

TESIS DOCTORAL

REGULARIZACIÓN DE LA DINÁMICA CAÓTICA EN  
SISTEMAS NO AUTÓNOMOS BAJO PERTURBACIONES  
PERIÓDICAS GENERALIZADAS

Ángel María Martínez García Hoz

Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad  
Complutense de Madrid



DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LOS MATERIALES  
FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Madrid, 2010



DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LOS MATERIALES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

REGULARIZACIÓN DE LA DINÁMICA CAÓTICA EN  
SISTEMAS NO AUTÓNOMOS BAJO PERTURBACIONES  
PERIÓDICAS GENERALIZADAS

Ángel María Martínez García Hoz

Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad  
Complutense de Madrid

Director: Dr. D. Ricardo Chacón García  
Departamento de Física Aplicada  
Universidad de Extremadura

Tutor: Dr. D. Manuel Yuste Llandres  
Departamento de Física de los Materiales  
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Madrid, 2010



## **Agradecimientos**

En primer lugar deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi compañero y amigo, Dr. Ricardo Chacón García, director de esta Tesis Doctoral, por su labor de dirección y por su inestimable ayuda en la realización de este trabajo. Él fue quien me inició en las labores de investigación cuando ambos coincidimos como profesores en la Escuela Universitaria Politécnica de Almadén y sin su ánimo, generosidad e infinita paciencia no hubiera podido llevarla a buen término. Agradecer también al Dr. Manuel Yuste Llandres, tutor de esta Tesis Doctoral, por haberme orientado en todo lo referente a su tramitación, agradecimiento que hago extensivo al personal del Departamento de Física de Materiales de la UNED.

Gracias a mis compañeros de la Escuela Universitaria Politécnica de Almadén y del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Castilla-La Mancha, por su apoyo y por facilitarme los medios necesarios para llevar a cabo este trabajo en todas las etapas del mismo.

Y finalmente quiero agradecer a toda mi familia el apoyo que me han proporcionado siempre, y en especial a Pilar.



*A mis hijos Ana y Carlos*





# Índice

<i>Lista de figuras</i> .....	xi
<i>Lista de tablas</i> .....	xvii
<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>2. UMBRAL ORDEN CAOS</b> .....	<b>5</b>
2.1. Introducción .....	5
2.2. Conceptos preliminares .....	7
2.2.1. Definición de caos .....	7
2.2.2. Estructura homoclina .....	9
2.2.3. Aplicación de Poincaré .....	10
2.2.4. El método de Melnikov .....	13
2.3. Mecanismo físico. Conjetura de invariancia del impulso mecánico .....	17
2.4. El oscilador de Duffing simétrico, con dos pozos de potencial y paramétricamente amortiguado mediante pulsos periódicos simétricos .....	19
2.4.1. El oscilador de Duffing .....	21
2.4.2. Pulsos armónicos $p(t;T)=\cos(2\pi t/T)$ .....	24
2.4.2.1. Análisis de Melnikov .....	25
2.4.2.2. Teorema de inhibición del comportamiento caótico .....	27
2.4.2.3. Análisis de la función umbral .....	27
2.4.2.4. Estudio numérico .....	29
2.4.3. Pulsos cnoidales $p(t,T)=\text{cn}(4K(m)t/T;m)$ .....	29
2.4.3.1. Análisis de Melnikov .....	30
2.4.3.2. Teorema de inhibición del comportamiento caótico .....	33
2.4.3.3. Análisis de la función umbral .....	34
2.4.4. Pulsos rectangulares $p(t;T)=s(t;a,T)$ .....	38
2.4.4.1. Análisis de Melnikov .....	39
2.4.4.2. Teorema de inhibición del comportamiento caótico .....	40
2.4.5. Mecanismo físico. Invariancia del impulso mecánico .....	41
2.4.5.1. Condición de invariancia del impulso mecánico .....	41
2.4.5.2. Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico .....	44
2.4.6. Caracterización numérica de una ruta orden-caos bajo cambios en la forma de onda del pulso .....	48

2.5. El <i>kicked rotator</i> amortiguado sometido a pulsos periódicos no ideales (NIPKR) .....	65
2.5.1. El sistema integrable subyacente: el péndulo .....	68
2.5.2. Caso $m=0$ $p(t;T,m=0)=\cos^2(\pi t/T)$ .....	73
2.5.2.1. Análisis de Melnikov.....	74
2.5.2.2. Teorema de inhibición del comportamiento caótico .....	75
2.5.2.3. Análisis de la función umbral y verificación numérica .....	76
2.5.3. Pulsos modelados con la función denam $p(t;T,m)$ .....	78
2.5.3.1. Análisis de Melnikov.....	78
2.5.3.2. Teorema de inhibición del comportamiento caótico .....	80
2.5.3.3. Análisis de la función umbral y verificación numérica .....	81
2.5.4. Mecanismo Físico. Invariancia del impulso mecánico transmitido .....	87
2.5.4.1. Condición de invariancia del impulso mecánico .....	87
2.5.4.2. Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico .....	91
2.5.5. Caracterización numérica de una ruta orden-caos bajo cambios en la forma de onda del pulso.....	95
<b>3. ESTABILIDAD DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS</b> .....	<b>105</b>
3.1. Introducción .....	105
3.2. Balance armónico elíptico (BAE).....	106
3.2.1. Métodos perturbativos elípticos .....	106
3.2.2. Balance armónico elíptico .....	106
3.2.3. Series generalizadas de Fourier .....	108
3.3. Fronteras de estabilidad de la solución estacionaria de un oscilador de Duffing.....	115
3.3.1. Balance armónico elíptico de primer orden .....	117
3.3.2. Análisis y verificación numérica de la frontera de estabilidad .....	119
3.3.3. Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido.....	123
3.4. Fronteras de estabilidad de la solución estacionaria del NIPKR.....	126
3.4.1. Caso armónico $m=0$ .....	128
3.4.1.1. Balance armónico circular (BAC) .....	128
3.4.1.2. Verificación numérica de la frontera de inestabilidad .....	134
3.4.2. Caso general elíptico.....	134
3.4.2.1. Balance armónico elíptico de primer orden.....	134
3.4.2.2. Análisis y verificación numérica de la frontera de estabilidad .....	138
3.4.3. Inestabilidad y umbral caótico.....	145
3.4.3.1. Regiones caótica y de inestabilidad en el espacio de parámetros .....	145
3.4.3.2. Crisis inducida por el cambio en la forma de onda del pulso. Mapa Elíptico.....	145
<b>4. ESTABILIDAD DE ATRACTORES EXTRAÑOS NO CAÓTICOS</b> .....	<b>155</b>
4.1. Introducción .....	155
4.2. Generalización elíptica de un péndulo plano con forzamiento cuasiperiódico .....	158
4.3. Generalización elíptica de una aplicación 2D .....	166
<b>5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS</b> .....	<b>177</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>181</b>

## Lista de figuras

Fig. 2-1	(a) Órbita homoclina que conecta el punto $I$ consigo mismo. (b) Órbitas heteroclinas que conectan los puntos $I_1$ e $I_2$ .....	9
Fig. 2-2	(a) Punto homoclino transversal. (b) Punto heteroclino transversal.....	10
Fig. 2-3	Órbitas estables e inestables de un punto fijo hiperbólico en el espacio de fases. (a) Sistema integrable no perturbado con estructura homoclina. (b) Sistema perturbado: la órbita inestable va por fuera de la órbita estable ( $D < 0$ ). (c) Sistema perturbado: la órbita inestable va por dentro de la órbita estable ( $D > 0$ ). (d) Sistema perturbado: las órbitas estable e inestable intersectan iniciando el movimiento caótico ( $D = 0$ ) [cf. Ec. (2.13)].....	13
Fig. 2-4	(a) Pulso cnoidal $\text{cn}(4K(m)t/T; m)$ para distintos valores del parámetro elíptico $m$ . (b) Pulso rectangular $s(t; a, T)$ para distintos valores de $a$ con $a = a(m, T)$ de manera que transmitan el mismo impulso mecánico que los pulsos cnoidales representados [cf. Ec. (2.102)] .....	20
Fig. 2-5	Potencial del oscilador de Duffing $U(x) = -(1/2)x^2 + (\beta/4)x^4$ y niveles energéticos de la separatriz ( $E = 0$ ), las órbitas exteriores ( $E > 0$ ) e interiores ( $E < 0$ ) a la separatriz .....	21
Fig. 2-6	Órbitas en el espacio de fases del oscilador de Duffing $\ddot{x} - x + \beta x^3 = 0$ : separatriz ( $E = 0$ ), órbitas internas ( $E < 0$ ) y externas ( $E > 0$ ) [cf. Ecs. (2.42), (2.43) y (2.44), respectivamente].....	24
Fig. 2-7	Función umbral caótico $U_0(T)$ [cf. Ec. (2.58)] para el caso armónico ( $m = 0$ ). Si el valor de $1/F$ para un determinado $T$ se encuentra en la zona sombreada el comportamiento es necesariamente regular [cf. Ec. (2.57)].....	28
Fig. 2-8	Serie temporales de velocidad del sistema (2.45), con $\eta = 0.005$ y $F = 100$ . (a) $T = 1$ , (b) $T = 1.5$ , (c) $T = T_{\max} = 2.51\dots$ , (d) $T = 3.5$ , (e) $T = T_{\min} = \sqrt{2}\pi$ , (f) $T = 6.5$ .....	29
Fig. 2-9	Función umbral orden-caos $U(m, T)$ [cf. Ec. (2.80)] vs. $m$ y $T$ .....	34
Fig. 2-10	Función umbral caótico $U(m, T)$ [cf. Ec. (2.80)] vs. $T$ para distintos valores de $m$ : $m = 0.2$ (negro), $m = 0.8$ (rojo) y $m = 1 \cdot 10^{-6}$ (azul).....	35
Fig. 2-11	Gráficas de la funciones $T_{\text{int}}(m) = 2\sqrt{2 - m}K(m)$ (línea continua), periodo de las órbitas interiores a la separatriz del sistema integrable subyacente a (2.59) ( $\eta = 0$ ), y $T_{\min}(m)$ (■) [ $U(m, T = T_{\min}(m)) = 0$ ] .....	35
Fig. 2-12	Función umbral $U(m, T)$ [cf. Ec. (2.80)] vs. $m$ , (a) $T = 1$ , (b) $T = 10$ .....	37
Fig. 2-13	Función umbral $U(m, T)$ [cf. Ec. (2.80)] vs. $m$ con $T = T_{\min}(m = 0) = \sqrt{2}\pi$ , (periodo para el cual no es posible el comportamiento caótico para la excitación armónica), se incluye detalle de la región del máximo de la función.....	37
Fig. 2-14	Serie temporales de desplazamiento del sistema (2.59), con $T = T_{\min}(m = 0) = \sqrt{2}\pi$ , $\eta = 0.005$ y $F = 170$ . (a) $m = 0.9998$ , (b) $m = 0.9999425$ y (c) $m = 0.99999$ .....	38
Fig. 2-15	Función $a(m, T)$ vs. $m$ y $T$ [cf. Ec. (2.103)] .....	43
Fig. 2-16	Función umbral orden-caos $U'(m, T)$ vs. $m$ y $T$ . Compárese con la Fig. 2-9.....	44
Fig. 2-17	Función umbral caótico $U'(m, T)$ [cf. Ec. (2.105)] vs. $T$ para distintos valores de $m$ : $m = 0.2$ (negro), $m = 0.8$ (rojo) y $m = 1 \cdot 10^{-6}$ (azul).....	45
Fig. 2-18	Función umbral caótico $U'(m, T)$ (línea discontinua) y $U(m, T)$ (línea continua) vs. $T$ para distintos valores de $m$ : $m = 0.2$ (negro), $m = 0.8$ (rojo) y $m = 1 \cdot 10^{-6}$ (azul) .....	46

Fig. 2-19 Desviación relativa $[T'_{\min}(m)-T_{\min}(m)]/T_{\min}(m)$ vs. $m$ . Siendo $T_{\min}(m)$ y $T_{\min}(m)$ los valores para los cuales $U(m, T_{\min})=0$ y $U'(m, T'_{\min})=0$ respectivamente .....	46
Fig. 2-20 Función umbral $U'(m, T=cte)$ [cf. Ec.(2.105)] vs. $m$ , (a) $T=1$ , (b) $T=10$ . Compárese con la Fig. 2-12 .....	47
Fig. 2-21 Desviación relativa $[U'(m, T=cte)-U(m, T=cte)]/U(m, T=cte)$ vs. $m$ para $T=1$ (rojo) y $T=10$ (azul) .....	48
Fig. 2-22 (a) Exponente maximal de Lyapunov vs. $m$ (b) Diagrama de bifurcación que representa la segunda componente de la aplicación de Poincaré vs. $m$ . $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional. ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ).....	51
Fig. 2-23 (a) Dimensión fractal del atractor vs. $m$ (b) Diagrama de bifurcación que representa la primera componente de la aplicación de Poincaré vs. $m$ . $x$ en unidades arbitrarias. ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) .....	52
Fig. 2-24 Caso $m=0$ : Caos estacionario ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ). (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	55
Fig. 2-25 Series temporales para mostrar la intermitencia previa a la crisis interior. (a) $m=0.173$ (b) $m=0.276$ y (c) $m=0.350$ . $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional. ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ).....	56
Fig. 2-26 Caso $m=0.31$ : caos tipo <i>phase locked</i> ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	57
Fig. 2-27 Caso $m=0.45$ : órbita 8T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	58
Fig. 2-28 Caso $m=0.60$ : órbita 4T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	59
Fig. 2-29 Caso $m=0.80$ : órbita 2T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	60
Fig. 2-30 Caso $m=0.811$ : caos tipo <i>phase locked</i> ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	61
Fig. 2-31 Caso $m=0.822$ : órbita 24T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	62
Fig. 2-32 Caso $m=0.828$ : órbita 12T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	63
Fig. 2-33 Caso $m=0.840$ : órbita 6T-periódica ( $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $F=3.8$ y $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia. $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional .....	64
Fig. 2-34 (a) Pulso $p(t; T, m)$ [cf. Ec. (2.112)] para distintos valores del parámetro $m$ . (b) Función elíptica de Jacobi denam: $dn(t; m)$ . Se acotan los valores máximos y mínimos de la función para ilustrar la construcción del pulso.....	67
Fig. 2-35 Potencial del oscilador $U(x)=-(1+\cos x)$ y niveles energéticos de la separatriz ( $E=0$ ), las órbitas exteriores ( $E>0$ ) e interiores ( $E<0$ ) a la separatriz.....	70

Fig. 2-36 Órbitas en el espacio de fases del oscilador  $\ddot{x} + \sin x = 0$  : separatriz ( $E=0$ ), órbitas externas ( $E>0$ ) y internas ( $E<0$ ) [cf. Ecs. (2.124), (2.125) y (2.126) respectivamente] ..... 72

Fig. 2-37 (a) Función umbral caótico  $U_0(T,F)$  [cf. Ec. (2.144)] que permite establecer el teorema de inhibición del comportamiento caótico. (b) Gráficas de las funciones umbral caótico  $U_0(T,F)=\eta_c=cte$ , para valores de  $\eta_c=0.01$  (rojo),  $\eta_c=0.2$  (verde) y  $\eta_c=0.4$  (azul). La región del espacio de parámetros por encima de cada una de las curvas indica posible comportamiento caótico, al menos transitorio ..... 76

Fig. 2-38 Retículo en el plano de parámetros ( $F, T$ ) para  $\eta=0.2$ . Los puntos representan las zonas del espacio de parámetros en los que el exponente maximal de Lyapunov es mayor que  $10^{-3}$ , y la línea representa la función umbral caótico  $U_0(T,F)=\eta_c=0.2$  calculada teóricamente [cf. Ec. (2.144)] ..... 78

Fig. 2-39 Gráficas de las funciones umbral orden-caos  $U(m=cte, T, F)=\eta_c=cte$  [cf. Ec. (2.160)], para valores de  $\eta_c=0.01$  (rojo),  $\eta_c=0.2$  (verde) y  $\eta_c=0.4$  (azul). La región del espacio de parámetros por encima de cada una de las curvas corresponde a la posibilidad de posible comportamiento caótico, al menos transitorio. (a)  $m=0$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.9$ , (d)  $m=0.99$ , (e)  $m=1-10^{-6}$ , y (f)  $m=1-10^{-15}$  ..... 84

Fig. 2-40 Gráfica de la función umbral orden-caos  $U(m, T=7.5, F)$  [cf. Ec. (2.160)]. El intervalo de  $m$  representado corresponde a pulsos estrechos ..... 85

Fig. 2-41 Gráficas de la función umbral-caótico  $U(m, T=cte, F=cte)$  [cf. Ec.(2.160)]. (a)  $U(m, T=7.5, F=0.2)$ , obsérvese el comportamiento monótono decreciente. (b)  $U(m, T=7.5, F=4.5)$ , obsérvese la existencia de un máximo relativo ..... 85

Fig. 2-42 Retículo en el plano de parámetros ( $F, T$ ) para  $\eta=0.2$  y para distintos valores de  $m$ . Los puntos representan las zonas del espacio de parámetros en los que el exponente maximal de Lyapunov es mayor que  $10^{-3}$ , y la línea representa la función umbral caótico  $U_0(m=cte, T, F)=0.2$  calculada teóricamente [cf. Ec. (2.160)] ..... 86

Fig. 2-43 Gráficas de los pulsos (a)  $p(t; T, m)$ , (b)  $p'(t; T, m')$ , y (c)  $s(t; T, b)$  [cf. Ecs. (2.170), (2.171) y (2.172), respectivamente], para distintos valores de los parámetros de forma correspondientes,  $m$ ,  $m'$  y  $b$ , que controlan la anchura de cada pulso. Los valores de  $m'$  y  $b$  elegidos verifican las condiciones de invariancia del impulso mecánico transmitido [cf. Ecs. (2.176) y (2.177)] ..... 90

Fig. 2-44 Función diferencia  $A(m)-B(m'=m)$  [cf. Ec. (2.176)] vs.  $m$ . En el detalle se muestra el máximo de la función diferencia en  $m_{max}=0.99754$  ..... 91

Fig. 2-45 Diagramas de bifurcación para la variable  $dx/dt$  del NIPKR [cf. Ec. (2.111)] con  $\eta=0.2$ ,  $F=1$  y  $T=5.52$  sometido a : (a) pulsos denam [cf. Ec.(2.170)] y (b) pulsos cnoidales [cf. Ec. (2.171)] ..... 93

Fig. 2-46 Diagramas de bifurcación para la variable  $dx/dt$  del NIPKR [cf. Ec. (2.111)] con  $\eta=0.2$ ,  $F=1$  y  $T=5.52$  sometido a : (a) pulsos denam [cf. Ec.(2.170)], con  $m$  en el intervalo  $0 < m < 1$  y (b) pulsos rectangulares [cf. Ec.(2.172)] con  $b$  en el intervalo  $b(m=1, T) < b < b(m=0, T)$  [cf. Ec. (2.177)] ..... 95

Fig. 2-47 (a) Exponente maximal de Lyapunov vs.  $m$  (b) Diagrama de bifurcación que representa la segunda componente de la aplicación de Poincaré ( $dx/dt$ ) vs.  $m$ .  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional. ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ) ..... 98

Fig. 2-48 Caso  $m=0$ : Caos estacionario ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia (b) Aplicación de Poincaré. ( $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional) ..... 99

Fig. 2-49 Caso  $m=0.4$ : Atractor caótico simétrico ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia. Nótese la sincronía con el subarmónico  $\omega/2$  (b) Aplicación de Poincaré (■) y órbitas en el espacio de fases (-). ( $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional) ..... 100

Fig. 2-50	Caso $m=0.4$ : Atractor caótico asimétrico, caos tipo <i>phase locked</i> ( $\eta=0.2$ , $F=1.0$ y $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia. Nótese la sincronía con el subarmónico $\omega/2$ y $\lim_{\omega \rightarrow 0}  S(\omega) =0$ característico del caos tipo <i>phase-locked</i> (b) Aplicación de Poincaré (■) y órbitas en el espacio de fases (–). ( $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional).....	101
Fig. 2-51	Caso $m=0.525$ : Órbita $16T$ -periódica asimétrica ( $\eta=0.2$ , $F=1.0$ y $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia (b) Aplicación de Poincaré (+) y órbitas en el espacio de fases (–). ( $x$ en unidades arbitrarias y $t$ adimensional) .....	102
Fig. 2-52	Crisis inversa por combinación ( <i>inverse attractor merging crisis</i> ). Se muestran los dos atractores caóticos asimétricos, mutuamente simétricos, obtenidos a partir de la aplicación de Poincaré para el caso $m=0.508$ ( $m > m_{iamc}=0.507$ ) para dos condiciones iniciales en distintas cuencas de atracción, cuya colisión con una órbita periódica inestable en el contorno que separa ambas cuencas provoca la aparición de un atractor caótico simétrico de mayor tamaño como el mostrado en la Fig. 2-49 con $m < m_{iamc}$ .....	103
Fig. 2-53	Bifurcación por rotura de simetría en el entorno de $m=0.956$ . Órbitas en el espacio de fases y aplicación de Poincaré, las dos órbitas $2T$ -periódicas asimétricas ( $m=0.8$ ), simétricas entre sí, colisionan para dar lugar a una órbita $2T$ -periódica simétrica ( $m=0.957$ ).....	103
Fig. 3-1	Función amplitud $am(\psi; m)$ para distintos valores de $m$ con $\psi$ en el intervalo $[0, 2K(m)]$ . Este intervalo es suficiente para mostrar la función $am(\psi; m)$ , ya que $am(\psi+2K; m) = \pi + am(\psi; m)$ .....	108
Fig. 3-2	Funciones $sn(\tau; m)$ , $cn(\tau; m)$ y $dn(\tau; m)$ en el intervalo $[0, 4K(m)]$ para una valor fijo de $m$ . Observar la paridad en el intervalo $[0, 4K(m)]$ en torno a $\tau=2K(m)$ [cf. Ec. (3.9)] y en el intervalo $[0, 2K(m)]$ en torno a $\tau=K(m)$ [cf. Ec. (3.10)] .....	110
Fig. 3-3	(a) Pulso cnoidal $cn(4K(m)t/T; m)$ para distintos valores del parámetro elíptico $m$ . (b) Pulso rectangular $s(t; a, T)$ para distintos valores de $a$ con $a=a(m, T)$ [cf. Ec.(2.103)] de manera que transmitan el mismo impulso mecánico que los pulsos cnoidales representados.....	116
Fig. 3-4	Diagrama de bifurcación para la variable $x$ del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales en función del parámetro $F$ , con $\beta=1$ , $\eta=0.2$ , $T=2.2$ y $m=0.5$ . Notar como la solución estacionaria ( $x = -1, \dot{x} = 0$ ) se hace inestable para $F > 2.1$ .....	120
Fig. 3-5	Fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros $T$ - $F$ del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales con $\beta=1$ , $\eta=0.2$ y (a) $m=0.1$ , (b) $m=0.5$ . A efectos de comparación se muestra la obtenida por BAE en primer orden ( $n=1$ ) y la obtenida numéricamente .....	122
Fig. 3-6	Fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros $m$ - $F$ del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales con $\beta=1$ , $\eta=0.2$ y $T=T_{min}(m=0)$ . A efectos de comparación se muestra la obtenida por BAE en primer orden ( $n=1$ ) y la obtenida numéricamente .....	123
Fig. 3-7	Fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros $T$ - $F$ del sistema (3.20) con $\beta=1$ y $\eta=0.2$ sometido a pulsos cnoidales (■) con (a) $m=0.1$ y (b) $m=0.5$ y rectangulares (▲) con (a) $a(m=0.1)$ y (b) $a(m=0.5)$ [cf. Ec. (3.35)].....	125
Fig. 3-8	Pulso $p(t; T, m)$ [cf. Ec. (3.38)] para distintos valores del parámetro $m$ . Notar como representa adecuadamente una cadena de pulsos ( <i>kicks</i> ) periódicos de anchura y amplitud finita .....	127
Fig. 3-9	Fronteras de inestabilidad $F_{\pm}^{(1)}(\eta, T)$ [cf. Ec. (3.50)] de la solución estacionaria ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) del NIPKR en el caso $m=0$ obtenida por BAC en primer orden. Nótese como fijado $\eta$ existe una lengua de inestabilidad, limitada por la intersección del plano $\eta=cte$ con las dos superficies $F_{\pm}^{(1)}(\eta, T)$ .....	130

Fig. 3-10 Fronteras de inestabilidad (en línea continua) en el plano de parámetros  $T$ - $F$  de la solución estacionaria ( $\dot{x} = 0, \dot{\dot{x}} = 0$ ) del NIPKR en el caso  $m=0$  y  $\eta=0.2$  obtenida por BAC de órdenes (a)  $n=1$ , (b)  $n=2$ , (c)  $n=4$  y (d)  $n=10$ . Las zonas sombreadas corresponden a zonas de inestabilidad obtenidas numéricamente a partir de la integración de la ecuación (3.41) un total de 400 ciclos para un retículo  $900 \times 1000$  en el plano de parámetros  $T$ - $F$  ..... 132

Fig. 3-11 Diagrama de bifurcación del NIPKR con  $m=0$ ,  $\eta=0.2$  y  $F=9.0$  en el que se representa  $x \bmod(-\pi, +\pi)$  vs.  $T$ , tras la integración de un total de 400 ciclos. Nótese como las cinco ventanas de inestabilidad concuerdan con las fronteras numéricas y analíticas de la Fig. 3-10 (d) en la recta  $F=9.0$ ..... 135

Fig. 3-12 Fronteras de inestabilidad  $F_{\pm}^{(1)}(m=\text{cte}, T, \eta=0.2)$  [cf. Ec. (3.62)] en el plano de parámetros  $T$ - $F$  de la solución estacionaria ( $\dot{x} = 0, \dot{\dot{x}} = 0$ ) del NIPKR en los casos (a)  $m=0.1$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.99$  y (d)  $m=1-10^{-6}$  obtenida por BAE en primer orden. Las zonas sombreadas corresponden a zonas de inestabilidad obtenidas numéricamente a partir de la integración de la Ec. (3.53) un total de 400 ciclos para un retículo  $900 \times 1000$  en el plano de parámetros  $T$ - $F$ . ..... 139

Fig. 3-13 Fracción de puntos de inestabilidad de la solución ( $\dot{x} = 0, \dot{\dot{x}} = 0$ ) del NIPKR en el plano de parámetros  $T$ - $F$ ,  $N$ , vs.  $m$ , parámetro que controla la forma del pulso. Nótese la existencia de un máximo de  $N$  en el entorno de  $m=1-10^{-10}$  ..... 141

Fig. 3-14 Fracción de condiciones iniciales  $N$  vs. número de ciclos  $n$  necesarios para alcanzar la solución estacionaria de equilibrio con  $\eta=0.2$ ,  $F=2.0$  y  $T=6.0$  y tres valores del parámetro de forma: (a)  $m=0$  ( $\square$ ), (b)  $m=0.99$  ( $\triangle$ ), y (c)  $m=0.995$  ( $\circ$ ), junto con los ajustes sigmoidales correspondientes [cf. Ec. (3.65) y Tabla 3-2] ..... 142

Fig. 3-15 Gráfica de  $n_0$  vs.  $m$ . donde  $n_0$  es el número de ciclos para el que  $N(n=n_0)=0.5$  [cf. Ec. (3.65)] el cual representa el tiempo medio necesario para alcanzar el equilibrio. En línea continua el ajuste elíptico  $n_0(m=0)-K(m=0)+K(m)$  ..... 143

Fig. 3-16 Cuencas de atracción instantáneas (en color blanco) de la solución estacionaria de equilibrio ( $\dot{x} = 0, \dot{\dot{x}} = 0$ ) en el instante  $t=25T$  para los mismo valores de los parámetros que en la Fig. 3-14..... 144

Fig. 3-17 Diagramas de bifurcación del NIPKR con  $\eta=0.2$  y  $F=4.0$ , en los casos (a)  $m=0.1$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.99$  y (d)  $m=1-10^{-6}$  en los que se representa  $x \bmod(-\pi, +\pi)$  vs.  $T$  tras la integración de un total de 400 ciclos. Nótese cómo las ventanas de inestabilidad concuerdan con las fronteras numéricas de la Fig. 3-12 en la recta  $F=4.0$  para cada valor de  $m$  y cómo la extensión de las ventanas caóticas aumenta en sentido creciente de  $m$  ..... 146

Fig. 3-18 Regiones de inestabilidad (gris), y regiones caóticas (negro) con exponente maximal de Lyapunov positivo, (véanse las Figs. 2-38 y 2-42(c)) en el plano de parámetros  $T$ - $F$  del NIPKR con  $\eta=0.2$  en los casos: (a) pulso trigonométrico  $m=0$ , y (b) pulso elíptico  $m=0.99$  ..... 149

Fig. 3-19 Diagrama de bifurcación del NIPKR con  $\eta=0.2$ ,  $T=3.0$  y  $F=4.0$  en el que se representa  $x \bmod(-\pi, +\pi)$  vs.  $m$  tras la integración de 400 ciclos. En  $m=m_c=0.34\dots$  el oscilador experimenta una crisis de contorno ..... 150

Fig. 3-20 Cuencas de atracción del atractor no caótico  $z=\infty$  (negro) y del atractor caótico (blanco), junto con el atractor caótico (gris) de la aplicación de ecuación (3.67) con  $\alpha=0.60$ ,  $\beta=0.04$ , estudiada por Grebogi *et al.* [GOY83] para explicar el mecanismo por el que tiene lugar una crisis. Nótese que el límite inferior de la cuenca superior del atractor no caótico  $z_b$  y el límite superior del atractor caótico  $z_c$  coinciden con las raíces de la ecuación (3.68):  $z_b=z_+=0.4$   $z_c=z_-=0.1$  ..... 151

Fig. 3-21 Cuencas de atracción del atractor no caótico  $z=\infty$  (negro) y del atractor caótico (blanco), junto con el atractor caótico (gris) de la aplicación de ecuación (3.66) con  $\alpha=0.60$ ,  $\beta=0.04$ ,  $T=1.0$ ,  $\varphi=0.1$  y  $m=0.99$ . Para dichos valores,  $z_b=z_+=0.326$  y  $z_c=z_-=0.074$  [cf. Ec. (3.69)] y el valor de  $\alpha$  para el cual ocurre la crisis es  $\alpha^*=0.689$  [cf. Ec. (3.70)] ..... 153

Fig. 4-1 Exponente maximal no trivial de Lyapunov vs.  $m$  para  $m \in [0,1]$  del sistema (4.2). (a) Intervalo de AENC. (b) Intervalo de cohabitación AENC y caos. (c) Intervalo de transición a caos. (d) Intervalo de transición a cuasiperiodicidad. Los valores de los parámetros son  $A=0.8$ ,  $V=0.55$ ,  $\nu=0.684^{1/2}$ ,  $T_{cn}=2\pi\nu$  y  $T_{cn}/T_{cos}=(5^{1/2}-1)/2$  ..... 160

Fig. 4-2 Aplicación de Poincaré del sistema (4.2) que representa su posición en el estado de fases en los instantes  $t=nT_{cos}$  con  $n=1,2,\dots$  para distintos valores del parámetro de forma  $m$ . (a)  $m=0.017$ , AENC; (b)  $m=0.9502$ , AENC; (c)  $m=0.99917$ , atractor caótico próximo a la transición a la cuasiperiodicidad; (d)  $m=0.999235$ , cuasiperiodicidad de doble frecuencia ..... 161

Fig. 4-3 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\lambda_1$  vs. el parámetro de forma  $m$  en la transición AENC→caos. Observar la linealidad característica en su paso por  $\lambda_1=0$ . Los mismo valores de los parámetros que en la Fig. 4-1 ..... 163

Fig. 4-4 Espectro de potencia de la serie temporal de velocidad del sistema (4.2) en el caso  $m=0.017$  cuando el estado estacionario es un AENC. El valor de los parámetros es igual que en la Fig. 4-2(a) ..... 165

Fig. 4-5 Función de distribución  $N(\sigma)$  (ver texto) del espectro de potencia de la Fig. 4-4. El comportamiento lineal en la escala logarítmica implica un comportamiento del tipo  $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$ , característico de la señal espectral de un AENC ..... 165

Fig. 4-6 Exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  vs.  $m$  de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4 y (4.5)] en una situación genérica con  $a>2$  y  $1>b>0$  ..... 168

Fig. 4-7 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$ , exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T$  y  $\lambda$  vs.  $m$  [cf. Ecs. (4.9), (4.6) y (4.10), respectivamente] para la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $a=3$  y  $b=0.5$ . Si  $m < m_c$  el atractor es un AENC ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ ) y si  $m > m_c$  el atractor es el subespacio  $z=0$  ( $\Lambda_T < 0$  y  $\Lambda < 0$ ). Nótese que las curvas  $\Lambda_T(m)$  y  $\lambda(m)$  pasan por cero para el mismo valor de  $m$  de acuerdo con la predicción teórica ( $T=2\pi$ ,  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ ) ..... 169

Fig. 4-8 Diagramas en el espacio de fases que muestran la reducción gradual del AENC de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] cuando el parámetro de forma se aproxima al valor crítico  $m_c=0.953\dots$  con  $a=3$ ,  $b=0.5$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . (a)  $m=0.2$ , (b)  $m=0.9$ , (c)  $m=0.95$  y (d)  $m=0.958$  ..... 171

Fig. 4-9 Exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  vs.  $m$  de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $K(m) \equiv K[g(m)]$ , siendo  $g(m)=(32/3)m^3-16m^2+(19/3)m$ , mostrando las posibilidades de supresión ( $\Lambda_T < 0$ ) y aparición ( $\Lambda_T > 0$ ) de atractores extraños no caóticos controlando adecuadamente la tasa de variación de la forma de onda ( $a=2.1$ ,  $b=0.1$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ ) ..... 173

Fig. 4-10 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$ , exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T$  y  $\lambda$  vs.  $m$  [cf. Ecs. (4.9), (4.6) y (4.10), respectivamente] para la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $a=4$ ,  $b=0.1$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . Si  $m \in [0, m_c^*]$  el atractor es caótico ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda > 0$ ), si  $m \in (m_c^*, m_c)$  el atractor es un AENC ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ ), y si  $m \in [m_c, 1]$  el atractor es el subespacio  $z=0$  ( $\Lambda_T < 0$  y  $\Lambda < 0$ ) ..... 174

Fig. 4-11 Atractor caótico de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $m=0.2$ ,  $a=4$ ,  $b=0.1$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$  ..... 175



***Lista de tablas***

Tabla 2-1	Puntos de bifurcación para el pulso denam y para el pulso cnoidal [ <i>cf.</i> Figs. 2-45(a) y 2-45(b), respectivamente] y predicción teórica para el pulso cnoidal [ <i>cf.</i> Ec. (2.376)].	92
Tabla 3-1	Series generalizadas de Fourier	114
Tabla 3-2	Parámetros de los ajustes sigmoidales [ <i>cf.</i> Ec (3.65) y Fig. 3-14]	143



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Uno de los resultados más notables de la teoría de los sistemas dinámicos es la ubicuidad del comportamiento caótico en sistemas no lineales. El caos determinista ha sido observado tanto en modelos matemáticos como en sistemas físicos reales. Si bien desde el punto de vista de las aplicaciones el comportamiento caótico puede tener efectos positivos, mejorando por ejemplo los procesos de mezcla en reacciones químicas, en otras situaciones tal comportamiento puede tener consecuencias nocivas como es el caso en distintos campos de la ingeniería: aerodinámica, circuitos electrónicos, confinamiento magnético de plasmas, etc.

Si un sistema dinámico se describe satisfactoriamente mediante un modelo no lineal, entonces estudiando analítica y numéricamente su espacio de parámetros podremos determinar en qué regiones de dicho espacio el comportamiento es regular y en cuáles es caótico. En el contexto de los osciladores no autónomos y disipativos de dimensión baja en el que nos centraremos, el efecto regularizador se puede conseguir variando la amplitud o el periodo de la excitación temporal. Otro mecanismo, que no exige ningún tipo de retroalimentación, y que se ha mostrado eficaz en el control de la dinámica caótica, ha sido la aplicación de perturbaciones periódicas débiles (pequeña amplitud relativa y por tanto bajo coste) sobre algún parámetro accesible del sistema (excitación paramétrica) o añadidas al mismo (forzamiento). La idea básica que sustenta este método consiste en que los atractores extraños coexisten en el espacio de fases con un número infinito de órbitas periódicas inestables densas en el atractor. El efecto de la perturbación débil, adecuadamente elegida, será estabilizar alguna de tales órbitas inestables asociadas al atractor caótico.

Respecto a la excitación periódica en los casos que aparecen en la bibliografía se ha hecho un uso intensivo, casi exclusivo, de las funciones armónicas circulares para modelar tales excitaciones. Al margen de la simplicidad matemática que implica el uso de dichas funciones, el hecho de que sólo describan soluciones de sistemas lineales supone que la mayoría de los casos estudiados adolecen de cierta *linealidad*: si utilizamos un forzamiento armónico estamos usando como mecanismo forzante un oscilador lineal. No parece adecuado enfocar el estudio de los sistemas dinámicos no lineales como una aproximación a la linealidad.

En el caso de osciladores sometidos a impactos o pulsos periódicos (*kicked oscillators*), la función  $\delta$  de Dirac periódica ha sido utilizada en la práctica totalidad de los problemas estudiados en la bibliografía, pero es claro que supone una idealización excesiva para simular pulsos reales, necesariamente finitos en amplitud y duración. Su uso se ha justificado de nuevo por simplicidad matemática pues permite convertir un flujo (ecuación diferencial) en una aplicación (sistema discreto). Por este motivo plantearemos un modelo realista para un *kicked rotator* usando una cadena de pulsos periódicos de amplitud finita y anchura efectiva variable. Este tipo de osciladores permite estudiar entre otros problemas la interacción cuántica entre partículas y campos intensos pulsantes.

El objetivo básico de este trabajo consiste en analizar el efecto inhibitorio de comportamiento caótico que tiene la variación de la forma de onda de la excitación periódica, en sistemas dinámicos no lineales, variación que en términos físicos supone variar la tasa de aporte energético externo al oscilador. En particular, el procedimiento de inhibición es aplicable a osciladores no lineales amortiguados y excitados periódicamente, y requiere que la excitación periódica sea una perturbación débil del sistema integrable subyacente. Además, la separatriz no perturbada de tal sistema debe estar formada por órbitas homoclinas y/o heteroclinas. Como ejemplos concretos para ilustrar el problema se han elegido el oscilador de Duffing simétrico con dos pozos de potencial y el *periodically kicked rotator* (péndulo sometido a pulsos periódicos).

Como veremos en el desarrollo de este trabajo, el estado de un sistema dinámico está determinado no solo por el valor de los parámetros del sistema sino también por la forma específica de la excitación periódica, de manera que si pretendemos dar contenido físico al estudio de los sistemas dinámicos debemos incluir este nuevo grado de libertad en el sistema. Se hace necesario estudiar la estructura de la bifurcación y la transición a comportamiento caótico frente a variaciones en la forma de onda de la excitación periódica. Hasta hace poco solo se había estudiado la estabilidad estructural de los sistemas dinámicos más simples bajo cambios en la amplitud y en el periodo de las modulaciones periódicas que actúan sobre ellos; como consecuencia, algunos fenómenos físicos observados experimentalmente que implican modulaciones con formas de onda no triviales han permanecido sin fundamentación teórica.

En definitiva, si nuestro objetivo es explicar la dinámica de distintos sistemas físicos mediante el estudio de sus ecuaciones de evolución (sistemas dinámicos), debemos considerar un enfoque más realista, modelando adecuadamente todos los términos que aparecen en dichas

ecuaciones. Por ello, en el presente trabajo se consideran modelos matemáticos de osciladores más cercanos a la realidad física, usando las funciones elípticas de Jacobi para modelar las excitaciones periódicas, debido a que tales funciones elípticas constituyen las soluciones de los osciladores no lineales integrables más ampliamente estudiados: Duffing, péndulo, Helmholtz... y además poseen una gran flexibilidad para variar su forma de onda de manera continua mediante la variación de un solo parámetro, el parámetro elíptico  $m$ . A modo de ejemplo, la función elíptica de Jacobi  $\operatorname{sn}(m, k)$  conecta de manera continua la función seno cuando  $m$  es nulo con la onda cuadrada cuando el valor de  $m$  es la unidad, una vez que se ha normalizado adecuadamente su argumento. Si bien en este trabajo solo se han considerado excitaciones con un único máximo por periodo, de manera que la variación de la forma de onda está correlacionada con la variación de la anchura efectiva del pulso, en otros estudios publicados más recientemente [CMGH<sup>+</sup>07] se han considerado variaciones de forma de onda más complejas utilizando el mismo enfoque. Otra ventaja del uso de las funciones elípticas es que éstas son una generalización de las funciones armónicas circulares, de manera que tales funciones se reducen a las circulares para determinados valores del parámetro elíptico permitiendo comparar (cuando  $m \rightarrow 0$ ) los resultados de los estudios realizados con excitaciones elípticas con los correspondientes publicados en la bibliografía con excitaciones armónicas.

En el Capítulo 2, tras la formulación de una serie de conceptos básicos y la descripción del método de Melnikov, se estudia la estabilidad de la dinámica caótica bajo cambios en la forma geométrica de la excitación periódica en sistemas disipativos. La aplicación del método de Melnikov a un oscilador de Duffing paramétricamente amortiguado y a un *kicked rotator* nos permitirá establecer las condiciones suficientes para la inhibición del comportamiento caótico en dichos sistemas. Las predicciones analíticas obtenidas serán comprobadas con las herramientas numéricas clásicas: series temporales, espectros de potencia, cálculo de exponentes de Lyapunov..., lo que nos permitirá caracterizar la nueva ruta universal orden-caos con mayor precisión. El grado de universalidad del planteamiento general y la robustez de la dinámica ante las posibles variaciones de la forma de onda se plasman en la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido, conjetura que responde al siguiente interrogante: ¿Qué condición de tipo físico debe establecerse para que la dinámica global del oscilador sea independiente de la forma específica de la excitación periódica? Los resultados de estos análisis se publicaron en [CMGH99, CMGH01].

En el Capítulo 3 se estudia la estabilidad estructural de las soluciones estacionarias (puntos fijos) de los mismos osciladores estudiados en el capítulo anterior bajo cambios en la forma de onda de la excitación mediante la técnica del balance armónico elíptico. El método del balance armónico clásico es una técnica muy sencilla que permite obtener soluciones analíticas periódicas aproximadas de osciladores no lineales. En el presente trabajo se utiliza una generalización elíptica de dicho método en el que las soluciones se aproximan por una suma de armónicos elípticos, similares a las soluciones del oscilador no lineal sin perturbar, en lugar de la suma de armónicos circulares usada en el balance armónico clásico y que son similares a la solución de un oscilador lineal. Las simulaciones numéricas llevadas a cabo para comprobar la

validez de los resultados analíticos muestran una concordancia muy aproximada con éstos. Por último, y para explicar las situaciones observadas en las que la inestabilidad inducida por el cambio de forma de la excitación se resuelve con una crisis inversa de contorno, se estudia una aplicación elíptica que permite explicar el origen de dicha crisis. Los estudios realizados se publicaron en las referencias [CMGH99, CMGH03].

En el Capítulo 4 y para completar la variada fenomenología asociada al cambio de forma de la excitación, se presenta una nueva ruta en la que se caracterizan atractores extraños no caóticos que evolucionan hacia cuasiperiodicidad o hacia atractores caóticos inducidos por el cambio de forma de una excitación cuasiperiódica. Con el fin de garantizar la universalidad de la nueva ruta se analizan dos modelos, uno continuo y otro discreto, que son generalizaciones elípticas de otros previamente estudiados en la bibliografía. Los resultados de los análisis realizados fueron publicados en la referencia [CMGH02].

Finalmente, en el Capítulo 5 se resumen las principales conclusiones obtenidas y se perfilan las líneas de investigación donde las ideas y herramientas matemáticas desarrolladas en esta memoria pudieran tener aplicación.

## Capítulo 2

### UMBRAL ORDEN-CAOS

#### 2.1 Introducción

El interés actual en las técnicas de control de la dinámica caótica, con realimentación o sin ella, reside en el amplio espectro de las posibles aplicaciones de dichas técnicas, que incluyen campos tan dispares como la aerodinámica, la biología, la epidemiología, la cardiología, la electrónica, la neurología, la física de láseres, etc. El control de caos debe entenderse en un sentido amplio abarcando, la supresión total del comportamiento caótico, la transformación de caos estacionario en caos transitorio, la reducción de la duración de los transitorios caóticos, o la disminución del exponente maximal positivo de Lyapunov. Los procesos inversos deben ser considerados cuando el objetivo de la técnica de control de caos no es la supresión de éste, sino la generación de estados caóticos a partir de estados regulares del sistema.

En las últimas décadas se han propuesto diversas técnicas de control de caos no realimentado [CD98]. La efectividad en la supresión de caos de la aplicación de excitaciones paramétricas a un sistema dinámico fue mostrada en [AL87]. En la referencia [CD93] se discute una nueva manera de reducir o suprimir respuestas caóticas alterando únicamente la forma geométrica de la excitación. En [KRB94] se muestra analítica y numéricamente que puede conseguirse la supresión de caos por aplicación de un forzamiento paramétrico a un sistema dinámico caótico.

Experimentalmente, el control de caos por medio de perturbaciones periódicas de pequeña amplitud, ha sido observado en distintos sistemas, tales como sistemas magnetoelásticos [DRS90], sistemas ferromagnéticos [AR91], sistemas electrónicos [KKLG07, LZLH09, ZABL<sup>+</sup>06],

sistemas neurológicos [SJDC<sup>+</sup>94], láseres [MGCA94], reacciones químicas [ASM03, PGMS93], y plasmas [NNSY07].

Desde otra perspectiva, la determinación del umbral orden-caos se ha convertido en un aspecto determinante en el estudio de los sistemas complejos. Un sistema complejo es un conjunto de elementos con interacciones locales en el que el conocimiento de dichas interacciones no implica la comprensión del comportamiento global del sistema. Los sistemas analizados bajo esta perspectiva cubren todo el espectro de las ciencias tanto naturales como sociales. Sin embargo, y a pesar de su gran diversidad, se pueden identificar conductas dinámicas genéricas, entre ellas, las leyes de crecimiento, la autoorganización y los procesos colectivos emergentes. Desde distintos enfoques se ha constatado que estos sistemas operan en el llamado *edge of chaos*, una zona intermedia entre el comportamiento ordenado y el caótico [LLG02, NP97]. En este umbral es donde la capacidad de almacenar y procesar información es máxima. Este estado de *criticalidad autoorganizada* está caracterizado por que cualquier pequeño cambio en la energía del sistema puede provocar una bifurcación, un cambio del sistema global a cualquier escala, que permita su cambio o adaptación. Para que un sistema complejo se encuentre en un estado más o menos estable en el que se almacene información dicho sistema debe operar en la frontera entre el caos y el orden, ya que se debe restringir su posible evolución caótica en la que existe una continua pérdida de información, sin llegar a la rigidez de un comportamiento periódico o regular que se opondría a cualquier cambio o adaptación del sistema. Así, la evolución de esta clase de sistemas se caracteriza por la intermitencia, aquella situación en la que el orden y el desorden se alternan constantemente. La evolución del sistema no se desarrolla mediante de procesos continuos y graduales, sino que suceden por medio de reorganizaciones y saltos. Cada nuevo estado es sólo una transición, un período de *reposo entrópico*.

Los osciladores analizados en esta memoria no son sistemas complejos, son sistemas dinámicos de dimensión baja. No obstante, la extensión natural de esta línea de investigación es el estudio del caos espacio-temporal en redes de osciladores, tales redes si constituyen un sistema complejo y la determinación del umbral orden-caos es un problema crucial en el estudio de su evolución. Este hecho, junto con el propio problema de control de la dinámica caótica de los osciladores estudiados, justifica plenamente la importancia del análisis y determinación de la función umbral orden-caos.

En este capítulo se determinarán las funciones umbral orden-caos de un oscilador de Duffing y de un *kicked rotator* bajo cambios en la forma de onda la excitación temporal, tales funciones delimitan las regiones del espacio de parámetros de posible comportamiento caótico. Además, se enunciarán los correspondientes teoremas de inhibición del comportamiento caótico, que establecerán condiciones suficientes para que el oscilador no presente caos homoclinico. Para poder constatar la robustez de la dinámica de tales osciladores ante las posibles variaciones de la forma de onda se formulará la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido. Las



predicciones analíticas relativas a los análisis realizados serán verificadas mediante simulaciones numéricas (series temporales, exponentes de Lyapunov, espectros de potencia, etc.).

## 2.2 Conceptos preliminares

### 2.2.1 Definición de caos

Se desarrolla a continuación la definición de sistema dinámico caótico de Robert Devaney [Dev86].

En primer lugar se define sistema dinámico,

**Definición 1** (Sistema dinámico): *Dado un espacio topológico  $X$  y  $G = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{Z}$ , un sistema dinámico es una terna  $(X, G, \phi)$ , con  $\phi : X \times G \rightarrow X$  continua tal que:*

- i)  $\phi(x, 0) = x, \forall x \in X$
- ii)  $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s+t), \forall x \in X, \forall t, s \in G$

Si denotamos  $\phi(x, t)$  como  $\phi_t(x)$  se puede considerar  $\phi_t : X \rightarrow X$ , y las propiedades anteriores pueden reformularse como:

- i)  $\phi_0(x) = \text{Identidad}$
- ii)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t} \forall t, s \in G$

Si  $G = \mathbb{R}$ , el sistema dinámico se denomina continuo. La familia  $\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  es su flujo, y la aplicación  $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$  (para  $x \in X$ ) que envía  $t$  a  $x_t = \phi(x, t)$ , es una curva que representa la historia de  $x$  cuando  $t$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Si  $G = \mathbb{Z}$ , el sistema dinámico se dice discreto. En cuyo caso se considera la función  $\phi : X \rightarrow X$  como el sistema dinámico, en el que para estudiar su comportamiento basta con conocer los conjuntos de órbitas  $\text{Orb}_{\phi}(x) = \{x, \phi(x), \dots, \phi^n(x), \dots\}$  para todo  $x \in X$ , donde  $\phi^n(x)$  representa la iterada  $n$ -ésima de  $\phi$ , esto es,  $\phi^n(x) = \phi^n(\phi^{n-1}(x))$ ,  $\phi^1 = \phi$ , y  $\phi^0 = \text{Identidad}$ , de manera que en lugar de una familia continua de estados  $\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ , se tiene una familia discreta  $\{\phi^n(x) : n \geq 0\}$ . Un sistema dinámico continuo puede estudiarse en términos de un sistema discreto asociado: se puede interpretar  $\phi^n(x)$  como una serie de fotografías del proceso tomadas a intervalos de tiempo regulares, la aplicación de Poincaré de un sistema continuo es un buen ejemplo de ello. Si estos intervalos son razonablemente pequeños, el caso discreto da una buena aproximación del caso continuo, como ocurre por ejemplo cuando se integran numéricamente sistemas dinámicos continuos.

Puesto que este trabajo versa sobre sistemas continuos, nos centraremos en éstos de aquí en adelante. Seguidamente, se presentan las definiciones de una serie de propiedades que serán características del caos.

Consideremos  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) campos vectoriales autónomos de  $\mathbb{R}^n$ , denotados de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

cuyo flujo generado, denotado por  $\phi_t(x) \equiv \phi(t, x)$ , se supone que existe  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Sea  $\Omega$  el espacio de fases del campo vectorial (2.1) y sea  $\Delta \subset \Omega$  un subconjunto compacto invariante sobre  $\phi(t, x)$ , es decir  $\phi(t, \Delta) \subseteq \Delta, \forall t \in \mathbb{R}$ . Entonces se tienen las siguientes definiciones:

**Definición 2** (Dependencia sensible a las condiciones iniciales): *El flujo  $\phi_t(x)$  se dice que tiene dependencia sensible con relación a las condiciones iniciales en  $\Delta$ , si existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para cualquier  $x \in \Delta$  y cualquier entorno  $U$  de  $x$ , existe  $y \in U$  y  $t > 0$  tal que  $\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| > \varepsilon$ .*

Básicamente, esta definición afirma en términos generales que para cualquier  $x \in \Delta$  hay por lo menos un punto arbitrariamente cerca de él, cuya órbita se separa suficientemente de  $x$ .

**Definición 3** (Topológicamente transitivo): *Un conjunto cerrado invariante  $A$  se dice que es topológicamente transitivo si para dos abiertos cualesquiera  $U, V \subset A$  se verifica que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**Definición 4** (Sistema dinámico caótico en  $\Delta$ ):  *$\Delta$  se dice caótico o que el sistema dinámico es caótico en  $\Delta$  si:*

- i)  $\phi_t(x)$  tiene dependencia sensible con relación a las condiciones iniciales en  $\Delta$
  - ii)  $\phi_t(x)$  es topológicamente transitivo en  $\Delta$
- Devaney propone otra condición:*
- iii) *Las órbitas periódicas de  $\phi_t(x)$  son densas en  $\Delta$*

**Definición 5** (Conjunto atractor): *Un conjunto cerrado invariante  $A \subset \mathbb{R}^n$  se llama conjunto atractor si existe algún entorno  $U$  de  $A$  tal que:  $\forall x \in U, \forall t \geq 0, \phi_t(x) \in U$  y  $\phi_t(x) \rightarrow A$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Definición 6** (Atractor): *Un atractor es un conjunto atractor topológicamente transitivo.*

**Definición 7** (Atractor extraño): *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un atractor, entonces  $A$  es llamado atractor extraño si es caótico, por tanto  $A$  es un atractor extraño si:*

- i) *Existe dependencia sensible con relación a las condiciones iniciales en  $A$*
- ii)  *$A$  es topológicamente transitivo*

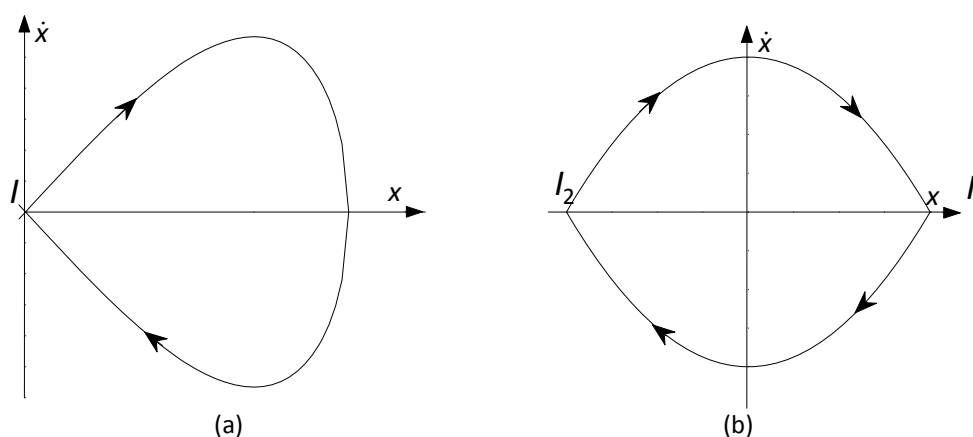


Figura 2-1 (a) Órbita homoclina que conecta el punto  $I$  consigo mismo. (b) Órbitas heteroclinas que conectan los puntos  $I_1$  e  $I_2$

### 2.2.2 Estructura homoclina

Se muestran a continuación las definiciones de varios conceptos que van a ser usados en el presente trabajo [GH02, LL92, Wig03].

**Definición 1** (Órbita homoclina): Si las trayectorias de un punto  $p$  en el espacio de fases de un flujo se aproxima a un conjunto invariante  $I$  (p.e. un punto fijo), de forma asintótica cuando  $t \rightarrow +\infty$  y  $t \rightarrow -\infty$ , entonces se dice que es una órbita homoclina de  $I$ . (véase la Fig. 2-1 (a))

**Definición 2** (Órbita heteroclina): Si las trayectorias de un punto  $p$  en el espacio de fases de un flujo se aproximan a dos conjuntos invariantes disjuntos  $I_1$  e  $I_2$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  y  $t \rightarrow -\infty$ , respectivamente, entonces tales órbitas se denominan heteroclinas conectando los puntos  $I_1$  e  $I_2$ . (véase la Fig. 2-1(b))

**Definición 3** (Puntos transversales homoclinos y heteroclinos): Teniendo en cuenta las dos definiciones anteriores, si además el punto  $p$  pertenece simultáneamente a las variedades estable e inestable de  $I$  y éstas se cortan transversalmente en  $p$  entonces se dice que  $p$  es un punto homoclino transversal (véase la Fig. 2-2 (a)). Análogamente,  $p$  es un punto heteroclino transversal si pertenece a la variedad estable de  $I_1$  y a la inestable de  $I_2$  y éstas se cortan transversalmente en  $p$  (véase la Fig. 2-2 (b)).

**Definición 4** (Órbita periódica hiperbólica): Órbita del flujo que no es un punto hiperbólico del flujo.

**Definición 5.1** (Punto  $\omega$ -límite): Un punto  $p$  es un punto  $\omega$ -límite de  $x$  si hay puntos  $\phi_{t_1}(x), \phi_{t_2}(x), \dots$  en la órbita de  $x$  tal que  $\phi_{t_i} \rightarrow p$  y  $t_i \rightarrow +\infty$ .

**Definición 5.2** (Punto  $\alpha$ -límite): Un punto  $p$  es un punto  $\alpha$ -límite de  $x$  si hay puntos  $\phi_{t_1}(x), \phi_{t_2}(x), \dots$  en la órbita de  $x$  tal que  $\phi_{t_i} \rightarrow p$  y  $t_i \rightarrow -\infty$ .

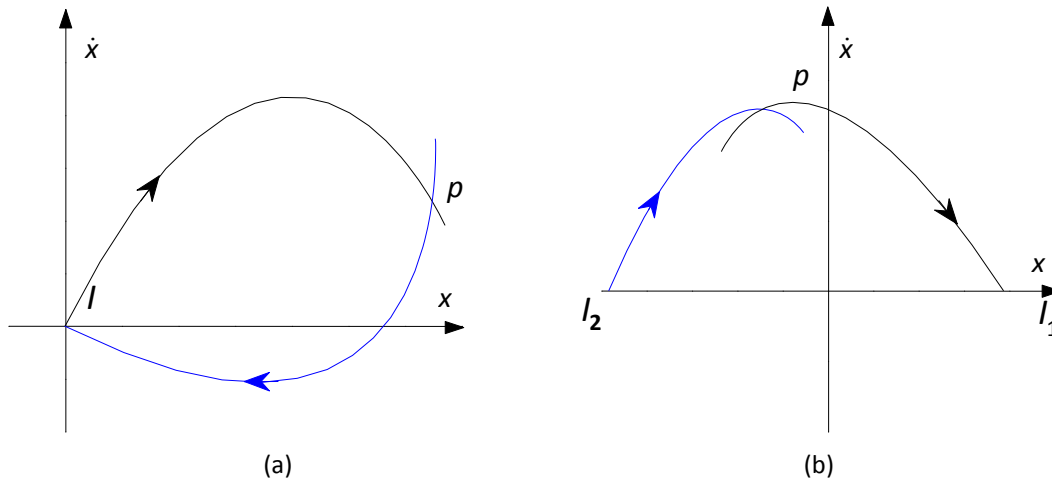


Figura 2-2. (a) Punto homoclino transversal. (b) Punto heteroclino transversal.

**Definición 5.3** (Conjunto  $\omega$ -límite ( $\alpha$ -límite)): Es el conjunto  $\omega(x)$  ( $\alpha(x)$ ) de puntos  $\omega$ -límite( $\alpha$ -límite) de  $x$ .

**Definición 6** (Ciclo límite): Un ciclo límite  $\Gamma$  de un flujo es un ciclo que es conjunto  $\omega$ -límite o conjunto  $\alpha$ -límite de alguna trayectoria del flujo que pasa por un punto que no pertenece a  $\Gamma$ .

**Definición 7** (Separatriz): La separatriz de un flujo es una trayectoria del flujo la cual es: (i) punto crítico o punto de equilibrio del flujo, (ii) un ciclo límite del flujo. Algunas veces la órbita homoclina es también llamada separatriz ya que es la frontera entre dos tipos de movimiento

### 2.2.3 Aplicación de Poincaré

A continuación se trata el importante concepto de aplicación de Poincaré. La idea de reducir el estudio de los sistemas dinámicos continuos (flujos) al estudio de los sistemas discretos asociados se debe a Poincaré [Poi99] que los uso para el estudio del problema de tres cuerpos en la mecánica celeste. Actualmente, por aplicación de Poincaré se entiende cualquier sistema discreto asociado a una ecuación diferencial ordinaria. Esta técnica ofrece indudables ventajas en el estudio de los sistemas dinámicos continuos, entre las más importantes:

- a) Reducción dimensional. La construcción de la aplicación de Poincaré implica la eliminación de, al menos, una de las variables del sistema continuo. En sistemas no autónomos usualmente se elimina la variable tiempo.
- b) Dinámica global. En problemas de dimensión baja, como los estudiados en este trabajo, las aplicaciones de Poincaré, obtenidas por procedimientos numéricos, proporcionan una información esclarecedora de la dinámica global del sistema. En las referencias

[GH02, LL92, TS02] se pueden ver numerosas aplicaciones de Poincaré obtenidas de este modo.

- c) Claridad conceptual. Conceptos complejos, en el caso de flujos, suelen poder estudiarse de forma más sencilla para las aplicaciones de Poincaré asociadas. Por ejemplo, el concepto de estabilidad orbital de un movimiento periódico asociado a un flujo. En términos de la aplicación de Poincaré asociada este problema se reduce al estudio de la estabilidad de un punto fijo de la aplicación, que se caracteriza en términos de los autovalores de aplicación linealizada entorno a dicho punto fijo [Ver96].

No existe un procedimiento general para la obtención de la aplicación de Poincaré asociada a un flujo genérico, ya que la construcción de la aplicación de Poincaré exige conocer la estructura de geométrica del espacio de fases del flujo. No obstante, existen tres casos donde es posible la construcción de tipos específicos de la aplicación de Poincaré:

- a) Cuando el espacio fásico de un flujo es periódico, como en el caso de los osciladores periódicamente modulados.
- b) En el estudio de la estructura de las órbitas próximas a un ciclo límite de una ecuación diferencial ordinaria.
- c) En el estudio de la estructura de órbitas próximas a una órbita homoclina o heteroclina.

Se considera la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

donde  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^r$  en algún abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Supongamos que (2.2) tiene una solución periódica de periodo  $T$  que denotamos  $\phi(t, x_0)$  donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es cualquier punto perteneciente a la solución periódica,  $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$ . Sea  $\Sigma$  una superficie  $(n-1)$  dimensional transversal al campo vectorial  $f$  en  $x_0$  (transversal en el sentido de que  $f(x) \cdot n(x_0) \neq 0$  siendo  $n(x_0)$  el unitario normal a  $\Sigma$  en  $x_0$ ).  $\Sigma$  se conoce como sección transversal al campo vectorial (2.2). Se puede demostrar [Wig03] que  $\phi(t, x_0) \in C^r$  si  $f(x) \in C^r$ , por tanto se puede encontrar un abierto  $V \subset \Sigma$ , tal que las trayectorias que partan de  $V$  vuelvan a  $\Sigma$  después de un tiempo próximo a  $T$ . La aplicación que asocia puntos de  $V$  con sus puntos después de la primera vuelta a  $\Sigma$  se llama aplicación de Poincaré  $P$ . Esto es:

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \Sigma \\ x &\rightarrow \phi(\tau(x), x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $\tau(x)$  es el tiempo que emplea el punto  $x$  en su primer regreso a  $\Sigma$  (tiempo de vuelo). Obsérvese que por construcción  $\tau(x_0)=T$  y que  $P(x_0)=x_0$ . Por lo tanto, un punto fijo de  $P$  se corresponde con una órbita periódica de (2.2). Y un punto  $k$ -periódico (esto es, un punto  $x \in V$  tal que  $P^k(x)=x$  con  $P(x) \in V, i=1,2,\dots,k$ ) se corresponde con una órbita periódica de (2.2) que atraviesa  $\Sigma$   $k$  veces antes de cerrarse.

Se considera a continuación el caso de flujos no autónomos sometidos a una modulación periódica:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

donde  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^r$  en algún abierto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y  $T$ -periódica en  $t$ :  $f(x, t) = f(x, t+T)$ ,  $T = 2\pi/\omega > 0$ . La ecuación (2.4) se puede escribir en forma de ecuación autónoma  $(n+1)$  dimensional definiendo la función auxiliar:

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} &\rightarrow S \\ t &\rightarrow \theta(t) = \omega t \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

de manera que (2.4) puede escribirse:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \right\} (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S \quad (2.6)$$

Denotamos con  $\phi(t) = (X(t), \theta(t) = \omega t + \theta_0 \pmod{2\pi})$  el flujo generado por (2.5). Definimos la sección transversal  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  al campo vectorial (2.6):

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S / \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi)\} \quad (2.7)$$

El unitario normal a  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  en  $\mathbb{R}^n \times S$  es el vector  $(0, 1)$ , y está claro que  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  es transversal al campo (2.6) para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  puesto que  $f(x, \theta, \omega) \cdot (0, 1) = \omega \neq 0$ . En este caso  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  se llama *sección transversal global*.

Se define la aplicación de Poincaré por:

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} &\rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_0} \\ \left( x \left( \frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{\omega}, \bar{\theta}_0 \right) \right) &\rightarrow \left( x \left( \frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{\omega}, \bar{\theta}_0 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_0 \right) \right) \text{ ó} \\ x \left( \frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{\omega} \right) &\rightarrow x \left( \frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

De esta manera los puntos fijos de  $P_{\bar{\theta}_0}$  se corresponden con órbitas  $2\pi/\omega$ -periódicas del sistema (2.4) y que los puntos  $k$ -periódicos de  $P_{\bar{\theta}_0}$  se corresponden con órbitas periódicas de (2.4) que atraviesan la sección  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$   $k$  veces antes de cerrarse.

### 2.2.4 El método de Melnikov

En este apartado se detalla el método de Melnikov [Mel63] que permite analizar el movimiento en las proximidades de la separatriz de un sistema integrable débilmente perturbado. Este método proporciona un criterio necesario, no suficiente, para el inicio de la dinámica caótica. En general, el método no permite asegurar la aparición de atractores extraños (caos estacionario) los cuales representan movimientos caóticos persistentes en un dominio global del espacio de fases. Sin embargo, al obtenerse una condición necesaria para el inicio de la dinámica caótica, proporciona una condición suficiente para la supresión de la dinámica caótica, motivo por el cual será utilizado en apartados posteriores para estudiar la inhibición del comportamiento caótico en distintos sistemas.

En el caso de una perturbación hamiltoniana siempre aparecerá comportamiento caótico confinado en una delgada capa en torno a la separatriz. En cambio, en el caso de una perturbación disipativa, el comportamiento cerca de la separatriz no es necesariamente caótico. Solo en el caso de que las variedades estable e inestable de una órbita periódica inestable se corten transversalmente se genera una zona del espacio de fases entorno a la intersección homoclina (heteroclina) donde la dinámica es muy compleja, (véase la Figura 2-3) dando lugar a órbitas de periodo arbitrariamente grande, lo que conduce a movimientos caóticos transitorios que pueden devenir en estacionarios si la trayectoria no cae en la cuenca de algún atractor no caótico. Las intersecciones homoclinas (heteroclinas) también explican las transiciones repentinas o crisis que pueden experimentar los atractores extraños [LL92].

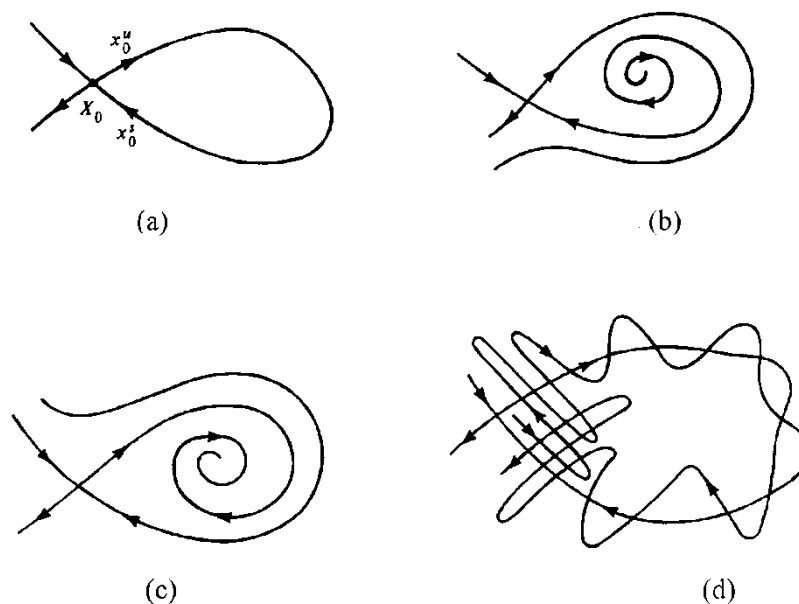


Figura 2-3 Órbitas estables e inestables de un punto fijo hiperbólico en el espacio de fases. (a) Sistema integrable no perturbado con estructura homoclina. (b) Sistema perturbado: la órbita inestable va por fuera de la órbita estable ( $D < 0$ ). (c) Sistema perturbado: la órbita inestable va por dentro de la órbita estable ( $D > 0$ ). (d) Sistema perturbado: las órbitas estable e inestable se intersectan iniciando el movimiento caótico ( $D = 0$ ) [cf. Ec.(2.13)].

El método de Melnikov es la principal técnica analítica que ofrece un criterio para el comienzo de una intersección homoclina cerca de la separatriz de un sistema integrable sometido a una perturbación disipativa, por lo que proporciona un criterio necesario para el inicio de la dinámica caótica. Este método ha sido aplicado a multitud de sistemas dinámicos [CBL97, CC95, CMGH<sup>+</sup>07, FH05, JHD07, LBFS08, LSB07, PMC07, SKTW05, WDJ06, WAFX07, YXS06] entre otros para determinar la transición entre la dinámica regular y la dinámica caótica.

Una exposición más detallada y general del método puede consultarse, por ejemplo, en las referencias [GH02, LL92, Wig03]. Aquí se considerará la versión más elemental del método [GH81] aplicable a sistemas con dos grados de libertad:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}_0(\vec{x}) + \varepsilon \vec{f}_1(\vec{x}, t) \quad (2.9)$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{f}_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{f}_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\vec{f}_1(\vec{x}, t)$  es periódica en  $t$  con periodo fundamental  $T$ . Se supone que el sistema sin perturbar ( $\varepsilon=0$ ) es integrable, la perturbación  $\vec{f}_1(\vec{x}, t)$  es disipativa y el parámetro  $\varepsilon$  pequeño ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) de manera que  $\varepsilon \vec{f}_1(\vec{x}, t)$  constituya una perturbación débil del sistema integrable. El sistema no perturbado posee un punto fijo hiperbólico  $\vec{X}_0$  y una separatriz  $\vec{x}_0(t)$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \vec{x}_0(t) = \vec{X}_0.$$

En tal caso, las variedades estable e inestable,  $\vec{X}^s$  y  $\vec{X}^u$ , asociadas al punto fijo hiperbólico son la misma órbita, de forma que suele existir un punto fijo elíptico dentro de la separatriz formada por ambas variedades.

El espacio de fases del sistema perturbado se extiende a tres dimensiones  $(x_1, x_2, t)$  y conviene estudiar el movimiento considerando las sucesivas secciones de Poincaré  $t = \text{constante} \pmod{T}$ . En tal situación, las variedades estable e inestable<sup>1</sup> asociadas al punto fijo hiperbólico en cada sección de Poincaré pueden dejar de coincidir, cortándose y dando lugar, de acuerdo con el teorema de Birkhoff-Smale, a un número infinito de puntos homoclinos y, por tanto, abriendo la posibilidad de comportamiento caótico, debido a la aparición de las herraduras de Smale (conjunto hiperbólico invariante) en la aplicación de Poincaré.

Para determinar la condición de intersección entre variedades estable e inestable se calculará, usando la teoría de perturbaciones, la distancia  $D$  entre las mismas en un instante  $t_0$ .

<sup>1</sup> Definimos las variedades estable e inestable de un punto fijo  $x_0$ ,  $W^s(x_0)$  y  $W^u(x_0)$  como sigue:

$$W^s(x_0) = \{x \in U / \phi_t(x_0) \rightarrow x_0 \text{ con } t \rightarrow +\infty \text{ y } \phi_t(x_0) \in U, \forall t \geq 0\}$$

$$W^u(x_0) = \{x \in U / \phi_t(x_0) \rightarrow x_0 \text{ con } t \rightarrow -\infty \text{ y } \phi_t(x_0) \in U, \forall t \geq 0\}$$

donde  $U \in \mathbb{R}$  es un entorno del punto fijo  $x_0$ .



La existencia de ceros simples de dicha función supondrá la posibilidad de comportamiento caótico transitorio o estacionario.

Para calcular  $D$  se parte de las órbitas perturbadas estable e inestable en primer orden de  $\varepsilon$  :

$$\bar{x}^{s,u}(t, t_0) = \bar{x}_0(t - t_0) + \varepsilon \bar{x}_1^{s,u}(t, t_0) \quad (2.10)$$

donde  $t_0$  es un instante inicial arbitrario. Sustituyendo (2.10) en (2.9) se obtiene, en primer orden:

$$\frac{d\bar{x}_1^{s,u}}{dt} = \bar{M}(\bar{x}_0)\bar{x}_1^{s,u} + \bar{f}_1(\bar{x}_0(t - t_0), t) \quad (2.11)$$

donde

$$\bar{M}(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{01}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_{01}}{\partial x_{02}} \\ \frac{\partial f_{02}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_{02}}{\partial x_{02}} \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana de  $\bar{f}_0$  evaluada en  $\bar{x}_0(t - t_0)$ . A continuación se resuelve (2.11) para  $\bar{x}^s$  con  $t > t_0$  y  $\bar{x}^u$  para  $t < t_0$ , verificándose la condición:

$$\bar{x}^s(t \rightarrow \infty) = \bar{x}^u(t \rightarrow -\infty) = \bar{X}_p$$

donde  $\bar{X}_p$  es la posición perturbada del punto fijo hiperbólico. La diferencia entre ambas soluciones es:

$$\bar{d}(t, t_0) = \bar{x}^u(t, t_0) - \bar{x}^s(t, t_0) = \bar{x}_1^u(t, t_0) - \bar{x}_1^s(t, t_0). \quad (2.12)$$

La distancia de Melnikov  $D(t, t_0)$  se define:

$$D(t, t_0) = \bar{N} \cdot \bar{d}, \quad (2.13)$$

es decir, es la proyección de  $\bar{d}$  sobre una normal  $\bar{N}^2$  a la órbita no perturbada  $\bar{x}_0$ , que puede obtenerse de (2.9) para  $\varepsilon=0$ :

$$\bar{N}(t, t_0) = \begin{pmatrix} -f_{02}(\bar{x}_0) \\ f_{01}(\bar{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

---

<sup>2</sup> El hecho de que  $\bar{N}$  no esté normalizado a la unidad no afecta para la determinación de la condición de la intersección homoclina.

Introduciendo el operador *wedge*  $\wedge$  ( $\vec{x} \wedge \vec{y} \equiv x_1 y_2 - x_2 y_1$ ) y sustituyendo (2.14) en (2.13) se obtiene:

$$D(t, t_0) = \vec{f}_0 \wedge \vec{d}. \quad (2.15)$$

Partiendo de (2.12) se puede obtener una expresión explícita para la distancia de Melnikov:

$$D = D^u - D^s \quad (2.16)$$

con

$$D^{s,u}(t, t_0) = \vec{f}_0 \wedge \vec{X}_1^{s,u}. \quad (2.17)$$

La derivada temporal de  $D^s$  viene dada por:

$$\frac{dD^s}{dt} = \frac{d\vec{f}_0}{dt} \wedge \vec{x}_1^s + \vec{f}_0 \wedge \frac{d\vec{x}_1^s}{dt} = \vec{M}_0(\vec{x}_0) \frac{d\vec{x}_0}{dt} \wedge \vec{x}_1^s + \vec{f}_0 \wedge \frac{d\vec{x}_1^s}{dt}. \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{d\vec{x}_0}{dt} = \vec{f}_0$  y sustituyendo (2.11) en (2.18) se obtiene:

$$\frac{dD^s}{dt} = \vec{M}(\vec{x}_0) \cdot \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^s + \vec{f}_0 \wedge \vec{M}(\vec{x}_0) \cdot \vec{x}_1^s + \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 \quad (2.19)$$

que puede describirse como:

$$\frac{dD^s}{dt} = \text{Tr} \vec{M}(\vec{x}_0) \cdot \vec{f}_0 \wedge \vec{x}_1^s + \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 = \text{Tr} \vec{M}(\vec{x}_0) \cdot D^s + \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 \quad (2.20)$$

donde  $\text{Tr} \vec{M}$  es la traza de la matriz jacobiana de  $\vec{f}_0$ .

