

Ahora, como $x = e^y$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(e^y)$$

$$\Rightarrow 1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx}$$

luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si ahora $f(x) = \log_b x \Rightarrow y = \log_b x$

$$\Rightarrow x = b^y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}(b^y)$$

$$\Rightarrow 1 = b^y(lnb)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y(lnb)}$$

Con lo que se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{xln(b)}$$

P2. Use la regla básica del producto de Derivada para estimar la derivada de $f(x) = x^3 \ln x$.

P3. Use el resultado dado en **P1** para calcular la recta tangente a la función $y = \log_{10} x$ en $x = 10$.

P4. El cálculo de las derivadas de las funciones dadas en **P1**, al usar la regla de la cadena se expresan como sigue:

$$\text{a)} \quad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{b)} \quad \frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u(\ln b)} \cdot \frac{du}{dx}$$

Use estos resultados para calcular las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

b) $y = \ln(\ln x^2)$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

d) $y = \ln(cosx)$

P5. El dominio de $y = \ln x$ es $(0, \infty)$, en cambio si ahora se considera $y = \ln |x|$ este dominio se extiende a todo los números reales, excepto para $x = 0$.

¿Qué sucede con la derivada de $y = \ln |x|$?

Vemos, si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, luego $y = \ln |x| = \ln x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Pero, si ahora $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$\Rightarrow y = \ln |x| = \ln(-x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-x}\frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{-x} \cdot -1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Luego, para todo $x \neq 0$, $\dfrac{d}{dx}(\ln |x|) = \dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{d}{dx}(\ln |u|) = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

¿ Qué tipo de función es $y = \ln |x|$, par o impar?

Grafique $y = \ln |x|$ y calcular la recta tangente a ella en $x = e$ y $x = -e$

P6. Calcule las derivadas de las funciones:

a) $y = \ln(x - 3)$

b) $y = \ln |x - 3|$

Observe que los dominios de ambas funciones es distinto, estímelo. Por lo tanto, ¿ Cuál es el dominio de sus respectivas derivadas?

P7. Observe el dominio de las funciones y su respectivas derivadas para:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $g(x) = 2\ln x$

Si ahora $f(x) = \ln x^3$ y $g(x) = 3\ln x$.

¿ Qué sucede con $f'(x)$ y $g'(x)$ y sus dominios?

P8. Una recomendación útil antes de derivar funciones $\ln u(x)$ es aplicar las propiedades de la función ln.

En efecto, si $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(1+x+x^2)^7}$ entonces:

$$\begin{aligned} y &= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{(1+x+x^2)^7} \\ &= \ln \sqrt{x^2+1} - \ln(1+x+x^2)^7 \\ &= \ln(x^2+1)^{(1/2)} - 7\ln(1+x+x^2) \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 7\ln(1+x+x^2) \end{aligned}$$

Ahora procedemos a derivar, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dx}(x^2+1) - 7\cdot\frac{1}{1+x+x^2}\frac{d}{dx}(1+x+x^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{7}{1+x+x^2}\cdot(1+2x) \\ &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{7+14x}{1+x+x^2} \end{aligned}$$

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \ln \dfrac{\sqrt{(2x+3)^3}}{1+x^4}$, usando la técnica anterior.

P9. Se sabe estimar la derivada para funciones que se expresan como:

(a) $y = c^x$ (c $\rightarrow$ constante, $c > 0$)

(b) $y = x^c$ (con $c > 0$)

Para (a) $\dfrac{dy}{dx} = c^x \ln c$ y para (b) $\dfrac{dy}{dx} = cx^{c-1}$

Pero, si ahora $y = (variable)^{(variable)}$

¿ Como se puede proceder para hallar $\dfrac{dy}{dx}$?

Un ejemplo de esta situación es: $y = x^x (x > 0)$.
La solución discurre como sigue, tome ln a ambos lados y derive en consecuencia.

Así, $y = x^x$

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$

Derivando:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x \ln x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \ln x + 1 \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y(\ln x + 1) \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= x^x(\ln x + 1)
\end{aligned}
$$

Aplique la técnica anterior para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si:

a) $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

b) $y = x^{2x}$

c) $y = \tan x^x$

d) $y = x^x e^{x^2}$

P10. Use diferenciación implícita para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en

a) $y^2 = \ln xy$

b) $xy = \ln(x^2 + y^2)$

c) $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

P11. Haga ver que $y = \dfrac{A}{\sqrt{x}} + B\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ satisface la ecuación diferencial

$$4x^2y'' + 8xy' + y = 0$$

, donde A y B son constantes.

P12. De la ecuación de la recta tangente a $y = x^{x+2}$ en $x = 1$. Grafique tanto y como la ecuación de la recta tangente encontrada. Use Winplot.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº1

Aplicaciones de la Derivadas

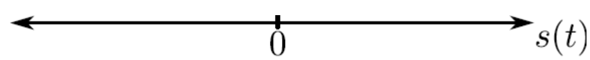
Objetivo:

- Resolver una serie de problemas donde el uso de la derivación es necesaria para avanzar en la solución de ellos.

P1 Posición de una partícula en movimiento. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función de posición $s(t) = -t^2 + 4t + 5$ donde s se mide en cm. y t en segundos.

¿Cuál es la posición de la partícula en $t = 0$, 2 y 5 segundos?

Nota: Represente la posición en los tiempos indicados.



P2 La velocidad media de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de longitud Δt es:

$$\frac{Cambio \;\; de \;\; posición}{Cambio \;\; en \;\; tiempo} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Asi, la razón de cambio instantáneo, o velocidad de la partícula, es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

La rapidez del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

Si ahora, $v(t)$ es la velocidad del objeto en movimiento, entonces su función aceleración $a(t)$ en el instante t es:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Para la función $s(t)$ dada en P1 estime:

(a) $v(t)$

(b) $a(t)$

Nota: La interpretación física de los valores que se obtienen al estimar $v(t)$ y $a(t)$ se verán en la asignatura de Física.

P3 Para la función $s(t)$ y t indicada estime: posición, velocidad, rapidez y aceleración

(a) $s(t) = t \cdot \cos \pi t$; $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$

(b) $s(t) = \dfrac{t}{t+1}$; $t = -2$, $t = 2$

(c) $s(t) = t - \dfrac{1}{t}$; $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$

P4 Si $s(t) = t^2 - 4t - 5$, estime:

(a) Velocidad cuando $s(t) = 0$

(b) La velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$

P5 Un objeto se dispara hacia arriba de modo tal que su trayectoria está modelada por la ecuación $s(t) = 6 + 48t - 16t^2$, con $t \in [0, t_0]$, donde t_0 es el instante en el que el objeto choca con el suelo.

(a) Determine el intervalo de tiempo en el cual $v = \dfrac{ds}{dt} > 0$ y el intervalo donde $v = \dfrac{ds}{dlt} < 0$

(b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?¿En qué tiempo?

P6 Si una partícula se mueve según la función de posición $s(t) = -20 + 10t - t^2$

Estime la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo $[0, 5]$. Suponga que la partícula se mueve sobre una recta horizontal.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº2

Aplicaciones de la Derivadas

Objetivo:

- Resolver una serie de problemas donde el uso de la derivación es necesaria para avanzar en la solución de ellos.

P1 Si V representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces $\dfrac{dV}{dt}$ es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t. Así, una razón como $\dfrac{dV}{dt} = 5m^3/s$ significa que el volumen aumenta $5m^3$ cada segundo.

Suponga que un globo esférico se expande con el tiempo.

¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución: En el instante t, el volumen de una esfera es una función del radio, esto es, $V = f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, luego

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{d(r^3)}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

P2 Si el globo del problema 1 se infla con aire a razón de 20 cm^3/min

¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 5 cm?

Solución: $\dfrac{dV}{dt} = 20\ cm^3/min$, se desea hallar $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{r=5}$ Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$
$$\Rightarrow 20 = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}$$
$$\Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5} = \frac{5}{\pi(5)^2} = \frac{1}{5\pi}\ cm/min$$

P3 El volumen V de un depósito cónico como el de la figura adjunta que deje salir agua por su orificio depende de r, su radio y la altura h, ambos valores dependen de t, así $V = \frac{\pi}{3}r^2h$, entonces podemos derivar con respecto a t, a objeto de obtener la ecuación de ritmo relacionados, se tiene:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{d(\frac{\pi}{3}r^2h)}{dt} = \frac{\pi}{3}\frac{d(r^2h)}{dt} =$$

$$(*)\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right]$$

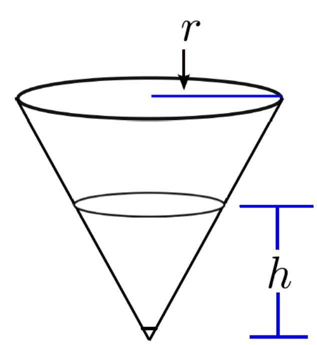
Así, el ritmo de cambio de V está relacionado con el ritmo de cambio de h y r.

Suponga que para la figura:

$\frac{dh}{dt} = -0,2\ cm/min$

y

$\frac{dr}{dt} = -0,1\ cm/min$



¿Cuál es el ritmo de cambio del volumen cuando el radio es 10 cm y la altura es 5 cm?

<u>**Indicación:**</u> Reemplace los datos en (*).

Explique su respuesta.

P4 Suponga que x e y son dos funciones derivables en función de t, y relacionadas por la expresión: $y = x^2 + 5$

Estime $\frac{dy}{dt}$ para $x = 1$, sabiendo que $\frac{dx}{dt} = 3$ para $x = 1$.

Solución: $y = x^2 + 3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d(x^2+3)}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Como $x = 1$ y $\dfrac{dx}{dt} = 3$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 2(1)3 = 6$

P5 El área de un circulo es: $A = \pi r^2$,

Si r depende de t, entonces $\dfrac{dA}{dt} = \pi 2r\dfrac{dr}{dt}$

Estime $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $\dfrac{dr}{dt} = 1$ y $r = 4\ cm$

Solución: $\dfrac{dA}{dt} = 8\pi$

P6 Suponga que tanto x como y son funciones derivables de t. Hallar $\dfrac{dy}{dt}$ para $\dfrac{dx}{dt}$ dado.

(a) $y = \sqrt{x+1}$, cuando $x = 4$ y $\dfrac{dx}{dt} = 2$

(b) $y = 2(x^2 - 2x)$, cuando $x = 3$ y $\dfrac{dx}{dt} = 2$

(c) $xy = 4$, cuando $x = 8$ y $\dfrac{dx}{dt} = 10$

Solución de (c): $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-5}{8}$

P7 Un punto se mueve sobre la gráfica de la función dada, de modo tal que $\dfrac{dx}{dt} = 2\ cm/seg$. Estime $\dfrac{dy}{dt}$ para los valores de x indicados:

(a) $y = \tan x$; $x = \dfrac{-\pi}{3}$, $x = \dfrac{-\pi}{4}$ y $x = 0$

(b) $y = \operatorname{sen} x$; $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{3}$

P8 Determine el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto, sobre la gráfica de $y = x^2 + 1$, si $\dfrac{dx}{dt} = 2\ cm/seg$.

Solución: $\dfrac{[2(2x^3 + 3x)]}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº3

Aplicaciones de la Derivadas

Objetivo

- Revisar los contenidos tanto teóricos como prácticos que permitan la determinación de los extremos de una función dada.

P1 Teor. de Rolle. Sea f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Aplique el Teor. de Rolle a la función $f(x) = -x^3 + x$ definido en $[a, b] = [-1, 1]$ Grafique esta función con Winplot.
  Solución: $(c_1, \approx -0.57, c_2 \approx 0.57)$
- Examine el Teor. de Rolle para la función $f(x) = 1 - x^{2/3}$, ella es continua en $[-1, 1]$, $f(1) = f(-1) = 0$ pero f no es diferenciable en $x = 0$ y luego no es diferenciable en $(-1, 1)$.
  (Note que $f'(x) = \dfrac{-2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ no existe, para $x = 0$)
  En este caso, no existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Grafique f.
- La conclusión del Teor. de Rolle también es válida si en lugar de poner $f(a) = f(b) = 0$ se tiene que $f(a) = f(b)$.

P2 Teor. del valor medio

Este teorema se prueba utilizando el Teor. de Rolle. Dicho teorema nos permitirá demostrar otros teoremas relacionados con el comportamiento de la derivada, útil para saber como es la función f en cierto intervalo.

- Teor. del valor medio. Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Así, existe un número c tal que

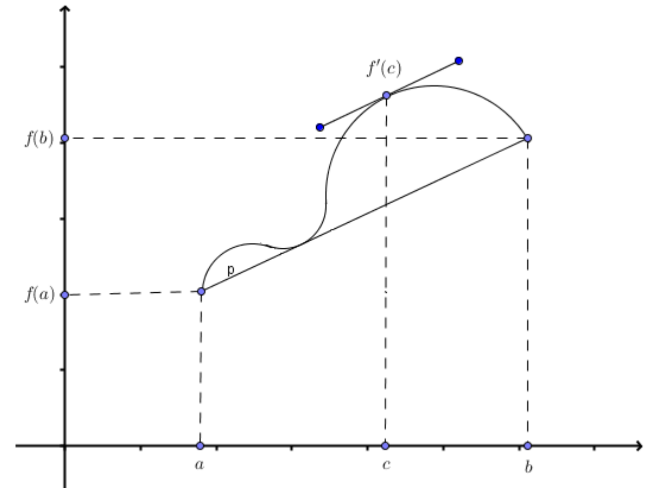
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Gráficamente el teorema nos dice:

$$m_{PQ} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$P = (a, f(a))$$

$$Q = (b, f(b))$$



- Demostración del Teorema

  Sea $d(x) = f(x) - [f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b)]$ Entonces $d(a) = d(b) = 0$ y d(x) es continua y diferenciable sobre (a, b), asi podemos aplicar el Teor. de Rolle a la función $d(x)$, luego existe c entre a y b tq. $d'(c) = 0$.

  $$\Rightarrow d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  y

  $$\Rightarrow d'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

  luego, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

  Nota: Puede existir más de un valor c entre a y b tal que

  $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Haga ver que la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida en $[-1, 3]$ satisface el Teor. del valor medio. Halle tal c.

