

TESIS DOCTORAL



**CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS
HIPERBÓLICOS Y APLICACIÓN A LAS
REGIONES FUNDAMENTALES DE
GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS NO
EUCLÍDEOS**

por

José Luis García Heras

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemáticas Fundamentales

Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Madrid, 2006

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

**CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS
HIPERBÓLICOS Y APLICACIÓN A LAS
REGIONES FUNDAMENTALES DE
GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS NO
EUCLÍDEOS**

por

José Luis García Heras

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Director de la tesis

Ernesto Martínez García

*A mi madre, mi padre y mi hermano.
Raquel, David, Juan Francisco, Teresa y Héctor.*

Mi agradecimiento, en primer lugar, a Ernesto Martínez, por la confianza mostrada a lo largo de estos años, su dedicación, sus orientaciones y por tanto tiempo empleado en cooperar al término de esta Memoria, que ha cristalizado en una profunda amistad.

Extiendo también este agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la UNED, en particular, a Carmen Verde, por su valiosa ayuda en todos los trámites administrativos a lo largo de este tiempo.

A todos los que han mostrado su interés y me han estimulado durante este tiempo, entre otros muchos, a Luis, Juan Manuel, Paco, Benigno, José Luis y Alfonso.

A Luisa, Carlos, M^a Luisa y a los restantes compañeros del Seminario de Matemáticas del IES Villa de Vallecas.

Índice

Introducción	i
1. Espacios hiperbólicos de dimensión 2 y 3. Geodésicas en el plano hiperbólico	1
1.1 Preliminares	2
1.2 Espacios hiperbólicos de dimensión 2 y 3	10
1.3 Geodésicas en \mathbb{H}^2	28
1.4 Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional y del plano hiperbólico	37
2. Polígonos hiperbólicos de \mathbb{H}^2	49
2.1 Relaciones entre sus elementos	51
2.2 Condiciones de existencia de un polígono convexo	66
2.3 Construcción de polígonos hiperbólicos	82
2.4 Fórmulas que relacionan los lados y los ángulos de un polígono hiperbólico	86
2.5 Polígonos hiperbólicos regulares	97
3. Polígonos hiperbólicos rectángulos de \mathbb{H}^2	105
3.1 Relaciones entre sus elementos	106
3.2 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un polígono hiperbólico rectángulo convexo	118
3.3 Polígonos hiperbólicos regulares de ángulos rectos	122
4. Parametrización de superficies orientables sin borde y de superficies planares. Construcción de regiones fundamentales	145
4.1 Preliminares	146
4.2 Regiones fundamentales de superficies orientables sin borde	152
4.3 Regiones de ángulos rectos de grupos NEC	165
Bibliografía	185
Apéndice	189

Introducción

El objeto de esta Memoria es el estudio de la geometría de los polígonos hiperbólicos y sus aplicaciones al estudio de regiones fundamentales de grupos de isometrías del plano hiperbólico.

Dada una colección de ángulos α_i , $0 < \alpha_i < \pi$, cuya suma es inferior a $(n - 2)\pi$, existen polígonos hiperbólicos P con estos ángulos en sus vértices. Aquí estudiamos condiciones que deben cumplir las longitudes de los lados de P para que un polígono con esos lados y esos ángulos exista de hecho y sea convexo. También damos fórmulas explícitas que permiten calcular distancias entre dos lados ultraparalelos, entre un lado y un vértice no perteneciente a él y entre dos vértices cualesquiera, lo que ha permitido establecer relaciones diversas e independientes entre los elementos de un polígono hiperbólico cualquiera.

Utilizando tales resultados abordamos la resolución y representación de polígonos hiperbólicos convexos, autointersectantes y también, entre estos, polígonos estrellados. Además, con otros resultados relativos a determinación de isometrías del polígono hiperbólico, se hace posible la construcción automática de imágenes de un polígono, teniendo estas imágenes un lado o un vértice común con el polígono dado.

Los resultados anteriores también se aplican al estudio de regiones fundamentales, dando procedimientos para la construcción de ciertas regiones y para una parametrización del espacio de Teichmüller en cada caso, resolviendo y representando ejemplos explícitos y obteniéndose los generadores del grupo Γ en algunos de los ejemplos resueltos. Aunque no sea objeto de esta Memoria, mediante la determinación de isometrías citada, puede también realizarse la teselación del plano hiperbólico con copias de una región fundamental.

Los polígonos hiperbólicos han jugado un importante papel a lo largo de la historia de la Geometría Hiperbólica. Aparte de los triángulos, podemos destacar los cuadriláteros de Saccheri y de Lambert. Puede verse un interesante resumen de los principales hitos de la historia de Geometría Hiperbólica en las notas finales de los capítulos de [Ra]. El libro de Bonola [Bo] ofrece una panorámica muy completa de la historia. También es interesante el libro de Stillwell [St], ya que, además de

las introducciones del autor en cada uno de los capítulos, aporta importantes fragmentos de los artículos originales de Beltrami, Poincaré y Klein, entre otros.

El trabajo de Poincaré sobre grupos Fuchsianos [Po] puso de manifiesto que una herramienta esencial en el estudio de los grupos de isometrías del plano hiperbólico la proporciona el estudio de las regiones fundamentales de estos grupos. Estas regiones son polígonos hiperbólicos que satisfacen ciertas condiciones expresadas en el resultado conocido como Teorema de Poincaré.

Una generalización de los grupos Fuchsianos, al incorporar las isometrías del plano hiperbólico que invierten la orientación, la constituyen los grupos cristalográficos no Euclídeos, denominados abreviadamente como grupos NEC. A partir de un polígono de Dirichlet, Wilkie en [W] encontró regiones canónicas de los grupos NEC, que le permitieron establecer la estructura algebraica de estos grupos. Véase también [Mb] y [Si].

El estudio de los grupos NEC ha sido un importante campo de investigación en las últimas décadas, fundamentalmente como herramienta para el estudio de las superficies de Klein y de sus grupos de automorfismos, al igual que los grupos Fuchsianos lo son para el estudio de las superficies de Riemann. Una superficie de Klein X es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica. La superficie X puede ser orientable o no y con o sin borde. Podemos considerar las superficies de Klein como una generalización de las superficies clásicas de Riemann, o bien a éstas como un caso particular de las superficies de Klein: una superficie de Riemann es una superficie de Klein orientable y sin borde. Los preliminares sobre grupos NEC y superficies de Klein pueden verse en [B-E-G-G].

Las regiones fundamentales de los grupos Fuchsianos han sido estudiadas desde hace mucho tiempo [Ke], [Be1], [Z-V-C] y [N], entre otros. Igualmente, hay varios trabajos sobre grupos NEC en los que sus regiones fundamentales constituyen una herramienta muy importante para la parametrización de los espacios de Teichmüller y de Moduli de estas superficies, ya que permiten caracterizar geoméricamente las superficies que poseen determinadas propiedades. Así, hay trabajos sobre superficies hiperelípticas [C-Ma1], q -hiperelípticas [Es], [Es-Ma1], superficies de Riemann y de Klein hiperelípticas y simétricas [C-Ma3], [Et-Ma2].

Las regiones utilizadas en estos trabajos son, en la mayoría de los casos, polígonos hiperbólicos de ángulos rectos. Otros problemas geométricos han sido estudiados con polígonos de otros tipos. Entre otros muchos podemos citar a

[G-P-P-R1], [G-P-P-R2], [Jø-N], [K-N], [N], [SS].

A partir de un determinado triángulo que se refleja en sus lados se forman las primeras teselaciones del plano hiperbólico que aparecen construidas explícitamente. Las nuevas imágenes del triángulo se reflejan sucesivamente y se obtiene la teselación completa. Por un procedimiento similar es fácil construir un polígono hiperbólico regular a partir de un triángulo, entendiendo por regular que tenga todos los ángulos iguales y todos los lados de la misma longitud. La construcción general de un polígono hiperbólico de n lados resultó no ser fácil.

El primero en dar un procedimiento para construir un polígono hiperbólico convexo con ángulos arbitrarios fue Beardon en 1979 [Be1]. Estos polígonos muestran todavía un cierto grado de “regularidad” y poseen una circunferencia inscrita. Etayo y Martínez en [Et-Ma1] generalizaron esta construcción obteniendo condiciones para la existencia de polígonos hiperbólicos a partir de los ángulos, siendo los polígonos obtenidos por Beardon un caso particular de éstos. Para los polígonos con $n \leq 6$, las fórmulas que dan condiciones sobre los ángulos y las longitudes de los lados pueden verse en [Be2], [Bu] y [Fe]. Para $n > 6$ y todos los ángulos rectos véase [C-Ma2].

El propósito inicial de la presente Memoria ha sido estudiar más exhaustivamente el resto de polígonos hiperbólicos: buscar relaciones nuevas entre sus vértices, lados, medidas de sus ángulos y longitudes de sus lados; descubrir condiciones de existencia; hallar procedimientos para su construcción; encontrar expresiones para las isometrías que permiten la identificación de un par de elementos del polígono, sean éstos dos vértices o dos lados orientados, así como aquéllas que dejen invariante un punto o una geodésica orientada; y tratar de aplicar estos hallazgos al estudio de regiones fundamentales, entre otras posibilidades.

Se conocen diversos modelos para \mathbb{H}^2 y para \mathbb{H}^3 –semiplano y semiespacio de Poincaré, disco y esfera de Poincaré, modelos de Klein– así como las isometrías en cada modelo y las isometrías entre cada par de modelos que permiten su identificación.

En el modelo del semiplano las geodésicas son semirrectas o semicircunferencias euclídeas, perpendiculares a la línea del horizonte, y en el modelo del disco son segmentos euclídeos que pasan por el centro, o arcos de circunferencia, perpendiculares a la circunferencia del disco. En el espacio hiperbólico tridimensional,

las geodésicas son líneas euclídeas del mismo tipo que para el plano hiperbólico, perpendiculares al plano euclídeo o a la superficie esférica que delimitan los respectivos modelos del semiplano o la esfera de Poincaré. Los planos hiperbólicos son, respectivamente, semiplanos o semiesferas euclídeos perpendiculares al plano euclídeo o a la superficie esférica, según el modelo.

Tanto para los modelos anteriores de \mathbb{H}^2 y de \mathbb{H}^3 como para una clasificación de las isometrías en cada modelo, pueden consultarse [Be2], [Fe], [Iv], [J-S].

Los fundamentos necesarios para el desarrollo de los diversos capítulos de la Memoria se exponen en el primer capítulo y, de algún modo, están presentes en [Iv] y, con otra notación, bastantes de ellas pueden encontrarse también en [Fe].

Si F es un espacio vectorial de tipo Sylvester $(-n, 1)$ y \mathbb{H}^n es una de las hojas de la pseudoesfera $S(F) = \{X \in F, \langle X, X \rangle = 1\}$, entonces \mathbb{H}^n es un espacio hiperbólico de dimensión n , con la métrica definida por $\text{ch}(A, B) = \langle A, B \rangle$. El grupo de isometrías del n -espacio hiperbólico \mathbb{H}^n es isomorfo al grupo $Lor(F)$ de transformaciones de Lorentz, es decir, las transformaciones ortogonales que conservan las componentes conexas de $S(F)$. Una transformación de Lorentz conserva o no la orientación según que su determinante sea 1 ó -1 .

El conjunto M_4 de las matrices de $M_2(\mathbb{C})$ con la diagonal principal formada por un número y el opuesto de su conjugado, y la diagonal secundaria por dos números reales, dotado con la forma cuadrática $q(X) = \langle X, X \rangle$ definida por el determinante, es un *espacio de Minkowski* que tiene tipo Sylvester $(-3, 1)$, mediante el cual puede definirse un modelo del espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 , con la métrica $\text{ch}(A, B) = -\frac{1}{2} \text{tr}(A\bar{B})$.

Los estudios aquí realizados, referidos al plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , se han llevado a cabo utilizando *el modelo de $sl_2(\mathbb{R})$* . El espacio vectorial $M_3 = sl_2(\mathbb{R})$ de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ con traza cero, dotado con la forma cuadrática $q(X) = \langle X, X \rangle$ análoga a la anterior, tiene tipo Sylvester $(-2, 1)$ y es un subespacio de M_4 . La métrica de \mathbb{H}^2 , una de las hojas de la pseudoesfera $\langle X, X \rangle = 1$, viene dada por $\text{ch}(A, B) = -\frac{1}{2} \text{tr}(AB)$, de manera que $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$.

La presente Memoria se desarrolla en cuatro capítulos, que se completan con un Apéndice, presentado en Maple, incluyendo los resultados más importantes con ejemplos resueltos y las representaciones correspondientes, que aportan procedimientos para la resolución y representación de otros casos particulares.

Describimos a continuación el contenido de cada capítulo, citando los resultados más relevantes e indicando su ubicación en la Memoria.

El capítulo 1, de carácter introductorio, se centra en el estudio descriptivo de los espacios hiperbólicos de dimensión dos y dimensión tres y se distribuye en cuatro secciones. La primera trata de aspectos preliminares e incluye la definición del tipo Sylvester de una forma cuadrática. A continuación se define el espacio hiperbólico y se identifican las isometrías del espacio hiperbólico n -dimensional con las transformaciones de Lorentz. Esta primera sección se completa con una referencia a ciertas operaciones con matrices 2×2 de entradas complejas, aplicadas posteriormente al estudio del plano hiperbólico y el espacio hiperbólico tridimensional, que constituye la sección siguiente del capítulo.

En la segunda sección se estudian y relacionan los modelos de Minkowski y del semiespacio de Poincaré del 3-espacio hiperbólico, así como los dos correspondientes modelos del plano hiperbólico: el de $sl_2(\mathbb{R})$ de matrices con traza cero y el del semiplano superior, así como el modelo del disco de Poincaré. También se caracterizan las isometrías en el primer modelo del 3-espacio y en cada uno de los modelos del plano, distinguiendo las que conservan o no la orientación.

En la tercera sección del capítulo se deducen *resultados referidos a geodésicas del 2-espacio hiperbólico*, utilizados posteriormente en los capítulos 2 y 3.

En la última sección se obtienen *resultados relativos a determinaciones de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2* que, entre otras aplicaciones, aportan un *procedimiento para la obtención de los generadores de un subgrupo discreto de isometrías* asociado a un polígono como región fundamental.

El capítulo 2 se divide en cinco secciones. En la primera se estudian las relaciones generales entre los elementos de polígonos hiperbólicos –ángulos, lados y vértices– y en el teorema 2.1.4, de carácter nuclear, *se obtienen las ecuaciones matriciales* –similares a las de Buser en [Bu, cap. 2]– *que originan las relaciones explicitadas a lo largo del capítulo*. En las proposiciones 2.1.6 y siguientes se deducen *relaciones generales*, relativamente sencillas, *entre lados y ángulos de cualquier polígono, convexo o no*.

En la segunda sección se demuestran las *condiciones necesarias y suficientes para la convexidad* de un polígono de cualquier número de lados con ángulos

conocidos (proposiciones 2.2.1, 2.2.2 y teorema 2.2.3). Al final de la sección se aplican los resultados al estudio de algunos casos particulares.

La construcción de polígonos hiperbólicos se trata en la tercera sección. Mediante las fórmulas de la sección primera, utilizando el lema 2.1.2, se *expresan los vértices y los vectores normales a los lados de un polígono hiperbólico* en función del primer vértice, del vector normal al primer lado, de los ángulos y de los lados del polígono, lo que nos ha permitido abordar la *construcción de cualquier polígono* a partir de tales elementos y su *representación* en los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico —el semiplano y el disco—.

En la cuarta sección se explicitan las *fórmulas para un cuadrilátero* (proposiciones 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3) y se deducen las ecuaciones necesarias de algunos *polígonos hiperbólicos de un mayor número de lados* para determinar polígonos particulares, dados ciertos elementos. Las expresiones obtenidas en la sección anterior posibilitan la inmediata *representación gráfica del polígono*. Si es convexo, los datos iniciales deben cumplir las condiciones aludidas con anterioridad. Al final de la sección se estudian algunos casos concretos de polígonos convexos y de polígonos no convexos.

La última sección del capítulo trata de los polígonos regulares, es decir, los que tienen iguales sus lados y también sus ángulos. En la proposición 2.5.2 se obtiene la *clasificación de los polígonos regulares* —convexos y estrellados— y se expresan, según cada tipo, las *relaciones entre los posibles valores del ángulo y la longitud común de sus lados*, dependiendo del número de éstos.

Los resultados deducidos en este capítulo se restringen, en el capítulo siguiente, al caso particular de polígonos con todos sus ángulos rectos.

Las secciones del tercer capítulo son tres. En la primera se obtienen las *relaciones generales entre los lados de un polígono de ángulos rectos* (proposición 3.1.2) y, en las tres proposiciones siguientes, se establecen las *relaciones entre los lados de un polígono rectángulo cualquiera*. Entre las fórmulas obtenidas aparecen las de [C-Ma2].

En la segunda sección se prueba la *equivalencia entre la convexidad de un polígono rectángulo y el ultraparalelismo de cada par de lados no consecutivos* (lema 3.2.1) y se encuentran las *condiciones necesarias y suficientes para la convexidad de un polígono rectángulo* (teorema 3.2.2). Tales condiciones son independientes de las deducidas en el capítulo anterior. También en esta sección, con los

resultados anteriores del capítulo, se aportan *procedimientos para la construcción de polígonos con sus ángulos rectos* a partir de sus lados, fijados el primer vértice y el vector normal al primero de sus lados.

En la sección tercera se estudian los *polígonos rectángulos regulares*. La clasificación en *convexos o estrellados* (corolario 3.3.1) sólo depende, lógicamente, de la longitud del lado según el número de lados del polígono. Sin embargo, aplicando las fórmulas deducidas para los lados de un polígono rectángulo se obtienen algunas *soluciones imaginarias*, cuya interpretación geométrica ha requerido ciertos resultados del capítulo 1, referidos a determinación de isometrías del 3-espacio y del plano hiperbólicos que dejan invariante una geodésica o un punto del plano y, por tanto, ciertas geodésicas del espacio. La sección concluye con la *interpretación geométrica de estas soluciones no reales*, expuesta en la proposición 3.3.5.

En el capítulo 4 se ilustran las posibilidades que encierran los resultados de los capítulos anteriores aplicados al estudio de regiones fundamentales. A lo largo del capítulo se dan *procedimientos para la construcción de ciertas regiones fundamentales* y para la *parametrización del espacio de Teichmüller en cada caso*, se *resuelven y representan ejemplos explícitos* y se *obtienen los generadores del grupo Γ en algunos de los ejemplos resueltos*.

El capítulo consta de tres secciones. En la primera sección se presentan los preliminares –necesariamente muy breves– sobre los grupos Fuchsianos y los grupos NEC, sus regiones fundamentales canónicas, las superficies de Klein y el espacio de Teichmüller.

En la segunda sección se *construyen regiones canónicas para grupos Fuchsianos que parametrizan superficies de Riemann compactas* y se *construyen a partir de ellas otras, debidas a Schmutz-Schaller [SS]*, útiles en el estudio de las superficies hiperelípticas.

En la última sección, los polígonos de ángulos rectos se utilizan para *construir y manipular regiones fundamentales de grupos NEC que parametrizan superficies de Klein planares*, es decir superficies de género topológico 0 y con $k \geq 3$ componentes en el borde.

En el Apéndice se muestra cómo hallar, con Maple, los resultados aludidos más arriba, cuyo cálculo pueda realizarse con dicha aplicación. Las hojas de trabajo en Maple se presentan en secciones tituladas y están desarrolladas. El lector puede

abrir las secciones y ver su desarrollo o ejecutar cada hoja, con las limitaciones propias de la memoria del ordenador que podrían dificultar su ejecución.

Los archivos de este Apéndice permiten *calcular automáticamente* las *fórmulas generales* para polígonos hiperbólicos y las *específicas* para polígonos de un número concreto de lados. Se incluyen *las definiciones, operaciones y resultados* del capítulo 1, *las relaciones entre los lados y los ángulos* de un polígono hiperbólico en general, *convexo o no*; las expresiones de los *vértices y los vectores normales a sus lados*; las *condiciones necesarias y suficientes para su convexidad*; la *resolución de polígonos* con ciertos elementos dados; la *representación de polígonos hiperbólicos* convexos y autointersectantes; las relaciones entre los elementos de un *polígono hiperbólico de ángulos rectos*, así como las *condiciones para su convexidad* y su *representación*; las fórmulas propias de los *polígonos regulares* convexos y estrellados, rectángulos o no; y, por último, se *construyen y representan las regiones fundamentales* estudiadas en el capítulo 4.

A lo largo de la Memoria también se ofrecen otros resultados, algunos de los cuales muestran la *utilidad de los modelos elegidos del plano y del 3-espacio* y de las *operaciones definidas*, además de *ilustrar algunas de sus interpretaciones geométricas*.

Capítulo 1

Espacios hiperbólicos de dimensiones dos y tres.

Geodésicas en el plano hiperbólico

El presente capítulo, de carácter introductorio, se centra en la descripción de los espacios hiperbólicos de dimensiones dos y tres y se presentan algunos resultados relativos a las geodésicas del plano hiperbólico y a la determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional y de isometrías del plano hiperbólico.

Las secciones del capítulo son cuatro. En la primera se estudian aspectos preliminares e incluye la definición del tipo Sylvester de una forma cuadrática, que permite distinguir, a su vez, los diversos tipos de espacios vectoriales con una forma cuadrática asociada. A continuación se define el espacio hiperbólico y se identifican las isometrías del espacio hiperbólico n -dimensional con las transformaciones de Lorentz, es decir, las transformaciones ortogonales que conservan las componentes conexas de la pseudoesfera. Esta primera sección se completa con una referencia a ciertas operaciones con matrices 2×2 de entradas complejas: producto escalar, producto exterior de dos matrices y la forma volumen, aplicadas posteriormente al estudio de los espacios hiperbólicos de dimensiones dos y tres, que constituye la sección siguiente del capítulo.

En la segunda sección se estudian y relacionan los modelos de Minkowski y del semiespacio de Poincaré del 3-espacio hiperbólico, los dos correspondientes modelos del plano hiperbólico (el de $sl_2(\mathbb{R})$ de matrices con traza cero y el del semiplano superior), así como el modelo del disco de Poincaré. También se caracterizan las isometrías en el primer modelo del 3-espacio y en cada uno de los modelos del plano, distinguiendo las que conservan o no la orientación. Tal orientación, en el primero de los modelos del plano hiperbólico, queda definida mediante el signo de la forma volumen en una base de $sl_2(\mathbb{R})$.

La determinación de una geodésica y de su orientación mediante un vector de $sl_2(\mathbb{R})$ con norma -1 , llamado vector normal a la geodésica, permite obtener, en la tercera sección del capítulo, resultados relativos a geodésicas del 2-espacio

hiperbólico, utilizados posteriormente en la deducción de expresiones que relacionan los elementos de un polígono hiperbólico, objeto de los capítulos 2 y 3.

En la última sección se estudia la determinación de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , cuyos resultados permiten, por ejemplo, encontrar los generadores de un subgrupo discreto de isometrías, con una región fundamental dada, además de dar una interpretación geométrica de ciertas soluciones que aparecen de modo natural, en el capítulo 2, al estudiar los polígonos regulares.

1.1. Preliminares

Con el fin de familiarizarse con la terminología y la notación empleadas, parece aconsejable fijarlas desde el principio, así como referirse a algunos conceptos previos con carácter introductorio, que pueden encontrarse también en [Iv].

Según la notación habitual, si \mathbb{C} es el conjunto de números complejos, entonces

- $M_2(\mathbb{C})$ es el conjunto de matrices 2×2 de entradas complejas.
- $sl_2(\mathbb{C})$ indica el subconjunto de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ con *traza cero*.
- $GL(2, \mathbb{C})$ representa el *grupo lineal* de las matrices regulares de $M_2(\mathbb{C})$.
- $PGL(2, \mathbb{C})$ o *grupo lineal proyectado* es el grupo cociente resultante de identificar X con $-X$ en $GL(2, \mathbb{C})$.
- $SL(2, \mathbb{C})$ es el *grupo lineal especial* o subgrupo de las matrices de $GL(2, \mathbb{C})$ con determinante igual a uno.
- $PSL(2, \mathbb{C})$ designa al *grupo lineal especial proyectado*, grupo cociente resultante de identificar X con $-X$ en $SL(2, \mathbb{C})$.

Si se sustituye \mathbb{C} por el conjunto \mathbb{R} de los números reales se establecería la notación para los conjuntos análogos correspondientes.

1.1.1. Formas cuadráticas

Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo K , de característica distinta de 2, se llama *forma cuadrática* a una función $Q : E \rightarrow K$ homogénea de grado 2:

$$Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u); \quad \lambda \in K, u \in E,$$

de manera que la forma $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$, siendo $x, y \in E$, es bilineal en x e y . Los vectores $x, y \in E$ son *ortogonales* si y sólo si $\langle x, y \rangle = 0$.

Dada una forma bilineal simétrica $\langle x, y \rangle$ en E puede probarse que

$$Q(u) = \langle u, u \rangle; \quad u \in E$$

es una forma cuadrática. Llamamos *norma* del vector u a $Q(u) = \langle u, u \rangle$.

Los automorfismos de (E, Q) son llamados *transformaciones ortogonales* y constituyen el llamado *grupo ortogonal* de (E, Q) , que se designa por $O(E)$. Toda transformación ortogonal tiene determinante 1 ó -1 [Iv].

Una forma cuadrática Q en un espacio vectorial de dimensión finita es *no singular* si

$$\langle x, y \rangle = 0, \text{ para cualquier } x \in E, \text{ entonces } y = 0.$$

Si $Q(x) = 0$ decimos que x es un *vector isotrópico*. *Línea isotrópica* es la recta vectorial engendrada por un vector isotrópico.

Un vector no isotrópico p define una aplicación lineal

$$\tau_p(x) = x - 2 \frac{\langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p; \quad x \in E \tag{1.1}$$

que cumple $\langle \tau_p(x), \tau_p(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ y $\tau_p(p) = -p$. La transformación ortogonal τ_p es la *reflexión en el hiperplano ortogonal al vector p* . Es, además, una *involución*: $\tau_p^2 = \iota$, $\tau_p \neq \iota$, y $\det \tau_p = -1$.

Una forma cuadrática en un espacio vectorial E sobre \mathbb{R} , de dimensión n , es de *tipo Sylvester* $(-r, s)$ si

$$r = \#\{i; \langle e_i, e_i \rangle = -1\}, s = \#\{i; \langle e_i, e_i \rangle = 1\},$$

para cualquier base ortonormal $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$ de E . Si algún vector e_i es isotrópico se tiene entonces que $r + s < n$.

Dos formas cuadráticas en los espacios vectoriales E y F , con $\dim E = \dim F$, del mismo tipo Sylvester son isomorfas.

1.1.2. Espacio hiperbólico n -dimensional. Transformaciones de Lorentz

Si F es un espacio vectorial real de dimensión $n + 1$, dotado con una forma cuadrática de tipo Sylvester $(-n, 1)$, la pseudoesfera $S(F) = \{X \in F, \langle X, X \rangle = 1\}$ es un hiperboloide de dos hojas. Si \mathbb{H}^n denota cualquiera de ellas, para dos

puntos $A, B \in \mathbb{H}^n$ se cumple $\langle A, B \rangle > 1$. Se define la *distancia hiperbólica* $d(A, B)$ mediante la igualdad

$$\operatorname{ch} d(A, B) = \langle A, B \rangle,$$

siendo ch el coseno hiperbólico (sh designará el seno hiperbólico). Con esta métrica, \mathbb{H}^n es un *n-espacio hiperbólico*.

Si $T \in F$, $\langle T, T \rangle = -1$, es un vector tangente a \mathbb{H}^n en el punto A , entonces

$$B(s) = A \operatorname{ch} s + T \operatorname{sh} s; \quad s \in \mathbb{R}$$

es una *geodésica orientada* que pasa por $A = B(0)$, donde $|s|$ determina la distancia hiperbólica entre los puntos A y $B(s)$ de \mathbb{H}^n .

Una transformación ortogonal $\mathbf{f} \in O(F)$ es de *Lorentz* si conserva las componentes conexas de la pseudoesfera. Tales transformaciones constituyen el grupo $Lor(F)$ y pueden reconocerse por la propiedad $\langle X, \mathbf{f}[X] \rangle > 0$, para cualquier $X \in S(F)$. Las transformaciones de Lorentz con determinante 1 forman el *grupo especial* de Lorentz, designado por $Lor^+(F)$, y se llaman *transformaciones especiales* de Lorentz. Puede probarse [Iv] que

- El grupo $Lor(F)$ y el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n son isomorfos.
- El grupo $Lor^+(F)$ actúa transitivamente en el conjunto de vectores de norma -1 , siempre que $\dim(F) \geq 3$.
- Las reflexiones (1.1) son transformaciones de Lorentz.

Cada elemento de $Lor(F)$ puede descomponerse en un número máximo de $n+1$ reflexiones de este tipo. Un elemento de $Lor^+(F)$ admite una descomposición en un número par de reflexiones.

1.1.3. Operaciones en $M_2(\mathbb{C})$

Las definiciones y resultados siguientes constituyen las herramientas básicas utilizadas posteriormente. De algún modo están presentes en [Iv] y, con otra notación, bastantes de ellas pueden encontrarse también en [Fe]. Aquí se ha pretendido restringir las definiciones lo imprescindible, de manera que los resultados adquieran la mayor generalidad posible. Según sea el conjunto donde se usen las operaciones definidas, los operandos pueden adquirir diferente significado geométrico y el resultado una interpretación también diversa. Cuando sea oportuno,

se indicará tal significado y la correspondiente interpretación, según el conjunto considerado.

Matriz cofactor

Definición 1.1.1 Si $A = (\alpha_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$, se llama matriz cofactor de A y se designa por A^\sim , a la matriz adjunta de la traspuesta de A . Es decir,

$$A^\sim = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia inmediata de la definición se deducen las propiedades siguientes:

Si $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ y $\iota \in M_2(\mathbb{C})$ es la matriz unidad, entonces

1. $X^\sim = X^{-1}$ si y sólo si $\det X = 1$.
2. $(X + Y)^\sim = X^\sim + Y^\sim$.
3. $(\lambda X)^\sim = \lambda X^\sim$; $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. $(XY)^\sim = Y^\sim X^\sim$.
5. $XX^\sim = (\det X)\iota$.

Traza de matrices. Propiedades

Definición 1.1.2 Si $A = (\alpha_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$, se llama traza de A al número complejo

$$\text{tr}A = \alpha_{11} + \alpha_{22}.$$

La traza de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ cumple, entre otras, las siguientes propiedades [Fe]:

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$.
2. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}A$; $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\text{tr}(A^\sim) = \text{tr}A$.
4. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ y $\text{tr}(AB^\sim) = \text{tr}(BA^\sim)$.

5. $\text{tr}(ABA^{\sim}) = \det A \text{tr} B$.
6. $\text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{\sim}) = \text{tr} A \text{tr} B$.
7. $\text{tr} M^2 = \text{tr}^2 M - 2 \det M$.
8. $\det M = \frac{1}{2} \text{tr}(MM^{\sim})$.
9. $A + A^{\sim} = \text{tr}(A)\iota$.
10. $AB^{\sim} + BA^{\sim} = \text{tr}(AB^{\sim})\iota$.
11. Sean $|A| = \det A$ y $|B| = \det B$, entonces

$$\text{tr}(ABA^{\sim}B^{\sim}) = -2|A||B| - \text{tr} A \text{tr} B \text{tr}(AB) + |B| \text{tr}^2 A + |A| \text{tr}^2 B + \text{tr}^2(AB),$$
 que puede también escribirse como:

$$4|A||B| - 2\text{tr}(ABA^{\sim}B^{\sim}) = \begin{vmatrix} 2|A| & \text{tr} A & \text{tr}(AB) \\ \text{tr} A & 2 & \text{tr} B \\ \text{tr}(AB) & \text{tr} B & 2|B| \end{vmatrix}.$$
13. $\det(pA + qB) = p^2 \det A + pq \text{tr}(AB^{\sim}) + q^2 \det B$; $p, q \in \mathbb{C}$.
14. $\det(A - A^{\sim}) = 4 \det A - \text{tr}^2 A$.
15. $\det(AB - BA) = 2 \det A \det B - \text{tr}(ABA^{\sim}B^{\sim})$.

Las propiedades 1 y 2 permiten afirmar que el conjunto $sl_2(\mathbb{C})$ de las matrices de $M_2(\mathbb{C})$ con traza cero tiene una estructura compleja natural: es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Los elementos de $sl_2(\mathbb{C})$ se caracterizan por la igualdad

$$X^{\sim} = -X.$$

Los vectores

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

forman una base de $sl_2(\mathbb{C})$.

A su vez, el conjunto $sl_2(\mathbb{R})$ de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de traza cero es un espacio vectorial real tridimensional y $\{X_0, X_1, X_2\}$ es también una base de $sl_2(\mathbb{R})$.

Producto escalar en $M_2(\mathbb{C})$

Como $\det M = \frac{1}{2} \text{tr}(MM^{\sim})$ es una forma cuadrática en el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{C} , la forma bilineal asociada

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(XY^{\sim})$$

define un producto escalar. Por la propiedad 10 de la traza se tendría, además, que

$$XY^{\sim} + YX^{\sim} = 2\langle X, Y \rangle \iota$$

y

$$\langle X, Y \rangle = 0 \text{ si y sólo si } YX^{\sim} = -XY^{\sim}.$$

Si $Y \in sl_2(\mathbb{C})$ entonces $Y^{\sim} = -Y$. Así, el producto escalar en $sl_2(\mathbb{C})$ puede expresarse como

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XY)$$

y las matrices (1.2) forman una base ortonormal de $sl_2(\mathbb{C})$. Se tiene, además, que

$$XY + YX = -2\langle X, Y \rangle \iota$$

y

$$\langle X, Y \rangle = 0 \text{ si y sólo si } YX = -XY.$$

Además, como $(XYZ)^{\sim} = -ZYX$, por la propiedad 9 de la traza de matrices,

$$XYZ - ZYX = \text{tr}(XYZ) \iota.$$

Producto exterior de dos matrices de $M_2(\mathbb{C})$

Proposición 1.1.3 Si X, Y son dos matrices de $M_2(\mathbb{C})$, el producto exterior

$$X \times Y = -\frac{1}{2}(XY^{\sim} - YX^{\sim}) \in sl_2(\mathbb{C}) \tag{1.3}$$

define una aplicación bilineal que cumple, entre otras, las siguientes propiedades:

1. $Y \times X = -(X \times Y)$ y $X \times X = 0$.
2. $\langle X, Y \rangle = 0$ si y sólo si $X \times Y = -XY^{\sim} = YX^{\sim}$.
3. $\langle X \times Y, X \times Y \rangle = \det X \det Y - \langle X, Y \rangle^2$.

Demostración

De $(X \times Y)^\sim = -(X \times Y)$ se sigue que $X \times Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. La bilinealidad y la primera propiedad son evidentes.

2. Se debe a que $XY^\sim + YX^\sim = 2\langle X, Y \rangle \iota$.

3. Teniendo en cuenta que $\det Y^\sim = \det Y$ y $\det(A - A^\sim) = 4 \det A - \text{tr}^2 A$,

$$\langle X \times Y, X \times Y \rangle = \det(X \times Y) = \det X \det Y - \frac{1}{4} \text{tr}^2(XY^\sim).$$

■

Proposición 1.1.4 *Si $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, entonces*

$$X \times Y = \frac{1}{2}(XY - YX) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

y se cumple, además, que

- $\langle X \times Y, X \rangle = \langle X \times Y, Y \rangle = 0$.
- $(fXf^{-1}) \times (fYf^{-1}) = f(X \times Y)f^{-1}$, si $f \in SL(2, \mathbb{C})$.
- $\langle X \times Y, Z \rangle = \langle X, Y \times Z \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XYZ)$.
- $X \times (Y \times Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z$.
- $\langle A \times B, C \times D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle$.

Demostración

Las dos primeras propiedades son inmediatas.

Por la propiedad 6 de la traza sabemos que, en general,

$$\text{tr}(ZXY) + \text{tr}(Z(XY)^\sim) = \text{tr}Z \text{tr}(XY).$$

En $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ se tendría $X^\sim = -X, Y^\sim = -Y, \text{tr} Z = 0$. Es decir,

$$\text{tr}(ZXY) + \text{tr}(ZYX) = 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(YXZ) = -\text{tr}(XYZ).$$

Así,

$$\langle X \times Y, Z \rangle = -\frac{1}{4} \text{tr}[(XY - YX)Z] = -\frac{1}{2} \text{tr}(XYZ).$$

Además, de $\text{tr}(YZX) = \text{tr}(XYZ)$ se deduce la tercera igualdad.

Los miembros de la cuarta igualdad pueden escribirse

$$X \times (Y \times Z) = \frac{1}{4}(XYZ - XZY - YZX + YXZ)$$

y

$$\langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z = -\frac{1}{2}(XZ + ZX)Y + \frac{1}{2}(XY + YX)Z.$$

Restando los dos segundos miembros, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(XYZ - ZYX) + \frac{1}{2}(YXZ - ZXY) + \frac{1}{4}(YZX - XZY) \\ &= \frac{1}{4}\text{tr}(XYZ) - \frac{1}{2}\text{tr}(ZXY) + \frac{1}{4}\text{tr}(YZX) = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$X \times (Y \times Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle A \times B, C \times D \rangle &= \langle A, B \times (C \times D) \rangle \\ &= \langle A, \langle B, D \rangle C - \langle B, C \rangle D \rangle \\ &= \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle, \end{aligned}$$

que prueba la última igualdad. ■

En el epígrafe 1.2.1, se prueba que toda matriz de $sl_2(\mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$ representa un semigirol alrededor de una geodésica de \mathbb{H}^3 y, posteriormente, se deduce que si α, β son dos semigirols alrededor de sendas geodésicas, entonces la matriz $\alpha \times \beta$ determina, salvo constantes, el semigirol alrededor de la geodésica perpendicular común.

Además, toda matriz $f \in SL(2, \mathbb{C})$ define una isometría de \mathbb{H}^3 y la geodésica asociada al semigirol $f\sigma f^{-1}$ es la transformada por tal isometría de la geodésica asociada a $\sigma \in sl_2(\mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$.

Forma volumen en $sl_2(\mathbb{C})$

Proposición 1.1.5 *En el espacio vectorial complejo $sl_2(\mathbb{C})$ la expresión*

$$\text{vol}(X, Y, Z) = \langle X \times Y, Z \rangle = -\frac{1}{2}\text{tr}(XYZ) \in \mathbb{C}$$

define una forma trilineal que satisface las siguientes propiedades:

1. $\text{vol}(X, Y, Z) = \text{vol}(Y, Z, X) = \text{vol}(Z, X, Y)$
 $= -\text{vol}(Z, Y, X) = -\text{vol}(Y, X, Z) = -\text{vol}(X, Z, Y).$
2. *Es una forma alternante: se anula si dos de las matrices X, Y, Z son iguales.*

3. $\text{vol}(X_0, X_1, X_2) = 1$, siendo X_0, X_1, X_2 las matrices (1.2) y, por tanto, si las matrices X, Y, Z constituyen una base ortonormal de $sl_2(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\text{vol}(X, Y, Z) = 1 \quad \text{ó} \quad \text{vol}(X, Y, Z) = -1.$$

4. $\text{vol}(X, Y, Z) = 0$ si y sólo si X, Y, Z son linealmente dependientes.

$$5. \text{vol}(A_1, A_2, A_3) \text{vol}(B_1, B_2, B_3) = \begin{vmatrix} \langle A_1, B_1 \rangle & \langle A_1, B_2 \rangle & \langle A_1, B_3 \rangle \\ \langle A_2, B_1 \rangle & \langle A_2, B_2 \rangle & \langle A_2, B_3 \rangle \\ \langle A_3, B_1 \rangle & \langle A_3, B_2 \rangle & \langle A_3, B_3 \rangle \end{vmatrix}.$$

Demostración

Es evidente que se trata de una forma trilineal:

$$\text{vol}(\lambda X, Y, Z) = \lambda \text{vol}(X, Y, Z); \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

y

$$\text{vol}(X + X', Y, Z) = \text{vol}(X, Y, Z) + \text{vol}(X', Y, Z).$$

Además,

1. De $Y \times X = -(X \times Y)$ se deduce que $\text{vol}(Y, X, Z) = -\text{vol}(X, Y, Z)$, y de $\text{tr}(YZX) = \text{tr}(XYZ)$ se tiene que $\text{vol}(Y, Z, X) = \text{vol}(X, Y, Z)$.
2. Se deduce fácilmente de la propiedad 1 y de $X \times X = 0$.
3. La primera afirmación se comprueba sencillamente. La consecuencia posterior es inmediata.
4. Por ser una forma trilineal, se sigue inmediatamente de la propiedad 2, teniendo en cuenta, además, que $\text{vol}(X_0, X_1, X_2) = 1$.
5. Es una consecuencia de las propiedades anteriores. ■

1.2. Espacios hiperbólicos de dimensiones dos y tres

1.2.1. Modelos del 3-espacio hiperbólico

El modelo elegido en [Iv] para definir el 3-espacio hiperbólico se basa en las matrices hermíticas. El modelo utilizado en [Fe] es el del semiespacio de Poincaré, donde los puntos se asocian a cuaterniones, las geodésicas a matrices de $M_2(\mathbb{C})$ con determinante uno y traza cero, y los planos hiperbólicos a matrices con determinante -1 , con la diagonal principal formada por un número complejo y el opuesto de su conjugado, y con dos números reales en la diagonal secundaria.

Aquí, sin embargo, se ha optado por definir el espacio hiperbólico tridimensional mediante el espacio de Minkowski de las matrices del último tipo aludidas en el párrafo anterior, con determinante cualquiera. Tal elección permite conservar la validez de resultados propios de \mathbb{H}^3 en el 2-espacio \mathbb{H}^2 , mediante una restricción natural, así como relacionar de modo inmediato la forma matricial de los puntos del espacio con las ternas de números reales de tercera coordenada positiva, que constituyen el modelo de Poincaré del semiespacio. Los planos hiperbólicos y las geodésicas quedan, además, asociados naturalmente a las mismas matrices utilizadas en [Fe] para ambos objetos geométricos.

Para las representaciones de las geodésicas y de los planos hiperbólicos se ha elegido el modelo del semiespacio de Poincaré. Aún cabe referirse al modelo de la esfera de Poincaré, pero se ha optado por el anterior donde las representaciones adquieren una mayor claridad.

Modelo del espacio de Minkowski

El conjunto de matrices

$$M_4 = \left\{ X = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{C}, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un espacio vectorial real de dimensión 4. Las matrices

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

constituyen una base y los elementos de M_4 se caracterizan por la igualdad

$$X^\sim = -\bar{X},$$

siendo \bar{X} la matriz conjugada de X . Es fácil comprobar que $X\bar{X} = -(\det X)\iota$ y $\det X = -\frac{1}{2} \text{tr}(X\bar{X})$. Según que se satisfaga

$$\det A = 1 \quad \text{ó} \quad \det N = -1 \quad \text{ó} \quad \det U = 0,$$

se tiene, respectivamente, que

$$A\bar{A} = -\iota \quad \text{y} \quad A^{-1} = -\bar{A} = A^\sim,$$

$$N\bar{N} = \iota \quad \text{y} \quad N^{-1} = \bar{N} = -N^\sim$$

$$U\bar{U} = 0.$$

Si definimos la forma cuadrática $Q(X) = \langle X, X \rangle = \det X$, el producto escalar en M_4 puede expresarse

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\text{tr}(X\bar{Y}) \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Además, se cumple que

$$X\bar{Y} + Y\bar{X} = -2\langle X, Y \rangle \iota$$

y

$$\langle X, Y \rangle = 0 \text{ si y sólo si } Y\bar{X} = -X\bar{Y}.$$

Por otra parte, el tipo Sylvester de M_4 es $(-3, 1) : \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ es una base ortonormal y M_4 es un *espacio de Minkowski*. Posteriormente, en la figura 1.9 de la sección 1.3, se realiza una representación geométrica orientativa de los elementos de la base anterior.

Toda base ortonormal del espacio vectorial M_4 se transforma en otra base ortonormal mediante algún automorfismo de M_4 . Si el automorfismo tiene determinante positivo se dice que las dos bases tienen la misma *orientación* [Iv]. Una base está orientada *positiva* o *negativamente* según que tenga o no la misma orientación que la base ortonormal $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$.

El hiperboloide $S(M_4) \equiv \langle X, X \rangle = 1$ tiene dos hojas. Una de ellas:

$$\mathbb{H}_+^3 = S^+(M_4) = \left\{ X = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & -\bar{\alpha} \end{pmatrix} \in S(M_4); c > 0 \right\}$$

es un *3-espacio hiperbólico* con la métrica dada por $d(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

Cada orientación de M_4 induce una *orientación* del mismo tipo en el espacio hiperbólico \mathbb{H}_+^3 .

En M_4 la forma cuadrática $Q(X) = \langle X, X \rangle$ es no singular y resulta inmediato comprobar que todo *vector isotrópico* admite una de las dos siguientes expresiones:

$$U = k \begin{pmatrix} z & -|z|^2 \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix}; k \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \quad \text{ó} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; k \in \mathbb{R}.$$

Las *reflexiones* en un hiperplano de M_4 quedaron definidas en (1.1). Dado un vector isotrópico $U \in M_4$, el conjunto de vectores

$$L[U] = \{\lambda U; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

constituye una *línea isotrópica* y el conjunto de líneas isotrópicas forman el llamado *cono proyectado* $PC(M_4)$, que es homeomorfo a la esfera S^2 . Una línea isotrópica puede identificarse con cualquier representante no nulo U de ella.

Se llama *plano hiperbólico* del 3-espacio hiperbólico \mathbb{H}_+^3 a la intersección con \mathbb{H}_+^3 de un hiperplano de M_4 de tipo Sylvester $(-2, 1)$.

Si los vectores A, S, T de M_4 son ortogonales entre sí, siendo $\langle A, A \rangle = 1$ y $\langle S, S \rangle = \langle T, T \rangle = -1$, constituyen entonces una base ortonormal de un hiperplano de M_4 y puede así considerarse que la *terna* $\{A, S, T\}$ determina un 2-espacio hiperbólico. El punto A pertenece a dicho plano hiperbólico y S, T serían dos *vectores tangentes* al plano en el punto A . A su vez, estos dos vectores engendran el *plano vectorial tangente* al plano hiperbólico en el punto A .

La terna $\{A, S, T\}$ dota al plano hiperbólico de una *orientación*, opuesta a la determinada por la terna $\{A, T, S\}$. El vector P de norma -1 , tal que $\{A, S, T, P\}$ sea una base ortonormal de M_4 orientada positivamente, se llama *vector normal* al plano hiperbólico orientado. El vector $-P$ es normal al mismo plano hiperbólico con la orientación contraria. Esta definición de vector normal determina cuál de las dos orientaciones del plano está inducida por una terna $\{B, S', T'\}$ y el vector P no depende de la terna elegida.

Posteriormente, definiremos \mathbb{H}^2 como el plano hiperbólico orientado determinado por la terna $\{X_0, X_1, X_2\}$ cuyo vector normal es $X_3 = i \iota$.

Si π_P denota al plano hiperbólico asociado al vector P , $T_A(P)$ designa al plano vectorial tangente a π_P en el punto A . Los puntos de \mathbb{H}_+^3 pertenecientes a π_P se caracterizan por la ecuación $\langle X, P \rangle = 0$.

Una *geodésica* del 3-espacio hiperbólico \mathbb{H}_+^3 es la intersección con \mathbb{H}_+^3 de un plano vectorial de M_4 de tipo Sylvester $(-1, 1)$.

Podemos decir entonces que un par $\{A, T\}$ de vectores ortogonales de M_4 , de manera que $\langle A, A \rangle = 1$ y $\langle T, T \rangle = -1$, determinan una geodésica de \mathbb{H}_+^3 . El punto A pertenece a la geodésica y T sería un *vector tangente* a ella en dicho punto. A cada geodésica se le puede dotar de una *orientación* determinada por el par $\{A, T\}$, contraria a la determinada por $\{A, -T\}$.

Semiespacio de Poincaré

Es el conjunto

$$\mathbb{U}^3 = \{Z = (x, y, \xi) \in \mathbb{R}^3, \xi > 0\}$$

dotado con la métrica dada por

$$\text{ch } d(Z, W) = 1 + \frac{|Z - W|^2}{2\xi\zeta},$$

siendo $Z = (x, y, \xi)$, $W = (u, v, \zeta)$. En el caso particular $Z = (0, 0, \xi)$, $W = (0, 0, \zeta)$ se cumple que

$$d(Z, W) = \left| \ln \left(\frac{\xi}{\zeta} \right) \right|.$$

Los *planos hiperbólicos* son semiesferas euclídeas o semiplanos, perpendiculares al plano euclídeo de ecuación $\xi = 0$ (figura 1.1). Las *geodésicas* son semicircunferencias euclídeas con centro en el plano $\xi = 0$ o semirrectas, perpendiculares a dicho plano (figura 1.2).

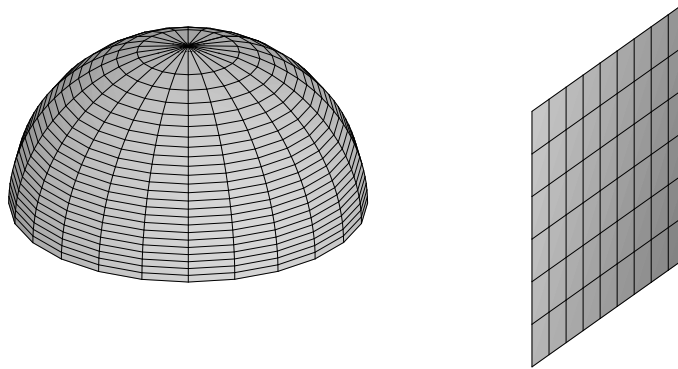


Figura 1.1: Planos hiperbólicos en el semiespacio de Poincaré

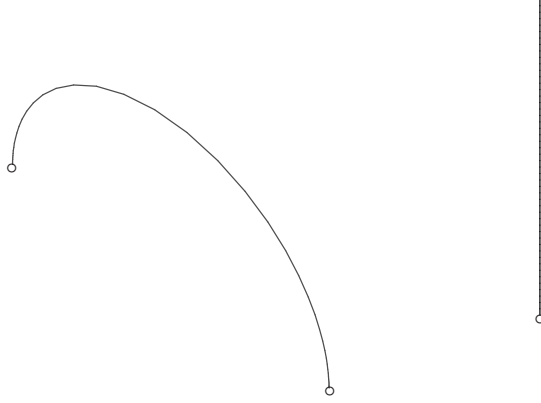


Figura 1.2: Geodésicas en el espacio de Poincaré

La aplicación

$$F_3(Z) = \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} x + iy & -|Z|^2 \\ 1 & -x + iy \end{pmatrix},$$

siendo $Z = (x, y, \xi)$, es una isometría de \mathbb{U}^3 en el modelo $S^+(M_4)$ del 3-espacio hiperbólico, que permite identificar ambos espacios y denominarlos genéricamente \mathbb{H}^3 .

Existe, además, una biyección entre $PC(M_4)$ y el conjunto $\partial\mathbb{U}^3$ de puntos impropios del semiespacio de Poincaré, de manera que

$$(u, v, 0) \equiv L[U] \quad \text{e} \quad \infty \equiv L[V],$$

siendo U y V las matrices siguientes:

$$U = \begin{pmatrix} z & -|z|^2 \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{con } z = u + iv \quad \text{y} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El plano euclídeo $\xi = 0$ puede identificarse con \mathbb{C} . Así los elementos de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pueden considerarse puntos impropios de \mathbb{U}^3 .

Isometrías del 3-espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

El grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 puede identificarse con el grupo $Lor(M_4)$ de transformaciones de Lorentz de M_4 , transformaciones ortogonales que conservan

las componentes conexas de la pseudoesfera $S(M_4) \equiv \langle X, X \rangle = 1$. La *reflexión* en un hiperplano de M_4 es una transformación de Lorentz y cada elemento de $Lor(M_4)$ puede descomponerse en un número máximo de cuatro reflexiones de ese tipo. Las transformaciones de $Lor(M_4)$ con determinante 1 constituyen el *grupo especial* de Lorentz $Lor^+(M_4)$. Un elemento de $Lor^+(M_4)$, llamado *transformación especial* de Lorentz, admite una descomposición en un número par de reflexiones de Lorentz.

Cada transformación de Lorentz de M_4 está asociada unívocamente a un elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$ y puede ser de uno de los dos siguientes tipos:

$$\mathbf{f}[X] = fX\bar{f}^{-1}; \quad X \in M_4, f \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (1.6)$$

ó

$$\mathbf{f}^*[X] = f\bar{X}\bar{f}^{-1}; \quad X \in M_4, f \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (1.7)$$

según que, respectivamente, conserven o inviertan la orientación de M_4 . Las matrices f y $-f$ definen, en ambos casos, la misma transformación.

Como se puede observar, cualquiera que sea el elemento $X \in M_4$, si $f \in SL(2, \mathbb{C})$, se tiene entonces que la matriz $\mathbf{f}[X] = fX\bar{f}^{-1} \in M_4$. Esto es debido a que $\mathbf{f}[X]^\sim = -\overline{\mathbf{f}[X]}$, como puede comprobarse fácilmente. Y definiendo

$$\mathbf{j}_3[X] = \bar{X},$$

es evidente entonces que también $\mathbf{j}_3[X] \in M_4$ y que $\mathbf{f}^*[X] = \mathbf{f} \circ \mathbf{j}_3[X] \in M_4$.

Dado un vector $N \in M_4$ de norma -1 , entonces $n = -iN$ es un elemento de $SL(2, \mathbb{C})$ y la transformación

$$\mathbf{n}^*[X] = n\bar{X}\bar{n}^{-1} = -N\bar{X}N \quad (1.8)$$

es la reflexión τ_N en un hiperplano ortogonal a N , ya que la igualdad (1.1), como $\langle N, N \rangle = -1$, puede escribirse

$$\tau_N[X] = X + 2\langle X, N \rangle N,$$

y, como $X\bar{N} + N\bar{X} = -2\langle X, N \rangle \iota$, entonces $\tau_N[X] = -N\bar{X}N$. En particular, si $N = X_3 = i\iota$ entonces $n = \iota$ y se tiene así que $\mathbf{j}_3[X]$ es la reflexión en el plano de vector normal X_3 .

La transformación (1.8) puede también considerarse la reflexión en el plano hiperbólico de vector normal N .

La restricción a \mathbb{H}^3 de las transformaciones (1.6) y (1.7) constituyen el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 .

El tipo de cada isometría \mathbf{f} ó \mathbf{f}^* se caracteriza por su *desplazamiento* $\delta = D + i\theta$ mediante

$$\mathrm{tr}^2 f = 4 \mathrm{ch}^2 \frac{1}{2} \delta.$$

Toda matriz $f \in SL(2, \mathbb{C})$ es conjugada de una matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

según que $\mathrm{tr}^2 f \neq 4$ ó $\mathrm{tr}^2 f = 4$, respectivamente, siendo $m \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ tal que $\log |m| \geq 0$, y el desplazamiento de la isometría es

$$\delta = \log m \quad \text{ó} \quad \delta = 0.$$

La isometría \mathbf{f} deja invariante uno o dos puntos impropios, respectivamente, según que $\delta = 0$ ó $\delta \neq 0$.

En el caso de $\delta = D + i\theta \neq 0$, entonces $D = \log |m|$ y $\theta = \arg m$ y, según que $\delta = D$, $\delta = i\theta$ ó $\delta = D + i\theta$, se tiene que

$$\mathrm{tr}^2 f = 2(\mathrm{ch} D + 1) > 4, \quad \mathrm{tr}^2 f = 2(\cos \theta + 1) < 4, \quad \mathrm{tr}^2 f \in \mathbb{C} - [0, \infty).$$

Los dos puntos fijos de la transformación \mathbf{f} son los extremos de la geodésica invariante por \mathbf{f} , llamada *eje* de \mathbf{f} , que será designada por \mathbf{h}_f . La *parte real* de δ mide la distancia hiperbólica entre $A \in \mathbf{h}_f$ y $\mathbf{f}[A]$, y la *parte imaginaria* es el ángulo que gira cualquier plano hiperbólico que contiene a \mathbf{h}_f , [Fe].

En el caso de $\sigma \in sl_2(\mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$, se tiene que $\sigma^2 = -\iota$ y σ es un *semigiro* alrededor de \mathbf{h}_σ . Obsérvese que $\mathrm{tr} \sigma = 0$ y $\delta = i\pi$. Por otra parte, toda isometría de \mathbb{H}^3 que conserva la orientación es la composición de dos semigiros [Fe].

Una clasificación de las isometrías de \mathbb{H}^3 puede verse en [Iv] y [Fe]. Las restricciones a \mathbb{H}^2 de ciertas isometrías de \mathbb{H}^3 inducen, a su vez, las isometrías del plano hiperbólico tratadas con posterioridad.

Producto exterior de dos matrices de M_4

Si $X, Y \in M_4$, la expresión (1.3) puede escribirse

$$X \times Y = \frac{1}{2} (X\bar{Y} - Y\bar{X}) \in sl_2(\mathbb{C}) \quad (1.9)$$

y, además, si $f \in SL(2, \mathbb{C})$, teniendo en cuenta las igualdades (1.6), (1.7) y (1.9) es fácil probar que

$$\mathbf{f}[X] \times \mathbf{f}[Y] = f(X \times Y)f^{-1}; \quad X, Y \in M_4 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{f}^*[X] \times \mathbf{f}^*[Y] = f(\overline{X \times Y})f^{-1}; \quad X, Y \in M_4.$$

Proposición 1.2.1 *Si una geodésica orientada \mathbf{g} está determinada por el par $\{A, T\}$, donde $\langle A, A \rangle = 1, \langle T, T \rangle = -1, \langle A, T \rangle = 0$, la matriz*

$$\sigma = i(A \times T) = iA\overline{T} \in sl_2(\mathbb{C}) \quad (1.11)$$

representa el semigiro alrededor de la geodésica \mathbf{g} y diremos que $\mathbf{g} \equiv \mathbf{h}_\sigma$.

Demostración

Basta comprobar que $\langle \sigma, \sigma \rangle = 1, \sigma^2 = -I$ y, además, $\sigma[A] = A, \sigma[T] = T$. La segunda igualdad se debe a la ortogonalidad de A y T . ■

Proposición 1.2.2 *Sean $f \in SL(2, \mathbb{C})$ y $\sigma \in sl_2(\mathbb{C})$. Según que \mathbf{h}_τ sea la geodésica transformada de \mathbf{h}_σ por la isometría \mathbf{f} o por la isometría \mathbf{f}^* , entonces el semigiro alrededor de \mathbf{h}_τ es, respectivamente,*

$$\tau = f\sigma f^{-1} \quad \text{ó} \quad \tau = -f\overline{\sigma}f^{-1}.$$

Además, si δ es el desplazamiento de la isometría \mathbf{f} , entonces

$$\mu = \frac{i}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta} (f - f^{-1}) \in sl_2(\mathbb{C})$$

representa el semigiro que deja invariante la geodésica $\mathbf{h}_f, \mathbf{h}_f \equiv \mathbf{h}_\mu$, en el caso de $\delta \neq 0$.

Y si $\delta = 0$, entonces la matriz

$$v = f - f^{-1}$$

determina el único punto impropio invariante por \mathbf{f} .

Demostración

De la igualdad (1.10) y de la proposición 1.2.1, se deduce la primera parte. Para la segunda parte, basta considerar que, como $f \in SL(2, \mathbb{C})$, se tiene que

$$f - f^{-1} \in sl_2(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad f(f - f^{-1}) = (f - f^{-1})f.$$

Además,

$$\det(f - f^{-1}) = 4 - \text{tr}^2 f = 4(1 - \text{ch}^2 \frac{1}{2}\delta) = -4 \text{sh}^2 \frac{1}{2}\delta.$$

■

Proposición 1.2.3 Si $\sigma, \tau \in sl_2(\mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \pm \text{ch} \frac{1}{2}\delta,$$

siendo δ el desplazamiento de la transformación $\mathbf{f} = \sigma \circ \tau$.

Además, el eje de $\mathbf{f} = \sigma \circ \tau$ es \mathbf{h}_μ , siendo

$$\mu = \frac{i}{2 \text{sh} \frac{1}{2}\delta} (\sigma\tau - \tau\sigma) = \frac{i}{\sqrt{\langle \sigma, \tau \rangle^2 - 1}} (\sigma \times \tau) \in sl_2(\mathbb{C}),$$

si $\delta \neq 0$. Más aún, la geodésica \mathbf{h}_μ es perpendicular a las geodésicas \mathbf{h}_σ , \mathbf{h}_τ , y $\{\sigma, \tau, \mu\}$ es una base ortogonal de $sl_2(\mathbb{C})$.

Y si $\delta = 0$, entonces

$$v = \sigma \times \tau$$

representa el punto impropio invariante por \mathbf{f} .

Demostración

En efecto:

$$\langle \sigma, \tau \rangle^2 = \frac{1}{4} \text{tr}^2(\sigma\tau) = \frac{1}{4} \text{tr}^2 f = \text{ch}^2 \frac{1}{2}\delta.$$

Si $\delta \neq 0$, la geodésica \mathbf{h}_μ es perpendicular a las geodésicas \mathbf{h}_σ y \mathbf{h}_τ : basta tener en cuenta que

$$\sigma(\sigma \times \tau)\sigma^{-1} = -\sigma(\sigma \times \tau)\sigma = -(\sigma \times \tau)$$

y, análogamente,

$$\tau(\sigma \times \tau)\tau^{-1} = -(\sigma \times \tau).$$

Puede observarse, además, que, si $\delta \neq 0$, $\langle \sigma, \sigma \times \tau \rangle = \langle \tau, \sigma \times \tau \rangle = 0$ y, por tanto, $\langle \sigma, \mu \rangle = \langle \tau, \mu \rangle = 0$. Los demás resultados son consecuencias de la proposición 1.2.2. ■

1.2.2. Modelos del plano hiperbólico

Los diferentes modelos de \mathbb{H}^3 considerados han sido el modelo del espacio de Minkowski de las matrices de $M_2(\mathbb{C})$, caracterizadas por $X^\sim = -\overline{X}$, y el semiespacio de Poincaré. Para el plano hiperbólico serán los modelos correspondientes a éstos: el espacio de las matrices de $sl_2(\mathbb{R})$, caracterizadas por $X \in M_2(\mathbb{R})$ y $X^\sim = -X$, y el semiplano de Poincaré, además del modelo del disco de Poincaré. Precisamente, en este último modelo se realizarán las representaciones de polígonos hiperbólicos en capítulos posteriores.

La definición del 2-espacio hiperbólico mediante $sl_2(\mathbb{R})$ permite, como ya se indicó anteriormente, conservar la validez de resultados propios de \mathbb{H}^3 en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , mediante una restricción natural. Los puntos y las geodésicas de \mathbb{H}^2 quedan asociados a matrices de $sl_2(\mathbb{R})$ con determinante 1 ó -1 , respectivamente.

Los resultados obtenidos, algunos de los cuales se encuentran en [Iv], junto con las interpretaciones geométricas de operaciones en $sl_2(\mathbb{R})$, constituyen la base sobre la que, posteriormente, elaboraremos otros resultados, especialmente los concernientes a relaciones entre elementos de un polígono hiperbólico cualquiera y a la construcción de polígonos hiperbólicos.

Modelo $sl_2(\mathbb{R})$ del 2-espacio hiperbólico

Dado el espacio vectorial

$$sl_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

si definimos la forma cuadrática $Q(X) = \langle X, X \rangle = \det X$, como $X^2 = -(\det X)\iota$, cualquiera que sea $X \in sl_2(\mathbb{R})$, entonces $\det X = -\frac{1}{2} \text{tr}(X^2)$ y se tiene que

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XY) \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

define el producto escalar en $sl_2(\mathbb{R})$. A los vectores X con norma $\langle X, X \rangle$ igual a 1 ó -1 se les llama *unitarios*.

Se cumple, además, que

$$XY + YX = -2 \langle X, Y \rangle \iota$$

y

$$\langle X, Y \rangle = 0 \text{ si y sólo si } YX = -XY.$$

Por otra parte, los vectores

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

constituyen una base ortonormal del espacio vectorial $sl_2(\mathbb{R})$, siendo así de tipo Sylvester $(-2, 1)$.

El hiperboloide $S(sl_2(\mathbb{R})) \equiv \langle X, X \rangle = 1$ tiene dos hojas. Una de ellas:

$$S^+(sl_2(\mathbb{R})) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in S(sl_2(\mathbb{R})); c > 0 \right\}$$

es un *2-espacio hiperbólico* con la métrica dada por $d(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ (figura 1.3). Por otra parte, $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ es un plano hiperbólico de \mathbb{H}^3 y entonces las matrices X_1 y X_2 pueden ser consideradas como vectores tangentes al plano $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ en el punto X_0 .

Cada elemento de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ puede expresarse de la forma

$$Z = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} x & -x^2 - y^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}; \quad y > 0.$$

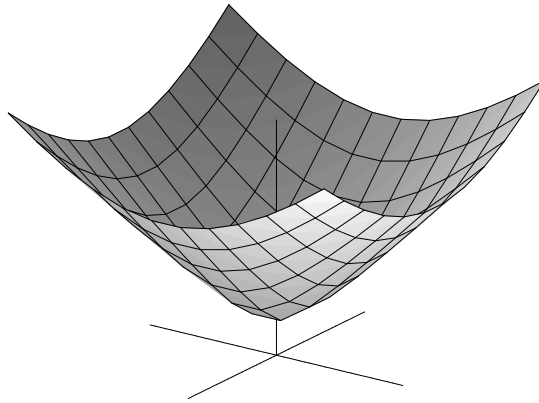


Figura 1.3: Modelo \mathbb{H}^2 del hiperboloide

Definida la orientación de planos hiperbólicos de \mathbb{H}^3 con anterioridad, si dotamos al 2-espacio hiperbólico de una orientación, puede afirmarse que el vector $X_3 = i\iota$ es normal al plano hiperbólico $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$. El vector $-X_3$ induce la

orientación contraria. Posteriormente, veremos que la forma volumen definida en $sl_2(\mathbb{R})$ también permite dotar a $sl_2(\mathbb{R})$ de una orientación que, a su vez, induce en $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ una orientación del mismo tipo.

Cada vector isotrópico $U \in sl_2(\mathbb{R})$ engendra la *línea isotrópica* $L[U]$ y los vectores isotrópicos constituyen el *cono isotrópico* $C(sl_2(\mathbb{R}))$ (figura 1.4). Se llama *cono proyectado* al conjunto $PC(sl_2(\mathbb{R}))$ de líneas isotrópicas, que es homeomorfo a la circunferencia S^1 . Resulta inmediato comprobar que cada línea isotrópica $L[U]$ está engendada por un vector que admite una de las dos siguientes expresiones:

$$U = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix}, \text{ si } u \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una *geodésica* es la intersección de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ con un plano vectorial de $sl_2(\mathbb{R})$ de tipo Sylvester $(-1, 1)$. Un estudio más detenido se realizará posteriormente.

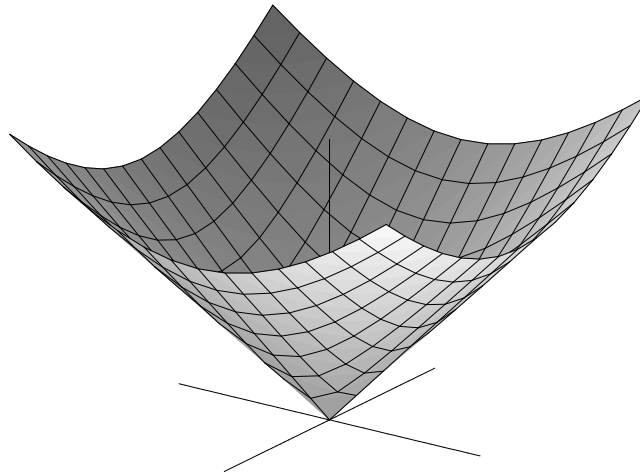


Figura 1.4: Cono isotrópico $C(sl_2(\mathbb{R}))$

Semiplano de Poincaré

Le denominamos \mathbb{U}^2 y es el conjunto de números complejos con parte imaginaria positiva, dotado con la métrica dada por

$$\text{ch } d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)}.$$

En el caso particular $z = ip$, $w = iq$ se cumple

$$d(ip, iq) = \left| \ln \left(\frac{p}{q} \right) \right|.$$

El conjunto $\partial\mathbb{U}^2$ de puntos impropios de \mathbb{U}^2 puede identificarse con el cono proyectado $PC(sl_2(\mathbb{R}))$, de modo que cada línea isotrópica $L[U]$ se corresponde biunívocamente con un elemento de $\partial\mathbb{U}^2$. Más aún, $L[U] \equiv u \in \mathbb{R}$ ó $L[U] \equiv \infty$, según que, respectivamente,

$$U = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las *geodésicas* son semicircunferencias euclídeas con centro en el eje real o semirrectas euclídeas perpendiculares a dicho eje (figura 1.5).

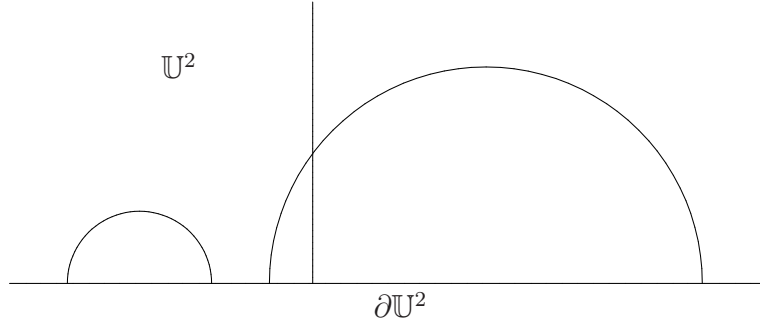


Figura 1.5: Geodésicas en el semiplano de Poincaré

El grupo de isometrías de \mathbb{U}^2 está generado por las reflexiones (euclídeas) en esas líneas. Respectivamente,

$$I(z) = a + r^2 \frac{z - a}{|z - a|^2} = a + \frac{r^2}{\bar{z} - a}, \quad a \in \mathbb{R}, r > 0;$$

$$I(z) = a - (\bar{z} - a) = 2a - \bar{z}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Las *transformaciones lineales*

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$$

forman el subgrupo de isometrías de \mathbb{U}^2 que conservan la orientación.

El grupo de isometrías de \mathbb{U}^2 se completa con las isometrías que invierten la orientación:

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1,$$

entre las que se encuentran las reflexiones euclídeas aludidas.

Disco de Poincaré

Es el conjunto $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ dotado con la métrica determinada por

$$\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Si $z = 0$ y $w = x > 0$ se tiene que $d(0, x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Las *geodésicas* son arcos de circunferencias o segmentos, perpendiculares a la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (figura 1.6).

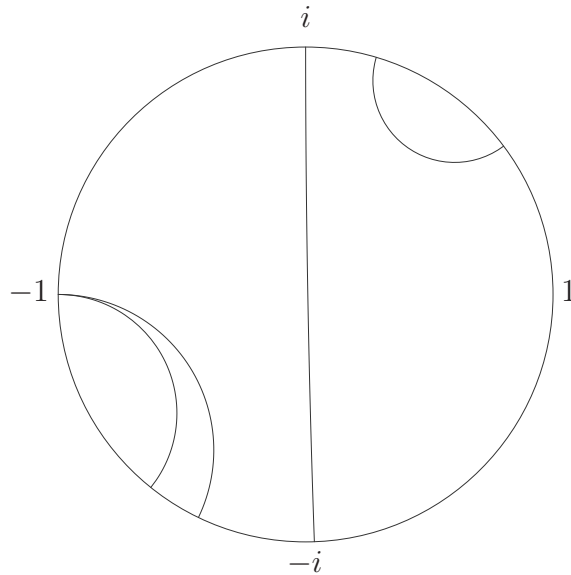


Figura 1.6: Geodésicas en el disco de Poincaré

El grupo de *isometrías* del disco de Poincaré está también generado por las reflexiones (euclídeas) en esas líneas.

El subgrupo de isometrías del disco \mathcal{D} que conservan la orientación son ahora las aplicaciones de la forma:

$$z \rightarrow \frac{uz + \bar{v}}{vz + \bar{u}}; \quad u, v \in \mathbb{C}, |u|^2 - |v|^2 = 1.$$

El grupo de isometrías queda completo con el conjunto de isometrías que invierten la orientación:

$$z \rightarrow \frac{u\bar{z} + \bar{v}}{v\bar{z} + \bar{u}}; \quad u, v \in \mathbb{C}, |u|^2 - |v|^2 = 1.$$

El modelo $sl_2(\mathbb{R})$ y los modelos de Poincaré del plano hiperbólico

Entre los tres modelos del 2-espacio hiperbólico estudiados podemos definir las siguientes biyecciones:

$h : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathcal{D}$, definida por

$$h(z) = i \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.13)$$

$F_2 : \mathbb{U}^2 \rightarrow S^+(sl_2(\mathbb{R}))$, siendo

$$F_2(z) = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -|z|^2 \\ 1 & -\operatorname{Re}(z) \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

$G_2 : \mathcal{D} \rightarrow S^+(sl_2(\mathbb{R}))$, con

$$G_2(w) = \frac{1}{1 - |w|^2} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(w) & -2\operatorname{Im}(w) - 1 - |w|^2 \\ -2\operatorname{Im}(w) + 1 + |w|^2 & -2\operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Puede probarse que las tres aplicaciones conservan las métricas definidas en cada modelo. Es decir, \mathbb{U}^2 , \mathcal{D} y $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ son isométricos. Más aún, se cumple que $G_2(h(z)) = F_2(z)$, si $z \in \mathbb{U}^2$.

A partir de ahora, si no hay ambigüedad, denominaremos genéricamente \mathbb{H}^2 al 2-espacio hiperbólico. Los resultados que siguen se prueban utilizando el modelo $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ y las representaciones se realizarán indistintamente en cualquiera de los dos modelos de Poincaré.

Isometrías del modelo $sl_2(\mathbb{R})$ del plano hiperbólico

Las únicas isometrías de \mathbb{H}^3 que dejan invariante $\mathbb{H}^2 = S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ son aquellas que dejan invariante o cambian de signo al vector $X_3 = i\iota$, normal al plano \mathbb{H}^2 . Es decir, si $g \in SL(2, \mathbb{C})$ tiene que cumplirse $g = \bar{g}$ ó $g + \bar{g} = 0$. La primera igualdad caracteriza a los elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ y la segunda a las matrices ig' ,

con $g' \in M_2(\mathbb{R})$ y $\det g' = -1$. De lo cual se sigue que las isometrías de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ están inducidas por las transformaciones de uno de los dos siguientes tipos:

$$gXg^{-1}; \quad X \in sl_2(\mathbb{R}), \det g = 1 \quad (1.16)$$

ó

$$-gXg^{-1}; \quad X \in sl_2(\mathbb{R}), \det g = -1, \quad (1.17)$$

siendo, en ambos casos, $g \in M_2(\mathbb{R})$. Abusando de la notación, si no hay ambigüedad, llamaremos $\mathbf{g}[X]$ a las primeras transformaciones y $\mathbf{g}^*[X]$ a las segundas. Se cumple que $\mathbf{g}[X_3] = X_3$ y $\mathbf{g}^*[X_3] = -X_3$.

Las transformaciones del primer tipo constituyen el grupo de Lorentz especial $Lor^+(sl_2(\mathbb{R}))$, isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$, y conservan la orientación de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$. El grupo $Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ se completa con las transformaciones del segundo tipo, que cambian la orientación de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$.

Por otra parte, todo elemento A de $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ puede expresarse como $F_2(z)$ para algún $z \in \mathbb{U}^2$, siendo $F_2(z)$ la aplicación (1.14). La involución

$$\mathbf{j}_2 : A = F_2(z) \rightarrow F_2(-\bar{z}) \quad (1.18)$$

cambia la orientación y $\mathbf{j}_2[A] = -X_2AX_2^{-1} = -X_2AX_2$. Así, cada isometría (1.17) puede expresarse de la forma $\mathbf{g}^* = \mathbf{f} \circ \mathbf{j}_2$, siendo $\mathbf{f}[Y] = fYf^{-1}$, con $f = gX_2 \in SL(2, \mathbb{R})$.

Las isometrías de \mathbb{H}^2 que conservan la orientación se clasifican en *traslaciones*, *traslaciones paralelas* y *giros* alrededor de un punto y son, respectivamente, transformaciones hiperbólicas, parabólicas y elípticas. Las dos primeras proceden de isometrías de \mathbb{H}^3 del mismo tipo. Un giro es, a su vez, la restricción de un giro alrededor de una geodésica de \mathbb{H}^3 perpendicular al plano \mathbb{H}^2 . Las isometrías que cambian la orientación pueden ser de dos tipos: *reflexiones en una geodésica* o *reflexiones sesgadas*, restricciones respectivas de semigiros alrededor de una geodésica de \mathbb{H}^3 , contenida en \mathbb{H}^2 , o de composiciones de un semigiro y una traslación, cuyo eje común está contenido en \mathbb{H}^2 .

El tipo de isometría queda determinado por el valor de la traza de la matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ asociada a la transformación. La isometría \mathbf{g} es una traslación, una traslación paralela o un giro según que $\text{tr}^2 g > 4$, $\text{tr}^2 g = 4$ ó $\text{tr}^2 g < 4$. El desplazamiento de \mathbf{g} es, respectivamente, $\delta = D > 0$, $\delta = 0$ ó $\delta = i\theta$. La transformación \mathbf{g}^* es una reflexión en una geodésica o una reflexión sesgada, respectivamente, según que $\text{tr} g = 0$ ó $\text{tr} g \neq 0$.

Producto exterior de dos matrices de $sl_2(\mathbb{R})$ [Iv]

La igualdad (1.3) define el producto exterior de dos matrices de $M_2(\mathbb{C})$ que, en el caso particular de matrices de M_4 , puede expresarse mediante la igualdad (1.9). Para el producto exterior de dos matrices de $sl_2(\mathbb{R})$ se utilizará la notación elegida en [Iv] (\wedge en lugar de \times), donde pueden verse las demostraciones de las propiedades.

Si $X, Y \in sl_2(\mathbb{R})$, entonces su producto exterior se define como

$$X \wedge Y = \frac{1}{2} (XY - YX) \in sl_2(\mathbb{R}). \quad (1.19)$$

Por la proposición 1.1.4 y las igualdades (1.10) se tiene que, en $sl_2(\mathbb{R})$, se cumple

- $\langle A \wedge B, C \wedge D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle.$

- *Si X e Y son unitarios:*

$$\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = 1 - \langle X, Y \rangle^2, \text{ en el caso de } \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle.$$

$$\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = -1 - \langle X, Y \rangle^2, \text{ en el caso de } \langle X, X \rangle = -\langle Y, Y \rangle.$$

- $X \wedge (Y \wedge Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z.$

- *Si $\mathbf{f}[X] = fXf^{-1}$, $f \in SL(2, \mathbb{R})$, entonces*

$$\mathbf{f}[X] \wedge \mathbf{f}[Y] = \mathbf{f}[X \wedge Y],$$

y si $\mathbf{g}^[X] = -gXg^{-1}$, $g \in M_2(\mathbb{R})$ y $\det g = -1$, entonces*

$$\mathbf{g}^*[X] \wedge \mathbf{g}^*[Y] = -\mathbf{g}^*[X \wedge Y].$$

Puede comprobarse que si $\{X_0, X_1, X_2\}$ son las matrices (1.2) entonces

$$X_1 \wedge X_0 = X_2.$$

Orientación del plano hiperbólico \mathbb{H}^2

En la proposición 1.1.5 se trató de la forma volumen definida en $sl_2(\mathbb{C})$ y se enumeraron sus propiedades. La forma volumen en $sl_2(\mathbb{R})$ define una orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ y, por tanto, de \mathbb{H}^2 .

Dadas tres matrices X, Y, Z de $sl_2(\mathbb{R})$, se escribe

$$[X, Y, Z] = \langle X \wedge Y, Z \rangle = -\frac{1}{2}\text{tr}(XYZ) \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

La base $\{X_0, X_1, X_2\}$ induce una *orientación* en $sl_2(\mathbb{R})$, que se considera positiva como la inducida por cualquier base ortonormal $\{X, Y, Z\}$ con $[X, Y, Z] = 1$. La orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ es *negativa* en el caso de que $[X, Y, Z] = -1$. A su vez, la orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ induce en \mathbb{H}^2 una orientación del mismo tipo. Esta definición de orientación es equivalente a la inducida por la orientación de \mathbb{H}^3 definida con anterioridad al estudiar el espacio de Minkowski.

Por otra parte, la involución (1.18):

$$\mathbf{j}_2 : F_2(z) \in \mathbb{H}^2 \rightarrow F_2(-\bar{z}) \in \mathbb{H}^2$$

puede extenderse naturalmente a la transformación

$$\mathbf{j}_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{R}),$$

que cambia la orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ y de \mathbb{H}^2 :

$$\mathbf{j}_2[X_0] = X_0, \mathbf{j}_2[X_1] = X_1, \mathbf{j}_2[X_2] = -X_2.$$

Es decir,

$$[\mathbf{j}_2[X_0], \mathbf{j}_2[X_1], \mathbf{j}_2[X_2]] = -1.$$

Como la transformación (1.17) puede escribirse $\mathbf{g}^* = \mathbf{f} \circ \mathbf{j}_2$, siendo $\mathbf{f}[X] = fXf^{-1}$, si $\mathbf{g}[X] = gXg^{-1}$, para cualesquiera que sean $X, Y, Z \in sl_2(\mathbb{R})$,

$$[\mathbf{g}[X], \mathbf{g}[Y], \mathbf{g}[Z]] = [X, Y, Z] \quad \text{y} \quad [\mathbf{g}^*[X], \mathbf{g}^*[Y], \mathbf{g}^*[Z]] = -[X, Y, Z].$$

Es decir, la orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ aquí definida se conserva mediante una isometría \mathbf{g} y cambia mediante \mathbf{g}^* .

1.3. Geodésicas en \mathbb{H}^2

1.3.1. Vector normal a una geodésica

Definiciones

En la descripción del modelo \mathbb{H}^3 del espacio de Minkowski se trató de las geodésicas del 3-espacio hiperbólico. Puede afirmarse que una geodésica orientada

de \mathbb{H}^2 está también determinada por un par $\{A, T\}$ de matrices de $sl_2(\mathbb{R})$, siendo $\langle A, A \rangle = 1$ y $\langle T, T \rangle = -1$, y el par $\{A, -T\}$ determina la misma geodésica con la orientación opuesta. La *geodésica orientada* $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ tiene ecuación

$$\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t, \quad (1.21)$$

donde $A = \gamma(0)$ y $T = \gamma'(0)$ es un vector ortogonal a A , con norma $\langle T, T \rangle = -1$, que es tangente a la geodésica en el punto A . Si $\gamma(t) = B$, entonces

$$B = A \operatorname{ch} d(A, B) + T \operatorname{sh} d(A, B) \quad \text{y} \quad \langle A, B \rangle = \operatorname{ch} d(A, B).$$

Definición 1.3.1 *Se llama vector normal a la geodésica $\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t$, contenida en \mathbb{H}^2 , a la matriz de $sl_2(\mathbb{R})$*

$$N = \gamma'(t) \wedge \gamma(t) = T \wedge A = TA = -AT,$$

que es independiente del parámetro t .

Las dos últimas igualdades se deben a que A y T son ortogonales entre sí. Puede observarse que N es un vector de norma -1 que es ortogonal a A y a T . Más aún, la base ortonormal $\{A, T, N\}$ de $sl_2(\mathbb{R})$ está orientada positivamente. También se cumple que $\gamma'(t) = \gamma(t) \wedge N$. Además, $T = A \wedge N = AN = -NA$. En efecto:

$$A \wedge N = A \wedge (T \wedge A) = \langle A, A \rangle T - \langle A, T \rangle N = T.$$

Así, la geodésica $\gamma(t)$ admite también la ecuación

$$\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + (A \wedge N) \operatorname{sh} t = A \operatorname{ch} t + AN \operatorname{sh} t. \quad (1.22)$$

La siguiente figura 1.7 muestra la ortogonalidad de los vectores T y N . Sin embargo, el vector T varía con el punto A , pero no el vector N , que permanece invariable en todos los puntos de la geodésica. En realidad, ambos vectores, siendo elementos de $sl_2(\mathbb{R})$, no admiten una verdadera representación y la ilustración sólo tiene carácter orientativo. La idea está tomada de [Iv] y será de utilidad para indicar la orientación de las geodésicas de \mathbb{H}^2 .

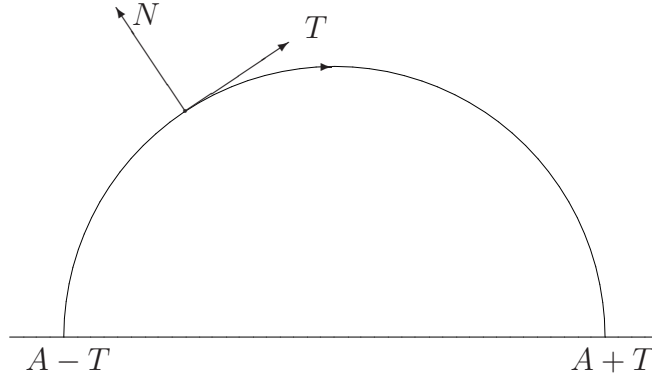


Figura 1.7

El vector N normal a la geodésica γ depende de la orientación de ésta y es único, salvo el signo, si la geodésica no está orientada. Dicha geodésica es la intersección con \mathbb{H}^2 del plano vectorial de $sl_2(\mathbb{R})$ ortogonal a N . Por otra parte, la geodésica de ecuación

$$\eta(t) = A \operatorname{ch} t + N \operatorname{sh} t$$

es la perpendicular a γ trazada por el punto A .

Puede observarse que si N es el vector normal de una geodésica y g es la matriz que define alguna de las transformaciones $\mathbf{g}[X] = gXg^{-1}$ ó $\mathbf{g}^*[X] = -gXg^{-1}$, con $\det g = 1$ ó $\det g = -1$, respectivamente, por las propiedades del producto exterior, se tiene que el vector N' normal a la geodésica transformada mediante \mathbf{g} ó \mathbf{g}^* puede escribirse $N' = gNg^{-1}$ en cualquiera de ambos casos.

Teniendo en cuenta la igualdad (1.11) que expresa el semigiro alrededor de la geodésica \mathbf{g} de \mathbb{H}^3 determinada por el par $\{A, T\}$, si \mathbf{g} es una geodésica de \mathbb{H}^2 , de vector normal N , entonces la matriz

$$\sigma = i(A \wedge T) = iAT = -iN \in sl_2(\mathbb{C})$$

representa el semigiro alrededor de \mathbf{g} . Por otra parte, la geodésica \mathbf{g} es la intersección con \mathbb{H}^2 de un plano hiperbólico de \mathbb{H}^3 perpendicular a \mathbb{H}^2 (figura 1.8).

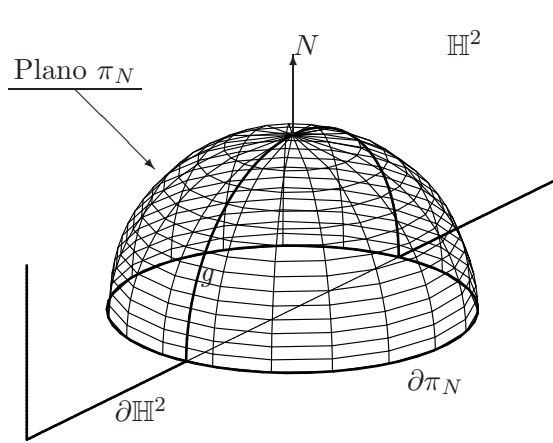


Figura 1.8

El vector N puede considerarse indistintamente como un vector normal a la geodésica g o al plano hiperbólico π_N . Si \mathbf{n}^* es la reflexión en el plano hiperbólico π_N , definida en (1.8), y σ es el semigiros alrededor de g , entonces cualquiera que sea $X \in \mathbb{H}^2$, se tiene que

$$\mathbf{n}^*[X] = \sigma[X] = -NXN.$$

La siguiente representación, de carácter puramente orientativo, es coherente con las consideraciones anteriores, así como las que siguen, relativas al punto $X_0 \in \mathbb{H}^3$ y a los vectores X_1, X_2 y $X_3 \in M_4$ de norma -1 de la igualdad (1.4).

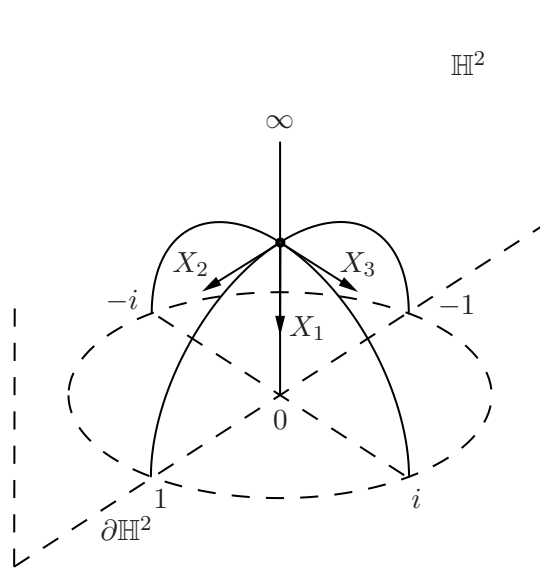


Figura 1.9

Semiplanos determinados por una geodésica orientada: semiplano interior y semiplano exterior

Si la geodésica γ está orientada por el vector normal N , sabemos que el punto $X \in \gamma$ si y sólo si $\langle X, N \rangle = 0$. En el caso de que $X \notin \gamma$, según el signo de $\langle X, N \rangle$, el punto X pertenece a uno u otro de los dos semiplanos hiperbólicos en que la geodésica γ divide a \mathbb{H}^2 (figura 1.10).

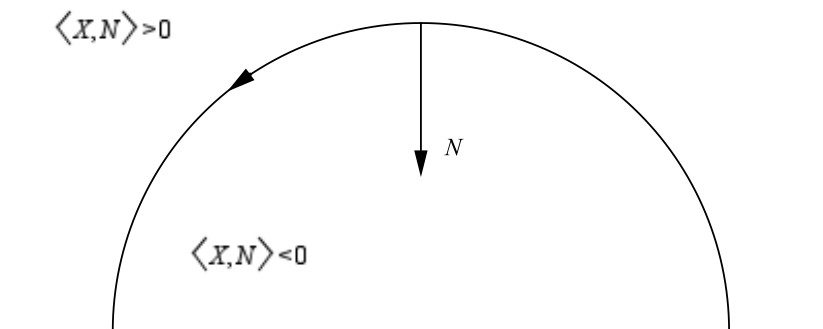


Figura 1.10

Definición 1.3.2 Se llama semiplano interior a la geodésica orientada γ , de vector normal N , al conjunto de puntos $\gamma^- = \{X \in \mathbb{H}^2; \langle X, N \rangle < 0\}$. El semiplano

exterior a γ es el conjunto $\gamma^+ = \{X \in \mathbb{H}^2; \langle X, N \rangle > 0\}$.

Dados un punto A , perteneciente a γ , y la geodésica de ecuación

$$X(t) = A \operatorname{ch} t + N \operatorname{sh} t,$$

perpendicular a γ , entonces

$$X(t) \in \gamma^-, \text{ si } t > 0 \quad \text{y} \quad X(t) \in \gamma^+, \text{ si } t < 0.$$

Vector normal a la geodésica que une dos puntos

Proposición 1.3.3 *Si N es el vector normal a la geodésica orientada de \mathbb{H}^2 que une el punto A_1 con el punto A_2 , entonces*

$$N = \frac{1}{\operatorname{sh} d(A_1, A_2)} (A_2 \wedge A_1). \quad (1.23)$$

Demostración

Si T es el vector tangente a la geodésica en el punto A_1 y $\delta = d(A_1, A_2)$, entonces

$$A_2 = A_1 \operatorname{ch} \delta + T \operatorname{sh} \delta \quad \text{y} \quad A_2 \wedge A_1 = (T \wedge A_1) \operatorname{sh} \delta = N \operatorname{sh} \delta.$$

■

1.3.2. Posiciones relativas de dos geodésicas en \mathbb{H}^2

Si dos geodésicas orientadas tienen vectores normales N y N' , según que el plano vectorial que engendran sea de tipo Sylvester $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ ó $(-1, 1)$, el vector $N \wedge N'$, ortogonal a dicho plano, tiene norma positiva, nula o negativa, y las dos geodésicas son secantes, paralelas o ultraparalelas, respectivamente. Más aún, el vector $N \wedge N'$ determina, salvo constantes, el punto común, propio o impropio, o el vector normal a la geodésica perpendicular a ambas, según los casos.

Proposición 1.3.4 *Si dos geodésicas orientadas tienen vectores normales N y N' , entonces*

$$|\langle N, N' \rangle| = 1, |\langle N, N' \rangle| < 1, |\langle N, N' \rangle| > 1;$$

según sean paralelas, secantes o ultraparalelas.

Demostración

Basta tener en cuenta el signo de $\langle N \wedge N', N \wedge N' \rangle = 1 - \langle N, N' \rangle^2$, según el caso. ■

Geodésicas secantes: ángulo direccional y punto común

Definición 1.3.5 Si h y h' son dos geodésicas orientadas secantes en el punto A , y S, T son sus vectores tangentes en el punto A , acordes con la orientación de ambas, diremos que $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$, es el ángulo direccional desde la primera geodésica h a la segunda h' si

$$\langle S, T \rangle = \cos \theta \quad \text{y} \quad S \wedge T = A \operatorname{sen} \theta. \quad (1.24)$$

Puede observarse que A es ortogonal a los vectores S y T y el ángulo de giro de S a T es $\pi - \theta$. Así, la definición anterior adquiere sentido teniendo en cuenta que, además,

$$\langle S \wedge T, S \wedge T \rangle = 1 - \langle S, T \rangle^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \quad \text{y} \quad \langle A, A \rangle = 1.$$

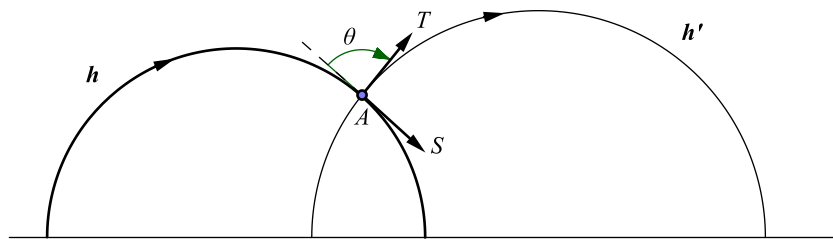


Figura 1.11

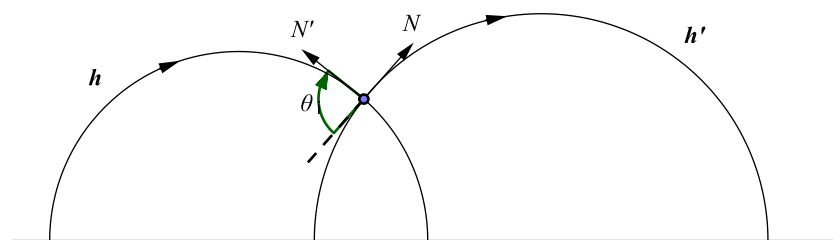


Figura 1.12

Proposición 1.3.6 Si h y h' son dos geodésicas orientadas secantes en A y sus vectores normales son N y N' , respectivamente, entonces

$$\langle N, N' \rangle = \cos \theta \quad \text{y} \quad N \wedge N' = A \operatorname{sen} \theta, \quad (1.25)$$

siendo θ el ángulo direccional desde la primera geodésica \mathbf{h} a la segunda \mathbf{h}' .

Demostración

Basta tener en cuenta que $N = S \wedge A$ y $N' = T \wedge A$, siendo S y T los vectores de la definición anterior. ■

Geodésicas paralelas y geodésicas ultraparalelas: orientación concordante

Sean \mathbf{h} y \mathbf{h}' dos geodésicas orientadas de vectores normales N y N' . En el caso de paralelismo, según que $\langle N, N' \rangle = 1$ ó $\langle N, N' \rangle = -1$, puede decirse que el ángulo direccional desde \mathbf{h} a \mathbf{h}' es, respectivamente, $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$ (figura 1.13).

Sean \mathbf{h} y \mathbf{h}' ultraparalelas, y K el vector normal de la geodésica \mathbf{k} perpendicular a ambas, si la orientación de las tres geodésicas es tal que $A = N \wedge K$ y $B = K \wedge N'$ son los puntos de la geodésica \mathbf{k} pertenecientes a \mathbf{h} y \mathbf{h}' , respectivamente, entonces se cumple que $\text{ch } D = \langle A, B \rangle = \langle N, N' \rangle$, siendo D la distancia entre las dos geodésicas ultraparalelas. Obsérvese que, en este caso, tanto desde \mathbf{h} a \mathbf{k} como desde \mathbf{k} a \mathbf{h}' , el ángulo direccional es $\frac{\pi}{2}$ (figura 1.14).

Definición 1.3.7 Dadas las geodésicas paralelas de vectores normales N y N' , se dice que están orientadas concordantemente si

$$\langle N, N' \rangle = 1.$$

Definición 1.3.8 Dadas las geodésicas ultraparalelas de vectores normales N y N' , se dice que están orientadas concordantemente si

$$\langle N, N' \rangle = \text{ch } D,$$

siendo D la distancia entre ambas.

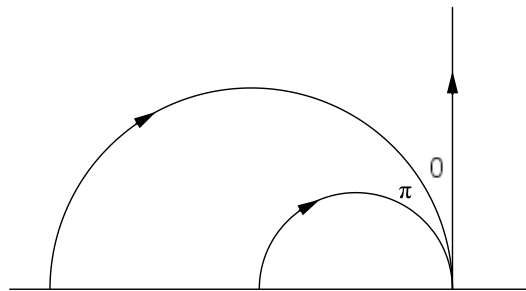


Figura 1.13

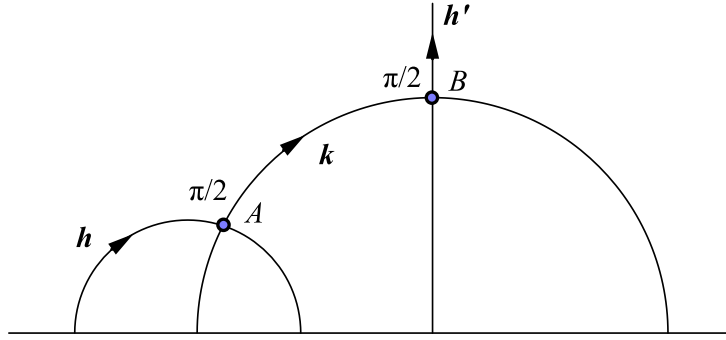


Figura 1.14

Perpendicular a una geodésica trazada por un punto

Proposición 1.3.9 Sean A un punto, \mathbf{g} una geodésica orientada de vector normal N , D la distancia de A a la geodésica \mathbf{g} . Si H es el vector normal de la geodésica \mathbf{h} perpendicular a \mathbf{g} trazada por el punto A , entonces para una orientación de \mathbf{g} y de \mathbf{h} se tiene que

a) $\langle A, N \rangle = -\text{sh } D$.

b) $H = \frac{1}{\text{ch } D}(A \wedge N)$.

Demostración

a) Sea B el punto común a las geodésicas \mathbf{g} y \mathbf{h} (figura 1.15). Puede suponerse entonces que

$$A = B \text{ch } D + N \text{sh } D \quad \text{y} \quad \langle A, N \rangle = \langle N, N \rangle \text{sh } D = -\text{sh } D.$$

b) Dado que H es ortogonal a A y a N , basta considerar que

$$\langle A \wedge N, A \wedge N \rangle = -1 - \langle A, N \rangle^2 = -\text{ch}^2 D.$$

■

Puede observarse que la igualdad de a) se cumple en el caso de que el punto A pertenezca al semiplano interior a la geodésica orientada \mathbf{g} . La igualdad b) entonces se satisface si la geodésica \mathbf{h} viene dada por la ecuación

$$\mathbf{h} \equiv A \text{ch } t + N \text{sh } t.$$

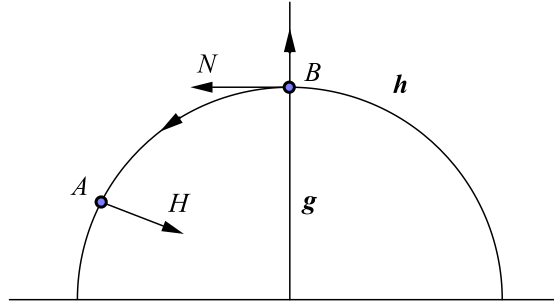


Figura 1.15

1.4. Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional y del plano hiperbólico

En la sección 1.2 se han estudiado las isometrías del espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 y las isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Las igualdades (1.6) y (1.7) muestran las expresiones matriciales de las primeras, y las segundas vienen dadas por las igualdades (1.16) y (1.17). En esta sección se trata de determinar sus matrices asociadas, a partir de un par de elementos geométricos, uno transformado del otro, ya sean dos puntos, dos planos o dos geodésicas; o a partir de una geodésica o un punto impropio, que sea invariante mediante la transformación correspondiente.

Estas expresiones permiten encontrar inmediatamente los generadores de un subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^2 , dado un polígono hiperbólico con ciertos lados identificados que sea una región fundamental.

Algunos resultados de esta sección, relativos a isometrías que dejan invariante un geodésica propia, serán utilizados posteriormente, en los capítulos 2 y 3, para dar una interpretación geométrica de ciertos resultados que aparecen de modo natural en el estudio de polígonos regulares, y en el capítulo 4 para manipular regiones fundamentales y calcular los generadores de ciertos grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico.

1.4.1. Determinación de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

Proposición 1.4.1 *Si A y B son dos puntos de \mathbb{H}^3 , entonces*

a) La matriz $F = B\bar{A} - \iota$ determina, salvo constantes reales, una traslación \mathbf{f} que transforma el punto A en el punto B .

b) Con más precisión, la matriz normalizada asociada a dicha isometría es

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} D} (B\bar{A} - \iota),$$

siendo D la distancia entre los puntos A y B .

Demostración

Se cumple $FA = B\bar{F} = -A - B$. Además,

$$\det F = \det(B\bar{A}) - \operatorname{tr}(B\bar{A}) + 1 = 2(1 + \langle A, B \rangle) = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} D.$$

Por tanto, $\det f = 1$ y

$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(B\bar{A}) - 2 = -2(1 + \langle A, B \rangle) = -4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} D.$$

Es decir, $\operatorname{tr}^2 f = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} D > 4$. ■

Considerando el caso $B = X_0$ y A cualquier punto de \mathbb{H}^3 , distinto de X_0 , si $A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$ entonces $\operatorname{ch} D = \frac{c-b}{2}$ y la matriz

$$F = \begin{pmatrix} -c - 1 & \alpha \\ \bar{\alpha} & b - 1 \end{pmatrix},$$

con $\det F = 2 + c - b > 4$, determina, salvo constantes reales, la traslación \mathbf{f} que transforma A en X_0 .