Puesto que  $D^s$  procede de la variedad estable, se integra (2.20) desde  $t_0$  hasta  $+\infty$ . Además  $\text{Tr} \vec{M} = 0$  en la separatriz en el caso de sistemas hamiltonianos no perturbados. De forma que integrando (2.20) se obtiene:

$$D^s(\infty, t_0) - D^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 dt \quad (2.21)$$

pero

$$D^s(\infty, t_0) = \vec{f}_0(\vec{x}_0(\infty - t_0)) \wedge \vec{x}_1^s = 0 \quad (2.22)$$

ya que  $\vec{X}_0$  es punto fijo del sistema no perturbado  $\vec{f}_0(\vec{X}_0) = 0$ . Por tanto (2.21) queda:

$$D^s(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} \vec{f}_0 \wedge \vec{f}_1 dt. \quad (2.23)$$

Procediendo de forma análoga para el cálculo  $D^u$  se obtiene:

$$\frac{dD^u}{dt} = \text{Tr}\bar{M}(\bar{x}_0) \cdot D^u + \bar{f}_0 \wedge \bar{f}_1. \quad (2.24)$$

Como  $D^u$  procede de la variedad inestable se integra (2.24) desde  $-\infty$  hasta  $t_0$  para obtener:

$$D^u(t_0, t_0) = -\int_{-\infty}^{t_0} \bar{f}_0 \wedge \bar{f}_1 dt. \quad (2.25)$$

Sustituyendo los dos últimos resultados (2.23) y (2.24) en (2.16) se obtiene la distancia de Melnikov  $D$ :

$$D(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0 \wedge \bar{f}_1 dt. \quad (2.26)$$

Para su cálculo práctico suele hacerse el cambio de variables  $t \rightarrow t+t_0$  de forma que la distancia de Melnikov se calcula a partir de:

$$D(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\bar{x}_0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{x}_0(t), t+t_0) dt. \quad (2.27)$$

Si  $D(t_0)$  cambia de signo en algún instante  $t_0$  se producirá una intersección entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado en el entorno de la separatriz, dando lugar a comportamiento caótico en las proximidades de la separatriz que podrá ser transitorio o estacionario en función de las condiciones iniciales y del valor de los distintos parámetros.

## 2.3 Mecanismo físico. Conjetura de invariancia del impulso mecánico

Sea un oscilador no lineal, genérico, disipativo y no autónomo cuya dinámica esta descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = -g(x, \dot{x}) + r(x, \dot{x})p(t; T) \quad (2.28)$$

donde  $U(x)$  es la función potencial del oscilador, y  $p(t; T)$  es un pulso periódico de periodo  $T$ , que puede representar una excitación paramétrica o un forzamiento.

En este apartado se pretende encontrar una condición de tipo físico para que la dinámica global de un oscilador genérico como (2.28) sea independiente de la forma específica del pulso de la excitación temporal  $p(t; T)$ , manteniendo constante el resto de parámetros, incluyendo el periodo, y para unas mismas condiciones iniciales.

La ecuación anterior (2.28) en forma de flujo se expresa:

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}, \\ \dot{u} &= -\frac{dU(x)}{dx} - g(x, \dot{x}) + r(x, \dot{x})p(t; T). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se supone que todas las soluciones de (2.28) son acotadas, para ello basta comprobar que la divergencia del flujo (2.29) sea negativa.

Sea  $E(t) = E_c + U(x) = (1/2)\dot{x}^2 + U(x)$  la función energía del sistema (2.28) siendo  $E_c$  la energía cinética y  $U(x)$  la potencial, su derivada temporal puede escribirse como:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\right) = \dot{x}[-g(x, \dot{x}) + r(x, \dot{x})p(t; T)], \quad (2.30)$$

ecuación que integrada en un periodo<sup>3</sup> sobre cualquier intervalo  $[nT, (n+1)T]$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  resulta:

$$E((n+1)T) - E(nT) = - \int_{nT}^{(n+1)T} \dot{x}g(x, \dot{x})dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \dot{x}r(x, \dot{x})p(t; T)dt. \quad (2.31)$$

Si  $\dot{x}g(x, \dot{x})$ ,  $\dot{x}r(x, \dot{x})$  y  $p(t; T)$  son funciones acotadas e integrables en el intervalo temporal  $[nT, (n+1)T]$ , y  $p(t; T)$  no cambia de signo en tal intervalo, cuestión que debe ser verificada para cada sistema concreto, podemos aplicar el primer teorema del valor medio<sup>4</sup> [GRJ00] a las integrales de la ecuación anterior:

$$E((n+1)T) - E(nT) = -\dot{x}(\xi)g(x(\xi), \dot{x}(\xi))T + \dot{x}(\tau)r(x(\tau), \dot{x}(\tau)) \int_{nT}^{(n+1)T} p(t; T)dt \quad (2.32)$$

donde  $\xi, \tau \in [nT, (n+1)T]$ . Los valores de  $\xi$  y  $\tau$  dependen de  $n$  y de  $p(t; T)$ . No obstante, si nos centramos en soluciones asintóticas de (2.28) cuando el oscilador haya alcanzado el estado estacionario ( $n \rightarrow \infty$ ), podemos obviar la dependencia de  $n$ .

De esta forma, la variación energética del oscilador en un periodo depende del impulso mecánico transmitido por el pulso  $\int_{nT}^{(n+1)T} p(t; T)dt$  y del valor de  $x$  y  $\dot{x}$  en los instantes  $\xi$  y  $\tau$  que a su vez dependen de la forma específica del pulso  $p(t; T)$ . No obstante, para periodos suficientemente pequeños,  $T \rightarrow 0$ , la variación energética dependerá principalmente del impulso mecánico transmitido.

De manera que se puede formular la siguiente conjetura:

<sup>3</sup> En función de la paridad y simetría del pulso puede ser necesario integrar en un cuarto de periodo o en medio periodo, en lugar de en un periodo completo.

<sup>4</sup> *Primer Teorema del Valor Medio*: Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones acotadas e integrables en el intervalo  $[a, b]$  y  $g(x)$  sin cambio de signo en  $[a, b]$ . Entonces:  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$  con  $\xi \in [a, b]$

*Conjetura de invariancia del impulso mecánico.- Una condición plausible desde el punto de vista físico para que la dinámica global de  $\ddot{x} + dU(x)/dx = -g(x, \dot{x}) + r(x, \dot{x})p(t; T)$  sea independiente de la forma específica del pulso de la excitación temporal  $p(t; T)$ , manteniendo constante el resto de parámetros y las mismas condiciones iniciales, es que el impulso mecánico transmitido por los distintos pulsos aplicados sea el mismo.*

Notar que se trata de una conjetura que previsiblemente debe verificarse para periodos de la excitación temporal suficientemente pequeños y para soluciones estacionarias del oscilador. Además debe comprobarse para cada oscilador particular que se cumplen los requisitos impuestos por el primer teorema del valor medio utilizado en el cálculo de la variación temporal de la energía.

La conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido fue formulada por primera vez en [CMGH99] y se aplicó a un oscilador de Duffing con dos pozos de potencial paraméricamente amortiguado. Más tarde se aplicó al caso del *kicked rotator* [CMGH01, CMGH03]. En todos los casos se comprobó numéricamente su validez y se observó que las condiciones de aplicabilidad de la conjetura no eran especialmente restrictivas. La aplicación de la conjetura a los sistemas citados es uno de los objetivos del presente trabajo y su aplicación a dichos sistemas se desarrolla en los apartados 2.4.5 y 2.5.4.

## 2.4 El oscilador de Duffing simétrico, con dos pozos de potencial y paraméricamente amortiguado mediante pulsos periódicos simétricos

El sistema objeto de estudio es el oscilador de Duffing simétrico, con dos pozos de potencial y paraméricamente amortiguado mediante pulsos periódicos simétricos:

$$\ddot{x} + \eta[1 + Fp(t; T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0, \quad (2.33)$$

siendo  $\eta$  y  $F$  el coeficiente normalizado de amortiguamiento y la amplitud de excitación, respectivamente,  $\beta$  el coeficiente del potencial ( $\beta > 0$ ) y  $p(t; T)$  un pulso simétrico genérico de periodo  $T$  y amplitud unidad. Además el amortiguamiento es un término perturbativo ( $\eta, \eta F \ll 1$ ) del sistema hamiltoniano integrable subyacente ( $\eta = 0$ ).

Con el objeto de estudiar el umbral caótico de (2.33) bajo cambios únicamente de la forma de onda de la excitación paramétrica se han considerado dos tipos de pulsos para dicha excitación.

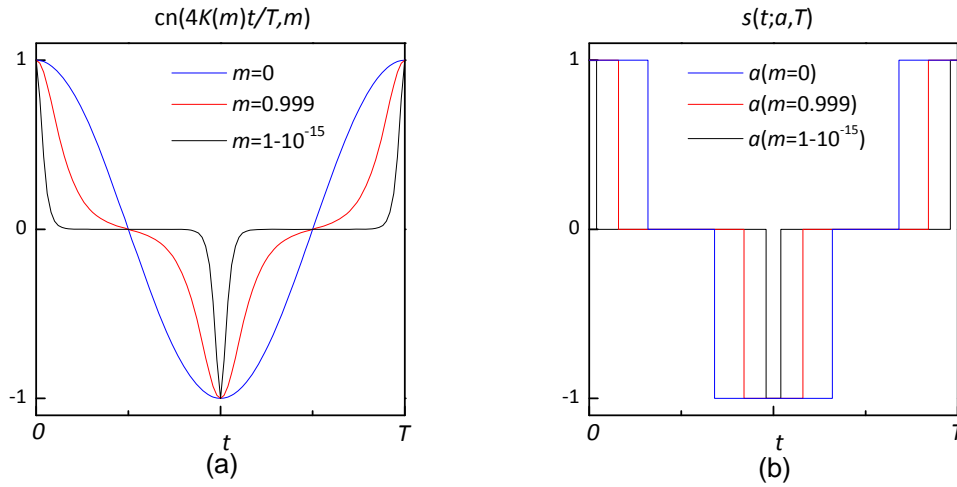


Figura 2-4 (a) Pulso cnoidal  $cn(4K(m)t/T, m)$  para distintos valores del parámetro elíptico  $m$ . (b) Pulso rectangular  $s(t; a, T)$  para distintos valores de  $a$  con  $a=a(m, T)$  de manera que transmitan el mismo impulso mecánico que los pulsos cnoidales representados [cf. Ec. (2.102)]

a)  $p(t; T) \equiv cn(\omega t; m)$ , pulsos cnoidales siendo  $cn$  la función elíptica de Jacobi cosam con parámetro elíptico  $m$  y la frecuencia  $\omega = \omega(m) = 4K(m)/T$ , donde  $K(m)$  es la integral elíptica completa de primera especie. El valor de la frecuencia se introduce para obtener un pulso periódico de periodo  $T$  para cualquier valor de  $m$ , habida cuenta que el periodo real de la función cosam es  $4K(m)$ . De esta manera  $m$  controla únicamente la forma de onda de la excitación. El espacio de parámetros de (2.33) es en este caso tetradimensional pues se añade el parámetro  $m$ , para controlar la forma de onda del pulso, al espacio tridimensional de parámetros original  $(\eta, F, T)$ . En el caso  $m=0$  se recupera el caso armónico estudiado en [XH95] ya que  $cn(\omega t; m=0) \equiv \cos(\omega t)$ . La anchura efectiva del pulso decrece conforme aumenta  $m$  y en límite  $m=1$  el pulso se anula excepto en un conjunto de instantes de medida de Lebesgue nula de forma que se recupera el caso autónomo de (2.33).

b)  $p(t; T) = s(t; a, T)$  pulsos rectangulares simétricos de periodo  $T$ , anchura variable  $a$  y amplitud unidad:

$$s(t; a, T) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, a/2] \cup [T - a/2, T] \\ -1, & \text{si } t \in [T/2 - a/2, T/2 + a/2], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \text{en cada periodo } T. \quad (2.34)$$

En la Figura 2-4 se representan ambos pulsos para distintos valores de  $m$  y  $a$ . Los valores de  $a$  y  $m$  usados verifican la condición de invariancia del impulso mecánico transmitido [cf. Ec. (2.102)]. Los parámetros  $a$  y  $m$  juegan un papel similar en ambos pulsos, controlan la forma de onda del pulso y por tanto la variación temporal de la energía del oscilador.

### 2.4.1 El oscilador de Duffing

A continuación se describe el sistema hamiltoniano integrable subyacente a (2.33) ( $\eta=0$ ), el oscilador de Duffing conservativo con dos pozos de potencial. Dicho sistema tiene la forma:

$$\ddot{x} - x + \beta x^3 = 0 \tag{2.35}$$

que en forma de flujo puede escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= x - \beta x^3 \end{aligned} \right\} \tag{2.36}$$

Es un sistema hamiltoniano con energía:

$$H_0 = E_c + U(x) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4. \tag{2.37}$$

Se calculan a continuación los puntos fijos del sistema y se discute su naturaleza.

#### Puntos fijos:

Sea  $u=0 \Rightarrow x - \beta x^3 = 0 \Rightarrow x=0$  ó  $x = \pm \beta^{-1/2}$  de forma que los puntos fijos de (2.36) serán:

$$(x, u) = \{(0, 0), (+\beta^{-1/2}, 0), (-\beta^{-1/2}, 0)\}. \tag{2.38}$$

La naturaleza de dichos puntos fijos es:

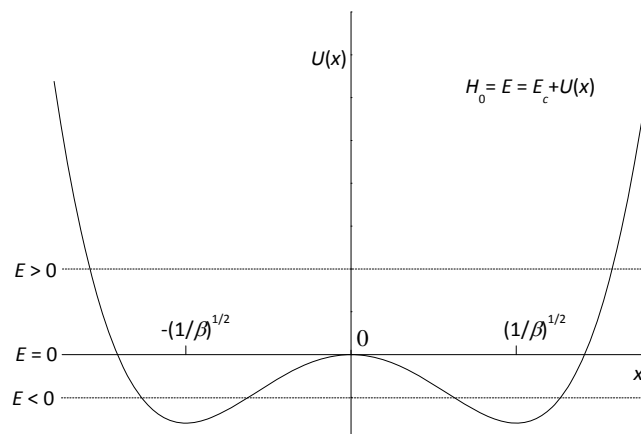


Figura 2-5 Potencial del oscilador de Duffing  $U(x) = -(1/2)x^2 + (\beta/4)x^4$  y niveles energéticos de la separatriz ( $E=0$ ), las órbitas exteriores ( $E>0$ ) e interiores ( $E<0$ ) a la separatriz.

Para  $(x,u)=(0,0)$  el flujo linealizado en torno a dicho punto,  $\left. \begin{array}{l} \dot{x}=u \\ \dot{u}=x \end{array} \right\}$ , cuya ecuación característica es  $\lambda^2 - 1 = 0$  y cuyos autovalores son  $\lambda = \pm 1$ , reales y de signo opuesto; por tanto  $(0,0)$  es un punto fijo hiperbólico de silla de (2.35).

Para  $(x,u)=(\pm\beta^{-1/2}, 0)$ , el flujo linealizado en torno a dicho punto se obtiene con el cambio de variable  $(\bar{x}, \bar{u}) = (x - (\pm\beta^{-1/2}), u)$  de forma que el flujo queda:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u} \\ \frac{d\bar{u}}{dt} = (\bar{x} \mp \beta^{-1/2}) - \beta(\bar{x} \mp \beta^{-1/2})^3 \end{array} \right\}, \quad (2.39)$$

y linealizando se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u} \\ \frac{d\bar{u}}{dt} = -2\bar{x} \end{array} \right\}. \quad (2.40)$$

Cuya ecuación característica es  $\lambda^2 + 2 = 0$ , con autovalores  $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ , imaginarios puros complejos conjugados, luego  $(x,u)=(\pm\beta^{-1/2}, 0)$  son dos puntos fijos elípticos o centros.

De la expresión del potencial  $U(x) = -(1/2)x^2 + (\beta/4)x^4$ , se deduce fácilmente que presenta un máximo relativo en  $x=0$  y dos mínimos relativos (pozos de potencial) en  $x = \pm\beta^{-1/2}$ . Que se corresponden con el punto hiperbólico de silla y los dos centros respectivamente. En la Fig. 2-5 se muestra la gráfica del potencial.

### Órbitas homoclinas:

Para el origen de potencial elegido, las órbitas homoclinas se encuentran para  $H_0=0$ , valor que sustituido en (2.37) conduce a:

$$\dot{x}_0 = \pm x_0 \left( 1 - \frac{\beta}{2} x_0^2 \right)^{1/2}, \quad (2.41)$$

ecuación que, una vez integrada, determina para cada signo las dos órbitas homoclinas  $\bar{\Gamma}_+^0$  y  $\bar{\Gamma}_-^0$ :



$$\vec{\Gamma}_{\pm}^0(t) = \left( x_{0\pm}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech}(t), u_{0\pm}(t) = \mp \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right). \quad (2.42)$$

Así pues el espacio de fases de (2.35) queda caracterizado por una separatriz, formada por las dos órbitas homoclinas  $\vec{\Gamma}_+^0, \vec{\Gamma}_-^0$  y el punto fijo hiperbólico de silla (0,0), y la existencia de dos puntos fijos elípticos en  $(\pm\beta^{-1/2}, 0)$ , tal como se muestra en la Fig. 2-6.

### Órbitas en el espacio de fases:

Las órbitas interiores ( $H_0 < 0$ ) a la separatriz de (2.35) son [Wig03]:

$$\begin{aligned} x^m(t) &= \pm \sqrt{\frac{2/\beta}{2-m}} \operatorname{dn}(t/\sqrt{2-m}; m), \\ \dot{x}^m(t) &= \mp m \sqrt{\frac{2/\beta}{2-m}} \operatorname{sn}(t/\sqrt{2-m}; m) \operatorname{cn}(t/\sqrt{2-m}; m), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde el signo superior (inferior) se refiere a las órbitas del lazo homoclinico de la derecha (izquierda) y  $m \in [0, 1]$ . El periodo de las órbitas es  $T_{int}(m) = 2\sqrt{2-m}K(m)$ , con los límites  $T_{int}(m=0) = \sqrt{2}\pi$  y  $T_{int}(m=1) \rightarrow \infty$ . Las órbitas interiores (2.43) en el límite  $m=1$  se reducen a las homoclinas (2.42) que constituyen la separatriz.

Análogamente existe un conjunto de órbitas exteriores ( $H_0 > 0$ ) a la separatriz :

$$\begin{aligned} x^m(t) &= + \sqrt{\frac{2/\beta}{m-1}} \operatorname{cn}(t/\sqrt{2m-1}; m) \\ \dot{x}^m(t) &= - \frac{\sqrt{2m/\beta}}{2m-1} \operatorname{sn}(t/\sqrt{2m-1}; m) \operatorname{dn}(t/\sqrt{2m-1}; m) \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $m \in [1/2, 1]$ . El periodo de las órbitas es  $T_{ext}(m) = 4K(m)\sqrt{2m-1}$ , con los límites  $T_{ext}(m=1/2) = 0$  y  $T_{ext}(m=1) \rightarrow \infty$ . Las órbitas exteriores (2.44) en el límite  $m=1$  se reducen a las homoclinas (2.42) que constituyen la separatriz.

En la Fig. 2-6 se muestra la estructura del espacio de fases del oscilador, en la que además de mostrarse el carácter homoclinico de la separatriz y los puntos fijos, se muestran también las órbitas externas e internas a la separatriz.

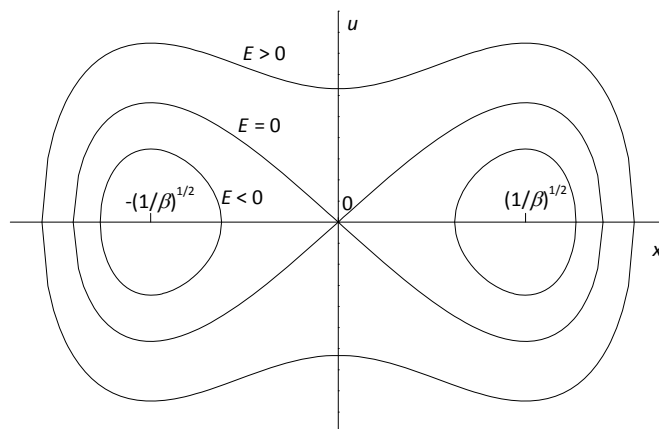


Figura 2-6 Órbitas en el espacio de fases del oscilador de Duffing  $\ddot{x} - x + \beta x^3 = 0$ : separatriz ( $E=0$ ), órbitas internas ( $E<0$ ) y externas ( $E>0$ ) [cf. Ecs. (2.42), (2.43) y (2.44), respectivamente]

### 2.4.2 Pulsos armónicos $p(t;T)=\cos(2\pi t/T)$

Como primera aproximación al estudio del sistema (2.33) se estudia el caso particular,  $m=0$ , en cuyo caso el pulso cnoidal  $p(t;T)=\text{cn}(4K(m=0)t/T;0)\equiv\cos(2\pi t/T)$ , recuperándose de esta forma la excitación paramétrica armónica estudiada en la bibliografía [XH95]. Además, permitirá validar el estudio del pulso cnoidal, confrontando los resultados del caso armónico  $m=0$ , con los del caso general en el límite  $m\rightarrow 0$ .

Así pues, el sistema objeto de nuestro estudio es un oscilador de Duffing no autónomo simétrico con dos pozos de potencial, paraméricamente amortiguado mediante pulsos cosenoidales:

$$\ddot{x} + \eta[1 + F \cos(2\pi t / T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0. \quad (2.45)$$

Asumiremos que la disipación y la excitación paramétrica son perturbaciones débiles del sistema integrable subyacente ( $\eta=0$ ) a (2.45), por tanto se considera  $\eta \ll 1$  y  $\eta F \ll 1$ . Además, al tratarse de un oscilador de Duffing con dos pozos de potencial consideraremos  $\beta > 0$ .

### 2.4.2.1 Análisis de Melnikov

Se estudia a continuación la bifurcación homoclina del sistema (2.45) que da origen al comportamiento caótico. Para ello usaremos el análisis de Melnikov descrito en el apartado 2.2.4 . La función de Melnikov  $M(t_0)$  [cf. Ec. (2.27)] mide la distancia entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado en la sección de Poincaré en el instante  $t_0$ . Si  $M(t_0)$  tiene un cero simple entonces se produce una bifurcación homoclina, y por tanto la posibilidad de comportamiento caótico, transitorio o estacionario en función de los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales. Dicha técnica no permite asegurar la aparición de atractores extraños caóticos (caos estacionario) los cuales representan movimientos caóticos persistentes en el dominio global del espacio de fases. Sin embargo, si permite obtener condiciones necesarias para el inicio de la dinámica caótica y, por la misma razón, proporciona condiciones suficientes para la supresión de caos. Este es el fundamento último de su utilidad para predecir la supresión del comportamiento caótico.

El sistema no perturbado ( $\eta=0$ ) es hamiltoniano con energía  $H_0=E_c+U(x)=u^2/2+(-x^2/2+\beta x^4/4)$ . La separatriz está formada por dos órbitas homoclinas  $\bar{\Gamma}_{\pm}^0$ ; cuya ecuación de acuerdo con (2.42) es  $\bar{\Gamma}_{\pm}^0(t)=(x_{0\pm}(t)=\pm\sqrt{2/\beta} \operatorname{sech}(t), u_{0\pm}(t)=\mp\sqrt{2/\beta} \operatorname{sech}(t) \tanh(t))$  y el punto fijo hiperbólico de silla (0,0).

Se considera ahora el sistema perturbado (2.45). De acuerdo con (2.27), la función de Melnikov para la órbita  $\bar{\Gamma}_{+}^0(t)$  es:

$$M^{+}(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\bar{\Gamma}_{+}^0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_{+}^0(t), t+t_0) dt \quad (2.46)$$

La función para la órbita  $\bar{\Gamma}_{-}^0(t)$  es completamente análoga, y dada la simetría del potencial, el análisis de las dos funciones  $M^{\pm}(t_0)$  conduce a los mismos resultados de manera que en adelante se omitirá el índice relativo a la órbita homoclina.

El sistema (2.45) se escribe en forma de flujo:

$$(\dot{x}, \dot{u}) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 = (u, x - \beta x^3) + (0, -\eta[1 + F \cos(\frac{2\pi t}{T})]u), \quad (2.47)$$

donde se ha separado el flujo hamiltoniano  $\bar{f}_0$ , de la perturbación  $\bar{f}_1$ , de forma que:

$$\begin{aligned} f_{01} &= u, & f_{11} &= 0, \\ f_{02} &= x - \beta x^3, & f_{12} &= -\eta[1 + F \cos(2\pi t / T)]u, \end{aligned} \quad (2.48)$$

de manera que el integrando de (2.46) queda:

$$\bar{f}_0(\bar{\Gamma}_+^0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_+^0(t), t + t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} (1 + F \cos[\frac{2\pi(t+t_0)}{T}]) u_0^2, \quad (2.49)$$

que sustituido en (2.46) con(2.42) da lugar a:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= -\frac{2\eta}{\beta} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt + F \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos[\frac{2\pi}{T}(t+t_0)] dt \right) \\ &= -\frac{2\eta}{\beta} (I_1 + FI_2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos[\frac{2\pi}{T}(t+t_0)] dt. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas, haciendo uso de la paridad de las funciones circulares y evaluando las integrales impropias a partir de las tablas de integrales [GRJ00] se obtiene:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt = \frac{4}{3}, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos[\frac{2\pi}{T}(t+t_0)] dt = \\ &= \cos(\frac{2\pi}{T}t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos[\frac{2\pi}{T}t] dt - \\ &\quad \sin(\frac{2\pi}{T}t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \sin[\frac{2\pi}{T}t] dt = \\ &= 2 \cos(\frac{2\pi}{T}t_0) \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) (1 - \operatorname{sech}^2(t)) \cos[\frac{2\pi}{T}t] dt = \\ &= 2 \cos(\frac{2\pi}{T}t_0) \left( \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \cos[\frac{2\pi}{T}t] dt - \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^4(t) \cos[\frac{2\pi}{T}t] dt \right) = \\ &= 2 \cos(\frac{2\pi}{T}t_0) \left( \frac{\pi^2}{T} \operatorname{csech}(\frac{\pi^2}{T}) - \frac{\pi}{2} \left( \frac{4\pi^3}{3T^3} + \frac{4\pi}{3T} \right) \operatorname{csech}(\frac{\pi^2}{T}) \right) = \\ &= \pi \cos(\frac{2\pi}{T}t_0) \operatorname{csech}(\frac{\pi^2}{T}) \left( \frac{2\pi}{3T} - \frac{4\pi^3}{3T^3} \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

que sustituidas en (2.50) permiten determinar la función de Melnikov:

$$M(t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} \left[ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \pi^2 F \cos(\frac{2\pi t_0}{T}) \operatorname{csech}(\frac{\pi^2}{T}) \left( \frac{1}{T} - \frac{2\pi^2}{T^3} \right) \right]. \quad (2.54)$$

### 2.4.2.2 Teorema de inhibición del comportamiento caótico

La bifurcación homoclina y por tanto el inicio del comportamiento caótico del sistema (2.45) se producirá cuando la función de Melnikov (2.54), que mide la distancia entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado, tenga ceros simples. Por tanto, una forma de asegurar que  $M(t_0)$  no tenga ceros simples para todo  $t_0$ , está dada por la condición:

$$\frac{4}{3} > \left| \frac{2}{3} \pi^2 F c \operatorname{sech} \left( \frac{\pi^2}{T} \right) \left( \frac{1}{T} - \frac{2\pi^2}{T^3} \right) \right|, \quad (2.55)$$

o bien

$$\frac{1}{F} > \frac{\pi^2}{2} \left| \left( \frac{1}{T} - \frac{2\pi^2}{T^3} \right) c \operatorname{sech} \left( \frac{\pi^2}{T} \right) \right|. \quad (2.56)$$

Por tanto, puede establecerse el siguiente teorema de inhibición del comportamiento caótico:

*Teorema 1. Una condición suficiente para que el sistema*

$$\ddot{x} + \eta [1 + F \cos(2\pi t / T)] \dot{x} - x + \beta x^3 = 0,$$

*con  $\beta > 0$ ,  $\eta \ll 1$  y  $\eta F \ll 1$ , no presente caos homoclino es que se verifique:*

$$\frac{1}{F} > U_0(T), \quad (2.57)$$

*donde  $U_0(T)$  es la función umbral orden-caos:*

$$U_0(T) = \frac{\pi^2}{2} \left| \left( \frac{1}{T} - \frac{2\pi^2}{T^3} \right) c \operatorname{sech} \left( \frac{\pi^2}{T} \right) \right|. \quad (2.58)$$

### 2.4.2.3 Análisis de la función umbral

Se estudia a continuación la función umbral  $U_0(T)$ , para determinar en qué regiones del espacio de parámetros la dinámica del sistema (2.45) es regular.

En la Figura 2-7 se muestra una gráfica de la función  $U_0(T)$ . Aplicando la condición de inhibición (2.57) puede establecerse que si el inverso de  $F$  para un determinado valor de  $T$  se encuentra en la región sombreada de la Fig. 2-7 el comportamiento del sistema (2.45) es regular. De esta forma la función umbral delimita las zonas de comportamiento regular y las de posible comportamiento caótico (al menos transitorio).

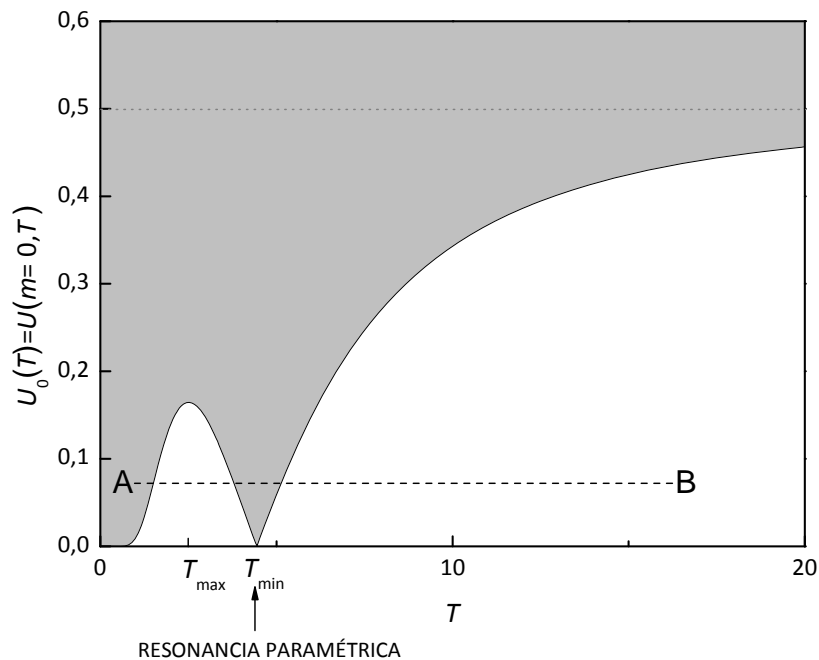


Figura 2-7 Función umbral caótico  $U_0(T)$  [cf. Ec.(2.58)] para el caso armónico ( $m=0$ ). Si el valor de  $1/F$  para un determinado  $T$  se encuentra en la zona sombreada el comportamiento es necesariamente regular [cf. Ec. (2.57)].

En orden creciente de  $T$  se observan las siguientes características:

- $U_0(T=0)=0$ , de forma que en este caso límite no es posible el comportamiento caótico, en efecto el promedio de  $F \cos(2\pi t / T)$  en cualquier intervalo finito temporal tiende a cero conforme  $T \rightarrow 0$ .
- La función umbral presenta un máximo en  $T=T_{\max}=2.51\dots$  donde  $U_0(T=T_{\max})=0.164\dots$
- La función umbral presenta un mínimo en  $T=T_{\min}=\sqrt{2}\pi$  con un valor  $U_0(T=T_{\min})=0$ , para dicho valor de  $T$  no cabe esperar comportamiento caótico para ningún valor de  $F$  consecuencia de una resonancia paramétrica 1:1 del sistema integrable subyacente a (2.45). En efecto, el periodo de las órbitas interiores a la separatriz de dicho sistema integrable es  $T_{\text{int}}(m)=2\sqrt{2-mK(m)}$  [Wig03] con el límite  $T_{\text{int}}(m=0)=\sqrt{2}\pi$ .
- A partir de  $T_{\min}$  la función es creciente y se acerca de forma asintótica a  $1/2$ ,  $U_0(T \rightarrow \infty)=1/2$ . Por tanto, aplicando la condición de inhibición (2.57), se establece que si  $F \leq 2$  el sistema no puede exhibir comportamiento caótico, resultado coherente con el estudio de F. Xie y G.Hu [XH95] de las fronteras de estabilidad de las soluciones estables ( $x=\pm 1, \dot{x}=0$ ) del sistema (2.45) con  $\beta=1$  en el plano  $T-F$ , frontera que presenta un mínimo en  $T=T_{\min}/2$  para el que  $F=2$ .

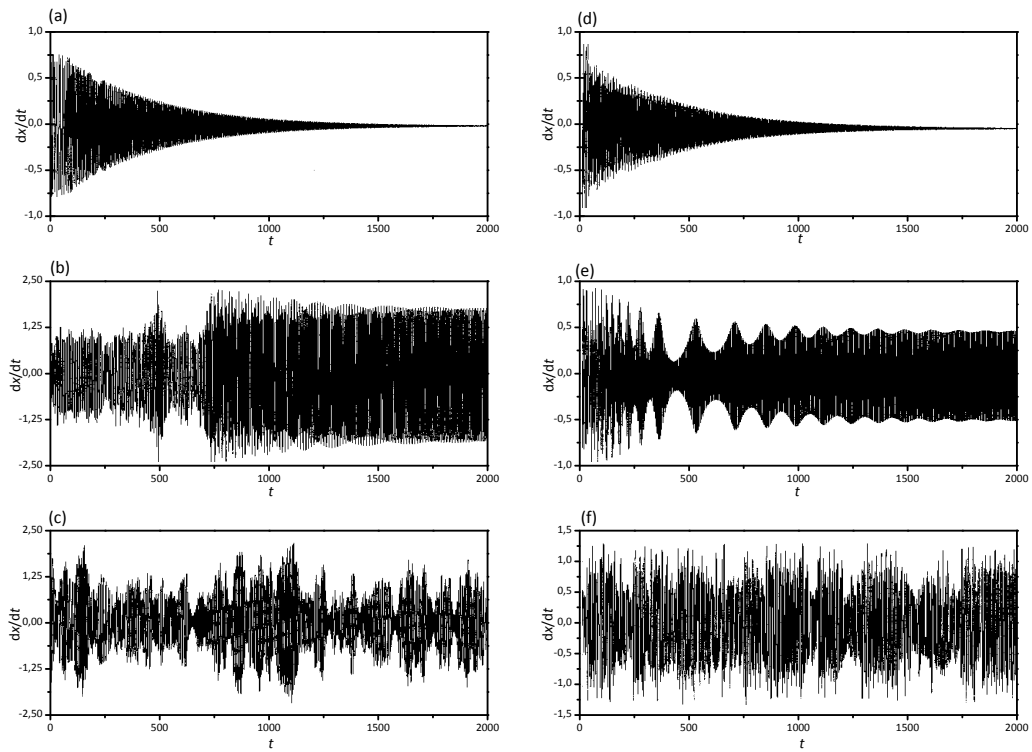


Figura 2-8 Series temporales de velocidad del sistema (2.45), con  $\eta=0.005$  y  $F=100$ . (a)  $T=1$ , (b)  $T=1.5$ , (c)  $T=T_{\max}=2.51\dots$ , (d)  $T=3.5$ , (e)  $T=T_{\min}=\sqrt{2}\pi$ , (f)  $T=6.5$ .

### 2.4.2.4 Estudio numérico

Si fijamos el parámetro  $F$ , con  $F > 1/U_0(T=T_{\max})$  de manera que el sistema describa una ruta en el espacio de parámetros  $T-F$  como la ruta AB de la Figura 2-7, la ruta se iniciará con comportamiento regular y conforme aumentamos el periodo  $T$  puede aparecer una ventana de comportamiento caótico, al menos transitorio en el intervalo  $0 < T < T_{\min}$ . En la Fig. 2-8 Se confirma de forma numérica dicha predicción, en ella se muestran distintas series temporales de velocidad para periodos crecientes.

### 2.4.3 Pulsos cnoidales $p(t;T)=cn(4K(m)t/T;m)$

El sistema objeto de estudio es un oscilador de Duffing, no autónomo, simétrico, con dos pozos de potencial y paraméricamente amortiguado mediante pulsos simétricos periódicos de periodo  $T$  modelados por la función elíptica de Jacobi cosam (cn):

$$\ddot{x} + \eta[1 + F \operatorname{cn}(4K(m)t/T; m)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0 \quad (2.59)$$

Asumiremos que la disipación y la excitación paramétrica son perturbaciones débiles del sistema integrable subyacente ( $\eta = 0$ ), por tanto se consideran  $\eta \ll 1$  y  $\eta F \ll 1$ . Además, al tratarse de un oscilador de Duffing con dos pozos de potencial se considera  $\beta > 0$ .

### 2.4.3.1 Análisis de Melnikov

Se estudia a continuación la bifurcación homoclina del sistema (2.45) que da origen al comportamiento caótico. Para ello usaremos el análisis de Melnikov descrito en el apartado 2.2.4.

Se considera ahora el sistema perturbado (2.59). De acuerdo con (2.27) la función de Melnikov para la órbita  $\bar{\Gamma}_+^0(t)$  es:

$$M^+(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\bar{\Gamma}_+^0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_+^0(t), t + t_0) dt. \quad (2.60)$$

La función para la órbita  $\bar{\Gamma}_-^0(t)$  es completamente análoga, y dada la simetría del potencial, el análisis de las dos funciones  $M^\pm(t_0)$  conduce a los mismos resultados de manera que en adelante se omitirá el índice relativo a la órbita homoclina.

El sistema (2.59) se escribe en forma de flujo:

$$(\dot{x}, \dot{u}) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 = (u, x - \beta x^3) + (-\eta[1 + F \operatorname{cn}(4K(m)t/T; m)]u, 0), \quad (2.61)$$

donde se ha separado el flujo hamiltoniano  $\bar{f}_0$ , de la perturbación  $\bar{f}_1$ , de forma que:

$$\begin{aligned} f_{01} &= u, & f_{11} &= 0, \\ f_{02} &= x - \beta x^3, & f_{12} &= -\eta[1 + F \operatorname{cn}(4K(m)t/T; m)]u, \end{aligned} \quad (2.62)$$

de manera que el integrando de (2.60) queda:

$$\bar{f}_0(\bar{\Gamma}_+^0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_+^0(t), t + t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} [1 + F \operatorname{cn}(\frac{4K(m)}{T}(t + t_0); m)] u_0^2, \quad (2.63)$$

que sustituido en (2.60) con (2.42) da lugar a:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= -\frac{2\eta}{\beta} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt + F \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \operatorname{cn}(\frac{4K(m)}{T}(t + t_0); m) dt \right) \\ &= -\frac{2\eta}{\beta} (I_1 + FI_2), \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde



$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt, \quad (2.65)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \operatorname{cn}\left(\frac{4K(m)}{T}(t+t_0); m\right) dt.$$

La primera integral  $I_1$ , que se ha resuelto en el caso armónico, vale:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt = \frac{4}{3}. \quad (2.66)$$

Para el cálculo de la segunda integral se requiere el desarrollo en serie de la función elíptica de Jacobi  $\operatorname{cn}$  [GRJ00]:

$$\operatorname{cn}(u; m) = \frac{\pi}{\sqrt{mK}} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sech}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi K'}{K}\right] \cos\left[(2n+1) \frac{\pi u}{2K}\right], \quad (2.67)$$

donde  $K \equiv K(m)$  y  $K' \equiv K'(m) \equiv K(1-m)$  es la integral elíptica complementaria completa de primera especie. Sustituyendo la serie en (2.65) se obtiene:

$$I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{mK}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi K'}{K}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi(t+t_0)}{T}\right] dt \right\}. \quad (2.68)$$

Desarrollando el coseno, como coseno de una suma, y haciendo uso de la paridad del seno:

$$I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{mK}} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sech}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi K'}{K}\right] \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi t_0}{T}\right] I_{2n+1}, \quad (2.69)$$

donde  $I_{2n+1}$  es:

$$I_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt. \quad (2.70)$$

Se calcula a continuación la integral  $I_{2n+1}$ :

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt - 2 \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^4(t) \cos\left[(2n+1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt = \\ &= \left\{ \frac{2\pi^2(2n+1)}{T} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2(2n+1)}{T}\right) \right\} \\ &- \left\{ 2 \left[ \left(\frac{2\pi(2n+1)}{T}\right)^3 / 6 + 2 \left(\frac{2\pi(2n+1)}{T}\right) / 3 \right] \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2(2n+1)}{T}\right) \right\} = \\ &= \pi \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2(2n+1)}{T}\right) \left[ \frac{2\pi}{3T} (2n+1) - \frac{((2\pi/T)(2n+1))^3}{6} \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Las integrales impropias se han resuelto con ayuda de tablas de integrales estándar. Sustituyendo valor de la integral  $I_{2n+1}$  en (2.69), y junto con (2.66) en (2.64) se obtiene la función de Melnikov:

$$M(t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} \left[ \frac{4}{3} + \pi^2 F \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T) \cos\left((2n+1) \frac{2\pi t_0}{T}\right) \right], \quad (2.72)$$

donde

$$a_n(m) = \frac{1}{\sqrt{mK}} \operatorname{sech}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi K'}{K}\right],$$

$$b_n(T) = \left[ \frac{1}{3} \left(\frac{(2n+1)2\pi}{T}\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{(2n+1)2\pi}{T}\right)^3 \right] \operatorname{csech}\left(\frac{(2n+1)\pi^2}{T}\right).$$

Si  $m = 0$  solo existe un término no nulo en el sumatorio (2.72), en efecto:

$$a_n(m=0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases} \quad (2.73)$$

y se recupera la función de Melnikov calculada para el caso armónico (2.54):

$$M(t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} \left[ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \pi^2 F \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right) \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T}\right) \left(\frac{1}{T} - \frac{2\pi^2}{T^3}\right) \right].$$

Para el caso general es necesario verificar la convergencia de la serie que aparece en la ecuación (2.72):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T) \cos\left((2n+1) \frac{2\pi t_0}{T}\right). \quad (2.74)$$

**Convergencia de la serie**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T) \cos\left((2n+1) \frac{2\pi t_0}{T}\right)$

A continuación se comprueba la convergencia de dicha serie. Puesto que se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T) \cos\left((2n+1) \frac{2\pi t_0}{T}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(m) b_n(m, T)|, \quad (2.75)$$

la convergencia de (2.74) está asegurada por la convergencia absoluta de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T)$ , para estudiar la convergencia absoluta de esta serie aplicaremos el criterio de la raíz<sup>5</sup> de forma que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) b_n(m, T)$  converge absolutamente si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(m) b_n(m, T)|^{1/n} < 1$ . En efecto:

---

<sup>5</sup> La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge absolutamente si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(m)b_n(m,T)|^{1/n} = e^{-\left(\frac{\pi K'}{K} + \frac{2\pi^2}{T}\right)} < 1 \quad \forall m \in [0,1] \quad (2.76)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 1}} |a_n(m)b_n(m,T)|^{1/n} = e^{-\frac{2\pi^2}{T}} < 1 \quad \text{si } m = 1$$

De forma que la serie (2.75) converge y por tanto la existencia de la función de Melnikov  $M(t_0)$  está garantizada.

### 2.4.3.2 Teorema de inhibición del comportamiento caótico

La bifurcación homoclina, y por tanto el inicio del comportamiento caótico del oscilador (2.59), se producirá cuando la función de Melnikov tenga ceros simples. Por tanto una forma de asegurar la inhibición del comportamiento caótico es verificar que  $M(t_0)$  [cf. Ec. (2.72)] no tenga ceros simples, condición que se verifica para todo  $t_0$  si:

$$\frac{4}{3} > \left| \pi^2 F \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m)b_n(m,T) \right|, \quad (2.77)$$

o bien

$$\frac{1}{F} > \frac{3\pi^2}{4} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m)b_n(m,T) \right|. \quad (2.78)$$

Lo que permite establecer el siguiente teorema de inhibición del comportamiento caótico.

*Teorema 2. Una condición suficiente para que el sistema*

$$\ddot{x} + \eta \left[ 1 + F \operatorname{cn} \left( \frac{4K(m)t}{T}; m \right) \right] \dot{x} - x + \beta x^3 = 0,$$

con  $\eta \ll 1$ ,  $\eta F \ll 1$  y  $\beta > 0$ , no presente caos homoclino es que se verifique:

$$\frac{1}{F} > U(m,T), \quad (2.79)$$

donde  $U(m,T)$  es la función umbral orden-caos:

$$U(m,T) = \frac{3\pi^2}{4} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m)b_n(m,T) \right| \quad (2.80)$$

con

$$a_n(m) = \frac{1}{\sqrt{mK}} \operatorname{sech} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi K'}{K} \right],$$

$$b_n(T) = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{(2n+1)2\pi}{T} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{(2n+1)2\pi}{T} \right)^3 \right] \operatorname{csech} \left( \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right).$$

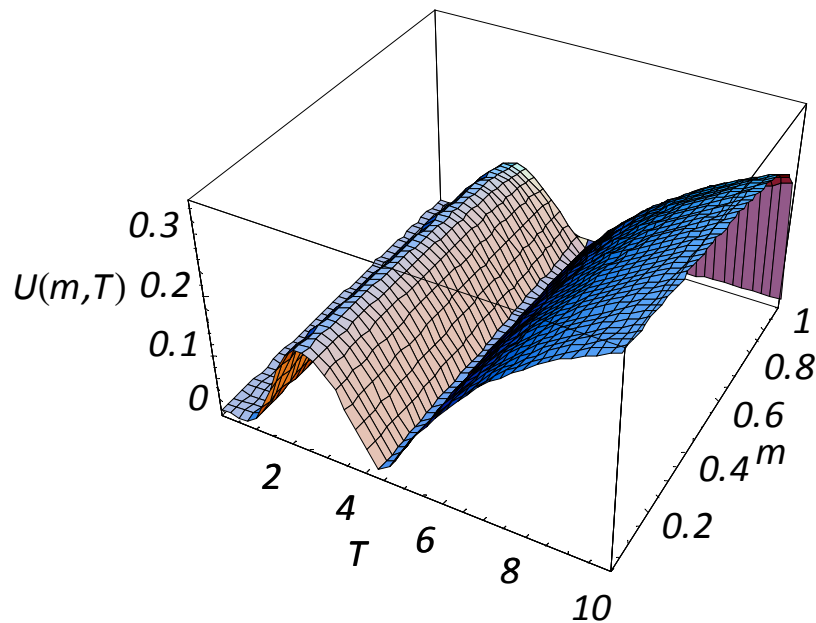


Figura 2-9 Función umbral orden-caos  $U(m, T)$  [cf. Ec. (2.80)] vs.  $m$  y  $T$ .

### 2.4.3.3 Análisis de la función umbral

Se estudia a continuación la función umbral orden-caos  $U(m, T)$  (véase la Fig. 2-9), para determinar en qué regiones del espacio de parámetros la dinámica del sistema (2.59) es regular.

En primer lugar se verifica  $U(m=0, T) = U_0(T)$ , siendo  $U_0(T)$  la función umbral obtenida para el caso armónico ( $m=0$ ). Además, la función umbral presenta los mismos valores límites, en  $T \rightarrow 0$  y en  $T \rightarrow \infty$  que en el límite armónico ( $m = 0$ ):

$$\begin{aligned} U(m, T \rightarrow 0) &= 0, \\ U(m, T \rightarrow \infty) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

En la Fig. 2-10 se muestra la función umbral  $U(m=\text{cte}, T)$ , se puede apreciar su similitud con la correspondiente al caso armónico  $U_0(T)$  (véase la Fig. 2-7)

La función umbral orden-caos  $U(m, T)$  está caracterizada por:

- Existe un máximo relativo de  $U$  en  $T = T_{\max}(m) = 2.51 \dots \forall m$ . El valor de la función en dicho máximo,  $U(m, T = T_{\max})$ , disminuye conforme  $m \rightarrow 1$  (véase la Fig. 2-10), resultado coherente con el límite  $U(m \rightarrow 1, T) = 0$ , límite en el que no es posible el comportamiento caótico.

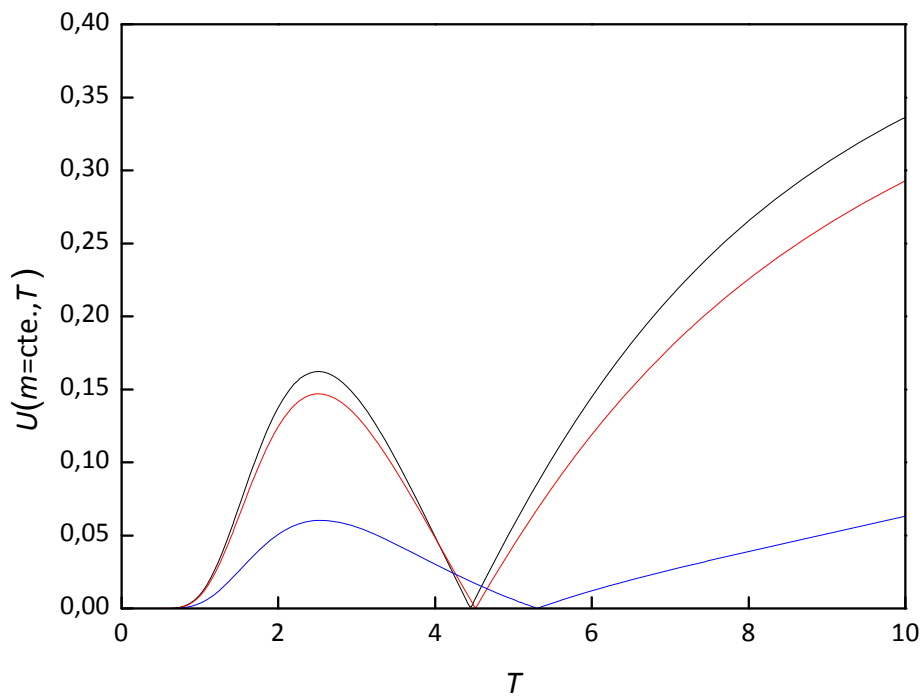


Figura 2-10 Función umbral caótico  $U(m, T)$  [cf. Ec. (2.80)] vs.  $T$  para distintos valores de  $m$ :  $m=0.2$  (negro),  $m=0.8$  (rojo) y  $m=1 \cdot 10^{-6}$  (azul)

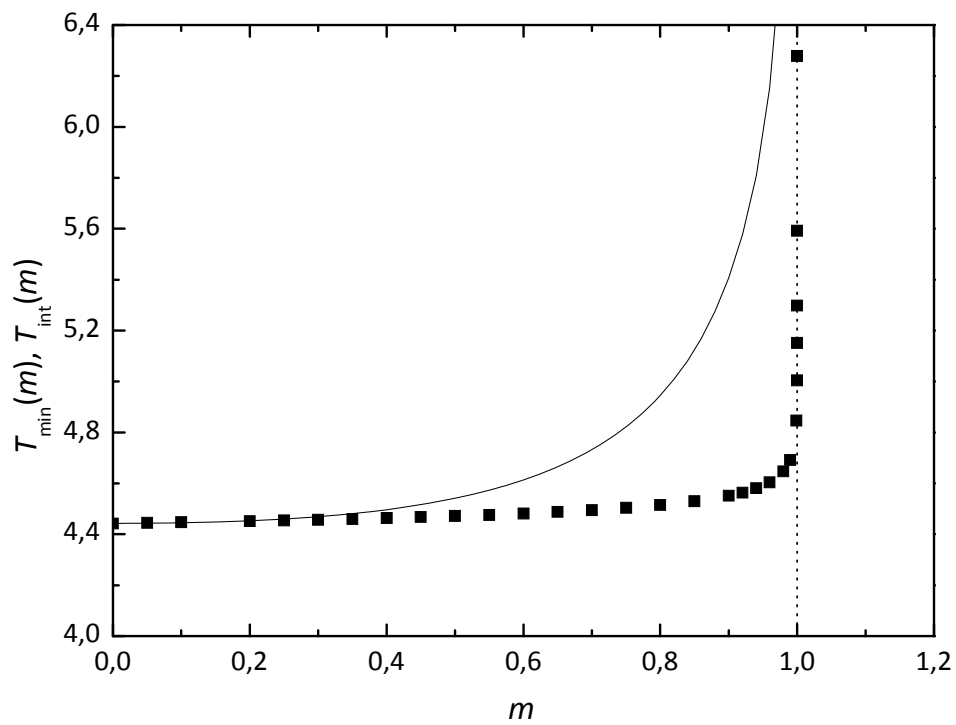


Figura 2-11 Gráficas de las funciones  $T_{int}(m) = 2\sqrt{2 - mK(m)}$  (línea continua), periodo de las órbitas interiores a la separatriz del sistema integrable subyacente a (2.59) ( $\eta=0$ ), y  $T_{min}(m)$  (■) [ $U(m, T=T_{min}(m)) = 0$ ].

- b) Existe un valor  $T_{\min}$  para el cual se verifica  $U(m, T=T_{\min}(m))=0$ ,  $T_{\min}(m)$  aumenta conforme  $m$  crece desde  $m=0$  hasta  $m \rightarrow 1$  si bien su desviación respecto de  $T=T_{\min}(m=0)=\sqrt{2}\pi$  solo es apreciable para valores de  $m$  muy cercanos a 1, es decir, cuando los pulsos son estrechos. En la Fig. 2-11 se puede apreciar tal circunstancia, donde también se ha incluido en línea continua un gráfico de  $T_{\text{int}}(m)$ : el periodo de las órbitas interiores a la separatriz del sistema subyacente integrable (2.35). En este caso, la desviación de  $T_{\min}(m)$  respecto de  $T_{\text{int}}(m)$  es apreciable a partir de  $m \simeq 0.3$  si bien ambas funciones son monótonas crecientes y cuentan con una asíntota vertical en  $m=1$ ,  $T_{\min}(m \rightarrow 1)=T_{\text{int}}(m \rightarrow 1)=\infty$ . De nuevo, la existencia de  $T_{\min}$ , periodo para el cual no es posible el comportamiento caótico del sistema, se debe a una resonancia paramétrica con las órbitas interiores a la separatriz del sistema integrable subyacente.
- c) Fijado  $T$  en el entorno de  $T_{\max}(m)=2.51\dots$  el intervalo de valores de la amplitud  $F$  del pulso para los que cabe esperar comportamiento caótico – al menos transitorio – decrece conforme  $m$  aumenta.
- d) Fijado  $F > 1/U(m, T=T_{\max})$  [cf. Ec.(2.79)] el intervalo de valores del periodo  $T$  en el intervalo  $(0, T_{\min})$  para los cuales cabe esperar comportamiento caótico – al menos transitorio – crece conforme  $m$  aumenta.

Se estudia a continuación la dependencia de la función umbral con el parámetro que controla la forma del pulso de la excitación temporal, manteniendo el periodo constante, es decir  $U(m, T=\text{cte.})$ . Las Figs. 2-12 y 2-13 muestran gráficas de dicha función. Existe un cambio cualitativo importante cuando estudiamos dicha función para periodos lo suficientemente cerca de  $T_{\min}(m)$  (Fig. 2-13) que cuando nos alejamos de dicho valor (Fig. 2-12). De hecho el gráfico de detalle de la Fig. 2-13 revela que la dinámica muestra una fuerte sensibilidad a cambios en la forma de onda del pulso. Aseveración que se ha verificado numéricamente como se muestra en la Fig. 2-14 en la que se representan series temporales de desplazamiento para valores de  $m$  en el entorno del máximo de la Fig. 2-13 para un valor del periodo  $T=T_{\min}(m=0)=\sqrt{2}\pi$ . La serie caótica de la Fig. 2-14 (b) corresponde a un valor de  $m=m_{\max}$  para el cual la función  $U(m, T=T_{\min}(m=0))$  presenta un máximo, la situación más favorable para el inicio de dinámica caótica.

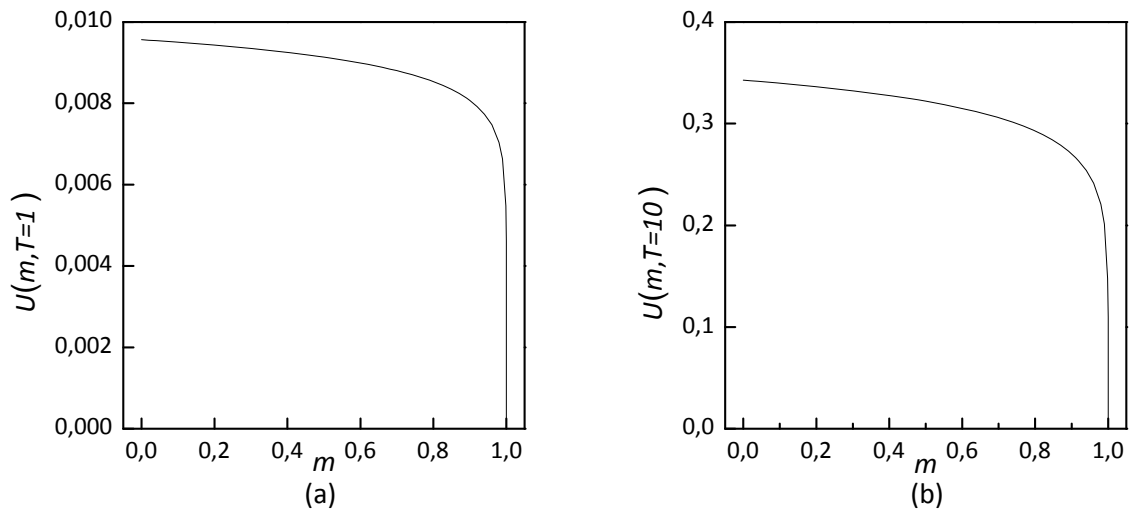


Figura 2-12 Función umbral  $U(m, T)$  [cf. Ec. (2.80)] vs.  $m$ , (a)  $T=1$ , (b)  $T=10$

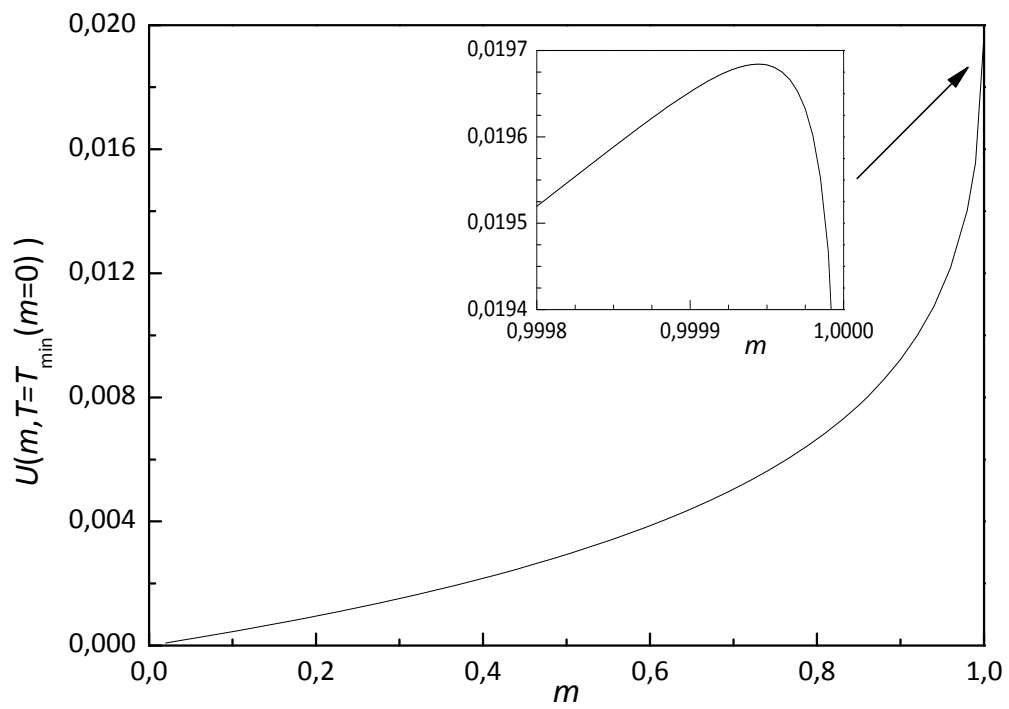


Figura 2-13 Función umbral  $U(m, T)$  [cf. Ec. (2.80)] vs.  $m$  con  $T=T_{\min}(m=0)=\sqrt{2}\pi$ , (periodo para el cual no es posible el comportamiento caótico para la excitación armónica), se incluye detalle de la región del máximo de la función.

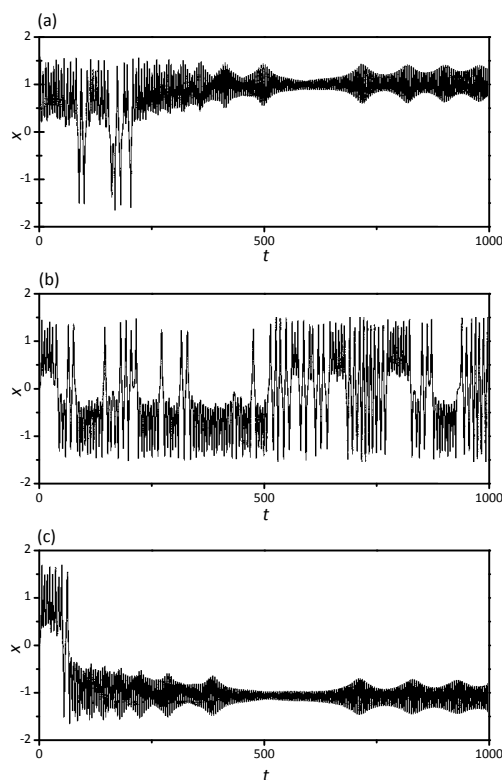


Figura 2-14 Series temporales de desplazamiento del sistema (2.59), con  $T=T_{\min}(m=0)=\sqrt{2}\pi$ ,  $\eta=0.005$  y  $F=170$ . (a)  $m=0.9998$ , (b)  $m=0.9999425$  y (c)  $m=0.99999$

#### 2.4.4 Pulsos rectangulares $p(t;T)=s(t;a,T)$

El sistema objeto de estudio es un oscilador de Duffing, no autónomo, simétrico, con dos pozos de potencial y paraméricamente amortiguado mediante pulsos rectangulares simétricos de periodo  $T$  (véase la Fig. 2-4):

$$\ddot{x} + \eta[1 + Fs(t;a,T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0 \quad (2.82)$$

siendo

$$s(t;a,T) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, a/2] \cup [T - a/2, T] \\ -1, & \text{si } t \in [T/2 - a/2, T/2 + a/2], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en cada periodo } T$$

Asumiremos que la disipación y la excitación paramétrica son perturbaciones débiles del sistema integrable subyacente ( $\eta = 0$ ), por tanto se consideran  $\eta \ll 1$  y  $\eta F \ll 1$ . Además, al tratarse de un oscilador de Duffing con dos pozos de potencial se considera  $\beta > 0$ .



### 2.4.4.1 Análisis de Melnikov

Se considera el sistema perturbado, (2.82), cuya función de Melnikov para la órbita homoclina  $\bar{\Gamma}_0^+$  es:

$$M^+(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\bar{\Gamma}_0^+(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_0^+(t), t + t_0) dt \quad (2.83)$$

La función para la órbita  $\bar{\Gamma}_0^-(t)$  es completamente análoga, y dada la simetría del potencial, el análisis de las dos funciones  $M^\pm(t_0)$  conduce a los mismos resultados de manera que en adelante se omitirá el índice relativo a la órbita homoclina.

El sistema (2.82) se escribe en forma de flujo:

$$(\dot{x}, \dot{u}) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 = (u, x - \beta x^3) + (0, -\eta[1 + Fs(t; a, T)]u), \quad (2.84)$$

donde se ha separado el flujo hamiltoniano  $\bar{f}_0$ , de la perturbación  $\bar{f}_1$ , de forma que:

$$\begin{aligned} f_{01} &= u, & f_{11} &= 0, \\ f_{02} &= x - \beta x^3, & f_{12} &= -\eta[1 + Fs(t; a, T)]u, \end{aligned} \quad (2.85)$$

de manera que el integrando de (2.83) queda:

$$\bar{f}_0(\bar{\Gamma}_0^+(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_0^+(t), t + t_0) = -\frac{2\eta}{\beta} [1 + Fs(t + t_0; a, T)] u_0^2, \quad (2.86)$$

que sustituido en (2.83) con (2.42) da lugar a:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= -\frac{2\eta}{\beta} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt + F \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) s(t + t_0; a, T) dt \right) \\ &= -\frac{2\eta}{\beta} (I_1 + FI_2), \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt = \frac{4}{3}, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) s(t + t_0; a, T) dt. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Para resolver la integral  $I_2$  es preciso obtener la serie de Fourier de  $s(t; a, T)$ :

$$\begin{aligned}
s(t; a, T) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right], \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t; a, T) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt = \begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi a}{T}\right] \end{cases}, \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t; a, T) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

De manera que la serie de Fourier de  $s(t; a, T)$  queda:

$$s(t; a, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi a}{T}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{T}t\right], \tag{2.90}$$

serie que sustituida en (2.88) conduce a:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi a}{T}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{T}(t+t_0)\right] dt = \\
&= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi a}{T}\right] \operatorname{csech}\left[\frac{(2n+1)\pi^2}{T}\right] \left[ \frac{2\pi(2n+1)}{3T} - \frac{(2\pi(2n+1)/T)^3}{6} \right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{T}t_0\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Sustituyéndola en (2.87) se obtiene la función de Melnikov

$$M(t_0) = -\frac{8\eta}{\beta} \left\{ \frac{1}{3} + F \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a, T) b_n(T) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{4\pi t_0}{T}\right] \right\}, \tag{2.92}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_n(a, T) &= \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi a}{T}\right], \\
b_n(T) &= \left[ \frac{2\pi(2n+1)}{3T} - \frac{(2\pi(2n+1)/T)^3}{6} \right] \operatorname{csech}\left[\frac{(2n+1)\pi^2}{T}\right].
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Nótese que la serie  $b_n(T)$  es la misma que la obtenida en el caso de pulsos cnoidales.

#### 2.4.4.2 Teorema de inhibición del comportamiento caótico

La bifurcación homoclina, y por tanto el inicio del comportamiento caótico -al menos de carácter transitorio- se producirá cuando la función de Melnikov tenga ceros simples. Por tanto una forma de asegurar la inhibición del comportamiento caótico es verificar que (2.92) no tenga ceros simples, condición que se verifica para todo  $t_0$  si:

$$\frac{1}{3} > F \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a, T) b_n(T), \quad (2.94)$$

o bien

$$\frac{1}{F} > 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a, T) b_n(T). \quad (2.95)$$

De forma que puede establecerse el siguiente teorema de inhibición del comportamiento caótico.

*Teorema 3. Una condición suficiente para que el sistema:*

$$\ddot{x} + \eta[1 + Fs(t; a, T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0$$

$$s(t; a, T) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, a/2] \cup [T - a/2, T] \\ -1, & \text{si } t \in [T/2 - a/2, T/2 + a/2], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en cada periodo } T$$

con  $\eta \ll 1$ ,  $\eta F \ll 1$  y  $\beta > 0$ , no presente caos homoclinico es que se verifique:

$$\frac{1}{F} > U'(a, T), \quad (2.96)$$

donde  $U'(a, T)$  es la función umbral orden-caos:

$$U'(a, T) = 3 \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a, T) b_n(T) \right|, \quad (2.97)$$

con

$$c_n(a, T) = \frac{1}{2n+1} \text{sen} \left[ \frac{(2n+1)\pi a}{T} \right],$$

$$b_n(T) = \left[ \frac{2\pi(2n+1)}{3T} - \frac{(2\pi(2n+1)/T)^3}{6} \right] \text{csech} \left[ \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right].$$

## 2.4.5 Mecanismo físico. Invariancia del impulso mecánico

### 2.4.5.1 Condición de invariancia del impulso mecánico

Para poder estudiar el efecto de la forma de onda -que gobierna la variación temporal de la energía del oscilador- en la dinámica de  $\ddot{x} + \eta[1 + Fp(t; T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0$  se aplica a continuación la conjetura de la invariancia del impulso mecánico [CMGH99] al caso de los pulsos tratados en los

apartados 2.4.3 y 2.4.4 : pulsos cnoidales  $p(t;T)=cn(4Kt/T;m)$  y pulsos rectangulares  $p(t;T)=s(t;a,T)$ .

En efecto, si

$$E(t) = E_c + U(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{\beta}{4} x^4 \right) \quad (2.98)$$

es la función energía del sistema (2.33) siendo  $E_c$  la energía cinética y  $U(x)$  la potencial, su derivada temporal puede escribirse como:

$$\frac{dE}{dt} = -\eta \dot{x}^2(t) [1 + Fp(t;T)], \quad (2.99)$$

ecuación que integrada en un cuarto de periodo sobre cualquier intervalo  $[nT, nT+T/4]$ ,  $n=0,1,2,\dots$  resulta:

$$E(nT + T/4) - E(nT) = -\eta \int_{nT}^{nT+T/4} \dot{x}^2(t) [1 + Fp(t;T)] dt \quad (2.100)$$

Puesto que las soluciones de (2.33) son acotadas podemos aplicar el primer teorema del valor medio [GRJ00] a la integral de la ecuación anterior:

$$E(nT + T/4) - E(nT) = -\eta \dot{x}^2(\tau) \left[ \frac{T}{4} + F \int_{nT}^{nT+T/4} p(t;T) dt \right]. \quad (2.101)$$

Donde  $\tau \in [nT, nT+T/4]$ . El valor de  $\tau$  depende de  $n$  y de  $p(t; T)$ , pero si nos centramos en soluciones asintóticas de (2.33) cuando el oscilador haya alcanzado el estado estacionario ( $n \rightarrow \infty$ ) podemos obviar la dependencia con  $n$ .

De forma que la transferencia energética del oscilador en un cuarto de periodo depende del impulso mecánico transmitido por el pulso  $\int_{nT}^{nT+T/4} p(t;T) dt$  y del valor de  $\dot{x}(\tau)$ , que depende a su vez de  $p(t;T)$ . No obstante, para periodos de la excitación paramétrica suficientemente pequeños ( $T \rightarrow 0$ ), la velocidad variará poco en un cuarto de periodo.

En conclusión, la dependencia fundamental de la variación temporal energética del sistema (2.33) y, consecuentemente, de su dinámica es con el impulso mecánico transmitido por el pulso, siempre y cuando nos fijamos a soluciones asintóticas ( $n \rightarrow \infty$ ) para periodos de la excitación temporal suficientemente pequeños ( $T \rightarrow 0$ ).

Particularizando para los pulsos descritos, si mantenemos constantes el resto de los parámetros, cabe esperar que la dinámica de (2.33) sea similar para los pulsos rectangulares  $s(t;a,T)$  y para los pulsos cnoidales  $cn(4Kt/T;m)$  si se verifica la invariancia del impulso mecánico transmitido:

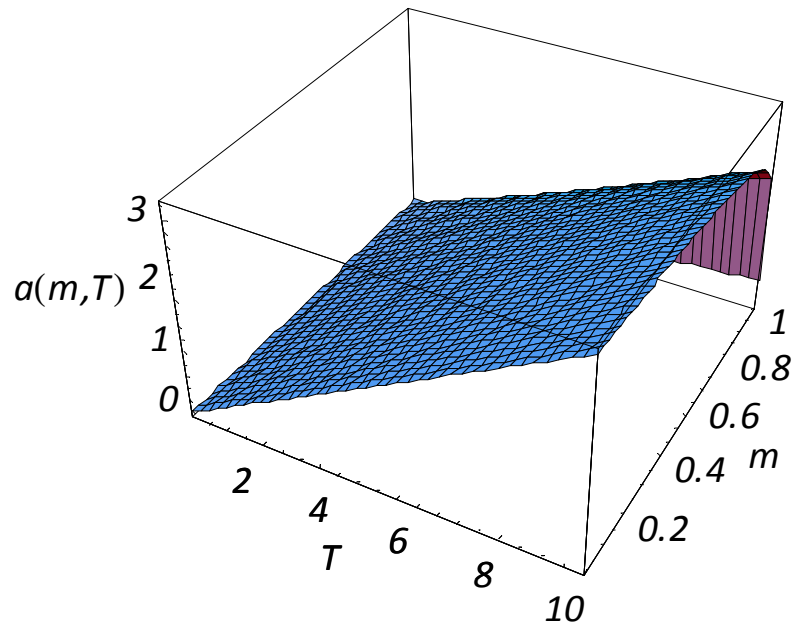


Figura 2-15 Función  $a(m, T)$  vs.  $m$  y  $T$  [cf. Ec. (2.103)].

$$\int_0^{T/4} |\text{cn}(4K(m)t / T; m)| dt = \int_0^{T/4} |s(t; a, T)| dt \tag{2.102}$$

Se ha integrado a un cuarto periodo en lugar de a un periodo, considerando la simetría de los pulsos. Las integrales pueden resolverse con ayuda de tablas de integrales estándar y de (2.102) obtenemos

$$a = a(m, T) = \frac{T}{2K(m)\sqrt{m}} \arccos(\sqrt{1-m}). \tag{2.103}$$

La función obtenida se representa en la Fig. 2-15, y cuenta con los valores límite:

$$\begin{aligned} a(m=0, T) &= \frac{T}{\pi}, \\ a(m=1, T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.104}$$

En las Figs. 2-4(a) y 2-4(b) los pulsos representados verifican la condición de invariancia del impulso mecánico (2.102) para los tres valores de  $m$  considerados.

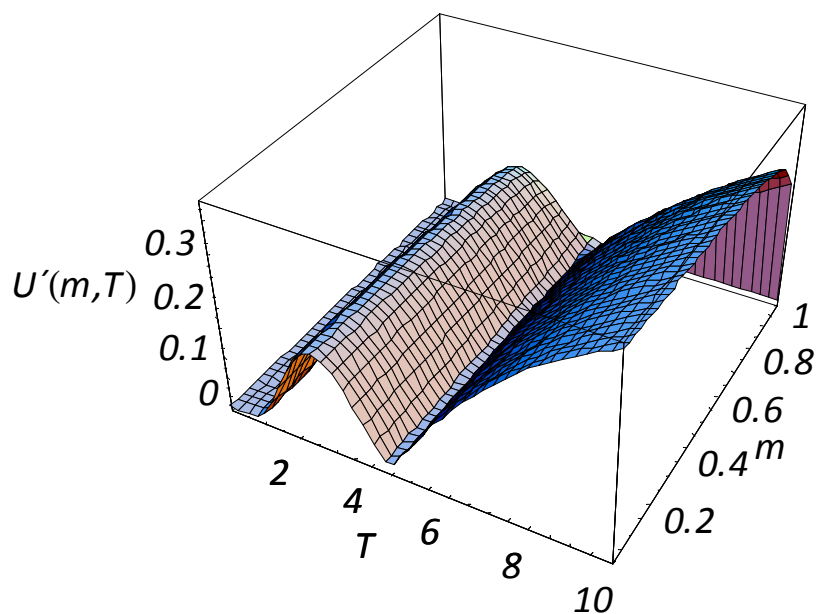


Figura 2-16 Función umbral orden-caos  $U'(m, T)$  vs.  $m$  y  $T$ . Compárese con la Fig. 2-9.

#### 2.4.5.2 Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico

Una vez obtenida la ecuación (2.103), que representa la anchura,  $a$ , que debe tener del pulso rectangular  $s(t; a, T)$  para transmitir al oscilador el mismo impulso mecánico que el pulso cnoidal, parece inmediato sustituir  $a(m, T)$  en la función umbral  $U'(a(m, T), T) \equiv U'(m, T)$ . En efecto, sustituyendo (2.103) en (2.97) se obtiene:

$$U'(m, T) \equiv U'(a(m, T), T) = 3 \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(m) b_n(T) \right|, \quad (2.105)$$

donde

$$c_n(m) = \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \left[ \frac{(n+1/2)\pi \arccos \sqrt{1-m}}{\sqrt{mK(m)}} \right],$$

$$b_n(T) = \left[ \frac{2\pi(2n+1)}{3T} - \frac{(2\pi(2n+1)/T)^3}{6} \right] \operatorname{csech} \left[ \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right].$$

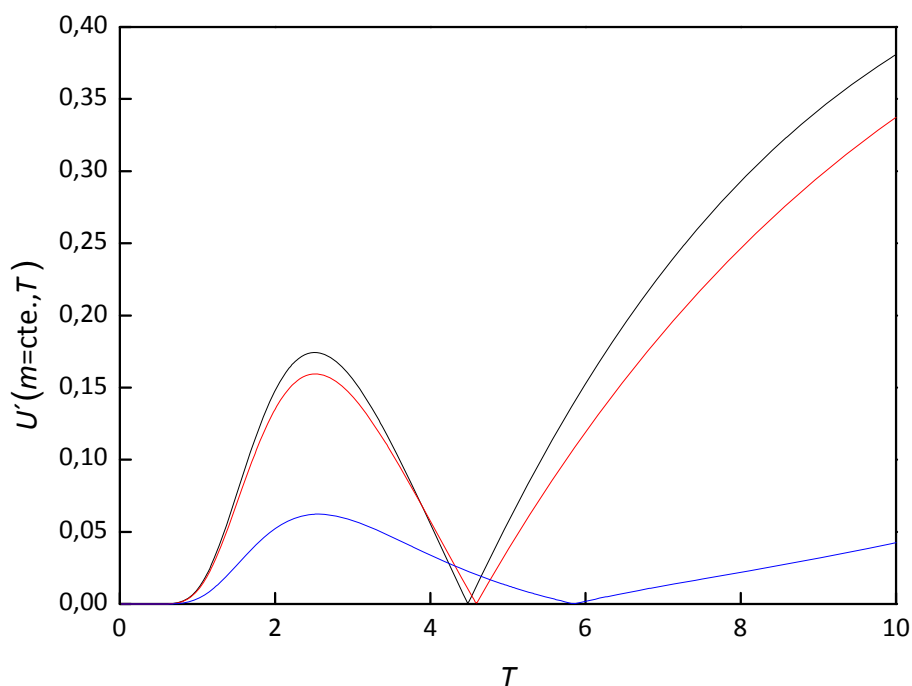


Figura 2-17 Función umbral caótico  $U'(m, T)$  [cf. Ec. (2.105)] vs.  $T$  para distintos valores de  $m$ :  $m=0.2$  (negro),  $m=0.8$  (rojo) y  $m=1-10^{-6}$  (azul).