  Solución: $c \approx 1.53$

  Ilustre gráficamente la situación anterior, dibujando tanto la recta secante que pasa por $P = (-1, f(-1))$ y $Q = (3, f(3))$, como la recta tangente que pasa por $R = (1.53, f(1.53))$

P3 Función constante, $f(x) = c$, para todo x. Si $f' = 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es una constante sobre el intervalo.

"Ya se demostró que si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$"

Demostración. Considere dos números x_1 y x_2 arbitrarios en $[a,b]$ (con $x_1 < x_2$). Entonces usando el Teor. del valor medio, existe c entre x_1 y x_2 tal que
$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$, pero como $f'(x) = 0$ para todo x en $[a,b]$ entonces

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

luego $f(x_2) = f(x_1)$ y la función tiene el mismo valor en todo los puntos del intervalo, con lo que es constante.

P4 Sea f continua sobre $[a,b]$ y diferenciable en (a,b)

(a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es creciente sobre $[a,b]$ ($f \nearrow$)

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es decreciente sobre $[a,b]$ ($f \searrow$)

- Las demostraciones de estos dos hechos se basan en el Teor. del valor medio.
- Determine los intervalos donde es creciente y donde en decreciente la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$
  Solución:
  En $(-\infty, -2)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$
  En $(-2, 4)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$
  En $(4, \infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$
  Grafique la función usando Winplot o Geogebra de modo de verificar su respuesta.

P5 Estudiar la función: $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ respecto a sus regiones (intervalos) de crecimiento y decrecimiento.

Solución: En $I_1 = (0,1)$, $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$
En $I_2 = (1, +\infty)$, $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$

- **Indicación:** Construya una tabla como:

I	Signo de f'	Comportamiento de f	Conclusión
$(-\infty, c)$			
$(c, +\infty)$			

- Donde, c es un punto crítico, esto es, $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.
- Grafique $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ con uno de los graficadores (Winplot o Geogebra).

P6 Examine si las funciones dadas y su respectivo dominio satisfacen las condiciones del Teor. de Rolle.

(a) $f(x) = x^2 - 4,\ D_f = [-2, 2]$

(b) $f(x) = x^2 - 6x + 5,\ D_f = [1, 5]$

(c) $f(x) = x^3 + x^2,\ D_f = [-1, 0]$

(d) $f(x) = \tan x, D_f = [0, \pi]$

P7 Verifique si se cumplen las condiciones del Teor. del valor medio para la función en el intervalo indicado en cada caso.

(a) $f(x) = x^2;\ I = [-1, 5]$

(b) $f(x) = x^3 + x + 2;\ I = [2, 5]$

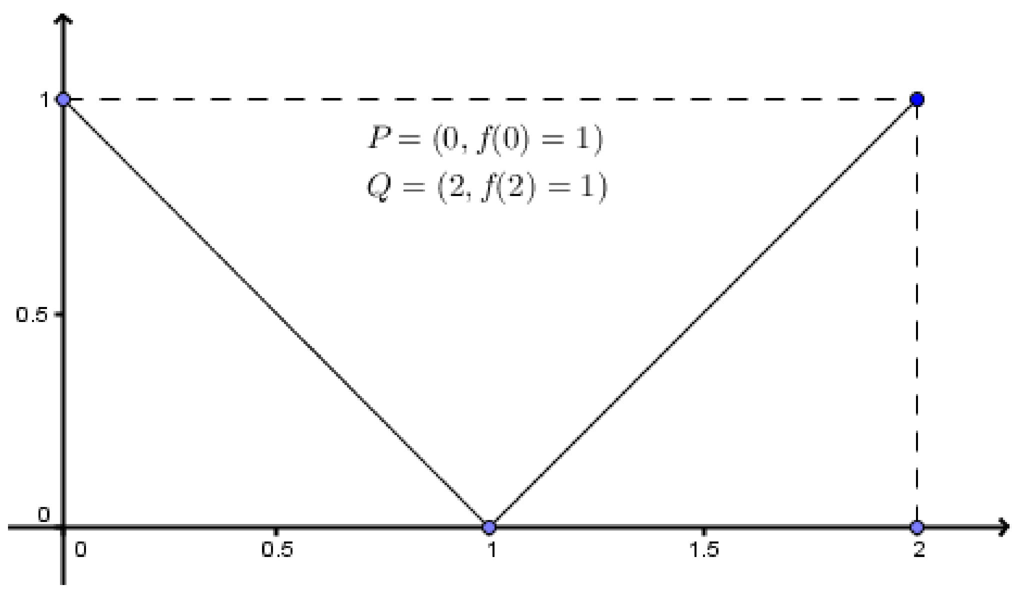
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ I = [-2, 2]$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x};\ I = [1, 5]$

(e) $f(x) = 1 + \sqrt{x};\ I = [0, 9]$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x} - x;\ I = [-8, 1]$

P8 En el gráfico que se muestra no se cumplen las condiciones del Teor. del valor medio. Indíquela.



P9 Para las siguientes funciones determine donde f es creciente ($\nearrow$) y donde es decreciente ($\searrow$).

(a) $f(x) = x^2 + 4$

(b) $f(x) = x^2 + 6x - 1$

(c) $f(x) = x^3 + 3x^2$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

(f) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(g) $f(x) = x + e^{-x}$

(h) $f(x) = x^2 e{-}x$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

(j) $f(x) = x^3$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Indicación: Compare sus respuestas graficando con Winplot.

P10 Sin graficar explique porque las funciones dadas no tienen extremos.

(a) $f(x) = x^3 + x$

(b) $f(x) = \sqrt{2 - x} - x$

P11 Sea $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$, use esta función y el Teor. de Role para hacer ver que la ecuación: $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz en el intervalo $I = [-1, 1]$. Justifique su respuesta y compare graficando con Winplot.

P12 Para la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, ver que el valor de x_3 que satisface la conclusión del Teor. del valor medio sobre cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

P13 Sea $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$. Use f y el Teor. de Rolle para hacer ver la ecuación: $\tan x + x = 0$ tiene una solución en el intervalo $(0, \pi)$.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº4

Aplicaciones de la Derivadas

Objetivo:

- Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función.

P1 Criterio de la primera Derivada

Suponga que la función f es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), excepto tal vez en un número crítico c de (a, b).

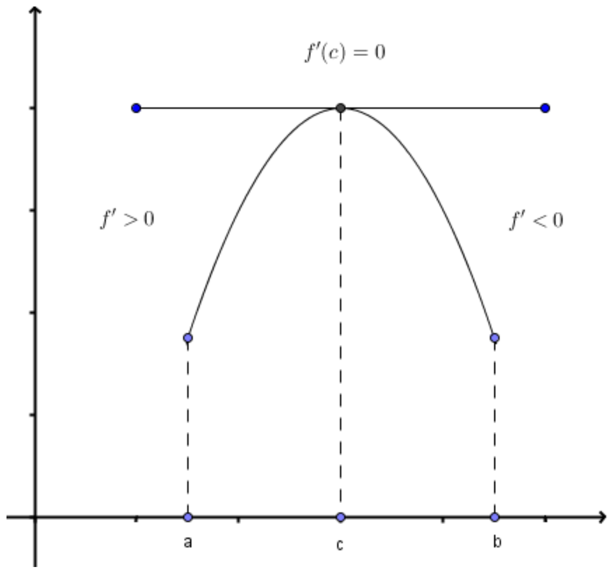
- Si $f'(x) > 0, \forall x \epsilon (a, c)$ y $f'(x) < 0, \forall x \epsilon (c, b) \Rightarrow$ en $x = c$ ocurre un máximo relativo de valor $f(c)$.
- Si ocurriera que: $f'(x) < 0, \forall x \epsilon (a, c)$ y $f'(x) > 0, \forall x \epsilon (c, b) \Rightarrow$ en $x = c$ ocurre un mínimo relativo de valor $f(c)$.

  En resumen, estamos en presencia de un valor extremo en $x = c$ si hay un cambio en el signo de la derivada.

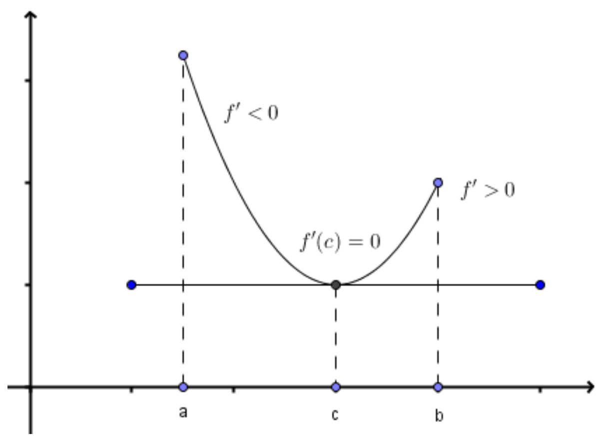
I	$S(f')$	Conclusión
(a, c)	$+$	En $x = c$
(c, b)	-	máximo

I	$S(f')$	Conclusión
(a, c)	-	En $x = c$
(c, b)	$+$	mínimo

Gráficamente lo anterior lo podemos ejemplificar como:



*Máximo en $x = c$, de valor $f(c)$.



*Mínimo en $x = c$, de valor $f(c)$.

- También puede ocurrir que el signo de la derivada se mantenga a ambos lados del pto. crítico c, en ese caso no tenemos un valor extremo en $x = c$ y la función puede ser creciente o decreciente.

- **Ejemplos:**

  Ejemplo 1: Determine los extremos de: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

  Solución: $f'(x) = (x^{-1})' = -1x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$

  $f'(x)$ no existe en $x = 0$, así $x = 0$ es un punto crítico.

I	Signo (f')	Comportamiento de f	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-	$f \searrow$	En $x = 0$ no se tiene extremo
$(0, \infty)$	-	$f \searrow$	

Así, f no posee extremos relativos y la función es decreciente en su dominio.

Ejemplo 2: $y = x^2$

Solución: $y' = 2x,\ D_y = D_{y'} = \mathbb{R}$

Puntos críticos: $y' = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

I	S (f')	C f	Conclusión
$(-\infty, 0)$	$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) < 0$ (-)	$f \searrow$	En $x = 0$ ocurre el mínimo de valor $f(0) = 0$
$(0, \infty)$	$x \in (0, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ (+)	$f \nearrow$	

Ejemplo 3: Determine los extremos de: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Solución: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$
Ptos. críticos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0$
$\Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 3$ luego, Ptos. Críticos $= \{0, 3\}$, complete la tabla:

I	S (f')	C (f)	Conclusión
$(-\infty, 0)$			
$(0, 3)$			
$(3, \infty)$			

Grafique y compruebe sus respuestas
(mínimo en $x = 3,\ f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 10 = -17$)

Ejemplo 4: Estudiar la función $y = x^2 + x - \ln x$

Solución: $D_y = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} y' &= 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} \\ y' &= \frac{(2x-1)(x+1)}{x} \\ y' &= 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \therefore P_c &= \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \textit{Complete la Tabla} \end{aligned}$$

I	S (f')	C (f)	Conclusión
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$			
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$			

- Resp. mínimo en $x = \dfrac{1}{2}$ de valor $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. ¿Por qué?
- ¿Qué pasa si ahora $y = x^2 + x - \ln|x|$?
  Use Winplot para ver que ocurre y complete una nueva tabla.

P2 Use el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de la función dada.

(a) $f(x) = -x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3 - 3x$

(c) $f(x) = x(x-1)^2$

(d) $f(x) = x^3 + x - 2$

(e) $f(x) = -x^2(x-2)^2$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(h) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

(i) $(x+3)^2 e^{-x}$

P3 Trace una gráfica de f si se da f'. De usted mismo $f'(x)$.

P4 Trace la gráfica de f' si se conoce el gráfico de f, dada por usted.

P5 Trace una gráfica para f si se sabe lo siguiente:

$f(x) = f(-x)$ (f es par)
$f(x) = 4$
$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2)$
$f'(x) > 0$, si $x \in (2, \infty)$

P6 Determine los ptos. críticos de $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Haga ver que f no tiene extremos relativos. Gráfique $f(x)$ usando Winplot o Geogebra.

P7 La media aritmética de n números como: a_1, a_2..,a_n se define como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

(a) Haga ver que $\bar{x}$ es un punto crítico de la función:

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + ... + (x-a_n)^2$$

(b) Haga ver que en $\bar{x}$ ocurre un mínimo relativo, de valor $f(\bar{x})$

P8 Determine valores a, b y c de $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que tenga un máximo relativo en $x = 2$ de valor 6 y la gráfica intersecte al eje y en $P = (0, 4)$.

P9 Si m y n son enteros positivos y $f(x) = x^m(x-1)^n$ ¿posee $f(x)$ un mínimo relativo? Explique y grafique $f(x)$ para algunos valores de m y n, enteros positivos.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº5
Aplicaciones de la Derivadas

Objetivos:

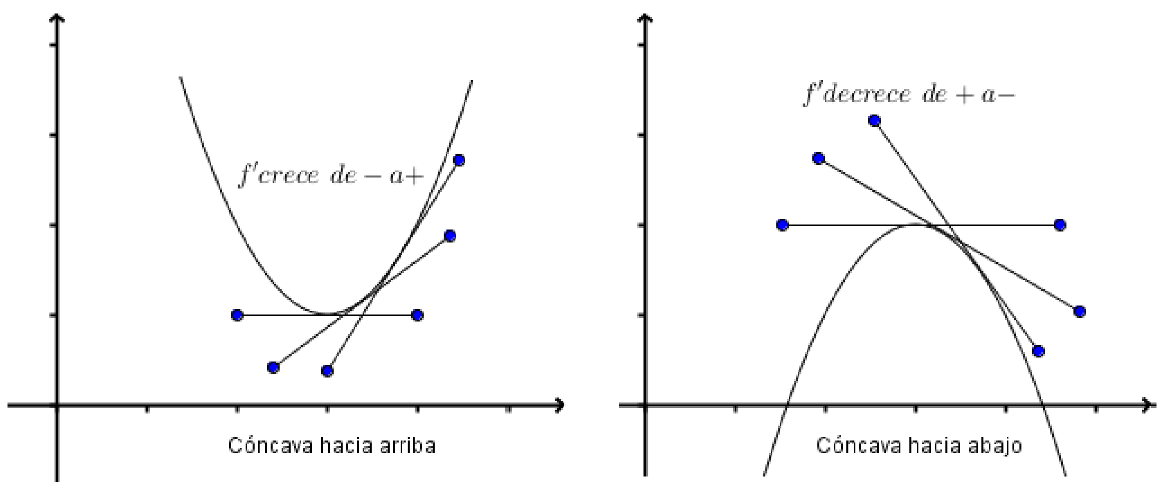
- Aplicar el criterio de la 2^{da} Derivada para determinar los extremos relativos de una función dada.
- Estudiar los puntos de inflexión para una función f.