Proposición 1.4.2 Si P y Q son los vectores normales a dos planos orientados de \mathbb{H}^3 , tales que $\langle P, Q \rangle < 1$, entonces

a) La matriz $F = Q\bar{P} + \iota$ determina, salvo constantes reales, una isometría \mathbf{f} que conserva la orientación de \mathbb{H}^3 y transforma el plano π_P asociado a P en el plano π_Q asociado a Q .

b) Más precisamente, la matriz normalizada asociada a dicha isometría es

$$f = \frac{1}{(2 - 2\langle P, Q \rangle)^{1/2}} (Q\bar{P} + \iota).$$

Demostración

Se cumple que

$$\det F = \det(Q\bar{P}) + \operatorname{tr}(Q\bar{P}) + 1 = 2(1 - \langle P, Q \rangle) > 0.$$

Así, $\det f = 1$. Además, $FP = Q\bar{F} = Q + P$. Por tanto $\mathbf{f}[P] = Q$. ■

En el caso de $Q = X_3 = i\iota$ y P un vector, distinto de X_3 , normal a un plano hiperbólico de \mathbb{H}^3 , si $P = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$, con $\operatorname{Im} \alpha > -1$, entonces $\langle P, Q \rangle = -\operatorname{Im} \alpha$ y la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 1 + i\bar{\alpha} & ib \\ ic & 1 - i\alpha \end{pmatrix},$$

con $\det F = 2(1 + \operatorname{Im} \alpha) > 0$, determina una isometría \mathbf{f} que transforma el plano π_P asociado a P en el plano \mathbb{H}^2 , asociado a X_3 . Además \mathbf{f} conserva la orientación de \mathbb{H}^3 .

Corolario 1.4.3 *En las condiciones de la proposición anterior, la isometría \mathbf{f} es un giro, una traslación paralela o una traslación según que, respectivamente,*

$$|\langle P, Q \rangle| < 1, \langle P, Q \rangle = -1 \quad \text{ó} \quad \langle P, Q \rangle < -1.$$

Más aún,

a) *Si $\langle P, Q \rangle = -\cos \theta$, $0 < \theta < \pi$, el ángulo de giro de \mathbf{f} sería θ y entonces*

$$f = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\theta} (Q\bar{P} + \iota).$$

b) *Si $\langle P, Q \rangle = -1$, entonces*

$$f = \frac{1}{2} (Q\bar{P} + \iota).$$

c) *Si $\langle P, Q \rangle = -\operatorname{ch} D$, el desplazamiento de \mathbf{f} sería D y entonces*

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}D} (Q\bar{P} + \iota).$$

Demostración

Siendo F y f las matrices de la proposición anterior, entonces

$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(Q\bar{P}) + 2 = 2(1 - \langle P, Q \rangle) \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}^2 f = 2(1 - \langle P, Q \rangle).$$

- a) Si $\langle P, Q \rangle = -\cos \theta$, $0 < \theta < \pi$, entonces $\text{tr}^2 f = 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{1}{2}\theta < 4$.
b) Si $\langle P, Q \rangle = -1$, se tiene que $\text{tr}^2 f = 4$.
c) Si $\langle P, Q \rangle = -\text{ch } D$, entonces $\text{tr}^2 f = 2(1 + \text{ch } D) = 4 \text{ch}^2 \frac{1}{2}D > 4$.

Las correspondientes expresiones de f para cada caso se obtienen inmediatamente. ■

Proposición 1.4.4 *Siendo σ y τ las matrices asociadas a dos geodésicas distintas orientadas de \mathbb{H}^3 , si $\langle \sigma, \tau \rangle \neq -1$, entonces*

- a) *La matriz $F = \tau\sigma - \iota$ determina, salvo constantes, una isometría \mathbf{f} que conserva la orientación de \mathbb{H}^3 y transforma la geodésica \mathbf{h}_σ en la geodésica \mathbf{h}_τ .*
b) *Con más precisión, la matriz normalizada asociada a \mathbf{f} es*

$$f = \frac{1}{(2 + 2\langle \sigma, \tau \rangle)^{1/2}} (\tau\sigma - \iota).$$

Demostración

Es fácil comprobar que $F\sigma = \tau F = -\tau - \sigma$. Además,

$$\det F = \det(\tau\sigma) - \text{tr}(\tau\sigma) + 1 = 2(1 + \langle \sigma, \tau \rangle).$$

■

En el caso de $\tau = -iX_1$ y $\sigma \neq \tau$ el semigiro alrededor de cualquier geodésica de \mathbb{H}^3 , si $\sigma = \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix}$ y $n + p \neq 2i$ entonces

$$F = \begin{pmatrix} -ip - 1 & im \\ -im & -in - 1 \end{pmatrix},$$

con $\det F = 2 + i(n + p) \neq 0$, determina una isometría \mathbf{f} que transforma la geodésica \mathbf{h}_σ en la geodésica \mathbf{h}_τ . Además \mathbf{f} conserva la orientación de \mathbb{H}^3 .

Corolario 1.4.5 *En las condiciones de la proposición anterior, la isometría \mathbf{f} es un giro, una traslación paralela o una traslación según que, respectivamente,*

$$|\langle \sigma, \tau \rangle| < 1, \langle \sigma, \tau \rangle = 1 \quad \text{ó} \quad \langle \sigma, \tau \rangle > 1.$$

Para otro caso distinto de los anteriores la transformación \mathbf{f} sería la composición de una traslación y un giro con eje común, que llamaremos *skrew motion*.

Más aún,

a) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$, el ángulo de giro de \mathbf{f} sería θ y entonces

$$f = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\theta} (\tau\sigma - \iota).$$

b) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = 1$, entonces

$$f = \frac{1}{2} (\tau\sigma - \iota).$$

c) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = \operatorname{ch} D$, el desplazamiento de \mathbf{f} sería D y entonces

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}D} (\tau\sigma - \iota).$$

d) En otro caso, $\langle \sigma, \tau \rangle = \operatorname{ch}(D + i\theta)$, siendo $\delta = D + i\theta$ el desplazamiento de \mathbf{f} , y entonces

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta} (\tau\sigma - \iota).$$

En el caso particular $\theta = \pi$:

$$f = \frac{i}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}D} (\tau\sigma - \iota).$$

Demostración

Siendo F y f las matrices de la proposición anterior, se tiene que

$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(\tau\sigma) - 2 = -2(1 + \langle \sigma, \tau \rangle) \text{ y } \operatorname{tr}^2 f = 2(1 + \langle \sigma, \tau \rangle).$$

a) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = \cos \theta$, siendo $0 < \theta < \pi$, entonces $\operatorname{tr}^2 f = 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{1}{2}\theta < 4$.

b) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = 1$, entonces $\operatorname{tr}^2 f = 4$.

c) Si $\langle \sigma, \tau \rangle = \operatorname{ch} D$, se tiene que $\operatorname{tr}^2 f = 2(1 + \operatorname{ch} D) = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}D > 4$.

d) En otro caso, $\operatorname{tr}^2 f < 0$ ó $\operatorname{tr}^2 f \in \mathbb{C}$. Además, puede escribirse $\langle \sigma, \tau \rangle = \operatorname{ch}(D + i\theta)$, siendo $0 < \theta \leq \pi$.

Las correspondientes expresiones de f para cada caso se obtienen inmediatamente. En el último caso, si $\theta = \pi$, el denominador del coeficiente puede escribirse $i \operatorname{sh} \frac{1}{2}D$ y, teniendo en cuenta que las matrices f y $-f$ corresponden a la misma transformación, se obtiene la igualdad del enunciado. ■

Proposición 1.4.6 Si \mathbf{f} es una isometría que conserva la orientación de \mathbb{H}^3 y σ es el semigiros asociado al eje de \mathbf{f} , entonces una expresión de la matriz f sería, para alguna orientación de \mathbf{h}_σ ,

$$f = i\sigma \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta + \iota \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta, \quad (1.26)$$

siendo $\delta = \delta(\mathbf{f})$ el desplazamiento de la transformación \mathbf{f} .

Demostración

Puede verse que si $f \in M_2(\mathbb{C})$ entonces $f = \eta + q\iota$, donde $\eta \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y $q \in \mathbb{C}$. Como $f\sigma = \sigma f$, se tiene que $\eta\sigma = \sigma\eta$, es decir, $\eta \times \sigma = 0$ y por tanto $\eta = p\sigma$, para algún $p \in \mathbb{C}$.

Por otra parte, podemos suponer que $\operatorname{tr} f = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta$ y entonces $q = \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta$, al ser $\operatorname{tr} \sigma = 0$. Para que $\det f = 1$ debe cumplirse que $p^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}\delta = 1$ y podemos entonces considerar que $p = i \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta$. ■

En el caso de $\sigma = -iX_1$, entonces una isometría \mathbf{f} de desplazamiento $\delta = \delta(\mathbf{f})$ a lo largo de \mathbf{h}_σ , que conserva la orientación de \mathbb{H}^3 , está asociada a la matriz

$$f = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta & \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta & \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta \end{pmatrix}.$$

Corolario 1.4.7 En las mismas condiciones de la proposición anterior, para alguna orientación de la geodésica \mathbf{h}_f ,

a) Si \mathbf{f} es un giro de ángulo θ , entonces

$$f = \sigma \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta - \iota \operatorname{cos} \frac{1}{2}\theta.$$

Obsérvese que si $\theta = \pi$, entonces $f = \sigma$.

b) Si \mathbf{f} es una traslación de desplazamiento D , entonces

$$f = i\sigma \operatorname{sh} \frac{1}{2}D + \iota \operatorname{ch} \frac{1}{2}D.$$

c) Si \mathbf{f} es una skrew motion de desplazamiento D y ángulo de giro θ ,

$$f = i\sigma \operatorname{sh} \frac{1}{2}(D + i\theta) + \iota \operatorname{ch} \frac{1}{2}(D + i\theta).$$

Si $\theta = \pi$, entonces puede escribirse $f = \sigma \operatorname{ch} \frac{1}{2}D - i \iota \operatorname{sh} \frac{1}{2}D$.

Demostración

a) En el primer caso, $\delta = i\theta$, $\operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta = \cos \frac{1}{2}\theta$ e $i \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$. Cambiando f por $-f$, se obtiene la igualdad.

b) En el segundo, $\delta = D$.

c) En este caso, $\delta = D + i\theta$, y podemos escribir también

$$i \operatorname{sh} \frac{1}{2}(D + i\theta) = -\operatorname{ch} \frac{1}{2}D \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta + i \operatorname{sh} \frac{1}{2}D \cos \frac{1}{2}\theta$$

y

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2}(D + i\theta) = \operatorname{ch} \frac{1}{2}D \cos \frac{1}{2}\theta + i \operatorname{sh} \frac{1}{2}D \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta.$$

Si $\theta = \pi$, entonces

$$i \operatorname{sh} \frac{1}{2}(D + i\pi) = -\operatorname{ch} \frac{1}{2}D \quad \text{y} \quad \operatorname{ch} \frac{1}{2}(D + i\pi) = i \operatorname{sh} \frac{1}{2}D.$$

Cambiando f por $-f$, se obtiene la igualdad propuesta. ■

Proposición 1.4.8 *Si f es una traslación paralela de eje*

$$U = \begin{pmatrix} u & -|u|^2 \\ 1 & -\bar{u} \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{H}^3,$$

entonces f puede expresarse

$$f = pv + \iota,$$

siendo $p \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $v = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix}$.

En particular, si $U \in \partial\mathbb{H}^2$, entonces $f = pU + \iota$, $p \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración

Sabemos que $f = \eta + q\iota$, siendo $\eta \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y $q \in \mathbb{C}$. Podemos suponer que $\operatorname{tr} f = 2$ y, como $\det f = 1$, se deduce que $f = \eta + \iota$ y $\det \eta = 0$. Si $u \in \mathbb{C}$, como η puede escribirse

$$\eta = p \begin{pmatrix} v & -v^2 \\ 1 & -v \end{pmatrix},$$

dado que u es el único punto fijo de la transformación lineal

$$\mathbf{f}(z) = \frac{(pv + 1)z - pv^2}{pz + (1 - pv)},$$

se obtiene inmediatamente que $v = u$.

Si $U \in \partial\mathbb{H}^2$, sólo falta estudiar el caso $u \equiv \infty$. Entonces la transformación lineal que tiene u como único punto fijo es de la forma $\mathbf{f}(z) = z + p$. Luego

$$f = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = pU + \iota.$$

Si $u \notin \mathbb{R}$, entonces $v = UK_U$, donde $K_U = \begin{pmatrix} 1 & \bar{u} - u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $K_U U = \bar{U} \bar{K}_U$. Así, K_U es una traslación paralela que transforma $U \in \partial\mathbb{H}^3$ en $\bar{U} \in \mathbb{H}^3$, cuyo eje es el punto impropio $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \infty$, $K_U V = V \bar{K}_U$.

Puede observarse que si $u \neq \infty$ el valor p se caracteriza por la igualdad $\mathbf{f}(\infty) = u + p^{-1}$. Más aún, la recta de números complejos de la forma $u + tp^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, es invariante por la transformación lineal $\mathbf{f}(z)$. Si $u = \infty$, entonces $p = \mathbf{f}(0)$ y la recta invariante por $\mathbf{f}(z)$ sería tp , $t \in \mathbb{R}$.

1.4.2. Determinación de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2

Las isometrías de \mathbb{H}^2 son restricciones de ciertas isometrías de \mathbb{H}^3 . Toda isometría de \mathbb{H}^2 está asociada a una matriz $f \in M_2(\mathbb{R})$, con determinante uno, si conserva la orientación de \mathbb{H}^2 , o determinante igual a -1 , en caso contrario. Las matrices f y $-f$ definen la misma isometría. Una descripción de las isometrías de \mathbb{H}^2 , así como una clasificación de ellas, puede verse en el epígrafe 1.2.2.

De los resultados, válidos en \mathbb{H}^3 , obtenidos en las proposiciones 1.4.1 y 1.4.4, para dos puntos o para un par de geodésicas, podemos deducir inmediatamente los correspondientes a dos puntos o dos geodésicas de \mathbb{H}^2 , teniendo presente que en \mathbb{H}^2 se tiene $\bar{X} = X$ y que $\sigma = -iN$ muestra la relación entre la matriz de $sl_2(\mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$ asociada a una geodésica orientada de \mathbb{H}^2 y el vector N de $sl_2(\mathbb{R})$, con determinante -1 , normal a ésta.

Corolario 1.4.9 *Si A y B son dos puntos de \mathbb{H}^2 , entonces*

- a) *La matriz $F = BA - \iota$ determina, salvo constantes reales, una traslación \mathbf{f} que transforma el punto A en el punto B .*
- b) *Con más precisión, la matriz normalizada asociada a dicha isometría sería*

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} D} (BA - \iota),$$

siendo D la distancia entre los puntos A y B . ■

Corolario 1.4.10 Siendo N y P dos vectores normales a sendas geodésicas de \mathbb{H}^2 , si $\langle N, P \rangle \neq 1$, entonces

- a) La matriz $F = PN + \iota$ determina, salvo constantes, una isometría \mathbf{f} de \mathbb{H}^2 que transforma la geodésica de vector normal N en la geodésica de vector normal P .
- b) Más precisamente, la matriz normalizada asociada a dicha isometría sería

$$f = \frac{1}{(2 - 2\langle N, P \rangle)^{1/2}} (PN + \iota).$$

■

Puede también observarse la similitud de este resultado con el de la proposición 1.4.2, cuya explicación radica en la doble interpretación geométrica de un vector de $sl_2(\mathbb{R})$ con determinante -1 , como vector normal tanto de una geodésica de \mathbb{H}^2 como de un plano perpendicular a \mathbb{H}^2 que contiene a la geodésica.

Corolario 1.4.11 La transformación \mathbf{f} del corolario anterior es un giro, una traslación paralela o una traslación según que, respectivamente,

$$|\langle N, P \rangle| < 1, \langle N, P \rangle = -1 \quad \text{ó} \quad \langle N, P \rangle < -1.$$

Para el caso $\langle N, P \rangle > 1$ la transformación $\mathbf{f}^* [X] = -fXf^{-1}$ es una reflexión sesgada.

Más aún,

- a) Si $\langle N, P \rangle = -\cos \theta$, $0 < \theta < \pi$, el ángulo de giro de \mathbf{f} sería θ y entonces

$$f = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\theta} (PN + \iota).$$

- b) Si $\langle N, P \rangle = -1$, entonces

$$f = \frac{1}{2} (PN + \iota).$$

- c) Si $\langle N, P \rangle = -\operatorname{ch} D$, el desplazamiento de \mathbf{f} sería D y entonces

$$f = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}D} (PN + \iota).$$

d) En otro caso, $\langle N, P \rangle = \text{ch } D$, siendo D el desplazamiento de la reflexión sesgada \mathbf{f}^* y entonces

$$f = \frac{1}{2 \text{sh } \frac{1}{2}D} (PN + \iota).$$

Demostración

Los tres primeros apartados son inmediatos. En el apartado d) basta tener en cuenta el último apartado del corolario 1.4.5 y que una reflexión sesgada en \mathbb{H}^2 es la restricción de una skrew motion de \mathbb{H}^3 con ángulo de giro igual a π . Puede observarse que $\det f = -1$. ■

Corolario 1.4.12

a) Si $\mathbf{f} \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ es un giro de ángulo θ alrededor del punto A , entonces

$$f = A \text{sen } \frac{1}{2}\theta - \iota \text{cos } \frac{1}{2}\theta.$$

Y en el caso particular de $\theta = \pi$, entonces $f = A$.

b) Si $\mathbf{f} \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ es una traslación de desplazamiento D , entonces

$$f = N \text{sh } \frac{1}{2}D + \iota \text{ch } \frac{1}{2}D,$$

siendo N el vector normal al eje de \mathbf{f} , para una orientación de éste.

c) Si $\mathbf{f}^* \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ es una reflexión sesgada de desplazamiento D , entonces

$$f = N \text{ch } \frac{1}{2}D + \iota \text{sh } \frac{1}{2}D,$$

siendo N el vector normal al eje de \mathbf{f}^* , para una orientación de éste.

Demostración

Es una consecuencia del corolario 1.4.7, teniendo en cuenta que en el caso a) podemos escribir $\sigma = A$, y en los casos b) y c) se tendría $i\sigma = N$. Además, en el tercer caso, basta considerar que $\theta = \pi$ y sustituir f por if , de modo que $f \in M_2(\mathbb{R})$ y $\det f = -1$ (véase la igualdad (1.17) y las observaciones que la preceden). ■

La matriz del giro alrededor de X_0 de ángulo θ sería

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta & \text{sen } \frac{1}{2}\theta \\ -\text{sen } \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

La traslación de desplazamiento D , cuyo eje es la geodésica de vector normal X_1 , viene dada por la matriz

$$T_D = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}D & \operatorname{sh} \frac{1}{2}D \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}D & \operatorname{ch} \frac{1}{2}D \end{pmatrix}.$$

Si r_D es la reflexión sesgada de desplazamiento D que deja invariante la geodésica \mathbf{h}_1 de vector normal X_1 , entonces $r_D[X] = -\rho_D X \rho_D^{-1}$, $X \in \mathbb{H}^2$, donde

$$\rho_D = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \frac{1}{2}D & \operatorname{ch} \frac{1}{2}D \\ \operatorname{ch} \frac{1}{2}D & \operatorname{sh} \frac{1}{2}D \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que, como isometría de \mathbb{H}^3 , $r_D[X] = \rho \overline{X} \rho^{-1}$, con $\rho = i\rho_D$, es la composición de una traslación de desplazamiento D y un semigiro con eje común \mathbf{h}_1 , es decir, $\delta(r_D) = D + i\pi$, $\operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta = i \operatorname{sh} \frac{1}{2}D$. Entonces,

$$\operatorname{tr}^2 \rho = -4 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}D = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}\delta(r_D).$$

Además, una geodésica \mathbf{h} orientada cualquiera, que sea perpendicular al eje de r_D tiene vector normal $N = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ -\operatorname{sh} a & -\operatorname{ch} a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y, por las propiedades del producto exterior, su transformada \mathbf{h}' por r_D tiene vector normal

$$N' = \rho_D N \rho_D^{-1} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}(D-a) & \operatorname{sh}(D-a) \\ -\operatorname{sh}(D-a) & \operatorname{ch}(D-a) \end{pmatrix}.$$

Como puede comprobarse,

$$\langle N, N' \rangle = \operatorname{ch} D,$$

y las geodésicas ultraparalelas \mathbf{h} y \mathbf{h}' , separadas una distancia D , están orientadas concordantemente.

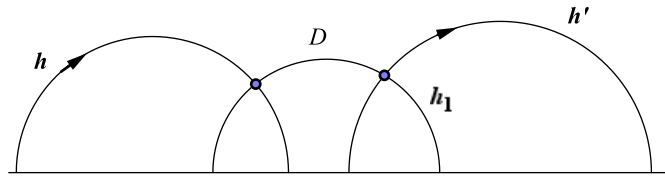


Figura 1.16

Por último, de la proposición 1.4.8 se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 1.4.13 *Si f es una traslación paralela de eje $U \in \partial\mathbb{H}^2$ entonces f puede expresarse*

$$f = pU + \iota, \quad p \in \mathbb{R}.$$

■

La matriz K_U de la observación posterior a la proposición 1.4.8 es, en este caso, $K_U = \iota$.

Capítulo 2

Polígonos hiperbólicos de \mathbb{H}^2

En diversos textos de geometría hiperbólica ([Iv], [Be2], [Fe]) pueden encontrarse ciertas fórmulas válidas para algunos polígonos hiperbólicos, además de aquellas propias de triángulos. Tales fórmulas corresponden a cuadriláteros con dos o tres ángulos rectos, pentágonos con cuatro o cinco ángulos rectos y hexágonos rectángulos, convexos o no.

A partir de algunos resultados del capítulo anterior se obtienen, en el teorema 2.1.4 del presente capítulo, las relaciones que dan lugar a las fórmulas para los productos escalares $\langle A_i, A_j \rangle$, $\langle N_i, N_j \rangle$ y $\langle N_i, A_j \rangle$, donde A_k es la matriz de $\mathbb{H}^2 \subset sl_2(\mathbb{R})$ asociada al vértice k -ésimo de un polígono hiperbólico, y N_k el vector de $sl_2(\mathbb{R})$, normal al lado orientado λ_k de dicho polígono que une A_k con A_{k+1} (figura 2.1). Los relaciones obtenidas son válidas tanto para polígonos convexos como para polígonos no convexos.

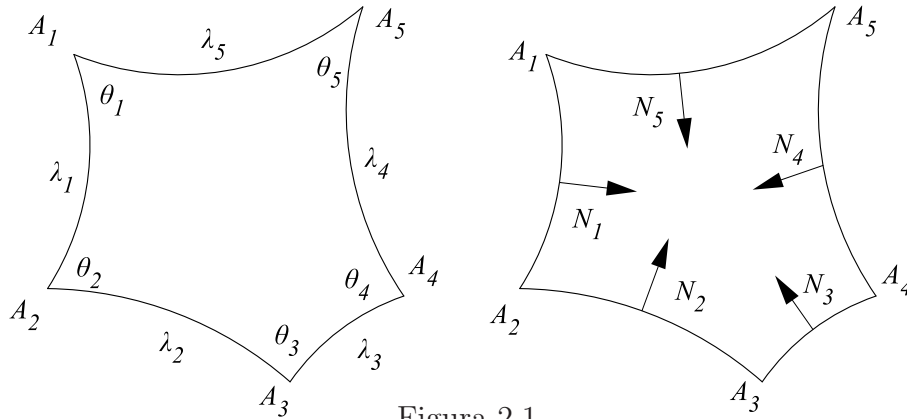


Figura 2.1

Por otra parte, $\langle A_i, A_j \rangle$ determina la distancia entre los vértices A_i, A_j y el producto escalar $\langle N_i, N_j \rangle$, según tenga valor absoluto menor o mayor que uno, determina el ángulo formado por las geodésicas correspondientes a los lados λ_i y λ_j o la distancia entre dichos lados. En el caso de $|\langle N_i, N_j \rangle| = 1$, los lados asociados a tales vectores son paralelos. El tercer producto escalar $\langle N_i, A_j \rangle$ determina la distancia del vértice A_j al lado de vector normal N_i .

Las igualdades obtenidas al considerar las dos posibles expresiones de cada producto escalar $\langle A_i, A_j \rangle$, $\langle N_i, N_j \rangle$ y $\langle N_i, A_j \rangle$ aportan el resto de relaciones entre los elementos del polígono.

A lo largo del capítulo también se obtienen las expresiones de cada vértice A_k y del vector normal a cada lado del polígono N_k , en función de A_1, N_1 , las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos, lo que facilita la construcción de polígonos hiperbólicos, a partir del primer vértice, el primer lado y las relaciones entre lados y ángulos deducidas en el capítulo.

En la primera sección del capítulo se estudian las relaciones generales entre los elementos de polígonos hiperbólicos –ángulos, lados y vértices– y se obtienen, en el teorema 2.1.4, las ecuaciones matriciales –similares a las publicadas en [Bu]– que originan las relaciones que se explicitan a lo largo del capítulo.

El objeto de la segunda sección es el estudio de las condiciones de existencia para la convexidad de polígonos hiperbólicos. En la proposición 2.2.1 se enuncian las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea convexo, conocidos sus ángulos. Su generalización, para polígonos de un mayor número de lados, constituye el teorema 2.2.3 al que precede la proposición 2.2.2, donde se enumeran ciertas condiciones necesarias para la convexidad del polígono. Al final de la sección se aplican los resultados al estudio de algunos casos particulares.

La construcción de polígonos hiperbólicos se trata en la tercera sección a partir de las expresiones de los vértices y los vectores normales a los lados de un polígono hiperbólico en función de A_1, N_1 , las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos del polígono.

En la cuarta sección se explicitan las fórmulas para polígonos hiperbólicos de un determinado número de lados. Dados ciertos elementos, tales ecuaciones permiten determinar el polígono hiperbólico, y las expresiones obtenidas en la sección anterior posibilitan la inmediata representación gráfica del polígono. Si es convexo, los datos iniciales deben cumplir las condiciones deducidas con anterioridad. Al final de la sección se estudian algunos casos particulares de polígonos convexos y de polígonos no convexos.

Las relaciones y condiciones estudiadas en las secciones anteriores se definen, mediante Maple, en la hoja 2.0 del Apéndice y se obtienen explícitamente las fórmulas para polígonos de p lados, en las hojas 2.1 y 2.2, según que los polígonos sean convexos o autointersectantes, respectivamente.

La última sección del capítulo trata de los polígonos regulares, es decir, los que tienen iguales sus lados y también sus ángulos. Se obtienen los tipos de

polígonos regulares existentes –convexos o estrellados– y, en cada caso, se deducen las relaciones, según el número de lados, entre la longitud del lado y la medida del ángulo. En la hoja 2.3 del Apéndice se definen y explicitan las fórmulas. También se representan diversos casos de polígonos regulares de ambos tipos.

Los resultados deducidos en este capítulo se restringen, en el capítulo siguiente, al caso particular de polígonos con todos sus ángulos rectos.

2.1. Relaciones entre sus elementos

El primer epígrafe de esta sección culmina en el teorema 2.1.4, donde se establece la igualdad matricial que expresa implícitamente las relaciones fundamentales entre los elementos de un polígono hiperbólico. Tales relaciones se explicitan en la proposición 2.1.6, cuyos resultados se desarrollan parcialmente en el segundo epígrafe de la sección.

La interpretación geométrica del teorema 2.1.4 y de las igualdades obtenidas en la proposición 2.1.6 quedan expuestas en la demostración del teorema y en las observaciones posteriores a éste y a esa proposición.

2.1.1. Relaciones preliminares

A partir de ahora, los polígonos considerados tienen una determinada numeración consecutiva de sus vértices y de sus lados: el lado orientado que une el vértice A_i con el vértice A_{i+1} será designado como λ_i , y el ángulo direccional desde λ_i a λ_{i+1} será θ_{i+1} . Recordemos que de la igualdad (1.22) y de la proposición 1.3.6 tenemos

$$A_{i+1} = A_i \operatorname{ch} \lambda_i + (A_i \wedge N_i) \operatorname{sh} \lambda_i \quad \text{y} \quad N_i \wedge N_{i+1} = A_{i+1} \operatorname{sen} \theta_{i+1},$$

siendo N_j el vector normal a la geodésica orientada $A_j A_{j+1}$ (figura 2.2). En la mayoría de las expresiones, se sustituye $\cos \theta_i$, $\operatorname{sen} \theta_i$ por κ_i , σ_i , y $\operatorname{ch} \lambda_i$, $\operatorname{sh} \lambda_i$ por C_i , S_i , respectivamente.

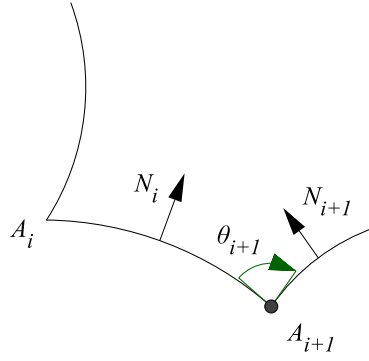


Figura 2.2

Lema 2.1.1 *Con la notación elegida para vértices, ángulos y lados de un polígono, se cumple que*

- (a) $\langle A_h, N_{h+1} \rangle = -S_h \sigma_{h+1}$.
- (b) $\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \rangle = -S_h$ y $\langle A_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -S_h \kappa_{h+1}$.
- (c) $\langle A_h \wedge N_h, N_{h+1} \rangle = C_h \sigma_{h+1}$ y $\langle N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -\sigma_{h+1}$.
- (d) $\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = C_h \kappa_{h+1}$.

Además,

- (e) $[A_{h-1}, A_h, A_{h+1}] = S_{h-1} \sigma_h S_h$.
- (f) $[N_{h-1}, N_h, N_{h+1}] = -\sigma_h S_h \sigma_{h+1}$.

Demostración

Las propiedades del producto exterior y de la forma volumen en $sl_2(\mathbb{C})$ vistas en las proposiciones 1.1.3, 1.1.4 y 1.1.5 proporcionan los resultados utilizados en la proposición. La notación es la empleada en (1.19) y (1.20) para matrices de $sl_2(\mathbb{R})$.

(a) Por la igualdad (1.22) se tiene que $A_h = A_{h+1} C_h - (A_{h+1} \wedge N_h) S_h$. Además, $\langle N_{h+1}, A_{h+1} \rangle = 0$ y, teniendo en cuenta la proposición 1.3.6,

$$\begin{aligned} \langle A_h, N_{h+1} \rangle &= -\langle A_{h+1} \wedge N_h, N_{h+1} \rangle S_h \\ &= -\langle A_{h+1}, N_h \wedge N_{h+1} \rangle S_h = -\langle A_{h+1}, A_{h+1} \rangle S_h \sigma_{h+1} = -S_h \sigma_{h+1}. \end{aligned}$$

(b) Por la proposición 1.3.3:

$$\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \rangle = \langle N_h, A_{h+1} \wedge A_h \rangle = \langle N_h, N_h \rangle S_h = -S_h$$

y

$$\langle A_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = \langle A_h \wedge A_{h+1}, N_{h+1} \rangle = -\langle N_h, N_{h+1} \rangle S_h = -S_h \kappa_{h+1}.$$

(c) Utilizando de nuevo la proposición 1.3.6, se obtiene

$$\langle A_h \wedge N_h, N_{h+1} \rangle = \langle A_h, N_h \wedge N_{h+1} \rangle = \langle A_h, A_{h+1} \rangle \sigma_{h+1} = C_h \sigma_{h+1}$$

y

$$\langle N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -\langle N_h \wedge N_{h+1}, A_{h+1} \rangle = -\langle A_{h+1}, A_{h+1} \rangle \sigma_{h+1} = -\sigma_{h+1}.$$

(d) Como $\langle N_h, A_{h+1} \rangle = 0$, entonces

$$\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = \langle A_h, A_{h+1} \rangle \langle N_h, N_{h+1} \rangle = C_h \kappa_{h+1}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad de (a) y las proposiciones 1.3.3 y 1.3.6, se prueban (e) y (f):

$$[A_{h-1}, A_h, A_{h+1}] = \langle A_{h-1}, A_h \wedge A_{h+1} \rangle = -\langle A_{h-1}, N_h \rangle S_h = S_{h-1} \sigma_h S_h$$

y

$$[N_{h-1}, N_h, N_{h+1}] = \langle N_{h-1} \wedge N_h, N_{h+1} \rangle = \sigma_h \langle A_h, N_{h+1} \rangle = -\sigma_h S_h \sigma_{h+1}.$$

■

Lema 2.1.2 *Dado un polígono cualquiera de p lados, siendo A_i los vértices y N_i los vectores normales a los lados, según la numeración y orientación elegidas con carácter previo, cualesquiera que sean $j \leq p$ y $k \leq p$,*

$$A_k = \langle A_j, A_k \rangle A_j - \langle N_j, A_k \rangle N_j - \langle A_j \wedge N_j, A_k \rangle (A_j \wedge N_j),$$

$$N_k = \langle A_j, N_k \rangle A_j - \langle N_j, N_k \rangle N_j - \langle A_j \wedge N_j, N_k \rangle (A_j \wedge N_j),$$

$$A_k \wedge N_k = \langle A_j, A_k \wedge N_k \rangle A_j - \langle N_j, A_k \wedge N_k \rangle N_j - \langle A_j \wedge N_j, A_k \wedge N_k \rangle (A_j \wedge N_j).$$

Demostración

Como los vectores A_j , N_j y $A_j \wedge N_j$ constituyen una base ortonormal de $sl_2(\mathbb{R})$, puede escribirse

$$A_k = aA_j + bN_j + c(A_j \wedge N_j),$$

siendo $a = \langle A_j, A_k \rangle$, $b = -\langle N_j, A_k \rangle$, $c = -\langle A_j \wedge N_j, A_k \rangle$.

Las dos siguientes igualdades son una consecuencia del mismo razonamiento. ■

Si los productos escalares del lema anterior se nombran del modo siguiente:

$$\alpha_{j,k} = \langle A_j, A_k \rangle, \quad \delta_{j,k} = -\langle N_j, A_k \rangle, \quad \beta_{j,k} = -\langle A_j \wedge N_j, A_k \rangle, \quad (2.1)$$

$$\eta_{j,k} = \langle N_j, N_k \rangle, \quad \gamma_{j,k} = -\langle N_j, A_k \wedge N_k \rangle, \quad \varepsilon_{j,k} = -\langle A_j \wedge N_j, A_k \wedge N_k \rangle,$$

entonces puede escribirse

$$A_k = \alpha_{j,k}A_j + \delta_{j,k}N_j + \beta_{j,k}(A_j \wedge N_j),$$

$$N_k = -\delta_{k,j}A_j - \eta_{j,k}N_j + \gamma_{k,j}(A_j \wedge N_j),$$

$$A_k \wedge N_k = -\beta_{k,j}A_j + \gamma_{j,k}N_j + \varepsilon_{j,k}(A_j \wedge N_j).$$

También pueden definirse las matrices

$$G(j, k) = \begin{pmatrix} \alpha_{j,k} & -\delta_{k,j} & -\beta_{k,j} \\ \delta_{j,k} & -\eta_{j,k} & \gamma_{j,k} \\ \beta_{j,k} & \gamma_{k,j} & \varepsilon_{j,k} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

y

$$F_h = G(h, h+1).$$

Proposición 2.1.3 *En las condiciones del lema anterior, se tiene entonces que*

$$F_h = \begin{pmatrix} C_h & -S_h\sigma_{h+1} & -S_h\kappa_{h+1} \\ 0 & -\kappa_{h+1} & \sigma_{h+1} \\ S_h & -C_h\sigma_{h+1} & -C_h\kappa_{h+1} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

y

$$G(1, h+1) = G(1, h)F_h \quad (2.4)$$

Demostración

Por el lema 2.1.1 se sabe que

$$-\delta_{h+1,h} = \langle N_{h+1}, A_h \rangle = -S_h\sigma_{h+1};$$

$$\beta_{h,h+1} = -\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \rangle = S_h; \quad -\beta_{h+1,h} = \langle A_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -S_h\kappa_{h+1};$$

$$\begin{aligned}\gamma_{h,h+1} &= -\langle N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = \sigma_{h+1}; \quad \gamma_{h+1,h} = -\langle N_{h+1}, A_h \wedge N_h \rangle = -C_h \sigma_{h+1}; \\ \varepsilon_{h,h+1} &= -\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -C_h \kappa_{h+1}.\end{aligned}$$

Los demás elementos de la matriz F_h son ya conocidos. Dadas las bases ortonormales de $sl_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_1 = \{A_1, N_1, A_1 \wedge N_1\}$, $\mathcal{B}_h = \{A_h, N_h, A_h \wedge N_h\}$ y $\mathcal{B}_{h+1} = \{A_{h+1}, N_{h+1}, A_{h+1} \wedge N_{h+1}\}$, basta considerar que $G(1, h)$, F_h y $G(1, h+1)$ son las matrices del cambio de base de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_h , \mathcal{B}_h a \mathcal{B}_{h+1} y \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_{h+1} , respectivamente. ■

Una vez realizada la multiplicación del segundo miembro de la igualdad (2.4), identificando las dos primeras columnas, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,h+1} \\ \delta_{1,h+1} \\ \beta_{1,h+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,h} C_h - \beta_{h,1} S_h \\ \delta_{1,h} C_h + \gamma_{1,h} S_h \\ \beta_{1,h} C_h + \varepsilon_{1,h} S_h \end{pmatrix}, \quad (2.4.a)$$

y, si definimos

$$\begin{aligned}A_{1,h} &= \alpha_{1,h} S_h - \beta_{h,1} C_h; \\ \Phi_{1,h} &= \delta_{1,h} S_h + \gamma_{1,h} C_h; \\ \Omega_{1,h} &= \beta_{1,h} S_h + \varepsilon_{1,h} C_h;\end{aligned}$$

para las columnas segunda y tercera, se tiene que

$$\begin{pmatrix} -\delta_{h+1,1} \\ -\eta_{1,h+1} \\ \gamma_{h+1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{1,h} \sigma_{h+1} + \delta_{h,1} \kappa_{h+1} \\ -\Phi_{1,h} \sigma_{h+1} + \eta_{1,h} \kappa_{h+1} \\ -\Omega_{1,h} \sigma_{h+1} - \gamma_{h,1} \kappa_{h+1} \end{pmatrix} \quad (2.4.b)$$

y

$$\begin{pmatrix} -\beta_{h+1,1} \\ \gamma_{1,h+1} \\ \varepsilon_{1,h+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{1,h} \kappa_{h+1} - \delta_{h,1} \sigma_{h+1} \\ -\Phi_{1,h} \kappa_{h+1} - \eta_{1,h} \sigma_{h+1} \\ -\Omega_{1,h} \kappa_{h+1} + \gamma_{h,1} \sigma_{h+1} \end{pmatrix}. \quad (2.4.c)$$

Las matrices F_h de la proposición anterior definen transformaciones especiales de Lorentz de $sl_2(\mathbb{R})$, es decir, transformaciones ortogonales del espacio vectorial real $sl_2(\mathbb{R})$ que conservan las componentes conexas de la pseudoesfera $\langle X, X \rangle = 1$ y preservan la orientación de $sl_2(\mathbb{R})$. Pueden compararse las matrices F_h con las introducidas por Buser en [Bu].

En particular, F_h es la matriz en la base \mathcal{B}_h del automorfismo ϕ_h que transforma $A_h, N_h, A_h \wedge N_h$ en $A_{h+1}, N_{h+1}, A_{h+1} \wedge N_{h+1}$, respectivamente. Si $[X]_k$ es el vector columna de las coordenadas de $X \in sl_2(\mathbb{R})$ en la base \mathcal{B}_k , entonces

$[\phi_k(X)]_k = F_k[X]_k$. Por otra parte, considerando F_{k-1} como matriz de cambio de base, se tiene que $F_{k-1}[X]_k = [X]_{k-1}$. Así,

$$\begin{aligned} [\phi_j\phi_{j-1}(X)]_{j-1} &= F_{j-1}F_j[\phi_{j-1}(X)]_j \\ &= F_{j-1}F_jF_{j-1}^{-1}[\phi_{j-1}(X)]_{j-1} = F_{j-1}F_j[X]_{j-1}. \end{aligned}$$

Es decir, $F_{j-1}F_j$ es la matriz en la base \mathcal{B}_{j-1} del automorfismo $\phi_j\phi_{j-1}$, que transforma $A_{j-1}, N_{j-1}, A_{j-1} \wedge N_{j-1}$ en $A_{j+1}, N_{j+1}, A_{j+1} \wedge N_{j+1}$, respectivamente, y el producto de matrices

$$F_1F_2 \cdots F_h$$

es la matriz en la base \mathcal{B}_1 del automorfismo que transforma $A_1, N_1, A_1 \wedge N_1$ en $A_{h+1}, N_{h+1}, A_{h+1} \wedge N_{h+1}$, respectivamente.

Teorema 2.1.4 *En las condiciones del lema 2.1.2 y con la notación de la proposición 2.1.3, se cumple entonces que*

$$G(1, h+1) = F_1F_2 \cdots F_h. \quad (2.5)$$

Demostración

Basta tener en cuenta la proposición anterior y que $G(1,1)$ es la matriz unidad. ■

El cálculo de las primeras matrices $G(1, k)$ daría los siguientes resultados:

$$G(1, 2) = F_1 = \begin{pmatrix} C_1 & -\sigma_2 S_1 & -\kappa_2 S_1 \\ 0 & -\kappa_2 & \sigma_2 \\ S_1 & -\sigma_2 C_1 & -\kappa_2 C_1 \end{pmatrix},$$

las columnas de

$$G(1, 3) = F_1F_2 = \begin{pmatrix} C_1 & -\sigma_2 S_1 & -\kappa_2 S_1 \\ 0 & -\kappa_2 & \sigma_2 \\ S_1 & -\sigma_2 C_1 & -\kappa_2 C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & -\sigma_3 S_2 & -\kappa_3 S_2 \\ 0 & -\kappa_3 & \sigma_3 \\ S_2 & -\sigma_3 C_2 & -\kappa_3 C_2 \end{pmatrix}$$

son

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,3} \\ \delta_{1,3} \\ \beta_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2 \\ \sigma_2 S_2 \\ S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\delta_{3,1} \\ -\eta_{1,3} \\ \gamma_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \sigma_2 \kappa_3 - (C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 \\ \kappa_2 \kappa_3 - \sigma_2 C_2 \sigma_3 \\ C_1 \sigma_2 \kappa_3 - (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\beta_{3,1} \\ \gamma_{1,3} \\ \varepsilon_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1\sigma_2\sigma_3 - (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3 \\ -(\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3) \\ -C_1\sigma_2\sigma_3 - (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\kappa_3 \end{pmatrix},$$

que son, respectivamente, las coordenadas de A_3 , N_3 , $A_3 \wedge N_3$ respecto a la base \mathcal{B}_1 , es decir,

$$A_3 = (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)A_1 + \sigma_2S_2N_1 + (S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)(A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} N_3 &= (S_1\sigma_2\kappa_3 - (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\sigma_3)A_1 \\ &\quad - (\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)N_1 \\ &\quad + (C_1\sigma_2\kappa_3 - (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\sigma_3)(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 \wedge N_3 &= -(S_1\sigma_2\sigma_3 + (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3)A_1 \\ &\quad - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)N_1 \\ &\quad - (C_1\sigma_2\sigma_3 + (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\kappa_3)(A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

Del cálculo de la matriz $G(1, 4)$ se tendría, por ejemplo, que

$$\alpha_{1,4} = (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)C_3 - (S_1\sigma_2\sigma_3 + (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3)S_3,$$

$$\delta_{1,4} = \sigma_2S_2C_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)S_3,$$

$$\eta_{1,4} = (\sigma_2S_2S_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)C_3)\sigma_4 - (\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)\kappa_4.$$

Estas tres igualdades, así como otros productos escalares $\langle A_1, A_h \rangle$, $-\langle N_1, A_h \rangle$ y $\langle N_1, N_h \rangle$, $h > 4$, se obtienen posteriormente, a partir de las análogas de subíndice inferior.

Corolario 2.1.5 *Para un polígono hiperbólico de p lados, en las condiciones del teorema anterior, se tiene además que*

$$G(1, p) = \begin{pmatrix} C_p & 0 & -S_p \\ S_p\sigma_1 & -\kappa_1 & -C_p\sigma_1 \\ S_p\kappa_1 & \sigma_1 & -C_p\kappa_1 \end{pmatrix}$$

y

$$F_p = H_{p-1}H_{p-2} \cdots H_1,$$

siendo

$$H_j = \begin{pmatrix} C_j & 0 & -S_j \\ S_j\sigma_{j+1} & -\kappa_{j+1} & -C_j\sigma_{j+1} \\ S_j\kappa_{j+1} & \sigma_{j+1} & -C_j\kappa_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Demostración

Si en la expresión (2.2) hacemos $j = p$ y $k = 1$, se obtiene la matriz $G(p, 1) = F_p$ y $G(1, p) = F_p^{-1}$. La siguiente igualdad es una consecuencia inmediata del teorema 2.1.4, teniendo en cuenta que $F_p = G(1, p)^{-1}$ y $F_j^{-1} = H_j$. ■

De esta manera, pueden obtenerse directamente las fórmulas para cualquier polígono, mediante multiplicación de matrices.

Para un cuadrilátero, por ejemplo, se tiene

$$F_4 = H_3H_2H_1 \quad \text{y} \quad F_3F_4 = H_2H_1.$$

De la primera igualdad, se obtienen, entre otras, las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} C_4 &= (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)C_3 - ((C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3 + S_1\sigma_2\sigma_3)S_3, \\ S_4\sigma_1 &= \sigma_2S_2C_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)S_3, \\ \kappa_1 &= (\sigma_2S_2S_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)C_3)\sigma_4 - (\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)\kappa_4. \end{aligned}$$

Y de la segunda:

$$\begin{aligned} C_4C_3 - S_4\kappa_4S_3 &= C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2, \\ \kappa_1\kappa_4 - \sigma_1C_4\sigma_4 &= \kappa_2\kappa_3 - \sigma_2C_2\sigma_3, \end{aligned}$$

además de

$$\begin{aligned} C_4S_3 - S_4\kappa_4C_3 &= S_1(\sigma_2\sigma_3 - \kappa_2C_2\kappa_3) + C_1S_2\kappa_3, \\ \sigma_1\kappa_4 + \kappa_1C_4\sigma_4 &= (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2\sigma_3) - C_1\sigma_2\kappa_3. \end{aligned}$$

Las demás fórmulas son demasiado extensas o análogas a algunas de las anteriores.

Por otra parte, las columnas de la matriz

$$G(1, p) = F_p^{-1} = H_p = \begin{pmatrix} C_p & 0 & -S_p \\ S_p\sigma_1 & -\kappa_1 & -C_p\sigma_1 \\ S_p\kappa_1 & \sigma_1 & -C_p\kappa_1 \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de $A_p, N_p, A_p \wedge N_p$, respecto a $A_1, N_1, A_1 \wedge N_1$, es decir,

$$\begin{aligned} A_p &= C_p A_1 + S_p \sigma_1 N_1 + S_p \kappa_1 (A_1 \wedge N_1), \\ N_p &= -\kappa_1 N_1 + \sigma_1 (A_1 \wedge N_1), \\ A_p \wedge N_p &= -S_p A_1 - C_p \sigma_1 N_1 - C_p \kappa_1 (A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

Análogamente, $G(1, p-1) = H_p H_{p-1}$ y sus columnas son las coordenadas de $A_{p-1}, N_{p-1}, A_{p-1} \wedge N_{p-1}$ respecto a la base \mathcal{B}_1 , es decir,

$$\begin{aligned} A_{p-1} &= (C_{p-1} C_p - S_{p-1} \kappa_p S_p) A_1 \\ &+ ((C_{p-1} S_p - S_{p-1} \kappa_p C_p) \sigma_1 - S_{p-1} \sigma_p \kappa_1) N_1 \\ &+ ((C_{p-1} S_p - S_{p-1} \kappa_p C_p) \kappa_1 + S_{p-1} \sigma_p \sigma_1) (A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$N_{p-1} = -\sigma_p S_p A_1 - (\sigma_p C_p \sigma_1 - \kappa_p \kappa_1) N_1 - (\sigma_p C_p \kappa_1 + \kappa_p \sigma_1) (A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_{p-1} \wedge N_{p-1} &= (C_{p-1} \kappa_p S_p - S_{p-1} C_p) A_1 \\ &+ ((C_{p-1} \kappa_p C_p - S_{p-1} S_p) \sigma_1 + C_{p-1} \sigma_p \kappa_1) N_1 \\ &+ ((C_{p-1} \kappa_p C_p - S_{p-1} S_p) \kappa_1 - C_{p-1} \sigma_p \sigma_1) (A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

De modo análogo puede procederse para los subíndices $p-k$, teniendo en cuenta que $G(1, p-k) = H_p H_{p-1} \dots H_{p-k}$.

El teorema 2.1.4 aporta, además, un procedimiento iterativo para la obtención de las fórmulas explícitas de los sucesivos polígonos. Tal procedimiento, objeto de la siguiente proposición, se desarrolla parcialmente en las dos proposiciones posteriores y permite la deducción de tales fórmulas en la sección 2.4.

Proposición 2.1.6 *Para un polígono hiperbólico de p lados, en las condiciones del lema 2.1.2 y con la notación de (2.1), si $h < p$ y $1 \leq j < h$, se tiene que*

$$(a) \quad \alpha_{1,h+1} = \alpha_{1,h} C_h - \beta_{h,1} S_h, \quad (2.6)$$

cumpléndose

$$\beta_{j+1,1} = A_{1,j} \kappa_{j+1} + \delta_{j,1} \sigma_{j+1};$$

$$\delta_{j+1,1} = A_{1,j} \sigma_{j+1} - \delta_{j,1} \kappa_{j+1}$$

y

$$A_{1,j} = \alpha_{1,j} S_j - \beta_{j,1} C_j.$$

$$(b) \quad \eta_{1,h+1} = \Phi_{1,h}\sigma_{h+1} - \eta_{1,h}\kappa_{h+1}, \quad (2.7)$$

siendo

$$\Phi_{1,j} = \delta_{1,j}S_j + \gamma_{1,j}C_j;$$

$$\delta_{1,j+1} = \delta_{1,j}C_j + \gamma_{1,j}S_j$$

y

$$\gamma_{1,j+1} = -(\Phi_{1,j}\kappa_{j+1} + \eta_{1,j}\sigma_{j+1}).$$

$$(c) \quad \beta_{1,h+1} = \beta_{1,h}C_h + \varepsilon_{1,h}S_h, \quad (2.8)$$

donde

$$\varepsilon_{1,j+1} = -\Omega_{1,j}\kappa_{j+1} + \gamma_{j,1}\sigma_{j+1};$$

$$\gamma_{j+1,1} = -(\Omega_{1,j}\sigma_{j+1} + \gamma_{j,1}\kappa_{j+1})$$

y

$$\Omega_{1,j} = \beta_{1,j}S_j + \varepsilon_{1,j}C_j.$$

Demostración

Todas las relaciones son consecuencias de la igualdad (2.4), teniendo en cuenta el desarrollo posterior en las igualdades (2.4.a), (2.4.b) y (2.4.c). ■

De la proposición anterior, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= 1, & \eta_{1,1} &= -1, & \beta_{1,1} &= 0, \\ \delta_{1,1} &= 0, & \gamma_{1,1} &= 0, & \varepsilon_{1,1} &= 1, \end{aligned}$$

por un procedimiento iterativo, resultan las fórmulas que relacionan los lados y los ángulos de cualquier polígono. Obsérvese que los siguientes productos escalares:

$$\alpha_{h,k} = \langle A_h, A_k \rangle = \operatorname{ch} d(A_h, A_k);$$

$$\eta_{h,k} = \langle N_h, N_k \rangle = \begin{cases} \pm \operatorname{ch} d(\lambda_h, \lambda_k), & \text{si } \lambda_h, \lambda_k \text{ son lados ultraparalelos;} \\ \cos \varphi_{h,k}, & \text{si } \lambda_h, \lambda_k \text{ son lados secantes, siendo } \varphi_{h,k} \\ & \text{el ángulo direccional desde } \lambda_h \text{ a } \lambda_k \\ & \text{(en particular, } \varphi_{h,k} = \theta_{h+1} \text{ si } k = h + 1); \\ \pm 1, & \text{si } \lambda_h, \lambda_k \text{ son lados paralelos;} \end{cases}$$

$$\delta_{h,k} = -\langle N_h, A_k \rangle = \pm \operatorname{sh} d(A_k, \lambda_h);$$

admiten dos expresiones diferentes que al ser igualadas, en cada caso, aportan una de tales fórmulas, para cada par de subíndices (h, k) . El signo \pm es de hecho signo $+$ cuando el polígono hiperbólico es convexo.

Las demás relaciones que resultan de la igualdad de matrices $G(1, h+1) = G(1, h)F_h$ pueden ser utilizadas para expresar cada una de las matrices A_h y N_h respecto a la base ortonormal $\{A_1, N_1, A_1 \wedge N_1\}$, siendo así factible expresar cada vértice y el vector normal a cada uno de los lados del polígono en función del primer vértice y el vector normal al primer lado, haciendo posible la construcción de cualquier polígono hiperbólico, en las condiciones requeridas, fijados A_1 y N_1 y dadas las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos del polígono.

2.1.2. Relaciones entre los elementos de un polígono hiperbólico

Si N_h, N_k son los vectores normales a dos lados λ_h, λ_k de un polígono hiperbólico de p lados, y A_h, A_k son dos de sus vértices, las interpretaciones geométricas de los productos escalares $\eta_{h,k} = \langle N_h, N_k \rangle$ y $\alpha_{h,k} = \langle A_h, A_k \rangle$ ya se han descrito más arriba. En la proposiciones 2.1.7 y 2.1.8 se obtienen las relaciones entre los productos escalares $\eta_{1,h+1} = \langle N_1, N_{h+1} \rangle$, $\alpha_{1,h+1} = \langle A_1, A_{h+1} \rangle$ y las medidas de los lados y los ángulos del polígono. Las expresiones para $\eta_{h,k} = \langle N_h, N_k \rangle$ y $\alpha_{h,k} = \langle A_h, A_k \rangle$ no serían sino las análogas a las deducidas para $\eta_{1,h+1}$ y $\alpha_{1,h+1}$, respectivamente. Además, en tales proposiciones se obtienen las expresiones de los primeros productos escalares $\delta_{1,h+1} = -\langle N_1, A_{h+1} \rangle$ y $\delta_{h,1} = -\langle N_h, A_1 \rangle$, cuyo significado geométrico quedó también expuesto anteriormente.

Asimismo, por el lema 2.1.2 y con la notación de la proposición 2.1.3, si $j = 1$, se tiene que

$$A_h = \alpha_{1,h}A_1 + \delta_{1,h}N_1 + \beta_{1,h}(A_1 \wedge N_1), \quad (2.9)$$

$$N_h = -\delta_{h,1}A_1 - \eta_{1,h}N_1 + \gamma_{h,1}(A_1 \wedge N_1)$$

En la proposición 2.1.9 se deducen las expresiones para los primeros productos escalares $\beta_{1,h} = -\langle A_1 \wedge N_1, A_h \rangle$ y $\gamma_{h,1} = -\langle A_1 \wedge N_1, N_h \rangle$. La posibilidad de expresar cada vértice A_{p-h} y cada vector N_{p-h} , respecto a A_1 y N_1 , con los coeficientes en función de θ_1 y de los últimos ángulos y lados, permite, junto a los resultados reseñados anteriormente, la construcción de polígonos hiperbólicos de un número relevante de lados. Por ese procedimiento, pueden construirse polígonos de cualquier número de lados.

Proposición 2.1.7 *En todo polígono hiperbólico de p lados se cumple que*

$$\eta_{1,3} = \sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3.$$

Además,

■ *Si $p > 3$:*

$$\eta_{1,4} = (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \sigma_4 - (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \kappa_4.$$

■ *Si $p > 4$:*

$$\eta_{1,5} = \Phi_{1,4} \sigma_5 - \eta_{1,4} \kappa_5,$$

■ *y si $p > 5$:*

$$\eta_{1,6} = \Phi_{1,5} \sigma_6 - \eta_{1,5} \kappa_6,$$

con

$$\Phi_{1,5} = \delta_{1,5} S_5 - (\eta_{1,4} \sigma_5 + \Phi_{1,4} \kappa_5) C_5$$

siendo

$$\begin{aligned} \Phi_{1,4} &= (\sigma_2 S_2 C_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) S_3) S_4 \\ &\quad - ((\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \sigma_4 + (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \kappa_4) C_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,5} &= (\sigma_2 S_2 C_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) S_3) C_4 \\ &\quad - ((\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \sigma_4 + (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \kappa_4) S_4. \end{aligned}$$

Demostración

La primera relación ya se obtuvo anteriormente al calcular la matriz $G(1, 3)$. Por la proposición 2.1.6, al ser $\Phi_{1,1} = 0$, $\delta_{1,2} = 0$, como

$$\Phi_{1,h} = \delta_{1,h} S_h - (\eta_{1,h-1} \sigma_h + \Phi_{1,h-1} \kappa_h) C_h$$

y

$$\delta_{1,h+1} = \delta_{1,h} C_h - (\eta_{1,h-1} \sigma_h + \Phi_{1,h-1} \kappa_h) S_h,$$

entonces

$$\Phi_{1,2} = -\eta_{1,1} \sigma_2 C_2 = \sigma_2 C_2,$$

$$\delta_{1,3} = -\eta_{1,1} \sigma_2 S_2 = \sigma_2 S_2$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_{1,3} &= \sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3, \\ \delta_{1,4} &= \sigma_2 S_2 C_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) S_3.\end{aligned}$$

Para probar la expresión de $\eta_{1,4}$ basta considerar las igualdades anteriores y la relación (2.7). Esta última relación para $h = 4$ puede escribirse

$$\eta_{1,5} = \Phi_{1,4} \sigma_5 - \eta_{1,4} \kappa_5,$$

siendo

$$\begin{aligned}\Phi_{1,4} &= \delta_{1,4} S_4 - (\eta_{1,3} \sigma_4 + \Phi_{1,3} \kappa_4) C_4, \\ \delta_{1,5} &= \delta_{1,4} C_4 - (\eta_{1,3} \sigma_4 + \Phi_{1,3} \kappa_4) S_4.\end{aligned}$$

■

Proposición 2.1.8 *Para cualquier polígono de p lados se tiene que*

$$\alpha_{1,3} = C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2.$$

Además,

■ *Si $p > 3$:*

$$\alpha_{1,4} = (C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) C_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 + S_1 \sigma_2 \sigma_3) S_3.$$

■ *Si $p > 4$:*

$$\alpha_{1,5} = \alpha_{1,4} C_4 - \beta_{4,1} S_4,$$

■ *y si $p > 5$:*

$$\alpha_{1,6} = \alpha_{1,5} C_5 - \beta_{5,1} S_5,$$

con

$$\beta_{5,1} = (\alpha_{1,4} S_4 - \beta_{4,1} C_4) \kappa_5 + \delta_{4,1} \sigma_5$$

siendo

$$\begin{aligned}\beta_{4,1} &= ((C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) S_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 + S_1 \sigma_2 \sigma_3) C_3) \kappa_4 \\ &\quad + ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3) \sigma_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{4,1} &= ((C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) S_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 + S_1 \sigma_2 \sigma_3) C_3) \sigma_4 \\ &\quad - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3) \kappa_4.\end{aligned}$$

Demostración

La primera expresión se obtuvo al calcular la matriz $G(1, 3)$. Las igualdades

$$\beta_{2,1} = S_1\kappa_2, \quad \delta_{2,1} = S_1\sigma_2$$

ya se habían obtenido al calcular $G(1, 2)$. Además, como

$$\beta_{h+1,1} = (\alpha_{1,h}S_h - \beta_{h,1}C_h) \kappa_{h+1} + \delta_{h,1}\sigma_{h+1}$$

y

$$\delta_{h+1,1} = (\alpha_{1,h}S_h - \beta_{h,1}C_h) \sigma_{h+1} - \delta_{h,1}\kappa_{h+1},$$

al ser $\alpha_{1,2} = \langle A_1, A_2 \rangle = C_1$, entonces

$$\beta_{3,1} = (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2) \kappa_3 + S_1\sigma_2\sigma_3,$$

$$\delta_{3,1} = (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2) \sigma_3 - S_1\sigma_2\kappa_3$$

y

$$\begin{aligned} \beta_{4,1} &= ((C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2) S_3 - \beta_{3,1}C_3) \kappa_4 \\ &\quad + ((C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2) \sigma_3 - S_1\sigma_2\kappa_3) \sigma_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{4,1} &= ((C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2) S_3 - \beta_{3,1}C_3) \sigma_4 \\ &\quad - ((C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2) \sigma_3 - S_1\sigma_2\kappa_3) \kappa_4. \end{aligned}$$

Para probar las expresiones de $\alpha_{1,4}$ y $\alpha_{1,5}$ basta considerar las igualdades anteriores y la relación (2.6). Además, esta relación para $h = 5$ puede escribirse

$$\alpha_{1,6} = \alpha_{1,5}C_5 - \beta_{5,1}S_5.$$

■

Proposición 2.1.9 *En todo polígono de p lados se cumple que*

$$\beta_{1,3} = S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2,$$

$$\gamma_{3,1} = C_1\sigma_2\kappa_3 - (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2) \sigma_3.$$

Además,

- Si $p > 3$:

$$\begin{aligned}\beta_{1,4} &= (S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) C_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) S_3, \\ \gamma_{4,1} &= ((S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - C_1 \sigma_2 \kappa_3) \kappa_4 \\ &\quad - ((S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) S_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) C_3) \sigma_4.\end{aligned}$$

- Cuando $p > 4$:

$$\begin{aligned}\beta_{1,5} &= \beta_{1,4} C_4 + \varepsilon_{1,4} S_4, \\ \gamma_{5,1} &= -(\gamma_{4,1} \kappa_5 + \Omega_{1,4} \sigma_5),\end{aligned}$$

con

$$\Omega_{1,4} = \beta_{1,4} S_4 + \varepsilon_{1,4} C_4,$$

siendo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,4} &= (C_1 \sigma_2 \kappa_3 - (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3) \sigma_4 \\ &\quad - ((S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) S_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) C_3) \kappa_4.\end{aligned}$$

- En el caso de $p > 5$:

$$\begin{aligned}\beta_{1,6} &= \beta_{1,5} C_5 + \varepsilon_{1,5} S_5, \\ \gamma_{6,1} &= -(\gamma_{5,1} \kappa_6 + \Omega_{1,5} \sigma_6),\end{aligned}$$

con

$$\Omega_{1,5} = \beta_{1,5} S_5 + \varepsilon_{1,5} C_5,$$

siendo

$$\varepsilon_{1,5} = \gamma_{4,1} \sigma_5 - (\beta_{1,4} S_4 + \varepsilon_{1,4} C_4) \kappa_5.$$

Demostración

Las tres primeras igualdades y la expresión

$$\varepsilon_{1,3} = -C_1 \sigma_2 \sigma_3 - (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3$$

se obtuvieron al calcular la matriz $G(1, 3)$. Las igualdades

$$\beta_{1,2} = S_1, \quad \varepsilon_{1,2} = -C_1 \kappa_2, \quad \gamma_{2,1} = -C_1 \sigma_2$$

ya se habían obtenido al calcular $G(1, 2)$. Además, como

$$\beta_{1,h+1} = \beta_{1,h} C_h + \varepsilon_{1,h} S_h$$

y

$$\varepsilon_{1,h+1} = \gamma_{h,1}\sigma_{h+1} - (\beta_{1,h}S_h + \varepsilon_{1,h}C_h)\kappa_{h+1},$$

$$\gamma_{h+1,1} = -\gamma_{h,1}\kappa_{h+1} - (\beta_{1,h}S_h + \varepsilon_{1,h}C_h)\sigma_{h+1},$$

se tiene que

$$\beta_{1,4} = (S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)C_3 - (C_1\sigma_2\sigma_3 + (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\kappa_3)S_3,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{4,1} &= ((S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\sigma_3 - C_1\sigma_2\kappa_3)\kappa_4 \\ &\quad - ((S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)S_3 - (C_1\sigma_2\sigma_3 + (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\kappa_3)C_3)\sigma_4. \end{aligned}$$

Además,

$$\varepsilon_{1,4} = \gamma_{3,1}\sigma_4 - (\beta_{1,3}S_3 + \varepsilon_{1,3}C_3)\kappa_4.$$

Las expresiones restantes son consecuencias de igualdades anteriores. ■

Aunque las relaciones deducidas sean válidas para cualquier tipo de polígonos hiperbólicos, en el caso de polígonos convexos, tales relaciones deben cumplir determinadas condiciones que se estudian en la sección siguiente, dados ciertos elementos del polígono, distinguiendo entre cuadriláteros (proposición 2.2.1) y los demás polígonos (teorema 2.2.3). En el caso más general, la convexidad requiere unas condiciones, formuladas en la proposición 2.2.2, que no es necesario imponer a los primeros.

2.2. Condiciones de existencia de un polígono convexo

El número de datos que se requiere de un polígono hiperbólico de p lados para conocer sus elementos es $2p - 3$. Dados los ángulos del polígono, cuya suma es inferior a $(p - 2)\pi$, basta conocer $p - 3$ lados para determinar los restantes. A lo largo de la sección se estudian, dados los ángulos, las condiciones que deben cumplir $p - 3$ lados consecutivos para que el polígono sea convexo.

2.2.1. Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad de un cuadrilátero

Un cuadrilátero con ángulos dados $\theta_i < \pi$, $i \leq 4$, puede ser convexo o autointersectante. Dotando a los lados λ_i de la orientación acostumbrada, si θ_i es el

ángulo direccional desde λ_{i-1} a λ_i , para que el cuadrilátero sea convexo, además de $0 < \theta_i < \pi$, $i \leq 4$, únicamente se requiere que cada lado deje a cada vértice no perteneciente a él en el semiplano interior a dicho lado (ver definición 1.3.2). Las siguientes condiciones permiten, más aún, garantizan que se cumpla este requerimiento.

Proposición 2.2.1 *Dados los ángulos $\theta_i < \pi$, $i \leq 4$, de un cuadrilátero hiperbólico, para que sea convexo es necesario y suficiente que*

$$(a1) \ C_1 > \frac{1 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2}, \text{ en el caso de } \theta_1 + \theta_2 < \pi \text{ y } \theta_3 + \theta_4 \leq \pi.$$

$$(a2) \ C_1 > \frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2}, \text{ en el caso de } \theta_1 + \theta_2 < \pi \text{ y } \theta_3 + \theta_4 > \pi.$$

Y, además, en cualquiera de ambos casos,

$$(b1) \ C_1 < \frac{\kappa_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \kappa_4}{\sigma_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)}, \text{ si } \theta_2 + \theta_3 > \pi.$$

$$(b2) \ C_1 < \frac{\kappa_2 \cos(\theta_4 + \theta_1) - \kappa_3}{\sigma_2 \sin(\theta_4 + \theta_1)}, \text{ si } \theta_4 + \theta_1 > \pi.$$

Cuando $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi$, estas dos últimas condiciones son necesarias y suficientes para la convexidad del cuadrilátero.

Demostración

Consideramos que los lados están orientados de la forma acostumbrada. Inicialmente, como

$$\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2 = \eta_{2,4} = \sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4,$$

tiene que ser

$$C_1 > \frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Por otra parte, en cualquier caso,

$$\frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} \leq \frac{1 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

y se da la igualdad si y sólo si $\theta_3 + \theta_4 = \pi$.

En el supuesto $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ y $\theta_3 + \theta_4 \leq \pi$, los lados λ_2 , λ_4 tienen que ser ultraparalelos. Para que lo sean, es necesario y suficiente que

$$\eta_{4,2} = \sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2 > 1,$$

que es equivalente a la desigualdad (a1).

En el caso de $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ y $\theta_3 + \theta_4 > \pi$, los lados λ_2 y λ_4 pueden ser secantes, paralelos o ultraparalelos. Sólo si son secantes, debe imponerse una primera condición para que el cuadrilátero sea convexo. Si γ es el ángulo de intersección, entonces

$$\cos \gamma = \sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2$$

y, como $\gamma < \theta_3 + \theta_4 - \pi < \pi$, se tiene $\cos \gamma > -\cos(\theta_3 + \theta_4)$ y, de aquí, la desigualdad (a2). Obsérvese, además, que

$$\theta_1 + \theta_2 < 2\pi - (\theta_3 + \theta_4) < \pi \quad \text{y} \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) > \cos(\theta_3 + \theta_4).$$

Luego

$$\frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_3 + \theta_4)}{\sigma_1 \sigma_2} + 1 > 1.$$

Cuando $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi$, los lados λ_2 , λ_4 pueden ser secantes, paralelos o ultraparalelos indistintamente. La condición inicial se reduce entonces a que

$$C_1 > \frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

y, como $\sum_{i=1}^4 \theta_i < 2\pi$, entonces

$$\theta_3 + \theta_4 < 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) \leq \pi \quad \text{y} \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) < \cos(\theta_3 + \theta_4).$$

Por tanto,

$$\frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_3 + \theta_4)}{\sigma_1 \sigma_2} + 1 < 1,$$

resultando así innecesaria una condición para C_1 análoga a las anteriores. Como puede observarse, si $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, entonces

$$\frac{1 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + 1 = 1.$$

En cuanto a las condiciones (b1) y (b2), basta probar una de ellas. Sea, por ejemplo, $\theta_2 + \theta_3 > \pi$ y $\alpha = \theta_2 + \theta_3 - \pi$. Supuestas las condiciones anteriores, es posible que, para ciertos valores de C_1 , se obtengan soluciones ficticias, para las que los vértices A_3 , A_4 no estén los dos en el semiplano interior a la geodésica λ_1 .

Consideremos el triángulo de la figura 2.3 con vértices A_1 , A_2 y B_3 , siendo B_3 del semiplano interior a λ_1 y perteneciente a la geodésica λ_4 , de modo que $\widehat{A}_1 = \theta_1$, $\widehat{A}_2 = \alpha$ y $\widehat{B}_3 = \beta$. Entonces

$$\cos \beta = \sigma_1 C_1 \sin \alpha - \kappa_1 \cos \alpha.$$

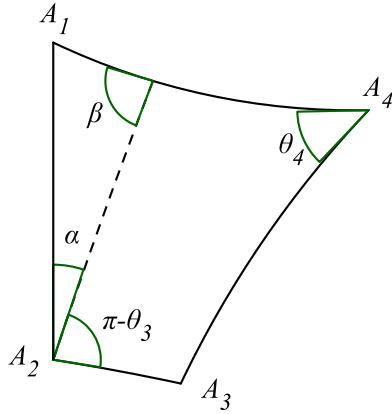


Figura 2.3

Dadas las primeras condiciones, para que los dos vértices A_3, A_4 estén en el mismo semiplano interior a la geodésica λ_1 , es necesario y suficiente que $\beta > \theta_4$ y $\cos \beta < \kappa_4$. Es decir,

$$\sigma_1 C_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - \kappa_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \kappa_4 > 0,$$

como queríamos demostrar. ■

A continuación se estudian tres ejemplos, correspondientes a los diferentes casos de la proposición anterior. Dadas las condiciones requeridas, una vez deducidas las fórmulas que relacionan los elementos de un cuadrilátero, se podrán calcular, en cada caso, los lados desconocidos y realizar la construcción de cada cuadrilátero dado.

Ejemplos

- Sea el cuadrilátero con ángulos $\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{5}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{\pi}{3}$. Se tiene entonces que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{11}{15}\pi < \pi, \theta_3 + \theta_4 = \pi \leq \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^4 \theta_i = \frac{26}{15}\pi < 2\pi.$$

Para la convexidad del cuadrilátero es necesario y suficiente que se cumpla

$$(a1) \quad C_1 > \frac{1 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2},$$

$$(b1) \quad C_1 < \frac{\kappa_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \kappa_4}{\sigma_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)}, \text{ pues } \theta_2 + \theta_3 = \frac{16}{15}\pi > \pi.$$

Es decir, $C_1 > 1,402$ y $C_1 < 5,493$, respectivamente. Por tanto,

$$1,402 < C_1 < 5,493.$$

- Sean $\theta_1 = \frac{7\pi}{12}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{5\pi}{12}$. Por tanto,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{5}{6}\pi < \pi, \theta_3 + \theta_4 = \frac{13}{12}\pi > \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^4 \theta_i = \frac{23}{12}\pi < 2\pi$$

y, dado que $\theta_2 + \theta_3 = \frac{11}{12}\pi < \pi$, $\theta_4 + \theta_1 = \pi$, el cuadrilátero con ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ es convexo si y sólo si

$$(a2) \quad C_1 > \frac{\sigma_3\sigma_4 - \kappa_3\kappa_4 + \kappa_1\kappa_2}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Es decir,

$$C_1 > 1,146.$$

- En el caso de $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \frac{\pi}{4}, \theta_4 = \frac{5\pi}{12}$, se cumple que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{7}{6}\pi \geq \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^4 \theta_i = \frac{11}{6}\pi < 2\pi.$$

Sólo se requiere una condición para que el cuadrilátero con ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sea convexo:

$$(b2) \quad C_1 < \frac{\kappa_2 \cos(\theta_4 + \theta_1) - \kappa_3}{\sigma_2 \sin(\theta_4 + \theta_1)}, \text{ pues } \theta_4 + \theta_1 > \pi.$$

Por tanto,

$$C_1 < \sqrt{3} + 1 = 2,732$$

2.2.2. Condiciones necesarias para la convexidad de un polígono hiperbólico

Una vez estudiadas las condiciones para la convexidad de un cuadrilátero, cabe generalizarlas para los demás polígonos. Para tales polígonos, además, deben encontrarse nuevas condiciones para que la disposición de los primeros $p - 3$ lados permita su convexidad. Dichas condiciones se exponen en la proposición siguiente y, supuestas éstas, las enunciadas en el teorema 2.2.3 garantizan que el polígono pueda cerrarse debidamente con los tres lados desconocidos. Tal teorema constituye, a su vez, la generalización de los resultados de la proposición 2.2.1, válida para cuadriláteros.

Proposición 2.2.2 *Dados los ángulos $\theta_i < \pi$, $i \leq p$, de un polígono de p lados, $p \geq 5$, con $\sum_{i=1}^p \theta_i < (p - 2)\pi$, para que sea convexo es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:*

$$(1a) \delta_{h+1,1} > 0, \quad 2 \leq h < p-2;$$

$$(1b) \delta_{p,k} > 0, \quad 2 < k \leq p-2.$$

Demostración

Para las primeras condiciones, basta tener en cuenta que cada desigualdad

$$\delta_{h+1,1} = -\langle N_{h+1}, A_1 \rangle = \text{sh } d(A_1, \lambda_{h+1}) > 0$$

equivale a que A_1 está en el semiplano interior a la geodésica orientada λ_{h+1} , $2 \leq h < p-2$ y, por tanto, igual puede decirse de A_j , $2 \leq j < h$, respecto a la geodésica orientada λ_i , $j+1 < i \leq h+1$. Análogamente, cada desigualdad

$$\delta_{p,k} = -\langle N_p, A_k \rangle = \text{sh } d(A_k, \lambda_p) > 0$$

equivale a que A_k , $2 < k \leq p-2$, está en el semiplano interior a la geodésica orientada λ_p . ■

Puede observarse que, como $\delta_{h+1,1} = (\alpha_{1,h}S_h - \beta_{h,1}C_h) \sigma_{h+1} - \delta_{h,1}\kappa_{h+1}$ (por la proposición 2.1.6) y $\theta_{h+1} < \pi$, las primeras desigualdades (1a) pueden escribirse

$$\frac{\alpha_{1,h}S_h - \beta_{h,1}C_h}{\delta_{h,1}} > \frac{\kappa_{h+1}}{\sigma_{h+1}}; \quad h = 2, \dots, p-3$$

y su cálculo aporta los siguientes resultados.

Para $h = 2$:

$$\frac{C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2}{S_1\sigma_2} > \frac{\kappa_3}{\sigma_3},$$

válida para $p > 4$.

Si $h = 3$, entonces

$$\frac{((S_1\kappa_2C_2 - C_1S_2) \kappa_3 - S_1\sigma_2 \sigma_3) C_3 + (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2) S_3}{(C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2) \sigma_3 - S_1\sigma_2 \kappa_3} > \frac{\kappa_4}{\sigma_4},$$

válida, además de la anterior, para $p > 5$.

Para $h = 4$ y $p > 6$, resulta

$$\frac{\alpha_{1,4}S_4 - \beta_{4,1}C_4}{\delta_{4,1}} > \frac{\kappa_5}{\sigma_5},$$

siendo $\alpha_{1,4}$, $\beta_{4,1}$ y $\delta_{4,1}$ las expresiones deducidas en la proposición 2.1.8.

Por otra parte, como $\delta_{p,k} = -\langle N_p, A_k \rangle$ y $N_p = -\kappa_1 N_1 + \sigma_1 (A_1 \wedge N_1)$, se tiene que

$$\delta_{p,k} = \beta_{1,k} \sigma_1 - \delta_{1,k} \kappa_1$$

y las segundas desigualdades (1b) equivalen entonces a

$$\frac{\beta_{1,k}}{\delta_{1,k}} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1}; \quad k = 3, \dots, p-2.$$

Para $k = 3$, se tiene

$$\frac{S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2}{\sigma_2 S_2} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1},$$

válida para $p > 4$.

Si $k = 4$, cuando $p > 5$,

$$\frac{(S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) C_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) S_3}{C_3 S_2 \sigma_2 - S_3 (\sigma_3 \kappa_2 + \kappa_3 C_2 \sigma_2)} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1}.$$

Así sucesivamente. Las expresiones para $\beta_{1,k}$ y $\delta_{1,k}$ han sido deducidas en las proposiciones 2.1.9 y 2.1.6, respectivamente.

2.2.3. Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad de un polígono hiperbólico

En la proposición 2.2.1 se obtuvieron las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea convexo. Las condiciones necesarias para que un polígono de un mayor número de lados sea convexo se enunciaron en la proposición 2.2.2 y, en el siguiente teorema, se imponen nuevas condiciones, análogas a las de la proposición 2.2.1, para que, además, el polígono pueda cerrarse manteniendo la convexidad.

Teorema 2.2.3 *Dados los ángulos $\theta_i < \pi$, $i \leq p$, de un polígono de p lados, $p \geq 5$, con $\sum_{i=1}^p \theta_i < (p-2)\pi$, para que sea convexo es necesario y suficiente, además de las desigualdades (1a) y (1b) de la proposición 2.2.2, que se cumplan las siguientes condiciones:*

$$(2a) \quad \eta_{p,p-2} + \cos(\theta_{p-1} + \theta_p) > 0, \text{ si } \theta_{p-1} + \theta_p \geq \pi.$$

$$(2b) \quad \eta_{p,p-2} > 1, \text{ si } \theta_{p-1} + \theta_p < \pi \text{ y } \sum_{i=1}^{p-2} \theta_i < (p-3)\pi.$$

(3a) $A \sin(\theta_{p-2} + \theta_{p-1}) - B \cos(\theta_{p-2} + \theta_{p-1}) + \kappa_p > 0$, si $\theta_{p-2} + \theta_{p-1} > \pi$, siendo

$$A = (S_{p-3}\delta_{p,p-3} + C_{p-3}\gamma_{p,p-3}) \quad y \quad B = \eta_{p,p-3}.$$

(3b) $G \sin(\theta_p + \theta_1) - H \cos(\theta_p + \theta_1) + \kappa_{p-1} > 0$, caso de $\theta_p + \theta_1 > \pi$, siendo

$$G = -\gamma_{p-2,1} \quad y \quad H = \eta_{1,p-2}.$$

Si $\theta_{p-1} + \theta_p < \pi$ y $\sum_{i=1}^{p-2} \theta_i \geq (p-3)\pi$, las desigualdades (1a), (1b), (3a) y (3b) constituyen las condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo.

Demostración

Sean β_1, β_{p-2} y α_1, α_{p-2} los ángulos que determina la diagonal A_1A_{p-2} con los lados λ_p, λ_{p-2} y λ_1, λ_{p-3} , respectivamente, y $\beta = \beta_1 + \beta_{p-2}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_{p-2}$.

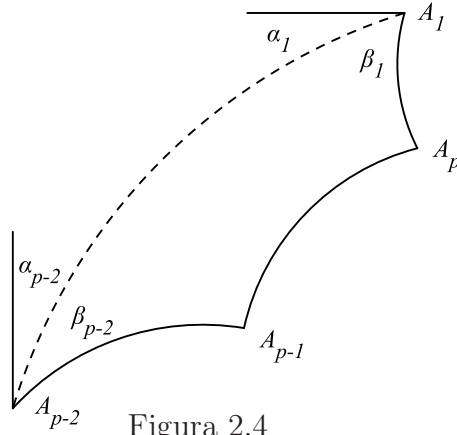


Figura 2.4

En el primer caso, como $\theta_{p-1} + \theta_p \geq \pi$, entonces $\beta_1 + \beta_{p-2} = \beta < \pi$ y, por el mismo argumento empleado para probar la condición (a2) de la proposición 2.2.1, se obtiene $\eta_{p,p-2} > \sigma_{p-1}\sigma_p - \kappa_{p-1}\kappa_p$. Es decir,

$$\eta_{p,p-2} + \cos(\theta_{p-1} + \theta_p) > 0.$$

En el segundo caso, si $\eta_{p,p-2} \geq 1$, las geodésicas de los lados λ_p y λ_{p-2} son secantes o paralelas y, si P es el punto de intersección, propio o impropio, considerando que $\theta_{p-1} + \theta_p < \pi$, el punto P está en el semiplano exterior a la geodésica orientada A_1A_{p-2} . Así, el área del triángulo A_1PA_{p-2} , con $\widehat{A}_1 = \pi - \beta_1$, $\widehat{P} = \theta$, $\widehat{A}_{p-2} = \pi - \beta_{p-2}$, es mayor que el área del polígono de vértices A_1, A_2, \dots, A_{p-2} . Entonces

$$\pi - (\pi - \beta_1 + \theta + \pi - \beta_{p-2}) > (p-4)\pi - \left(\alpha_1 + \sum_{i=2}^{p-3} \theta_i + \alpha_{p-2} \right).$$

Y, teniendo en cuenta que $\beta_1 + \alpha_1 = \theta_1$, $\alpha_{p-2} + \beta_{p-2} = \theta_{p-2}$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{p-2} \theta_i > (p-3)\pi + \theta \geq (p-3)\pi,$$

que contradice $\sum_{i=1}^{p-2} \theta_i < (p-3)\pi$. Por tanto, $\eta_{p,p-2} < 1$.

En el último caso,

$$\begin{aligned} \beta &= (\theta_1 + \theta_{p-2}) - \alpha \\ &\geq (p-3)\pi - \left(\sum_{i=2}^{p-3} \theta_i + \alpha \right) > (p-3)\pi - (p-4)\pi = \pi. \end{aligned}$$

Es decir, $\beta = \beta_1 + \beta_{p-2} > \pi$. Como además $\theta_{p-1} + \theta_p < \pi$, empleando el mismo argumento que en el último caso de la proposición 2.2.1, se deduce que no existe una condición análoga a (2a) y (2b) para la convexidad del polígono.

Respecto a las condiciones (3a) y (3b), basta probar una de ellas y la otra se demuestra análogamente. Llamando $\eta_{p,p-2}^*$ a la expresión que resulta de sustituir σ_{p-2} por $\sin(\theta_{p-2} + \theta_{p-1})$ y κ_{p-2} por $\cos(\theta_{p-2} + \theta_{p-1})$ en la fórmula de $\eta_{p,p-2}$, análoga a (2.7), se obtiene

$$\eta_{p,p-2}^* = (S_{p-3}\delta_{p,p-3} + C_{p-3}\gamma_{p,p-3}) \sin(\theta_{p-2} + \theta_{p-1}) - \eta_{p,p-3} \cos(\theta_{p-2} + \theta_{p-1})$$

y, por un razonamiento similar al empleado para demostrar la condición (b1) de la proposición 2.2.1, se deduce que

$$\eta_{p,p-2}^* + \kappa_p > 0.$$

Para la desigualdad (3b) debe tenerse en cuenta, además, que si $\eta_{p,p-2}^{**}$ es la expresión que resulta de sustituir σ_1 por $\sin(\theta_p + \theta_1)$ y κ_1 por $\cos(\theta_p + \theta_1)$ en la fórmula de $\eta_{p,p-2}$ y, considerando que $\eta_{p,p-2} = -\langle N_p, N_{p-2} \rangle$ y $N_p = -\kappa_1 N_1 + \sigma_1(A_1 \wedge N_1)$, se tiene que

$$\eta_{p,p-2} = -\gamma_{p-2,1}\sigma_1 - \eta_{1,p-2}\kappa_1,$$

$$\eta_{p,p-2}^{**} = -\gamma_{p-2,1} \sin(\theta_p + \theta_1) - \eta_{1,p-2} \cos(\theta_p + \theta_1)$$

y la condición análoga a (3a) quedaría

$$\eta_{p,p-2}^{**} + \kappa_{p-1} > 0.$$

■

De las expresiones deducidas en la proposición 2.1.7, el cálculo de las primeras $\eta_{p,p-2}$ y $\eta_{p,p-2}^*$ da los siguientes resultados.

Para un pentágono:

$$\eta_{5,3} = (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3,$$

$$\begin{aligned} \eta_{5,3}^* &= (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \cos(\theta_3 + \theta_4). \end{aligned}$$

Si se trata de un hexágono:

$$\eta_{6,4} = A \sigma_4 - B \kappa_4,$$

$$\eta_{6,4}^* = A \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) - B \cos(\theta_4 + \theta_5),$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= (\sigma_1 S_1 C_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) S_2) S_3 \\ &\quad - ((\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \sigma_3 + (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \kappa_3) C_3, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$B = \eta_{6,3} = (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3.$$

Para las primeras $\eta_{p,p-2}^{**}$ se obtiene

- en el caso de $p = 5$:

$$\begin{aligned} \eta_{5,3}^{**} &= \text{sen}(\theta_5 + \theta_1) ((S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - C_1 \sigma_2 \kappa_3) \\ &\quad - \cos(\theta_5 + \theta_1) (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3). \end{aligned}$$

- y para un hexágono:

$$\eta_{6,4}^{**} = G \text{sen}(\theta_6 + \theta_1) - H \cos(\theta_6 + \theta_1),$$

siendo

$$\begin{aligned} G &= S_1 (C_2 S_3 \sigma_4 - S_2 (\sigma_3 \kappa_4 + \kappa_3 C_3 \sigma_4)) \\ &\quad - C_1 (\sigma_2 (\sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4) + \kappa_2 (S_2 S_3 \sigma_4 - C_2 (\kappa_3 C_3 \sigma_4 + \sigma_3 \kappa_4))), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$H = \eta_{1,4} = (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \sigma_4 - (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \kappa_4.$$

Seguidamente, se estudian varios ejemplos de pentágonos y hexágonos que se corresponden con los casos considerados en la proposición anterior. Una vez deducidas las fórmulas que relacionan los elementos de un polígono, se podrán calcular, dadas las condiciones requeridas, los lados desconocidos y realizar la construcción de cada polígono dado.

Ejemplos

- Para el pentágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{4},$$

se tiene

$$\theta_4 + \theta_5 = \pi \geq \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^5 \theta_i = \frac{121}{60}\pi < 3\pi;$$

y el pentágono es convexo si y solamente si se dan las siguientes condiciones:

$$(1a) \frac{C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2}{S_1 \sigma_2} > \frac{\kappa_3}{\sigma_3}, \quad (1b) \frac{S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2}{\sigma_2 S_2} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1};$$

$$(2a) \eta_{5,3} + \cos(\theta_4 + \theta_5) > 0;$$

$$(3a) \eta_{5,3}^* + \kappa_5 > 0, \quad \text{pues } \theta_3 + \theta_4 = \frac{27}{20}\pi > \pi;$$

siendo

$$\begin{aligned} \eta_{5,3} &= A\sigma_3 - B\kappa_3, \\ \eta_{5,3}^* &= A \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_4) - B \operatorname{cos}(\theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A &= (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2), \\ B &= (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2). \end{aligned}$$

Las soluciones (C_1, C_2) de las dos primeras inecuaciones pertenecen al recinto (A) de la figura 2.5.

La primera curva tiene una asíntota en $C_2 = 1,54$ y la segunda en $C_1 = 4,56$.

Las soluciones (C_1, C_2) de las dos últimas inecuaciones pertenecen al recinto (B) de la figura 2.6, siendo las curvas tales que la primera tiene las mismas asíntotas que las dos anteriores y las asíntotas de la segunda son $C_1 = 4,56$ y $C_2 = 3,13$.

Tomando, por ejemplo, $C_2 = 7$ se obtiene que $5,716 < C_1 < 7,59$.

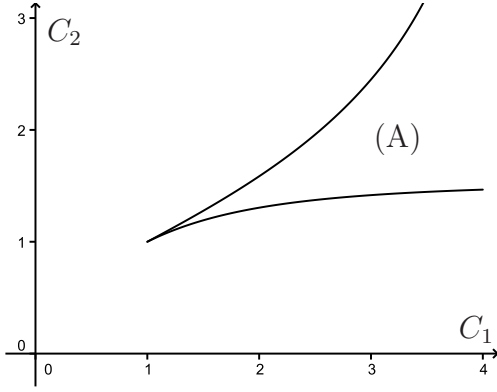


Figura 2.5

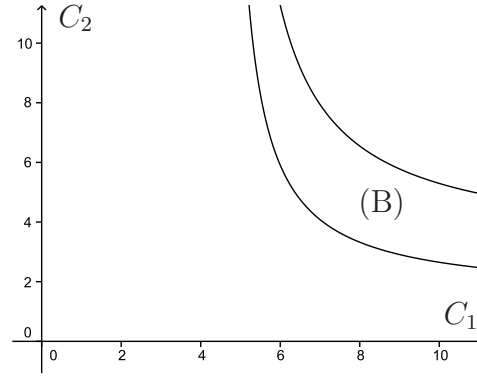


Figura 2.6

- Si los ángulos del pentágono son

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{6},$$

entonces se cumple

$$\theta_4 + \theta_5 = \frac{11}{12}\pi < \pi, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{101}{60}\pi < 2\pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^5 \theta_i = \frac{13}{5}\pi < 3\pi;$$

y el pentágono es entonces convexo si y solamente si se dan las condiciones (1a), (1b) y

$$(2b) \eta_{5,3} > 1;$$

$$(3a) \eta_{5,3}^* + \kappa_5 > 0, \text{ pues } \theta_3 + \theta_4 = \frac{27}{20}\pi > \pi.$$

Las dos primeras se cumplen cualesquiera que sean C_1 y C_2 . Y, si $C_2 = C_1$, las soluciones de las dos últimas inecuaciones son $1,18 < C_1 < 1,45$.

- Sea, por último, el pentágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{6}, \theta_2 = \frac{17}{30}\pi, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{5}.$$

Se cumple entonces que

$$\theta_4 + \theta_5 = \frac{19}{20}\pi < \pi, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \geq 2\pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^5 \theta_i = \frac{59}{20}\pi < 3\pi$$

y el pentágono es convexo si y sólo si se dan las condiciones (1a), (1b) y

$$(3a) \eta_{5,3}^* + \kappa_5 > 0, \text{ pues } \theta_3 + \theta_4 = \frac{27}{20}\pi > \pi;$$

$$(3b) \eta_{5,3}^{**} + \kappa_4 > 0, \text{ pues } \theta_5 + \theta_1 = \frac{31}{30}\pi > \pi;$$

siendo $\eta_{5,3}^*$ la expresión ya utilizada más arriba y

$$\eta_{5,3}^{**} = G \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_1) - H \cos(\theta_5 + \theta_1)$$

con

$$\begin{aligned} G &= ((S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - C_1 \sigma_2 \kappa_3), \\ H &= (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3). \end{aligned}$$

Puede comprobarse que las dos primeras condiciones son irrelevantes en este caso y que las soluciones (C_1, C_2) de las dos últimas pertenecen al recinto (C) delimitado por los ejes y las dos curvas siguientes:

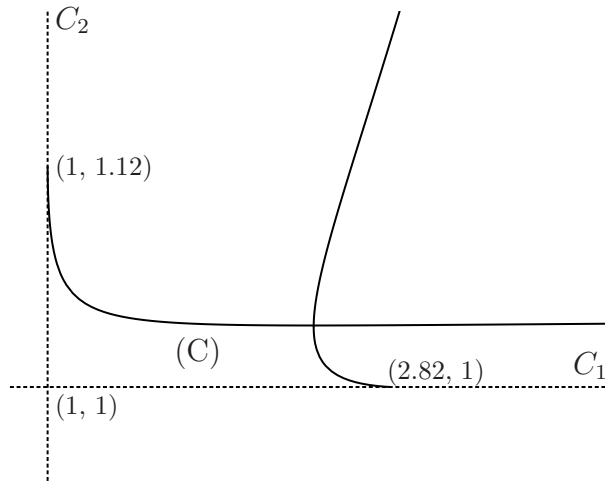


Figura 2.7

Si, por ejemplo, $C_1 = 1,3$ entonces se tiene que $C_2 < 1,04$.

Una vez estudiados algunos ejemplos de pentágonos, seguidamente se tratan otros tantos de hexágonos, correspondientes a los casos análogos.

Ejemplos

- Para el hexágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{12}, \theta_3 = \frac{5\pi}{12}, \theta_4 = \frac{7\pi}{12}, \theta_5 = \frac{3\pi}{4}, \theta_6 = \frac{11\pi}{12},$$

se tiene

$$\theta_5 + \theta_6 = \frac{5}{3}\pi \geq \pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^6 \theta_i = 3\pi < 4\pi;$$

y el hexágono es convexo si y solamente si se dan las condiciones siguientes:

Las dos desigualdades (1a):

$$\frac{C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2}{S_1 \sigma_2} > \frac{\kappa_3}{\sigma_3},$$

$$\frac{((S_1 \kappa_2 C_2 - C_1 S_2) \kappa_3 - S_1 \sigma_2 \sigma_3) C_3 + (C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) S_3}{(C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3} > \frac{\kappa_4}{\sigma_4};$$

las desigualdades (1b), dadas por

$$\frac{S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2}{\sigma_2 S_2} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1},$$

$$\frac{(S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) C_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) S_3}{C_3 S_2 \sigma_2 - S_3 (\sigma_3 \kappa_2 + \kappa_3 C_2 \sigma_2)} > \frac{\kappa_1}{\sigma_1};$$

$$(2a) \eta_{6,4} + \cos(\theta_5 + \theta_6) > 0;$$

$$(3a) \eta_{6,4}^* + \kappa_6 > 0, \text{ pues } \theta_4 + \theta_5 = \frac{4}{3}\pi > \pi;$$

$$(3b) \eta_{6,4}^{**} + \kappa_5 > 0, \text{ pues } \theta_6 + \theta_1 = \frac{7}{6}\pi > \pi;$$

con

$$\eta_{6,4} = A\sigma_4 - B\kappa_4,$$

$$\eta_{6,4}^* = A \operatorname{sen}(\theta_4 + \theta_5) - B \cos(\theta_4 + \theta_5),$$

siendo A, B las expresiones (2.10), y

$$\eta_{6,4}^{**} = G \operatorname{sen}(\theta_6 + \theta_1) - H \cos(\theta_6 + \theta_1),$$

siendo G, H las expresiones (2.11).

Las soluciones (C_1, C_2) de las primeras inecuaciones de (1a) y (1b) se encuentran en el recinto (D) de la figura siguiente.

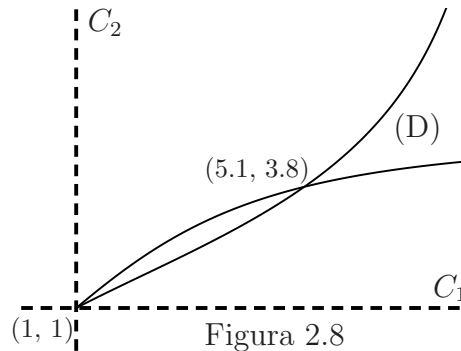


Figura 2.8

Una de las curvas tiene asíntota horizontal $C_2 = 5$ y la otra una asíntota vertical $C_1 = 9.2$.

Si, por ejemplo, $C_2 = 10$, se tiene entonces que $C_1 > 8,192$ y, sustituyendo en las segundas desigualdades de (1a) y (1b), se obtienen dos inecuaciones, cuyas soluciones (C_1, C_3) están en el recinto (E) de la siguiente figura.

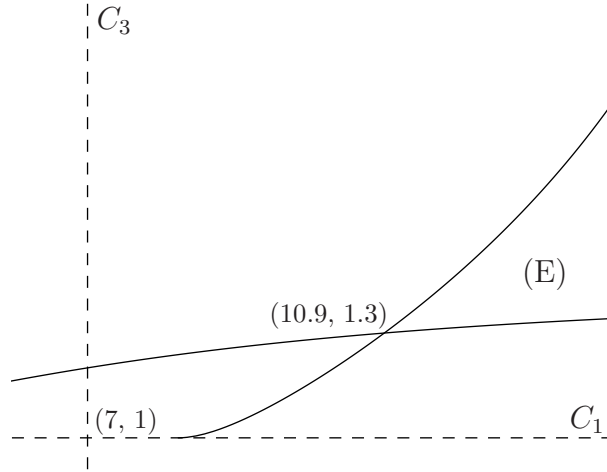


Figura 2.9

Y si, además, $C_1 = 18$ entonces $1,413 < C_3 < 8,689$.

En cuanto a las condiciones (2a), (3a) y (3b), si $C_1 = 18$ y $C_2 = 10$, para C_3 se obtiene, respectivamente,

$$2,141 < C_3 < 37,182 \quad \text{y} \quad C_3 < 2,939 \quad \text{ó} \quad C_3 > 26,31,$$

y la tercera condición resulta irrelevante. Es decir,

$$2,141 < C_3 < 2,939.$$

- Se considera el hexágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{11\pi}{12}, \theta_2 = \frac{\pi}{12}, \theta_3 = \frac{5\pi}{12}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{7\pi}{12}, \theta_6 = \frac{\pi}{4}.$$

Se cumple que

$$\theta_5 + \theta_6 = \frac{5}{6}\pi < \pi, \quad \sum_{i=1}^4 \theta_i = \frac{13}{6}\pi < 3\pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^6 \theta_i = 3\pi < 4\pi;$$

y $\theta_4 + \theta_5 = \frac{4\pi}{3} > \pi$, $\theta_6 + \theta_1 = \frac{7\pi}{6} > \pi$. Así, además de las condiciones (1a) y (1b), para la convexidad del hexágono se requieren (2b), (3a) y (3b).

Puede comprobarse que $C_1 = 4, C_2 = 6$ satisfacen las desigualdades (1a), (1b) y entonces, de (2b) se deduce que $C_3 > 9,128$, de (3a) que $C_3 < 30,984$, y (3b) resulta irrelevante. Por tanto, para $C_1 = 4, C_2 = 6$ el hexágono es convexo si y sólo si $9,128 < C_3 < 30,984$.

- Por último, sea el hexágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{11\pi}{12}, \theta_2 = \frac{4\pi}{5}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{7\pi}{12}, \theta_6 = \frac{\pi}{4}.$$

Se tiene que

$$\theta_5 + \theta_6 = \frac{5}{6}\pi < \pi, \quad \sum_{i=1}^4 \theta_i = \frac{47}{15}\pi \geq 3\pi \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^6 \theta_i = \frac{119}{30}\pi < 4\pi.$$

Además, $\theta_4 + \theta_5 = \frac{4\pi}{3} > \pi, \theta_6 + \theta_1 = \frac{7\pi}{6} > \pi$. Por tanto, supuestas las condiciones (1a) y (1b), para que el hexágono sea convexo es necesario y suficiente que se cumplan, además, las condiciones (3a) y (3b).

Como los tres primeros ángulos son obtusos, las primeras desigualdades de (1a) y de (1b) se cumplen automáticamente, cualesquiera que sean C_1 y C_2 .

Dado que la suma de los ángulos es muy próxima a 4π , es aconsejable elegir valores de los lados próximos a cero. Sea, por ejemplo, $C_2 = 1,1$. Puede comprobarse que, entonces todos los valores de C_1, C_3 son soluciones de las segundas inecuaciones de (1a) y de (1b).

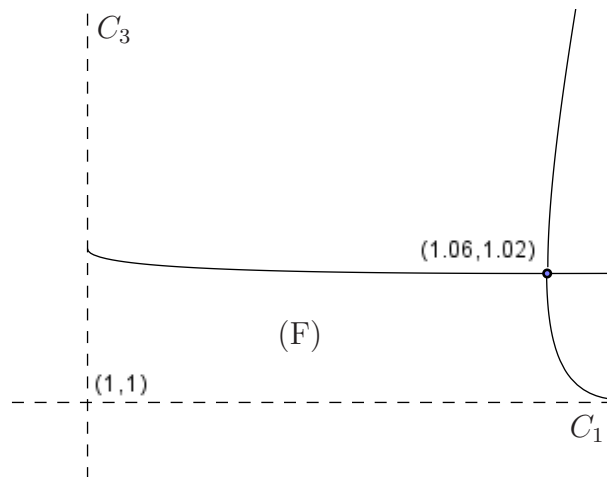


Figura 2.10

Respecto a las inecuaciones (3a) y (3b), si $C_2 = 1,1$, sus soluciones (C_1, C_3) son las pertenecientes al recinto (F) de la figura anterior y, si $C_1 = 1,05$, entonces $C_3 < 1,016$.

En las secciones anteriores se han obtenido las relaciones fundamentales entre los elementos de un polígono hiperbólico y su interpretación geométrica ha permitido, además, deducir ciertas condiciones de existencia para polígonos convexos. En la sección siguiente se obtienen, para cualquier polígono, la expresiones de cada vértice y del vector normal a cada lado, en función de A_1 y N_1 , conocidos los lados y los ángulos del polígono.

Con todo ello, se dan las circunstancias tanto para deducir las fórmulas de polígonos hiperbólicos particulares, convexos o no, como para su construcción, dados ciertos elementos, en las condiciones requeridas, cuando se trate de polígonos convexos.

2.3. Construcción de polígonos hiperbólicos

El teorema 2.1.4 y el corolario posterior posibilitan, como ya se indicó oportunamente, expresar los vértices del polígono y los vectores normales a cada lado en función del primer vértice A_1 y del vector N_1 , normal al primer lado. Dichas expresiones permiten, una vez fijados A_1 y N_1 , la construcción de polígonos hiperbólicos, convexos o no, dados sus ángulos y las longitudes de sus lados.

2.3.1. Expresión de los vértices de un polígono hiperbólico

Considerando la primera de las igualdades (2.9):

$$A_h = \alpha_{1,h}A_1 + \delta_{1,h}N_1 + \beta_{1,h}(A_1 \wedge N_1),$$

con los resultados de la sección 2.1, cada vértice A_h de un polígono puede expresarse en función de A_1 y N_1 . Con la notación usual, se tiene que

$$A_2 = C_1A_1 + S_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \alpha_{1,3}A_1 + \delta_{1,3}N_1 + \beta_{1,3}(A_1 \wedge N_1) \\ &= (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)A_1 + \sigma_2S_2N_1 + (S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \alpha_{1,4}A_1 + \delta_{1,4}N_1 + \beta_{1,4}(A_1 \wedge N_1) \\
&= ((C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)C_3 - ((C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3 + S_1\sigma_2\sigma_3)S_3)A_1 \\
&\quad + (\sigma_2S_2C_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)S_3)N_1 \\
&\quad + ((S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)C_3 - (C_1\sigma_2\sigma_3 + (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\kappa_3)S_3)(A_1 \wedge N_1).
\end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Las dos últimas igualdades también son inmediatas a partir de las expresiones que aparecen tras el teorema 2.1.4.