En la Fig. 2-16 se muestra la función  $U'(m, T)$ . Como puede apreciarse la forma de la función es muy similar a la Fig. 2-9 en la que se representa  $U(m, T)$ , la función umbral obtenida para el caso de los pulsos cnoidales. La similitud de ambas funciones parece confirmar la hipótesis del papel que juega el impulso mecánico transmitido por los pulsos de la excitación paramétrica en la dinámica global del oscilador. En efecto, pulsos simétricos periódicos con distintas formas pero idéntico impulso mecánico y periodo conducen a los mismos resultados, al menos en lo que se refiere a la función umbral orden-caos obtenida a partir del análisis de Melnikov, que determina el posible inicio del caos homoclinio.

A continuación se comparan con mayor detalle las funciones umbrales obtenidas para el caso de excitación paramétrica con pulsos cnoidales  $U(m, T)$  [cf. Ec. (2.80)] y con pulsos rectangulares  $U'(m, T)$  [cf. Ec. (2.105)]. En la Fig. 2-17 se muestra la forma de la función  $U'(m=cte., T)$ . Como se puede apreciar es la misma que la de  $U(m=cte., T)$  (véase la Fig. 2-10), en efecto, también existe un  $T_{\min} = T_{\min}(m)$  para el cual  $U'(m, T_{\min}(m))=0$  y  $U'(m=cte., T)$  y presenta un máximo relativo en  $T_{\max} = T_{\max} = 2.51... \forall m$ . De igual modo,  $T_{\min}(m)$  aumenta conforme  $m$  crece desde  $m=0$  hasta  $m \rightarrow 1$ . En la Fig. 2-18 se representan ambas funciones umbrales para facilitar la comparación.

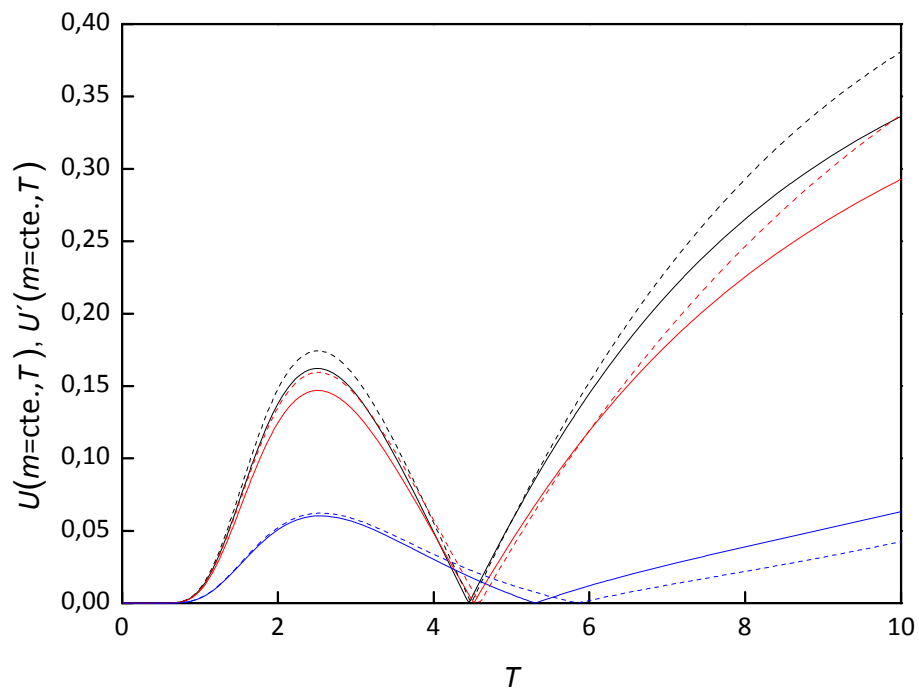


Figura 2-18 Función umbral caótico  $U'(m, T)$  (línea discontinua) y  $U(m, T)$  (línea continua) vs.  $T$  para distintos valores de  $m$ :  $m=0.2$  (negro),  $m=0.8$  (rojo) y  $m=1-10^{-6}$  (azul).

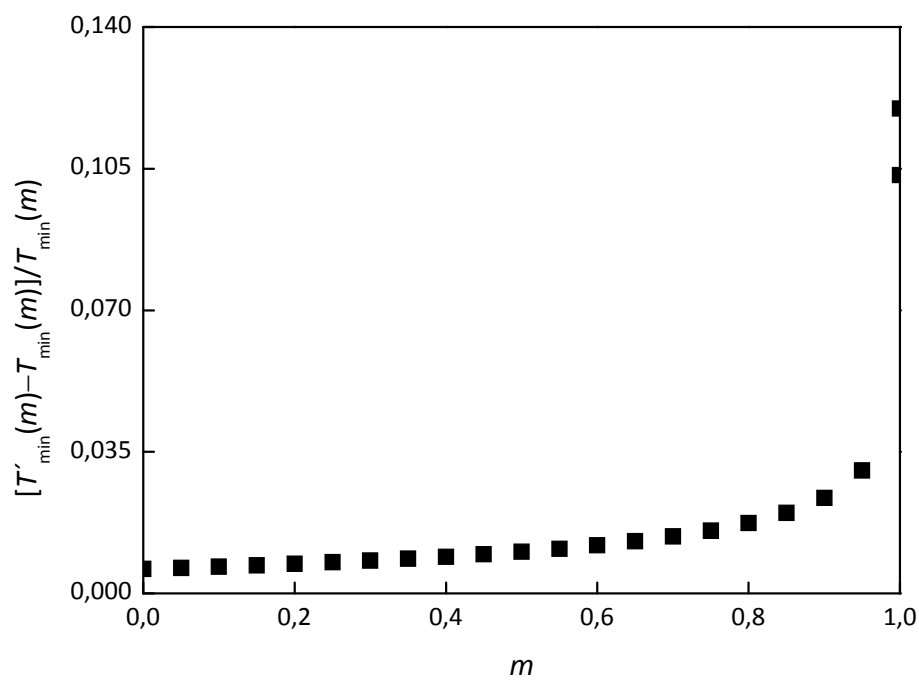


Figura 2-19 Desviación relativa  $[T'_{\min}(m) - T_{\min}(m)] / T_{\min}(m)$  vs.  $m$ . Siendo  $T_{\min}(m)$  y  $T'_{\min}(m)$  los valores para los cuales  $U(m, T_{\min})=0$  y  $U'(m, T'_{\min})=0$  respectivamente.



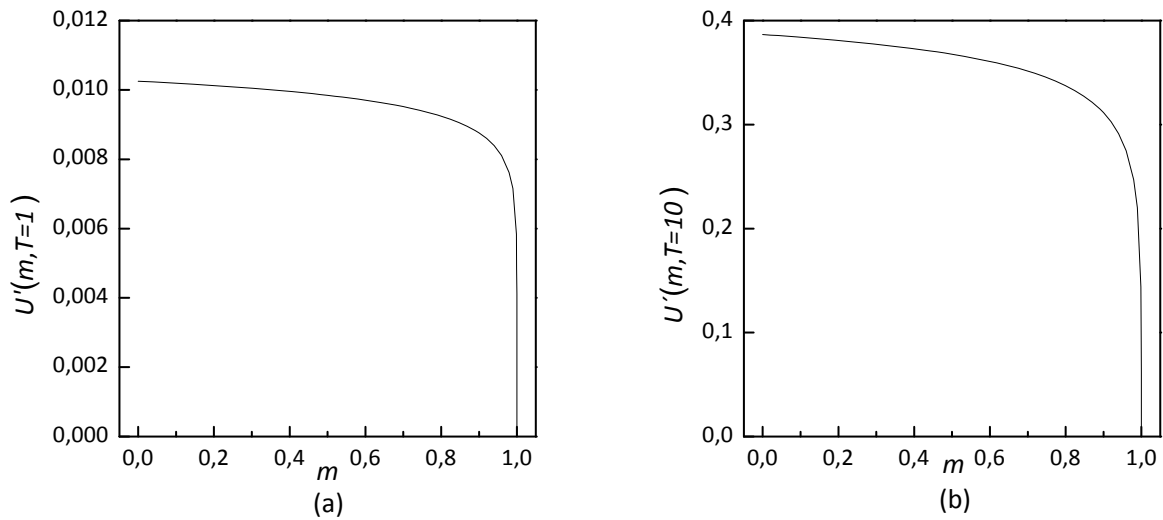


Figura 2-20 Función umbral  $U'(m, T=cte.)$  [cf. Ec.(2.105)] vs.  $m$ , (a)  $T=1$ , (b)  $T=10$ . Compárese con la Fig. 2-12.

La Fig. 2-19 muestra la desviación relativa  $\Delta T_{\min}/T_{\min} = [T_{\min}(m) - T_{\min}(m)]/T_{\min}(m)$  donde se aprecia como la desviación sólo es significativa para valores de  $m$  muy cercanos a 1, es decir, para pulsos extremadamente estrechos. En efecto, tal como se apuntó al aplicar la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido ésta funciona mejor para periodos pequeños que para periodos grandes, por tanto cabe esperar mayor desviación relativa cuando  $m$  crece ya que  $T_{\min}(m)$  es una función creciente y por tanto conforme  $m \rightarrow 1$  aumenta el valor de  $T_{\min}$  (véanse las Figs. 2-11 y 2-19).

De la misma manera, la dependencia de  $U'(m, T)$  con el parámetro elíptico  $m$ , que controla la anchura del pulso, es muy similar a la de la función umbral  $U(m, T)$  obtenida para los pulsos cnoidales (véanse las Figs. 2-12 y 2-20). En la Fig. 2-21 se representa la desviación relativa  $[U'(m, T=cte.) - U(m, T=cte.)]/U(m, T=cte.)$  versus  $m$  para dos valores de  $T$ . Para un periodo fijo la desviación relativa cae drásticamente cuando el pulso se estrecha ( $m \rightarrow 1$ ). De nuevo, la desviación relativa es menor para periodos pequeños como cabía esperar de la aplicación de la invariancia del impulso mecánico transmitido. En cualquier caso, el intervalo de valores de  $T$  para los cuales es válida la conjetura de invariancia es bastante amplio para el sistema estudiado.

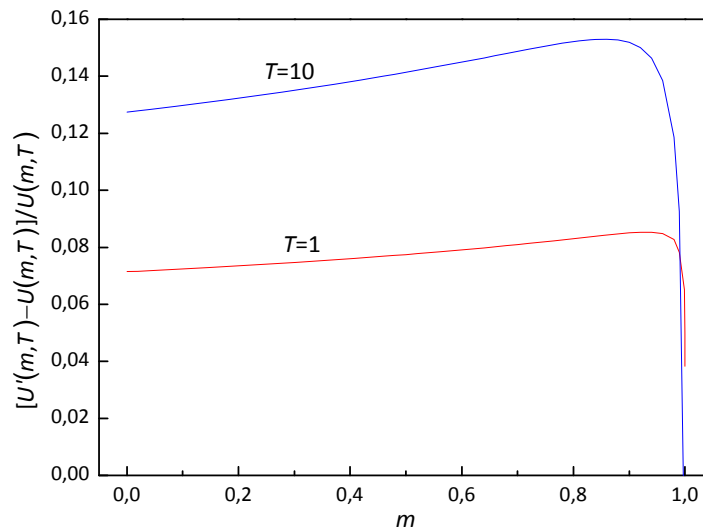


Figura 2-21 Desviación relativa  $[U'(m,T)-U(m,T)]/U(m,T)$  vs.  $m$  para  $T=1$  (rojo) y  $T=10$  (azul).

#### 2.4.6 Caracterización numérica de una ruta orden-caos bajo cambios en la forma de onda del pulso

El objeto del presente apartado es caracterizar numéricamente una ruta orden-caos de un oscilador de Duffing de dos pozos, paramétricamente amortiguado por la función elíptica de Jacobi cosam, bajo cambios únicamente en la forma de onda del pulso de la excitación paramétrica. La ecuación del oscilador ya estudiado en apartados anteriores es:

$$\ddot{x} + \eta[1 + F \operatorname{cn}(4K(m)t/T; m)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0 \quad (2.106)$$

El parámetro de control es el parámetro elíptico  $m$  de forma que, variándolo de manera continua desde el límite armónico  $m=0$  hasta el límite hiperbólico  $m=1$ , el pulso de la excitación paramétrica cambia desde la función coseno ( $m=0$ ), para ir disminuyendo su anchura efectiva (en términos físicos, su impulso mecánico) manteniendo su amplitud conforme aumenta el valor de  $m$ , hasta  $m=1$  donde el pulso es nulo salvo en un conjunto numerable de instantes aislados. El valor del resto de los parámetros se mantiene constante,  $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ; se han elegido de manera que el oscilador exhiba una dinámica rica y variada. Los valores de  $\eta$  y  $F$  están claramente fuera del rango perturbativo por lo que los resultados obtenidos no concuerdan con los predichos por el análisis de Melnikov realizado. El valor del periodo se encuentra en el entorno de  $T_{\max}$  (véase la Fig. 2-17), el máximo de la función umbral [cf. Ec. (2.80)] en la zona de mayor probabilidad de comportamiento caótico. En cuanto a las condiciones iniciales se han situado cercanas a la separatriz del sistema sin perturbar. El estudio numérico se ha realizado mediante técnicas numéricas usuales: series temporales, trayectorias

en el espacio de fases, espectros de potencia, aplicaciones de Poincaré, exponentes de Lyapunov y dimensión fractal. Para el cálculo de exponentes de Lyapunov se ha utilizado el algoritmo descrito en [BGS76] y usado en [WSSV85], como integrador se utilizó un Runge Kutta de 4º orden según las rutinas estándares [Pre92]. En todos los casos se ha utilizado un paso de integración  $h=T/40$ .

En las Figs. 2-22 (b) y 2-23 (b) se muestra el diagrama de bifurcación en el que se representa el estado estacionario de la primera y segunda componentes de la aplicación de Poincaré (posición y velocidad, respectivamente) frente al parámetro elíptico  $m$ , con un paso  $\Delta m=0.001$ , para unas condiciones iniciales fijas  $(x_0, (dx/dt)_0)=(+0.0001, -0.0001)$  para todo  $m$ . De esta forma, la solución presentada corresponderá al atractor en cuya cuenca de atracción se encuentre dicho punto, pudiéndose observar, en el caso de existir, varios atractores que coexistan en el espacio de fases. En el caso de utilizar como condiciones iniciales para un valor de  $m$  las finales del iterado anterior ( $m-\Delta m$ ) no aparecen las discontinuidades encontradas en el diagrama de bifurcación en el intervalo  $m \in [0,811\dots, 0,850\dots]$  y, por tanto, no se pondrían de manifiesto la coexistencia de distintos atractores. Para realizar el diagrama se han integrado un total de 2000 ciclos y se han representado los últimos 40 ciclos; esto es, el diagrama representa una componente de las iteradas 1960 a 2000 de la aplicación de Poincaré en función de  $m$ .

En la Fig. 2-22 (a) se representa el primer exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  versus  $m$  con el mismo paso que el diagrama de bifurcación  $\Delta m=0.001$ , tras una integración de 2000 ciclos, donde se ha verificado previamente la convergencia, con un paso de integración fijo,  $h=T/40$ , y ortogonalizando cada  $T/2$ . En todos los puntos se ha verificado que  $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\text{div}[\xi]=-1\eta=-0.2$  siendo  $\xi$  el campo vectorial definido por  $\dot{x}=\xi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  en el que se puede transformar la ecuación del oscilador (2.106):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= x - \beta x^3 - \eta[1 + F \text{cn}(\phi; m)]u, \\ \dot{\phi} &= 4K(m) / T.\end{aligned}\tag{2.107}$$

En sistemas disipativos, la existencia de un exponente de Lyapunov positivo implica necesariamente la existencia de un atractor extraño caótico. En efecto, la separación exponencial de las órbitas en una dirección junto con el carácter disipativo del sistema que implica contracción del volumen del espacio de fases con la evolución temporal, solo puede ser resuelto con una serie de estiramientos y plegamientos que son el origen del caos desde el punto de vista topológico. Los valores del exponente de Lyapunov calculados confirman en todo punto lo observado en el diagrama de bifurcación: las regiones caóticas con el primer exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  positivo y, en las zonas de comportamiento regular, la inestabilidad origen de los distintos puntos de bifurcación se manifiesta con un crecimiento del primer exponente  $\lambda_1$  desde valores negativos hasta alcanzar el valor nulo en los puntos de bifurcación:  $m=0.416$ ,  $m=0.434$ ,  $m=0.512$  y  $m=0.770$ .

Si existe algún exponente positivo, de acuerdo con la conjetura Kaplan-Yorke, ver por ejemplo [Gin09], la dimensión fractal de la sección de Poincaré del sistema objeto de estudio, en las regiones donde  $\lambda_1 > 0$ , es:

$$d_F = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \quad (2.108)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\lambda_3 = 0$ . En la Fig. 2-23 se muestra el diagrama de bifurcación en el que se representa el estado estacionario de la sección de Poincaré en función del parámetro  $m$ ; en este caso la velocidad, junto con la dimensión fractal *versus*  $m$ . De nuevo, la estructura del diagrama de bifurcación es corroborada por la dimensión fractal calculada. Obsérvese, por ejemplo, la disminución de la dimensión fractal del atractor caótico a partir de  $m=0.31$  y como en el diagrama de bifurcación se observa una menor extensión del atractor caótico en el espacio de fases a partir dicho valor de  $m$ .

Se trata básicamente de una ruta caos→orden, desde la excitación paramétrica armónica ( $m=0$ ) hasta la desaparición de la excitación paramétrica ( $m=1$ ) (excepto en un conjunto de instantes de medida de Lebesgue nula). A grandes rasgos, se observa una típica ruta caos→orden por duplicación de periodo: caos estacionario para  $m < 0.42\dots$ , órbitas periódicas hasta  $m=0.992$ , y punto fijo desde  $m=0.992\dots$  hasta  $m=1$ .

Para caracterizar el comportamiento del oscilador se han determinado diferentes indicadores típicos: órbitas en el espacio de fases, aplicaciones de Poincaré para las soluciones estacionarias, series temporales y espectros de potencia. En todos los espectros calculados, incluso para el caso del atractor caótico, aparece el subarmónico  $\omega/2$  claramente definido.

Si  $m \in [0, 0.30\dots[$  el comportamiento es caótico, la aplicación de Poincaré es un atractor extraño, un conjunto fractal en el que se aprecia una estructura autosimilar. En la Fig. 2-24 se muestra el caso  $m=0$ , donde el atractor ocupa una extensa región del espacio de fases.

En el entorno de  $m=0.30\dots$  se produce una crisis interior inversa (*interior crisis*, ver v.g.[Ott93]), en la que el atractor reduce bruscamente su tamaño, de hecho para las condiciones iniciales utilizadas y  $m > 0.30\dots$  el atractor queda confinado en el pozo de la izquierda. En general, se llama crisis a los cambios drásticos y repentinos que experimenta un atractor caótico cuando se varía uno de los parámetros del sistema. Una crisis se produce cuando un atractor caótico colisiona con una órbita periódica inestable o equivalentemente con su variedad estable, la crisis es interior si la órbita periódica inestable con la que el atractor colisiona se encuentra en el interior de su cuenca de atracción, de ahí su denominación.

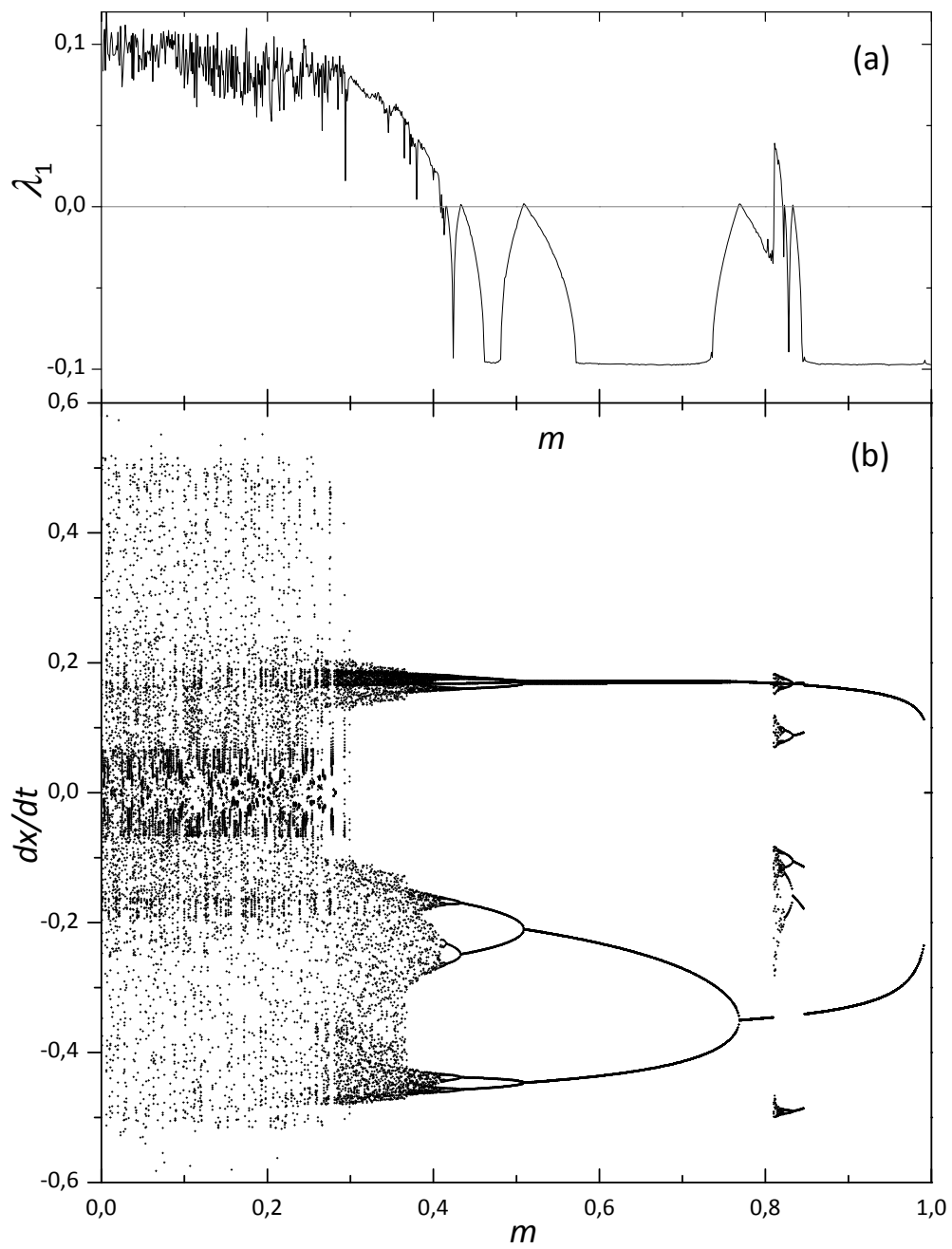


Figura 2-22 (a) Exponente maximal de Lyapunov vs.  $m$  (b) Diagrama de bifurcación que representa la segunda componente de la aplicación de Poincaré vs.  $m$ .  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional. ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ )

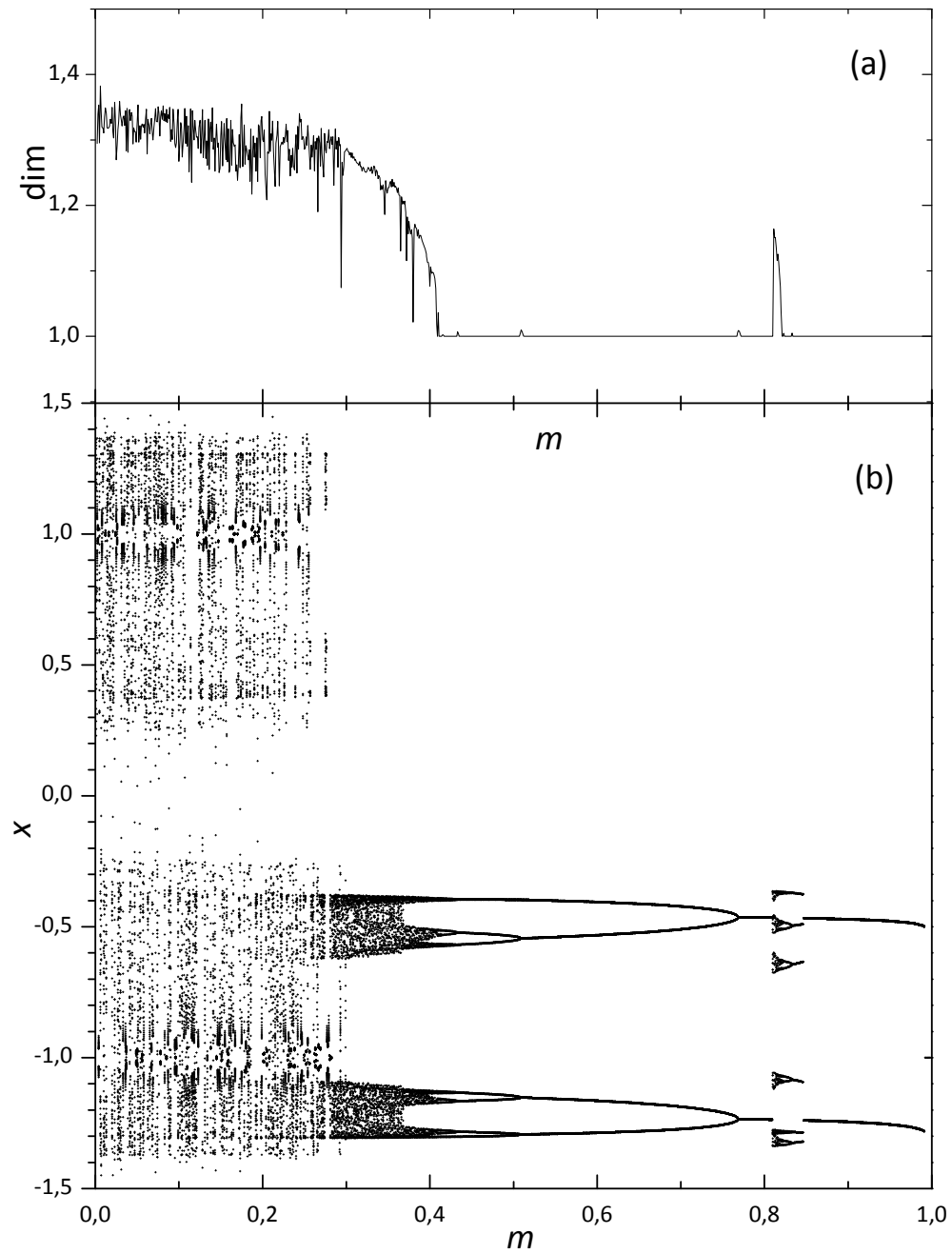


Figura 2-23 (a) Dimensión fractal del atractor vs.  $m$  (b) Diagrama de bifurcación que representa la primera componente de la aplicación de Poincaré vs.  $m$ .  $x$  en unidades arbitrarias. ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ )

En concreto, cuando el valor del parámetro de control,  $m$  en nuestro caso, se incrementa hasta un valor crítico  $m_c=0.30\dots$  el atractor reduce repentinamente su tamaño, el número de puntos diseminados en la aplicación de Poincaré se reduce drásticamente (véase la Fig. 2-26 (b)) –indicando atenuación de la dinámica caótica– y la dimensión fractal del atractor empieza a decrecer a ritmos más elevados (véase la Fig. 2-23 (a)). Para  $m$  ligeramente menor que  $m_c$  el sistema exhibe intermitencia inducida por crisis (*crisis-induced intermittency*), es decir, la órbita sobre el oscilador se halla durante largos períodos de tiempo en la región del espacio de fases en la que el atractor se encontraba confinado después de la crisis inversa ( $m > m_c$ ), en nuestro caso tal región parece corresponderse con caos de tipo *phase locked* asociado al subarmónico  $\omega/2$ . Al final de estos periodos largos, la órbita sale bruscamente de la región reducida y se extiende caóticamente en la región más extensa, debido a la crisis interior. Luego la órbita vuelve a la antigua región durante un cierto tiempo, volviendo a escapar a la región extensa y así sucesivamente. A medida que  $m$  se hace menor que  $m_c$ , los tiempos que emplea la órbita en visitar la región reducida del espacio de fases se reducen. En resumen se trata de una intermitencia del tipo:  $(\text{caos})_1 \rightarrow (\text{caos})_2 \rightarrow (\text{caos})_1 \rightarrow (\text{caos})_2 \rightarrow \dots$ , donde  $(\text{caos})_1$  se refiere a caos tipo *phase locked* y  $(\text{caos})_2$  se refiere al atractor caótico extenso. En la Fig. 2-23 (b) se puede observar dicha intermitencia, advirtiendo cómo para valores ligeramente inferiores a  $m_c$  la banda de *phase locked* parece penetrar en la zona del atractor caótico de mayor extensión. En efecto para determinados valores  $m < m_c$  en los instantes representados en el diagrama de bifurcación el sistema se encuentra aún con caos tipo *phase locked*, mientras que para el resto de los valores de  $m < m_c$  en esos mismos instantes el sistema se encuentra en el atractor caótico más extenso. La intermitencia inducida por crisis ha sido confirmada también como puede observarse en las series temporales del desplazamiento de la Fig. 2-25. Notar que no se puede determinar numéricamente con precisión el valor de  $m_c$ , las simulaciones numéricas no permiten distinguir entre un transitorio caótico, que puede ser muy extenso en el tiempo, y una respuesta estacionaria, ya sea caótica o regular.

En el intervalo  $m \in [0.30\dots, 0.41\dots]$ , se observa caos de tipo *phase locked*. Este comportamiento caótico es de tipo débil (el primer exponente de Lyapunov es positivo y pequeño), guarda sincronía con la excitación y se caracteriza por que su espectro de potencia tiende a cero para frecuencias pequeñas [HYK85, KM86]. En la Fig. 2-26 se muestra el caso  $m=0.31$ , donde se puede observar en el espectro de potencia la tendencia característica  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(\omega)| = 0$ , y la memoria de la órbita regular (picos agudos). Obsérvese, en la aplicación de Poincaré, el reducido tamaño del atractor en el espacio de fases y que la sincronía con el subarmónico  $\omega/2$ , que muestra el espectro, se traduce en que en la aplicación de Poincaré el atractor está compuesto por dos tramos.

Si  $m \in [0.410\dots, 0.992]$  el comportamiento es regular excepto en el intervalo  $[0.810\dots, 0.847\dots]$  en el que se produce una discontinuidad en el diagrama de bifurcación: el oscilador experimenta una crisis de contorno (*boundary crisis*, ver v.g. [Ott93]) en  $m_c = 0.810\dots$ . En una crisis de contorno, a medida que varía un parámetro del sistema,  $m$  en nuestro caso, la distancia entre el atractor caótico y el contorno de su cuenca de atracción decrece hasta un punto crítico,  $m = m_c$ , para el

que se tocan, en este punto el atractor toca una órbita periódica inestable que se encontraba sobre el contorno de la cuenca antes de la crisis. A partir de dicho punto, el atractor extraño deja de existir y es sustituido por un transitorio caótico hacia algún atractor periódico. La duración de los transitorios caóticos depende fuertemente de las condiciones iniciales, debido al carácter fractal del contorno de las cuencas de atracción de los atractores extraños [Moo84]. En nuestro caso, para  $m > m_c$  el oscilador se encuentra en una región de caos tipo *phase locked* y para  $m < m_c$  la respuesta estacionaria del oscilador es una órbita  $2T$ -periódica. Dentro del intervalo de discontinuidad, en sentido decreciente de  $m$ , se observa una secuencia de bifurcación por duplicación de periodo, las órbitas en el espacio de fases son periódicas de periodo  $3 \cdot 2^n T$ . Se han encontrado órbitas regulares  $6T$ -,  $12T$ - y  $24T$ -periódicas como puede observarse en las Figs. 2-33, 2-32 y 2-31, respectivamente, lo que conduce a la aparición de caos tipo *phase locked*, como puede apreciarse a partir de la observación de la Fig. 2-30, en la que la presencia en el espectro del subarmónico  $\omega/6$  representa la memoria de las órbitas regulares de periodo  $3 \cdot 2^n T$ , y se observa en el espectro que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(\omega)| = 0$ .

Si exceptuamos la ventana  $[0.810\dots, 0.847\dots]$ , en el intervalo  $m \in [0.410\dots, 0.992]$  se observa una secuencia típica de bifurcación por duplicación de periodo, en dirección decreciente de  $m$  las respuestas estacionarias son órbitas periódicas en el espacio de fases de periodos  $2^n T$ : son  $2T$ -periódicas hasta  $m=0.770$ ,  $4T$ -periódicas hasta  $m=0.512$ ,  $8T$ -periódicas hasta  $m=0.434$ ,  $16T$ -periódicas hasta  $m=0.416$ ,... Las Figs. 2-29, 2-28 y 2-27 caracterizan las órbitas  $2T$ -,  $4T$ - y  $8T$ -periódicas respectivamente, como puede observarse, por ejemplo, en los espectros de potencia que muestran claramente los subarmónicos correspondientes. El cálculo del exponente maximal de Lyapunov  $\lambda_1$  en la cercanía de dichos puntos de bifurcación muestra la inestabilidad que origina la bifurcación. En efecto, se observa como en las cercanías de los puntos de bifurcación el exponente maximal de Lyapunov  $\lambda_1$  crece desde valores negativos hasta alcanzar el valor nulo en los puntos de bifurcación. La comparación directa de las Figs. 2-22(a) y 2-22(b) confirman lo aseverado.

Cuando  $m \in [0.992\dots, 1]$  el oscilador cae en la cuenca de atracción del foco estable de la izquierda, para las condiciones iniciales utilizadas. Conforme nos acercamos al límite  $m=1$  la respuesta del oscilador difiere muy poco de la ausencia de modulación ( $F=0$ ) puesto que en límite  $m=1$  la función  $\cos am$  es nula excepto en un conjunto numerable de instantes aislados.



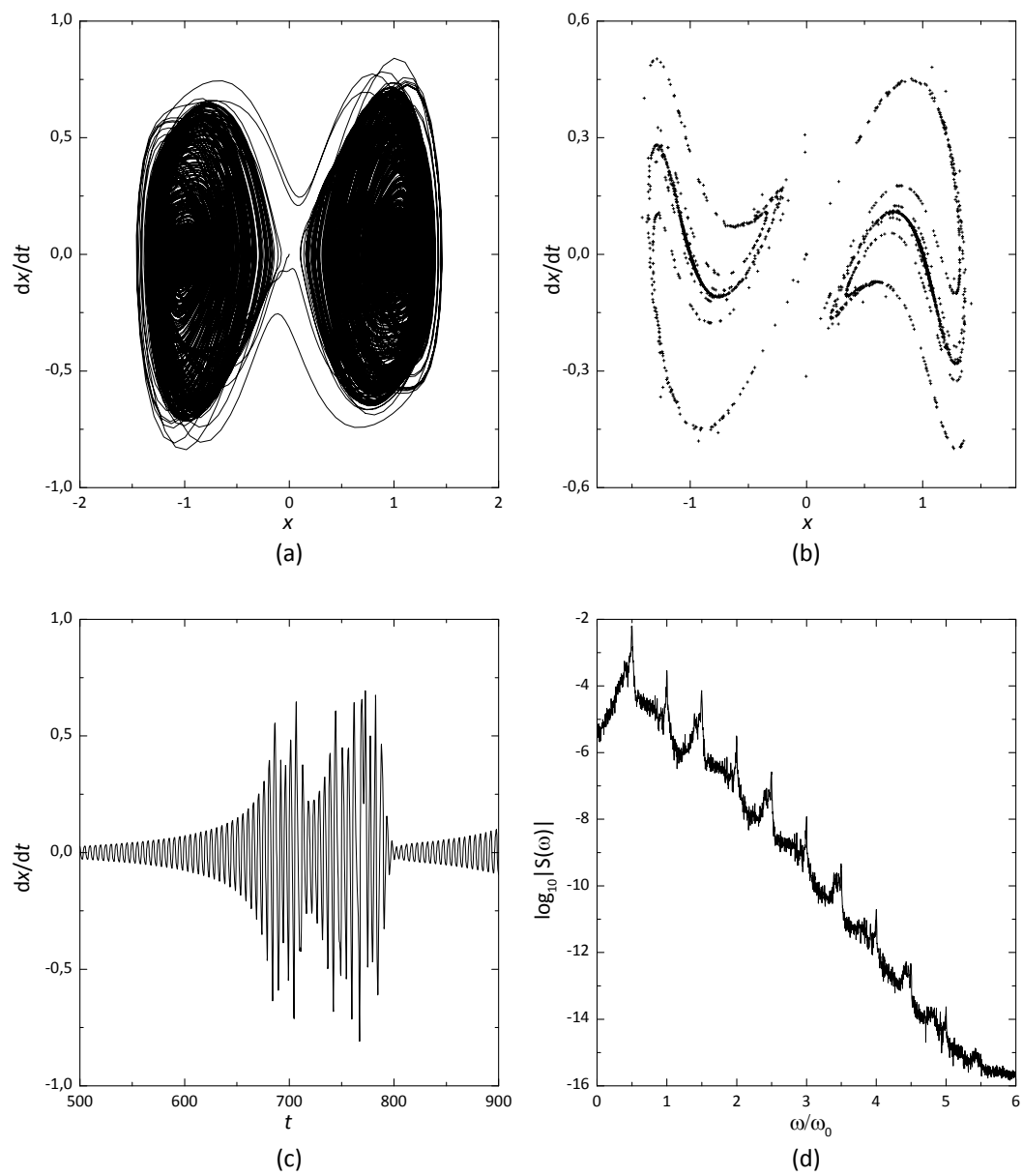


Figura 2-24 Caso  $m=0$ : Caos estacionario ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ). (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

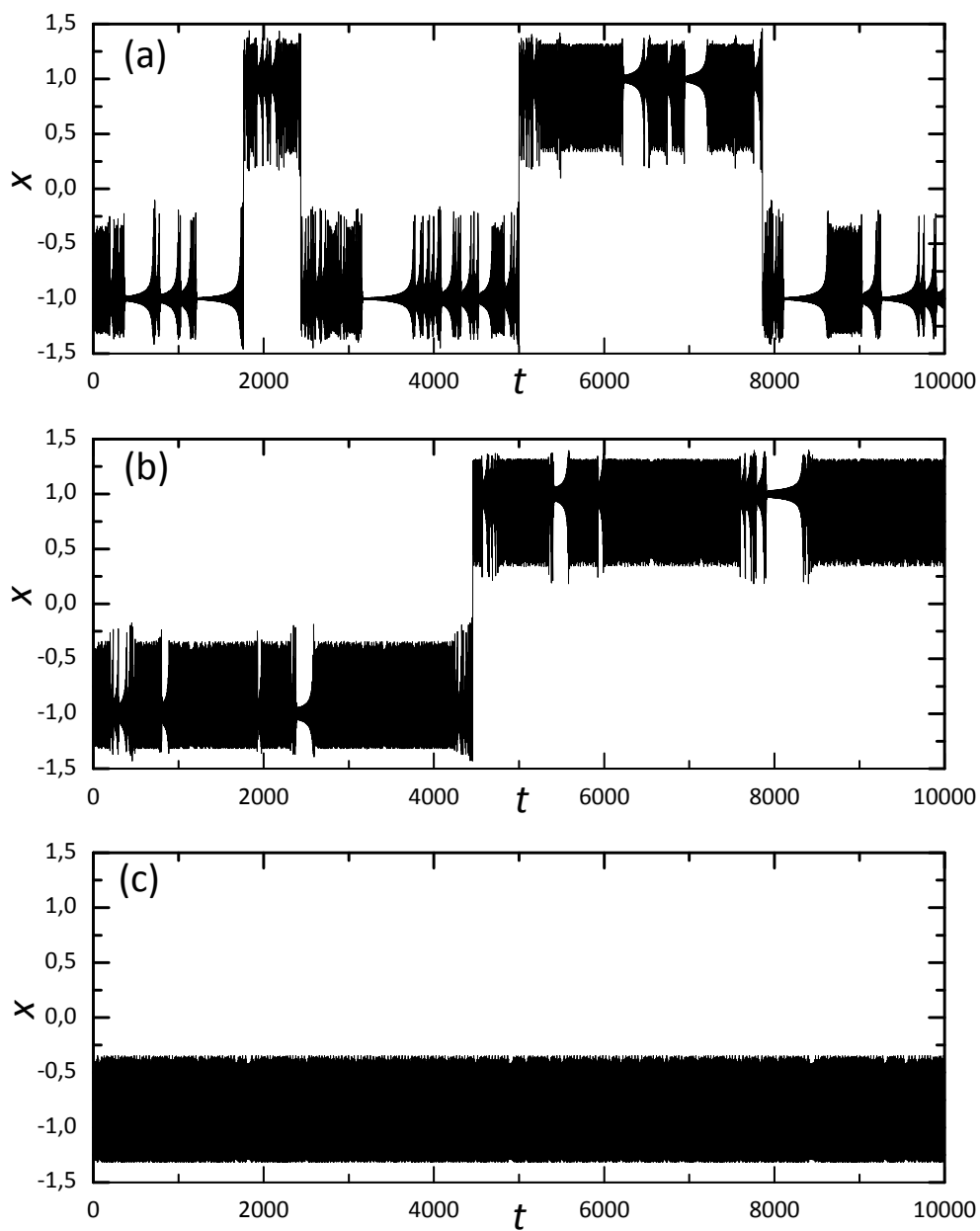


Figura 2-25 Series temporales para mostrar la intermitencia previa a la crisis interior. (a)  $m=0.173$  (b)  $m=0.276$  y (c)  $m=0.350$ .  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional. ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ )

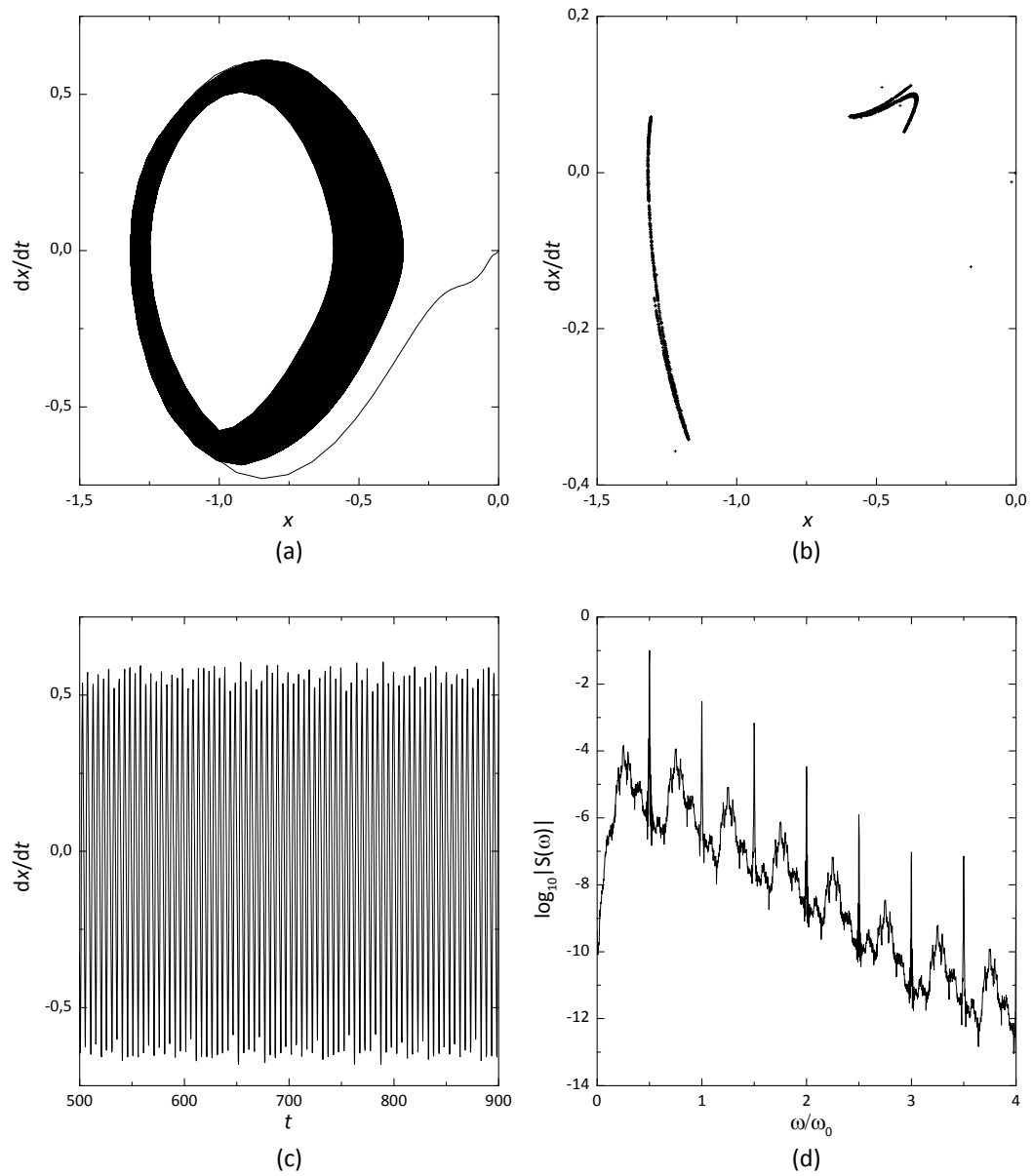


Figura 2-26 Caso  $m=0.31$ : caos tipo *phase locked* ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

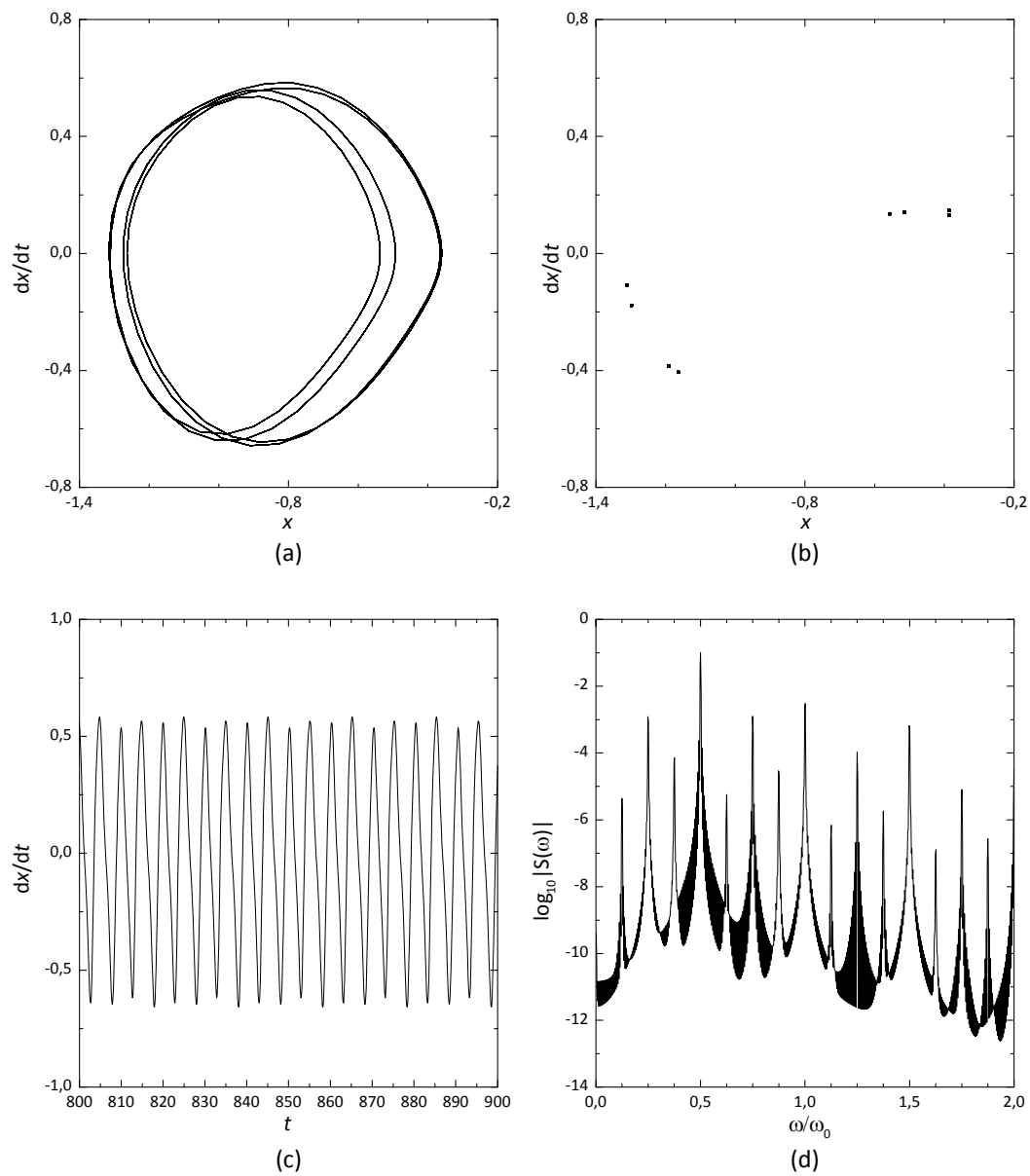


Figura 2-27 Caso  $m=0.45$ : órbita  $8T$ -periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

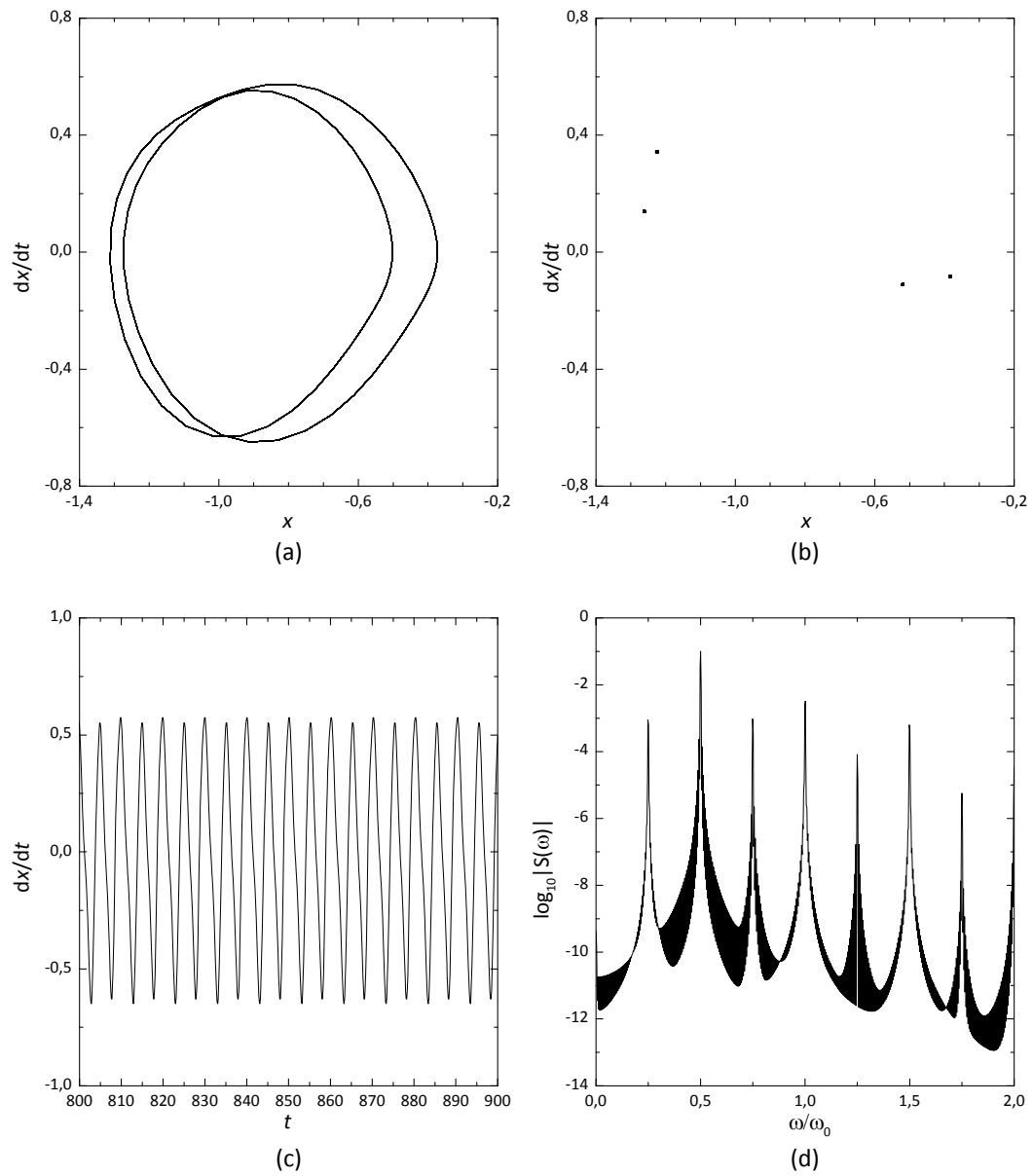


Figura 2-28 Caso  $m=0.60$ : órbita 4T-periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

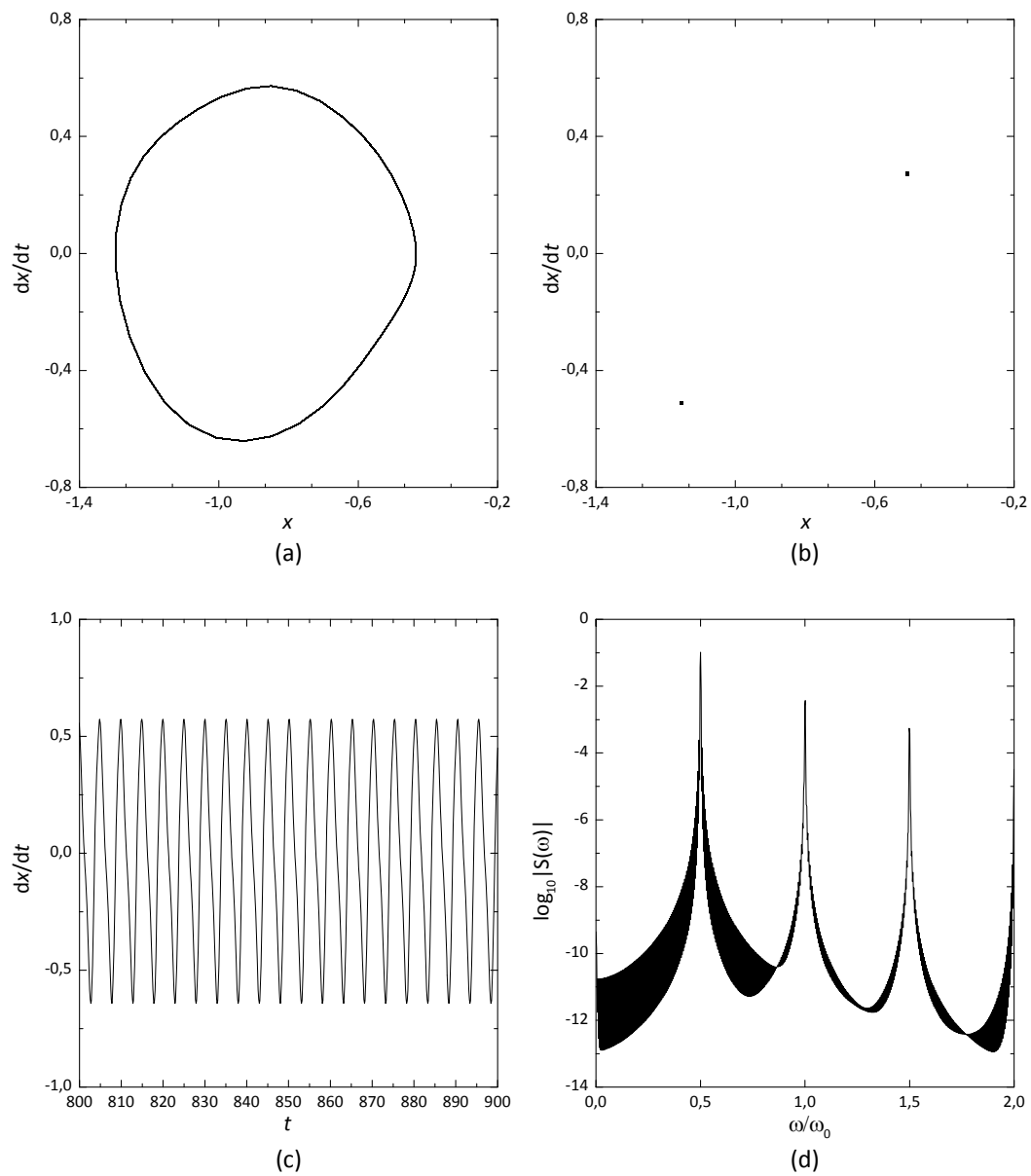


Figura 2-29 Caso  $m=0.80$ : órbita  $2T$ -periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

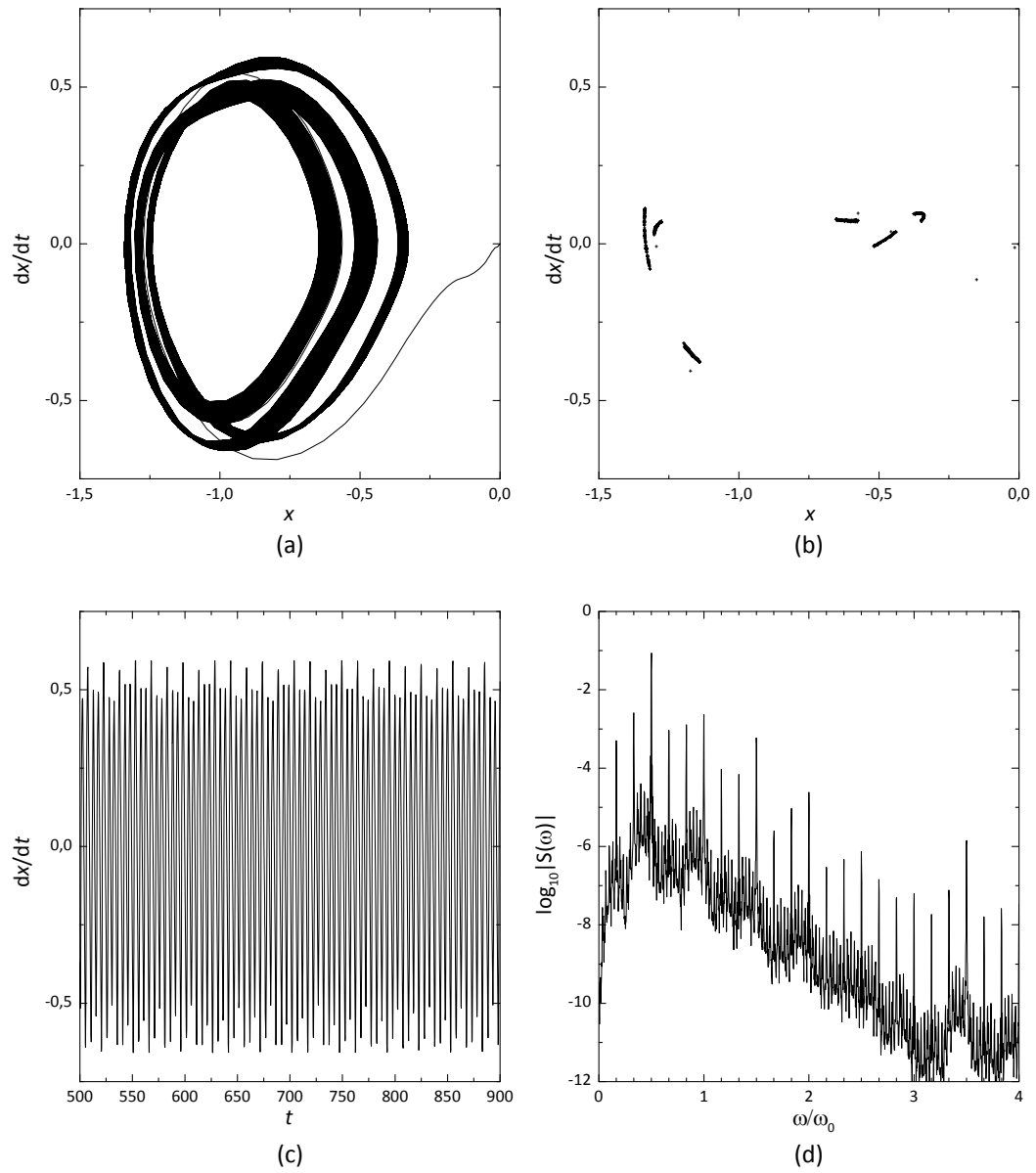


Figura 2-30 Caso  $m=0.811$ : caos tipo *phase locked* ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

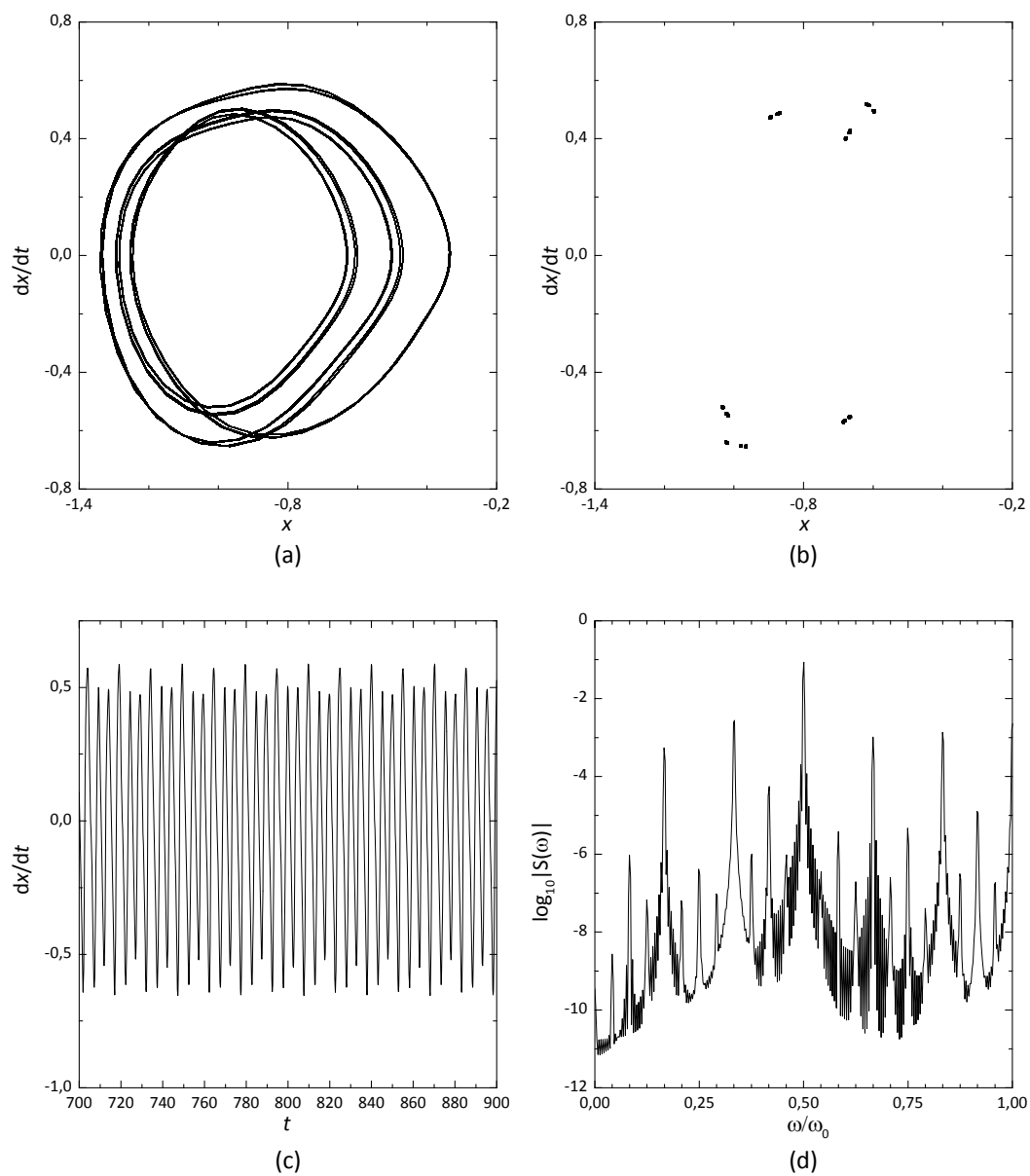


Figura 2-31 Caso  $m=0.822$ : órbita  $24T$ -periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.



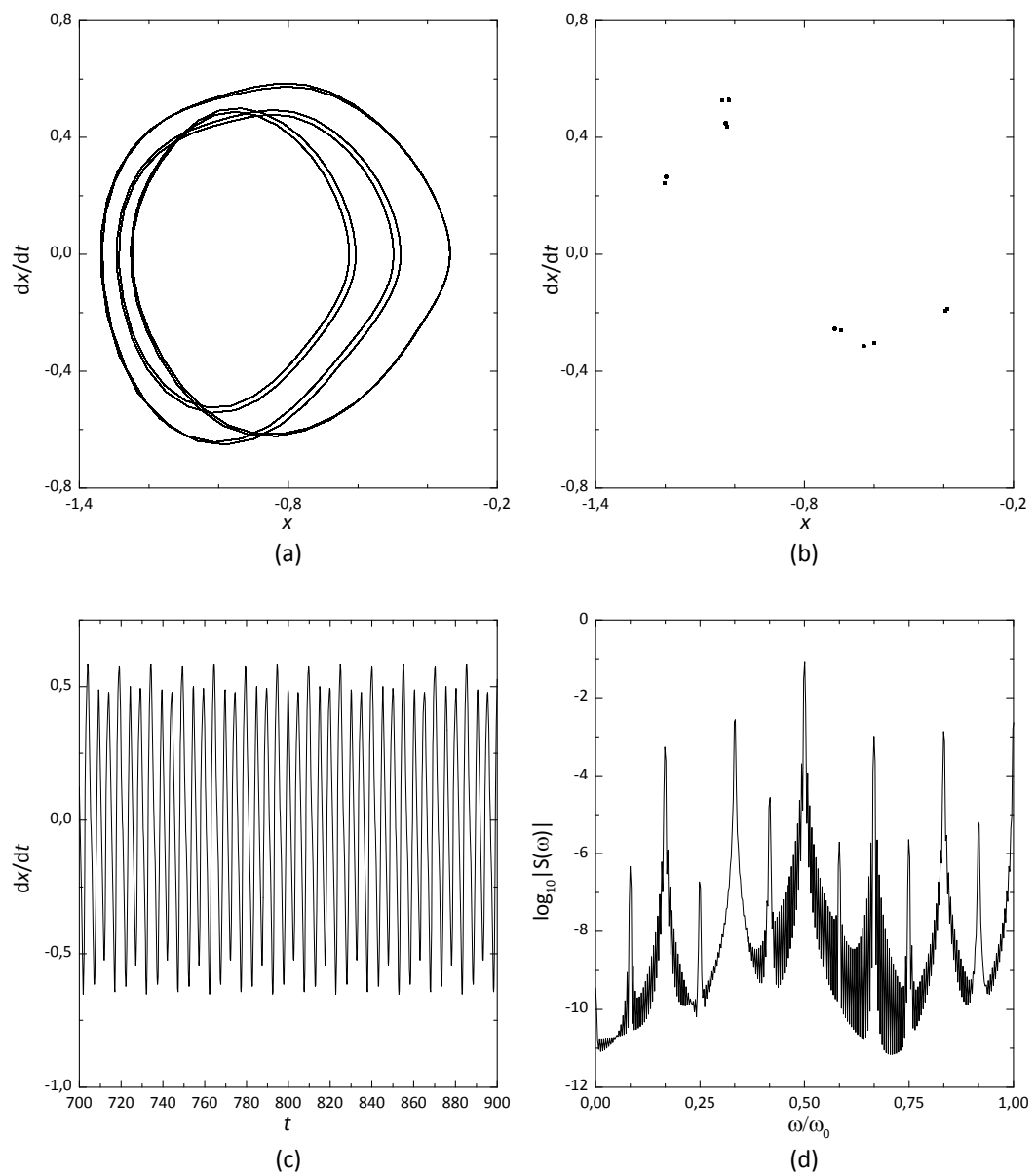


Figura 2-32 Caso  $m=0.828$ : órbita 12T-periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

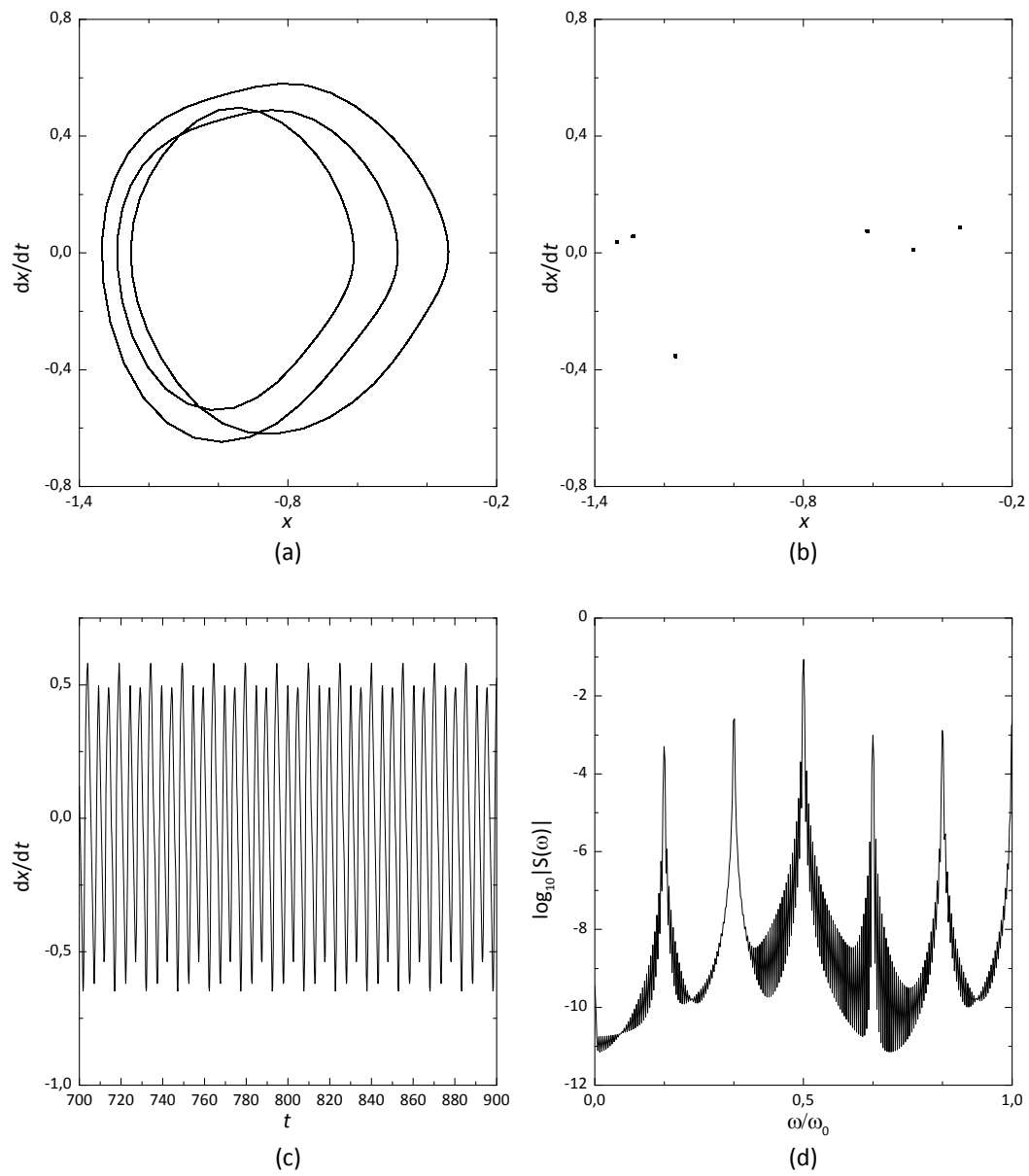


Figura 2-33 Caso  $m=0.840$ : órbita  $6T$ -periódica ( $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $F=3.8$  y  $T=2\pi/2.495$ ) (a) Órbita en el espacio de fases. (b) Aplicación de Poincaré (c) Serie temporal de la velocidad y (d) Espectro de potencia.  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional.

## 2.5 El *kicked rotator* amortiguado sometido a pulsos periódicos no ideales (NIPKR)

En el contexto de sistemas sometidos a pulsos periódicos el *kicked rotator*, que entre otros sistemas puede ser interpretado como un péndulo físico sometido a impactos periódicos, ha sido estudiado como caso paradigmático, fundamentalmente en el campo de los sistemas hamiltonianos, y en particular en el campo del caos cuántico, para estudiar, entre otros problemas, la interacción entre partículas y campos pulsantes intensos [BBM06, DPMS<sup>+</sup>04, HBSS<sup>+</sup>05, KMPS<sup>+</sup>07, RAVD<sup>+</sup>06, WSDG<sup>+</sup>04]

La elección de la función matemática para modelar los pulsos o impactos periódicos determina en gran medida la dinámica del sistema. La función  $\delta$  de Dirac periódica ha sido utilizada muy frecuentemente para este fin pues su sencilla integración permite la reducción del *kicked rotator* a una aplicación bidimensional, la aplicación estándar, lo que simplifica notablemente la obtención de resultados analíticos y numéricos [GG82, LT85, MG08, Ott93, TZ08, Zas78, Zas05]. En el caso disipativo la integración del *damped kicked rotator* conduce a una aplicación generalizada cuyos casos particulares son, entre otros, la aplicación logística, la aplicación de Henón y la aplicación de Chirikov, ver por ejemplo [Sch95]. Pero es claro que la función  $\delta$  de Dirac periódica supone una idealización excesiva para simular pulsos reales, necesariamente finitos en amplitud y duración. Además, existen evidencias experimentales que indican la necesidad de considerar pulsos más realistas [JGSM04].

El *damped kicked rotator* puede ser interpretado como un péndulo físico amortiguado sometido a impactos periódicos normales cuya ecuación es:

$$I \frac{d^2 x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + mgb \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} F \delta(t - nT) = 0 \quad (2.109)$$

donde  $I$  es el momento de inercia,  $m$  su masa,  $A$  el coeficiente de amortiguamiento,  $b$  la distancia del centro de masas al pivote, y  $x$  la variable angular. Normalizando la ecuación anterior se obtiene:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = 0 \quad (2.110)$$

donde la variable temporal se expresa de forma adimensional  $t \rightarrow \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = (mgb/I)^{1/2}$  es la frecuencia de resonancia de baja amplitud del péndulo integrable,  $\eta = A/\omega_0$  es el coeficiente normalizado de amortiguamiento y  $T = \omega_0 T$  el periodo adimensional. Las derivadas respecto a la nueva variable temporal se denotan  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ .

Un conocimiento más detallado de los distintos sistemas físicos, químicos y biológicos cuya evolución puede ser descrita en términos de ecuaciones similares requiere una aproximación más realista al *kicked rotator*, el *non-ideal periodically kicked rotator*, que denotaremos como

NIPKR de aquí en adelante, oscilador en el que los impactos periódicos representen pulsos periódicos de amplitud y anchura finita:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + Fp(t; T, \alpha_i) \text{sen } x = 0 \quad (2.111)$$

con  $\eta$  y  $F$  son positivas y donde  $p(t; T, \alpha_i)$  es un pulso genérico asimétrico, de periodo  $T$ , que verifica  $p(t=(2n-1)T/2; T, \alpha_i)=0$  y  $p(t; T, \alpha_i) \geq 0$ , amplitud unidad y forma controlada por los parámetros  $\alpha_i$ . Manteniendo fijos la amplitud y el periodo, se considerarán distintas formas de onda para modelar los pulsos. Este nuevo grado de libertad no aparece en el sistema (2.110) y nos permitirá estudiar el comportamiento de la dinámica de (2.111) bajo cambios en la forma de onda del pulso, en lo relativo a la inhibición del comportamiento caótico en este capítulo y a la estabilidad estructural de las soluciones estacionarias en el capítulo siguiente.