P1 Definición: Suponga que f es una función diferenciable en (a, b).

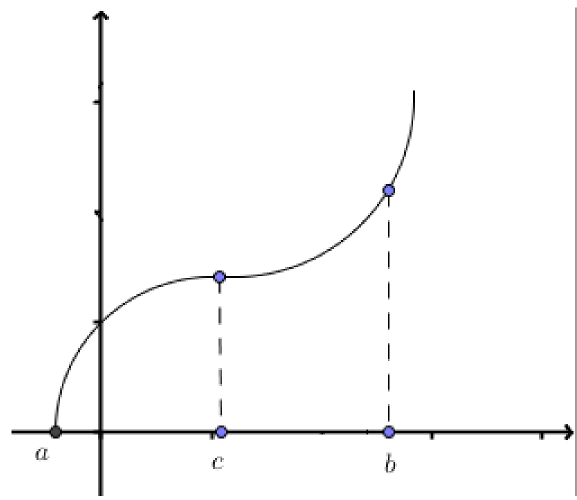
(1) Si $f'(x)$ es $\nearrow$ (creciente) sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo.

(2) Si $f'(x)$ es $\searrow$ (decreciente) sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo.

Gráficamente (1) y (2) se ilustran como:



El siguiente gráfico ilustra la concavidad hacia abajo y hacia arriba.



- En (a, c), f es cóncava hacia abajo, así, la derivada (f') decrece sobre (a, c)
- En (c, b), f es cóncava hacia arriba, así, la derivada (f') crece sobre (c, b)

Teor. Sobre la concavidad

Sea f una función para la cual f'' existe en (a, b)

(a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia arriba sobre (a, b)

(b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava hacia abajo sobre (a, b)

P2 Ejemplos:

Determine lo intervalos sobre los cuales la función es cóncava hacia arriba (c.h.a.) y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo (c.h.ab)

(1) $y = x^2$
$y' = 2x$
$y'' = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Así, $y = x^2$ es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$

(2) $y = \dfrac{1}{x}$

- $y' = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$
- $y'' = -(-2x^{-3}) = \dfrac{2}{x^3}$
- $y'' = \dfrac{2}{x^3} < 0$, si $x \in (-\infty, 0) = I$ y por lo tanto en I, es cóncava hacia abajo.

- $y'' = \dfrac{2}{x^3} > 0$, si $x \in (0, \infty) = I$ y, por lo tanto en I_2, $y = \dfrac{1}{x}$ es cóncava hacia arriba.

(3) $y = \dfrac{9}{2}x^2 + x^3$

- $D_y = \mathbb{R}$
- $y' = 9x + 3x^2$, $y'' = 9 + 6x = 6(\dfrac{9}{6} + x)$

$$y'' = 6(\frac{3}{2} + x)$$

- Sea $I_1 = (-\infty, \dfrac{-3}{2})$ y $I_2 = (\dfrac{-3}{2}, \infty)$

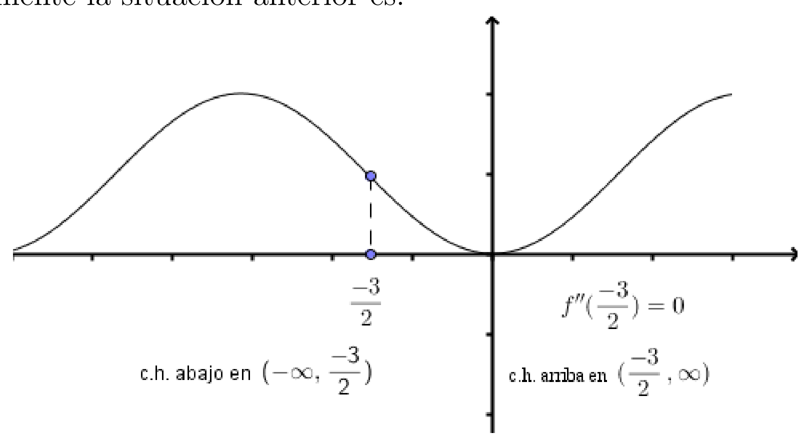
  (1) Si $x \in I_1 \Rightarrow x < \dfrac{-3}{2} \Rightarrow x + \dfrac{3}{2} < 0$

  $\Rightarrow y'' = 6\left(x + \Rightarrow \dfrac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow y$ es c.h. abajo

  (2) Si $x \in I_2 \Rightarrow x > \dfrac{-3}{2} \Rightarrow x + \dfrac{3}{2} > 0$

  $\Rightarrow y'' = 6\left(x + \Rightarrow \dfrac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow y$ es c.h. arriba

- Gráficamente la situación anterior es:



¡Poner atención al punto $x = \dfrac{-3}{2}$!

P3 Punto de inflexión

Corresponde a un pto. sobre la gráfica de f dode la concavidad cambia de:

- c.h. arriba a c.h. abajo, o de
- c.h.abajo a c.h.arriba.

Definición(Formal) de pto. de inflexión

Sea f continua sobre el intervalo (a,b) tal que $c \in (a,b)$. El punto $(c, f(c))$ es un pto. de inflexión de la gráfica de f si en $(c, f(c))$ hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en ese punto.

- (1) Considere $y = x^3$

  $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$

  Si $I_1 = (-\infty, 0) \Rightarrow y'' = 6x < 0 \Rightarrow enI_1$ y es c.h. abajo.
  Si $I_2 = (0, \infty) \Rightarrow y'' = 6x > 0 \Rightarrow enI_2$ y es c.h. arriba, además $f''(0) = 0$.
  Luego, en $x = 0$ se tiene un pto. de inflexión, al cambiar el sentido de la concavidad.

- (2) Considere ahora $y = x^{1/3}$
  $D_y = \mathbb{R}$
  $y' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
  $y'' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-2}{3}x^{-5/3}\right) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$
  Si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow y$ es c.h. arriba
  Si $x \in (0, \infty) \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow y$ es c.h. abajo
  Observe que $f''(x)$ no está definido en $x = 0$.

Los dos casos anteriores ilustran el sgte. teorema.
Teor. Punto de Inflexión Si $(c.f(c))$ es un pto. de inflexión para la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

P4 Criterio de la Segunda Derivada para la determinación de extremos

Sea f una función tal que f'' existe sobre el intervalo (a,b) que contiene el número crítico c.

(a) Si $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ es un mínimo relativo.

(b) Si $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ es un máximo relativo.

(c) Si $f''(c) = 0 \Rightarrow$ El criterio falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso se aconseja usar el criterio de la 1^{ra} Derivada.

Algunos Ejemplos

(a) $y = x^4 + 2$
Solución: $y' = 4x^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Así, $x = 0$ es un número crítico para f, $y'' = 12x^2$, pero $f''(0) = 0$, luego el criterio de la 2^{da} Derivada no concluye nada sobre $x = 0$.
Indicación: Use el criterio de la 1^{ra} Derivada y Winplot.

(b) $y = x^4 - 2x^2$

Solución:

- $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0$
  $\Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = \pm 1$
  Así, $f(x)$ tiene 3 valores críticos: $0, 1$ y -1.

- $y'' = 12x^2 - 4$
  $y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ se tiene un máximo relativo.
  $y''(1) = 12(1)^2 - 4 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.
  $y''(-1) = 12(-1) - 4 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.
  ¡El criterio decide para los tres números críticos!

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

- Determine los números críticos y use el criterio de la 2^{da} Derivada.
- Grafique usando Winplot para comprobar su respuesta.

Notas

- Si $(c, f(c))$ es un pto. de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe, es lo que afirmamos en uno de nuestros resultados.
- No se puede concluir que a partir de que $f''(c) = 0$ ó de que $f''(c)$ no existe que $(c, f(c))$ sea un pto. de inflexión, basta considerar las funciones: $f(x) = x^4 + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Hay textos de cálculo que definen el pto. de inflexión de manera distinta a como se ha definido en esta Actividad Didáctica, investíguelo usted mismo.

P5 Use el criterio de la 2^{da} Derivada para determinar los intervalos donde f es c.h. arriba y donde es c.h. abajo.

(a) $f(x) = -x^2 + 5x$
(b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 2$
(c) $f(x) = x(x-4)^3$
(d) $f(x) = x^{1/3} + 2x$
(e) $f(x) = x + \dfrac{7}{x}$
(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

P6 Haga ver que $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba en el intervalo donde $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo donde $\cos x < 0$

Indicación: Examine el signo de $f''(x)$, expresando $f''(x)$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

P7 Estudie ahora la concavidad de $f(x) = \csc(x)$, pero se dará cuenta que es cóncava hacia arriba donde $\operatorname{sen} x > 0$ y es cóncava hacia abajo donde $\operatorname{sen} x < 0$.

Indicación: Grafique ambas funciones de los problemas **P6** y **P7** para comprobar sus respuestas.

P8 Use la 2^{da} Derivada para determinar los ptos. de inflexión de las funciones dadas.

(a) $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1 \quad \rightarrow$ Sol. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow$Sol. $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

(c) $f(x) = x + xe^{-x} \quad \rightarrow$Sol. $x = 2$

Use Winplot para comprobar sus respuestas.

P9 Use el criterio de la 2^{da} Derivada, si es pertinente, para determinar los extremos relativos de la función dada. Grafique usando Winplot y explicite los ptos. de inflexión.

(a) $f(x) = -(2x-5)^2$

(b) $f(x) = 6x^5 - 10x^3$

(c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(d) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x,\ D_f = [0, 2\pi]$

(e) $f(x) = 2x - x \ln x$

(f) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

P10 Exprese gráficamemte una función que satisface:

- $f(-2) = f(4) = 0$
- $f'(3) = 0,\ f''(1) = f''(2) = 0$
- Si $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f''(x) < 0$
- Si $x \in (2, \infty) \Rightarrow f''(x) < 0$
- Si $x \in (1, 2) \Rightarrow f''(x) > 0$

P11 ¿Posee la función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & si\ x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$ un punto de inflexión en $x = 0$?

P12 Estudio de la función: $f(x) = (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

(a) Examine los casos cuando $n = 1$ y $n = 2$ respecto de sus extremos.

(b) Haga ver que si $n > 2$ e impar ($n = 3, 5..$), entonces x_0 es un pto. de inflexión para f.

(c) Haga ver que si $n > 2$ y n es par $(4, 6, 8...)$, entonces $(x_0, 0)$ no es un pto. de inflexión, sino que corresponde a un mínimo relativo para f.

P13 Determine los valores: a, b y c de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ de modo tal que f tenga una tangente horizontal en el pto. de inflexión: $(1, 1)$
(Sol. $a = 1$, $b = -3$ y $c = 3$)

P14 De un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad.

P15 ¿Por qué la gráfica de $f(x) = 5x^2 + e^x$ no tiene un punto de inflexión?

Actividad Didáctica de Aprendizaje N$^{\underline{o}}$6

Aplicaciones de la Derivadas

Objetivos:

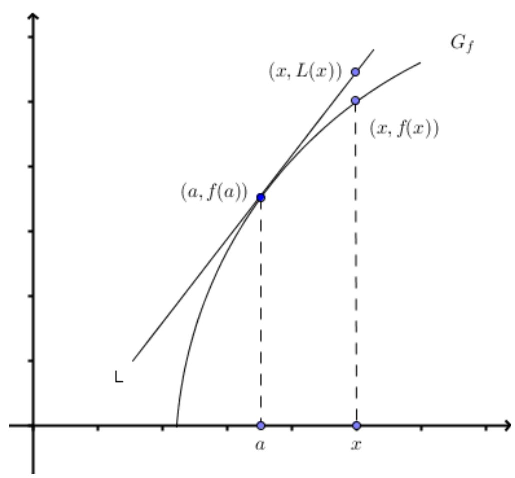
- Mostrar que $f(x)$ se puede aproximar por $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ en una vecindad de a.
- Examinar las diferenciales.

P1 Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$, entonces la función $L(x)$ definida por:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es una linealización de f en $x = a$.
Además, para x próximo a "a", la aproximación $f(x) \approx L(x)$ se llama aproximación lineal local de f en a.

Gráficamente la situación es:



si $x \approx a \Rightarrow L(x) \approx f(x)$

Haga ver que $L(x) = x$ es la aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.
Represente gráficamente tanto $f(x)$ como $L(x)$.

P2 Determine una linealización de:

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}$, en $a = 3$.

(b) Use la aproximación lineal anterior para estimar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.01}$

<u>Solución:</u>
(a)

$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{4}$
$x = 3 \Rightarrow f(3) = \sqrt{1+3} = \sqrt{2} = 2 \Rightarrow P = (3, f(3)) = (3, 2)$

Luego, la ecuación de la recta $L(x)$ es

$$\begin{aligned} y - f(3) &= f'(3)(x-3) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= \frac{1}{4}(x-3) \\ \Leftrightarrow y &= 2 + \frac{1}{4}(x-3) \\ \Rightarrow L(x) &= 2 + \frac{1}{4}(x-3) \end{aligned}$$

Grafique tanto $f(x)$ como $L(x)$.

(b)

Como $f(x) \approx L(x)$, entonces $\sqrt{1+x} \approx 2 + \dfrac{1}{4}(x-3)$

Para valores próximos a $x = 3$.

Notar que $\sqrt{3.95} = \sqrt{1+2.95} = f(2.95)$
y $\sqrt{4.01} = \sqrt{1+3.01} = f(3.01)$
luego, $\sqrt{3.95} \approx L(2.95) = 2 + \dfrac{1}{4}(2.95-3) = 1.9875$
y $\sqrt{4.01} \approx L(3.01) = 2 + \dfrac{1}{4}(3.01-3) = 2.0025$

P3 Determine una linealización de la función dada en el punto indicado.

(a) $f(x) = \ln x$, $a = 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$, $a = 6$

(c) $f(x) = \tan x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$

P4 Haga ver que los siguientes funciones tienen una aproximación lineal en $x = 0$ como la que se da en cada caso.