También cabe expresar los últimos vértices del polígono mediante la igualdad

$$A_{p-h} = \alpha_{1,p-h}A_1 + \delta_{1,p-h}N_1 + \beta_{1,p-h}(A_1 \wedge N_1),$$

con $\alpha_{1,p-h} = \langle A_1, A_{p-h} \rangle$, $\delta_{1,p-h} = -\langle N_1, A_{p-h} \rangle$, $\beta_{1,p-h} = -\langle A_1 \wedge N_1, A_{p-h} \rangle$, utilizando debidamente las fórmulas conocidas para los coeficientes. Así,

Para $h = 0$, como

$$\delta_{2,1} = S_1\sigma_2, \quad \beta_{2,1} = S_1\kappa_2,$$

entonces

$$\delta_{1,p} = S_p\sigma_1, \quad \beta_{1,p} = S_p\kappa_1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
A_p &= \alpha_{1,p}A_1 + \delta_{1,p}N_1 + \beta_{1,p}(A_1 \wedge N_1) \\
&= C_pA_1 + S_p\sigma_1N_1 + S_p\kappa_1(A_1 \wedge N_1),
\end{aligned}$$

ya deducida después del corolario 2.1.5.

Para $h = 1$, como

$$\alpha_{1,3} = C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2,$$

$$\delta_{3,1} = (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\sigma_3 - S_1\sigma_2\kappa_3,$$

$$\beta_{3,1} = (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\kappa_3 + S_1\sigma_2\sigma_3,$$

entonces

$$\alpha_{1,p-1} = C_{p-1}C_p - S_{p-1}\kappa_pS_p,$$

$$\delta_{1,p-1} = (C_{p-1}S_p - S_{p-1}\kappa_pC_p)\sigma_1 - S_{p-1}\sigma_p\kappa_1,$$

$$\beta_{1,p-1} = (C_{p-1}S_p - S_{p-1}\kappa_pC_p)\kappa_1 + S_{p-1}\sigma_p\sigma_1$$

y

$$\begin{aligned}
A_{p-1} &= \alpha_{1,p-1}A_1 + \delta_{1,p-1}N_1 + \beta_{1,p-1}(A_1 \wedge N_1) \\
&= (C_{p-1}C_p - S_{p-1}\kappa_p S_p) A_1 \\
&\quad + ((C_{p-1}S_p - S_{p-1}\kappa_p C_p) \sigma_1 - S_{p-1}\sigma_p \kappa_1) N_1 \\
&\quad + ((C_{p-1}S_p - S_{p-1}\kappa_p C_p) \kappa_1 + S_{p-1}\sigma_p \sigma_1) (A_1 \wedge N_1),
\end{aligned}$$

que coincide con la expresión deducida después del corolario 2.1.5.

Los coeficientes para A_{p-2} serían

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,p-2} &= (C_{p-2}C_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}S_{p-1}) C_p \\
&\quad - ((C_{p-2}S_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}C_{p-1}) \kappa_p + S_{p-2}\sigma_{p-1}\sigma_p) S_p, \\
\delta_{1,p-2} &= [(C_{p-2}C_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}S_{p-1}) S_p \\
&\quad - ((C_{p-2}S_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}C_{p-1}) \kappa_p + S_{p-2}\sigma_{p-1}\sigma_p) C_p] \sigma_1 \\
&\quad - ((C_{p-2}S_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}C_{p-1}) \sigma_p - S_{p-2}\sigma_{p-1}\kappa_p) \kappa_1, \\
\beta_{1,p-2} &= [(C_{p-2}C_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}S_{p-1}) S_p \\
&\quad - ((C_{p-2}S_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}C_{p-1}) \kappa_p + S_{p-2}\sigma_{p-1}\sigma_p) C_p] \kappa_1 \\
&\quad + ((C_{p-2}S_{p-1} - S_{p-2}\kappa_{p-1}C_{p-1}) \sigma_p - S_{p-2}\sigma_{p-1}\kappa_p) \sigma_1.
\end{aligned}$$

Por un procedimiento análogo pueden obtenerse los coeficientes de A_{p-k} , $2 < k < p$.

Para expresar cada vértice A_h , $1 < h \leq p$, ó A_{p-k} , $0 \leq k < p$, es posible calcular, respectivamente, las matrices $G(1, h) = F_1 F_2 \cdots F_{h-1}$ ó $G(1, p-k) = H_p H_{p-1} \cdots H_{p-k}$, cuyas primeras columnas aportan las coordenadas del vértice respecto a la base $\{A_1, N_1, A_1 \wedge N_1\}$, como ya se observó después del corolario 2.1.5. Las segundas columnas de las matrices $G(1, h)$ y $G(1, p-k)$ constituyen, respectivamente, las coordenadas de N_h , $1 < h \leq p$, y N_{p-k} , $0 \leq k < p$, respecto a dicha base.

2.3.2. Expresión de los vectores normales a los lados de un polígono hiperbólico

De modo análogo, teniendo en cuenta la segunda de las igualdades (2.9):

$$N_h = -\delta_{h,1}A_1 - \eta_{1,h}N_1 + \gamma_{h,1}(A_1 \wedge N_1),$$

pueden también calcularse los vectores normales a los primeros lados de un polígono de p lados, en función de A_1 y N_1 . Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} N_2 &= -\delta_{2,1}A_1 - \eta_{1,2}N_1 + \gamma_{2,1}(A_1 \wedge N_1) \\ &= -S_1\sigma_2A_1 - \kappa_2N_1 - C_1\sigma_2(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 &= -\delta_{3,1}A_1 - \eta_{1,3}N_1 + \gamma_{3,1}(A_1 \wedge N_1) \\ &= (S_1\sigma_2\kappa_3 - (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\sigma_3)A_1 \\ &\quad - (\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)N_1 \\ &\quad + (C_1\sigma_2\kappa_3 - (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\sigma_3)(A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

La primera era ya conocida y la segunda se dedujo después del teorema 2.1.4.

Igual que se afirmó en el epígrafe anterior es posible expresar los vectores normales a los últimos lados, teniendo en cuenta que

$$N_{p-h} = -\delta_{p-h,1}A_1 - \eta_{1,p-h}N_1 + \gamma_{p-h,1}(A_1 \wedge N_1).$$

Puede observarse que los primeros coeficientes $\gamma_{p-h,1}$ se obtienen a partir de las correspondientes expresiones para $\gamma_{1,h}$, calculadas en la proposición 2.1.7 al deducir las fórmulas para $\Phi_{1,h} = \delta_{1,h}S_h + \gamma_{1,h}C_h$, $h \leq 4$. Así,

$$\gamma_{1,2} = \sigma_2, \quad \gamma_{1,3} = -(\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3),$$

$$\gamma_{1,4} = -((\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)\sigma_4 + (\sigma_2S_2S_3 - (\kappa_2\sigma_3 + \sigma_2C_2\kappa_3)C_3)\kappa_4).$$

Para $h = 0$:

$$\delta_{p,1} = 0, \quad \eta_{1,p} = \kappa_1, \quad \gamma_{p,1} = \sigma_1.$$

Por tanto,

$$N_p = -\kappa_1N_1 + \sigma_1(A_1 \wedge N_1),$$

que coincide con la deducida después del corolario 2.1.5.

Para $h = 1$, como

$$\delta_{1,3} = \sigma_2S_2, \quad \eta_{1,3} = \sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3,$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta_{p-1,1} &= \sigma_pS_p; \\ \eta_{1,p-1} &= \sigma_pC_p\sigma_1 - \kappa_p\kappa_1; \\ \gamma_{p-1,1} &= -(\kappa_p\sigma_1 + \sigma_pC_p\kappa_1). \end{aligned}$$

De donde

$$N_{p-1} = -\sigma_p S_p A_1 - (\sigma_p C_p \sigma_1 - \kappa_p \kappa_1) N_1 - (\sigma_p C_p \kappa_1 + \kappa_p \sigma_1) (A_1 \wedge N_1),$$

coincidente con la obtenida después del corolario 2.1.5.

Si $h = 2$, al ser

$$\delta_{1,4} = \sigma_2 S_2 C_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) S_3,$$

$$\eta_{1,4} = (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \sigma_4 - (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \kappa_4,$$

se tendría

$$\delta_{p-2,1} = \sigma_{p-1} S_{p-1} C_p - (\kappa_{p-1} \sigma_p + \sigma_{p-1} C_{p-1} \kappa_p) S_p,$$

$$\begin{aligned} \eta_{p-2,1} &= (\sigma_{p-1} S_{p-1} S_p - (\kappa_{p-1} \sigma_p + \sigma_{p-1} C_{p-1} \kappa_p) C_p) \sigma_1 \\ &\quad - (\sigma_{p-1} C_{p-1} \sigma_p - \kappa_{p-1} \kappa_p) \kappa_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{p-2,1} &= (\kappa_{p-1} \kappa_p - \sigma_{p-1} C_{p-1} \sigma_p) \sigma_1 \\ &\quad - (\sigma_{p-1} S_{p-1} S_p - (\kappa_{p-1} \sigma_p + \sigma_{p-1} C_{p-1} \kappa_p) C_p) \kappa_1 \end{aligned}$$

y

$$N_{p-2} = -\delta_{p-2,1} A_1 - \eta_{1,p-2} N_1 + \gamma_{p-2,1} (A_1 \wedge N_1).$$

Así sucesivamente.

Como ya se indicó previamente, también es posible calcular las segundas columnas de las matrices $G(1, h) = F_1 F_2 \cdots F_{h-1}$ y $G(1, p-k) = H_p H_{p-1} \cdots H_{p-k}$, que constituyen, respectivamente, las coordenadas de N_h , $1 < h \leq p$, y N_{p-k} , $0 \leq k < p$, respecto a la base ortonormal $\{A_1, N_1, A_1 \wedge N_1\}$.

En la sección siguiente se deducen las fórmulas que relacionan los elementos de un polígono hiperbólico de p lados. Dados $2p-3$ elementos, es posible entonces determinar los restantes y también, fijados A_1 y N_1 , conocer todos los vértices y los vectores normales a los lados, lo que permite la construcción del polígono.

2.4. Fórmulas que relacionan los lados y los ángulos de un polígono hiperbólico

Con las expresiones deducidas en la sección 2.1 se pueden obtener nuevas fórmulas que relacionan los lados y ángulos de un polígono, convexo o no. El

procedimiento de obtención automática de tales fórmulas, para un polígono de p lados, se muestra en las hojas 2.1 y 2.2 del Apéndice. A continuación se aportan las fórmulas para cuadriláteros y, posteriormente, se indica el procedimiento para obtener las fórmulas para polígonos de un mayor número de lados.

2.4.1. Cuadriláteros hiperbólicos

Expresión de un ángulo de un cuadrilátero

Proposición 2.4.1 *En un cuadrilátero hiperbólico, el coseno del ángulo θ_1 puede expresarse como*

$$\kappa_1 = \sigma_2 (S_2 S_3 - C_2 \kappa_3 C_3) \sigma_4 - (\kappa_2 \sigma_3 C_3 \sigma_4 + \sigma_2 C_2 \sigma_3 \kappa_4) + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4.$$

La fórmula sigue siendo válida cuando $\theta_1 = 0$ y es independiente de la numeración consecutiva de los ángulos y los lados según la notación habitual.

Demostración

Basta tener en cuenta que, en este caso, $\eta_{1,4} = \langle N_1, N_4 \rangle = \kappa_1$ y aplicar la proposición 2.1.7. ■

Expresión del lado de un cuadrilátero

Proposición 2.4.2 *En un cuadrilátero hiperbólico, el coseno hiperbólico del lado λ_4 puede expresarse como*

$$C_4 = C_1 C_2 C_3 - (S_1 \kappa_2 S_2 C_3 + C_1 S_2 \kappa_3 S_3) + S_1 (\kappa_2 C_2 \kappa_3 - \sigma_2 \sigma_3) S_3.$$

La fórmula es válida independientemente de la numeración consecutiva de los ángulos y los lados, empleando la notación habitual.

Demostración

La proposición 2.1.8 prueba la igualdad, teniendo en cuenta que en este caso $\alpha_{1,4} = \langle A_1, A_4 \rangle = C_4$. ■

Otras relaciones entre los elementos de un cuadrilátero

Proposición 2.4.3 *En un cuadrilátero hiperbólico, con la notación habitual, se tiene además*

$$(a) \sigma_4 S_4 = (C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3.$$

$$(b) \sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2 = \sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4.$$

$$(c) C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2 = C_3 C_4 - S_3 \kappa_4 S_4.$$

Las fórmulas son válidas cualquiera que sea la numeración consecutiva de lados y ángulos.

Demostración

(a) $-\langle A_1, N_3 \rangle$ admite dos posibles expresiones:

$$\delta_{3,1} = (C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3 \quad \text{y} \quad -\langle N_3, A_1 \rangle = \sigma_4 S_4.$$

La primera procede de la demostración de la proposición 2.1.8, y la segunda es la expresión análoga a $\delta_{1,3}$ obtenida en la demostración de la proposición 2.1.7.

(b) Los dos miembros corresponden a las expresiones válidas, en un cuadrilátero, para $\langle N_2, N_4 \rangle$.

(c) La igualdad se deduce de las dos posibles expresiones, en un cuadrilátero, correspondientes a $\langle A_1, A_3 \rangle$. ■

Aunque las fórmulas deducidas son válidas para cuadriláteros, convexos o no, los ejemplos estudiados a continuación son los casos tratados después de la proposición 2.2.1, correspondientes a cuadriláteros convexos.

Ejemplos

■ En el primer caso, los ángulos son

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{5}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{\pi}{3}$$

y si

$$1,402 < C_1 < 5,493$$

el cuadrilátero es convexo. Sea, por ejemplo, $C_1 = 2$. Entonces, de

$$\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2 = \sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4$$

se obtiene $C_3 = 1,657$, y de

$$\sigma_1 S_1 = (C_2 S_3 - S_2 \kappa_3 C_3) \sigma_4 - S_2 \sigma_3 \kappa_4$$

se tiene entonces que $C_2 = 1,163$. Mediante

$$\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3 = \sigma_4 C_4 \sigma_1 - \kappa_4 \kappa_1$$

se deduce que $C_4 = 1,817$. La comprobación de los valores calculados puede hacerse con

$$C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2 = C_3C_4 - S_3\kappa_4S_4$$

y ambos miembros son iguales a 2,008.

- El segundo cuadrilátero tiene ángulos

$$\theta_1 = \frac{7\pi}{12}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{5\pi}{12}$$

y, para que sea convexo, es necesario y suficiente que

$$C_1 > 1,146$$

Si, por ejemplo, $C_1 = 1,3$, entonces $C_2 = 1,192$, $C_3 = 1,126$, $C_4 = 1,09$.

- Por último, si

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \frac{\pi}{4}, \theta_4 = \frac{5\pi}{12}$$

la única condición para que sea convexo se reduce a

$$C_1 < \sqrt{3} + 1 = 2,732$$

Si $C_1 = 2$, entonces se obtiene que $C_2 = 1,373$, $C_3 = 2,804$, $C_4 = 1,006$.

Construcción de un cuadrilátero hiperbólico

En la sección 2.3 se dedujeron las expresiones de los vértices y los vectores normales a los lados de un polígono hiperbólico, a partir de A_1 y N_1 :

$$A_2 = C_1A_1 + S_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$A_3 = (C_1C_2 - S_1\kappa_2S_2)A_1 + \sigma_2S_2N_1 + (S_1C_2 - C_1\kappa_2S_2)(A_1 \wedge N_1),$$

$$A_4 = C_4A_1 + S_4\sigma_1N_1 + S_4\kappa_1(A_1 \wedge N_1)$$

y

$$N_2 = -S_1\sigma_2A_1 - \kappa_2N_1 - C_1\sigma_2(A_1 \wedge N_1),$$

$$N_3 = -\sigma_4S_4A_1 - (\sigma_4C_4\sigma_1 - \kappa_4\kappa_1)N_1 - (\kappa_4\sigma_1 + \sigma_4C_4\kappa_1)(A_1 \wedge N_1),$$

$$N_4 = -\kappa_1N_1 + \sigma_1(A_1 \wedge N_1).$$

Eligiendo el primero de los ejemplos resueltos anteriormente:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{5}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{\pi}{3}$$

y

$$C_1 = 2, C_3 = 1,657, C_2 = 1,163, C_4 = 1,817,$$

tomando $A_1 = X_0, N_1 = X_2$, se obtiene $A_1 \wedge N_1 = A_1 N_1 = X_1$ y

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,268 \\ 3,732 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0,565 & -0,361 \\ 3,656 & -0,565 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1,314 & -1,058 \\ 2,576 & -1,314 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$N_2 = \begin{pmatrix} -0,309 & -0,255 \\ -3,549 & 0,309 \end{pmatrix},$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} -1,113 & 0,094 \\ -2,534 & 1,113 \end{pmatrix}.$$

La construcción del cuadrilátero se muestra en la figura 2.11.a.

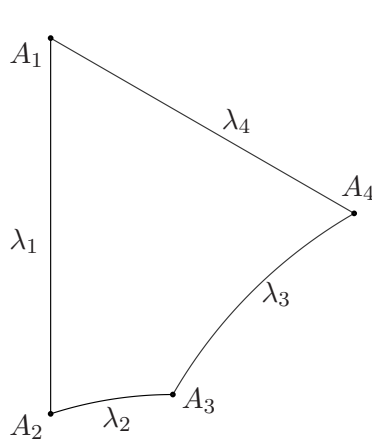


Figura 2.11a

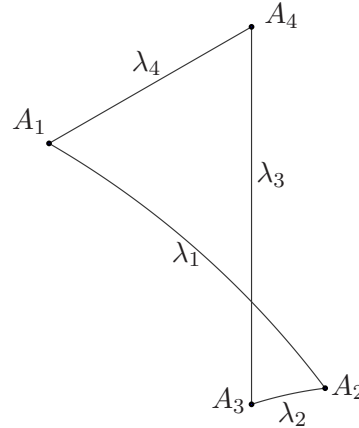


Figura 2.11b

Si se considera el cuadrilátero de ángulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{5}, \theta_3 = \frac{\pi}{3}, \theta_4 = \frac{\pi}{3},$$

sustituyendo σ_1 por $-\sigma_1$ y σ_4 por $-\sigma_4$ en las fórmulas utilizadas anteriormente, en el caso de $C_1 = 2$, se obtiene

$$C_3 = 2,069, C_2 = 1,0596, C_4 = 1,291$$

y el cuadrilátero autointersectante que resulta se representa en la figura 2.11.b.

2.4.2. Polígonos con un número de lados superior a cuatro

Para los polígonos de p lados, siendo $p > 4$, se procedería de modo análogo. Es decir,

a) Como $\text{ch } \lambda_p = \langle A_1, A_p \rangle$, el lado λ_p puede escribirse respecto a otros elementos del polígono mediante la expresión de $\alpha_{1,p}$ obtenida en la proposición 2.1.6.

b) Al ser $\cos \theta_1 = \langle N_1, N_p \rangle$, el ángulo θ_1 puede escribirse respecto a otros elementos mediante la expresión de $\eta_{1,p}$ obtenida en la proposición 2.1.6.

c) Las demás relaciones se obtendrían mediante alguno de los siguientes modos:

c.1) De la igualdad $\sigma_p S_p = -\langle A_1, N_p \rangle = \delta_{p,1}$.

c.2) Igualando las dos expresiones correspondientes a $\eta_{j,k}$, $1 \leq j < k < p$.

c.3) Igualando las dos expresiones válidas para $\alpha_{j,k}$, $1 \leq j < k < p$.

c.4) Igualando las dos expresiones de $\langle A_j, N_k \rangle$, $1 \leq j < k < p$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de pentágonos y hexágonos, resueltos en la [hoja 2.1 del Apéndice](#), y se procede a su representación, realizada también en la hoja citada del Apéndice.

2.4.3. Pentágonos hiperbólicos. Casos particulares

Seguidamente estudiamos los casos tratados después del teorema 2.2.3, correspondientes a pentágonos convexos.

- En el primer caso, los ángulos son

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{4}$$

y, supuesto que $C_2 = 7$, se sabe que $5,716 < C_1 < 7,59$. Si, por ejemplo, $C_1 = 6,2$, igualando las dos expresiones válidas para $\eta_{3,5} = \langle N_3, N_5 \rangle$:

$$\sigma_4 C_4 \sigma_5 - \kappa_4 \kappa_5 = (\sigma_1 S_1 S_2 - (\sigma_1 C_1 \kappa_2 + \kappa_1 \sigma_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3,$$

se obtiene $C_4 = 1,734$ y entonces, igualando las dos expresiones de $\delta_{3,1} = -\langle N_3, A_1 \rangle$:

$$S_1 \sigma_2 \kappa_3 - (C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 = S_5 \sigma_5 \kappa_4 - (C_5 S_4 - S_5 \kappa_5 C_4) \sigma_4$$

se tiene que $C_5 = 10,24$ y, por la fórmula

$$\sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 = (\sigma_5 S_5 S_1 - (\sigma_5 C_5 \kappa_1 + \kappa_5 \sigma_1) C_1) \sigma_2 - (\sigma_5 C_5 \sigma_1 - \kappa_5 \kappa_1) \kappa_2$$

se encuentra que $C_3 = 1,252$. Para la comprobación de la solución puede, por ejemplo, aplicarse

$$C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2 = (C_3 C_4 - S_3 \kappa_4 S_4) C_5 - ((C_3 S_4 - S_3 \kappa_4 C_4) \kappa_5 + S_3 \sigma_4 \sigma_5) S_5,$$

tras igualar las expresiones válidas para $\alpha_{1,3} = \langle A_1, A_3 \rangle$, resultando los dos miembros iguales a 6,68.

- Se considera el pentágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{6}.$$

Si $C_2 = C_1$, se sabe que $1,18 < C_1 < 1,45$. En el supuesto $C_2 = C_1 = 1,3$, por igual procedimiento que antes, resulta entonces que

$$C_4 = 2,065, C_5 = 5,338, C_3 = 1,17,$$

y los dos miembros de la última igualdad son iguales a 2,288.

- Para el último caso:

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{6}, \theta_2 = \frac{17}{30}\pi, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{5},$$

si $C_1 = 1,3$ se tiene entonces que $C_2 < 1,04$. Si se toma $C_2 = 1,02$, los lados desconocidos son

$$C_4 = 1,446, C_5 = 1,023, C_3 = 1,006.$$

Para la construcción de un pentágono hiperbólico, además de las expresiones de los vértices A_2 y A_3 y del vector normal N_2 , ya utilizadas en la construcción de un cuadrilátero, en un pentágono hiperbólico, se tiene

$$A_5 = C_5 A_1 + S_5 \sigma_1 N_1 + S_5 \kappa_1 (A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_4 = & (C_4 C_5 - S_4 \kappa_5 S_5) A_1 \\ & + ((C_4 S_5 - S_4 \kappa_5 C_5) \sigma_1 - S_4 \sigma_5 \kappa_1) N_1 \\ & + ((C_4 S_5 - S_4 \kappa_5 C_5) \kappa_1 + S_4 \sigma_5 \sigma_1) (A_1 \wedge N_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_3 &= (S_1\sigma_2\kappa_3 - (C_1S_2 - S_1\kappa_2C_2)\sigma_3)A_1 \\ &\quad - (\sigma_2C_2\sigma_3 - \kappa_2\kappa_3)N_1 \\ &\quad + (C_1\sigma_2\kappa_3 - (S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\sigma_3)(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$N_5 = -\kappa_1N_1 + \sigma_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$N_4 = -\sigma_5S_5A_1 - (\sigma_5C_5\sigma_1 - \kappa_5\kappa_1)N_1 - (\kappa_5\sigma_1 + \sigma_5C_5\kappa_1)(A_1 \wedge N_1).$$

En el segundo ejemplo resuelto anteriormente:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{6}$$

y

$$C_1 = C_2 = 1,3, C_3 = 1,17, C_4 = 2,065, C_5 = 5,338,$$

fijando las matrices $A_1 = X_0$, $N_1 = X_2$, entonces

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,469 \\ 2,131 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0,415 & -0,272 \\ 4,303 & -0,415 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1,112 & -0,429 \\ 5,201 & -1,112 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 3,708 & -1,630 \\ 9,046 & -3,708 \end{pmatrix}$$

y

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0,866 & -0,235 \\ -1,065 & -0,866 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} -0,35 & -0,204 \\ -4,294 & 0,35 \end{pmatrix},$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} -0,707 & 0,707 \\ 0,707 & -0,707 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} -1,275 & 0,122 \\ -5,121 & 1,275 \end{pmatrix}.$$

La representación del pentágono puede verse en la figura 2.12.a.

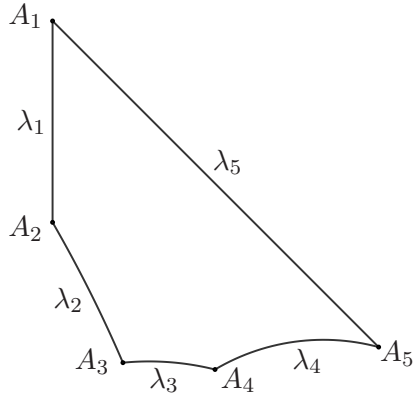


Figura 2.12a

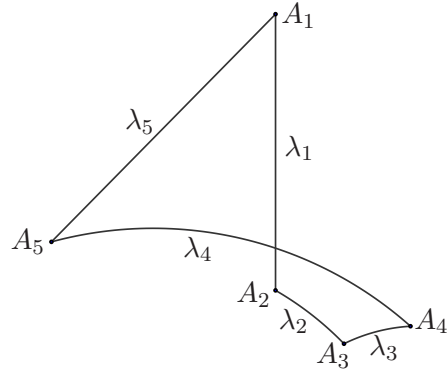


Figura 2.12b

Si se considera el pentágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \theta_3 = \frac{3\pi}{5}, \theta_4 = \frac{\pi}{4}, \theta_5 = \frac{\pi}{6}$$

y en las fórmulas del pentágono sustituimos σ_1, σ_5 por $-\sigma_1, -\sigma_5$, dados $C_1 = 2, C_2 = 1,2$, se obtiene $C_3 = 1,17, C_4 = 5,474, C_5 = 2,628$ y la figura 2.12.b es el pentágono autointersectante que resulta.

2.4.4. Hexágonos hiperbólicos. Casos particulares

Como aplicación del teorema 2.2.3 se estudiaron tres casos de hexágonos con ángulos determinados y se encontraron las condiciones que deben cumplir los tres primeros lados para que los hexágonos sean convexos.

- En el primer caso, los ángulos son

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{12}, \theta_3 = \frac{5\pi}{12}, \theta_4 = \frac{7\pi}{12}, \theta_5 = \frac{3\pi}{4}, \theta_6 = \frac{11\pi}{12}$$

y, si $C_1 = 18, C_2 = 10$, se sabe que entonces $2,141 < C_3 < 2,939$. Si $C_3 = 2,25$, igualando las expresiones de $\eta_{4,6} = \langle N_4, N_6 \rangle$:

$$\sigma_5 C_5 \sigma_6 - \kappa_5 \kappa_6 = A \sigma_4 - B \kappa_4$$

con

$$\begin{aligned} A &= (\sigma_1 S_1 C_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) S_2) S_3 \\ &\quad - ((\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \sigma_3 + (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \kappa_3) C_3, \\ B &= (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3, \end{aligned}$$

se tiene que $C_5 = 1,196$. Y entonces, igualando las dos fórmulas de $\eta_{3,6} = \langle N_3, N_6 \rangle$:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 S_1 S_2 - (\kappa_1 \sigma_2 + \sigma_1 C_1 \kappa_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3 \\ & = (\sigma_4 S_4 S_5 - (\kappa_4 \sigma_5 + \sigma_4 C_4 \kappa_5) C_5) \sigma_6 - (\sigma_4 C_4 \sigma_5 - \kappa_4 \kappa_5) \kappa_6 \end{aligned}$$

resulta $C_4 = 1,122$. Por último, teniendo en cuenta las dos expresiones de $\eta_{1,4} = \langle N_1, N_4 \rangle$:

$$\begin{aligned} & (\sigma_2 S_2 S_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) C_3) \sigma_4 - (\sigma_2 C_2 \sigma_3 - \kappa_2 \kappa_3) \kappa_4 \\ & = (\sigma_5 S_5 S_6 - (\kappa_5 \sigma_6 + \sigma_5 C_5 \kappa_6) C_6) \sigma_1 - (\sigma_5 C_5 \sigma_6 - \kappa_5 \kappa_6) \kappa_1, \end{aligned}$$

se deduce que $C_6 = 1,818$.

- Análogamente, si

$$\theta_1 = \frac{11\pi}{12}, \theta_2 = \frac{\pi}{12}, \theta_3 = \frac{5\pi}{12}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{7\pi}{12}, \theta_6 = \frac{\pi}{4},$$

para $C_1 = 4$, $C_2 = 6$, debe cumplirse que $9,128 < C_3 < 30,984$ y si, por ejemplo, $C_3 = 9,2$, por igual procedimiento que antes resulta que $C_5 = 1,2$, $C_4 = 83,044$, $C_6 = 968,773$.

- Para el hexágono de ángulos

$$\theta_1 = \frac{11\pi}{12}, \theta_2 = \frac{4\pi}{5}, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \theta_5 = \frac{7\pi}{12}, \theta_6 = \frac{\pi}{4},$$

si $C_1 = 1,05$, $C_2 = 1,1$, entonces $C_3 < 1,016$. Caso de $C_3 = 1,015$, análogamente se obtiene que $C_5 = 1,343$, $C_4 = 1,000027$, $C_6 = 1,00025$.

Si deseamos construir un hexágono hiperbólico, además de las expresiones de los vértices A_2 y A_3 y de los vectores normales N_2 , N_3 , utilizadas para la construcción de un pentágono, en un hexágono hiperbólico, se tiene

$$\begin{aligned} A_4 & = ((C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) C_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 + S_1 \sigma_2 \sigma_3) S_3) A_1 \\ & + (\sigma_2 S_2 C_3 - (\kappa_2 \sigma_3 + \sigma_2 C_2 \kappa_3) S_3) N_1 \\ & + ((S_1 C_2 - C_1 \kappa_2 S_2) C_3 - (C_1 \sigma_2 \sigma_3 + (S_1 S_2 - C_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3) S_3) (A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$A_6 = C_6 A_1 + S_6 \sigma_1 N_1 + S_6 \kappa_1 (A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_5 & = (C_5 C_6 - S_5 \kappa_6 S_6) A_1 \\ & + ((C_5 S_6 - S_5 \kappa_6 C_6) \sigma_1 - S_5 \sigma_6 \kappa_1) N_1 \\ & + ((C_5 S_6 - S_5 \kappa_6 C_6) \kappa_1 + S_5 \sigma_6 \sigma_1) (A_1 \wedge N_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_4 = & ((\kappa_5\sigma_6 + \sigma_5C_5\kappa_6)S_6 - \sigma_5S_5C_6)A_1 \\ & + ((\sigma_5C_5\sigma_6 - \kappa_5\kappa_6)\kappa_1 - (\sigma_5S_5S_6 - (\kappa_5\sigma_6 + \sigma_5C_5\kappa_6)C_6)\sigma_1)N_1 \\ & - ((\sigma_5C_5\sigma_6 - \kappa_5\kappa_6)\sigma_1 + (\sigma_5S_5S_6 - (\kappa_5\sigma_6 + \sigma_5C_5\kappa_6)C_6)\kappa_1)(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$N_6 = -\kappa_1N_1 + \sigma_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$N_5 = -\sigma_6S_6A_1 - (\sigma_6C_6\sigma_1 - \kappa_6\kappa_1)N_1 - (\kappa_6\sigma_1 + \sigma_6C_6\kappa_1)(A_1 \wedge N_1),$$

Considerando el primero de los ejemplos estudiados más arriba:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{12}, \theta_3 = \frac{5\pi}{12}, \theta_4 = \frac{7\pi}{12}, \theta_5 = \frac{3\pi}{4}, \theta_6 = \frac{11\pi}{12}$$

y

$$C_1 = 18, C_2 = 10, C_3 = 2,25, C_4 = 1,122, C_5 = 1,196, C_6 = 1,818,$$

si se fijan $A_1 = X_0$, $N_1 = X_2$, se tendría

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,028 \\ 35,972 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2,575 & -0,545 \\ 13,99 & -2,575 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2,564 & -0,956 \\ 7,918 & -2,564 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1,979 & -0,918 \\ 5,355 & -1,979 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1,075 & -0,745 \\ 2,892 & -1,075 \end{pmatrix}$$

y

$$N_2 = \begin{pmatrix} -0,966 & -0,007 \\ -9,310 & 0,966 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} -2,25 & 0,528 \\ -7,688 & 2,25 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} -2,112 & 0,907 \\ -3,819 & 2,112 \end{pmatrix},$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} -1,017 & 0,745 \\ -0,0463 & 1,017 \end{pmatrix}, N_6 = \begin{pmatrix} -0,707 & 0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{pmatrix}.$$

Se representa el hexágono en la figura 2.13.

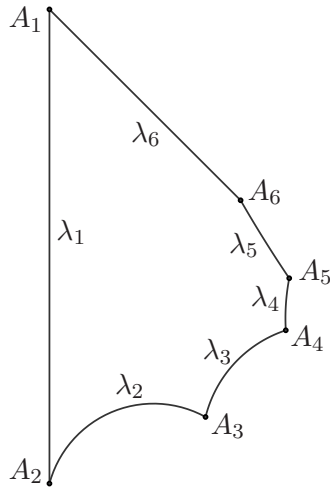


Figura 2.13

Una vez estudiados los polígonos hiperbólicos en general, cabe tratar algunos casos particulares con mayor detenimiento. En la siguiente sección se estudian los polígonos regulares, entendidos como aquellos que tienen iguales sus ángulos y también las longitudes de sus lados, ya sean convexos o estrellados.

2.5. Polígonos hiperbólicos regulares

La finalidad de la presente sección es doble: probar que los polígonos regulares pueden ser de dos tipos –convexos o estrellados– y establecer las relaciones entre la longitud del lado y la medida del ángulo, en cada uno de los casos. La proposición siguiente muestra la relación válida para polígonos regulares convexos, y los resultados posteriores permiten demostrar la proposición 2.5.2, donde se establecen los resultados generales que constituyen el objeto de la sección.

Proposición 2.5.1 *Para todo polígono convexo regular de p lados iguales a λ y ángulos iguales a θ , con $0 < \theta < \pi - \frac{2\pi}{p}$, se tiene*

$$\operatorname{ch} \lambda = \frac{2 \cos(2\pi/p) + 1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Demostración

Dividiendo el polígono regular en p triángulos isósceles iguales con un vértice común en el centro del polígono (figura 2.14), se tiene

$$\cos \frac{2\pi}{p} = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta \operatorname{ch} \lambda - \cos^2 \frac{1}{2}\theta.$$

Despejando $\text{ch } \lambda$, y escribiendo $\sin^2 \frac{1}{2}\theta$ y $\cos^2 \frac{1}{2}\theta$ en función $\cos \theta$, se obtendría la igualdad del enunciado.

La condición $\theta < \pi - \frac{2\pi}{p}$ es necesaria para que la suma de los ángulos sea menor que $(p - 2)\pi$. ■

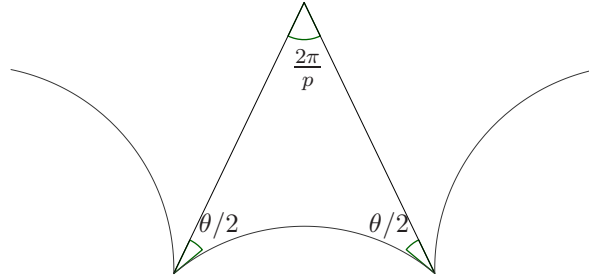


Figura 2.14

Para un polígono estrellado de p lados, por un razonamiento análogo, se concluye que la relación entre $\text{ch } \lambda$ y $\cos \theta$ es de la forma

$$\text{ch } \lambda = \frac{1 + 2 \cos (2n\pi/p) + \cos \theta}{1 - \cos \theta}; \quad \theta < \pi - \frac{2n\pi}{p},$$

para algún entero n tal que $1 < n < \frac{p}{2}$ ó $1 < n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar, respectivamente. La condición $\theta < \pi - \frac{2n\pi}{p}$ equivale a $\text{ch } \lambda > 1$ y el valor de n es el número primo con p que determina el mínimo ángulo de giro $\phi = \frac{2n\pi}{p}$, respecto al centro del polígono, que deja invariante éste.

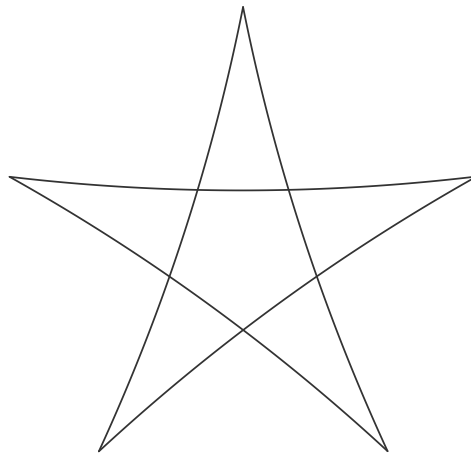


Figura 2.15

- Caso de $p = 5$, para $n = 2$, el polígono que se obtiene es estrellado (figura 2.15).
- Si $p = 6$ y $n = 2$ resultan dos triángulos coincidentes de modo que $N_1 = N_4$, $N_2 = N_5$ y $N_3 = N_6$.
- Cuando $p = 7$, para $n = 2$ y $n = 3$, los polígonos correspondientes son estrellados (figuras 2.16 y 2.17).
- Para $p = 8$, el polígono resulta estrellado sólo cuando $n = 3$. Para $n = 2$ se obtienen dos cuadriláteros coincidentes, de modo que $N_i = N_{i+4}$, $i \leq 4$.
- Son también estrellados los polígonos dados por las siguientes condiciones:
 - Para $p = 9$, siendo $n = 2$ y $n = 4$.
 - Para $p = 10$, si $n = 3$.
 - Para $p = 11$, si $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$.
 - Para $p = 12$, cuando $n = 5$.

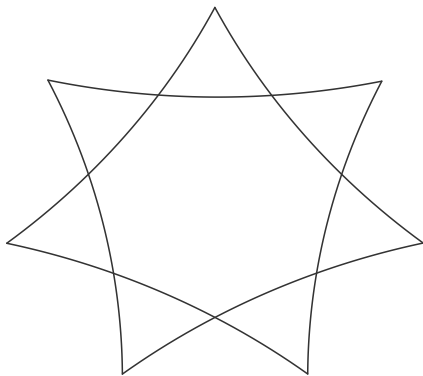


Figura 2.16

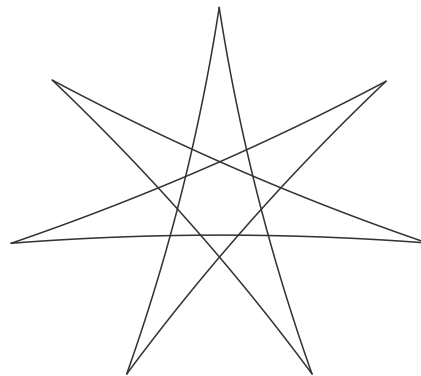


Figura 2.17

Puede comprobarse que de las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, en el caso de polígonos regulares, emergen otras soluciones además de las citadas más arriba. Cabe entonces plantearse la existencia de otro tipo de polígonos hiperbólicos regulares, además de los convexos o estrellados anteriormente aludidos o, en caso contrario, encontrar una interpretación geométrica de las soluciones diferentes. A continuación, en la proposición 2.5.2, se prueba que los únicos polígonos

regulares son los convexos o estrellados anteriores y la interpretación de las soluciones diferentes, para el caso particular de polígonos rectángulos, se estudia en el siguiente capítulo.

Antes de probar la proposición 2.5.2, conviene hacer algunas consideraciones previas. Sea Π_p un polígono hiperbólico regular de p lados de longitud r con todos sus ángulos de medida θ , de manera que el lado λ_1 está en la geodésica \mathbf{h}_1 de vector normal $-X_1$, X_0 es el vértice común a los lados λ_1 y λ_2 , y la orientación de éstos es tal que θ es el ángulo direccional desde λ_1 a λ_2 .

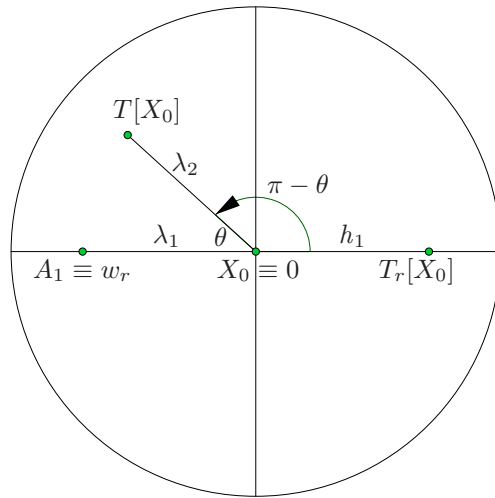


Figura 2.18

La matriz

$$T_r = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}r & \operatorname{sh} \frac{1}{2}r \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}r & \operatorname{ch} \frac{1}{2}r \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

representa la traslación de desplazamiento r que deja invariante la geodésica \mathbf{h}_1 y transforma $z_r = \cos s_r + i \operatorname{sen} s_r \in \mathbb{U}^2$ en $i \in \mathbb{U}^2$, siendo $\cos s_r = -\operatorname{th} r$, $\operatorname{sen} s_r = \operatorname{sech} r$:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}r & \operatorname{sh} \frac{1}{2}r \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}r & \operatorname{ch} \frac{1}{2}r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}r & \operatorname{sh} \frac{1}{2}r \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}r & \operatorname{ch} \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}r & \operatorname{sh} \frac{1}{2}r \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}r & \operatorname{ch} \frac{1}{2}r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} r & -\operatorname{ch} r \\ \operatorname{ch} r & \operatorname{sh} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}r & \operatorname{sh} \frac{1}{2}r \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}r & \operatorname{ch} \frac{1}{2}r \end{pmatrix}.$$

El punto $z_r = -\operatorname{th} r + i \operatorname{sech} r$ de \mathbb{U}^2 se transforma, mediante $w = i \frac{z-i}{z+i}$, en el punto $w_r = -\operatorname{th} \frac{r}{2}$ del disco de Poincaré \mathcal{D} .

Por otra parte, la matriz

$$G_{\pi-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}(\pi - \theta) & \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - \theta) \\ -\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - \theta) & \cos \frac{1}{2}(\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \\ -\cos \frac{1}{2}\theta & \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

representa el giro alrededor de X_0 de ángulo $\pi - \theta$. Entonces la matriz

$$T = G_{\pi-\theta} T_r$$

representa la isometría que transforma λ_1 en λ_2 y cada lado λ_j de Π_p en el lado λ_{j+1} , dejando así invariante el polígono Π_p . Puede comprobarse que $\operatorname{tr} T = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \operatorname{ch} \frac{1}{2}r$.

En la siguiente proposición se estudia cuáles son las posibles relaciones entre la longitud r del lado y la medida del ángulo θ que determinan los tipos de polígonos regulares existentes.

Proposición 2.5.2 *Todos los polígonos hiperbólicos regulares de p lados son de uno de los dos siguientes tipos:*

- a) *Convexos, y entonces la relación entre la longitud λ del lado y la medida θ del ángulo viene dada por*

$$\operatorname{ch} \lambda = \frac{1 + 2 \cos(2\pi/p) + \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (2.14)$$

es decir,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1 - 2 \cos(2\pi/p)}{\operatorname{ch} \lambda + 1}, \quad (2.15)$$

siendo $\theta < \pi - \frac{2\pi}{p}$.

- b) *Estrellados, cuando $p > 4$:*

$$\operatorname{ch} \lambda = \frac{1 + 2 \cos(2n\pi/p) + \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (2.16)$$

es decir,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1 - 2 \cos(2n\pi/p)}{\operatorname{ch} \lambda + 1}, \quad (2.17)$$

para los valores de n , primos con p , tales que $1 < n < \frac{p}{2}$ ó $1 < n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar, respectivamente. En estos casos, el ángulo θ del polígono debe satisfacer $\theta < \pi - \frac{2n\pi}{p}$.

Demostración

Sean el polígono Π_p y la transformación asociada a $T = G_{\pi-\theta}T_r$ considerados anteriormente. Si δ es el desplazamiento de dicha transformación, entonces $\text{tr } T = 2 \text{sen } \frac{1}{2}\theta \text{ ch } \frac{1}{2}r = 2 \text{ ch } \frac{1}{2}\delta$ y T es conjugada de la matriz

$$\Omega_\delta = \begin{pmatrix} e^{\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\delta/2} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Es decir, existe una matriz no singular $Q \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $T = Q \Omega_\delta Q^{-1}$.

Sean A_j , $j \leq p$, los vértices del polígono Π_p . Para que $T^p[A_j] = A_j$, $1 \leq j \leq p$, hace falta que $T^p = \pm \iota$. Luego

$$\Omega_\delta^p = \begin{pmatrix} e^{\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\delta/2} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} e^{in\pi} & 0 \\ 0 & e^{-in\pi} \end{pmatrix} = \pm \iota,$$

según que n sea par o impar y, por tanto,

$$\Omega_\delta = \begin{pmatrix} e^{in\pi/p} & 0 \\ 0 & e^{-in\pi/p} \end{pmatrix},$$

con $n < p$. Es decir, para que $T^p = \pm \iota$ es necesario y suficiente que

$$\delta = i \frac{2n\pi}{p}; \quad n < p.$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ alrededor del centro del polígono. Como $\text{tr } T > 0$, los distintos valores de $\text{ch } \frac{1}{2}\delta$ son de la forma

$$\text{ch } \frac{1}{2}\delta = \cos \frac{n\pi}{p},$$

con $n < \frac{p}{2}$ ó $n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar. Por tanto,

$$\cos^2 \frac{n\pi}{p} = \text{sen}^2 \frac{1}{2}\theta \text{ ch}^2 \frac{1}{2}r$$

y

$$2 \left(1 + \cos \frac{2n\pi}{p} \right) = (1 - \cos \theta) (\text{ch } r + 1).$$

Es decir,

$$\text{ch } r = \frac{1 + 2 \cos(2n\pi/p) + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Para que $\text{ch } r > 1$ es necesario y suficiente que

$$\cos \theta > -\cos \frac{2n\pi}{p} = \cos \left(\pi - \frac{2n\pi}{p} \right) \quad \text{y} \quad \theta < \pi - \frac{2n\pi}{p}.$$

Las demás afirmaciones son consecuencia de la proposición 2.5.1 y consideraciones posteriores a dicha proposición. ■

Si no se impone la condición $ch r > 1$ se obtienen soluciones no reales, cuya interpretación geométrica se estudiará en el capítulo siguiente para el caso de polígonos con todos sus ángulos rectos.

En la [hoja 2.3 del Apéndice](#) se muestra el procedimiento para la construcción automática de polígonos hiperbólicos regulares, convexos o estrellados.

Los resultados de este capítulo se aplican al estudio de polígonos con todos sus ángulos rectos, en el capítulo siguiente, y en el capítulo 4 se utilizan para la construcción de regiones fundamentales de grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico.

Capítulo 3

Polígonos hiperbólicos rectángulos de \mathbb{H}^2

En el capítulo anterior se han obtenido las fórmulas que relacionan los elementos de un polígono cualquiera, convexo o no. En este capítulo tales fórmulas se restringen al caso particular de polígonos con todos sus ángulos rectos.

La notación y el sentido de la numeración consecutiva de los lados del capítulo anterior se conservan en el presente capítulo, así como también la elección del disco de Poincaré para las representaciones realizadas.

Entre los polígonos rectángulos se incluyen aquellos donde la orientación de algún par de lados consecutivos sea tal que el ángulo direccional correspondiente sea $3\pi/2$, es decir, $\kappa_i = 0$ y $\sigma_i = -1$. En lo que sigue, sin embargo, se considerará que dos lados consecutivos están siempre orientados de manera que el ángulo direccional es $\pi/2$, y por tanto $\kappa_i = 0$ y $\sigma_i = 1$. Con la notación del capítulo anterior, $\langle N_i, N_{i+1} \rangle = 0$, en cualquiera de ambos casos, siendo $\langle A_i, N_{i+1} \rangle = S_i$ ó $\langle A_i, N_{i+1} \rangle = -S_i$, según se trate de polígonos del primero o del segundo tipo.

Son bien conocidas las fórmulas correspondientes a pentágonos y hexágonos rectángulos ([Iv], [Be2], [Fe]). Se conocen también algunas fórmulas válidas para polígonos rectángulos, cualquiera que sea el número de sus lados [C-Ma2]. Con los resultados del capítulo 2 se obtienen otras fórmulas generales que relacionan los lados de un polígono rectángulo cualquiera.

A lo largo de la primera sección del capítulo se deducen las relaciones generales entre los elementos de un polígono rectángulo, que permiten obtener las relaciones entre las longitudes de los lados, expresar en $sl_2(\mathbb{R})$ los vértices y los vectores normales en función de tales longitudes y, posteriormente, deducir las condiciones para la convexidad de polígonos rectángulos. Esos resultados posibilitan la resolución y representación de polígonos rectángulos de cualquier número de lados.

En la segunda sección se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la convexidad del polígono, que se enuncian en el teorema 3.2.2. Tales condiciones son independientes de las deducidas en el capítulo anterior.

En la hoja 3.0 del Apéndice de la Memoria se definen, mediante Maple, las

relaciones y condiciones estudiadas en las dos primeras secciones, y en la hoja 3.1 se obtienen explícitamente las fórmulas para polígonos rectángulos de p lados.

Por último, en la tercera sección, se estudian los polígonos rectángulos regulares y, además de las soluciones correspondientes a los polígonos convexos y estrellados, aparecen en el proceso soluciones no reales. La sección concluye con la interpretación geométrica de estas soluciones no reales.

En la hoja 3.2 del Apéndice se definen y explicitan las fórmulas de polígonos rectángulos regulares convexos y estrellados. También se representan diversos ejemplos de polígonos regulares de ambos tipos.

3.1. Relaciones entre sus elementos

Los primeras relaciones del capítulo 2 se restringen, en la presente sección, al caso de polígonos rectángulos. Se establecen las igualdades matriciales análogas a las deducidas en el teorema 2.1.4 y en el corolario 2.1.5, de las que se obtienen las relaciones generales entre los elementos de cualquier polígono rectángulo –vértices, vectores normales a los lados y las longitudes de éstos– y se calculan las primeras de esas relaciones. Posteriormente, se indican los procedimientos de obtención de las fórmulas que relacionan las longitudes de los lados de un polígono rectángulo de cualquier número de lados y, finalmente, se explicitan las expresiones de los primeros y últimos vértices y vectores normales a los lados.

Una vez estudiadas, en la sección siguiente, las condiciones para la convexidad de un polígono rectángulo, se aplican algunos resultados de esta sección para resolver y representar un caso particular de polígono rectángulo convexo.

3.1.1. Expresiones generales

Como consecuencia del lema 2.1.1, podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1 *Con la notación elegida para vértices y lados de un polígono rectángulo, se cumple que*

- (a) $\langle A_h, N_{h+1} \rangle = [N_{h-1}, N_h, N_{h+1}] = -S_h$.
- (b) $\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \rangle = -S_h$ y $\langle A_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = 0$.
- (c) $\langle A_h \wedge N_h, N_{h+1} \rangle = C_h$ y $\langle N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = -1$.
- (d) $\langle A_h \wedge N_h, A_{h+1} \wedge N_{h+1} \rangle = 0$.

$$(e) [A_{h-1}, A_h, A_{h+1}] = S_{h-1}S_h. \quad \blacksquare$$

Con la notación de la proposición 2.1.3, en el caso de un polígono rectángulo, la igualdad (2.3) puede escribirse

$$F_h = G(h, h+1) = \begin{pmatrix} C_h & -S_h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_h & -C_h & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

y empleando la misma notación de las igualdades (2.1), es decir,

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= \langle A_j, A_k \rangle, & \delta_{j,k} &= -\langle N_j, A_k \rangle, & \beta_{j,k} &= -\langle A_j \wedge N_j, A_k \rangle, \\ \eta_{j,k} &= \langle N_j, N_k \rangle, & \gamma_{j,k} &= -\langle N_j, A_k \wedge N_k \rangle, & \varepsilon_{j,k} &= -\langle A_j \wedge N_j, A_k \wedge N_k \rangle, \end{aligned}$$

las columnas de la matriz $G(1, h+1) = G(1, h)F_h$ son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{1,h+1} \\ \delta_{1,h+1} \\ \beta_{1,h+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,h}C_h - \beta_{h,1}S_h \\ \delta_{1,h}C_h + \gamma_{1,h}S_h \\ \beta_{1,h}C_h + \varepsilon_{1,h}S_h \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\delta_{h+1,1} \\ -\eta_{1,h+1} \\ \gamma_{h+1,1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(\alpha_{1,h}S_h - \beta_{h,1}C_h) \\ -(\delta_{1,h}S_h + \gamma_{1,h}C_h) \\ -(\beta_{1,h}S_h + \varepsilon_{1,h}C_h) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\beta_{h+1,1} \\ \gamma_{1,h+1} \\ \varepsilon_{1,h+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\delta_{h,1} \\ -\eta_{1,h} \\ \gamma_{h,1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Puede observarse que

$$\beta_{h+1,1} = \delta_{h,1}, \quad \gamma_{1,h+1} = -\eta_{1,h}, \quad \varepsilon_{1,h+1} = \gamma_{h,1}.$$

Además, el cálculo de las primeras matrices $G(1, k)$ daría los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} G(1, 2) &= F_1 = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_1 & -C_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ G(1, 3) &= F_1F_2 = \begin{pmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & -S_1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$G(1, 4) = F_1 F_2 F_3 = \begin{pmatrix} C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & -C_1 S_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3 & -S_1 S_2 \end{pmatrix}.$$

Y del cálculo de la matriz $G(1, 5)$ se tiene, por ejemplo,

$$\langle A_1, A_5 \rangle = \alpha_{1,5} = C_1 C_2 C_3 C_4 - (S_1 S_3 C_4 + C_1 S_2 S_4),$$

$$-\langle N_1, A_5 \rangle = \delta_{1,5} = S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4,$$

$$\langle N_1, N_5 \rangle = \eta_{1,5} = S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4.$$

Por el corolario 2.1.5, para un polígono rectángulo de p lados, $p \geq 5$, se tiene que

$$G(1, p) = \begin{pmatrix} C_p & 0 & -S_p \\ S_p & 0 & -C_p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$F_p = H_{p-1} H_{p-2} \cdots H_1,$$

siendo

$$H_j = \begin{pmatrix} C_j & 0 & -S_j \\ S_j & 0 & -C_j \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.1.2 *En el caso de un polígono hiperbólico rectángulo, se tiene*

$$\alpha_{1,h+1} = \alpha_{1,h} C_h - \delta_{h-1,1} S_h, \quad (3.3)$$

que permanece válida aunque los ángulos θ_1 y θ_{h+1} no sean rectos;

$$\eta_{1,h+1} = \delta_{1,h} S_h - \eta_{1,h-1} C_h; \quad (3.4)$$

cumpléndose

$$\delta_{h+1,1} = \alpha_{1,h} S_h - \delta_{h-1,1} C_h, \quad (3.5)$$

siendo $\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{1,2} = C_1, \delta_{1,1} = 0, \delta_{2,1} = S_1$, y permanece válida aunque el ángulo θ_1 no sea recto;

$$\delta_{1,h+1} = \delta_{1,h} C_h - \eta_{1,h-1} S_h, \quad (3.6)$$

siendo $\eta_{1,1} = -1, \eta_{1,2} = 0, \delta_{1,1} = 0, \delta_{1,2} = 0$, y también conserva su validez aunque θ_{h+1} no sea recto.

Además,

$$\beta_{1,h+1} = \beta_{1,h}C_h + \gamma_{h-1,1}S_h \quad (3.7)$$

y

$$\gamma_{h+1,1} = -(\beta_{1,h}S_h + \gamma_{h-1,1}C_h), \quad (3.8)$$

siendo $\beta_{1,1} = 0, \beta_{1,2} = S_1, \gamma_{1,1} = 0, \gamma_{2,1} = -C_1$.

La igualdad para $\beta_{1,h+1}$ es válida aunque θ_1 y θ_{h+1} no sean ángulos rectos, e igual cabe decir para $\gamma_{h+1,1}$ aunque θ_1 no sea recto.

Demostración

Basta tener en cuenta las igualdades (3.1), (3.2) y que $\beta_{h,1} = \delta_{h-1,1}, \gamma_{1,h} = -\eta_{1,h-1}, \varepsilon_{1,h} = \gamma_{h-1,1}$. ■

Pueden compararse los resultados con los de la proposición 2.1.6.

3.1.2. Relaciones entre los elementos de un polígono de ángulos rectos

En las siguientes proposiciones se obtienen las relaciones entre los primeros productos escalares $\eta_{1,h+1} = \langle N_1, N_{h+1} \rangle$, $\alpha_{1,h+1} = \langle A_1, A_{h+1} \rangle$ y las medidas de los lados del polígono. Las expresiones para $\eta_{h,k} = \langle N_h, N_k \rangle$ y $\alpha_{h,k} = \langle A_h, A_k \rangle$ no serían sino las análogas a las deducidas para $\eta_{1,h+1}$ y $\alpha_{1,h+1}$, respectivamente. En tales proposiciones, se obtienen también las expresiones de los primeros productos escalares $\delta_{1,h+1} = -\langle N_1, A_{h+1} \rangle$ y $\delta_{h,1} = -\langle N_h, A_1 \rangle$, cuya interpretación geométrica ya se indicó en el capítulo anterior. Las igualdades que resultan permiten obtener fórmulas que relacionan los lados de los polígonos rectángulos.

Posteriormente, se obtienen las expresiones para los primeros productos escalares $\beta_{1,h} = -\langle A_1 \wedge N_1, A_h \rangle$ y $\gamma_{h,1} = -\langle A_1 \wedge N_1, N_h \rangle$, que permiten, junto con las fórmulas aludidas, expresar cada vértice A_j y cada vector N_j respecto a A_1 y N_1 , con los coeficientes en función de las longitudes de los lados, lo que posibilita la construcción de polígonos hiperbólicos rectángulos de cualquier número de lados.

Proposición 3.1.3 *En todo polígono hiperbólico rectángulo de p lados, $p \geq 5$, se cumple que*

$$\begin{aligned} \eta_{1,3} &= C_2, & \eta_{1,4} &= S_2S_3, & \eta_{1,5} &= S_2C_3S_4 - C_2C_4, \\ \delta_{1,3} &= S_2, & \delta_{1,4} &= S_2C_3, & \delta_{1,5} &= S_2C_3C_4 - C_2S_4. \end{aligned}$$

Además,

- Si $p > 5$:

$$\eta_{1,6} = S_2 C_3 C_4 S_5 - (C_2 S_4 S_5 + S_2 S_3 C_5),$$

$$\delta_{1,6} = S_2 C_3 C_4 C_5 - (C_2 S_4 C_5 + S_2 S_3 S_5).$$

- En el caso de $p > 6$:

$$\eta_{1,7} = S_2 (C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) S_6 - (C_2 S_4 C_5 S_6 + S_2 C_3 S_4 C_6) + C_2 C_4 C_6,$$

$$\delta_{1,7} = S_2 (C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) C_6 - (C_2 S_4 C_5 C_6 + S_2 C_3 S_4 S_6) + C_2 C_4 S_6.$$

- En el caso de $p > 7$:

$$\begin{aligned} \eta_{1,8} &= S_2 [C_3 C_4 C_5 C_6 - (S_3 S_5 C_6 + C_3 S_4 S_6)] S_7 \\ &\quad - (C_2 S_4 C_5 C_6 S_7 + S_2 C_3 C_4 S_5 C_7) \\ &\quad + (C_2 C_4 S_6 S_7 + S_2 S_3 C_5 C_7) + C_2 S_4 S_5 C_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,8} &= S_2 [C_3 C_4 C_5 C_6 - (S_3 S_5 C_6 + C_3 S_4 S_6)] C_7 \\ &\quad - (C_2 S_4 C_5 C_6 C_7 + S_2 C_3 C_4 S_5 S_7) \\ &\quad + (C_2 C_4 S_6 C_7 + S_2 S_3 C_5 S_7) + C_2 S_4 S_5 S_7. \end{aligned}$$

Demostración

Las ocho primeras igualdades son una consecuencia de la proposición 2.1.7 y los resultados obtenidos en su demostración. Para probar las siguientes se utilizan las igualdades (3.4) y (3.6). En efecto:

$$\begin{aligned} \eta_{1,7} &= \delta_{1,6} S_6 - \eta_{1,5} C_6 \\ &= [(S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5] S_6 - (S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4) C_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,7} &= \delta_{1,6} C_6 - \eta_{1,5} S_6 \\ &= [(S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5] C_6 - (S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4) S_6. \end{aligned}$$

y, análogamente, para las dos últimas igualdades, teniendo en cuenta que

$$\eta_{1,8} = \delta_{1,7} S_7 - \eta_{1,6} C_7 \quad \text{y} \quad \delta_{1,8} = \delta_{1,7} C_7 - \eta_{1,6} S_7.$$

■

Puede observarse que la igualdad para $\delta_{1,h}$ también conserva su validez aunque θ_h no sea recto.

Proposición 3.1.4 *En todo polígono hiperbólico rectángulo de p lados, $p \geq 5$, se cumple que*

$$\begin{aligned}\alpha_{1,3} &= C_1 C_2, \\ \alpha_{1,4} &= C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3, \\ \alpha_{1,5} &= C_1 C_2 C_3 C_4 - (S_1 S_3 C_4 + C_1 S_2 S_4); \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\delta_{3,1} &= C_1 S_2, \\ \delta_{4,1} &= C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3, \\ \delta_{5,1} &= C_1 C_2 C_3 S_4 - (S_1 S_3 S_4 + C_1 S_2 C_4). \end{aligned}$$

Además,

■ si $p > 5$:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,6} &= C_1 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) C_5 - (S_1 S_3 C_4 C_5 + C_1 C_2 S_3 S_5) + S_1 C_3 S_5, \\ \delta_{6,1} &= C_1 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) S_5 - (S_1 S_3 C_4 S_5 + C_1 C_2 S_3 C_5) + S_1 C_3 C_5. \end{aligned}$$

■ para $p > 6$:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,7} &= C_1 [C_2 C_3 C_4 C_5 - (C_1 S_2 S_4 C_5 + C_1 C_2 S_3 S_5)] C_6 \\ &\quad - (S_1 S_3 C_4 C_5 C_6 + C_1 C_2 C_3 S_4 S_6) \\ &\quad + (S_1 C_3 S_5 C_6 + C_1 S_2 C_4 S_6) + S_1 S_3 S_4 S_6, \\ \delta_{7,1} &= C_1 [C_2 C_3 C_4 C_5 - (C_1 S_2 S_4 C_5 + C_1 C_2 S_3 S_5)] S_6 \\ &\quad - (S_1 S_3 C_4 C_5 S_6 + C_1 C_2 C_3 S_4 C_6) \\ &\quad + (S_1 C_3 S_5 S_6 + C_1 S_2 C_4 C_6) + S_1 S_3 S_4 C_6. \end{aligned}$$

Demostración

Es una consecuencia de la proposición 2.1.8, algunos resultados obtenidos en su demostración y las igualdades (3.3) y (3.5). De estas últimas, se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_{1,6} &= \alpha_{1,5} C_5 - \delta_{4,1} S_5 \\ &= [(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4] C_5 - (C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{6,1} &= \alpha_{1,5} S_5 - \delta_{4,1} C_5 \\ &= [(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4] S_5 - (C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) C_5. \end{aligned}$$

Además,

$$\alpha_{1,7} = \alpha_{1,6}C_6 - \delta_{5,1}S_6 \quad \text{y} \quad \delta_{7,1} = \alpha_{1,6}S_6 - \delta_{5,1}C_6.$$

■

Puede observarse que cada igualdad para $\alpha_{1,h}$ permanece válida aunque los ángulos θ_1 y θ_h no sean rectos. La igualdad para $\delta_{h,1}$ conserva su validez aunque el ángulo θ_1 no sea recto.

Como en el capítulo anterior, las fórmulas obtenidas a continuación permitirán, junto con los resultados de las proposiciones anteriores, expresar los vértices de un polígono rectángulo y los vectores normales a los lados, en función del primer vértice A_1 y el vector normal al primer lado N_1 .

Proposición 3.1.5 *En todo polígono rectángulo de p lados, $p \geq 5$, se cumple que*

$$\begin{aligned}\beta_{1,3} &= S_1C_2, \\ \beta_{1,4} &= S_1C_2C_3 - C_1S_3, \\ \beta_{1,5} &= S_1C_2C_3C_4 - (C_1S_3C_4 + S_1S_2S_4); \\ y \\ \gamma_{3,1} &= -S_1S_2, \\ \gamma_{4,1} &= -S_1C_2S_3 + C_1C_3, \\ \gamma_{5,1} &= -S_1C_2C_3S_4 + (C_1S_3S_4 + S_1S_2C_4).\end{aligned}$$

Además,

■ *si $p > 5$:*

$$\beta_{1,6} = S_1(C_2C_3C_4 - S_2S_4)C_5 - (C_1S_3C_4C_5 + S_1C_2S_3S_5) + C_1C_3S_5,$$

$$\gamma_{6,1} = -S_1(C_2C_3C_4 - S_2S_4)S_5 + (C_1S_3C_4S_5 + S_1C_2S_3C_5) - C_1C_3C_5.$$

■ *para $p > 6$:*

$$\begin{aligned}\beta_{1,7} &= S_1(C_2C_3C_4C_5 - S_2S_4C_5 - C_2S_3S_5)C_6 \\ &\quad - (C_1S_3C_4C_5C_6 + S_1C_2C_3S_4S_6) \\ &\quad + (C_1C_3S_5C_6 + S_1S_2C_4S_6) + C_1S_3S_4S_6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{7,1} &= -S_1(C_2C_3C_4C_5 - S_2S_4C_5 - C_2S_3S_5)S_6 \\ &\quad + (C_1S_3C_4C_5S_6 + S_1C_2C_3S_4C_6) \\ &\quad (C_1C_3S_5S_6 + S_1S_2C_4C_6) - C_1S_3S_4C_6.\end{aligned}$$

Demostración

Basta aplicar la proposición 2.1.9 y las igualdades (3.7) y (3.8). ■

Obsérvese que las igualdades para $\beta_{1,h}$ son válidas aunque θ_1 y θ_h no sean ángulos rectos, e igual cabe decir para $\gamma_{h,1}$ aunque θ_1 no sea recto.

3.1.3. Relaciones entre las longitudes de los lados de un polígono rectángulo

Como se adelantó en la introducción del capítulo, ya son conocidas algunas relaciones entre los lados de un polígono rectángulo. Mediante los resultados anteriores se pueden obtener fórmulas nuevas que relacionan los lados de un polígono rectángulos de p lados:

- Si el polígono tiene p lados puede obtenerse una fórmula para el lado λ_{p-1} igualando C_{p-1} a la expresión de $\eta_{p,p-2}$, que depende de las longitudes de los $p - 3$ primeros lados.
- Además, es posible igualar $S_{p-2}S_{p-1}$ a la expresión válida para $\eta_{p,p-3}$, en función de los $p - 4$ primeros lados. Análogamente, $S_{p-1}S_p = \eta_{1,p-2}$.

Así, para un polígono rectángulo, utilizando las tres fórmulas

$$\begin{aligned} C_{p-1} &= \eta_{p,p-2} \\ S_{p-2}S_{p-1} &= \eta_{p,p-3} \\ S_{p-1}S_p &= \eta_{1,p-2} \end{aligned}$$

anteriores es posible obtener directamente las longitudes de los tres últimos lados, conocidas las medidas de los demás lados del polígono.

- Otras fórmulas menos complicadas son las obtenidas igualando
 - las dos expresiones correspondientes a $\eta_{p,h}$, $h = \frac{p}{2}$, en el caso de p par.
 - las dos expresiones válidas para $\delta_{h,1}$, $h = \frac{p+1}{2}$, en el caso de p impar.
- Las fórmulas anteriores y el resto de relaciones entre las longitudes de lados resultan de igualar las dos expresiones que corresponden a cada uno de los productos escalares siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= \langle A_j, A_k \rangle, & \delta_{j,k} &= -\langle N_j, A_k \rangle, & \beta_{j,k} &= -\langle A_j \wedge N_j, A_k \rangle, \\ \eta_{j,k} &= \langle N_j, N_k \rangle, & \gamma_{j,k} &= -\langle N_j, A_k \wedge N_k \rangle, & \varepsilon_{j,k} &= -\langle A_j \wedge N_j, A_k \wedge N_k \rangle, \end{aligned}$$

siendo $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq p$.

En la [hoja 3.1 del Apéndice](#) se indica el procedimiento para obtener las fórmulas que relacionan los lados de un polígono rectángulo convexo de cualquier número de lados, resolviéndose y construyendo algunos ejemplos de polígonos rectángulos, después de aplicar las condiciones para que sean convexos, que son objeto de nuestro estudio en la sección siguiente, y utilizar las expresiones de los vértices y de los vectores normales a los lados, tratadas a continuación.

3.1.4. Expresión de los vértices de un polígono hiperbólico rectángulo

En el epígrafe 2.3.1 se obtuvieron las expresiones de los primeros vértices de un polígono en función del primer vértice A_1 y el vector N_1 normal al primer lado. Con los resultados anteriores del presente capítulo, para polígonos rectángulos, es posible expresar explícitamente un mayor número de vértices A_h , en función de las longitudes de los lados previos y de las matrices A_1 y N_1 . El procedimiento seguido puede aplicarse para cualquier número de lados.

Por las igualdades (2.9) se sabe que

$$A_h = \alpha_{1,h} A_1 + \delta_{1,h} N_1 + \beta_{1,h}(A_1 \wedge N_1),$$

y de las proposiciones 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5, se tiene

$$A_2 = C_1 A_1 + S_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$A_3 = C_1 C_2 A_1 + S_2 N_1 + S_1 C_2(A_1 \wedge N_1),$$

$$A_4 = (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) A_1 + S_2 C_3 N_1 + (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)(A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_5 = & (C_1 C_2 C_3 C_4 - (S_1 S_3 C_4 + C_1 S_2 S_4)) A_1 \\ & + (S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4) N_1 \\ & + (S_1 C_2 C_3 C_4 - (C_1 S_3 C_4 + S_1 S_2 S_4)) (A_1 \wedge N_1) \end{aligned}$$

y

$$A_6 = \alpha_{1,6} A_1 + \delta_{1,6} N_1 + \beta_{1,6}(A_1 \wedge N_1),$$

siendo

$$\alpha_{1,6} = ((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4] C_5 - (C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5),$$

$$\delta_{1,6} = (S_2 C_3 C_4 C_5 - (C_2 S_4 C_5 + S_2 S_3 S_5)),$$

$$\beta_{1,6} = (S_1 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) C_5 - (C_1 S_3 C_4 C_5 + S_1 C_2 S_3 S_5) + C_1 C_3 S_5).$$

Así, sucesivamente, se obtendrían las expresiones para los vértices A_h , $h > 6$.

También cabe expresar los últimos vértices mediante la igualdad

$$A_{p-h} = \alpha_{1,p-h} A_1 + \delta_{1,p-h} N_1 + \beta_{1,p-h} (A_1 \wedge N_1),$$

utilizando debidamente las fórmulas conocidas para los coeficientes. Así,

$$A_p = C_p A_1 + S_p N_1,$$

$$A_{p-1} = C_{p-1} C_p A_1 + C_{p-1} S_p N_1 + S_{p-1} (A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} A_{p-2} &= (C_{p-2} C_{p-1} C_p - S_{p-2} S_p) A_1 \\ &\quad + (C_{p-2} C_{p-1} S_p - S_{p-2} C_p) N_1 \\ &\quad + (C_{p-2} S_{p-1}) (A_1 \wedge N_1) \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $\beta_{5,1} = \delta_{4,1}$, reformulando las expresiones para $\alpha_{1,5}$, $\delta_{5,1}$ y $\delta_{4,1}$ de la proposición 3.1.4, se obtiene

$$\begin{aligned} A_{p-3} &= (C_{p-3} C_{p-2} C_{p-1} C_p - (S_{p-3} S_{p-1} C_p + C_{p-3} S_{p-2} S_p)) A_1 \\ &\quad + (C_{p-3} C_{p-2} C_{p-1} S_p - (S_{p-3} S_{p-1} S_p + C_{p-3} S_{p-2} C_p)) N_1 \\ &\quad + (C_{p-3} C_{p-2} S_{p-1} - S_{p-3} C_{p-1}) (A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

3.1.5. Expresión de los vectores normales a los lados de un polígono hiperbólico rectángulo

En una de las igualdades (2.9) se expresa el vector normal al lado λ_h en función de A_1 y N_1 :

$$N_h = -\delta_{h,1} A_1 - \eta_{1,h} N_1 + \gamma_{h,1} (A_1 \wedge N_1)$$

y se obtienen las expresiones de los vectores normales a los primeros lados. Utilizando las proposiciones 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5, en el caso de un polígono rectángulo, se tiene

$$N_2 = -S_1 A_1 - C_1(A_1 \wedge N_1),$$

$$N_3 = -C_1 S_2 A_1 - C_2 N_1 - S_1 S_2 (A_1 \wedge N_1),$$

$$N_4 = -(C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) A_1 - S_2 S_3 N_1 - (S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3) (A_1 \wedge N_1),$$

$$\begin{aligned} N_5 = & -(C_1 C_2 C_3 S_4 - (S_1 S_3 S_4 + C_1 S_2 C_4)) A_1 \\ & - (S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4) N_1 \\ & - (S_1 C_2 C_3 S_4 - (C_1 S_3 S_4 + S_1 S_2 C_4)) (A_1 \wedge N_1) \end{aligned}$$

y

$$N_6 = -\delta_{6,1} A_1 - \eta_{1,6} N_1 + \gamma_{6,1} (A_1 \wedge N_1),$$

siendo

$$\delta_{6,1} = [(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4] S_5 - (C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) C_5,$$

$$\eta_{1,6} = (S_2 C_3 C_4 S_5 - (C_2 S_4 S_5 + S_2 S_3 C_5)),$$

$$\gamma_{6,1} = -(S_1 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) S_5 - (C_1 S_3 C_4 S_5 + S_1 C_2 S_3 C_5) + C_1 C_3 C_5)$$

y así sucesivamente.

También es posible expresar los vectores normales a los últimos lados, teniendo en cuenta que

$$N_{p-h} = -\delta_{p-h,1} A_1 - \eta_{1,p-h} N_1 + \gamma_{p-h,1} (A_1 \wedge N_1).$$

Así,

$$N_p = A_1 \wedge N_1,$$

$$N_{p-1} = -S_p A_1 - C_p N_1,$$

$$N_{p-2} = -S_{p-1} C_p A_1 - S_{p-1} S_p N_1 - C_{p-1} (A_1 \wedge N_1).$$

Además, como $\gamma_{1,h+1} = -\eta_{1,h}$, reformulando las expresiones para $\delta_{1,h}$ y $\eta_{1,h}$ de la proposición 3.1.3, se obtiene

$$\begin{aligned} N_{p-3} &= -(S_{p-2}C_{p-1}C_p - C_{p-2}S_p) A_1 \\ &\quad - (S_{p-2}C_{p-1}S_p - C_{p-2}C_p) N_1 \\ &\quad - S_{p-2}S_{p-1}(A_1 \wedge N_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{p-4} &= -(S_{p-3}C_{p-2}C_{p-1}C_p - (C_{p-3}S_{p-1}C_p + S_{p-3}S_{p-2}S_p)) A_1 \\ &\quad - (S_{p-3}C_{p-2}C_{p-1}S_p - (C_{p-3}S_{p-1}S_p + S_{p-3}S_{p-2}C_p)) N_1 \\ &\quad - (S_{p-3}C_{p-2}S_{p-1} - C_{p-3}C_{p-1})(A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

Así sucesivamente.

3.2. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un polígono hiperbólico rectángulo convexo

En la proposición 2.2.2 y el teorema 2.2.3 se estudiaron las condiciones para la convexidad de un polígono de p lados, $p \geq 5$. Aunque tales condiciones podrían restringirse al caso de polígonos con todos sus ángulos rectos, sin embargo, como se prueba seguidamente, pueden encontrarse unas condiciones particulares sobre $p-3$ lados consecutivos, que posibilitan la elección de longitudes para esos lados, de modo que el polígono sea convexo.

Lema 3.2.1 *En un polígono rectángulo convexo, dos lados no consecutivos cualesquiera son ultraparalelos.*

Demostración

Sean λ_i y λ_j dos lados no consecutivos del polígono. Basta probar que $\eta_{i,j} = \langle N_i, N_j \rangle > 1$. La desigualdad anterior es evidente si $j = i + 2$. Suponiendo que no se cumpla en otro caso, podemos asumir que $\langle N_p, N_j \rangle \leq 1$ para algún $j > 2$ y entonces, por la convexidad y la orientación de los lados, $0 \leq \langle N_p, N_j \rangle \leq 1$ y las geodésicas de λ_p , λ_j tienen un punto común, propio o impropio, que es exterior al polígono, de manera que ambas geodésicas y los lados λ_k , $1 \leq k < j$, determinan un polígono de $j+1$ lados con dos ángulos rectos, $j-2$ ángulos iguales a $\frac{3\pi}{2}$ y un ángulo $\theta_{p,j}$, $0 \leq \theta_{p,j} < \pi$, con $\cos \theta_{p,j} = \langle N_p, N_j \rangle$. Tiene que cumplirse que

$$s = \pi + (j-2)\frac{3\pi}{2} + \theta_{p,j} < (j-1)\pi.$$

Dado que la desigualdad $\pi + (j - 2) \frac{3\pi}{2} \leq s < (j - 1)\pi$ exige que $j < 2$, es imposible que $\langle N_p, N_j \rangle \leq 1$ para algún $j > 2$. Queda probado, así, el ultraparalelismo de cada par de lados no consecutivos del polígono. ■

Teorema 3.2.2 *Dadas las longitudes de los $p-3$ primeros lados λ_h de un polígono hiperbólico rectángulo convexo de p lados, $p \geq 5$, entonces tal polígono existe si y sólo si*

- *Para el caso de un pentágono:*

$$\eta_{5,3} = S_1 S_2 > 1.$$

- *Cuando $p \geq 6$:*

$$\eta_{p,h} > 1; \quad 4 \leq h \leq p - 2.$$

siendo $\eta_{i,j} = \langle N_i, N_j \rangle$ y N_k el vector normal al lado λ_k .

Demostración

Por el lema anterior, si el polígono es convexo, se cumple $\eta_{p,h} > 1$, $2 \leq h \leq p - 2$.

En el caso del pentágono, la desigualdad $\eta_{5,3} > 1$ equivale al ultraparalelismo de los lados λ_3 y λ_5 , el segmento perpendicular común es el cuarto lado, el polígono puede cerrarse con lados de longitud determinada y es convexo.

En el caso de $p \geq 6$, si los lados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son tales que $\eta_{p,4} = S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 > 1$, entonces $\eta_{p,3} = S_1 S_2 > 1$ y, análogamente, $\eta_{1,4} = S_2 S_3 > 1$. En efecto, si $\eta_{p,4} > 1$, se tiene

$$C_2 > \frac{1 + C_1 C_3}{S_1 S_3}.$$

Suponiendo que $\eta_{p,3} = S_1 S_2 \leq 1$, entonces

$$C_2^2 - 1 \leq \frac{1}{S_1^2} \quad \text{y} \quad C_2^2 \leq \frac{1}{S_1^2} + 1 = \frac{C_1^2}{S_1^2}.$$

Así,

$$\frac{C_1}{S_1} \geq C_2 > \frac{1 + C_1 C_3}{S_1 S_3} \quad \text{y} \quad C_1 S_3 > 1 + C_1 C_3.$$

La falsedad de esta última desigualdad exige que $S_1 S_2 > 1$.

Si $\eta_{p,h} > 1$, $4 \leq h \leq p - 2$, como además $\eta_{p,3} > 1$, por el signo positivo de los productos escalares $\eta_{p,h}$, la geodésica de λ_h , $3 \leq h \leq p - 2$, no puede cortar a la geodésica de λ_p , ni a las de los lados anteriores a λ_{h-1} . Además, con $\eta_{p,p-2} > 1$,

se garantiza que el polígono pueda cerrarse, como en el caso del pentágono. Así, en las condiciones dadas, el polígono existe y es convexo.

Obsérvese que las expresiones de $\eta_{p,h}$ presuponen que el ángulo direccional desde cada lado al siguiente, en ningún caso mide $\frac{3\pi}{2}$, sino $\frac{\pi}{2}$. ■

Si $p > 5$, la condición

$$\text{sh } \lambda_h \text{ sh } \lambda_{h+1} > 1; \quad 1 \leq h < p - 3$$

no es suficiente, como puede verse en el siguiente caso particular. Sean

$$C_1 = \text{ch } \lambda_1 = \frac{5}{4}, C_2 = \text{ch } \lambda_2 = \frac{13}{5}, C_3 = \text{ch } \lambda_3 = \frac{5}{3}.$$

Entonces $S_1 = \frac{3}{4}$, $S_2 = \frac{12}{5}$, $S_3 = \frac{4}{3}$. Así,

$$S_1 S_2 = \frac{9}{5} > 1, S_2 S_3 = \frac{16}{5} > 1 \quad \text{y} \quad \eta_{p,4} = S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 = \frac{31}{60} < 1$$

y, por tanto, los lados λ_4 , λ_p no son ultraparalelos, imposibilitando la construcción de algún polígono rectángulo convexo con las longitudes λ_1 , λ_2 , λ_3 dadas anteriormente para los tres primeros lados.

También puede comprobarse que, en el caso de $p > 6$, no basta que $\eta_{p,h} > 1$, $4 < h \leq p - 2$, para que $S_k S_{k+1} > 1$, $1 \leq k < p - 3$. En efecto, pueden encontrarse heptágonos rectángulos autointersectantes con $\eta_{7,5} > 1$ y, sin embargo, $S_1 S_2 < 1$. Por ejemplo, sean las longitudes de los lados tales que

$$S_1 = 0.8, S_2 = 0.9, S_3 = 0.2, S_4 = 9, S_5 = 3.29, S_6 = 0.33, S_7 = 11.84,$$

donde los lados λ_1 y λ_4 son secantes y $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$, $\sigma_5 = \sigma_6 = \sigma_7 = \sigma_1 = -1$.

Ejemplo:

Se considera el caso de un octógono hiperbólico convexo. Para la convexidad se requieren las siguientes condiciones:

$$\eta_{8,4} > 1; \quad \eta_{8,5} > 1; \quad \eta_{8,6} > 1.$$

Elegimos

$$C_1 = \frac{17}{8}, C_3 = \frac{25}{7}.$$

Como $S_1 = \frac{15}{8}$, $S_3 = \frac{24}{7}$, de

$$\eta_{8,4} = S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 > 1$$

se tiene que

$$C_2 > \frac{481}{360}.$$

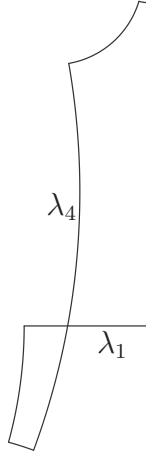


Figura 3.1

Sea $C_2 = \frac{13}{5}$. Tiene que cumplirse (proposición 3.1.3)

$$\eta_{8,5} = S_1 C_2 C_3 S_4 - (C_1 S_3 S_4 + S_1 S_2 C_4) > 1,$$

es decir,

$$\frac{81}{8} S_4 - \frac{9}{2} C_4 > 1.$$

Elegimos $C_4 = \frac{5}{3}$ y como (proposición 3.1.3)

$$\eta_{8,6} = S_1 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) S_5 - (C_1 S_3 C_4 S_5 + S_1 C_2 S_3 C_5) + C_1 C_3 C_5 > 1,$$

tiene que ser

$$\frac{87}{8} S_5 - \frac{73}{8} C_5 > 1.$$

Si $C_5 = \frac{37}{12}$ se cumple esta condición y entonces

$$C_7 = \eta_{8,6} = \frac{87}{8} \frac{35}{12} - \frac{73}{8} \frac{37}{12} = \frac{43}{12}.$$

Además, de

$$S_5 C_6 S_7 - C_5 C_7 = S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3,$$

se tiene

$$C_6 = \frac{83}{\sqrt{1705}}$$

e igualando las dos expresiones válidas para $\eta_{8,6}$:

$$S_7 S_8 = S_2 C_3 C_4 S_5 - (C_2 S_4 S_5 + S_2 S_3 C_5),$$

entonces

$$S_8 = \frac{7792}{105\sqrt{1705}}$$

Fijando $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de las expresiones para los vértices y los vectores normales a los lados de los epígrafes 3.1.4 y 3.1.5, se obtiene

$$A_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -15 & -17 \\ 17 & 15 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -39 & -25 \\ \frac{317}{5} & 39 \end{pmatrix}, A_4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -81 & -\frac{265}{7} \\ 175 & 81 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -87 & -\frac{255}{7} \\ \frac{3143}{15} & 87 \end{pmatrix}, A_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{83}{3} & -\frac{65}{7} \\ \frac{3787}{45} & \frac{83}{3} \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \frac{\sqrt{1705}}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{215}{2387} \\ \frac{301}{225} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, A_8 = \sqrt{1705} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{15}{2387} \\ \frac{7}{75} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$N_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ -15 & -17 \end{pmatrix}, N_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -\frac{77}{5} & -9 \end{pmatrix}, N_4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 73 & \frac{225}{7} \\ -\frac{819}{5} & -73 \end{pmatrix},$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} 6 & \frac{15}{7} \\ -\frac{49}{3} & -6 \end{pmatrix}, N_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{43}{3} & \frac{25}{7} \\ -\frac{2387}{45} & -\frac{43}{3} \end{pmatrix},$$

$$N_7 = \sqrt{1705} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{15}{2387} \\ -\frac{7}{75} & 0 \end{pmatrix}, N_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La representación del octógono sería:

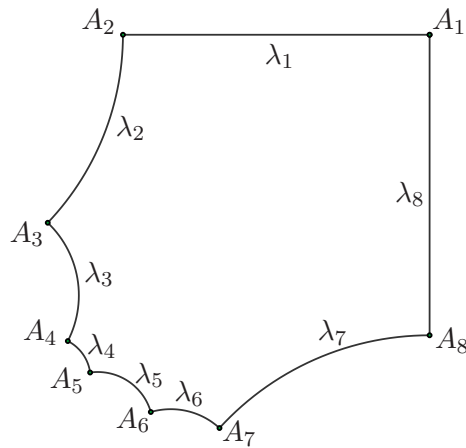


Figura 3.2

3.3. Polígonos hiperbólicos regulares de ángulos rectos

3.3.1. Polígonos regulares rectángulos convexos y estrellados

En la última sección del capítulo anterior se estudiaron los tipos de polígonos regulares existentes —convexos y estrellados— y se establecieron, en cada caso, las relaciones entre la longitud del lado λ y la medida del ángulo θ , dadas ciertas condiciones para θ . Aquí se restringen tales relaciones al caso $\theta = \pi/2$. Sin embargo, prescindiendo de las condiciones que resultan de imponer que $\text{ch } \lambda > 1$, se obtienen soluciones que admiten cierta interpretación geométrica. Por otra parte, tales soluciones emergen también, de modo natural, de las ecuaciones que pueden deducirse de la primera sección, igualando las dos expresiones válidas para determinados productos escalares. La interpretación geométrica de dichas soluciones es objeto de estudio al final de la sección.

De la proposición 2.5.2 se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.3.1 *Todos los polígonos hiperbólicos rectángulos regulares de p lados, $p \geq 5$, son de uno de los dos siguientes tipos:*

a) *Convexos, y entonces*

$$\text{ch } \lambda = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{p}.$$

b) *Estrellados, y entonces*

$$\text{ch } \lambda = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p},$$

para los valores de n , primos con p , $p \geq 9$, tales que $1 < n < \frac{p}{4}$. ■

Puede observarse que, como $p \geq 5$, para el caso a), el ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ satisface la condición $\theta < \pi - \frac{2\pi}{p}$ y, para el caso b), la condición $\theta < \pi - \frac{2n\pi}{p}$ es equivalente a $n < \frac{p}{4}$. Además, en cualquier caso, se cumple que $\text{ch } \lambda < 3$.

La medida del lado λ_p para algunos de los primeros polígonos rectángulos regulares convexos de p lados son

$$\text{ch } \lambda_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{ch } \lambda_6 = 2, \quad \text{ch } \lambda_8 = 1 + \sqrt{2},$$

$$\text{ch } \lambda_{10} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{ch } \lambda_{12} = 1 + \sqrt{3}, \quad \text{ch } \lambda_{20} = 1 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Los primeros polígonos rectángulos regulares estrellados son de la siguiente forma:

- En el caso de $p = 9$, para $n = 2$ (figura 3.3).
- Si $p = 11$ y $n = 2$.
- Cuando $p = 13$, si $n = 2$ y $n = 3$.
- Para $p = 14$, si $n = 3$.
- Para $p = 15$, siendo $n = 2$.
- Para $p = 16$, cuando $n = 3$.
- Para $p = 17$, si $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.
- Si $p = 19$, siendo $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.
- En el caso de $p = 20$ y $n = 3$.

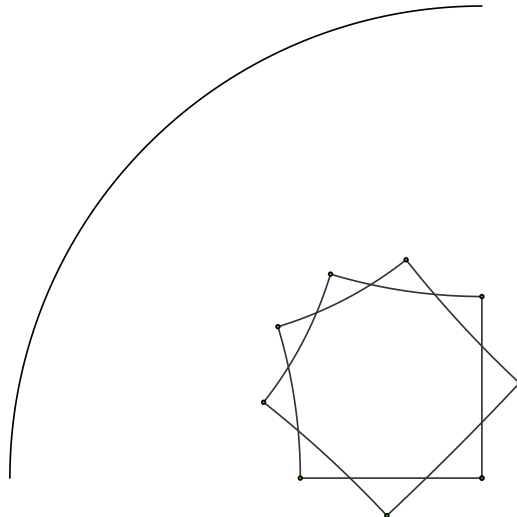


Figura 3.3

Puede observarse que, de ciertas fórmulas para polígonos rectángulos, las ecuaciones que se obtienen, si todos los lados son iguales, tienen soluciones que no están incluidas entre las correspondientes a los polígonos regulares rectángulos existentes. Por ejemplo,

- Para $p = 5$, se sabe que $C_{j+3} = S_j S_{j+1}$ ($j \bmod 5$). Si los lados son iguales entonces $C = S^2$, es decir, $C^2 - C - 1 = 0$, cuyas soluciones son

$$C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad C = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Puede comprobarse que ambas son también soluciones de otras fórmulas para polígonos rectángulos. La primera corresponde a $C = \operatorname{ch} \lambda_5$, pero la segunda carece de sentido si $\lambda > 0$.

- Para $p = 6$, se tiene que $C_{j+4} = S_j C_{j+1} S_{j+2} - C_j C_{j+2}$ ($j \bmod 6$) y, si los lados son iguales, $C^3 - 2C - C^2 = 0$, cuyas soluciones son

$$C = 0, \quad C = -1, \quad C = 2,$$

y únicamente la última es una solución válida.

Como puede observarse, tales soluciones coinciden con los valores

$$C = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p},$$

siendo $n = 1, \dots, p$. Para polígonos de un mayor número de lados puede comprobarse que se extraen conclusiones análogas.

El propósito del resto del capítulo es encontrar una interpretación geométrica de las soluciones aparentemente ficticias.

Sean T_λ y $G_{\pi/2}$ las matrices (2.12) y (2.13):

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda & \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda & \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}, \quad G_{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y Π_p un polígono regular con ángulos rectos de p lados de longitud λ , $\operatorname{ch} \lambda < 3$, que tiene un vértice en X_0 , y los lados λ_1, λ_2 en las geodésicas orientadas perpendiculares $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, de vectores normales $-X_1$ y $-X_2$.

Proposición 3.3.2 *La isometría $T = G_{\pi/2} T_\lambda$ transforma la geodésica \mathbf{h}_1 en la geodésica \mathbf{h}_2 y, si $A_j, j \leq p$, son los vértices del polígono Π_p , entonces $T[A_j] = A_{j+1}$ ($j \bmod p$).*

Además, T puede expresarse como

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\lambda} & e^{\frac{1}{2}\lambda} \\ -e^{-\frac{1}{2}\lambda} & e^{-\frac{1}{2}\lambda} \end{pmatrix}$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ alrededor del centro A del polígono Π_p , siendo

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda}{2}}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda & -e^{\frac{1}{2}\lambda} \\ e^{-\frac{1}{2}\lambda} & \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix},$$

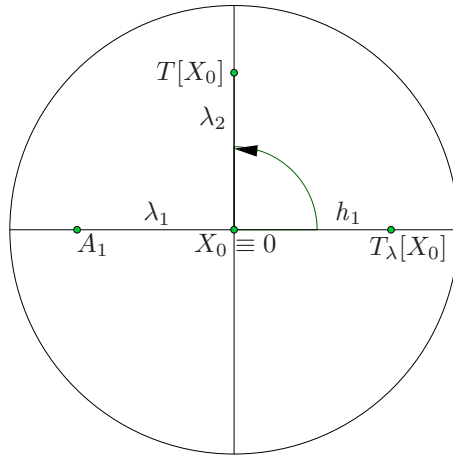


Figura 3.4

que corresponde al punto de \mathbb{U}^2 :

$$z = \left(-e^{\frac{1}{2}\lambda} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda, e^{\frac{1}{2}\lambda} \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda} \right)$$

y, en el disco de Poincaré, al punto

$$w = \frac{-1 + i}{\operatorname{coth} \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\operatorname{coth}^2 \frac{1}{2}\lambda - 2}}$$

(Puede observarse que $2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{p} = 1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda = \frac{3 - \operatorname{ch} \lambda}{2}$, siendo $\operatorname{ch} \lambda < 3$).

Demostración

La primera parte es evidente. Y, como $\operatorname{ch} \lambda = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}$, se tiene

$$\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda = \cos \frac{2n\pi}{p} \quad \text{y} \quad \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda = \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{p}.$$

Así, $\operatorname{tr} T = \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda = 2 \cos \frac{n\pi}{p}$ y, por tanto, T es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$. Si T deja invariante el punto $A \in \mathbb{H}^2$, entonces, teniendo en cuenta el corolario 1.4.12 y que $\operatorname{tr} T = 2 \cos \frac{n\pi}{p}$, la matriz T puede escribirse

$$T = -A \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} + \iota \cos \frac{n\pi}{p}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{p}} \left(-T + \iota \cos \frac{n\pi}{p} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda}} \left(-T\sqrt{2} + \iota \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda & -e^{\frac{\lambda}{2}} \\ e^{-\frac{\lambda}{2}} & \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Las demás conclusiones son inmediatas. ■

3.3.2. Interpretación geométrica de soluciones no reales

Se considera la isometría de \mathbb{H}^3 siguiente:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix},$$

donde $\rho \in \mathbb{C}$.

Si λ es la longitud del lado de un polígono rectángulo regular de p lados, para $\rho = \lambda$ se tiene que $R = T$, siendo T el giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ estudiado más arriba.

Como vemos en la siguiente proposición, la isometría R también transforma la geodésica \mathbf{h}_1 en la geodésica \mathbf{h}_2 , y la geodésica \mathbf{h}_σ invariante por R está determinada por el semigiro:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sh}^2 \frac{1}{2}\rho}} \begin{pmatrix} -\text{sh} \frac{1}{2}\rho & -e^{\frac{1}{2}\rho} \\ e^{-\frac{1}{2}\rho} & \text{sh} \frac{1}{2}\rho \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

En general, la isometría R no deja invariante el polígono Π_p definido en el epígrafe anterior. Existen, sin embargo, ciertos valores de ρ para los que $R^p [A_j] = A_j$, $j \leq p$, siendo A_j los vértices del polígono Π_p y, por tanto, $R^p = \pm \iota$.

Para las longitudes $\rho = \lambda$ de los polígonos rectángulos regulares se cumple que $R = T$ y $R^p [A_j] = A_j$. Se trata aquí de encontrar los restantes valores de ρ para los que $R^p = \pm \iota$.

Proposición 3.3.3 *Sea la isometría de \mathbb{H}^3 siguiente:*

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix}; \quad \rho \in \mathbb{C}.$$

Se cumple que

- *La isometría R transforma la geodésica \mathbf{h}_1 , de vector normal $-X_1$, en la geodésica \mathbf{h}_2 , de vector normal $-X_2$, y el semigiro alrededor de la geodésica \mathbf{h}_σ invariante por R es*

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sh}^2 \frac{1}{2}\rho}} \begin{pmatrix} -\text{sh} \frac{1}{2}\rho & -e^{\frac{1}{2}\rho} \\ e^{-\frac{1}{2}\rho} & \text{sh} \frac{1}{2}\rho \end{pmatrix}.$$

(Obsérvese que $1 - \text{sh}^2 \frac{1}{2}\rho = \frac{3-\text{ch}\rho}{2}$.)

- Los distintos valores de ρ que satisfacen la igualdad $R^p = \pm \iota$ son de la forma

$$\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}; \quad n \leq \frac{p}{2} \text{ ó } n < \frac{p+1}{2},$$

según que p sea par o impar, respectivamente.

- Más aún,

- Si $n < \frac{p}{4}$ entonces $\rho = \lambda > 0$, siendo λ la longitud de los lados de un polígono rectángulo regular. En este caso, $\operatorname{ch} \lambda < 3$ y $\lambda < \ln(3 + 2\sqrt{2})$.
- Si $n \geq \frac{p}{4}$, entonces $\rho = i\theta$ y $\cos \theta = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}$. Así, la transformación R puede expresarse

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix}.$$

- En cualquier supuesto, la isometría R es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ alrededor de la geodésica \mathbf{h}_σ , siendo σ la matriz (3.9), que si $\rho = i\theta$ puede escribirse

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

(Obsérvese que $1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{3 - \cos \theta}{2}$).

Demostración

Los semigiros alrededor de las geodésicas \mathbf{h}_1 y \mathbf{h}_2 son, respectivamente, $\sigma_1 = iX_1$ y $\sigma_2 = iX_2$. La igualdad

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ e^{-\frac{1}{2}\rho} & -e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

prueba que $R\sigma_1 R^{-1} = \sigma_2$, (véase la proposición 1.2.2).

Para probar la expresión de σ basta considerar la igualdad

$$R = i\sigma \operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta + \iota \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta$$

de la proposición 1.4.6 y que $\operatorname{tr} R = \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\rho$, donde $\delta \in \mathbb{C}$ es el desplazamiento de R y $\operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\rho$, $\operatorname{sh} \frac{1}{2}\delta = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\rho}$.

Si $X \in SL(2, \mathbb{C})$, para que $X^p = \pm \iota$ es necesario y suficiente que

$$X = S \quad \text{ó} \quad X = QSQ^{-1},$$

siendo

$$S = \begin{pmatrix} e^{in\pi/p} & 0 \\ 0 & e^{-in\pi/p} \end{pmatrix}; \quad 0 \leq n \leq p$$

y $Q \in SL(2, \mathbb{C})$ una matriz no singular. Según que n sea par o impar, $X^p = \iota$ ó $X^p = -\iota$, respectivamente.

Se sabe que la matriz R es conjugada de

$$\Omega_\delta = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\delta} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\delta} \end{pmatrix}.$$

Es decir, para que $R^p = \pm \iota$ es necesario y suficiente que

$$\delta = i\frac{2n\pi}{p}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ alrededor de la geodésica \mathbf{h}_σ .

Puede comprobarse que los distintos valores de $\cos \frac{n\pi}{p}$ corresponden a $n \leq \frac{p}{2}$ ó $n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar.

Dado que $\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\rho = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}\delta$, para tales valores de n , se tiene

$$\operatorname{ch} \rho = 4 \cos^2 \frac{n\pi}{p} - 1 = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}.$$

Para que $\operatorname{ch} \rho > 1$ se requiere que $\frac{2n\pi}{p} < \frac{\pi}{2}$ y $n < \frac{p}{4}$. Si $n \geq \frac{p}{4}$, entonces $\rho = i\theta$ y $\cos \theta = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}$. ■

A continuación se indican los distintos valores de $\operatorname{ch} \rho$ obtenidos anteriormente, para polígonos de p lados con $5 \leq p \leq 10$.

$$\begin{aligned} p = 5 & \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \\ p = 6 & \quad 2, 0, -1. \\ p = 7 & \quad 1 + 2 \cos \frac{2}{7}\pi, 1 - 2 \cos \frac{3}{7}\pi, 1 - 2 \cos \frac{1}{7}\pi. \\ p = 8 & \quad 1 + \sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2}, -1. \\ p = 9 & \quad 1 + 2 \cos \frac{2}{9}\pi, 1 + 2 \cos \frac{4}{9}\pi, 0, 1 - 2 \cos \frac{1}{9}\pi. \\ p = 10 & \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
 p = 5 & \quad \mathbf{1.618}, -0.618. \\
 p = 6 & \quad \mathbf{2}, 0, -1. \\
 p = 7 & \quad \mathbf{2.247}, 0.555, -0.802. \\
 p = 8 & \quad \mathbf{2.414}, 1, -0.414, -1. \\
 p = 9 & \quad \mathbf{2.532}, \mathbf{1.347}, 0, -0.879. \\
 p = 10 & \quad \mathbf{2.618}, \mathbf{1.618}, 0.382, -0.618, -1.
 \end{aligned}$$

Una vez hallados los distintos valores de ρ que satisfacen la igualdad $R^p = \pm \iota$, sabemos que la isometría R es un giro de ángulo $\phi = \frac{2n\pi}{p}$ alrededor de la geodésica \mathbf{h}_σ , siendo σ la matriz de la proposición anterior, y si

$$\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}; \quad 0 < n < \frac{p}{4},$$

el valor de $\rho = \lambda > 0$ es la longitud de los lados de un polígono regular de ángulos rectos, convexo o estrellado. Además, $\operatorname{ch} \lambda < 3$ y $\lambda < \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

Sin embargo, queda por interpretar el significado geométrico de las restantes soluciones. También se sabe que, en tales casos, para $n \geq \frac{p}{4}$, siendo $n \leq \frac{p}{2}$ ó $n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar, entonces $\rho = i\theta$ y

$$\cos \theta = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}.$$

Para las soluciones reales $\rho = \lambda$, el polígono Π_p tiene por centro el punto de \mathbb{U}^2 :

$$z = \left(-e^{\frac{1}{2}\lambda} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\lambda, e^{\frac{1}{2}\lambda} \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\lambda} \right)$$

que, en el disco de Poincaré, corresponde al punto

$$w = \frac{-1 + i}{\coth \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\lambda - 1}}$$

y es, a su vez, el centro de rotación de la transformación R .

Cuando $\rho = i\theta$ el eje de R es la geodésica \mathbf{h}_σ , donde

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}$$

es la matriz del semigirotación alrededor de \mathbf{h}_σ . Como ya se observó en su momento, $1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{3 - \cos \theta}{2}$.

En la siguiente proposición se prueba que, si $\rho = i\theta$, la geodésica \mathbf{h}_σ pasa por el punto $X_0 \in \mathbb{H}^2$ y se obtiene la proyección ortogonal de \mathbf{h}_σ sobre el plano \mathbb{H}^2 . Por último, se prueba que θ es el ángulo diedro que forma \mathbb{H}^2 con el plano $R(\mathbb{H}^2)$.

Proposición 3.3.4 *Se consideran las isometrías de \mathbb{H}^3 siguientes:*

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}, R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix},$$

donde $\cos \theta = 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{p}$, $n \geq \frac{p}{4}$, siendo $n \leq \frac{p}{2}$ ó $n < \frac{p+1}{2}$, según que p sea par o impar. Se tiene entonces que

- La geodésica \mathbf{h}_σ pasa por el punto X_0 .
- La proyección ortogonal de \mathbf{h}_σ sobre el plano \mathbb{H}^2 es la geodésica \mathbf{h}_τ , donde

$$\tau = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que es la bisectriz del ángulo adyacente al ángulo direccional desde la geodésica \mathbf{h}_1 a la geodésica \mathbf{h}_2 , de vectores normales respectivos $-X_1$ y $-X_2$. En el disco de Poincaré, la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero.