De acuerdo con el objetivo de simular pulsos periódicos más realistas, pero sin perder generalidad se elegirán las funciones  $p(t; T, \alpha_i)$ , adecuadas a dicho objetivo, *verbigratia* con un solo máximo en el periodo. Al igual que en los pulsos considerados al estudiar el oscilador de Duffing, se utilizarán funciones elípticas de Jacobi para modelar el pulso, de manera que podamos variar de forma continua la forma de onda del pulso mediante un solo parámetro, el parámetro elíptico  $m$ . Además se ha considerado un segundo tipo de pulso, pulsos rectangulares, para verificar la conjetura de invariancia de impulso mecánico transmitido.

Así pues, con el objeto de estudiar el umbral caótico de (2.111) bajo cambios únicamente en la forma de onda de la excitación paramétrica se ha considerado el pulso siguiente para dicha excitación:

$$p(t; T, m) \equiv \frac{\text{dn}(2K(m)t / T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \quad (2.112)$$

donde  $\text{dn}$  es la función elíptica de Jacobi denam de parámetro elíptico  $m$ ,  $K(m)$  es la integral elíptica completa de primera especie y  $T$  es el periodo del pulso. La forma funcional específica de  $p(t; T, m)$  se introduce para que ésta se anule en  $t=(2n+1)T/2$ ,  $n=0,1,2,\dots \forall m \in [0,1]$ , es decir para poder estudiar únicamente el efecto del cambio en la forma geométrica de los pulsos, sin que haya una fuerza constante, y distinta para cada valor de  $m$ , entre pulsos, lo cual ocurriría si el pulso fuera directamente proporcional a  $\text{dn}(2K(m)t/T; m)$ . En la Fig. 2-34 (b) se ha representado la función  $\text{dn}(t; m)$  acotando sus valores máximos y mínimos para ilustrar la construcción del pulso  $p(t; T, m)$ . En cuanto a la frecuencia  $2K(m)/T$  se introduce para obtener un pulso periódico de periodo  $T$  para cualquier valor de  $m$ , habida cuenta que el periodo real de la función denam es  $2K(m)$ .

El pulso  $p(t; T, m)$  tiene dos características importantes para nuestro propósito: la forma de onda del pulso varía de forma continua en función de un solo parámetro, y en el límite  $m=0$ ,  $p(t; T, m=0) = \cos^2(\pi t/T)$ , se recupera la función armónica que representa un pulso asimétrico.

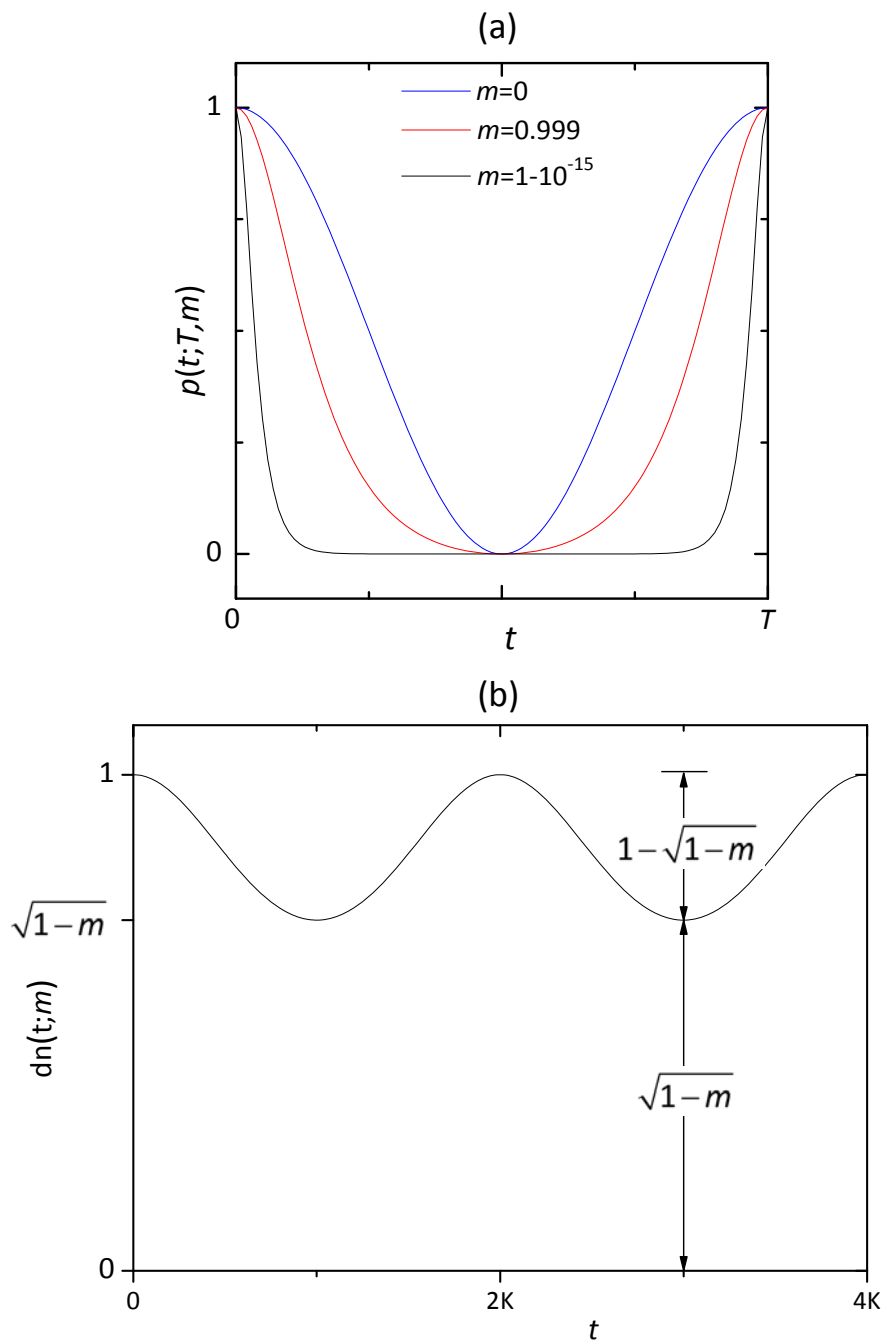


Figura 2-34 (a) Pulso  $p(t ; T, m)$  [cf. Ec. (2.112)] para distintos valores del parámetro  $m$ . (b) Función elíptica de Jacobi denam:  $dn(t; m)$ . Se acotan los valores máximos y mínimos de la función para ilustrar la construcción del pulso.

En este último caso,  $m=0$ , el sistema (2.111) representa el péndulo paraméricamente forzado con soporte vertical oscilante:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \frac{F}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \text{sen } x = 0. \tag{2.113}$$

Este oscilador ha sido ampliamente estudiado por diversos autores: numéricamente [BGJS95, CB94, McL81], analíticamente [BSGJ92, KL85] y experimentalmente [BGJS95, KSYJ97, ST95], mostrando una dinámica rica y variada cuando se varía un parámetro [Ach97, Cha95a]. De manera que el presente estudio puede entenderse como una extensión o generalización de los realizados en las referencias citadas. En la Fig. 2-34 (a) se representa el pulso  $p(t;T,m)$  para distintos valores de  $m$ ; en ella se puede apreciar cómo al aumentar el valor de  $m$  la anchura efectiva del pulso disminuye y, en el límite  $m \rightarrow 1$ , nos acercamos al *damped kicked rotator* de la ecuación (2.110), si bien en lugar de pulsos tipo  $\delta(t-nT)$ , se obtienen pulsos muy estrechos de amplitud y anchura finita, como ocurre en los pulsos observados experimentalmente (ver p.e. [FG93]), que representan de forma más realista los pulsos periódicos (*kicks*). Además, variando independientemente  $F$  y  $m$  podemos obtener pulsos con la amplitud y anchura que deseemos. Simulaciones numéricas de una reacción Belousov-Zhabotinsky, en la que la variación temporal forzada de la concentración de uno de los reactivos se ha modelado mediante  $p(t;T,m \rightarrow 1)$  muestra un gran acuerdo con los resultados experimentales [WSH95].

### 2.5.1 El sistema integrable subyacente: el péndulo

Al igual que en el apartado 2.3.1 se describe a continuación el sistema integrable subyacente al NIPKR. El sistema objeto de estudio es:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} = 0. \quad (2.114)$$

Para poder separar el sistema integrable subyacente, el péndulo simple, de la perturbación es necesario desarrollar en serie de Fourier de la función elíptica de Jacobi denam [GRJ00]:

$$\operatorname{dn}(u; m) = \frac{\pi}{2K(m)} + \frac{2\pi}{K(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi K(1-m)}{K(m)}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{K(m)}u\right). \quad (2.115)$$

De manera que el sistema (2.114) puede escribirse como:

$$\ddot{x} + Fa(m) \operatorname{sen} x = -\eta \dot{x} - F \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \operatorname{sen} x \quad (2.116)$$

donde

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{\pi / 2K(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}}, \\ c_n(m) &= \frac{\pi}{(1 - \sqrt{1-m})K(m)} \operatorname{sech}\left[\frac{n\pi K(1-m)}{K(m)}\right]. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Así pues el sistema integrable subyacente a (2.114) puede escribirse como:

$$\ddot{x} + Fa(m)\text{sen } x = 0, \quad (2.118)$$

que es la ecuación de un péndulo plano con frecuencia propia de oscilación de pequeña amplitud  $\Omega$ , con  $\Omega^2 = Fa(m)$ . La función  $a(m)$  presenta los siguientes valores límite:  $a(m=0)=1/2$  y  $a(m=1)=0$ . El término de la derecha de la ecuación (2.116), que engloba al término disipativo y a la excitación paramétrica, será considerado como una perturbación del sistema integrable subyacente a (2.118). Normalizando la frecuencia mediante el cambio  $\tau = \Omega t$  la ecuación anterior queda:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \text{sen } x = 0, \quad (2.119)$$

que en forma de sistema de primer orden se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\text{sen } x. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Es un sistema hamiltoniano con energía:

$$H_0 = E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}u^2 - (1 + \cos x), \quad (2.121)$$

donde se ha elegido como origen de potencial el punto más alto de la trayectoria del péndulo.

A continuación se caracteriza el diagrama de fases del péndulo, para ello se determinan los puntos fijos, la separatriz y las órbitas entorno a dicha separatriz.

#### Puntos fijos:

Sea  $u = 0 \Rightarrow -\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = \pm n\pi$ , siendo  $n = 0, 1, 2, \dots$  de forma que los puntos fijos de (2.120) son  $(x, u) = \{(\pm n\pi, 0), n = 1, 2, \dots\}$ . Dada la periodicidad espacial que este sistema presenta se va a restringir el estudio al periodo principal, que se considerará como el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de manera que los puntos fijos a estudiar son  $(x, u) = \{(-\pi, 0), (0, 0), (0, \pi)\}$ .

La naturaleza de dichos puntos fijos es:

Para  $(x, u) = (0, 0)$ , el flujo linealizado ( $\text{sen } x \approx x$ ) en torno a dicho punto es:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{du}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Cuya ecuación característica es  $\lambda^2+1=0$  y cuyos autovalores son  $\lambda = \pm i$ , imaginarios puros de distinto signo; por tanto el punto fijo  $(0,0)$  es un punto fijo elíptico o centro.

Para  $(x,u) = (\pm\pi, 0)$  se tienen sendos puntos hiperbólicos de silla. En efecto, para linealizar en torno a dichos puntos se realiza previamente el cambio de variable  $(\bar{x}, \bar{u}) = (x - (\pm\pi), u)$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \bar{u} \\ \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= -\text{sen}(\bar{x} \pm \pi) \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta  $-\text{sen}(\bar{x} \pm \pi) = -\text{sen} \bar{x}$  y linealizando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\bar{x}}{d\tau} \\ \frac{d\bar{u}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}.$$

En este caso, la ecuación característica es  $\lambda^2-1=0$ , cuyos autovalores son  $\lambda = \pm 1$ , reales distintos y de signo opuesto; por tanto los puntos fijos  $(\pm\pi, 0)$  son puntos hiperbólicos de silla.

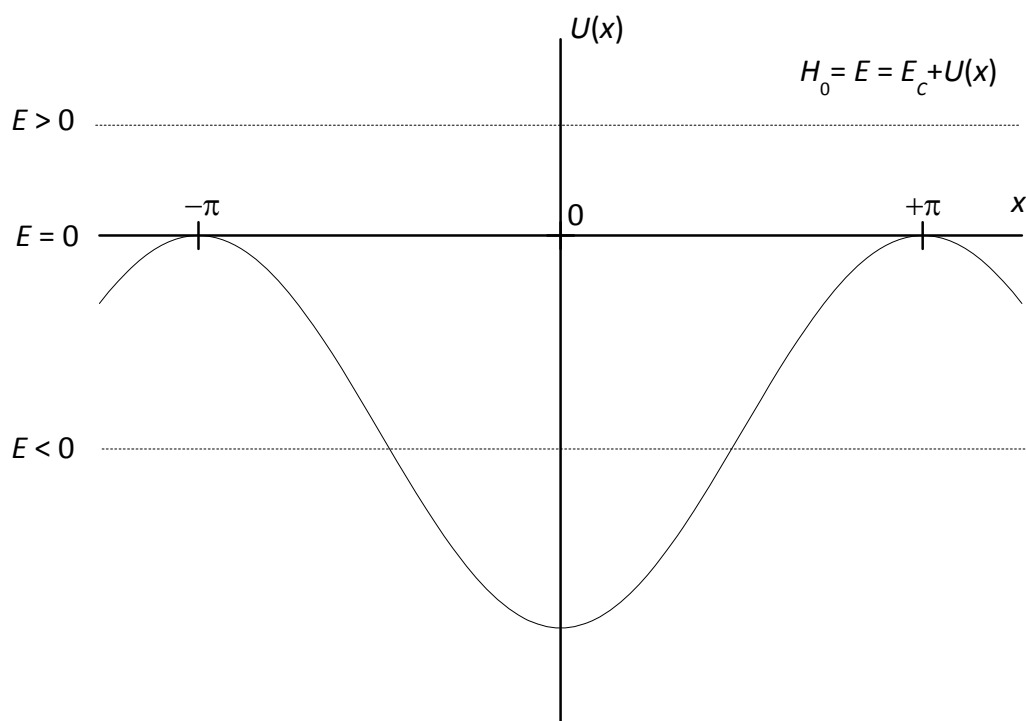


Figura 2-35 Potencial del oscilador  $U(x) = -(1 + \cos x)$  y niveles energéticos de la separatriz ( $E=0$ ), las órbitas exteriores ( $E > 0$ ) e interiores ( $E < 0$ ) a la separatriz.



De la expresión del potencial,  $U(x) = -(1 + \cos x)$  se deduce fácilmente que presenta un mínimo relativo (un pozo de potencial) en  $x=0$  y dos máximos relativos en  $x = \pm\pi$ . Que se corresponden con el centro y los dos puntos hiperbólicos de silla, respectivamente. En la Fig. 2-35 se muestra la gráfica del potencial.

**Órbitas heteroclinas:**

Para el origen de potencial elegido, las órbitas heteroclinas se encuentran para  $H_0=0$ , valor que sustituido en (2.121) conduce a:

$$u_0 = \pm\sqrt{2(1 + \cos x_0)}. \tag{2.122}$$

Una vez integrada esta ecuación, determina, para cada signo, las órbitas heteroclinas  $\bar{\Gamma}_+^0$  y  $\bar{\Gamma}_-^0$ :

$$\bar{\Gamma}_\pm^0(\tau) = (x_{0\pm}(\tau) = \pm 2 \arctan(\sinh(\tau)), u_{0\pm}(\tau) = \pm 2 \operatorname{sech}(\tau)). \tag{2.123}$$

Deshaciendo el cambio de variable  $\tau = \Omega t = \sqrt{Fa(m)}t$  la expresión de las órbitas heteroclinas, necesarias para el cálculo de la función de Melnikov, es:

$$\bar{\Gamma}_\pm^0(t) = (x_{0\pm}(t) = \pm 2 \arctan(\sinh(\sqrt{Fa(m)}t)), u_{0\pm}(t) = \pm 2 \sqrt{Fa(m)} \operatorname{sech}(\sqrt{Fa(m)}t)). \tag{2.124}$$

Notar que si el espacio de fases del péndulo se toma  $(x,u) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ , éste es periódico en  $x$  con periodo  $2\pi$  y entonces se habla de órbitas heteroclinas conectando punto fijos hiperbólicos distintos. Dada la periodicidad en  $x$ , en tal dirección el espacio de fases tiene la estructura de una circunferencia de longitud  $2\pi$ , que denotamos  $S^1$ . Por lo tanto, de forma equivalente, el espacio de fases para el péndulo se puede tomar como el cilindro  $(x,u) \in S^1 \times \mathbb{R}^1$  y ahora los puntos hiperbólicos  $(\pm\pi, 0)$ , son el mismo punto, hablándose entonces de dos órbitas homoclinas, conectando tal punto consigo mismo.

Así pues el espacio de fases queda caracterizado por una separatriz, formada por las dos órbitas heteroclinas  $\bar{\Gamma}_+^0, \bar{\Gamma}_-^0$  conectando los dos puntos hiperbólicos de silla  $(\pm\pi, 0)$  y la existencia de un punto fijo elíptico en  $(0, 0)$  tal como se muestra en la Fig. 2-36.

**Órbitas en el espacio de fases**

Para terminar de caracterizar el espacio de fases del sistema integrable (2.118), se detallan a continuación las ecuaciones de las órbitas exteriores e interiores a la separatriz de [GH02].

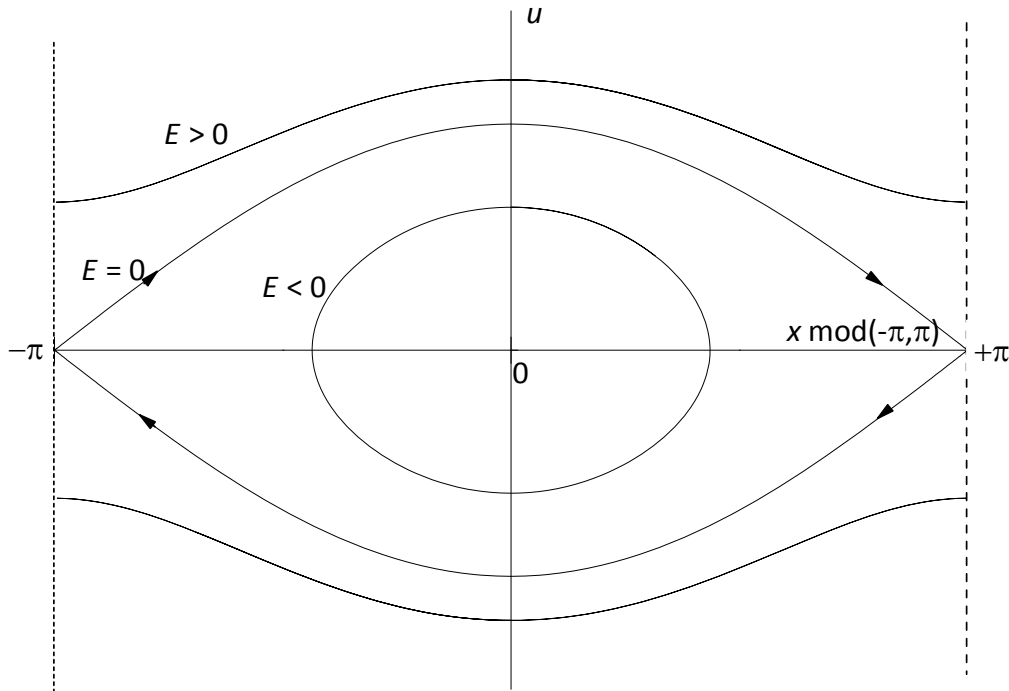


Figura 2-36 Órbitas en el espacio de fases del oscilador  $\ddot{x} + \sin x = 0$ : separatriz ( $E=0$ ), órbitas externas ( $E>0$ ) e internas ( $E<0$ ) [cf. Ecs. (2.124), (2.125) y (2.126) respectivamente].

Las órbitas exteriores a la separatriz tienen valores positivos de energía ( $E>0$ ) y representan movimientos de rotación:

$$\begin{aligned} x^{ext}(t) &= \pm 2 \arcsen\left[\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{Fa(m)}{m}}t; m\right)\right], \\ u^{ext}(t) &= \pm \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{Fa(m)}{m}}t; m\right), \end{aligned} \quad (2.125)$$

donde el signo superior (inferior) representa rotación en sentido horario (antihorario). El periodo de estas órbitas es  $T(m, F) = 2\sqrt{m}K(m) / \sqrt{Fa(m)}$  con valores límites  $T(m=0, F) = 0$  y  $T(m=1, F) = \infty$ . En el límite  $m=1$  estas órbitas se reducen a las heteroclinas.

Las órbitas interiores a la separatriz tienen valores negativos de energía ( $E<0$ ) y representan movimientos oscilatorios entorno a la posición de equilibrio estable:

$$\begin{aligned} x^{int}(t) &= 2 \arcsen\left[\sqrt{m} \operatorname{sn}\left(\sqrt{Fa(m)}t; m\right)\right], \\ u^{int}(t) &= 2\sqrt{m} \operatorname{cn}\left(\sqrt{Fa(m)}t; m\right). \end{aligned} \quad (2.126)$$

El periodo de las órbitas interiores es  $T(m,F)=2\sqrt{m/Fa(m)K(m)}$ , con valores límites  $T(m=0,F)=4\pi/\sqrt{F}$  y  $T(m=1,F)=\infty$ . Estas órbitas también se reducen a las heteroclinas en el límite  $m=1$ .

En la Fig. 2-36 se muestra la estructura del espacio de fases del oscilador, en la que además de mostrarse el carácter heteroclinico de la separatriz se muestran también ejemplos de órbitas interiores y exteriores a la separatriz.

### 2.5.2 Caso $m=0$ : $p(t;T,m=0)=\cos^2(\pi t/T)$

Como primera aproximación al *non-ideal periodically kicked rotator*:

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + F \operatorname{sen} x p(t;T, \alpha_i) = 0, \quad (2.127)$$

se estudia el caso de pulsos modelados por la función denam en el límite  $m=0$ , límite en el cual el pulso es armónico:

$$p(t;T, \alpha_i) = p(t;T, m=0) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1 + \cos(2\pi t/T)}{2}. \quad (2.128)$$

De manera que el sistema objeto de estudio es:

$$\ddot{x} + \frac{F}{2} \operatorname{sen} x = -\eta\dot{x} - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \operatorname{sen} x. \quad (2.129)$$

Obviamente esta ecuación coincide con (2.116) en el límite  $m=0$ :

$$\ddot{x} + Fa(m=0) \operatorname{sen} x = -\eta\dot{x} - F \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m=0) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \operatorname{sen} x, \quad (2.130)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha(m=0) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\pi/2K(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} = \frac{1}{2}, \\ c_n(m=0) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\pi}{(1 - \sqrt{1-m})K(m)} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi K(1-m)}{K(m)}\right) = \frac{1}{2} \delta_{1n}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. El sistema descrito por la ecuación (2.129) coincide con la ecuación de un péndulo amortiguado cuyo punto de suspensión oscila en dirección vertical con periodo  $T$ , sistema ampliamente estudiado en la bibliografía. Aunque no representa una aproximación realista al *kicked rotator*, ya que los pulsos no son lo suficientemente estrechos,

permitirá validar el estudio del caso general de pulsos modelados por la función denam  $p(t;T,m)$  en el límite  $m=0$ .

### 2.5.2.1 Análisis de Melnikov

Se estudia a continuación desde el punto de vista teórico la bifurcación homoclina del sistema (2.129) que da origen al comportamiento caótico. Para ello usaremos el análisis de Melnikov descrito en el apartado 2.2.4.

El sistema no perturbado  $\ddot{x} + (F/2)\text{sen}x = 0$  es hamiltoniano con energía  $H_0 = E_c + U(x) = u^2/2 + (-F(1 + \cos x)/2)$ . La separatriz está formada por dos órbitas heteroclinas  $\bar{\Gamma}_{\pm}^0$ , cuya ecuación de acuerdo con (2.124) y usando el límite  $a(m=0)=1/2$  es

$$\bar{\Gamma}_{\pm}^0(t) = \left( x_{0\pm}(t) = \pm 2 \arctan(\sinh(\sqrt{F/2}t)), u_{0\pm}(t) = \pm 2\sqrt{F/2} \operatorname{sech}(\sqrt{F/2}t) \right), \quad (2.132)$$

y los puntos hiperbólicos de silla  $(\pm\pi, 0)$ .

Se considera ahora el sistema perturbado (2.129). De acuerdo con (2.27) la función de Melnikov para la órbita  $\bar{\Gamma}_{+}^0(t)$  es:

$$M^{+}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}_0(\bar{\Gamma}_{+}^0(t)) \wedge \vec{f}_1(\bar{\Gamma}_{+}^0(t), t + t_0) dt. \quad (2.133)$$

La función para la órbita  $\bar{\Gamma}_{-}^0(t)$  es completamente análoga, y dada la simetría del potencial, el análisis de las dos funciones  $M^{\pm}(t_0)$  conduce a los mismos resultados de manera que en adelante se omitirá el índice relativo a la órbita heteroclina.

Se considera que los términos disipativo ( $\eta < 1$ ) y de excitación paramétrica son perturbaciones del sistema integrable subyacente, si bien éste último no es estrictamente una perturbación pues su amplitud efectiva es la misma que la del término del potencial; no obstante, como se comprobará más adelante, el método de Melnikov proporciona una primera estimación del umbral orden-caos compatible con las regiones de caos estacionario en el espacio de parámetros obtenidas mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov.

El sistema (2.129) se escribe en forma de flujo:

$$(\dot{x}, \dot{u}) = \vec{f}_0 + \vec{f}_1 = \left( u, -\frac{F}{2} \text{sen}x \right) + \left( 0, -\eta u - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{sen}x \right), \quad (2.134)$$

donde se ha separado el flujo hamiltoniano  $\vec{f}_0$ , de la perturbación  $\vec{f}_1$ , de forma que:

$$\begin{aligned} f_{01} &= u, & f_{11} &= 0, \\ f_{02} &= -\frac{F}{2} \operatorname{sen} x, & f_{12} &= -\eta u - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \operatorname{sen} x. \end{aligned} \quad (2.135)$$

La función de Melnikov queda:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\eta u_0^2 - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t+t_0)}{T}\right) \operatorname{sen}(x_0) u_0 \right] dt. \quad (2.136)$$

Sustituyendo (2.132) en (2.136) y haciendo el cambio de variable  $\tau = \sqrt{F/2}t$  se obtiene:

$$M(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{F/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\eta (2\sqrt{F/2} \operatorname{sech}(\tau))^2 - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi(\tau+\tau_0)}{\sqrt{F/2}T}\right) \operatorname{sen}(2\arctan(\operatorname{senh}(\tau))) (2\sqrt{F/2} \operatorname{sech}(\tau)) \right) d\tau. \quad (2.137)$$

Operando, desarrollando el coseno como suma y utilizando la paridad:

$$M(\tau_0) = -4\sqrt{F/2}\eta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\tau) d\tau - 8F \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\tau_0}{\sqrt{F/2}T}\right) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh}(\tau)}{\cosh^3(\tau)} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\tau}{\sqrt{F/2}T}\right) d\tau. \quad (2.138)$$

Utilizando las tablas de integrales [GRJ00] se obtiene:

$$M(\tau_0) = -8\eta\sqrt{F/2} + \frac{16\pi^3}{T^2} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\tau_0}{T\sqrt{F/2}}\right), \quad (2.139)$$

y recuperando la variable temporal inicial se obtiene finalmente:

$$M(t_0) = -8\eta\sqrt{F/2} + \frac{16\pi^3}{T^2} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right). \quad (2.140)$$

### 2.5.2.2 Teorema de inhibición del comportamiento caótico

La bifurcación homoclina y por tanto el inicio del comportamiento caótico del sistema (2.129) se producirá cuando la función de Melnikov (2.140) que mide la distancia entre las variedades estable e inestable del sistema perturbados tenga ceros simples. Por tanto, una forma de asegurar que  $M(t_0)$  no tenga ceros simples se escribe:

$$8\eta\sqrt{F/2} > \frac{16\pi^3}{T^2} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right), \quad (2.141)$$

o bien

$$\eta > \frac{2\pi^3}{T^2\sqrt{F/2}} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right). \quad (2.142)$$

De forma que puede establecerse el siguiente teorema de inhibición del comportamiento caótico:

**Teorema 4.** Una condición suficiente para que el sistema:

$$\ddot{x} + \frac{F}{2} \operatorname{sen} x = -\eta \dot{x} - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \operatorname{sen} x$$

con  $\eta > 0$ ,  $F > 0$  y  $\eta \ll 1$ , no presente comportamiento caótico, para trayectorias suficientemente cercanas a la separatriz, es que se verifique:

$$\eta > U_0(T, F), \quad (2.143)$$

donde  $U_0(T)$  es la función umbral orden-caos:

$$U_0(T, F) = \frac{2\pi^3}{T^2\sqrt{F/2}} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right). \quad (2.144)$$

### 2.5.2.3 Análisis de la función umbral y verificación numérica

Se estudia a continuación la función umbral  $U_0(T, F)$ , para determinar en qué regiones del espacio de parámetros la dinámica del sistema (2.129) es regular.

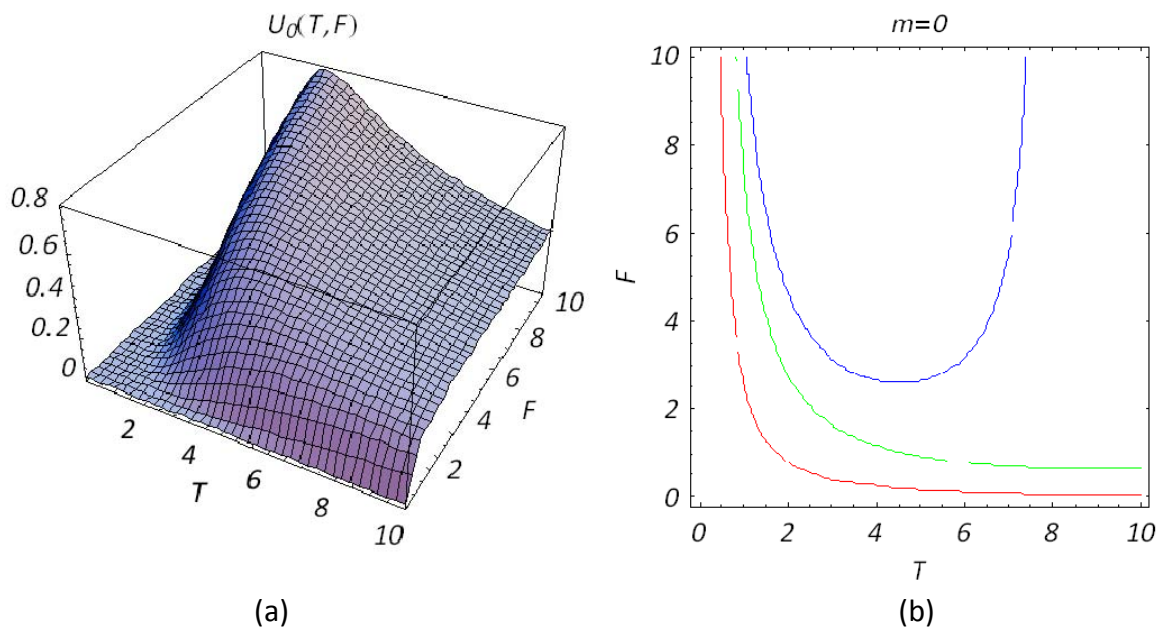


Figura 2-37 (a) Función umbral caótico  $U_0(T, F)$  [cf. Ec. (2.144)] que permite establecer el teorema de inhibición del comportamiento caótico. (b) Gráficas de las funciones umbral caótico  $U_0(T, F) = \eta_c = \text{cte}$ , para valores de  $\eta_c = 0.01$  (rojo),  $\eta_c = 0.2$  (verde) y  $\eta_c = 0.4$  (azul). La región del espacio de parámetros por encima de cada una de las curvas indica posible comportamiento caótico, al menos transitorio.

En la Fig. 2-37(a) se muestra una gráfica de la función  $U_0(T,F)$ . Aplicando la condición de inhibición (2.143) puede establecerse que si el valor de  $\eta$  supera  $U_0(T,F)$  para un determinado valor de  $T$  y de  $F$  no es posible el comportamiento caótico de manera que la función umbral separa las zonas de comportamiento regular de las de posible comportamiento caótico (al menos transitorio) en el espacio de parámetros  $(T,F)$ . El valor de la función umbral representa, fijados los valores de  $T$  y  $F$ , el coeficiente crítico de amortiguamiento  $\eta_c$ , en el sentido de que para  $\eta > \eta_c$  el comportamiento del sistema es necesariamente regular. En la Fig. 2-37(b) se muestran las gráficas de  $U_0(T,F) = \eta_c = \text{cte}$ , para valores de  $\eta_c = 0.01$ ,  $\eta_c = 0.2$  y  $\eta_c = 0.4$ , las curvas representadas separan en dos regiones el espacio de parámetros, la región por encima de cada una de las curvas corresponden a la región de posible comportamiento caótico (al menos transitorio) una vez fijado el parámetro  $\eta_c$ .

Como se ha apuntado anteriormente se han de tener ciertas precauciones a la hora de valorar el resultado obtenido pues el término  $(-F/2)\cos(2\pi t/T)\sin(x)$  del sistema dinámico regido por la ecuación (2.129) no puede ser considerado propiamente como una perturbación. Por este motivo, se han determinado las regiones del espacio de parámetros en los que la dinámica es caótica, mediante la determinación de los exponentes de Lyapunov, y se han comparado los resultados con los de la función umbral de Melnikov. Es importante resaltar que no se pueden esperar concordancias precisas, pues el análisis de Melnikov estudia el inicio del caos transitorio, mientras que el cálculo de exponentes de Lyapunov se refiere a caos estacionario<sup>6</sup>.

En la Fig. 2-38 se muestran sombreadas las regiones del espacio de parámetros con exponente de Lyapunov positivo. Para su cálculo se han utilizado las rutinas descritas en [WSSV85]. Se ha partido de un retículo  $100 \times 100$  en el espacio de parámetros  $(F,T)$ , para cada valor de  $F$  y  $T$  se ha integrado un total de 2000 ciclos para un valor fijo de disipación  $\eta = 0.2$ , y se han sombreado las zonas donde el primer exponente de Lyapunov es positivo. En la misma gráfica se incluye la función umbral Melnikov  $U_0(T,F) = \eta_c = 0.2$ . A la vista de la gráfica se pueden hacer las siguientes observaciones:

- a) Por debajo de la función umbral Melnikov no aparece caos estacionario, en efecto el análisis Melnikov establece una condición suficiente para la supresión de comportamiento caótico
- b) La función umbral Melnikov constituye una buena aproximación a la frontera inferior de la región caótica. Además teniendo en cuenta que los transitorios caóticos no siempre devienen en caos estacionario, la función umbral Melnikov debe quedar por debajo de la frontera de caos estacionario.

<sup>6</sup> En rigor ninguna técnica numérica permite distinguir entre caos estacionario y transitorios caóticos suficientemente largos, puesto que la integración del sistema dinámico siempre se realiza en un intervalo temporal finito.

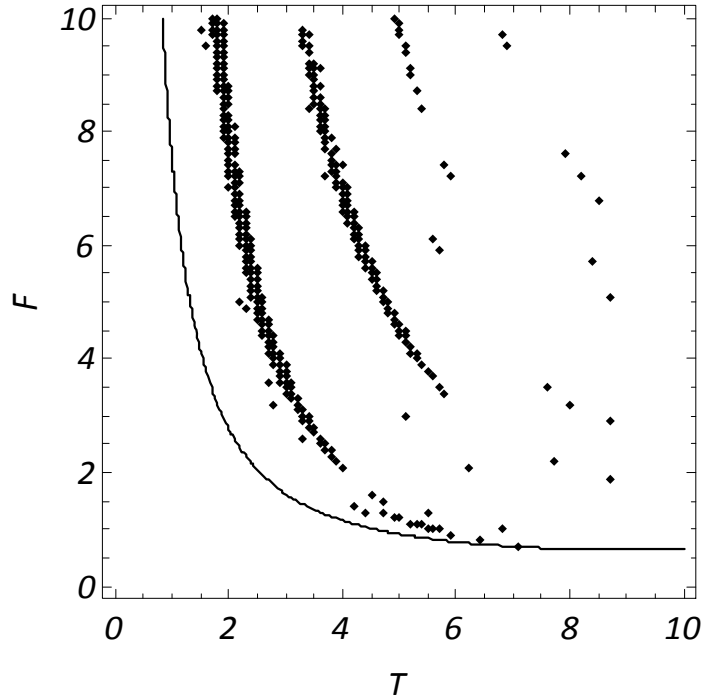


Figura 2-38. Retículo en el plano de parámetros  $(F, T)$  para  $\eta=0.2$ . Los puntos representan las zonas del espacio de parámetros en los que el exponente maximal de Lyapunov es mayor que  $10^{-3}$ , y la línea representa la función umbral caótico  $U_0(T, F) = \eta_c = 0.2$  calculada teóricamente [cf. Ec. (2.144)].

## 2.5.3 Pulsos modelados con la función denam $\rho(t; T, m)$

### 2.5.3.1 Análisis de Melnikov

El sistema objeto de estudio es el *non ideal periodically kicked rotator*:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \operatorname{sen} xp(t; T, \alpha_i) = 0, \quad (2.145)$$

en el que el pulso asimétrico considerado es:

$$\rho(t; T, \alpha_i) = \rho(t; T, m) = \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}}. \quad (2.146)$$

De manera que la ecuación que describe la evolución del oscilador es:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2.147)$$

Para el posterior análisis de Melnikov, la ecuación anterior, usando el desarrollo en serie de la función denam [cf. Ec. (2.115)], y separando la parte integrable de la perturbación se escribe:



$$\ddot{x} + Fa(m)\text{sen } x = -\eta\dot{x} - F \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \text{sen } x, \quad (2.148)$$

con

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{\pi / 2K(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}}, \\ c_n(m) &= \frac{\pi}{(1 - \sqrt{1-m})K(m)} \text{sech} \left[ \frac{n\pi K(1-m)}{K(m)} \right]. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Se considera que los términos disipativo y de excitación paramétrica son perturbaciones del sistema integrable subyacente. Se ha de notar sin embargo que el término de excitación paramétrica tiene una amplitud que verifica  $F \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \geq Fa(m)$ ,  $\forall m$  y por tanto no es estrictamente una perturbación. En cualquier caso como se comprobará más tarde, el método de Melnikov constituye una primera aproximación del umbral orden-caos compatible con el análisis numérico realizado mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov.

Se estudia a continuación desde el punto de vista teórico la bifurcación homoclina del sistema (2.147) que da origen al comportamiento caótico, para ello usaremos el análisis de Melnikov descrito en el apartado 2.2.4.

El sistema no perturbado  $\ddot{x} + Fa(m)\text{sen } x = 0$  es hamiltoniano con energía  $H_0 = E_c + U(x) = u^2 / 2 + (-Fa(m)(1 + \cos x))$ . La separatriz está formada por dos órbitas heteroclinas  $\bar{\Gamma}_{\pm}^0$ , cuya ecuación de acuerdo con (2.124) es:

$$\bar{\Gamma}_{\pm}^0(t) = (x_{0\pm}(t) = \pm 2 \arctan(\sinh(\sqrt{Fa(m)}t)), u_{0\pm}(t) = \pm 2\sqrt{Fa(m)} \text{sech}(\sqrt{Fa(m)}t)), \quad (2.150)$$

y los puntos hiperbólicos de silla  $(\pm\pi, 0)$ .

Se considera ahora el sistema perturbado (2.148). De acuerdo con (2.27) la función Melnikov para la órbita  $\bar{\Gamma}_{+}^0(t)$  es:

$$M^+(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\bar{\Gamma}_{+}^0(t)) \wedge \bar{f}_1(\bar{\Gamma}_{+}^0(t), t + t_0) dt, \quad (2.151)$$

donde

$$(\dot{x}, \dot{u}) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 = (u, -Fa(m)\text{sen } x) + (0, -\eta u - F \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \text{sen } x). \quad (2.152)$$

La función de Melnikov para la órbita  $\bar{\Gamma}_-^0(t)$  es completamente análoga, y dada la simetría del potencial, el análisis de las dos funciones  $M^\pm(t_0)$  conduce a los mismos resultados de manera que en adelante se omitirá el índice relativo a la órbita heteroclina.

Sustituyendo (2.152) en (2.151) se tiene:

$$M(t_0) = -\eta \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(t) dt - F \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \text{sen}[x_0(t)] \cos\left[\frac{2n\pi(t+t_0)}{T}\right] dt. \quad (2.153)$$

Sustituyendo (2.150) en (2.153) y haciendo el cambio  $\tau = \sqrt{Fa(m)}t$ :

$$M(t_0) = -4\sqrt{Fa(m)}\eta \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(\tau) d\tau - 4F \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{senh}(\tau)}{\cosh^3(\tau)} \cos\left[\frac{2n\pi(\tau+\tau_0)}{\sqrt{Fa(m)}T}\right] d\tau. \quad (2.154)$$

Desarrollando el coseno como suma y en función de la paridad del segundo integrando se obtiene:

$$M(t_0) = -4\sqrt{Fa(m)}\eta \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(\tau) d\tau + 8F \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \text{sen}\left(\frac{2n\pi\tau_0}{\sqrt{Fa(m)}T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{senh}(\tau)}{\cosh^3(\tau)} \text{sen}\left(-\frac{2n\pi\tau}{\sqrt{Fa(m)}T}\right) d\tau. \quad (2.155)$$

Usando las tablas integrales estándar [GRJ00]:

$$M(t_0) = -8\eta\sqrt{Fa(m)} + \frac{8\pi^3}{T^2 a(m)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(m) b_n(m, T, F) \text{sen}\left(\frac{2n\pi t_0}{T}\right) \quad (2.156)$$

con

$$b_n(m, T, F) = \text{csech}\left(\frac{n\pi^2}{T\sqrt{Fa(m)}}\right).$$

### 2.5.3.2 Teorema de inhibición del comportamiento caótico

La bifurcación homoclina y por tanto el inicio del comportamiento caótico del sistema (2.147) se producirá cuando la función de Melnikov (2.156) tenga ceros simples. Por tanto, una forma de asegurar que  $M(t_0)$  no tenga ceros simples se escribe:

$$8\eta\sqrt{Fa(m)} > \frac{8\pi^3}{T^2 a(m)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(m) b_n(m, T, F) \quad (2.157)$$

expresión que operada conduce a:

$$\eta > \frac{\pi^3}{T^2 \sqrt{Fa^3(m)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(m) b_n(m, T, F) \quad (2.158)$$

De forma que puede establecerse el siguiente teorema de inhibición del comportamiento caótico:

*Teorema 5. Una condición suficiente para que el sistema dinámico:*

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \operatorname{sen} x = 0$$

con  $\eta > 0$ ,  $F > 0$  y  $\eta \ll 1$ , no presente comportamiento caótico, para trayectorias suficientemente cercanas a la separatriz, es que se verifique:

$$\eta > U(m, T, F), \quad (2.159)$$

donde  $U(m, T, F)$  es la función umbral orden-caos:

$$U(m, T, F) = \frac{\pi^3}{T^2 \sqrt{Fa^3(m)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(m) b_n(m, T, F) \quad (2.160)$$

con

$$a(m) = \frac{\pi / 2K(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}},$$

$$b_n(m, T, F) = \operatorname{csech} \left( \frac{n\pi^2}{T \sqrt{Fa(m)}} \right),$$

$$c_n(m) = \frac{\pi}{(1 - \sqrt{1-m})K(m)} \operatorname{sech} \left( \frac{n\pi K(1-m)}{K(m)} \right).$$

### 2.5.3.3 Análisis de la función umbral y verificación numérica

Se estudia a continuación la función umbral  $U(m, T, F)$  para determinar las regiones del espacio de parámetros en las que la dinámica de (2.147) es necesariamente regular de acuerdo con el teorema de inhibición.

En primer lugar se verifica que  $U(m=0, T, F) = U_0(T, F)$ , siendo  $U_0(T, F)$  la función umbral orden-caos obtenida previamente para el caso  $m=0$ , ver Ec. (2.144). En efecto, en el límite  $m=0$ :

$$\begin{aligned}
a(m=0) &= 1/2, \\
b_n(m=0, T, F) &= \operatorname{csech}\left(\frac{n\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right), \\
c_n(m=0) &= \delta_{1n}.
\end{aligned} \tag{2.161}$$

Por tanto:

$$U(m=0, T, F) = U_0(T, F) = \frac{2\pi^3}{T^2\sqrt{F/2}} \operatorname{csech}\left(\frac{\pi^2}{T\sqrt{F/2}}\right). \tag{2.162}$$

La función umbral  $U(m, T, F)$  presenta los siguientes comportamientos asintóticos:

$$\begin{aligned}
U(m, T, F \rightarrow \infty) &= 0 \\
U(m, T, F \rightarrow 0) &= 0 \\
U(m, T \rightarrow \infty, F) &= 0 \\
U(m, T \rightarrow 0, F) &= 0 \\
U(m=1, T, F) &= 0
\end{aligned} \tag{2.163}$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de inhibición, no cabe esperar comportamiento caótico en dichos límites.

La estructura cualitativa de las curvas  $U(m \neq 0, T, F) = \text{cte}$  no difiere de las correspondientes al límite armónico  $m=0$ . Cada curva  $U(m = \text{cte}, T, F) = \text{cte}$  (véase la Fig. 2.39) presenta un mínimo en  $T_{\min}(m)$  en el plano  $(T, F)$ , cuyo valor crece cuando  $m$  varía desde  $m=0$  hasta  $m \rightarrow 1$ , si bien la desviación respecto de  $T_{\min}(m=0)$  únicamente es importante para pulsos muy estrechos ( $m \rightarrow 1$ ).

Se analiza a continuación el umbral caótico en función de la amplitud  $F$  y del parámetro  $m$  que controla la anchura del pulso, manteniendo el periodo constante. La Fig. 2-40 muestra la gráfica de la función  $U(m, T = \text{cte}, F)$ , donde se puede observar la existencia de un valor crítico de la amplitud  $F_c = F_c(T)$  de manera que para valores  $F < F_c$  la función umbral es monótona decreciente en su dependencia con el parámetro  $m$  (véase la Fig. 2-41(a)), mientras que para valores  $F > F_c$  la función umbral presenta un máximo  $m_{\max}$  (véase la Fig. 2-41(b)). Dicho máximo se produce para un valor de  $m$  muy cercano a la unidad, es decir para pulsos muy estrechos, y representa la situación más favorable para la aparición de comportamiento caótico.

Notar de nuevo que el término de la excitación paramétrica del miembro de la derecha de la Ec. (2.148) no es un término propiamente perturbativo, por lo que la validez del análisis de Melnikov realizado es limitada. Por este motivo se hace necesario verificar numéricamente los resultados obtenidos.

En la Fig. 2-42 se muestran sombreadas las regiones del espacio de parámetros  $(T, F)$  con exponente de Lyapunov positivo para distintos valores de  $m$ . Para su cálculo se han utilizado las rutinas descritas en [WSSV85]. Se ha partido de un retículo  $100 \times 100$  en el espacio de parámetros  $(F, T)$ , para cada valor de  $F$  y  $T$  se ha integrado un total de 2000 ciclos para un valor fijo de disipación  $\eta=0.2$ , y se han sombreado las zonas donde el primer exponente de Lyapunov es positivo. En la misma gráfica se incluye la función umbral Melnikov  $U(m=\text{cte}, T, F) = \eta_c = 0.2$ . La interpretación de las gráficas es sencilla, las zonas sombreadas corresponden a caos estacionario y la función umbral representa un límite inferior para la aparición de caos (al menos transitorio). A la vista de las gráficas se pueden hacer las siguientes observaciones:

- a) Existe un buen acuerdo entre el análisis de Melnikov y el análisis numérico. El teorema de inhibición predice que por debajo de la función umbral no es posible el comportamiento caótico, y el análisis numérico muestra que no existe caos estacionario por debajo de dicha función umbral. De hecho, la función umbral calculada es una buena aproximación, desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo, a la frontera inferior de las regiones de caos estacionario en el espacio de parámetros. La aproximación es particularmente buena para valores de  $T$  crecientes.
- b) En la Fig. 2-42 se observa que la extensión de la región caótica aumenta conforme aumenta el valor de  $m$ , o equivalentemente cuando el pulso se va estrechando (véase la Fig. 2-34). Puesto que en el caso límite  $m=1$ , no es posible el comportamiento caótico, se deduce la existencia de un valor de  $m$  cercano a la unidad para el cual la extensión de la región caótica es máxima, lo que concuerda con el resultado mencionado anteriormente acerca de la existencia de  $m_{\max}$  para el cual se presenta la situación más favorable para la aparición de caos (véase la Fig. 2-41(b)).
- c) Conforme aumenta el valor del periodo  $T$ , van apareciendo *lenguas* de comportamiento caótico estacionario, que se van estrechando conforme  $T$  crece.

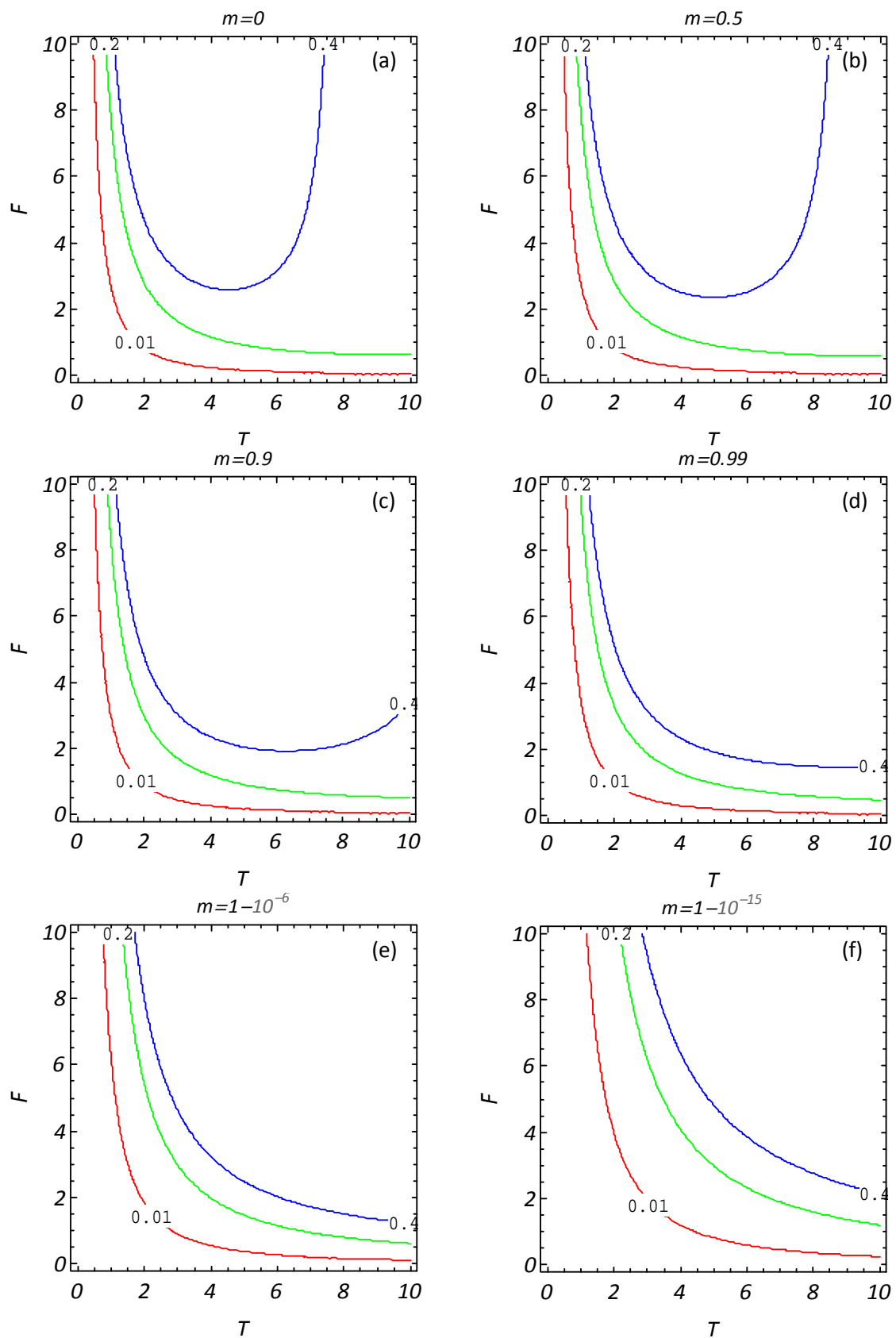


Figura 2-39 Gráficas de las funciones umbral orden-caos  $U(m=\text{cte}, T, F) = \eta_c = \text{cte}$  [cf. Ec.(2.160)], para valores de  $\eta_c=0.01$  (rojo),  $\eta_c=0.2$  (verde) y  $\eta_c=0.4$  (azul). La región del espacio de parámetros por encima de cada una de las curvas corresponde a la posibilidad de comportamiento caótico, al menos transitorio. (a)  $m=0$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.9$ , (d)  $m=0.99$ , (e)  $m=1-10^{-6}$ , y (f)  $m=1-10^{-15}$ .

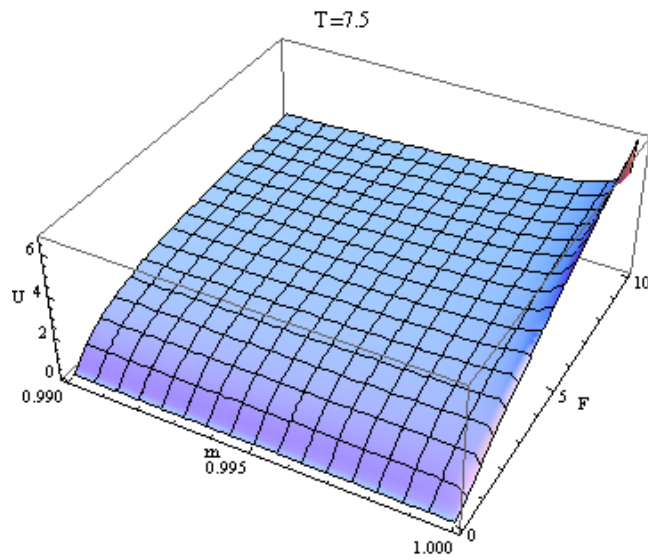


Figura 2-40 Gráfica de la función umbral-caótico  $U(m, T=7.5, F)$  [cf. Ec.(2.160)]. El intervalo de  $m$  representado corresponde a pulsos estrechos.

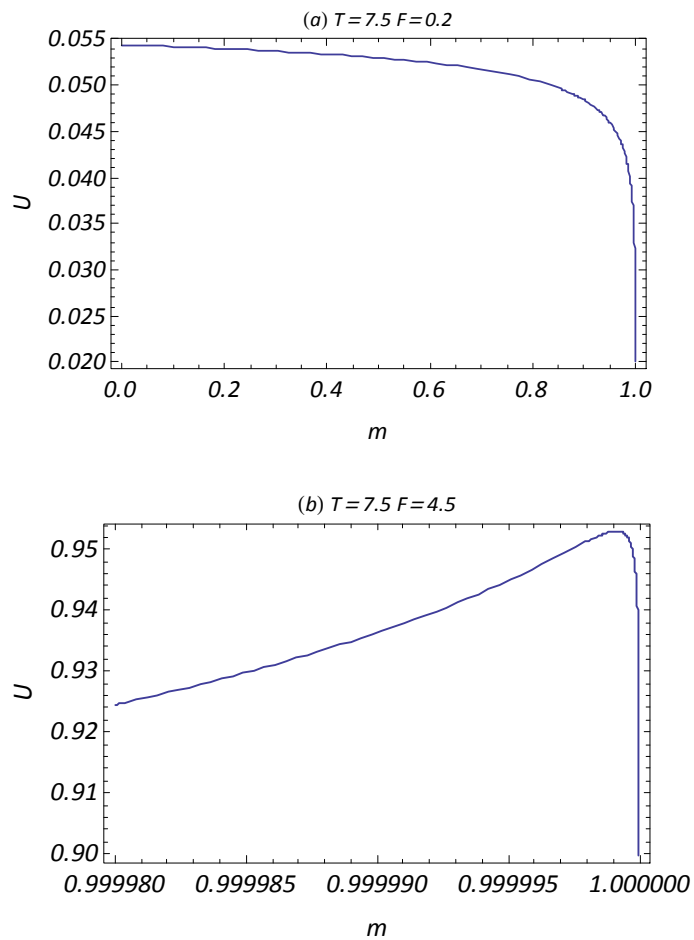


Figura 2-41 Gráficas de la función umbral-caótico  $U(m, T=cte, F=cte)$  [cf. Ec.(2.160)]. (a)  $U(m, T=7.5, F=0.2)$ , obsérvese el comportamiento monótono decreciente. (b)  $U(m, T=7.5, F=4.5)$ , obsérvese la existencia de un máximo relativo.

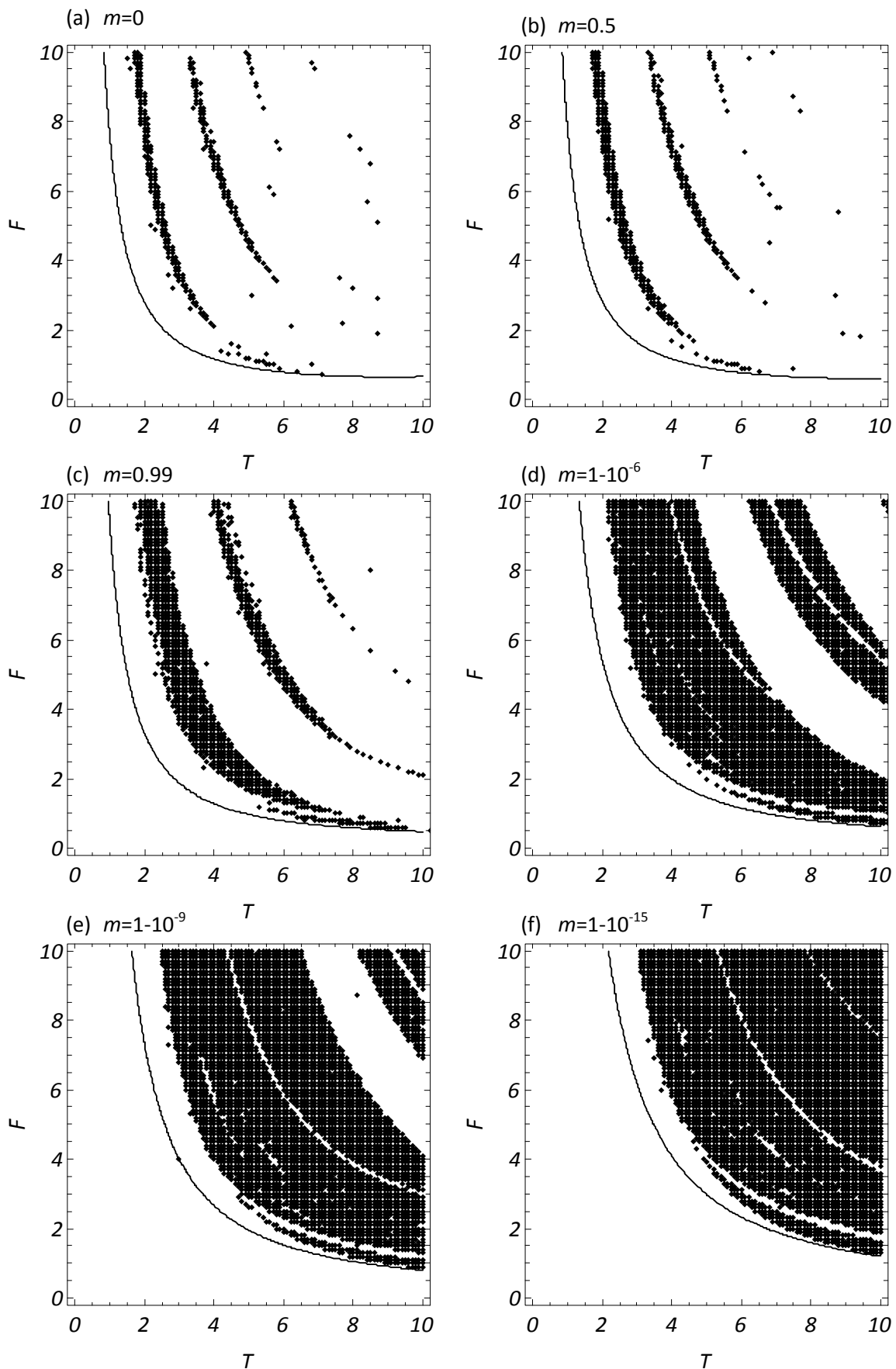


Figura 2-42 Retículo en el plano de parámetros  $(F, T)$  para  $\eta=0.2$  y para distintos valores de  $m$ . Los puntos representan las zonas del espacio de parámetros en los que el exponente maximal de Lyapunov es mayor que  $10^{-3}$ , y la línea representa la función umbral caótico  $U_0(m=cste, T, F) = 0.2$  calculada teóricamente [cf. Ec.(2.160)].



## 2.5.4 Mecanismo Físico. Invariancia del impulso mecánico transmitido

### 2.5.4.1 Condición de invariancia del impulso mecánico

¿Existe alguna condición de tipo físico para que la dinámica del *kicked rotator* sometido a pulsos periódicos no ideales (NIPKR) sea independiente de la forma del pulso de la excitación temporal? Para responder a esta cuestión se aplica a continuación la conjetura de la invariancia del impulso mecánico transmitido introducida en la referencia [CMGH99] y aplicada al NIPKR en la referencia [CMGH01].

La ecuación del oscilador objeto de estudio es:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + Fp(t; T, \alpha_i) \text{sen } x = 0 \quad (2.164)$$

En efecto, si

$$E(t) = E_c + U(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + [-(1 + \cos x)] \quad (2.165)$$

es la función energía del sistema (2.164), siendo  $E_c$  la energía cinética y  $U(x)$  la potencial, su derivada temporal puede escribirse como:

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = -\dot{x} \{ -\eta\dot{x} - \text{sen } x [1 - Fp(t; T, \alpha_i)] \}. \quad (2.166)$$

Esta ecuación, una vez integrada sobre cualquier periodo  $[nT, (n+1)T]$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , nos da la variación temporal de la energía en cada periodo:

$$E((n+1)T) - E(nT) = -\eta \int_{nT}^{(n+1)T} \dot{x}^2(t) dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \dot{x}(t) \text{sen}[x(t)] [1 - Fp(t; T, \alpha_i)] dt. \quad (2.167)$$

Dado que las soluciones de (2.164) con  $\eta > 0$  son acotadas, puesto que la divergencia de su flujo es negativa, podemos aplicar el primer teorema del valor medio [GRJ00] a las integrales de la ecuación anterior:

$$E((n+1)T) - E(nT) = -\eta T \dot{x}^2(\tau_1) + \dot{x}(\tau_2) \text{sen}[x(\tau_2)] \int_{nT}^{(n+1)T} [1 - Fp(t; T, \alpha_i)] dt, \quad (2.168)$$

donde  $\{\tau_1, \tau_2\} \in [nT, (n+1)T]$ . Los valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dependerán de  $n$  y de  $p(t; T, \alpha_i)$  no obstante si nos centramos en soluciones asintóticas de (2.164) cuando el oscilador haya alcanzado el estado estacionario ( $n \rightarrow \infty$ ), el cambio energético en un periodo no dependerá de la forma específica

del pulso  $p(t; T, \alpha_i)$ , sino del valor de su integral en un periodo  $\int_{nT}^{(n+1)T} p(t; T, \alpha_i) dt$ , es decir, de su impulso mecánico.

Por tanto, manteniendo constante el resto de parámetros y las condiciones iniciales, cabe esperar que la dinámica de (2.164) sea similar para pulsos de formas diferentes que transmitan al oscilador el mismo impulso mecánico en cada periodo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} p(t; T, \alpha_i) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} p'(t; T, \alpha_i') dt. \quad (2.169)$$

La conjetura formulada acerca de la invariancia del impulso mecánico no deja de ser una condición física plausible que debe ser verificada numérica o experimentalmente. Hay que notar que la variación energética en un periodo puede no depender explícitamente de la forma específica del pulso, pero si depende del valor de  $x$  y  $\dot{x}$  en los instantes  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , que no tienen por qué ser idénticos en especial para periodos suficientemente grandes ( $T \gg 1$ ), cuando el periodo del pulso es muy superior al periodo del sistema integrable subyacente. No obstante parece razonable que dichos valores no sean muy diferentes para periodos de la excitación paramétrica suficientemente pequeños,  $T \rightarrow 0$ , ya que  $\{\tau_1, \tau_2\} \in [nT, (n+1)T]$ .

De forma que la variación energética del oscilador en un periodo depende del impulso mecánico transmitido por el pulso  $\int_{nT}^{(n+1)T} p(t; T, \alpha_i) dt$  y del valor de  $x$  y  $\dot{x}$  en los instantes  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , que dependen a su vez de  $p(t; T, \alpha_i)$ . No obstante para periodos suficientemente pequeños,  $T \rightarrow 0$ , la variación de tales magnitudes será pequeña.

Por tanto, la dependencia fundamental de la variación temporal energética del sistema (2.164) y, consecuentemente, de su dinámica es con el impulso mecánico transmitido por el pulso, siempre y cuando nos ciñamos a soluciones asintóticas ( $n \rightarrow \infty$ ) y se consideren periodos de la excitación temporal suficientemente pequeños ( $T \rightarrow 0$ ). Esta aseveración deberá ser corroborada por simulaciones numéricas.

Para verificar numéricamente la validez y el alcance de la conjetura de invariancia del impulso mecánico se comparará la dinámica del NIPKR, véase Ec. (2.164), con tres pulsos periódicos asimétricos de periodo  $T$ , amplitud unidad, que verifican  $p(t=(2n-1)T/2; T, \alpha_i) = 0$  y  $p(t; T, \alpha_i) \geq 0$  y forma controlada por los parámetros  $\alpha_i$ :

- a)  $p_1(t; T, \alpha_i) \equiv p(t; T, m)$ , el pulso modelado con la función denam estudiado en los apartados anteriores:

$$p(t; T, m) = \frac{\text{dn}(2K(m)t/T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}}. \quad (2.170)$$

- b)  $p_2(t; T, \alpha_i) \equiv p'(t; T, m')$ , pulsos cnoidales modelados por la función elíptica de Jacobi cosam:

$$p'(t; T, m') = \text{cn}^2(2K(m')t / T; m'). \quad (2.171)$$

Notar que los pulsos  $p_1(t; T, m)$  y  $p_2(t; T, m')$  son idénticos en el límite  $m=m'=0$ , en efecto  $p_1(t; T, m=0) = p_2(t; T, m'=0) = \cos^2(\pi t / T)$ , y en el límite  $m=m'=1$  donde ambos pulsos son nulos para todo  $t$ , excepto para un conjunto de instantes de medida de Lebesgue nula:  $t=nT$ ,  $n=0,1,2,\dots$ . Para el resto de valores del parámetro elíptico, la forma de ambos pulsos es muy similar (véanse las Figs. 2-43 (a) y (b)) contando el pulso cnoidal con una anchura algo menor para el mismo valor del parámetro elíptico.

- c)  $p_3(t; T, \alpha_i) \equiv s(t; T, b)$ , pulsos rectangulares de anchura  $b$ :

$$s(t; T, b) = \begin{cases} 1, & t \in [0, b/2] \cup [T - b/2, T] \\ 0, & t \in (b/2, T - b/2) \end{cases}, \text{ en cada periodo } T. \quad (2.172)$$

Notar que el pulso  $s(t; T, b)$  no es adecuado para simular pulsos o impactos reales. Por el contrario, el estudio del NIPKR surge de la necesidad de trabajar con pulsos no ideales, no obstante se ha considerado en este apartado como caso límite para verificar la formulación teórica presentada.

En las Figs. 2-43 (a), (b) y (c) se representan los tres pulsos considerados cada uno de ellos para tres valores distintos del parámetro que controla la forma de onda. Los valores de  $m$ ,  $m'$  y  $b$  se han elegido de manera que los pulsos representados transmitan el mismo impulso mecánico al oscilador.

Particularizando para los pulsos considerados se calcula previamente el impulso mecánico transmitido por cada pulso al oscilador en un periodo.

Para el primer pulso

$$I_1 = \int_{nT}^{(n+1)T} p_1(t; T, \alpha_i) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} \frac{\text{dn}(2K(m)t / T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} dt = \int_{nT}^{(n+1)T} \frac{\left(\frac{\pi}{2K(m)} + \frac{\pi}{K(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sech}\left(\frac{n\pi K(1-m)}{K(m)}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} dt = \frac{\frac{\pi}{2K(m)} - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} T, \quad (2.173)$$

donde se ha utilizado el desarrollo en serie de Fourier de la función denam, cuyo único término con integral a un periodo no nula es el primero.

El impulso mecánico del pulso cnoidal:

$$I_2 = \int_{nT}^{(n+1)T} p_2(t; T, \alpha_i) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} \text{cn}^2(2K(m')t/T; m') dt = \frac{1}{m'} \left( m' - 1 + \frac{E(m')}{K(m')} \right) T \quad (2.174)$$

donde  $E(m')$  es la integral elíptica completa de segunda especie. La integral se ha resuelto con ayuda de tablas de integrales estándar [GRJ00].

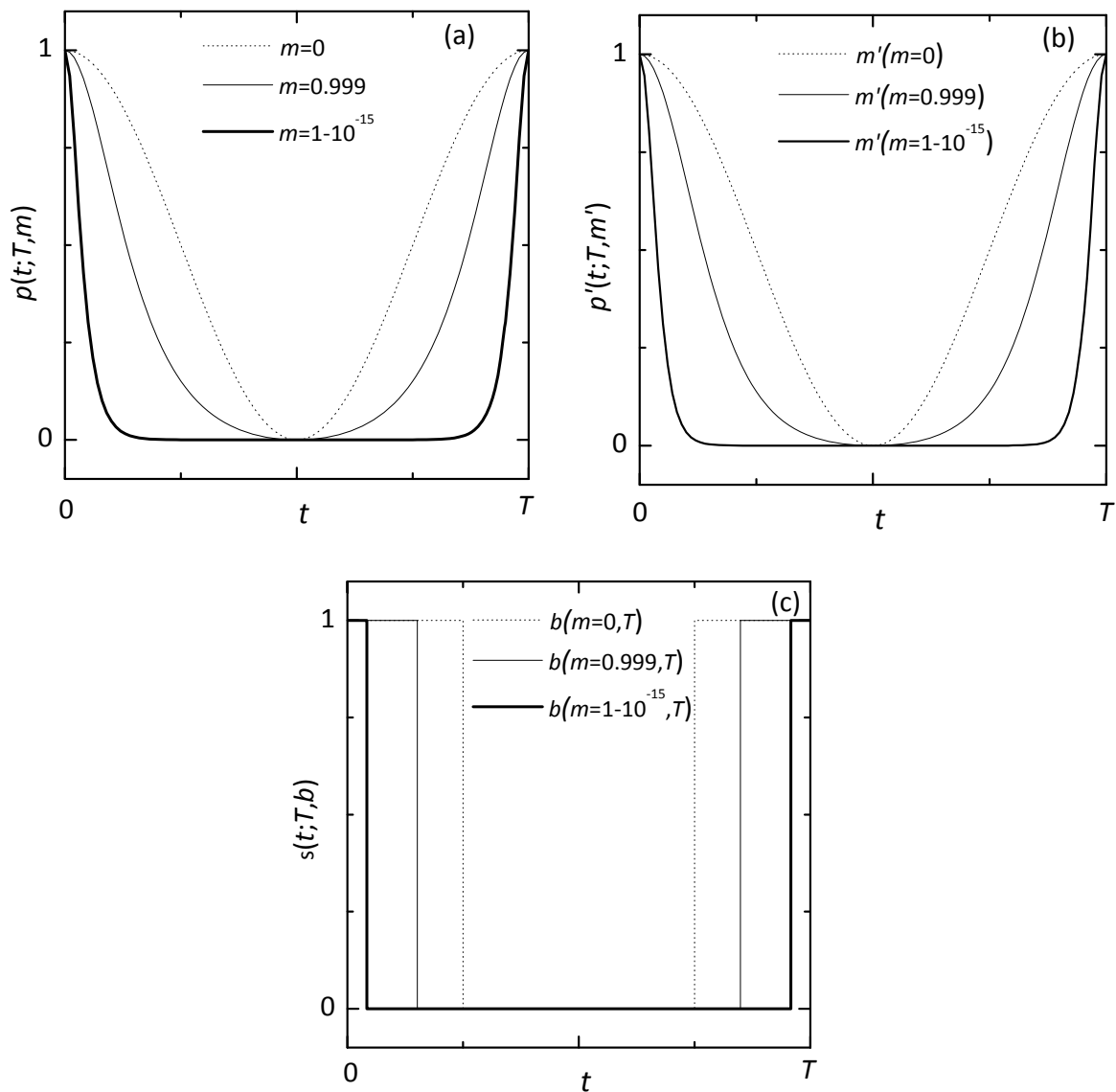


Figura 2-43 Gráficas de los pulsos (a)  $p(t; T, m)$ , (b)  $p'(t; T, m')$ , y (c)  $s(t; T, b)$  [cf. Ecs. (2.170), (2.171) y (2.172), respectivamente], para distintos valores de los parámetros de forma correspondientes,  $m$ ,  $m'$  y  $b$ , que controlan la anchura de cada pulso. Los valores de  $m'$  y  $b$  elegidos verifican las condiciones de invariancia del impulso mecánico transmitido [cf. Ecs. (2.176) y (2.177)].

En cuanto al pulso rectangular, su impulso mecánico transmitido en un periodo es:

$$I_3 = \int_{nT}^{(n+1)T} p_3(t;T,\alpha_i)dt = \int_{nT}^{(n+1)T} s(t;T,b)dt = b. \quad (2.175)$$

### 2.5.4.2 Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico

Tomando como pulso de referencia el pulso modelado con la función denam  $p_1(t;T,m)$  se estudian a continuación la aplicación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico (2.169) a los pulsos considerados:

a) Pulsos denam y cnoidal

En efecto aplicando la condición de invariancia (2.169) entre el pulso denam (2.170) y el pulso cnoidal (2.171) de acuerdo con los impulsos calculados se obtiene:

$$\begin{aligned} A(m) &= B(m'), \\ A(m) &\equiv \frac{1}{1-\sqrt{1-m}} \left( \frac{\pi}{2K(m)} - \sqrt{1-m} \right), \\ B(m') &\equiv \frac{1}{m'} \left( m' - 1 + \frac{E(m')}{K(m')} \right) \end{aligned} \quad (2.176)$$

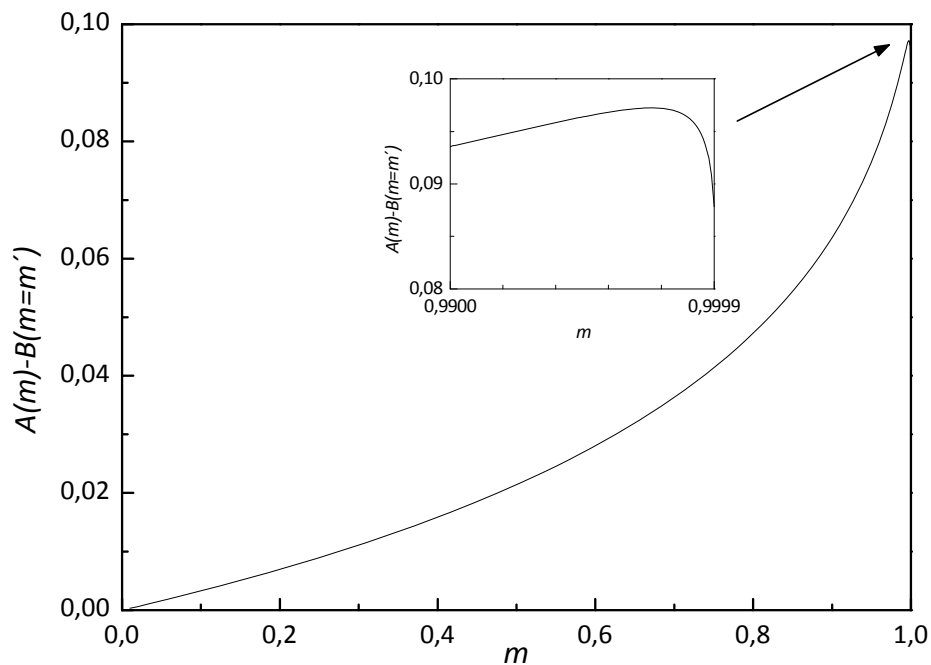


Figura 2-44 Función diferencia  $A(m) - B(m'=m)$  [cf. Ec. (2.176)] vs.  $m$ . En el detalle se muestra el máximo de la función diferencia en  $m_{\max}=0.99754$ .