(a) $f(x) = e^x$, $L(x) = 1 + x$

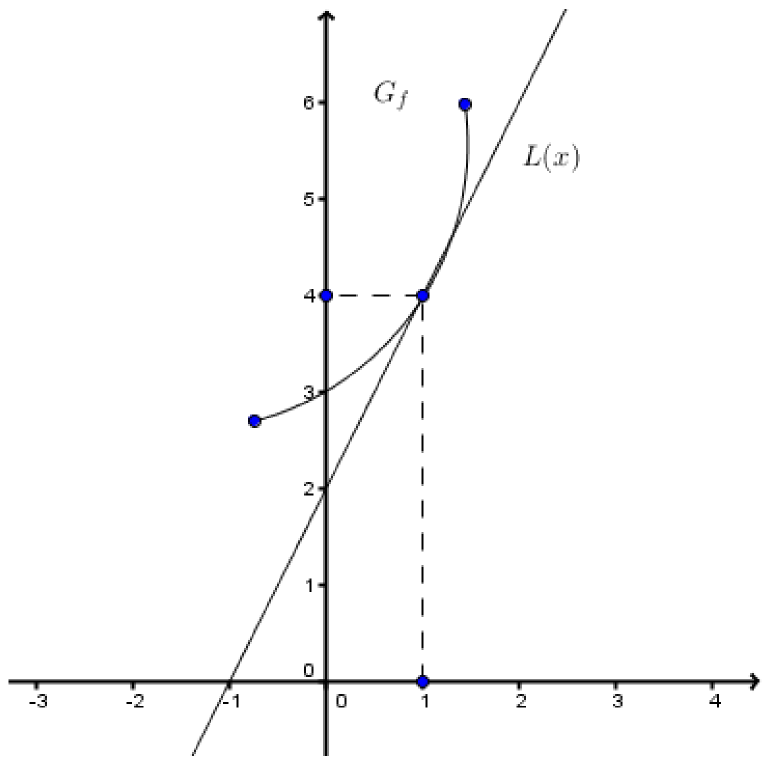
(b) $f(x) = (1 + x)^{10}$, $L(x) = 1 + 10x$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $L(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}x$

(d) $f(x) = \tan x$, $L(x) = x$

P5 Atendiendo al gráfico adjunto se pide estimar

$$f(1.04), \text{ si } a = 1$$



P6 La idea básica sobre la linealización de una función es su origen fue formulada usando diferenciales.
Así, suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene $x = a$. Si x_1 es un número, $x_1 \neq a$, entonces los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$ son las diferencias:

$$\triangle x = x_1 - a, \; \triangle y = f(x_1) - f(a)$$

Si $x_1 = a + \triangle x$, el cambio en la función es

$$\triangle y = f(a + \triangle x) - f(a)$$

Con $\triangle x$ próximo a cero, así el cociente diferencial es:

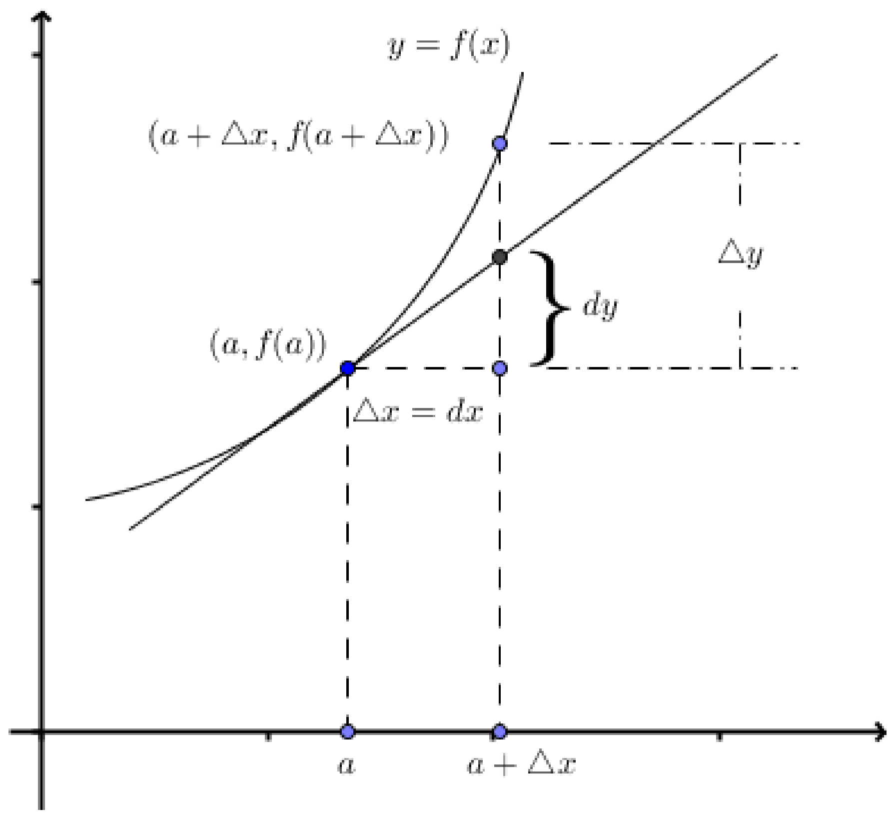
$$\frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

valor que es una aproximación a $f'(a)$, esto es, $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} \approx f'(a) \Rightarrow \triangle y = f'(a)\triangle x$

Los valores $\triangle x$ y $f'(a)\triangle x$ se denominan diferenciales y se denotan por:

$$x\triangle = dx \text{ y } dy = f'(a)dx$$

Gráficamente la situación descrita es:



En base a lo anterior estime

$$\triangle y \text{ y } dy \text{ para las funciones}$$

(a) $y = 1 + x^2$

(b) $y = (1 + x)^2$

(c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(d) $y = \operatorname{sen} x$

P7 (a) Para $y = x^2 + 5x + 1$ determine $\triangle y$ y dy

(b) Compare los valores de $\triangle y$ y dy para $x = 6$ y $\triangle x = dx = 0.01$

Solución:

(a)

$$\begin{gathered}
\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \\
= (x + \triangle x)^2 + 5(x + \triangle x) + 1 - (x^2 + 5x + 1) = \\
= x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 5x + 5\triangle x + 1 - x^2 - 5x - 1 = \\
= 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 5\triangle x \\
dy = f'(x)\triangle x = f'(x)dx \\
\Rightarrow dy = (2x + 5)dx = 2xdx + 5dx = 2x\triangle x + 5\triangle x \\
\text{Luego, } \triangle y \text{ y } dy \text{ difieren en:} \\
\triangle y - dy = 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 5\triangle x - (2x\triangle x + 5\triangle x) \\
\triangle y - dy = (\triangle x)^2
\end{gathered}$$

(b)

$$\begin{gathered}
\text{Ahora, si } x = 6 \text{ y } \triangle x = dx = 0.01\text{, entonces} \\
\triangle y = 2 \cdot 6 \cdot (0.01) + (0.01)^2 + 5 \cdot (0.01) = \\
0.01[12 + 0.01 + 5] = 0.01[17.01] = \\
dy = 2x\triangle x + 5\triangle x \\
= 2 \cdot 6 \cdot (0.01) + 5(0.01) \\
12 \cdot (0.01) + 5 \cdot (0.01) \\
0.01[12 + 5] = 0.01 \cdot 17 \\
\text{Así, } \triangle y - dy = 0.01[17.01] - 0.01 \cdot 17 \\
= 0.01[17 + 0.01] - 0.01 \cdot 17 \\
= 0.01 \cdot 17 + (0.01)^2 - 0.01 \cdot 17 \\
(0.01)^2
\end{gathered}$$

P8 Como $f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x)dx$, se puede estimar $(2.01)^3$, usando la función $f(x) = x^3$ y un incremento en la variable x de 0.01, esto es, $\triangle x = 0.01$

En efecto:

$f(x + \triangle x) = f(2 + 0.01) = f(2.01) = (2.01)^3$ se puede aproximar como:

$f(2) + 3(2)^2 \cdot (0.01) = 2^3 + 3 \cdot 4 \cdot (0.01)$
$= 8 + 12 \cdot (0.01) = 8.12$

P9 Suponga que un cubo tiene por arista un valor de $10cm$ con su error estimado de $\pm 0.01cm$.
¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen de dicho cubo?

Solución:

Se sabe que el volumen V es x^3, esto es, $V(x) = x^3$, con x la longitud de la arista. Ahora $\triangle V = (x + \triangle x)^3 - x^3$ y $dV = 3x^2dx = 3x^2\triangle x$ es la aproximación a $\triangle V$, luego para $x = 10$ y $\triangle x = \pm 0.1$. Se tiene que el máximo error aproximado es:

$$\begin{aligned} dV &= 3(10)^2(\pm 0.01) = 3 \cdot 100 \cdot (0.01) = \\ &= 300 \cdot (0.01) = 300 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 3cm^3. \end{aligned}$$

P10 Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ e $y = f(x) + g(x) = u + v$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$, luego
$dy = [f'(x) + g'(x)]dx$
$\Rightarrow dy = f'(x)dx + g'(x)dx$
$dy = du + dv$

Del mismo modo se cumplen las reglas:

- $d(uv) = udv + vdu$
- $d\dfrac{u}{v} = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

(a) Para $y = x^3 \operatorname{sen} 3x$, determine dy.

(b) Para $y = \dfrac{x^2}{x \ln \sqrt{x}}$, determine dy.

Actividad Didáctica de Aprendizaje Nº7

Aplicaciones de la Derivadas

Objetivos:

- Usar correctamente la regla de *L'Hôpital* para estimar el valor de algunos límites en el que se hace más expedito su cálculo.

P1 Indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y se desea estimar $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g'(x) \neq 0$, con $a \in \mathbb{R}$.

Entonces:

$$(*)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Ejemplo:</u> Estimar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, entonces,
$f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ y se cumple que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0} x = 0$,
como $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen}(x))' = \lim_{x\to 0} (\cos x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} (x)' = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0$, entonces podemos aplicar (*) para estimar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \text{ así, } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Use el resultado anterior (*), para estimar:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\sqrt{x}} - 1}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 3^x}{x}$, (Resp. $\ln \frac{5}{2}$)

P2 Indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Suponga que f y g son diferenciables en un entorno de $x = a$ y que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in N_\delta(a) - \{0\}$. Además suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ y que existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito). Entonces existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es igual a

$$(^{**})\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo ilustrativo: En la presentación anterior, en lugar de usar $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ se puede considerar $x = \infty$. Este es el caso que presentamos ahora.
Estime:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}, \text{ entonces } \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} x = 0, \text{ entonces}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ luego usando } L'H\hat{o}pital \text{ se tiene:}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \infty$$

Estime, usando (**) el valor de:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$ (Resp. 0)

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}$ (Resp. 1)

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ (Resp. 0)

Represente cada una de estas funciones para comprobar que las respuestas coinciden con su comportamiento gráfico.

P3 Un límite especial.

Estime el valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Aquí, $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

Así, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$ y basta entonces estimar el límite del exponente, esto es, de $x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ cuando $x\to\infty$. Para ello observe que:

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

y tanto el numerador como el denominador tiende a "0" si $x\to\infty$, luego podemos aplicar $L'H\hat{o}pital$ y tendremos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{1+\frac{1}{x}})\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{Así, } \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} =$$
$$= e^1 = e$$

P4 Uso reiterado de la Regla de $L'Hôpital$.
El siguiente ejemplo ilustra este hecho. Estime:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x}{4x^3+2x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x}{4x^3+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{12x^2+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{24x+4} = 0$$

Aplique la técnica anterior para estimar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-6x^2+4x}{x^4-2x^3+3^x2+4x}$$

Factorice tanto el numerador como el denominador por x^3, estime ahora el límite sin usar $L'Hôpital$.

P5 La regla de $L'Hôpital$ se puede aplicar con indeterminaciones de la forma: $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, 0^0, ∞^∞ y $0\cdot\infty$ como también de forma reiterada, como ya se ha dicho.

Un ejemplo de indeterminación de la forma 0^0 es la siguiente.

Estime:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^x$$

Solución:

$$(\operatorname{sen}(x))^x = e^{\ln(\operatorname{sen}(x))^x} = e^{x\ln(\operatorname{sen}(x))}$$
$$\text{Pero, } x\ln(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\frac{1}{x}} \to \frac{-\infty}{\infty}$$

Si $x\to 0^+$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x)}}{\frac{-1}{x^2}} =$$
$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x)x^2}{\operatorname{sen} x} = -\lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{sen} x =$$
$$= -\lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x =$$
$$-1\cdot 1^2 \cdot 0 = 0$$

Así, $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^x = e^0 = 1$

P6 Estime el valor del límite de:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{e^x}, \text{ cuando } x \to \infty$$

P7 Estime el valor de:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - x^2 + x + 1}{x^{10} - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{x\operatorname{sen} x}$

ADA Nº1 La Integral

Objetivos:

- Establecer la función original a partir de la razón de cambio.
- Examinar la conexión entre la derivada y la integral

P1 Una función F es una antiderivada de f en el intervalo I si $D_x(F(x)) = F'(x) = f(x)$ en I.

Ejemplo: Determine una antiderivada de la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Es claro que $F(x) = x^2$, pero $F(x)$ no es la única, basta observar que $G(x) = x^2 + 1$ también es una antiderivada de $f(x) = 2x$.

En general, $F(x) = x^2 + C$, con $C \in \mathbb{R}$ será la antiderivada o primitiva de $f(x)$.

Determine la antiderivada de $f(x) = 4x^3$ en su expresión más general.

P2 La notación más común para escribir una antiderivada de $f(x)$ es: $\displaystyle\int f(x)dx$.

Así, $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C \Longleftrightarrow (F(x) + 1)' = f(x)$.

Luego, usando la notación anterior:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \text{ pues } (\frac{1}{3}x^3 + C)' = x^2$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \text{ pues } (\frac{1}{2}x^2 + C)' = x$$

Observación: Si $r \in Q$ con $(r \neq -1)$ entonces:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \text{ claramente } (\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C)' = x^r$$

También es válido el caso cuando $r = 0$, esto es;

$$\int x^0 dx = \int 1 dx = \int dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$$

Determine $\int x^{\frac{1}{3}}dx$, $\int x^{\frac{2}{3}}dx$, $\int x^{\frac{4}{3}}dx$

P3 Dos antiderivadas muy usadas son $\int \operatorname{sen} dx = -\cos x + C$ y $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$. Compruebe estas igualdades usando derivación.