- $R[X_3] = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$ y el ángulo diedro que forman los planos \mathbb{H}^2 y $R(\mathbb{H}^2)$ es θ .

Demostración

La igualdad

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -e^{\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \\ i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{-\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{\frac{1}{2}i\theta} & -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

prueba que $\sigma[X_0] = \sigma X_0 \bar{\sigma}^{-1} = X_0$.

La proyección ortogonal \mathbf{h}_τ de la geodésica \mathbf{h}_σ sobre el plano de vector normal P está determinada por la matriz $\sigma - P \bar{\sigma} \bar{P}$. En efecto, teniendo en cuenta las

igualdades (1.8) y (1.10), como $\sigma = \frac{i}{\operatorname{sh} d(A,B)} (A \times B)$, siendo A, B dos puntos de \mathbf{h}_σ , se tiene que la reflexión de la geodésica \mathbf{h}_σ en el plano está determinada por el semigiros $\sigma' = -P\bar{\sigma}\bar{P}$ y entonces la matriz $\sigma + \sigma' = \sigma - P\bar{\sigma}\bar{P}$ determina, salvo constantes, el semigiros τ alrededor de \mathbf{h}_τ .

En el caso particular $P = X_3 = i\mathbf{u}$, basta calcular la matriz

$$\sigma - \bar{\sigma} = -\frac{2i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que, una vez normalizada, da la matriz del semigiros alrededor de \mathbf{h}_τ :

$$\tau = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puede observarse que \mathbf{h}_τ es una geodésica del plano \mathbb{H}^2 de vector normal

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 + X_2).$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned} R[X_3] &= R X_3 \bar{R}^{-1} = i R \bar{R}^{-1} \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & -e^{-\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{-i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\langle R[X_3], X_3 \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(-iR[X_3]) = -\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -\cos \theta.$$

Es decir, el ángulo diedro que forman los planos \mathbb{H}^2 y $R(\mathbb{H}^2)$ mide θ . ■

Si llamamos η y ψ a los ángulos que forma la geodésica \mathbf{h}_σ , respectivamente, con el plano \mathbb{H}^2 y con la geodésica \mathbf{h}_1 , una ilustración de las geodésicas citadas en la proposición podría ser la siguiente:

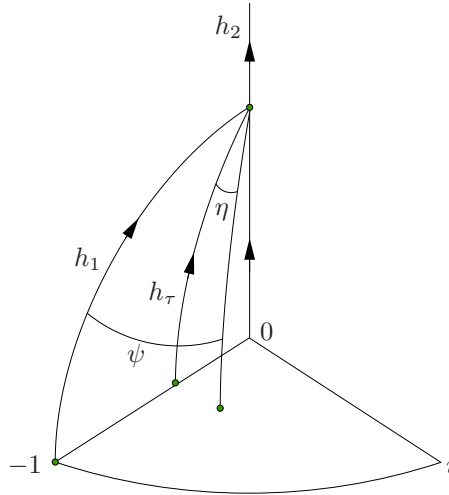


Figura 3.5

En la siguiente proposición se prueba que cabe asociar a la transformación R dos conjuntos ordenados \mathbf{G} y \mathbf{H} , ambos con $2p$ elementos: p planos y p geodésicas, donde cada geodésica de \mathbf{G} es la intersección de dos planos consecutivos de \mathbf{G} , y lo mismo es cierto para \mathbf{H} . Además, dos geodésicas consecutivas de \mathbf{G} son perpendiculares y dos planos consecutivos de \mathbf{H} también son perpendiculares. El ángulo θ es el ángulo que forman dos planos consecutivos de \mathbf{G} (resp. dos geodésicas consecutivas de \mathbf{H}). Más aún, dos planos alternos de \mathbf{H} determinan también un ángulo θ .

Obsérvese que, si $\rho = \lambda$, la transformación R es un giro de \mathbb{H}^2 y puede asociársele un polígono rectángulo regular, convexo o estrellado, de p lados con longitud λ . Considerando $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, si A_k es un vértice del polígono y N_k es el vector normal a un lado, también puede interpretarse A_k como el semigirolo alrededor de una geodésica perpendicular a \mathbb{H}^2 que pasa por el punto $A_k \in \mathbb{H}^2$ y N_k admite dos interpretaciones: el vector normal a un plano perpendicular a \mathbb{H}^2 que contiene a un lado del polígono o un vector que determina el semigirolo $\sigma_k = iN_k$ alrededor de una geodésica de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, cumpliéndose $\langle A_k, A_{k+1} \rangle = \langle N_{k-1}, N_{k+1} \rangle = \text{ch } \rho$ y $\langle N_k, N_{k+1} \rangle = \langle \sigma_k, \sigma_{k+1} \rangle = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ($k \bmod p$).

Si $\rho = i\theta$ entonces R es una transformación de \mathbb{H}^3 que no deja invariante el plano \mathbb{H}^2 y, como ya se dijo anteriormente, R determina ciertos planos y geodésicas manteniendo las propiedades indicadas.

Proposición 3.3.5 Sea R la transformación

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix}.$$

Dados los semigiros

$$\sigma_0 = X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1 = iX_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = iX_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

y el vector $X_3 = i$, entonces:

(a) Para los p planos $\mathbf{G}^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$, de vectores normales $R^k[X_3]$, y las p geodésicas $\mathbf{g}^{(k)}$, asociadas a los semigiros $R^k[\sigma_1]$, se cumple entonces que

1. $R[\sigma_1] = \sigma_2$ y $R[X_3] = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$.
2. $\mathbf{G}^{(k)} \cap \mathbf{G}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)}$ ($k \bmod p$).
3. Dos geodésicas consecutivas $\mathbf{g}^{(k)}$, $\mathbf{g}^{(k+1)}$ son perpendiculares y dos planos consecutivos $\mathbf{G}^{(k)}$, $\mathbf{G}^{(k+1)}$ determinan un ángulo diedro θ .

(b) Para los p planos $\mathbf{H}^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$, de vectores normales $R^k[X_1]$, y las p geodésicas $\mathbf{h}^{(k)}$, asociadas a los semigiros $R^k[\sigma_0]$, se cumple que

1. $R[X_1] = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ y $R[\sigma_0] = \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\mathbf{H}^{(k)} \cap \mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{h}^{(k)}$ ($k \bmod p$).
3. Dos planos consecutivos $\mathbf{H}^{(k)}$, $\mathbf{H}^{(k+1)}$ son perpendiculares y dos geodésicas consecutivas $\mathbf{h}^{(k)}$, $\mathbf{h}^{(k+1)}$ determinan un ángulo θ . Más aún, dos planos alternos $\mathbf{H}^{(k-1)}$, $\mathbf{H}^{(k+1)}$ determinan también un ángulo diedro θ .

Demostración

Las igualdades del primer apartado de (a) ya se probaron en las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4.

Las geodésicas $\mathbf{g}^{(p)}$ y $\mathbf{g}^{(1)}$, asociadas a los semigiros σ_1 y σ_2 , son perpendiculares y pertenecen a $\mathbb{H}^2 = \mathbf{G}^{(p)}$, cuyo vector normal es X_3 . Por tanto, las geodésicas $\mathbf{g}^{(k)}$, $\mathbf{g}^{(k+1)}$ son también perpendiculares, $\mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{G}^{(p)} \cap \mathbf{G}^{(1)}$ y entonces $\mathbf{G}^{(k)} \cap \mathbf{G}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)}$ ($k \bmod p$).

Sólo falta probar la segunda parte del tercer apartado. Los planos hiperbólicos de vectores normales $X_3, R[X_3]$ forman un ángulo diedro θ :

$$\langle R[X_3], X_3 \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(-iR[X_3]) = -\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -\cos \theta.$$

y, por tanto, θ es también el ángulo diedro que forman los planos consecutivos $\mathbf{G}^{(k)}, \mathbf{G}^{(k+1)}$.

Las igualdades

$$\begin{aligned} R[X_1] &= RX_1\overline{R}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ R[\sigma_0] &= R\sigma_0R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pueden comprobarse fácilmente y prueban el primer apartado de (b).

Además,

$$\sigma_0 X_1 \overline{\sigma_0}^{-1} = -X_1$$

y

$$R[\sigma_0] X_1 \overline{R[\sigma_0]}^{-1} = -X_1,$$

lo que prueba la pertenencia de las geodésicas $\mathbf{h}^{(p)}$ y $\mathbf{h}^{(1)}$ al plano de vector normal X_1 y $\mathbf{h}^{(1)} = \mathbf{H}^{(p)} \cap \mathbf{H}^{(1)}$. Por tanto, $\mathbf{H}^{(k)} \cap \mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{h}^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$.

La igualdad

$$\langle R[X_1], X_1 \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(R[X_1]\overline{X_1}) = 0$$

demuestra la perpendicularidad de $\mathbf{H}^{(p)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ y de dos planos consecutivos $\mathbf{H}^{(k)}$ y $\mathbf{H}^{(k+1)}$ en general. Además,

$$\begin{aligned} R^{-1}[X_1] &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -X_2 \end{aligned}$$

y las igualdades

$$\langle \sigma_0, R[\sigma_0] \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma_0 R[\sigma_0]) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta,$$

$$\langle R^{-1}[X_1], R[X_1] \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(-X_2 R[X_1]) = -\frac{1}{2} (-2 \cos \theta) = \cos \theta$$

prueban que tanto las geodésicas $\mathbf{h}^{(p)}$, $\mathbf{h}^{(1)}$ como los planos $\mathbf{H}^{(p-1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ determinan un ángulo θ y, por tanto, lo mismo puede decirse de dos geodésicas consecutivas $\mathbf{h}^{(k)}$, $\mathbf{h}^{(k+1)}$ y de los planos alternos $\mathbf{H}^{(k-1)}$, $\mathbf{H}^{(k+1)}$, en general. ■

Los semigiros alrededor de las tres primeras geodésicas $\mathbf{g}^{(k)}$, son

$$R[\sigma_1] = \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, R^2[\sigma_1] = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\theta} \\ -ie^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^3[\sigma_1] = \begin{pmatrix} -i \cos \theta & e^{i\theta} \operatorname{sen} \theta \\ -e^{-i\theta} \operatorname{sen} \theta & i \cos \theta \end{pmatrix}$$

y los correspondientes a las tres últimas:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, R^{-1}[\sigma_1] = \begin{pmatrix} -i \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & i \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R^{-2}[\sigma_1] = \begin{pmatrix} i \operatorname{sen}^2 \theta & (\operatorname{sen} \theta - i) \cos \theta \\ -(\operatorname{sen} \theta + i) \cos \theta & -i \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix};$$

los vectores normales a los tres primeros planos $\mathbf{G}^{(k)}$:

$$R[X_3] = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{-i\theta} \end{pmatrix}, R^2[X_3] = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & ie^{-i\theta} \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R^3[X_3] = \begin{pmatrix} e^{i\theta} (\operatorname{sen} \theta + i \cos^2 \theta) & \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -e^{-i\theta} (\operatorname{sen} \theta - i \cos^2 \theta) \end{pmatrix}$$

y a los tres últimos:

$$X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, R^{-1}[X_3] = \begin{pmatrix} i \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & i \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R^{-2}[X_3] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta + i \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen} \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

De modo análogo, para las tres primeras geodésicas $\mathbf{h}^{(k)}$:

$$R[\sigma_0] = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\theta} \\ ie^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}, R^2[\sigma_0] = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta & -ie^{i\theta} \cos \theta \\ ie^{-i\theta} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix},$$

$$R^3[\sigma_0] = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -e^{i\theta} (\operatorname{sen} \theta + i \cos^2 \theta) \\ -e^{-i\theta} (\operatorname{sen} \theta - i \cos^2 \theta) & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

y, para las tres últimas:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, R^{-1}[\sigma_0] = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta & -i \cos \theta \\ i \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix},$$

$$R^{-2}[\sigma_0] = \begin{pmatrix} \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \theta - i \cos^2 \theta \\ \operatorname{sen} \theta + i \cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}$$

Los vectores normales a los tres primeros planos $\mathbf{H}^{(k)}$:

$$R[X_1] = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix}, R^2[X_1] = \begin{pmatrix} ie^{i\theta} \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & ie^{-i\theta} \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix},$$

$$R^3[X_1] = \begin{pmatrix} -e^{i\theta} \cos \theta (1 - i \operatorname{sen} \theta) & \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen}^2 \theta & e^{-i\theta} \cos \theta (1 + i \operatorname{sen} \theta) \end{pmatrix}$$

y a los tres últimos:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R^{-1}[X_1] = -X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R^{-2}[X_1] = \begin{pmatrix} i \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & i \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}$$

A continuación se estudian algunos de los casos particulares de (3.10), utilizando los resultados de las proposiciones anteriores.

Interpretación geométrica de las soluciones para $p = 5$

Primer caso: pentágono regular de ángulos rectos convexo

En el caso de $\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, se tiene

$$\rho = \operatorname{arcch} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.061.$$

Además,

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2}\rho = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{5} + 1) \quad \text{y} \quad \operatorname{sh} \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{5} - 1}.$$

Por tanto,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 + \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} & \sqrt{5} + 1 + \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \\ -(\sqrt{5} + 1) + \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} & \sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \end{pmatrix}$$

es un giro de ángulo $\phi = \frac{2\pi}{5}$ alrededor del punto

$$A = \left(-e^{\frac{1}{2}\rho} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\rho, e^{\frac{1}{2}\rho} \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\rho} \right) \in \mathbb{U}^2.$$

Es decir,

$$w = (-0.281, 0.281) \in \mathcal{D}$$

que es el centro del pentágono. Puede comprobarse que $T^5 = -\iota$.

Segundo caso.

En el caso de $\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, se tiene que $\rho = i\theta$, donde

$$\theta = \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 128.17^\circ.$$

Además,

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{5} - 1) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{5} + 1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 + i\sqrt{2(1+\sqrt{5})} & \sqrt{5} - 1 + i\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \\ -(\sqrt{5} - 1) + i\sqrt{2(1+\sqrt{5})} & \sqrt{5} - 1 - i\sqrt{2(1+\sqrt{5})} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es un giro alrededor de \mathbf{h}_σ de giro $\phi = \frac{4}{5}\pi$, siendo

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{1+\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-1) - i\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-1) - i\sqrt{\sqrt{5}+1} & i\sqrt{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix}.$$

La figura 3.6 representa precisamente este caso. El giro R de ángulo $\phi = \frac{4}{5}\pi$, alrededor de \mathbf{h}_σ , transforma \mathbf{h}_1 en \mathbf{h}_2 , de modo que $R[U_1] = U_2$, $R[V_1] = V_2$. Obsérvese que $\lambda_1 \subset (U_1, X_0)$ y $\lambda_2 \subset (X_0, V_2)$. El ángulo diedro que forman los planos \mathbb{H}^2 y $R(\mathbb{H}^2)$ es θ .

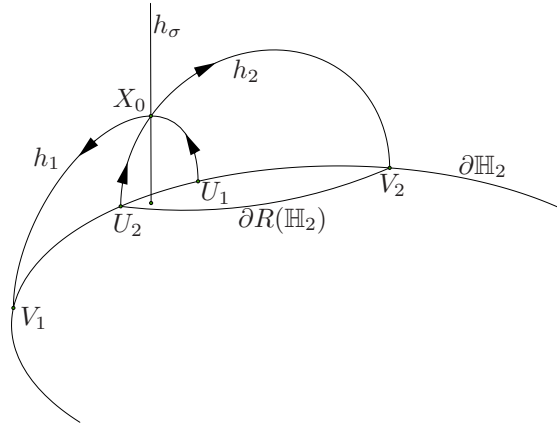


Figura 3.6

Los elementos geométricos $\mathbf{g}^{(k)}, \mathbf{G}^{(k)}$ y $\mathbf{h}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)}$ de la proposición 3.3.5, asociados a la isometría R quedan determinados, respectivamente, por las matrices

$$R^{-2}[\sigma_1], R^{-1}[\sigma_1], \sigma_1, R[\sigma_1], R^2[\sigma_1];$$

$$R^{-2}[X_3], R^{-1}[X_3], X_3, R[X_3], R^2[X_3];$$

y

$$R^{-2}[\sigma_0], R^{-1}[\sigma_0], \sigma_0, R[\sigma_0], R^2[\sigma_0];$$

$$R^{-2}[X_1], R^{-1}[X_1], X_1, R[X_1], R^2[X_1];$$

que pueden calcularse con los resultados obtenidos después de la proposición 3.3.5, siendo $\theta = \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Interpretación geométrica de las soluciones para $p = 6$

Primer caso. Hexágono regular de ángulos rectos convexo

En el caso de $\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2$, se tiene

$$\rho = \operatorname{arcch} 2 = 1.317.$$

Además,

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2}\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sh} \frac{1}{2}\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\rho} & e^{\frac{1}{2}\rho} \\ -e^{-\frac{1}{2}\rho} & e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

es un giro de ángulo $\phi = \frac{\pi}{3}$ alrededor del punto

$$w = (-0.366, 0.366) \in \mathcal{D}$$

que es el centro del hexágono. Como puede comprobarse, $T^6 = -\iota$.

Segundo caso.

En el caso de $\operatorname{ch} \rho = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 0$, se tiene $\rho = i\theta$, donde

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

es un giro alrededor de h_σ de giro $\phi = \frac{2\pi}{3}$, siendo

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta & -e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta} & i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix}.$$

El ángulo diedro que forman los planos \mathbb{H}^2 y $R(\mathbb{H}^2)$ es

$$\pi - \theta \text{ rad} = 90^\circ.$$

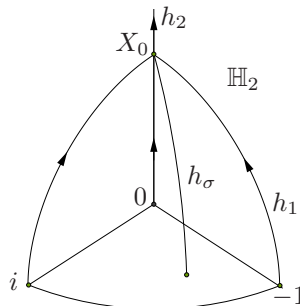


Figura 3.7

Ya se sabe que $R[\sigma_1] = R\sigma_1R^{-1} = \sigma_2$, y puede comprobarse que

$$\begin{aligned} R[\sigma_2] &= R\sigma_2R^{-1} = -X_0, \\ R[-X_0] &= R(-X_0)R^{-1} = \sigma_1, \\ R^3 &= -I. \end{aligned}$$

Tercer caso.

En el caso de $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \pi = -1$, se tiene que $\rho = i\pi$. Así,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & e^{\frac{1}{2}i\theta} \\ -e^{-\frac{1}{2}i\theta} & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es un semigiro alrededor de la geodésica de extremos $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ que permuta h_1 con h_2 .

Interpretación geométrica de las soluciones para $p = 7, p = 8, p = 9$

Heptágono, octógono y eneágono regulares convexos de ángulos rectos

- En el caso de $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}$, se tiene

$$\rho = 1.449,$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{2\pi}{7}$ alrededor del punto

$$w = (-0.418, 0.418) \in \mathcal{D},$$

que es el centro del heptágono.

- Si $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + 1$, entonces

$$\rho = 1.529,$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{\pi}{4}$ alrededor del punto

$$w = (-0.455, 0.455) \in \mathcal{D},$$

que es el centro del octógono.

- Cuando $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{9}$, entonces

$$\rho = 1.581,$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{2\pi}{9}$ alrededor del punto

$$w = (-0.483, 0.483) \in \mathcal{D},$$

que es el centro del eneágono. Ya se sabe que $R[\sigma_1] = R\sigma_1R^{-1} = \sigma_2$, y puede comprobarse que

$$\begin{aligned} R[\sigma_2] &= R\sigma_2R^{-1} = -X_0, \\ R[-X_0] &= R(-X_0)R^{-1} = \sigma_1, \\ R^3 &= -\iota. \end{aligned}$$

Eneágono regular de ángulos rectos estrellado

- Si $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{9}$, entonces

$$\rho = 0.811,$$

y T es un giro de ángulo $\phi = \frac{4\pi}{9}$ alrededor del punto

$$w = (-0.209, 0.209) \in \mathcal{D},$$

que es el centro del eneágono estrellado. Su representación ya se realizó en la figura 3.3.

Interpretaciones geométricas de otros casos

- En el caso de $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{7}$, se tiene que $\rho = i\theta$, donde

$$\theta = 56.29^\circ$$

y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{4\pi}{7}$.

- Si $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{6\pi}{7}$, entonces $\rho = i\theta$ donde

$$\theta = 143.31^\circ$$

y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{6\pi}{7}$.

- Cuando $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\rho = 0$ y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{\pi}{2}$ alrededor de la geodésica \mathbf{h}_σ , siendo

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma = X_0.$$

La figura siguiente ilustra este caso.

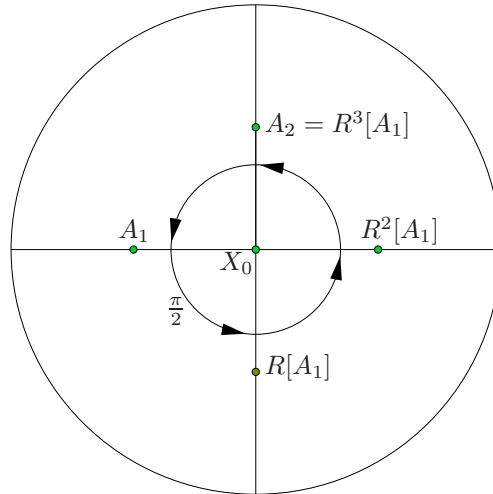


Figura 3.8

- Si $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{3\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}$, entonces $\rho = i\theta$, siendo

$$\theta = 114.47^\circ$$

y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

- El caso $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3}$ ya se estudió en el epígrafe de hexágonos regulares.

Si $\text{ch } \rho = 1 + 2 \cos \frac{8\pi}{9}$, se tiene que $\rho = i\theta$, donde

$$\theta = 151.57^\circ$$

y R es un giro de ángulo $\phi = \frac{8\pi}{9}$.

Los elementos geométricos asociados a las transformaciones R anteriores se pueden determinar con los resultados de la proposición 3.3.5 y las matrices calculadas después de la proposición, siendo θ el ángulo indicado en cada caso.

En el capítulo siguiente se estudian determinadas regiones fundamentales de ciertos grupos de isometrías del plano hiperbólico. En la tercera sección se utilizarán los polígonos de ángulos rectos para construir y manipular regiones fundamentales de grupos NEC que parametrizan superficies de Klein planares, es decir superficies de género topológico 0 y con $k \geq 3$ componentes en el borde. En el tratamiento de tales polígonos se aplican algunos resultados del capítulo 3. Para garantizar la convexidad se imponen las condiciones obtenidas en la segunda sección y, dados ciertos parámetros, se aplican fórmulas deducidas de ciertas relaciones de la primera sección para resolver el polígono. Las expresiones en $sl_2(\mathbb{R})$ de los vértices y los vectores normales a los lados de la sección primera se utilizan para la representación de las regiones fundamentales estudiadas.

Capítulo 4

Parametrización de superficies orientables sin borde y de superficies planares.

Construcción de regiones fundamentales

Una de las aplicaciones más importantes de los polígonos hiperbólicos es su papel como regiones fundamentales de los grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico: grupos Fuchsianos y grupos cristalográficos no euclídeos (en lo que sigue, grupos NEC). Estos grupos, a su vez, están íntimamente relacionados con la caracterización de superficies de Riemann y de Klein y, por otra parte, las regiones fundamentales asociadas a un grupo NEC aportan una interpretación geométrica del espacio de Teichmüller de las superficies. El espacio de Teichmüller es isomorfo a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{d(\Gamma)}$, cuya dimensión depende del grupo discreto Γ que uniformiza la superficie.

En los capítulos anteriores hemos estudiado, entre otras cosas, las fórmulas que relacionan los elementos (medidas de los ángulos y los lados, vértices, vectores normales a los lados) de un polígono convexo o no; algunas condiciones para que el polígono sea convexo, dados ciertos elementos; la resolución de polígonos hiperbólicos de p lados, conocidos $2p - 3$ datos; así como la construcción y representación de polígonos convexos o no. En el primer capítulo también se trató la determinación de isometrías del plano hiperbólico, lo que permite encontrar los generadores de un grupo de isometrías del plano hiperbólico, construida una región fundamental.

En este capítulo estudiamos algunas aplicaciones de los resultados de los capítulos anteriores en el caso concreto de regiones fundamentales de grupos Fuchsianos y grupos NEC. A lo largo del capítulo se dan procedimientos para construir ciertas regiones fundamentales que sirven para la parametrización del espacio de Teichmüller, se resuelven y representan ejemplos explícitos y se obtienen los generadores del grupo Γ en algunos de los ejemplos resueltos.

Además, las regiones fundamentales sirven para caracterizar geoméricamente familias de superficies que cumplan alguna propiedad adicional, en particular que

posean determinados automorfismos. Así, existen regiones que caracterizan a las superficies hiperelípticas –de Riemann y de Klein–, elípticas-hiperelípticas, etc.

En la primera sección del capítulo se presentan los preliminares –necesariamente breves– sobre los grupos Fuchsianos y los grupos NEC, sus regiones fundamentales canónicas, las superficies de Klein y el espacio de Teichmüller de las superficies de Klein.

En la segunda Sección se construyen regiones canónicas para grupos Fuchsianos que parametrizan superficies de Riemann compactas y se construyen a partir de ellas otras, debidas a Schmutz-Schaller [SS], útiles en el estudio de las superficies hiperelípticas.

En la tercera sección se utilizan los polígonos de ángulos rectos para construir y manipular regiones fundamentales de grupos NEC que parametrizan superficies de Klein planares, es decir superficies de género topológico 0 y con $k \geq 3$ componentes en el borde.

4.1. Preliminares

Sean $\mathcal{D} = \mathbb{H}^2$ el plano hiperbólico y \mathcal{G} el grupo de todas sus isometrías. Se denomina *grupo cristalográfico no Euclídeo* (grupo NEC) a todo subgrupo discreto Γ de \mathcal{G} , con espacio cociente \mathcal{D}/Γ compacto. Si un grupo NEC contiene sólo elementos que conservan la orientación, se llama grupo *Fuchsiano*. A un grupo NEC que no sea Fuchsiano se le llamará grupo NEC *propio*.

Designemos por \mathcal{G}^+ al grupo de los automorfismos de \mathcal{D} que preservan la orientación. El *grupo Fuchsiano canónico* asociado a un grupo NEC Γ , que se denota por Γ^+ , es el grupo $\Gamma \cap \mathcal{G}^+$ y se tiene que Γ^+ es un subgrupo de Γ de índice dos.

Para una introducción a los grupos NEC véase la monografía [B-E-G-G].

Sea Γ un grupo NEC. Una *región fundamental* de Γ es un conjunto cerrado $F \subset \mathcal{D}$ que satisface las siguientes propiedades:

- (i) F contiene al menos un elemento de cada Γ -órbita.
- (ii) $\overset{\circ}{F}$ contiene a lo más un elemento de cada Γ -órbita.
- (iii) El área hiperbólica de $F - \overset{\circ}{F}$ es cero.

Una región fundamental F es un polígono hiperbólico cerrado. Si dos lados de F se identifican mediante un elemento de Γ decimos que son *congruentes*. Un grupo NEC Γ tiene infinitas regiones fundamentales. Mediante un proceso de cortado y pegado se pueden obtener otras regiones a partir de una dada: sean F una región fundamental y (l, l') un par de lados congruentes, identificados por una transformación $g \in \Gamma$. Dividimos F , por un segmento de geodésica, en dos regiones F_0 y F_1 , que contienen a los lados l y l' respectivamente. Entonces, $F' = F_1 \cup g(F_0)$ es otra región fundamental de Γ .

Región canónica de Wilkie

Mediante cortado y pegado, Wilkie en [W] obtuvo una región, R_W , llamada *canónica*, con los lados etiquetados del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \xi_1 \xi'_1 \dots \xi_r \xi'_r \varepsilon_1 \gamma_{1,0} \dots \gamma_{1,s_1} \varepsilon'_1 \dots \varepsilon_k \gamma_{k,0} \dots \gamma_{k,s_k} \varepsilon'_k \alpha_1 \beta'_1 \alpha'_1 \beta_1 \dots \alpha_g \beta'_g \alpha'_g \beta_g \\
 (**) \quad & \xi_1 \xi'_1 \dots \xi_r \xi'_r \varepsilon_1 \gamma_{1,0} \dots \gamma_{1,s_1} \varepsilon'_1 \dots \varepsilon_k \gamma_{k,0} \dots \gamma_{k,s_k} \varepsilon'_k \delta_1 \delta_1^* \dots \delta_g \delta_g^*
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

según que \mathcal{D}/Γ sea orientable o no. Llamaremos a R_W *región fundamental de Wilkie*.

Los ángulos en el polígono R_W son

$$\begin{aligned}
 & \langle \xi_i, \xi'_i \rangle = \frac{2\pi}{m_i}, \quad i = 1, \dots, r; \\
 & \langle \gamma_{i,j-1}, \gamma_{i,j} \rangle = \frac{\pi}{n_{i,j}}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, s_i; \\
 & \langle \varepsilon_i, \gamma_{i,0} \rangle + \langle \gamma_{i,s_i}, \varepsilon'_i \rangle = \pi, \quad i = 1, \dots, k;
 \end{aligned}$$

y el resto de los ángulos suma 2π .

Identificando pares de lados congruentes, la región $(*)$ (resp. $(**)$) constituye una superficie compacta, orientable (resp. no orientable), de *género topológico* g , con r *puntos cónicos* de órdenes m_i , $i = 1, \dots, r$; y k *componentes en el borde*, $i = 1, \dots, k$; cada una de ellas con s_i *puntos esquina* de órdenes $n_{i,j}$, $j = 1, \dots, s_i$.

A partir de los símbolos de superficie $(*)$ o $(**)$ se obtiene la siguiente *representación* del grupo Γ :

Generadores:

$$\begin{array}{lll}
x_i, & i = 1, \dots, r, & \text{(elípticos)} \\
e_i, & i = 1, \dots, k, & \text{(hiperbólicos salvo} \\
& & \text{el caso } g = 0, k = 1, r = 1) \\
c_{i,j}, & i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, s_i, & \text{(reflexiones)} \\
a_i, b_i, & i = 1, \dots, g, & \text{en el caso } (*) \quad \text{(hiperbólicos)} \\
d_i, & i = 1, \dots, g, & \text{en el caso } (**) \quad \text{(reflexiones sesgadas)}.
\end{array}$$

Relaciones

$$\begin{array}{ll}
x_i^{m_i} = 1, & i = 1, \dots, r; \\
c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1, & i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, s_i; \\
e_i^{-1}c_{i,0}e_ic_{i,s_i} = 1, & i = 1, \dots, k; \\
x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1, & \text{en el caso } (*); \\
x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k d_1^2 \cdots d_g^2 = 1, & \text{en el caso } (**).
\end{array}$$

donde $a_i, b_i, c_{i,j}, d_i, e_i, x_i$, son las transformaciones inducidas por las identificaciones entre los lados de los polígonos $(*)$ y $(**)$ de (4.1):

$$a_i(\alpha'_i) = \alpha_i, b_i(\beta'_i) = \beta_i, d_i(\delta_i^*) = \delta_i, x_i(\xi'_i) = \xi_i, e_i(\varepsilon'_i) = \varepsilon_i, c_{i,j}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j};$$

Macbeath, en [Mb], introduce el concepto de *signatura* de un grupo NEC Γ , a partir de la región fundamental de Wilkie del grupo Γ . La *signatura* determina completamente la estructura algebraica del grupo.

Una *signatura* NEC es una colección formada por un entero $g \geq 0$, un signo ‘+’ ó ‘-’, un conjunto ordenado de enteros $m_1, \dots, m_r; m_i \geq 2, r \geq 0$; llamados *periodos propios* y una familia ordenada de conjuntos ordenados de enteros

$$\{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}, \quad k \geq 0, n_{i,j} \geq 2, s_i \geq 0,$$

llamados *ciclo-periodos*. Los números $n_{i,j}$ se denominan *link-periodos* o simplemente *periodos*.

Una *signatura* se denota con el símbolo:

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}), \quad (4.2)$$

con el signo ‘+’ cuando \mathcal{D}/Γ sea orientable, y con el signo ‘-’ en caso contrario. Es decir, según que el símbolo de superficie sea del tipo $(*)$ o $(**)$, respectivamente.

Si la signatura no tiene periodos propios se escribe $[-]$. Cuando no haya ciclo-periodos se denota por $\{-\}$, y los ciclo-periodos vacíos ($s_i = 0$) se indican con el símbolo $(-)$. Una secuencia de periodos propios o de link-periodos de la forma m, \dots, m , se denota por m^l . El símbolo $(-)^l$ indica l ciclo-periodos vacíos.

Tanto la signatura como la región fundamental determinan la presentación del grupo en términos de generadores y relaciones.

Un *grupo NEC de superficie* tiene signatura

$$(g, \pm, [-], \{(-)^k\}).$$

Además, cuando $g = 0$, es un *grupo de superficie planar* y, si $k > 0$, es un *grupo de superficie con borde*.

A continuación se define el área de un grupo NEC, Γ , que depende únicamente de su signatura (véase [Si]). El área de Γ permite estudiar en qué casos una signatura determina realmente un grupo NEC, y también relacionar tales grupos con sus subgrupos normales.

Denotaremos por $|\Gamma|$ y llamaremos *área* de un grupo NEC, Γ , al área de cualquiera de sus regiones fundamentales. Sea Γ un grupo NEC con signatura (4.2), entonces por el Teorema de Gauss-Bonnet se tiene que

$$|\Gamma| = 2\pi \left(\eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}} \right) \right),$$

donde $\eta = 2$ ó 1 si el signo de la signatura es '+' ó '-', respectivamente.

Para que una signatura determine un grupo NEC es condición necesaria y suficiente que el área sea estrictamente positiva, es decir, dada una signatura σ , existe un grupo NEC, Γ , con dicha signatura, si y sólo si $|\Gamma| > 0$.

Sea Γ un subgrupo de un grupo NEC Γ' . Entonces Γ es un grupo NEC si y sólo si el índice, $[\Gamma' : \Gamma]$, es finito.

Además, se tiene que si Γ es un subgrupo de índice N de un grupo NEC, Γ' , entonces la relación entre sus áreas es

$$|\Gamma| = N |\Gamma'|,$$

que es la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Una *superficie de Klein* es una superficie S dotada de una estructura di-analítica [A-G]. El concepto de superficie de Klein es una extensión del concepto

clásico de *superficie de Riemann*: superficie sin borde en la que las funciones de transición $\phi_i \phi_j^{-1}$ son analíticas. Desde este punto de vista, podemos considerar que una superficie de Riemann es, por tanto, una superficie de Klein orientable y sin borde.

Un *automorfismo* f de una superficie de Klein S es un morfismo $f : S \rightarrow S$ entre las estructuras dianalíticas que, además, es homeomorfismo. El conjunto $Aut(S)$ de todos los automorfismos de una superficie de Klein S tiene estructura de grupo.

Los siguientes resultados permiten caracterizar las superficies de Klein y sus grupos de automorfismos mediante los grupos NEC.

Dado un grupo NEC Γ , el espacio cociente \mathcal{D}/Γ tiene una estructura dianalítica tal que la proyección $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$ es un morfismo de superficies de Klein, [A-G].

Una superficie de Klein $S = \mathcal{D}/\Gamma$ de género topológico g , con k componentes en el borde, tiene asociada de forma canónica una superficie de Riemann $S_c = \mathcal{D}/\Gamma^+$, donde Γ^+ es el grupo Fuchsiano canónico asociado a Γ . S_c es una cubierta doble no ramificada de S , su género topológico recibe el nombre de *género algebraico de S* y tiene la siguiente expresión:

$$p = \eta g + k - 1,$$

donde η vale 2 si la superficie es orientable y 1 en caso contrario.

Sea S una superficie de Klein de género algebraico $p \geq 2$, género topológico g y k componentes en el borde. Entonces, existe un grupo NEC de superficie, Γ , con signatura

$$(g; \pm; [-]; \{(-), \dots, (-)\}),$$

y signo ‘+’ ó ‘-’ según que la superficie sea orientable o no, tal que S y \mathcal{D}/Γ son isomorfas como superficies de Klein, [Si], [Pr]. Dos superficies de Klein homeomorfas \mathcal{D}/Γ_1 y \mathcal{D}/Γ_2 , donde Γ_1 y Γ_2 son grupos de superficie, son isomorfas si y sólo si Γ_1 y Γ_2 son grupos conjugados en \mathcal{G} .

Sea Γ un grupo NEC, entonces el normalizador $N_{\mathcal{G}}(\Gamma)$ es un grupo NEC.

Un grupo finito G es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein $S = \mathcal{D}/\Gamma$ si y sólo si existe un grupo NEC Γ' tal que $\Gamma \subset \Gamma' \subset N_{\mathcal{G}}(\Gamma)$ y $G = \Gamma'/\Gamma$.

De tales resultados se deduce que el grupo $Aut(S)$ de los automorfismos de una superficie de Klein $S = \mathcal{D}/\Gamma$, de género algebraico $p \geq 2$, es finito (por la fórmula de Riemann-Hurwitz). Además,

$$Aut(S) = N_{\mathcal{G}}(\Gamma)/\Gamma.$$

Sea $\mathcal{G} = Aut(\mathcal{D})$ el grupo de automorfismos de \mathcal{D} , dotado con la estructura de grupo topológico. El *espacio de Weil* de un grupo NEC Γ , con respecto a \mathcal{G} , es el conjunto

$$R(\Gamma) = \{\text{monomorfismos } r : \Gamma \rightarrow \mathcal{G} \text{ tales que } r(\Gamma) \text{ es un grupo NEC}\}.$$

Este espacio puede interpretarse como un subconjunto del espacio \mathcal{G}^l , siendo l el cardinal de un conjunto finito de generadores de Γ , $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$, vía la aplicación

$$r \rightarrow (r(\gamma_1), \dots, r(\gamma_l));$$

y dotarle de la topología heredada de \mathcal{G}^l .

El grupo $Aut(\mathcal{G})$ actúa en $R(\Gamma)$ por la izquierda:

$$\begin{aligned} Aut(\mathcal{G}) \times R(\Gamma) &\rightarrow R(\Gamma) \\ (\alpha, r) &\mapsto \alpha r. \end{aligned}$$

La órbita de un elemento r de $R(\Gamma)$ viene dada por

$$[r] = \{\alpha r : \alpha \in \mathcal{G}\}.$$

El *espacio de Teichmüller* de Γ es el espacio

$$T(\Gamma) = R(\Gamma)/Aut(\mathcal{G})$$

dotado de la topología cociente.

Si Γ es un grupo Fuchsiano con signatura $(g, +, [m_1, \dots, m_r])$, entonces $T(\Gamma)$, con la métrica de Teichmüller, es isomorfo a $\mathbb{R}^{d(\Gamma)}$, $d(\Gamma) = 6(g - 1) + 2r$. Para grupos NEC propios, el resultado equivalente fué probado por Macbeath y Singerman [Mb-S]: $T(\Gamma)$ es homeomorfo a una bola abierta en un espacio euclídeo. Si Γ es un grupo NEC propio, en [Si], se obtuvo que la dimensión de este espacio es

$$d(\Gamma) = \frac{1}{2}d(\Gamma^+),$$

donde Γ^+ es el grupo Fuchsiano canónico asociado a Γ . Por tanto, si la signatura del grupo NEC Γ es (4.2) entonces

$$d(\Gamma) = 3p - 3 + 2r + s, \quad (4.3)$$

donde p es el género algebraico de Γ y $s = \sum_{i=1}^k s_i$ el número de periodos en la signatura de Γ .

El concepto abstracto de espacio de Teichmüller $T(\Gamma)$ puede también interpretarse geoméricamente mediante las regiones fundamentales asociadas al grupo NEC Γ . Dos elementos r_1 y r_2 del espacio de Weil $R(\Gamma)$ están en la misma clase en $T(\Gamma)$ si y sólo si existe $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$r_2(\gamma) = g r_1(\gamma) g^{-1} \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Si R_1 es una región fundamental $r_1(\Gamma)$, entonces $g(R_1)$ es una región fundamental de $r_2(\Gamma)$. En efecto, si (l, l') es un par de lados congruentes en R_1 y $g_l \in r_1(\Gamma)$ es la transformación que los identifica, entonces $g g_l g^{-1}$ identifica al par de lados $(g_l(l), g_l(l'))$ en $g(R_1)$.

Sea σ una signatura NEC. Dos regiones fundamentales de grupos NEC con signatura σ y con el mismo tipo de etiquetado en sus lados, se dice que son *congruentes* si los lados con igual etiqueta tienen la misma longitud y son iguales los ángulos entre lados con igual etiqueta.

Puede observarse que si dos regiones R_1 y R_2 son congruentes, entonces existe una isometría $g \in \mathcal{G}$ tal que $R_1 = g(R_2)$.

4.2. Regiones fundamentales de superficies orientables sin borde

Sea Γ un grupo Fuchsiano que uniformiza una superficie de Riemann cerrada de género g . Una región fundamental canónica para Γ es un polígono de $4g$ lados. Obsérvese que la igualdad (4.3) puede escribirse en este caso (donde $\eta = 2, k = r = s = 0$):

$$d(\Gamma) = 3(\eta g + k - 1) - 3 + 2r + s = 3(2g - 1) - 3 = 6g - 6.$$

En [Z-V-C] se define una topología en el espacio de las superficies de Riemann de género $g \geq 2$ y se prueba que, con esa topología, tal espacio es homeomorfo a \mathbb{R}^{6g-6} , asociando cada superficie a un polígono canónico de $4g$ lados.

Los lados del polígono son

$$a_i, b_i, a_i^!, b_i^!; \quad 1 \leq i \leq g,$$

y aquéllos con la misma letra tienen igual longitud. Además, si θ es el ángulo entre $b_1, a_1^!$, entonces los dos ángulos $\widehat{b_1 a_1^!}$ y $\widehat{a_1^! b_1}$ son iguales a $\pi - \theta$. El resto de los ángulos del polígono suman θ .

La demostración requiere la construcción de un polígono K_g formado por un polígono de g vértices A_1, \dots, A_g , con un pentágono $A_i, B_i, C_i, D_i, A_{i+1}$ adosado a cada lado $A_i A_{i+1}$, llamado “*superficie de conmutador*”, de forma que $A_i B_i = C_i D_i$ y $B_i C_i = D_i A_{i+1}$. La primera superficie de conmutador, llamada “*no libre*”, satisface que $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ y $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \pi$. La suma de los ángulos interiores de K_g es 2π y su área es, entonces, $(4g - 2)\pi - 2\pi = 4(g - 1)\pi$.

Si $g > 2$ entonces el polígono K_g se divide en $g - 2$ triángulos $A_1 A_i A_{i+1}$, $1 < i < g$, y cada triángulo unido con la superficie de conmutador, adosada al lado $A_i A_{i+1}$, forma un hexágono llamado “*hexágono de conmutador*”.

Se prueba que, para cada constante $K > 0$, el espacio de superficies de conmutador no libres con área mayor que K , si no es vacío, es entonces homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Si el área es igual a K el espacio es homeomorfo a \mathbb{R}^1 , si no es vacío. Si $2\pi < K < 3\pi$, el espacio de las superficies de conmutador que son libres, con área $J > K$ (ó $J = K$, respectivamente) y que pueden construirse sobre un lado dado $A_i B_i$, es vacío u homeomorfo a \mathbb{R}^4 (ó \mathbb{R}^3 , respectivamente). Si $g > 2$, el espacio de hexágonos de conmutador, con ciertas condiciones requeridas, es homeomorfo a \mathbb{R}^6 , o es vacío.

La demostración concluye probando que, para $g \geq 2$, el espacio de polígonos canónicos es homeomorfo a

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^6)^{g-2} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{6g-6}.$$

4.2.1. Construcción de regiones canónicas de grupos Fuchsianos

Algunos resultados anteriores de la presente Memoria permiten estudiar condiciones específicas que ciertos puntos de \mathbb{R}^{6g-6} deben cumplir para determinar una superficie de Riemann cerrada de género g .

Imponiendo tales condiciones es posible encontrar soluciones particulares de regiones canónicas, asociadas a superficies de ese tipo. Más aún, para una determinada solución, puede construirse la región fundamental canónica correspondiente.

A continuación se muestra el procedimiento que seguiremos y, posteriormente, se aplica para resolver y construir un ejemplo de género $g = 3$.

Sea $g \geq 2$. Se considera el polígono de lados

$$a_1, b_1, a_1', b_1', \dots, a_g, b_g, a_g', b_g',$$

y ángulos

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \tau, \quad \alpha_2 = \pi - \tau, \quad \sum_{i=4}^{4g} \alpha_i = \pi - \tau \quad (4.4)$$

con $\widehat{a_i} = a_i'$, $\widehat{b_i} = b_i'$, siendo $\widehat{a_i b_i} = \alpha_{4i-3}$, $\widehat{b_i a_i'} = \alpha_{4i-2}$, $\widehat{a_i' b_i'} = \alpha_{4i-1}$, $1 \leq i \leq g$; $\widehat{b_i' a_{i+1}} = \alpha_{4i}$, $1 \leq i < g$, $\widehat{b_g' a_1} = \alpha_{4g}$.

Entonces tal polígono es una región fundamental canónica de una superficie orientable de género g sin borde.

Adaptando la notación a la de los capítulos anteriores, llamaremos λ_i , $1 \leq i \leq 4g$, a los lados del polígono, cuyos ángulos θ_i son tales que $\theta_1 = \widehat{\lambda_{4g} \lambda_1}$ y $\theta_j = \widehat{\lambda_{j-1} \lambda_j}$, $j > 1$, de modo que

$$a_i = \lambda_{4i-3}, \quad b_i = \lambda_{4i-2}, \quad a_i' = \lambda_{4i-1}, \quad b_i' = \lambda_{4i}.$$

Así, se cumple que $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i+1}$, $\lambda_{2i} = \lambda_{2(i+1)}$, y los ángulos θ_i son tales que

$$\theta_2 = \tau, \quad \theta_3 = \pi - \tau, \quad \theta_4 = \tau, \quad \sum_{i=1}^{4g} \theta_i = 2\pi.$$

Denominamos A_i a los vértices en θ_i y N_i a los vectores normales a los lados λ_i , orientados de la forma habitual.

Un procedimiento para elegir los $6g - 6$ parámetros es el siguiente:

1. Se fijan los ángulos de la región canónica.
2. Con la numeración y la notación descritas arriba, siendo $\delta_{i,j} = -\langle N_i, A_j \rangle = \text{sh } d(A_j, \lambda_i)$, por la proposición 2.2.2:
 - a) Existe $k_1 > 0$ tal que, si $\lambda_1 = \lambda_3 > k_1$, se satisfacen las desigualdades $\delta_{h,1} > 0$ y $\delta_{4g,h} > 0$, $h = 3, 4$. Elegimos entonces un valor $\lambda_1 = \lambda_3 > k_1$.
 - b) Si $g \geq 3$, existe $m_1 > 0$ tal que, para $\lambda_2 = \lambda_4 > m_1$, se cumple $\delta_{h,1} > 0$ y $\delta_{4g,h} > 0$, $h = 3, 4, 5$. La cota inferior m_1 puede tomarse de forma que también pueda cumplirse $\delta_{6,1} > 0$ y $\delta_{4g,6} > 0$. Se elige entonces un valor de $\lambda_2 = \lambda_4 > m_1$.

- c) Para cierto $k_2 > 0$, cualquier $\lambda_5 > k_2$ cumple las dos últimas desigualdades: $\delta_{6,1} > 0$ y $\delta_{4g,6} > 0$. La cota inferior k_2 puede tomarse de manera que todo $\lambda_5 = \lambda_7 > k_2$ pueda cumplir además $\delta_{h,1} > 0$ y $\delta_{4g,h} > 0$, $h = 7, 8$. Se elige un valor de $\lambda_5 = \lambda_7 > k_2$.
- d) Así sucesivamente. Se elige, por último, un valor de $\lambda_{4g-7} = \lambda_{4g-5} > k_{g-1}$ que cumpla las condiciones requeridas para la convexidad:

$$\delta_{h,1} > 0, \delta_{4g,h} > 0; \quad h = 4g - 5, 4g - 4$$

Los parámetros, sujetos a las condiciones debidas, son

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha_1 = \alpha_3, \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \\ a_1 &= a_1^!; \quad \text{si } g = 2; \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha_1 = \alpha_3, \\ \alpha_4, \dots, \alpha_{4g-1}, \\ a_1 &= a_1^!, b_1 = b_1^!, \dots, a_{g-1} = a_{g-1}^!; \quad \text{si } g \geq 3. \end{aligned}$$

Es decir, $1 + (4g - 4) + (2g - 3) = 6g - 6$ parámetros.

Obsérvese que $\alpha_2 = \pi - \tau$ y $\alpha_{4g} = 2\pi - \sum_{i=1}^{4g-1} \alpha_i$.

Para un conjunto de tales parámetros, es posible además calcular los lados desconocidos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \eta_{4g-3,4g-1} &= \eta_{4g-1,4g-3}; \\ \eta_{4g-2,4g} &= \eta_{4g,4g-2}; \\ \eta_{4g-3,4g} &= \eta_{4g,4g-3}; \end{aligned}$$

siendo $\eta_{i,j} = \langle N_i, N_j \rangle = \text{ch } d(\lambda_i, \lambda_j)$. La solución debe ser tal que $\lambda_{4g-6} = \lambda_{4g-4}$ satisfaga las inecuaciones $\delta_{h,1} > 0$ y $\delta_{4g,h} > 0$, $h = 4g - 5, 4g - 4, 4g - 3$.

Ejemplo: A continuación aplicamos el método anterior para $g = 3$, considerando un caso particular donde $\tau = 30^\circ$:

$$\alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 150^\circ, \quad \alpha_3 = 30^\circ,$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 20^\circ, & \alpha_5 &= 18^\circ, & \alpha_6 &= 15^\circ, \\ \alpha_7 &= 16^\circ, & \alpha_8 &= 14^\circ, & \alpha_9 &= 19^\circ, \\ \alpha_{10} &= 13^\circ, & \alpha_{11} &= 12^\circ, & \alpha_{12} &= 23^\circ. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que la suma de los ángulos es 360° .

Para que el polígono sea convexo, por la proposición 2.2.2, las longitudes de los cuatro primeros lados deben cumplir $\delta_{h,1} > 0$, $\delta_{16,h} > 0$; $h = 3, 4, 5$, con $\delta_{j,k} = -\langle N_j, A_k \rangle = \text{sh } d(A_k, \lambda_j)$. Siendo $C_i = \text{ch } \lambda_i$, puede elegirse $C_1 = C_3 = 23$. Entonces $C_2 > 11.04$.

Las longitudes de los lados $\lambda_2 = \lambda_4$, λ_5 deben cumplir $\delta_{6,1} > 0$, $\delta_{16,6} > 0$. Elegimos $C_2 = C_4 = 15$. Por tanto, $C_5 > 68.34$.

Ahora $\lambda_5 = \lambda_7$, $\lambda_6 = \lambda_8$ tienen que cumplir $\delta_{h,1} > 0$, $\delta_{16,h} > 0$; $h = 7, 8, 9$. Se elige $C_5 = C_7 = 120$ y debe ser $C_6 > 86.26$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \eta_{9,11} = \eta_{11,9} \\ \eta_{10,12} = \eta_{12,10} \\ \eta_{9,12} = \eta_{12,9} \end{cases}$$

siendo $\eta_{j,k} = \langle N_j, N_k \rangle = \text{ch } d(\lambda_k, \lambda_j)$, la única solución válida en nuestro caso es

$$C_6 = C_8 = 95.299, \quad C_9 = C_{11} = 143.758, \quad C_{10} = C_{12} = 86.155.$$

En resumen, las longitudes de los lados son

$$\begin{aligned} \text{ch } a_1 = \text{ch } a_1' &= 23, & \text{ch } b_1 = \text{ch } b_1' &= 15, \\ \text{ch } a_2 = \text{ch } a_2' &= 120, & \text{ch } b_2 = \text{ch } b_2' &= 95.299, \\ \text{ch } a_3 = \text{ch } a_3' &= 143.758, & \text{ch } b_3 = \text{ch } b_3' &= 86.155, \end{aligned}$$

La región puede representarse como sigue:

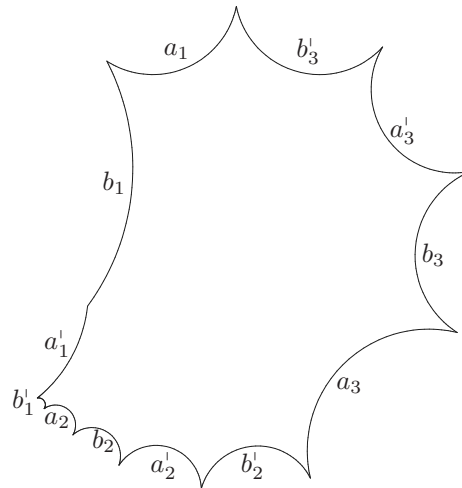


Figura 4.1: Una región canónica de género 3 sin borde

En la [hoja 4.1 del Apéndice](#) pueden encontrarse los cálculos, la construcción y representación de la región.

4.2.2. Región canónica de Schmutz-Schaller

Como ya se vió al comienzo de la sección, en [Z-V-C] se demuestra que T_g , el espacio de Teichmüller de superficies de Riemann cerradas de género g , es homeomorfo a \mathbb{R}^{6g-6} . En [Bu] también se prueba este resultado de modo indirecto. Posteriormente, Schmutz-Schaller en [SS] da una nueva demostración, basada en otra construcción, que describimos brevemente. Estas regiones sirven para estudiar superficies de Riemann hiperelípticas. Se dice que una superficie de Riemann X es hiperelíptica si admite un automorfismo ϕ de orden 2, tal que X/ϕ tiene género 0.

Si Γ es un grupo Fuchsiano que uniformiza una superficie de Riemann cerrada de género $g \geq 2$, se considera como región fundamental canónica para Γ un polígono $P(g)$ de $4g$ lados con lados opuestos identificados. Sus ángulos β_i suman 2π , $\beta_1 = \beta_{2g+1}$ y se cumple

$$\sum_{i=1}^g \beta_{2i-1} + \sum_{i=g+1}^{2g} \beta_{2i} = \sum_{i=1}^g \beta_{2i} + \sum_{i=g+1}^{2g} \beta_{2i-1}.$$

El espacio de Teichmüller T_g se construye variando tales polígonos.

Sea M_i el vértice de β_i . Se trazan los segmentos que unen M_1 con M_i , $1 < i \leq 2(g-1)$, $i \neq g+1$, y el segmento $M_g M_{g+2}$. Tales segmentos dividen $P(g)$ en $4g-4$ triángulos y un cuadrilátero S . Los triángulos están determinados por $6g-5$ números reales positivos, correspondientes a las longitudes de los lados de los triángulos, cumpliendo las diferentes desigualdades triangulares. Esas $6g-5$ longitudes, consideradas como parámetros homogéneos, aportan una parametrización del espacio de Teichmüller T_g .

El conjunto de los números reales que cumplen las diferentes desigualdades triangulares es abierto y convexo, lo que también prueba que T_g es homeomorfo a \mathbb{R}^{6g-6} .

Si l_i es el lado $M_{i-1}M_i$, $1 < i \leq 4g$, y $l_1 = M_{4g}M_1$, entonces los generadores del grupo Γ son las transformaciones hiperbólicas ϕ_i , $1 \leq i \leq 2g$, tales que $\phi_i(l_i) = l_{2g+i}$, si i es impar, $\phi_i(l_{2g+i}) = l_i$, si i es par, y se cumple que

$$\phi_1 \phi_2 \dots \phi_{2g} \phi_1^{-1} \phi_2^{-1} \dots \phi_{2g}^{-1} = 1.$$

Debe observarse que, aunque l_j es el lado que une M_{j-1} con M_j , las orientaciones de l_i y l_{2g+i} no deben ser concordantes, según la definición 1.3.8, de modo que las isometrías ϕ_i preserven la orientación.

Construcción de una región de Schmutz-Schaller de género 3

Con algunos resultados del capítulo 2 nos ha sido posible encontrar una región canónica de Schmutz-Schaller de género 3 que no es un polígono regular. Los lados de la región son $4g = 12$ y se han utilizado $6g - 6 = 12$ parámetros como sigue:

- Llamando M_i al vértice del ángulo β_i , siendo $\lambda_i = M_i M_{i+1}$, $i < 12$, y $\lambda_{12} = M_{12} M_1$, los parámetros elegidos son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_7 = \tau, \\ \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \\ \beta_8, \beta_9, \beta_{10}, \\ \lambda_1 &= \lambda_7, \quad \lambda_2 = \lambda_8, \quad \lambda_3 = \lambda_9. \end{aligned}$$

- Inmediatamente se obtienen β_{11} , β_{12} y, para calcular $\lambda_4 = \lambda_{10}$, $\lambda_5 = \lambda_{11}$, $\lambda_6 = \lambda_{12}$ se resuelve el sistema

$$\begin{cases} \eta_{4,10} = \eta_{10,4} \\ \eta_{5,11} = \eta_{11,5} \\ \eta_{6,12} = \eta_{12,6} \end{cases}$$

donde $\eta_{i,j} = \langle N_i, N_j \rangle = \text{ch } d(\lambda_i, \lambda_j)$.

- Los parámetros β_i , $1 \leq i \leq 10$, deben elegirse de modo que $0 < \tau < \pi$ y

$$\begin{aligned} \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_9 &= \beta < \pi - \tau, \\ \beta_3 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} &= \beta' < \pi - \tau. \end{aligned}$$

Entonces $\beta_{11} = \pi - \tau - \beta$, $\beta_{12} = \pi - \tau - \beta'$. Los lados $\lambda_1 = \lambda_7$, $\lambda_2 = \lambda_8$, $\lambda_3 = \lambda_9$ tienen que cumplir las condiciones necesarias para la convexidad:

$$\begin{aligned} \delta_{h,1} > 0, \quad \delta_{12,h} > 0 \quad & \text{y} \\ \delta_{6+h,7} > 0, \quad \delta_{6,6+h} > 0; \quad & h = 3, 4; \end{aligned}$$

siendo $\delta_{i,j} = -\langle N_i, A_j \rangle$ y, de las posibles soluciones, la única solución válida es la que cumple

$$\delta_{h,1} > 0, \quad \delta_{12,h} > 0; \quad 5 \leq h \leq 10.$$

Para resolver el ejemplo posterior ha sido necesario variar reiteradamente los valores asignados a los tres últimos parámetros hasta encontrar finalmente una solución. La “solución” de todos los intentos anteriores correspondía a un dodecágono hiperbólico autointersectante.

Si ϕ_i , $1 \leq i \leq 6$, son los generadores del grupo Γ entonces, con la notación elegida para los lados, $\phi_1(\lambda_{12}) = \lambda_6$, $\phi_i(\lambda_{i-1}) = \lambda_{i+5}$, si $i = 3, 5$; $\phi_i(\lambda_{i+5}) = \lambda_{i-1}$, si $i = 2, 4, 6$; y se cumple que

$$\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6 = \phi_6\phi_5\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1,$$

suponiendo que la orientación de los lados λ_i respeta las condiciones de la observación realizada más arriba.

Sin embargo, recordemos que en nuestra construcción habitual, la orientación de los seis primeros lados debe ser la contraria a la exigida por tales condiciones. Así, cada ϕ_i se obtiene a partir la transformación φ_i definida como sigue.

Sean las matrices siguientes:

$$f_i = \frac{1}{(2 + 2\langle N_i, N_{i+6} \rangle)^{1/2}}(-N_{i+6}N_i + \iota),$$

$$P_i = f_i M_i f_i^{-1}; \quad 1 \leq i \leq 6;$$

y

$$g_i = \frac{1}{(2 + 2\langle M_{i+7}, P_i \rangle)^{1/2}}(M_{i+7}P_i - \iota), \quad 1 \leq i < 6;$$

$$g_6 = \frac{1}{(2 + 2\langle M_1, P_6 \rangle)^{1/2}}(M_1P_6 - \iota).$$

Se consideran los productos:

$$h_i = g_i f_i, \quad 1 \leq i \leq 6,$$

se cumple entonces que

$$h_1^{-1}h_2h_3^{-1}h_4h_5^{-1}h_6 = h_6h_5^{-1}h_4h_3^{-1}h_2h_1^{-1}.$$

Teniendo en cuenta los corolarios 1.4.9 y 1.4.10, puede observarse que si φ_i es la transformación hiperbólica determinada por las matriz $h_i = g_i f_i$, si i es par, ó $h_i^{-1} = f_i^{-1}g_i^{-1}$, si i es impar, se tiene que

$$\phi_1 = \varphi_6 \quad \text{y} \quad \phi_i = \varphi_{i-1}, \quad 1 < i \leq 6.$$

Así, las isometrías

$$\varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

generan el grupo Γ y se tiene que

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_6 = \varphi_6\varphi_5\varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1.$$

Caso particular

Se desea construir un dodecágono con ángulos tales que:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_7 = 30^\circ, \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} + \beta_{12} &= 180^\circ, \\ \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_9 + \beta_{11} &= 180^\circ, \end{aligned}$$

y lados λ_i de modo que $\lambda_j = \lambda_{j+6}$, $1 \leq j \leq 6$, y $\widehat{\lambda_{12}\lambda_1} = \beta_1$, $\widehat{\lambda_{i-1}\lambda_i} = \beta_i$, $1 < i \leq 12$.

Sean, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 30^\circ, & \beta_2 &= 15^\circ, & \beta_3 &= 35^\circ, & \beta_4 &= 40^\circ, \\ \beta_5 &= 27^\circ, & \beta_6 &= 29^\circ, & \beta_7 &= 30^\circ, & \beta_8 &= 25^\circ, \\ \beta_9 &= 46^\circ, & \beta_{10} &= 31^\circ, & \beta_{11} &= 20^\circ, & \beta_{12} &= 32^\circ, \end{aligned}$$

que satisfacen las igualdades anteriores. Si $C_i = \text{ch } \lambda_i$, elegimos

$$C_1 = 154, \quad C_2 = 42, \quad C_3 = 35,$$

que cumplen las primeras condiciones necesarias para la convexidad del polígono:

$$\begin{aligned} \delta_{h,1} > 0, \quad \delta_{12,h} > 0 & \quad \text{y} \\ \delta_{6+h,7} > 0, \quad \delta_{6,6+h} > 0, & \quad h = 3, 4. \end{aligned}$$

Resolviendo entonces el sistema formado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \eta_{6,12} = \eta_{12,6} \\ \eta_{5,11} = \eta_{11,5} \\ \eta_{4,10} = \eta_{10,4} \end{cases}$$

la única solución válida es

$$C_4 = 18.721, \quad C_5 = 1430.139, \quad C_6 = 7.886.$$

Puede comprobarse que $\delta_{h,1} > 0$, $\delta_{12,h} > 0$; $5 \leq h \leq 10$.

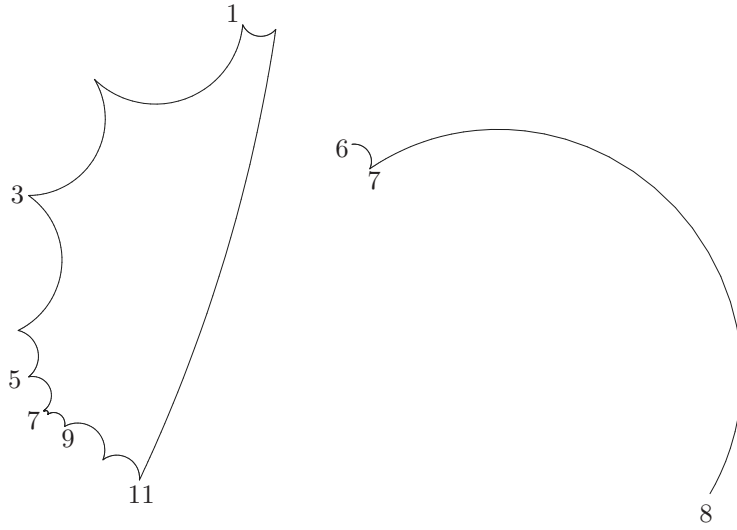


Figura 4.2: Una región canónica de Schmutz-Schaller de género 3

La figura 4.2 representa la región anterior. Los lados sexto y séptimo se amplían a la derecha.

El polígono se ha representado fijando A_1 y N_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -60 \\ 1/60 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{100}\pi) & 60 \operatorname{sen}(\frac{3}{100}\pi) \\ \frac{1}{60} \operatorname{sen}(\frac{3}{100}\pi) & -\cos(\frac{3}{100}\pi) \end{pmatrix}$$

Entonces, las matrices asociadas a los generadores φ_i del grupo Γ son

$$\begin{aligned} h_1^{-1} &= \begin{pmatrix} -36.3753 & -18.2425 \\ 2.65735 & 1.30519 \end{pmatrix}, & h_2 &= \begin{pmatrix} 3.56425 & 8.63286 \\ -7.50914 & -17.9071 \end{pmatrix}, \\ h_3^{-1} &= \begin{pmatrix} -7.15971 & -2.73054 \\ 7.36699 & 2.66991 \end{pmatrix}, & h_4 &= \begin{pmatrix} 4.33603 & 2.92356 \\ -16.6288 & -10.9813 \end{pmatrix}, \\ h_5^{-1} &= \begin{pmatrix} -1.01686 & 3.98397 \\ 1.77598 & -7.94158 \end{pmatrix}, & h_6 &= \begin{pmatrix} -224.099 & -113.081 \\ -7.43828 & -3.75783 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Mejorando la aproximación en el cálculo, mediante una adecuada cantidad de cifras decimales, podría comprobarse que

$$h_1^{-1}h_2h_3^{-1}h_4h_5^{-1}h_6 = h_6h_5^{-1}h_4h_3^{-1}h_2h_1^{-1}.$$

De ambos productos resulta la misma matriz

$$\begin{pmatrix} 505.7615 & 255.0016 \\ 0.24104 & 0.12351 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_6 = \varphi_6\varphi_5\varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1.$$

En la [hoja 4.3 del Apéndice](#) pueden encontrarse los cálculos realizados, la construcción de la región y su representación.

4.2.3. Construcción de una región de Schmutz-Schaller a partir de una región canónica de Coldeway-Zieschang de género 3

Consideremos una región fundamental canónica de género 3 con lados $a_i, b_i, a'_i, b'_i; i = 1, 2, 3$; y ángulos α_j cumpliendo las condiciones (4.4) del epígrafe 4.2.1. Si llamamos λ_i a los lados orientados como en ese epígrafe, dotamos a cada lado a_i, b_i, a'_i, b'_i de una orientación, de modo que a_i, b_i tienen la misma orientación que $\lambda_{4i-3}, \lambda_{4i-2}$, respectivamente, y a'_i, b'_i la orientación opuesta a $\lambda_{4i-1}, \lambda_{4i}$.

Se corta la región anterior por los vértices A_3, A_6 , cuya distancia es λ , con $\text{ch } \lambda = \langle A_3, A_6 \rangle$, y se une a_2 con a'_2 , haciendo coincidir sus orientaciones, formando un nuevo polígono orientado como el inicial, de vértices B_i , con $B_1 = A_1$, en el que λ es la longitud de los lados tercero y quinto, y los lados sexto y séptimo miden a'_1 y b'_1 , respectivamente. Los lados del polígono son

$$a_1, b_1, \lambda, b_2, \lambda', a'_1, b'_1, b'_2, a_3, b_3, a'_3, b'_3.$$

Posteriormente, se corta el nuevo polígono por sus vértices B_4, B_6 , separados una distancia μ , $\text{ch } \mu = \langle B_4, B_6 \rangle$, y se une b'_2 con b_2 con el mismo criterio que antes unimos a_2 con a'_2 . El polígono que resulta tiene sus lados cuarto y octavo iguales a μ y el lado séptimo igual a $\lambda' = \lambda$. A los vértices del nuevo polígono les llamamos D_i de modo que $D_1 = B_1$. Los lados del tercer polígono son

$$a_1, b_1, \lambda, \mu, a'_1, b'_1, \lambda', \mu', a_3, b_3, a'_3, b'_3.$$

El tercer paso consiste en cortar el polígono anterior por los vértices D_5, D_{10} , cuya distancia es ν , $\text{ch } \nu = \langle D_5, D_{10} \rangle$, y unir el lado a_3 con a'_3 . Ahora, los lados quinto y séptimo miden ν , el sexto es b_3 y los lados octavo, noveno y décimo son, respectivamente, iguales a a'_1, b'_1 y λ' . A los vértices del polígono que resulta se les llama E_i siendo $E_1 = D_1$. Dicho polígono tiene lados

$$a_1, b_1, \lambda, \mu, \nu, b_3, \nu', a'_1, b'_1, \lambda', \mu', b'_3.$$

Por fin, cortamos por los vértices E_6, E_8 y unimos b'_3 con b_3 . Llamando ρ a la longitud del corte, el último polígono tiene los lados sexto y duodécimo iguales a

ρ y el lado undécimo mide $\nu' = \nu$:

$$\alpha_1, b_1, \lambda, \mu, \nu, \rho, \alpha'_1, b'_1, \lambda', \mu', \nu', \rho'.$$

Llamamos F_i a los vértices de este polígono, de modo que $F_1 = E_1$. Volviendo a llamar λ_i a los lados de dicho polígono, con $\lambda_{12} = F_{12}F_1$ y $\lambda_i = F_iF_{i+1}$, $i < 12$, se cumple que $\lambda_i = \lambda_{i+6}$, $1 \leq i \leq 6$. Sea β_j , $j < 12$, el ángulo en el vértice F_{j+1} y β_{12} en F_1 . En cada proceso de cortado y pegado, el corte por dos vértices produce una subdivisión en los ángulos correspondientes del polígono. Asignamos superíndice 1 al ángulo resultante que determina el corte con el lado anterior a cada vértice, y superíndice 2 al que determina con el lado posterior. Tras los sucesivos procesos, se obtiene

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, & \beta_5 &= \alpha_9^{2,1}, & \beta_9 &= \alpha_2^{2,1}, \\ \beta_2 &= \alpha_2^1, & \beta_6 &= \alpha_2^{2,2,2,2}, & \beta_{10} &= \alpha_5^{2,2} + \alpha_8 + \alpha_9^1 + \alpha_{10} + \alpha_{11}, \\ \beta_3 &= \alpha_5^{2,1} & \beta_7 &= \alpha_3, & \beta_{11} &= \alpha_2^{2,2,2,1}, \\ \beta_4 &= \alpha_2^{2,2,1}, & \beta_8 &= \alpha_4 + \alpha_5^1 + \alpha_6 + \alpha_7, & \beta_{12} &= \alpha_{12} + \alpha_9^{2,2}. \end{aligned}$$

Por tanto, de las tres igualdades

$$\begin{aligned} \beta_3 + \beta_{10} &= \alpha_5^2 + \alpha_8 + \alpha_9^1 + \alpha_{10} + \alpha_{11}, \\ \beta_5 + \beta_{12} &= \alpha_9^2 + \alpha_{12}, \\ \beta_8 &= \alpha_4 + \alpha_5^1 + \alpha_6 + \alpha_7, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\beta_3 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} + \beta_{12} = \alpha_4 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_{12}.$$

Además, de

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \alpha_2^1, \\ \beta_4 + \beta_6 + \beta_{11} &= \alpha_2^{2,2}, \\ \beta_9 &= \alpha_2^{2,1}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_9 + \beta_{11} = \alpha_2.$$

Y, como $\beta_1 = \alpha_1 = \tau$, $\beta_7 = \alpha_3 = \tau$, $\alpha_2 = \pi - \tau$, $\sum_{i=4}^{12} \alpha_i = \pi - \tau$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_7, \\ \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_9 + \beta_{11} &= \pi, \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} + \beta_{12} &= \pi. \end{aligned}$$

Con estas igualdades y las que cumplen los lados:

$$\lambda_i = \lambda_{i+6}, \quad 1 \leq i \leq 6,$$

concluimos que tal polígono es una región de Schmutz-Schaller para un grupo Fuchsiano de género tres.

Caso particular

Se considera la región canónica representada en la figura 4.1. Cortando la región y las sucesivas regiones como se indicó anteriormente, se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{ch } \lambda = \langle A_3, A_6 \rangle &= 31.432, & \text{ch } \mu = \langle B_4, B_6 \rangle &= 257.84, \\ \text{ch } \nu = \langle D_5, D_{10} \rangle &= 845.98, & \text{ch } \rho = \langle E_6, E_8 \rangle &= 3254.336, \end{aligned}$$

y los lados y ángulos de la región de Schmutz-Schaller que resulta finalmente son tales que

$$\begin{aligned} \text{ch } a_1 &= 23, & \text{ch } b_1 &= 15, & \text{ch } \lambda &= 31.432, \\ \text{ch } \mu &= 257.84, & \text{ch } \nu &= 845.98, & \text{ch } \rho &= 3254.336, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_7 = 30^\circ, \\ \beta_2 &= 117.76^\circ, & \beta_4 &= 6.4^\circ, & \beta_6 &= 16.793^\circ, & \beta_9 &= 8.603^\circ, & \beta_{11} &= 0.448^\circ, \\ \beta_3 &= 6.299^\circ, & \beta_5 &= 10.424^\circ, & \beta_8 &= 59.874^\circ, & \beta_{10} &= 46^\circ, & \beta_{12} &= 27.402^\circ, \end{aligned}$$

cumpléndose

$$\begin{aligned} \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_9 + \beta_{11} &= 180^\circ, \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} + \beta_{12} &= 180^\circ. \end{aligned}$$

El polígono siguiente es la representación de la nueva región:

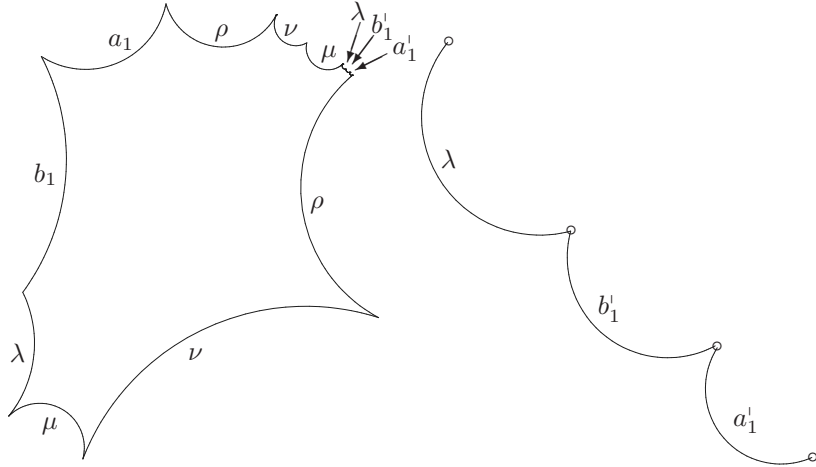


Figura 4.3: Una región de Schmutz-Schaller tras varios procesos de cortado y pegado. Detalle de tres lados de la región.

Los cálculos, construcción y representación de la región se exponen en la [hoja 4.2 del Apéndice](#).

4.3. Regiones de ángulos rectos de grupos NEC

En el estudio de las regiones fundamentales que son polígonos hiperbólicos, tiene especial interés el caso en que dichos polígonos tienen todos sus ángulos rectos. Mediante estas regiones se han estudiado superficies de Klein hiperelípticas [C-Ma1], elípticas-hiperelípticas [Es], k -toros q -hiperelípticos [Es-Ma1]. Una superficie de Klein X es q -hiperelíptica si admite un automorfismo ϕ de orden 2 tal que X/ϕ es de género algebraico q . En el caso $q = 0$ la superficies se llaman simplemente hiperelípticas y en el caso $q = 1$ se llaman elípticas-hiperelípticas. Un k -toro es una superficie orientable de género 1 con $k > 0$ componentes en el borde.

Sea Γ es un grupo de *superficie planar* (*i.e.* $g = 0$). En [Es-Ma2] se estudia una región fundamental particular de Γ que es un polígono de ángulos rectos. Si Γ tiene signatura

$$(0, +, [-], \{(-), \overset{k}{\cdot}, (-)\}), \quad k \geq 3,$$

entonces existe una región fundamental \mathbb{P} del grupo Γ que es un polígono hiperbólico convexo de ángulos rectos y $p = 4(k - 1)$ lados:

$$\mu_1, \gamma_1, \mu_1', \gamma_1^1, \dots, \mu_{k-1}, \gamma_{k-1}, \mu_{k-1}', \gamma_{k-1}^{k-1}, \quad (4.5)$$

donde γ_i son los lados que corresponden a las componentes del borde, siendo $\gamma_k = \gamma^1 \cup \dots \cup \gamma^{k-1}$, y $\mu_i = \mu'_i$. Las identificaciones vienen dadas por lados del mismo nombre (μ_i, μ'_i) .

Esta región se obtiene a partir de la región fundamental de Wilkie, mediante procesos de cortado y pegado, y se requieren $3k - 6$ parámetros para su construcción. Obsérvese que, en este caso, la igualdad (4.3) queda

$$d(\Gamma) = 3(\eta g + k - 1) - 3 + 2r + s = 3(k - 1) - 3 = 3k - 6$$

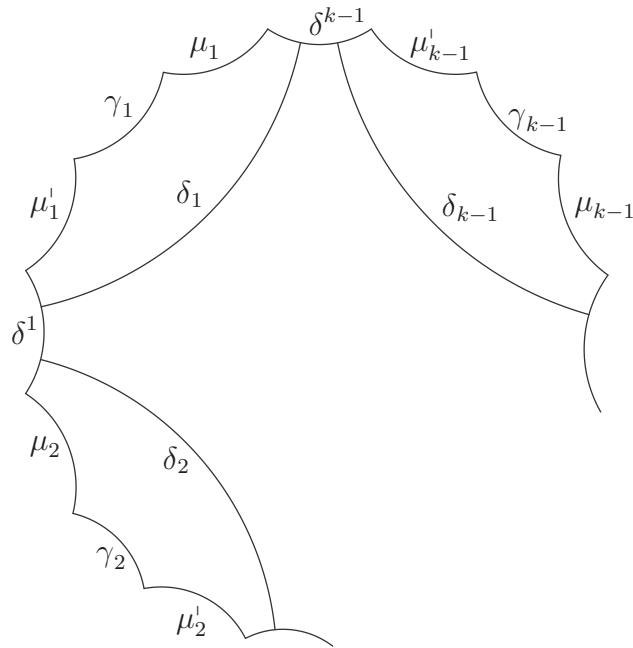


Figura 4.4: Una región fundamental de un grupo de superficie planar

A continuación se propone una elección de parámetros distinta a la de [Es-Ma2], de modo que mediante algunos resultados del capítulo 3 de la presente Memoria, pueden imponerse condiciones para que un punto de \mathbb{R}^{3k-6} con coordenadas iguales a tales parámetros determine una superficie planar con k componentes en el borde. Fijados tales parámetros, puede abordarse la construcción de la región fundamental y la subsiguiente representación del polígono.

Tal elección de parámetros permite, además, estudiar regiones fundamentales que cumplan determinadas condiciones, como veremos posteriormente en algunos

casos generales y su ilustración con algún ejemplo de cada caso. Más aún, con otros resultados del capítulo 1 podemos obtener un conjunto de generadores del grupo Γ .

4.3.1. Una parametrización de superficies planares con k componentes en el borde

Sean Γ un grupo NEC con signatura $(0, +, [-], \{(-)^k\})$ y \mathbb{P} un polígono de $p = 4(k - 1)$ lados como en (4.5). Denominamos λ_i , $i \leq p$, a los lados del polígono, orientados del modo habitual, de manera que, si $j \leq k - 1$, entonces $\mu_j = \lambda_{4j-3}$, $\gamma_j = \lambda_{4j-2}$, $\mu'_j = \lambda_{4j-1}$, $\gamma^j = \lambda_{4j}$, siendo iguales las orientaciones de μ_j y λ_{4j-3} , y opuestas las de μ'_j y λ_{4j-1} . Llamamos A_i a los vértices y N_i a los vectores normales a los lados del polígono, de modo que $\lambda_i = A_i A_{i+1}$, $i < p$, $\lambda_p = A_p A_1$ y $A_i = N_{i-1} \wedge N_i$, $i > 1$, $A_1 = N_p \wedge N_1$.

Fijados A_1 y N_1 , se sabe por las igualdades (2.9) que

$$\begin{aligned} A_h &= \alpha_{1,h} A_1 + \delta_{1,h} N_1 + \beta_{1,h} (A_1 \wedge N_1), \\ N_h &= -\delta_{h,1} A_1 - \eta_{1,h} N_1 + \gamma_{h,1} (A_1 \wedge N_1). \end{aligned}$$

Tales igualdades permiten obtener inmediatamente cada A_h y cada N_h , una vez conocidas las longitudes de los lados, y representar la región.

Para determinar dicha región fundamental se requieren $3k - 6$ parámetros positivos. Sea δ_i el segmento perpendicular a los lados γ^i , γ^{i+1} , $1 < i \leq k$, y δ_1 perpendicular a γ^4 , γ^1 :

- Si $k = 3$, los parámetros elegidos son

$$\gamma_1, \gamma_2, \delta_1 = \delta_2.$$

- Y para $k = 4$:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3.$$

- En general, para $k > 4$, consideramos los parámetros

$$\begin{aligned} \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \delta_1, \dots, \delta_{k-1}, \\ \gamma^1, \dots, \gamma^{k-4}. \end{aligned}$$

Los primeros $2(k - 1)$ parámetros son libres. Para que el polígono sea convexo se requieren las condiciones del teorema 3.2.2:

$$\eta_{p,h} > 1; \quad 4 \leq h \leq p - 2, \quad (4.6)$$

donde $\eta_{i,j} = \langle N_i, N_j \rangle$ y $p = 4(k-1)$.

Para un determinado conjunto de estos parámetros, se puede calcular $\mu_i = \mu_i^1$, $1 \leq i \leq k$, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{ch} \delta_i = \operatorname{sh}^2 \mu_i \operatorname{ch} \gamma_i - \operatorname{ch}^2 \mu_i \quad \text{y} \quad \operatorname{ch}^2 \mu_i = \frac{\operatorname{ch} \gamma_i + \operatorname{ch} \delta_i}{\operatorname{ch} \gamma_i - 1}. \quad (4.7)$$

El procedimiento se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se fijan arbitrariamente los primeros $2(k-1)$ parámetros. Se calculan entonces $\mu_i = \mu_i^1$, $1 \leq i \leq k$.
2. Se elige un valor de γ^1 que satisfaga las desigualdades

$$\eta_{p,5} > 1, \quad \eta_{p,6} > 1, \quad \eta_{p,7} > 1, \quad \eta_{p,8} > 1.$$

Puede observarse que ya se cumple $\eta_{p,4} = \operatorname{ch} \delta_1 > 1$ y que $\eta_{p,h}$, $5 \leq h \leq 8$, dependen únicamente de $\lambda_4 = \gamma^1$, pues

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1, & \lambda_2 &= \gamma_1, & \lambda_3 &= \mu_1^1, \\ & & \lambda_4 &= \gamma^1, & & \\ \lambda_5 &= \mu_2, & \lambda_6 &= \gamma_2, & \lambda_7 &= \mu_2^1, \end{aligned}$$

son ya conocidos.

3. Así sucesivamente, si $k > 5$, puede elegirse cada γ^j , $1 < j \leq k-4$, de modo que

$$\eta_{4(k-1),h} > 1; \quad 4j+1 \leq h \leq 4(j+1),$$

una vez fijados γ^i , $i < j$, como en el apartado 2.

4. Los lados desconocidos serían entonces las componentes del borde $\lambda_{4(k-3)} = \gamma^{k-3}$, $\lambda_{4(k-2)} = \gamma^{k-2}$ y $\lambda_{4(k-1)} = \gamma^{k-1}$.

La perpendicular común a γ^{k-3} y γ^{k-1} divide cada componente en dos segmentos, y la componente γ^{k-2} es la unión de tres segmentos, cada uno lado de un hexágono. Todos los segmentos anteriores pueden calcularse, una vez fijados todos los parámetros.

También se pueden calcular directamente las componentes del borde γ^{k-3} , γ^{k-2} y γ^{k-1} , resolviendo primero la ecuación

$$\eta_{4(k-1),4(k-2)} = \eta_{4(k-2),4(k-1)}$$

que depende sólo de $\lambda_{4(k-3)} = \gamma^{k-3}$, después

$$\eta_{4(k-1),4(k-3)} = \eta_{4(k-3),4(k-1)}$$

cuya única incógnita es $\lambda_{4(k-2)} = \gamma^{k-2}$, y entonces

$$\text{ch } \lambda_{4(k-1)} = \eta_{1,4(k-1)-1}.$$

De las soluciones de la primera ecuación sólo es válida aquélla que, además, cumple

$$\eta_{4(k-1),h} > 1; \quad 4(k-3) + 1 \leq h \leq 4(k-2).$$

Una vez calculada, sólo es válida la solución de la segunda ecuación que cumple, además,

$$\eta_{4(k-1),4(k-2)+1} > 1.$$

Una vez determinados todos los elementos del polígono, se pueden hallar las transformaciones que identifican los respectivos lados.

Por el corolario 1.4.12, se sabe que la traslación τ_i que transforma $\mu_i^!$ en μ_i , $\tau_i(\mu_i^!) = \mu_i$, está definida por la matriz

$$t_i = Q_i \text{sh } \frac{1}{2}\gamma_i + \iota \text{ch } \frac{1}{2}\gamma_i, \quad (4.8)$$

siendo Q_i el vector normal al lado orientado $\gamma_i = \lambda_{4i-2}$ del polígono \mathbb{P} , es decir, $Q_i = N_{4i-2}$, de modo que

$$-N_{4i-3} = t_i N_{4i-1} t_i^{-1},$$

donde N_{4i-3} , N_{4i-1} son los vectores normales a los lados orientados λ_{4i-3} , λ_{4i-1} , con longitudes iguales a μ_i y $\mu_i^!$.

La matriz

$$t_i^{-1} = -Q_i \text{sh } \frac{1}{2}\gamma_i + \iota \text{ch } \frac{1}{2}\gamma_i$$

define la isometría τ_i^{-1} que transforma μ_i en $\mu_i^!$, $\tau_i^{-1}(\mu_i) = \mu_i^!$.

Seguidamente, en el epígrafe 4.3.2, estudiamos de un modo general algunas regiones fundamentales sujetas a ciertas condiciones geométricas. En 4.3.3, construimos una región particular con cinco componentes en el borde y obtenemos un conjunto de generadores del correspondiente grupo Γ . En 4.3.4, se construye un ejemplo particular para cada región estudiada en 4.3.2 (también con $k = 5$) y finalmente se ilustra con un ejemplo un proceso de cortado y pegado, que puede generalizarse para cualquier número k de componentes en el borde.

4.3.2. Regiones fundamentales sujetas a determinadas condiciones geométricas

En ocasiones interesará construir regiones fundamentales de superficies particulares que permitan mostrar que sobre esa superficie actúa un determinado automorfismo. Véanse varios ejemplos en [Es-Ma2].

Se considera una región \mathbb{P} con lados como en (4.5). Se pueden imponer ciertas condiciones geométricas a esta región y estudiar cómo afectan a los parámetros y qué procedimiento debe seguirse para la construcción de la región. De entre las posibles condiciones que pueden estudiarse, estamos interesados en las siguientes:

Si trazamos el segmento $\rho_{i,j}$, perpendicular a $\gamma_i, \gamma_j, i < j$, pueden estudiarse los parámetros, de modo que los dos segmentos $\widehat{\gamma}_i, \overline{\gamma}_i$ en que $\rho_{i,j}$ divide a γ_i satisfagan ciertas relaciones. Una de ellas es que ambos segmentos sean iguales. Podría estudiarse el problema más general para que $\widehat{\gamma}_i = \alpha\gamma_i, 0 < \alpha < 1$, pero no lo haremos aquí.

La otra condición que estudiaremos es la exigencia de que la suma de las longitudes de dos componentes en el borde sea igual a la longitud de otra componente.

A partir de ahora suponemos que $\widehat{\gamma}_i = d(\mu_i, \rho_{i,j})$ y $\overline{\gamma}_i = d(\rho_{i,j}, \mu_i')$ (figura 4.5).

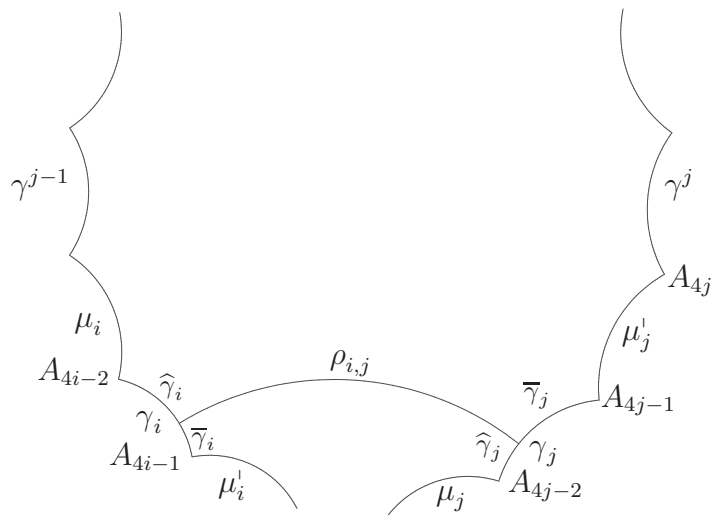


Figura 4.5: La perpendicular $\rho_{i,j}$ a γ_i y γ_j divide al lado γ_i en dos segmentos: $\widehat{\gamma}_i$ y $\overline{\gamma}_i$

Para una determinada región fundamental \mathbb{P} , si $\rho_{i,j}$ es el segmento perpendicular a las componentes del borde γ_i, γ_j , entonces $\text{ch } \rho_{i,j} = \langle Q_i, Q_j \rangle$, siendo Q_i, Q_j los vectores normales a γ_i, γ_j .

Tras cortar la región por algún $\rho_{i,j}$, $i < j$, e identificar posteriormente μ_j con $\mu_j^!$, uno de los lados de la nueva región, si $k \geq 4$, es la unión de segmentos iguales a las componentes del borde γ^{j-1} y γ^j . Pueden estudiarse, por ejemplo, las condiciones para que otra componente del borde γ^r cumpla que $\gamma^r = \gamma^{j-1} + \gamma^j$.

Regiones condicionadas por el modo de dividir el segmento $\rho_{i,j}$ una componente del borde

Dividimos la región mediante el segmento $\rho_{i,j}$, perpendicular a las componentes del borde γ_i, γ_j , $i < j$, lo que requiere $\langle Q_i, Q_j \rangle > 1$, siendo Q_i, Q_j los vectores normales a γ_i, γ_j .

- Si $k = 3$ los lados de la región son:

$$\mu_1, \gamma_1, \mu_1^!, \gamma^1, \mu_2, \gamma_2, \mu_2^!, \gamma^2.$$

Se obtiene fácilmente $\gamma^1 = \gamma^2$ y que $\rho_{1,2}$ divide siempre a cada componente del borde γ_1, γ_2 en dos partes iguales.

- Para $k > 3$, suponemos que $i \leq k - 3$, $j = k - 2$ ó $j = k - 1$, y que las componentes del borde γ_i, γ_j son tales que $\widehat{\gamma}_i = \alpha \gamma_i$, $\overline{\gamma}_i = (1 - \alpha) \gamma_i$, $0 < \alpha < 1$.

- Si $j = k - 2$, sea el polígono

$$\rho_{i,j}, \overline{\gamma}_i, \mu_i^!, \gamma^i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_j, \widehat{\gamma}_j,$$

y Q_j el vector normal a $\gamma_j = \lambda_{4j-2}$. Obsérvese que, si $k = 4$, $\mu_{i+1} = \mu_j$.

Si se considera Q_j como vector normal al lado $\widehat{\gamma}_j$ del polígono anterior y que A_{4i-1} es el vértice común a $\overline{\gamma}_i$ y $\mu_i^! = \lambda_{4i-1}$, se tiene que $\text{sh } d(A_{4i-1}, \gamma_j) = -\langle A_{4i-1}, Q_j \rangle$ y $\text{ch } d(\mu_i^!, \gamma_j) = \langle N_{4i-1}, N_{4j-2} \rangle$.

En la proposición 3.1.3 se dedujo, con otra notación, que también puede escribirse $-\langle A_{4i-1}, Q_{k-2} \rangle = \text{sh } \rho_{i,k-2} \text{ch } \overline{\gamma}_i$ y $\langle N_{4i-1}, Q_{k-2} \rangle = \text{sh } \rho_{i,k-2} \text{sh } \overline{\gamma}_i$. Por tanto, como $\gamma_j = \lambda_{4j-2}$ y $j = k - 2$,

$$\text{sh } \rho_{i,k-2} \text{ch } \overline{\gamma}_i = -\langle A_{4i-1}, Q_{k-2} \rangle = -\langle A_{4i-1}, N_{2(2k-5)} \rangle,$$

$$\text{sh } \rho_{i,k-2} \text{sh } \overline{\gamma}_i = \langle N_{4i-1}, Q_{k-2} \rangle = \langle N_{4i-1}, N_{2(2k-5)} \rangle.$$

- Si $j = k - 1$, sea el polígono

$$\rho_{i,k-1}, \bar{\gamma}_{k-1}, \mu_{k-1}^i, \gamma^{k-1}, \mu_1, \dots, \mu_i, \hat{\gamma}_i,$$

Puede observarse que, si $k = 4$, entonces $\mu_1 = \mu_i$.

Se cumple que

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \rho_{i,k-1} \operatorname{ch} \hat{\gamma}_i &= -\langle A_{4i-2}, N_{2(2k-3)} \rangle = \operatorname{sh} d(A_{4i-2}, \gamma_{k-1}), \\ \operatorname{sh} \rho_{i,k-1} \operatorname{sh} \hat{\gamma}_i &= \langle N_{4i-3}, N_{2(2k-3)} \rangle = \operatorname{ch} d(\mu_i, \gamma_{k-1}). \end{aligned}$$

Así, según que $j = k - 2$ ó $j = k - 1$, se tiene que

$$\langle N_{4i-1}, N_{2(2k-5)} \rangle + \langle A_{4i-1}, N_{2(2k-5)} \rangle \operatorname{th} \bar{\gamma}_i = 0, \quad (4.9)$$

ó

$$\langle N_{4i-3}, N_{2(2k-3)} \rangle + \langle A_{4i-2}, N_{2(2k-3)} \rangle \operatorname{th} \hat{\gamma}_i = 0. \quad (4.10)$$

Las ecuaciones anteriores se han elegido atendiendo al número de lados conocidos del polígono en cada caso, una vez fijados $3k - 8$ parámetros libres que se especifican a continuación. Para tales parámetros, de las dos expresiones posibles para cada producto escalar, se toma aquella que incluye menos variables.

- Si $k = 4$, los parámetros libres son $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1$.
- En el caso $i = 1, j = 2$, teniendo en cuenta las siguientes condiciones para la convexidad de la región:

$$\langle N_{12}, N_5 \rangle > 1, \langle N_{12}, N_6 \rangle > 1, \langle N_{12}, N_7 \rangle > 1, \langle N_{12}, N_8 \rangle > 1,$$

el conjunto de soluciones de la ecuación (4.9) y que

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle = \langle N_2, N_6 \rangle > 1,$$

se fija un valor de δ_2 apropiado y, mediante la ecuación (4.9), se calcula γ^1 . Los lados desconocidos del dodecágono se obtienen aplicando las fórmulas convenientes de polígonos rectángulos.

- Para el caso $i = 1, j = 3$, dentro de las condiciones siguientes para la convexidad de la región:

$$\langle N_8, N_{12} \rangle > 1, \langle N_8, N_1 \rangle > 1, \langle N_8, N_2 \rangle > 1, \langle N_8, N_3 \rangle > 1, \langle N_8, N_4 \rangle > 1,$$

las posibles soluciones de la ecuación (4.10) y que

$$\langle Q_3, Q_1 \rangle = \langle N_{10}, N_2 \rangle > 1,$$

fijando un valor de δ_3 , se obtiene primero γ^3 de la ecuación (4.10) y, posteriormente, el resto de los lados del dodecágono.

- Para $k > 4$, los dos parámetros propiamente condicionados son, en ambos casos, δ_{k-2} y γ^{k-4} . Los demás parámetros:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \quad \text{si } k = 5;$$

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \delta_1, \dots, \delta_{k-3}, \delta_{k-1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{k-5}, \quad \text{si } k > 5;$$

pueden adquirir valores positivos cualesquiera, siempre que las componentes del borde $\gamma^1, \dots, \gamma^{k-5}$, cuando $k > 5$, cumplan las condiciones (4.6) requeridas para la convexidad.

Una vez fijados los parámetros libres, los parámetros condicionados deben satisfacer las igualdades (4.9) ó (4.10), según el caso, cumplir las condiciones para la convexidad y que, además, $\langle Q_i, Q_j \rangle > 1$.

Para ciertos valores válidos de los parámetros, los lados desconocidos de la región pueden calcularse mediante las fórmulas apropiadas para polígonos rectángulos, respetando siempre las condiciones anteriores.

En el epígrafe 4.3.4 se muestra un ejemplo, para $k = 5$, de cada uno de los casos aludidos.

Regiones condicionadas por la relación $\gamma^r = \gamma^{j-1} + \gamma^j$

Para que $\gamma^r = \gamma^{j-1} + \gamma^j$, debe cumplirse

$$\text{ch } \gamma^j = \text{ch } \gamma^r \text{ch } \gamma^{j-1} - \text{sh } \gamma^r \text{sh } \gamma^{j-1}.$$

Los parámetros libres son los mismos que en el caso precedente. Para determinar los valores válidos de los parámetros condicionados, así como los lados desconocidos de la región, se procede como en el caso anterior, con las diferencias propias del caso específico que consideramos.

En el epígrafe 4.3.4 se resuelve un ejemplo, para $k = 5$, donde se concreta el procedimiento a seguir en el caso general.

4.3.3. Una región de un grupo planar con cinco componentes en el borde

En este caso, como $k = 5$, las regiones consideradas son polígonos de 16 lados. Manteniendo la notación descrita en el epígrafe 4.3.1, construimos una región determinada, asignando valores a los parámetros libres. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma_1 = 3, \quad \text{ch } \gamma_2 = 2, \quad \text{ch } \gamma_3 = 3.5, \quad \text{ch } \gamma_4 = 4, \\ \text{ch } \delta_1 = 5, \quad \text{ch } \delta_2 = 2.5, \quad \text{ch } \delta_3 = 1.5, \quad \text{ch } \delta_4 = 4.5, \\ \text{ch } \gamma^1 = 8. \end{aligned}$$

La elección de $\text{ch } \gamma^1$ se ha realizado teniendo en cuenta que

$$\eta_{16,h} > 1; \quad 5 \leq h \leq 8,$$

de lo que resulta $\text{ch } \gamma^1 > 7.14$.

Las fórmulas (4.7), que permiten calcular $\mu_i = \mu_i'$, dan los siguientes resultados:

$$\text{ch } \mu_1 = 2, \quad \text{ch } \mu_2 = 2.121, \quad \text{ch } \mu_3 = 1.412, \quad \text{ch } \mu_4 = 1.683.$$

Con la denominación elegida para los lados, se conocen todos excepto λ_8 , λ_{12} y λ_{16} .

Resolviendo la ecuación $\eta_{12,16} = \eta_{16,12}$, se obtienen dos soluciones:

$$C_8 = 6.184, \quad C_8 = 373.986,$$

donde $C_8 = \text{ch } \gamma^2$. Sólo la segunda satisface la desigualdad $C_8 > 188.81$, resultante de las inecuaciones

$$\eta_{16,h} > 1; \quad 9 \leq h \leq 12.$$

La ecuación $\eta_{8,16} = \eta_{16,8}$ tiene dos soluciones:

$$C_{12} = 2.715, \quad C_{12} = 27.488,$$

siendo $C_{12} = \text{ch } \gamma^3$. Como debe cumplirse

$$\eta_{16,h} > 1; \quad 13 \leq h \leq 14,$$

tiene que ser $C_{12} > 24.8$ y por tanto $C_{12} = 27.488$. Por último, $\text{ch } \gamma^4 = C_{16} = \eta_{1,15} = 20.567$.

La región queda representada en la siguiente figura:

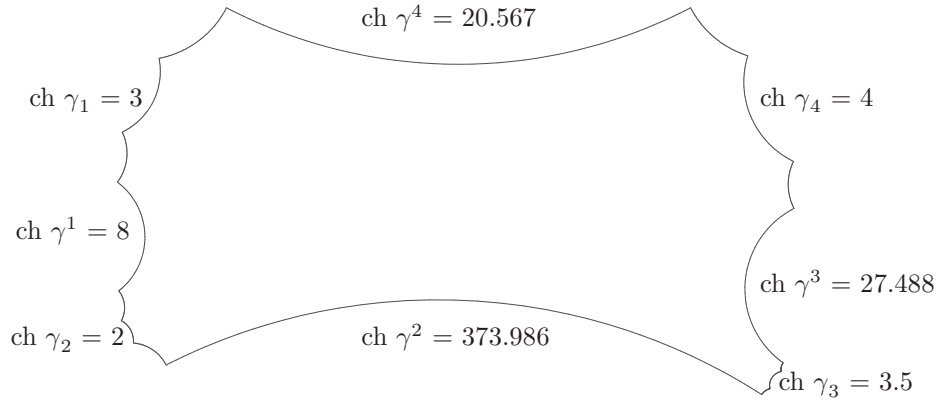


Figura 4.6: Una región de género cero con cinco componentes en el borde

En la [hoja 4.4 del Apéndice](#) se muestran los cálculos que se requieren, así como la construcción y representación de la región.

Para representar el polígono como en la figura 4.6, se han elegido A_1 y N_1 de modo que

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3.1279 & -6.5677 \\ 1.6419 & 3.1279 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 3.2838 & 6.2557 \\ -1.5639 & -3.2838 \end{pmatrix}.$$

Para esta elección, las matrices t_i de la igualdad (4.8) que definen las transformaciones hiperbólicas τ_i son

$$t_1 = \begin{pmatrix} 6.8318 & 7.3755 \\ -3.8439 & -4.0034 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 11.834 & 6.9509 \\ -16.120 & -9.3840 \end{pmatrix},$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} -24.357 & 14.630 \\ -45.616 & 27.357 \end{pmatrix}, \quad t_4 = \begin{pmatrix} -3.6058 & 6.7681 \\ -3.7536 & 6.7681 \end{pmatrix};$$

y, llamando q_i a las matrices asociadas a los vectores $Q_i = N_{4i-2}$, normales a las componentes del borde γ_i , $1 \leq i \leq 4$, se tiene que

$$q_1 = \begin{pmatrix} 5.4176 & 7.3755 \\ -3.8439 & -5.4176 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 15.003 & 9.8301 \\ -22.797 & -15.003 \end{pmatrix},$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} -23.127 & 13.085 \\ -40.800 & 23.127 \end{pmatrix}, \quad q_4 = \begin{pmatrix} -4.2351 & 5.5262 \\ -3.0648 & 4.2351 \end{pmatrix},$$

matrices que definen las reflexiones ν_i en dichas componentes. Sea, por último, q_0 la matriz del vector N_{16} , normal a γ^4 :

$$q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

que define la reflexión ν_0 en γ^4 .

Se cumple que $\nu_i(\gamma_i) = \gamma_i$, $1 \leq i \leq 4$, y $\nu_0(\gamma^4) = \gamma^4$.