No es posible encontrar una expresión explícita  $m'=m'(m)$ . Los pulsos denam y cnoidal son los mismos en los casos límite  $m=m'=0$  y  $m=m'=1$  y presentan una forma de onda distinta para el resto de los valores del parámetro de forma. En la Fig. 2-44 se representa la función  $A(m)-B(m'=m)$ . Se observa que es una función definida positiva que presenta un máximo en  $m_{\max}=0.99754$ . Desde el punto de vista físico para valores  $m=m'$  el impulso mecánico transmitido por el pulso denam (2.170) es superior al transmitido por el pulso cnoidal (2.171). Ambas funciones  $A(m)$  y  $B(m')$  son monótonas decrecientes desde  $A(m=0)=B(m'=0)=1/2$  hasta  $A(m=1)=B(m'=1)=0$ . Aunque la diferencia cuantitativa entre  $A(m)$  y  $B(m')$  es apreciable no cabe esperar diferencias cualitativas en los diagramas de bifurcación del sistema sometido a los dos tipos de pulsos.

La Fig. 2-45 confirma la hipótesis; en ella se muestran sendos diagramas de bifurcación del sistema sometido al pulso denam y al pulso cnoidal, respectivamente, con  $T=5.52$ ,  $F=1$  y  $\eta=0.2$  (valores elegidos para que el NIPKR presente una dinámica rica y variada) para condiciones iniciales fijas  $x_0=0.4$  y  $v_0=0.6$  tras la integración numérica de 2000 ciclos. Comparando las Figs. 2-45 (a) y (b) se observa que la dinámica de ambos sistemas es muy similar, con la única diferencia de los valores específicos del parámetro de forma  $m$  o  $m'$  en los que ocurren cambios cualitativos de la dinámica. En las dos primeras columnas de la Tabla 2-1 aparecen listados tres de estos puntos de bifurcación,  $m_i$  para el NIPKR sometido al pulso denam y los puntos de bifurcación  $m'_i$  equivalentes para el NIKPR sometido al pulso cnoidal, que han sido determinados a partir de los diagramas de bifurcación correspondientes (veáanse las Figs. 2-45(a) y 2-45(b), respectivamente). En la tercera columna de la Tabla 2-1 se listan los puntos de bifurcación resultado de la aplicación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido obtenidos a partir de la resolución numérica de la ecuación trascendente (2.176) para los valores  $m_i$ , es decir los valores  $m'(m_i)$  para los cuales el pulso cnoidal de parámetro  $m'(m_i)$  transmite el mismo impulso mecánico al oscilador que el pulso denam de parámetro  $m_i$ . Comparando las dos últimas columnas se observa que la concordancia es muy buena, con una desviación menor del 3%.

Puntos de bifurcación [cf. Fig. 2-45 (a)] $m_i$	Puntos de bifurcación [cf. Fig. 2-45 (b)] $m'_i$	Predicción teórica [cf. Ec.(2.176)] $m'(m_i)$
0.507	0.308	0.315
0.756	0.526	0.511
0.956	0.819	0.796

Tabla 2-1 Puntos de bifurcación para el pulso denam y para el pulso cnoidal [cf. Figs. 2-45(a) y 2-45(b), respectivamente] y predicción teórica para el pulso cnoidal [cf. Ec. (2.176)].

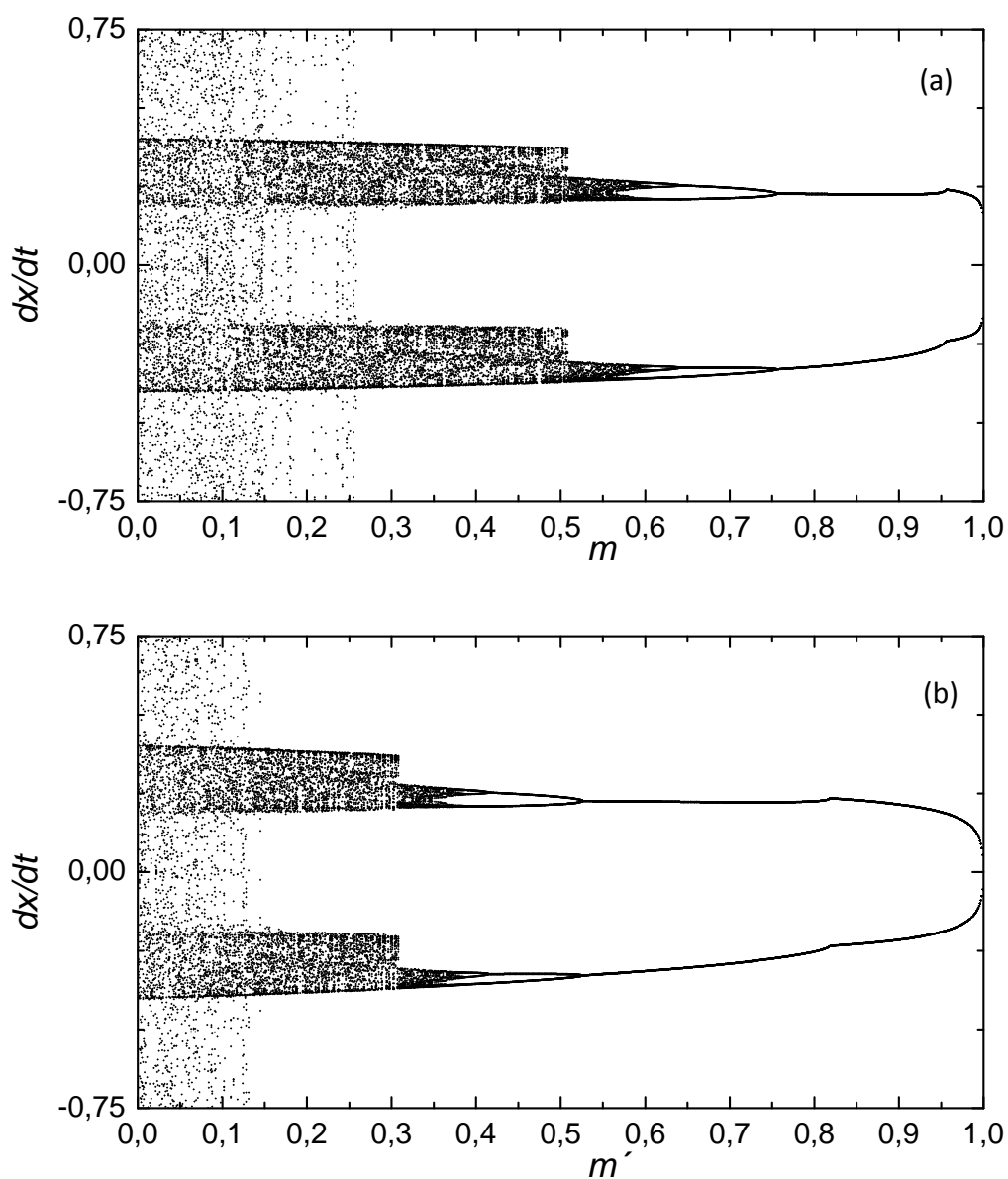


Figura 2-45. Diagramas de bifurcación para la variable  $dx/dt$  del NIPKR [cf. Ec. (2.111)] con  $\eta=0.2$ ,  $F=1$  y  $T=5.52$  sometido a : (a) pulsos denam [cf. Ec.(2.170)] y (b) pulsos cnoidales [cf. Ec. (2.171)]

La comparación de ambos diagramas de bifurcación confirma la validez de la conjetura de invariancia del impulso mecánico. En efecto, no sólo la dinámica para ambos pulsos es similar a nivel cualitativo sino que la aplicación de la condición de invariancia del impulso mecánico conduce a predicciones cuantitativas muy aproximadas, véase la Tabla 2-1, acerca de los valores del parámetro de forma del pulso para los cuales se producen cambios relevantes en la dinámica del sistema.

## b) Pulsos denam y rectangular

En efecto aplicando la condición de invariancia (2.169) entre el pulso denam (2.170) y el pulso rectangular (2.172) se obtiene la siguiente función:

$$b(m, T) \equiv T \left( 1 + \frac{\pi/2K(m)-1}{1-\sqrt{1-m}} \right), \quad (2.177)$$

la cual cuenta con los siguientes valores límite:  $b(m=0, T)=T/2$  y  $b(m=1, T)=0$ , donde  $b(m)$  representa la anchura del pulso rectangular que transmite el mismo impulso mecánico que el pulso denam con parámetro de forma  $m$ .

Para verificar la condición de invariancia del impulso se han realizado simulaciones numéricas en las que se observa que dicha condición solo funciona razonablemente bien cuando  $b \rightarrow 0$ , es decir para pulsos muy estrechos. Como ejemplo de una situación desfavorable en las Figs. 2-46(a) y 2-46(b) se representan sendos diagramas de bifurcación del sistema sometido al pulso denam y al pulso rectangular, respectivamente, con  $F=0.55$ ,  $\eta=0.2$  y  $T=5.52$ , en los intervalos  $0 \leq m \leq 1$  para el primer pulso y  $b(m=0, T) \leq b \leq b(m=1, T)$  para el segundo. El atractor  $2T$ -periódico se hace inestable para  $m=0.8700$  en el primer caso, mientras que en el segundo caso el salto a la solución estacionaria ( $x(t)=0, \dot{x}(t)=0$ ) se produce para una anchura de pulso  $b=1.93075$  que, de acuerdo con (2.177), corresponde a un valor de  $m=0.9934$ . La discrepancia puede ser debida a la marcada diferencia entre los dos tipos de pulso, pues en el caso de pulsos asimétricos con un solo máximo en cada periodo como el pulso denam y el cnoidal, que representan adecuadamente los pulsos periódicos reales, se ha obtenido una buena concordancia tanto cualitativa como cuantitativa en la dinámica del NIPKR sometido a dichos pulsos en el caso de que se verifique la condición de invariancia del impulso mecánico transmitido

En conclusión, puesto que la condición de invariancia del impulso mecánico (2.169) conduce a resultados correctos en su aplicación a pulsos que simulan impactos reales (pulsos con un solo máximo por periodo) en el *kicked rotator* sometido a pulsos periódicos no ideales (NIPKR) [cf. Ec. (2.164)], la elección de un pulso específico permite obtener resultados genéricos aproximadamente válidos para cualquier otro pulso similar lo que confirma la robustez de la dinámica del NIPKR.



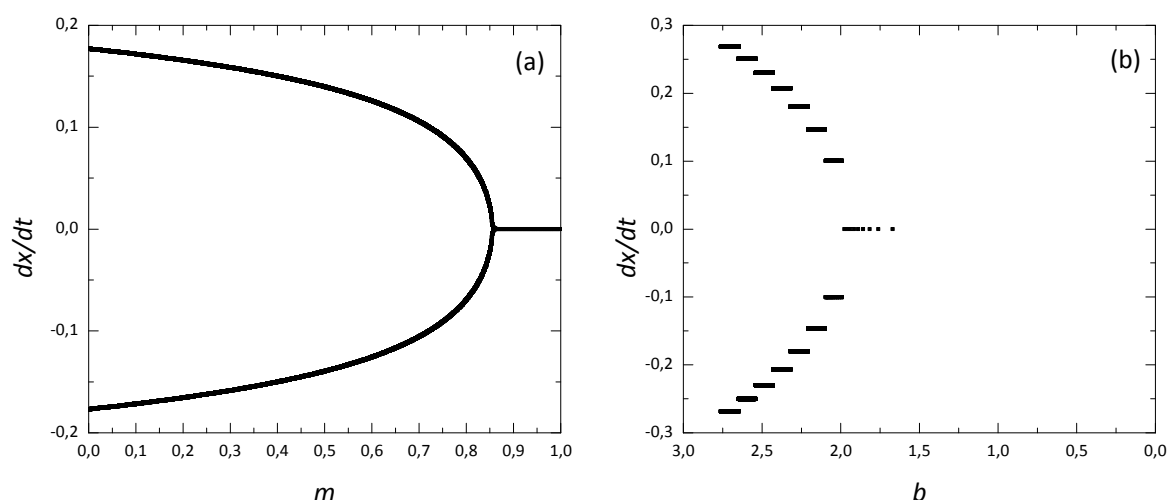


Figura 2-46 Diagramas de bifurcación para la variable  $dx/dt$  del NIPKR [cf. Ec. (2.111)] con  $\eta=0.2$ ,  $F=1$  y  $T=5.52$  sometido a : (a) pulsos denam [cf. Ec.(2.170)] , con  $m$  en el intervalo  $0 < m < 1$  y (b) pulsos rectangulares [cf. Ec. (2.172)] con  $b$  en el intervalo  $b(m=1,T) < b < b(m=0,T)$  [cf. Ec. (2.177)].

### 2.5.5 Caracterización numérica de una ruta orden-caos bajo cambios en la forma de onda del pulso

El objeto del presente apartado es caracterizar numéricamente una ruta orden-caos del *kicked rotator* amortiguado sometido a pulsos periódicos no ideales (NIPKR), bajo cambios únicamente en la forma de onda del pulso de la excitación paramétrica. La ecuación del oscilador ya estudiado en apartados anteriores es:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \frac{\text{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \text{sen } x = 0. \tag{2.178}$$

El valor del coeficiente normalizado de amortiguamiento  $\eta=0.2$ , de la amplitud del pulso  $F=1.0$  y del periodo  $T=5.52$  se han elegido de manera que el oscilador se encuentre en estado caótico cuando está sometido a pulsos trigonométricos ( $m=0$ ) y presente una dinámica rica y variada conforme el pulso se estrecha incrementando el valor de  $m$ , hasta que en el límite  $m=1$  el oscilador alcance la solución estacionaria de equilibrio, ( $x=0, \dot{x}=0$ ). El diagrama de bifurcación global se muestra en la Fig. 2-47 (b); en él se representa la segunda componente de la aplicación de Poincaré en función de  $m$  para un paso  $\Delta m=0.001$ . Para cada valor de  $m$  y partiendo de unas condiciones iniciales fijas, tras un transitorio de 500 ciclos, se muestrean un total de 40 puntos de la aplicación de Poincaré. Junto al diagrama de bifurcación se muestra en la Fig. 2-47 (a) el exponente maximal de Lyapunov vs.  $m$  con el mismo paso que el diagrama de bifurcación  $\Delta m=0.001$  y verificando previamente la convergencia de su cálculo. Los valores del exponente maximal de Lyapunov calculados corroboran en todo punto la estructura del diagrama de bifurcación, las regiones caóticas con exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  positivo, y en las

zonas de comportamiento regular, la inestabilidad origen de los distintos puntos de bifurcación se manifiesta con el crecimiento del primer exponente  $\lambda_1$  desde valores negativos hasta alcanzar el valor nulo en los puntos de bifurcación.

El estudio numérico se ha realizado mediante técnicas numéricas usuales: series temporales, trayectorias en el espacio de fases, aplicaciones de Poincaré, espectros de potencia y exponentes de Lyapunov. Para el cálculo de exponentes de Lyapunov se ha utilizado el algoritmo descrito en [BGS76] y usado en [WSSV85], como integrador se utilizó un Runge Kutta de 4º orden según las rutinas estándares [Pre92]. En todos los casos se ha utilizado un paso de integración  $h=T/40$ .

A continuación caracterizaremos la ruta caos orden en sentido creciente de  $m$ :

En el intervalo  $0 \leq m < 0.268$  el oscilador se encuentra en un estado de caos estacionario a gran escala, el exponente maximal de Lyapunov es positivo y alcanza sus valores máximos. En la Fig. 2-48 se muestra el caso trigonométrico  $m=0$ : el atractor ocupa una extensa región del espacio de fases, la aplicación de Poincaré es un atractor extraño, un conjunto fractal en el que se aprecia una estructura autosimilar. El espectro de potencia es el característico de comportamiento caótico.

En  $m=m_{ic}=0.268$  el sistema experimenta una crisis interior inversa (*inverse interior crisis*, ver v.g.[Ott93]) visitando el atractor caótico una región más limitada del espacio de fases, comportamiento que se mantiene en el intervalo  $0.268 \leq m < 0.507$ . La Fig. 2-49 ilustra el caso  $m=0.4$  donde existe un atractor caótico simétrico en la aplicación de Poincaré. Además la moderada sincronía con el subarmónico  $\omega/2$  que muestra el espectro de potencia se traduce en que en la aplicación de Poincaré el atractor está compuesto por dos tramos. Una crisis se produce cuando un atractor caótico colisiona con una órbita periódica inestable o equivalentemente con su variedad estable, la crisis es interior si la órbita periódica inestable con la que el atractor colisiona se encuentra en el interior de su cuenca de atracción, de ahí su denominación. En nuestro caso cuando el valor de parámetro de control,  $m$ , se incrementa hasta un valor crítico  $m_{ic}=0.268$  el atractor reduce repentinamente su tamaño y el número de puntos diseminados en la aplicación de Poincaré se reduce drásticamente, indicando atenuación de la dinámica caótica. Para  $m$  ligeramente menor que  $m_c$ , el sistema exhibe intermitencia inducida por crisis (*crisis-induced intermittency*), es decir, el oscilador visita durante largos períodos de tiempo la región del espacio de fases en la que el atractor se encuentra confinado después de la crisis inversa ( $m > m_{ic}$ ). Nótese en el diagrama de bifurcación cómo la banda del atractor caótico reducido parece penetrar en la región donde el atractor caótico es más extenso (véase la Fig. 2-47(b)). Al final de estos largos periodos el oscilador sale bruscamente de la región reducida y se extiende caóticamente en la región más extensa, debido a la crisis interior. Luego la órbita vuelve a la antigua región durante un cierto tiempo, volviendo a escapar a la región extensa y así sucesivamente. A medida que  $m$  se hace menor que  $m_{ic}$ , los tiempos que emplea la órbita en

visitar la región reducida del espacio de fases se reducen. En resumen, se trata de una intermitencia del tipo:  $(\text{caos})_1 \rightarrow (\text{caos})_2 \rightarrow (\text{caos})_1 \rightarrow (\text{caos})_2 \rightarrow \dots$ .

En  $m=m_{\text{iamc}}=0.507$  tiene lugar una crisis inversa por combinación (*inverse attractor merging crisis*, ver v.g.[Ott93]) desdoblándose el atractor caótico simétrico que existía para  $m < m_{\text{iamc}}$  en dos atractores caóticos asimétricos para  $m < m_{\text{iamc}}$ . En el diagrama de bifurcación (véase la Fig. 2-47(b)) solo se aprecia uno de los dos atractores asimétricos pues la condición inicial elegida cae en la cuenca de atracción de uno de ellos. Este tipo de crisis se produce por la colisión de dos o más atractores caóticos, en este caso asimétricos, con una órbita periódica inestable en la frontera que separa sus cuencas de atracción, dando lugar a un único atractor caótico, en este caso simétrico. La simetría del NIPKR de ecuación (2.178) respecto a la transformación  $(x \rightarrow -x)$ , supone que si  $[x(t), dx(t)/dt]$  es una solución de su ecuación,  $[-x(t), -dx(t)/dt]$  también lo es, de manera que las soluciones pueden ser o bien simétricas o bien si son asimétricas aparecen por pares mutuamente simétricas. En el intervalo  $0.507 \leq m < 0.599$  la extensión del atractor caótico se reduce aún más y se ha detectado caos tipo *phase locked*. Se trata de un comportamiento caótico de tipo débil (primer exponente de Lyapunov es positivo y pequeño), guarda sincronía con la excitación (nótese la memoria de la órbita regular, picos agudos en el espectro de potencia de la Fig. 2-50, que representa una clara sincronía con el subarmónico  $\omega/2$ ) y se caracteriza por que su espectro de potencia tiende a cero para frecuencias pequeñas,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(\omega)| = 0$  [HYK85, KM86]. En el entorno de  $m_{\text{iamc}}$  se ha detectado intermitencia inducida por crisis como cabría esperar [GOR87]. La Fig. 2-50, que muestra el caso  $m=0.525$ , ejemplifica el comportamiento del oscilador en este intervalo. Obsérvese la asimetría del atractor comparado con el mostrado en la Fig. 2-49.

En el intervalo  $0.599 \leq m < 0.956$  se produce una típica secuencia de duplicación de periodo en sentido inverso, las órbitas periódicas son asimétricas con periodos  $2^n T$ . Notar cómo los puntos de bifurcación  $m_i = \{0,608, 0,641, 0,756, 0,956\}$  observados en el diagrama de bifurcación (véase la Fig. 2-47(a)) son confirmados por el comportamiento del exponente de Lyapunov en el entorno de dichos puntos (véase la Fig. 2-47(b)). El atractor asimétrico  $2T$ -periódico recupera la simetría en  $m=0.956$ . En  $0.956 \leq m < 1-10^{-7}$  el atractor simétrico  $2T$ -periódico reduce su tamaño y en  $m=1-10^{-7}$  se inestabiliza, siendo el atractor a partir de ese valor de  $m$  y hasta  $m=1$  la solución estacionaria de equilibrio,  $(x=0, \dot{x}=0)$ , como cabría esperar basándonos en el carácter disipativo del oscilador y en la forma funcional del pulso en el límite  $m \rightarrow 1$ . A modo de ejemplo del comportamiento del oscilador en el intervalo  $0.599 \leq m < 0.956$ , la Fig. 2-51 muestra una órbita  $16T$ -periódica de carácter asimétrico que tiene lugar cuando  $m=0.605$ ; nótese como el espectro de potencia refleja tal periodicidad.

Finalmente, para clarificar las dos situaciones en las que se produce un cambio de simetría, en  $m=0.956$ , donde tiene lugar una bifurcación entre una órbita  $2T$ -periódica asimétrica y una  $2T$ -simétrica, y en  $m=m_{\text{iamc}}=0.507$  donde tiene lugar la crisis inversa por combinación, se incluyen las Figs. 2-52 y 2-53 en la que se muestran órbitas en el espacio de fases y aplicaciones de Poincaré en el entorno de dichos valores.

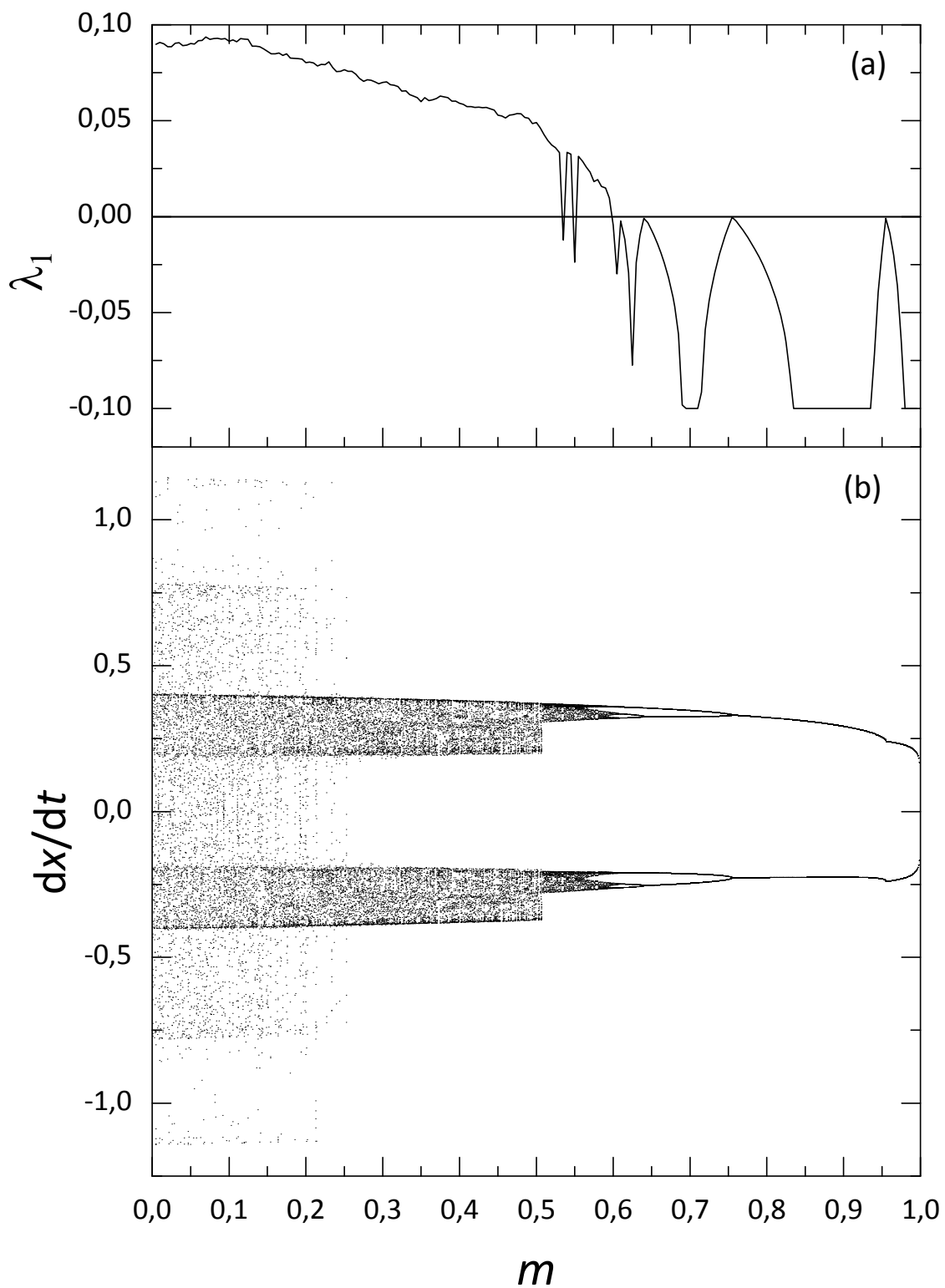


Figura 2-47 (a) Exponente maximal de Lyapunov vs.  $m$  (b) Diagrama de bifurcación que representa la segunda componente de la aplicación de Poincaré ( $dx/dt$ ) vs.  $m$ .  $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional. ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ).

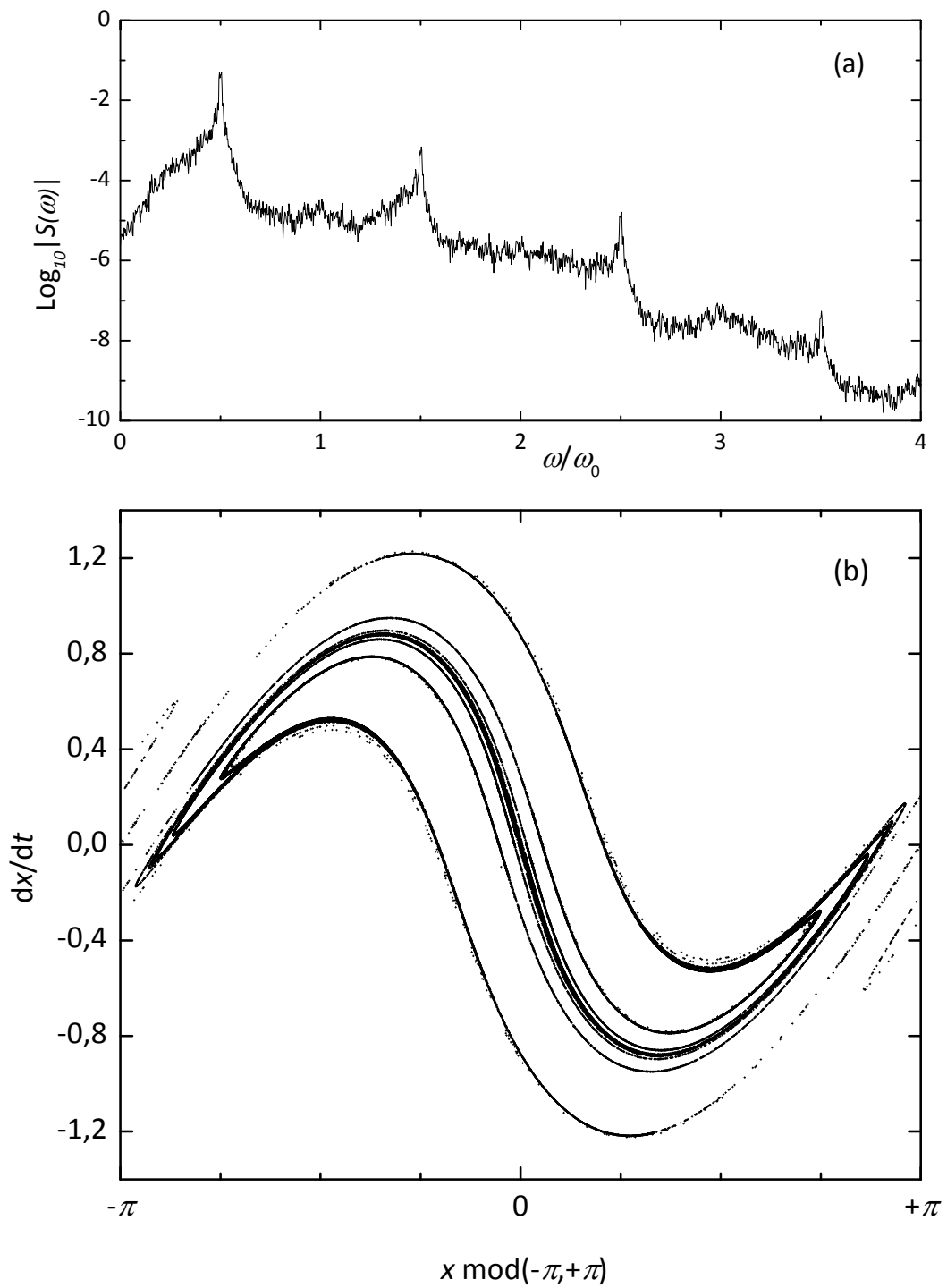


Figura 2-48 Caso  $m=0$ : Caos estacionario ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia (b) Aplicación de Poincaré. (x en unidades arbitrarias y t adimensional)

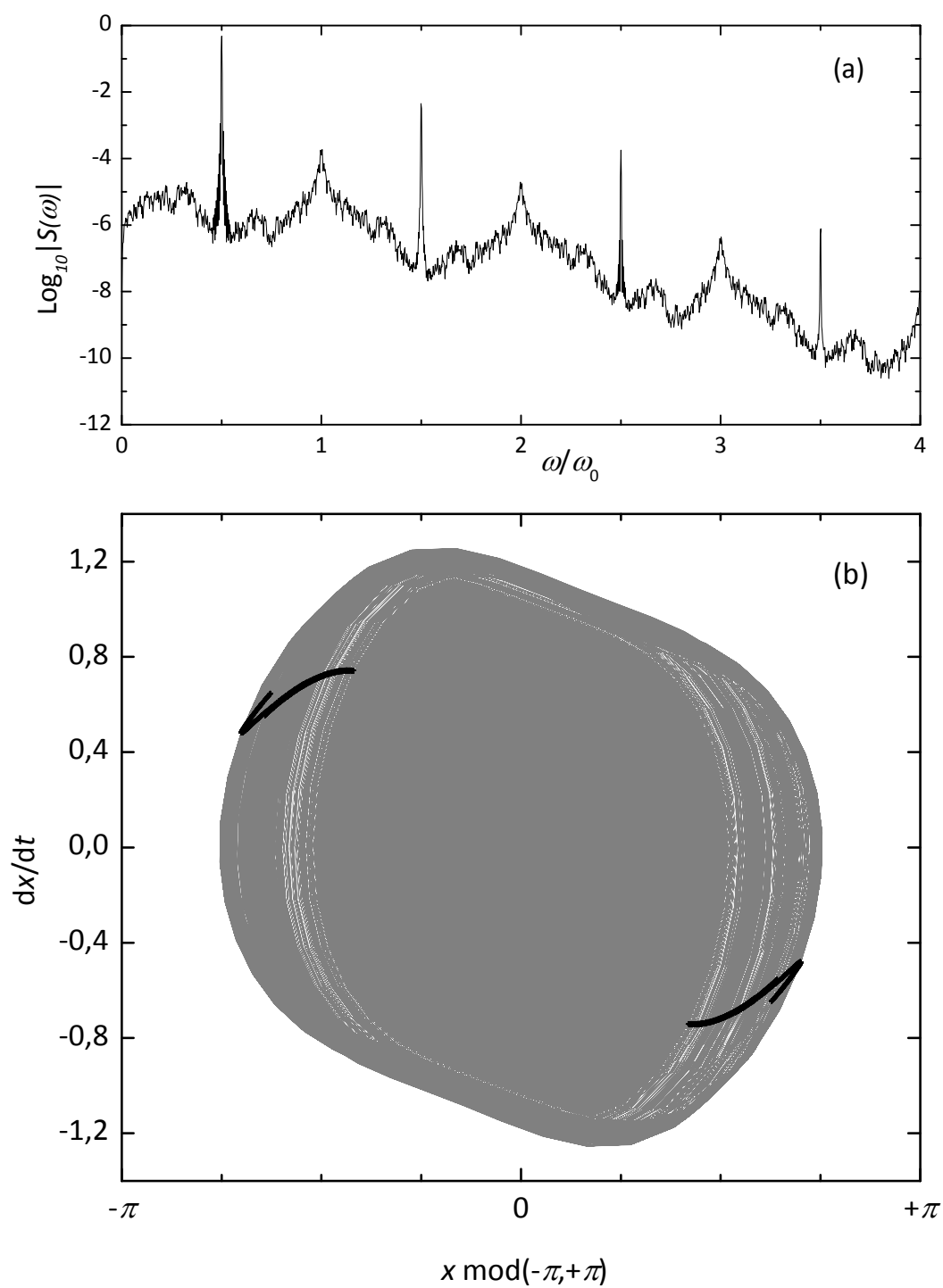


Figura 2-49 Caso  $m=0.4$ : Atractor caótico simétrico ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia. Nótese la sincronía con el subarmónico  $\omega/2$  (b) Aplicación de Poincaré (■) y órbitas en el espacio de fases (-). ( $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional)

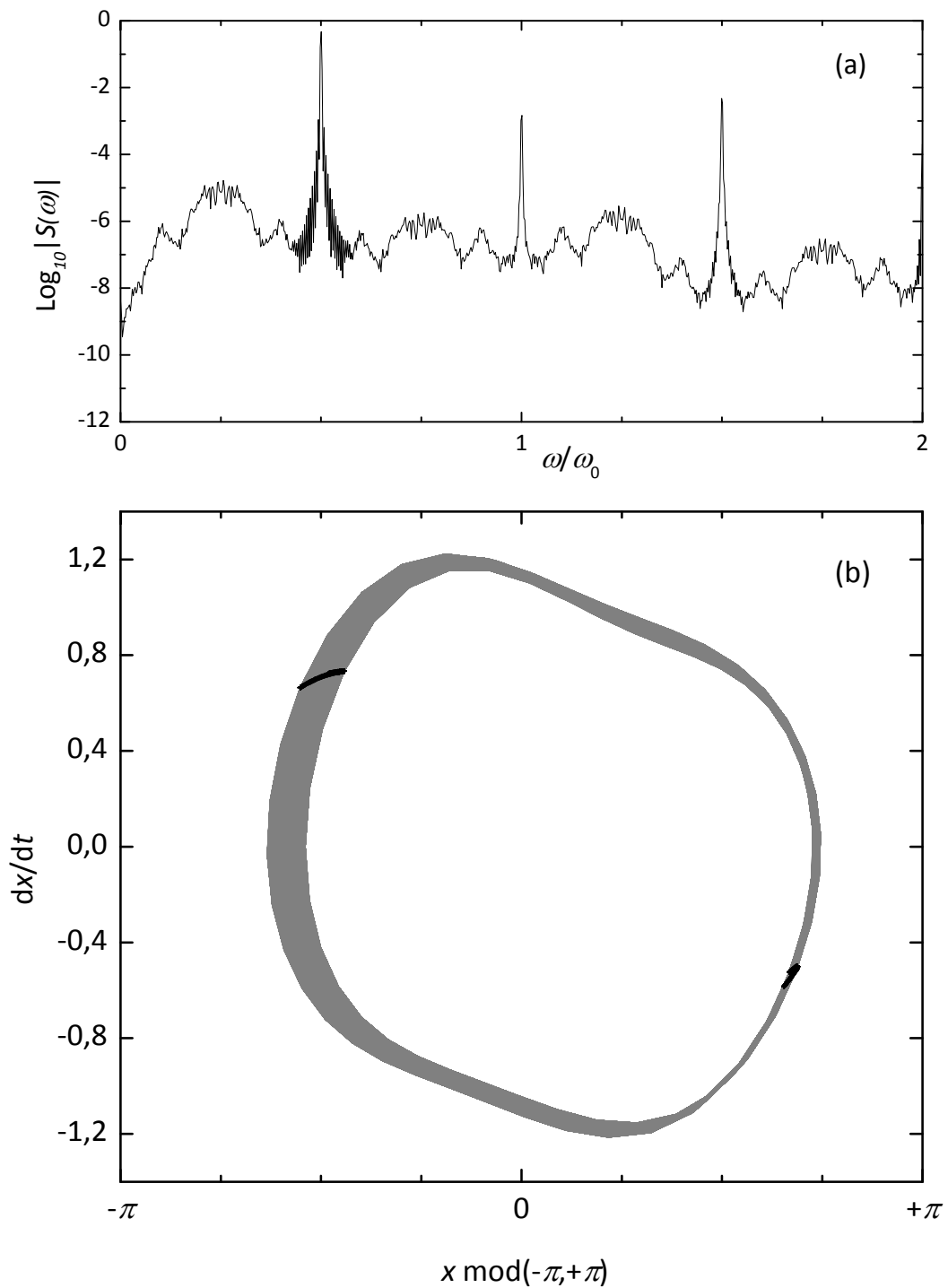


Figura 2-50 Caso  $m=0.4$ : Atractor caótico asimétrico, caos tipo *phase locked* ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia. Nótese la sincronía con el subarmónico  $\omega/2$  y  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(\omega)|=0$  característico del caos tipo *phase-locked* (b) Aplicación de Poincaré (■) y órbitas en el espacio de fases (-). ( $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional)

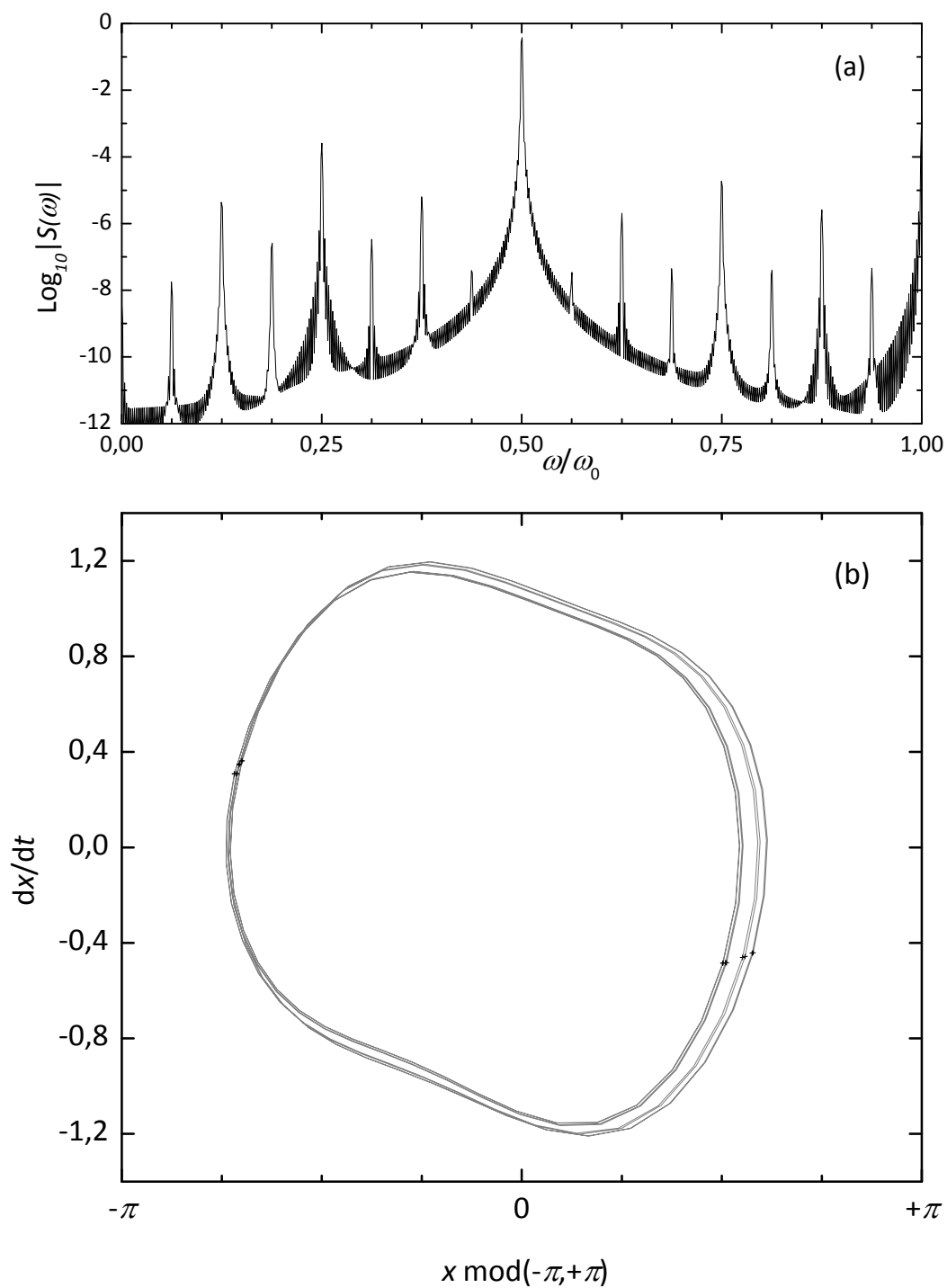


Figura 2-51 Caso  $m=0.525$ : Órbita 16 $T$ -periódica asimétrica ( $\eta=0.2$ ,  $F=1.0$  y  $T=5.52$ ). (a) Espectro de potencia (b) Aplicación de Poincaré (+) y órbitas en el espacio de fases (-). ( $x$  en unidades arbitrarias y  $t$  adimensional)



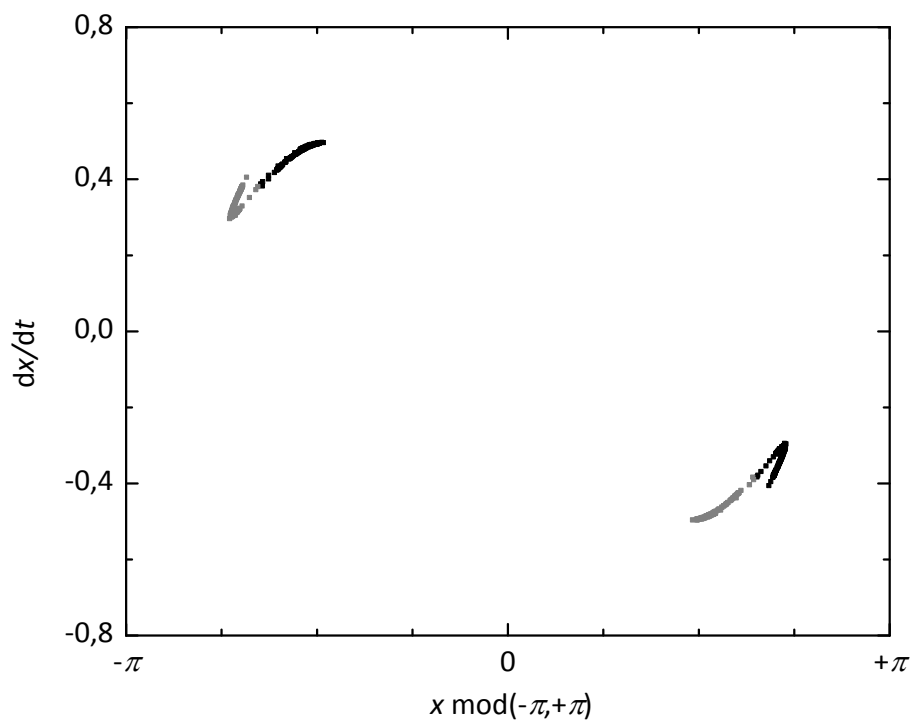


Figura 2-52 Crisis inversa por combinación (*inverse attractor merging crisis*). Se muestran los dos atractores caóticos asimétricos, mutuamente simétricos, obtenidos a partir de la aplicación de Poincaré para el caso  $m=0.508$  ( $m > m_{iamc}=0.507$ ) para dos condiciones iniciales en distintas cuencas de atracción, cuya colisión con una órbita periódica inestable en el contorno que separa ambas cuencas provoca la aparición de un atractor caótico simétrico de mayor tamaño como el mostrado en la Fig. 2-49 con  $m < m_{iamc}$ .

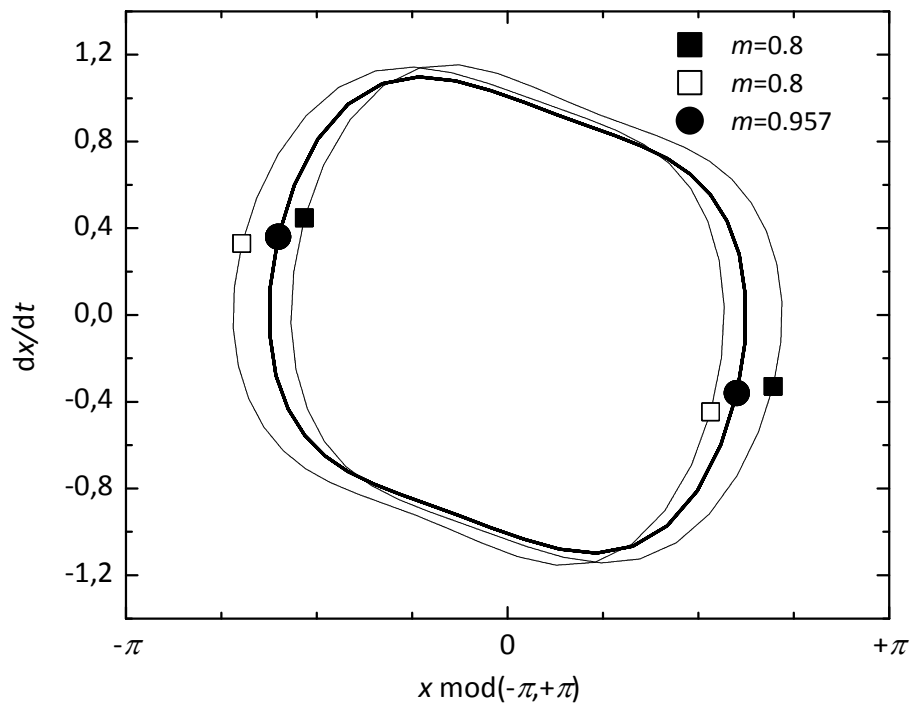


Figura 2-53 Bifurcación por rotura de simetría en el entorno de  $m=0.956$ . Órbitas en el espacio de fases y aplicación de Poincaré, las dos órbitas  $2T$ -periódicas asimétricas ( $m=0.8$ ), simétricas entre sí, colisionan para dar lugar a una órbita  $2T$ -periódica simétrica ( $m=0.957$ ).



## Capítulo 3

# ESTABILIDAD DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS

### 3.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el análisis la estabilidad estructural de las soluciones estacionarias (puntos fijos) de los osciladores estudiados en el capítulo anterior, bajo cambios en la forma de onda de la excitación temporal mediante la técnica del balance armónico elíptico. La pertinencia del análisis, en el contexto de la teoría de control de la dinámica caótica, se basa en que la inestabilidad de tales soluciones estacionarias puede ser el inicio, en algunos casos, de la desestabilización global del sistema que puede llevar a éste a un estado caótico.

El método del balance armónico clásico es una técnica muy sencilla que permite obtener soluciones analíticas periódicas aproximadas de osciladores no lineales. En el presente trabajo se utiliza una generalización elíptica de dicho método en el que las soluciones se aproximan por una suma de armónicos elípticos, similares a las soluciones del oscilador no lineal sin perturbar, en lugar de la suma de armónicos circulares usada en el balance armónico clásico y que son similares a la solución de un oscilador lineal. Las simulaciones numéricas llevadas a cabo para comprobar la validez de los resultados analíticos muestran una concordancia muy aproximada con éstos. Por último, y para explicar las situaciones observadas en las que la inestabilidad inducida por el cambio de forma de onda de la perturbación se resuelve con una crisis inversa de contorno, se estudia una aplicación elíptica que permite explicar el origen de dicha crisis.

## 3.2 Balance armónico elíptico (BAE)

### 3.2.1 Métodos perturbativos elípticos

Los métodos perturbativos elípticos han surgido como una generalización de los métodos perturbativos clásicos, en los que las funciones elípticas sustituyen a las circulares empleadas en estos últimos. Notar que las funciones circulares son casos particulares de las funciones elípticas. Los métodos perturbativos elípticos han sido extensamente usados en el estudio de sistemas dinámicos no lineales autónomos y no autónomos, especialmente en casos de fuerte alinealidad, y en general suelen mejorar los resultados de los métodos perturbativos clásicos a igualdad de orden de aproximación.

Desde que Davis en los años 60 ya uso las funciones elípticas en el análisis de osciladores no lineales [Dav62], se han desarrollado distintos métodos perturbativos elípticos entre los que cabe citar: el método Krilov-Bogoliuvov elíptico [BS69], el balance armónico elíptico [BYDB86, GMDB<sup>+</sup>88], el método Krilov-Bogoliuvov-Mitropolsky elíptico [QD96], el método perturbativo elíptico [CC96] y el método de Lindsted-Poincaré elíptico [CC97]. Estas revisiones de los métodos perturbativos clásicos han permitido resolver problemas fuertemente no lineales: el método de Lindsted-Poincaré elíptico en el caso de osciladores autoexcitados [BFE00], el método perturbativo elíptico en el estudio de una ecuación generalizada de un oscilador de Rayleigh [WVH03] y el método Krilov-Bogoliuvov elíptico en el estudio de osciladores con dos grados de libertad [Cve01] y en el estudio de osciladores no autónomos [OK09, Roy94]. Métodos similares se han utilizado en el estudio de ecuaciones de onda no lineales [YWZ07, Zha07].

### 3.2.2 Balance armónico elíptico

El balance armónico elíptico (BAE), que fue propuesto inicialmente por Bravo Yuste y Díaz Bejarano [BYDB86]. Surge como una generalización del balance armónico circular (BAC) [Mic84], y, de manera similar a éste, la solución se obtiene como suma de armónicos elípticos que son determinados por balance armónico. Más tarde, Yuste, Bejarano y Margallo introducen distintas mejoras al método [BY92, GMDB<sup>+</sup>88] y lo aplican al estudio de los ciclos límite de un oscilador de Van der Pol [GMDB90] y de un oscilador de Rayleigh-Lienard [GMDB92]. Chacón y Martínez García Hoz lo usan para estudiar la estabilidad de soluciones estacionarias de un oscilador de Duffing de dos pozos [CMGH99] y de un *kicked rotator* [CMGH03]. Chen *et al.* aplican el balance armónico elíptico al estudio de un sistema de osciladores autoexcitados de dos grados de libertad [CL09]. Otras aplicaciones del método pueden verse en las referencias [BL00, Eli05, Eli06].

El método de balance armónico circular (BAC) [HS88, Mic84] es un método muy sencillo para obtener soluciones analíticas periódicas aproximadas de osciladores no lineales. Si consideramos la aproximación de primer orden, utilizando solo el primer armónico en la solución, los resultados serán buenos mientras que el comportamiento del oscilador pueda aproximarse a un comportamiento armónico y por tanto lineal, como por ejemplo en el caso de las oscilaciones de un péndulo de pequeña amplitud. En efecto, en primer orden la solución exacta  $x(t)$  se aproxima por una solución prueba cosenoidal  $\tilde{x}(t) = A \cos(\omega t)$  donde los coeficientes  $A$  y  $\omega$  se eligen de acuerdo con el principio de balance armónico: la solución de prueba  $\tilde{x}(t)$  debe verificar la ecuación del oscilador no lineal,

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0, \quad (3.1)$$

en su primer armónico. Es decir, el primer armónico de  $\ddot{x}$  debe coincidir con el primer armónico de  $-F(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ . En primer orden, el método de balance armónico consiste en determinar el coeficiente  $A$  y la función  $\varphi(t) = \omega t$  de manera que la solución prueba  $\tilde{x}(t) = A \cos \varphi$  satisfaga la ecuación (3.1) en su primer armónico. Pero si  $x(t)$  no se aproxima a una función cosenoidal, no existe elección posible de  $A$  y  $\omega$  que permitan que  $x(t)$  se pueda aproximar por  $\tilde{x}(t)$ ; en otras palabras  $\tilde{x}(t) = A \cos(\omega t)$  no es una buena solución de prueba.

La aproximación de la solución en primer orden será mejor si utilizamos una clase general de funciones periódicas que incluyan las funciones circulares como caso particular. Bravo Yuste *et al.* en una serie de trabajos [BY89a, BY89b, BY92, BYDB87, BYDB89, GMDB<sup>+</sup>88] usaron como solución de prueba de (3.1) la expresión  $\tilde{x}(t) = A \operatorname{cn}(\omega t; m) \equiv A \cos \varphi$ , donde  $\varphi = \operatorname{am}(\omega t; m)$  siendo  $\operatorname{cn}$  y  $\operatorname{am}$  las funciones  $\operatorname{cosam}$  y amplitud elíptica, respectivamente. La aparición de un nuevo parámetro, el parámetro elíptico  $m$ , que gobierna la forma de onda de dichas funciones, añade un nuevo grado de libertad al posible ajuste entre la solución exacta  $x(t)$  y la solución de prueba  $\tilde{x}(t)$ . Es claro que la aproximación de la solución en ningún caso será peor que la obtenida con la solución prueba cosenoidal ya que si elegimos  $m=0$  recuperamos dicha solución habida cuenta que  $\operatorname{cn}(u; m=0) \equiv \cos(u)$ .

El método BAE formulado en las referencias [BYDB86, GMDB<sup>+</sup>88] es muy similar al método de balance armónico clásico (BAC). En ambos se considera como solución de prueba de la ecuación del oscilador no lineal:

$$\tilde{x}(t) = \sum A_n \cos(n\varphi) + \sum B_n \operatorname{sen}(n\varphi). \quad (3.2)$$

De acuerdo con el principio de balance armónico se determinan los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  y la función  $\varphi(t)$  de manera que  $\tilde{x}(t)$  satisfaga la ecuación del oscilador no lineal al menos en los armónicos más importantes. La diferencia entre los dos métodos es que  $\varphi(t) = \omega t$  es una función lineal en el caso del BAC, mientras que en el caso del BAE  $\varphi = \operatorname{am}(\omega t; m)$  es una función no lineal (véase la Fig. 3-1) que depende de dos parámetros  $\omega$  y  $m$ . Esta función solo es lineal en el caso

$m=0$  en cuyo caso ambos métodos coinciden. Por extensión el conjunto de funciones  $\{\cos(n\varphi), \text{sen}(n\varphi)\}$  donde  $\varphi = \text{am}(\omega t; m)$  se denominará conjunto de armónicos elípticos.

### 3.2.3 Series generalizadas de Fourier

En este apartado se obtendrá la expansión de una función periódica  $f(\tau)$ , de periodo  $4K(m)$ , en términos de los armónicos elípticos:

$$\cos_0(\tau; m) \equiv 1, \quad \cos_n(\tau; m) \equiv \cos(n\varphi), \quad \text{sen}_n(\tau; m) \equiv \text{sen}(n\varphi), \quad (3.3)$$

donde  $\varphi = \text{am}(\tau; m)$ ,  $m < 1$  y  $n=1, 2, \dots$

La serie de Fourier de  $f(\tau)$  en términos de  $\cos(n\varphi)$  y  $\text{sen}(n\varphi)$  es:

$$f(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \text{sen}(n\varphi)], \quad (3.4)$$

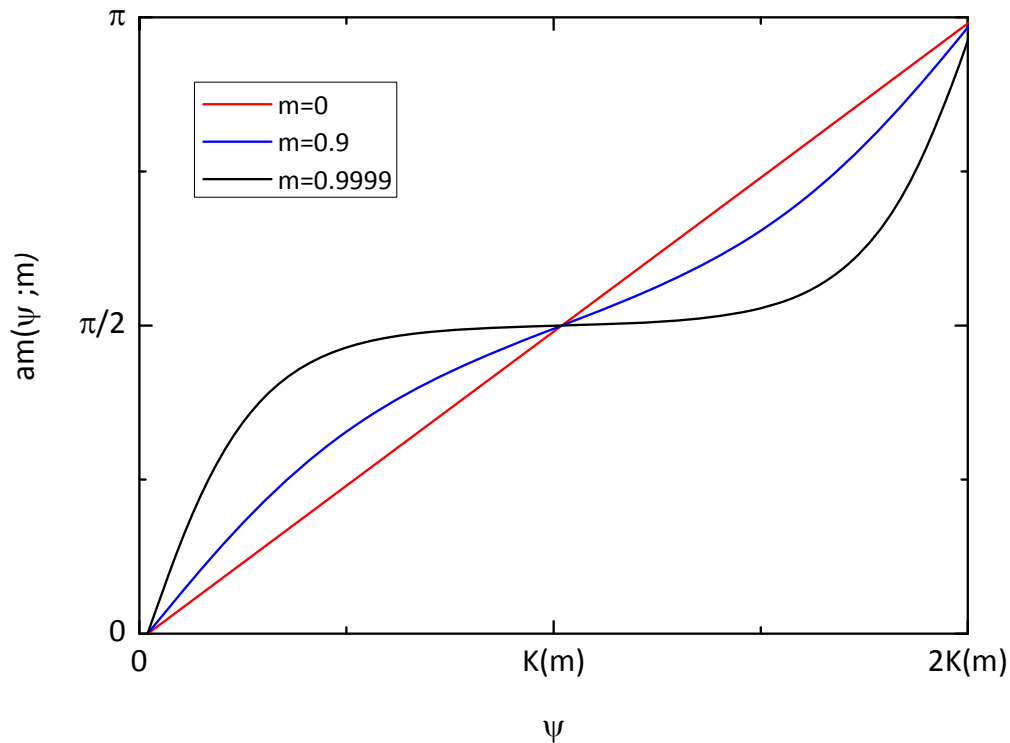


Figura 3-1 Función amplitud  $\text{am}(\psi; m)$  para distintos valores de  $m$  con  $\psi$  en el intervalo  $[0, 2K(m)]$ . Este intervalo es suficiente para mostrar la función  $\text{am}(\psi; m)$ , ya que  $\text{am}(\psi+2K; m) = \pi + \text{am}(\psi; m)$ .

cuyos coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_n(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi; m) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ b_n(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi; m) \operatorname{sen}(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En lugar de utilizar la función inversa  $\tau = \operatorname{am}^{-1}(\varphi; m)$  para expresar  $f(\tau)$  como  $f(\varphi; m)$  y determinar los coeficientes mediante el cálculo de las correspondientes integrales, se usará la serie generalizada de Fourier de  $f(\tau)$  en términos de los armónicos elípticos.

En efecto, el conjunto de armónicos elípticos  $\{\operatorname{cos}_0(\tau; m), \operatorname{cos}_n(\tau; m), \operatorname{sen}_n(\tau; m)\}$  con  $n=1, 2, \dots$  constituye un conjunto ortogonal y completo de funciones y por tanto es susceptible de ser utilizado como conjunto generador de un espacio funcional. La serie generalizada de Fourier de  $f(\tau)$  es entonces:

$$f(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \operatorname{cos}_n(\tau; m) + b_n \operatorname{sen}_n(\tau; m)] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \operatorname{cn}(n\tau; m) + b_n \operatorname{sn}(n\tau; m)]. \quad (3.6)$$

Para el cálculo de sus coeficientes se hace el cambio de variable  $\varphi = \operatorname{am}(\tau; m)$  en (3.5) y se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} f(\tau) \operatorname{cos}_n(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) d\tau \\ b_n(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} f(\tau) \operatorname{sen}_n(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde se ha utilizado [Abr72]:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d[\operatorname{am}(\tau; m)]}{d\tau} = \operatorname{dn}(\tau; m). \quad (3.8)$$

A continuación se obtendrán las series de Fourier generalizadas de distintas funciones que aparecerán por la aplicación del BAE a distintos osciladores en el presente capítulo.

En la Fig. 3-2 se representan las funciones  $\operatorname{sn}(\tau; m)$ ,  $\operatorname{cn}(\tau; m)$  y  $\operatorname{dn}(\tau; m)$  en el intervalo  $[0, 4K(m)]$ , donde se observa la paridad de las funciones en torno a  $\tau = 2K(m)$ , verificándose:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2K(m) + \tau; m) &= -\operatorname{sn}(2K(m) - \tau; m) \\ \operatorname{cn}(2K(m) + \tau; m) &= +\operatorname{cn}(2K(m) - \tau; m) \\ \operatorname{dn}(2K(m) + \tau; m) &= +\operatorname{dn}(2K(m) - \tau; m) \end{aligned} \quad (3.9)$$

y la paridad en el intervalo  $[0, 2K(m)]$  en torno a  $\tau = K(m)$ :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}(K(m) + \tau; m) &= +\operatorname{sn}(K(m) - \tau; m), \\
 \operatorname{cn}(K(m) + \tau; m) &= -\operatorname{cn}(K(m) - \tau; m), \\
 \operatorname{dn}(K(m) + \tau; m) &= +\operatorname{dn}(K(m) - \tau; m).
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Estas igualdades, que pueden ser obtenidas a partir de las fórmulas de adición de las funciones elípticas de Jacobi consideradas, junto con la periodicidad de tales funciones, simplifican notablemente el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier generalizadas que se determinan a continuación.

### 1) Serie de Fourier generalizada de la función $\operatorname{dn}(\tau; m)$ :

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned}
 a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{dn}^2(\tau; m) d\tau = \frac{1}{\pi} [E(\operatorname{am}(\tau; m), m)]_0^{4K} = \frac{4E(m)}{\pi}, \\
 a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) d\tau = 0, \\
 b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) d\tau = 0,
 \end{aligned}$$

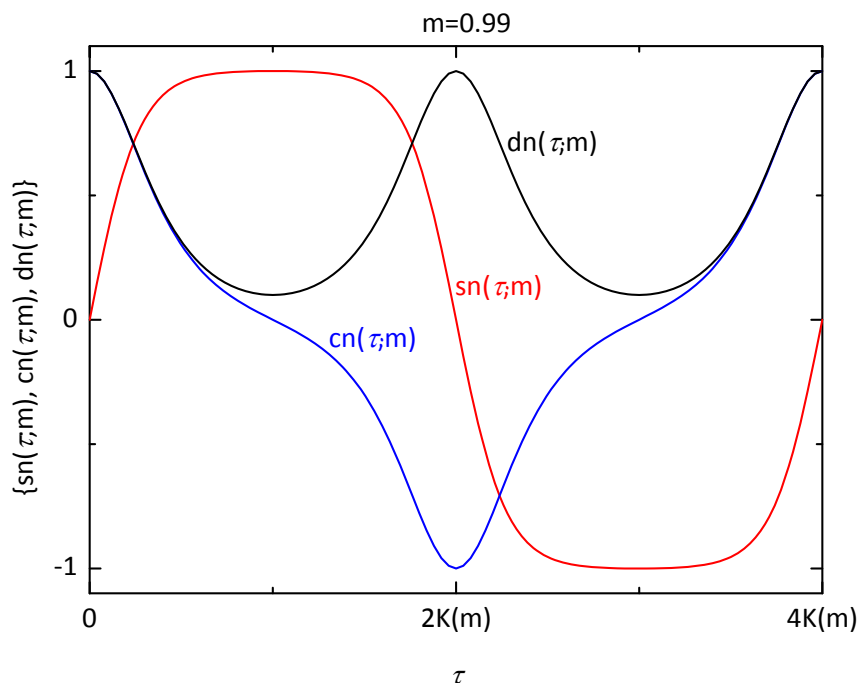


Figura 3-2 Funciones  $\operatorname{sn}(\tau; m)$ ,  $\operatorname{cn}(\tau; m)$  y  $\operatorname{dn}(\tau; m)$  en el intervalo  $[0, 4K(m)]$  para un valor fijo de  $m$ . Observar la paridad en el intervalo  $[0, 4K(m)]$  en torno a  $\tau=2K(m)$  [cf. Ec. (3.9)] y en el intervalo  $[0, 2K(m)]$  en torno a  $\tau=K(m)$  [cf. Ec. (3.10)].



donde  $E(m)$  y  $E(\tau; m)$  son las integrales elípticas de segunda especie, completa e incompleta, respectivamente. Las dos integrales nulas lo son por motivos de paridad en el intervalo de integración; en cuanto a la no nula, se ha resuelto usando las tablas de integrales [GRJ00] y teniendo en cuenta que  $E(\text{am}(4K(m); m), m) = E(2\pi; m) = 4K(m)$  y  $E(\text{am}(0; m), m) = E(0; m) = 0$ .

Por tanto, la serie de Fourier generalizada de  $\text{dn}(\tau; m)$  en primer orden es:

$$\begin{aligned} \text{dn}(\tau; m) &= a_0(m) + \dots, \\ a_0(m) &= \frac{2E(m)}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 2) Serie de Fourier generalizada de la función $\text{cn}^3(\tau; m)$

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{cn}^3(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{cn}^4(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = \frac{3}{4}, \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{cn}^3(\tau; m) \text{sn}(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = 0. \end{aligned}$$

De manera que la serie generalizada de Fourier de  $\text{cn}^3(\tau; m)$  es:

$$\text{cn}^3(\tau; m) = \frac{3}{4} \text{cn}(\tau; m) + \dots \quad (3.12)$$

La primera y la tercera integral definida que determinan los coeficientes  $a_0(m)$  y  $b_1(m)$  son nulas por la paridad del integrando en el intervalo de integración. Y la segunda integral se resuelve por integración recursiva por partes y usando las relaciones básicas entre funciones elípticas de Jacobi:

$$a_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{cn}^4(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = \frac{3}{8\pi} [\text{am}(\tau; m) + \text{cn}(\tau; m) \text{sn}(\tau; m)]_0^{4K(m)} = \frac{3}{4}.$$

### 3) Serie de Fourier generalizada de la función $\text{sn}^3(\tau; m)$

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^3(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^3(\tau; m) \text{cn}(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = 0, \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^4(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

De manera que la serie generalizada de Fourier de  $\text{sn}^3(\tau; m)$  es:

$$\text{sn}^3(\tau; m) = \frac{3}{4} \text{sn}(\tau; m) + \dots \quad (3.13)$$

Las dos primeras integrales definidas que determinan los coeficientes  $a_0(m)$  y  $a_1(m)$  son nulas por la paridad del integrando en el intervalo de integración. Y la tercera integral se resuelve por integración recursiva por partes.

#### 4) Serie de Fourier generalizada de la función $\text{sn}(\tau; m)\text{dn}(\tau; m)$

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}(\tau; m) \text{dn}^2(\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}(\tau; m) \text{cn}(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) d\tau = 0, \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^2(\tau; m) \text{dn}^2(\tau; m) d\tau = \frac{4}{3\pi m} [(2m-1)E(m) + (1-m)K(m)], \end{aligned}$$

donde  $K(m)$  y  $E(m)$  son las integrales elípticas completas de primera y segunda especie, respectivamente.

Las dos primeras integrales nulas lo son por motivos de paridad en el intervalo de integración en cuanto a la tercera, usando la relación  $\text{dn}^2(\tau; m) = 1 - m\text{sn}^2(\tau; m)$ :

$$b_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^2(\tau; m) \text{dn}^2(\tau; m) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^2(\tau; m) d\tau - \frac{m}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^4(\tau; m) d\tau.$$

Usando las tablas de integrales [GRJ00] e integrando por partes de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \int \text{sn}^2(\tau; m) d\tau &= \frac{1}{m} [\tau - E(\text{am}(\tau; m), m)], \\ \int \text{sn}^4(\tau; m) d\tau &= \frac{1}{3m} [-\tau + \text{sn}(\tau; m) \text{cn}(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) + 2(1+m) \int \text{sn}^2(\tau; m) d\tau], \end{aligned}$$

donde  $E(u; m)$  es la integral elíptica incompleta de segunda especie. Evaluando las integrales definidas se obtiene:

$$b_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \text{sn}^2(\tau; m) \text{dn}^2(\tau; m) d\tau = \frac{4}{3\pi m} [(2m-1)E(m) + (1-m)K(m)].$$

Por tanto la serie de Fourier generalizada de  $\text{sn}(\tau; m)\text{dn}(\tau; m)$  en primer orden es:

$$\begin{aligned} \text{sn}(\tau; m) \text{dn}(\tau; m) &= b_1(m) \text{sn}(\tau; m) + \dots, \\ b_1(m) &= \frac{4}{3\pi m} [(2m-1)E(m) + (1-m)K(m)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

**5) Serie de Fourier generalizada de la función  $cn(\tau; m)dn(\tau; m)$**

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} cn(\tau; m) dn^2(\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} cn^2(\tau; m) dn^2(\tau; m) d\tau = \frac{4}{3\pi m} [(1+m)E(m) - (1-m)K(m)], \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} sn^2(\tau; m) dn^2(\tau; m) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Las dos integrales nulas lo son por motivos de paridad en el intervalo de integración, en cuanto a la no nula usando la relación  $dn^2(\tau; m) = (1-m) + mcn^2(\tau; m)$ :

$$a_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} cn^2(\tau; m) dn^2(\tau; m) d\tau = \frac{1-m}{\pi} \int_0^{4K} cn^2(\tau; m) d\tau + \frac{m}{\pi} \int_0^{4K} cn^4(\tau; m) d\tau.$$

Usando las tablas de integrales [GRJ00] e integrando por partes de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \int cn^2(\tau; m) d\tau &= \frac{1}{m} [E(am(\tau; m), m) - (1-m)\tau], \\ \int cn^4(\tau; m) d\tau &= \frac{1}{3m} [(1-m)\tau + sn(\tau; m)cn(\tau; m)dn(\tau; m) - 2(1-2m) \int cn^2(\tau; m) d\tau]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión previa y evaluando la integral definida se obtiene:

$$a_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} cn^2(\tau; m) dn^2(\tau; m) d\tau = \frac{4}{3\pi m} [(1+m)E(m) - (1-m)K(m)].$$

Por tanto, la serie de Fourier generalizada de  $cn(\tau; m)dn(\tau; m)$  en primer orden es:

$$\begin{aligned} cn(\tau; m)dn(\tau; m) &= a_1(m)cn(\tau; m) + \dots \\ a_1(m) &= \frac{4}{3\pi m} [(1+m)E(m) - (1-m)K(m)] \end{aligned} \tag{3.15}$$

**6) Serie de Fourier generalizada de la función  $sn(\tau; m)dn(\tau; m)cn(2\tau; m)$**

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} sn(\tau; m) dn^2(\tau; m) cn(2\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} sn(\tau; m) dn^2(\tau; m) cn(\tau; m) cn(2\tau; m) d\tau = 0, \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} sn^2(\tau; m) dn^2(\tau; m) cn(2\tau; m) d\tau. \end{aligned}$$

Las dos primeras integrales son nulas por paridad en el intervalo de integración; en cuanto a la tercera debe ser resuelta numéricamente, de manera que la serie generalizada de Fourier en primer orden es:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) &= b'_1(m) \operatorname{sn}(\tau; m) + \dots \\ b'_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 7) Serie de Fourier generalizada de la función $\operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m)$

Los tres primeros coeficientes de la serie generalizada de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau = 0, \\ a_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau, \\ b_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau = 0. \end{aligned}$$

De manera que la serie generalizada de Fourier en primer orden es:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) &= a'_1(m) \operatorname{cn}(\tau; m) + \dots \\ a'_1(m) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

---

### Series de Fourier generalizadas ( $n=1$ )

---

$\operatorname{dn}(\tau; m) = a_0(m) + \dots$	$a_0(m) = \frac{2E(m)}{\pi}$
$\operatorname{cn}^3(\tau; m) = \frac{3}{4} \operatorname{cn}(\tau; m) + \dots$	
$\operatorname{sn}^3(\tau; m) = \frac{3}{4} \operatorname{sn}(\tau; m) + \dots$	
$\operatorname{sn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) = b_1(m) \operatorname{sn}(\tau; m) + \dots$	$b_1(m) = \frac{4}{3\pi m} [(2m-1)E(m) + (1-m)K(m)]$
$\operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) = a_1(m) \operatorname{cn}(\tau; m) + \dots$	$a_1(m) = \frac{4}{3\pi m} [(1+m)E(m) - (1-m)K(m)]$
$\operatorname{sn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) = b'_1(m) \operatorname{sn}(\tau; m) + \dots$	$b'_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau$
$\operatorname{cn}(\tau; m) \operatorname{dn}(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) = a'_1(m) \operatorname{cn}(\tau; m) + \dots$	$a'_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{cn}^2(\tau; m) \operatorname{dn}^2(\tau; m) \operatorname{cn}(2\tau; m) d\tau$

Tabla 3-1 Series generalizadas de Fourier

A modo de resumen en la Tabla 3-1 se recogen las series de Fourier generalizadas calculadas que serán necesarias para aplicar el método de balance armónico elíptico a los osciladores objeto de estudio en el presente capítulo.

### 3.3 Fronteras de estabilidad de la solución estacionaria de un oscilador de Duffing

El oscilador objeto de nuestro estudio es el oscilador de Duffing simétrico, con dos pozos de potencial y paraméricamente amortiguado mediante pulsos periódicos simétricos, que ya se analizó en el capítulo anterior del presente trabajo:

$$\ddot{x} + \eta[1 + Fp(t;T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0, \quad (3.18)$$

siendo  $\eta$  y  $F$  el coeficiente normalizado de amortiguamiento y la amplitud de excitación, respectivamente,  $\beta$  el coeficiente del potencial ( $\beta > 0$ ) y  $p(t;T)$  un pulso simétrico genérico de periodo  $T$  y amplitud unidad. El amortiguamiento es un término perturbativo ( $\eta, \eta F \ll 1$ ) del sistema hamiltoniano integrable subyacente ( $\eta = 0$ ).

Se trabaja con un pulso genérico en la excitación paramétrica con el fin de poder verificar la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido [CMGH99] formulado en el apartado 2.3 y aplicado al oscilador de Duffing de ecuación (3.18) en el apartado 2.4.5. Se trata de comprobar si las fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias ( $x = \pm \beta^{-1/2}, \dot{x} = 0$ ) de nuestro sistema son similares para pulsos simétricos periódicos  $p(t;T)$  con distintas formas de onda que transmitan el mismo impulso mecánico al oscilador. Por este motivo y de acuerdo con lo deducido en el apartado 2.4.5, supondremos que el periodo de la excitación paramétrica es lo suficientemente pequeño para que se verifique la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido.

Con el objeto de estudiar la estabilidad de las soluciones estacionarias de (3.18) bajo cambios únicamente de la forma de onda de la excitación paramétrica se han considerado dos tipos de pulsos para dicha excitación:

- a)  $p(t;T) \equiv \text{cn}(\omega t; m)$ , pulsos cnoidales siendo  $\text{cn}$  la función elíptica de Jacobi cosam de parámetro elíptico  $m$  y  $\omega = \omega(m) = 4K(m)/T$ , donde  $K(m)$  es la integral elíptica completa de primera especie, de forma que para cualquier valor de  $m$  el pulso tiene periodo  $T$  (el periodo real de la función cosam es  $4K(m)$ ), y por tanto  $m$  controla únicamente la forma de la excitación. La elección del pulso se debe a tres razones:
  - a. Podemos estudiar el efecto de la forma de onda variando un único parámetro: el parámetro elíptico  $m$ . Conforme aumenta éste desde  $m=0$ , donde se recupera el caso armónico, la anchura efectiva del pulso decrece hasta  $m=1$  y en el límite

$m=1$  el pulso se anula excepto en un conjunto de instantes de medida de Lebesgue nula de forma que se recupera el caso autónomo de (3.18). En la Figura 3-3(a) se observa la forma del pulso para tres valores de  $m$ .

- La aplicación del BAE mediante el uso de series de Fourier generalizadas será más sencilla si la excitación temporal tiene la misma forma funcional que los armónicos elípticos utilizados en el balance.
- En el caso  $m=0$  se recupera el caso armónico,  $\text{cn}(\omega t; m=0) \equiv \cos(\omega t)$  estudiado ya en la bibliografía [XH95], que nos servirá de referencia para validar los resultados del análisis en tal caso límite.

- b)  $p(t;T) = s(t;a,T)$  pulsos rectangulares simétricos de periodo  $T$ , anchura variable  $a$  y amplitud unidad:

$$s(t;a,T) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, a/2] \cup [T-a/2, T] \\ -1, & \text{si } t \in [T/2-a/2, T/2+a/2], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en cada periodo } T \quad (3.19)$$

Se requieren muchos términos de la serie de Fourier generalizada de  $s(t;a,T)$  para reproducir su forma funcional por lo que la aplicación del BAE a este tipo de pulsos requiere el uso de armónicos elípticos de alto orden lo que complica mucho el análisis. Por tanto este pulso se usará solo para verificar la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido en lo referente a la estabilidad de las soluciones estacionarias. Únicamente se realizarán simulaciones numéricas que serán comparadas con las correspondientes al pulso cnoidal.