Notas:

(1) Es común usar el término integral indefinida en lugar de antiderivada.

(2) Antiderivar es integrar.

(3) En la expresión $\int f(x)dx$, $\int$ es el signo de la integral y $f(x)$ corresponde al integrando. Así, se integra el integrando para obtener una primitiva o antiderivada de $f(x)$.

P4 La integral indefinida es un operador lineal, esto es,

(1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

Nota: Observe que estas dos propiedades se cumplen cuando en lugar de usar $\int ()dx$ se usa $D_x()$.

Pruebe usando derivación que se cumplen (1) y (2).

P5 Use los resultados anteriores (dados en **P3**) para estimar:

(a) $\int (4x + 3x^5)dx$

(b) $\int (u^{\frac{1}{2}} - 2u + 3)du$

(c) $\int (\frac{1}{t^3} + \sqrt{t})dt$

(d) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + tx)dx$

(e) $\int (xt^2 + \frac{1}{t^2})dt$

P6 Suponga que $g(x)$ es una función diferenciable y r es un número racional distinto de -1. Entonces es válido:

(*) $\int [g(x)]^r g'(x)dx = \dfrac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$, $(r \neq -1)$

Aplique este resultado, que se demuestra por derivación, para estimar las integrales indefinidas:

(1) $\displaystyle\int (x^3+2x)^5(3x^2+2)dx$

(2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 x\cos x dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x)dx$

(4) $\displaystyle\int \cos^7 x\ \operatorname{sen} x dx$

(5) $\displaystyle\int (x^7+x^6+x^5)^{10}(7x^6+6x^5+5x^4)dx$

P7 Usando (*) dado en **P6** estime el valor de la primitiva:

(1) $\displaystyle\int (x^3+6x)(6x^2+12)dx$

(2) $\displaystyle\int (x^2+5)^7 dx$

(3) $\displaystyle\int (\frac{x^2}{3}+4)^2x^2dx$

P8 Estime el valor de las integrales:

(1) $\displaystyle\int 3x\sqrt{3x^2+5}dx$

(2) $\displaystyle\int 2x^4(2x^5+7)^3dx$

(3) $\displaystyle\int (5x^2+1)(5x^3+3x+8)^5dx$

(4) $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^5 x^2)(\cos x^2)xdx$

(5) $\displaystyle\int (x^4-1)x^2dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3-1}{x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+10}{\sqrt{x}}$

P9 Suponga que se conoce $f''(x)$, determine $f(x)$ si

(1) $f''(x)=x+1$

(2) $f''(x)=\sqrt{x}$

(3) $f''(x)=x^{\frac{1}{3}}$

(4) $f''(x)=-2x+1$

P10 Demuestre las fórmulas:

(1) $\displaystyle\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)}+C$

ADA Nº2 La Integral

Objetivos:

- Definir que se entiende por una ecuación diferencial.
- Resolver algunas ecuaciones diferenciales sencillas que modelan situaciones de orden físico.

P1 Una ecuación diferencial (ordinaria) es una ecuación que contiene derivadas.
Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Longleftrightarrow y' = 2x,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3x^2}{y},\ F = m\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2xy$$

En lo que sigue resolveremos algunas diferenciales.

P2 Determine la ecuación en las variables x e y tal que ella pasa por el punto $(1,2)$ y su pendiente en cualquier punto de la curva es igual al doble de su abscisa, esto es, $\frac{dy}{dx} = 2x$

Solución: La condición para la función $f(x)$ en cada punto de ella es:

$\frac{dy}{dx} = 2x$ y además debe pasar por el punto $(1,2)$.
Si llamamos a $2x = g(x)$ entonces $\frac{dy}{dx} = g(x)$, luego y debe ser una antiderivada de $g(x)$, así:

$$y = \int g(x)dx = \int 2xdx = 2\int xdx =$$
$$\Rightarrow y = 2[\frac{x^2}{2} + C'] = x^2 + 2C' = x^2 + C$$
$$\Rightarrow y = x^2 + C.$$

Se debe ahora determinar el valor de C, de entre todas las curvas $y = x^2 + C$, como ella pasa por $(1,2)$ entonces $2 = (1)^2 + C \Rightarrow C = 1$.
Luego la solución es: $y = x^2 + 1$

P3 Resolver una ecuación diferencial es todo un tema de estudio dentro de las Matemáticas, pues las hay de diverso tipo y solución.

Aquí se aborda sólo las ecuaciones diferenciales de primer orden y que se resuelven por el método de separación de variable, lo que implica usar la integración para hallar su solución. A modo de ejemplo, se calcula la solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3x^2}{y}$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
(*)\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x + 3x^2}{y} \ / \ dx \\
\Rightarrow ydy &= (x + 3x^2)dx
\end{aligned}
$$

Si se integra la expresión anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
\int ydy &= \int (x + 3x^2)dx \\
\Rightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 &= \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3} + C_2 \\
\Rightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2 \ /2 \\
\Rightarrow y^2 + 2C_1 &= x^2 + 2x^3 + 2C_2 \\
\Rightarrow y^2 &= x^2 + 2x^3 + 2C_2 - 2C_1 \\
\Rightarrow y^2 &= x^2 + 2x^3 + C \\
\Rightarrow y &= \sqrt{x^2 + 2x^3 + C}
\end{aligned}
$$

Puede comprobar esta solución reemplazando el valor de y en la ecuación original (*).

P4 La física nos provee de buenos ejemplos donde las ecuaciones diferenciales están presentes al estudiar la velocidad y la aceleración.

Suponga por ejemplo que $\dfrac{dv}{dt} = -32$, y que se tienen además las condiciones:

$v(t = 0) = 50$ y $s(t = 0) = 1000$, la idea es poder recuperar $s(t)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -32 \\ \Rightarrow dv &= -32dt \\ \Rightarrow \int dv &= \int -32dt = -32t + C \\ \Rightarrow v(t) &= -32t + C \end{aligned}$$

Como $v(t=0) = 50 \Rightarrow v(0) = -32 \cdot 0 + C = 50$,

$$\text{luego } v(t) = -32t + 50$$

Se sabe además que $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(t) &= -32t + 50 = \frac{ds}{dt} \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} &= -32t + 50 \ /\text{dt} \\ \Rightarrow ds &= (-32t + 50)dt \\ \Rightarrow \int ds &= \int (-32t + 50)dt \\ \Rightarrow s &= -32\frac{t^2}{2} + 50t + C \\ \Rightarrow s(t) &= -16t^2 + 50t + C \end{aligned}$$

Pero, $s(t=0) = 1000 \Rightarrow s(t) = -16t^2 + 50t + 1000$ es la solución para $\dfrac{dv}{dt} = -32$ con las condiciones dadas en el problema.

P5 Suponga ahora que las aceleración de un objeto se rige por la ecuación $a(t) = (t+3)^{-3}$. Si la velocidad en $t = 0$ es de $4m/seg$, determine su velocidad en $t = 2$.

Solución:

Como $a(t) = (t+3)^{-3} \Rightarrow a(t) = \dfrac{dv}{dt} = (t+3)^{-3}$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (t+3)^{-3} / \text{dt} \\ \Rightarrow dv &= (t+3)^{-3}dt \\ \Rightarrow \int dv &= \int (t+3)^{-3}dt = \frac{(t+3)^{-2}}{-2} + C \\ \Rightarrow v &= \frac{1}{-2(t+3)^2} + C \end{aligned}$$

Como $v(t=0)=4 \Rightarrow 4=\dfrac{1}{-18}+C$

$$\Rightarrow 4+\frac{1}{18}=C \Rightarrow C=4,05$$
$$\Rightarrow v(t)=\frac{-1}{2(t+3)^2}+4.05$$

Ahora en $t=2$, es cosa de reemplazar.

P6 A partir de la segunda ley de Newton, esto es, $F=m\cdot a$, dónde a es la aceleración, se puede escribir que:

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=m\frac{dv}{ds}v$$
$$\Rightarrow mv\frac{dv}{ds}=F=-mg\frac{R^2}{s^2}$$

Obtenga a partir de esta última expresión, esto es, $mv\dfrac{dv}{ds}=-mg\dfrac{R^2}{s^2}$ el valor de v^2

P7 Resuelva las ecuaciones diferenciales dadas con sus respectivas condiciones señaladas:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$; $y=3$ cuando $x=2$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=1+3x^2$; $y=4$ cuando $x=1$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=y^2t^3$; $y=1$ cuando $t=2$

P8 Determine la ecuación en x e y de la curva que pasa por $(1,2)$ y cuya pendiente en cualquiera de sus puntos es cuatro veces su coordenada x.

P9 (1) Haga ver que la función $y=C_1\operatorname{sen}x+C_2$ es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(2) Lo mismo para $y=\operatorname{sen}(x+C)$ si ahora la ecuación diferencial es: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1-y^2$

P10 A partir de $a(t)=t$; $v_0=2$ y $s_0=0$ estime $v(t)$ y $s(t)$ para $t=2$.

<u>Solución:</u> $v(t=2)=4$, $s(t=2)=\dfrac{16}{3}$

ADA Nº3 La Integral

Objetivos:

- Examinar la tabla básica de integrales en correspondencia con las derivadas de las funciones consideradas.
- Dar las orientaciones necesarias para estimar integrales usando el método de sustitución.

P1

(a) Como $\dfrac{d}{dx}x = 1 \Rightarrow \displaystyle\int dx = x + C$

(b) Como $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}) = x^n \Rightarrow \displaystyle\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, con $n \neq -1$

(c) $\dfrac{d}{dx}(\ln|x|) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(d) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \Rightarrow \displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

(e) $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

(f) $\dfrac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b \Rightarrow \displaystyle\int b^x dx = \dfrac{b^x}{\ln b} + C$, (con $b > 0$ y $b \neq 1$)

P2 Una estimación de una antiderivada obliga, a veces, a reescribir el integrando de modo tal de poder visualizar que lo que se desea integrar corresponde a un cálculo ya establecido. Tal es el caso al estimar:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^7}dx$

(b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx$

En efecto:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^7}dx = \int x^{-7}dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{x^{-6}}{-6} + C = \frac{-1}{6x^6} + C$

(b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

P3 Una propiedad importante al estimar antiderivadas (primitivas o integrales indefinidas), es el carácter lineal del operador $\int$, que al igual que el operador derivada satisface las mismas dos propiedades elementales que a continuación se enuncian, a saber:

Si $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ entonces

(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$

(2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$

Aplique estos resultados para estimar:

(1) $\int (3x - \frac{5}{x} + 7\operatorname{sen} x)dx$

(2) $\int \frac{5x^5 - 7}{x}dx$

(3) $\int \frac{x^2}{1 + x^2}dx$

(4) $\int \frac{x^2}{1 - x^2}dx$

P4 Estime las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int (1 - t^{-0.5})dt$

(b) $\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx$

(c) $\int \frac{r^2 - 5r + 10}{r^3}dr$

(d) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\int (\frac{3 + 5\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x})dx$

(f) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

P5 Use las reglas de derivación para comprobar el valor de las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int x\operatorname{sen} x^2 dx = \frac{-1}{2}\cos^2 x^2 + C$

(b) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

(c) $\int \ln x = x\ln x - x + C$

(d) $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

(e) $\int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C$

P6 Efectúe las operaciones indicadas

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int (x^2 - 2x + 1)dx$

(b) $\displaystyle\int \dfrac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1)dx$

P7 Resuelva la ecuación diferencial dada

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 5x^2 + 10$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2x + 3\text{sen}\, x$

P8 Determine $y = f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 3)$ y además satisface la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

P9 Si $f''(x) = 2x$, determine $f'(x)$ y $f(x)$

P10 Determine una función f tal que $f''(x) = 8$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$

P11 Si $f^{(n)}(x) = 0$ ¿Qué es $f(x)$?

P12 Determine $f(x)$ sabiendo que $\displaystyle\int f(x)dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

P13 A partir de la expresión:

$\displaystyle\int [g(x)]^n g'(x)dx = \dfrac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, y si se sustituye u por $g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$

Luego, $\displaystyle\int [g(x)]^n g'(x)dx = \int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$.

Use el resultado anterior para evaluar:

(1) $\displaystyle\int (2x + 7)^8 dx = I$

Solución: Si $u = 2x + 7 \Rightarrow du = (2x + 7)'dx \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } I &= \int u^8 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^8 du \\ &= \frac{1}{2}[\frac{u^9}{9} + C'] = \frac{1}{18}u^9 + C \\ &= \frac{1}{18}(2x + 7)^9 + C \end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2 + 5)^7}dx$. **Indicación:** Use $u = x^2 + 5$

(3) $\displaystyle\int \cos^5 x \operatorname{sen} x dx$

(4) $\displaystyle\int \cos(3x + 1)dx$

(5) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)dx$

P14 Construya su tabla de integrales que abarque una gran cantidad de funciones en términos de u, como por ejemplo:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + u^2}du = arctgu + C$

(2) $\displaystyle\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen} hudu = \cos hu + C$, etc.

P15 Integre:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^{-x}}dx$

(b) $\displaystyle\int e^{3x}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x + 1}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

ADA Nº4 La Integral

Objetivos:

- Construirse una tabla de integrales.
- Revisar la técnica de integración por sustitución.

P1 Construya una tabla que de cuenta de el valor de algunas integrales de uso común, como por ejemplo:

(a) $\int du = u + C$, $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$

(b) $\int e^u du = e^u + C$, $\int u^{-1} du = \ln |u| + C$

(c) $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$, etc.