Una vez calculados los demás vectores normales a los lados, puede comprobarse que

$$-N_{4i-3} = t_i N_{4i-1} t_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq 4;$$

es decir, $\tau_i(\mu'_i) = \mu_i$, $1 \leq i \leq 4$, y que

$$q_i = t_i^{-1} q_i t_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$$

$$N_4 = t_1^{-1} q_0 t_1,$$

$$N_8 = t_2^{-1} t_1^{-1} q_0 t_1 t_2 = t_3 t_4 q_0 t_4^{-1} t_3^{-1},$$

$$N_{12} = t_4 q_0 t_4^{-1},$$

Las transformaciones

$$\nu_i, \quad 0 \leq i \leq 4;$$

$$\tau_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$$

son generadores del grupo planar que satisfacen las relaciones siguientes:

$$\nu_i^2 = 1, \quad 0 \leq i \leq 4;$$

$$\tau_i^{-1} \nu_i \tau_i \nu_i = 1, \quad 1 \leq i \leq 4;$$

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \nu_0 \tau_4^{-1} \tau_3^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1^{-1} \nu_0 = 1.$$

y, por tanto, la signatura de Γ es $(0, +, [-], \{(-)^5\})$.

4.3.4. Regiones sujetas a ciertas condiciones geométricas. Casos particulares

Como hemos dicho anteriormente, a veces hay que construir regiones con los lados sujetos a ciertas condiciones para exhibir una determinada propiedad geométrica de la superficie. Aquí vamos a ver algunos ejemplos particulares, en los que se construye explícitamente la región.

Sea una región con cinco componentes en el borde. Estudiaremos en este epígrafe diversos casos particulares según el modo de dividir el lado que representa una componente del borde, o bien condiciones que deben cumplir las diversas partes de la componente dividida. En adelante, se mantiene la notación del epígrafe 4.3.1.

El segmento perpendicular a γ_2, γ_3 divide a la componente del borde γ_2 en dos partes iguales, $\widehat{\gamma}_2 = \overline{\gamma}_2$.

Consideramos el hexágono de lados $\rho_{2,3}, \overline{\gamma}_2, \mu_2, \gamma^2, \mu_3, \widehat{\gamma}_3$ con $\mu_2 = \lambda_7, \gamma^2 = \lambda_8, \mu_3 = \lambda_9$.

La ecuación (4.9) puede escribirse

$$\langle N_7, N_{10} \rangle + \langle A_7, N_{10} \rangle \operatorname{th} \overline{\gamma}_2 = 0,$$

donde $2\overline{\gamma}_2 = \gamma_2 = \lambda_6$.

Es decir,

$$S_8 S_9 - \sqrt{\frac{C_6 - 1}{C_6 + 1}} (C_7 C_8 S_9 - S_7 C_9) = 0.$$

Damos valores a los parámetros libres:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma_1 = 3, \quad \operatorname{ch} \gamma_2 = 2, \quad \operatorname{ch} \gamma_3 = 3.5, \quad \operatorname{ch} \gamma_4 = 4, \\ \operatorname{ch} \delta_1 = 5, \quad \operatorname{ch} \delta_2 = 2.5, \quad \operatorname{ch} \delta_4 = 4.5, \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\operatorname{ch} \mu_1 = 2, \quad \operatorname{ch} \mu_2 = 2.121, \quad \operatorname{ch} \mu_4 = 1.683.$$

Los parámetros sujetos a condición son δ_3 y γ^1 . Debe cumplirse que $\langle N_6, N_{10} \rangle > 1$. Podemos elegir $\operatorname{ch} \mu_3 = C_9 = 5$ y entonces $\operatorname{ch} \delta_3 = 59$. Para C_8 , de la ecuación procedente de (4.9), se obtienen dos soluciones:

$$C_8 = 4.392, \quad C_8 = 1.009.$$

Sólo la primera, $\text{ch } \gamma^2 = 4.392$, cumple $\langle N_6, N_{10} \rangle > 1$.

De las condiciones (4.6) para la convexidad, se tiene que $C_4 > 18.82$. Y de $\eta_{12,16} = \eta_{16,12}$ se obtiene

$$C_4 = 10.605, \quad C_4 = 20.665.$$

Por tanto, $\text{ch } \gamma^1 = 20.665$. Para la convexidad se requiere que $C_{12} > 2.64$ y de $\eta_{4,16} = \eta_{16,4}$ se tiene

$$C_{12} = 2.91, \quad C_{12} = 1.528.$$

Así $\text{ch } \gamma^3 = 2.91$. Por fin, como $C_{16} = \eta_{1,15}$,

$$\text{ch } \gamma^4 = 14.313.$$

Pueden calcularse $\bar{\gamma}_2 = 0.6585$ y $\gamma_2 = 1.317$, es decir,

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{\gamma_2}{2}$$

La región se representa en la figura 4.7.

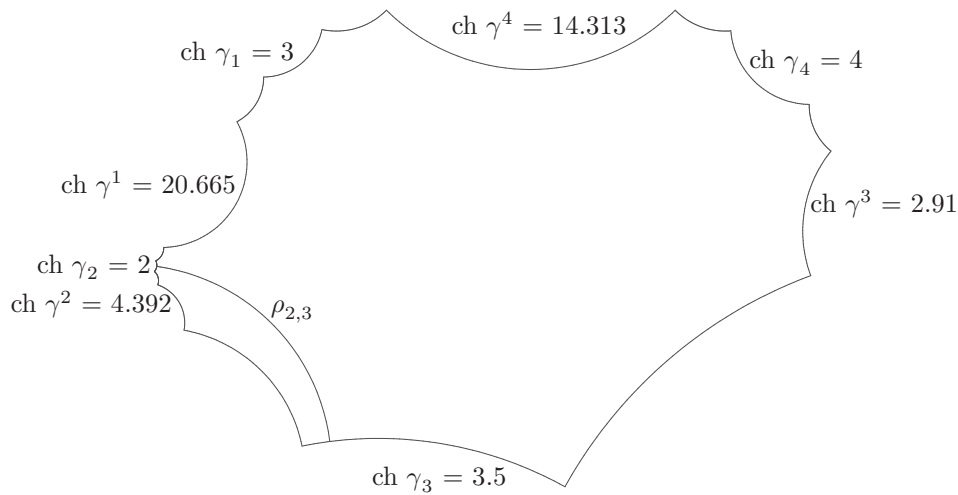


Figura 4.7: La perpendicular $\rho_{2,3}$ a γ_2 y γ_3 divide a γ_2 en dos partes iguales

La región puede verse representada en la [hoja 4.5 del Apéndice](#), que incluye los cálculos necesarios para su construcción.

El segmento perpendicular a γ_2, γ_4 divide a la componente del borde γ_2 en dos partes iguales, $\widehat{\gamma}_2 = \overline{\gamma}_2$.

Se considera el decágono de lados

$$\rho_{2,4}, \overline{\gamma}_4, \mu_4', \gamma^4, \mu_1, \gamma_1, \mu_1', \gamma^1, \mu_2, \widehat{\gamma}_2,$$

con

$$\begin{aligned} \mu_4' &= \lambda_{15}, & \gamma^4 &= \lambda_{16}, \\ \mu_1 &= \lambda_1 = \lambda_3 = \mu_1', & \gamma_1 &= \lambda_2, \\ \gamma^1 &= \lambda_4, & \mu_2 &= \lambda_5. \end{aligned}$$

Damos valores a los parámetros libres:

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma_1 &= 3, & \text{ch } \gamma_2 &= 2, & \text{ch } \gamma_3 &= 3.5, & \text{ch } \gamma_4 &= 4, \\ \text{ch } \delta_1 &= 5, & \text{ch } \delta_2 &= 2.5, & \text{ch } \delta_4 &= 4.5 \end{aligned}$$

e, igual que antes, los parámetros condicionados son δ_3 y γ^1 .

La ecuación (4.10) puede ahora escribirse

$$\langle N_5, N_{14} \rangle + \langle A_6, N_{14} \rangle \text{th } \overline{\gamma}_2 = 0,$$

donde $\text{th } \overline{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{C_6 - 1}{C_6 + 1}}$.

Los lados conocidos de la región son $\lambda_2, \lambda_6, \lambda_{10}, \lambda_{14}$:

$$C_2 = 3, \quad C_6 = 2, \quad C_{10} = 3.5, \quad C_{14} = 4;$$

y pueden calcularse

$$C_3 = C_1 = 2, \quad C_7 = C_5 = 2.121, \quad C_{15} = C_{13} = 1.683.$$

De las dos expresiones para cada producto escalar $\langle N_5, N_{14} \rangle$ y $\langle A_6, N_{14} \rangle$, tomamos la que incluya más lados conocidos: $\lambda_{15}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Así, la ecuación tiene dos incógnitas: λ_4, λ_{16} .

Para la convexidad se requiere que $C_4 > 7.14$. Además, debe cumplirse $\eta_{14,6} > 1$. Para $\text{ch } \gamma^4 = C_{16} = 8$, las dos soluciones de la ecuación son

$$C_4 = 2.051, \quad C_4 = 13.929.$$

Sólo $\text{ch } \gamma^1 = C_4 = 13.929$ satisface $\eta_{14,6} > 1$. La única solución válida de $\eta_{8,12} = \eta_{12,8}$ es

$$\text{ch } \mu_3 = C_9 = 1.68$$

y, por tanto, $\text{ch } \delta_3 = 3.558$. De $\eta_{7,12} = \eta_{12,7}$, resulta

$$\text{ch } \gamma^2 = C_8 = 18.836,$$

que cumple las condiciones (4.6) para la convexidad: $C_8 > 15.317$. Por último, $\text{ch } \gamma^3 = C_{12} = \eta_{13,11} = 12.75$.

Igual que antes, $\bar{\gamma}_2 = 0.6585$, $\gamma_2 = 1.317$ y

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{\gamma_2}{2}$$

La figura 4.8 representa esta región:

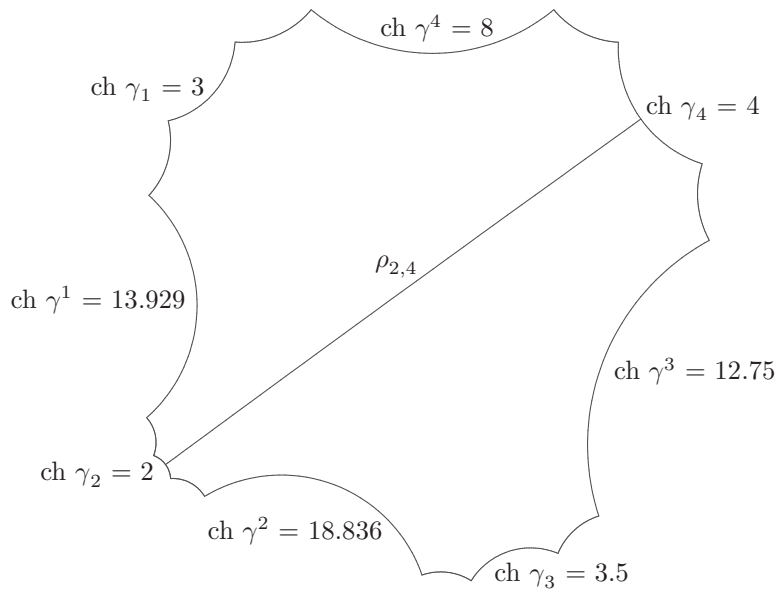


Figura 4.8: La perpendicular $\rho_{2,4}$ a γ_2 y γ_4 divide a γ_2 en dos partes iguales

En la [hoja 4.6 del Apéndice](#) se incluyen los cálculos para la construcción de la región.

Las componentes del borde $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ cumplen $\gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3$.

Debe cumplirse la ecuación

$$\text{ch } \gamma^3 = \text{ch } \gamma^1 \text{ch } \gamma^2 - \text{sh } \gamma^1 \text{sh } \gamma^2,$$

es decir,

$$C_{12} = C_4 C_8 - S_4 S_8.$$

Asignamos valores a los parámetros libres:

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma_1 = 3, \quad \text{ch } \gamma_2 = 2, \quad \text{ch } \gamma_3 = 3.5, \quad \text{ch } \gamma_4 = 4, \\ \text{ch } \delta_1 = 5, \quad \text{ch } \delta_2 = 2.5, \quad \text{ch } \delta_4 = 4.5. \end{aligned}$$

Por las condiciones de convexidad, debe ser $C_4 > 7.14$. Elegimos

$$\text{ch } \gamma^1 = C_4 = 70.$$

El sistema de ecuaciones $\eta_{9,16} = \eta_{16,9}$, $\eta_{11,16} = \eta_{16,11}$ tiene dos soluciones:

$$C_8 = 4.386, C_9 = 3.157 \quad \text{y} \quad C_8 = 3.461, C_9 = 1.932.$$

Sólo la primera cumple las condiciones para la convexidad. Es decir, $\text{ch } \gamma^2 = 4.386$ y, por tanto, $\text{ch } \gamma^3 = 8.13$. Además,

$$\gamma^1 = 4.942, \quad \gamma^2 = 2.158, \quad \gamma^3 = 2.785 \quad \text{y} \quad \gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3.$$

De $\text{ch } \mu_3 = 3.157$, por las igualdades (4.7), $\text{ch } \delta_3 = 21.411$. Por último, $\text{ch } \gamma^4 = C_{16} = 6.245$. También pueden calcularse

$$\text{ch } \mu_1 = 2, \quad \text{ch } \mu_2 = 2.121, \quad \text{ch } \mu_4 = 1.683.$$

La región queda representada en la figura 4.9.

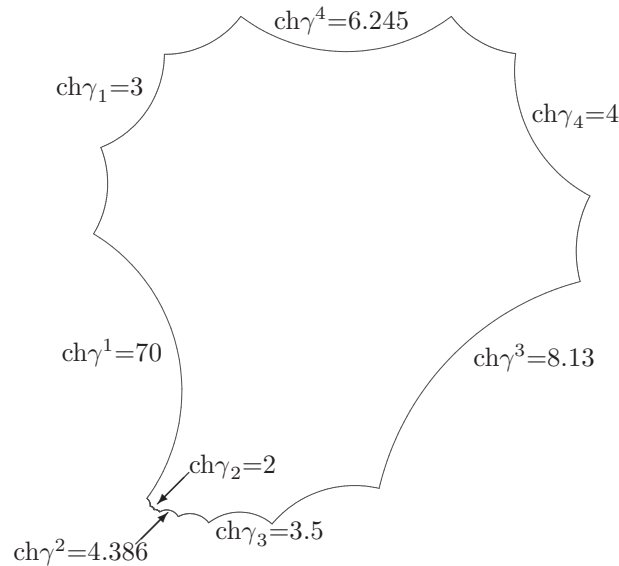


Figura 4.9: Los segmentos γ^1 , γ^2 , γ^3 de la quinta componente del borde cumplen $\gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3$

El procedimiento para la construcción de la región puede verse en la [hoja 4.7 del Apéndice](#).

División de la región por el segmento perpendicular a γ_i, γ_j . Cortado y pegado

Si cortamos la región por $\rho_{i,j}$, segmento perpendicular a $\gamma_i, \gamma_j, i < j$, y pegamos μ_j con $\mu_j^!$, mediante la traslación τ_j^{-1} (ver (4.8)), entonces el nuevo polígono es otra región fundamental del mismo grupo discreto de isometrías, cuyos primeros lados, hasta μ_i , y los últimos lados, desde μ_{j+1} , conciden con los del polígono \mathbb{P} , siendo los lados intermedios:

$$\widehat{\gamma}_i, \rho_{i,j}, \overline{\gamma}_j \cup \tau_j^{-1}(\widehat{\gamma}_j), \tau_j^{-1}(\rho_{i,j}), \tau_j^{-1}(\overline{\gamma}_i), \tau_j^{-1}(\mu_i^!), \dots, \tau_j^{-1}(\gamma^{j-1}) \cup \gamma^j.$$

Los puntos suspensivos corresponden a los transformados de $\gamma^i, \mu_{i+1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, \mu_{j-1}^!$, en el caso de $i < j - 1$.

El procedimiento completo para la construcción y representación de la nueva región se ilustra con un ejemplo donde $k = 5, i = 2, j = 3$, que se representa en la figura 4.10. Los nuevos lados de la segunda región son

$$\widehat{\gamma}_2, \rho_{2,3}, \overline{\gamma}_3 \cup \tau_3^{-1}(\widehat{\gamma}_3), \tau_3^{-1}(\rho_{2,3}), \tau_3^{-1}(\overline{\gamma}_2), \tau_3^{-1}(\mu_2^!), \tau_3^{-1}(\gamma^2) \cup \gamma^3.$$

Para construir la nueva región, de lados $\lambda_h^!, 1 \leq h \leq 16$, tomamos

$$\begin{aligned} \lambda_h^! &= \lambda_h, & \text{si } h \leq 5; \\ \lambda_8^! &= \lambda_{10}, \quad \lambda_{11}^! = \lambda_7; \\ \lambda_h^! &= \lambda_h, & \text{si } h \geq 13; \end{aligned}$$

y los demás lados son

$$\begin{aligned} \lambda_6^! &= d(A_6, \rho_{2,3}), \\ \lambda_9^! &= \lambda_7^! = \rho_{2,3}, \\ \lambda_{10}^! &= d(\rho_{2,3}, A_7), \\ \lambda_{12}^! &= \lambda_8 + \lambda_{12}. \end{aligned}$$

Siendo $C_h = \text{ch } \lambda_h$, de una primera región con

$$\begin{aligned} C_2 &= 3, & C_6 &= 2.6, & C_{10} &= 2.9, & C_{14} &= 2.8, \\ C_4 &= 2.85, & C_8 &= 2.372, & C_{12} &= 2.939, & C_{16} &= 2.641, \\ C_3 &= C_1 = 2.828, & C_7 &= C_5 = 3.172, \\ C_{11} &= C_9 = 2.982, & C_{15} &= C_{13} = 2.867, \end{aligned}$$

se obtiene la nueva región con lados tales que, si $C'_h = \text{ch } \lambda'_h$, entonces

$$\begin{aligned} C'_2 &= 3, & C'_6 &= 1.622, & C'_{10} &= 1.152, & C'_{14} &= 2.8, \\ C'_4 &= 2.85, & C'_8 &= 2.9, & C'_{12} &= 12.914, & C'_{16} &= 2.641, \\ C'_3 &= C'_1 = 2.828, & C'_9 &= C'_7 = 10.602, & C'_{15} &= C'_{13} = 2.867, \\ & & C'_{11} &= C'_5 = 3.172, \end{aligned}$$

En la figura 4.10 se representan ambas regiones. De la primera región se ha cortado el hexágono adosado a $\rho_{2,3}$ y se ha trasladado pegando μ_3 con μ'_3 , mediante τ_3^{-1} cuya matriz asociada es

$$t_3^{-1} = -Q_3 \text{sh } \frac{1}{2}\gamma_3 + \iota \text{ch } \frac{1}{2}\gamma_3,$$

con $Q_3 = N_{10}$ y $\gamma_3 = \lambda_{10}$, formando así parte de la segunda región el hexágono trasladado.

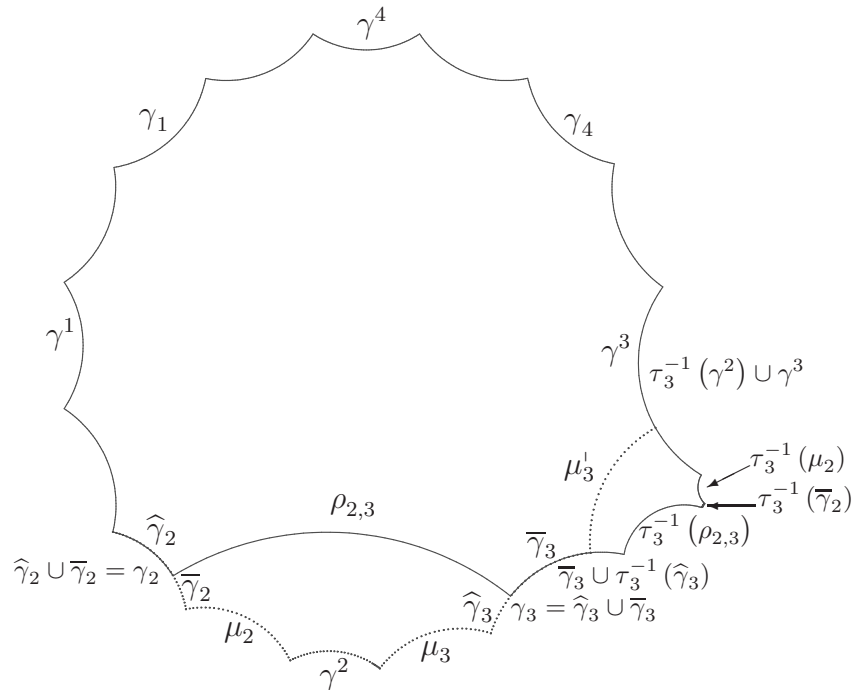


Figura 4.10: Cortado y pegado de la región

El procedimiento anterior se puede generalizar para cualquiera que sea el número k de componentes del borde, $k \geq 3$.

Bibliografía

- [A-G] N. L. Alling, N. Greenleaf. *Foundations of the theory of Klein Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **219**, Springer-Verlag, 1971.
- [Be1] A. F. Beardon. Hyperbolic polygons and Fuchsian groups. *J. London Math. Soc.* **20** (1979), 247-254.
- [Be2] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. GTM **91**, Springer-Verlag, (1983).
- [Bo] R. Bonola. *Non-Euclidean Geometry*. Dover, 1955.
- [B-E-G-G] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki. *A combinatorial approach to automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1439**, Springer-Verlag, 1990.
- [Bu] P. Buser. *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Progress in Mathematics **106**, Birkhäuser, 1992.
- [C-Ma1] A. F. Costa, E. Martínez. Planar hyperelliptic Klein surfaces and fundamental regions of NEC groups. *Discrete Groups and Geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **173** (1992), 57-65.
- [C-Ma2] A. F. Costa, E. Martínez. On hyperbolic right angled polygons. *Geometriae Dedicata* **58** (1995), 313-326.
- [C-Ma3] A. F. Costa, E. Martínez. Parametrization of the Moduli space of hyperelliptic and symmetric Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fen.* **22** (1997), 75-88.
- [Es] B. Estrada. Geometrical characterization of p -hyperelliptic planar Klein surfaces. *Comput. Methods Funct. Theory* **2** (2002), 267-279.
- [Es-Ma1] B. Estrada, E. Martínez. On q -hyperelliptic k -bordered tori. *Glasgow Math. J.* **43** (2001), 343-357.

- [Es-Ma2] B. Estrada, E. Martínez. Coordinates for the Teichmüller space of planar surface N.E.C. groups. *Int. J. Math.* **14** (2003), 1037-1052.
- [Et-Ma1] J. Etayo, E. Martínez. Hyperbolic polygons and NEC groups. *Math Proc. Camb. Phil. Soc.* **104** (1988), 261-272.
- [Et-Ma2] J. Etayo, E. Martínez. Fuchsian groups generated by half-turns and geometrical characterization of hyperelliptic and symmetric Riemann surfaces. *Math. Scand.* **95** (2004), 226-244.
- [Fe] W. Fenchel. *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. de Gruyter Studies Math. **11**, de Gruyter (1989).
- [G-P-P-R1] D. Gámez, M. Pasadas, R. Pérez, C. Ruiz. The Lambert quadrilateral and tessellations in the hyperbolic plane. *Int. Math. J.* **2** (2002) 777-795.
- [G-P-P-R2] D. Gámez, M. Pasadas, R. Pérez, C. Ruiz. The Saccheri quadrilateral, translations and tessellations in the hyperbolic plane. *Int. J. Pure Appl. Math.* **23** (2005), 565–576.
- [Iv] B. Iversen. *Hyperbolic Geometry*. London Math. Soc., Student Texts **25**, Cambridge University Press (1992).
- [J-S] G. A. Jones, D. Singerman. *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Jø-N] T. Jørgensen, M. Näätänen. Surfaces of genus 2; generic fundamental polygons. *Quart. J. Math.* **33** (1982), 451-461.
- [Ke] L. Keen. Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups. *Acta Math.* **115** (1966), 1-16.
- [K-N] T. Kuusalo, M. Näätänen. Geometric uniformization in genus 2. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **20** (1995), 401-418.
- [Mb] A. M. Macbeath. The classification of non-Euclidean crystallographic groups. *Canad. J. Math.* **19** (1967), 1192-1205.
- [Mb-S] A. M. Macbeath, D. Singerman. Spaces of subgroups and Teichmüller space. *Proc. London Math. Soc.* **31** (1975), 211-256.

- [N] M. Nääätänen. Regular n -gons and Fuchsian groups, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* **7** (1982), 291-300
- [Po] H. Poincaré. Théorie des groupes fuchiens. *Acta Math.* **1** (1882), 1-62.
- [Pr] R. Preston. *Projective Structures and fundamental domains on compact Klein surfaces*. Thesis Univ. of Texas, (1975).
- [Ra] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. GTM **149**, Springer-Verlag, 1994.
- [SS] P. Schmutz-Schaller. Teichmüller space and fundamental domains of Fuchsian groups. *L'Enseignement Mathématique*, **45** (1999), 169-187.
- [Si] D. Singerman. On the structure of non-Euclidean crystallographic groups. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **76** (1974), 233-240.
- [St] J. Stillwell. *Sources of Hyperbolic Geometry*. History of Mathematics, Vol. **10**, Amer. Math. Soc. and London Math. Soc. (1996).
- [W] H. C. Wilkie. On non-Euclidean crystallographic groups. *Math. Z.* **91** (1966), 87-102.
- [Z-V-C] H. Zieschang, E. Vogt, H. D. Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **835**, Springer-Verlag, 1980.

Apéndice

Las fórmulas generales para polígonos hiperbólicos (capítulo 2 de la Memoria) pueden definirse en Maple y, por un procedimiento iterativo, se obtienen fácilmente las fórmulas para los polígonos, convexos o no, de un número determinado de lados. De igual manera, con las fórmulas ya definidas, también es posible expresar cada vértice del polígono y el vector normal a cada lado, respecto al primer vértice y al vector normal al primero de los lados. Además, Maple admite la definición de las desigualdades que determinan las condiciones necesarias y suficientes para que un polígono hiperbólico sea convexo.

Para conocer todos los elementos de un polígono de p lados se necesitan $2p - 3$ datos previos, y entonces Maple permite determinar los elementos desconocidos, exactamente o de modo aproximado, según qué datos sean conocidos. Para que el polígono sea convexo, los datos deben elegirse de modo que satisfagan las condiciones requeridas (teorema 2.2.3). En cualquier caso, conocidos todos los elementos, puede representarse en el disco de Poincaré el polígono hiperbólico en cuestión. Tales representaciones requieren definir previamente la proyección del modelo $sl_2(\mathbb{R})$ del plano hiperbólico en el disco.

Dadas las características de una región fundamental y fijando las dimensiones de ciertos elementos, Maple posibilita, con las limitaciones propias de la aplicación y el ordenador utilizado, la obtención del resto de elementos de la región, así como su representación.

En el CD adjunto se aportan algunos archivos, desarrollados con Maple, donde se incluyen las definiciones de las operaciones del capítulo 1 y de las fórmulas citadas más arriba, así como su aplicación a la resolución y construcción de polígonos, convexos o no. Entre los aspectos particulares, se estudian las condiciones de existencia de polígonos convexos, la resolución y construcción de algunos polígonos autointersectantes no regulares, la representación de polígonos regulares convexos o estrellados, los polígonos rectángulos y la construcción de las regiones representadas en el capítulo 4 de la Memoria. En algunos de estos ejemplos se calculan, además, los generadores del grupo de isometrías de la región fundamental correspondiente.

A continuación, se incluye una relación de los archivos creados. Los dos primeros

se refieren a operaciones de matrices y algunos resultados del capítulo 1 de la Memoria, los cuatro siguientes corresponden al capítulo 2, los tres posteriores al capítulo 3 y los demás al capítulo 4. El primer número de cada archivo indica el capítulo de la Memoria donde se trata su contenido.

Posteriormente, se especifican los contenidos de cada hoja de Maple y se indica, si procede, la referencia al lugar de la Memoria donde aparece el resultado correspondiente. Varios de los documentos están diseñados de modo que el propio lector pueda determinar y construir casos propios cambiando los datos iniciales.

La numeración de algunos archivos incluye un cero:

0. *Relación de documentos;*

1.0. *Definiciones de operaciones, elementos geométricos y representaciones;*

2.0. *Relaciones (...) de un polígono hiperbólico(...);*

3.0. *Relaciones (...) de un polígono hiperbólico rectángulo. (...).*

Son hojas independientes donde se enumeran títulos o se definen operaciones utilizadas en otros archivos vinculados con dichas hojas.

Desde el primer archivo (**0.** *Relación de documentos*) puede accederse a cada una de las hojas de Maple. El archivo 1.1 está vinculado con el 1.0; 2.1, 2.2 y 2.3 lo están con el 2.0 y 3.1, 3.2 se vinculan con la hoja 3.0.

Las hojas de cálculo se han realizado con Maple V. Si se abren con otra versión posterior, aparece un mensaje preguntando si se quiere actualizar a esta última versión. Se debe contestar negativamente.

Es importante no variar los archivos incluidos en el CD, especialmente los independientes. Si se desea manipular alguno de los demás archivos, se aconseja guardarlo previamente con otro nombre en la misma carpeta, de modo que los vínculos con las hojas independientes puedan mantenerse.

Contenido del Apéndice

1. Operaciones en los conjuntos $M_2(\mathbb{C})$, M_4 , $sl_2(\mathbb{C})$ y elementos geométricos de \mathbb{H}^3 y \mathbb{H}^2 .
 - 1.0 Definiciones de operaciones, elementos geométricos y representaciones.
 - 1.1 Aplicaciones geométricas en \mathbb{H}^3 y \mathbb{H}^2 .
2. Polígonos hiperbólicos.
 - 2.0. Relaciones entre los elementos de polígonos hiperbólicos. Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo. Construcción de polígonos.
 - 2.1. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos.
 - 2.2. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos autointersectantes.
 - 2.3. Polígonos hiperbólicos regulares. Relaciones y representación.
3. Polígonos hiperbólicos rectángulos.
 - 3.0. Relaciones entre los elementos de un polígono hiperbólico rectángulo convexo. Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad del polígono. Construcción de polígonos rectángulos.
 - 3.1. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos rectángulos.
 - 3.2. Polígonos hiperbólicos regulares rectángulos. Relaciones y representación.
4. Regiones Fundamentales.
 - 4.1. Región Fundamental canónica de una superficie orientable de género 3 sin borde.
 - 4.2. Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller a partir de una Región Fundamental Canónica.
 - 4.3. Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller.
 - 4.4. Una Región Fundamental de una superficie de género cero con k componentes en el borde.

- 4.5. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición. Corte por las componentes 2^a y 3^a .
- 4.6. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición. Corte por las componentes 2^a y 4^a .
- 4.7. Una Región con cinco componentes en el borde sujeta a una condición:
 $\gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3$.
- 4.8. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde. Corte y pegado.

Índice

Recuerde que no debe actualizar estas hojas (hechas con Maple V) al abrirlas

Pulsando el número subrayado de cada epígrafe se accede a la hoja de Maple indicada.

1. Operaciones en los conjuntos $M_2(C)$, M_4 , $sl_2(C)$ y elementos geométricos de H^3 y H^2 .

1.0 Definiciones de operaciones, elementos geométricos y representaciones.

Definiciones previas

Operaciones en $M_2(C)$

Espacio de Minkowski M_4

Espacio hiperbólico tridimensional H^3

Espacio vectorial real $M_3 = sl_2(R)$ de las matrices con traza cero

Plano hiperbólico H^2

Isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Isometrías del plano hiperbólico

Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Determinación de isometrías del plano hiperbólico

Representación de puntos y geodésicas de H^2 en el disco de Poincaré \mathcal{D}

1.1 Aplicaciones y representaciones geométricas en H^3 y H^2 .

Matrices de $M_2(C)$ con norma 1 y cálculo de la traza

Puntos, geodésicas y planos de H^3

Puntos, distancia entre puntos y vectores normales a geodésicas de H^2

Posiciones relativas de geodésicas. Geodésicas secantes o paralelas: ángulo, punto común.

Geodésicas ultraparalelas: distancia, perpendicular común. Geodésica que pasa por dos puntos.

Punto y geodésica: distancia, perpendicular a la geodésica que pasa por el punto.

Isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Isometrías del plano hiperbólico

Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Determinación de isometrías del plano hiperbólico

Representación de puntos y geodésicas de H^2 en el disco de Poincaré \mathcal{D}

2. Polígonos hiperbólicos.

2.0 Relaciones entre los elementos de polígonos hiperbólicos. Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo. Construcción de polígonos.

Observaciones previas.

Fórmulas de los productos escalares $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$, $\eta(i, j) = \langle N_i, N_j \rangle$ y $\beta(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, N_j \rangle$. (Proposición 2.1.6)

i. Fórmula del producto escalar $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$ en función de $\beta(j, i)$ y $\delta(j, i) = -\langle N_j, A_i \rangle$

ii. Fórmula del producto escalar $\eta(i, j)$ en función de $\Delta(i, j) = \delta(i, j + 1)$ y $\gamma(i, j) = -\langle N_i, A_j \wedge N_j \rangle$

iii. Fórmula del producto escalar $\beta(i, j)$ en función de $\varepsilon(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, A_j \wedge N_j \rangle$ y de $\gamma(j, i)$.

Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo. (Teorema 2.2.3)

Construcción de polígonos. (Sección 2.3).

Proyección del modelo $sl_2(R)$ de H^2 en el disco de Poincaré. Geodésicas de los lados. (Capítulo 1)

2.1 Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos.

Observaciones previas.

Pentágonos hiperbólicos.

Hexágonos hiperbólicos.

2.2 Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos autointersectantes.

Observaciones previas. Fórmulas de polígonos autointersectantes.

Cuadriláteros. Pentágonos. Hexágonos.

Condiciones necesarias para la existencia del polígono (teorema 2.2.3). Vértices del polígono y vectores normales a los lados. Geodésicas de los lados.

Pentágonos autointersectantes. Hexágonos autointersectantes.

Cuadriláteros autointersectantes.

2.3 Polígonos hiperbólicos regulares. Relaciones y representación.

Relación entre la longitud del lado, la medida del ángulo y el número de lados.

Fórmulas generales de polígonos hiperbólicos.

El origen, centro del polígono.

Vértices y vectores normales a los lados.

Proyección en el disco de Poincaré y geodésicas de los lados.

Construcción de polígonos regulares.

i. Polígonos convexos.

ii. Polígonos estrellados.

3. Polígonos hiperbólicos rectángulos.

3.0 Relaciones entre los elementos de un polígono hiperbólico rectángulo convexo. Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad del polígono. Construcción de polígonos rectángulos.

Observaciones previas.

Fórmulas (1) de los productos escalares $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$, $\delta(i, j) = -\langle N_i, A_j \rangle$, $\eta(i, j) = \langle N_i, N_j \rangle$ (proposición 3.1.2).

Fórmula (2) del producto escalar $\beta(i, j)$ en función de $\gamma(j, i) = -\langle N_j, A_i \wedge N_i \rangle$ y $\varepsilon(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, A_j \wedge N_j \rangle$. Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono rectángulo sea convexo.

Construcción de polígonos rectángulos.

Proyección del modelo $sl_2(R)$ de H^2 en el disco de Poincaré. Geodésicas de los lados.

Fórmulas de polígonos rectángulos. Condiciones para la convexidad.

Fórmulas del pentágono rectángulo.

Condición necesaria y suficiente para que el pentágono sea convexo.

Fórmulas del hexágono rectángulo.

Condiciones necesarias y suficientes para que el hexágono sea convexo.

Algunas fórmulas del heptágono rectángulo.

Condiciones necesarias y suficientes para que el heptágono sea convexo.

Algunas fórmulas del octógono rectángulo.

Condiciones necesarias y suficientes para que el octógono sea convexo.

3.1 Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos rectángulos.

Observaciones.

Construcción de un pentágono rectángulo convexo.

Construcción de un hexágono rectángulo convexo.

Construcción de un heptágono rectángulo convexo.

Construcción de un octógono rectángulo convexo.

3.2 Polígonos hiperbólicos regulares rectángulos. Relaciones y representación.

Relación entre la longitud del lado y el número de lados.

Fórmulas generales de polígonos hiperbólicos rectángulos.

Vértices y vectores normales a los lados.

Proyección en el disco de Poincaré y geodésicas de los lados.

Construcción de polígonos rectángulos regulares.

- i. Polígonos rectángulos convexos.
- ii. Polígonos rectángulos estrellados.

4. Regiones Fundamentales.

4.1 Región Fundamental canónica de una superficie orientable de género 3 sin borde.

Observaciones previas.
Construcción de la región fundamental dodecagonal.
Resolución del dodecágono.
Una solución.

4.2 Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller a partir de una Región Fundamental Canónica.

Observaciones previas.
Región canónica de la hoja 4.1.
Primer paso: corte por los vértices 3-6. Cálculo de la distancia $\lambda = d(A_3, A_6)$ y los ángulos $\theta_{3a}, \theta_{3b}, \theta_{6a}, \theta_{6b}$.
Cálculos previos.
Cálculo de los elementos de la segunda región.
Representación de la segunda región.
Segundo paso: corte por los vértices 4-6. Cálculo de la distancia $\mu = d(A_4, A_6)$ y los ángulos $\theta_{4a}, \theta_{4b}, \theta_{6a}, \theta_{6b}$.
Cálculos previos. Cálculo de los elementos de la tercera región. Representación de la tercera región.
Tercer paso: corte por los vértices 5-10. Cálculo de la distancia $\nu = d(A_5, A_{10})$ y los ángulos $\theta_{5a}, \theta_{5b}, \theta_{10a}, \theta_{10b}$.
Cálculos previos. Cálculo de los elementos de la cuarta región. Representación de la cuarta región.
ltimo paso: corte por los vértices 6-8. Cálculo de la distancia $\rho = d(A_6, A_8)$ y los ángulos $\theta_{6a}, \theta_{6b}, \theta_{8a}, \theta_{8b}$.
Cálculos previos. Cálculo de los elementos de la Última región. Dimensiones y representación de la región de Schmutz-Schaller.

4.3 Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller.

Observaciones previas.
Construcción de la región fundamental dodecagonal.
Resolución del dodecágono.
Región de Schmutz-Schaller.
Cálculo de los generadores del grupo discreto.
Comprobaciones.

4.4 Una Región Fundamental de una superficie de género cero con k componentes en el borde.

Observaciones.
Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.
Valor del parámetro dependiente y cálculo de la región.
Una solución.

Representación de la región fundamental.
Generadores del grupo.
Comprobaciones.

4.5 Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición. Corte por las componentes 2ª y 3ª.

Observaciones.
Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.
Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.
Una solución.
Representación de la región fundamental con el corte.

4.6 Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición. Corte por las componentes 2ª y 4ª.

Observaciones.
Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.
Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.
Una solución.
Representación de la región fundamental con el corte.

4.7 Una Región con cinco componentes en el borde sujeta a una condición $\gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3$

Observaciones.
Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.
Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.
Una solución.
Representación de la región fundamental.

4.8 Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde. Corte y pegado.

Observaciones.
Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.
Valor del parámetro dependiente y cálculo de la región.
Una solución.
Representación de la región fundamental.
Corte y pegado.

1.0. Operaciones con matrices y otras definiciones

> restart;

Definiciones previas

> with(linalg):

Matriz dos por dos. Conjugada de una matriz. Traza de una matriz

> cj:=conjugate;cjm:=X->matrix([[cj(X[1,1]), cj(X[1,2])], [cj(X[2,1]),
> cj(X[2,2])]]);

$cj := \text{conjugate}$

$$cjm := X \rightarrow \begin{bmatrix} cj(X_{1,1}) & cj(X_{1,2}) \\ cj(X_{2,1}) & cj(X_{2,2}) \end{bmatrix}$$

> m2:=(z,u,v,w)->matrix([[z, u], [v, w]]);

$$m2 := (z, u, v, w) \rightarrow \begin{bmatrix} z & u \\ v & w \end{bmatrix}$$

> Tr:=x->simplify(trace(evalm(x)));

$Tr := x \rightarrow \text{simplify}(\text{trace}(\text{evalm}(x)))$

> id2:=m2(1,0,0,1);

$$id2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones en $M_2(C)$

Producto escalar de dos matrices de $M_2(C)$

Se define $\langle x, y \rangle = \text{sp}(x, y)$

> sp:=(x,y)->1/2*Tr(x&*adjoint(y));

$$sp := (x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \text{Tr}(x \text{ ' \& * ' adjoint}(y))$$

Norma de una matriz de $M_2(C)$

Se define $\langle x, x \rangle = \det x = \text{nm}(x)$

> nm:=x->sp(x,x);

$nm := x \rightarrow \text{sp}(x, x)$

Producto exterior de dos matrices de $M_2(C)$

Se define $a \times b = \text{xp}(a, b)$

> xp:=(a,b)->evalm(-1/2*(a&*adjoint(b)-b&*adjoint(a)));

$$xp := (a, b) \rightarrow \text{evalm}\left(-\frac{1}{2}(a \text{ ' \& * ' adjoint}(b)) + \frac{1}{2}(b \text{ ' \& * ' adjoint}(a))\right)$$

Espacio vectorial complejo $sl_2(C)$ de matrices con traza cero

Está formado por las matrices:

> sl2:=(z,v,w)->matrix([[z, v], [w, -z]]);

$$sl2 := (z, v, w) \rightarrow \begin{bmatrix} z & v \\ w & -z \end{bmatrix}$$

Base canónica de $sl_2(C)$

> X[0]:=sl2(0,-1,1):X[1]:=sl2(0,1,1):X[2]:=sl2(1,0,0):
 > seq(X[i]=evalm(X[i]),i=0..2);

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Productos vectoriales de dos vectores de la base

Se cumple $X_0 \times X_1 = -X_2$, $X_1 \times X_2 = -X_0$, $X_2 \times X_0 = -X_1$...

> xp(X[0],X[1])=-X[2],xp(X[1],X[2])=X[0],xp(X[2],X[0])=-X[1];

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -X_2, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X_0, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -X_1$$

Forma volumen de tres matrices de $sl_2(C)$

Se define $\text{vol}(x, y, z) = \langle x \times y, z \rangle$

> vol:=(x,y,z)->sp(xp(x,y),z);

$$\text{vol} := (x, y, z) \rightarrow \text{sp}(\text{xp}(x, y), z)$$

Forma volumen en los vectores de la base

Se cumple $\text{vol}(X_0, X_1, X_2) = 1$

> vol(X[0],X[1],X[2]);

1

Espacio de Minkowski M_4

Está formado por las matrices:

> M4:=(z,b,c)->matrix([[z, b], [c, -cj(z)]]);

$$M_4 := (z, b, c) \rightarrow \begin{bmatrix} z & b \\ c & -\overline{cj(z)} \end{bmatrix}$$

Vectores isotrópicos: múltiplos de vectores de los dos tipos siguientes:

> pim:=z->M4(z,-abs(z)^2,1);pim(z);

$$\text{pim} := z \rightarrow M_4(z, -|z|^2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} z & -|z|^2 \\ 1 & -\overline{z} \end{bmatrix}$$

> inf:=M4(0,-1,0);

$$\text{inf} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base canónica de M_4

> X[3]:=M4(I,0,0):

> seq(X[i]=evalm(X[i]),i=0..3);

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

La base es ortonormal

Se cumple $\langle X_i, X_j \rangle = 0$, $i \neq j$, y $\langle X_i, X_i \rangle = 1$; $i, j = 1, 2, 3$.

> seq(sp(X[0],X[i]),i=1..3),seq(sp(X[1],X[i]),i=2..3),sp(X[2],X[3]);

> seq(nm(X[i]),i=0..3);

0, 0, 0, 0, 0, 0

1, -1, -1, -1

Espacio hiperbólico tridimensional H^3

$X \in M_4$, con $c > 0$, $\det(X) = 1$

> H3:=(z,c)->matrix([[z, -((abs(z))^2+1)/c], [c, -cj(z)]]):

> H3(z,c), " con c>0";

$$\begin{bmatrix} z & -\frac{|z|^2+1}{c} \\ c & -\bar{z} \end{bmatrix}, \text{ " con } c > 0 \text{ "}$$

Puntos impropios:

> pim(z),evalm(inf);

$$\begin{bmatrix} z & -|z|^2 \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz X_0 representa un punto de H^3

> X[0]=evalm(X[0]);

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Planos hiperbólicos de H^3

Todo plano hiperbólico es ortogonal a un vector de M_4 con norma -1 .

Los vectores X_1, X_2, X_3 son vectores normales a sendos planos de H^3 :

> seq(X[i]=evalm(X[i]),i=1..3);

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Posiciones relativas de dos planos de H^3

Si P, P' son los vectores normales a los planos, éstos son secantes, paralelos o ultraparalelos según que $|\langle P, P' \rangle| < 1$, $|\langle P, P' \rangle| = 1$, $|\langle P, P' \rangle| > 1$.

Los planos ortogonales a X_1, X_2, X_3 son perpendiculares entre sí.

> sp(X[1],X[2]),sp(X[2],X[3]),sp(X[3],X[1]);

0, 0, 0

Geodésicas de H^3

Una geodésica está asociada a una matriz de $sl_2(C)$ con determinante 1 (que representa el semigirolo alrededor de la geodésica)

Las matrices $X_0, -iX_1, -iX_2$ son semigirolos alrededor de sendas geodésicas de H^3

> X[0]=evalm(X[0]),-i*X[1]=evalm(-I*X[1]),-i*X[2]=evalm(-I*X[2]);

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, -iX_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, -iX_2 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Posiciones relativas de dos geodésicas de H^3

Si σ, τ están asociadas a dos geodésicas, éstas son secantes, paralelas o ultraparalelas si $\langle \sigma, \tau \rangle \in R$ y, respectivamente, $|\langle \sigma, \tau \rangle| < 1$, $|\langle \sigma, \tau \rangle| = 1$, $|\langle \sigma, \tau \rangle| > 1$.

En el caso de $\langle \sigma, \tau \rangle \in C$, las geodésicas no son coplanarias.

Las geodésicas asociadas a $X_0, -iX_1, -iX_2$ son perpendiculares entre sí:

> s_0:=evalm(X[0]);s_1:=evalm(-I*X[1]);s_2:=evalm(-I*X[2]);

$$s_0 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{-1} := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{-2} := \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

> anglebracket(s_0,s_1)=sp(s_0,s_1), anglebracket(s_1,s_2)=sp(s_1,s_2),
 > anglebracket(s_2,s_0)=sp(s_2,s_0);

$$\langle s_0, s_1 \rangle = 0, \langle s_1, s_2 \rangle = 0, \langle s_2, s_0 \rangle = 0$$

Geodésica perpendicular a otras dos dadas

> gpgg:=(sigma,tau)->if abs(sp(sigma,tau))=1 then 'las geodésicas son
 > paralelas'else evalm(I/sqrt(sp(sigma,tau)^2-1)*xp(sigma,tau)) fi:

Determinación de geodésicas coplanarias

Semigiros asociados a geodésicas coplanarias, dado el vector P normal al plano:

> P=M4(z,b,c),sigma=s12(u,v,w);

$$P = \begin{bmatrix} z & b \\ c & -\bar{z} \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix}$$

Tiene que cumplirse:

> gdP:=(P,sigma)->evalm(sigma&*P=-P&*cjm(sigma));
 $gdP := (P, \sigma) \rightarrow \text{evalm}(\sigma' \& * ' P = -(P' \& * ' \text{cjm}(\sigma))$

Caso particular $P = X_3$:

> evalm(&*(s12(u,v,w),X[3])+&*(X[3],cjm(s12(u,v,w)))=matrix(2,2,[0,0,0,0]);

$$\begin{bmatrix} Iu + I\bar{u} & Iv + I\bar{v} \\ Iw + I\bar{w} & -Iu - I\bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... se requiere que $z, u, w \in \mathbb{R}$, además de $-u^2 - vw = 1$.

Caso particular $P = X_1$:

> evalm(&*(s12(u,v,w),X[1])+&*(X[1],cjm(s12(u,v,w)))=0);

$$\begin{bmatrix} v + \bar{w} & u - \bar{u} \\ -u + \bar{u} & w + \bar{v} \end{bmatrix} = 0$$

Caso particular $P = X_2$:

> evalm(&*(s12(u,v,w),X[2])+&*(X[2],cjm(s12(u,v,w)))=0);

$$\begin{bmatrix} u + \bar{u} & -v + \bar{v} \\ w - \bar{w} & u + \bar{u} \end{bmatrix} = 0$$

Distancia entre dos puntos x, y y del espacio hiperbólico H^3

> dpp:=(x,y)->arccosh(sp(x,y));

$$dpp := (x, y) \rightarrow \text{arccosh}(\text{sp}(x, y))$$

Ángulo determinado por dos geodésicas secantes de semigiros s, t

> a3gg:=(s,t)->arccos(abs(sp(s,t)));

$$a3gg := (s, t) \rightarrow \text{arccos}(|\text{sp}(s, t)|)$$

Distancia entre dos geodésicas ultraparalelas de semigiros s, t

> dgg:=(p,q)->arccosh(abs(sp(p,q)));

$$dgg := (p, q) \rightarrow \text{arccosh}(|\text{sp}(p, q)|)$$

Representaciones de planos hiperbólicos en el semiespacio de Poincaré.

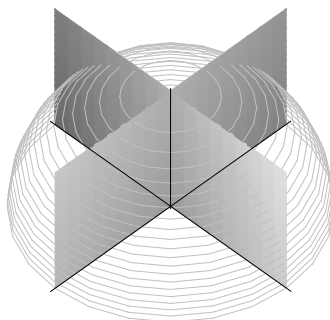
Definiciones previas:

> with(plots):

```

> ce:= (r,phi,theta,a,b) ->
> [r*sin(phi)*cos(theta)+a,r*sin(phi)*sin(theta)+b,r*cos(phi)]:
> pce:=P->ce(1/abs(P[2,1]),phi,theta,Re(P[1,1])/Re(P[2,1]),Im(P[1,1])/Re(
> P[2,1])):
> pci:=P->Re(P[1,1])*x+Im(P[1,1])*y+Re(P[1,2])/2=0:
Semiesferas euclídeas en el semiespacio superior:
> hs:=P->plot3d(pce(evalm(P)),phi=0..Pi/2,theta=0..2*Pi,color=grey,style=
> contour,scaling=constrained,contours=15,axes=normal,tickmarks=[0,0,0]):
Semiplanos euclídeos en el semiespacio superior:
> hp:=P->implicitplot3d(pci(P),x=-1..1,y=-1..1,z=0..1,style=PATCHNOGRID,
> axes=normal,tickmarks=[0,0,0]):
Horizontes de planos del primer tipo:
> hsh:=P->plot3d(eval([pce(evalm(P))[1],pce(evalm(P))[2],0],phi=Pi/2),phi=
> 0..Pi/2,theta=0..2*Pi,color=blue,style=contour,scaling=constrained):
Horizontes de planos del segundo tipo:
> hph:=P->if Re(P[1,1])=0 then
> plot3d([x,-1/2*(2*Re(P[1,1])*x+P[1,2])/Im(P[1,1]),0],x=-1..1,y=-1..1,
> color=blue,style=contour,scaling=constrained) else
> plot3d([-1/2*(2*Im(P[1,1])*y+P[1,2])/Re(P[1,1]),y,0],x=-1..1,y=-1..1,
> color=blue,style=contour,scaling=constrained) fi:
Planos hiperbólicos en el semiespacio de Poincaré:
> pl:=P->if P[2,1]=0 then hp(P) else hs(P) fi:
Horizontes de planos hiperbólicos
> plh:=P->if P[2,1]=0 then hph(P) else hsh(P) fi:
Planos de vector normal dado:
Si es un semiplano euclídeo y no aparece la representación, girar el dibujo.
Para ver el horizonte de cada plano, girar convenientemente la figura.
Para ampliar una figura, pulsar Ctrl + 2 (3, 4, etc.)
> display({pl(X[1]),pl(X[2]),pl(X[3])});

```

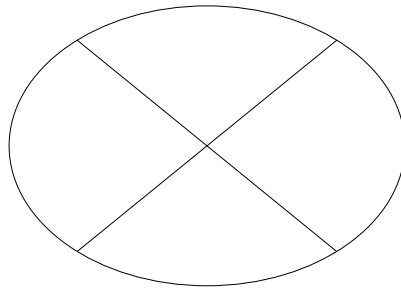


... son los planos hiperbólicos de vectores normales X_1 , X_2 , X_3 , cuyos horizontes pueden representarse:

```

> display({plh(X[1]),plh(X[2]),plh(X[3])});

```



Representaciones de geodésicas en el semiespacio de Poincaré.

Definición previa

```
> gd3:=G->evalm(abs(G[2,1])*matrix([[G[1,1]*cosh(t)+I*sinh(t)]/G[2,1],
> ((-abs(G[1,1]))^2-1)*cosh(t)-2*Im(G[1,1])*sinh(t))/(abs(G[2,1]))^2],
> [cosh(t), -cj((G[1,1]*cosh(t)+I*sinh(t))/G[2,1])]))):
```

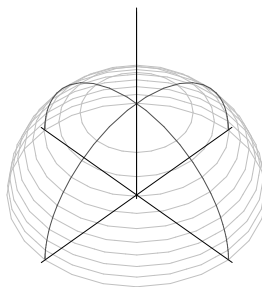
Geodésicas asociadas a matrices dadas de $sl_2(C)$

```
> g3:=G->if G[2,1]=0 then
> spacecurve([-1/2*Im(G[1,2]), 1/2*Re(G[1,2]), t, t=0..2], scaling=constrained,
> color=red) else
> spacecurve(evalc(eval([Re(gd3(G)[1,1])/gd3(G)[2,1], Im(gd3(G)[1,1])/gd3(G)
> [2,1], 1/gd3(G)[2,1], t=-5..5], [a=G[1,1], c=G[2,1]])), scaling=constrained,
> color=red) fi:
```

Si no aparece la representación, girar el dibujo.

Para ampliar una figura, pulsar Ctrl + 2 (3, 4, etc.)

```
> display({g3(s_0), g3(evalm(s_1)), g3(evalm(s_2)), pl(X[1])});
```



... son las geodésicas asociadas a X_0 , $-iX_1$, $-iX_2$. Las dos primeras pertenecen al plano de vector normal X_1 .

Espacio vectorial real $M_3 = sl_2(R)$ de las matrices con traza cero

Está formado por las matrices:

> `sl2(x,b,c);`

$$\begin{bmatrix} x & b \\ c & -x \end{bmatrix}$$

Base canónica de $sl_2(R)$

> `seq(X[i]=evalm(X[i]),i=0..2);`

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Plano hiperbólico H^2

$X \in sl_2(R)$ con $c > 0$, $\det(X) = 1$

Cada punto puede escribirse $H2(x, c)$:

> `H2:=(x,c)->H3(x,c);`

> `H2(x,c), "con c>0";`

$$\begin{bmatrix} x & -\frac{|x|^2 + 1}{c} \\ c & -\bar{x} \end{bmatrix}, \text{ "con } c > 0\text{"}$$

Geodésicas de H^2

Cada geodésica tiene ecuación $A \operatorname{ch} t + AN \operatorname{sh} t$, donde $A \in H^2$ y N es un vector de $sl_2(R)$ con determinante -1 (vector normal a la geodésica). Definimos:

> `GAN:=(a,n,t)->evalm(a*cosh(t)+&*(a,n)*sinh(t));`

$$GAN := (a, n, t) \rightarrow \operatorname{evalm}(a \cosh(t) + (a \wedge n) \sinh(t))$$

> `GAN(X[0],X[1],t),GAN(X[0],X[1],t);`

$$\begin{bmatrix} -\sinh(t) & -\cosh(t) \\ \cosh(t) & \sinh(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sinh(t) & -\cosh(t) \\ \cosh(t) & \sinh(t) \end{bmatrix}$$

... son las geodésicas que pasan por el punto X_0 de vectores normales X_1 y X_2 .

Posiciones relativas de dos geodésicas de H^2

Si N, N' son los vectores normales de las geodésicas, éstas son secantes, paralelas o ultra-paralelas según que $|\langle N, N' \rangle| < 1$, $|\langle N, N' \rangle| = 1$, $|\langle N, N' \rangle| > 1$.

> `anglebracket(X[1],X[2])=sp(X[1],X[2]);`

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 0$$

... las geodésicas de vectores normales X_1, X_2 son secantes (perpendiculares)

Un punto de una geodésica de vector normal dado

> `ping:=n->if n[2,1]=0 then H3(n[1,2]/(2*n[2,2]),1) elif n[2,1]>0 then`

> `H3(n[1,1],n[2,1]) else H3(-n[1,1],-n[2,1]) fi:`

> `ping(X[1]),ping(X[2]);`

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Distancia de un punto a una geodésica de vector normal n

> dpg:=(a,n)->abs(arcsinh(sp(a,n)));

$$dpg := (a, n) \rightarrow |\operatorname{arcsinh}(\operatorname{sp}(a, n))|$$

Vector normal a ...

... la geodésica que pasa por dos puntos x, y dados,

... la geodésica perpendicular a dos geodésicas ultraparalelas de vectores normales x, y dados:

> vn:=(x,y)->evalm(xp(y,x)/sqrt((sp(x,y))^2-1));

$$vn := (x, y) \rightarrow \operatorname{evalm}\left(\frac{\operatorname{xp}(y, x)}{\sqrt{\operatorname{sp}(x, y)^2 - 1}}\right)$$

... la geodésica que pasa por el punto a y es perpendicular a otra de vector normal n :

> vnpg:=(a,n)->evalm(xp(a,n)/sqrt((sp(a,n))^2+1));

$$vnpg := (a, n) \rightarrow \operatorname{evalm}\left(\frac{\operatorname{xp}(a, n)}{\sqrt{\operatorname{sp}(a, n)^2 + 1}}\right)$$

Ángulo determinado por dos geodésicas secantes orientadas de vectores normales p, q .

> a2gg:=(p,q)->arccos(sp(p,q));

$$a2gg := (p, q) \rightarrow \arccos(\operatorname{sp}(p, q))$$

Distancia entre dos geodésicas ultraparalelas de vectores normales p, q .

> dgg:=(p,q)->arccosh(abs(sp(p,q)));

$$dgg := (p, q) \rightarrow \operatorname{arccosh}(|\operatorname{sp}(p, q)|)$$

Punto de intersección ...

... propio de dos geodésicas orientadas secantes de vectores normales x, y

... impropio de dos geodésicas orientadas paralelas de vectores normales x, y

> pip:=(x,y)->if xp(x,y)[2,1]>0 then evalm(xp(x,y)/sqrt(1-sp(x,y)^2))

> else evalm(-xp(x,y)/sqrt(1-sp(x,y)^2))fi:

> pii:=(x,y)->if xp(x,y)[2,1]=0 then evalm(xp(x,y)/xp(x,y)[1,2]) else

> evalm(xp(x,y)/xp(x,y)[2,1])fi:

Isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Isometrías que conservan o invierten la orientación

Se define la matriz $f = \mathbf{m2}(z, u, v, w)$, con $z, u, v, w \in C$ y $\det f = 1$

> f3:=m2(z,u,v,w),"con det(f3) = 1";

$$f3 = \begin{bmatrix} z & u \\ v & w \end{bmatrix}, \text{ "con det}(f3) = 1\text{"}$$

Si $X \in M_4$ se define la isometría $\mathbf{f}[X] = fX\overline{f}^{-1}$, que conserva la orientación:

> f3:=(f,X)->simplify(evalm(&*(f,X,cjm(f)^(-1))));

$$f3 := (f, X) \rightarrow \operatorname{simplify}\left(\operatorname{evalm}\left(\& * \left(f, X, \frac{1}{\operatorname{cjm}(f)}\right)\right)\right)$$

A la geodésica, propia o impropia, invariante por $\mathbf{f}[X]$ se le llama eje de \mathbf{f} , $\mathbf{h}(\mathbf{f})$. Cuando $f \in sl_2(C)$, la isometría $\mathbf{f}[X]$ es el semigiros alrededor de una geodésica.

Si $X \in M_4$ se define la isometría $\mathbf{f}^*[X] = fX\overline{f}^{-1}$, que invierte la orientación:

> f3x:=(f,X)->simplify(evalm(&*(f,cjm(X),cjm(f)^(-1))));

$$f3x := (f, X) \rightarrow \text{simplify}(\text{evalm}(' \& * '(f, \text{cjm}(X), \frac{1}{\text{cjm}(f)})))$$

Si σ es el semigiro alrededor de una geodésica, el semigiro τ alrededor de la geodésica transformada por \mathbf{f} ó \mathbf{f}^* es $\tau = f \sigma f^{-1}$ ó $\tau = f \bar{\sigma} f^{-1}$

> f3g:=(f,sigma)->simplify(evalm(&*(f,sigma,f^(-1))));

$$f3g := (f, \sigma) \rightarrow \text{simplify}(\text{evalm}(' \& * '(f, \sigma, \frac{1}{f})))$$

> f3gx:=(f,sigma)->simplify(evalm(&*(f,cjm(sigma),f^(-1))));

$$f3gx := (f, \sigma) \rightarrow \text{simplify}(\text{evalm}(' \& * '(f, \text{cjm}(\sigma), \frac{1}{f})))$$

Desplazamiento de una isometría

> dp:=f->arccosh(1/2*Tr(f)^2-1);

$$dp := f \rightarrow \text{arccosh}(\frac{1}{2} \text{Tr}(f)^2 - 1)$$

La parte real de $dp(f)$ mide la distancia hiperbólica entre $A \in h(\mathbf{f})$ y $\mathbf{f}[A]$. La parte imaginaria es el ángulo que gira cualquier plano hiperbólico que contiene a $h(\mathbf{f})$:

> Ddp:=f->Re(dp(f)); Adp:=f->Im(dp(f));

$$Ddp := f \rightarrow \Re(dp(f))$$

$$Adp := f \rightarrow \Im(dp(f))$$

Eje de una isometría

Dada $\mathbf{f}[X]$, la geodésica invariante está determinada por la matriz de $sl_2(C)$

> eje:=f->if abs(Tr(f))=2 then evalm(f-f^(-1)) else

> evalm(1/sqrt(4-(Tr(f))^2)*(f-f^(-1))) fi:

... si $|\text{traza}(f)| = 2$, el eje de \mathbf{f} es una geodésica impropia y, en caso contrario, la matriz anterior determina el semigiro alrededor de la geodésica (propia) invariante por $\mathbf{f}[X]$.

Isometrías del plano hiperbólico

Están asociadas a las matrices $f = \mathbf{m2}(z, u, v, w)$, con $z, u, v, w \in R$ y $\det f = 1$, si conservan la orientación, ó $\det f = -1$, si invierten la orientación

Si $X \in sl_2(R)$ se define la isometría $\mathbf{f}[X] = fXf^{-1}$, $\det f = 1$, que conserva la orientación:

> f2:=(f,X)->evalm(&*(f,X,f^(-1)));

$$f2 := (f, X) \rightarrow \text{evalm}(' \& * '(f, X, \frac{1}{f}))$$

Si $X \in sl_2(R)$ se define la isometría $\mathbf{f}^*[X] = -fXf^{-1}$, $\det f = -1$, que invierte la orientación:

> f2x:=(f,X)->evalm(-&*(f,X,f^(-1)));

$$f2x := (f, X) \rightarrow \text{evalm}(-' \& * '(f, X, \frac{1}{f}))$$

La definición de desplazamiento de una isometría de H^3 conserva su validez en H^2 .

> f2_0:=X[0]; [tr=Tr(%),D=Ddp(%),A=Adp(%)];

$$f2_0 := X_0$$

$$[tr = 0, D = 0, A = \pi]$$

... es un giro de ángulo π . Y $f2_0[X_0] = X_0$:

> f2(f2_0,X[0]);

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes isometrías invierten la orientación:

> f2x_1:=X[1]; [tr=Tr(%),D=Ddp(%),A=Adp(%)];

$$f_{2x_1} := X_1$$

$$[tr = 0, D = 0, A = \pi]$$

> 'f2x_1(X[0])='; f2x(f2x_1,X[0])=X[0]; 'f2x_1(X[2])='; f2x(f2x_1,X[2])=-X[2];

$$f_{2x_1}(X[0]) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X_0$$

$$f_{2x_1}(X[2]) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -X_2$$

> f2x_2:=X[2]; [tr=Tr(%),D=Ddp(%),A=Adp(%)];

$$f_{2x_2} := X_2$$

$$[tr = 0, D = 0, A = \pi]$$

> 'f2x_2(X[0])='; f2x(f2x_2,X[0])=X[0]; 'f2x_2(X[1])='; f2x(f2x_2,X[1])=-X[1];

$$f_{2x_2}(X[0]) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X_0$$

$$f_{2x_2}(X[1]) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -X_1$$

Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Si A, B son dos puntos de H^3 , la traslación de eje \overline{AB} que transforma A en B :

> t1pp:=(A,B)->evalm(1/sqrt(2+2*sp(A,B))*(B&*cjm(A)-id2)):

Si π_P, π_Q son dos planos de H^3 , una isometría que transforma π_P en π_Q :

> iPP:=(P,Q)->if evalf(sp(P,Q),5)=1.0000 then

> evalf(evalm(1/2*(-Q&*cjm(P)+id2)),5) else

> simplify(evalm(1/sqrt(2-2*sp(P,Q))*(Q&*cjm(P)+id2))) fi:

Observaciones:

El transformado del vector P puede ser Q ó $-Q$ (ambos son vectores normales al mismo plano, aunque orientado de diverso modo).

Si π_P, π_Q son planos paralelos, cuando $\text{sp}(P,Q) = 1$ y los resultados incluyan decimales, puede ser necesario revisarlos convenientemente.

Si σ, τ determinan dos geodésicas, una isometría que transforma la primera geodésica en la segunda:

> igg:=(sigma,tau)->if evalc(sp(sigma,tau))=-1 then

> evalm(1/2*(-tau&*sigma-id2)) else

> evalm(1/sqrt(2+2*sp(sigma,tau))*(tau&*sigma-id2)) fi:

Isometría de eje dado h_σ y desplazamiento δ (para una orientación de h_σ):

> isf:=(sigma,delta)->evalm(I*sigma*sinh(delta/2)+cosh(delta/2)*id2):

Una traslación paralela de eje impropio dado $U \in H^3$:

```
> tpf:=(U,p)->if U[2,1]=1 then
> evalm(p*m2(U[1,1],-U[1,1]^2,1,-U[1,1])+id2) else evalm(p*U+id2)fi:
```

Determinación de isometrías del plano hiperbólico

Las determinaciones estudiadas en H^3 permanecen válidas para H^2 , mediante las adaptaciones apropiadas:

Traslación **tlpp**(A, B) de un punto a otro.

Transformación **igg2**(P, Q) = **iPP**(P, Q) de un vector en otro, ambos de norma -1 (en H^3 : P, Q son vectores normales a planos; en H^2 : P, Q son vectores normales a geodésicas).

(También está determinada por **igg**(σ, τ), escribiendo $\sigma = -iP, \tau = -iQ$, siendo P, Q vectores normales a las geodésicas.)

Isometrías **isf**(σ, δ) que dejan invariante

un punto A ($\sigma = A, \delta = i\theta$, elípticas),

una geodésica de vector normal N ($\sigma = -iN; \delta = D$, hiperbólicas; $\delta = D + i\pi$, reflexiones sesgadas). Para una reflexión sesgada sustituimos **isf**(σ, δ) por $i \cdot \mathbf{isf}(\sigma, \delta)$ ó $-i \cdot \mathbf{isf}(\sigma, \delta)$

Isometrías **tpf**(U, p) que dejan invariante un punto impropio U (parabólicas)

Observaciones:

Debe tenerse en cuenta que dos matrices opuestas definen la misma isometría.

Según sea una isometría **f** ó una isometría **f***, definidas aquí como **f2** y **f2x**, se conserva o se invierte la orientación.

```
> igg2:=iPP:
> rot2:=(A,theta)->isf(A,I*theta);
      rot2 := (A,  $\theta$ )  $\rightarrow$  isf(A,  $I\theta$ )
> tl2:=(N,D)->isf(-I*N,D);
      tl2 := (N, D)  $\rightarrow$  isf(-I N, D)
> rs:=(N,D)->simplify(evalm(-I*isf(-I*N,D+I*Pi)));
      rs := (N, D)  $\rightarrow$  simplify(evalm(-I isf(-I N, D +  $I\pi$ )))
> rot2(X[0],theta), 'Comprobación', simplify(f2(rot2(X[0],theta),X[0]))=X[0];
```

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2}\theta) & \sin(\frac{1}{2}\theta) \\ -\sin(\frac{1}{2}\theta) & \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X_0$$

... giro de ángulo θ alrededor del punto X_0 .

```
> tl2(X[1],D), 'Comprobación', simplify(f2(isf(s_1,D),X[1]))=X[1];
```

$$\begin{bmatrix} \cosh(\frac{1}{2}D) & \sinh(\frac{1}{2}D) \\ \sinh(\frac{1}{2}D) & \cosh(\frac{1}{2}D) \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X_1$$

... traslación de desplazamiento D que deja invariante la geodésica asociada a X_1 .

```
> rs(X[2],D), 'Comprobación', simplify(f2x(rs(X[2],D),X[2]))=-X[2];
```

$$\begin{bmatrix} \cosh(\frac{1}{2}D) + \sinh(\frac{1}{2}D) & 0 \\ 0 & -\cosh(\frac{1}{2}D) + \sinh(\frac{1}{2}D) \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -X_2$$

... reflexión sesgada de desplazamiento D que deja invariante la geodésica asociada a X_2 .

> tpf(pim(x),p);

$$\begin{bmatrix} px + 1 & -px^2 \\ p & -px + 1 \end{bmatrix}$$

... traslación paralela de eje impropio $U = pim(x)$:

> assume(x,real):

> simplify(f2(tpf(pim(x),p),pim(x))=evalm(pim(x)));

$$\begin{bmatrix} x\tilde{} & -x\tilde{}^2 \\ 1 & -x\tilde{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\tilde{} & -x\tilde{}^2 \\ 1 & -x\tilde{} \end{bmatrix}$$

> x:='x'; # clear assumptions made on x:

$$x := x$$

> tpf(inf,p);f2(tpf(inf,p),inf)=evalm(inf);

$$\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... traslación paralela de eje impropio $U = inf$.

Representación de puntos y geodésicas de H^2 en el disco de Poincaré \mathcal{D}

Proyección del modelo $sl_2(R)$ del plano hiperbólico H^2 en el disco de Poincaré

```
> D_P:=M->if (det(M)=0 and M[2,1]=1) then
> [(2*M[1,1])/(M[1,1]^2+1), (M[1,1]^2-1)/(M[1,1]^2+1)] else
> [(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2), (M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/
> (M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)] fi:
```

Representación de puntos y geodésicas de H^2 en el disco de Poincaré

pdP(A) es el punto de \mathcal{D} de matriz asociada A

gd2(a,n) es la geodésica de \mathcal{D} que pasa por a de vector normal n , **sgp**(a,n,s) es un segmento de esta geodésica de longitud s

sgpp(a,b) es el segmento que une a con b

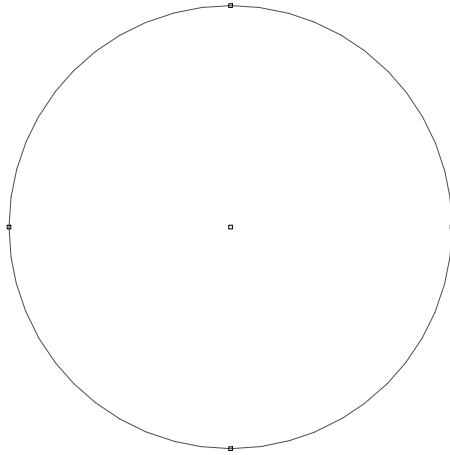
g2(n) es la geodésica de vector normal n

```
> pdP:=A->display(
> {pointplot(D_P(A),color=magenta,symbol=circle),plot([cos(r),sin(r),r=-Pi..Pi],
> color=blue,axes=none,scaling=constrained)}):
> gd2:=(a,n)->D_P(evalm(GAN(a,n,t))):
> sgp:=(a,n,s)->display(
> {plot([evalf(gd2(a,n)[1]),evalf(gd2(a,n)[2]),t=0..s]),pdP(a),plot([cos(r),
> sin(r),r=-Pi..Pi],color=blue,axes=none,scaling=constrained)}):
> sgpp:=(a,b)->sgp(a,vn(a,b),arccosh(sp(a,b))):
> gAN:=(a,n)->display(
> {plot([evalf(gd2(a,n)[1]),evalf(gd2(a,n)[2]),t=-infinity..infinity]),
> pointplot(D_P(GAN(a,n,-100.)),color=magenta,symbol=circle),pointplot(D_P(
> GAN(a,n,100.)),color=magenta,symbol=circle),plot([cos(r),sin(r),r=-Pi..Pi],
> color=blue,axes=none,scaling=constrained)}):
```

```
> g2:=n->gAN(ping(n),n):
```

Ejemplos

```
> display({pdP(X[0]),pdP(pim(-1)),pdP(pim(0)),pdP(pim(1)),pdP(inf)});
```

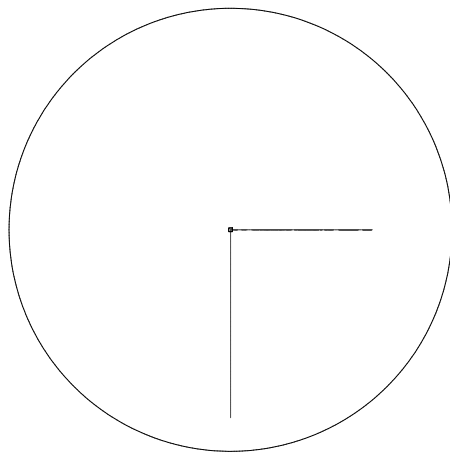


... representan el punto X_0 y los puntos impropios:

```
> pim(-1)=-1,pim(0)=-i,pim(1)=1,evalm(inf)=i;
```

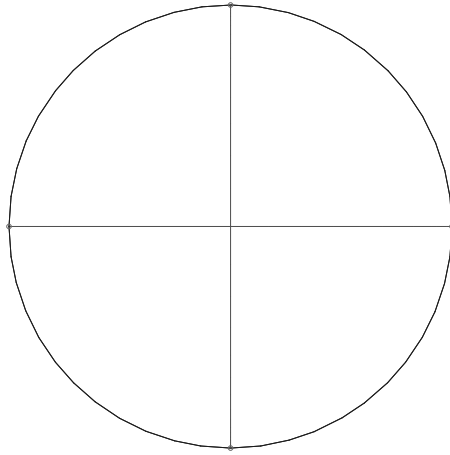
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -i, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = i$$

```
> display({sgp(X[0],-X[1],1.5),sgp(X[0],X[2],2.5)});
```



... son dos segmentos de geodésica que pasan por X_0 de longitudes $l_1 = 1,5$ y $l_2 = 2,5$.

```
> display({g2(X[1]),g2(X[2])});
```



... son las geodésicas $(1, -1)$ y $(\infty, 0)$ de vectores normales X_1 , X_2 , respectivamente.

> 'Las definiciones de esta hoja se aplican a los ejemplos del siguiente archivo:';

Las definiciones de esta hoja se aplican a los ejemplos del siguiente archivo :

Pulsar, *sin guardar* la hoja actual: **[1.1. Aplicaciones geométricas](#)**

1.1. Aplicaciones geométricas en H^3 y H^2

Si no se ha hecho antes, ejecutar la hoja siguiente:

(pulsar aquí: [1.0. Operaciones con matrices y otras definiciones](#))

[Para ejecutar la hoja actual: *Edit + Execute + Worksheet*]

Matrices de $M_2(C)$ con norma 1 y cálculo de la traza.

> m2(2,x,3*I,-2):f3_1:=subs(x=solve(nm(%)=1),%);

$$f3_1 := \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3}I \\ 3I & -2 \end{bmatrix}$$

> anglebracket(f3_1,f3_1)=nm(f3_1),tr(f3_1)=Tr(f3_1);

$$\langle f3_1, f3_1 \rangle = 1, \text{tr}(f3_1) = 0$$

> m2(2-I,x,3,-1+I):f3_2:=subs(x=solve(nm(%)=1),%);

$$f3_2 := \begin{bmatrix} 2-I & -\frac{2}{3}+I \\ 3 & -1+I \end{bmatrix}$$

> anglebracket(f3_2,f3_2)=nm(f3_2),tr(f3_2)=Tr(f3_2);

$$\langle f3_2, f3_2 \rangle = 1, \text{tr}(f3_2) = 1$$

> m2(2-I,x,2,I):f3_3:=subs(x=solve(nm(%)=1),%);

$$f3_3 := \begin{bmatrix} 2-I & I \\ 2 & I \end{bmatrix}$$

> anglebracket(f3_3,f3_3)=nm(f3_3),tr(f3_3)=Tr(f3_3);

$$\langle f3_3, f3_3 \rangle = 1, \text{tr}(f3_3) = 2$$

> m2(2-I,x,I,1+I):f3_4:=subs(x=solve(nm(%)=1),%);

$$f3_4 := \begin{bmatrix} 2-I & 1-2I \\ I & 1+I \end{bmatrix}$$

> anglebracket(f3_4,f3_4)=nm(f3_4),tr(f3_4)=Tr(f3_4);

$$\langle f3_4, f3_4 \rangle = 1, \text{tr}(f3_4) = 3$$

> m2(2-I,x,I,1+2*I):f3_5:=subs(x=solve(nm(%)=1),%);

$$f3_5 := \begin{bmatrix} 2-I & 3-3I \\ I & 1+2I \end{bmatrix}$$

> anglebracket(f3_5,f3_5)=nm(f3_5),tr(f3_5)=Tr(f3_5);

$$\langle f3_5, f3_5 \rangle = 1, \text{tr}(f3_5) = 3 + I$$

Puntos, geodésicas y planos de H^3

Puntos. Distancia.

> A3_1:=H3(2-I,3);A3_2:=H3(-3*I,4);

$$A3_1 := \begin{bmatrix} 2-I & -2 \\ 3 & -2-I \end{bmatrix}$$

$$A3_2 := \begin{bmatrix} -3I & \frac{-5}{2} \\ 4 & -3I \end{bmatrix}$$

> d(A3_1,A3_2)=dpp(A3_1,A3_2);

$$d(A3_1, A3_2) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{19}{4}\right)$$

Vectores normales a planos. Posiciones relativas.

> M4(-2+I,3,c):P1:=subs(c=solve(det(%)=-1),%);

$$P1 := \begin{bmatrix} -2+I & 3 \\ -\frac{4}{3} & 2+I \end{bmatrix}$$

> M4(4-2*I,b,5):P2:=subs(b=solve(det(%)=-1),%);

$$P2 := \begin{bmatrix} 4-2I & -\frac{19}{5} \\ 5 & -4-2I \end{bmatrix}$$

> P3:=M4(exp(I*Pi/4),-2,0);

$$P3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> sp(P1,P2),evalc(sp(P2,P3));

$$\frac{-1}{30}, -\sqrt{2} + 5$$

... los planos $p1$, $p2$ son secantes y $p2$, $p3$ son ultraparalelos.

> M4(z,b,1);solve({sp(P1,%)=1,det(%)=-1});

$$\begin{bmatrix} z & b \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix}$$

$$\{z = \%1, b = -\%1\overline{\%1} + 1\}$$

$$\%1 := \operatorname{RootOf}(-6\overline{Z} + 3I\overline{Z} + 4\overline{Z}_Z + 11 - 6_Z - 3I_Z)$$

> evalc(allvalues(%));

$$\{z = 1,276393201 - ,6381966033 I, b = -1,036474509\}$$

... un plano paralelo a $p1$ tiene vector normal:

> P4:=M4(1.276393201-.6381966033*I,-1.036474509,1);

$$P4 := \begin{bmatrix} 1,276393201 - ,6381966033 I & -1,036474509 \\ 1 & -1,276393201 - ,6381966033 I \end{bmatrix}$$

Geodésicas. Posiciones relativas

Ejemplos de semigiros

> s_0=evalm(s_0),s_1=evalm(s_1),s_2=evalm(s_2);

$$s_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, s_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

> s1:=f3_1:s2:=s12(-2,-cj(2-I),2-I):s3:=s12(2,-cj(-7/5+1/10*sqrt(51)+I*

(7/10+1/5*sqrt(51))),-7/5+1/10*sqrt(51)+I*(7/10+1/5*sqrt(51))):'s1'=ev

> alm(s1),s2=evalm(s2),s3=evalm(s3);

$$s1 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3}I \\ 3I & -2 \end{bmatrix}, s2 = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix},$$

$$s3 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{51} + I(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{51}) \\ -\frac{7}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{51} + I(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{51}) & -2 \end{bmatrix}$$

> evalc(sp(s2,s3)),sp(s2,s_0);

$$\frac{1}{2}, 2$$

... los dos pares correspondientes de geodésicas son coplanarias, las dos primeras secantes y las otras dos ultraparalelas.

> s4:=s12(-3,-cj(3+I),3+I):s6:=s12(-4,-cj(4+I),4+I):s4=evalm(s4),s6=evalm(s6);

$$s4 = \begin{bmatrix} -3 & -3+I \\ 3+I & 3 \end{bmatrix}, s6 = \begin{bmatrix} -4 & -4+I \\ 4+I & 4 \end{bmatrix}$$

> sp(s2,s4),sp(s4,s6);

$$-1, 1$$

... indican que la geodésica de semigiro $s4$ es paralela a cada una de las otras dos.

> sp(s_2,s2),sp(s1,s2);

$$-2I, \frac{5}{3} + \frac{4}{3}I$$

... indican que los dos pares de geodésicas no son coplanarias.

Representaciones de planos hiperbólicos en el semiespacio de Poincaré.

Planos de vector normal dado

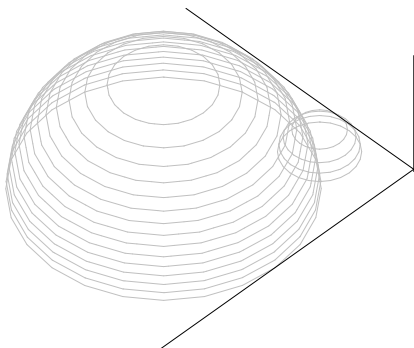
Si es un semiplano euclídeo y no aparece la representación, girar el dibujo.

Para ver el horizonte de cada plano, girar convenientemente la figura.

Para ampliar una figura, pulsar Ctrl + 3, 4, etc.

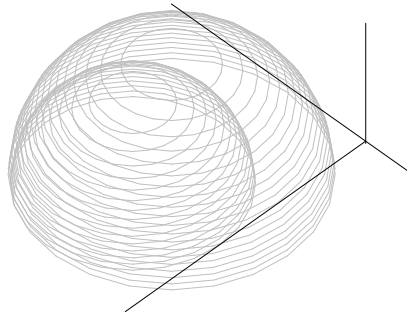
> display({pl(P1),pl(P2)},title='Los planos de vectores normales P1 y P2 son secantes',titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);

Los planos de vectores normales P1 y P2 son secantes



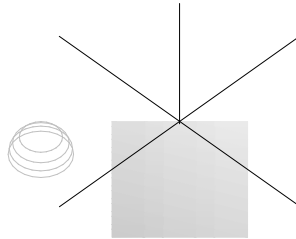
> display({pl(P1),pl(P4)},title='Los planos de vectores normales P1 y P4 son paralelos',titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);

Los planos de vectores normales P1 y P4 son paralelos



```
> display({pl(P2),pl(P3)},title='Los planos de vectores normales P2 y  
P3 son ultraparalelos',titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Los planos de vectores normales P2 y P3 son ultraparalelos



... de horizontes:

```
> display({plh(P2),plh(P3)});
```



Representaciones de geodésicas en el semiespacio de Poincaré.

Geodésicas asociadas a matrices dadas de $sl_2(C)$

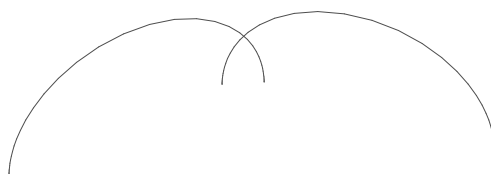
Si no aparece la representación, girar el dibujo.

Para ampliar una figura, pulsar Ctrl + 3, 4, etc.

... son las geodésicas asociadas a $X_0, -iX_1, -iX_2$. Las dos primeras pertenecen al plano de vector normal X_1 .

```
> [evalm(s2),evalm(s3)];display({g3(%[1]),g3(%[2])
> });cos(phi)=evalc(sp(%%[1],%%[2]));
```

$$\left[\begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{51} + I\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{51}\right) \\ -\frac{7}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{51} + I\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{51}\right) & -2 \end{bmatrix} \right]$$

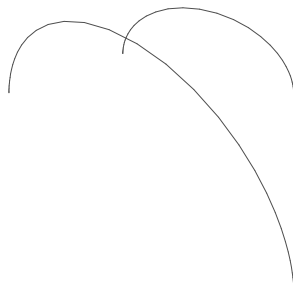


$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}$$

... las dos matrices de $sl_2(C)$ representan los semigiros alrededor de dos geodésicas coplanarias secantes en un ángulo $\phi = \frac{\pi}{3}$

```
> [evalm(s_0),evalm(s2)];display({g3(%[1]),g3(%[2])
> });cosh(D)=abs(sp(%%[1],%%[1]));
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} \right]$$

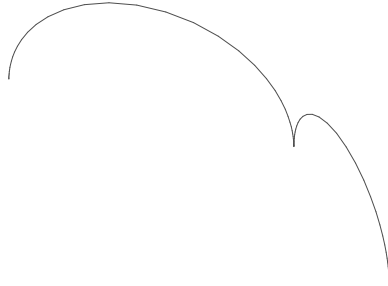


$$\cosh(D) = 1$$

... las dos geodésicas coplanarias ultraparalelas distan $D = \operatorname{arccosh}(2)$

> `[evalm(s2),evalm(s4)];display({g3(%[1]),g3(%[2])});sp(%[1],%[2]);`

$$\left[\begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3+I \\ 3+I & 3 \end{bmatrix} \right]$$

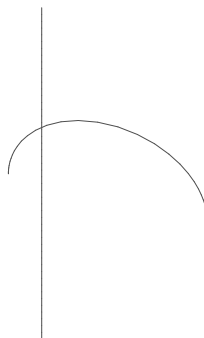


$$-1$$

... las dos geodésicas son coplanarias y paralelas.

> `[evalm(s_2),evalm(s2)];display({g3(%[1]),g3(%[2])});sp(%[1],%[2]);`

$$\left[\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} \right]$$

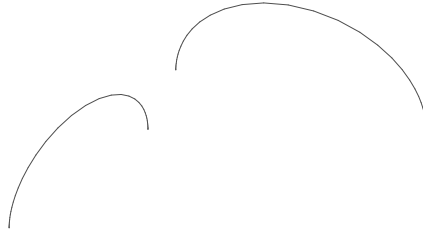


$$-2I$$

... las geodésicas no son coplanarias.

```
> [evalm(s1),evalm(s2)];display({g3(%[1]),g3(%[2])});sp(%%[1],%
> %[2]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3}I \\ 3I & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} \right]$$



$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3}I$$

... las geodésicas no son coplanarias.

Puntos, distancia entre puntos y vectores normales a geodésicas de H^2

Puntos, distancia entre puntos

```
> A2_1:=H2(2,3);A2_2:=H2(-3,4);
```

$$A2_1 := \begin{bmatrix} 2 & \frac{-5}{3} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A2_2 := \begin{bmatrix} -3 & \frac{-5}{2} \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> d(A2_1,A2_2)=dpp(A2_1,A2_2);
```

$$d(A2_1, A2_2) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{157}{12}\right)$$

Cálculo de vectores normales a geodésicas de H^2

```
> s12(-2,3,x):N1:=subs(x=solve(det(%)=-1),%);
```

$$N1 := \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> s12(2,x,4):N2:=subs(x=solve(det(%)=-1),%);
```

$$N2 := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

> s12(x,-3,5);solve(det(%)=-1);

$$\begin{bmatrix} x & -3 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

4, -4

> N3:=s12(4,-3,5);N4:=s12(-4,-3,5);

$$N3 := \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$N4 := \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Vector normal a una geodésica que pasa por un punto dado

> s12(-2,x,y):solve({sp(A2_1,%)=0,det(%)=-1});

$$\{y = -3, x = 1\}, \{y = \frac{-9}{5}, x = \frac{5}{3}\}$$

> N2_1a:=s12(-2,1,-3);N2_1b:=s12(-2,5/3,-9/5);

$$N2_1a := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N2_1b := \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -\frac{9}{5} & 2 \end{bmatrix}$$

> sp(N2_1a,N2_1b);

$$\frac{-3}{5}$$

Un punto de una geodésica de vector normal dado

> ping(N1),ping(N2),ping(N3),ping(N4);

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \frac{-5}{4} \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & \frac{-17}{5} \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & \frac{-17}{5} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Geodésica de vector normal n que pasa por un punto a

> GAN(A2_1,N2_1a,t),GAN(A2_1,N2_1b,t);

$$\begin{bmatrix} 2 \cosh(t) + \sinh(t) & -\frac{5}{3} \cosh(t) - \frac{4}{3} \sinh(t) \\ 3 \cosh(t) & -2 \cosh(t) - \sinh(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \cosh(t) - \sinh(t) & -\frac{5}{3} \cosh(t) \\ 3 \cosh(t) - \frac{12}{5} \sinh(t) & -2 \cosh(t) + \sinh(t) \end{bmatrix}$$

... son las geodésicas que pasan por el punto A2_1 de vectores normales N2_1a, N2_1b, respectivamente.

Posiciones relativas de geodésicas. Geodésicas secantes o paralelas: ángulo, punto común. Geodésicas ultraparalelas: distancia, perpendicular común. Geodésica que pasa por dos puntos. Punto y geodésica: distancia, perpendicular a la geodésica que pasa por el punto.

> sp(N1,N2), sp(N1,N3), sp(N2,N3);

$$\frac{-19}{8}, -1, \frac{-1}{8}$$

... las geodésicas asociadas a $N1$, $N2$ son ultraparalelas; las asociadas a $N1$, $N3$, paralelas, y las asociadas a $N2$, $N3$, secantes.

> a2gg(N2,N3), a2gg(N2_1a,N2_1b);

$$\pi - \arccos\left(\frac{1}{8}\right), \pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

... son, respectivamente, los ángulos que determinan las geodésicas secantes de vectores normales $N2$, $N3$ y las de vectores normales $N2_1a$, $N2_1b$.

> pip(N2,N3), pip(N2_1a,N2_1b)=evalm(A2_1);

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{7}\sqrt{7} & -\frac{8}{7}\sqrt{7} \\ \frac{16}{7}\sqrt{7} & -\frac{11}{7}\sqrt{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

... son, respectivamente, los puntos de intersección de las geodésicas secantes de vectores normales $N2$, $N3$ y las de vectores normales $N2_1a$, $N2_1b$.

> pii(N1,N3);

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

... es el punto de intersección impropio (vector isotrópico) de las geodésicas paralelas de vectores normales $N1$, $N3$.

> dgg(N1,N2);

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{19}{8}\right)$$

... es la distancia entre las geodésicas ultraparalelas de vectores normales $N1$, $N2$.

> vn(N1,N2);

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{11}\sqrt{33} & \frac{4}{11}\sqrt{33} \\ -\frac{16}{33}\sqrt{33} & \frac{5}{11}\sqrt{33} \end{bmatrix}$$

... es el vector normal a la geodésica perpendicular a las geodésicas de vectores normales $N1$, $N2$.

> vn(A2_1,A2_2);

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{377}\sqrt{145} & \frac{24}{377}\sqrt{145} \\ \frac{204}{1885}\sqrt{145} & \frac{1}{377}\sqrt{145} \end{bmatrix}$$

... es el vector normal a la geodésica orientada que pasa por los puntos $A2_1$, $A2_2$.

> dpg(A2_1,N1);

$$\operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{3}\right)$$

... es la distancia del punto $A2_1$, a la geodésica asociada a $N1$.

> `vnp(g(A2_1,N1));`

$$\begin{bmatrix} \frac{-11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

... es el vector normal a la geodésica que pasa por el punto $A2_1$ y es perpendicular a la geodésica de vector normal $N1$.

Isometrías del espacio hiperbólico tridimensional. Eje de cada isometría.

> `f3_1=evalm(f3_1); [tr(lhs(%))=Tr(rhs(%)),d=dp(rhs(`
> `%)),simplify(D=Ddp(rhs(%))),A=Adp(rhs(%))];`

$$f3_1 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3}I \\ 3I & -2 \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr}(f3_1) = 0, d = I\pi, D = 0, A = \pi]$$

... $f3_1$ es un semigiro alrededor de una geodésica (todo punto de ella es invariante por $f3_1$, $D = 0$, y cada plano que la contiene gira un ángulo π , $A = \pi$)

> `f3_2=evalm(f3_2); [tr(lhs(%))=Tr(rhs(%)),d=dp(rhs(`
> `%)),simplify(D=Ddp(rhs(%))),A=Adp(rhs(%))];`

$$f3_2 = \begin{bmatrix} 2 - I & -\frac{2}{3} + I \\ 3 & -1 + I \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr}(f3_2) = 1, d = \text{arccosh}\left(\frac{-1}{2}\right), D = 0, A = \frac{2}{3}\pi]$$

... $f3_2$ es un giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ alrededor de una geodésica.

> `f3_3=evalm(f3_3); [tr(lhs(%))=Tr(rhs(%)),d=dp(rhs(`
> `%)),simplify(D=Ddp(rhs(%))),A=Adp(rhs(%))];`

$$f3_3 = \begin{bmatrix} 2 - I & I \\ 2 & I \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr}(f3_3) = 2, d = 0, D = 0, A = 0]$$

... $f3_3$ es una traslación paralela (transformación parabólica). Deja invariante un punto impropio.

> `f3_4=evalm(f3_4); [tr(lhs(%))=Tr(rhs(%)),d=dp(rhs(`
> `%)),simplify(D=Ddp(rhs(%))),A=Adp(rhs(%))];`

$$f3_4 = \begin{bmatrix} 2 - I & 1 - 2I \\ I & 1 + I \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr}(f3_4) = 3, d = \text{arccosh}\left(\frac{7}{2}\right), D = \text{arccosh}\left(\frac{7}{2}\right), A = 0]$$

... $f3_4$ es una traslación (transformación hiperbólica) de desplazamiento D .

> `f3_5=evalm(f3_5); [tr(lhs(%))=Tr(rhs(%)),d=dp(rhs(`
> `%)),simplify(D=Ddp(rhs(%))),A=Adp(rhs(%))];`

$$f3_5 = \begin{bmatrix} 2 - I & 3 - 3I \\ I & 1 + 2I \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr}(f3_5) = 3 + I, d = \text{arccosh}(3 + 3I), D = -\ln(2) + \ln(5 + \sqrt{13} + \sqrt{34 + 10\sqrt{13}}), \\ A = \arccos(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13})]$$

... $f3_4$ es una "skrew motion" (composición de una traslación y un giro con eje común).
Traslada cada punto del eje una distancia D y gira cada plano que pasa por el eje un ángulo A .

Semigiro asociado al eje de cada una de las isometrías anteriores (es impropio si su norma es cero):

$$> \text{eje}(f3_1), \text{eje}(f3_2), \text{eje}(f3_3), \text{eje}(f3_4), \text{eje}(f3_5);$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3}I \\ 3I & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1 - \frac{2}{3}I)\sqrt{3} & (-\frac{4}{9} + \frac{2}{3}I)\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & (-1 + \frac{2}{3}I)\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 - 2I & 2I \\ 4 & -2 + 2I \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} (-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}I)\sqrt{5} & (-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}I)\sqrt{5} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & (\frac{2}{5} + \frac{1}{5}I)\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1 - 3I}{\sqrt{-4 - 6I}} & \frac{6 - 6I}{\sqrt{-4 - 6I}} \\ 2\frac{I}{\sqrt{-4 - 6I}} & \frac{-1 + 3I}{\sqrt{-4 - 6I}} \end{bmatrix}$$

Isometrías del plano hiperbólico

Las siguientes isometrías conservan la orientación. En cada caso, calculamos el transformado de X_0

$$> \text{m2}(3, 1, x, 0) : f2_1 := \text{eval}(\%, x = \text{solve}(\det(\%) = 1)); [\text{tr} = \text{Tr}(\%), D = \text{Ddp}(\%); \\ A = \text{Adp}(\%)];$$

$$f2_1 := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr} = 3, D = \text{arccosh}(\frac{7}{2}), A = 0]$$

... es una traslación de desplazamiento D .

$$> 'f2_1(X[0])='; f2(f2_1, X[0]);$$

$$f2_1(X[0]) = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$> \text{m2}(-2, 4, x, 1) : f2_2 := \text{eval}(\%, x = \text{solve}(\det(\%) = 1)); [\text{tr} = \text{Tr}(\%), D = \text{Ddp}(\%); \\ A = \text{Adp}(\%)];$$

$$f2_2 := \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\text{tr} = -1, D = 0, A = \frac{2}{3}\pi]$$

... es un giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

$$> 'f2_2(X[0])='; f2(f2_2, X[0]);$$

$$f2_2(X[0]) = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -20 \\ \frac{25}{16} & \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

> m2(4,1,x,-2):f2_3:=eval(% ,x=solve(det(%)=1));[tr=Tr(%),D=Ddp(
> %),A=Adp(%)];

$$f2_3 := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[tr = 2, D = 0, A = 0]$$

... es una traslación paralela.

> 'f2_3(X[0])=';f2(f2_3,X[0]);

$$f2_3(X[0]) =$$

$$\begin{bmatrix} -38 & -17 \\ 85 & 38 \end{bmatrix}$$

Las siguientes isometrías inverten la orientación. En cada caso, calculamos el transformado de X_0

> m2(-2,4,x,1):f2x_3:=eval(% ,x=solve(det(%)=-1));[tr=Tr(%),D=Ddp(
> %),A=Adp(%)];

$$f2x_3 := \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[tr = -1, D = 0, A = \frac{2}{3}\pi]$$

> m2(4,1,x,-2):f2x_4:=eval(% ,x=solve(det(%)=-1));[tr=Tr(%),D=Ddp(
> %),A=Adp(%)];

$$f2x_4 := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[tr = 2, D = 0, A = 0]$$

> 'f2x_3(X[0])=';f2x(f2x_3,X[0]);

$$f2x_3(X[0]) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -20 \\ \frac{17}{16} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

> 'f2x_4(X[0])=';f2x(f2x_4,X[0]);

$$f2x_4(X[0]) =$$

$$\begin{bmatrix} -30 & -17 \\ 53 & 30 \end{bmatrix}$$

Determinación de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional

Una traslación que transforma un punto en otro, dados ambos:

> A3_1=evalm(A3_1),A3_2=evalm(A3_2);

$$A3_1 = \begin{bmatrix} 2-I & -2 \\ 3 & -2-I \end{bmatrix}, A3_2 = \begin{bmatrix} -3I & \frac{-5}{2} \\ 4 & -3I \end{bmatrix}$$

> t1pp(A3_1,A3_2);d=evalc(dp(%));

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{11}{46} - \frac{6}{23}I\right)\sqrt{46} & \left(\frac{5}{23} + \frac{7}{46}I\right)\sqrt{46} \\ \left(\frac{8}{23} - \frac{5}{23}I\right)\sqrt{46} & \left(-\frac{6}{23} + \frac{6}{23}I\right)\sqrt{46} \end{bmatrix}$$

$$d = \operatorname{arccosh}\left(\frac{19}{4}\right)$$

... y el desplazamiento de la traslación coincide con la distancia entre los puntos.

Comprobación:

> `tlpp(A3_1,A3_2);`

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{11}{46} - \frac{6}{23}I\right)\sqrt{46} & \left(\frac{5}{23} + \frac{7}{46}I\right)\sqrt{46} \\ \left(\frac{8}{23} - \frac{5}{23}I\right)\sqrt{46} & \left(-\frac{6}{23} + \frac{6}{23}I\right)\sqrt{46} \end{bmatrix}$$

> `f3(tlpp(A3_1,A3_2),A3_1)=evalm(A3_2),d(A3_1,A3_2)=arccosh(sp(A3_1,A3_2)));`

$$\begin{bmatrix} -3I & \frac{-5}{2} \\ 4 & -3I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3I & \frac{-5}{2} \\ 4 & -3I \end{bmatrix}, d(A3_1, A3_2) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{19}{4}\right)$$

Isometrías que transforman un plano en otro, dado un vector normal de cada uno:

> `sp(P1,P2),evalc(sp(P2,P3)),evalf(sp(P1,P4),1);`

$$\frac{-1}{30}, -\sqrt{2} + 5, 1.$$

... indican, respectivamente, la intersección, el ultraparalelismo y el paralelismo de cada par correspondiente de planos.

> `[iPP(P1,P2),iPP(P2,P3),iPP(P1,P4)];[Adp(%[1]),evalc(simplify(Ddp(%[2])))],dp(%[3])];`

$$\left[\begin{bmatrix} -\frac{59}{465}\sqrt{465} & \left(\frac{22}{155} - \frac{11}{155}I\right)\sqrt{465} \\ \left(-\frac{14}{93} - \frac{7}{93}I\right)\sqrt{465} & \frac{6}{31}\sqrt{465} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{I(\sqrt{2} + 3I\sqrt{2} - 9)}{\sqrt{8 - 2\sqrt{2}}} & \frac{1}{10} \frac{I(-80 + 40I + 19\sqrt{2} + 19I\sqrt{2})}{\sqrt{8 - 2\sqrt{2}}} \\ \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}I}{\sqrt{4 - \sqrt{2}}} & \frac{I(-\sqrt{2} + 3I\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{8 - 2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,4045 & -,87810 + ,43905 I \\ ,14905 + ,074535 I & ,59550 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[\arccos\left(\frac{1}{30}\right), \operatorname{arccosh}\left(-\frac{22 - 9\sqrt{2}}{-4 + \sqrt{2}}\right), 0 \right]$$

... son, en cada caso, las matrices de las isometrías que transforman el primer plano en el segundo. Los últimos valores (un ángulo, una distancia, desplazamiento nulo) indican el tipo de cada isometría (elíptica, hiperbólica y parabólica, respectivamente).

Comprobaciones:

> `f3(iPP(P1,P2),P1)=evalm(P2);evalf(f3(iPP(P2,P3),P2)=evalm(-P3),5);eva`
 > `lf(f3(evalm(1/2*(-P4*cjm(P1)+id2)),P1)=evalm(-P4),5);`

$$\begin{bmatrix} 4-2I & \frac{-19}{5} \\ 5 & -4-2I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2I & \frac{-19}{5} \\ 5 & -4-2I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,70710 - 0,70710 I & 2,0000 \\ 0 & 0,70710 - 0,70710 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,70710 - 0,70710 I & 2. \\ 0 & 0,70710 - 0,70710 I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1,2764 + 0,63819 I & 1,0365 + 0,8508 \cdot 10^{-5} I \\ -0,99995 - 0,4758 \cdot 10^{-5} I & 1,2764 + 0,63828 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2764 + 0,63820 I & 1,0365 \\ -1. & 1,2764 + 0,63820 I \end{bmatrix}$$

Isometrías que transforman una geodésica en otra, dado el semigirol alrededor de cada una:

> evalc(sp(s2,s3)), sp(s2,s_0), sp(s2,s4);

$$\frac{1}{2}, 2, -1$$

... indican, respectivamente, la intersección, el ultraparalelismo y el paralelismo de cada par correspondiente de geodésicas.

> evalf(igg(s2,s3),5), igg(s2,s_0), igg(s4,s2); [evalf(Adp(
> %[1])*180/Pi), evalc(simplify(Ddp(%[2])))], dp(%[3])];

$$\begin{bmatrix} -0,86600 + 2,0615 I & -1,5174 + 1,3028 I \\ -1,5174 - 1,3028 I & -0,86600 - 2,0615 I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} I) \sqrt{6} & -\frac{1}{3} \sqrt{6} \\ -\frac{1}{3} \sqrt{6} & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} I) \sqrt{6} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{5}{2} I & \frac{5}{2} I \\ -\frac{5}{2} I & -1 - \frac{5}{2} I \end{bmatrix}$$

[60,00582187, arccosh(2), 0]

... son, en cada caso, las matrices de las isometrías que transforman la primera geodésica en la segunda. Los últimos valores (un ángulo de 60° , una distancia, desplazamiento nulo) indican el tipo de cada isometría (elíptica, hiperbólica y parabólica, respectivamente).

Comprobaciones (en el tercer caso, ambas matrices representan el mismo vector isotrópico):

> evalf(f3g(igg(s2,s3),s2)=evalm(s3),5); f3g(igg(s2,s_0),s2)=evalm(s_0);
> f3g(igg(s4,s2),s4)=evalm(s2);

$$\begin{bmatrix} 2. & 0,68584 + 2,1283 I \\ -0,68584 + 2,1283 I & -2. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2. & 0,68586 + 2,1283 I \\ -0,68586 + 2,1283 I & -2. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2+I \\ -2+I & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}$$

> sp(s_2,s2), sp(s1,s2);

$$-2I, \frac{5}{3} + \frac{4}{3}I$$

... indican que, en ambos casos, las geodésicas no son coplanarias.

> igg(s_2,s2), igg(s1,s2); [dp(%[1]), simplify(dp(%[2])=Ddp(
> %[2])+I*Adp(%[2]))];

$$\begin{bmatrix} \frac{-1+2I}{\sqrt{2-4I}} & \frac{1-2I}{\sqrt{2-4I}} \\ \frac{-1-2I}{\sqrt{2-4I}} & \frac{-1+2I}{\sqrt{2-4I}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3-9I}{\sqrt{12+6I}} & \frac{6-2I}{\sqrt{12+6I}} \\ \frac{6+6I}{\sqrt{12+6I}} & \frac{-5+5I}{\sqrt{12+6I}} \end{bmatrix}$$

$$\left[-\frac{1}{2} I \pi + \operatorname{arcsinh}(2), \operatorname{arccosh}\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3} I\right) = \ln(\sqrt{5} + 2) + I \arccos\left(\frac{1}{3} \sqrt{5}\right)\right]$$

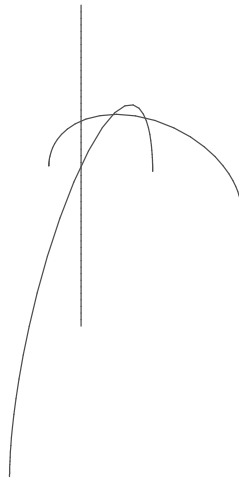
... son, en cada caso, las matrices de las isometrías que transforman la primera geodésica en la segunda. Los últimos valores son los desplazamientos de ambas isometrías.

Comprobaciones:

> f3g(igg(s_2,s2),s_2)=evalm(s2);

$$\begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}$$

> display({g3(s_2),g3(s2),g3(gpgg(s_2,s2))});

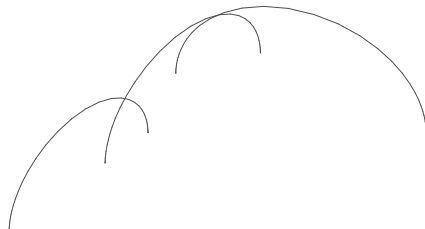


... la transformación es la composición de una traslación de desplazamiento $d = \operatorname{arcsinh}(2)$ y un giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$. En la figura se muestra la geodésica perpendicular común.

> f3g(igg(s1,s2),s1)=evalm(s2);

$$\begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}$$

> display({g3(s1),g3(s2),g3(gpgg(s1,s2))});



... la transformación es la composición de una traslación de desplazamiento $d = \ln(\sqrt{5}+2)$ y un giro de ángulo $\theta = \arccos(\frac{1+\sqrt{5}}{3}) = 41,8^\circ$. En la figura se muestra la geodésica perpendicular común.

Una traslación de eje h_{s2} , un giro de eje h_{s4} , una "skrew motion" de eje h_{s6} con $D = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $d = 2 + i\pi$, respectivamente, siendo:

> $s2=eval(s2), s4=eval(s4), s6=eval(s6);$

$$s2 = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}, s4 = \begin{bmatrix} -3 & -3+I \\ 3+I & 3 \end{bmatrix}, s6 = \begin{bmatrix} -4 & -4+I \\ 4+I & 4 \end{bmatrix}$$

> $isf(s2,3), isf(s4,I*Pi/3), isf(s6,2+I*Pi);$

$$\begin{bmatrix} -2I \sinh(\frac{3}{2}) + \cosh(\frac{3}{2}) & (1-2I) \sinh(\frac{3}{2}) \\ (1+2I) \sinh(\frac{3}{2}) & 2I \sinh(\frac{3}{2}) + \cosh(\frac{3}{2}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}I & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 4 \cosh(1) + I \sinh(1) & (4-I) \cosh(1) \\ (-4-I) \cosh(1) & -4 \cosh(1) + I \sinh(1) \end{bmatrix}$$

Comprobaciones:

> $f3g(isf(s2,3),s2)=eval(s2), f3g(isf(s4,I*Pi/3),s4)=eval(s4), f3g(isf(s6,$

> $,2+I*Pi),s6)=eval(s6);$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-I \\ 2-I & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3+I \\ 3+I & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3+I \\ 3+I & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4+I \\ 4+I & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4+I \\ 4+I & 4 \end{bmatrix}$$

> $evalf(dp(isf(s2,3)))=3, evalf(dp(isf(s4,I*Pi/3)))=I*Pi/3, evalf(dp(isf(s6,$

> $s4,2+I*Pi))=2+I*Pi);$

$$2,999999999 = 3, 1,047197551 I = 1,047197551 I,$$

$$2,000000000 + 3,141592654 I = 2. + 3,141592654 I$$

Una traslación paralela de eje impropio U :

> $U[1]=pim(3-I), U[2]=evalm(inf);$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 3-I & -10 \\ 1 & -3-I \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $tpf(pim(3-I),4-5*I); tpf(inf,3+4*I);$

$$\begin{bmatrix} 8-19I & -2+64I \\ 4-5I & -6+19I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3-4I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobaciones:

> $f3(tpf(pim(3-I),4-5*I),pim(3-I))=pim(3-I); f3(tpf(inf,3+4*I),inf)=eval$

> $m(inf);$

$$\begin{bmatrix} 3-I & -10 \\ 1 & -3-I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-I & -10 \\ 1 & -3-I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> dp(tpf(pim(3-I),4-5*I),dp(tpf(inf,3+4*I)));
0, 0

Determinación de isometrías del plano hiperbólico

> t1pp(A2_1,A2_2), 'Comprobación:',
> f2(t1pp(A2_1,A2_2),A2_1)=evalm(A2_2);
$$\begin{bmatrix} -\frac{29}{26}\sqrt{6} & \frac{10}{13}\sqrt{6} \\ \frac{17}{13}\sqrt{6} & -\frac{41}{39}\sqrt{6} \end{bmatrix}, \text{Comprobación:}, \begin{bmatrix} -3 & \frac{-5}{2} \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{-5}{2} \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

> igg2(N2,N3), 'Comprobación', f2(igg2(N2,N3),N2)=evalm(N3);
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

> igg2(N2_1a,N2_1b), 'Comprobaci
> ón', f2(igg2(N2_1a,N2_1b),N2_1a)=evalm(N2_1b);
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} \\ -\frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ \frac{-9}{5} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ \frac{-9}{5} & 2 \end{bmatrix}$$

> igg2(N1,N2), 'Comprobación', f2(igg2(N1,N2),N1)=evalm(N2);
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{4} \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{4} \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

> igg2(N1,N3), 'Comprobación', f2(igg2(N1,N3),N1)=evalm(N3);
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \text{Comprobación}, \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

> tpf(pim(2),p); f2(tpf(pim(2),p),pim(2))=evalm(pim(2));
$$\begin{bmatrix} 2p+1 & -4p \\ p & -2p+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

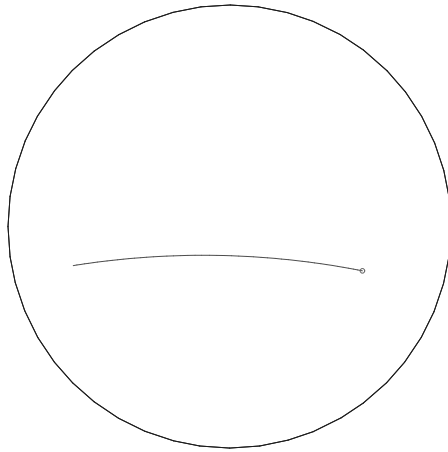
... traslación paralela de eje impropio $U = pim(2)$.
> tpf(inf,p); f2(tpf(inf,p),inf)=evalm(inf);
$$\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... traslación paralela de eje impropio $U = inf$.

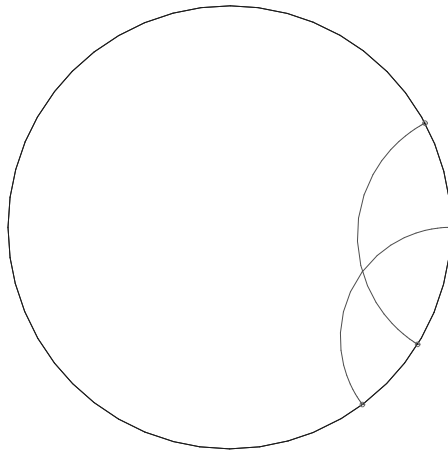
Representación de puntos y geodésicas de H^2 en el disco de Poincaré D

> sgpp(A2_1,A2_2);



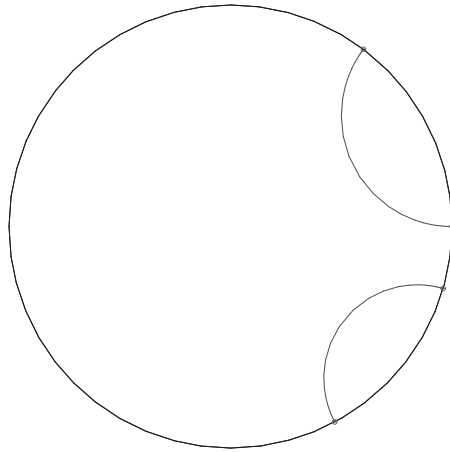
... segmento de geodésica que une los puntos $A2_1$, $A2_2$.