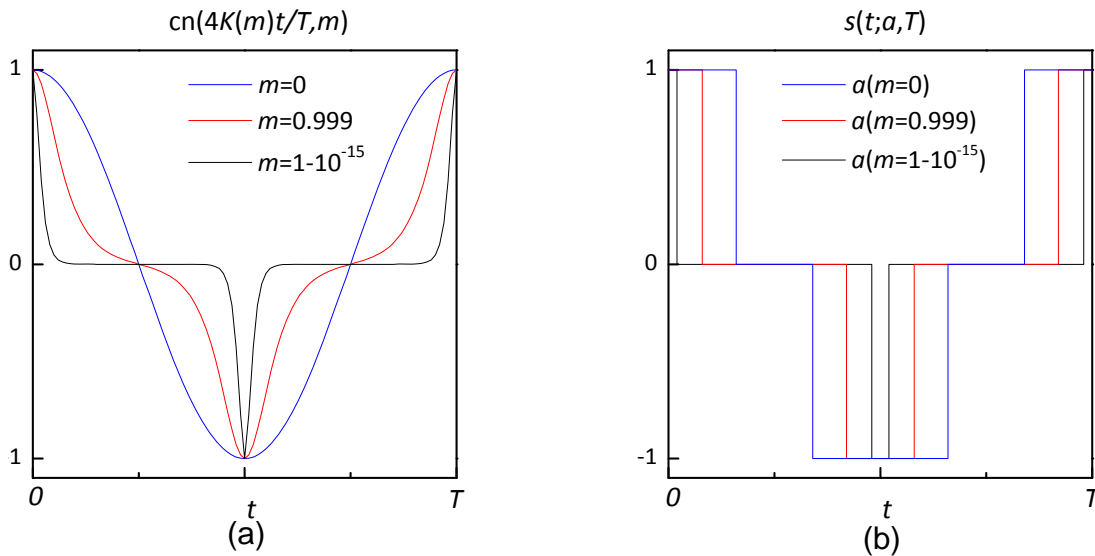


Figura 3-3 (a) Pulso cnoidal  $\text{cn}(4K(m)t/T; m)$  para distintos valores del parámetro elíptico  $m$ . (b) Pulso rectangular  $s(t;a,T)$  para distintos valores de  $a$  con  $a=a(m,T)$  [cf. Ec.(2.103)] de manera que transmitan el mismo impulso mecánico que los pulsos cnoidales representados.

En la Fig. 3-3 se representan ambos pulsos para distintos valores de  $m$  y  $a$ . Los valores de  $a$  y  $m$  usados en la figura verifican la condición de invariancia del impulso mecánico transmitido [cf. Ec. (2.102)]. Los parámetros  $a$  y  $m$  juegan un papel similar en ambos pulsos, controlan la forma de onda del pulso y por tanto la variación temporal de la energía del oscilador.

### 3.3.1 Balance armónico elíptico de primer orden

Así pues el sistema objeto de nuestro estudio es:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta[1 + F \operatorname{cn}[\omega t; m]] \frac{dx}{dt} - x + \beta x^3 = 0, \quad (3.20)$$

con  $\omega = 4K(m)/T$  y  $\beta = 1$ . Aplicando el balance armónico elíptico se obtendrán las fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) en distintos planos de parámetros del sistema (3.20). Para utilizar los mismos parámetros y notación que los utilizados en [XH95] se ha considerado  $\beta = 1$  y se ha realizado el siguiente cambio de variables:

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{2}, \quad q = \eta \Omega, \quad \varepsilon = \frac{F}{2}, \quad (3.21)$$

con lo que (3.20) queda:

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + q[1 + 2\varepsilon \operatorname{cn}(2\tau; m)] \frac{dx}{d\tau} - x + x^3 = 0. \quad (3.22)$$

Para linealizar la ecuación para una perturbación  $\xi$  en torno a sus soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) sustituimos  $x = \pm 1 + \xi$  en (3.22) :

$$\Omega^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + q[1 + 2\varepsilon \operatorname{cn}(2\tau; m)] \frac{d\xi}{d\tau} + 2\xi \pm 3\xi^2 + \xi^3 = 0, \quad (3.23)$$

y despreciando los términos de orden superior a uno obtenemos:

$$\Omega^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + q[1 + 2\varepsilon \operatorname{cn}(2\tau; m)] \frac{d\xi}{d\tau} + 2\xi = 0. \quad (3.24)$$

Asumiremos que la frontera de estabilidad de las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) del oscilador de ecuación (3.22) en el espacio de parámetros, viene determinada por la existencia de una solución periódica para la perturbación  $\xi$  de la ecuación linealizada en torno a tales soluciones estacionarias [cf. Ec. (3.24)]. En [XH95] se usa el teorema de Floquet [Ver96] para determinar la frontera de estabilidad del caso armónico ( $m=0$ ), basándose en que la parte real de un exponente de Floquet se anula en dicha frontera. Aquí se utilizara una generalización

elíptica de dicho procedimiento basado en la existencia de las series generalizadas de Fourier y en el balance armónico elíptico.

Se asume la existencia de:

$$\xi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \operatorname{sen}(n\varphi)], \quad (3.25)$$

donde  $\varphi \equiv \operatorname{am}(\tau; m)$ . Se truncará la serie anterior en  $n=1$ , de manera que solo obtendremos una primera aproximación a las fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) de (3.22) en los planos de parámetros  $m$ - $F$  y  $T$ - $F$ . Truncando la serie (3.25) en  $n=1$  y sustituyéndola en la ecuación linealizada (3.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \Omega^2 [(2m-1)\operatorname{cn}(\tau) - 2m\operatorname{cn}^3(\tau)] - q\operatorname{sn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau) - 2\varepsilon q\operatorname{sn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau)\operatorname{cn}(2\tau) + 2\operatorname{cn}(\tau) \right\} A_1 + \\ & + \left\{ \Omega^2 [2m\operatorname{sn}^3(\tau) - (1+m)\operatorname{sn}(\tau)] - q\operatorname{cn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau) - 2\varepsilon q\operatorname{cn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau)\operatorname{cn}(2\tau) + 2\operatorname{sn}(\tau) \right\} B_1 + A_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde se han usado las relaciones  $\operatorname{sen} \varphi \equiv \operatorname{sn}(\tau, m)$  y  $\operatorname{cos} \varphi \equiv \operatorname{cn}(\tau, m)$  y la notación  $pq(\tau, m) = pq(\tau)$  por simplicidad.

Sustituyendo las series de Fourier generalizadas calculadas en el apartado 3.2.3 de los productos de funciones elípticas de Jacobi que aparecen en la expresión anterior, series (3.12) a (3.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} & A_0 + \left\{ \left[ (2 - \Omega^2) + \frac{m}{2} \Omega^2 \right] A_1 + q[a_1(m) + 2\varepsilon a'_1(m)] B_1 \right\} \operatorname{cos} \varphi + \\ & + \left\{ \left[ (2 - \Omega^2) + \frac{m}{2} \Omega^2 \right] B_1 - q[b_1(m) + 2\varepsilon b'_1(m)] A_1 \right\} \operatorname{sen} \varphi + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde las expresiones de los coeficientes  $a_1(m)$ ,  $a'_1(m)$ ,  $b_1(m)$  y  $b'_1(m)$  se encuentran en las ecuaciones (3.14) a (3.17), respectivamente. El principio de balance armónico requiere que el término independiente y los coeficientes de  $\operatorname{sen} \varphi$  y  $\operatorname{cos} \varphi$  se anulen:

$$\begin{aligned} & A_0 = 0, \\ & \left[ (2 - \Omega^2) + \frac{m}{2} \Omega^2 \right] A_1 + q[a_1(m) + 2\varepsilon a'_1(m)] B_1 = 0, \\ & -q[b_1(m) + 2\varepsilon b'_1(m)] A_1 + \left[ (2 - \Omega^2) + \frac{m}{2} \Omega^2 \right] B_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La existencia de soluciones no triviales del sistema de ecuaciones homogéneo requiere que el determinante de la matriz de coeficientes se anule:



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2-\Omega^2) + \frac{m}{2}\Omega^2 & q[a_1(m) + 2\varepsilon a_1'(m)] \\ 0 & -q[b_1(m) + 2\varepsilon b_1'(m)] & (2-\Omega^2) + \frac{m}{2}\Omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.29)$$

Resolviendo, deshaciendo los cambios (3.21) y despejando  $F$  en función del resto de parámetros, se obtiene:

$$F_c(m, T, \eta) = \alpha_1(m) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha_2(m, T, \eta)}{\alpha_1^2(m)}} \right), \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1(m) &\equiv \frac{a_1(m)b_1'(m) + a_1'(m)b_1(m)}{2a_1'(m)b_1'(m)}, \\ \alpha_2(m) &\equiv \frac{a_1(m)b_1(m) + [T/K(m) + (m-2)K(m)/T]^2 / \eta^2}{4a_1'(m)b_1'(m)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Notar que la existencia de una solución no trivial de (3.28) implica la existencia de una solución periódica de la ecuación linealizada (3.24) y, por tanto, la estabilidad de las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) del oscilador (3.20). La condición de estabilidad de dichas soluciones es:

$$F < F_c(m, T, F). \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Análisis y verificación numérica de la frontera de estabilidad

A continuación se analiza la función  $F_c(m, T, \eta)$  que define el contorno de la región del espacio de parámetros en el que las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) son estables y que se ha obtenido por BAE en primer orden:

1. Caso armónico.- En el caso de la excitación armónica,  $m=0$ , se recupera el resultado obtenido en [XH95] obtenido por BAC en primer orden, lo que confirma la validez del análisis realizado en tal límite:

$$\varepsilon_c(T, \eta) = 2F_c(m=0, T, \eta) = \frac{1}{\eta} \sqrt{\eta^2 + \left( \frac{2T}{\pi} - \frac{\pi}{T} \right)^2}. \quad (3.33)$$

En el caso armónico tanto las funciones elípticas utilizadas para definir los armónicos elípticos usados en las series generalizadas de Fourier, como la utilizada en el término de

la excitación paramétrica del oscilador se convierten en las funciones circulares correspondientes, de manera que por un lado el método BAE converge al método BAC y por otro lado la ecuación del oscilador coincide con la analizada en [XH95].

2. Plano de parámetros  $T$ - $F$ .- La frontera de estabilidad en el plano de parámetros  $T$ - $F$  está definida por la función  $F_c(m=\text{cte}, T, \eta=\text{cte})$  de forma que si  $F < F_c(m=\text{cte}, T, \eta=\text{cte})$  las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) son estables para los valores fijados de  $m$  y  $\eta$ .

El rasgo más característico de la función  $F_c(m=\text{cte}, T, \eta=\text{cte})$  es la existencia de un mínimo en  $T_{\min}=(2-m)^{1/2}K(m)$  que tiene lugar cuando el término cuadrático que aparece en el denominador de  $\alpha_2(m=\text{cte}, T, \eta=\text{cte})$  se anula [cf. Ec. (3.31)]. Este mínimo puede ser explicado en términos de una resonancia paramétrica con el sistema hamiltoniano subyacente ( $\eta=F=0$ ) del oscilador, cuyas órbitas interiores a la separatriz tienen un periodo  $T_{\text{int}}=2(2-m)^{1/2}K(m)$ , veáse p.ej. [Wig03], verificándose  $T_{\min}=T_{\text{int}}/2$ .

Para verificar los resultados analíticos se ha determinado numéricamente la frontera de estabilidad de las soluciones estacionarias. Fijado el valor de  $m$  y  $\eta$  se han realizado diagramas de bifurcación de la primera componente de la aplicación de Poincaré en función del parámetro  $F$  para distintos valores de  $T$  integrando un total de 1050 ciclos y muestreando los 50 últimos. En la Fig. 3-4 se muestra como ejemplo el correspondiente a  $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $m=0.5$  y  $T=2.2$ . En él se aprecia como la solución estacionaria se hace inestable para  $F>2.1$ .

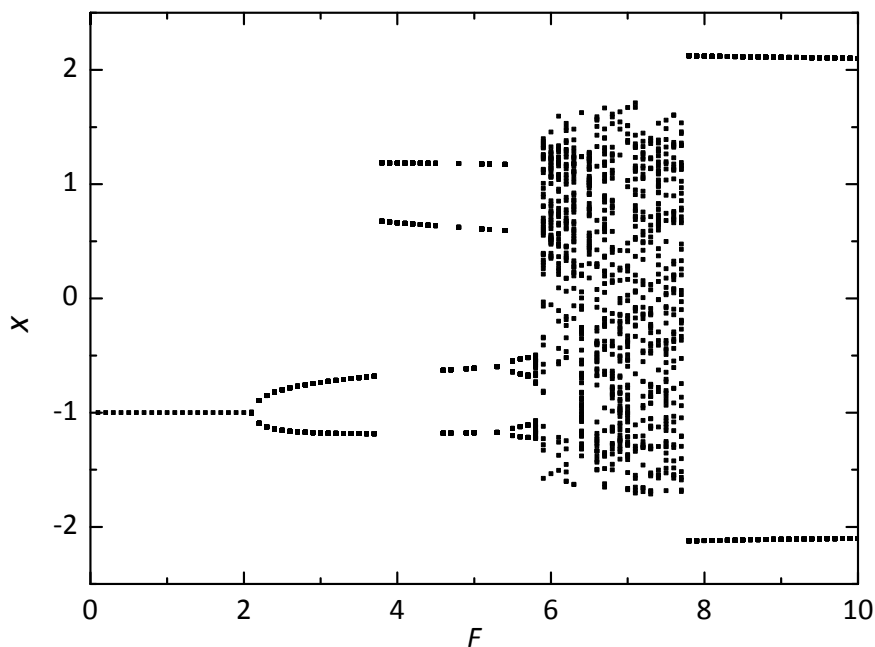


Figura 3-4 Diagrama de bifurcación para la variable  $x$  del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales en función del parámetro  $F$ , con  $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$ ,  $T=2.2$  y  $m=0.5$ . Notar como la solución estacionaria ( $x = -1, \dot{x} = 0$ ) se hace inestable para  $F>2.1$ .

En la Fig. 3-5 se representan las funciones  $F_c(m=0.1, T, \eta=0.2)$  y  $F_c(m=0.5, T, \eta=0.2)$  [cf. Ec. (3.30)] junto con las fronteras de estabilidad obtenidas numéricamente. Los resultados numéricos reproducen fielmente el mínimo de la función  $F_c(m=\text{cte}, T, \eta=\text{cte})$ . La concordancia entre los resultados numéricos y los del balance armónico elíptico en primer orden es bastante buena sobre todo en las cercanías de  $T_{\min}$ , si bien la divergencia se hace apreciable para periodos crecientes, divergencia que posiblemente pudiera ser corregida realizando aproximaciones de orden superior.

3. Plano de parámetros  $m$ - $F$ .- La frontera de estabilidad en el plano de parámetros  $m$ - $F$  está definida por la función  $F_c(m, T=\text{cte}, \eta=\text{cte})$  de forma que si  $F < F_c(m, T=\text{cte}, \eta=\text{cte})$  las soluciones estacionarias ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) son estables para los valores fijados de  $T$  y  $\eta$ . Para verificar los resultados analíticos se ha determinado numéricamente la frontera de estabilidad de las soluciones estacionarias. Fijado el valor de  $T$  y  $\eta$  se han realizado diagramas de bifurcación de la primera componente de la aplicación de Poincaré en función del parámetro  $F$  para distintos valores de  $m$  integrando un total de 1050 ciclos y muestreando los cincuenta últimos.

En la Fig. 3-6 se representa la función  $F_c(m, T=T_{\min}(m=0), \eta=0.2)$  junto con la frontera de estabilidad determinada numéricamente. Se observa como para valores cercanos a  $m=0$  la convergencia entre la predicción analítica y la numérica es bastante precisa, para valores  $0 < m < 0.6$  la convergencia es aceptable, sobre todo considerando que el método de balance armónico elíptico se ha aplicado en primer orden, y para valores  $0.6 < m < 1$  la divergencia entre los resultados numéricos y analíticos es manifiesta, mostrando la insuficiencia de la aproximación en primer orden para reproducir el comportamiento del oscilador excitado por pulsos estrechos y la necesidad de utilizar armónicos elípticos de orden superior para corregir la discrepancia. En cualquier caso la aproximación de primer orden reproduce el comportamiento cualitativo de  $F_c(m, T=\text{cte}, \eta=\text{cte})$  en todo el intervalo  $0 < m < 1$ , en particular el comportamiento esperado  $F_c \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow 1$ .

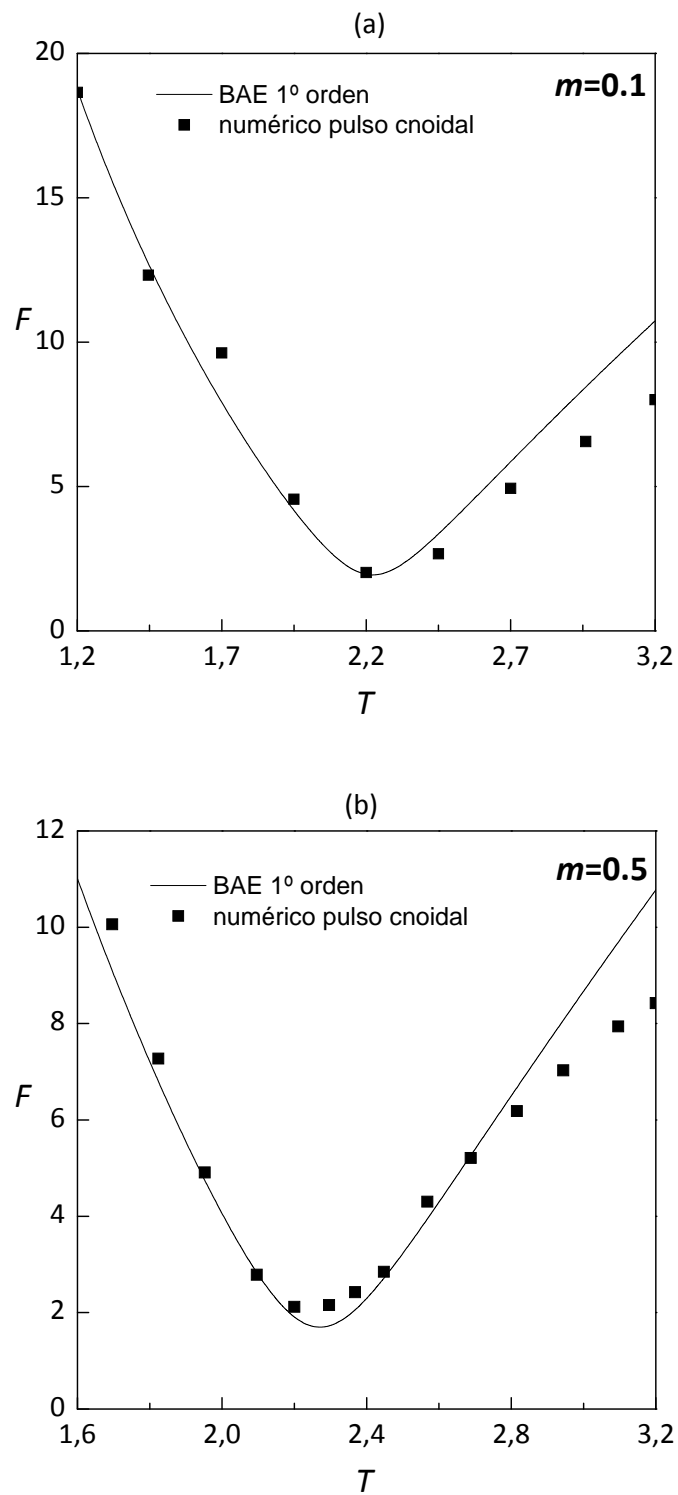


Figura 3-5 Fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros  $T$ - $F$  del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales con  $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$  y (a)  $m=0.1$ , (b)  $m=0.5$ . A efectos de comparación se muestra la obtenida por BAE en primer orden ( $n=1$ ) y la obtenida numéricamente.

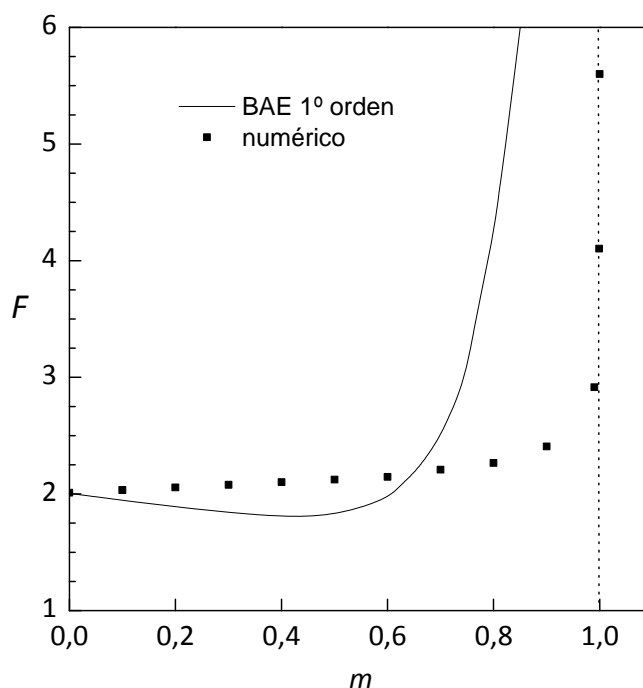


Figura 3-6 Frontera de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros  $m$ - $F$  del sistema (3.20) sometido a pulsos cnoidales con  $\beta=1$ ,  $\eta=0.2$  y  $T=T_{\min}(m=0)$ . A efectos de comparación se muestra la obtenida por BAE en primer orden ( $n=1$ ) y la obtenida numéricamente (■).

### 3.3.3 Verificación de la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido.

En el capítulo anterior, apartado 2.4.5, se verificó analíticamente la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido en lo referente al umbral orden-caos, en el sentido de determinar si pulsos de distinta forma de onda en el término de la excitación paramétrica, daban lugar a un comportamiento dinámico del oscilador similar, en lo referente al umbral caótico, si el impulso mecánico transmitido por los distintos pulsos era el mismo.

La verificación analítica consistió en comparar las funciones umbral orden-caos del oscilador de Duffing paramétricamente amortiguado,  $\ddot{x} + \eta[1 + Fp_i(t;T)]\dot{x} - x + \beta x^3 = 0$ , considerando dos tipos de pulsos simétricos (véase la Figura 3-3): el pulso cnoidal  $p_1(t;T)=cn(4K(m)t/T;m)$  y el pulso rectangular  $p_2(t;T)=s(t;a,T)$  [cf. Ec. (3.19)], cuando ambos pulsos transmitían al oscilador el mismo impulso mecánico en un cuarto de periodo:

$$\int_0^{T/4} |cn(4K(m)t/T;m)| dt = \int_0^{T/4} |s(t;a,T)| dt. \tag{3.34}$$

Tal relación permite determinar la anchura  $a$  del pulso rectangular que transmite el mismo impulso mecánico que el pulso cnoidal con parámetro elíptico  $m$  [cf. Ec (2.103)]:

$$a(m) = \frac{T}{2K(m)\sqrt{m}} \arccos(\sqrt{1-m}) \quad (3.35)$$

En este apartado se comprobará si las fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias del oscilador ( $x = \pm 1, \dot{x} = 0$ ) verifican la conjetura de invariancia. Para ello se han determinado numéricamente las fronteras de estabilidad de dichas soluciones en el plano de parámetros  $T$ - $F$  para distintos valores de los parámetros de forma,  $m$  en el caso de los pulsos cnoidales y  $a$  en el caso de los pulsos rectangulares.

En la Fig. 3-7 se comparan las fronteras de estabilidad de ambos pulsos para valores de  $m$  y  $a$  que verifican la condición de invariancia (3.35). En la Fig. 3-7(a) se representan las fronteras de estabilidad del oscilador cuando el término de la excitación paramétrica es un pulso cnoidal con  $m=0.1$  y cuando es un pulso rectangular de anchura  $a(m=0.1)$ . Como se puede apreciar desde el punto de vista cualitativo la forma de las fronteras coincide con la determinada mediante BAE, en particular, la existencia del mínimo relativo explicable en términos de una resonancia paramétrica. Desde el punto de vista cuantitativo la concordancia numérica entre ambas fronteras es muy buena. La inestabilidad surge para cada valor de  $T$  para valores muy cercanos de  $F$ , algo menores para el pulso rectangular, lo que confirma la validez de la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido en lo referente a la estabilidad de las soluciones estacionarias. A las mismas conclusiones pueden obtenerse de la observación de la Fig. 3-7(b) en la que se comparan los casos  $m=0.5$  y  $a(m=0.5)$ , si bien en este caso la concordancia numérica es algo menor.

Otra opción para verificar la conjetura de invariancia del impulso sería determinar la frontera de estabilidad para el caso de los pulsos rectangulares que verificarán la condición de invariancia (3.35) mediante BAE para compararla con la obtenida en el apartado anterior para pulsos cnoidales. Esta opción se ha descartado pues para reproducir correctamente la forma funcional de un pulso rectangular se requieren un gran número de armónicos, circulares o elípticos, y la resolución matemática del BAE de orden superior a la unidad es muy compleja.

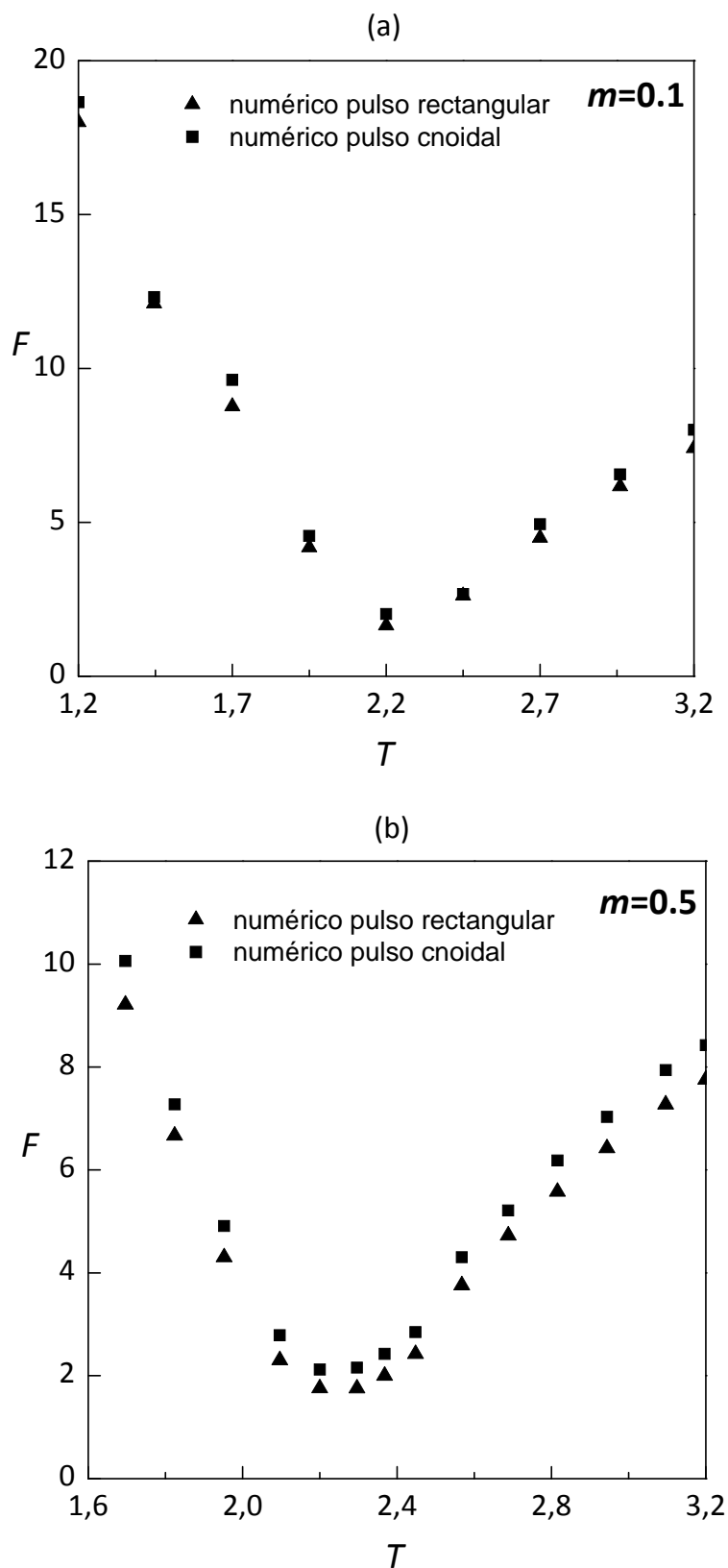


Figura 3-7 Fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias en el plano de parámetros  $T$ - $F$  del sistema (3.20) con  $\beta=1$  y  $\eta=0.2$  sometido a pulsos cnoidales (■) con (a)  $m=0.1$  y (b)  $m=0.5$  y rectangulares (▲) con (a)  $a(m=0.1)$  y (b)  $a(m=0.5)$ , respectivamente [cf. Ec. (3.35)].

### 3.4 Fronteras de estabilidad de la solución estacionaria del NIPKR

En las referencias [CMGH01, CMGH03] y en el apartado 2.5 del presente trabajo se introdujo el NIPKR (*non-ideal periodically kicked rotator*) como una aproximación más realista al *kicked rotator*, oscilador en el que los pulsos o impactos periódicos se suele modelar utilizando la función  $\delta$  de Dirac periódica, pues su sencilla integración permite la reducción del *kicked rotator* a una aplicación bidimensional, la aplicación estándar, lo que simplifica notablemente la obtención de resultados analíticos y numéricos [GG82, LT85, MG08, Ott93, TZ08, Zas78, Zas05].

El NIPKR se presenta como una generalización del *periodically damped kicked rotator*:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = 0 \quad (3.36)$$

donde la función  $\delta(t-nT)$  que modela los pulsos periódicos es sustituida por un pulso genérico asimétrico  $p(t;T,\alpha_i)$  que verifica  $p(t=(2n-1)T/2;T,\alpha_i)=0$  con  $n=0,1,2,\dots$  y  $p(t;T,\alpha_i)\geq 0$ , de periodo  $T$ , amplitud unidad, anchura finita y forma controlada por los parámetros  $\alpha_i$ . Así pues el NIPKR objeto de estudio tiene por ecuación:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + Fp(t;T,\alpha_i)\operatorname{sen} x = 0, \quad (3.37)$$

donde los coeficientes normalizados de amplitud del pulso  $F$  y de amortiguamiento  $\eta$  son ambos positivos.

Notar que mientras que se puede estudiar la estabilidad estructural del NIPKR gobernado por la ecuación (3.37) bajo cambios únicamente en la forma de onda del pulso, manteniendo fijos la amplitud y el periodo, en el *periodically damped kicked rotator* de ecuación (3.36) no existe esa posibilidad.

Con el propósito de simular pulsos periódicos más realistas, pero sin perder generalidad, en el apartado 2.5 ya se utilizó un pulso que cumple tal propósito [cf. Ec. (2.112)]:

$$p(t;T,m) \equiv \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T;m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \quad (3.38)$$

donde  $\operatorname{dn}$  es la función elíptica de Jacobi denam de parámetro elíptico  $m$ ,  $K(m)$  es la integral elíptica completa de primera especie y  $T$  es el periodo del pulso. El parámetro elíptico  $m$  controla la forma del pulso y por tanto su anchura efectiva, lo que nos permitirá simular pulsos periódicos reales ajustando adecuadamente dicho parámetro.



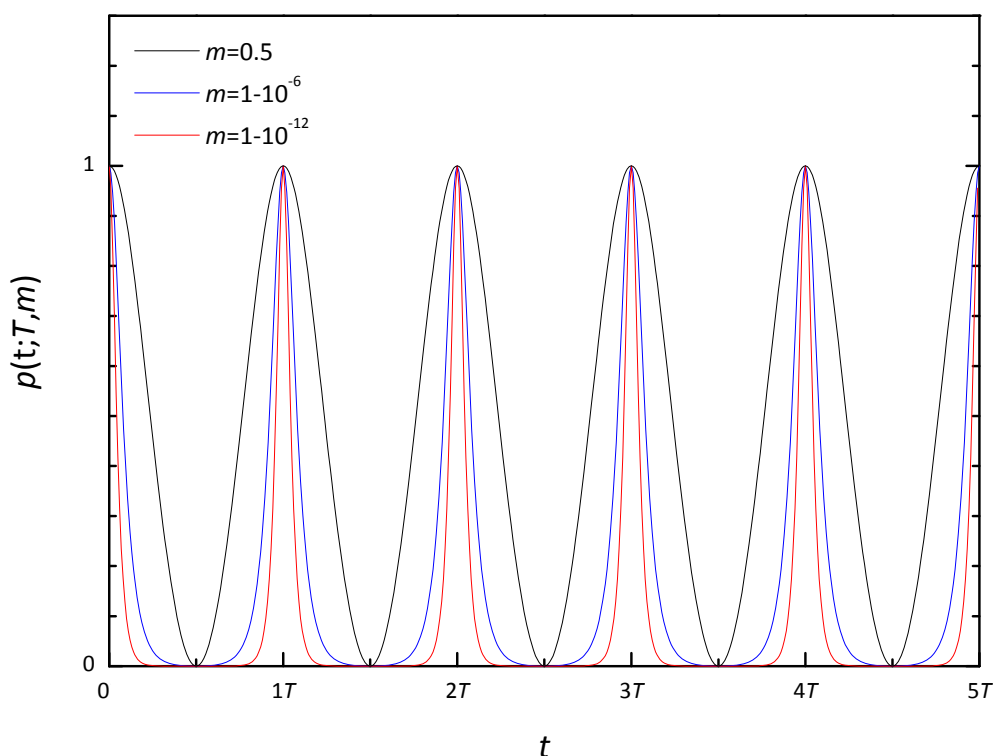


Figura 3-8 Pulso  $p(t; T, m)$  [cf. Ec.(3.38)] para distintos valores del parámetro  $m$ . Notar como representa adecuadamente una cadena de pulsos (*kicks*) periódicos de anchura y amplitud finita

Es importante resaltar que la elección de un pulso particular no resta generalidad al estudio del comportamiento dinámico de (3.37) siempre y cuando se verifiquen las condiciones exigidas por la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido.

El pulso  $p(t; T, m)$  tiene dos características importantes para nuestro propósito:

- a) La forma de onda del pulso varía de forma continua en función de un solo parámetro. El pulso se estrecha conforme  $m$  se acerca a la unidad manteniendo su amplitud constante. En la Fig. 3-8 se representa el pulso  $p(t; T, m)$  para distintos valores de  $m$ , en ella se puede apreciar como conforme aumenta el valor de  $m$  la anchura efectiva del pulso disminuye, y en el límite  $m \rightarrow 1$  nos acercamos al *damped kicked rotator* de la ecuación (3.36), si bien en lugar de pulsos tipo  $\delta(t-nT)$  se obtienen pulsos muy estrechos de amplitud y anchura finita, como ocurre en los pulsos observados experimentalmente (ver p.e. [FG93]), que representan de forma más realista los pulsos periódicos (*kicks*).
- b) En el límite  $m=0$ ,  $p(t; T, m=0) = \cos^2(\pi t/T)$ , se recupera la función armónica más simple que representa un pulso asimétrico y su uso en la ecuación (3.37) ha sido ampliamente estudiado en la bibliografía.

El NIPKR definido por la Ec. (3.37) con el pulso (3.38):

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \operatorname{sen} x = 0 \quad (3.39)$$

cuenta con una solución estacionaria en  $(x=0, \dot{x}=0)$  que no es necesariamente estable. El objeto de este apartado es estudiar la estabilidad de dicha solución estacionaria bajo cambios en la forma de onda de la excitación paramétrica y determinar las fronteras que limitan las regiones del espacio de parámetros  $(\eta, F, T, m)$  en las que tal solución estacionaria es estable.

La determinación de las regiones de estabilidad parte de la resolución analítica de la ecuación (3.39) linealizada en torno a la solución estacionaria considerada mediante BAE. Con el fin de validar los resultados del análisis se considerará por separado el caso armónico,  $m=0$ , que se resolverá por el método clásico de BAC cuyos resultados se compararán con los obtenidos por BAE con  $m=0$ .

### 3.4.1 Caso armónico

#### 3.4.1.1 Balance armónico circular (BAC)

Como se ha mencionado con anterioridad en el caso armónico,  $m=0$ , recuperamos la más simple representación de un pulso armónico antisimétrico:

$$p(t; T, m=0) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1 + \cos(2\pi t/T)}{2}. \quad (3.40)$$

Con lo que la ecuación (3.37) queda:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \frac{F}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \operatorname{sen} x = 0, \quad (3.41)$$

ecuación que representa a un péndulo paraméricamente forzado con soporte vertical oscilante, oscilador que ha sido ampliamente estudiado por diversos autores, numéricamente [BGJS95, CB94, McL81], analíticamente [BSGJ92, KL85] y experimentalmente [BGJS95, KSYJ97, ST95] mostrando una dinámica rica y variada cuando se varía un parámetro [Ach97, Cha95a]. De manera que el presente estudio puede entenderse como una extensión o generalización de los realizados en las referencias citadas.

Usando los cambios de variable:

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{2}, \quad q = \eta \Omega, \quad \varepsilon = \frac{F}{2}, \quad (3.42)$$

donde  $\omega = 2\pi/T$ , describimos el NIPKR de ecuación (3.41) como:

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + q \frac{dx}{d\tau} + \varepsilon [1 + \cos(2\tau)] \sin x = 0. \quad (3.43)$$

Linealizamos la ecuación anterior para una pequeña perturbación  $\xi$  en torno a la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) sustituyendo  $x=0+\xi$  en dicha ecuación y linealizando la función seno:

$$\Omega^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + q \frac{d\xi}{d\tau} + \varepsilon [1 + \cos(2\tau)] \xi = 0. \quad (3.44)$$

Asumiremos que la frontera de estabilidad de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) de (3.41) en el espacio de parámetros viene determinada por la existencia de una solución periódica para  $\xi$  en (3.44). Por tanto, asumiremos la existencia de una solución periódica genérica:

$$\xi = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)]. \quad (3.45)$$

Sustituyendo (3.45) en la ecuación (3.44) y aplicando la técnica del balance armónico se obtiene:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - n^2 \Omega^2) A_n + nq B_n + \frac{\varepsilon}{2} (A_{n-2} + A_{n+2} + A_0 \delta_{2n}) &= 0, \quad n=0,1,2,\dots, \\ (\varepsilon - n^2 \Omega^2) B_n + nq A_n + \frac{\varepsilon}{2} (B_{n-2} + B_{n+2}) &= 0, \quad n=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker, y se han usado las igualdades:  $A_n=A_{-n}$ ,  $B_n=-B_{-n}$  y  $B_0=0$ . Por ejemplo en primer orden, truncando en  $n=1$ , se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} \varepsilon A_0 &= 0, \\ \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \Omega^2 \right) A_1 + q B_1 &= 0, \\ -q A_1 + \left( \frac{\varepsilon}{2} - \Omega^2 \right) B_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La existencia de una solución no trivial del sistema de ecuaciones (3.47) supone la existencia de una solución periódica de la ecuación linealizada (3.44) y por tanto estabilidad de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) de (3.41). Específicamente, las soluciones no triviales del anterior sistema de ecuaciones constituyen las fronteras o contornos de estabilidad de la solución estacionaria en el espacio de parámetros.

La existencia de soluciones no triviales del sistema de ecuaciones (3.47) requiere que el determinante de la matriz de sus coeficientes se anule:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\varepsilon - \Omega^2 & q \\ 0 & -q & \frac{\varepsilon}{2} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

Resolviéndolo se obtiene una ecuación cuadrática para  $\varepsilon$  cuyas soluciones son:

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \left( 2\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 - 3q^2} \right). \quad (3.49)$$

Y deshaciendo el cambio de variables (3.42) se obtiene la ecuación de la frontera de estabilidad en el espacio de parámetros en primer orden, que en términos de la amplitud del pulso  $F$  queda:

$$F = F_{\pm}^{(1)}(\eta, T) = \frac{4\pi^2}{3T^2} \left[ 2 \pm \sqrt{1 - \frac{3\eta^2 T^2}{\pi^2}} \right]. \quad (3.50)$$

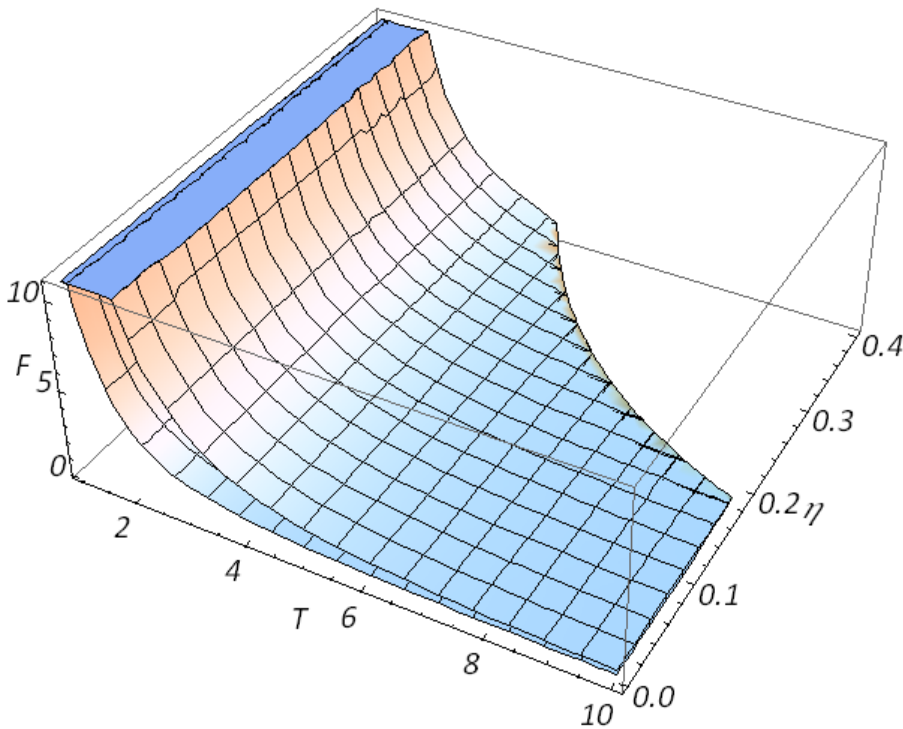


Figura 3-9 Fronteras de estabilidad  $F_{\pm}^{(1)}(\eta, T)$  [cf. Ec. (3.50)] de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) del NIPKR en el caso  $m=0$  obtenida por BAE en primer orden. Nótese como fijado  $\eta$  existe una lengua de inestabilidad, limitada por la intersección del plano  $\eta=\text{cte}$  con las dos superficies  $F_{\pm}^{(1)}(\eta, T)$ .

En la Fig. 3-9 se muestra una gráfica de las funciones  $F_{\pm}^{(1)}(\eta, T)$ , que representan, en primer orden, las fronteras de estabilidad de la solución estacionaria. En ellas se aprecia como fijado un coeficiente normalizado de amortiguamiento,  $\eta = \text{cte}$ , existe una banda o *lengua* de inestabilidad, comprendida entre las dos superficies. Dicha banda de inestabilidad se extiende hasta un valor máximo del periodo,  $T_{\text{max}}$ , por encima del cual no cabe esperar inestabilidad. Dicho valor es el que hace nula la raíz cuadrada que aparece en la expresión (3.50):

$$T_{\text{max}}(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3\eta}}. \tag{3.51}$$

Las simulaciones numéricas realizadas en el apartado siguiente confirman la existencia de dicho valor del periodo máximo  $T_{\text{max}}$ , a pesar de haber sido obtenido a partir de una aproximación de primer orden.

La determinación de la frontera de estabilidad en orden  $n$  requiere resolver el sistema homogéneo (3.46) de  $2n+1$  ecuaciones, lo que se traduce en determinar las raíces reales de un polinomio de orden  $2n$  de variable  $\varepsilon$ . A modo de ejemplo, para  $n=4$  se debe anular el determinante:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\varepsilon}{2} - \Omega^2 & q & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & \frac{\varepsilon}{2} - \Omega^2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon - 4\Omega^2 & 2q & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2q & \varepsilon - 4\Omega^2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon/2 \\ 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon - 9\Omega^2 & 3q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & -3q & \varepsilon - 9\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon - 16\Omega^2 & 4q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & -4q & \varepsilon - 16\Omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.52}$$

Las soluciones reales de la ecuación polinómica resultante conforman las fronteras de estabilidad en el espacio de parámetros, fronteras que para el caso  $\eta = \text{cte}$  delimitan una serie de bandas o lenguas de inestabilidad de las cuales la aproximación de primer orden solo había conseguido delimitar la primera.

En la Fig. 3-10 se muestran, para  $\eta = 0.2$ , las fronteras de estabilidad de la solución estacionaria en el espacio de parámetros correspondientes a las aproximaciones de orden  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=4$  y  $n=10$ . Para este último caso se aprecia cómo, para los intervalos numéricos de  $F$  y  $T$  representados, las fronteras delimitan un total de cinco lenguas de inestabilidad cuyo periodo máximo de inestabilidad es coincidente para todas ellas y próximo al determinado para la aproximación de primer orden  $T_{\text{max}}(\eta = 0.2) = 5\pi / \sqrt{3} = 9.07... [cf. Ec. (3.51)]$ .

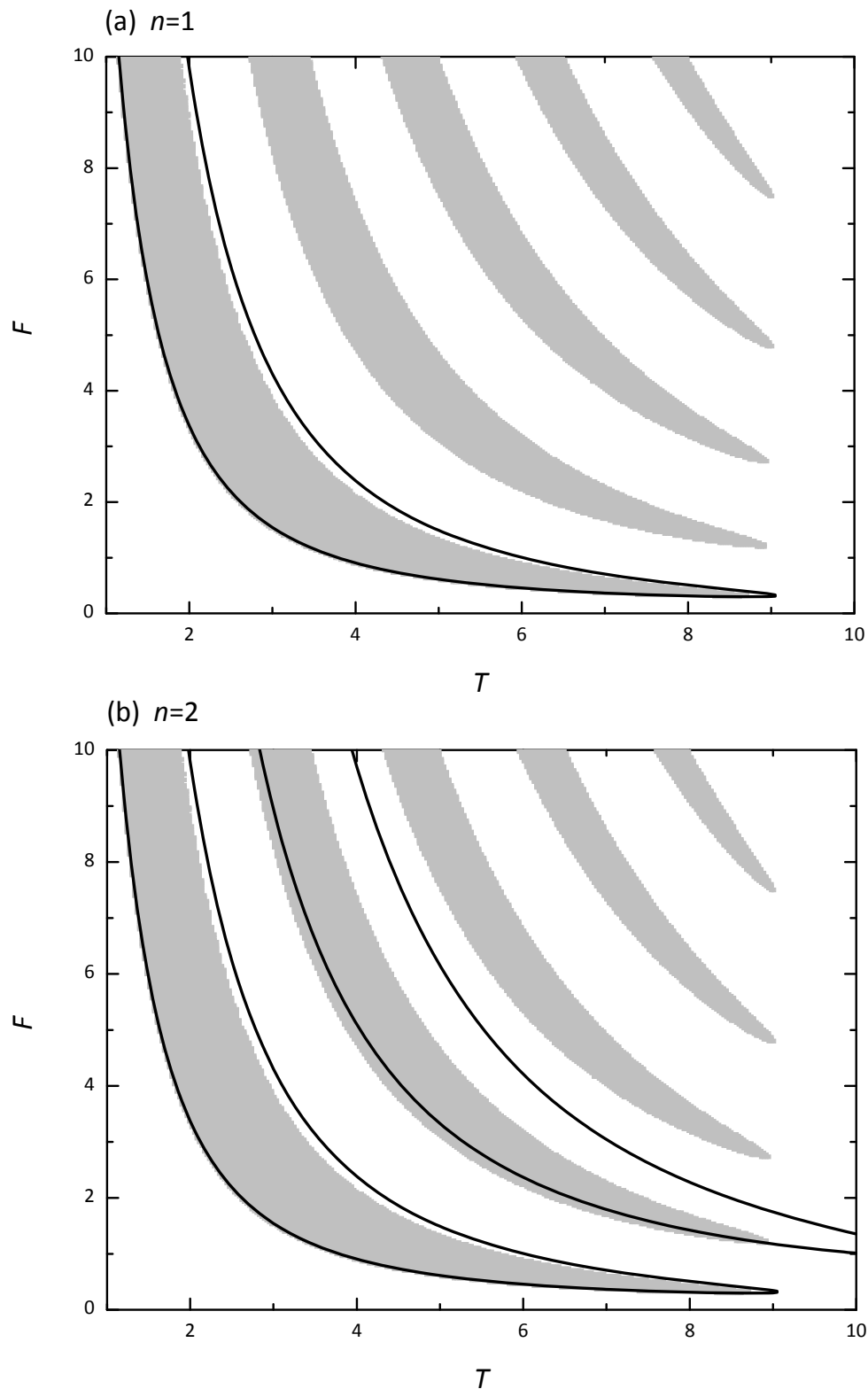


Figura 3-10 Fronteras de estabilidad (en línea continua) en el plano de parámetros  $T$ - $F$  de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) del NIPKR en el caso  $m=0$  y  $\eta=0.2$  obtenida por BAC de órdenes (a)  $n=1$ , (b)  $n=2$ , (c)  $n=4$  y (d)  $n=10$ . Las zonas sombreadas corresponden a zonas de inestabilidad obtenidas numéricamente a partir de la integración de la ecuación (3.41) un total de 400 ciclos para un retículo  $900 \times 1000$  en el plano de parámetros  $T$ - $F$ .

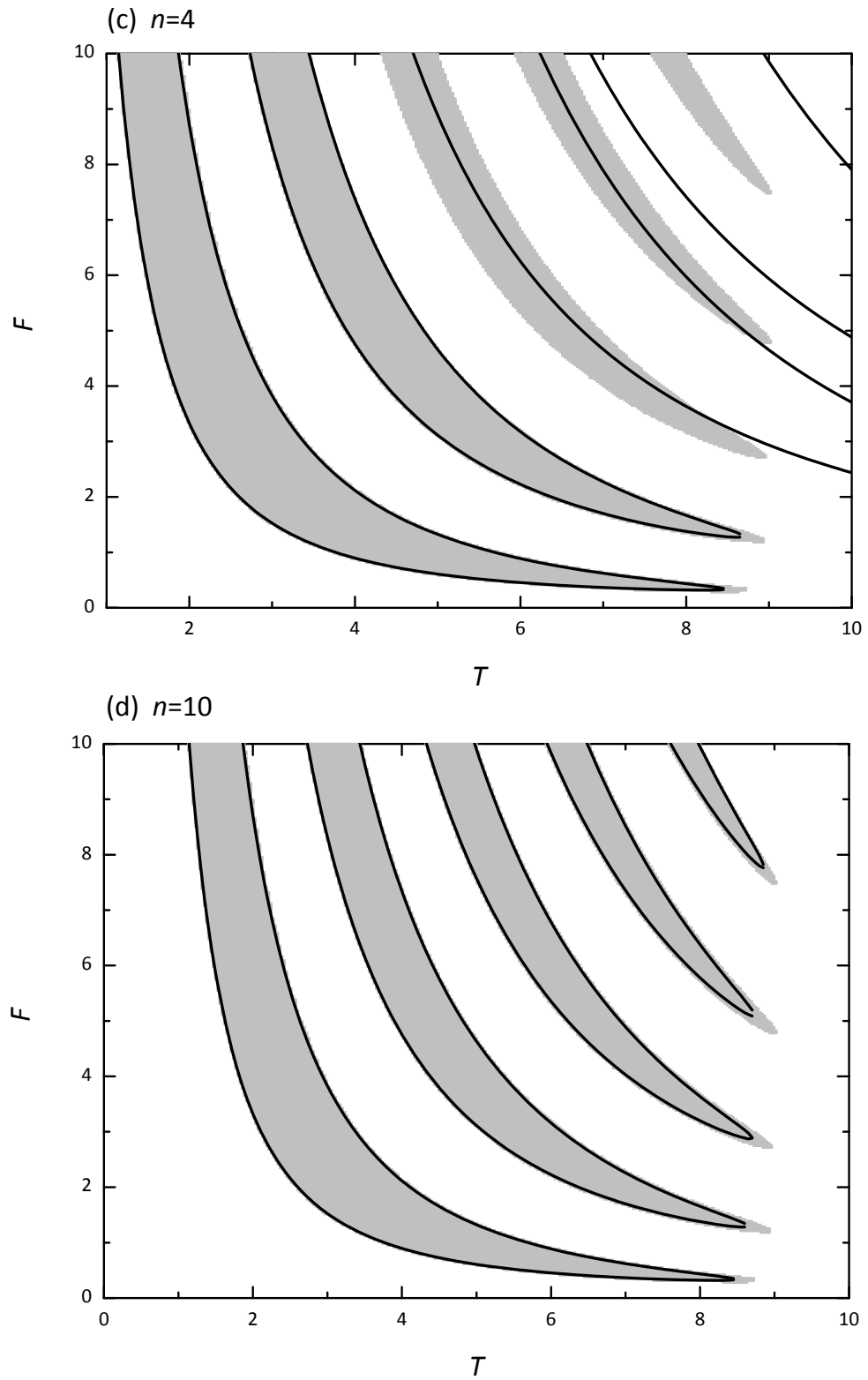


Figura 3-10 Continuación

### 3.4.1.2 Verificación numérica de la frontera de inestabilidad

Las simulaciones numéricas realizadas confirman la validez de los análisis y, en particular, muestran como la precisión de la estimación teórica aumenta con el orden de aproximación,  $n$ , del BAC.

Para validar los resultados anteriores se han determinado numéricamente las regiones de inestabilidad en el plano de parámetros  $T$ - $F$  dentro del intervalo numérico de éstos representados en la Fig. 3-10. Para ello se ha partido de un retículo 900x1000 en el plano de parámetros y para cada uno de los 900000 puntos, se ha integrado la ecuación (3.41) con  $\eta=0.2$  para unas condiciones iniciales fijas ( $x_0=0.1$ ,  $v_0=0.1$ ) y se ha comprobado si la solución estacionaria al cabo de 400 ciclos es inestable utilizando como condición de inestabilidad:  $|x|>10^{-6}$  o  $|dx/dt|>10^{-6}$ . En la Fig. 3-10 se han sombreado las regiones de inestabilidad obtenidas por este procedimiento observándose cinco lenguas de inestabilidad en el plano  $T$ - $F$ , con valores del periodo máximo de inestabilidad para cada lengua,  $T_{\max}$ , en el intervalo [8.71,9.01] muy próximos al valor determinado para la aproximación de primer orden.

En la Fig. 3-10 se observa para distintos ordenes de aproximación,  $n=1, 2, 4$  y  $10$ , cómo las fronteras de estabilidad obtenidas por BAC delimitan con precisión creciente las bandas de inestabilidad obtenidas numéricamente. En el orden de aproximación  $n=10$  la estimación teórica delimita fielmente las cinco lenguas de inestabilidad encontrándose la única discrepancia en los vértices de dichas lenguas.

A modo de ejemplo, en la Fig. 3-11 se muestra el diagrama de bifurcación del sistema (3.41) en el que se representa la primera componente de la aplicación de Poincaré,  $x \bmod(-\pi, +\pi)$ , vs.  $T$ , con  $\eta=0.2$  y  $F=9.0$ , tras la integración de un total de 400 ciclos, representándose los 40 últimos. Se aprecia en el diagrama la existencia de cinco ventanas de inestabilidad de la solución estacionaria, ( $x=0, \dot{x}=0$ ), que se corresponden con las cinco lenguas de inestabilidad que se muestran en la Fig. 3-10 para un valor fijo del parámetro  $F$ ,  $F=9.0$ . Los límites de dichas ventanas coinciden con mucha precisión con los obtenidos mediante la técnica de balance armónico circular en orden  $n=10$ .

## 3.4.2 Caso general elíptico

### 3.4.2.1 Balance armónico elíptico de primer orden

En este apartado se estudiará el caso general del NIPKR. En él los pulsos periódicos se modelan utilizando el pulso elíptico  $p(t;T,m)$  descrito por la ecuación (3.38), de manera que el sistema dinámico objeto de estudio es:



$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + F \frac{\operatorname{dn}(2K(m)t/T; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \operatorname{sen} x = 0 \quad (3.53)$$

Usando los mismos cambios de variable que en el caso armónico:

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{2}, \quad q = \eta \Omega, \quad \varepsilon = \frac{F}{2}, \quad (3.54)$$

donde  $\omega = \omega(m) = 4K(m)/T$ , rescribimos el NIPKR de ecuación(3.53) como:

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + q \frac{dx}{d\tau} + 2\varepsilon \frac{\operatorname{dn}(\tau; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \operatorname{sen} x = 0. \quad (3.55)$$

Linealizamos la ecuación anterior para una pequeña perturbación  $\xi$  en torno a la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) sustituyendo  $x=0+\xi$  en dicha ecuación y linealizando la función seno:

$$\Omega^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + q \frac{d\xi}{d\tau} + 2\varepsilon \frac{\operatorname{dn}(\tau; m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \xi = 0. \quad (3.56)$$

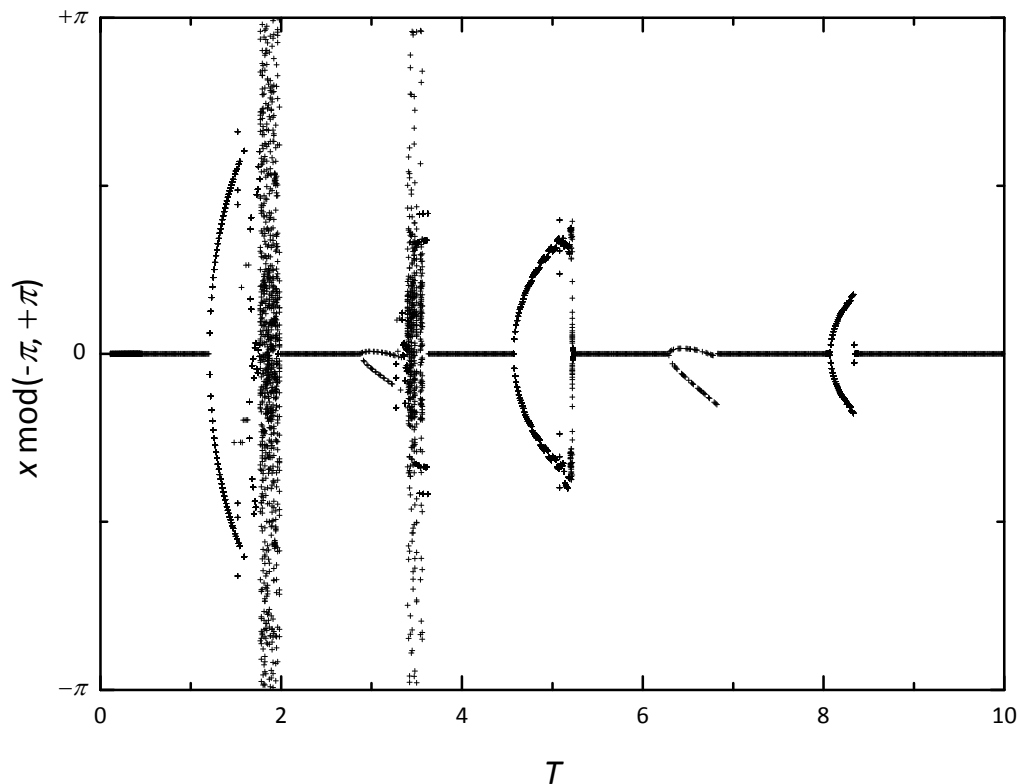


Figura 3-11 Diagrama de bifurcación del NIPKR con  $m=0$ ,  $\eta=0.2$  y  $F=9.0$  en el que se representa  $x \pmod{-\pi, +\pi}$  vs.  $T$ , tras la integración de un total de 400 ciclos. Nótese como las cinco ventanas de inestabilidad concuerdan con las fronteras numéricas y analíticas de la Fig. 3-10 (d) en la recta  $F=9.0$ .

Asumiremos que la frontera de estabilidad de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) de (3.53) en el espacio de parámetros viene determinada por la existencia de una solución periódica para  $\xi$  en (3.56). Para determinar la frontera de estabilidad utilizaremos el BAE basado en la existencia de las series generalizadas de Fourier y en las técnicas de balance armónico.

Se asume la existencia de:

$$\xi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \operatorname{sen}(n\varphi)], \quad (3.57)$$

donde  $\varphi \equiv \operatorname{am}(\tau; m)$ . Se truncará la serie anterior en  $n=1$ , de manera que solo obtendremos una primera aproximación a las fronteras de los contornos de estabilidad de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) de (3.53) en los planos de parámetros  $m$ - $F$  y  $T$ - $F$ . Truncando la serie (3.57) en  $n=1$  y sustituyéndola en la ecuación linealizada (3.56) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \Omega^2 [(2m-1)\operatorname{cn}(\tau) - 2m\operatorname{cn}^3(\tau)] - q\operatorname{sn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau) + 2\varepsilon \frac{\operatorname{dn}(\tau) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} \operatorname{cn}(\tau) \right\} A_1 + \\ & + \left\{ \Omega^2 [-(1+m)\operatorname{sn}(\tau) + 2m\operatorname{sn}^3(\tau)] + q\operatorname{cn}(\tau)\operatorname{dn}(\tau) + 2\varepsilon \frac{\operatorname{dn}(\tau) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} \operatorname{sn}(\tau) \right\} B_1 + \\ & + \varepsilon \frac{\operatorname{dn}(\tau) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} A_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde se han usado las relaciones  $\operatorname{sen}\varphi \equiv \operatorname{sn}(\tau, m)$  y  $\operatorname{cos}\varphi \equiv \operatorname{cn}(\tau, m)$  y la notación  $pq(\tau, m) = pq(\tau)$  por simplicidad. Sustituyendo las series de Fourier generalizadas calculadas en el apartado 3.2.3 de los productos de funciones elípticas de Jacobi que aparecen en la expresión anterior, series (3.11) a (3.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{a_1(m) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} \right] A_1 + qa_1(m)B_1 \right\} \operatorname{cos}\varphi + \\ & + \left\{ -qb_1(m)A_1 + \left[ \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{b_1(m) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} \right] B_1 \right\} \operatorname{sen}\varphi + \\ & + \varepsilon \frac{a_0(m) - \sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} A_0 + (\text{armónicos de alto orden}) = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $a_0(m)$ ,  $a_1(m)$  y  $b_1(m)$  son los coeficientes de las series generalizadas de Fourier, determinados por las ecuaciones (3.11), (3.14) y (3.15).

El principio de balance armónico requiere que el término independiente, y los coeficientes de  $\operatorname{sen}\varphi$  y  $\operatorname{cos}\varphi$  se anulen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{a_0(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} A_0 &= 0, \\
 \left[ \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{a_1(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \right] A_1 + qa_1(m) B_1 &= 0, \\
 -qb_1(m) A_1 + \left[ \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{b_1(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} \right] B_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

La existencia de soluciones no triviales del sistema de ecuaciones homogéneo resultante requiere que el determinante de la matriz de coeficientes se anule:

$$\begin{vmatrix}
 \varepsilon \frac{a_0(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} & 0 & 0 \\
 0 & \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{a_1(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}} & qa_1(m) \\
 0 & -qb_1(m) & \Omega^2 \left( \frac{m}{2} - 1 \right) + 2\varepsilon \frac{b_1(m) - \sqrt{1-m}}{1 - \sqrt{1-m}}
 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.61}$$

Resolviendo, deshaciendo los cambios (3.54) y despejando  $F$  en función del resto de parámetros:

$$F = F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta) = \frac{-\alpha_2(m, T) \pm \sqrt{\alpha_2^2(m, T) - 4\alpha_1(m)\alpha_3(m, T, \eta)}}{\alpha_1(m)}, \tag{3.62}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(m) &= \frac{4(a_1(m) - \sqrt{1-m})(b_1(m) - \sqrt{1-m})}{(1 - \sqrt{1-m})^2}, \\
 \alpha_2(m, T) &= \frac{8K^2(m)(m/2 - 1)(b_1(m) + a_1(m) - 2\sqrt{1-m})}{T^2(1 - \sqrt{1-m})}, \\
 \alpha_3(m, T, \eta) &= \frac{16K^4(m)}{T^4} \left( \frac{m}{2} - 1 \right)^2 + \frac{4\eta^2 K^2(m)}{T^2} a_1(m)b_1(m).
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Notar que la existencia de una solución no trivial de (3.60) implica la existencia de una solución periódica de la ecuación linealizada (3.56) y por tanto la estabilidad de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) del NIPKR de ecuación (3.53). De manera que las dos soluciones  $F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta)$  delimitan las fronteras de estabilidad de la solución estacionaria citada.

### 3.4.2.2 Análisis y verificación numérica de la frontera de estabilidad

A continuación se analiza la función  $F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta)$  que define el contorno de la región del espacio de parámetros en el que la solución estacionaria del NIPKR ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) es estable y que se ha obtenido por BAE en primer orden.

En primer lugar, en el caso de pulsos trigonométricos,  $m=0$ , se recupera la frontera de estabilidad, obtenida por BAC en primer orden, para el caso armónico definida por la ecuación (3.50):

$$\lim_{m \rightarrow 0} F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta) = F_{\pm}^{(1)}(T, \eta) = \frac{4\pi^2}{3T^2} \left[ 2 \pm \sqrt{1 - \frac{3\eta^2 T^2}{\pi^2}} \right], \quad (3.64)$$

lo que permite validar el análisis realizado, pues en el límite  $m=0$  el método del BAE converge al método del BAC.

En segundo lugar, la aproximación de primer orden  $F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta)$ , al igual que en el caso armónico, solo permite obtener de manera aproximada la frontera de inestabilidad de la primera lengua de inestabilidad en el plano de parámetros. Además, esta aproximación empeora conforme el pulso se estrecha, es decir, conforme  $m$  se acerca a la unidad. En cualquier caso, si reproduce el alargamiento hacia periodos crecientes de las lenguas de inestabilidad en el plano  $T$ - $F$  que tiene lugar conforme se estrecha el pulso como puede apreciarse en la Fig. 3-12. En ella se representa la frontera de estabilidad  $F_{\pm}^{(1)}(m, T, \eta)$ , en los casos  $m=0.1$ ,  $m=0.5$ ,  $m=0.99$  y  $m=1-10^{-6}$ .

Al igual que en el caso armónico, y para validar los resultados anteriores, se han determinado numéricamente las regiones de inestabilidad en el plano de parámetros  $T$ - $F$  dentro del intervalo numérico de éstos representado en la Fig. 3-12. Para ello, se ha partido de un retículo  $900 \times 1000$  en el plano de parámetros y para cada uno de los  $900.000$  puntos se ha integrado la ecuación (3.53) con  $\eta=0.2$ , para los valores de  $m$  antes mencionados con unas condiciones iniciales fijas. Se ha comprobado si la solución estacionaria al cabo de 400 ciclos es inestable utilizando como condición de inestabilidad:  $|x| > 10^{-6}$  o  $|\dot{x}| > 10^{-6}$ .

En la Fig. 3-12 se han sombreado las regiones de inestabilidad obtenidas por este procedimiento, observándose cómo la extensión de las zonas de inestabilidad de la solución estacionaria en el plano de parámetros  $T$ - $F$  aumenta conforme lo hace  $m$ . Este comportamiento está caracterizado por el engrosamiento de las lenguas de inestabilidad y la simultánea reducción del número de éstas.

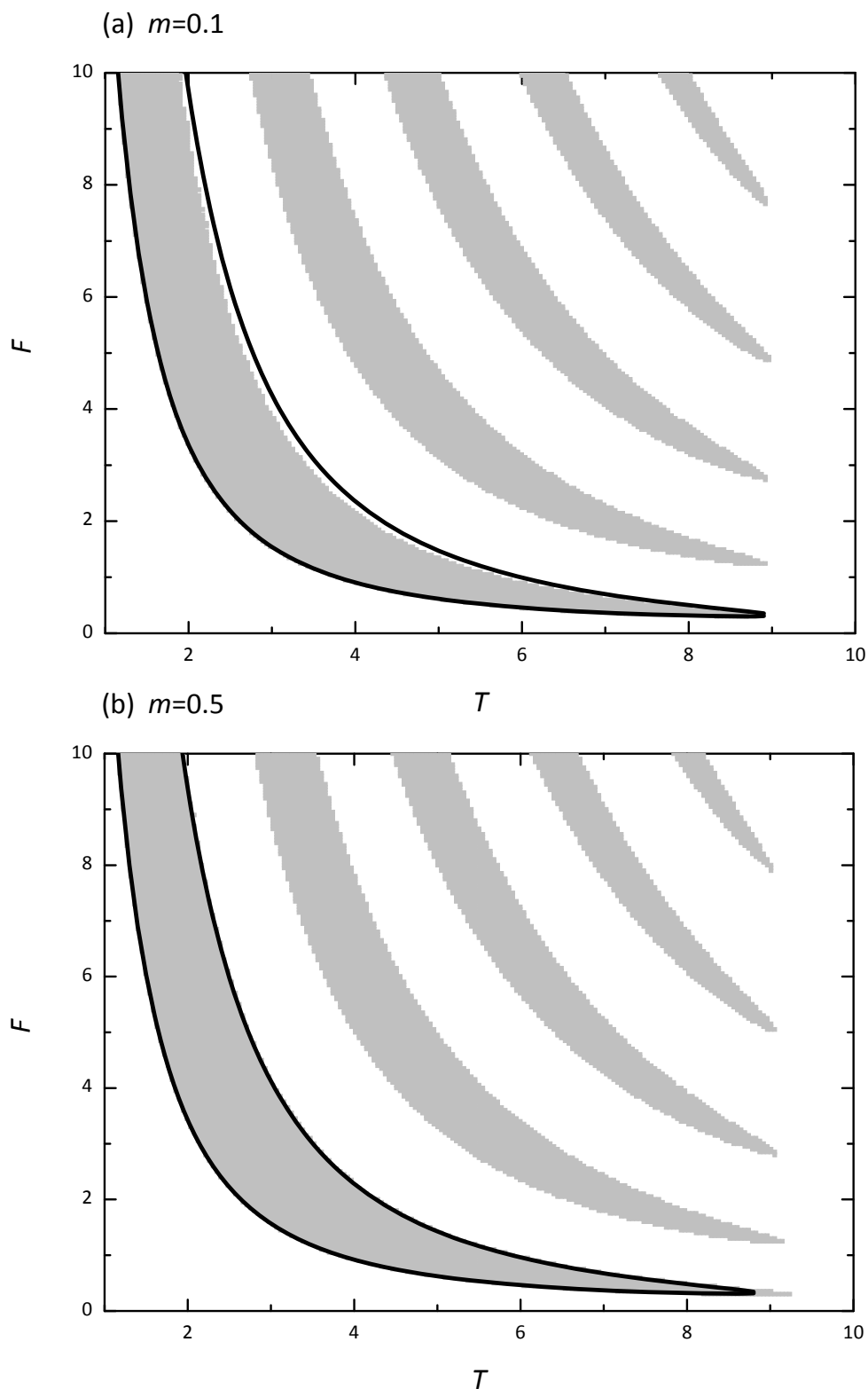


Figura 3-12 Fronteras de estabilidad  $F_{\pm}^{(1)}(m=\text{cte}, T, \eta=0.2)$  [cf. Ec. (3.62)] en el plano de parámetros  $T$ - $F$  de la solución estacionaria ( $x=0, \dot{x}=0$ ) del NIPKR en los casos (a)  $m=0.1$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.99$  y (d)  $m=1 \cdot 10^{-6}$  obtenida por BAE en primer orden. Las zonas sombreadas corresponden a zonas de inestabilidad obtenidas numéricamente a partir de la integración de la Ec. (3.53) un total de 400 ciclos para un retículo  $900 \times 1000$  en el plano de parámetros  $T$ - $F$ .

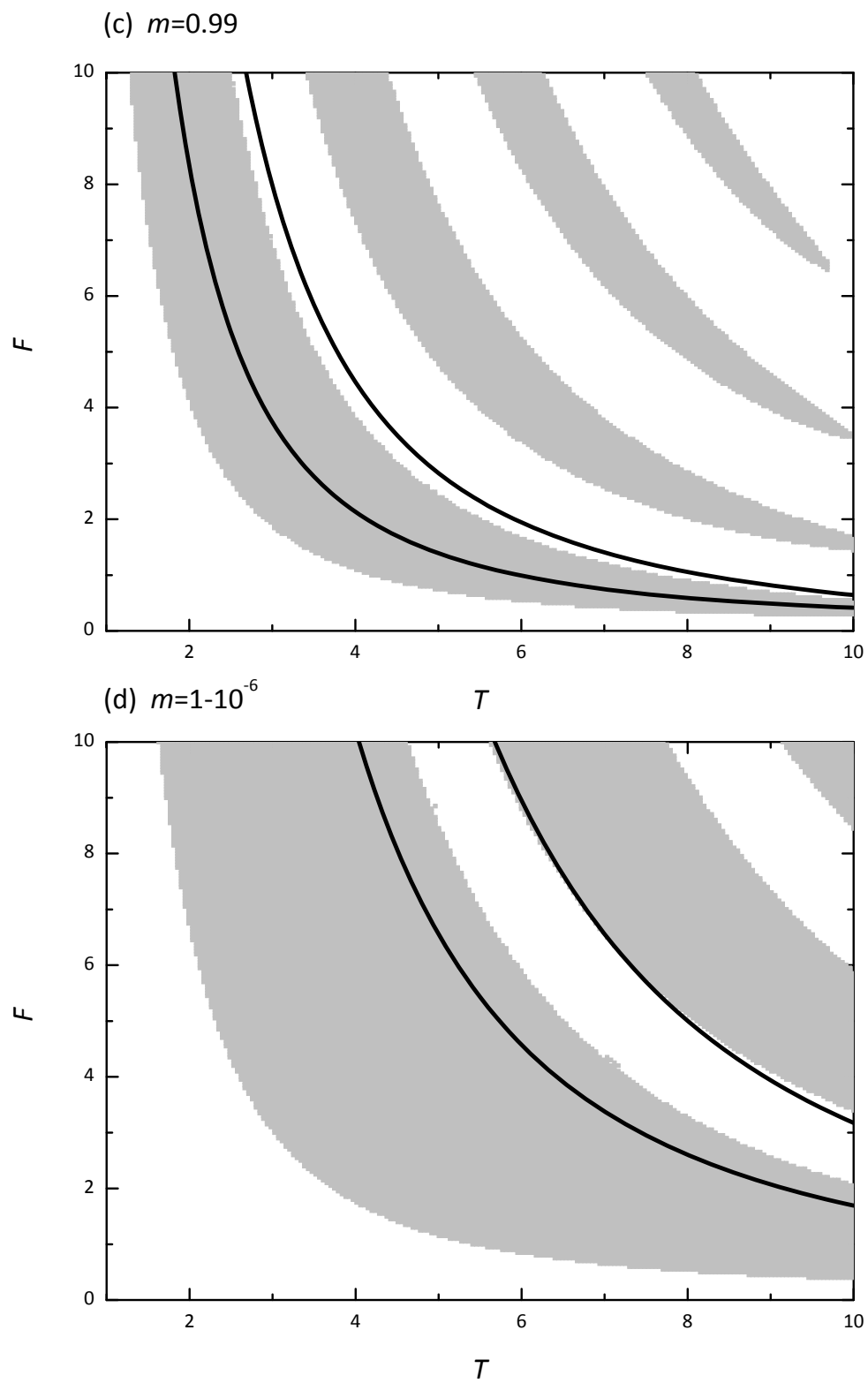


Figura 3-12 Continuación

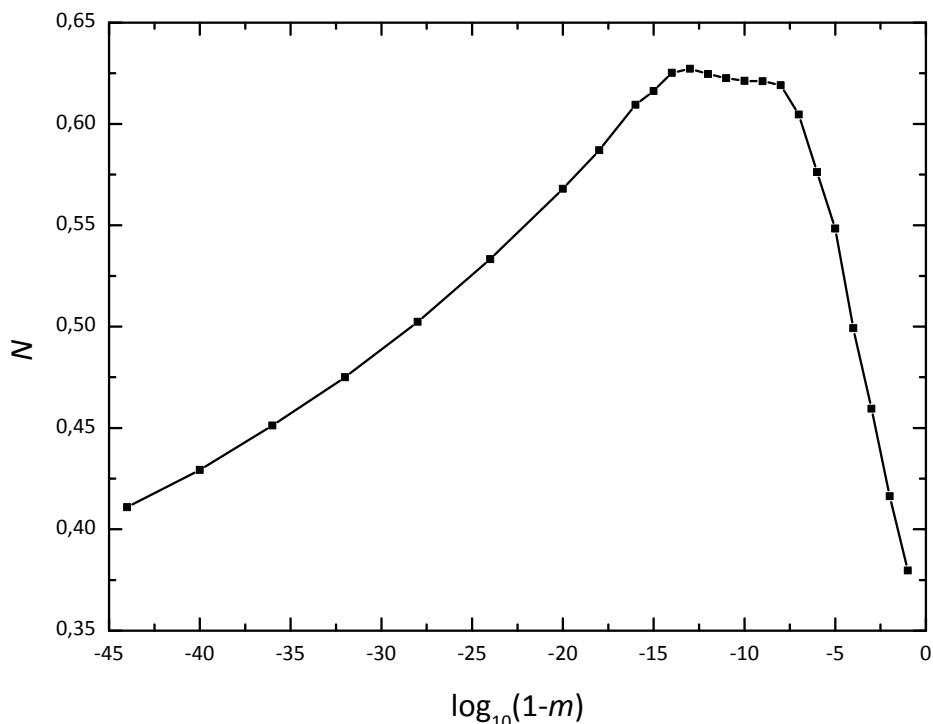


Figura 3-13 Fracción de puntos de inestabilidad de la solución  $(x=0, \dot{x}=0)$  del NIPKR en el plano de parámetros  $T$ - $F$ ,  $N$ , vs.  $m$ , parámetro que controla la forma del pulso. Nótese la existencia de un máximo de  $N$  en el entorno de  $m=1-10^{-10}$ .