Revise los sitios web:

- http://scienceworld.com
- http://mathworld.com

P2 La técnica de sustitución o cambio de variable se entiende mejor examinando algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1 Evaluar $\int \dfrac{x}{x^2+1} dx$

Solución: Si $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$, así, $\dfrac{du}{2} = xdx$, luego la integral solicitada se transforma en:

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}[\ln |u| + C'] = \frac{1}{2}\ln |u| + \frac{C'}{2} = \frac{1}{2}\ln |x^2+1| + C$$

Ejemplo 2 Evaluar $\int (3x+5)^9 dx$

Solución: Si $u = 3x+5 \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow \dfrac{du}{3} = dx$, luego la integral a evaluar se transforma en:

$$\int u^9 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^9 du = \frac{1}{3}[\frac{u^{10}}{10} + C'] = \frac{1}{30}u^{10} + \frac{C'}{3} = \frac{1}{30}(3x+5)^{10} + C$$

Ejemplo 3 Evaluar $\int (\operatorname{sen} x)^5 \cos x dx$

Solución: Si $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = (\operatorname{sen} x)' dx = \cos x dx$
Así, la integral es ahora:

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} + C \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$$

Ejemplo 4 Evaluar $\int \dfrac{1}{1+e^{-2x}} dx$

Solución: $\dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

Así, $\int \dfrac{1}{1+e^{-2x}} dx = \int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$

Tome $u = e^{2x}+1 \Rightarrow du = (e^{2x}+1)' dx = e^{2x} 2dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = e^{2x} dx$, así, la nueva integral es:

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

P3 Use la técnica de sustitución (cambio de variable) para evaluar cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int \sqrt{1-2x}\, dx$

(b) $\int \dfrac{1}{(2x+3)^4} dx$

(c) $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$

(d) $\int \dfrac{t}{\sqrt[4]{9+t^2}}$

(e) $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x dx$

(f) $\int \tan^2 2x \sec^2 2x dx$

(g) $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x dx$

(h) $\int 3\cos\dfrac{x}{2} dx$

(i) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

(j) $\int x \cos x^2 dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+5}dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x}dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx$

(p) $\displaystyle\int x^2e^{-2x^3}dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

P4 Use las identidades trigonométricas: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x); \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ para evaluar las integrales:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x dx$

(b) $\displaystyle\int \cos^2 \pi x dx$

(c) $\displaystyle\int \cos^2 4x dx$

(d) $\displaystyle\int (1+cos2x)^2 dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \frac{3}{2}x dx$

P5 Resuelva la ecuación usando integración.

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[4]{1-x}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1-\tan x)^3}{\cos^2 x}$

P6 Determine una función f tal que:

$f''(x) = (1+2x)^5,\ f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$

P7 Haga ver que se tienen las siguientes igualdades:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{-1}{2}\cos^2 x + C$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{-1}{4}\cos 2x + C$

P8 Determine una función $y = f(x)$ tal que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \cos^3 x$

Indicación: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$

P9 Evaluar $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ y $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x dx$

Indicación: Use las siguientes identidades:

- $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

P10 Suponga que $f(x)$ es una función diferenciable, evalúe entonces:

(a) $\displaystyle\int f'(8x)dx$

(b) $\displaystyle\int 5xf'(5x^2)dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{f(3x)}f'(3x)dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{f'(2x+1)}{(2x+1)}dx$

P11 Evaluar: $\displaystyle\int \left[\int \sec^2(3x)dx\right] dx$

ADA Nº5 La Integral

Objetivos:

- Completar la construcción de una tabla de integrales.
- Revisar la técnica de integración por partes.

P1 Agregue a la lista construida en **P1** de la ADA4 otras integrales. Verificando dichas igualdades por derivación.

P2 Suponga que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ luego}$$
$$\int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$
$$\Rightarrow f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$
$$\Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$$
$$\text{Luego, } \int udv = uv - \int vdu$$

La última expresión es como se conoce la fórmula para la integración por partes.

Ejemplo 1 Evaluar $\int xe^x dx$

Solución: Si $u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$

Luego, $I = \int xe^x dx = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx$

$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

Derivando $xe^x - e^x + C$ se obtiene xe^x, lo que sirve de comprobación para la solución hallada.

Ejemplo 2 Evaluar $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Solución: Considere: $u = x$, $dv = (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx$

$\Rightarrow du = dx$, $v = \displaystyle\int (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx = 2\sqrt{x+1}$

Así, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = uv - \int vdu = 2x\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}dx =$

$= 2x\sqrt{x+1} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\dfrac{2}{3} + C = 2x\sqrt{x+1} - \dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

Ejemplo 3 Evaluar $\displaystyle\int x^2 \ln x dx$

Solución: Considere: $u = lnx$, $dv = x^2dx \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$, $v = \displaystyle\int x^2dx = \frac{x^3}{3}$

Luego, $\displaystyle\int x^2 \ln x dx = uv - \int vdu =$

$= \dfrac{x^3}{3}\ln x - \displaystyle\int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx =$

$\dfrac{x^3}{x}\ln x - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int x^2dx =$

$\dfrac{x^3}{x}\ln x - \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{3} + C =$

$\dfrac{x^3}{x}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$

P3 Evaluar $\displaystyle\int \arcsin x dx$

Solución: $u = \arcsin x \to du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Así, $I = \displaystyle\int \arcsin x dx =$

$= uv - \displaystyle\int vdu =$

$= x\arcsin x - \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= x\arcsin x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= x\arcsin x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)dx =$

$= a\arcsin x + \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}2 + C =$

$= a\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Evalúe ahora $\displaystyle\int x\arctan x dx$

Solución: $I = \dfrac{1}{2}x^2\arctan x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$

P4 A veces es necesario volver a usar la integración por partes cuando se estima una integral, tal es el caso de $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Solución: Considere $u = x^2 \to du = 2xdx$
$dv = \operatorname{sen} x dx \to v = \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx =$
$= -\cos x$
Luego, $I = \displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx = uv - \int v du =$
$= -x^2 \cos x - \displaystyle\int -2x \cos x dx =$
$= -x^2 \cos x + 2 \displaystyle\int x \cos x dx =$
$= -x^2 \cos x + 2J$
Aquí, $J = \displaystyle\int x \cos x dx$ se debe integrar por partes:
Considere: $u = x \to du = dx$
$dv = \cos x dx \to v = \displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$
$\Rightarrow J = x \operatorname{sen} x - \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C'$
Así, $I = -x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x + \cos x + C']$
$I = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 2C' =$
$I = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C' =$
Resolver ahora, $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$ usando la técnica anterior, la solución es:

$$x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

Compruebe tal resultado usando derivación.

P5 Evaluar $\displaystyle\int \sec^3 x dx$

Indicación Expresar $\displaystyle\int \sec^3 x = \sec x \sec^2 x$, así $\displaystyle\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$, use $u = \sec x \to du = \sec x \tan x dx$ y así siguiendo..., la solución es:

$$I = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

P6 Evaluar $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x dx$

Indicación Al integrar por parte I se encontrará en su desarrollo con parte de I. Agrupe I es un lado y prosiga en consecuencia con el resto. La solución buscada será:

$$I = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\text{sen}\, 3x + C$$

P7 La técnica de integración por partes se puede usar también para evaluar integrales definidas, en este caso,

$$\int_a^b u dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v du$$

Aplique lo anterior para evaluar:

$\displaystyle\int_1^e \ln x dx$, que corresponde al área de $y = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$, la solución es 1.

P8 Existen familias de funciones que se pueden tratar con la técnica de integración por partes como:

(a) $x^n e^{ax}$, $x^n \text{sen}\, ax$, $x^n \cos ax$; para este caso considere:
$u = x^n$ y $dv = e^{ax}dx$
$u = x^n$ y $dv = \text{sen}\, ax dx$
$u = x^n$ y $dv = \cos ax dx$

(b) $x^n \ln x$, $x^n \arcsin ax$, $x^n \arctan ax$, $u = \ln x$, $\arcsin ax$, $\arctan ax$, $dv = x^n dx$

(c) $e^{ax}\text{sen}\, bx$, $e^{ax}\cos bx$
$u = \text{sen}\, bx$ ó $\cos bx$
$dv = e^{ax}dx$

P9 Aplique lo comentado en **P8** para evaluar las integrales:

(a) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(b) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$

(c) $\displaystyle\int x^2\cos 2x dx$

(d) $\displaystyle\int x^4 \ln x dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

(f) $\displaystyle\int e^{2x}\text{sen}\, x dx$

(g) $\displaystyle\int e^{x}\cos 2x dx$

P10 Use la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} mx \cos nx = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$ para evaluar $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos 2x dx$

P11 Evalúe $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx dx$

P12 Haga ver que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad m \neq n \\ \\ \pi & , \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

Indicación Use $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \dfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
Area: Matemática

Profesor: Elías Irazoqui Becerra *Campus Fernando May*

Pre - Test

Cálculo

A) Sobre Álgebra

P1 Evaluar las expresiones sin usar calculadora.

(a) $(-2)^3$

(b) -2^3

(c) $\dfrac{3^{22}}{3^{17}}$

(d) $(\dfrac{2}{3})^{-2}$

(e) $16^{\frac{-3}{4}}$

P2 Simplifique:

(a) $(2a^3b^3)(4a^2b)^3$

(b) $(\dfrac{3x^{\frac{3}{2}}y^3}{x^2y^{\frac{-1}{2}}})^{-2}$

P3 Desarrolle y simplifique:

(a) $3(x+6)+4(3x-2)$

(d) $(3x+2)^2$

(b) $(x-3)(2x+5)$

(e) $(x-1)^2$

(c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

P4 Simplifíque la expresión

(a) $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{(x+1)}{(x+2)}$

(b) $\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

P5 Racionalice la expresión y simplifíque:

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

P6 Reescriba completando el cuadrado

(a) x^2+x++1

(b) $2x^2-12x+11$

P7 Resuelva la ecuación (de sólo las soluciones reales)

(a) $x+7=14-\dfrac{1}{2}x$

(b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$

(c) $2|x-3| = 6$

P8 Resuelva las desigualdades:

(a) $(x-1)(x+2) > 0$

(c) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leq 1$

(b) $|x-2| < 3$

P9 Desarrolle y mencione si es V o F. Justifíque su respuesta.

(a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$

(b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$

(d) $\dfrac{1}{a-b} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$

(e) $\dfrac{1+ef}{f} = 1 + e$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

Area: Matemática

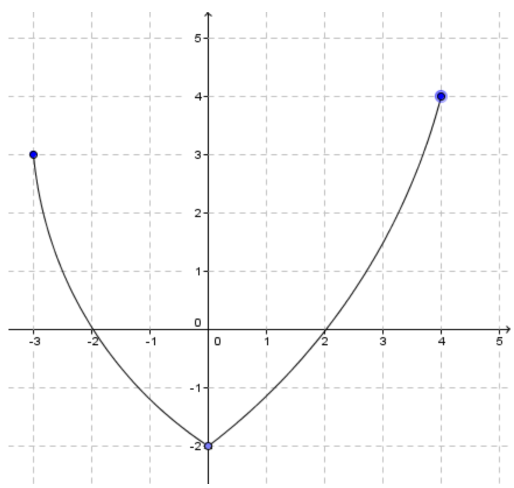
Profesor: Elías Irazoqui Becerra *Campus Fernando May*

Pre - Test

Cálculo

A) Sobre Funciones

P1 Según el gráfico siguiente se pide:



(a) $f(-2)$

(c) $\{x|f(x)=0\}$

(b) $\{x|f(x)=4\}$

(d) El dominio y recorrido de f

P2 Si $f(x) = x^3$, evalúe y simplifíque:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

P3 Determine el dominio de las funciones:

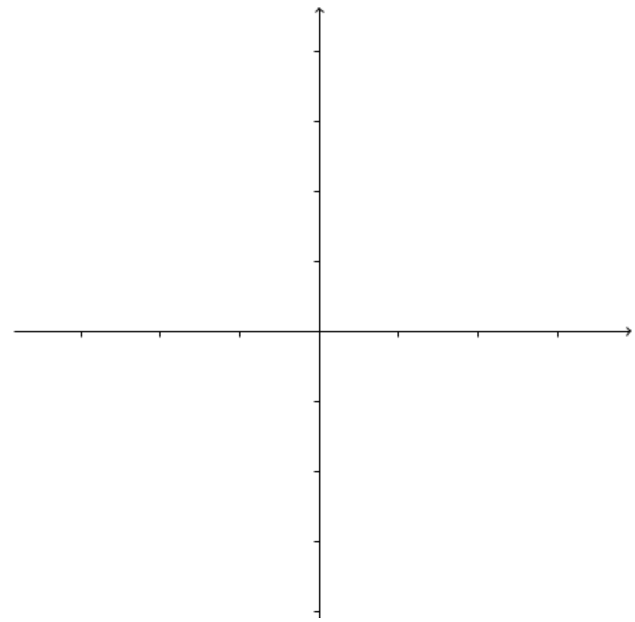
(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2+2}$

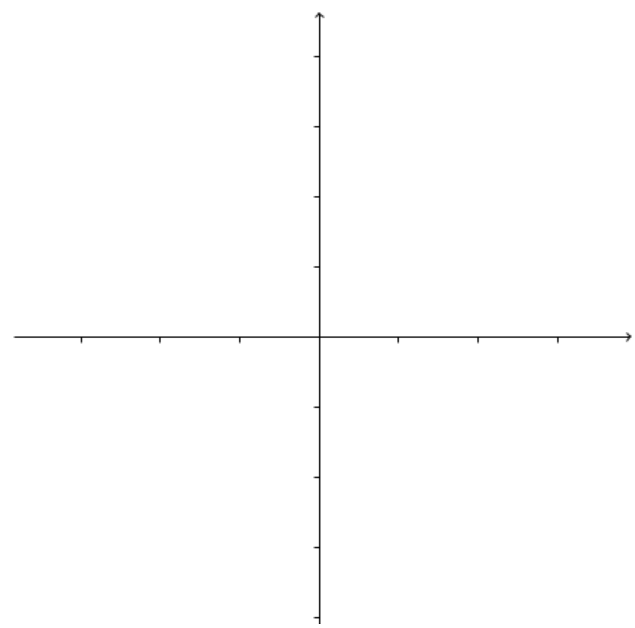
(c) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

P4 Haga un dibujo aproximado de las funciones;

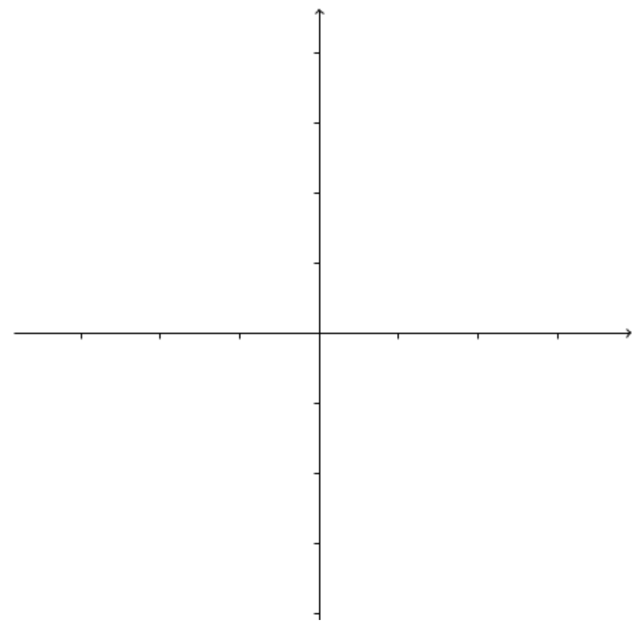
(a) $y = x^4$



(b) $y = 2 - x^2$



(c) $y = \sqrt{x}$

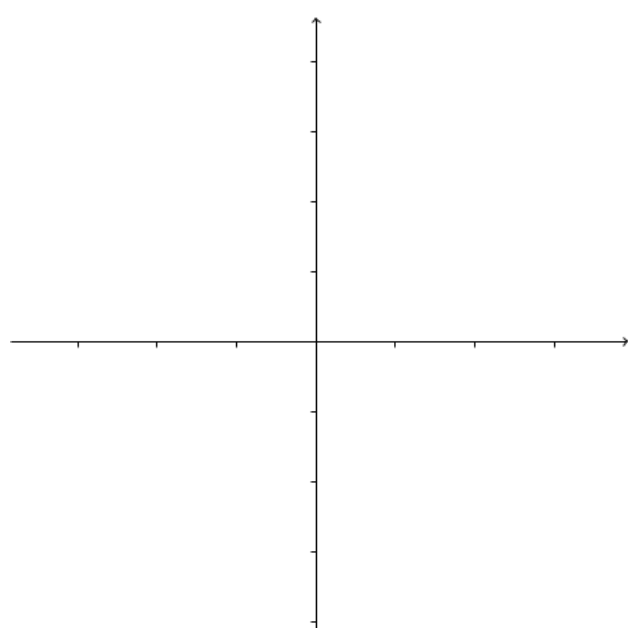


P5 Sea

$$y = \begin{cases} 1 - x^2 & , \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x + 1 & , \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(a) Evaluar $f(0)$, $f(-2)$, $f(1)$

(b) Grafique $f(x)$.