```
> display({g2(N2_1a),g2(N2_1b)});
```



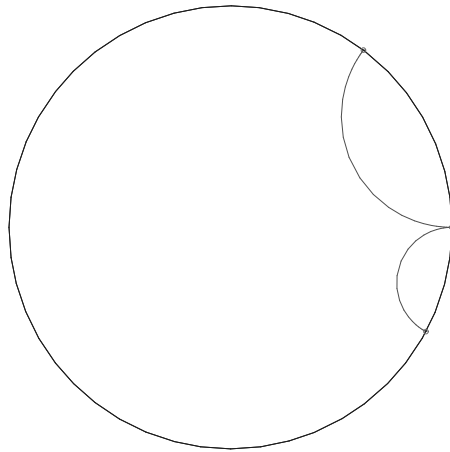
... son las geodésicas secantes de vectores normales $N2_1a$, $N2_1b$

```
> display({g2(N1),g2(N2)});
```



... son las geodésicas ultraparalelas de vectores normales $N1$, $N2$

```
> display({g2(N1),g2(N3)});
```



... son las geodésicas paralelas de vectores normales $N1$, $N3$

```
> "FIN DE LA HOJA. CERRAR SIN GUARDAR";
```

```
    "FIN DE LA HOJA. CERRAR SIN GUARDAR"
```

2.0. Relaciones entre los elementos de un polígono hiperbólico

Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo

Construcción de polígonos

> restart:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

Observaciones previas.

Si A_j y N_j denotan, respectivamente, los vértices y los vectores normales de los lados del polígono, se considera que el lado λ_j de vector normal N_j une A_j con A_{j+1} y que la orientación de los lados es acorde con el sentido de las agujas del reloj.

Las matrices A_j y N_j pertenecen al conjunto de matrices de traza cero $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ de $sl_2(R)$, siendo $\langle M, M \rangle = \det(M)$, $\langle A_j, A_j \rangle = 1$ y $\langle N_j, N_j \rangle = -1$.

Se cumple, además, que $\langle A_j, A_{j+1} \rangle = \cosh(\lambda_j)$ y $\langle N_j, N_{j+1} \rangle = \cos(\theta_j)$. A partir de ahora:

$$C_j = \cosh(\lambda_j), S_j = \sinh(\lambda_j), \kappa_j = \cos(\theta_j) \text{ y } \sigma_j = \sin(\theta_j).$$

El significado geométrico de algunos de los siguientes productos escalares se especifica en el capítulo 2 (sección 2.1).

Fórmulas de los productos escalares $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$, $\eta(i, j) = \langle N_i, N_j \rangle$ y $\beta(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, A_j \rangle$. (Proposición 2.1.6)

i. Fórmula del producto escalar $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$ en función de $B(j, i) = \beta(j, i)$ y de $\delta(j, i) = -\langle N_j, A_i \rangle$.

> alpha(i,j)=alpha(i,j-1)*C[j-1]-B(j-1,i)*S[j-1],alpha(k,k)=1;
 > Alpha(i,j)=alpha(i,j)*S[j]-B(j,i)*C[j],Alpha(k,k)=S[k];
 > B(j,i)=Alpha(i,j-1)*kappa[j]+delta(j-1,i)*sigma[j],B(k,k)=0;
 > delta(j,i)=Alpha(i,j-1)*sigma[j]-delta(j-1,i)*kappa[j],delta(k,k)=0;

$$\alpha(i, j) = \alpha(i, j-1)C_{j-1} - B(j-1, i)S_{j-1}, \alpha(k, k) = 1$$

$$A(i, j) = \alpha(i, j)S_j - B(j, i)C_j, A(k, k) = S_k$$

$$B(j, i) = A(i, j-1)\kappa_j + \delta(j-1, i)\sigma_j, B(k, k) = 0$$

$$\delta(j, i) = A(i, j-1)\sigma_j - \delta(j-1, i)\kappa_j, \delta(k, k) = 0$$

Definición de las fórmulas (1):

> Alpha:=(i,j)->if (i=j) then S[j mod p] else (alpha(i mod p,j mod
 > p)*S[j mod p]-B(j mod p,i mod p)*C[j mod p]) fi:
 > alpha:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*C[j-1
 > mod p]-B(j-1 mod p,i mod p)*S[j-1 mod p]) fi:
 > B:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (Alpha(i mod p,j-1 mod p)*kappa[j mod
 > p]+delta(j-1 mod p,i mod p)*sigma[j mod p]) fi:
 > delta:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (Alpha(i mod p,j-1 mod p)*sigma[j
 > mod p]-delta(j-1 mod p,i mod p)*kappa[j mod p]) fi:

ii. **Fórmula del producto escalar** $\eta(i, j) = \langle N_i, N_j \rangle$ en función de $\Delta(i, j) = \delta(i, j+1)$ y de $\gamma(i, j) = -\langle N_i, A_j \wedge N_j \rangle$.

- > eta(i,j)=Phi(i,j-1)*sigma[j]-eta(i,j-1)*kappa[j], eta(k,k)=-1;
 - > gamma(i,j)=-Phi(i,j-1)*kappa[j]-eta(i,j-1)*sigma[j], gamma(k,k)=0;
 - > Phi(i,j)=Delta(i,j-1)*S[j]+gamma(i,j)*C[j], Phi(k,k)=0;
 - > Delta(i,j)=Delta(i,j-1)*C[j]+gamma(i,j)*S[j], Delta(k,k)=0;
- $$\eta(i, j) = \Phi(i, j-1) \sigma_j - \eta(i, j-1) \kappa_j, \eta(k, k) = -1$$
- $$\gamma(i, j) = -\Phi(i, j-1) \kappa_j - \eta(i, j-1) \sigma_j, \gamma(k, k) = 0$$
- $$\Phi(i, j) = \Delta(i, j-1) S_j + \gamma(i, j) C_j, \Phi(k, k) = 0$$
- $$\Delta(i, j) = \Delta(i, j-1) C_j + \gamma(i, j) S_j, \Delta(k, k) = 0$$

Definición de las fórmulas (2):

- > eta:=(i,j)->if (i=j) then -1 else (Phi(i mod p,j-1 mod p)*sigma[j mod p]-eta(i mod p,j-1 mod p)*kappa[j mod p]) fi:
- > g:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (-Phi(i mod p,j-1 mod p)*kappa[j mod p]-eta(i mod p,j-1 mod p)*sigma[j mod p]) fi:
- > Phi:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*S[j mod p]+g(i mod p,j mod p)*C[j mod p]) fi:
- > Delta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*C[j mod p]+g(i mod p,j mod p)*S[j mod p]) fi:

Observación: tener en cuenta que $\delta(i, j) = \Delta(i, j-1)$.

iii. **Fórmula del producto escalar** $\beta(i, j)$ en función de $\varepsilon(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, A_j \wedge N_j \rangle$ y de $\Gamma(j, i) = \gamma(j, i)$.

- > beta(i,j)=beta(i,j-1)*C[j-1]+epsilon(i,j-1)*S[j-1], beta(k,k)=0;
 - > Omega(i,j)=beta(i,j)*S[j]+epsilon(i,j)*C[j], Omega(k,k)=C[k];
 - > epsilon(i,j)=-Omega(i,j-1)*kappa[j]+Gamma(j-1,i)*sigma[j], epsilon(k,k)=1;
 - > Gamma(j,i)=-Omega(i,j-1)*sigma[j]-Gamma(j-1,i)*kappa[j], Gamma(k,k)=0;
- $$\beta(i, j) = \beta(i, j-1) C_{j-1} + \varepsilon(i, j-1) S_{j-1}, \beta(k, k) = 0$$
- $$\Omega(i, j) = \beta(i, j) S_j + \varepsilon(i, j) C_j, \Omega(k, k) = C_k$$
- $$\varepsilon(i, j) = -\Omega(i, j-1) \kappa_j + \Gamma(j-1, i) \sigma_j, \varepsilon(k, k) = 1$$
- $$\Gamma(j, i) = -\Omega(i, j-1) \sigma_j - \Gamma(j-1, i) \kappa_j, \Gamma(k, k) = 0$$

Definición de las fórmulas (3):

- > beta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (beta(i mod p,j-1 mod p)*C[j-1 mod p]+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*S[j-1 mod p]) fi:
- > Omega:=(i,j)->if (i=j) then C[j mod p] else (beta(i mod p,j mod p)*S[j mod p]+epsilon(i mod p,j mod p)*C[j mod p]) fi:
- > epsilon:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (Gamma(j-1 mod p,i mod p)*sigma[j mod p]-Omega(i mod p,j-1 mod p)*kappa[j mod p]) fi:
- > Gamma:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (-Gamma(j-1 mod p,i mod p)*kappa[j mod p]-Omega(i mod p,j-1 mod p)*sigma[j mod p]) fi:

Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo. (Teorema 2.2.3)

Si el polígono tiene p lados, $5 \leq p$, para que sea convexo es necesario que:

(1a) $0 < \delta(h, 1)$, $h = 3..p-2$;

(1b) $0 < \delta(p, k)$, $k = 3..p-2$.

Es decir:

> c1a:=p->seq(delta(h,1)>0,h=3..p-2):

> c1b:=p->seq(Delta(p,k-1)>0,k=3..p-2):

Tales condiciones y las siguientes son necesarias y suficientes para la convexidad del polígono:

(2a) $0 < \eta(p, p-2) + \cos(\theta_{p-1} + \theta_p)$, caso de $\pi \leq \theta_{p-1} + \theta_p$.

(2b) $1 < \eta(p, p-2)$, caso de $\theta_{p-1} + \theta_p < \pi$ y $\sum_{i=1}^{p-2} \theta_i < (p-3)\pi$.

(3a) $0 < A \sin(\theta_{p-2} + \theta_{p-1}) - B \cos(\theta_{p-2} + \theta_{p-1}) + \kappa_p$, caso de $\pi < \theta_{p-2} + \theta_{p-1}$, siendo:

$$A = S_{p-3} \delta(p, p-3) + C_{p-3} \gamma(p, p-3) \text{ y } B = \eta(p, p-3).$$

(3b) $0 < G \sin(\theta_p + \theta_1) - H \cos(\theta_p + \theta_1) + \kappa_{p-1}$, caso de $\pi < \theta_p + \theta_1$, siendo:

$$G = -\gamma(p-2, 1) \text{ y } H = \eta(1, p-2).$$

Si $\theta_{p-1} + \theta_p < \pi$ y $(p-3)\pi \leq \sum_{i=1}^{p-2} \theta_i$ las desigualdades (1a), (1b) (3a) y (3b) constituyen las condiciones necesarias y suficientes para que el polígono sea convexo.

Es decir, dados los ángulos θ_j del polígono, $\sum_{i=1}^p \theta_i < (p-2)\pi$:

> c2:if ang[p-1]+ang[p]>=180 then

> evalf(eta(p,p-2)+cos((ang[p-1]+ang[p])*Pi/180))>0 elif

> (ang[p-1]+ang[p]<180 and sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then

> eta(p,p-2)>1 else 0=0 fi:

> c3a:if ang[p-2]+ang[p-1]>180 then

> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)-

> eta(p,p-3)*cos((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0 else 0=0 fi:

> c3b:if ang[p]+ang[1]>180 then

> -Gamma(p-2,1)*sin((ang[p]+ang[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((ang[p]+ang[1]

>]*Pi/180)+kappa[p-1]>0 else 0=0 fi:

Para la convexidad de un cuadrilátero las condiciones necesarias y suficientes se especifican a continuación. Su generalización constituyen las últimas condiciones dadas arriba para un polígono con un mayor número de lados.

Para un cuadrilátero, según el caso, tiene que cumplirse:

Si $180 < \theta_2 + \theta_3$, entonces $C_1 < \frac{\kappa_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \kappa_4}{\sigma_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)}$

y si $180 < \theta_4 + \theta_1$, entonces $C_1 < \frac{\cos(\theta_4 + \theta_1) \kappa_2 - \kappa_3}{\sin(\theta_4 + \theta_1) \sigma_2}$.

La condición obtenida para C_1 es necesaria y suficiente si $180 \leq \theta_1 + \theta_2$. En caso contrario, se estudian las siguientes posibilidades.

Primer caso: $\theta_1 + \theta_2 < 180$ y $\theta_3 + \theta_4 \leq 180$. Entonces $\frac{1 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} < C_1$

Segundo caso: $\theta_1 + \theta_2 < 180$ y $180 < \theta_3 + \theta_4$. Entonces $\frac{\sigma_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2}{\sigma_1 \sigma_2} < C_1$

Es decir:

> if (a[1]+a[2]<180 and a[3]+a[4]<=180) then

> C[1]>(1+kappa[1]*kappa[2])/(sigma[1]*sigma[2]) elif (a[1]+a[2]<180 and

> a[3]+a[4]>180) then

> C[1]>(sigma[3]*sigma[4]-kappa[3]*kappa[4]+kappa[1]*kappa[2])/(sigma[1]

> *sigma[2]) fi;

> if (a[2]+a[3]>180) then

> C[1]<evalf((kappa[1]*cos((a[2]+a[3])*Pi/180)-kappa[4])/(sigma[1]*sin((

> a[2]+a[3])*Pi/180)) elif (180<a[4]+a[1]) then

> C[1]<evalf((kappa[2]*cos((a[4]+a[1])*Pi/180)-kappa[3])/(sigma[2]*sin((

> a[4]+a[1])*Pi/180)) fi;

Construcción de polígonos. (Sección 2.3)

Expresiones de los vértices y los vectores normales a los lados:

Los primeros vértices pueden expresarse:

$$A(h) = \alpha(1, h) A(1) + \delta(1, h) N(1) + \beta(1, h) A(1) N(1)$$

y los primeros vectores normales:

$$N(h) = -\delta(h, 1) A(1) - \eta(1, h) N(1) + \gamma(h, 1) A(1) N(1)$$

y los últimos:

$$A(p-k) = \alpha(p-k, 1) A(1) + \delta(1, p-k) N(1) + \beta(1, p-k) A(1) N(1)$$

$$N(p-k) = -\delta(p-k, 1) A(1) - \eta(p-k, 1) N(1) + \gamma(p-k, 1) A(1) N(1)$$

```
> A:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(alpha(1,n)*A(1)+Delta(1,n-1)*N(1)+beta(1,n)
> *(A(1)&*N(1))),evalm(alpha(n,1)*A(1)+delta(1,n)*N(1)+B(1,n)*(A(1)&*N(1)
> ))):
> N:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(-delta(n,1)*A(1)-eta(1,n)*N(1)+Gamma(n,1)*(A
> (1)&*N(1))),evalm(-Delta(n,p)*A(1)-eta(n,1)*N(1)+g(n,1)*(A(1)&*N(1)))
> :
```

Proyección del modelo $sl_2(R)$ de H^2 en el disco de Poincaré. Geodésicas de los lados. (Capítulo 1)

Si M es un elemento de H^2 , P la proyección de M sobre el disco \mathcal{D} , $g^1(h)$ y $g^p(p-k)$ las ecuaciones de geodésicas en \mathcal{D} , correspondientes a los primeros y últimos lados del polígono, entonces:

```
> P:=[(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2),(M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/(
> M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)];
> Gp:=n->eval(P,M=evalm(A(n)*cosh(t)+A(n)&*N(n)*sinh(t)));
> gp:=n->[evalf(Gp(n)[1]),evalf(Gp(n)[2]),t=0..arccosh(C[n])];
```

$$P := \left[2 \frac{M_{1,1} M_{2,1}}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2}, \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \right]$$

$$Gp := n \rightarrow P \Big| M = \text{evalm}(A(n) \cosh(t) + (A(n) \text{'\&*'} N(n)) \sinh(t))$$

$$gp := n \rightarrow [\text{evalf}(Gp(n)_1), \text{evalf}(Gp(n)_2), t = 0..arccosh(C_n)]$$

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

2.1. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 2.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

Observaciones previas.

Las fórmulas de la hoja 2.0 pueden utilizarse para resolver polígonos de p lados, convexos o no, dados $2p-3$ elementos. Si se desea resolver un pentágono convexo de ángulos conocidos, las inequaciones de (1a) y de (1b) estudiadas en la hoja 2.0 se reducen a dos, que permiten acotar los posibles valores de los dos primeros lados. Con estas condiciones, junto a las demás del teorema 2.2.3, es posible delimitar las longitudes de los lados que garanticen la convexidad del polígono.

Pentágonos hiperbólicos

Primer ejemplo (pentágono convexo).

Ángulos en radianes: $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$; **Lados:** $\lambda_1 = \lambda_2$.

```
> p:=5:ang:=table([Pi/4,5*Pi/6,3*Pi/5,3*Pi/4,Pi/6]):sigma:=table([seq(
> sin(ang[i]),i=1..5]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]),i=1..5)]):
> S:=table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..5)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
```

Condiciones para la convexidad:

```
> C1a:=c1a(p);C1b:=c1b(p);
> if evalf(ang[p-1]+ang[p]>=Pi) then
> evalf(eta(p,p-2)+cos(ang[p-1]+ang[p]))>0 elif
> (evalf(ang[p-1]+ang[p]<Pi) and evalf(sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*Pi))
> then eta(p,p-2)-1>0 else 0=0 fi:
> c2:=evalf(%);
> if evalf(ang[p-2]+ang[p-1]>=Pi) then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin(ang[p-2]+ang[p-1])-eta(p,p-3
> )*cos(ang[p-2]+ang[p-1])+kappa[p]>0 else 0=0 fi:
> c3a:=evalf(%);
> if evalf(ang[p]+ang[1]>=Pi) then
> -Gamma(p-2,1)*sin(ang[p]+ang[1])-eta(1,p-2)*cos(ang[p]+ang[1])+kappa[
> p-1]>0 else 0=0 fi:
> c3b:=evalf(%);
```

$$C1a := 0 < \frac{1}{4} (C_1 \sqrt{C_2^2 - 1} + \frac{1}{2} \sqrt{C_1^2 - 1} \sqrt{3} C_2) \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \frac{1}{2} \sqrt{C_1^2 - 1} (-\frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{4})$$

$$C1b := 0 < \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{C_1^2 - 1} C_2 + (\frac{1}{4} \sqrt{2} C_1 \sqrt{3} - \frac{1}{4} \sqrt{2}) \sqrt{C_2^2 - 1}$$

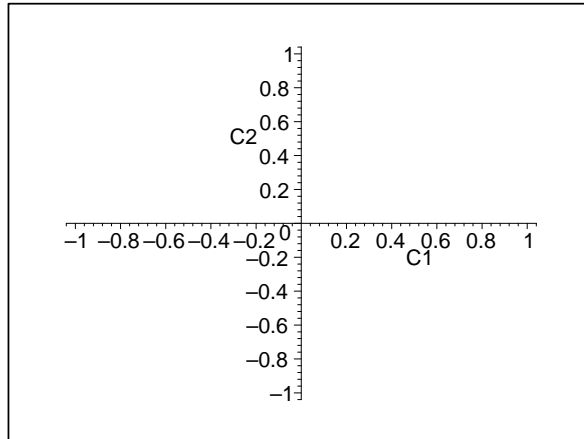
$$c2 := 0 < ,6724985115 \sqrt{C_1^2 - 1} \sqrt{C_2^2 - 1} \\ + ,9510565160 (,6123724358 C_1 - ,3535533905) C_2 + ,1092540061 C_1 \\ - ,8107665104$$

$$c3a := 0 < -,6300367552 \sqrt{C_1^2 - 1} \sqrt{C_2^2 - 1} \\ - ,8910065243 (,6123724358 C_1 - ,3535533905) C_2 + ,1605098804 C_1 \\ + 1,144036672$$

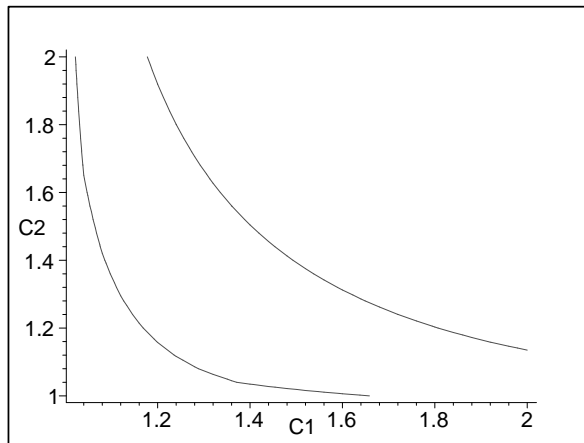
$$c3b := 0 = 0$$

```
> with(plots):
```

```
> display(implicitplot(rhs(C1a),C[1]=1..20,C[2]=1..20),implicitplot(rhs
> (C1b),C[1]=1..20,C[2]=1..20,labels=[C1,C2]));
```



```
> display(implicitplot(rhs(c2),C[1]=1..2,C[2]=1..2),implicitplot(rhs(
> c3a),C[1]=1..2,C[2]=1..2,labels=[C1,C2]));
```



```
> C[2]:=C[1];
> solve({C1a,C1b,C[1]>1});
      {1 < C1}
> solve({c2,c3a,c3b,C[1]>1});
      {C1 < 1,447186438, 1,181387863 < C1}
> C[1]:=1.3;
      C1 := 1,3
> solve(evalf(eta(3,5)=eta(5,3))):C[4]:=%;
      C4 := 2,064889111
> solve(evalf(delta(3,1)=Delta(3,5))):C[5]:=%;
      C5 := 5,344215558
> solve(evalf(eta(2,4)=eta(4,2))):C[3]:=%;
      C3 := 1,172517081
```

Comprobación:

```
> evalf(alpha(1,3)=alpha(3,1));evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1));
      2,287557529 = 2,28755752
      2,821587799 = 2,821587779
```


Una solución:

```
> theta[n]=seq(ang[n],n=1..5);C[n]=seq(C[n],n=1..5);
```

$$\theta_n = \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$C_n = (1,3, 1,3, 1,172517081, 2,064889111, 5,344215558)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

```
> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[1, 0], [0, -1]]):
```

```
> seq(evalf(A(i),4),i=1..5);seq(evalf(N(i),4),i=1..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1. \\ 1. & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -.4693 \\ 2,131 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .4154 & -.2724 \\ 4,303 & -.4154 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,113 & -.4342 \\ 5,216 & -1,113 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,712 & -1,632 \\ 9,056 & -3,712 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .8660 & -.2346 \\ -1,065 & -.8660 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.3506 & -.205 \\ -4,295 & .3506 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,277 & .1237 \\ -5,126 & 1,277 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.7070 & .7070 \\ .7070 & .7070 \end{bmatrix}$$

Representación del polígono:

```
> with(plots):
```

```
> eval(P,M=A(2));
```

$$[0, -.3611575592]$$

```
> TXA1:=display(
```

```
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
```

```
> TXL1:=display(
```

```
> {TEXT([-0.03,-0.18],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.03,
```

```
> -0.18], '1',ALIGNRIGHT)}):
```

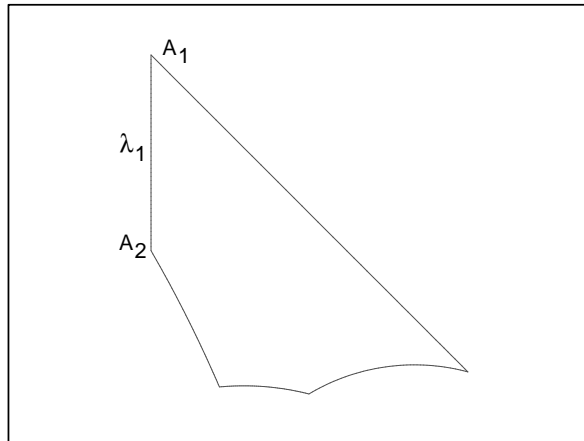
```
> TXA2:=display(
```

```
> {TEXT([-0.03,-0.36],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.03,-0.36], '2',
```

```
> ALIGNRIGHT)}):
```

```
> display(
```

```
> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..5),TXA1,TXL1,TXA2});
```



Segundo ejemplo (pentágono autointersectante). Ángulos en radianes:

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right].$$

```
> p:=5:ang:=table([-Pi/4,2*Pi/3,3*Pi/5,Pi/4,-Pi/6]):sigma:=table([seq(
```

```
> sin(ang[i]),i=1..5]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]),i=1..5)]):
```

```
> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]', 'C[5]');
```

```
> S:=table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..5)]):
```

```
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
```

```

> C[1]:=2;C[2]:=1.2;
                                C1 := 2
                                C2 := 1,2
> solve(evalf(eta(3,5)=eta(5,3))):C[4]:=%;
                                C4 := 5,474029451
> solve(evalf(eta(1,3)=eta(3,1))):C[5]:=%;
                                C5 := 2,628033820
> solve(evalf(eta(2,4)=eta(4,2))):C[3]:=%;
                                C3 := 1,170441429

```

Comprobación:

```

> evalf(alpha(1,3)=alpha(3,1));evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1));
                                2,974456265 = 2,974456264
                                3,058416523 = 3,05841652

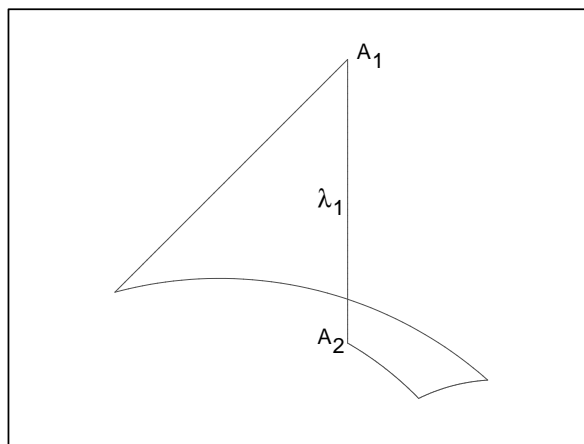
```

Una solución:

```

> theta[n]=seq(ang[n],n=1..5);C[n]=seq(C[n],n=1..5);
                                θn = (-1/4 π, 2/3 π, 3/5 π, 1/4 π, -1/6 π)
                                Cn = (2, 1,2, 1,170441429, 5,474029451, 2,628033820)
> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[1, 0], [0, -1]]):
> with(plots):
> evalf(eval(P,M=A(2)));
                                [0, -5773502691]
> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.03,-0.3],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE, FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.03,-0.3],
> '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.03,-0.58],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.03,-0.58], '2',
> ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..5),TXA1,TXL1,TXA2});

```



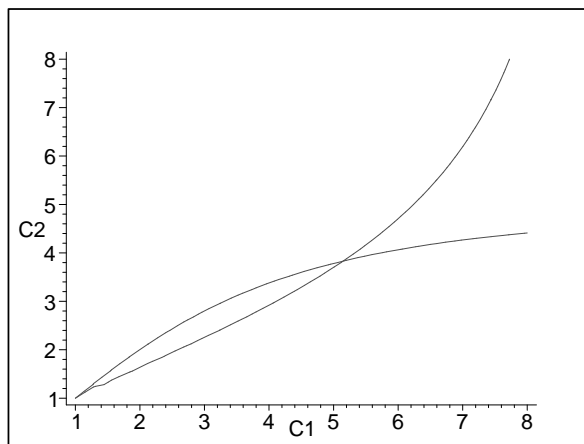
Hexágonos hiperbólicos

Hexágono convexo. Ángulos: $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}]$. Sin condiciones previas sobre los lados.

```

> p:=6:ang:=table([Pi/4,Pi/12,5*Pi/12,7*Pi/12,3*Pi/4,11*Pi/12]):sigma:=
> table([seq(sin(ang[i]),i=1..6)]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]),i=1..6)]):
> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]', 'C[5]'):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..6)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C1a:=evalf(c1a(p)):C1b:=evalf(c1b(p)):
> if evalf(ang[p-1]+ang[p]>=Pi) then
> evalf(eta(p,p-2)+cos(ang[p-1]+ang[p]))>0 elif
> (evalf(ang[p-1]+ang[p]<Pi) and evalf(sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*Pi))
> then eta(p,p-2)-1>0 else 0=0 fi:
> c2:=evalf(%):
> if evalf(ang[p-2]+ang[p-1]>=Pi) then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin(ang[p-2]+ang[p-1])-eta(p,p-3
> )*cos(ang[p-2]+ang[p-1])+kappa[p]>0 else 0=0 fi:
> c3a:=evalf(%):
> if evalf(ang[p]+ang[1]>=Pi) then
> -Gamma(p-2,1)*sin(ang[p]+ang[1])-eta(1,p-2)*cos(ang[p]+ang[1])+kappa[
> p-1]>0 else 0=0 fi:
> c3b:=evalf(%):
> display(implicitplot(rhs(C1a[1]),C[1]=1..8,C[2]=1..8),implicitplot(
> rhs(C1b[1]),C[1]=1..8,C[2]=1..8,labels=[C1,C2]));

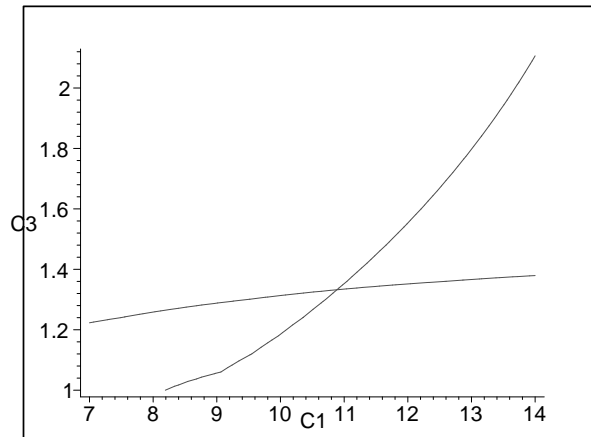
```



```

> C[2]:=10;
> C2:=10
> display(implicitplot(rhs(C1a[2]),C[1]=7..14,C[3]=1..2.5),implicitplot(
> (rhs(C1b[2]),C[1]=7..14,C[3]=1..2.5,labels=[C1,C3]));

```



> C[1]:=18;

$$C_1 := 18$$

> solve({C1a[2],C1b[2]});

$$\{1,412902944 < C_3, C_3 < 8,688943886\}$$

> solve({c2,c3a,c3b,C[3]>1});

$$\{C_3 < 2,939473755, 2,141388212 < C_3\}, \{C_3 < 37,18045559, 26,30750877 < C_3\}$$

> C[3]:=2.25;

$$C_3 := 2,25$$

> evalf(eta(4,6)=eta(6,4)):C[5]:=solve(%);

$$C_5 := 1,196357887$$

> evalf(eta(6,3)=eta(3,6)):C[4]:=solve(%);

$$C_4 := 1,121543571$$

> evalf(eta(4,1)=eta(1,4)):C[6]:=solve(%);

$$C_6 := 1,818014905$$

Comprobación:

> evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1));evalf(alpha(2,5)=alpha(5,2));

$$4,437102226 = 4,437100742$$

$$16,58675104 = 16,58675021$$

Una solución:

> theta[n]=seq(ang[n],n=1..5);C[n]=seq(C[n],n=1..5);

$$\theta_n = \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$C_n = (18, 10, 2,25, 1,121543571, 1,196357887)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[1, 0], [0, -1]]):

> seq(evalf(A(i),4),i=1..6);seq(evalf(N(i),4),i=1..6);

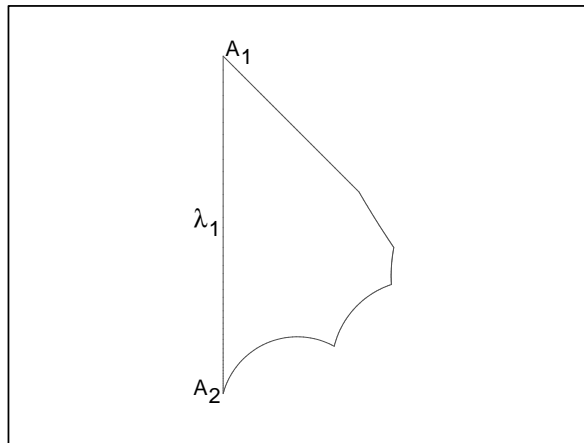
$$\begin{bmatrix} 0 & -1. \\ 1. & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -,03 \\ 35,97 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2,575 & -,6 \\ 14,2 & -2,575 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2,563 & -1,282 \\ 7,920 & -2,563 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1,978 & -,9171 \\ 5,353 & -1,978 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,073 & -,745 \\ 2,891 & -1,073 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -,9655 & -,008 \\ -9,308 & ,9655 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2,250 & ,577 \\ -7,825 & 2,250 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2,111 & ,9049 \\ -3,815 & 2,111 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,015 & ,7426 \\ -,0430 & 1,015 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -,7070 & ,7070 \\ ,7070 & ,7070 \end{bmatrix}$$

```

> with(plots):
> evalf(eval(P,M=A(2)));
                                [0, -,9459053033]
> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.04,-0.48],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,Font(SYMBOL)),TEXT([-0.04,
> -0.48], '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.04,-0.95],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.04,-0.95], '2',
> ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..6),TXA1,TXL1,TXA2});

```



Para otros casos se procede de modo análogo.

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

2.2. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos autointersectantes

[Pulsar aquí](#), ejecutar la página vinculada (hoja 2.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

Observaciones previas.

Las fórmulas de la hoja 2.0 son válidas para todo tipo de polígonos de p lados, convexos o no. Entre los no convexos se encuentran los polígonos autointersectantes, que tienen ángulos menores de 180 y con algunos lados que se entrecruzan. Para su resolución también se necesitan $2p-3$ elementos conocidos.

Aquí se tratan los polígonos con un par de lados secantes, λ_k y λ_p , de modo que:

$$\sum_{i=1}^k \theta_i < (k-1)\pi, \quad \sum_{j=k+1}^p \theta_j < (p-k-1)\pi$$

Las fórmulas son las ya conocidas para polígonos hiperbólicos, sustituyendo θ_j , $k < j$, por $-\theta_j$ y, por tanto, σ_j por $-\sigma_j$.

En otro documento se estudia otro tipo de polígonos autointersectantes, los estrellados, con más de una intersección entre sus lados, aunque el estudio se centra en los polígonos estrellados regulares, que tienen iguales tanto sus ángulos como sus lados.

Si los ángulos son conocidos, para determinar las condiciones necesarias de existencia del polígono, hay que tener en cuenta el valor que puede tomar el ángulo de intersección y, si convenimos que λ_p es uno de los lados secantes, "posponiendo" la intersección lo más posible, hay que exigir, además, que el primer vértice esté en el semiplano interior de cada geodésica orientada λ_i , $2 < i < k+1$, considerando la orientación habitual de los lados.

Además, las inequaciones (2a), (2b), (2a) y (3b) del teorema 2.2.3 aportan las condiciones que deben cumplir las longitudes de los primeros $p-3$ lados para garantizar la convexidad del polígono, considerando positivos todos sus ángulos. Los autointersectantes deben cumplir, necesariamente, la condición opuesta.

A su vez, las expresiones generales de la hoja 2.0 de los vértices y de los vectores normales a los lados, también son válidas cuando los polígonos son autointersectantes y pueden ser utilizadas para su construcción.

Al final se resuelven y construyen algunos ejemplos.

Fórmulas de polígonos autointersectantes.

Cuadriláteros.

Si se entrecruzan los lados segundo y cuarto: $\sigma_3 = -\text{sen}(\theta_3)$, $\sigma_4 = -\text{sen}(\theta_4)$.

```
> p:=4:
> subs({sigma[3]==-sigma[3],sigma[4]==-sigma[4]
> },[alpha(4,1)=alpha(1,4),alpha(3,1)=alpha(1,3),eta(3,4)=eta(4,3),eta(
> 2,4)=eta(4,2),Delta(3,4)=delta(3,1),delta(1,4)=Delta(1,3)]);
```

$$\begin{aligned} [C_4 &= (C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) C_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 - S_1 \sigma_2 \sigma_3) S_3, \\ C_3 C_4 - S_3 \kappa_4 S_4 &= C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2, \\ \kappa_4 &= -(\sigma_1 S_1 S_2 + (-\sigma_1 C_1 \kappa_2 - \kappa_1 \sigma_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3, \\ \sigma_3 C_3 \sigma_4 - \kappa_3 \kappa_4 &= \sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2, \quad -\sigma_4 S_4 = -(C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3, \\ S_4 \sigma_1 &= \sigma_2 S_2 C_3 + (-\sigma_2 C_2 \kappa_3 + \kappa_2 \sigma_3) S_3] \end{aligned}$$

Pentágonos.

Si, por ejemplo, los lados que se cortan son el tercero y el quinto: $\sigma_4 = -\text{sen}(\theta_4)$, $\sigma_5 = -\text{sen}(\theta_5)$.

```
> p:=5:
> subs({sigma[4]=-sigma[4],sigma[5]=-sigma[5]},
> [alpha(4,1)=alpha(1,4),eta(3,5)=eta(5,3),Delta(3,5)=delta(3,1)]);
```

$$\begin{aligned} [C_4 C_5 - S_4 \kappa_5 S_5 &= (C_1 C_2 - S_1 \kappa_2 S_2) C_3 - ((C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \kappa_3 + S_1 \sigma_2 \sigma_3) S_3, \\ \sigma_4 C_4 \sigma_5 - \kappa_4 \kappa_5 &= (\sigma_1 S_1 S_2 + (-\sigma_1 C_1 \kappa_2 - \kappa_1 \sigma_2) C_2) \sigma_3 - (\sigma_1 C_1 \sigma_2 - \kappa_1 \kappa_2) \kappa_3, \\ -\sigma_4 S_4 C_5 + (\sigma_4 C_4 \kappa_5 + \kappa_4 \sigma_5) S_5 &= (C_1 S_2 - S_1 \kappa_2 C_2) \sigma_3 - S_1 \sigma_2 \kappa_3] \end{aligned}$$

Hexágonos.

Los lados pueden cortarse de dos formas: el tercero o el cuarto, por ejemplo, con el sexto, en ambos casos.

Primer caso: los lados tercero y sexto son secantes: $\sigma_4 = -\text{sen}(\theta_4)$, $\sigma_5 = -\text{sen}(\theta_5)$, $\sigma_6 = -\text{sen}(\theta_6)$

```
> p:=6:
> expand(eval([alpha(4,1)=alpha(1,4),eta(3,6)=eta(6,3),Delta(4,6)=delta
> (4,1)], [sigma[4]=-sigma[4],sigma[5]=-sigma[5],sigma[6]=-sigma[6]]));
```

$$\begin{aligned} [C_6 C_4 C_5 - C_6 S_4 \kappa_5 S_5 - S_6 \kappa_6 C_4 S_5 + S_6 \kappa_6 S_4 \kappa_5 C_5 - S_6 S_4 \sigma_5 \sigma_6 = \\ C_3 C_1 C_2 - C_3 S_1 \kappa_2 S_2 - S_3 \kappa_3 C_1 S_2 + S_3 \kappa_3 S_1 \kappa_2 C_2 - S_3 S_1 \sigma_2 \sigma_3, \\ \sigma_6 \sigma_4 S_4 S_5 - \sigma_6 C_5 \sigma_4 C_4 \kappa_5 - \sigma_6 C_5 \kappa_4 \sigma_5 - \kappa_6 \sigma_4 C_4 \sigma_5 + \kappa_6 \kappa_4 \kappa_5 = \\ \sigma_3 \sigma_1 S_1 S_2 - \sigma_3 C_2 \sigma_1 C_1 \kappa_2 - \sigma_3 C_2 \kappa_1 \sigma_2 - \kappa_3 \sigma_1 C_1 \sigma_2 + \kappa_3 \kappa_1 \kappa_2, \\ -\sigma_5 S_5 C_6 + S_6 \sigma_5 C_5 \kappa_6 + S_6 \kappa_5 \sigma_6 = -\sigma_4 S_3 C_1 C_2 + \sigma_4 S_3 S_1 \kappa_2 S_2 + \sigma_4 C_3 \kappa_3 C_1 S_2 \\ - \sigma_4 C_3 \kappa_3 S_1 \kappa_2 C_2 + \sigma_4 C_3 S_1 \sigma_2 \sigma_3 - \kappa_4 \sigma_3 C_1 S_2 + \kappa_4 \sigma_3 S_1 \kappa_2 C_2 + \kappa_4 S_1 \sigma_2 \kappa_3] \end{aligned}$$

Segundo caso. los lados cuarto y sexto son secantes: $\sigma_5 = -\text{sen}(\theta_5)$, $\sigma_6 = -\text{sen}(\theta_6)$.

```
> p:=6:
> expand(eval([alpha(4,1)=alpha(1,4),eta(3,6)=eta(6,3),Delta(4,6)=delta
> (4,1)], [sigma[5]=-sigma[5],sigma[6]=-sigma[6]]));
```

$$\begin{aligned} [C_6 C_4 C_5 - C_6 S_4 \kappa_5 S_5 - S_6 \kappa_6 C_4 S_5 + S_6 \kappa_6 S_4 \kappa_5 C_5 - S_6 S_4 \sigma_5 \sigma_6 = \\ C_3 C_1 C_2 - C_3 S_1 \kappa_2 S_2 - S_3 \kappa_3 C_1 S_2 + S_3 \kappa_3 S_1 \kappa_2 C_2 - S_3 S_1 \sigma_2 \sigma_3, \\ -\sigma_6 \sigma_4 S_4 S_5 + \sigma_6 C_5 \sigma_4 C_4 \kappa_5 - \sigma_6 C_5 \kappa_4 \sigma_5 + \kappa_6 \sigma_4 C_4 \sigma_5 + \kappa_6 \kappa_4 \kappa_5 = \\ \sigma_3 \sigma_1 S_1 S_2 - \sigma_3 C_2 \sigma_1 C_1 \kappa_2 - \sigma_3 C_2 \kappa_1 \sigma_2 - \kappa_3 \sigma_1 C_1 \sigma_2 + \kappa_3 \kappa_1 \kappa_2, \\ -\sigma_5 S_5 C_6 + S_6 \sigma_5 C_5 \kappa_6 + S_6 \kappa_5 \sigma_6 = \sigma_4 S_3 C_1 C_2 - \sigma_4 S_3 S_1 \kappa_2 S_2 - \sigma_4 C_3 \kappa_3 C_1 S_2 \\ + \sigma_4 C_3 \kappa_3 S_1 \kappa_2 C_2 - \sigma_4 C_3 S_1 \sigma_2 \sigma_3 - \kappa_4 \sigma_3 C_1 S_2 + \kappa_4 \sigma_3 S_1 \kappa_2 C_2 + \kappa_4 S_1 \sigma_2 \kappa_3] \end{aligned}$$

Condiciones necesarias para la existencia del polígono (teorema 2.2.3).

Si el polígono tiene p lados, considerando positivos todos sus ángulos:

```
> C1a:=sum(ang[i],i=1..k)<(k-1)*180:
> C1b:=sum(ang[j],j=k+1..p)<(p-k-1)*180:
```

```

> c1a:=k->evalf(seq(delta(h,1)>0,h=3..k)):
> C2a:=k->evalf(cos((p-k-1)*Pi-sum(ang[j],j=k+1..p)*Pi/180)<eta(p,k)):
> C2b:=k->evalf(eta(p,k)<1:
y la condición opuesta a la dada por las siguientes inecuaciones:
> c2:=if ang[p-1]+ang[p]>=180 then
> evalf(eta(p,p-2)+cos((ang[p-1]+ang[p])*Pi/180))>0 elif
> (ang[p-1]+ang[p]<180 and sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> eta(p,p-2)>1 else 0=0 fi:
> c3a:=if ang[p-2]+ang[p-1]>180 then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)-
> eta(p,p-3)*cos((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0 else 0=0 fi:
> c3b:=if ang[p]+ang[1]>180 then
> -Gamma(p-2,1)*sin((ang[p]+ang[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((ang[p]+ang[1])*
> Pi/180)+kappa[p-1]>0 else 0=0 fi:

```

En los ejemplos posteriores se tratan estas últimas condiciones, para ciertos valores de los ángulos del pentágono hiperbólico.

Vértices del polígono y vectores normales a los lados. Geodésicas de los lados.

```

> A:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(alpha(1,n)*A(1)+Delta(1,n-1)*N(1)+beta(1,n)
> *(A(1)&*N(1))),evalm(alpha(n,1)*A(1)+delta(1,n)*N(1)+B(1,n)*(A(1)&*N(1)
> ))):
> N:=n->'if'(n<p/2+1,evalm(-delta(n,1)*A(1)-eta(1,n)*N(1)+Gamma(n,1)*(A
> (1)&*N(1))),evalm(-Delta(n,p)*A(1)-eta(n,1)*N(1)+g(n,1)*(A(1)&*N(1))):

```

Proyección de H^2 en el disco de Poincaré y ecuaciones de las geodésicas de los lados:

```

> P:=[(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2),(M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/(
> M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)];
> Gp:=n->eval(P,M=evalm(A(n)*cosh(t)+A(n)&*N(n)*sinh(t)));
> gp:=n->[Gp(n)[1],Gp(n)[2],t=0..arccosh(C[n])]:

```

$$P := \begin{bmatrix} 2 \frac{M_{1,1} M_{2,1}}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2}, \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \end{bmatrix}$$

$$Gp := n \rightarrow P \Big| M = \text{evalm}(A(n) \cosh(t) + (A(n) \text{'& * 'N}(n)) \sinh(t))$$

Pentágonos autointersectantes.

Ángulos: [80,45,55,-60,-70]. **Dos primeros lados iguales:** $\lambda_1 = \lambda_2$. **Para que el pentágono sea autointersectante es necesario que los lados λ_5 y λ_3 formen un ángulo menor de $180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$.**

```

> p:=5:k:=3:ang:=table([80,45,55,60,70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*
> Pi/180),i=1..5]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..5]):S:=
> table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..5]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C1a;C1b;C2:={C2a(3),C2b(3)};c1a(k);

```

180 < 360

$$130 + \text{ang}_6 < 360$$

```

C2 := {,6427876095 < ,8067072844  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
+ ,8191520445 (-,6963642400 C1 - ,1227878037) C2 - ,3994181190 C1
+ ,07042819084, ,8067072844  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
+ ,8191520445 (-,6963642400 C1 - ,1227878037) C2 - ,3994181190 C1
+ ,07042819084 < 1}
0 < ,8191520445 C1  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ . - ,5792279653  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ . C2 - ,4055797874  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .
> C[2]:=C[1]:solve(C2);solve(c1a(k));
{-1,851901456 < C1, C1 < -1,579373904}, {3,695515421 < C1, C1 < 3,968042973}
      RealRange(Open(1,690450532),  $\infty$ )
> if ang[p-1]+ang[p]>=180 then
> evalf(eta(p,p-2)+cos((ang[p-1]+ang[p])*Pi/180))>0 elif
> (ang[p-1]+ang[p]<180 and sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> eta(p,p-2)>1 else 0=0 fi:c2:=evalf(%);
> if ang[p-2]+ang[p-1]>180 then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)-
> eta(p,p-3)*cos((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0 else 0=0
> fi:c3a:=evalf(%);
> if ang[p]+ang[1]>180 then
> -Gamma(p-2,1)*sin((ang[p]+ang[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((ang[p]+ang[1])*
> Pi/180)+kappa[p-1]>0 else 0=0 fi:c3b:=evalf(%);

c2 := 1. < ,8067072844 C12 - ,7362790936
+ ,8191520445 (-,6963642400 C1 - ,1227878037) C1 - ,3994181190 C1
      c3a := 0 = 0
      c3b := 0 = 0
> solve(rhs(c2)<=1);
      RealRange(-1,851901456, 3,968042973)
> p:=5:ang:=table([80,45,55,-60,-70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/
> 180),i=1..5]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..5]):S:=table(
> [seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..5]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C[2]:=C[1]:c1:=3.75;
      c1 := 3,75
> eval(evalf(eta(3,5)=eta(5,3)),C[1]=c1);
      ,8137976815 C4 - ,1710100714 = ,711395667
> c4:=evalf(solve(%));
      c4 := 1,084306036
> eval(evalf(delta(3,1)=Delta(3,5)), [C[1]=c1,C[4]=c4]);
      1,785908549 = -,3630284907 C5 + ,7910157333  $\sqrt{C_5^2 - 1}$ .
> evalf(solve(%));if %[1]>1 then %[1] else %[2] fi:c5:=%;

```

```

4,386300319, -1,761014174
c5 := 4,386300319
> eval(evalf(eta(2,4)=eta(4,2)), [C[1]=c1,C[5]=c5]);
- ,7094064805 C3 - ,2867882181 = -6,339329413
> c3:=solve(%);
c3 := 8,531838038

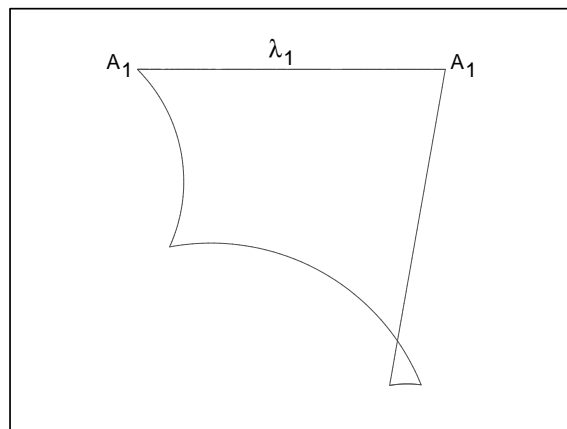
```

Comprobación:

```

> eval(
> {evalf(alpha(1,3)=alpha(3,1)),evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1)),evalf(eta(
> 1,4)=eta(4,1))}, [C[1]=c1,C[5]=c5,C[4]=c4,C[3]=c3]);
{4,14378408 = 4,143784128, 4,825917673 = 4,82591763, -4,118546162 = -4,118546208}
> C[1]:=c1:C[3]:=c3:C[4]:=c4:C[5]:=c5:
> theta[n]=seq(ang[n],n=1..5),C[n]=seq(C[n],n=1..5);
θn = (80, 45, 55, -60, -70), Cn = (3,75, 3,75, 8,531838038, 1,084306036, 4,386300319)
Representación del pentágono
> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):
> with(plots):
> eval(P,M=A(2));
> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.4,0.03],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.4,0.03],
> '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.8,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.8,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..5),TXA1,TXL1,TXA2});
[-,7608859104, 0]

```



Una solución es:

```
> theta[n]=seq(ang[n],n=1..5),C[n]=seq(C[n],n=1..5);
 $\theta_n = (80, 45, 55, -60, -70), C_n = (3,75, 3,75, 8,531838038, 1,084306036, 4,386300319)$ 
```

Hexágonos autointersectantes.

Primer caso: lados tercero y sexto secantes.

Ángulos: [25,80,45,-55,-60,-70]. Ninguna otra condición previa para los lados.

```
> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]', 'C[5]');
Se empieza estudiando las condiciones necesarias de existencia:
> p:=6:k:=3:ang:=table([25,80,45,55,60,70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*
> Pi/180),i=1..6]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..6]):S:=
> table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..6]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C1a;C1b;C2:={C2a(3),C2b(3)};ca:=c1a(k);
150 < 360
185 < 360

C2 := {-,9961946981 < ,2988362387 sqrt(C1^2 - 1). sqrt(C2^2 - 1.
+ ,7071067810 (-,07338689086 C1 - ,8925389353) C2 - ,2942962448 C1
+ ,1112835427, ,2988362387 sqrt(C1^2 - 1). sqrt(C2^2 - 1.
+ ,7071067810 (-,07338689086 C1 - ,8925389353) C2 - ,2942962448 C1
+ ,1112835427 < 1}

ca := 0 < ,7071067810 C1 sqrt(C2^2 - 1. - ,1227878037 sqrt(C1^2 - 1. C2
- ,6963642400 sqrt(C1^2 - 1.
> solve(eval(C2,C[1]=5));solve(eval(ca,C[1]=5));
{C2 ≤ -1., -1,295719611 < C2}, {1,560421355 < C2, C2 < 4,409401917}
RealRange(-∞, Open(-1,251218221)), RealRange(Open(1,589345512), ∞)
> if ang[p-1]+ang[p]>=180 then
> evalf(eta(p,p-2)+cos((ang[p-1]+ang[p])*Pi/180))>0 elif
> (ang[p-1]+ang[p]<180 and sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> eta(p,p-2)>1 else 0=0 fi:c2:=evalf(%);
> c3a:if ang[p-2]+ang[p-1]>180 then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)-
> eta(p,p-3)*cos((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0 else 0=0
> fi:c3a:=evalf(%);
> c3b:if ang[p]+ang[1]>180 then
> -Gamma(p-2,1)*sin((ang[p]+ang[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((ang[p]+ang[1])*
> Pi/180)+kappa[p-1]>0 else 0=0 fi:c3b:=evalf(%);
```

$$\begin{aligned}
c2 := & 1. < ,8191520445 \\
& (,4226182618 \sqrt{C_1^2 - 1} \cdot C_2 + (-,07338689086 C_1 - ,8925389353) \sqrt{C_2^2 - 1}) \\
& \sqrt{C_3^2 - 1} + ,8191520445(-,2988362387 \sqrt{C_1^2 - 1} \cdot \sqrt{C_2^2 - 1} \\
& - ,7071067810 (-,07338689086 C_1 - ,8925389353) C_2 - ,2942962448 C_1 \\
& + ,1112835427)C_3 - ,1714054248 \sqrt{C_1^2 - 1} \cdot \sqrt{C_2^2 - 1} \\
& - ,4055797874 (-,07338689086 C_1 - ,8925389353) C_2 + ,1688013912 C_1 \\
& - ,06382961782
\end{aligned}$$

$$c3a := 0 = 0$$

$$c3b := 0 = 0$$

> eval(rhs(c2)<=1, [C[1]=5,C[2]=3]):solve(%);

RealRange(1., ∞)

Se eligen $C_1 = 5$, $C_2 = 3$ y se busca un valor para C_3 que aporte alguna solución.

> p:=6:ang:=table([25,80,45,-55,-60,-70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*
> Pi/180),i=1..6]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..6]):S:=
> table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..6]):

> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

> eval(evalf(eta(4,6)=eta(6,4)), [C[1]=5,C[2]=3,C[3]=10]);c5:=solve(%);

$$,8137976815 C_5 - ,1710100714 = 1,523928782$$

$$c5 := 2,082752129$$

> eval(evalf(eta(4,1)=eta(1,4)), [C[1]=5,C[2]=3,C[3]=10,C[5]=c5]);

$$- ,6686713530 \sqrt{C_6^2 - 1} + ,4592819179 C_6 - 1,381148523 = -5,711916996$$

> evalf(solve(%));if %[1]>1 then %[1] else %[2] fi:c6:=%;

$$-3,916451371, 20,75979994$$

$$c6 := 20,75979994$$

> eval(evalf(eta(6,3)=eta(3,6)), [C[1]=5,C[2]=3,C[3]=10,C[5]=c5,C[6]=c6]);

> c4:=solve(%);

$$,1088521827 = 1,406320030 \sqrt{C_4^2 - 1} - 1,044231710 C_4 - ,8740896404$$

$$c4 := 3,314517397$$

Comprobación:

> eval(

> {evalf(alpha(6,3)=alpha(3,6)),evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1)),evalf(eta(
> 1,4)=eta(4,1))}, [C[1]=5,C[2]=3,C[3]=10,C[5]=c5,C[6]=c6,C[4]=c4]);

{6,98861442 = 6,98861429, 10,4517110 = 10,45171102, -5,711916996 = -5,711916993}

> C[1]:=5:C[2]:=3:C[3]:=10:C[5]:=c5:C[6]:=c6:C[4]:=c4:

Representación del hexágono

> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):

> with(plots):

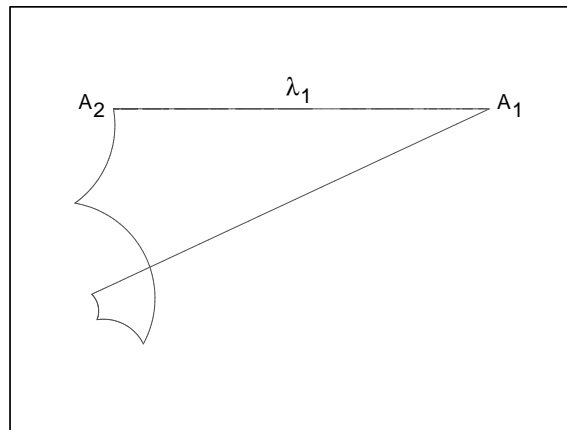
> evalf(eval(P,M=A(2)));

$$[-,8164965812, 0]$$

```

> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.41,0.03],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE, FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.41,0.03],
> '1',ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.86,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.86,0], '2',ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..6),TXA1,TXL1,TXA2});

```



Una solución es:

```

> theta[n]=seq(ang[n],n=1..6),C[n]=seq(C[n],n=1..6);
 $\theta_n = (25, 80, 45, -55, -60, -70), C_n = (5, 3, 10, 3,314517397, 2,082752129, 20,75979994)$ 

```

Segundo caso: lados cuarto y sexto secantes.

Ángulos: [25,80,45,55,-60,-70]. Ninguna condición previa para los lados.

```

> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]', 'C[5]', 'C[6]');

```

Se empieza estudiando las condiciones necesarias de existencia:

```

> p:=6:k:=4:ang:=table([25,80,45,55,60,70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*
> Pi/180),i=1..6]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..6]):S:=
> table([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..6]):

```

```

> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

```

```

> C1a;C1b;C2:={C2a(4),C2b(4)};ca:=c1a(k);

```

$$205 < 540$$

$$130 < 180$$

```

C2 := {,6427876095 < ,8191520445 (,4226182618 %3 C2 + %1 %2)  $\sqrt{C_3^2 - 1}$ .+
,8191520445
(-,2988362387 %3 %2 - ,7071067810 %1 C2 - ,2942962448 C1 + ,1112835427)
C3 - ,1714054248 %3 %2 - ,4055797874 %1 C2 + ,1688013912 C1
- ,06382961782, ,8191520445 (,4226182618 %3 C2 + %1 %2)  $\sqrt{C_3^2 - 1}$ .+
,8191520445
(-,2988362387 %3 %2 - ,7071067810 %1 C2 - ,2942962448 C1 + ,1112835427)
C3 - ,1714054248 %3 %2 - ,4055797874 %1 C2 + ,1688013912 C1
- ,06382961782 < 1}
%1 := -,07338689086 C1 - ,8925389353
%2 :=  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
%3 :=  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .

ca := 0 < ,7071067810 C1 %2 - ,1227878037 %1 C2 - ,6963642400 %1, 0 <
,8191520445 (C1 C2 - ,1736481773 %1 %2)  $\sqrt{C_3^2 - 1}$ . - ,8191520445
(,7071067810 C1 %2 - ,1227878037 %1 C2 + ,6963642400 %1) C3
- ,4055797874 C1 %2 + ,07042819084 %1 C2 + ,3994181190 %1
%1 :=  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .
%2 :=  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
> C[2]=solve(eval(ca[1],C[1]=8));
C2 = (RealRange(-∞, Open(-1,256402443)), RealRange(Open(1,603377625), ∞))
> C[3]=solve(eval(ca[2], [C[1]=8,C[2]=6])); solve(eval(C2, [C[1]=8,C[2]=6]));
C3 = (RealRange(-∞, -1.), RealRange(Open(3,247318216), ∞))
{C3 < 4,604371346, 4,343297836 < C3}
> if ang[p-1]+ang[p]>=180 then
> evalf(eta(p,p-2)+cos((ang[p-1]+ang[p])*Pi/180))>0 elif
> (ang[p-1]+ang[p]<180 and sum(ang[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> eta(p,p-2)>1 else 0=0 fi:c2:=evalf(%);
> c3a:if ang[p-2]+ang[p-1]>180 then
> (S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)-
> eta(p,p-3)*cos((ang[p-2]+ang[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0 else 0=0
> fi:c3a:=evalf(%);
> c3b:if ang[p]+ang[1]>180 then
> -Gamma(p-2,1)*sin((ang[p]+ang[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((ang[p]+ang[1])*
> Pi/180)+kappa[p-1]>0 else 0=0 fi:c3b:=evalf(%);

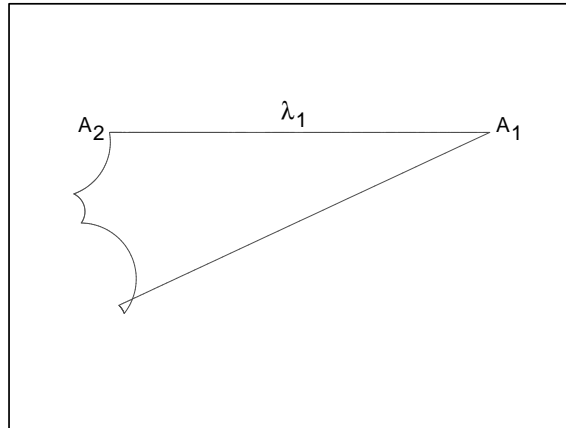
c2 := 1. < ,8191520445
(,4226182618  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ . C2 + (-,07338689086 C1 - ,8925389353)  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .)
 $\sqrt{C_3^2 - 1}$ . + ,8191520445(-,2988362387  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
- ,7071067810 (-,07338689086 C1 - ,8925389353) C2 - ,2942962448 C1
+ ,1112835427)C3 - ,1714054248  $\sqrt{C_1^2 - 1}$ .  $\sqrt{C_2^2 - 1}$ .
- ,4055797874 (-,07338689086 C1 - ,8925389353) C2 + ,1688013912 C1
- ,06382961782

```

```

c3a := 0 = 0
c3b := 0 = 0
> eval(rhs(c2)<=1, [C[1]=8, C[2]=6]):solve(%);
RealRange(1., 4.604371346)
Se eligen  $C_1 = 8$ ,  $C_2 = 6$  y se busca un valor para  $C_3$  que aporte alguna solución.
> p:=6:ang:=table([25,80,45,55,-60,-70]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/
> 180), i=1..6]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180), i=1..6]):S:=table(
> [seq(sqrt(C[i]^2-1), i=1..6]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> eval(evalf(eta(4,6)=eta(6,4)), [C[1]=8, C[2]=6, C[3]=4.4]);c5:=solve(
> %);
,8137976815 C5 - ,1710100714 = ,7210331692
c5 := 1,096148663
> eval(evalf(eta(4,1)=eta(1,4)), [C[1]=8, C[2]=6, C[3]=4.4, C[5]=c5]);c6:=
> solve(%);
-,1643090769 sqrt(C6^2 - 1. + ,3357801394 C6 - ,6534779758 = 2,621726617
c6 := 19,07549164
> eval(evalf(eta(6,3)=eta(3,6)), [C[1]=8, C[2]=6, C[3]=4.4, C[5]=c5, C[6]=c6]);
> c4:=solve(%);
5,511938933 = -,3455675871 sqrt(C4^2 - 1. + ,6645121427 C4 - ,4135676356
c4 := 18,54925825
Comprobación:
> eval(
> {evalf(alpha(6,3)=alpha(3,6)), evalf(alpha(1,4)=alpha(4,1)), evalf(eta(
> 1,4)=eta(4,1))}, [C[1]=8, C[2]=6, C[3]=4.4, C[5]=c5, C[6]=c6, C[4]=c4]);
{2,621726617 = 2,621726618, 33,2960712 = 33,2960714, 32,86919174 = 32,86919160}
> C[1]:=8:C[2]:=6:C[3]:=4.4:C[5]:=c5:C[6]:=c6:C[4]:=c4:
Representación del hexágono
> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):
> with(plots):
> evalf(eval(P,M=A(2)));
[-,8819171036, 0]
> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0], A, ALIGNLEFT, ALIGNABOVE), TEXT([0.05,0], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.45,0.03], 1, ALIGNLEFT, ALIGNABOVE, FONT(SYMBOL)), TEXT([-0.45,0.03],
> '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.92,0], A, ALIGNLEFT, ALIGNABOVE), TEXT([-0.92,0], '2', ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i), axes=none, scaling=constrained), i=1..6), TXA1, TXL1, TXA2});

```



Una solución es:

```
> theta[n]=seq(ang[n],n=1..6),C[n]=seq(C[n],n=1..6);
 $\theta_n = (25, 80, 45, 55, -60, -70), C_n = (8, 6, 4, 4, 18,54925825, 1,096148663, 19,07549164)$ 
```

Cuadriláteros autointersectantes.

Además de las condiciones primeras para que el cuadrilátero sea autointersectante se consideran las condiciones ya conocidas en un cuadrilátero para que sea convexo. Aquéllas y la condición puesta a estas últimas son necesarias para la existencia del cuadrilátero.

Primer ejemplo: los cuatro ángulos son agudos.

```
> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]', 'C[5]', 'C[6]');
> p:=4:k:=2:ang:=table([25,80,45,55]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/
> 180),i=1..4]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..4]):S:=table(
> [seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..4)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C1a;C1b;C2:={C2a(2),C2b(2)};
105 < 180
100 + ang5 + ang6 < 540
C2 := {,1736481773 < ,4161977408 C1 - ,1573786953,
,4161977408 C1 - ,1573786953 < 1}
> solve(C2);
{C1 < 2,780838486, ,7953596095 < C1}
> if (ang[1]+ang[2]<180 and ang[3]+ang[4]<=180) then
> C[1]>evalf((1+kappa[1]*kappa[2])/(sigma[1]*sigma[2])) elif
> (ang[1]+ang[2]<180 and ang[3]+ang[4]>180) then
> C[1]>evalf((sigma[3]*sigma[4]-kappa[3]*kappa[4]+kappa[1]*kappa[2])/(
> sigma[1]*sigma[2])) fi;
> if (ang[2]+ang[3]>180) then
> C[1]<evalf((kappa[1]*cos((ang[2]+ang[3])*Pi/180)-kappa[4])/(sigma[1]*
> sin((ang[2]+ang[3])*Pi/180))) elif (180<ang[4]+ang[1]) then
> C[1]<evalf((kappa[2]*cos((ang[4]+ang[1])*Pi/180)-kappa[3])/(sigma[2]*
> sin((ang[4]+ang[1])*Pi/180))) fi;
```

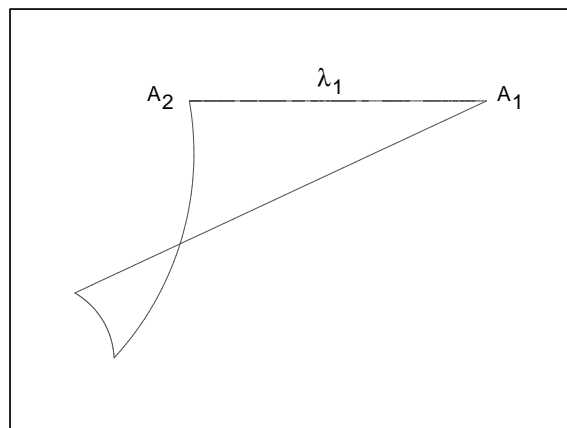

$$2,780838485 < C_1$$

Debe, además, cumplirse la condición contraria a ésta.

```
> p:=4:ang:=table([25,80,-45,-55]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180)
> ,i=1..4]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..4]):S:=table([seq(
> sqrt(C[i]^2-1),i=1..4]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> eval(evalf(eta(2,4)=eta(4,2)),C[1]=2);c[3]:=solve(%)
,5792279655 C3 - ,4055797874 = ,6750167863
c3 := 1,865580804
> eval(evalf(Delta(4,1)=delta(4,2)), [C[1]=2,C[3]=c[3]]);c[2]:=solve(%)
,7319963018 = -1,290103809 C2 + 1,486176360 sqrt(C2^2-1.
c2 := 4,572320252
> eval(evalf(eta(3,1)=eta(1,3)), [C[1]=2,C[3]=c[3],C[2]=c[2]]);c[4]:=solve(%)
-,3461886132 C4 - ,5198367905 = -3,306788121
c4 := 8,050384167
> C[1]:=2:C[2]:=c[2]:C[3]:=c[3]:C[4]:=c[4]:
```

Representación del cuadrilátero

```
> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):
> with(plots):
> evalf(eval(P,M=A(2)));
[-,5773502693, 0]
> TXA1:=display(
> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.3,0.03],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.3,0.03],
> '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.63,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.63,0], '2', ALIGNRIGHT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..4),TXA1,TXL1,TXA2});
```



Una solución es:

```
> theta[n]=seq(ang[n],n=1..4),C[n]=seq(C[n],n=1..4);
       $\theta_n = (25, 80, -45, -55), C_n = (2, 4, 572320252, 1, 865580804, 8, 050384167)$ 
```

Segundo ejemplo: dos ángulos consecutivos suman más de 180.

```
> unassign('C[1]', 'C[2]', 'C[3]', 'C[4]');
> p:=4:k:=2:ang:=table([25,105,85,55]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/
> 180),i=1..4)]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..4)]):S:=table
> ([seq(sqrt(C[i]^2-1),i=1..4)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> C1a;C1b;C2:={C2a(2),C2b(2)};
```

$$130 < 180$$

$$140 + \text{ang}_5 + \text{ang}_6 < 540$$

```
C2 := {,7660444431 < ,4082178935 C1 + ,2345697159, 4082178935 C1 + ,2345697159 < 1}
> solve(C2);
```

$$\{C_1 < 1,875053241, 1,301938831 < C_1\}$$

```
> if (ang[1]+ang[2]<180 and ang[3]+ang[4]<=180) then
> C[1]>evalf((1+kappa[1]*kappa[2])/(sigma[1]*sigma[2])) elif
> (ang[1]+ang[2]<180 and ang[3]+ang[4]>180) then
> C[1]>evalf((sigma[3]*sigma[4]-kappa[3]*kappa[4]+kappa[1]*kappa[2])/(
> sigma[1]*sigma[2])) fi;
> if (ang[2]+ang[3]>180) then
> C[1]<evalf((kappa[1]*cos((ang[2]+ang[3])*Pi/180)-kappa[4])/(sigma[1]*
> sin((ang[2]+ang[3])*Pi/180))) elif (180<ang[4]+ang[1]) then
> C[1]<evalf((kappa[2]*cos((ang[4]+ang[1])*Pi/180)-kappa[3])/(sigma[2]*
> sin((ang[4]+ang[1])*Pi/180))) fi;
```

$$1,875053240 < C_1$$

$$C_1 < 19,97789183$$

Debe, además, cumplirse la condición contraria a ésta.

```
> p:=4:ang:=table([25,105,-85,-55]):sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),
> i=1..4)]):kappa:=table([seq(cos(ang[i]*Pi/180),i=1..4)]):S:=table([seq(
> sqrt(C[i]^2-1),i=1..4)]):
```

```
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
```

```
> eval(evalf(eta(2,4)=eta(4,2)),C[1]=1.7);c[3]:=solve(%);
```

$$,8160349237 C_3 - ,04999048042 = ,9285401349$$

$$c_3 := 1,199128355$$

```
> eval(evalf(Delta(4,1)=delta(4,2)), [C[1]=1.7,C[3]=c[3]]);
```

$$,5810040522 = -,5420712347 C_2 + ,6570041406 \sqrt{C_2^2 - 1}.$$

```
> evalf(solve(%));if %[1]>1 then %[1] else %[2] fi:c[2]:=%;
```

$$5,572288565, -1,001673494$$

$$c_2 := 5,572288565$$

```
> eval(evalf(eta(3,1)=eta(1,3)), [C[1]=2,C[3]=c[3],C[2]=c[2]]);c[4]:=solve(%);
```

$$-,3461886132 C_4 - ,5198367905 = -5,339378147$$

$$c_4 := 13,92172120$$

> C[1]:=1.7:C[2]:=c[2]:C[3]:=c[3]:C[4]:=c[4]:

Representación del cuadrilátero

> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):

> with(plots):

> eval(P,M=A(2));

$$[-,5091750772, -,1089324619 \cdot 10^{-9}]$$

> TXA1:=display(

> {TEXT([0.05,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0.05,0], '1', ALIGNRIGHT)}):

> TXL1:=display(

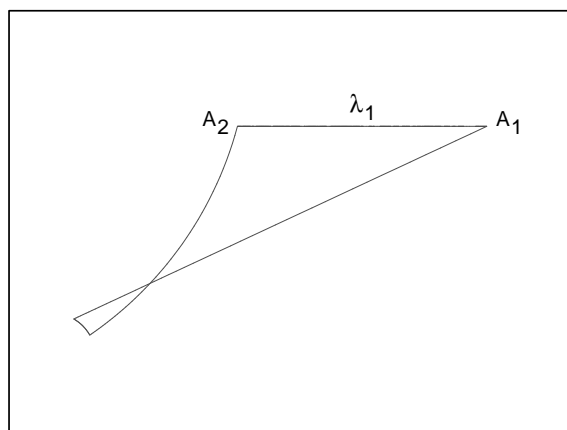
> {TEXT([-0.25,0.03],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE, FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.25,0.03], '1', ALIGNRIGHT)}):

> TXA2:=display(

> {TEXT([-0.55,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.55,0], '2', ALIGNRIGHT)}):

> display(

> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..4),TXA1,TXL1,TXA2});



Una solución es:

> theta[n]=seq(ang[n],n=1..4),C[n]=seq(C[n],n=1..4);

$$\theta_n = (25, 105, -85, -55), C_n = (1,7, 5,572288565, 1,199128355, 13,92172120)$$

> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

2.3. Polígonos hiperbólicos regulares.

Relaciones y representación

Las expresiones utilizadas en el documento proceden de la proposición 2.5.2.

```
> restart:
```

Relación entre la longitud del lado, la medida del ángulo y el número de lados.

Tanto para los polígonos regulares convexos como para los estrellados, la relación entre $C = \text{ch}\lambda$, $\kappa = \cos\theta$ y el número p de lados es:

```
> C:=(1+2*cos(2*k*Pi/p)+kappa)/(1-kappa);S:=sqrt(C^2-1):
> sigma:=sqrt(1-kappa^2):
```

$$C := \frac{1 + 2 \cos\left(2 \frac{k\pi}{p}\right) + \kappa}{1 - \kappa}$$

siendo p el número de lados y $\frac{2k\pi}{p}$ el ángulo central abarcado por cada lado. Para que $1 < C$ tiene que cumplirse, además:

```
> theta<Pi-(2*k*Pi/p);
```

$$\theta < \pi - 2 \frac{k\pi}{p}$$

Fórmulas generales de polígonos hiperbólicos

Para la representación de los polígonos utilizamos las fórmulas ya conocidas de documentos anteriores.

```
> Alpha:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*S-B(j-1
> mod p,i mod p)*C) fi:
> alpha:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*C-B(j-1
> mod p,i mod p)*S) fi:
> B:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (Alpha(i mod p,j mod p)*kappa+delta(j-1
> mod p,i mod p)*sigma) fi:
> delta:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (Alpha(i mod p,j mod p)*sigma-delta(j-1
> mod p,i mod p)*kappa) fi:

> eta:=(i,j)->if (i=j) then -1 else (Phi(i mod p,j-1 mod p)*sigma-eta(i
> mod p,j-1 mod p)*kappa) fi:
> g:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (-Phi(i mod p,j-1 mod p)*kappa-eta(i
> mod p,j-1 mod p)*sigma) fi:
> Phi:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*S+g(i
> mod p,j mod p)*C) fi:
> Delta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*C+g(i
> mod p,j mod p)*S) fi:

> beta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (beta(i mod p,j-1 mod
> p)*C+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*S) fi:
```

```

> Omega:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (beta(i mod p,j-1 mod
> p)*S+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*C) fi:
> epsilon:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (Gamma(j-1 mod p,i mod
> p)*sigma-Omega(i mod p,j mod p)*kappa) fi:
> Gamma:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (-Gamma(j-1 mod p,i mod
> p)*kappa-Omega(i mod p,j mod p)*sigma) fi:

```

El origen, centro del polígono

Con el fin de centrar el polígono en el origen del disco, se calcula la distancia d del centro del polígono a cada vértice:

$$\operatorname{ch} d = \cot \frac{\theta}{2} \cot \frac{k\pi}{p}$$

y, considerando el polígono con el primer vértice en $(0,0)$ y el primer lado en la semirrecta $[0,-1]$, se define la transformación:

$$R = T_d G_\phi$$

siendo G_ϕ el giro de ángulo $\phi = -\frac{\theta}{2}$ alrededor del origen y T_d la traslación que transforma el nuevo centro del polígono en el origen.

Es decir:

```

> e:=exp(1):a:=arccos(kappa)/4:d:=arccosh(cot(arccos(kappa)/2)*cot(k*Pi/p)):
> R:=evalm(e^(-d/2)*matrix([[cos(a)*e^d,-sin(a)*e^d],[sin(a),cos(a)]])):

```

Vértices y vectores normales a los lados

Siendo $E(1)$ la matriz X_0 del origen y $H(1)$ el vector normal a la geodésica orientada $[1,-1]$, los vértices y los vectores normales a los lados del polígono definitivo se definen:

```

> E(1):=matrix([[0,-1],[1,0]]);
> H(1):=matrix([[1,0],[0,-1]]);

```

$$E(1) := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(1) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```

> A:=n->'if '(n<=p/2+1,evalm(alpha(1,n)*A(1)+Delta(1,n-1)*N(1)+beta(1,n)*
> (A(1)&*N(1))),evalm(alpha(n,1)*A(1)+delta(1,n)*N(1)+B(1,n)*(A(1)&*N(1)))):
> A(1):=evalm(R&*E(1)&*R^(-1)):
> N:=n->'if '(n<=p/2+1,evalm(-delta(n,1)*A(1)-eta(1,n)*N(1)+Gamma(n,1)*
> (A(1)&*N(1))),evalm(-Delta(n,p)*A(1)-eta(n,1)*N(1)+g(n,1)*(A(1)&*N(1)))):
> N(1):=evalm(R&*H(1)&*R^(-1)):

```

Proyección en el disco de Poincaré y geodésicas de los lados

Las siguientes definiciones permiten representar el polígono en el disco de Poincaré:

- > P:=[(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2), (M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)];
- > Gp:=n->eval(P,M=evalm(A(n)*cosh(t)+A(n)&*N(n)*sinh(t)));

$$P := \left[2 \frac{M_{1,1} M_{2,1}}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2}, \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \right]$$

$$Gp := n \rightarrow P \Big| M = \text{evalm}(A(n) \cosh(t) + (A(n) \text{'&*'} N(n)) \sinh(t))$$

- > gp:=n->[Gp(n)[1],Gp(n)[2],t=0..arccosh(C)]:
- > C0:=plot([cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],axes=none,scaling=constrained):
- > with(plots):

Construcción de polígonos regulares convexos y estrellados

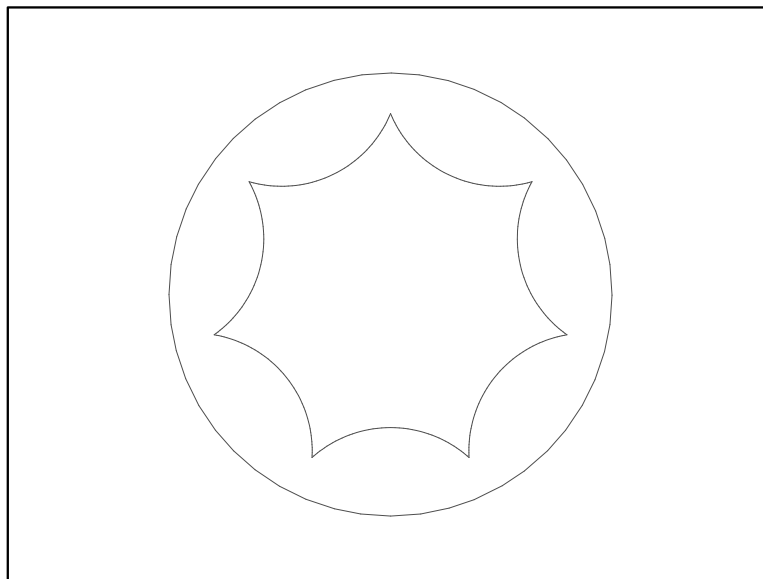
Para ver con más claridad cada representación puede seleccionarse y pulsar **Ctrl+4** (se vuelve al tamaño original con **Ctrl+2**)

i. Polígonos convexos

- > p:=7:k:=1:theta<Pi-(2*k*Pi/p);kappa:=cos(Pi/4):

$$\theta < \frac{5}{7} \pi$$

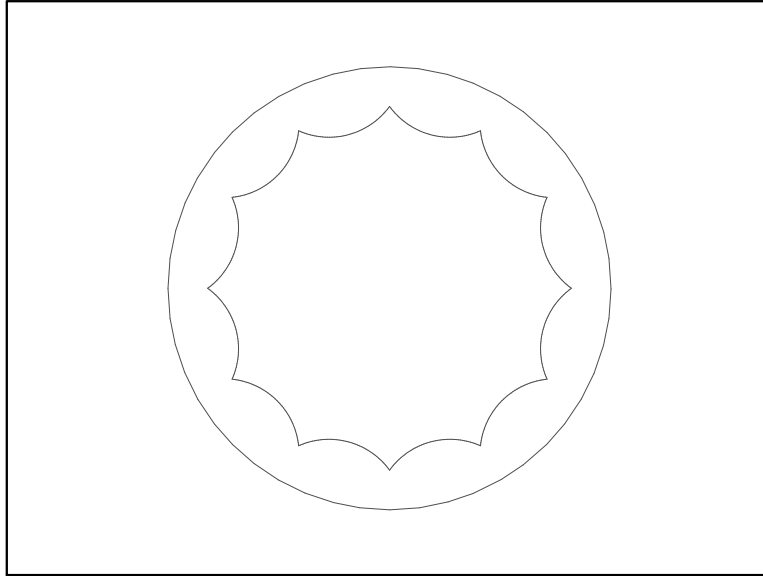
- > display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..7)});



- > p:=12:k:=1:theta<Pi-(2*k*Pi/p);kappa:=cos(2*Pi/5):

$$\theta < \frac{5}{6} \pi$$

- > display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..12)});



ii. Polígonos estrellados

El valor de k debe ser primo con p y $1 < k < p/2$ ó $1 < k < (p+1)/2$, según que p sea par o impar, respectivamente.

Por ejemplo, para:

$p = 5$ y $k = 2$; $p = 7$ y $k = 2, 3$; $p = 9$ y $k = 2, 4$;

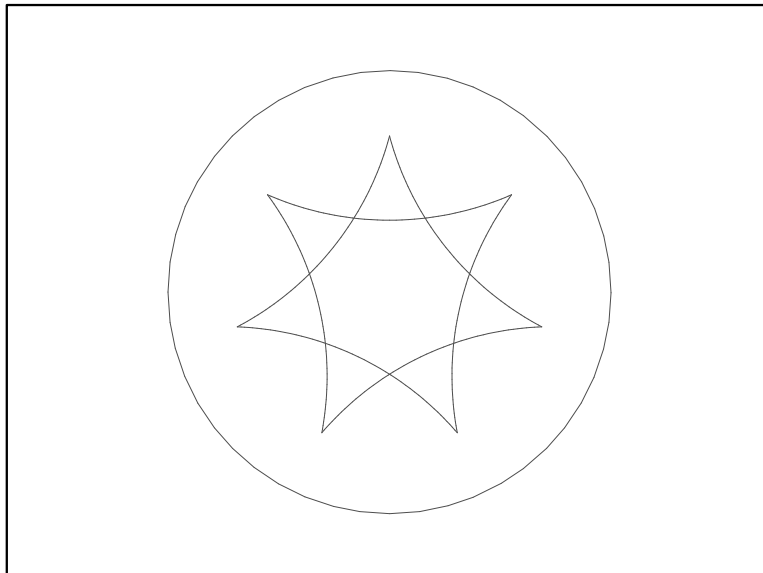
$p = 10$ y $k = 3$; $p = 11$ y $k = 2, 3, 4, 5$; $p = 12$ y $k = 5$;

y así sucesivamente.

```
> p:=7:k:=2:theta<Pi-(2*k*Pi/p);kappa:=cos(Pi/6):
```

$$\theta < \frac{3}{7}\pi$$

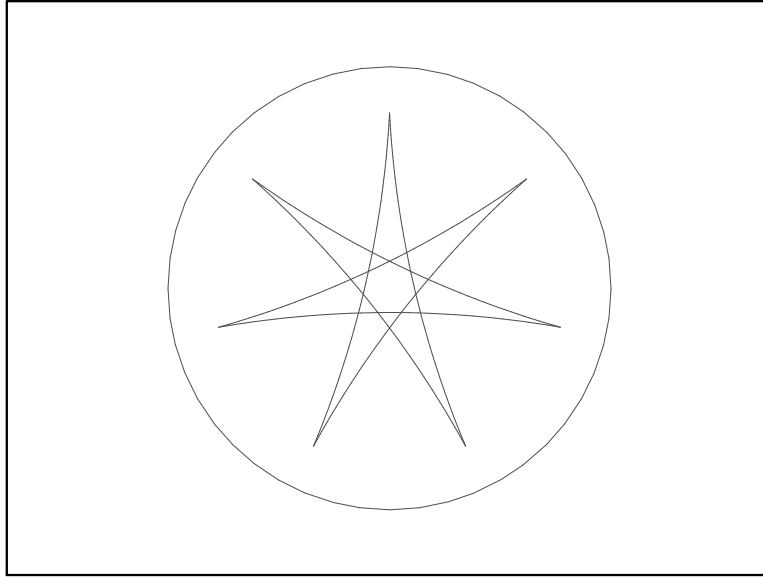
```
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..7)});
```



```
> p:=7:k:=3:theta<Pi-(2*k*Pi/p);kappa:=cos(Pi/30):
```

$$\theta < \frac{1}{7}\pi$$

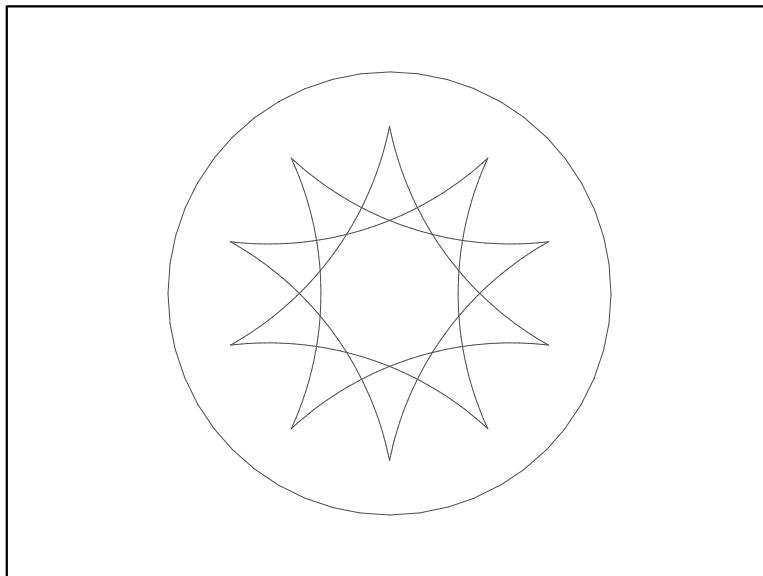
```
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..7)});
```



```
> p:=10:k:=3:theta<Pi-(2*k*Pi/p);kappa:=cos(Pi/8):
```

$$\theta < \frac{2}{5}\pi$$

```
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..10)});
```



De modo análogo puede construirse cualquier otro polígono regular convexo o estrellado, con las limitaciones propias del programa y de la memoria del ordenador utilizado.

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

3.0. Relaciones entre los elementos de un polígono hiperbólico rectángulo convexo

Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad del polígono

Construcción de polígonos rectángulos

> restart:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:

Observaciones previas.

Si A_j y N_j denotan, respectivamente, los vértices y los vectores normales de los lados del polígono, se considera que el lado λ_j de vector normal N_j une A_j con A_{j+1} y que la orientación de los lados es acorde con el sentido de las agujas del reloj, de forma que $\theta_i = \frac{\pi}{2}$, es decir, $\kappa_i = 0$ y $\sigma_i = 1$. En otro documento se estudian algunos polígonos rectángulos no convexos.

Las matrices A_j y N_j pertenecen al conjunto de matrices de traza cero $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ de $sl_2(R)$, siendo $\langle M, M \rangle = \det(M)$, $\langle A_j, A_j \rangle = 1$ y $\langle N_j, N_j \rangle = -1$.

Se cumple, además, que $\langle A_j, A_{j+1} \rangle = \cosh(\lambda_j)$ y $\langle N_j, N_{j+1} \rangle = 0$. A partir de ahora:

$$C_j = \cosh(\lambda_j), S_j = \sinh(\lambda_j).$$

El significado geométrico de algunos de los siguientes productos escalares se especifica en el capítulo 2 (sección 2.1).

Fórmulas (1) de los productos escalares $\alpha(i, j) = \langle A_i, A_j \rangle$, $\delta(i, j) = -\langle N_i, A_j \rangle$, $\eta(i, j) = \langle N_i, N_j \rangle$ (proposición 3.1.2).

Siendo $\Delta(i, j-1) = \delta(i, j)$:

> alpha(i,j)=alpha(i,j-1)*C[j-1]-delta(j-2,i)*S[j-1],[alpha(k,k)=1,alpha(i,i+1)=C[i]];
 > delta(j,i)=alpha(i,j-1)*S[j-1]-delta(j-2,i)*C[j-1],[delta(k,k)=0,delta(i+1,i)=S[i]];

> eta(i,j)=delta(i,j-1)*S[j-1]-eta(i,j-2)*C[j-1],[eta(k,k)=-1,eta(i,i+1)=0];

> Delta(i,j)=Delta(i,j-1)*C[j]-eta(i,j-1)*S[j],Delta(k,k)=0;

$$\alpha(i, j) = \alpha(i, j-1) C_{j-1} - \delta(j-2, i) S_{j-1}, [\alpha(k, k) = 1, \alpha(i, i+1) = C_i]$$

$$\delta(j, i) = \alpha(i, j-1) S_{j-1} - \delta(j-2, i) C_{j-1}, [\delta(k, k) = 0, \delta(i+1, i) = S_i]$$

$$\eta(i, j) = \delta(i, j-1) S_{j-1} - \eta(i, j-2) C_{j-1}, [\eta(k, k) = -1, \eta(i, i+1) = 0]$$

$$\Delta(i, j) = \Delta(i, j-1) C_j - \eta(i, j-1) S_j, \Delta(k, k) = 0$$

Definición de las fórmulas (1):

Con la notación del documento 1.0, teniendo en cuenta que $\beta(j, i) = \delta(j - 1, i)$, $\eta(i, j) = \Phi(i, j - 1)$ y $\gamma(i, j) = -\eta(i, j - 1)$:

```

> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:
> alpha:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*C[j-1
> mod p]-B(j-1 mod p,i mod p)*S[j-1 mod p]) fi:
> delta:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*S[j-1
> mod p]-B(j-1 mod p,i mod p)*C[j-1 mod p]) fi:
> B:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (delta(j-1 mod p,i mod p)) fi:
> eta:=(i,j)->if (i=j) then -1 else (Phi(i mod p,j-1 mod p)) fi:
> Phi:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*S[j mod
> p]+g(i mod p,j mod p)*C[j mod p]) fi:
> Delta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*C[j mod
> p]+g(i mod p,j mod p)*S[j mod p]) fi:
> g:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (-eta(i mod p,j-1 mod p)) fi:

```

Ésta última fórmula se utiliza en la construcción de polígonos hiperbólicos.

Fórmula (2) del producto escalar $\beta(i, j)$ en función de $\gamma(j, i) = -\langle N_j, A_i \wedge N_i \rangle$ y $\varepsilon(i, j) = -\langle A_i \wedge N_i, A_j \wedge N_j \rangle$ (proposición 3.1.2).

```

> beta(i,j)=beta(i,j-1)*C[j-1]+epsilon(i,j-1)*S[j-1],beta(k,k)=0;
> epsilon(i,j)=gamma(j-1,i),epsilon(k,k)=1;
> gamma(j,i)=-beta(i,j-1)*S[j-1]+epsilon(i,j-1)*C[j-1],gamma(k,k)=0;

```

$$\beta(i, j) = \beta(i, j - 1) C_{j-1} + \varepsilon(i, j - 1) S_{j-1}, \beta(k, k) = 0$$

$$\varepsilon(i, j) = \gamma(j - 1, i), \varepsilon(k, k) = 1$$

$$\gamma(j, i) = -\beta(i, j - 1) S_{j-1} - \varepsilon(i, j - 1) C_{j-1}, \gamma(k, k) = 0$$

Definición de la fórmula (2):

Siendo $\Gamma(j, i) = \gamma(j, i)$:

```

> beta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (beta(i mod p,j-1 mod p)*C[j-1 mod
> p]+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*S[j-1 mod p]) fi:
> epsilon:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (Gamma(j-1 mod p,i mod p))fi:
> Gamma:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (-beta(i mod p,j-1 mod p)*S[j-1
> mod p]+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*C[j-1 mod p])) fi:

```

Condiciones necesarias y suficientes para que el polígono rectángulo sea convexo.

Dadas las longitudes de los primeros p-3 lados:

1. Si se trata de un pentágono:

```
> p:=5:ce5:=eta(5,3)>1;
```

$$ce5 := 1 < S_1 S_2$$

2. Para cualquier otro polígono rectángulo:

```
> cep:=p->seq(eta(p,h)>1,h=4..p-2):
```

Construcción de polígonos rectángulos.

Expresiones de los vértices y los vectores normales a los lados:

Los primeros vértices pueden expresarse:

$$A(h) = \alpha(1, h) A(1) + \delta(1, h) N(1) + \beta(1, h) A(1) N(1)$$

y los primeros vectores normales:

$$N(h) = -\delta(h, 1) A(1) - \eta(1, h) N(1) + \gamma(h, 1) A(1) N(1)$$

y los últimos:

$$A(p-k) = \alpha(p-k, 1) A(1) + \delta(1, p-k) N(1) + \beta(1, p-k) A(1) N(1)$$

$$N(p-k) = -\delta(p-k, 1) A(1) - \eta(p-k, 1) N(1) + \gamma(p-k, 1) A(1) N(1)$$

```
> A:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(alpha(1,n)*A(1)+Delta(1,n-1)*N(1)+beta(1,n)*(
> A(1)&*N(1))),evalm(alpha(n,1)*A(1)+delta(1,n)*N(1)+B(1,n)*(A(1)&*N(1)))):
> N:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(-delta(n,1)*A(1)-eta(1,n)*N(1)+Gamma(n,1)*(A(1)
> &*N(1))),evalm(-Delta(n,p)*A(1)-eta(n,1)*N(1)+g(n,1)*(A(1)&*N(1)))):
```

Proyección del modelo $sl_2(R)$ de H^2 en el disco de Poincaré.

Geodésicas de los lados.