Puesto que la solución estacionaria del NIPKR  $(x=0, \dot{x}=0)$  es estable en todo el espacio de parámetros en el caso  $m=1$ , en el que el pulso es nulo excepto en un conjunto numerable de instantes aislados, se puede deducir la existencia de un valor del parámetro  $m$  que controla la forma y anchura del pulso, cercano a la unidad, para el cual la extensión de la región de inestabilidad en el plano de parámetros es máxima.

Para determinar el valor del parámetro  $m$  para el cual la extensión de la región de inestabilidad es máxima, se representa en la Fig. 3-13 la fracción relativa de inestabilidad  $N$  en función del parámetro elíptico  $m$ . La fracción relativa de inestabilidad  $N$  determina la fracción de puntos de un retículo  $100 \times 100$  en el plano de parámetros  $T$ - $F$  con  $T \in [0.1, 10]$  y  $F \in [0, 10]$  en el que la solución estacionaria es inestable al cabo de 400 ciclos. En la figura se muestra que en el intervalo entre  $m \approx 1-10^{-8}$  y  $m \approx 1-10^{-14}$  la extensión de la región de inestabilidad en el espacio de parámetros es máxima. Notar que en dicho intervalo de valores de  $m$  la anchura del pulso a mitad de amplitud varía entre el 8% y el 12% del periodo, lo que confirma la importancia de modelar de manera realista los pulsos periódicos en el estudio del *kicked rotator*, al menos en lo referente a estabilidad estructural de las soluciones estacionarias.

Para estudiar el tiempo necesario que requiere el oscilador hasta alcanzar el equilibrio se ha determinado la longitud del transitorio, medida en ciclos, para unos valores fijos de los parámetros  $\eta$ ,  $F$  y  $T$  y para un retículo  $500 \times 500$  de condiciones iniciales uniformemente distribuidas. Para cada una de estas condiciones iniciales, se ha medido el número de ciclos

necesarios para alcanzar la estabilidad. Los datos acumulados se han ordenado para obtener la fracción relativa  $N$  de condiciones iniciales vs. la longitud del transitorio. Como ejemplo ilustrativo, en la Fig. 3-14 se muestra dicha distribución con  $\eta=0.2$ ,  $F=2$  y  $T=6$  para 3 valores distintos del parámetro  $m$ . Las curvas numéricas obtenidas, para cada valor de  $m$ , parecen ajustarse a una distribución sigmoïdal de Boltzman:

$$N(n) = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{(n-n_0)/d}}, \quad (3.65)$$

con  $A_1 \approx 0$ ,  $A_2 \approx 1$  y  $d=d(m)$ , donde  $n_0$  representa una estimación del tiempo, medido en ciclos, para el cual  $N(n=n_0)=0.5$ . Los valores de los parámetros de los ajustes sigmoïdales representados en la Fig. 3-14 se muestran en la Tabla 3-2. El valor de  $n_0$  puede considerarse como una medida adecuada de la longitud del transitorio necesario para alcanzar el equilibrio, y como puede observarse en la Tabla 3-2 aumenta conforme lo hace el valor de  $m$ , confirmando lo comentado acerca de la extensión de las regiones de inestabilidad en el espacio de parámetros: conforme el pulso se estrecha la solución estacionaria se hace más inestable.

La Fig. 3-15 muestra una gráfica de  $n_0$ , como parámetro que caracteriza la longitud del transitorio, en función de  $m$ , se ha propuesto un ajuste heurístico (*ansatz*) de tipo elíptico,  $n_0(m=0) - K(m=0) + K(m)$ , habida cuenta del crecimiento asintótico que se produce cuando  $m \rightarrow 1$  y de la dependencia de la función que define el pulso con la integral de primera elíptica de primera especie  $K(m)$ .

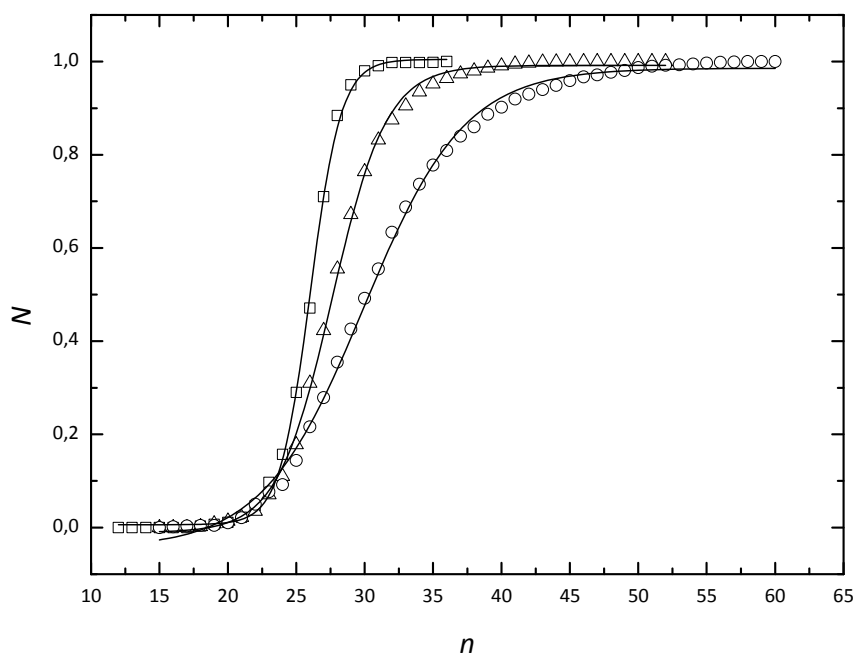


Figura 3-14 Fracción de condiciones iniciales  $N$  vs. número de ciclos  $n$  necesarios para alcanzar la solución estacionaria de equilibrio con  $\eta=0.2$ ,  $F=2.0$  y  $T=6.0$  y tres valores del parámetro de forma: (a)  $m=0$  ( $\square$ ), (b)  $m=0.99$  ( $\Delta$ ), y (c)  $m=0.995$  ( $\circ$ ), junto con los ajustes sigmoïdales correspondientes [cf. Ec. (3.65) y Tabla 3-2].



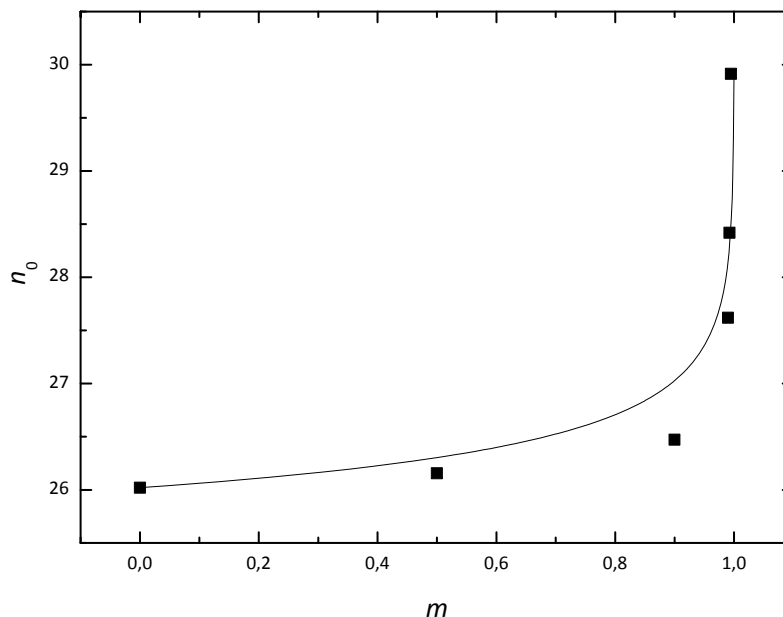


Figura 3-15 Gráfica de  $n_0$  vs.  $m$ , donde  $n_0$  es el número de ciclos para el que  $N(n=n_0)=0.5$  [cf. Ec. (3.65)] el cual representa una medida del tiempo medio necesario para alcanzar equilibrio. En línea continua el ajuste elíptico  $n_0(m=0)-K(m=0)+K(m)$ .

A modo de ejemplo, en la Fig. 3-16 se muestran instantáneas de las cuencas de atracción de la solución estacionaria en el instante  $t=25T$ , con los mismos valores de los parámetros que se han usado en la Fig. 3-14. Se observa cómo efectivamente la extensión de la cuenca de atracción (las zonas claras) se reduce conforme aumenta el parámetro elíptico  $m$ . Además del carácter fractal de las cuencas, también se pone de manifiesto la simetría del NIPKR de ecuación (3.53) con respecto a la transformación  $(x \rightarrow -x)$ , en efecto si  $[x(t), \dot{x}(t)]$  es una solución del NIPKR,  $[-x(t), -\dot{x}(t)]$  también lo es, y por tanto si  $(x_0, \dot{x}_0)$  pertenece a la cuenca de atracción de la solución estacionaria,  $(-x_0, -\dot{x}_0)$  también pertenece a dicha cuenca.

La comparación de las fronteras obtenidas analíticamente y las regiones de inestabilidad obtenidas numéricamente indican la necesidad de realizar aproximaciones de orden superior para reproducir con suficiente precisión la inestabilidad de la solución estacionaria en los casos en los que el pulso se estrecha,  $m \rightarrow 1$ , posiblemente porque para poder modelar pulsos estrechos con cierta precisión es necesario considerar más términos en la serie de Fourier generalizada del pulso. No obstante el comportamiento cualitativo de dichas fronteras es reproducido por la aproximación de primer orden.

<b>Parámetros de los ajustes sigmoidales</b>				
<b>[cf. Ec. (3.65) y Fig. 3-14]</b>				
$m$	$A_1$	$A_2$	$n_0$	$d$
0	0.00619	1.00477	26.02	1.121
0.99	-0.01074	0.99221	27.60	1.993
0.995	-0.04435	0.98582	29.92	3.668

Tabla 3-2 Parámetros de los ajustes sigmoidales [cf. Ec. (3.65) y Fig. 3-14]

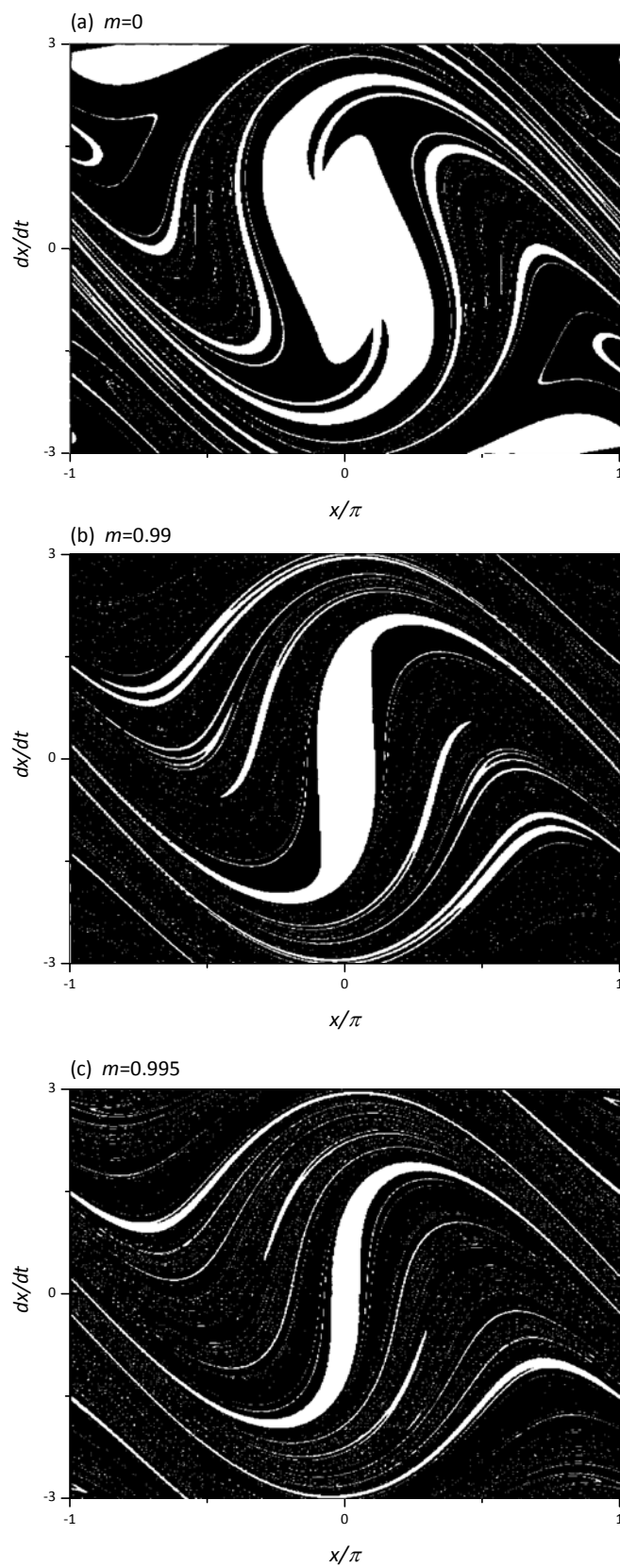


Figura 3-16 Cuencas de atracción instantáneas (en color blanco) de la solución estacionaria de equilibrio ( $x=0, \dot{x}=0$ ) en el instante  $t=257$  para los mismo valores de los parámetros que en la Fig. 3-14.

### 3.4.3 Inestabilidad y umbral caótico. Crisis inducida por el cambio en la forma de onda del pulso

#### 3.4.3.1 Regiones caóticas y de inestabilidad en el espacio de parámetros

En el apartado 2.5 del presente trabajo se ha demostrado teórica y numéricamente que la extensión de las regiones caóticas en el espacio de parámetros del NIPKR presenta un máximo cuando se varía la anchura efectiva del pulso variando el parámetro  $m$ . El mismo resultado se ha obtenido para el caso de las regiones de inestabilidad de la solución estacionaria. Además, fijada la forma y anchura del pulso y la disipación, las regiones caóticas y las regiones de inestabilidad en el plano de parámetros  $T$ - $F$  muestran una estructura similar a base de bandas o lenguas. La comparación de las Figs. 2-38 y 3-10 para el caso armónico y las Figs. 2-42 y 3-12 para el caso elíptico confirman dicha similitud estructural.

Los diagramas de bifurcación representados en la Fig. 3-17 confirman las conclusiones obtenidas referidas a la existencia de un máximo en la extensión de las regiones caóticas y de inestabilidad en el espacio de parámetros, que tiene lugar para valores del parámetro elíptico  $m$  cercanos a la unidad. En efecto, se observa cómo las ventanas caóticas y de inestabilidad en los diagramas de bifurcación aumentan en el sentido creciente de  $m$  y, tal como se ha mencionado con anterioridad, en el límite  $m=1$  no cabe ni inestabilidad ni comportamiento caótico.

Los límites de las ventanas de inestabilidad observados en los diagramas de bifurcación de la Fig. 3-17, en los que se ha considerado  $F=4.0$ , coinciden numéricamente con los que se pueden determinar a partir de la Fig. 3-12 donde se representaban las lenguas de inestabilidad si nos fijamos en la recta  $F=4.0$  del plano de parámetros  $T$ - $F$ .

#### 3.4.3.2 Crisis inducida por el cambio en la forma de onda del pulso. Mapa Elíptico.

Es instructivo comparar las regiones caóticas y de inestabilidad en el plano de parámetros del NIPKR. Es importante recordar que las regiones caóticas determinadas en el capítulo anterior se obtuvieron a partir del cálculo de exponentes de Lyapunov en un retículo 100x100 en el plano  $T$ - $F$ , calculados de acuerdo con el algoritmo desarrollado en [WSSV85] y marcando como caóticos los puntos de dicho retículo con exponente maximal de Lyapunov positivo ( $\lambda_1 > 10^{-3}$ ).

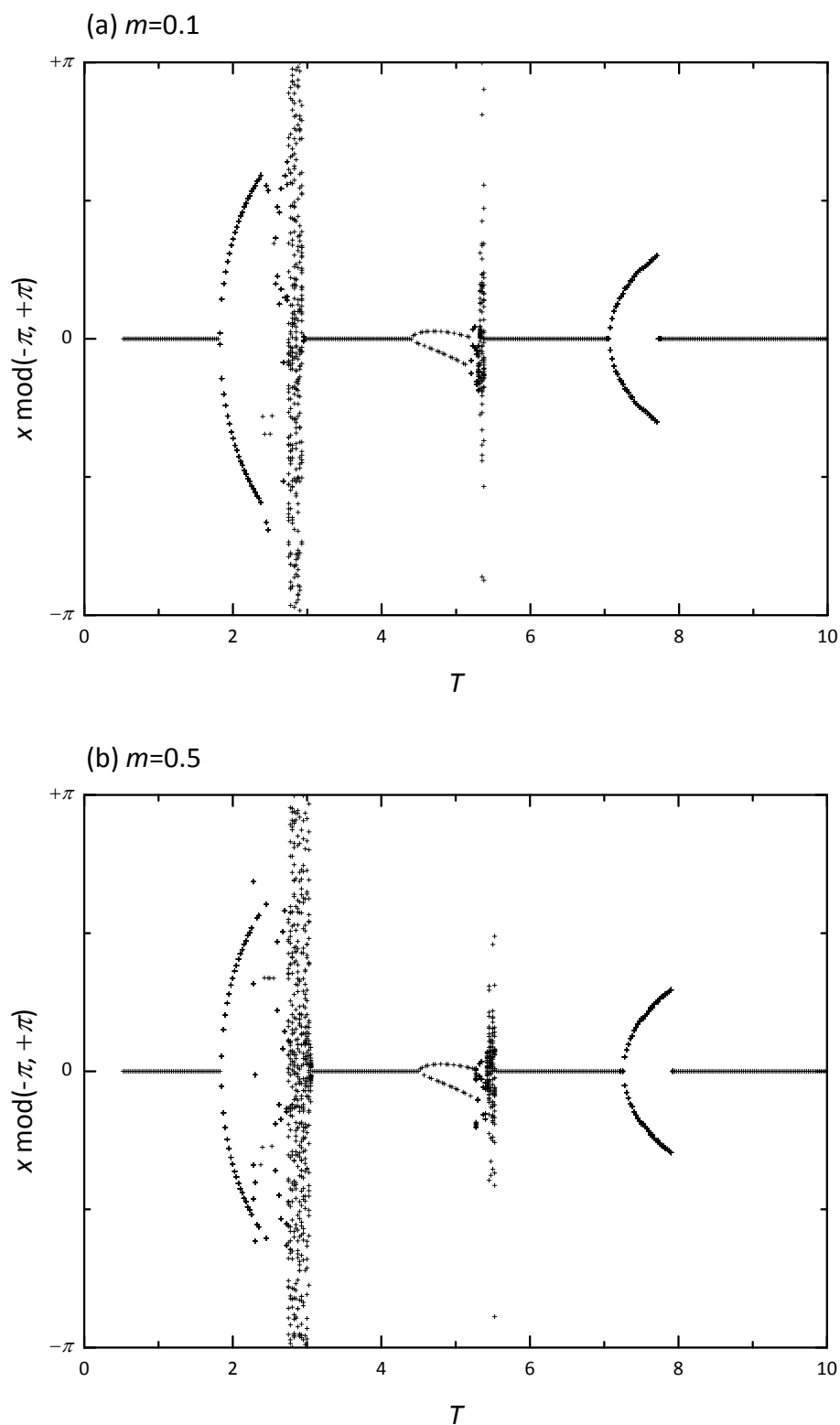


Figura 3-17 Diagramas de bifurcación del NIPKR con  $\eta=0.2$  y  $F=4.0$ , en los casos (a)  $m=0.1$ , (b)  $m=0.5$ , (c)  $m=0.99$  y (d)  $m=1-10^{-6}$  en los que se representa  $x \bmod(-\pi, +\pi)$  vs.  $T$  tras la integración de un total de 400 ciclos. Nótese cómo las ventanas de inestabilidad concuerdan con las fronteras numéricas de la Fig. 3-13 en la recta  $F=4.0$  para cada valor de  $m$  y cómo la extensión de las ventanas caóticas aumenta en sentido creciente de  $m$ .

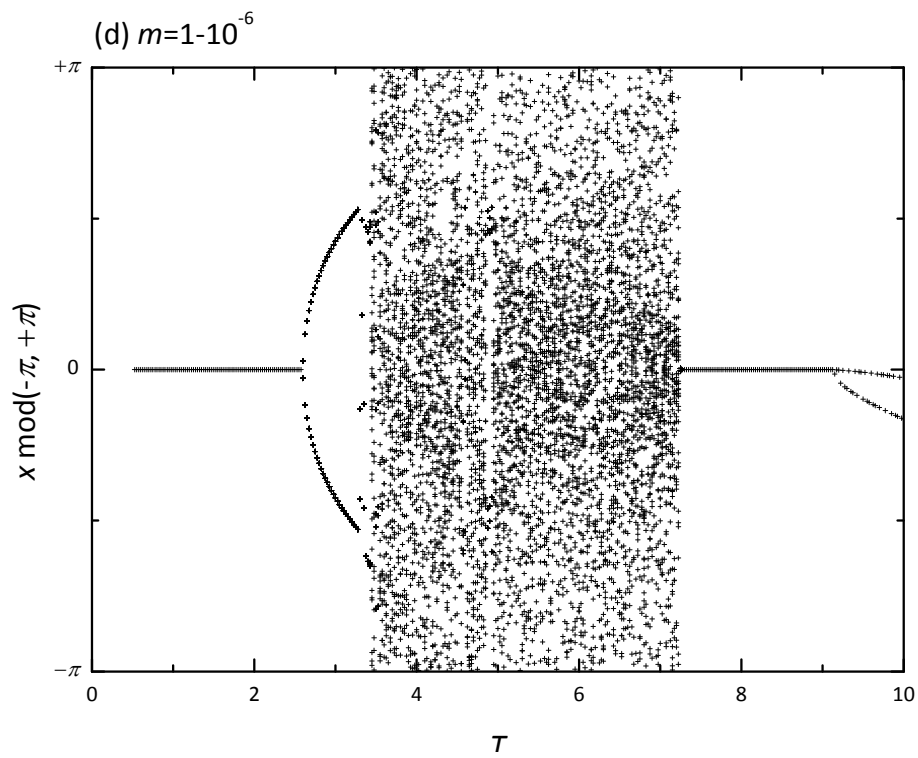
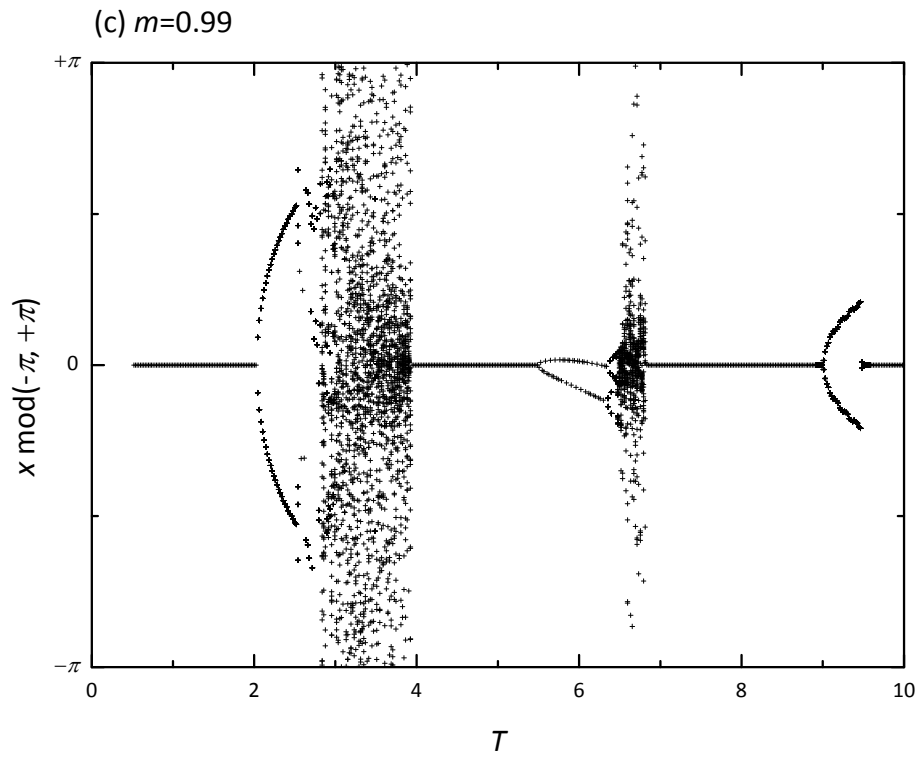


Figura 3-17 Continuación

En la Fig. 3-18 se comparan las regiones caóticas, en color negro, con las de inestabilidad, en gris claro, en el caso armónico ( $m=0$ ) y en el caso elíptico ( $m=0.99$ ), se puede apreciar cómo los contornos del lado derecho de las lenguas caóticas y de inestabilidad coinciden de manera aproximada. Un resultado similar aparece en [WB92] para un péndulo paramétricamente amortiguado. La razón de dicha coincidencia es simple, el lado común de los contornos caóticos y de inestabilidad corresponde a una crisis inversa de contorno (*inverse boundary crisis*), una transición abrupta en la que el atractor caótico se destruye al colisionar con una órbita periódica inestable en el contorno de su cuenca de atracción. Se pueden observar ejemplos de dicha transición en los diagramas de bifurcación de la Fig. 3-17 en los que se observa, para cada valor de  $m$  estudiado, cómo la transición en el lado derecho de la primera ventana de inestabilidad es una crisis en la que, en sentido creciente de  $T$ , tiene lugar una transición entre caos estacionario a gran escala y la solución estacionaria de equilibrio ( $x=0, \dot{x}=0$ ).

Basándonos en el problema central del presente trabajo, el comportamiento de un sistema dinámico cuando varía la forma de onda de la excitación paramétrica, se muestra en la Fig. 3-19 el diagrama de bifurcación del NIPKR en la que se representa la primera componente de la aplicación de Poincaré en función del parámetro elíptico  $m$ , parámetro que controla la forma de del pulso, manteniendo constantes el resto de los parámetros  $F=4.0$ ,  $T=3.0$  y  $\eta=0.2$ . En el diagrama de bifurcación se observa una crisis de contorno (*boundary crisis*) consistente en una transición abrupta entre la solución estacionaria de equilibrio, para  $m < m_c = 0.34\dots$ , y comportamiento caótico para  $m > m_c$ . Esta crisis esta inducida por el cambio en la forma de onda del pulso de la excitación paramétrica.

Para explicar los mecanismos que subyacen al origen de dicha crisis vamos a utilizar un mapa o aplicación de tipo elíptico [CMGH03]:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\theta_n \bmod(2\pi) \\ z_{n+1} &= \alpha z_n + z_n^2 + \beta \operatorname{cn}^2(\Omega\theta_n + \Phi; m),\end{aligned}\tag{3.66}$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Phi$  son parámetros y  $\operatorname{cn}(\Omega\theta_n + \Phi; m)$  es la función elíptica de Jacobi cosam.

Puesto que solo estamos interesados en analizar la variación de la forma del pulso, fijamos el valor del periodo  $T$  haciendo que la frecuencia sea  $\Omega = \Omega(m) \equiv 2K(m)/T$  y la fase inicial  $\Phi = \Phi(\varphi, m) \equiv 2K(m)\varphi/T$  con  $\varphi \in [0, T]$ . Notar que la función  $\operatorname{cn}^2(\Omega\theta_n + \Phi; m)$  representa un pulso similar al pulso  $p(t; T, m)$  [cf. Ec. (3.38)] estudiado para modelar la cadena de *kicks* periódicos en el NIPKR. En efecto, en el caso  $m=0$ ,  $\operatorname{cn}^2(\Omega\theta_n + \Phi; m=0) = \cos^2(\pi t/T + \pi\varphi/T)$  mientras que  $p(t; T, m=0) = \cos^2(\pi t/T)$  y además conforme aumenta el valor de  $m$  la anchura efectiva del pulso disminuye hasta alcanzar anchura nula en el límite  $m=1$  en ambos pulsos.

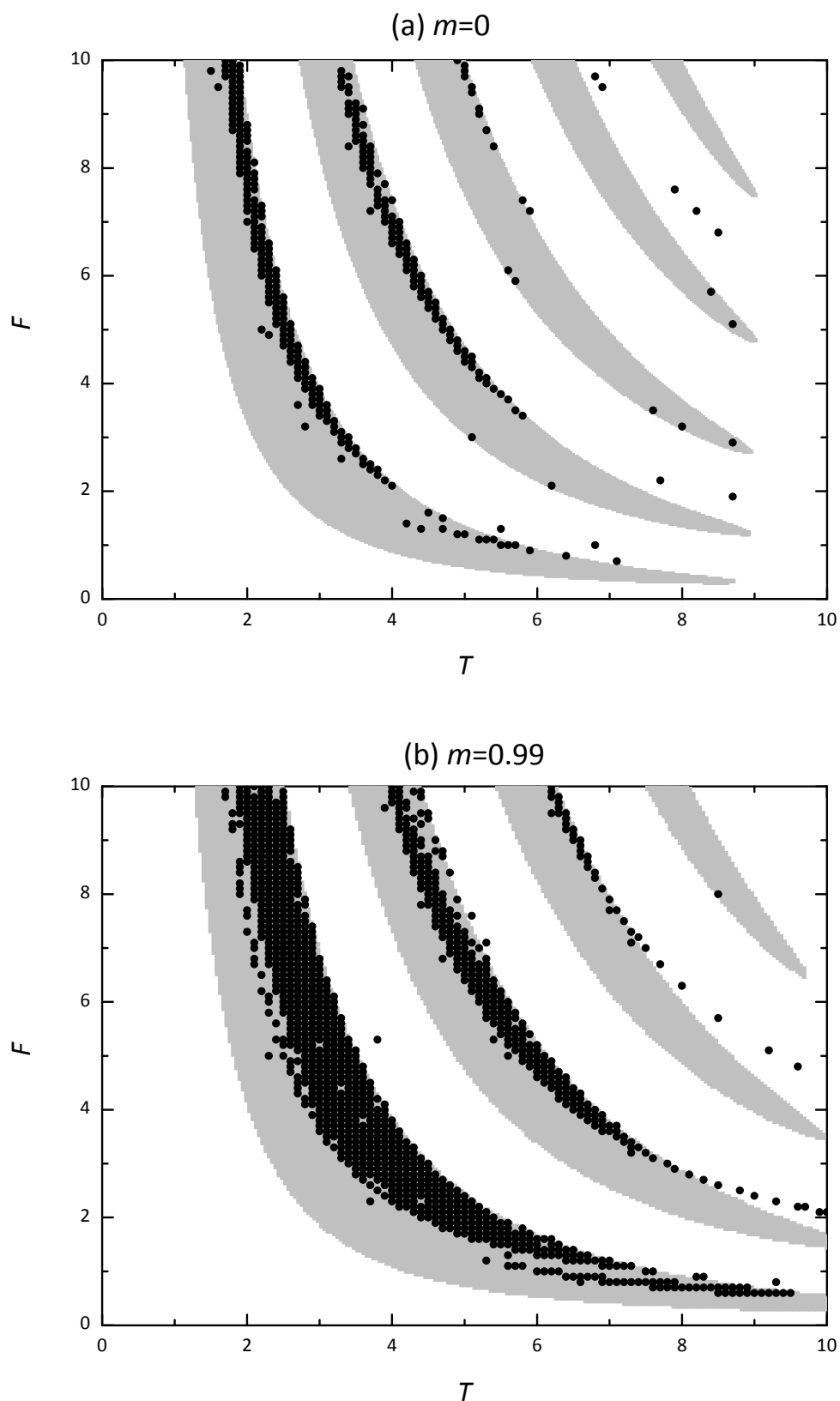


Figura 3-18 Regiones de inestabilidad (gris), y regiones caóticas (negro) con exponente maximal de Lyapunov positivo, (véanse las Figs. 2-38 y 2-42(c)) en el plano de parámetros  $T$ - $F$  del NIPKR con  $\eta=0.2$  en los casos: (a) pulso trigonométrico  $m=0$ , y (b) pulso elíptico  $m=0.99$ .

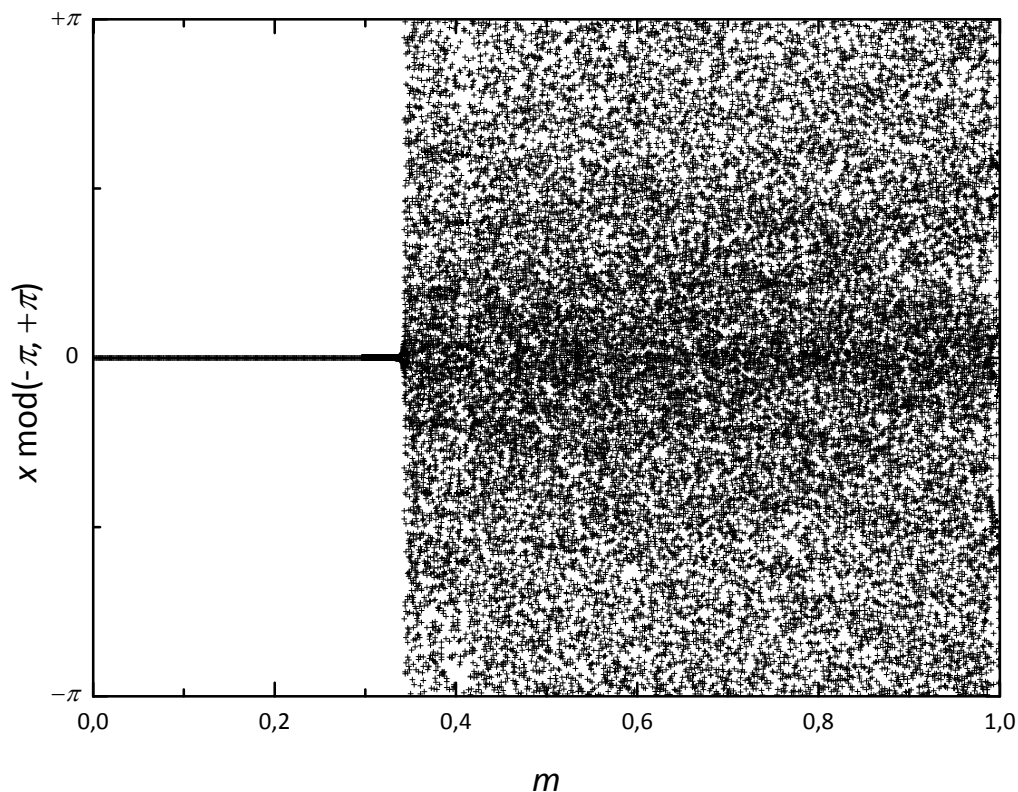


Figura 3-19 Diagrama de bifurcación del NIPKR con  $\eta=0.2$ ,  $T=3.0$  y  $F=4.0$  en el que se representa  $x \text{ mod}(-\pi, +\pi)$  vs.  $m$  tras la integración de 400 ciclos. En  $m=m_c=0.34\dots$  el oscilador experimenta una crisis de contorno.

Si  $m=0$ ,  $\varphi=0$  y  $T=2\pi$  se recupera una aplicación similar a la estudiada por Grebogi C., Ott E. y Yorke J.A. en la referencia [GOY83]. En la citada referencia estudiaron la aplicación:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \alpha z_n + z_n^2 + \beta \cos(\theta_n) \\ \theta_{n+1} &= 2\theta_n \text{ mod}(2\pi), \end{aligned} \tag{3.67}$$

para explicar el mecanismo subyacente a la creación o destrucción de un atractor caótico por medio de una crisis, en base a la colisión de un atractor caótico con la cuenca de atracción de otro no caótico. La simulaciones numéricas realizadas mostraron que, para ciertos valores de los parámetros, la aplicación (3.67) presenta dos atractores:  $z=+\infty$  (para nuestro propósito puede considerarse como una atractor no caótico genérico) y un atractor caótico confinado en la región  $z \in [-0.1\dots, +0.1\dots]$ , cuyas cuencas de atracción están separadas por un contorno fractal. En la Fig. 3-20 se muestra para  $\alpha=0.5$  y  $\beta=0.04$  la cuenca de atracción del atractor no caótico en color negro y la del atractor caótico en color blanco (nótese el carácter fractal del contorno que separa ambas cuencas). A efectos instructivos el atractor caótico también se incluye en la figura en color gris.

La aplicación tiene dos puntos fijos inestables en la recta  $\theta=0$ :  $(\theta, z)=(0, z_b)$  y  $(0, z_c)$  que coinciden, respectivamente, con el límite inferior de la cuenca superior del atractor no caótico y con el límite superior del atractor caótico (véase la Fig. 3-20), y cuyas coordenadas  $z$  coinciden



con las raíces de la ecuación  $z = \alpha z + z^2 + \beta$  (sustitúyase  $\theta=0$  en la aplicación (3.67) y determinense sus puntos fijos). Ecuación que posee dos raíces reales:

$$z_{\pm} = \frac{(1-\alpha) \pm [(1-\alpha)^2 - 4\beta]^{1/2}}{2}, \tag{3.68}$$

donde  $z_b = z_+$  y  $z_c = z_-$ .

Cuando  $\alpha$  se incrementa desde  $\alpha < 1-2\beta^{1/2}$ , los puntos fijos inestables  $(0, z_b)$  y  $(0, z_c)$  se acercan hasta que, al alcanzar  $\alpha$  el valor  $\alpha^* = 1-2\beta^{1/2}$ , ambos coinciden y por tanto se produce el contacto entre la cuenca de atracción del atractor no caótico y el atractor caótico. Además, ambos puntos fijos desaparecen junto con el atractor caótico cuando  $\alpha > \alpha^*$ : el atractor caótico es sustituido por transitorios caóticos hacia el atractor no caótico debido a que se ha producido una crisis en  $\alpha = \alpha^*$ . El estudio de aplicaciones similares muestra que la descripción anterior era igualmente válida si en lugar de un par de puntos fijos se cuenta con un par de órbitas periódicas.

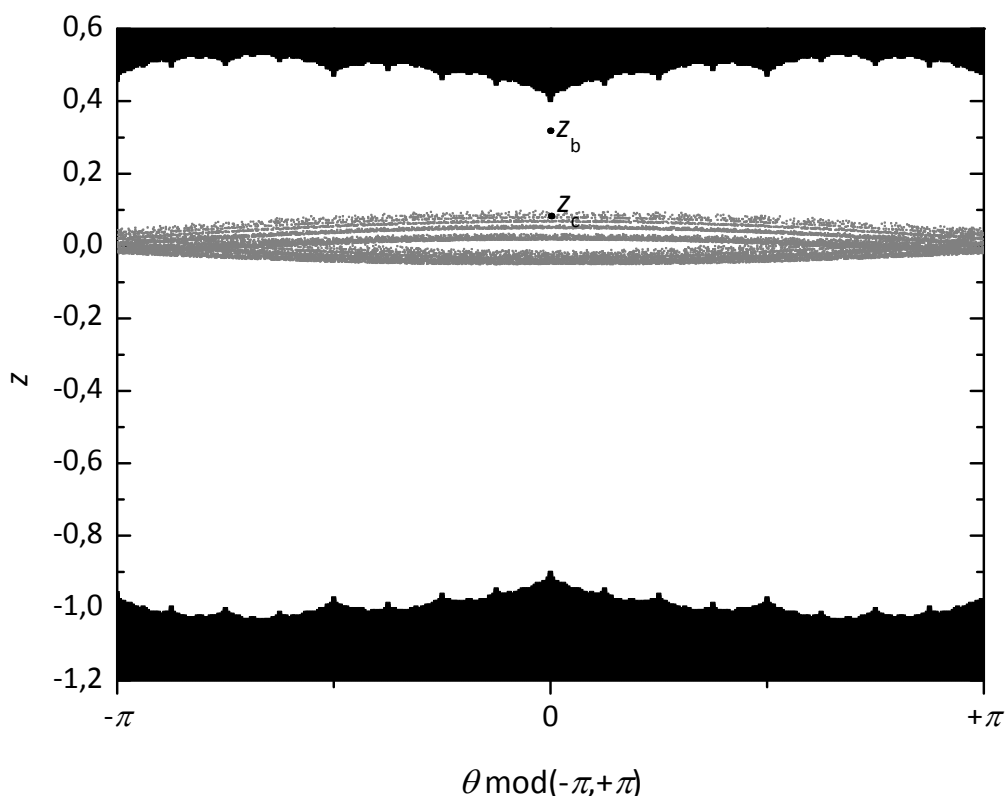


Figura 3-20 Cuencas de atracción del atractor no caótico  $z=\infty$  (negro) y del atractor caótico (blanco), junto con el atractor caótico (gris) de la aplicación de ecuación (3.67) con  $\alpha=0.60$ ,  $\beta=0.04$ , estudiada por Grebogi *et al.* [GOY83] para explicar el mecanismo por el que tiene lugar una crisis. Nótese que el límite inferior de la cuenca superior del atractor no caótico  $z_b$  y el límite superior del atractor caótico  $z_c$  coinciden con las raíces de la ecuación (3.68):  $z_b = z_+ = 0.4$   $z_c = z_- = 0.1$ .

Volviendo a la aplicación elíptica descrita por la ecuación (3.66), las simulaciones numéricas muestran que tiene un comportamiento similar a la aplicación estudiada por Grebogi *et al.* Existen unos valores críticos de los parámetros de la aplicación (3.66),  $(\alpha^*, \beta^*, T^*, \varphi^*, m^*)$ , para los cuales los puntos fijos inestables  $(\theta, z)=(0, z_b)$  y  $(0, z_c)$  coinciden, produciéndose la colisión entre las cuencas de atracción de los atractores caótico y no caótico, siendo  $z_b$  el límite inferior de la cuenca superior del atractor no caótico ( $z=+\infty$ ) y  $z_c$  el límite superior del atractor caótico. Poniendo  $\theta=0$  y asumiendo que  $z_n$  es independiente de  $n$  en la ecuación (3.66) se determinan los puntos fijos  $z_b=z_+$  y  $z_c=z_-$  siendo  $z_{\pm}$ :

$$z_{\pm} = \frac{(1-\alpha) \pm [(1-\alpha)^2 - 4\beta \operatorname{cn}^2(2K\varphi/T; m)]^{1/2}}{2}. \quad (3.69)$$

La crisis tiene lugar cuando  $z_+=z_-$  para un valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \alpha^* \equiv 1 - 2\sqrt{\beta^*} \operatorname{cn} \left[ \frac{2K(m^*)\varphi^*}{T^*}; m^* \right]. \quad (3.70)$$

Supongamos ahora que fijamos los valores de  $\beta=\beta^*$ ,  $T=T^*$ ,  $\varphi=\varphi^*$  y elegimos un valor de  $m \leq 1$  (un pulso suficientemente estrecho) y un valor de  $\alpha < \alpha^* = \alpha^*(m^*)$ . Cuando hacemos decrecer  $m$ , desde  $m \leq 1$ ,  $\alpha^*(m)$  decrece de manera que los dos puntos fijos inestables se acercan el uno al otro y, en algún caso, en función de la elección de  $\beta^*$ ,  $T^*$ ,  $\varphi^*$  y  $\alpha$ , ambos puntos coinciden cuando  $\alpha^*(m=m^*)=\alpha$  produciéndose en tal caso la crisis.

En la Fig. 3-21 se muestran para un retículo de 400x360 puntos las cuencas de atracción del atractor no caótico ( $z=+\infty$ ) en color negro y en color blanco la del atractor caótico en situación de precrisis ( $\alpha < \alpha^* = 0.689$ ), con  $\alpha=0.60$ ,  $\beta=0.04$ ,  $T=1.0$ ,  $\varphi=0.1$  y  $m=0.99$ . En el mismo gráfico se muestra en color gris el atractor caótico. Nótese la estructura autosimilar en el detalle, resultado de iterar 40.000 veces la aplicación (3.66) partiendo de un punto perteneciente a su cuenca de atracción.

Los valores de  $z_b$  y  $z_c$  obtenidos de la simulación numérica se aproximan bastante a los obtenidos a partir de la ecuación (3.69). En situación de postcrisis ( $\alpha > \alpha^* = 0.689$ ) la cuenca de atracción del atractor no caótico ( $z=+\infty$ ) llenaría todo plano  $(\theta, z)$  puesto que, tras la colisión y aniquilamiento de los dos puntos fijos inestables, el comportamiento caótico estacionario es sustituido por transitorios caóticos, en ocasiones de gran longitud, tras los cuales se alcanza el atractor no caótico ( $z=+\infty$ ).

De esta manera, el mecanismo básico que da origen a la crisis es el mismo para ambas aplicaciones y, por ende, explica el origen de la crisis en el NIPKR inducida por el cambio de forma del pulso de la excitación paramétrica, que puede ser observada por ejemplo en el diagrama de bifurcación de la Fig. 3-19.

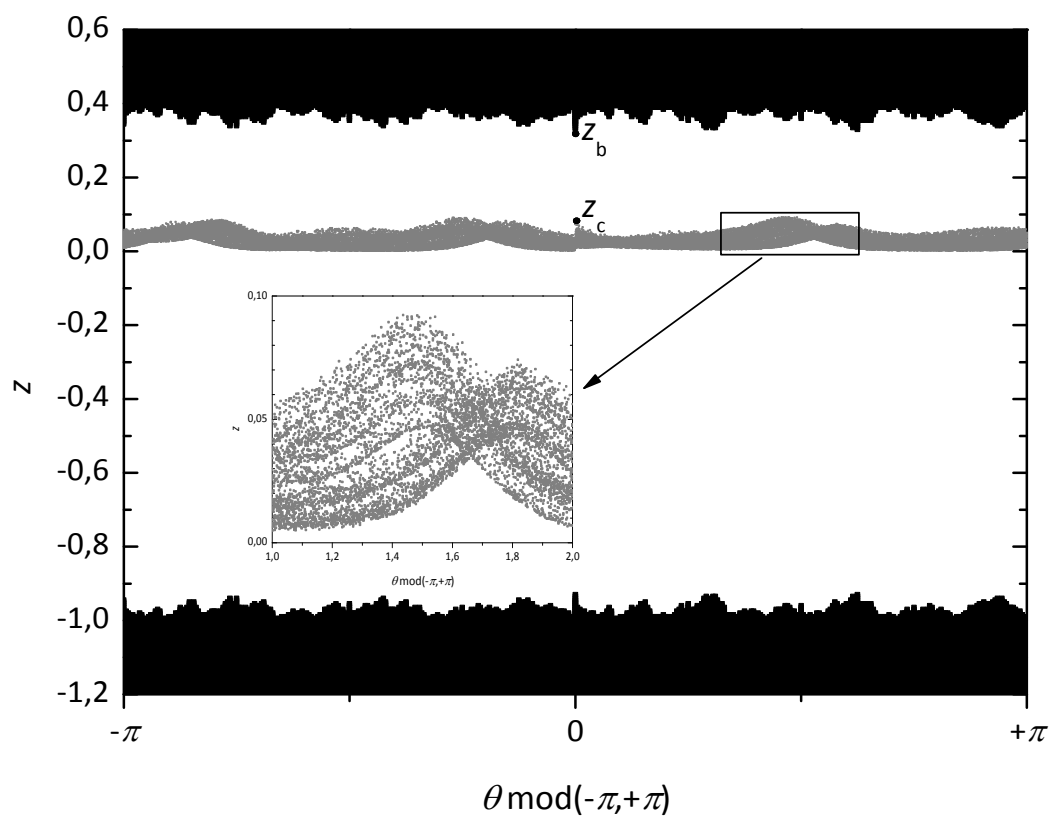


Figura 3-21 Cuencas de atracción del atractor no caótico  $z=\infty$  (negro) y del atractor caótico (blanco), junto con el atractor caótico (gris) de la aplicación de ecuación (3.66) con  $\alpha=0.60$ ,  $\beta=0.04$ ,  $T=1.0$ ,  $\varphi=0.1$  y  $m=0.99$ . Para dichos valores,  $z_b=z_+=0.326$  y  $z_c=z_-=0.074$  [cf. Ec. (3.69)] y el valor de  $\alpha$  para el cual ocurre la crisis es  $\alpha^*=0.689$  [cf. Ec. (3.70)]

Notar que ninguno de los fenómenos estudiados y referidos al cambio en la forma de onda del pulso están presentes en el *kicked rotator* clásico y pueden ser útiles en distintos campos científicos y tecnológicos en los que sea necesario usar una cadena de pulsos periódicos estrechos como por ejemplo en los campos de la óptica no lineal o de la neurociencia.



## Capítulo 4

# ESTABILIDAD DE ATRACTORES EXTRAÑOS NO CAÓTICOS

### 5.1 Introducción

En este capítulo se presenta una nueva ruta en la que aparecen atractores extraños no caóticos (AENC) que evolucionan hacia atractores caóticos o hacia cuasiperiodicidad variando únicamente la forma onda de la excitación cuasiperiódica. Con el fin de garantizar la universalidad de la nueva ruta se analizan dos modelos, uno continuo y otro discreto, que son generalizaciones elípticas de otros previamente estudiados en la bibliografía, lo que nos permitirá validar los resultados de los análisis realizados, resultados que fueron publicados en la referencia [CMGH02] y que se presentan a continuación.

Dentro del contexto del estudio de los sistemas dinámicos no lineales disipativos, el concepto de atractor extraño ha suscitado en las últimas décadas un gran interés. El término extraño, introducido por Ruelle y Takens [RT71], es usado para describir una clase de atractores en los cuales la dinámica es caótica, mostrando fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales [ER85]. Las órbitas con condiciones iniciales cercanas divergen exponencialmente con el tiempo produciendo impredecibilidad efectiva. Los atractores extraños más conocidos, como por ejemplo el de Lorentz [Lor63], muestran también geometría fractal, estructura autosimilar a distintas escalas espaciales.

Grebogi *et al.* en 1984 [GOPY84], simultáneamente con Kaneko [Kan84b] construyeron sistemas dinámicos con atractores que presentaban dos características: el atractor era no caótico pues el exponente maximal de Lyapunov era nulo o negativo, y el atractor tenía geometría fractal. La fractalidad del atractor implica que la dinámica en tales casos es

intrínsecamente aperiódica. En el artículo original, Grebogi define atractor extraño como un atractor que no es un conjunto finito de puntos y que no es diferenciable ni diferenciable a trozos, y define atractor caótico como aquel atractor para el cual las órbitas típicas tienen exponente de Lyapunov positivo. Se acuñó el término de atractor extraño<sup>1</sup> no caótico (AENC) para caracterizar dicho comportamiento que algunos autores [FKP06] interpretan como un estadio intermedio entre los comportamientos periódicos y cuasiperiódicos, y el comportamiento caótico, pues no presenta fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales como los primeros, pero la dinámica es aperiódica como en el segundo. Generalmente los AENC están asociados a sistemas con términos cuasiperiódicos y aparecen en las regiones del espacio de parámetros de transición orden-caos, y en ellas la *extrañeza* aparece antes que la caoticidad. En sistemas de baja dimensión en los que de acuerdo con el teorema de Bendixon-Poincaré no es posible la dinámica caótica, los AENC constituyen el estado de mayor complejidad del sistema.

Aunque no es posible diferenciar la imagen de un atractor extraño no caótico de uno no caótico, un estudio detallado de las órbitas en el espacio de fases o de las series temporales correspondientes a dos condiciones iniciales muy cercanas si nos permiten diferenciarlos. En el caso no caótico, las órbitas convergen y eventualmente coinciden mientras que en el caso del atractor caótico dichas órbitas divergen de manera exponencial. Obviamente en ambos casos la dinámica es aperiódica. La robustez de la sincronización característica de los atractores extraños no caóticos puede ser utilizada en aplicaciones que requieran aperiodicidad [PMR97, SNR08].

La caracterización rigurosa de un AENC es una tarea compleja que solo se ha podido llevar a cabo para un conjunto limitado de sistemas [BO96, BK91, Kel96], pues además de verificar la caoticidad y la extrañeza del atractor hay que verificar que aparece en una región finita del espacio de parámetros y no en un conjunto aislado de puntos del espacio de parámetros. Además del cálculo de exponentes de Lyapunov y de dimensión fractal [DGO89, GR05] se han desarrollado técnicas para la caracterización de los AENC basadas en funciones de correlación [PZFK95], análisis espectral [PZFK95, RBOA<sup>+</sup>87, YL97] y funciones de sensibilidad a la fase [NK96, PF95, SFKP96].

Aunque dado lo tardío de su descubrimiento, podríamos calificarlos como raros, las investigaciones posteriores muestran que son genéricos en sistemas dinámicos disipativos en los que los términos de forzamiento o de modulación paramétrica son cuasiperiódicos, obtenidos por ejemplo por adición de términos armónicos de frecuencias inconmensurables, y aparecen siempre en el entorno, en el espacio de parámetros, de atractores extraños caóticos y de atractores periódicos y cuasiperiódicos.

La primera confirmación experimental de la existencia de un AENC fue llevada a cabo por Ditto *et al.* [DSSR<sup>+</sup>90, HD91] estudiando una banda magnetoelástica fabricada con un material amorfo magnetostictivo, empotrado a una base y forzado cuasiperiódicamente por medio de

---

<sup>1</sup> En el contexto de los atractores extraños no caóticos el término extraño se refiere a la geometría espacial de estructura fractal y la aperiodicidad temporal.

dos campos magnéticos oscilantes de frecuencias inconmensurables. El cálculo de la dimensión fractal del atractor y el análisis espectral de la respuesta del oscilador confirmaron que se trataba de un AENC. Distintas versiones de este sistema magnetomecánico han sido utilizadas ampliamente en el estudio experimental de sistemas dinámicos no lineales y su comportamiento puede ser explicado en base a un oscilador de Duffing.

Los AENC también se han sido observado en circuitos electrónicos. Zhou *et al.* [ZMB92] estudiaron un SQUID (*Superconducting Quantum Interference Device*) en un simulador analógico caracterizando un AENC cerca de la transición a caos a partir del cálculo de exponentes de Lyapunov y de análisis espectral. Otros estudios experimentales similares en circuitos electrónicos alimentados por voltajes cuasiperiódicos pueden encontrarse en las referencias [SSTL08, TSVL06, VML99]. Zeyer *et al.* [ZMS95] forzaron cuasiperiódicamente una reacción Belousov-Zhabotinski superponiendo señales de dos reactores químicos periódicos independientes para caracterizar un AENC. Otros campos en los que se han observado AENC experimentalmente son la física de plasmas [DDDW97], la electroquímica [RP08] y la neurociencia [MS93].

Una importante área de investigación en el que los AENC tienen aplicación es en el estudio de los sistemas cuánticos con potenciales cuasiperiódicos. Bondeson *et al.* [BOA85] aplicando la transformación de Prüfer a la ecuación de Schrödinger y redefiniendo la variable independiente encontró que la ecuación de Schrödinger era isomorfa a la ecuación de un péndulo forzado, en la que el forzamiento cuasiperiódico del péndulo se correspondía con el potencial cuasiperiódico de la ecuación de Schrödinger. De manera que todo lo estudiado para el sistema clásico tenía su correlato en el sistema cuántico. En particular los estados localizados del sistema cuántico corresponden con AENC en el sistema clásico y el exponente de Lyapunov resulta ser una medida de la localización en el sistema cuántico. Otros desarrollos cuánticos basados en los modelos de Harper y Frenkel-Kontorova pueden encontrarse en las referencias [KS97a, KS97b].

En cuanto a los posibles escenarios para la formación de un AENC se han descrito por distintos autores distintas rutas: colisión de toros [HH94, OWGF01], fractalización [Kan84a, Kuz02, NK96], intermitencia [KLO03, PMR97, WFP97] y *blowout* [YL96]. El tipo de ruta que da lugar a la aparición de un AENC puede ser determinada en función de cómo varía el exponente de Lyapunov cuando el parámetro de control pasa a través del valor crítico.

## 5.2 Generalización elíptica de un péndulo plano con forzamiento cuasiperiódico

Al igual que en muchos otros aspectos de la dinámica no lineal el uso de funciones armónicas para modelar forzamientos o excitaciones paramétricas de tipo cuasiperiódico, combinando dos o más términos armónicos de frecuencias inconmensurables, es una constante en la bibliografía científica. Como ya se ha mencionado en los capítulos anteriores, es interesante utilizar otro tipo de funciones periódicas, las funciones elípticas de Jacobi, que por un lado nos permiten estudiar nuevas rutas que originan AENC, variando únicamente la forma de la excitación, y asegurar así la universalidad de las rutas existentes, y por otro lado son solución de los sistemas hamiltonianos no lineales subyacentes a los sistemas disipativos objeto de estudio, en lugar de utilizar las funciones armónicas que son solución de sistemas hamiltonianos lineales. Además, las funciones elípticas de Jacobi son generalizaciones de las funciones armónicas circulares y siempre podremos estudiar la excitación armónica como un caso particular de la excitación elíptica y comparar los resultados con los publicados en la bibliografía para el caso armónico.

En este apartado se estudiará la aparición de AENC en una generalización elíptica del péndulo plano amortiguado con forzamiento cuasiperiódico. El péndulo plano forzado y amortiguado es quizá el sistema de baja dimensión que presenta dinámica caótica más extensamente estudiado, entre otras razones porque la ecuación del péndulo plano amortiguado y forzado es isomorfa al modelo de Stewart-McCumber de la unión de Josephson [DDB86], a la de ciertos simuladores analógicos, como por ejemplo el *phase locked loop*, diseñados para estudiar el *phase-lockin* [DBHL82] e incluso en el caso de sobremortiguamiento es isomorfa a la ecuación de Schrödinger [BOA85].

El forzamiento cuasiperiódico del péndulo plano amortiguado estudiado en las referencias [Lai96, RBOA<sup>+</sup>87, RO87] se obtiene por adición de dos forzamientos armónicos de frecuencias inconmensurables, de manera que la ecuación de dicho sistema es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = A + V[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (4.1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo con la vertical,  $\nu$  es el coeficiente de fricción,  $A$  es una constante,  $V$  es la amplitud de la excitación y,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias de la excitación siendo  $\omega_1/\omega_2$  un número irracional. En la generalización elíptica de dicho sistema cambiaremos uno de los términos del forzamiento armónico por un forzamiento de tipo elíptico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = A + V[\text{cn}(\Omega t; m) + \cos(\omega t)] \quad (4.2)$$



siendo las frecuencias  $\Omega=\Omega(m)=4K(m)/T_{cn}$ ,  $\omega=2\pi/T_{cos}$  con  $T_{cn}$  y  $T_{cos}$  dos periodos inconmensurables. Al igual que en otros apartados del presente trabajo, la forma funcional de la frecuencia  $\Omega$  se elige para que el periodo sea constante independientemente del valor de  $m$  puesto que la función cosam tiene periodo real  $4K(m)$ . De esta manera, podremos variar la forma del primer término del forzamiento manteniendo constante su amplitud y periodo, reduciéndose el impulso mecánico transmitido en sentido creciente de  $m$  desde el límite armónico  $cn(\Omega(m=0)t; m=0)=\cos(2\pi/T_{cn})$  hasta el límite  $m\rightarrow 1$ , en el que la función cosam se anula excepto en un conjunto de instantes de medida de Lebesgue nula.

Con el fin de validar los resultados obtenidos con los publicados en la referencia [Lai96] para el caso armónico ( $m=0$ ) fijaremos los distintos parámetros en los valores:  $A=0.8$ ,  $V=0.55$ ,  $\nu=0.684^{1/2}$ ,  $T_{cn}=2\pi\nu$  y  $T_{cn}/T_{cos}=(5^{1/2}-1)/2$  (el recíproco del número áureo). El valor de  $T_{cn}$  se ha elegido de manera que en  $m=0$  exista un AENC, para estudiar así su estabilidad incrementando el parámetro elíptico  $m$ , parámetro que controla de forma continua la forma de la excitación cuasiperiódica y, por ende, la ratio temporal de la aportación energética externa del forzamiento al oscilador.

Como primera aproximación a la evolución del AENC conforme variamos el parámetro de control  $m$ , se ha calculado el exponente maximal de Lyapunov  $\lambda_1$  ( $\lambda_1>\lambda_2$ ), excluyendo el trivial que es siempre nulo ( $\lambda_3=0$ ), utilizando los algoritmos descritos en [WSSV85] a partir de las series temporales de (4.2) obtenidas por la integración de la ecuación del oscilador mediante un Runge-Kutta de 4º orden para un mínimo de 50.000 ciclos. En todos los casos se ha verificado la convergencia del cálculo y se ha comprobado que la suma de los tres exponentes coincide con la divergencia del flujo asociado a la ecuación (4.2),  $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\nu$ . Para visualizar los atractores en el espacio de fases se han determinado las secciones de Poincaré definidas por  $\omega t_n=nT_{cos}$ ,  $n=0,1,\dots$ . Se distinguen cinco intervalos cuando  $m$  varía de 0 a 1:

$m\in[0, 0.89\dots)$ .- En este intervalo solo aparecen AENC muy similares al obtenido y caracterizado como tal en la referencia [Lai96] para el caso  $m=0$  y los valores de los parámetros seleccionados. En la Fig. 4-1(a) se representa el exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\lambda_1$  en función de  $m$  y en ella se observa como  $\lambda_1$  se mantiene negativo en todo el intervalo. Por otro lado, la geometría fractal del atractor que se muestra en la Fig. 4-2(a), en la que se representa el caso  $m=0.017$  ( $\lambda_1=-0.0123$ ), induce a considerar la existencia de un AENC.

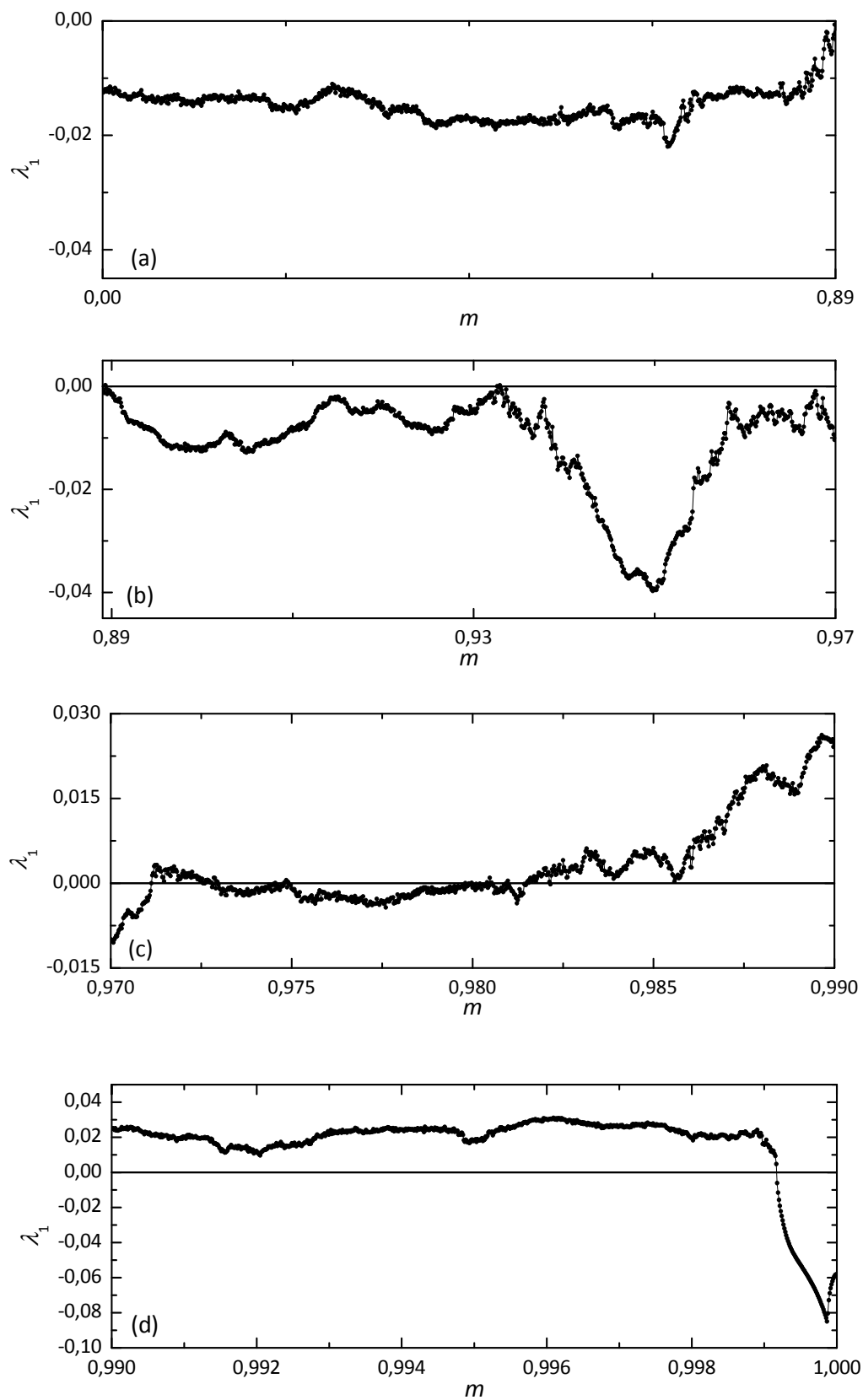


Figura 4-1 Exponente maximal no trivial de Lyapunov vs.  $m$  para  $m \in [0,1]$  del sistema (4.2). (a) Intervalo de AENC. (b) Intervalo de cohabitación AENC y caos. (c) Intervalo de transición a caos. (d) Intervalo de transición a cuasiperiodicidad. Los valores de los parámetros son  $A=0.8$ ,  $V=0.55$ ,  $\nu=0.684^{1/2}$ ,  $T_{cn}=2\pi\nu$  y  $T_{cn}/T_{cos}=(5^{1/2}-1)/2$

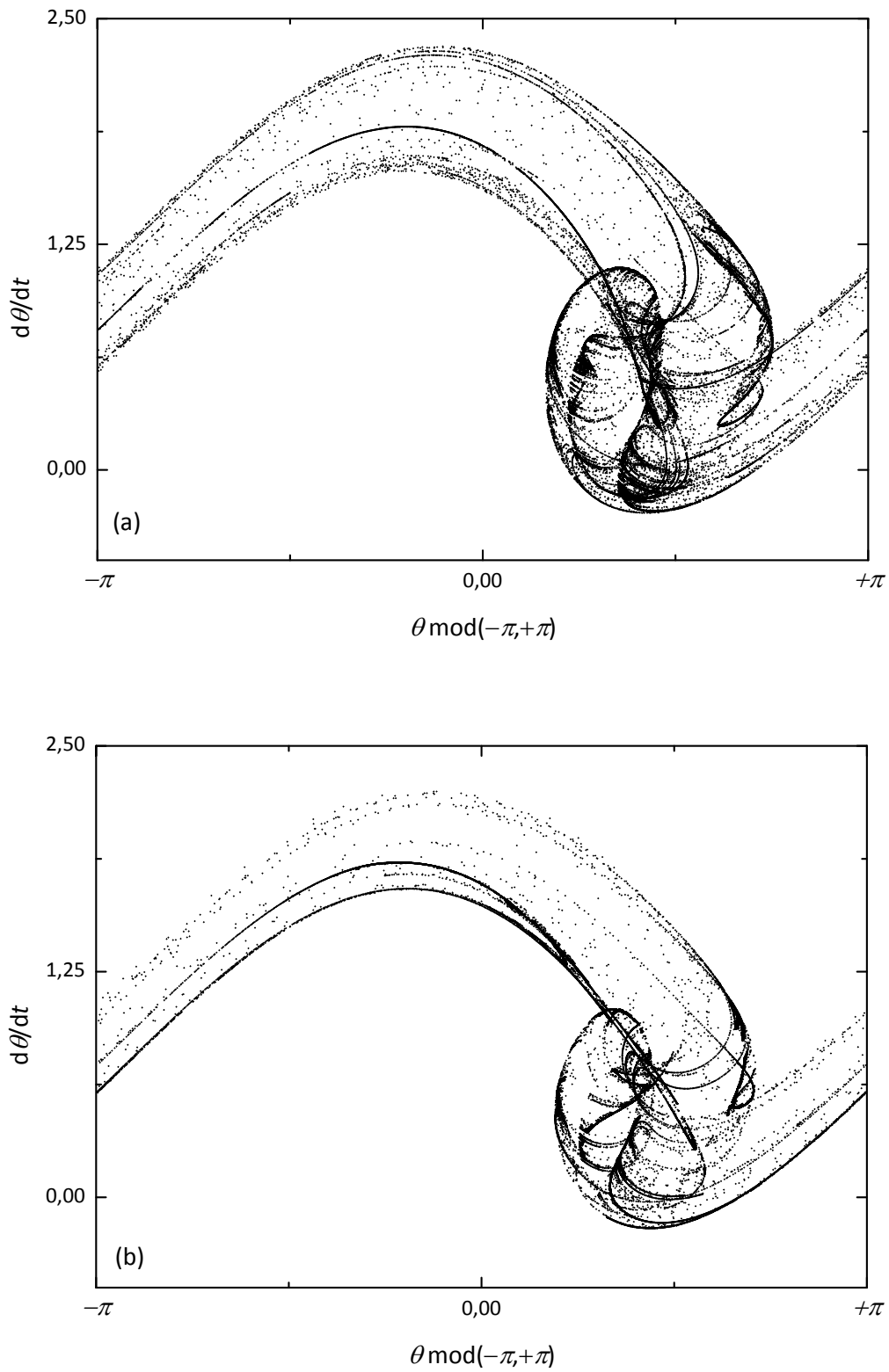


Figura 4-2 Aplicación de Poincaré del sistema (4.2) que representa su posición en el estado de fases en los instantes  $t=nT_{\text{cos}}$  con  $n=1,2,\dots$  para distintos valores del parámetro de forma  $m$ . (a)  $m=0.017$ , AENC; (b)  $m=0.9502$ , AENC.

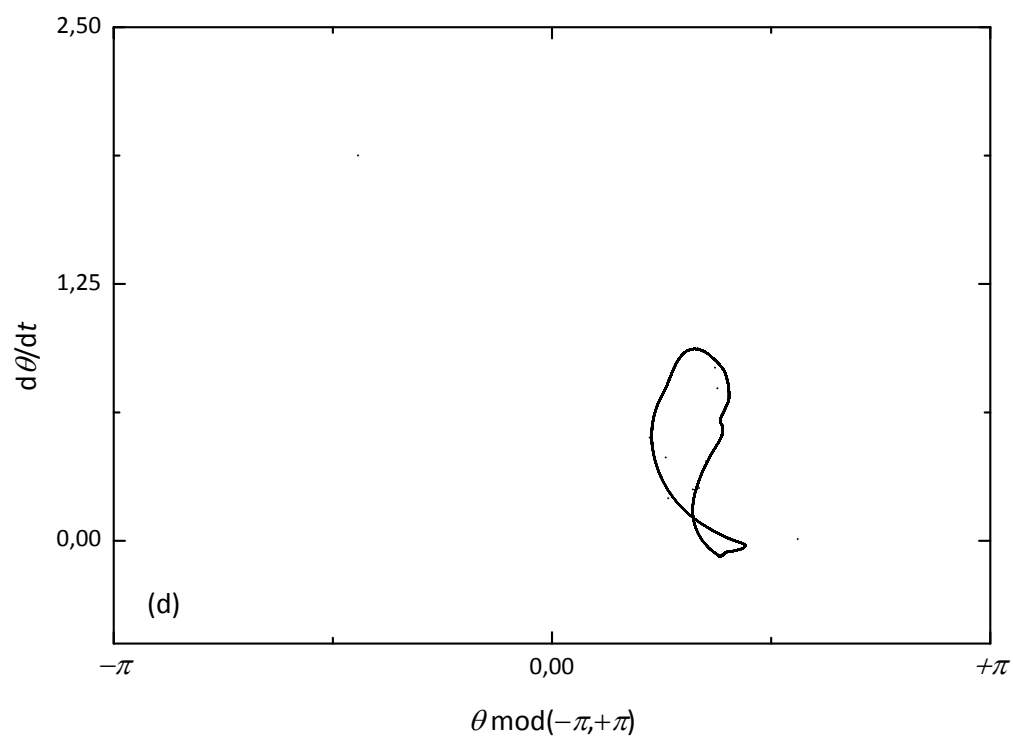
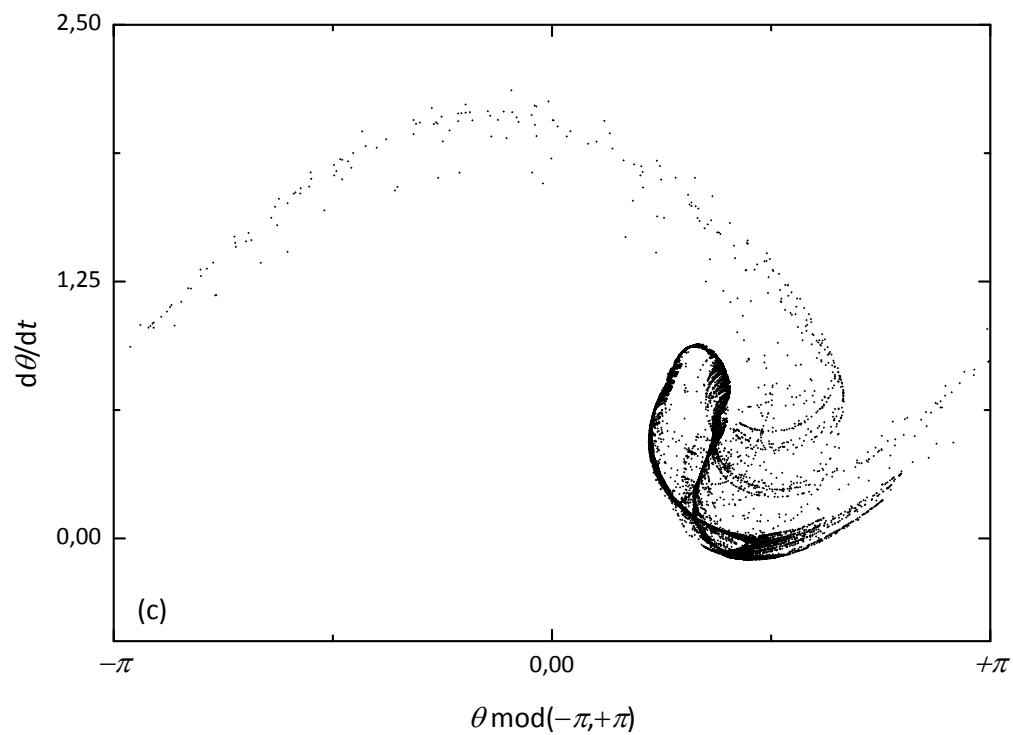


Figura 4-2 *Continuación*. (c)  $m=0.99917$ , atractor caótico próximo a la transición a la cuasiperiodicidad; (d)  $m=0.999235$ , cuasiperiodicidad de doble frecuencia.

$m \in [0.89\dots, 0.97]$ .- En este intervalo aparecen AENC en prácticamente todo el rango junto con unas pequeñas ventanas de comportamiento caótico caracterizadas por un exponente maximal de Lyapunov positivo aunque cercano a cero (véase la Fig. 4-1(b)). En dichas ventanas se ha realizado un estudio detallado de la convergencia del cálculo de  $\lambda_1$  confirmándose el carácter positivo de  $\lambda_1$  y por tanto la caoticidad en dichas ventanas. En este intervalo de cohabitación de atractores extraños caóticos y no caóticos la variaciones del exponente maximal de Lyapunov son mayores que la observadas en el caso intervalo anterior. En la Fig. 4-2(b) se muestra el AENC para el valor de  $m=0.9502$  ( $\lambda_1=-0.039$ ) en el que  $\lambda_1(m)$  presenta un mínimo. La comparación de las Figs. 4-2(a) y 4-2(b) muestra como la *extrañeza* del atractor varía cuando el parámetro que controla la forma del forzamiento cambia.

$m \in [0.97, 0.99]$ .- En este intervalo la cohabitación entre AENC y atractores caóticos es mayor, múltiples ventanas caóticas se intercalan entre las no caóticas. En la zona central, el exponente maximal de Lyapunov  $\lambda_1$  se mantiene muy próximo a cero (véase la Fig. 4-1(c)).

Una característica de la transición AENC→caoticidad es el comportamiento lineal del exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\lambda_1$  en el entorno del valor crítico  $m_c$  en el que se produce la transición y para el cual  $\lambda_1(m_c)=0$ , tal y como se muestra en la Fig. 4-3 y aparece para otros parámetros de control en [Lai96].