P6 Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 5$. Determine:

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

(c) $g \circ g \circ g$

Universidad del Bío-Bio
Facultad de Ciencias
Departamento de Ciencias Básicas
Área: Matemática

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Docente: Elías Irazoqui B. Campus Fernando May, Casilla 447.

Pre Test Curso de Cálculo

Nombre: ______________________________ Carrera: ______________________________

P1 Sea $f(x) = \sqrt{3x-4}$ Determine:

a) D_f (dominio)

b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

c) ¿Qué sucede con (b) si $h \to 0$

P2 Explique qué entiende por la derivada de una función en un punto y su generalización para todo x.

P3 Estime las derivadas de las funciones:

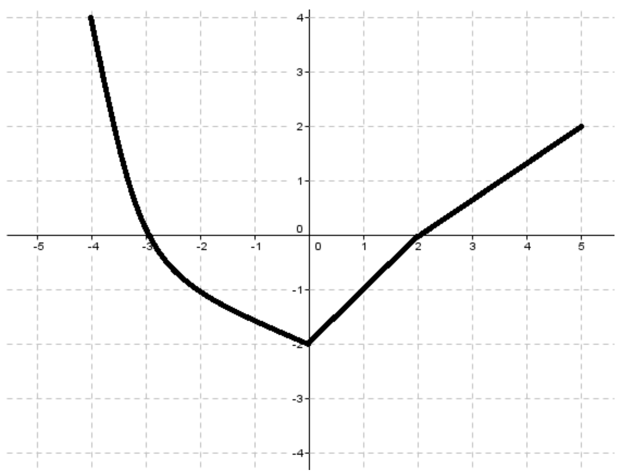
a) $f(x) = 2e^{\text{sen}(x^2)+\cos(2x)}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} ln(\sqrt{x+2}) + 2^x$

P4 Determine el área del triángulo que forma el eje x, la normal y la tangente a la curva $y = 4x^2 - x$ en el punto (1,3).

P5 Un objeto se mueve según $s(t) = -16t^2 + 96t + 112$ (t en segundos y s(t) en mts.). Determine el tiempo t cuando el objeto alcanza su máxima altura.

P6 En la gráfica de coordenadas (t, s(t)), indica en qué puntos la velocidad $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ es positiva, ¿dónde la velocidad es negativa y cuando es nula?. Haz un gráfico que relacione v con t.



Anexos: Fase 2 y 3.

Anexos:

Estadísticas de la Fase 2

Anexo N°01

N		22
Media		547,7295
Mediana		538,2250
Moda		512,25
Desviación estándar		28,26543
Varianza		798,934
Asimetría		,684
Curtosis		-,527
Mínimo		512,25
Máximo		610,95
Percentiles	25	524,0250
	50	538,2250
	75	570,2500

Anexo N°02

N		22
Media		4,1182
Mediana		4,3000
Moda		4,00
Desviación estándar		1,07864
Varianza		1,163
Asimetría		-2,947
Curtosis		10,631
Mínimo		0,00
Máximo		5,50
Percentiles	25	4,0000
	50	4,3000
	75	4,5250

Anexo N°03

N		22
Media		3,964
Mediana		4,1
Moda		4,1
Desviación estándar		0,7792
Varianza		0,607
Asimetría		-1,176
Curtosis		1,532
Mínimo		1,9
Máximo		5,2
Percentiles	25	3,85
	50	4,1
	75	4,375

Anexo N°04

N		22
Media		4,136
Mediana		4,35
Moda		4,5
Desviación estándar		1,027
Varianza		1,055
Asimetría		-0,596
Curtosis		-0,204
Mínimo		1,9
Máximo		5,9
Percentiles	25	3,4
	50	4,35
	75	5

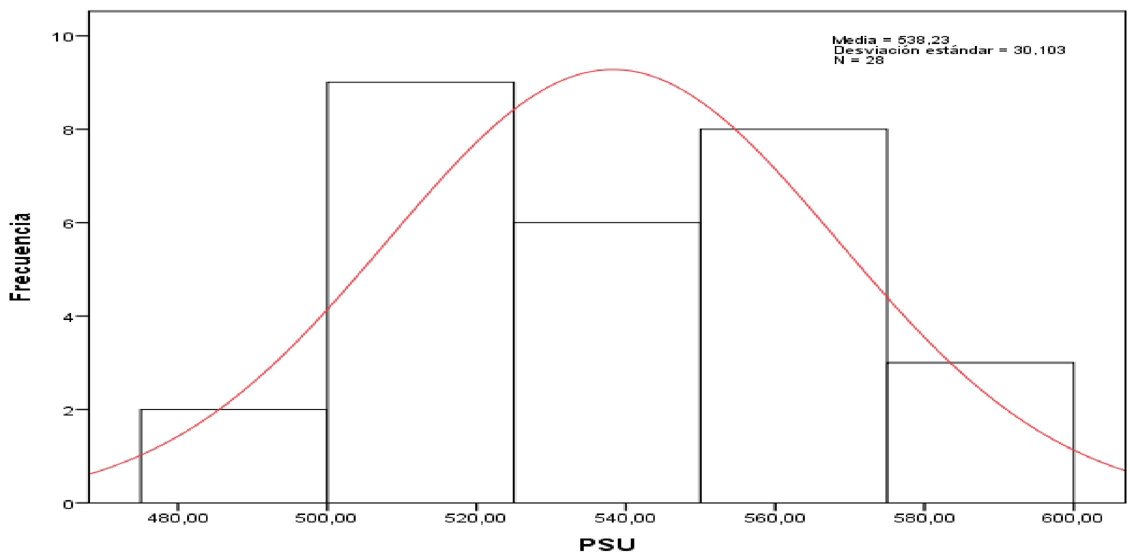
Anexo N° 05:

N		22
Media		4,05
Mediana		4,225
Moda		4,3
Desviación estándar		0,8392
Varianza		0,704
Asimetría		-1,077
Curtosis		1,062
Mínimo		1,9
Máximo		5,3
Percentiles	25	3,625
	50	4,225
	75	4,55

Supuestos de Normalidad de la Fase 3

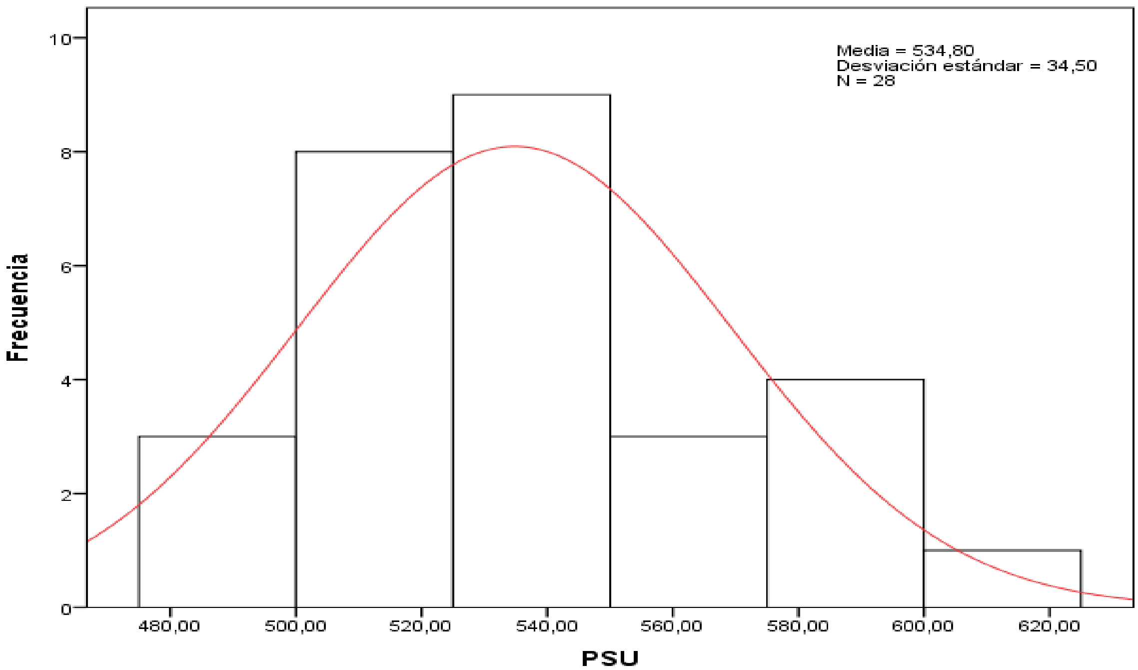
Anexo N° 06:

Distribución del puntaje obtenido en la PSU por los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método tradicional



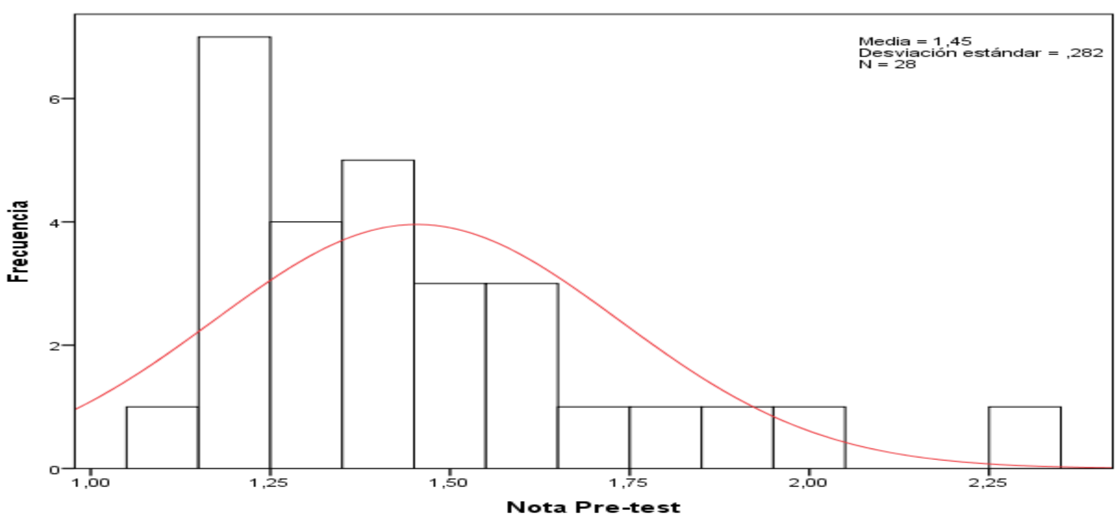
Anexo N° 07:

Distribución del puntaje obtenido en la PSU por los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método experimental



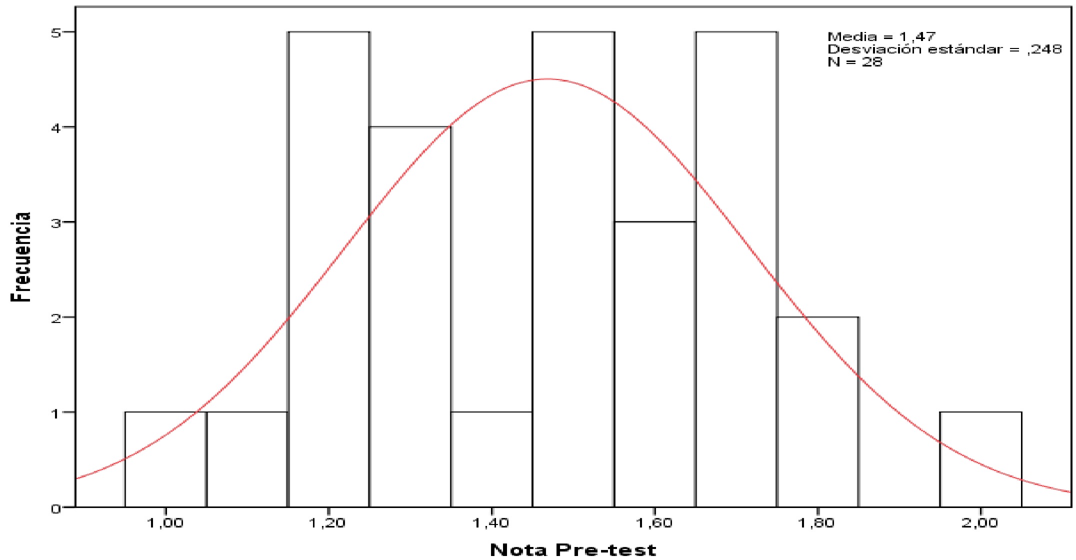
Anexo N° 08:

Distribución de las notas del Pre-Test de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales Bajo el Método Tradicional



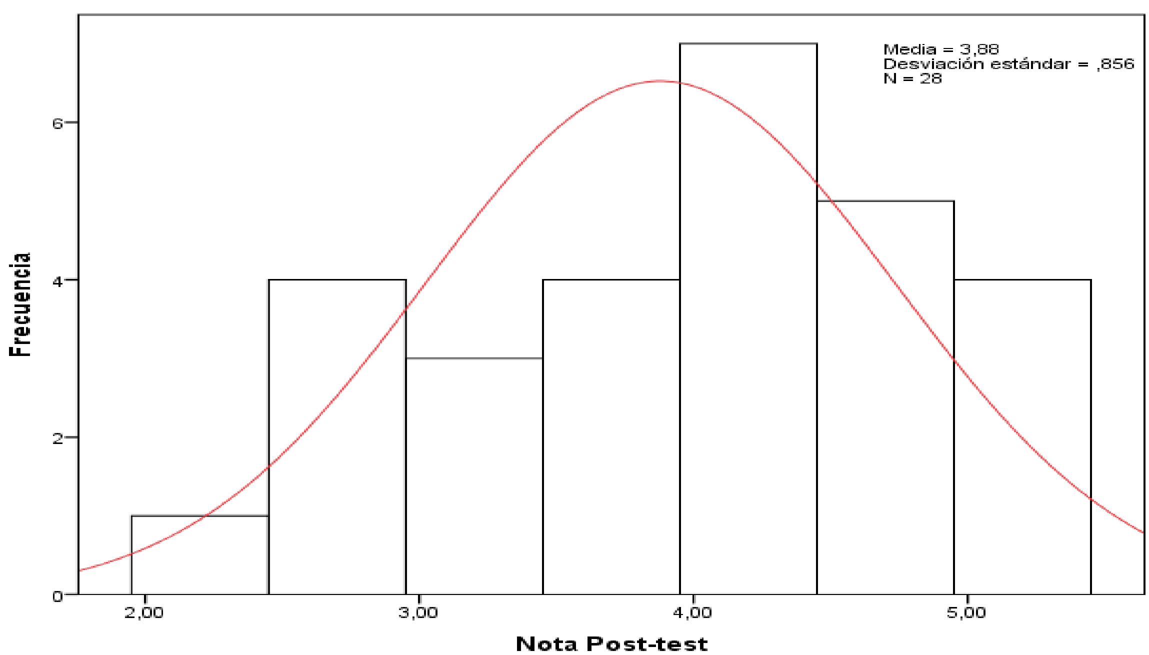
Anexo N° 09:

Distribución de las notas finales de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método experimental



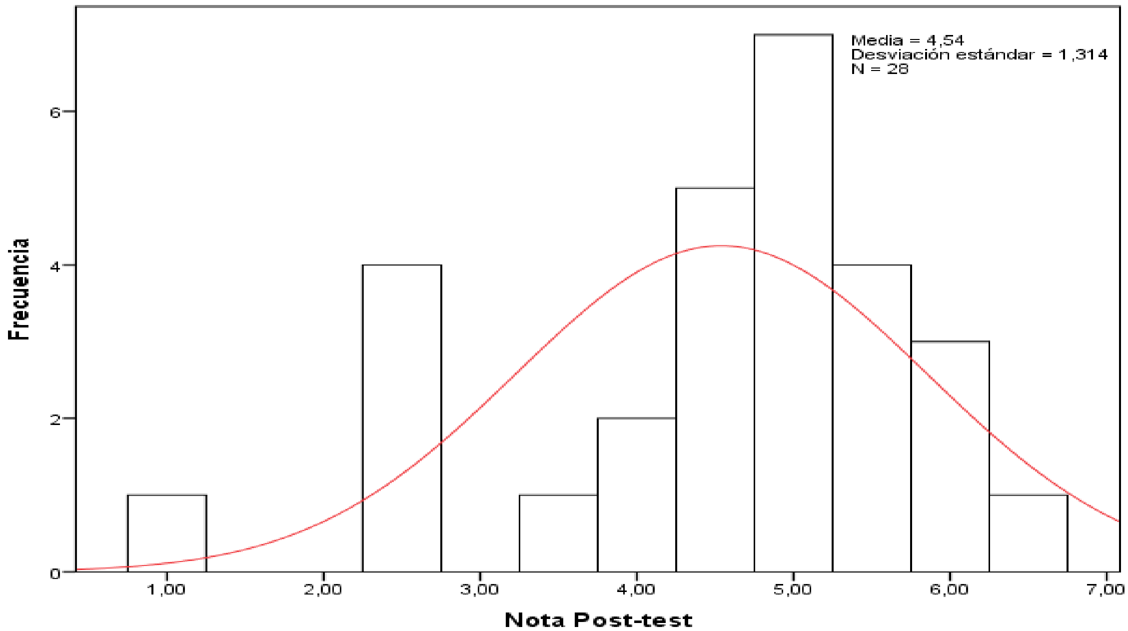
Anexo N° 10:

Distribución de las notas del Post-Test de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método tradicional



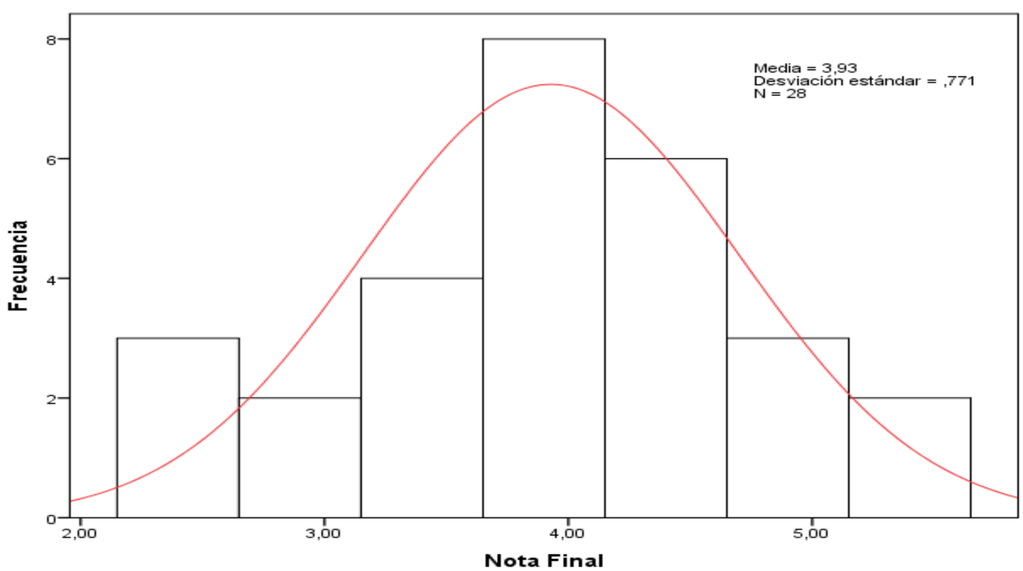
Anexo N° 11:

Distribución de las notas finales de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método experimental



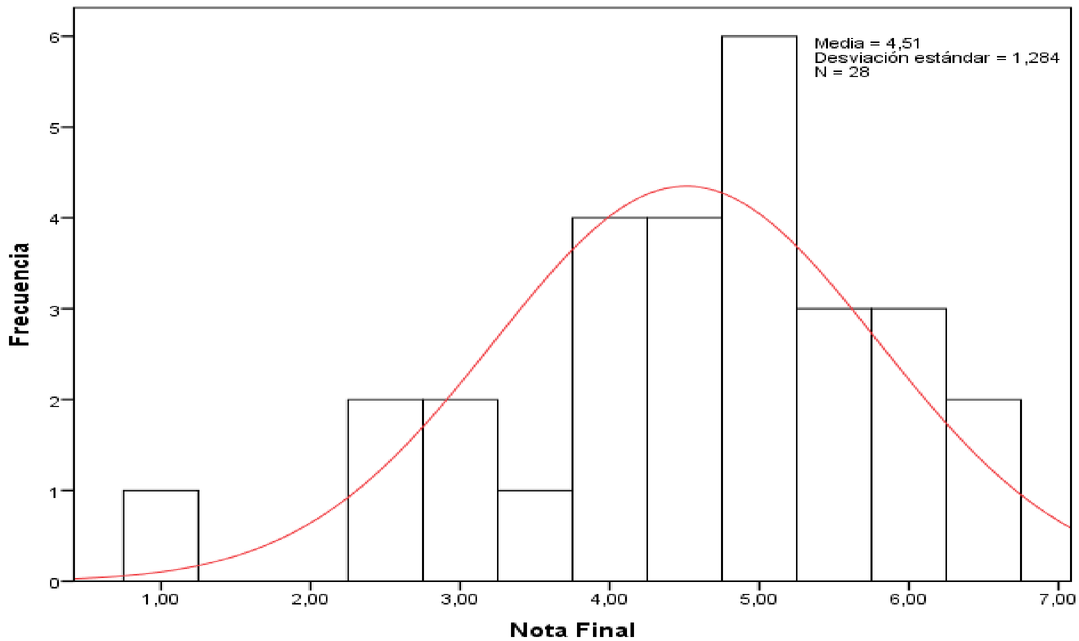
Anexo N° 12:

Distribución de las notas finales de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método tradicional



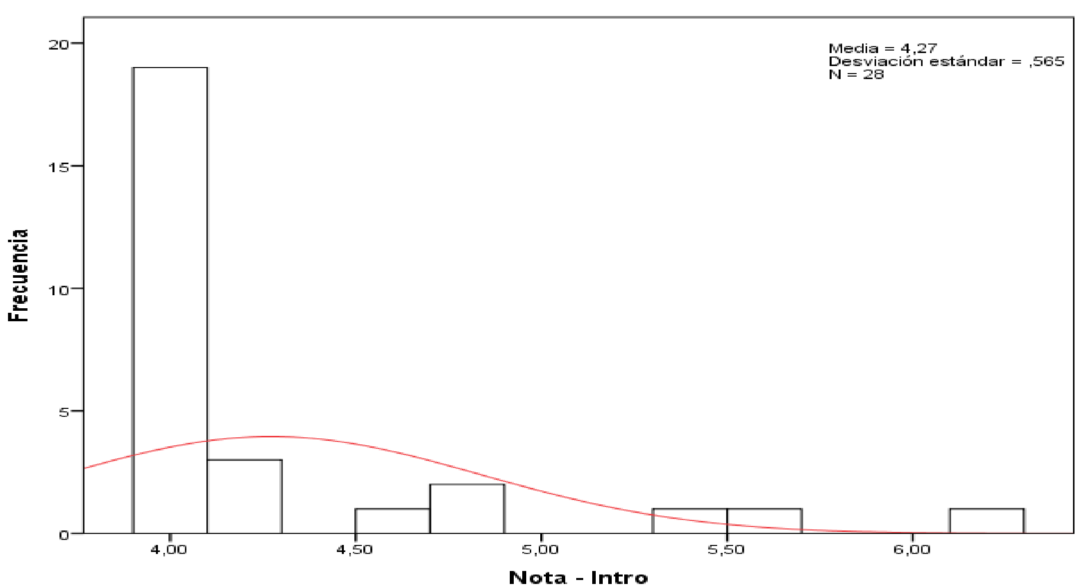
Anexo N° 13:

Distribución de las notas finales de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método experimental



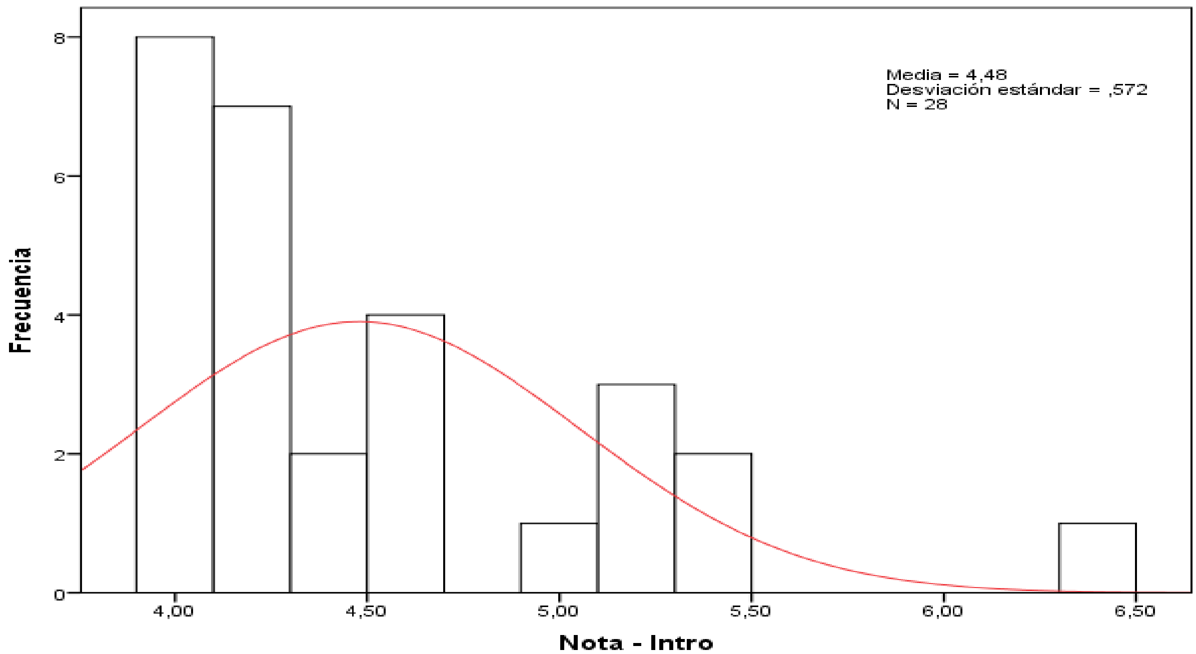
Anexo N° 14:

Distribución de las notas la asignatura Introducción a la matemática de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método tradicional



Anexo N ° 15:

Distribución de las notas de la asignatura de Introducción a la matemática de los estudiantes de la Carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales bajo el método experimental



*