```
> P:=[(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2),(M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/(
> M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)];
> Gp:=n->eval(P,M=evalm(A(n)*cosh(t)+A(n)&*N(n)*sinh(t)));
> gp:=n->[evalf(Gp(n)[1]),evalf(Gp(n)[2]),t=0..arccosh(C[n])]:
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{M_{1,1} M_{2,1}}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} & \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \\ \frac{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} & \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \end{bmatrix}$$

$$Gp := n \rightarrow P \Big|_M = \text{evalm}(A(n) \cosh(t) + (A(n) \text{'&*'} N(n)) \sinh(t))$$

Fórmulas de polígonos rectángulos. Condiciones para la convexidad.

Fórmulas del pentágono rectángulo.

```
> p:=5:
> eta(4,1)=eta(1,4);C[4]=solve(eta(1,2)=eta(2,1),C[4]);
```

$$C_5 = S_2 S_3$$

$$C_4 = \frac{C_3 C_5}{S_3 S_5}$$

```
> Delta(3,5)=delta(3,1),Delta(4,1)=delta(4,2),Delta(5,2)=delta(5,3);Del
> ta(4,5)=delta(4,1);
```

$$S_4 C_5 = C_1 S_2, S_5 C_1 = C_2 S_3, S_1 C_2 = C_3 S_4$$

$$S_5 = C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3$$

> expand(alpha(5,1)=alpha(1,5));alpha(4,1)=alpha(1,4);

$$C_5 = C_4 C_1 C_2 C_3 - C_4 S_1 S_3 - C_1 S_2 S_4$$

$$C_4 C_5 = C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3$$

Vértices y vectores normales a los lados.

> A(1):=A[1]:N(1):=N[1]:seq(A[i]=A(i),i=2..5);

$$A_2 = C_1 A_1 + S_1 (A_1 \&* N_1), A_3 = C_1 C_2 A_1 + S_2 N_1 + S_1 C_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$A_4 = C_4 C_5 A_1 + C_4 S_5 N_1 + S_4 (A_1 \&* N_1), A_5 = C_5 A_1 + S_5 N_1$$

> seq(N[i]=N(i),i=2..5);

$$N_2 = -S_1 A_1 - C_1 (A_1 \&* N_1), N_3 = -C_1 S_2 A_1 - C_2 N_1 - S_1 S_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$N_4 = -S_5 A_1 - C_5 N_1, N_5 = A_1 \&* N_1$$

Condición necesaria y suficiente para que el pentágono sea convexo.

Dadas las longitudes de los 2 primeros lados:

> ce5;

$$1 < S_1 S_2$$

Fórmulas del hexágono rectángulo.

> p:=6:

> expand(alpha(6,1)=alpha(1,6));alpha(4,1)=alpha(1,4);

$$C_6 = C_5 C_4 C_1 C_2 C_3 - C_5 C_4 S_1 S_3 - C_5 C_1 S_2 S_4 - S_5 C_1 C_2 S_3 + S_5 S_1 C_3$$

$$C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 = C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3$$

> eta(5,1)=eta(1,5);expand(eta(2,3)=eta(3,2));eta(6,3)=eta(3,6),eta(4,1

)=eta(1,4);

$$C_6 = S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4$$

$$0 = S_1 S_4 C_5 C_6 - S_1 C_4 S_6 - S_4 S_5 C_1$$

$$S_1 S_2 = S_4 S_5, S_5 S_6 = S_2 S_3$$

> Delta(4,6)=delta(4,1);expand(Delta(5,6)=delta(5,1));

$$S_5 C_6 = C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3$$

$$S_6 = S_4 C_1 C_2 C_3 - S_4 S_1 S_3 - C_1 S_2 C_4$$

Vértices y vectores normales a los lados.

> A(1):=A[1]:N(1):=N[1]:seq(A[i]=A(i),i=2..6);

$$A_2 = C_1 A_1 + S_1 (A_1 \&* N_1), A_3 = C_1 C_2 A_1 + S_2 N_1 + S_1 C_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$A_4 = (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) A_1 + S_2 C_3 N_1 + (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) (A_1 \&* N_1),$$

$$A_5 = C_5 C_6 A_1 + C_5 S_6 N_1 + S_5 (A_1 \&* N_1), A_6 = C_6 A_1 + S_6 N_1$$

> seq(N[i]=N(i),i=2..6);

$$N_2 = -S_1 A_1 - C_1 (A_1 \&* N_1), N_3 = -C_1 S_2 A_1 - C_2 N_1 - S_1 S_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$N_4 = -S_5 C_6 A_1 - S_5 S_6 N_1 - C_5 (A_1 \&* N_1), N_5 = -S_6 A_1 - C_6 N_1, N_6 = A_1 \&* N_1$$

Condiciones necesarias y suficientes para que el hexágono sea convexo.

Dadas las longitudes de los 3 primeros lados:

> p:=6:cep(p);

$$1 < S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3$$

Algunas fórmulas del heptágono rectángulo.

> p:=7:

> expand(eta(5,7)=eta(7,5));expand(eta(4,7)=eta(7,4));

> Delta(4,7)=delta(4,1);expand(Delta(5,7)=delta(5,1));

$$C_6 = S_4 S_1 C_2 C_3 - S_4 C_1 S_3 - S_1 S_2 C_4$$

$$S_5 S_6 = S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3$$

$$S_5 C_6 C_7 - C_5 S_7 = C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3$$

$$S_6 C_7 = S_4 C_1 C_2 C_3 - S_4 S_1 S_3 - C_1 S_2 C_4$$

Vértices y vectores normales a los lados.

> A(1):=A[1]:N(1):=N[1]:seq(A[i]=A(i),i=2..7);

$$A_2 = C_1 A_1 + S_1 (A_1 \&* N_1), A_3 = C_1 C_2 A_1 + S_2 N_1 + S_1 C_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$A_4 = (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) A_1 + S_2 C_3 N_1 + (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) (A_1 \&* N_1),$$

$$A_5 = (C_5 C_6 C_7 - S_5 S_7) A_1 + (C_5 C_6 S_7 - S_5 C_7) N_1 + C_5 S_6 (A_1 \&* N_1),$$

$$A_6 = C_6 C_7 A_1 + C_6 S_7 N_1 + S_6 (A_1 \&* N_1), A_7 = C_7 A_1 + S_7 N_1$$

> seq(N[i]=N(i),i=2..7);

$$N_2 = -S_1 A_1 - C_1 (A_1 \&* N_1), N_3 = -C_1 S_2 A_1 - C_2 N_1 - S_1 S_2 (A_1 \&* N_1),$$

$$N_4 = -(C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) A_1 - S_2 S_3 N_1 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) (A_1 \&* N_1),$$

$$N_5 = -S_6 C_7 A_1 - S_6 S_7 N_1 - C_6 (A_1 \&* N_1), N_6 = -S_7 A_1 - C_7 N_1, N_7 = A_1 \&* N_1$$

Condiciones necesarias y suficientes para que el heptágono sea convexo.

Dadas las longitudes de los 4 primeros lados:

> p:=7:cep(p);

$$1 < S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3, 1 < (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4$$

Algunas fórmulas del octógono rectángulo.

> p:=8:

> expand(eta(6,8)=eta(8,6));expand(eta(5,8)=eta(8,5));

> Delta(4,7)=delta(4,1);expand(Delta(5,7)=delta(5,1));

$$C_7 = S_5 C_4 S_1 C_2 C_3 - S_5 C_4 C_1 S_3 - S_5 S_1 S_2 S_4 - C_5 S_1 C_2 S_3 + C_5 C_1 C_3$$

$$S_6 S_7 = S_4 S_1 C_2 C_3 - S_4 C_1 S_3 - S_1 S_2 C_4$$

$$S_5 C_6 C_7 - C_5 S_7 = C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3$$

$$S_6 C_7 = S_4 C_1 C_2 C_3 - S_4 S_1 S_3 - C_1 S_2 C_4$$

Vértices y vectores normales a los lados.

> A(1):=A[1]:N(1):=N[1]:seq(A[i]=A(i),i=2..5);

$$\begin{aligned}
A_2 &= C_1 A_1 + S_1 (A_1 \& * N_1), \quad A_3 = C_1 C_2 A_1 + S_2 N_1 + S_1 C_2 (A_1 \& * N_1), \\
A_4 &= (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) A_1 + S_2 C_3 N_1 + (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) (A_1 \& * N_1), \quad A_5 = \\
&((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) A_1 + (S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4) N_1 \\
&+ ((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) (A_1 \& * N_1) \\
> \text{seq}(N[i]=N(i), i=2..8);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= -S_1 A_1 - C_1 (A_1 \& * N_1), \quad N_3 = -C_1 S_2 A_1 - C_2 N_1 - S_1 S_2 (A_1 \& * N_1), \\
N_4 &= -(C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) A_1 - S_2 S_3 N_1 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) (A_1 \& * N_1), \\
N_5 &= -(S_6 C_7 C_8 - C_6 S_8) A_1 - (S_6 C_7 S_8 - C_6 C_8) N_1 - S_6 S_7 (A_1 \& * N_1), \\
N_6 &= -S_7 C_8 A_1 - S_7 S_8 N_1 - C_7 (A_1 \& * N_1), \quad N_7 = -S_8 A_1 - C_8 N_1, \quad N_8 = A_1 \& * N_1
\end{aligned}$$

Condiciones necesarias y suficientes para que el octógono sea convexo.

Dadas las longitudes de los 5 primeros lados:

> cep(p);

$$\begin{aligned}
1 &< S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3, \quad 1 < (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4, \\
1 &< ((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) S_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) C_5 \\
> \text{"FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR"};
\end{aligned}$$

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

3.1. Resolución y construcción de polígonos hiperbólicos rectángulos

[Pulsar aquí](#), ejecutar la página vinculada (hoja 3.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

Observaciones

En la hoja 3.0 se estudian las expresiones válidas para un polígono hiperbólico con todos sus ángulos rectos. En el presente documento se aplican tales expresiones para la construcción de algunos polígonos rectángulos convexos.

Construcción de un pentágono rectángulo convexo

```

> p:=5:ce5;C:=table([seq(sqrt(1+S[i]^2),i=1..5)]):C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]
> :

```

$$1 < S_1 S_2$$

```

> S[1]:=3/4;S[2]:=12/5;

```

$$S_1 := \frac{3}{4}$$

$$S_2 := \frac{12}{5}$$

```

> s4:=solve(eta(3,5)=eta(5,3)):if evalf(s4[1])>0 then s4[1] else s4[2]
> fi:S[4]:=%;

```

$$S_4 := \frac{2}{5} \sqrt{14}$$

```

> s3:=solve(eta(5,1)=eta(1,5)):if evalf(s3[1])>0 then s3[1] else s3[2]
> fi:S[3]:=%;

```

$$S_3 := \frac{25}{112} \sqrt{14}$$

```

> s5:=solve(eta(4,1)=eta(1,4)):if evalf(s5[1])>0 then s5[1] else s5[2]
> fi:S[5]:=%;

```

$$S_5 := \frac{13}{28} \sqrt{14}$$

```

> A(1):=matrix([[0, -1], [1, 0]]):N(1):=matrix([[0, 1], [1, 0]]):
> evalf(eval(P,M=A(2)));

```

$$[-.3333333334, 0]$$

```

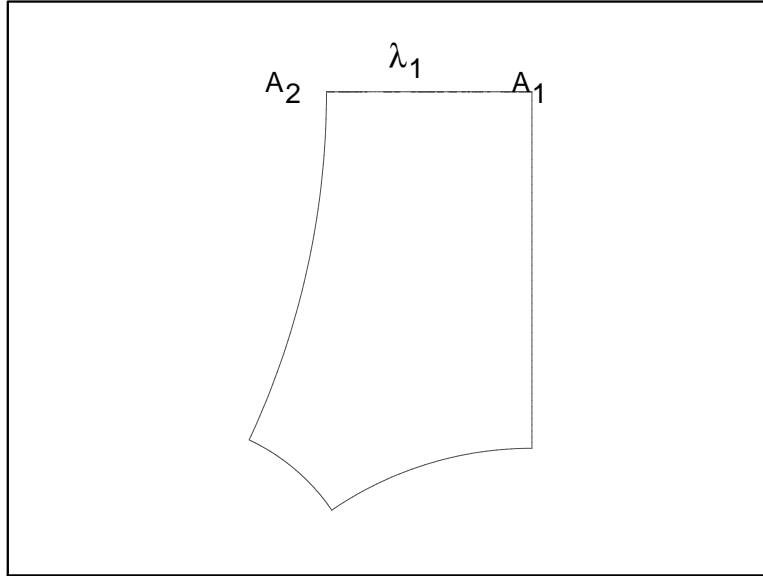
> with(plots):
> TXA1:=display(
> {TEXT([0,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0,0], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.2,0.04],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.2,0.0
> 4], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.4,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.4,0], '2', ALIGNRIGHT
> )}):

```

```

> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..5),TXA1,TXL1,TXA2
> });

```



```

> C[n]=seq(combine(C[i]),i=1..5);

```

$$C_n = \left(\frac{5}{4}, \frac{13}{5}, \frac{39}{112} \sqrt{14}, \frac{9}{5}, \frac{15}{28} \sqrt{14} \right)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

```

> seq(simplify(A(i)),i=1..5);seq(simplify(N(i)),i=1..5);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-39}{20} & \frac{-17}{20} \\ \frac{113}{20} & \frac{39}{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \sqrt{14} & -\frac{9}{70} \sqrt{14} \\ \frac{9}{5} \sqrt{14} & \frac{2}{5} \sqrt{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{14} \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-28}{5} & \frac{-9}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{14} \sqrt{14} \\ -\sqrt{14} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pueden elegirse otras medidas de los dos primeros lados, con las condiciones de convexidad, y construir un nuevo pentágono.

Construcción de un hexágono rectángulo convexo.

```

> unassign('S[1]', 'S[2]', 'S[3]', 'S[4]', 'S[5]', 'C'):
> p:=6:cep(6);C:=table([seq(sqrt(1+S[i]^2),i=1..6)]):C[0]:=C[p]:S[0]:=S
> [p]:

```

$$1 < S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3$$

```

> S[1]:=3/4;S[3]:=4/3;solve({cep(6),S[2]>0});

```

$$S_1 := \frac{3}{4}$$

$$S_3 := \frac{4}{3}$$

$$\left\{ \frac{35}{12} < S_2 \right\}$$

> S[2]:=24/7;

$$S_2 := \frac{24}{7}$$

> s5:=solve(eta(4,6)=eta(6,4)):if evalf(s5[1])>0 then s5[1] else s5[2]

> fi:S[5]:= %:

> solve(eta(3,6)=eta(6,3)):S[4]:= %:solve(eta(4,1)=eta(1,4)):S[6]:= %:

> evalf(eval(P,M=A(2))):

[-.3333333334, 0]

> TXA1:=display(

> {TEXT([0,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0,0], '1', ALIGNRIGHT)}):

> TXL1:=display(

> {TEXT([-0.2,0.04],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.2,0.0

> 4], '1', ALIGNRIGHT)}):

> TXA2:=display(

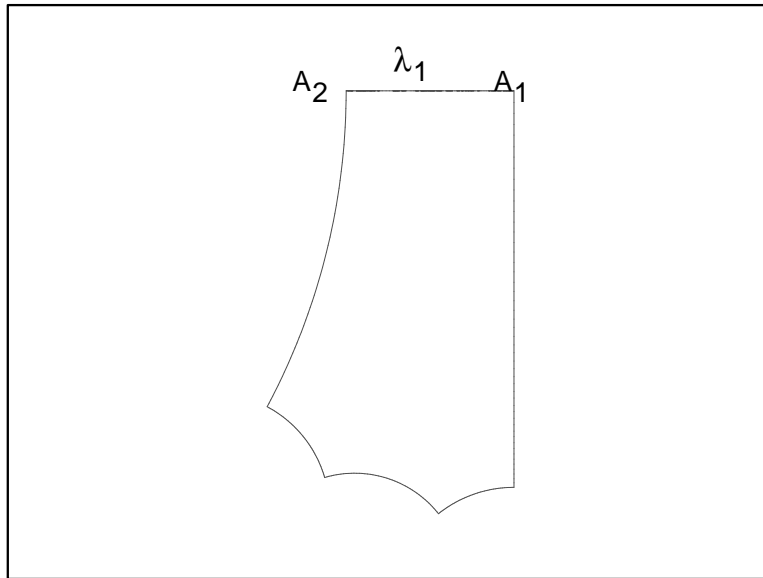
> {TEXT([-0.4,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.4,0], '2', ALIGNRIGHT

>)}):

> display(

> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..6),TXA1,TXL1,TXA2

> });



> C[n]=seq(simplify(C[i]),i=1..6);

$$C_n = \left(\frac{5}{4}, \frac{25}{7}, \frac{5}{3}, \frac{235}{8569} \sqrt{8569}, \frac{125}{84}, \frac{395}{8569} \sqrt{8569} \right)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

> seq(simplify(A(i)),i=1..3);seq(simplify(A(i)),i=4..6);

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-75}{28} & \frac{-29}{28} \\ \frac{221}{28} & \frac{75}{28} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-235}{84} & \frac{-61}{84} \\ \frac{1021}{84} & \frac{235}{84} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{84}\sqrt{8569} & -\frac{125}{65436}\sqrt{8569} \\ \frac{125}{924}\sqrt{8569} & \frac{1}{84}\sqrt{8569} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{779}\sqrt{8569} \\ \frac{1}{11}\sqrt{8569} & 0 \end{bmatrix}$$

> seq(simplify(N(i)),i=1..6);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{55}{7} & -\frac{18}{7} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{125}{84} & \frac{11}{84} \\ -\frac{779}{84} & -\frac{125}{84} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{779}\sqrt{8569} \\ -\frac{1}{11}\sqrt{8569} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pueden elegirse otras medidas de los tres primeros lados, con las condiciones de convexidad, y construir un nuevo hexágono.

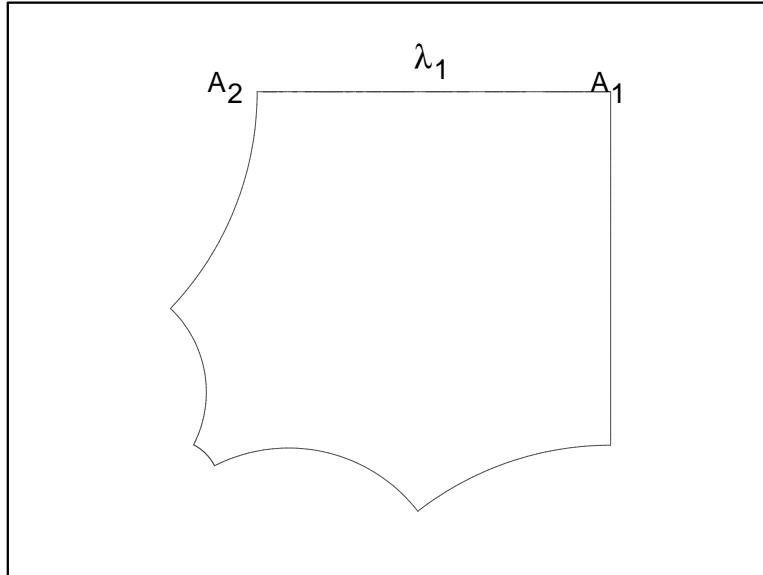
Construcción de un heptágono rectángulo convexo.

```
> unassign('S[1]', 'S[2]', 'S[3]', 'S[4]', 'S[5]', 'S[6]', 'C'):
> p:=7:cep(7);C:=table([seq(sqrt(1+S[i]^2),i=1..7)]):C[0]:=C[p]:S[0]:=S
> [p]:
      1 < S1 C2 S3 - C1 C3, 1 < (S1 C2 C3 - C1 S3) S4 - S1 S2 C4
> S[1]:=15/8;S[3]:=24/7;solve({cep(7)[1],S[2]>0});
      S1 := 15/8
      S3 := 24/7
      {319/360 < S2}
> S[2]:=12/5;solve({cep(7)[2],S[4]>0});
      S2 := 12/5
      {28/45 < S4}
> S[4]:=3/4;
      S4 := 3/4
> s6:=solve(eta(5,7)=eta(7,5)):if evalf(s6[1])>0 then s6[1] else s6[2]
> fi:S[6]:=s6:
> S[5]:=combine(solve(eta(4,7)=eta(7,4))):
> s7:=solve(eta(6,1)=eta(1,6)):if evalf(s7[1])>0 then s7[1] else s7[2]
> fi:S[7]:=s7:
> evalf(eval(P,M=A(2)));
      [-,6000000000, 0]
> TXA1:=display(
> {TEXT([0,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0,0], '1',ALIGNRIGHT)}):
```

```

> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.3,0.04],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE,Font(SYMBOL)),TEXT([-0.3,0.0
> 4], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.65,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.65,0], '2', ALIGNRIG
> HT)}):
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..7),TXA1,TXL1,TXA2
> });

```



```

> C[n]=seq(simplify(C[i]),i=1..7);

```

$$C_n = \left(\frac{17}{8}, \frac{13}{5}, \frac{25}{7}, \frac{5}{4}, \frac{297}{2945} \sqrt{2945}, \frac{63}{32}, \frac{807}{20615} \sqrt{2945} \right)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

```

> seq(simplify(A(i)),i=1..4);seq(simplify(A(i)),i=5..7);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-15}{8} & \frac{-17}{8} \\ \frac{17}{8} & \frac{15}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-39}{8} & \frac{-25}{8} \\ \frac{317}{40} & \frac{39}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-81}{8} & \frac{-265}{56} \\ \frac{175}{8} & \frac{81}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-297}{32} & \frac{-905}{224} \\ \frac{3451}{160} & \frac{297}{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{32} \sqrt{2945} & -\frac{9}{992} \sqrt{2945} \\ \frac{441}{3040} \sqrt{2945} & \frac{1}{32} \sqrt{2945} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{217} \sqrt{2945} \\ \frac{7}{95} \sqrt{2945} & 0 \end{bmatrix}$$

```

> seq(simplify(N(i)),i=1..7);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{17}{8} & \frac{15}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{-17}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{77}{10} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{73}{8} & \frac{225}{56} \\ -\frac{819}{40} & \frac{-73}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{63}{32} & \frac{95}{224} \\ -\frac{217}{32} & \frac{-63}{32} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{217} \sqrt{2945} \\ -\frac{7}{95} \sqrt{2945} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pueden elegirse otras medidas de los cuatro primeros lados, con las condiciones de convexidad, y construir un nuevo heptágono.

Construcción de un octógono rectángulo convexo.

```

> unassign('S[1]', 'S[2]', 'S[3]', 'S[4]', 'S[5]', 'S[6]', 'S[7]', 'S[8]', 'C')
> :
> p:=8:cep(8);C:=table([seq(sqrt(1+S[i]^2),i=1..8)]):C[0]:=C[p]:S[0]:=S
> [p]:

```

$$1 < S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3, 1 < (S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4,$$

$$1 < ((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) S_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) C_5$$

```

> S[1]:=15/8;S[3]:=24/7;solve({cep(8)[1],S[2]>0});

```

$$S_1 := \frac{15}{8}$$

$$S_3 := \frac{24}{7}$$

$$\left\{ \frac{319}{360} < S_2 \right\}$$

```

> S[2]:=12/5;solve({cep(8)[2],S[4]>0});

```

$$S_2 := \frac{12}{5}$$

$$\left\{ \frac{28}{45} < S_4 \right\}$$

```

> S[4]:=4/3;S5=solve({cep(8)[3],S[5]>0});

```

$$S_4 := \frac{4}{3}$$

$$S_5 = \left\{ \frac{15}{8} < S_5 \right\}$$

```

> S[5]:=35/12;

```

$$S_5 := \frac{35}{12}$$

```

> s7:=solve(eta(6,8)=eta(8,6)):if evalf(s7[1])>0 then s7[1] else s7[2]
> fi:S[7]:=s7:
> s6:=solve(eta(4,8)=eta(8,4)):if evalf(s6[1])>0 then s6[1] else s6[2]
> fi:S[6]:=s6:
> s8:=solve(eta(2,6)=eta(6,2)):if evalf(s8[1])>0 then s8[1] else s8[2]
> fi:S[8]:=s8:
> evalf(eval(P,M=A(2)));

```

$$[-,6000000000, 0]$$

```

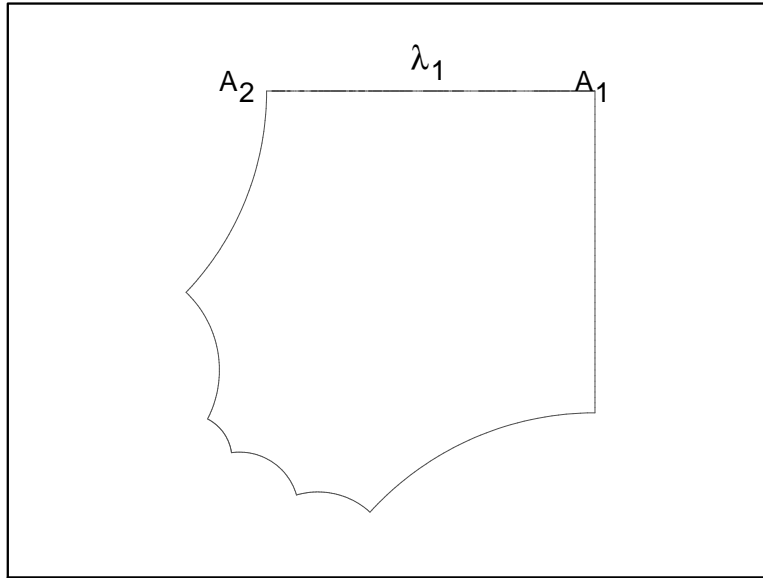
> TXA1:=display(
> {TEXT([0,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([0,0], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXL1:=display(
> {TEXT([-0.3,0.04],1,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE, FONT(SYMBOL)),TEXT([-0.3,0.0
> 4], '1', ALIGNRIGHT)}):
> TXA2:=display(
> {TEXT([-0.65,0],A,ALIGNLEFT,ALIGNABOVE),TEXT([-0.65,0], '2', ALIGNRIG
> HT)}):

```

```

> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..8),TXA1,TXL1,TXA2
> });

```



```

> C[n]=seq(simplify(C[i]),i=1..8);

```

$$C_n = \left(\frac{17}{8}, \frac{13}{5}, \frac{25}{7}, \frac{5}{3}, \frac{37}{12}, \frac{83}{1705} \sqrt{1705}, \frac{43}{12}, \frac{8917}{179025} \sqrt{1705} \right)$$

Vértices y vectores normales a los lados:

```

> seq(simplify(A(i)),i=1..4);seq(simplify(A(i)),i=5..8);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-15}{8} & \frac{-17}{8} \\ \frac{17}{8} & \frac{15}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-39}{8} & \frac{-25}{8} \\ \frac{317}{40} & \frac{39}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-81}{8} & \frac{-265}{56} \\ \frac{175}{8} & \frac{81}{8} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{-87}{8} & \frac{-255}{56} \\ \frac{3143}{120} & \frac{87}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-83}{12} & \frac{-65}{28} \\ \frac{3787}{180} & \frac{83}{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{12} \sqrt{1705} & \frac{-215}{9548} \sqrt{1705} \\ \frac{301}{900} \sqrt{1705} & \frac{1}{12} \sqrt{1705} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{-15}{2387} \sqrt{1705} \\ \frac{7}{75} \sqrt{1705} & 0 \end{bmatrix}$$

```

> seq(simplify(N(i)),i=1..4);seq(simplify(N(i)),i=5..8);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{17}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{-15}{8} & \frac{-17}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-77}{10} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{73}{8} & \frac{225}{56} \\ \frac{-819}{40} & \frac{-73}{8} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & \frac{15}{7} \\ \frac{-49}{3} & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{43}{12} & \frac{25}{28} \\ \frac{-2387}{180} & \frac{-43}{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{-15}{2387} \sqrt{1705} \\ \frac{-7}{75} \sqrt{1705} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pueden elegirse otras medidas de los cinco primeros lados, con las condiciones de convexidad, y construir un nuevo octógono.

Por este procedimiento pueden construirse nuevos polígonos rectángulos convexos.

```

> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";

```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

3.2. Polígonos hiperbólicos regulares rectángulos Relaciones y representación

Las expresiones utilizadas en el documento proceden del corolario 3.3.1.

> restart:

Relación entre la longitud del lado y el número de lados

Tanto para los polígonos rectángulos regulares convexos como para los estrellados, la fórmula para $C = ch\lambda$:

> C:=1+2*cos(2*k*Pi/p);

> S:=sqrt(C^2-1):

$$C := 1 + 2 \cos\left(2 \frac{k\pi}{p}\right)$$

siendo p el número de lados y $\frac{2k\pi}{p}$ el ángulo central abarcado por cada lado. Para que $1 < C$ tiene que cumplirse, además:

> k<p/4;

> theta<Pi-(2*k*Pi/p);

$$k < \frac{1}{4}p$$

$$\theta < \pi - 2 \frac{k\pi}{p}$$

Fórmulas generales de polígonos hiperbólicos rectángulos

Para la representación de los polígonos rectángulos utilizamos las fórmulas ya conocidas de documentos anteriores:

> alpha:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*C-B(j-1

> mod p,i mod p)*S) fi:

> delta:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (alpha(i mod p,j-1 mod p)*S-B(j-1

> mod p,i mod p)*C) fi:

> B:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (delta(j-1 mod p,i mod p)) fi:

> eta:=(i,j)->if (i=j) then -1 else (Phi(i mod p,j-1 mod p)) fi:

> Phi:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*S+g(i mod

> p,j mod p)*C) fi:

> Delta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (Delta(i mod p,j-1 mod p)*C+g(i

> mod p,j mod p)*S) fi:

> g:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (-eta(i mod p,j-1 mod p)) fi:

> beta:=(i,j)->if (i=j) then 0 else (beta(i mod p,j-1 mod

> p)*C+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*S) fi:

> epsilon:=(i,j)->if (i=j) then 1 else (Gamma(j-1 mod p,i mod p))fi:

> Gamma:=(j,i)->if (i=j) then 0 else (-(beta(i mod p,j-1 mod

> p)*S+epsilon(i mod p,j-1 mod p)*C)) fi:

El origen, centro del polígono

Con el fin de centrar el polígono en el origen del disco, se calcula la distancia d del centro del polígono a cada vértice:

$$\operatorname{ch} d = \cot \frac{k\pi}{p}$$

y, considerando el polígono rectángulo con el primer vértice en $(0,0)$ y el primer lado en la semirrecta $[0, -1]$, se define la transformación:

$$R = T_d G_\phi$$

siendo G_ϕ el giro de ángulo $\phi = -\frac{\pi}{4}$ alrededor del origen y T_d la traslación que transforma el nuevo centro del polígono en el origen.

Es decir:

```
> e:=exp(1):d:=arccosh(cot(k*Pi/p)):
> R:=evalm(e^(-d/2)*matrix([[cos(Pi/8)*e^d,-sin(Pi/8)*e^d],[sin(Pi/8),cos(Pi/8)]])):
```

Vértices y vectores normales a los lados

Si $E(1)$ es la matriz X_0 del origen y $H(1)$ es el vector normal a la geodésica orientada $[1, -1]$, los vértices y los vectores normales a los lados del polígono rectángulo definitivo se definen:

```
> E(1):=matrix([[0,-1],[1,0]]);
> H(1):=matrix([[1,0],[0,-1]]);

E(1) := [ 0  -1 ]
         [ 1   0 ]

H(1) := [ 1   0 ]
         [ 0  -1 ]

> A:=n->'if'(n<=p/2+1,evalm(alpha(1,n)*A(1)+Delta(1,n-1)*N(1)+beta(1,n)
> *(A(1)&*N(1))),evalm(alpha(n,1)*A(1)+delta(1,n)*N(1)+B(1,n)*(A(1)&*N(1)
> ))):
> A(1):=evalm(R&*E(1)&*R^(-1)):
> N:=n->'if'(n<p/2+1,evalm(-delta(n,1)*A(1)-eta(1,n)*N(1)+Gamma(n,1)*(A
> (1)&*N(1))),evalm(-Delta(n,p)*A(1)-eta(n,1)*N(1)+g(n,1)*(A(1)&*N(1))):
> N(1):=evalm(R&*H(1)&*R^(-1)):
```

Proyección en el disco de Poincaré y geodésicas de los lados

Las siguientes definiciones permiten representar el polígono en el disco de Poincaré.

```
> P:=[(2*M[1,1]*M[2,1])/(M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2),(M[1,1]^2+1-M[2,1]^2)/(
> M[1,1]^2+(1+M[2,1])^2)];
```

```

> Gp:=n->eval(P,M=evalm(A(n)*cosh(t)+A(n)&*N(n)*sinh(t)));

```

$$P := \left[2 \frac{M_{1,1} M_{2,1}}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2}, \frac{M_{1,1}^2 + 1 - M_{2,1}^2}{M_{1,1}^2 + (1 + M_{2,1})^2} \right]$$

```

Gp := n -> P
M = evalm(A(n) cosh(t) + (A(n) &* N(n)) sinh(t))
> gp:=n->[Gp(n) [1],Gp(n) [2],t=0..arccosh(C)]:
> C0:=plot([cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],axes=none,scaling=constrained):
> with(plots):

```

Construcción de polígonos rectángulos regulares

Para ver con más claridad cada representación puede seleccionarse y pulsar **Ctrl+4** (se vuelve al tamaño original con **Ctrl+2**)

Polígonos rectángulos convexos:

```

> p:=5:k:=1:
> C5_1=evalf(C);

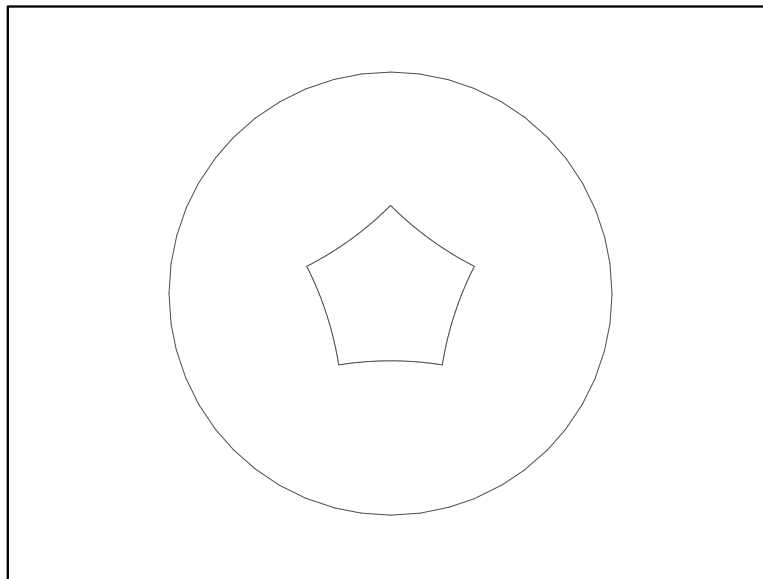
```

$$C5_1 = 1,618033989$$

```

> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..5)});

```



```

> p:=12:k:=1:
> C12_1=evalf(C);

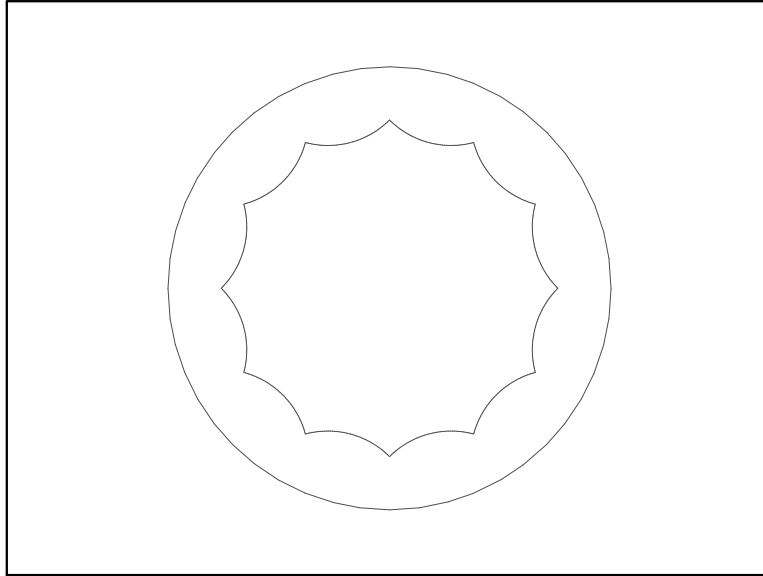
```

$$C12_1 = 2,732050808$$

```

> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..12)});

```

Polígonos rectángulos estrellados:

El valor de k debe ser primo con p y $1 < k < p/4$.

Por ejemplo, para:

$p = 9$ y $k = 2$; $p = 11$ y $k = 2$;

$p = 13$ y $k = 2, 3$; $p = 14$ y $k = 3$; $p = 15$ y $k = 2$;

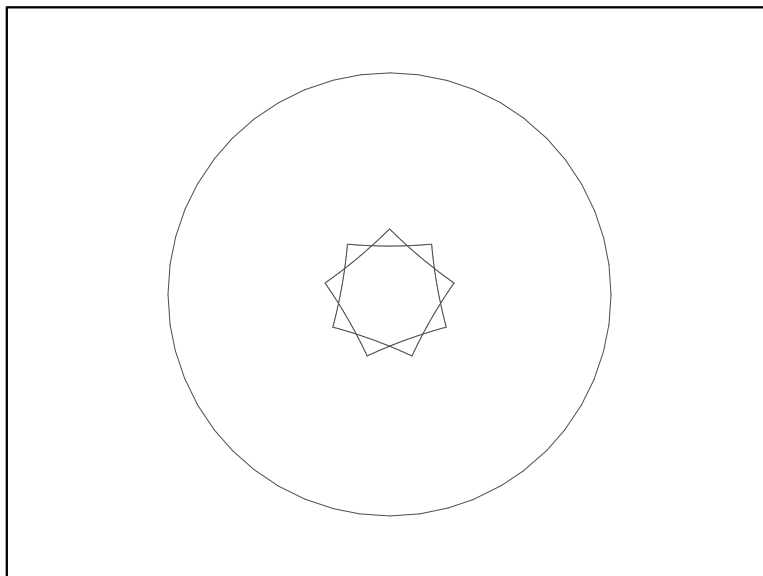
y así sucesivamente.

> `p:=9:k:=2:`

> `C9_2=evalf(C);`

$C9_2 = 1,347296355$

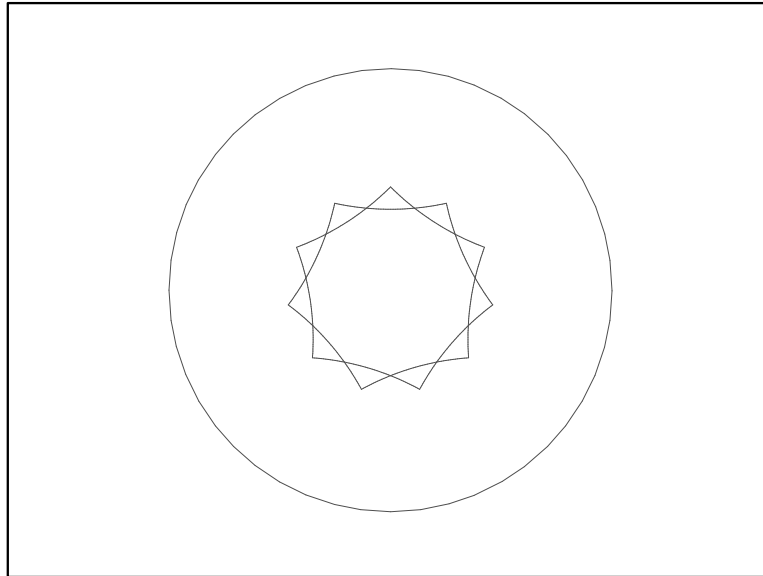
> `display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..9)});`



```

> p:=11:k:=2:
> C11_2=evalf(C);
          C11_2 = 1,830830025
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..11)});

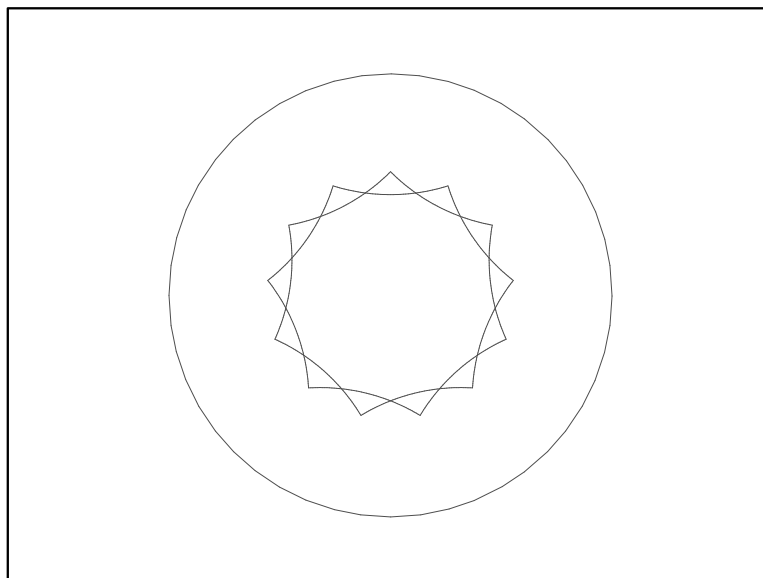
```



```

> p:=13:k:=2:
> C13_2=evalf(C);
          C13_2 = 2,136129493
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained),i=1..13)});

```



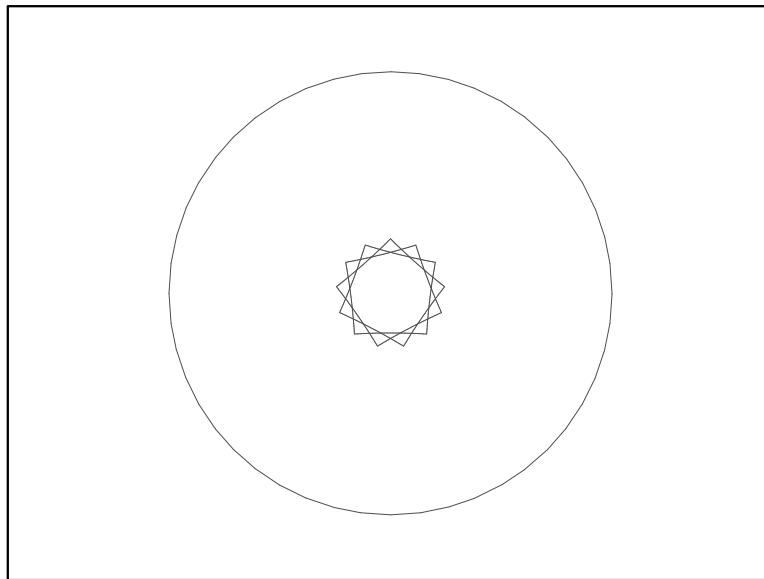
```

> p:=13:k:=3:
> C13_3=evalf(C);

```

$C13_3 = 1,241073361$

```
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..13)});
```



De modo análogo puede construirse cualquier otro polígono rectángulo regular convexo o estrellado, con las limitaciones propias del programa y de la memoria del ordenador utilizado.

```
> "FIN DE LA HOJA. SALIR SIN GUARDAR";  
"FIN DE LA HOJA. SALIR SIN GUARDAR"
```

4.1. Región Fundamental canónica de una superficie orientable de género 3 sin borde

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 2.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones previas.

Las fórmulas de la hoja 2.0 pueden utilizarse para resolver polígonos de p lados, convexos o no, dados $2p-3$ elementos. Si se desea resolver un dodecágono convexo, con las inecuaciones del teorema 2.2.3 incluidas en la hoja 2.0, es posible delimitar las medidas de tales elementos, con ciertas condiciones prefijadas, que garanticen la convexidad del dodecágono.

Al final se resuelve un ejemplo de dodecágono que es una *región fundamental canónica de una superficie orientable de género 3 sin borde*, teniendo en cuenta las orientaciones de la sección 4.2 de la Memoria.

Construcción de la región fundamental dodecagonal.

Las longitudes de los lados son tales que: $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_4$, $\lambda_5 = \lambda_7$, $\lambda_6 = \lambda_8$, $\lambda_9 = \lambda_{11}$, $\lambda_{10} = \lambda_{12}$

Y los ángulos cumplen $\theta_2 = \tau$, $\theta_3 = \pi - \tau$, $\theta_4 = \tau$, $\theta_1 + (\sum_{i=5}^{12} \theta_i) = \pi - \tau$.

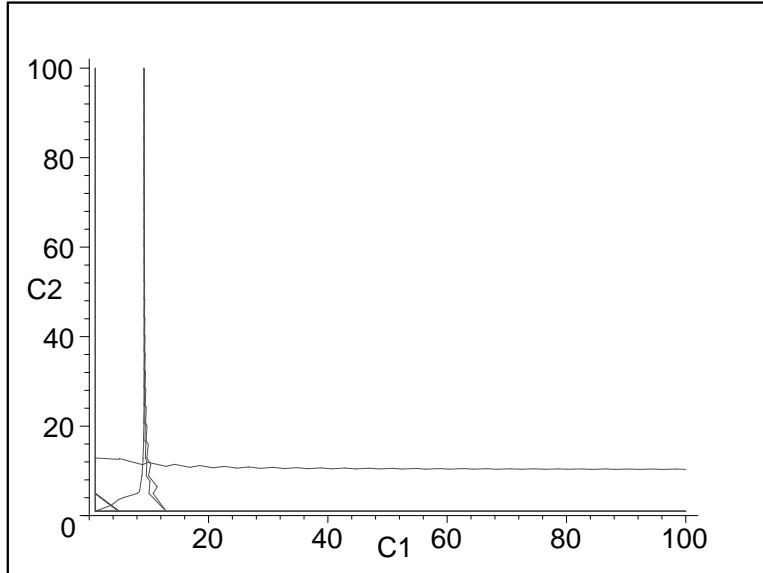
Resolución del dodecágono.

```
> A(1):=matrix([[0, -30], [1/30, 0]]):N(1):=matrix([[cos(a1*Pi/360),
> 30*sin(a1*Pi/360)], [1/30*sin(a1*Pi/360), -cos(a1*Pi/360)]):
> with(plots):
> p:=12:
> ang:=table([a1,tau,180-tau,tau,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12]):
> tau:=30:a1:=23:a5:=20:a6:=18:a7:=15:a8:=16:a9:=14:a10:=19:a11:=13:a12:=12:
> sum(ang[i],i=1..12);
> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> C[3]:=C[1]:C[4]:=C[2]:C[7]:=C[5]:C[8]:=C[6]:C[11]:=C[9]:C[12]:=C[10]:
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
```

```

> display(
> {seq(implicitplot(rhs(c1a(p) [i]),C[1]=1..100,C[2]=1..100,labels=[C1,
> C2]),i=1..3)},
> {seq(implicitplot(rhs(c1b(p) [i]),C[1]=1..100,C[2]=1..100,labels=[C1,
> C2]),i=1..3)});

```

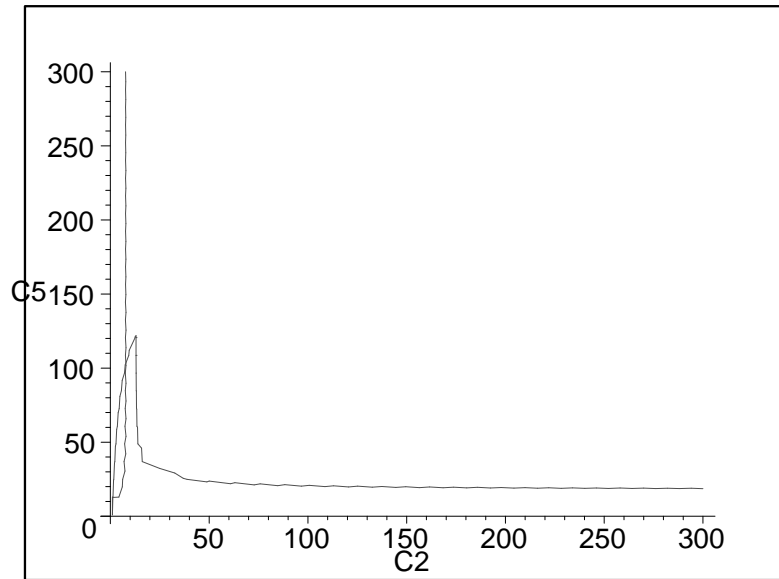


```

> cnc123:=evalf({seq(c1a(p) [i],i=1..3),seq(c1b(p) [i],i=1..3)}):
> eval(cnc123,[C[1]=20,C[2]=40]);

      {0 < 62,547524568523319387, 0 < 1910,7083240059727333,
      0 < 4176,553102259593715, 0 < 23,16772647192832657,
      0 < 4969,4426992938164563, 0 < 829,81588133085375315}
> solve(eval(evalf(rhs(c1b(p) [3])),C[2]=10^15),C[1]);
      9,1990653232329947456, -1,0381533377568242791
> 'Tiene que ser: C[1]>9.2';
      Tiene que ser : C[1] > 9,2
> C[1]:=23.;
      C1 := 23.
> C2in:=solve(
> {evalf(seq(c1a(p) [i],i=1..3)),evalf(seq(c1b(p) [i],i=1..3))});
      C2in := {11,041987958164836291 < C2}
> display(
> {implicitplot(rhs(c1a(p) [4]),C[2]=1..300,C[5]=1..300,labels=[C2,C5]),
> implicitplot(rhs(c1b(p) [4]),C[2]=1..300,C[5]=1..300,labels=[C2,C5])});

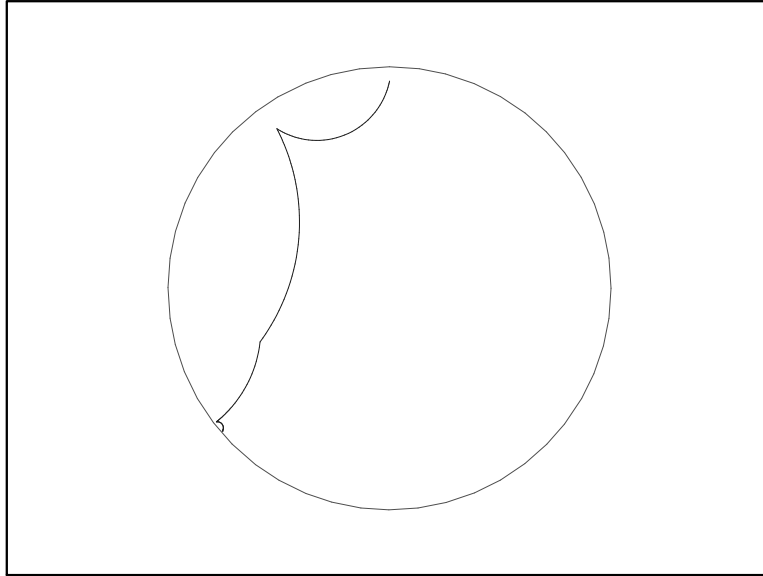
```



```

> cnc4:=evalf({c1a(p) [4], c1b(p) [4]}):
> eval(cnc4, [C[2]=80,C[5]=80]);eval(cnc4, [C[2]=30,C[5]=80]);
      {0 < 89009,361438852848243, 0 < 91306,8709990457623}
      {0 < 5761,6931256076876984, 0 < 6695,76854714804041}
> solve(eval(evalf(rhs(c1b(p) [4])), C[5]=10^15), C[2]);
      11,185856170394181833, 11,040066621337143695, 1,1193922050135736660
> C2in;
      {11,041987958164836291 < C2}
> C[2]:=15.;
      C2 := 15.
> C5in:=solve(evalf({c1a(p) [4], c1b(p) [4]}));
      C5in := {68,336314454734267544 < C5}
> C0:=plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi]):
> display(C0,
> {seq(plot(gp(i), axes=none, scaling=constrained, color=blue), i=1..4)});

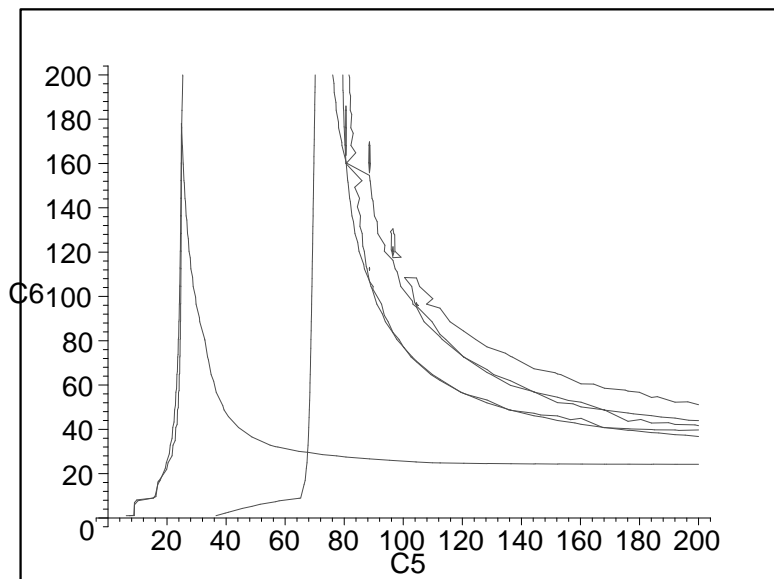
```



```

> display(
> {seq(implicitplot(evalf(rhs(c1a(p)[i])),C[5]=1..200,C[6]=1..200,labels=
> [C5,C6]),i=5..7)},
> {seq(implicitplot(evalf(rhs(c1b(p)[i])),C[5]=1..200,C[6]=1..200,labels=
> [C5,C6]),i=5..7)});

```



```

> cnc567:=evalf({seq(c1a(p)[i],i=5..7),seq(c1b(p)[i],i=5..7)}):

```

```

> C5in;

```

$$\{68,336314454734267544 < C_5\}$$

```

> eval(cnc567,[C[5]=140,C[6]=140]);

```

```

{0 < 1555,5899921518218264, 0 < 1709,38477531597541, 0 < 655,50422439562555348,
0 < 830,859742861140395, 0 < 3684,2173135102239281,
0 < 4597,48776480835353}

```

```

> solve(eval(evalf(rhs(c1b(p)[7])),C[6]=10^15),C[5]);

27,032550692130144511 + ,11685590599067980098 10-5 I, 70,178122006216623127,
27,032550692130144511 - ,11685590599067980098 10-5 I,
68,312715889052810641
> C[5]:=120;

C5 := 120

> C6in:=solve(cnc567,C[6]);

C6in := {86,265511792455845785 < C6}

> e610:=evalf(expand(eta(9,11)-eta(11,9)));

e610 := -44635,079130978625910 C62 - 24877,64034057853803 C6
+ 21463,278703179651524 C10 + 24862,755392707304214 %2
- 23050,645249316862968 C6 C10 - 22020,055889618206518 %1
+ 23036,532404224783 %2 C10 - 23634,938466863618540 %2 %1
- 42443,229131452010584 %2 C6 %1 + 42443,150261452912460 %1 C62
+ 44635,159122352655621 %2 C6 - 41369,176295906628887 C10 C62
+ 41369,253311393654573 %2 C6 C10 + 23649,40153714782171 C6 %1
+ 23149,33796621948371
%1 :=  $\sqrt{C_{10}^2 - 1}$ .
%2 :=  $\sqrt{C_6^2 - 1}$ .

> e69:=evalf(expand(eta(10,12)-eta(12,10)));

e69 := -43146,143189458145265 C62 - 24047,772587132592105 C6
+ 30351,458507478680713 C9 + 24033,38417100958705 %1
- 61410,04763007011131 %2 C62 - 2624,4623553340102995 C9 %1
- 59585,799981017260195 C9 C62 + 544,5143587798627543 %2 C6
+ 61409,9375761532925 %2 C6 %1 + 30091,3681493571172 %2
- 528,106949185260 %2 %1 + 43146,220512481764530 %1 C6
+ 59585,906765862410379 C9 %1 C6 + 2608,7879083341613066 C9 C6
+ 22377,060358618445050
%1 :=  $\sqrt{C_6^2 - 1}$ .
%2 :=  $\sqrt{C_9^2 - 1}$ .

> e6:=evalf(expand(eta(9,12)-eta(12,9)));

e6 := 45632,253350612354954 C62 + 25433,421624625323298 C6
- ,044221860343534369972 C9 - ,071636497634716846410 C10
- 25418,204138164110291  $\sqrt{C_6^2 - 1}$ . - ,065954549880094252379 C9 C10
+ ,067689425469604873760  $\sqrt{C_{10}^2 - 1}$ .  $\sqrt{C_9^2 - 1}$ . - 23666,54866145885136
- 45632,335129041264063  $\sqrt{C_6^2 - 1}$ . C6
> C10:=solve(e610,C[10]);
> C101:=C10[1]:C102:=C10[2]:

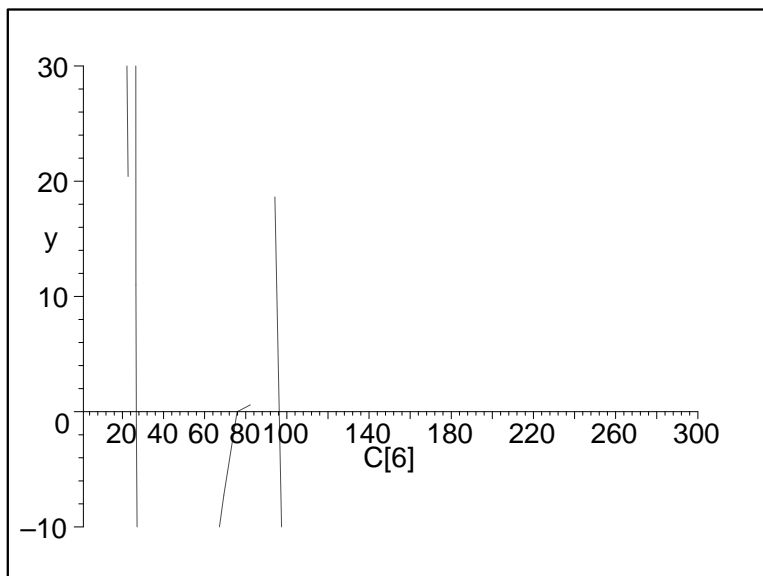
```



```

> C9:=solve(e69,C[9]):
> C91:=C9[1]:C92:=C9[2]:
> e11:=eval(e6,[C[9]=C91,C[10]=C101]):
> plot(e11,C[6]=1..300,y=-10..30);

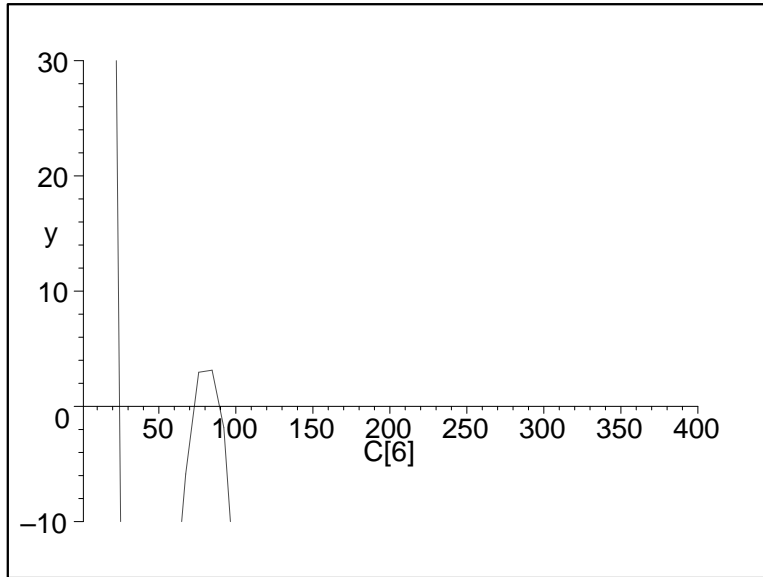
```



```

> C6in;
      {86,265511792455845785 < C6}
> evalf([eval(e11,C[6]=95.29909),eval(e11,C[6]=96.)]);
      [-,311605381942 10-5, -4,71321826106618534]
> eval([C[6],C[9]=C91,C[10]=C101],C[6]=95.29909);
      [95,29909, C9 = 143,75712737198998851, C10 = 86,154943585131819904]
> evalf(eval({alpha(1,6)=alpha(6,1),alpha(4,9)=alpha(9,4)},[C[6]=95.29909,
> C[9]=143.75824014666316220, C[10]=86.154921538677202645]));
      {1335,8333560757874309 = 1335,8339664280116245,
      1832,32796002712787 = 1832,3501678769967237}
> e12:=eval(e6,[C[9]=C91,C[10]=C102]):
> plot(e12,C[6]=1..400,y=-10..30);

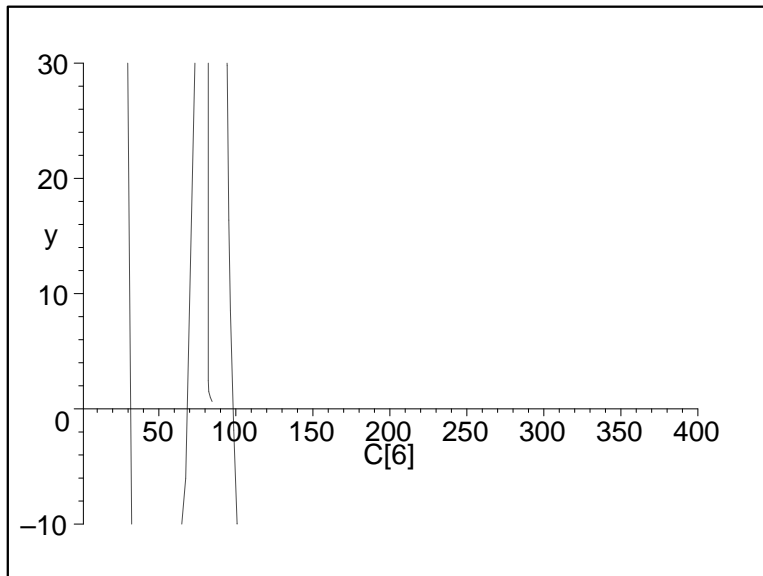
```



```

> C6in;
      {86,265511792455845785 < C6}
> evalf([eval(e12,C[6]=88.),eval(e12,C[6]=89.)]);
      [-,09582647155 + ,4711179415391234829 I,
      ,15121379006 + ,39581752624372916408 I]
> e21:=eval(e6, [C[9]=C92,C[10]=C101]);
> plot(e21,C[6]=1..400,y=-10..30);

```



```

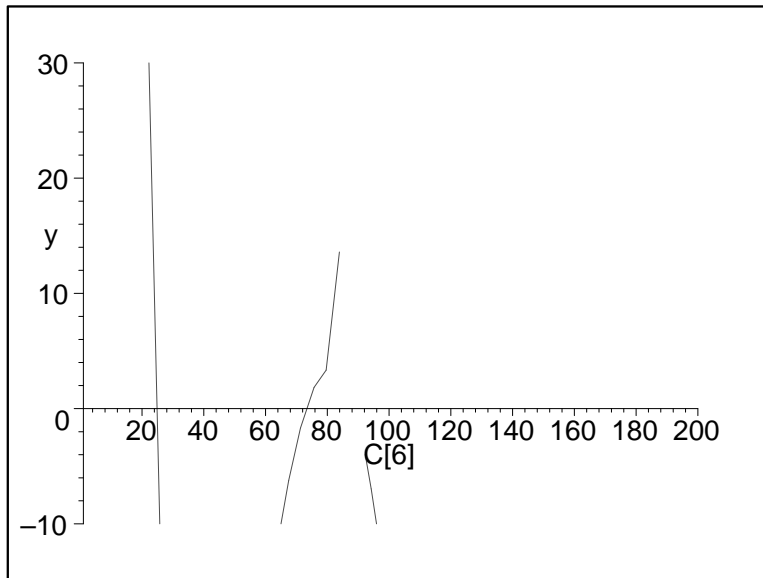
> C6in;
      {86,265511792455845785 < C6}
> evalf([eval(e21,C[6]=98.192),eval(e21,C[6]=98.193)]);

```

```

[.0037701868690152773, -.0005128370457742405]
> eval([C[6],C[9]=C92,C[10]=C101],C[6]=98.193);
      [98,193, C9 = -2,3075787982028257676, C10 = 65,516846625678205735]
> e22:=eval(e6, [C[9]=C92,C[10]=C102]):
> plot(e22,C[6]=1..200,y=-10..30);

```



```

> C6in;
      {86,265511792455845785 < C6}
> C[6]:=95.29909;C[9]:=143.7582401466631622;C[10]:=86.15492153867720264;
      C6 := 95,29909
      C9 := 143,7582401466631622
      C10 := 86,15492153867720264
> L:=i->eval(P,M=evalm((A(i)))):
> v1:=textplot([L(1)[1],L(1)[2], '1', font=[TIMES,BOLD,8], align=ABOVE):
> v4:=textplot([L(4)[1],L(4)[2], '4', font=[TIMES,BOLD,8], align=LEFT):
> v7:=textplot([L(7)[1],L(7)[2], '7', font=[TIMES,BOLD,8], align=BELOW):
> v10:=textplot([L(10)[1],L(10)[2], '10', font=[TIMES,BOLD,8], align=RIGHT):

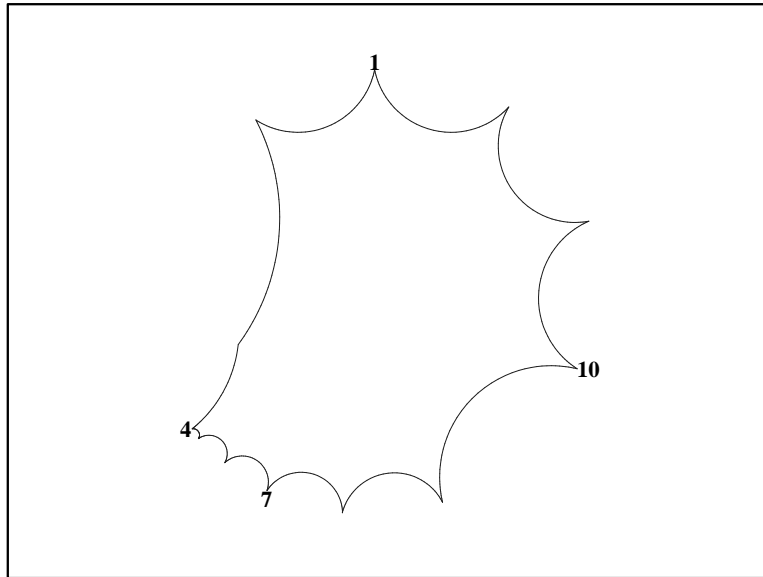
```

Una solución.

```

> display(v1,v4,v7,v10,
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});

```



Una solución aproximada es, por tanto:

```
> Ci=seq(C[i],i=1..12);
```

```
      Ci = (23, 15, 23, 15, 120, 95,29909, 120, 95,29909, 143,7582401466631622,
            86,15492153867720264, 143,7582401466631622, 86,15492153867720264)
```

```
> theta=seq(ang[i],i=1..12);
```

```
      θ = (23, 30, 150, 30, 20, 18, 15, 16, 14, 19, 13, 12)
```

```
> sum(ang[i],i=1..12);
```

```
      360
```

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

```
“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”
```

4.2. Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller a partir de una Región Fundamental Canónica

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, es posible que se produzcan algunas variaciones que exijan replantearse el estudio, aunque finalmente se obtengan los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 2.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones previas.

Partiendo de una región fundamental canónica, con lados tales que:

$$\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4, \lambda_5 = \lambda_7, \lambda_6 = \lambda_8, \lambda_9 = \lambda_{11}, \lambda_{10} = \lambda_{12}$$

y ángulos:

$$\theta_2 = \tau, \theta_3 = \pi - \tau, \theta_4 = \tau, \theta_1 + (\sum_{i=5}^{12} \theta_i) = \pi - \tau.$$

se describen las fases que permiten obtener una región de Schmutz Schaller, de modo que:

$$\theta_2 = \theta_8 \text{ y } \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \theta_9 + \theta_{11} + \theta_1 = \pi, \theta_3 + \theta_5 + \theta_7 + \theta_8 + \theta_{10} + \theta_{12} = \pi$$

y se construye dicha región. Se han tenido en cuenta las orientaciones de la sección 4.2 de la Memoria.

Se considera la región canónica de la hoja 4.1:

Asignación de valores.

```
> A(1):=matrix([[0, -30], [1/30, 0]]):N(1):=matrix([[cos(a1*Pi/360),  
> 30*sin(a1*Pi/360)], [1/30*sin(a1*Pi/360), -cos(a1*Pi/360)]]):  
> with(plots):  
> C0:=plot([cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],axes=None,scaling=constrained):  
> p:=12:  
> ang:=table([a1,tau,180-tau,tau,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12]):
```

Medidas de los ángulos:

```
> tau:=30:a1:=23:a5:=20:a6:=18:a7:=15:a8:=16:a9:=14:a10:=19:a11:=13:a12:=12:  
> sum(ang[i],i=1..12);
```

```

> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> C[3]:=C[1]:C[4]:=C[2]:C[7]:=C[5]:C[8]:=C[6]:C[11]:=C[9]:C[12]:=C[10]:
Se conoce una solución:
> C[1]:=23;C[2]:=15;C[5]:=120;
> C[6]:=95.29909;C[9]:=143.75824014666316220;C[10]:=86.154921538677202645;
      C1 := 23
      C2 := 15
      C5 := 120
      C6 := 95,29909
      C9 := 143,75824014666316220
      C10 := 86,154921538677202645
> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> L:=i->eval(P,M=evalm((A(i)))):
> v1:=textplot([L(1)[1],L(1)[2], '1'],font=[TIMES,BOLD,6],align=ABOVE):
> v4:=textplot([L(4)[1],L(4)[2], '4'],font=[TIMES,BOLD,6],align=LEFT):
> v7:=textplot([L(7)[1],L(7)[2], '7'],font=[TIMES,BOLD,6],align=BELOW):
> v10:=textplot([L(10)[1],L(10)[2], '10'],font=[TIMES,BOLD,6],align=RIGHT):

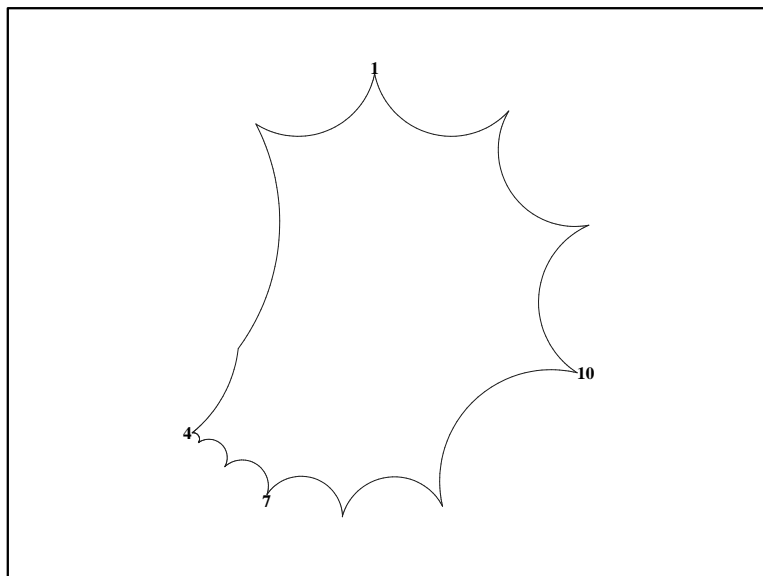
```

Representación de la región canónica.

```

> display(v1,v4,v7,v10,
> {seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});

```



Una solución aproximada es:

```
> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),5);
      Cn = (23., 15., 23., 15., 120., 95,299, 120., 95,299, 143,76, 86,155, 143,76, 86,155)
> theta[n]=seq(ang[i],i=1..12);
      θn = (23, 30, 150, 30, 20, 18, 15, 16, 14, 19, 13, 12)
> sum(ang[i],i=1..12);
```

360

Primer paso: Se corta por los vértices 3-6. Calculamos la distancia $\lambda = d(A_3, A_6)$ y los ángulos θ_{3a} , θ_{3b} , θ_{6a} , θ_{6b} .

Cálculos previos.

```
> with(linalg):c(lambda):=evalf(-1/2*trace(evalm(A(3)&*A(6))));
      c(λ) := 31,432056795099630759
> m(lambda):=evalf(evalm(1/(2*sqrt(c(lambda)^2-1))*(A(6)&*A(3)-A(3)&*A(
> 6))));
> det(%);
> k[3,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(2)&*m(lambda))));
> k[3,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(3)&*m(lambda))));
> k[6,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(5)&*m(lambda))));
> k[6,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(6)&*m(lambda))));
      m(λ) :=  $\begin{bmatrix} 2,1306222729560925945 & 1,1591152433943668021 \\ -3,0536663978765260856 & -2,1306222729560925945 \end{bmatrix}$ 
      -,9999999999967374671
      k3,a := -,46571020820486771
      k3,b := ,8457855146206021
      k6,a := ,988029208791062
      k6,b := ,987342717228947
```

Comprobaciones:

```
> ang[3]=evalf((arccos(k[3,a])+arccos(k[3,b]))*180/Pi);
> ang[6]=evalf((arccos(k[6,a])+arccos(k[6,b]))*180/Pi);
      150 = 150,00000000009893412
      18 = 18,000000000358200603
> evalf(simplify(A(3)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[3,a]^2))*(N(2)&*m(
> lambda)-m(lambda)&*N(2))));
> evalf(simplify(A(6)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[6,b]^2))*(m(lambda)&*
> N(6)-N(6)&*m(lambda))));
```

$$\begin{bmatrix} -1,949423538563071697 & -1,5273685282588039 \\ 3,1428250902721196650 & 1,949423538563071697 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,94942353855901090 & -1,52736852825562162 \\ 3,1428250902655727708 & 1,94942353855901090 \end{bmatrix}$$

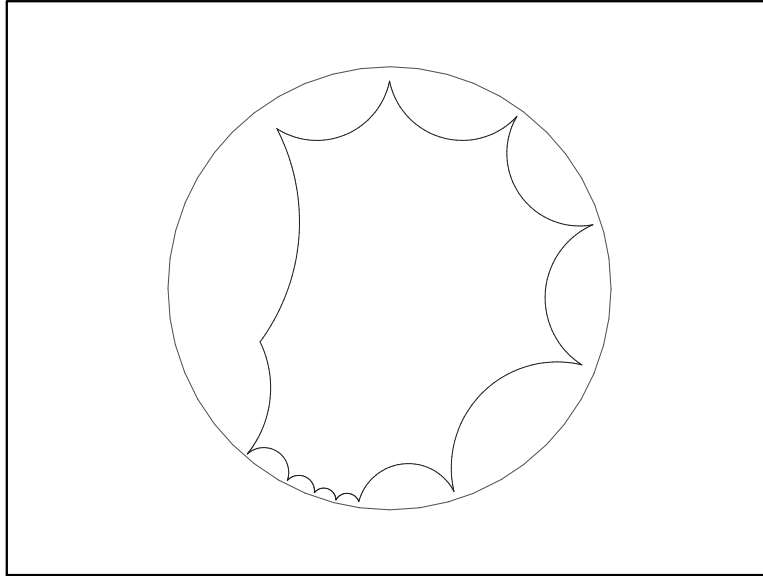
$$\begin{bmatrix} -45,23366122677631 & -16,760615053579 \\ 122,13657442952667 & 45,233661226776303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,233661216335625 & -16,76061504970925933 \\ 122,13657440146555660 & 45,233661216335625 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los elementos de la segunda región.

```
> C[4]:=C[6];C[6]:=C[1];C[7]:=C[2];C[8]:=C[4];C[3]:=c(lambda);C[5]:=C[3];
      C4:=95,29909
      C6:=23
      C7:=15
      C8:=95,29909
      C3:=31,432056795099630759
      C5:=31,432056795099630759
> ang[6]:=evalf(arccos(k[3,b])*180/Pi);ang[8]:=ang[8]+ang[5];
      ang6:=32,243804808902534402
      ang8:=36
> ang[5]:=evalf(ang[7]+arccos(k[6,a])*180/Pi);ang[7]:=ang[4];
      ang5:=23,874282496907656173
      ang7:=30
> ang[3]:=evalf(arccos(k[3,a])*180/Pi);ang[4]:=evalf(arccos(k[6,b])*180/Pi);
      ang3:=117,75619519119639971
      ang4:=9,1257175034505444298
> sum(ang[n],n=1..12);
      360,0000000045713471
> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
```

Representación de la segunda región:

```
> display(
> {C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});
```

Elementos de la segunda región:

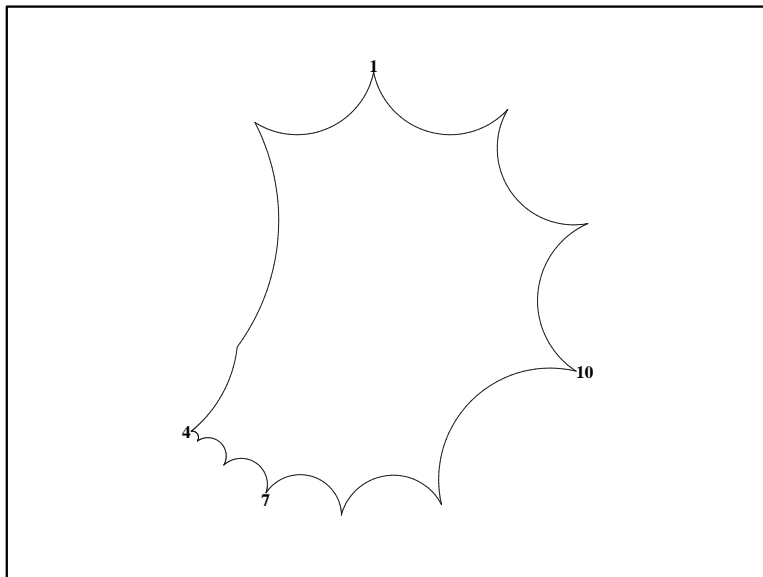
```
> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),5);
```

```
 $C_n = (23., 15., 31,432, 95,299, 31,432, 23., 15., 95,299, 143,76, 86,155, 143,76, 86,155)$ 
```

```
> theta[n]=evalf(seq(ang[i],i=1..12),5);
```

```
 $\theta_n = (23., 30., 117,76, 9,1257, 23,874, 32,244, 30., 36., 14., 19., 13., 12.)$ 
```

Que puede compararse con la región canónica original:



Segundo paso: Se corta por los vértices 4-6. Calculamos la distancia $\mu = d(A_4, A_6)$ y los ángulos θ_{4a} , θ_{4b} , θ_{6a} , θ_{6b} .

Cálculos previos.

```
> c(mu):=evalf(-1/2*trace(evalm(A(4)&*A(6))));
          c(mu) := 257,84055935314302354
> m(mu):=evalf(evalm(1/(2*sqrt(c(mu)^2-1))*(A(6)&*A(4)-A(4)&*A(6))));
          m(mu) :=  $\begin{bmatrix} 2,8409075163294553834 & ,68242631733932791158 \\ -10,361199937167002439 & -2,8409075163294553834 \end{bmatrix}$ 
> det(%);
          -,999999999998415814
> k[4,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(3)&*m(mu))));
> k[4,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(4)&*m(mu))));
          k4,a := ,9939627209551261
          k4,b := ,998783316921003
> k[6,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(5)&*m(mu))));
> k[6,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(6)&*m(mu))));
          k6,a := ,988749105009622
          k6,b := ,916075889759258
```

Comprobaciones:

```
> ang[4]=evalf((arccos(k[4,a])+arccos(k[4,b]))*180/Pi);
> ang[6]=evalf((arccos(k[6,a])+arccos(k[6,b]))*180/Pi);
          9,1257175034505444298 = 9,1257175035680084590
          32,243804808902534402 = 32,243804782167150413
> evalf(simplify(A(4)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[4,a]^2))*(N(3)&*m(mu)
> -m(mu)&*N(3))));
           $\begin{bmatrix} -45,233661226692624200 & -16,760615053544970000 \\ 122,13657442948239662 & 45,233661226692624200 \end{bmatrix} =$ 
           $\begin{bmatrix} -45,233661226384974 & -16,760615053430956 \\ 122,13657442865173055 & 45,233661226384974 \end{bmatrix}$ 
> evalf(simplify(A(6)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[6,b]^2))*(m(mu)&*N(6)
> -N(6)&*m(mu))));
```

$$\begin{bmatrix} -20,257337926337639520 & -3,6161031083374500000 \\ 113,75774626393752962 & 20,257337926337639520 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -20,25733792368094 & -3,61610310764099421 \\ 113,75774625371211691 & 20,25733792368094 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los elementos de la tercera región.

```

> C[4]:=c(mu);C[5]:=C[1];C[6]:=C[2];C[7]:=C[3];C[8]:=C[4];
      C4 := 257,84055935314302354
      C5 := 23
      C6 := 15
      C7 := 31,432056795099630759
      C8 := 257,84055935314302354
> ang[4]:=evalf(arccos(k[4,a])*180/Pi);ang[6]:=ang[7];
      ang4 := 6,2990781090572610195
      ang6 := 30
> ang[7]:=ang[8]+ang[5];ang[5]:=evalf(arccos(k[6,b])*180/Pi);
      ang7 := 59,874282496907656173
      ang5 := 23,641017352903687528
> ang[8]:=evalf(arccos(k[6,a])*180/Pi);
      ang8 := 8,6027874292634628849
> ang[9]:=evalf(ang[9]+arccos(k[4,b])*180/Pi);
      ang9 := 16,826639394510747439
> sum(ang[n],n=1..12);
      359,99999997383921475
> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

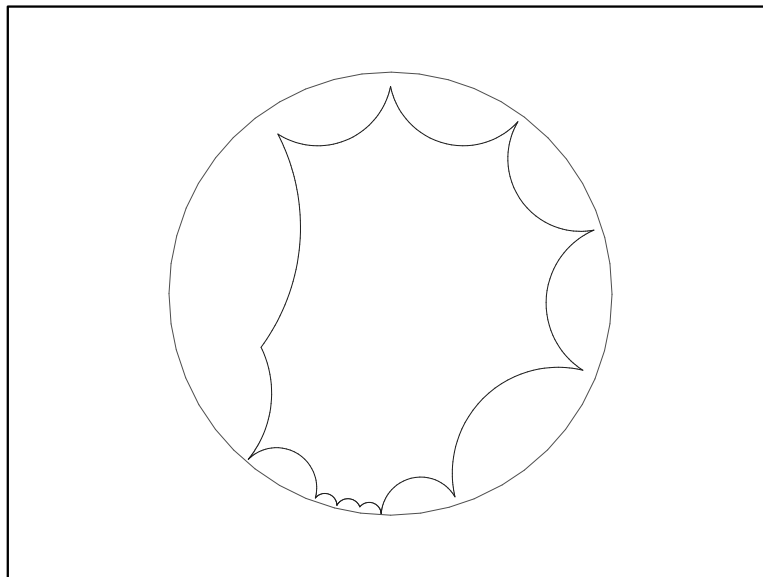
```

Representación de la tercera región.

```

> display(
> {C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});

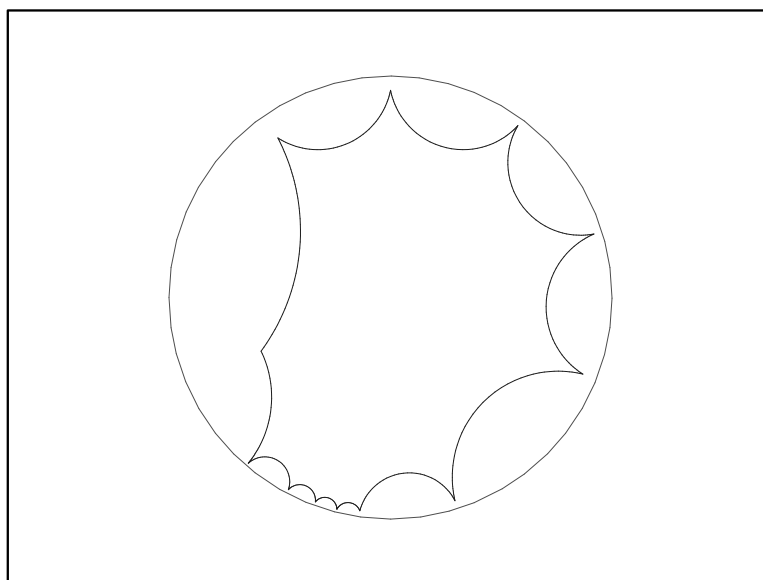
```



Elementos de la tercera región:

```
> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),5);
Cn = (23., 15., 31,432, 257,84, 23., 15., 31,432, 257,84, 143,76, 86,155, 143,76, 86,155)
> theta[n]=evalf(seq(ang[i],i=1..12),5);
θn = (23., 30., 117,76, 6,2991, 23,641, 30., 59,874, 8,6028, 16,827, 19., 13., 12.)
```

Que puede compararse con el segundo dodecágono:



Tercer paso: Se corta por los vértices 5-10. Calculamos la distancia $\nu = d(A_5, A_{10})$ y los ángulos $\theta_{5a}, \theta_{5b}, \theta_{10a}, \theta_{10b}$.

Cálculos previos.

```
> c(nu):=evalf(-1/2*trace(evalm(A(5)&*A(10))));
c(ν) := 845,97956403300591446
> m(nu):=evalf(evalm(1/(2*sqrt(c(nu)^2-1))*(A(10)&*A(5)-A(5)&*A(10))));
m(ν) := [ -58468690766802099476  -28233484976967449544 ]
          [ -2,3310661809497139117   58468690766802099476 ]
> det(%);
-99999999999999924843
> k[5,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(4)&*m(nu))));
> k[5,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(5)&*m(nu))));
k5,a := ,9937679715379867
k5,b := ,955066284276580
> k[10,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(9)&*m(nu))));
> k[10,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(10)&*m(nu))));
```

$k_{10,a} := ,9973482797972942$

$k_{10,b} := ,9667050129395797$

Comprobaciones:

> ang[5]=evalf((arccos(k[5,a])+arccos(k[5,b]))*180/Pi);

> ang[10]=evalf((arccos(k[10,a])+arccos(k[10,b]))*180/Pi);

23,641017352903687528 = 23,641017353533804634

19 = 19,000000000605261681

> evalf(simplify(A(5)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[5,a]^2))*(N(4)&*m(nu)

> -m(nu)&*N(4)))));

$$\begin{bmatrix} -20,257337925958533640 & -3,6161031082156630000 \\ 113,75774626343426820 & 20,257337925958533640 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20,257337924874548 & -3,616103108021040 \\ 113,75774625731948423 & 20,257337924874548 \end{bmatrix}$$

> evalf(simplify(A(10)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[10,b]^2))*(m(nu)&*N(

> 10)-N(10)&*m(nu)))));

$$\begin{bmatrix} 13,725038873884228372 & -9,3407234065078183200 \\ 20,274306801294403979 & -13,725038873884228372 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,7250388740330718 & -9,3407234066100312631 \\ 20,274306801516620211 & -13,7250388740330718 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los elementos de la cuarta región.

> C[5]:=c(nu);C[6]:=C[10];C[7]:=C[5];C[8]:=C[1];C[9]:=C[2];C[10]:=C[3];

> C[11]:=C[4];C[12]:=C[6];

$C_5 := 845,97956403300591446$

$C_6 := 86,154921538677202645$

$C_7 := 845,97956403300591446$

$C_8 := 23$

$C_9 := 15$

$C_{10} := 31,432056795099630759$

$C_{11} := 257,84055935314302354$

$C_{12} := 86,154921538677202645$

> ang[12]:=ang[12]+ang[9];ang[9]:=ang[6];ang[10]:=ang[7];

$ang_{12} := 28,826639394510747439$

$ang_9 := 30$

$ang_{10} := 59,874282496907656173$

> ang[5]:=evalf(arccos(k[5,a])*180/Pi);ang[6]:=evalf(arccos(k[10,b])*180/Pi);

$ang_5 := 6,3999730776133421362$

$ang_6 := 14,826528092505407908$

> ang[7]:=evalf(ang[11]+arccos(k[10,a])*180/Pi);

```

ang7 := 17,173471908099853773
> ang[11] := ang[8]; ang[8] := evalf(arccos(k[5,b])*180/Pi);
ang11 := 8,6027874292634628849
ang8 := 17,241044275920462498
> sum(ang[n],n=1..12);
359,99999997507459354
> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

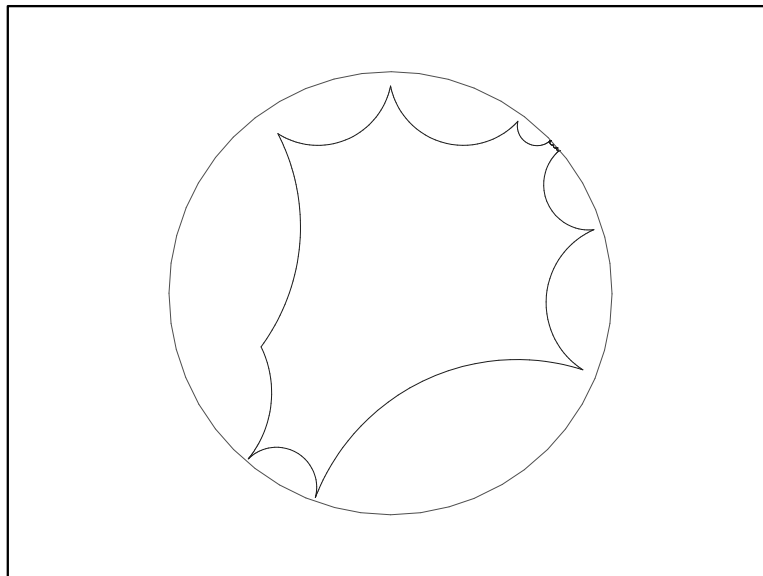
```

Representación de la cuarta región.

```

> display(
> {C0,seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});

```



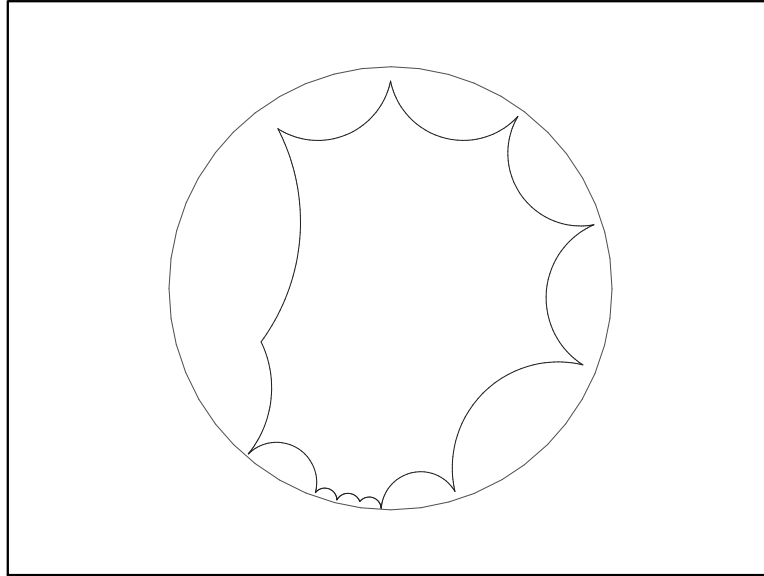
Elementos de la cuarta región:

```

> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),5);
Cn = (23., 15., 31,432, 257,84, 845,98, 86,155, 845,98, 23., 15., 31,432, 257,84, 86,155)
> theta[n]=evalf(seq(ang[i],i=1..12),5);
θn = (23., 30., 117,76, 6,2991, 6,4000, 14,827, 17,173, 17,241, 30., 59,874, 8,6028, 28,827)

```

Que puede compararse con el tercer dodecágono:



Último paso: Se corta por los vértices 6-8. Calculamos la distancia $\rho = d(A_6, A_8)$ y los ángulos θ_{6a} , θ_{6b} , θ_{8a} , θ_{8b} .

Cálculos previos.

```
> c(rho):=evalf(-1/2*trace(evalm(A(6)&*A(8))));
      c(rho) := 3254,3360466930945798
> m(rho):=evalf(evalm(1/(2*sqrt(c(rho)^2-1))*(A(8)&*A(6)-A(6)&*A(8))));
      m(rho) :=  $\begin{bmatrix} -1,9126786430801892035 & 1,9669940478275575258 \\ -1,3514731245023699685 & 1,9126786430801892035 \end{bmatrix}$ 
> det(%);
      -1,00000000000000004824
> k[6,a]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(5)&*m(rho))));
> k[6,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(-N(6)&*m(rho))));
      k6,a := ,98349451045931721
      k6,b := ,99704989975511600
> k[8,b]:=evalf(-1/2*trace(evalm(N(8)&*m(rho))));
      k8,b := ,957353795615323
> a[8,a]:=ang[8]-evalf(arccos(k[8,b])*180/Pi);
      a8,a := ,447844641072341748
```

Comprobaciones:

```
> ang[6]=evalf((arccos(k[6,a])+arccos(k[6,b]))*180/Pi);
      14,826528092505407908 = 14,826528273678710273
> evalf(simplify(A(6)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[6,a]^2))*(N(5)&*m(rho)
> )-m(rho)&*N(5))));
```

$$\begin{bmatrix} 13,725038876873823300 & -9,3407234046461600000 \\ 20,274306813157681290 & -13,725038876873823300 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 13,7250388867886086 & -9,340723411807906 \\ 20,274306827713906198 & -13,7250388867886086 \end{bmatrix}$$

```

> evalf(simplify(A(8)))=evalf(evalm(1/(2*sqrt(1-k[8,b]^2))*(m(rho)&*N(
> 8)-N(8)&*m(rho)))));

```

$$\begin{bmatrix} 316,28055840650657040 & -681,64095050052921000 \\ 146,75525517130862531 & -316,28055840650657040 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 316,280558366243246 & -681,64095041383414073 \\ 146,75525515264034319 & -316,280558366243246 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los elementos de la última región.

```

> C[6]:=c(rho);C[7]:=C[1];C[8]:=C[2];C[9]:=C[3];C[10]:=C[4];C[11]:=C[5];
> C[12]:=C[6];

C6 := 3254,3360466930945798
C7 := 23
C8 := 15
C9 := 31,432056795099630759
C10 := 257,84055935314302354
C11 := 845,97956403300591446
C12 := 3254,3360466930945798

> ang[8]:=ang[9];ang[9]:=ang[10];ang[10]:=ang[11];
ang8 := 30
ang9 := 59,874282496907656173
ang10 := 8,6027874292634628849

> ang[11]:=ang[12]+ang[7];ang[12]:=a[8,a];
ang11 := 46,000111302610601212
ang12 := ,447844641072341748

> ang[6]:=evalf(arccos(k[6,a])*180/Pi);ang[7]:=evalf(arccos(k[8,b])*180/Pi);
ang6 := 10,424398487466867452
ang7 := 16,793199634848120750

> ang[1]:=evalf(ang[1]+arccos(k[6,b])*180/Pi);
ang1 := 27,402129786211842821

> sum(ang[n],n=1..12);
360,00000015624789590

> sigma:=table([seq(sin(ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos
> (ang[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:

```


Dimensiones y representación de la región de Schmutz-Schaller.

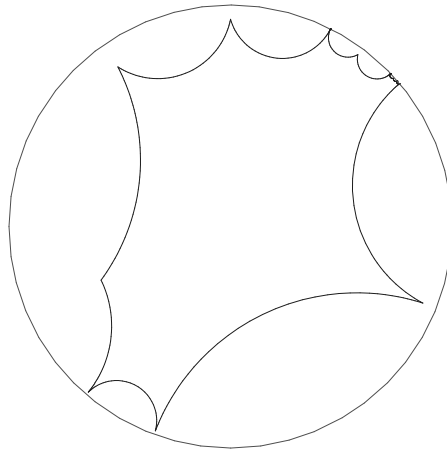
```
> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),5);
Cn = (23., 15., 31,432, 257,84, 845,98, 3254,3, 23., 15., 31,432, 257,84, 845,98, 3254,3)
> theta[n]=evalf(seq(ang[i],i=1..12),5);
θn = (27,402, 30., 117,76, 6,2991, 6,4, 10,424, 16,793, 30., 59,874, 8,6028, 46., 0,44784)
```

OBSERVACIONES: Se tiene que $\theta_2 = \theta_8$.

Tiene que cumplirse: $\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \theta_9 + \theta_{11} + \theta_1 = \pi$, $\theta_3 + \theta_5 + \theta_7 + \theta_8 + \theta_{10} + \theta_{12} = \pi$.

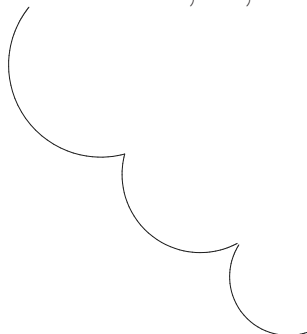
```
> ang[2]+ang[4]+ang[6]+ang[9]+ang[11]+ang[1];
180,00000018225422868
> ang[3]+ang[5]+ang[7]+ang[8]+ang[10]+ang[12];
179,99999997399366723
> display({C0,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained,color=blue),
> i=1..12)},title='Una región de Schmutz-Schaller');
```

Una región de Schmutz-Schaller

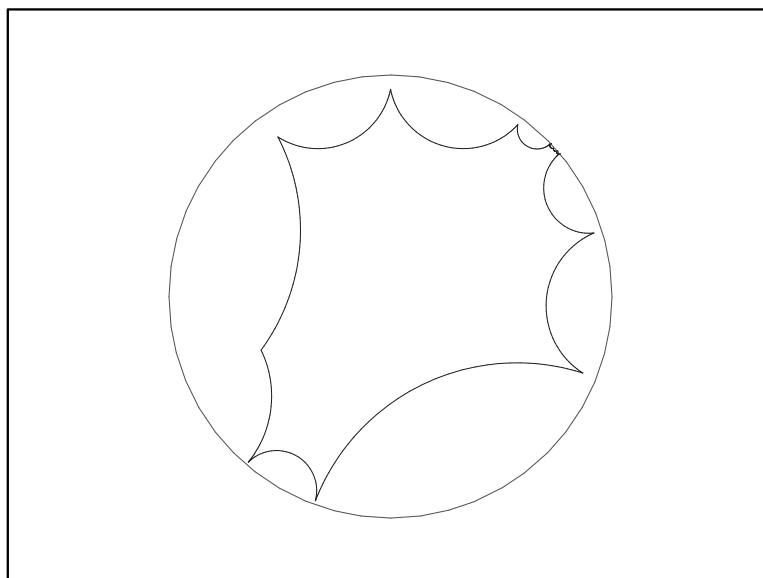


```
> display({seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained,color=blue),
> i=7..9)},title='Lados 7°, 8° y 9°');
```

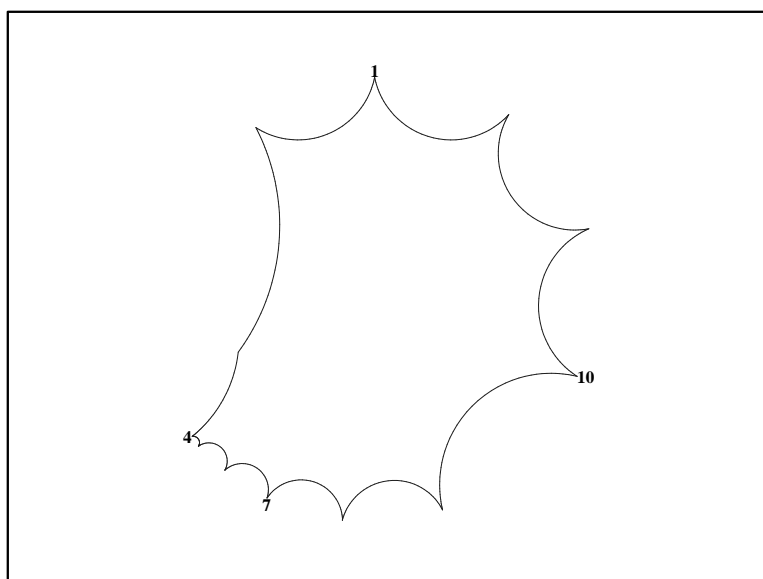
Lados 7°, 8°, 9°



Que puede compararse con el tercer dodecágono:



y con la región original:



> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";

"FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR"

4.3. Una Región Fundamental Dodecagonal de Schmutz-Schaller

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados. En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 2.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

```
> Digits:=20:
```

Observaciones previas.

Dados los ángulos de una región de Schmutz-Schaller, con lados $\lambda_1 = \lambda_7, \lambda_2 = \lambda_8, \lambda_3 = \lambda_9, \lambda_4 = \lambda_{10}, \lambda_5 = \lambda_{11}, \lambda_6 = \lambda_{12}$ y ángulos $\theta_1 = \theta_7, \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \theta_8 + \theta_{10} + \theta_{12} = \pi, \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_9 + \theta_{11} = \pi$ se calculan ciertas longitudes de sus lados y se representa la región.

Las condiciones para la convexidad del dodecágono se basan en las ya conocidas (hoja 2.0), pero se adaptan a las características de una región de este tipo. Puede verse una referencia a este tipo de regiones en la sección 4.2 de la Memoria.

Dados los ángulos, para que el dodecágono sea convexo es necesario que:

```
> c1a1:=p->seq(delta(h,1)>0,h=3..p-2):c1b1:=p->seq(Delta(p,k-1)>0,k=3..p-2):  
> c1a2:=p->seq(delta(h,7)>0,h=9..p+4):c1b2:=p->seq(Delta(6,k-1)>0,k=9..p+4):
```

Construcción de la región fundamental dodecagonal.

Resolución del dodecágono.

Conocidos los ángulos, dados los tres primeros lados, se conocen seis lados y basta calcular los tres siguientes, iguales a los tres últimos.

```
> p:=12:  
> a[7]:=a[1]:a[1]:=30:a[3]:=35:a[5]:=27:a[8]:=25:a[10]:=31:a[12]:=32:a[  
> 2]:=15:a[4]:=40:a[6]:=29:a[9]:=46:a[11]:=20:seq(a[i],i=1..12);  
30, 15, 35, 40, 27, 29, 30, 25, 46, 31, 20, 32  
> a[1]+a[3]+a[5]+a[8]+a[10]+a[12]=180,a[2]+a[4]+a[6]+a[7]+a[9]+a[11]=180;  
180 = 180, 180 = 180  
> evalf((1+2*cos(2*Pi/12)+cos(2*Pi/12))/(1-cos(2*Pi/12)));  
26,856406460551018346
```

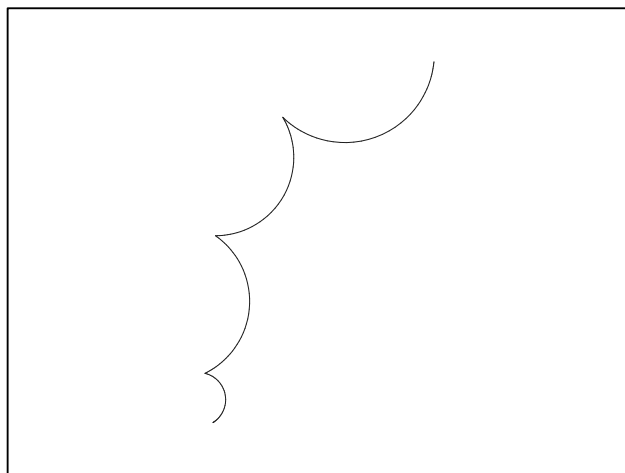
Acotar los tres primeros lados, preferiblemente:

```
> C>evalf((1+2*cos(2*Pi/12)+cos(46*Pi/180))/(1-cos(46*Pi/180)));  
> C<evalf((1+2*cos(2*Pi/12)+cos(15*Pi/180))/(1-cos(15*Pi/180)));  
11,222541725407671339 < C  
C < 108,52725777680580171
```

```

> evalf((1+2*cos(2*Pi/12)+cos(15*Pi/180))/(1-cos(35*Pi/180)));
      20,447986925366443829
> evalf((1+2*cos(2*Pi/12)+cos(15*Pi/180))/(1-cos(40*Pi/180)));
      15,806321008816860878
> C[7]:=C[1]:C[8]:=C[2]:C[9]:=C[3]:C[10]:=C[4]:C[11]:=C[5]:C[12]:=C[6]:
> sigma:=table([seq(sin(a[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table([seq(cos(a
> [i]*Pi/180),i=1..12)]):S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..12)]):
> C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> cnc11:=evalf({c1a1(p)[1],c1b1(p)[1]}):cnc12:=evalf({c1a2(p)[1],c1b2(p)[1]}):
> cnc21:=evalf({c1a1(p)[2],c1b1(p)[2]}):cnc22:=evalf({c1a2(p)[2],c1b2(p)[2]}):
> cnc31:=evalf({c1a1(p)[3],c1b1(p)[3]}):cnc32:=evalf({c1a2(p)[3],c1b2(p)[3]}):
> C[1]:=110*1.4;
      C1 := 154,0
> [solve(cnc11),solve(cnc12)];
      [{12,059330426723733921 < C2}, {5,3593385325368555793 < C2}]
> C[2]:=30*1.4;
      C2 := 42,0
> [solve(cnc21),solve(cnc22)];
      [{6,3210391835750244189 < C3}, {5,0236287198194196270 < C3}]
> C[3]:=25*1.4;
      C3 := 35,0
> A(1):=matrix([[0, -60], [1/60, 0]]):N(1):=matrix([[cos(a[1]*Pi/1000),
> 60*sin(a[1]*Pi/1000)], [1/60*sin(a[1]*Pi/1000), -cos(a[1]*Pi/1000)]):
> with(plots):
> C0:=plot([cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],axes=none,scaling=constrained):
> display({seq(plot(evalf(gp(i)),axes=none,scaling=constrained,color=blue),
> i=1..3),plot(eval(evalf(gp(4)),C[4]=50),axes=none,scaling=constrained,
> color=blue)});

```



```

> [solve(cnc31),solve(cnc32)];
      {{7,1746260347621691199 < C4}, {12,070003083933633502 < C4}}
> mnC4:=12.07;
      mnC4 := 12,07
> p:=7:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> if a[p-1]+a[p]>=180 then evalf(eta(p,p-2)+cos((a[p-1]+a[p])*Pi/180))>0
> elif (a[p-1]+a[p]<180 and sum(a[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> evalf(eta(p,p-2)-1>0) else 0=0 fi:c21:=%;
> if a[p-2]+a[p-1]>180 then evalf((S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*
> sin((a[p-2]+a[p-1])*Pi/180)-eta(p,p-3)*cos((a[p-2]+a[p-1])*Pi/180)+
> kappa[p]>0) else 0=0 fi:c3a1:=%;
> if a[p]+a[1]>180 then evalf(-Gamma(p-2,1)*sin((a[p]+a[1])*Pi/180)-
> eta(1,p-2)*cos((a[p]+a[1])*Pi/180)+kappa[p-1]>0) else 0=0 fi:c3b1:=%;

      c21 := 0 < 142,05159360543791627  $\sqrt{C_4^2 - 1}$  - 119,99240747341715307 C4
      - 150,21885912605100081
      c3a1 := 0 = 0
      c3b1 := 0 = 0
> solve(c21);
      RealRange(-∞, Open(-1,0191450675932504373)),
      RealRange(Open(7,2556965923349684984), ∞)
> ms1C4:=7.25;
      ms1C4 := 7,25
> b:=table([seq(a[i],i=6..12)]):
> sigma:=table([seq(sin(b[i]*Pi/180),i=1..7)]):kappa:=table([seq(cos(b[
> i]*Pi/180),i=1..7)]):
> if b[p-1]+b[p]>=180 then evalf(eta(p,p-2)+cos((b[p-1]+b[p])*Pi/180))>0
> elif (b[p-1]+b[p]<180 and sum(b[i],i=1..p-2)<(p-3)*180) then
> evalf(eta(p,p-2)-1>0) else 0=0 fi:c22:=%;
> if b[p-2]+b[p-1]>180 then
> evalf((S[p-3]*Delta(p,p-4)+C[p-3]*g(p,p-3))*sin((b[p-2]+b[p-1])*Pi/180)-
> eta(p,p-3)*cos((b[p-2]+b[p-1])*Pi/180)+kappa[p]>0) else 0=0 fi:c3a2:=%;
> if b[p]+b[1]>180 then
> evalf(-Gamma(p-2,1)*sin((b[p]+b[1])*Pi/180)-eta(1,p-2)*cos((b[p]+b[1])
> *Pi/180)+kappa[p-1]>0) else 0=0 fi:c3b2:=%;

      c22 := 0 < 431,06327716808514103  $\sqrt{C_4^2 - 1}$  - 345,92147874340038173 C4
      - 429,06013947651789073
      c3a2 := 0 = 0
      c3b2 := 0 = 0
> solve(c22);
      RealRange(-∞, Open(-1,0160665511422119942)),
      RealRange(Open(5,5032143681315225871), ∞)
> ms2C4:=5.5;

```

```

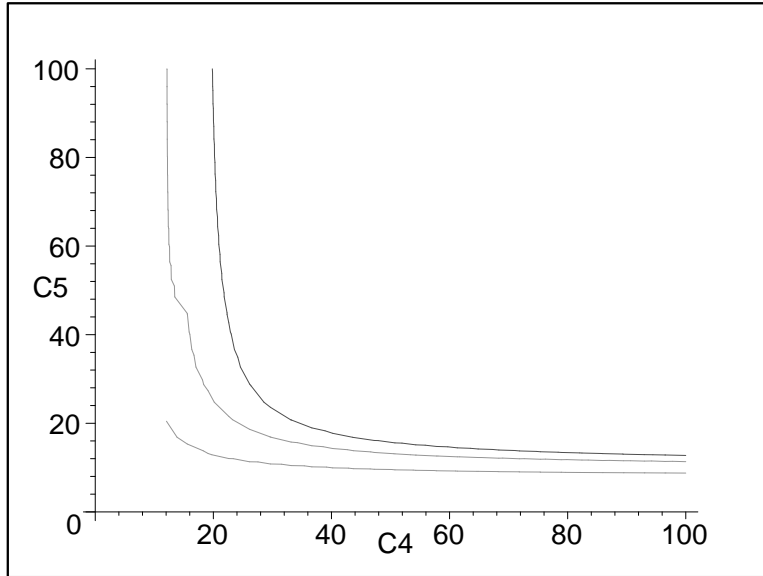
ms2C4 := 5,5
> mC4:=max(ms1C4,ms2C4,mnC4);
mC4 := 12,07
> sigma:=table([seq(sin(a[i]*Pi/180),i=1..12)]):kappa:=table(
[seq(cos(a[i]*Pi/180),i=1..12)]):
> p:=12:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:kappa[0]:=kappa[p]:sigma[0]:=sigma[p]:
> evalf(c1a1(p)[4]);evalf(c1a2(p)[4]);
0 < ,48480962024633702908
(713,14429876442804451 C4 - 601,29780584441935807 sqrt(C4^2 - 1.) sqrt(C5^2 - 1.
- ,48480962024633702908(635,41622288684399389 sqrt(C4^2 - 1.
- 535,76026798752815935 C4 + 174,07131264457535625)C5
- 283,16752061299615997 sqrt(C4^2 - 1. + 238,75674127382090154 C4
+ 298,79999249818310503
0 < ,52991926423320495406
(4948,4803635701703640 C4 - 4429,1144287193128696 sqrt(C4^2 - 1.) sqrt(C5^2 - 1.
- ,52991926423320495406(4650,0504817508581492 sqrt(C4^2 - 1.
- 4162,0061452839325185 C4 + 754,80384175096292030)C5
- 1435,3044105683204150 sqrt(C4^2 - 1. + 1284,6625645425724896 C4
+ 1758,6876637288243882
> evalf(c1b1(p)[4]);evalf(c1b2(p)[4]);
0 < (312,89552025192720645 C4 - 264,30598777343687939 sqrt(C4^2 - 1.) C5 + (
-278,79194993378072481 sqrt(C4^2 - 1. + 235,49835948818324736 C4
- 76,030806269246986811)sqrt(C5^2 - 1.
0 < (2328,3064938833077806 C4 - 2084,3335542071906537 sqrt(C4^2 - 1.) C5 + (
-2187,8924312300550568 sqrt(C4^2 - 1. + 1958,6328601449622236 C4
- 354,87219030075341360)sqrt(C5^2 - 1.
> e45:=evalf(expand(eta(6,12)-eta(12,6)));
e45 := -1024,2453280036967081 C5 sqrt(C4^2 - 1.
+ 1082,1197057979186837 sqrt(C5^2 - 1.) C4
- 976,39041790078255570 sqrt(C5^2 - 1.) sqrt(C4^2 - 1. + 499,61224638423819840 C4
- 151,19314366658468765 C5 - 551,083084295708611 sqrt(C4^2 - 1.
+ 923,74541391889472250 C5 C4 + 696,33996258203453978
> valsC4:=C[4]>mC4;
valsC4 := 12,07 < C4
> UnC4:=100;
UnC4 := 100

```

```

> display(implicitplot(rhs(evalf(c1a1(p)[4])),C[4]=mnC4..UnC4,C[5]=1..100,
labels=[C4,C5],color=GREEN),implicitplot(rhs(evalf(c1b1(p)[4])),C[4]=mnC4..
UnC4,C[5]=1..100,labels=[C4,C5],color=BROWN),implicitplot(rhs(evalf(c1a2(p)
[4])),C[4]=mnC4..UnC4,C[5]=1..100,labels=[C4,C5],color=GREEN),implicitplot(
rhs(evalf(c1b2(p)[4])),C[4]=mnC4..UnC4,C[5]=1..100,labels=[C4,C5],color=
BROWN),implicitplot(e45,C[4]=mnC4..UnC4,C[5]=1..100,labels=[C4,C5]));

```



```

> UnC5:=60.;

```

$UnC5 := 60.$

```

> e45red_C4=solve({eval(e45,C[5]=UnC5),C[4]>mnC4});c4_C4=solve(
{eval(evalf(c1a1(p)[4]),C[5]=UnC5),eval(evalf(c1b1(p)[4]),C[5]=UnC5),
eval(evalf(c1a2(p)[4]),C[5]=UnC5),eval(evalf(c1b2(p)[4]),C[5]=UnC5),C[
4]>mnC4});

```

$e45red_C4 = \{C_4 = 21,104054341768061824\}$

$c4_C4 = \{14,518453730978737452 < C_4\}$

```

> AV:=[AV_red=solve({eval(e45,C[5]=10^5),C[4]>mnC4}),AV_green1=solve(
{eval(rhs(evalf(c1a1(p)[4])),C[5]=10^5),C[4]>mnC4}),AV_green2=solve(
{eval(rhs(evalf(c1a2(p)[4])),C[5]=10^5),C[4]>mnC4}),AV_brown1=solve(
{eval(rhs(evalf(c1b1(p)[4])),C[5]=10^5),C[4]>mnC4}),AV_brown2=solve(
{eval(rhs(evalf(c1b2(p)[4])),C[5]=10^5),C[4]>mnC4})];

```

$AV := [AV_red = \{C_4 = 18,646955150068006485\}, AV_green1 = (), AV_green2 = (),$

$AV_brown1 = (), AV_brown2 = \{C_4 = 12,091843377978561936\}]$

```

> CondsFin:=[18.647<C[4],mnC4<C[4]];

```

$CondsFin := [18,647 < C_4, 12,07 < C_4]$

```

> e46:=evalf(expand(eta(5,11)-eta(11,5)));

```

```

e46 := 521,74311590001364817 C4 + 724,495719044813120 C6
- 569,860908751619938 sqrt(C4^2 - 1) C6 + 518,07166068741958369 C4 C6
- 576,017334391069271 sqrt(C4^2 - 1) - 589,75287361383033461 C4 sqrt(C6^2 - 1)
+ 648,963516912519779 sqrt(C4^2 - 1) sqrt(C6^2 - 1)
- 824,362810260774431 sqrt(C6^2 - 1) + 726,21235724044786397
> e56:=evalf(expand(eta(4,10)-eta(10,4)));

e56 := 870,772008825043539 sqrt(C5^2 - 1) C6 + 673,358715652887318 C6 C5
- 765,07893589398126446 sqrt(C6^2 - 1) C5 - 198,01641034644772920 C5
+ 669,62257956984102989 C6 - 766,30343634041866549 sqrt(C5^2 - 1) sqrt(C6^2 - 1)
- 762,380050599219921 sqrt(C6^2 - 1) + 675,11582687845634465
> C5:=solve(e45,C[5]):
> C51:=C5[1]:C52:=C5[2]:
> C6:=solve(e46,C[6]):
> C61:=C6[1]:C62:=C6[2]:
> CondsFin;

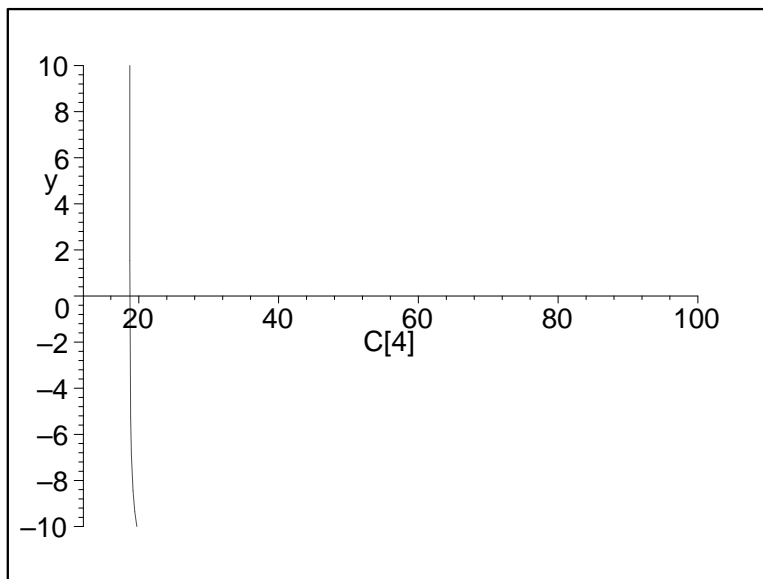
```

CondsFin

```

> e11:=eval(e56,[C[5]=C51,C[6]=C61]):plot(e11,C[4]=mnC4..100,y=-10..10);

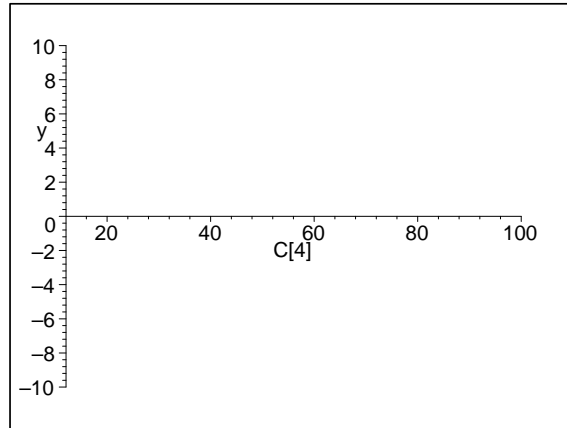
```



```

> e12:=eval(e56,[C[5]=C51,C[6]=C62]):plot(e12,C[4]=mnC4..100,y=-10..10);

```

> CondsFin;

$$[18,647 < C_4, 12,07 < C_4]$$

> eval(e11,C[4]=18.7209984);eval(e11,C[4]=18.8);

$$,90347866631 \cdot 10^{-5}$$

$$-4,5551436831934099$$

> eval([C[4],C[5]=C51,C[6]=C61],C[4]=18.7209984);

$$[18,7209984, C_5 = 1430,1388851750508, C_6 = 7,8864733822516276]$$

> 'eval(e12,C[4]=);

> 'eval([C[4],C[5]=C51,C[6]=C62],C[4]=);

> evalf(eval({alpha(1,7)=alpha(7,1),alpha(4,10)=alpha(10,4)},
[C[4]=18.7209984, C[5]=1430.1388851750508,C[6]=7.8864733822516276]));

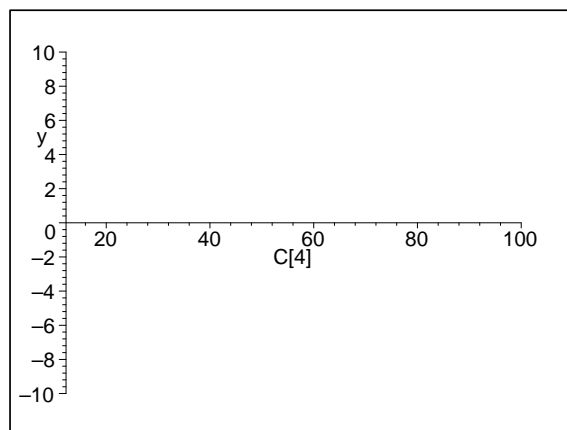
$$\{127991,64694938986014 = 127991,64836014001849,$$

$$148,15812296114874953 = 148,1579978847472071\}$$

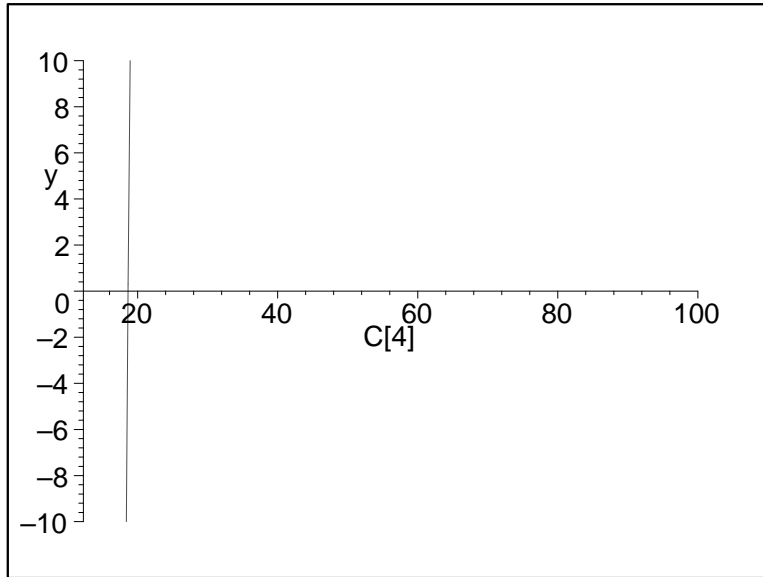
> CondsFin;

$$[18,647 < C_4, 12,07 < C_4]$$

> e21:=eval(e56,[C[5]=C52,C[6]=C61]):plot(e21,C[4]=mnC4..100,y=-10..10);



> e22:=eval(e56,[C[5]=C52,C[6]=C62]):plot(e22,C[4]=mnC4..100,y=-10..10);



```

> CondsFin;
                                [18,647 < C4, 12,07 < C4]
> C[4]:=18.7209984; C[5]:=1430.1388851750508; C[6]:=7.8864733822516276;
                                C4 := 18,7209984
                                C5 := 1430,1388851750508
                                C6 := 7,8864733822516276
> cnc45678:=evalf({seq(c1a1(p)[i],i=4..8),seq(c1b1(p)[i],i=4..8)});
                                cnc45678 := {0 < 59935,297058664929503, 0 < 869,244190013560315,
                                0 < 481,44814058459649376, 0 < 53816,32619849492790,
                                0 < 5765,198486301116393, 0 < 878,356851409078614,
                                0 < 55228,671516190991750, 0 < 4640,115329718220408,
                                0 < 1094,9309725420823961, 0 < 608,67558206336011108}
> cnc45678:=evalf({seq(c1a2(p)[i],i=4..8),seq(c1b2(p)[i],i=4..8)});
                                cnc45678 := {0 < 674,7740112010202981, 0 < 1423,836058009023448,
                                0 < 55228,671007719351072, 0 < 9901,963048299738872,
                                0 < 49714,34961159573211, 0 < 27846,789812051916744,
                                0 < 59935,298271084377526, 0 < 1395,9655117853062406,
                                0 < 5617,5922352291297997, 0 < 5552,815984280212274}
> seq(C[i],i=1..12);
                                154,0, 42,0, 35,0, 18,7209984, 1430,1388851750508, 7,8864733822516276,
                                154,0, 42,0, 35,0, 18,7209984, 1430,1388851750508, 7,8864733822516276

```

Región de Schmutz-Schaller.

```

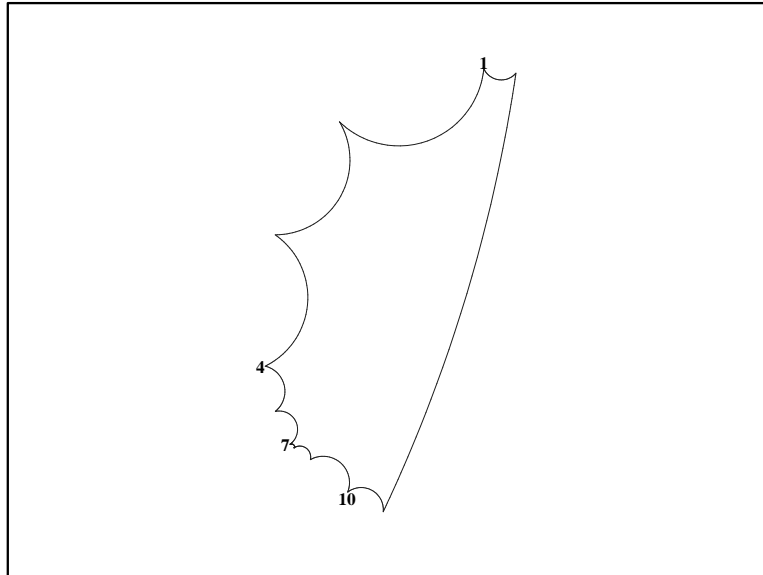
> L:=i->eval(P,M=evalm((A(i)))):
> v1:=textplot([L(1)[1],L(1)[2], '1'],font=[TIMES,BOLD,6],align=ABOVE):
> v4:=textplot([L(4)[1],L(4)[2], '4'],font=[TIMES,BOLD,6],align=LEFT):

```

```

> v7:=textplot([L(7)[1],L(7)[2], '7'],font=[TIMES,BOLD,6],align=LEFT):
> v10:=textplot([L(10)[1],L(10)[2], '10'],font=[TIMES,BOLD,6],align=BELOW):
> display(
> {v1,v4,v7,v10,seq(plot(evalf(gp(i)),
> axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=1..12)});

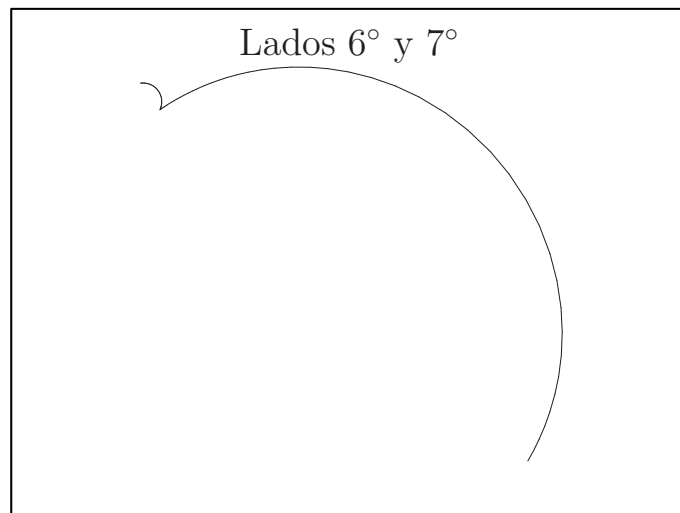
```



```

> display(
> {seq(plot(evalf(gp(i)),axes=None,scaling=constrained,color=blue),i=6..
> .7)},title='Lados 6 y 7');

```



Una solución es, por tanto:

```

> theta[n]=seq(a[i],i=1..12);
       $\theta_n = (30, 15, 35, 40, 27, 29, 30, 25, 46, 31, 20, 32)$ 
> C[n]=evalf(seq(C[i],i=1..12),6);

```

$C_n = (154, 42, 35, 18,721, 1430,14, 7,88647, 154, 42, 35, 18,721, 1430,14, 7,88647)$

Cálculo de los generadores del grupo discreto.

Siendo:

> A(1);N(1);

$$\begin{bmatrix} 0 & -60 \\ \frac{1}{60} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3}{100}\pi\right) & 60\sin\left(\frac{3}{100}\pi\right) \\ \frac{1}{60}\sin\left(\frac{3}{100}\pi\right) & -\cos\left(\frac{3}{100}\pi\right) \end{bmatrix}$$

> with(linalg):

> F:=i->evalf(evalm((-N(i+6)&*N(i)+matrix([[1, 0], [0, 1]]))));

$$F := i \rightarrow \text{evalf}(\text{evalm}(-N(i+6) \text{'&*'} N(i) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}))$$

> f:=i->evalm((1/sqrt(det(F(i)))*F(i)));

$$f := i \rightarrow \text{evalm}\left(\frac{F(i)}{\sqrt{\det(F(i))}}\right)$$

> fA:=i->evalm(f(i)&*A(i)&*f(i)^(-1));

$$fA := i \rightarrow \text{evalm}((f(i) \text{'&*'} A(i) \text{'&*'} \frac{1}{f(i)}))$$

> TA:=i->evalf(evalm(A(i+7)&*fA(i)-matrix([[1, 0], [0, 1]]))));

$$TA := i \rightarrow \text{evalf}(\text{evalm}(A(i+7) \text{'&*'} fA(i) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}))$$

> TA(6):=evalf(evalm(A(1)&*fA(6)-matrix([[1, 0], [0, 1]]))));

$$TA(6) := \begin{bmatrix} -2,117643809 & 3,02940135 \\ ,00084185491 & -1,8970428891 \end{bmatrix}$$

> tA:=i->evalm((1/sqrt(det(TA(i)))*TA(i)));

$$tA := i \rightarrow \text{evalm}\left(\frac{TA(i)}{\sqrt{\det(TA(i))}}\right)$$

> gn:=i->evalm(tA(i)&*f(i));

$$gn := i \rightarrow \text{evalm}(tA(i) \text{'&*'} f(i))$$

> seq(gn(i),i=1..6);

$$\begin{bmatrix} 1,30519163231378823 & 18,24254014722142036 \\ -2,65734806004948985 & -36,3753317866656576 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3,564254866588378566 & 8,63285739312966546 \\ -7,50914321359483494 & -17,90707031246723679 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2,6699135969477654156 & 2,7305356886027884565 \\ -7,3669854638977368355 & -7,1597136133708091950 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4,3360276281922591387 & 2,9235621249508812443 \\ -16,628784593693632110 & -10,981314905029976284 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -7,9415802586331025749 & -3,9839677361843206035 \\ -1,7759847068000922793 & -1,0168587999938288971 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -224,09881739179390049 & -113,08076172730900839 \\ -7,4382782832793721488 & -3,7578340841515254732 \end{bmatrix},$$

Respetando la notación de Schmutz-Schaller:

```
> gnssA:=table([gn(1),gn(6),gn(5)^(-1),gn(4),gn(3)^(-1),gn(2)]):
> gnssB:=table([gn(1)^(-1),gn(2),gn(3)^(-1),gn(4),gn(5)^(-1),gn(6)]):
Los generadores son entonces:
> gnssA16:=seq(evalm(gnssA[i]),i=1..6);
```

$$gnssA16 := \begin{bmatrix} 1,30519163231378823 & 18,24254014722142036 \\ -2,65734806004948985 & -36,3753317866656576 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -224,09881739179390049 & -113,08076172730900839 \\ -7,4382782832793721488 & -3,7578340841515254732 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1,0168587999938288970 & 3,9839677361843206031 \\ 1,7759847068000922791 & -7,9415802586331025741 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4,3360276281922591387 & 2,9235621249508812443 \\ -16,628784593693632110 & -10,981314905029976284 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -7,1597136133708091878 & -2,7305356886027884538 \\ 7,3669854638977368281 & 2,6699135969477654129 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3,564254866588378566 & 8,63285739312966546 \\ -7,50914321359483494 & -17,90707031246723679 \end{bmatrix},$$

Los generadores son entonces:

```
> gnssA16:=seq(evalm(gnssA[i]),i=1..6):evalf(%,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1,3052 & 18,243 \\ -2,6573 & -36,375 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -224,10 & -113,08 \\ -7,4383 & -3,7578 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,0169 & 3,9840 \\ 1,7760 & -7,9416 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4,3360 & 2,9236 \\ -16,629 & -10,981 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7,1597 & -2,7305 \\ 7,3670 & 2,6699 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,5643 & 8,6329 \\ -7,5091 & -17,907 \end{bmatrix}$$

o, de otro modo:

```
> gnssB16:=seq(evalm(gnssB[i]),i=1..6):evalf(%,5);
```

$$\begin{bmatrix} -36,375 & -18,243 \\ 2,6573 & 1,3052 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,5643 & 8,6329 \\ -7,5091 & -17,907 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7,1597 & -2,7305 \\ 7,3670 & 2,6699 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 4,3360 & 2,9236 \\ -16,629 & -10,981 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,0169 & 3,9840 \\ 1,7760 & -7,9416 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -224,10 & -113,08 \\ -7,4383 & -3,7578 \end{bmatrix}$$

Comprobaciones.

El producto de los seis generadores, en ese orden, tiene que ser igual al producto en el orden contrario.

```
> gnssA61:=seq(evalm(gnssA[7-i]),i=1..6);
```

$$gnss61 := \begin{bmatrix} 3,564254866588378566 & 8,63285739312966546 \\ -7,50914321359483494 & -17,90707031246723679 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -7,1597136133708091878 & -2,7305356886027884538 \\ 7,3669854638977368281 & 2,6699135969477654129 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 4,3360276281922591387 & 2,9235621249508812443 \\ -16,628784593693632110 & -10,981314905029976284 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -1,0168587999938288970 & 3,9839677361843206031 \\ 1,7759847068000922791 & -7,9415802586331025741 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -224,09881739179390049 & -113,08076172730900839 \\ -7,4382782832793721488 & -3,7578340841515254732 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1,30519163231378823 & 18,24254014722142036 \\ -2,65734806004948985 & -36,3753317866656576 \end{bmatrix}$$

```
> gnssB61:=seq(evalm(gnssB[7-i]),i=1..6);
```

$$gnssB61 := \begin{bmatrix} -224,09881739179390049 & -113,08076172730900839 \\ -7,4382782832793721488 & -3,7578340841515254732 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -1,0168587999938288970 & 3,9839677361843206031 \\ 1,7759847068000922791 & -7,9415802586331025741 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 4,3360276281922591387 & 2,9235621249508812443 \\ -16,628784593693632110 & -10,981314905029976284 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -7,1597136133708091878 & -2,7305356886027884538 \\ 7,3669854638977368281 & 2,6699135969477654129 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3,564254866588378566 & 8,63285739312966546 \\ -7,50914321359483494 & -17,90707031246723679 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -36,375331786665661165 & -18,242540147221422148 \\ 2,6573480600494901104 & 1,3051916323137883579 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(&*(gnssA16))=evalm(&*(gnssA61));
```

$$\begin{bmatrix} -23,10559468499142129 & -66,20697060671262121 \\ 47,03209070451229926 & 134,7228794274612041 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,10488404475630928 & -66,206923732343060 \\ 47,0307323837335093 & 134,723035440315369 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(&*(gnssB16))=evalm(&*(gnssB61));
```

$$\begin{bmatrix} 505,76152810819596292 & 255,00156538149125178 \\ ,2410447344461322576 & ,1235103524864514206 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 505,73468035490745251 & 254,98797588733548150 \\ ,24437577690328672494 & ,12518992105511394731 \end{bmatrix}$$

Para ver cómo actúan las transformaciones gn(i):

```
> simplify(evalf(evalm(A(8))=evalm(gn(1)*A(1)*gn(1)^(-1))));
```

```
> simplify(evalf(evalm(A(7))=evalm(gn(1)*A(2)*gn(1)^(-1))));
```

$$\begin{bmatrix} -219,14794771314103030 & -107,75162383952595400 \\ 445,71785812178016907 & 219,14794771314103030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -219,16054796875814923 & -107,75801634076562400 \\ 445,74266877809408688 & 219,16054796875814923 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2150,9613199187382610 & -1084,5150661850342270 \\ 4266,0869774612985423 & 2150,9613199187382610 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2151,0807057477593850 & -1084,5750736808368540 \\ 4266,3244941971920570 & 2151,0807057477593870 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(evalf(evalm(A(9))=evalm(gn(2)*A(2)*gn(2)^(-1))));
```

```
> simplify(evalf(evalm(A(8))=evalm(gn(2)*A(3)*gn(2)^(-1))));
```

$$\begin{bmatrix} -30,068659479726779030 & -13,281725893220749500 \\ 68,148092362706467214 & 30,068659479726779030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,068659489352930000 & -13,281725897435660000 \\ 68,148092384696010000 & 30,068659489352940000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -219,14794771314103030 & -107,75162383952595400 \\ 445,71785812178016907 & 219,14794771314103030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -219,14794777538545000 & -107,75162386630184000 \\ 445,71785826406020000 & 219,14794777538545000 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(evalf(evalm(A(12))=evalm(gn(5)*A(5)*gn(5)^(-1))));
```

```
> simplify(evalf(evalm(A(11))=evalm(gn(5)*A(6)*gn(5)^(-1))));
```

```

      [ 3,2564883678312718611  -46,421153361146673852 ] =
      [ ,24998768125251351233  -3,2564883678312718611 ]
      [ 3,2564883683074000000  -46,421153368044700000 ]
      [ ,2499876812835000000  -3,256488368407400000 ]
      [ -13,534501947523112370  -3,0851227377341384900 ] =
      [ 59,700296754734960239   13,534501947523112370 ]
      [ -13,534501494950000000  -3,0851228424400000000 ]
      [ 59,700296772789000000   13,534501894960000000 ]
> simplify(evalf(evalm(A(1))=evalm(gn(6)*A(6)*gn(6)^(-1))));
> simplify(evalf(evalm(A(12))=evalm(gn(6)*A(7)*gn(6)^(-1))));

      [ 0  -60. ] = [ ,6982 10-5  -60,00204303 ]
      [ ,01666666666666666667  0 ] = [ ,01666739982  -,7014 10-5 ]

      [ 3,2564883678312718611  -46,421153361146673852 ] = [ 3,25678725  -46,44 ]
      [ ,24998768125251351233  -3,2564883678312718611 ] = [ ,2499886238  -3,2571 ]

> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
"FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR"

```


4.4. Una Región Fundamental de una superficie de género cero con k componentes en el borde

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 3.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones.

Se considera que $k = 5$. Región fundamental: polígono rectángulo de 16 lados. Son iguales 1-3, 5-7, 9-11, 13-15.

Elegimos 9 parámetros: $\gamma_1 = \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_6$, $\gamma_3 = \lambda_{10}$, $\gamma_4 = \lambda_{14}$, ($C_i = \cosh(\lambda_i)$), $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, ($\delta_i = d(\lambda_{i-1}, \lambda_{i+3})$) y $\gamma^1 = \lambda_4$

Los fundamentos para el desarrollo de la hoja se encuentran en la sección 4.3 de la Memoria.

Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.

> p:=16:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:

> c(mu[1]):=sqrt((c(gamma[1])+c(delta[1]))/(c(gamma[1])-1));

$$c(\mu_1) := \sqrt{\frac{c(\gamma_1) + c(\delta_1)}{c(\gamma_1) - 1}}$$

> c(mu[2]):=sqrt((c(gamma[2])+c(delta[2]))/(c(gamma[2])-1));

$$c(\mu_2) := \sqrt{\frac{c(\gamma_2) + c(\delta_2)}{c(\gamma_2) - 1}}$$

> c(mu[3]):=sqrt((c(gamma[3])+c(delta[3]))/(c(gamma[3])-1));

$$c(\mu_3) := \sqrt{\frac{c(\gamma_3) + c(\delta_3)}{c(\gamma_3) - 1}}$$

> c(mu[4]):=sqrt((c(gamma[4])+c(delta[4]))/(c(gamma[4])-1));

$$c(\mu_4) := \sqrt{\frac{c(\gamma_4) + c(\delta_4)}{c(\gamma_4) - 1}}$$

> c(gamma[1]):=3.;c(gamma[2]):=2.;c(gamma[3]):=3.5;c(gamma[4]):=4.;

$$c(\gamma_1) := 3.$$

$$c(\gamma_2) := 2.$$

$$c(\gamma_3) := 3,5$$

$$c(\gamma_4) := 4.$$

```

> c(delta[1]):=5.;c(delta[2]):=2.5;c(delta[3]):=1.5;c(delta[4]):=4.5;
      c( $\delta_1$ ) := 5.
      c( $\delta_2$ ) := 2,5
      c( $\delta_3$ ) := 1,5
      c( $\delta_4$ ) := 4,5

```

Valor del parámetro dependiente y cálculo de la región.

```

> C[1]:=simplify(c(mu[1]));C[5]:=simplify(c(mu[2]));C[9]:=simplify(c(mu
> [3]));C[13]:=simplify(c(mu[4]));
      C1 := 2.
      C5 := 2,1213203435596425732
      C9 := 1,4142135623730950488
      C13 := 1,6832508230603463256
> C[3]:=C[1]:C[7]:=C[5]:C[11]:=C[9]:C[15]:=C[13]:
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..16)]):S[0]:=S[p]:
> C[2]:=c(gamma[1]);C[6]:=c(gamma[2]);C[10]:=c(gamma[3]);C[14]:=c(gamma[4]);
      C2 := 3.
      C6 := 2.
      C10 := 3,5
      C14 := 4.
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
      2., 3., 2., C4, 2,12, 2., 2,12, C8, 1,41, 3,5, 1,41, C12, 1,68, 4., 1,68, C16
> C4in:=solve({cep(p)[2],cep(p)[3],cep(p)[4],cep(p)[5]});
      C4in := {7,1403629810052309209 < C4}
> C[4]:=8.;
      C4 := 8.
> C8in:=solve({cep(p)[6],cep(p)[7],cep(p)[8],cep(p)[9]});
      C8in := {188,80972768059793746 < C8}
> minC8:=188.8;
      minC8 := 188,8
> eta(12,16)=eta(16,12):C8:=solve(%);
      C8 := 373,98558309762506773, 6,1841014476558166460
> if C8[1]>minC8 then C8[1] else C8[2] fi:C[8]:=%;
      C8 := 373,98558309762506773
> C12in:=solve({cep(p)[10],cep(p)[11]});
      C12in := {24,800205693634201506 < C12}
> minC12:=24.8;
      minC12 := 24,8
> eta(8,16)=eta(16,8):C12:=solve(%);

```

```

C12 := 2,7150353883562630752, 27,487669748284396065
> if C12[1]>minC12 then C12[1] else C12[2] fi:C[12]:=%;
      C12 := 27,487669748284396065
> C[16]:=eta(1,15);
      C16 := 20,56707064422657225

```

Una solución.

```

> evalf(seq(C[i],i=1..16),5);

2., 3., 2., 8., 2,1213, 2., 2,1213, 373,99, 1,4142, 3,5, 1,4142, 27,488, 1,6833, 4., 1,6833,
20,567
> ParLibres1=[ 'c(gamma[1])'=c(gamma[1]), 'c(gamma[2])'=c(gamma[2]), 'c(
> gamma[3])'=c(gamma[3]), 'c(gamma[4])'=c(gamma[4])];
      ParLibres1 = [c(γ1) = 3., c(γ2) = 2., c(γ3) = 3,5, c(γ4) = 4.]
> ParLibres2=[ 'c(delta[1])'=c(delta[1]), 'c(delta[2])'=c(delta[2]), 'c(
> delta[3])'=c(delta[3]), 'c(delta[4])'=c(delta[4])];
      ParLibres2 = [c(δ1) = 5., c(δ2) = 2,5, c(δ3) = 1,5, c(δ4) = 4,5]
> ParDep=[ 'c(gamma^( '1 '))'=C[4]];
      ParDep = [c(γ'1') = 8.]
> evalf([ 'c(mu[1])'=C[1], 'c(mu[2])'=C[5], 'c(mu[3])'=C[9], 'c(mu[4])'=C[1
> 3], 'c(gamma^( '2 '))'=C[8], 'c(gamma^( '3 '))'=C[12], 'c(gamma^( '4 '))'=C[16]
> ],5);

[c(μ1) = 2., c(μ2) = 2,1213, c(μ3) = 1,4142, c(μ4) = 1,6833, c(γ'2') = 373,99,
c(γ'3') = 27,488, c(γ'4') = 20,567]

```

Representación de la región fundamental.

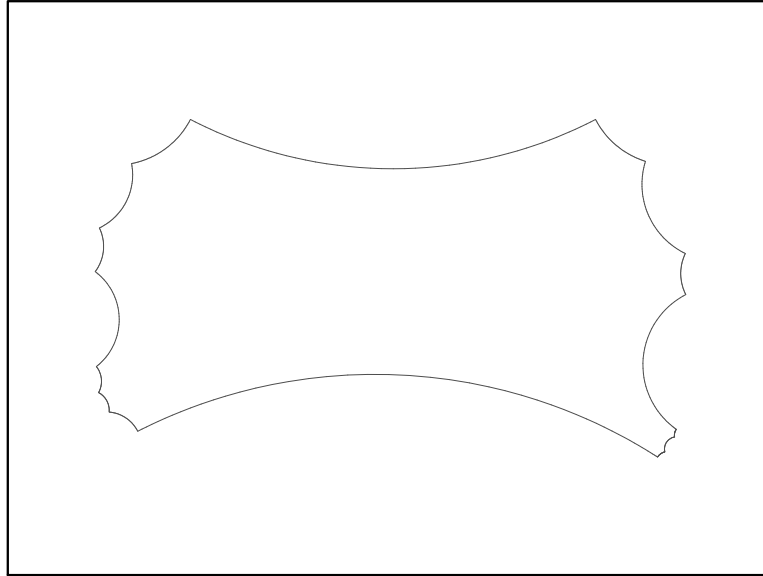
```

> with(plots):
> X0:=matrix([[0,-2],[1/2,0]]):N(16):=matrix([[0,2],[1/2,0]]):
> N(1):=evalm(-sqrt((C[16]-1)/2)*X0-sqrt((C[16]+1)/2)*(X0&*N(16)));
      N(1) := 
$$\begin{bmatrix} 3,2838293686050872709 & 6,2557286776564362518 \\ -1,5639321694141090630 & -3,2838293686050872709 \end{bmatrix}$$

> A(1):=evalm(X0*sqrt((C[16]+1)/2)+X0&*N(16)*sqrt((C[16]-1)/2));
      A(1) := 
$$\begin{bmatrix} -3,1278643388282181259 & -6,5676587372101745418 \\ 1,6419146843025436355 & 3,1278643388282181259 \end{bmatrix}$$

> display({seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16)});

```



Generadores del grupo.

> with(linalg):

Siendo el primer vértice y el vector normal al primer lado:

> [A(1),N(1)]:evalf(%,5);

$$\begin{bmatrix} -3,1279 & -6,5677 \\ 1,6419 & 3,1279 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,2838 & 6,2557 \\ -1,5639 & -3,2838 \end{bmatrix}$$

Definiendo:

> T:=i->evalm(N(4*i-2)*sqrt((C[4*i-2]-1)/2)+matrix([[1, 0], [0,

> 1]])*sqrt((C[4*i-2]+1)/2));

$$T := i \rightarrow \text{evalm}(N(4i - 2) \sqrt{\frac{1}{2} C_{4i-2} - \frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} C_{4i-2} + \frac{1}{2}})$$

Los generadores del grupo discreto son:

> seq(T(i),i=1..4):evalf(%,5);

$$\begin{bmatrix} 6,8318 & 7,3755 \\ -3,8439 & -4,0034 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11,834 & 6,9509 \\ -16,120 & -9,3840 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -24,357 & 14,630 \\ -45,616 & 27,357 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3,6058 & 6,7681 \\ -3,7536 & 6,7681 \end{bmatrix}$$

> seq(N(4*i-2),i=1..4):evalf(%,5);

$$\begin{bmatrix} 5,4176 & 7,3755 \\ -3,8439 & -5,4176 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15,003 & 9,8301 \\ -22,797 & -15,003 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -23,127 & 13,085 \\ -40,800 & 23,127 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4,2351 & 5,5262 \\ -3,0648 & 4,2351 \end{bmatrix}$$

> N(16);

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobaciones.

```
> seq(evalm(-N(4*i-3))=evalm(&*(T(i),N(4*i-1),T(i)^(-1))),i=1..4):evalf
> (% ,5);
```

$$\begin{bmatrix} -3,2838 & -6,2557 \\ 1,5639 & 3,2838 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,2838 & -6,2557 \\ 1,5639 & 3,2838 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13,257 & -9,6021 \\ 18,200 & 13,257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,257 & -9,6021 \\ 18,200 & 13,257 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 23,101 & -12,294 \\ 43,327 & -23,101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,101 & -12,294 \\ 43,327 & -23,101 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7,2559 & -7,3049 \\ 7,0703 & -7,2559 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,2559 & -7,3049 \\ 7,0703 & -7,2559 \end{bmatrix}$$

Las reflexiones en las tres primeras componentes del borde pueden escribirse:

```
> evalm(N(4))=evalm(&*(T(1)^(-1),N(16),T(1)));
```

$$\begin{bmatrix} 5,5830671052365878330 & 4,8553880193786729086 \\ -6,2138470048446682274 & -5,5830671052365878430 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5,583067105236587873 & 4,855388019378672946 \\ -6,213847004844668258 & -5,583067105236587873 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(N(8))=evalm(&*(T(2)^(-1),T(1)^(-1),N(16),T(1),T(2)));
```

$$\begin{bmatrix} ,034111186360582430049 & -,5508640643878775530 \\ -1,8132176185335029410 & -,034111186360582433951 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ,03411118636058313 & -,550864064387877178 \\ -1,81321761853350432 & -,03411118636058322 \end{bmatrix}$$

o también:

```
> evalm(N(8))=evalm(&*(T(3),T(4),N(16),T(4)^(-1),T(3)^(-1)));
```

$$\begin{bmatrix} ,034111186360582430049 & -,5508640643878775530 \\ -1,8132176185335029410 & -,034111186360582433951 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ,03411118636060247 & -,55086406438788824 \\ -1,8132176185334637 & -,03411118636060336 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(N(12))=evalm(&*(T(4),N(16),T(4)^(-1)));
```

$$\begin{bmatrix} -4,1659042762798549145 & 3,1003732899653606498 \\ -5,2750933224913401635 & 4,1659042762798549055 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4,165904276279854651 & 3,100373289965360432 \\ -5,275093322491339907 & 4,165904276279854651 \end{bmatrix}$$

Algunas relaciones:

```
> seq(evalm(&*(T(i)^(-1),N(4*i-2),T(i),N(4*i-2)))=matrix([[1, 0], [0,
> 1]]),i=1..4):evalf(% ,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & -,29\ 10^{-16} \\ ,14\ 10^{-16} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1, \begin{bmatrix} 1,0000 & -,41\ 10^{-15} \\ ,132\ 10^{-14} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1,$$

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & -,108\ 10^{-14} \\ ,227\ 10^{-14} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1, \begin{bmatrix} 1,0000 & -,25\ 10^{-16} \\ ,15\ 10^{-16} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1$$

$$\%1 := \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 1. \end{bmatrix}$$

```
> [seq(evalm(N(4*i-2))*N(4*i-2))=matrix([[1, 0], [0,
> 1]],i=1..4),evalm(N(16))*N(16))=matrix([[1, 0], [0,
> 1]])]:evalf(%,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & -,29\ 10^{-16} \\ ,16\ 10^{-16} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1, \begin{bmatrix} 1,0000 & -,39\ 10^{-15} \\ ,91\ 10^{-15} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1,$$

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & -,99\ 10^{-15} \\ ,310\ 10^{-14} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1, \begin{bmatrix} 1,0000 & -,18\ 10^{-16} \\ ,11\ 10^{-16} & 1,0000 \end{bmatrix} = \%1, \%1 = \%1]$$

$$\%1 := \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 1. \end{bmatrix}$$

```
> evalm(&*(T(1),T(2),T(3),T(4),N(16),T(4)^(-1),T(3)^(-1),T(2)^(-1),T(1)
> ^(-1),N(16)))=matrix([[1, 0], [0, 1]]);
```

$$\begin{bmatrix} ,99999999996457039550 & -,70859290\ 10^{-10} \\ ,16942931000000000000\ 10^{-10} & 1,000000000033885860 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

4.5. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición.

Corte por las componentes 2^a y 3^a

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, se requiere activar el hipervínculo siguiente:

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 3.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones.

Se considera que $k=5$. Región fundamental: polígono rectángulo de 16 lados. Son iguales 1-3, 5-7, 9-11, 13-15.

Elegimos 9 parámetros para su construcción (ver sección 4.3 de la Memoria). Sean éstos:

$$\gamma_1 = \lambda_2, \gamma_2 = \lambda_6, \gamma_3 = \lambda_{10}, \gamma_4 = \lambda_{14}, (C_i = \cosh(\lambda_i)), \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, (\delta_i = d(\lambda_{i-1}, \lambda_{i+3})) \text{ y } \gamma^1 = \lambda_4$$

Cortando por los lados γ^2 y γ^3 , para que uno de los dos quede dividido por la mitad (γ^2 , por ejemplo) tiene que cumplirse:

> S[8]*S[9]*sqrt((C[6]+1)/(C[6]-1)) = C[7]*C[8]*S[9]-S[7]*C[9];

$$S_8 S_9 \sqrt{\frac{C_6 + 1}{C_6 - 1}} = C_7 C_8 S_9 - S_7 C_9$$

Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.

> p:=16:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:

> c(mu[1]):=sqrt((c(gamma[1])+c(delta[1]))/(c(gamma[1])-1));

$$c(\mu_1) := \sqrt{\frac{c(\gamma_1) + c(\delta_1)}{c(\gamma_1) - 1}}$$

> c(mu[2]):=sqrt((c(gamma[2])+c(delta[2]))/(c(gamma[2])-1));

$$c(\mu_2) := \sqrt{\frac{c(\gamma_2) + c(\delta_2)}{c(\gamma_2) - 1}}$$

> c(delta[3]):=c(gamma[3])*s(mu[3])^2-c(mu[3])^2;

$$c(\delta_3) := c(\gamma_3) s(\mu_3)^2 - c(\mu_3)^2$$

> c(mu[4]):=sqrt((c(gamma[4])+c(delta[4]))/(c(gamma[4])-1));

$$c(\mu_4) := \sqrt{\frac{c(\gamma_4) + c(\delta_4)}{c(\gamma_4) - 1}}$$

```

> eqcond:=eta(7,10)*sqrt((C[6]+1)/(C[6]-1))=delta(10,7);
      eqcond := S8 S9 sqrt(C6+1) / (C6-1) = C7 C8 S9 - S7 C9
> c(gamma[1]):=3.; c(gamma[2]):=2.; c(gamma[3]):=3.5; c(gamma[4]):=4.;
      c(gamma[1]) := 3.
      c(gamma[2]) := 2.
      c(gamma[3]) := 3,5
      c(gamma[4]) := 4.
> c(delta[1]):=5.; c(delta[2]):=2.5; c(delta[4]):=4.5;
      c(delta[1]) := 5.
      c(delta[2]) := 2,5
      c(delta[4]) := 4,5

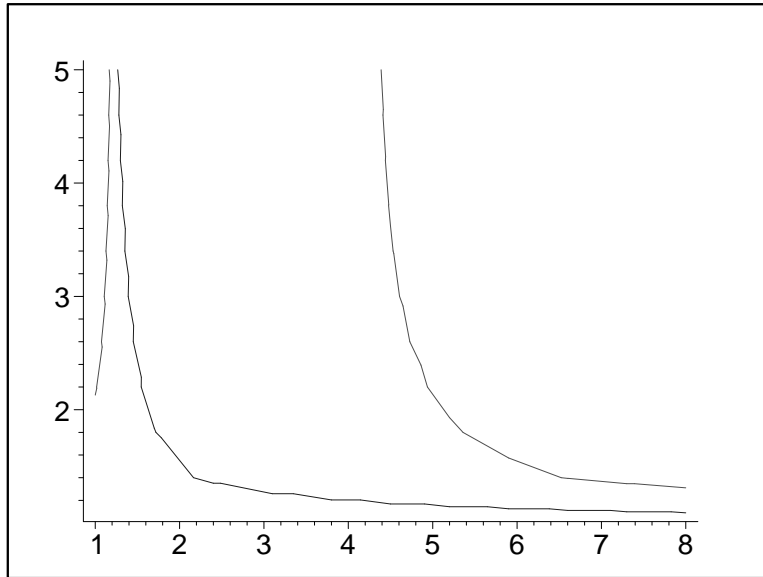
```

Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.

```

> C[1]:=simplify(c(mu[1])); C[5]:=simplify(c(mu[2])); C[13]:=simplify(c(mu[4]));
      C1 := 2.
      C5 := 2,1213203435596425732
      C13 := 1,6832508230603463256
> C[3]:=C[1]:C[7]:=C[5]:C[11]:=C[9]:C[15]:=C[13]:
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..16)]):S[0]:=S[p]:
> C[2]:=c(gamma[1]); C[6]:=c(gamma[2]); C[10]:=c(gamma[3]); C[14]:=c(gamma[4]);
      C2 := 3.
      C6 := 2.
      C10 := 3,5
      C14 := 4.
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
      2., 3., 2., C4, 2,12, 2., 2,12, C8, C9, 3,5, C9, C12, 1,68, 4., 1,68, C16
> eqcond;
      1,7320508075688772935 sqrt(C8^2-1) sqrt(C9^2-1) =
      2,1213203435596425732 C8 sqrt(C9^2-1) - 1,8708286933869706928 C9
> with(plots):
> cde:=implicitplot(eta(6,10)-1,C[8]=1..8,C[9]=1..5,numpoints=100,color=blue):
> peqcd:=implicitplot(rhs(eqcond)-lhs(eqcond),C[8]=1..8,C[9]=1..5,numpoints=100):
> display({cde,peqcd});

```

```

> C[9]:=5.;
                                C9 := 5.

> C8:=solve(eqcond);
                                C8 := 1,0088266968212385181, 4,3917905518519783412
> if eval(eta(6,10)>1,C[8]=C8[1]) then C8[1] else C8[2] fi:C[8]:=%;
                                C8 := 4,3917905518519783412
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
                                2., 3., 2., C4, 2,12, 2., 2,12, 4,39, 5., 3,5, 5., C12, 1,68, 4., 1,68, C16
> C4in1:=solve(
> {cep(p)[2],cep(p)[3],cep(p)[4],cep(p)[5],cep(p)[6],cep(p)[7],cep(p)[8
> ],cep(p)[9]});
                                C4in1 := {18,823305641989850222 < C4}
> minC4:=18.82;
                                minC4 := 18,82
> eta(12,16)=eta(16,12):C4:=solve(%);
                                C4 := 20,665214710011737034, 10,605362363956961413
> if C4[1]>minC4 then C4[1] else C4[2] fi:C[4]:=%;
                                C4 := 20,665214710011737034
> C12in=solve({cep(p)[10],cep(p)[11]});
                                C12in = {2,6432538080919825778 < C12}
> minC12:=2.64;
                                minC12 := 2,64
> eta(4,16)=eta(16,4):C12:=solve(%);
                                C12 := 1,5276999749924905370, 2,9096469188939401699
> if C12[1]>minC12 then C12[1] else C12[2] fi:C[12]:=%;

```

```

C12 := 2,9096469188939401699
> C[16]:=eta(1,15);
C16 := 14,31256427183996065

```

Una solución.

```

> evalf(seq(C[i],i=1..16),5);

2., 3., 2., 20,665, 2,1213, 2., 2,1213, 4,3918, 5., 3,5, 5., 2,9096, 1,6833, 4., 1,6833,
14,313
> s(gamma[4]):=S[14]:
> ParLibres1=['c(gamma[1])'=c(gamma[1]),'c(gamma[2])'=c(gamma[2]),'c(gam
> ma[3])'=c(gamma[3]),'c(gamma[4])'=c(gamma[4])];
      ParLibres1 = [c(γ1) = 3., c(γ2) = 2., c(γ3) = 3,5, c(γ4) = 4.]
> ParLibres2=['c(delta[1])'=c(delta[1]),'c(delta[2])'=c(delta[2]),'c(del
> ta[4])'=c(delta[4])];
      ParLibres2 = [c(δ1) = 5., c(δ2) = 2,5, c(δ4) = 4,5]
> c(mu[3]):=C[9];s(mu[3]):=S[9]:
      c(μ3) := 5.
> ParDep=['c(delta[3])'=simplify(c(delta[3])),'c(gamma^'1')'=C[4]];
      ParDep = [c(δ3) = 59., c(γ'1') = 20,665214710011737034]
> evalf(['c(mu[1])'=C[1], 'c(mu[2])'=C[5], 'c(mu[3])'=C[9], 'c(mu[4])'=C[13],
> 'c(gamma^('2'))'=C[8], 'c(gamma^('3'))'=C[12], 'c(gamma^('4'))'=C[16]],5);

[c(μ1) = 2., c(μ2) = 2,1213, c(μ3) = 5., c(μ4) = 1,6833, c(γ'2') = 4,3918, c(γ'3') = 2,9096,
c(γ'4') = 14,313]

```

Representación de la región fundamental con el corte.

```

> pm:=4:
> X0:=matrix([[0,-pm],[1/pm,0]]):N(16):=matrix([[0,pm],[1/pm,0]]):
> N(1):=evalm(-sqrt((C[16]-1)/2)*X0-sqrt((C[16]+1)/2)*(X0*N(16)));
      N(1) := [ 2,7669987596527722920  10,319908632091646828
               -6,4499428950572792673  -2,7669987596527722920 ]
> A(1):=evalm(X0*sqrt((C[16]+1)/2)+X0*N(16)*sqrt((C[16]-1)/2));
      A(1) := [ -2,5799771580229117069  -11,067995038611089168
               ,69174968991319307300   2,5799771580229117069 ]
> with(linalg):
> evalm(N(10)&*N(6)-N(6)&*N(10)):N610:=evalf(evalm(1/sqrt(-det(%))*%));
      N610 := [ 1,9844617385064541764  1,0788996331763354457
               -2,7232267963111422281  -1,9844617385064541764 ]
> P6:=evalm(N(6)&*N610);det(%);

```

$$P6 := \begin{bmatrix} -40,402818536370872934 & -44,265240740853185807 \\ 36,900008185777941826 & 40,402818536370872931 \end{bmatrix}$$

,9999999999999955

> P10:=evalf(evalm(N610&*N(10)));det(%);

$$P10 := \begin{bmatrix} -1,7593979310778351687 & -1,1364203700014576113 \\ 3,6038434262452670740 & 1,7593979310778351688 \end{bmatrix}$$

1,0000000000000002912

> d610:=-1/2*trace(P6&*P10);

$$d610 := 29,644823562709134034$$

Comprobación:

> -1/2*trace(P6&*A(6))=-1/2*trace(P6&*A(7));

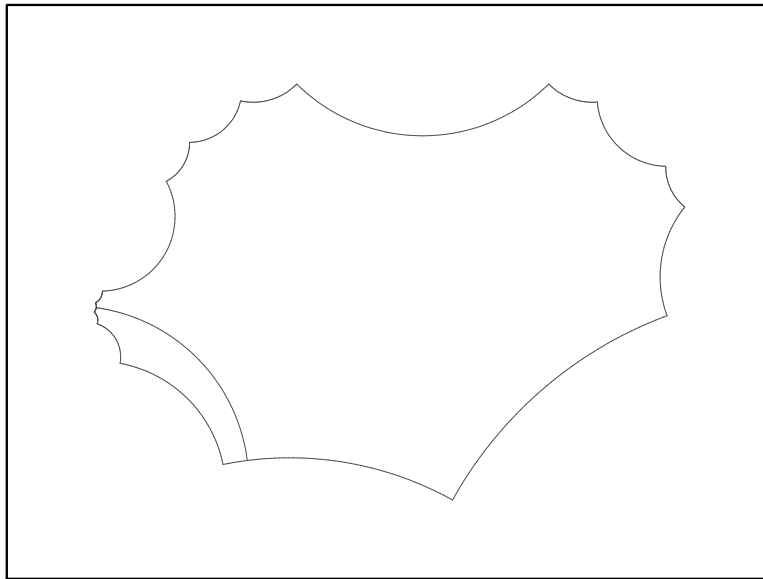
$$1,2247448713915867000 = 1,2247448713915890000$$

> G610:=eval(P,M=evalm(P6*cosh(t*arccosh(d610))+P6&*N610*sinh(t*arccosh(d610))):

> g610:=[evalf(G610[1]),evalf(G610[2]),t=0..1]:

> display(

> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16),plot(g610)});



> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

4.6. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde sujeta a una condición. Corte por las componentes 2^a y 4^a

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la **página vinculada (hoja 3.0)** y, **sin necesidad de guardarla, volver a este documento.**

> Digits:=20:

Observaciones.

Se considera que $k = 5$. Región fundamental: polígono rectángulo de 16 lados. Son iguales 1-3, 5-7, 9-11, 13-15.

Elegimos 9 parámetros para su construcción (ver sección 4.3 de la Memoria). Sean éstos

$$\gamma_1 = \lambda_2, \gamma_2 = \lambda_6, \gamma_3 = \lambda_{10}, \gamma_4 = \lambda_{14}, (C_i = \cosh(\lambda_i)), \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, (\delta_i = d(\lambda_{i-1}, \lambda_{i+3})) \text{ y } \gamma^1 = \lambda_4$$

Cortando por los lados γ^2 y γ^4 , para que uno de los dos quede dividido por la mitad (γ^2 , por ejemplo) tiene que cumplirse:

> p:=16:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:

> eta(14,5)*sqrt((C[6]+1)/(C[6]-1))=Delta(14,5);

$$\begin{aligned} & ((\%3 C_3 + \%2 S_3) S_4 + (-\%1 S_2 + S_{15} S_{16} C_2) C_4) \sqrt{\frac{C_6 + 1}{C_6 - 1}} = \\ & ((\%3 C_3 + \%2 S_3) C_4 + (-\%1 S_2 + S_{15} S_{16} C_2) S_4) C_5 + (-\%3 S_3 - \%2 C_3) S_5 \\ & \%1 := S_{15} C_{16} C_1 - C_{15} S_1 \\ & \%2 := -S_{15} C_{16} S_1 + C_{15} C_1 \\ & \%3 := \%1 C_2 - S_{15} S_{16} S_2 \end{aligned}$$

Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.

> c(mu[1]):=sqrt((c(gamma[1])+c(delta[1]))/(c(gamma[1])-1));

$$c(\mu_1) := \sqrt{\frac{c(\gamma_1) + c(\delta_1)}{c(\gamma_1) - 1}}$$

> c(mu[2]):=sqrt((c(gamma[2])+c(delta[2]))/(c(gamma[2])-1));

$$c(\mu_2) := \sqrt{\frac{c(\gamma_2) + c(\delta_2)}{c(\gamma_2) - 1}}$$

> c(delta[3]):=c(gamma[3])*s(mu[3])^2-c(mu[3])^2;

$$c(\delta_3) := c(\gamma_3) s(\mu_3)^2 - c(\mu_3)^2$$

> c(mu[4]):=sqrt((c(gamma[4])+c(delta[4]))/(c(gamma[4])-1));

$$c(\mu_4) := \sqrt{\frac{c(\gamma_4) + c(\delta_4)}{c(\gamma_4) - 1}}$$

```

> eqcond:=eta(14,5)*sqrt((C[6]+1)/(C[6]-1))=Delta(14,5);

eqcond := ((%3 C3 + %2 S3) S4 + (-%1 S2 + S15 S16 C2) C4) sqrt(C6+1) / sqrt(C6-1) =
((%3 C3 + %2 S3) C4 + (-%1 S2 + S15 S16 C2) S4) C5 + (-%3 S3 - %2 C3) S5
%1 := S15 C16 C1 - C15 S1
%2 := -S15 C16 S1 + C15 C1
%3 := %1 C2 - S15 S16 S2
> c(gamma[1]):=3.;c(gamma[2]):=2.;c(gamma[3]):=3.5;c(gamma[4]):=4.;
c(gamma[1]) := 3.
c(gamma[2]) := 2.
c(gamma[3]) := 3,5
c(gamma[4]) := 4.
> c(delta[1]):=5.;c(delta[2]):=2.5;c(delta[4]):=4.5;
c(delta[1]) := 5.
c(delta[2]) := 2,5
c(delta[4]) := 4,5

```

Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.

```

> C[1]:=simplify(c(mu[1]));C[5]:=simplify(c(mu[2]));C[13]:=simplify(c(mu[4]));
C1 := 2.
C5 := 2,1213203435596425732
C13 := 1,6832508230603463256
> C[3]:=C[1]:C[7]:=C[5]:C[11]:=C[9]:C[15]:=C[13]:
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..16)]):S[0]:=S[p]:
> C[2]:=c(gamma[1]);C[6]:=c(gamma[2]);C[10]:=c(gamma[3]);C[14]:=c(gamma[4]);
C2 := 3.
C6 := 2.
C10 := 3,5
C14 := 4.
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
2., 3., 2., C4, 2,12, 2., 2,12, C8, C9, 3,5, C9, C12, 1,68, 4., 1,68, C16
> eqcond;

```

```

1,7320508075689(12,18605760695 C16 - 11,661903789691 - 7,6594168620507 %1)√C42 - 1
+ 1,7320508075689(-7,659416862051 C16 + 8,2462112512353 + 4,062019202318 %1) C4 =
2,1213203435596(12,186057606954 C16 - 11,661903789691 - 7,6594168620507 %1) C4
+ 2,1213203435596(-7,6594168620507 C16 + 8,2462112512353 + 4,062019202318 %1)
√C42 - 1 - 17,549928774784 C16 + 15,745369689743 + 12,409673645991 %1

```

```
%1 := √C162 - 1
```

```
> C4in=solve({cep(p) [2], cep(p) [3], cep(p) [4], cep(p) [5]});
```

```
      C4in = {7,1403629810052309209 < C4}
```

```
> minC4:=7.14;
```

```
      minC4 := 7,14
```

```
> with(plots):
```

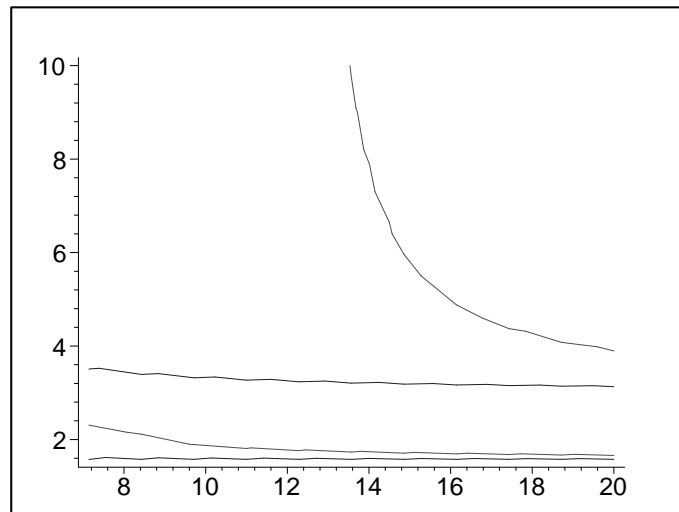
```
> cde:=implicitplot(eta(14,6)-1,C[4]=minC4..20,C[16]=1..10,numpoints=100,
```

```
> color=blue):
```

```
> peqcd:=implicitplot(rhs(eqcond)-lhs(eqcond),C[4]=minC4..20,C[16]=1..10,
```

```
> numpoints=100):
```

```
> display({cde,peqcd});
```



```
> C4:=solve(eval(eqcond,C[16]=8));
```

```
      C4 := 13,929412812118523093, 2,0507696937845966725
```

```
> C[16]:=8.;
```

```
      C16 := 8.
```

```
> if C4[1]>minC4 then C4[1] else C4[2] fi:C[4]:=%;
```

```
      C4 := 13,929412812118523093
```

```
> seq(C[i],i=1..16);
```

```
2., 3., 2., 13,9294128121185231, 2,12132034355964257, 2., 2,12132034355964257,
```

```
C8, C9, 3,5, C9, C12, 1,68325082306034633, 4., 1,68325082306034633, 8.
```

```
> eta(8,12)=eta(12,8):C9:=solve(%);
```

```
      C9 := -1,6801957161885294809, 1,6801957161885294809
```

```

> if C9[1]>1 then C9[1] else C9[2] fi:C[9]:=%;
      C9 := 1,6801957161885294809
> eta(7,12)=eta(12,7):C8:=solve(%);
      C8 := -2,2273521692104515248, 18,835790612913856803
> C8in=solve({cep(p)[6],cep(p)[7],cep(p)[8],cep(p)[9]});
      C8in = {15,316647263694025922 < C8}
> minC8:=15.3;
      minC8 := 15,3
> if C8[1]>minC8 then C8[1] else C8[2] fi:C[8]:=%;
      C8 := 18,835790612913856803
> C[12]:=eta(13,11);
      C12 := 12,74960694024122318

```

Una solución.

```

> evalf(seq(C[i],i=1..16),5);
      2., 3., 2., 13,929, 2,1213, 2., 2,1213, 18,836, 1,6802, 3,5, 1,6802, 12,750, 1,6833, 4.,
      1,6833, 8.
> ParLibres1=['c(gamma[1])'=c(gamma[1]),'c(gamma[2])'=c(gamma[2]),'c(gam
> ma[3])'=c(gamma[3]),'c(gamma[4])'=c(gamma[4])];
      ParLibres1 = [c(γ1) = 3., c(γ2) = 2., c(γ3) = 3,5, c(γ4) = 4.]
> ParLibres2=['c(delta[1])'=c(delta[1]),'c(delta[2])'=c(delta[2]),'c(del
> ta[4])'=c(delta[4])];
      ParLibres2 = [c(δ1) = 5., c(δ2) = 2,5, c(δ4) = 4,5]
> c(mu[3]):=C[9];s(mu[3]):=S[9]:
      c(μ3) := 1,6801957161885294809
> ParDep1=['c(delta[3])'=simplify(c(delta[3])),'c(gamma^'1')'=C[4]];
      ParDep1 = [c(δ3) = 3,5576441117457137708, c(γ'1') = 13,929412812118523093]
> evalf(['c(mu[1])'=C[1], 'c(mu[2])'=C[5], 'c(mu[3])'=C[9], 'c(mu[4])'=C[13],
> 'c(gamma^('2'))'=C[8], 'c(gamma^('3'))'=C[12], 'c(gamma^('4'))'=C[16]],5);
      [c(μ1) = 2., c(μ2) = 2,1213, c(μ3) = 1,6802, c(μ4) = 1,6833, c(γ'2') = 18,836,
      c(γ'3') = 12,750, c(γ'4') = 8.]

```

Representación de la región fundamental con el corte.

```

> pm:=4:
> X0:=matrix([[0,-pm],[1/pm,0]]):N(16):=matrix([[0,pm],[1/pm,0]]):
> N(1):=evalm(-sqrt((C[16]-1)/2)*X0-sqrt((C[16]+1)/2)*(X0&*N(16)));
      N(1) := 
$$\begin{bmatrix} 2,1213203435596425732 & 7,4833147735478827712 \\ -4,6770717334674267320 & -2,1213203435596425732 \end{bmatrix}$$

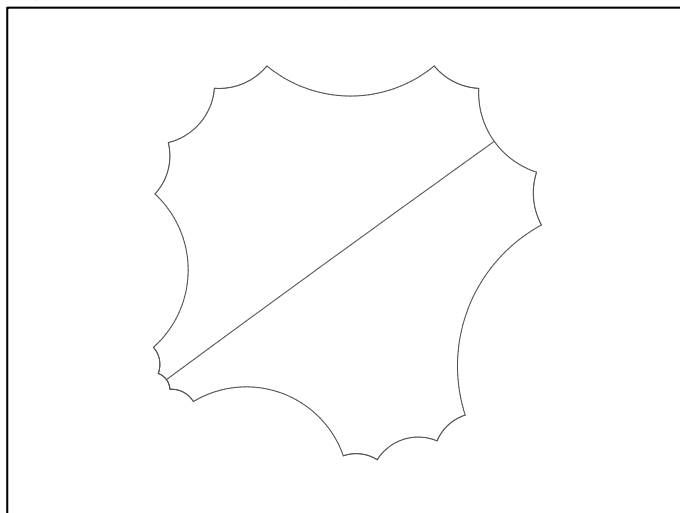
> A(1):=evalm(X0*sqrt((C[16]+1)/2)+X0&*N(16)*sqrt((C[16]-1)/2));
      A(1) := 
$$\begin{bmatrix} -1,8708286933869706928 & -8,4852813742385702928 \\ ,53033008588991064330 & 1,8708286933869706928 \end{bmatrix}$$


```

```

> with(linalg):
> evalm(N(14)&*N(6)-N(6)&*N(14));N614:=evalf(evalm(1/sqrt(-det(%))*%));
      [ -96,690972484663242996  -131,97814658742689347 ]
      [ -134,59835330849697273   96,690972484663242996 ]
N614 := [ - ,58721299325084035004  - ,80151518295664851614 ]
        [ - ,81742793460323662943   ,58721299325084035004 ]
> P6:=evalm(N(6)&*N614);det(%);
      [ -10,919273021261943475  -5,5506960983785755146 ]
      [ 21,660440633379243976   10,919273021261943474 ]
      ,99999999999999948
> P14:=evalf(evalm(N614&*N(14)));det(%);
      [ 2,4003095146479085148  -4,8231859880512210699 ]
      [ 1,4018712491825792710  -2,4003095146479085145 ]
      ,99999999999999985
> d614:=-1/2*trace(P6&*P14);
      d614 := 82,336482441571721250
> G614:=eval(P,M=evalm(P6*cosh(t*arccosh(d614))+P6&*N614*sinh(t*arccosh
> (d614))):g614:=[evalf(G614[1]),evalf(G614[2]),t=0..1]:
> display(
> {seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16),plot(g614)});

```



Comprobación:

```

> -1/2*trace(P6&*A(6))=-1/2*trace(P6&*A(7));
      1,2247448713915889800 = 1,2247448713915879250
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";

```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

4.7. Una Región con cinco componentes en el borde sujeta a una condición: $\gamma^1 = \gamma^2 + \gamma^3$

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 3.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones.

Se considera que $k=5$. Región fundamental: polígono rectángulo de 16 lados. Son iguales 1-3, 5-7, 9-11, 13-15.

Elegimos 9 parámetros para su construcción (ver Sección 4.3 de la Memoria). Sean éstos

$$\gamma_1 = \lambda_2, \gamma_2 = \lambda_6, \gamma_3 = \lambda_{10}, \gamma_4 = \lambda_{14}, (C_i = \cosh(\lambda_i)), \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, (\delta_i = d(\lambda_{i-1}, \lambda_{i+3})) \text{ y } \gamma^{1'} = \lambda_4$$

Para que $\gamma^{1'} = \gamma^{2'} + \gamma^{3'}$ se requiere que:

> C[12]=C[4]*C[8]-S[4]*S[8];

$$C_{12} = C_4 C_8 - S_4 S_8$$

Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.

> p:=16:C[0]:=C[p]:S[0]:=S[p]:

> c(mu[1]):=sqrt((c(gamma[1])+c(delta[1]))/(c(gamma[1])-1));

$$c(\mu_1) := \sqrt{\frac{c(\gamma_1) + c(\delta_1)}{c(\gamma_1) - 1}}$$

> c(mu[2]):=sqrt((c(gamma[2])+c(delta[2]))/(c(gamma[2])-1));

$$c(\mu_2) := \sqrt{\frac{c(\gamma_2) + c(\delta_2)}{c(\gamma_2) - 1}}$$

> c(delta[3]):=c(gamma[3])*s(mu[3])^2-c(mu[3])^2;

$$c(\delta_3) := c(\gamma_3) s(\mu_3)^2 - c(\mu_3)^2$$

> c(mu[4]):=sqrt((c(gamma[4])+c(delta[4]))/(c(gamma[4])-1));

$$c(\mu_4) := \sqrt{\frac{c(\gamma_4) + c(\delta_4)}{c(\gamma_4) - 1}}$$

> eqcond:=C[12]=C[4]*C[8]-S[4]*S[8];

$$eqcond := C_{12} = C_4 C_8 - S_4 S_8$$

```

> c(gamma[1]):=3.;c(gamma[2]):=2.;c(gamma[3]):=3.5;c(gamma[4]):=4.;
      c( $\gamma_1$ ) := 3.
      c( $\gamma_2$ ) := 2.
      c( $\gamma_3$ ) := 3,5
      c( $\gamma_4$ ) := 4.
> c(delta[1]):=5.;c(delta[2]):=2.5;c(delta[4]):=4.5;
      c( $\delta_1$ ) := 5.
      c( $\delta_2$ ) := 2,5
      c( $\delta_4$ ) := 4,5

```

Valor de los parámetros dependientes y cálculo de la región.

```

> C[1]:=simplify(c(mu[1]));C[5]:=simplify(c(mu[2]));C[13]:=simplify(c(mu[4]));
      C1 := 2.
      C5 := 2,1213203435596425732
      C13 := 1,6832508230603463256
> C[3]:=C[1]:C[7]:=C[5]:C[11]:=C[9]:C[15]:=C[13]:
> S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1),i=1..16)]):S[0]:=S[p]:
> C[2]:=c(gamma[1]);C[6]:=c(gamma[2]);C[10]:=c(gamma[3]);C[14]:=c(gamma[4]);
      C2 := 3.
      C6 := 2.
      C10 := 3,5
      C14 := 4.
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
      2., 3., 2., C4, 2,12, 2., 2,12, C8, C9, 3,5, C9, C12, 1,68, 4., 1,68, C16
> C4in=solve({cep(p)[2],cep(p)[3],cep(p)[4],cep(p)[5]});
      C4in = {7,1403629810052309209 < C4}
> C[4]:=70.;
      C4 := 70.
> solve({cep(p)[6],C[8]<C[4],C[8]>1});
      {C8 < 70., 2,6558583080682910875 < C8}
> minC8:=2.65;maxC8:=C[4];
      minC8 := 2,65
      maxC8 := 70.
> S[12]:=S[4]*C[8]-C[4]*S[8];C[12]:=C[4]*C[8]-S[4]*S[8];
      S12 := 69,992856778388464346 C8 - 70.  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ 
      C12 := 70. C8 - 69,992856778388464346  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ 
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
2., 3., 2., 70., 2,12, 2., 2,12, C8, C9, 3,5, C9, 70. C8 - 70,0  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ ., 1,68, 4., 1,68, C16
> eq89a:=eta(9,16)-eta(16,9);

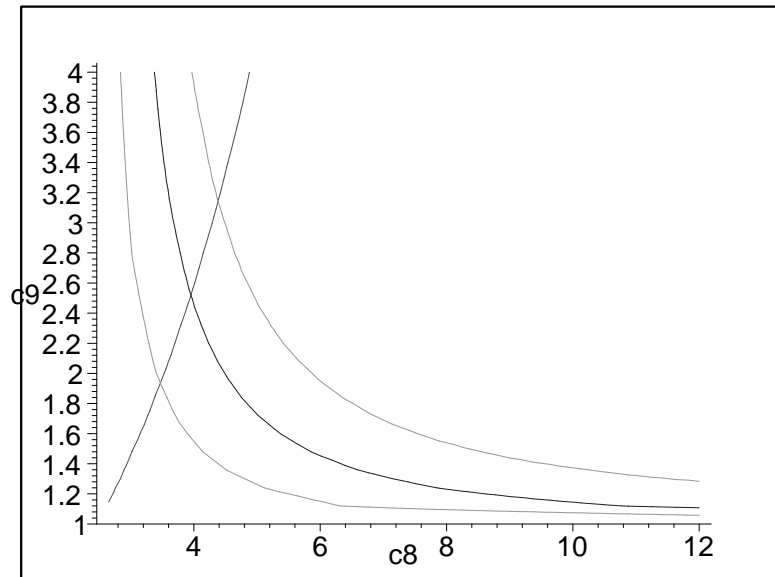
```

```

eq89a := 22,933327277130983290 C9 (70. C8 - 69,992856778388464346  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ )
- 168,35705295369572613 C8 + 150,62934960176102963  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ 
- 15,093458848123580452  $\sqrt{C_9^2 - 1}$ 
- 17,589059099337860829 C9 (69,992856778388464346 C8 - 70.  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ )
> eq89b:=eta(11,16)-eta(16,11);

eq89b := -664,96628115717339792 C8 + 727,98412253916585889  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ -
3,3541019662496845446
(239,87322475456369206 C8 - 221,84346995589356612  $\sqrt{C_8^2 - 1}$ ) C9
+ 306,04482745330337206  $\sqrt{C_9^2 - 1}$ 
> with(plots):
> peq89a:=implicitplot(eq89a,C[8]=minC8..12,C[9]=1..4,color=red,labels=
> [c8,c9]):
> peq89b:=implicitplot(eq89b,C[8]=minC8..12,C[9]=1..4,color=green,labels=
> [c8,c9]):
> pcep7:=implicitplot(rhs(cep(p)[7])-1,C[8]=minC8..12,C[9]=1..4,color=blue,
> labels=[c8,c9]):
> display({peq89a,peq89b,pcep7});

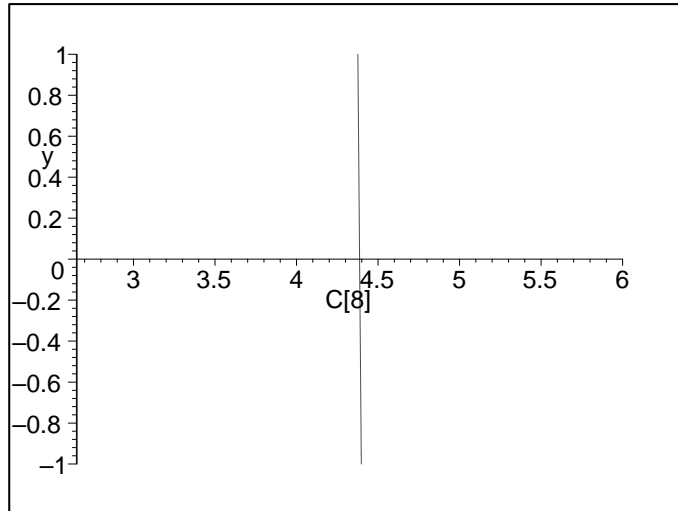
```



```

> C9:=solve(eq89b,C[9]):p8_1:=eval(eq89a,C[9]=C9[1]):p8_2:=eval(
> eq89a,C[9]=C9[2]):
> plot(p8_1,C[8]=minC8..6,y=-1..1);

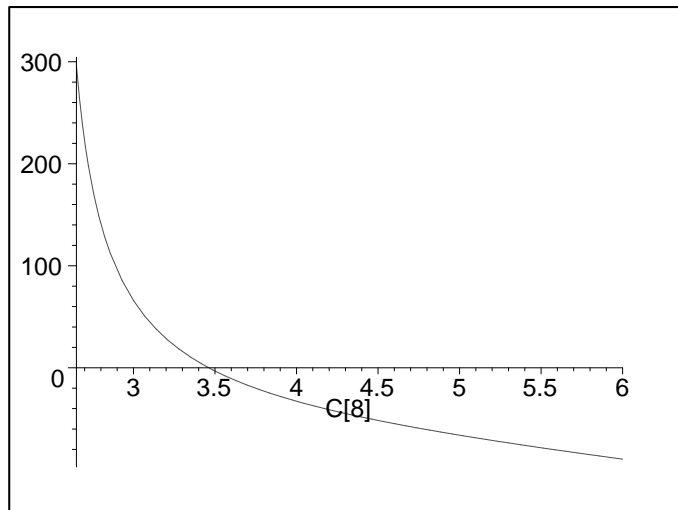
```



```

> eval(p8_1,C[8]=4.3864546)=0;
      ,331760160235 10-5 = 0
> C81:=4.3864546;C91:=eval(C9[1],C[8]=C81);
      C81 := 4,3864546
      C91 := 3,1566442464289992062
> eval(seq(cep(p)[i],i=6..11),[C[8]=C81,C[9]=C91]);
1 < 51,37939909326062438, 1 < 25,48459685852381642, 1 < 12,5089364701326221,
1 < 4,500000514499679550, 1 < 5,24404564756852967, 1 < 1,68325187635784208
> plot(p8_2,C[8]=minC8..6);

```



```

> eval(p8_2,C[8]=3.4616506)=0;
      -523035821082 10-5 = 0
> C82:=3.4616506;C92:=eval(C9[2],C[8]=C82);
      C82 := 3,4616506
      C92 := 1,9317448394874324853

```

```
> eval(seq(cep(p)[i], i=6..11), [C[8]=C82, C[9]=C92]);
1 < 27,01080722809789021, 1 < -18,99509768098923045, 1 < 16,1677356912373582,
1 < 77,887362466335866200, 1 < 652,36470330383288884, 1 < 758,47426837111142445
> C[8]:=C81; C[9]:=C91;
```

$$C_8 := 4,3864546$$

$$C_9 := 3,1566442464289992062$$

```
> C[16]:=eta(1,15);
```

$$C_{16} := 6,244807151333361866$$

Comprobación:

```
> alpha(1,9)=alpha(9,1);
176,9085371382431802 = 176,9086198092632635
```

Una solución.

```
> evalf(seq(C[i], i=1..16), 5);
2., 3., 2., 70., 2,1213, 2., 2,1213, 4,3865, 3,1566, 3,5, 3,1566, 8,13, 1,6833, 4., 1,6833,
6,2448
> ParLibres1=['c(gamma[1])'=c(gamma[1]), 'c(gamma[2])'=c(gamma[2]), 'c(gamma
> [3])'=c(gamma[3]), 'c(gamma[4])'=c(gamma[4])];
ParLibres1 = [c(γ1) = 3., c(γ2) = 2., c(γ3) = 3,5, c(γ4) = 4.]
> ParLibres2=['c(delta[1])'=c(delta[1]), 'c(delta[2])'=c(delta[2]), 'c(delta
> [4])'=c(delta[4])];
ParLibres2 = [c(δ1) = 5., c(δ2) = 2,5, c(δ4) = 4,5]
> c(mu[3]):=C[9]; s(mu[3]):=S[9]:
c(μ3) := 3,1566442464289992062
> ParDep=evalf(['c(delta[3])'=simplify(c(delta[3])), 'c(gamma^'1')'=C[4]], 6);
ParDep = [c(δ3) = 21,4110, c(γ'1') = 70.]
> evalf(['c(mu[1])'=C[1], 'c(mu[2])'=C[5], 'c(mu[3])'=C[9], 'c(mu[4])'=C[13],
> 'c(gamma^('2'))'=C[8], 'c(gamma^('3'))'=C[12], 'c(gamma^('4'))'=C[16]], 5);
```

$[c(\mu_1) = 2., c(\mu_2) = 2,1213, c(\mu_3) = 3,1566, c(\mu_4) = 1,6833, c(\gamma^{2'}) = 4,3865, c(\gamma^{3'}) = 8,13,$
 $c(\gamma^{4'}) = 6,2448]$

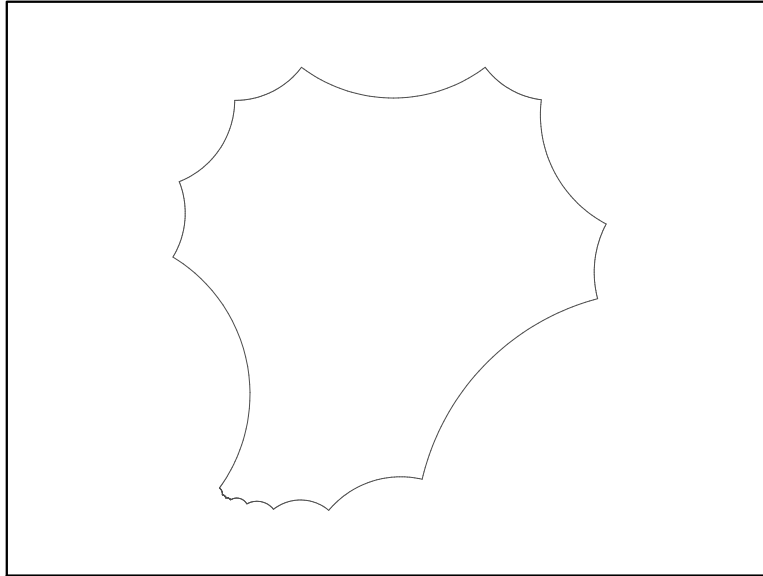
Representación de la región fundamental.

```
> with(plots):
> pm:=4:
> X0:=matrix([[0,-pm], [1/pm,0]]):N(16):=matrix([[0,pm], [1/pm, 0]]):
> N(1):=evalm(-sqrt((C[16]-1)/2)*X0-sqrt((C[16]+1)/2)*(X0&*N(16)));
N(1) :=  $\begin{bmatrix} 1,9032612998920250554 & 6,4775348096839197864 \\ -4,0484592560524498665 & -1,9032612998920250554 \end{bmatrix}$ 
> A(1):=evalm(X0*sqrt((C[16]+1)/2)+X0&*N(16)*sqrt((C[16]-1)/2));
```

```

A(1) := [ -1,6193837024209799466  -7,6130451995681002216 ]
         ,47581532497300626385    1,6193837024209799466 ]
> display({seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16)});

```



Comprobación:

```
> arcsinh(S[4])=arcsinh(S[8])+arcsinh(S[12]);
```

```
4,9415913982960751992 = 4,9415913982960752000
```

```
> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
```

“FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR”

4.8. Una Región Fundamental con cinco componentes en el borde. Corte y pegado

El documento se presenta desarrollado. Puede también ejecutarse cada una de las fases del proceso o el documento completo, con **Edit+Execute+Worksheet**. En este caso, pueden existir variaciones respecto al original, que se corrigen fácilmente, obteniéndose los mismos resultados.

En cualquier caso, *se requiere activar el hipervínculo siguiente:*

Pulsar aquí, ejecutar la página vinculada (hoja 3.0) y, sin necesidad de guardarla, volver a este documento.

> Digits:=20:

Observaciones.

Se considera que $k=5$. Región fundamental: polígono rectángulo de 16 lados. Son iguales 1-3, 5-7, 9-11, 13-15.

Elegimos 9 parámetros (ver sección 4.3 de la Memoria):

$$\gamma_1 = \lambda_2, \gamma_2 = \lambda_6, \gamma_3 = \lambda_{10}, \gamma_4 = \lambda_{14}, (C_i = \cosh(\lambda_i)), \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, (\delta_i = d(\lambda_{i-1}, \lambda_{i+3})) \text{ y } \gamma_1' = \lambda_4$$

Primeras relaciones. Asignación de valores a los parámetros libres.

> p:=16:S:=table([seq(sqrt((C[i])^2-1), i=1..16)]):S[0]:=S[p]:
> c(mu[1]):=sqrt((c(gamma[1])+c(delta[1]))/(c(gamma[1])-1));

$$c(\mu_1) := \sqrt{\frac{c(\gamma_1) + c(\delta_1)}{c(\gamma_1) - 1}}$$

> c(mu[2]):=sqrt((c(gamma[2])+c(delta[2]))/(c(gamma[2])-1));

$$c(\mu_2) := \sqrt{\frac{c(\gamma_2) + c(\delta_2)}{c(\gamma_2) - 1}}$$

> c(mu[3]):=sqrt((c(gamma[3])+c(delta[3]))/(c(gamma[3])-1));

$$c(\mu_3) := \sqrt{\frac{c(\gamma_3) + c(\delta_3)}{c(\gamma_3) - 1}}$$

> c(mu[4]):=sqrt((c(gamma[4])+c(delta[4]))/(c(gamma[4])-1));

$$c(\mu_4) := \sqrt{\frac{c(\gamma_4) + c(\delta_4)}{c(\gamma_4) - 1}}$$

> c(gamma[1]):=3.; c(gamma[2]):=2.6; c(gamma[3]):=2.9; c(gamma[4]):=2.8;

$$c(\gamma_1) := 3.$$

$$c(\gamma_2) := 2,6$$

$$c(\gamma_3) := 2,9$$

```

c( $\gamma_4$ ) := 2,8
> c(delta[1]):=13.;c(delta[2]):=13.5;c(delta[3]):=14.;c(delta[4]):=12.;
c( $\delta_1$ ) := 13.
c( $\delta_2$ ) := 13,5
c( $\delta_3$ ) := 14.
c( $\delta_4$ ) := 12.

```

Valor del parámetro dependiente y cálculo de la región.

```

> C[1]:=simplify(c(mu[1]));C[5]:=simplify(c(mu[2]));C[9]:=simplify(c(mu[3]));
> C[13]:=simplify(c(mu[4]));
C1 := 2,8284271247461900976
C5 := 3,1721443851123800950
C9 := 2,9824045403173029568
C13 := 2,8674417556808755906
> C[3]:=C[1]:C[7]:=C[5]:C[11]:=C[9]:C[15]:=C[13]:
> C[2]:=c(gamma[1]);C[6]:=c(gamma[2]);C[10]:=c(gamma[3]);C[14]:=c(gamma[4]);
C2 := 3.
C6 := 2,6
C10 := 2,9
C14 := 2,8
> evalf(seq(C[i],i=1..16),3);
2,83, 3., 2,83, C4, 3,17, 2,6, 3,17, C8, 2,98, 2,9, 2,98, C12, 2,87, 2,8, 2,87, C16
> C4in:=solve({cep(p)[2],cep(p)[3],cep(p)[4],cep(p)[5]});
C4in := {1,8324991025426266708 < C4}
> C[4]:=2.85;
C4 := 2,85
> C8in:=solve({cep(p)[6],cep(p)[7],cep(p)[8],cep(p)[9]});
C8in := {2,1105827213455174421 < C8}
> minC8:=2.11;
minC8 := 2,11
> eta(12,16)=eta(16,12):C8:=solve(%);
C8 := 1,6041182465891340169, 2,3718908111324250934
> if C8[1]>minC8 then C8[1] else C8[2] fi:C[8]:=%;
C8 := 2,3718908111324250934
> C12in:=solve({cep(p)[10],cep(p)[11]});
C12in := {2,6500817721061161885 < C12}
> minC12:=2.65;
minC12 := 2,65
> eta(8,16)=eta(16,8):C12:=solve(%);

```



```

C12 := 1,0906885155084259439, 2,9387239552638409699
> if C12[1]>minC12 then C12[1] else C12[2] fi:C[12]:=%;
      C12 := 2,9387239552638409699
> C[16]:=eta(1,15);
      C16 := 2,640865019327023616

```

Una solución.

```

> evalf(seq(C[i],i=1..16),5);

2,8284, 3., 2,8284, 2,85, 3,1721, 2,6, 3,1721, 2,3719, 2,9824, 2,9, 2,9824, 2,9387, 2,8674,
2,8, 2,8674, 2,6409
> ParLibres1=['c(gamma[1])'=c(gamma[1]), 'c(gamma[2])'=c(gamma[2]), 'c(
> gamma[3])'=c(gamma[3]), 'c(gamma[4])'=c(gamma[4])];
      ParLibres1 = [c(γ1) = 3., c(γ2) = 2,6, c(γ3) = 2,9, c(γ4) = 2,8]
> ParLibres2=['c(delta[1])'=c(delta[1]), 'c(delta[2])'=c(delta[2]), 'c(
> delta[3])'=c(delta[3]), 'c(delta[4])'=c(delta[4])];
      ParLibres2 = [c(δ1) = 13., c(δ2) = 13,5, c(δ3) = 14., c(δ4) = 12.]
> ParDep=['c(gamma^(1'))'=C[4]];
      ParDep = [c(γ1) = 2,85]
> evalf(['c(mu[1])'=C[1], 'c(mu[2])'=C[5], 'c(mu[3])'=C[9], 'c(mu[4])'=C[13],
> 'c(gamma^(2'))'=C[8], 'c(gamma^(3'))'=C[12], 'c(gamma^(4'))'=C[16]],5);

[c(μ1) = 2,8284, c(μ2) = 3,1721, c(μ3) = 2,9824, c(μ4) = 2,8674, c(γ2) = 2,3719,
c(γ3) = 2,9387, c(γ4) = 2,6409]

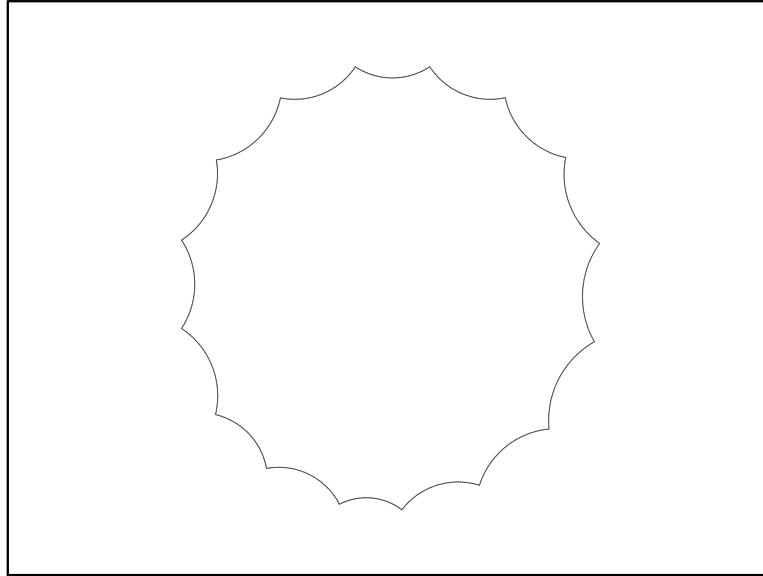
```

Representación de la región fundamental.

```

> with(plots):
> pm:=8:
> X0:=matrix([[0,-pm],[1/pm,0]]):N(16):=matrix([[0,pm],[1/pm,0]]):
> N(1):=evalm(-sqrt((C[16]-1)/2)*X0-sqrt((C[16]+1)/2)*(X0*N(16))):
> A(1):=evalm(X0*sqrt((C[16]+1)/2)+X0*N(16)*sqrt((C[16]-1)/2)):
> display({seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16)});

```



```
> pol1:=seq(plot(gp(i),axes=None,scaling=constrained,style=POINT,symbol=
> POINT,numpoints=30),i=6..11):
```

Corte y pegado.

Cortamos por $\rho_{2,3}$, perpendicular a $\gamma_2 = \lambda_6$, $\gamma_3 = \lambda_{10}$, y pegamos μ_3 con μ_3' .

```
> with(linalg):
> evalm(N(10)&*N(6)-N(6)&*N(10)):Q[2,3]:=evalm(1/sqrt(-det(%))*%);

$$Q_{2,3} := \begin{bmatrix} ,13228710460350274417 & -,33604964051152086309 \\ -2,9236755631105597247 & -,13228710460350274417 \end{bmatrix}$$

> B6:=evalm(N(6)&*Q[2,3]);B10:=evalm(Q[2,3]&*N(10));

$$B6 := \begin{bmatrix} -2,6524036044841414233 & -1,0885069203258975611 \\ 7,3818959999581110524 & 2,6524036044841414232 \end{bmatrix}$$


$$B10 := \begin{bmatrix} 1,7656023742381888856 & -,61266807108057991351 \\ 6,7203628494196550513 & -1,7656023742381888855 \end{bmatrix}$$

> cosh(arccosh(C[8])+arccosh(C[12])):C[12]:=%;

$$C_{12} := 12,913695746221999741$$

> C[11]:=C[7];C[8]:=C[10];

$$C_{11} := 3,1721443851123800950$$


$$C_8 := 2,9$$

> C[7]:=-1/2*trace(evalm(B6&*B10));C[9]:=C[7];

$$C_7 := 10,601996827468203646$$


$$C_9 := 10,601996827468203646$$

> C[10]:=-1/2*trace(evalm(A(7)&*B6));C[6]:=-1/2*trace(evalm(A(6)&*B6));

$$C_{10} := 1,1523110369622178148$$

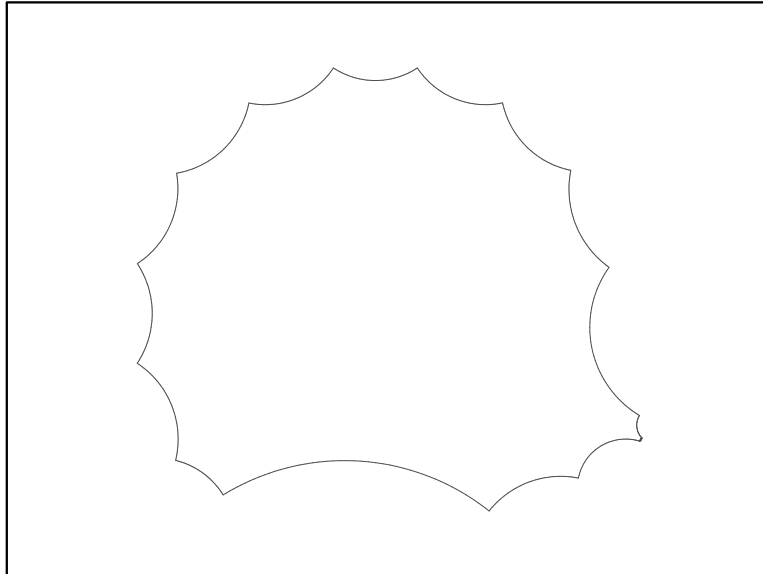

$$C_6 := 1,6218735567459371198$$

```

```

> evalf(seq(C[i],i=1..16),5);
2,8284, 3., 2,8284, 2,85, 3,1721, 1,6219, 10,602, 2,9, 10,602, 1,1523, 3,1721, 12,914,
2,8674, 2,8, 2,8674, 2,6409
> display({seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16)});

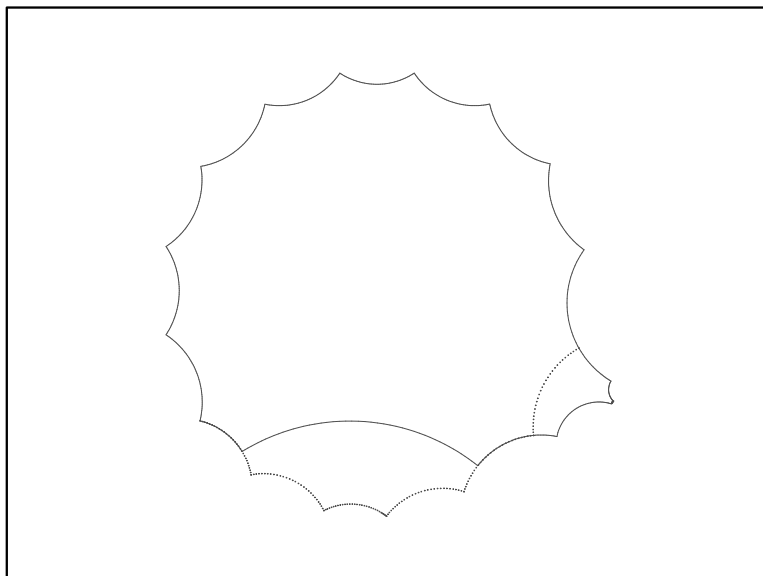
```



```

> display({p011,seq(plot(gp(i),axes=none,scaling=constrained),i=1..16)});

```



```

> "FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR";
"FIN DE LA HOJA. SIN GUARDAR, VOLVER A LA HOJA ANTERIOR O CERRAR"

```