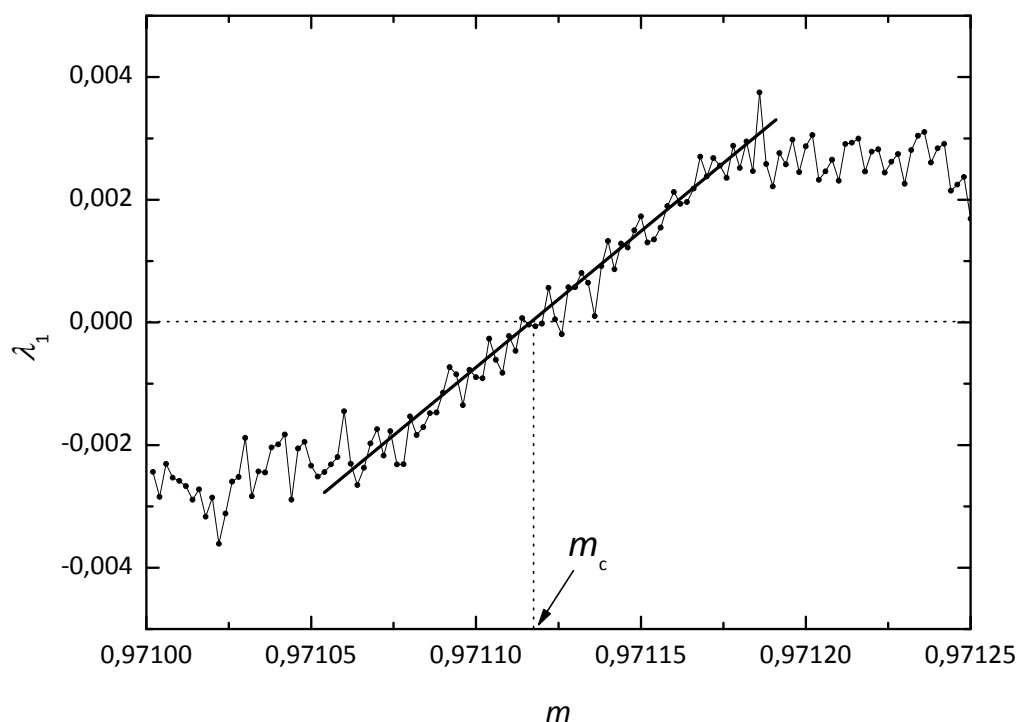


Figura 4-3 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\lambda_1$  versus el parámetro de forma  $m$  en la transición AENC→caos. Observar la linealidad característica en su paso por  $\lambda_1=0$ . Los mismo valores de los parámetros que en la Fig. 4-1.

$m \in [0.99, 0.999233)$ .- En este intervalo el exponente maximal de Lyapunov es positivo y por tanto el comportamiento es caótico (véase la Fig. 4-1(d)). En la Fig. 4-2(c) se muestra el atractor caótico para  $m=0.99917$  cercano a la transición hacia la cuasiperiodicidad que aparece en el siguiente intervalo.

$m \in [0.999233, 1]$ .- En este intervalo la respuesta del sistema es cuasiperiódica de doble frecuencia, la cuasiperiodicidad en este intervalo es consecuencia de la fuerte contracción de la fuerza elíptica cuando  $m \rightarrow 1$ . El exponente maximal de Lyapunov presenta un mínimo en  $m=0.999883$  (véase a Fig. 4-1(d)). La sección de Poincaré mostrada en las Fig. 4-2(d) confirma el comportamiento cuasiperiódico en este intervalo.

Para confirmar la existencia de AENC en determinadas regiones del espacio de parámetros del oscilador (4.2), se ha realizado un estudio detallado del espectro de potencia que permite la caracterización cuantitativa de un AENC de acuerdo con la metodología descrita en [BOA85, RO87]. En la Fig. 4-4 se representa el espectro de potencia de las series temporales de velocidad del oscilador para los mismo valores de los parámetros y condiciones iniciales que los utilizados en la Fig. 4-2(a), para los cuales el estado estacionario es un AENC. Basándonos en el espectro de potencia se construye una función de distribución  $N(\sigma)$  definida por el número de componentes espectrales mayores que  $\sigma$ . Una característica de los espectros de potencia de los AENC es que la dependencia funcional de  $N(\sigma)$  con  $\sigma$  sea una ley de potencias,  $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$ , frente a comportamientos del tipo  $N(\sigma) \sim \ln(1/\sigma)$  para cuasiperiodicidad de doble frecuencia o del tipo  $N(\sigma) \sim \ln^2(1/\sigma)$  para cuasiperiodicidad de triple frecuencia. En la Fig. 4-5 se representa la función de distribución  $N(\sigma)$  correspondiente al espectro de potencias de la Fig. 4-4 en una gráfica de doble escala logarítmica, en la cual una ley de potencias,  $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$ , se ajusta a una recta de pendiente  $-\alpha$ , lo que nos indica a la vista del buen ajuste lineal de la función distribución que nos encontramos ante un AENC.

La aparente fractalidad de atractor mostrado en la Fig. 4-2(a), junto con el valor negativo del exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\lambda_1$ , y el correcto ajuste de la función distribución  $N(\sigma)$  a una ley de potencias  $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$  nos permiten asegurar que la respuesta estacionaria del oscilador de ecuación (4.2), para los valores de los parámetros elegidos, es un atractor extraño no caótico.

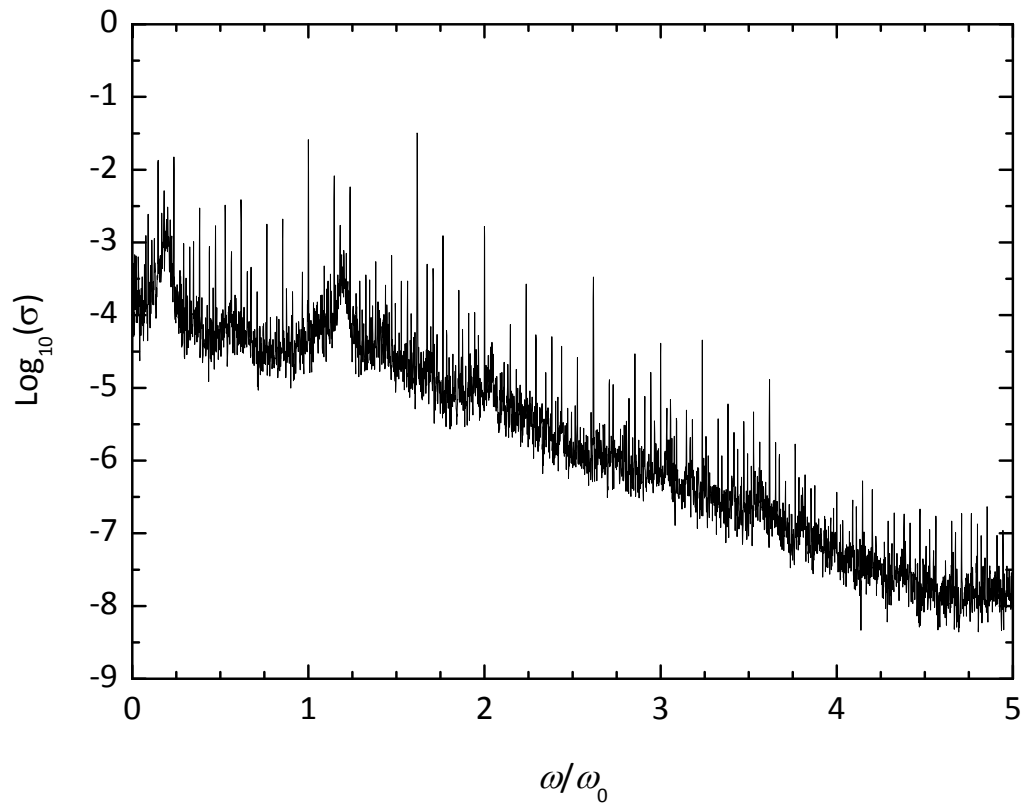


Figura 4-4 Espectro de potencia de la serie temporal de velocidad del sistema de ecuación (4.2) en el caso  $m=0.017$  cuando el estado estacionario es un AENC. El valor de los parámetros es igual que en la Fig. 4-2(a).

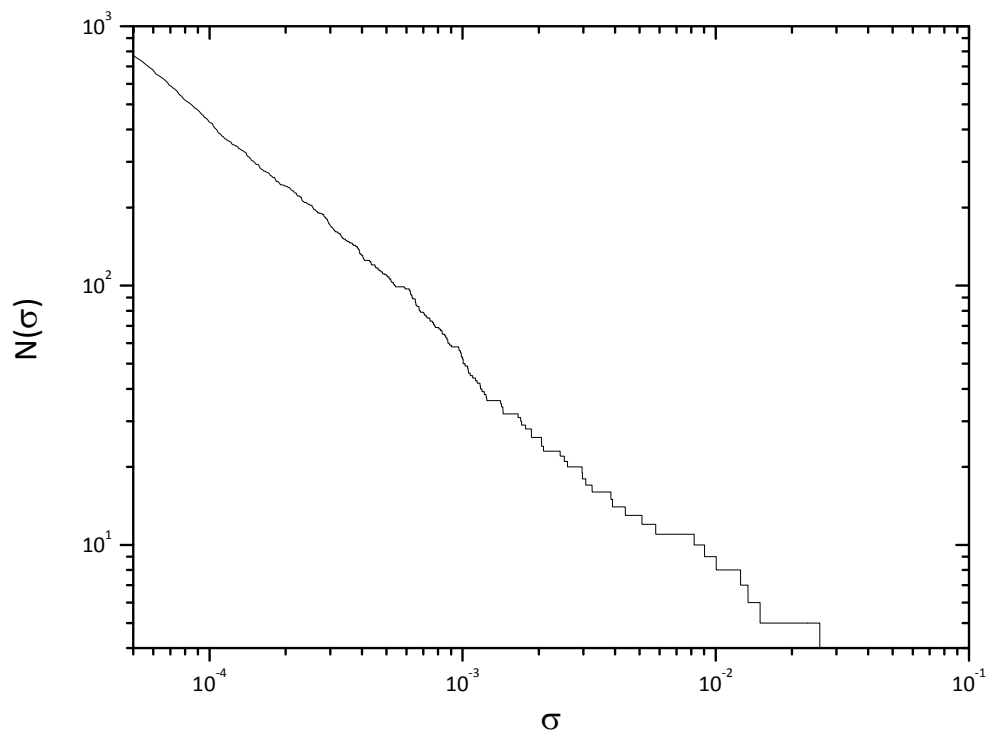


Figura 4-5 Función de distribución  $N(\sigma)$  (ver texto) del espectro de potencia de la Fig. 4-4. El comportamiento lineal en la escala logarítmica implica un comportamiento del tipo  $N(\sigma) \sim \sigma^{-\alpha}$ , característico de la señal espectral de un AENC.

### 5.3 Generalización elíptica de una aplicación 2D

En la referencia [YL96], Yalçinkaya *et al.* encontraron una nueva ruta para explicar la génesis de un AENC basada en la bifurcación tipo *blowout* que experimenta la siguiente aplicación bidimensional:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2\pi}(a \cos \theta_n + b) \text{sen}(2\pi z_n) \\ \theta_{n+1} &= (\theta_n + 2\pi\omega) \text{mod}(2\pi), \quad \omega \in (0,1), \text{ irracional.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En el presente apartado se estudiará una generalización elíptica de la anterior aplicación para estudiar la génesis de un atractor extraño no caótico cuando variamos únicamente la forma de onda de uno de los términos periódicos de la aplicación.

Las bifurcaciones tipo *blowout* surgen en sistemas dinámicos con excitaciones cuasiperiódicas que cuentan con un subespacio invariante,  $S$ , simétrico y de baja dimensionalidad en el espacio de fases. Puesto que  $S$  es invariante, la trayectoria que parte de una condición inicial en  $S$  permanecerá siempre en  $S$ . Consideremos el caso de que exista un toro cuasiperiódico en  $S$ . El toro atraerá o repelerá las trayectorias con condiciones iniciales en el entorno de  $S$  en función del signo del exponente de Lyapunov transversal,  $\Lambda_T$ , calculado para trayectorias en  $S$  con respecto a perturbaciones en el subespacio  $T$  que es transversal a  $S$ . Cuando  $\Lambda_T$  es negativo,  $S$  atrae a las trayectorias cercanas y el toro cuasiperiódico en  $S$  es un atractor para las trayectorias cercanas, mientras que cuando  $\Lambda_T$  es positivo la trayectorias cercanas a  $S$  son repelidas por el toro, el toro es transversalmente inestable (la denominación *blowout* se refiere al carácter explosivo de la repulsión de las trayectorias cercanas al toro que da lugar a la intermitencia *on-off* característica de este tipo de bifurcación). Cuando el parámetro de control del sistema dinámico provoca la variación de signo de  $\Lambda_T$  se produce la bifurcación.

Consideremos el caso de un sistema disipativo que tras la bifurcación cuenta con el exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$  negativo y exponente transversal  $\Lambda_T$  positivo. Las trayectorias cercanas a  $S$  serán repelidas por el toro, pero si no existen otros atractores en el espacio de fases volverán a su cercanía para ser de nuevo repelidas (intermitencia), puesto que las trayectorias son acotadas (el sistema es disipativo) éstas configurarán en su evolución temporal un atractor de carácter fractal en el espacio de fases. El carácter positivo de  $\Lambda_T$  aporta *extrañeza*, fractalidad, al atractor mientras que el carácter negativo de  $\Lambda < 0$  asegura su no caoticidad, generándose así un AENC.

Para estudiar la génesis de un AENC en un sistema dinámico cuando solo variamos la forma de onda de la excitación cuasiperiódica utilizaremos una generalización elíptica de la aplicación bidimensional (4.3):



$$z_{n+1} = [a \operatorname{cn}(\Omega \theta_n; m) + b] \operatorname{sen} z_n \tag{4.4}$$

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + 2\pi\omega) \bmod(2\pi), \quad \omega \in (0,1), \text{ irracional,} \tag{4.5}$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros y  $\operatorname{cn}(\Omega \theta_n; m)$  es la función elíptica de Jacobi cosam de parámetro  $m$ . Para valores irracionales de  $\omega$ , la aplicación circular (4.5) define una excitación cuasiperiódica que es multiplicativa en la ecuación no lineal (4.4). Puesto que estamos interesados en variar únicamente la forma de onda de la excitación fijamos el periodo  $T$  eligiendo  $\Omega = \Omega(m) = 4K(m)/T$  siendo  $K(m)$  la integral elíptica completa de primera especie.

En el límite  $m=0$ ,  $\operatorname{cn}[\Omega(m=0)\theta_n; m=0] = \cos(2\pi\theta_n/T)$  y con  $T=2\pi$  se recupera la aplicación bidimensional (4.3) usada en [YL96] para explicar la génesis de un AENC. Al crecer  $m$ , la excitación se vuelve más estrecha, hasta que para valores muy cercanos a la unidad se comporta como una cadena de impactos periódicos y en el límite  $m=1$  la excitación es nula excepto en un conjunto numerable de puntos de medida de Lebesgue nula, de manera que en este límite las ecuaciones de la aplicación bidimensional se desacoplan.

La aplicación cuenta con el subespacio invariante unidimensional en  $z=0$ , definido por el conjunto de puntos  $(0, \theta_n)$  en el espacio de fases. La dinámica de perturbaciones infinitesimales transversales al subespacio invariante se obtiene tomando variaciones en la ecuación (4.4) en torno a  $z=0$ , si  $z_{n+1} = f(z_n, \theta_n)$  entonces  $(\delta z)_{n+1} = (\partial f / \partial z)_{z=0} (\delta z)_n$ . El exponente de Lyapunov en dirección transversal es entonces  $\Lambda_T = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \ln |(\delta z)_N / (\delta z)_0|$ , que por aplicación recursiva de la regla de la cadena y promediando conduce a (véase por ejemplo [OS94]):

$$\Lambda_T(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| a \operatorname{cn} \left[ \frac{4K(m)\theta_j}{T}; m \right] + b \right| = \frac{1}{T} \int_0^T \ln \left| a \operatorname{cn} \left[ \frac{4K(m)\theta}{T}; m \right] + b \right| d\theta. \tag{4.6}$$

Con  $T=2\pi$ , y para los dos casos límite del parámetro de forma tenemos:

$$\Lambda_T(m=0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a \cos \theta + b| d\theta = \begin{cases} \ln |b| - \ln \frac{2}{1 + [1 - (a/b)^2]}, & \text{si } a \leq b \\ \ln |b| + \ln \left| \frac{a}{2b} \right|, & \text{si } a > b \end{cases} \tag{4.7}$$

y

$$\Lambda_T(m=1) = \ln |b|. \tag{4.8}$$

Con  $a$  y  $b$  constantes, estudiamos la variación del exponente transversal de Lyapunov en función de  $m$ . Con el fin de forzar la bifurcación elegimos  $a$  y  $b$  de manera que  $\Lambda_T(m=0) > 0$  y  $\Lambda_T(m=1) < 0$ . La segunda condición exige  $1 > b > 0$  y para dicho intervalo la primera condición, de acuerdo con (4.7), implica  $a > 2$ . En la Fig. 4-6 se muestra una gráfica típica de la función  $\Lambda_T(m)$ , con  $a > 2$  y  $1 > b > 0$ , donde la forma cualitativa de la función no depende de la elección de los

valores de  $a$  y  $b$  elegidos. En dicho caso, existe siempre un valor crítico para el parámetro de forma,  $m_c = m_c(a, b)$ , para el cual  $\Lambda_T(m \leq m_c) \geq 0$  y  $\Lambda_T(m > m_c) < 0$ . Si además, el exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$  es negativo, entonces el atractor será un AENC si  $m \leq m_c$  y la línea  $z=0$  si  $m > m_c$ .

Existen dos exponentes de Lyapunov asociados a la aplicación bidimensional descrita por las ecuaciones (4.4) y (4.5): el correspondiente a la dinámica de  $\theta$  es siempre nulo y el correspondiente a  $z$  viene dado por la expresión

$$\Lambda(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| a \operatorname{cn} \left[ \frac{4K(m)\theta_j}{T}; m \right] + b \right| \cos z_n = \Lambda_T(m) + \lambda(m) \quad (4.9)$$

con

$$\lambda(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln |\cos z_n|. \quad (4.10)$$

De manera que el exponente no trivial de Lyapunov de la aplicación bidimensional es  $\Lambda = \Lambda_T + \lambda$ .

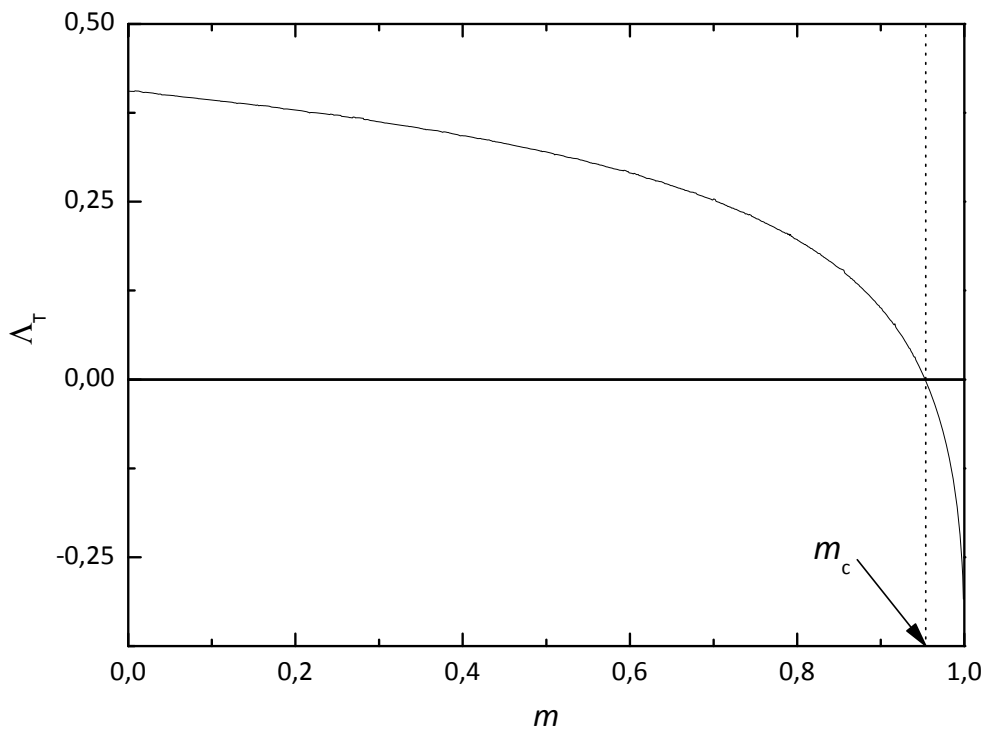


Figura 4-6. Exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  vs.  $m$  de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] en una situación genérica con  $a > 2$  y  $1 > b > 0$ .

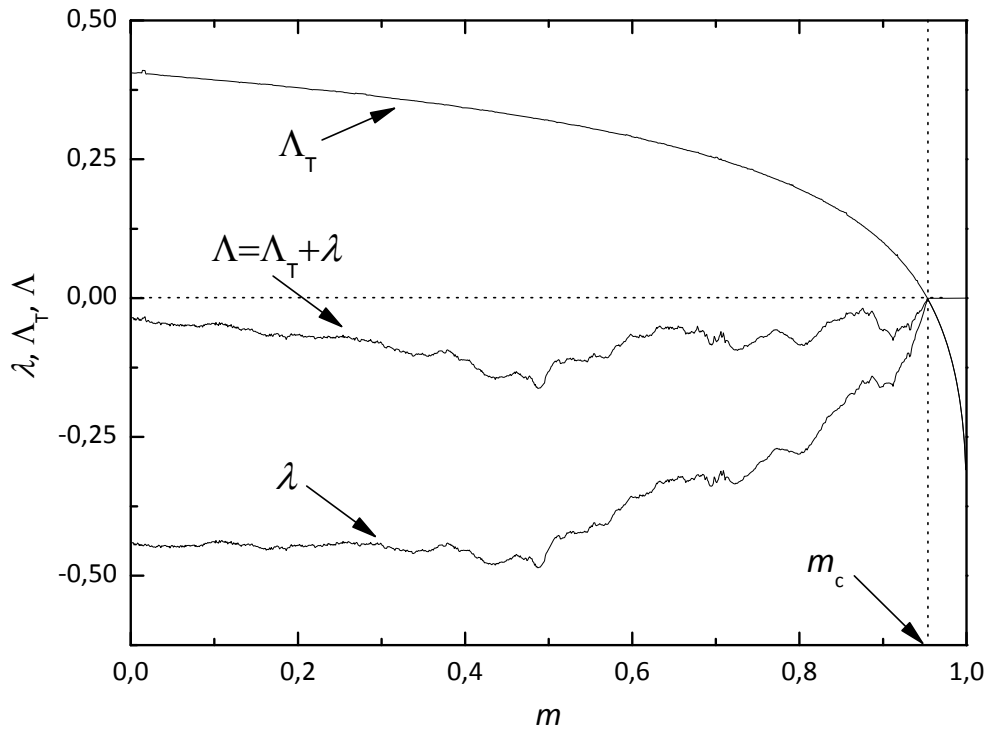


Figura 4-7 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$ , exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T$  y  $\lambda$  vs.  $m$  [cf. Ecs.(4.9), (4.6) y (4.10), respectivamente] para la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $a=3$  y  $b=0.5$ . Si  $m < m_c$  el atractor es un AENC ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ ) y si  $m > m_c$  el atractor es el subespacio  $z=0$  ( $\Lambda_T < 0$  y  $\Lambda < 0$ ). Nótese que las curvas  $\Lambda_T(m)$  y  $\lambda(m)$  pasan por cero para el mismo valor de  $m$  de acuerdo con la predicción teórica ( $T=2\pi$ ,  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ ).

Si  $m > m_c$ ,  $\lambda$  es nulo pues  $z$  tiende asintóticamente a 0, en dicho caso  $\Lambda(m > m_c) = \Lambda_T < 0$  y el atractor es el subespacio invariante  $z=0$ .

Si  $m < m_c$ ,  $\lambda$  es negativo y  $\Lambda_T$  es positivo y el signo del exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$  dependerá de si  $|\lambda|$  es mayor o menor que  $\Lambda_T$ . Si  $\Lambda > 0$  la solución estacionaria será un atractor caótico y si  $\Lambda < 0$  la solución estacionaria será un AENC. De manera que, en función del valor de los parámetros  $a$  y  $b$ , pueden darse tres casos distintos en el intervalo  $[0, m_c)$ : atractor caótico, AENC o coexistencia de atractores caóticos y AENC tal y como se ha observado en otros sistemas dinámicos [RBOA<sup>+</sup>87, RO87, YL96].

En la Fig. 4-7 se ilustra el caso  $a=3$  y  $b=0.5$ , en el que en el intervalo  $[0, m_c)$  la respuesta del sistema es un AENC pues en dicho intervalo tenemos  $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ . La función  $\lambda(m)$  se ha calculado a partir del sumatorio de la ecuación (4.10) para un total de 50.000 iteraciones tras un transitorio inicial de 10.000 iteraciones de la aplicación,  $\Lambda_T(m)$  a partir de la integración numérica de la integral (4.6) y el exponente maximal no trivial de Lyapunov se obtiene sumando las funciones anteriores  $\Lambda(m) = \Lambda_T(m) + \lambda(m)$ . Notar que el valor crítico para el que se produce la supresión del AENC,  $m_c = m_c(a=3, b=0.5) = 0.953\dots$ , puede ser determinado numéricamente por dos métodos: el valor de  $m$  para el cual la integración numérica de la integral (4.6) conduce a

$\Lambda_T(m=m_c)=0$ , y el valor de  $m$  a partir del cual el valor del sumatorio de la ecuación (4.10) que permite el cálculo de  $\lambda$  es nulo. En ambos casos, el valor obtenido es aproximadamente el mismo.

La Fig. 4-8 muestra una secuencia típica de la evolución del AENC en el espacio de fases cuando el parámetro de control se aproxima al valor crítico  $m_c=m_c(a=3,b=0.5)=0.953\dots$ . En cualquiera de ellos se puede observar la estructura autosimilar a distintas escalas espaciales característica de los conjuntos fractales.

La fuerte variación que muestra  $\Lambda_T(m)$  para valores cercanos a  $m=1$ , es muy similar al comportamiento asintótico de la recíproca de la función  $K(m)$ , que controla la ratio de variación de la forma de la excitación en la aplicación bidimensional considerada. En otras palabras, la forma específica de la curva  $\Lambda_T$  en función de un parámetro efectivo de control de la forma de la excitación depende fuertemente de la ratio de variación de la forma de la excitación manteniendo constante su amplitud y periodo. Para un caso general, en el que la excitación genérica la expresemos como  $f(\theta;T,\alpha_i)$ , de periodo  $T$ , amplitud unidad y forma controlada por los parámetros  $\alpha_i$ , una elección plausible desde el punto de vista físico para dicho parámetro efectivo de forma es el valor medio del valor absoluto de la excitación en un periodo:

$$p_{eff}(\alpha_i) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\theta;T,\alpha_i)| d\theta \quad (4.11)$$

que para el caso específico de la excitación considerada en la aplicación bidimensional descrita por las ecuaciones (4.4) y (4.5) queda:

$$p_{eff}(m) = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \text{cn}\left[\frac{4K(m)\theta}{T}; m\right] \right| d\theta = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \text{cn}\left[\frac{4K(m)\theta}{T}; m\right] d\theta = \frac{\text{ArcSin}(\sqrt{m})}{\sqrt{mK(m)}}. \quad (4.12)$$

En efecto, la forma funcional de la función  $\Lambda_T(m)$ , función que depende de la elección de los parámetros  $a$  y  $b$  y del periodo  $T$ , es muy similar a la forma funcional de la  $p_{eff}(m)$ , lo que confirma la hipótesis inicial.

Esta similitud funcional entre el exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  y el parámetro efectivo de cambio de forma de onda de la excitación  $p_{eff}(m)$  nos permite un amplio abanico de posibilidades para el control de la dinámica de la aplicación bidimensional. En el caso estudiado, se ha visto que si la función  $p_{eff}(m)$  es monótona  $\Lambda_T(m)$  también lo es y, por tanto, para una elección adecuada del resto de parámetros, solo va a existir un valor crítico  $m_c$  de transición hacia AENC.

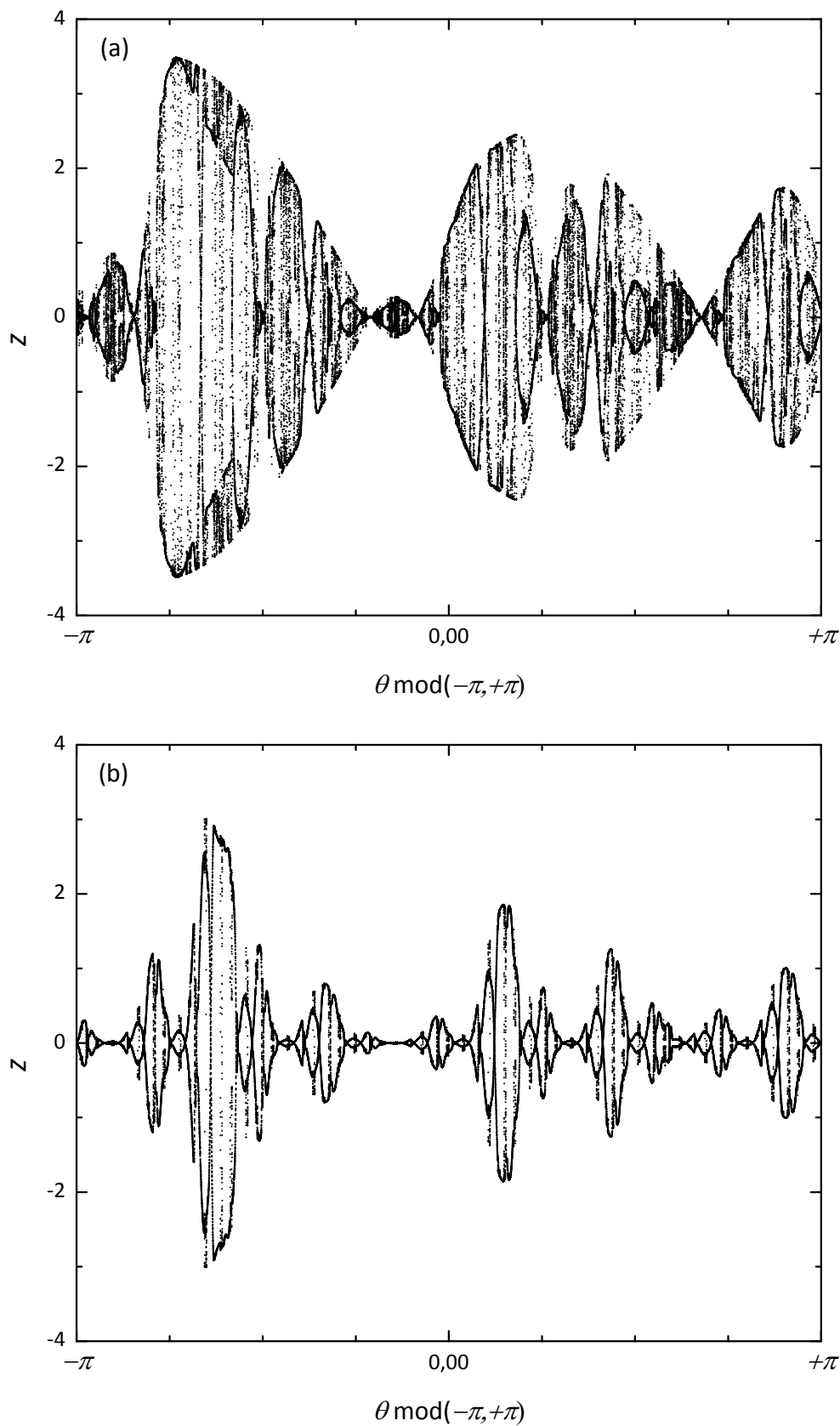
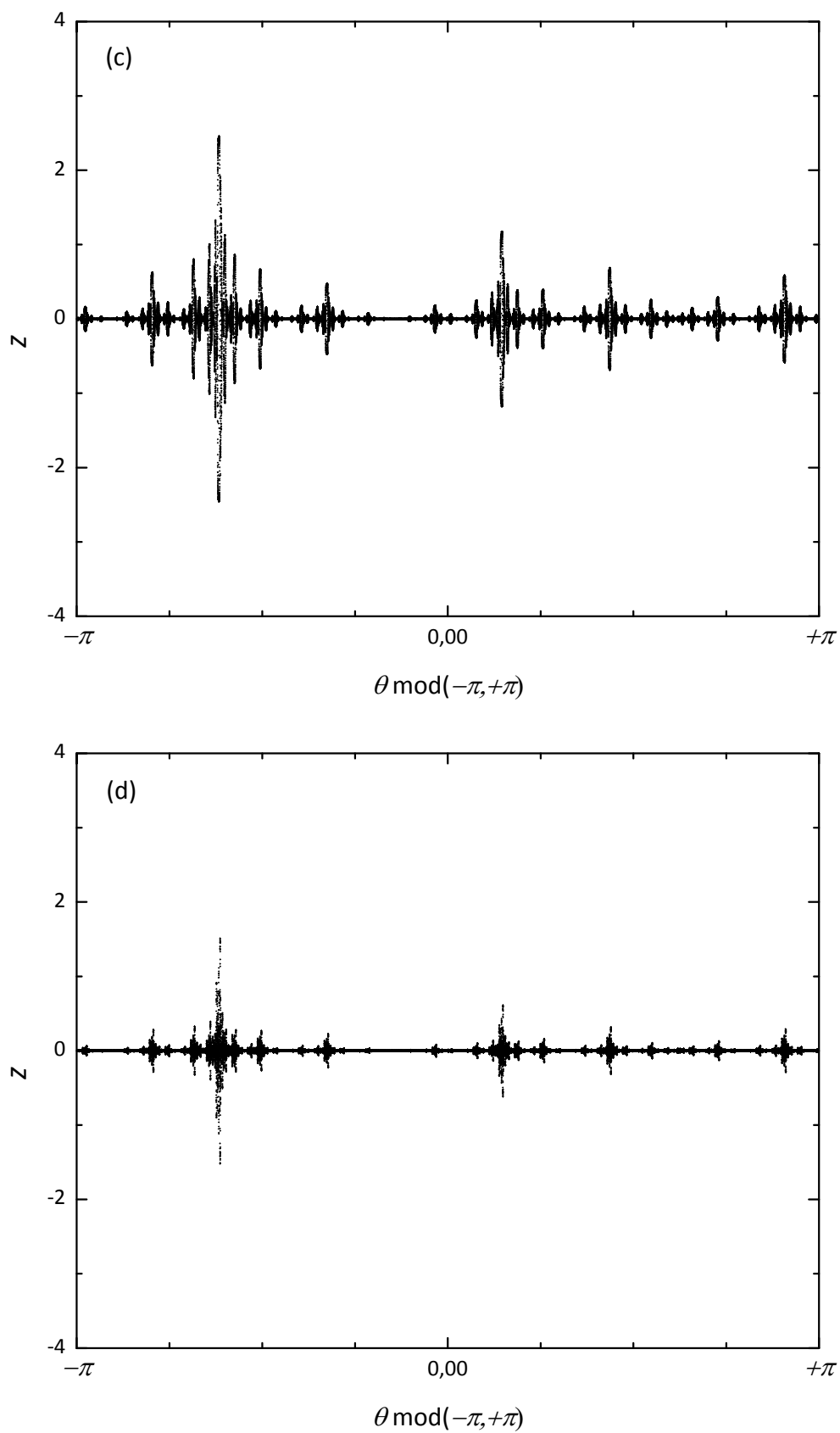


Figura 4-8 Diagramas en el espacio de fases que muestran la reducción gradual del AENC de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] cuando el parámetro de forma se aproxima al valor crítico  $m_c=0.953\dots$  con  $\alpha=3$ ,  $b=0.5$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . (a)  $m=0.2$ , (b)  $m=0.9$ , (c)  $m=0.95$  y (d)  $m=0.958$ .

Figura 4-8 Continuación. (c)  $m=0.95$ , (d)  $m=0.9528$ .

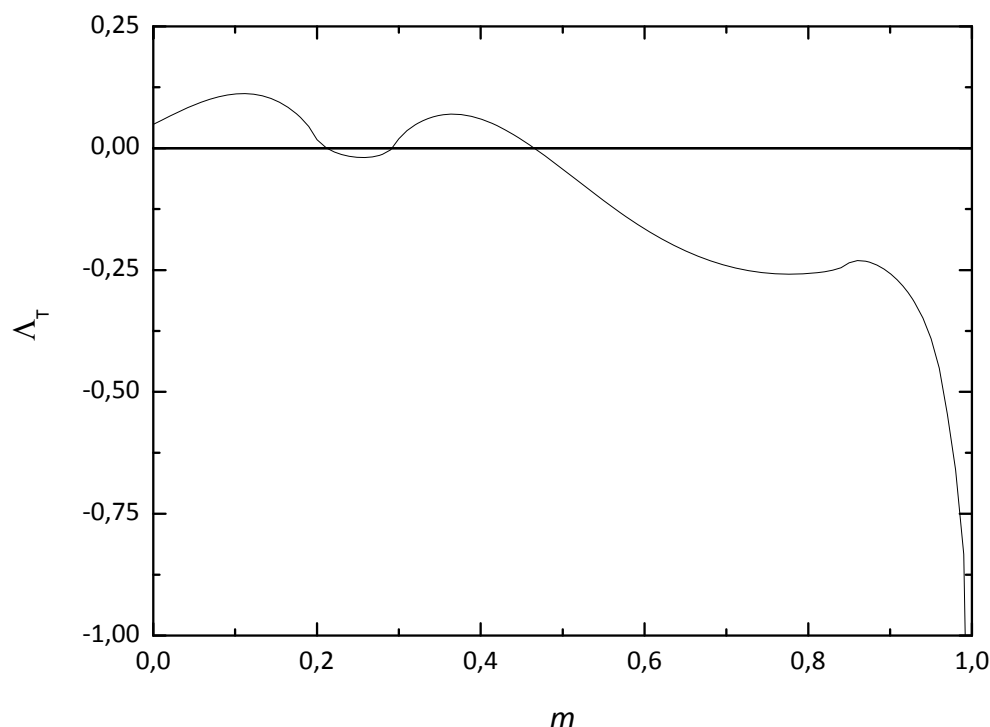


Figura 4-9. Exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  vs.  $m$  de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $K(m) \equiv K[g(m)]$ , siendo  $g(m) = (32/3)m^3 - 16m^2 + (19/3)m$ , mostrando las posibilidades de supresión ( $\Lambda_T < 0$ ) y aparición ( $\Lambda_T > 0$ ) de atractores extraños no caóticos controlando adecuadamente la tasa de variación de la forma de onda ( $a=2.1, b=0.1, T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ ).

Como ejemplo ilustrativo de las posibilidades de control, consideraremos  $K[g(m)]$  en lugar de  $K(m)$  en la aplicación bidimensional de ecuaciones (4.4) y (4.5). Elegimos  $g(m)$  de manera que posea un máximo relativo y un mínimo relativo en el intervalo  $m \in [0,1]$ . Además, para garantizar que la excitación  $\text{cn}[4K[g(m)]\theta/T; m]$  tenga periodo  $T$  constante necesitamos que  $g(m=0)=0, g(m=1)=1$  y  $0 \leq g(m) \leq 1$  para  $m \in [0,1]$ . Una elección posible de  $g(m)$  que cumple con todos los requisitos anteriores es  $g(m) = (32/3)m^3 - 16m^2 + (19/3)m$ . En la Fig. 4-9 se representa el exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T(m)$  que gobierna la creación o supresión de AENC, calculado a partir de la ecuación (4.6) cuando utilizamos la excitación  $\text{cn}[4K[g(m)]\theta/T; m]$  para una elección adecuada del resto de parámetros. En la figura se aprecia como existen tres valores críticos de  $m$  para la creación o supresión de AENC. Por tanto, la aparición y supresión de AENC puede ser controlada ajustando adecuadamente la forma de onda de la excitación.

Por último, y para estudiar un caso en el que coexistan atractores caóticos y no caóticos, se ha considerado la siguiente elección para el valor de los parámetros:  $a=4, b=0.1, T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . Para este caso, se han calculado los exponentes  $\lambda, \Lambda_T$  y  $\Lambda$  en función de  $m$  y los resultados se muestran en la Fig. 4-10.

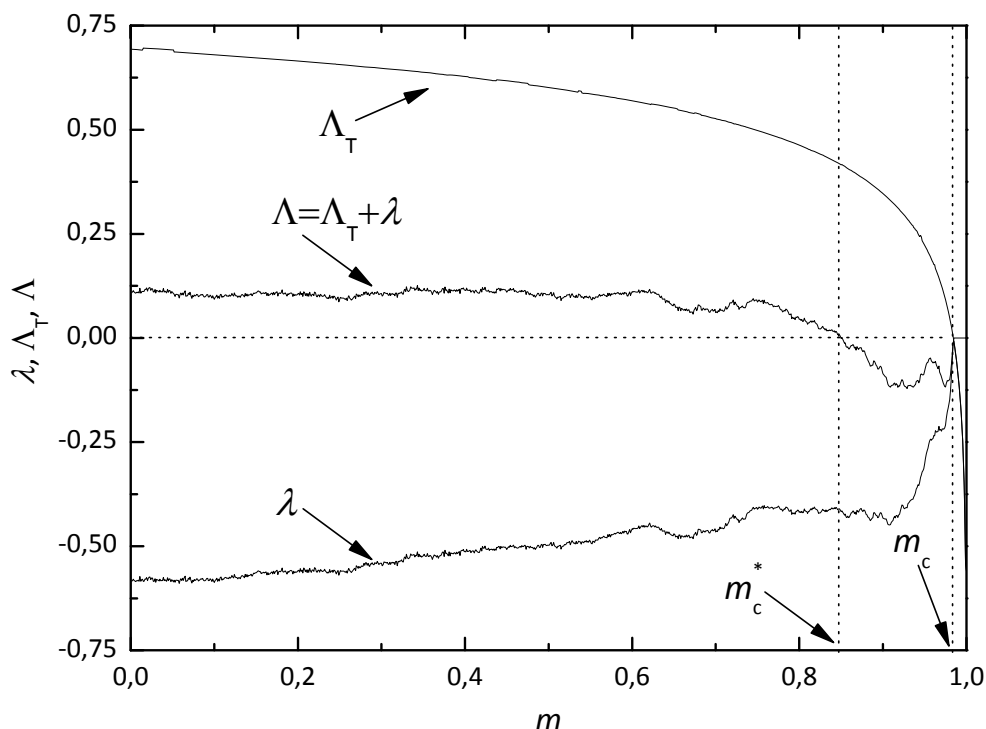


Figura 4-10 Exponente maximal no trivial de Lyapunov  $\Lambda$ , exponente transversal de Lyapunov  $\Lambda_T$  y  $\lambda$  vs.  $m$  [cf. Ecs. (4.9), (4.6) y (4.10), respectivamente] para la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $a=4$ ,  $b=0.1$ ,  $T=2\pi$ ,  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . Si  $m \in [0, m_c^*]$  el atractor es caótico ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda > 0$ ), si  $m \in (m_c^*, m_c)$  el atractor es un AENC ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ ), y si  $m \in [m_c, 1]$  el atractor es el subespacio  $z=0$  ( $\Lambda_T < 0$  y  $\Lambda < 0$ ).

Al aumentar  $m$  se distinguen tres intervalos: atractor caótico ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda > 0$ ) desde  $m=0$  hasta  $m_c^* = 0.847\dots$ , donde se produce el cambio de signo del exponente maximal no trivial de Lyapunov, AENC ( $\Lambda_T > 0$  y  $\Lambda < 0$ ) desde  $m_c^*$  hasta  $m_c = 0.985\dots$ , y desde  $m_c$  hasta la unidad el atractor es la recta  $z=0$ .

A modo de ejemplo, en la Fig. 4-11 se muestra el atractor caótico que se obtiene para el caso  $m=0.2$ . Como puede observarse, la apariencia del atractor no difiere mucho del atractor extraño no caótico representado en la Fig. 4-8(a) dado que ambos son extraños en el sentido de que tienen estructura fractal.



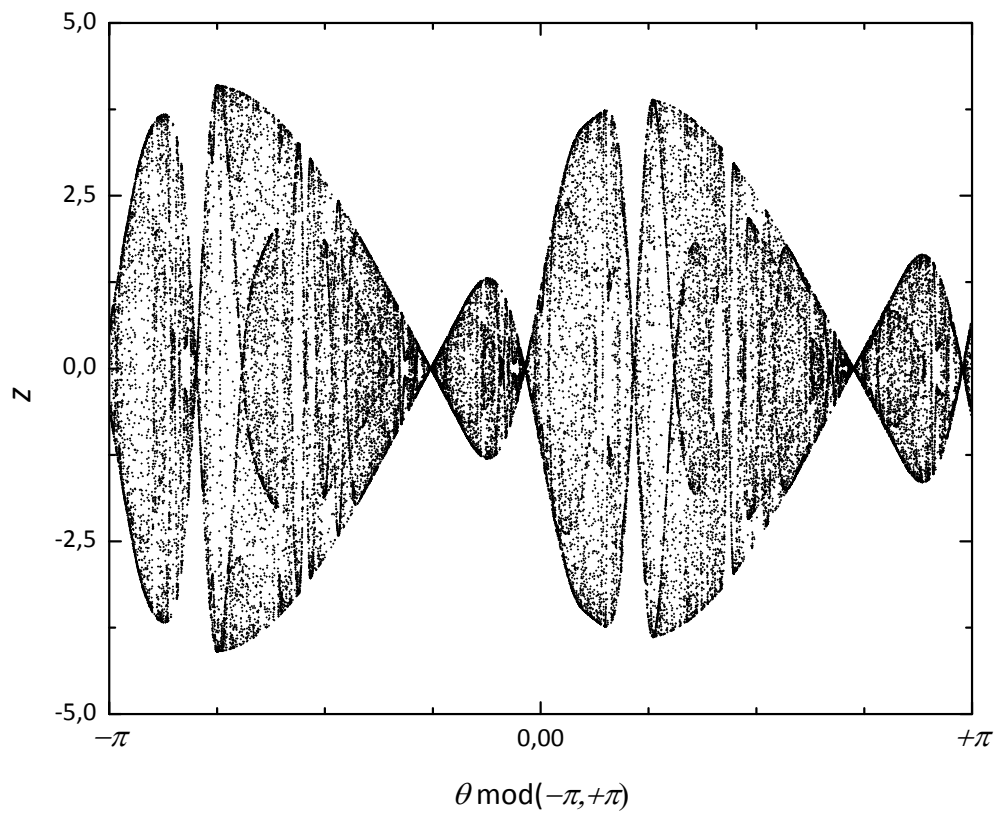


Figura 4-11 Atractor caótico de la aplicación bidimensional [cf. Ecs. (4.4) y (4.5)] con  $m=0.2$ ,  $a=4$ ,  $b=0.1$ ,  $T=2\pi$  y  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ .



## Capítulo 5

### CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La línea básica de la presente tesis confirma la idea de que cuando se considera en un sentido más amplio el carácter no lineal de la Naturaleza se detectan nuevos fenómenos y comportamientos, y surge la posibilidad de nuevas aplicaciones tanto teóricas como tecnológicas.

En el contexto de los osciladores no lineales, disipativos y no autónomos, se ha estudiado el efecto de perturbaciones periódicas modeladas por funciones elípticas de Jacobi y su posible aplicación en el campo del control caótico. En particular, se ha investigado la estabilidad estructural de la dinámica bajo cambios en la forma geométrica de dichas perturbaciones y se ha caracterizado una nueva ruta universal orden $\leftrightarrow$ caos al variar el parámetro elíptico  $m$  que controla la forma geométrica de las perturbaciones elípticas y, por ende, la tasa temporal de aporte energético al oscilador. Se ha comprobado numérica y analíticamente el efecto inhibitorio de la dinámica caótica que posee la variación de la forma de onda de tales perturbaciones.

Se ha formulado y fundamentado teóricamente la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido que establece que una condición plausible, desde el punto de vista físico y bajo ciertas hipótesis, para que la dinámica global de un oscilador genérico  $\ddot{x} + dU(x)/dx = -g(x, \dot{x}) + r(x, \dot{x})p(t; T)$  sea independiente de la forma específica del pulso de la excitación temporal  $p(t; T)$  (manteniendo constante el resto de parámetros y las mismas condiciones iniciales), es que el impulso mecánico transmitido por los distintos pulsos aplicados sea el mismo.

Para ilustrar el procedimiento se han investigado dos osciladores:

- a) Oscilador de Duffing con dos pozos de potencial paraméricamente amortiguado por una cadena de pulsos periódicos simétricos. Se han considerado dos tipos de pulsos en la

excitación paramétrica: pulsos rectangulares y pulsos modelados por la función elíptica de Jacobi  $\text{cosam}$ .

Se ha demostrado analítica y numéricamente que la dinámica global del oscilador es independientemente de la forma específica del pulso siempre que se verifique la conjetura de invariancia del impulso mecánico transmitido. En efecto, se ha comprobado que la función umbral caótica, obtenida por el método de Melnikov, coincide para ambos tipos de pulsos cuando se considera la condición de invariancia. Lo mismo se concluye cuando se estudia numéricamente la dinámica del oscilador bajo cambios en la anchura efectiva del pulso: la estructura global de bifurcación del sistema es muy similar para ambos tipos de pulsos.

Una característica a reseñar de la función umbral caótica que determina las fronteras de la transición orden-caos en el espacio de parámetros, es la existencia de un periodo  $T=T_{\min}(m)$  para el cual el oscilador no puede presentar dinámica caótica, la existencia de tal periodo puede ser explicada en términos de una resonancia paramétrica con el sistema hamiltoniano subyacente al oscilador. Además la función umbral determina la aparición de dos ventanas en el espacio de parámetros de posible comportamiento caótico (véase la Fig. 2-7), que han sido confirmadas por las simulaciones numéricas realizadas. Ambos resultados representan propiedades dinámicas robustas del sistema, en el sentido de que no son sensibles a la forma específica del pulso y al coeficiente de amortiguamiento.

Se han determinado las fronteras de estabilidad de las soluciones estacionarias de equilibrio del oscilador usando la técnica del balance armónico elíptico en primer orden. Las curvas teóricas para tales fronteras en los distintos planos de parámetros han sido validadas por simulaciones numéricas, mostrándose la necesidad de utilizar aproximaciones de orden superior cuando se reduce la anchura efectiva del pulso. La aplicación de la condición de invariancia del impulso también conduce en este aspecto a los resultados esperados.

a) NIPKR (*Non-Ideal Periodically Kicked Rotator*)

Se plantea un modelo realista del *kicked rotator*, que supone el uso de pulsos periódicos de amplitud y anchura finita, en lugar de los pulsos modelados por la función  $\delta$  de Dirac periódica, de amplitud infinita y anchura nula utilizados previamente en la bibliografía. Este nuevo modelo no permite la simplificación que supone la reducción a una aplicación por integración de la ecuación del modelo clásico.

Se ha caracterizado un nuevo fenómeno ausente en el *kicked rotator* clásico: la extensión del comportamiento caótico en el espacio de parámetros alcanza un máximo cuando varía la anchura efectiva del pulso. Es necesario entonces considerar como nuevo parámetro la anchura efectiva del pulso a la hora de modelar adecuadamente un

sistema físico, clásico o cuántico, que pueda ser estudiado a partir de la ecuación del *kicked rotator*.

Se ha formulado un teorema de inhibición del comportamiento caótico que establece condiciones suficientes para la regularización de la dinámica del oscilador y se ha caracterizado numéricamente la nueva ruta orden $\leftrightarrow$ caos bajo cambios únicamente en la forma de onda de los pulsos periódicos, ruta que muestra una dinámica rica y variada incluyendo distintos tipos de crisis. El origen de tales crisis inducidas por el cambio de forma del pulso ha sido explicado a partir de una aplicación bidimensional, generalización elíptica de otra estudiada previamente la bibliografía [GOY83], para explicar el mecanismo subyacente a la aparición de una crisis de contorno.

La estructura global del diagrama de bifurcación del oscilador cuando varía la anchura efectiva del pulso es básicamente independiente de la forma específica del pulso siempre y cuando se consideren pulsos que transmitan el mismo impulso mecánico al oscilador. En particular, se pueden hacer predicciones cuantitativas muy precisas acerca de los valores de los puntos de bifurcación para un tipo de pulso aplicando la condición de invariancia y conocidos los correspondientes puntos de bifurcación para el otro tipo de pulso.

También se han determinado las fronteras de inestabilidad de la solución estacionaria de equilibrio del oscilador mediante balance armónico elíptico en primer orden y mediante balance armónico circular en órdenes superiores, las curvas analíticas obtenidas limitan con bastante precisión las regiones de inestabilidad en el espacio de parámetros determinadas a partir de simulaciones numéricas (véase por ejemplo la Fig. 3-10(d)). Al igual que ocurría con las regiones caóticas, la extensión de las regiones de inestabilidad de la solución estacionaria también presenta un máximo cuando varía la anchura efectiva del pulso.

Los resultados obtenidos representan propiedades dinámicas robustas del oscilador en el sentido de que son independientes de la forma específica del pulso siempre y cuando se considere la conjetura de invariancia del impulso.

Reseñar que ninguno de los fenómenos caracterizados están presentes en el *kicked rotator* clásico [Zas78] y que la función utilizada para modelar la cadena de pulsos periódicos de anchura y amplitud finitas puede ser útil en distintos campos científicos donde sea necesario su uso, como por ejemplo en neurociencia o en óptica no lineal.

Por último, y para completar la fenomenología asociada al cambio de forma de la excitación, se ha investigado una nueva ruta en la que aparecen atractores extraños no caóticos que evolucionan hacia atractores caóticos o hacia cuasiperiodicidad variando únicamente la forma de onda de la excitación cuasiperiódica. Con el fin de universalizar la nueva ruta se analizan dos

modelos, uno continuo y otro discreto, generalizaciones de otros previamente estudiados por otros autores para caracterizar atractores extraños no caóticos. Se han encontrado amplios intervalos del parámetro elíptico  $m$ , que controla la forma de onda, donde solo coexisten atractores extraños, caóticos o no, lo que ha permitido plantear estrategias de control de la dinámica para pasar de un atractor a otro, más eficientes que para otros parámetros de control. Se ha confirmado y extendido el escalado lineal de exponente maximal no trivial de Lyapunov característico de la transición hacia comportamiento caótico desde atractores extraños no caóticos [Lai96].

Respecto a los problemas abiertos y futuras líneas de investigación en el campo de la teoría de control cabe mencionar:

- Verificar la robustez de la dinámica añadiendo ruido de tipo gaussiano.
- Extender el enfoque teórico del caso de excitaciones periódicas al de excitaciones aleatorias.
- Desarrollar herramientas de cálculo que permitan aplicar el balance armónico elíptico de orden superior a uno para el estudio de la estabilidad de soluciones estacionarias.
- Extender la teoría de control aplicada al caso de osciladores acoplados.
- Analizar las aplicaciones tecnológicas de la teoría desarrollada.
- Investigar las implicaciones del cambio de forma de onda de excitaciones periódicas y cuasiperiódicas en el ámbito cuántico (localización dinámica, efecto túnel, etc.)

## Bibliografía

- [Abr72] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover, New York, 1972.
- [Ach97] D. J. Acheson, *From calculus to chaos : an introduction to dynamics*. Oxford University Press, Oxford 1997.
- [AL87] V.V. Alekseev y A.Y. Loskutov, *Control of a system with a strange atractor through periodic parametric action*, Soviet Physics Doklady **32**, 1346-1348 (1987).
- [AR91] A. Azevedo y S. M. Rezende, *Controlling chaos in spin-wave instabilities*, Physical Review Letters **66** (10), 1342-1345 (1991).
- [ASM03] S. Alonso, F. Sagués y A. S. Mikhailov, *Taming winfree turbulence of scroll waves in excitable media*, Science **299** (5613), 1722-1725 (2003).
- [BBM06] T. Boness, S. Bose y T. S. Monteiro, *Entanglement and dynamics of spin chains in periodically pulsed magnetic fields: Accelerator modes*, Physical Review Letters **96** (18) (2006).
- [BFE00] M. Belhaq, B. Fiedeer y F. Eakrad, *Homoclinic connections in strongly self-excited nonlinear oscillators: The Melnikov function and the elliptic Lindstedt-Poincaré method*, Nonlinear Dynamics **23** (1), 67-86 (2000).
- [BGJS95] J. A. Blackburn, N. Gronbech-Jensen y H. J. T. Smith, *Stochastic Noise and Chaotic Transients*, Physical Review Letters **74** (6), 908-911 (1995).
- [BGS76] G. Benettin, L. Galgani y J. M. Strelcyn, *Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments*, Physical Review A **14** (6), 2338-2345 (1976).
- [BK91] J. Brindley y T. Kapitaniak, *Analytic predictors for strange non-chaotic attractors*, Physics Letters A **155** (6-7), 361-364 (1991).

- [BL00] M. Belhaq y F. Lakrad, *On the elliptic harmonic balance method for mixed parity non-linear oscillators*, Journal of Sound and Vibration **233** (5), 935-937 (2000).
- [BO96] Z. I. Bezhaeva y V. I. Oseledets, *An example of a strange nonchaotic attractor*, Functional Analysis and its Applications **30** (4), 223-229 (1996).
- [BOA85] A. Bondeson, E. Ott y T. M. Antonsen Jr, *Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: Implications of their equivalence*, Physical Review Letters **55** (20), 2103-2106 (1985).
- [BS69] P. G. D. Barkham y A. C. Soudack, *An extension to the method of Kryloff and Bogoliuboff*, International Journal of Control **10** (4), 377 - 392 (1969).
- [BSGJ92] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith y N. Grønbech-Jensen, *Stability and Hopf Bifurcations in an Inverted Pendulum*, American Journal of Physics **60** (10), 903-908 (1992).
- [BY89a] S. Bravo Yuste, *A generalized Galerkin method for cubic oscillators*, Journal of Sound and Vibration **130** (2), 332-336 (1989).
- [BY89b] S. Bravo Yuste, *The Rayleigh method with Jacobi elliptic functions*, Journal of Sound and Vibration **133** (1), 180-184 (1989).
- [BY92] S. Bravo Yuste, *"Cubication" of non-linear oscillators using the principle of harmonic balance*, International Journal of Non-Linear Mechanics **27** (3), 347-356 (1992).
- [BYDB86] S. Bravo Yuste y J. Díaz Bejarano, *Construction of approximate analytical solutions to a new class of non-linear oscillator equations*, Journal of Sound and Vibration **110** (2), 347-350 (1986).
- [BYDB87] S. Bravo Yuste y J. Díaz Bejarano, *Amplitude decay of damped non-linear oscillators studied with jacobian elliptic functions*, Journal of Sound and Vibration **114** (1), 33-44 (1987).
- [BYDB89] S. Bravo Yuste y J. Díaz Bejarano, *Extension and improvement to the Krylov-Bogoliubov methods using elliptic functions*, International Journal of Control **49** (4), 1127-1141 (1989).
- [CB94] D. Capecchi y S. R. Bishop, *Periodic Oscillations and Attracting Basins for a Parametrically Excited Pendulum*, Dynamics and Stability of Systems **9** (2), 123-143 (1994).
- [CBL97] R. Chacón, F. Balibrea y M. A. López, *Role of parametric resonance in the inhibition of chaotic escape from a potential well*, Physics Letters A **235** (2), 153-158 (1997).
- [CC95] R. Chacón y J. I. Cirac, *Chaotic and Regular Behavior of a Trapped Ion Interacting with a Laser Field*, Physical Review A **51** (6), 4900-4905 (1995).
- [CC96] S. H. Chen y Y. K. Cheung, *An elliptic perturbation method for certain strongly non-linear oscillators*, Journal of Sound and Vibration **192** (2), 453-463 (1996).
- [CC97] S. H. Chen y Y. K. Cheung, *An elliptic Lindstedt-Poincaré Method for Certain Strongly Non-Linear Oscillators*, Nonlinear Dynamics **12** (3), 199-213 (1997).
- [CD93] R. Chacón y J. Díaz Bejarano, *Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations*, Physical Review Letters **71** (19), 3103-3106 (1993).



- [CD98] G. Chen y X. Dong, *From chaos to order: Perspectives, Methodologies and Applications*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [CL09] Y. M. Chen y J. K. Liu, *Elliptic harmonic balance method for two degree-of-freedom self-excited oscillators*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **14** (3), 916-922 (2009).
- [CMGH01] R. Chacón y A. Martínez García-Hoz, *Chaotic behavior in a dissipative non-ideal periodically kicked rotator*, *Physics Letters A* **281** (4), 231-239 (2001).
- [CMGH02] R. Chacón y A. Martínez García-Hoz, *Route to chaos via strange non-chaotic attractors by reshaping periodic excitations*, *Europhysics Letters* **57** (1), 7-13 (2002).
- [CMGH03] R. Chacón y A. Martínez García-Hoz, *Well-behaved dynamics in a dissipative nonideal periodically kicked rotator*, *Physical Review E* **68** (6), 066217/1-11 (2003).
- [CMGH99] R. Chacón y A. Martínez García-Hoz, *Bifurcations and chaos in a parametrically damped two-well Duffing oscillator subjected to symmetric periodic pulses*, *Physical Review E* **59** (6), 6558-6568 (1999).
- [CMGH<sup>+</sup>07] R. Chacón, A. Martínez García-Hoz y J.A. Martínez, *Reshaping induced control of chaos and crisis phenomena in a damped parametrically driven pendulum*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, 615-630 (2007).
- [Cve01] L. Cveticanin, *Vibrations of a coupled two-degree-of-freedom system*, *Journal of Sound and Vibration* **247** (2), 279-292 (2001).
- [Cha05] R. Chacón, *Control of homoclinic chaos by weak periodic perturbations*. World Scientific, New Jersey, 2005.
- [Cha95a] R. Chacón, *Natural Symmetries and Regularization by Means of Weak Parametric Modulations in the Forced Pendulum*, *Physical Review E* **52** (3), 2330-2337 (1995).
- [Cha95b] R. Chacón, *Suppression of Chaos by Selective Resonant Parametric Perturbations*, *Physical Review E* **51** (1), 761-764 (1995).
- [Dav62] H. T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover, New York, 1962.
- [DBHL82] D. D'Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman y A. Libchaber, *Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum*, *Physical Review A* **26** (6), 3483-3496 (1982).
- [DDB86] A. Davidson, B. Dueholm y M. R. Beasley, *Experiments on intrinsic and thermally induced chaos in an rf-driven Josephson junction*, *Physical Review B* **33** (7), 5127-5130 (1986).
- [DDDW97] W. X. Ding, H. Deutsch, A. Dinklage y C. Wilke, *Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge*, *Physical Review E* **55** (3), 3769-3772 (1997).
- [Dev86] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986.
- [DGO89] M. Ding, C. Grebogi y E. Ott, *Dimensions of strange nonchaotic attractors*, *Physics Letters A* **137** (4-5), 167-172 (1989).

- [DPMS<sup>+</sup>04] G. J. Duffy, S. Parkins, T. Maller, M. Sadgrove, R. Leonhardt y A. C. Wilson, *Experimental investigation of early-time diffusion in the quantum kicked rotor using a Bose-Einstein condensate*, *Physical Review E* **70** (5 2), 056206/1-7 (2004).
- [DRS90] W. L. Ditto, S. N. Rauseo y M. L. Spano, *Experimental control of chaos*, *Physical Review Letters* **65** (26), 3211-3214 (1990).
- [DSM84] M. Dolnik, I. Schreiber y M. Marek, *Experimental-Observations of Periodic and Chaotic Regimes in a Forced Chemical Oscillator*, *Physics Letters A* **100** (6), 316-319 (1984).
- [DSSR<sup>+</sup>90] W. L. Ditto, M. L. Spano, H. T. Savage, S. N. Rauseo, J. Heagy y E. Ott, *Experimental observation of a strange nonchaotic attractor*, *Physical Review Letters* **65** (5), 533-536 (1990).
- [Eli05] A. Elías Zúñiga, *Application of Jacobian elliptic functions to the analysis of the steady-state solution of the damped duffing equation with driving force of elliptic type*, *Nonlinear Dynamics* **42** (2), 175-184 (2005).
- [Eli06] A. Elías Zúñiga, *A general solution of the duffing equation*, *Nonlinear Dynamics* **45** (3-4), 227-235 (2006).
- [ER85] J. P. Eckmann y D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, *Reviews of Modern Physics* **57** (3), 617-656 (1985).
- [FG93] R. J. Field y L. Györgyi, *Chaos in chemistry and biochemistry*. World Scientific, Singapore ; River Edge, N.J., 1993.
- [FH05] J. Fang y W. Hai, *Wannier-Stark chaos of a Bose-Einstein condensate in 1D optical lattices*, *Physica B: Condensed Matter* **370** (1-4), 61-72 (2005).
- [FKP06] U. Feudel, S. Kuznetsov y A. Pikovsky, *Strange nonchaotic attractors: dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems*. World Scientific, New Jersey, 2006.
- [GG82] M. R. Guevara y L. Glass, *Phase Locking, Period Doubling Bifurcations and Chaos in a Mathematical-Model of a Periodically Driven Oscillator - a Theory for the Entrainment of Biological Oscillators and the Generation of Cardiac Dysrhythmias*, *Journal of Mathematical Biology* **14** (1), 1-23 (1982).
- [GH02] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York, 2002, 7th. ed.
- [GH81] B. Greenspan y P. Holmes, *Non linear dynamics and turbulence*. Pitman, London, 1981.
- [Gin09] J. M. Ginoux, *Differential geometry applied to dynamical systems*. World Scientific, Hackensack, N. J., 2009.
- [GMDB90] J. García Margallo y J. Díaz Bejarano, *Generalized Fourier series and limit cycles of generalized van der Pol oscillators*, *Journal of Sound and Vibration* **136** (3), 453-466 (1990).

- [GMDB92] J. García Margallo y J. Díaz Bejarano, *The limit cycles of the generalized Rayleigh-Lienard oscillator*, *Journal of Sound and Vibration* **125** (1), 13-21 (1992).
- [GMDB<sup>+</sup>88] J. García Margallo, J. Díaz Bejarano y S. Bravo Yuste, *Generalized fourier series for the study of limit cycles*, *Journal of Sound and Vibration* **125** (1), 13-21 (1988).
- [GOPY84] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan y J. A. Yorke, *Strange attractors that are not chaotic*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **13** (1-2), 261-268 (1984).
- [GORY87] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras y J. A. Yorke, *Critical exponents for crisis-induced intermittency*, *Physical Review A* **36** (11), 5365-5380 (1987).
- [GOY83] C. Grebogi, E. Ott y J. A. Yorke, *Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation*, *Physical Review Letters* **50** (13), 935-938 (1983).
- [GR05] A. Ghosh y R. Ramaswamy, *Cluster-weighted modeling: Estimation of the Lyapunov spectrum in driven systems*, *Physical Review E* **71** (1), 016224/1-6 (2005).
- [GRJ00] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik y A. Jeffrey, *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego, 2000, 6th ed.
- [HBSS<sup>+</sup>05] F. Haug, M. Bienert, W. P. Schleich, T. H. Seligman y M. G. Raizen, *Motional stability of the quantum kicked rotor: A fidelity approach*, *Physical Review A* **71** (4), 1-11 (2005).
- [HD91] J. Heagy y W. L. Ditto, *Dynamics of a two-frequency parametrically driven duffing oscillator*, *Journal of Nonlinear Science* **1** (4), 423-455 (1991).
- [HH94] J. F. Heagy y S. M. Hammel, *The birth of strange nonchaotic attractors*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **70** (1-2), 140-153 (1994).
- [HS88] P. Hagedorn y W. Stadler, *Non-linear oscillations*. Clarendon Press, Oxford, 1988, 2nd ed.
- [HYK85] D. He, W. J. Yeh y Y. H. Kao, *Studies of return maps, chaos, and phase-locked states in a current-driven Josephson-junction simulator*, *Physical Review B* **31** (3), 1359 (1985).
- [JGSM04] P. H. Jones, M. Goonasekera, H. E. Saunders-Singer y D. R. Meacher, *Shifting the boundaries: Pulse-shape effects in the atom-optics kicked rotor*, *Europhysics Letters* **67** (6), 928-933 (2004).
- [JHD07] Z. Jing, J. Huang y J. Deng, *Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings*, *Chaos, Solitons and Fractals* **33** (3), 795-812 (2007).
- [Kan84a] K. Kaneko, *Fractalization of torus*, *Progress of Theoretical Physics* **71**, 1112-1115 (1984).
- [Kan84b] K. Kaneko, *Oscillation and doubling of torus*, *Progress of Theoretical Physics* **72** (2), 202-215 (1984).
- [Kel96] G. Keller, *A note on strange nonchaotic attractors*, *Fundamenta Mathematicae* **151** (2), 139-148 (1996).

- [KKLG07] A. Kandangath, S. Krishnamoorthy, Y. C. Lai y J. A. Gaudet, *Inducing chaos in electronic circuits by resonant perturbations*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers **54** (5), 1109-1119 (2007).
- [KL85] B. P. Koch y R. W. Leven, *Subharmonic and Homoclinic Bifurcations in a Parametrically Forced Pendulum*, Physica D: Nonlinear Phenomena **16** (1), 1-13 (1985).
- [KLO03] S. Y. Kim, W. Lim y E. Ott, *Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors*, Physical Review E **67** (5 2), 056203/1-5 (2003).
- [KM86] R. L. Kautz y J. C. Macfarlane, *Onset of chaos in the rf-biased Josephson junction*, Physical Review A **33** (1), 498 (1986).
- [KMPS<sup>+</sup>07] J. F. Kanem, S. Maneshi, M. Partlow, M. Spanner y A. M. Steinberg, *Observation of high-order quantum resonances in the kicked rotor*, Physical Review Letters **98** (8) (2007).
- [KRB94] Y. S. Kivshar, F. Rödelsperger y H. Benner, *Suppression of chaos by nonresonant parametric perturbations*, Physical Review E **49** (1), 319-324 (1994).
- [KS97a] J. A. Ketoja y I. I. Satija, *Critical phonons of the supercritical Frenkel-Kontorova model: Renormalization bifurcation diagrams*, Physica D: Nonlinear Phenomena **104** (3-4), 239-252 (1997).
- [KS97b] J. A. Ketoja y I. I. Satija, *Harper equation, the dissipative standard map and strange nonchaotic attractors: Relationship between an eigenvalue problem and iterated maps*, Physica D: Nonlinear Phenomena **109** (1-2), 70-80 (1997).
- [KSJ97] S. Y. Kim, S. H. Shin, J. Yi y C. W. Jang, *Bifurcations in a parametrically forced magnetic pendulum*, Physical Review E **56** (6), 6613-6619 (1997).
- [Kuz02] S. P. Kuznetsov, *Torus fractalization and intermittency*, Physical Review E **65** (6), 066209/1-13 (2002).
- [Lai96] Y. C. Lai, *Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors*, Physical Review E **53** (1 SUPPL. A), 57-65 (1996).
- [LBFS08] G. Litak, M. Borowiec, M. I. Friswell y K. Szabelski, *Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13** (7), 1373-1383 (2008).
- [Lor63] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of Atmospheric Science **20**, 130-141 (1963).
- [LSB07] G. Litak, A. Syta y M. Borowiec, *Suppression of chaos by weak resonant excitations in a non-linear oscillator with a non-symmetric potential*, Chaos, Solitons and Fractals **32** (2), 694-701 (2007).
- [LT85] M. A. Lieberman y K. Y. Tsang, *Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, near-Integrable Hamiltonian-Systems*, Physical Review Letters **55** (9), 908-911 (1985).

- [LZLH09] H. Li, B. Zhang, Z. Li, W. A. Halang y G. Chen, *Controlling DC-DC converters by chaos-based pulse width modulation to reduce EMI*, *Chaos, Solitons and Fractals* **42** (3), 1378-1387 (2009).
- [LL92] A. J. Lichtenberg y M. A. Lieberman, *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1992, 2nd ed.
- [LLG02] R. Lewin y J. G. López Guix, *Complejidad : el caos como generador del orden*. Tusquets, Barcelona, 2002, 2ª ed.
- [McL81] J. B. McLaughlin, *Period-Doubling Bifurcations and Chaotic Motion for a Parametrically Forced Pendulum*, *Journal of Statistical Physics* **24** (2), 375-388 (1981).
- [Mel63] V. K. Melnikov, *On the stability of the center for time periodic perturbations*, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **12**, 1-7 (1963).
- [MG08] L. C. Martins y J. A. C. Gallas, *Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18** (6), 1705-1717 (2008).
- [MGCA94] R. Meucci, W. Gadomski, M. Ciofini y F. T. Arecchi, *Experimental control of chaos by means of weak parametric perturbations*, *Physical Review E* **49** (4), R2528-R2531 (1994).
- [Mic84] R. E. Mickens, *Comments on the method of harmonic balance*, *Journal of Sound and Vibration* **94** (3), 456-460 (1984).
- [Moo84] F. C. Moon, *Fractal Boundary for Chaos in a 2-State Mechanical Oscillator*, *Physical Review Letters* **53** (10), 962-964 (1984).
- [MS93] A. J. Mandell y K. A. Selz, *Brain stem neuronal noise and neocortical "resonance"*, *Journal of Statistical Physics* **70** (1-2), 355-373 (1993).
- [NK96] T. Nishikawa y K. Kaneko, *Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor*, *Physical Review E* **54** (6), 6114-6124 (1996).
- [NNSY07] Md Nurujjaman, R. Narayanan y A. N. Sekar Iyengar, *Parametric investigation of nonlinear fluctuations in a dc glow discharge plasma*, *Chaos* **17**, 043121 (2007).
- [NP97] G. Nicolis y I. Prigogine, *La estructura de lo complejo : en el camino hacia una nueva comprensión de las ciencias*. Alianza Editorial, Madrid, 1997, 1ª ed.
- [OK09] T. Okabe y T. Kondou, *Improvement to the averaging method using the Jacobian elliptic function*, *Journal of Sound and Vibration* **320** (1-2), 339-364 (2009).
- [OS94] E. Ott y J. C. Sommerer, *Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency*, *Physics Letters A* **188** (1), 39-47 (1994).
- [Ott93] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, New York, 1993.
- [OWGF01] H. Osinga, J. Wiersig, P. Glendinning y U. Feudel, *Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map*, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* **11** (12), 3085-3105 (2001).

- [PCC96] A. T. Pérez, R. Chacón y A. Castellanos, *Behavior of dynamical systems subjected to continuous and discontinuous forcing: Application to laminar chaotic mixing*, International Journal of Bifurcation and Chaos **6** (12 A/B), 2627-2634 (1996).
- [PF95] A. S. Pikovsky y U. Feudel, *Characterizing strange nonchaotic attractors*, Chaos **5** (1), 253-260 (1995).
- [PGMS93] V. Petrov, V. Gàspàr, J. Masere y K. Showalter, *Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction*, Nature **361** (6409), 240-243 (1993).
- [PMC07] D. E. Pelinovsky, T. R. O. Melvin y A. R. Champneys, *One-parameter localized traveling waves in nonlinear Schrödinger lattices*, Physica D: Nonlinear Phenomena **236** (1), 22-43 (2007).
- [PMR97] A. Prasad, V. Mehra y R. Ramaswamy, *Intermittency route to strange nonchaotic attractors*, Physical Review Letters **79** (21), 4127-4130 (1997).
- [Poi99] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*. Gauthier-Villars, París, 1899.
- [Pre92] W. H. Press, *Numerical recipes in FORTRAN : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, 1992, 2nd ed.
- [PZFK95] A. S. Pikovsky, M. A. Zaks, U. Feudel y J. Kurths, *Singular continuous spectra in dissipative dynamics*, Physical Review E **52** (1), 285-296 (1995).
- [QD96] Z. C. Qiao y S. Q. Dai, *Limit cycle analysis of a class of strongly nonlinear oscillation equations*, Nonlinear Dynamics **10** (3), 221-233 (1996).
- [RAVD<sup>+</sup>06] C. Ryu, M. F. Andersen, A. Vaziri, M. B. D'Arcy, J. M. Grossman, K. Helmerson y W. D. Phillips, *High-order quantum resonances observed in a periodically kicked bose-Einstein condensate*, Physical Review Letters **96** (16) (2006).
- [RBOA<sup>+</sup>87] F. J. Romeiras, A. Bondeson, E. Ott, T. M. Antonsen Jr y C. Grebogi, *Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors*, Physica D: Nonlinear Phenomena **26** (1-3), 277-294 (1987).
- [RO87] F. J. Romeiras y E. Ott, *Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing*, Physical Review A **35** (10), 4404-4413 (1987).
- [Roy94] R. V. Roy, *Averaging method for strongly non-linear oscillators with periodic excitations*, International Journal of Non-Linear Mechanics **29** (5), 737-753 (1994).
- [RP07] G. Ruiz y P. Parmananda, *Experimental observation of strange nonchaotic attractors in a driven excitable system*, Physics Letters A **367** (6), 478-482 (2007).
- [RP08] G. Ruiz y P. Parmananda, *Experimental observation of strange non-chaotic attractors in a driven excitable system*, Physics Letters A **372** (6), 817-821 (2008).
- [RT71] D. Ruelle y F. Takens, *On the nature of turbulence*, Communications in Mathematical Physics **20** (3), 167-192 (1971).
- [Sch95] H. G. Schuster, *Deterministic chaos : an introduction*. VCH, Weinheim, Federal Republic of Germany ; New York, 1995, 3rd ed.

- [SFKP96] O. Sosnovtseva, U. Feudel, J. Kurths y A. Pikovsky, *Multiband strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced systems*, *Physics Letters A* **218** (3-6), 255-267 (1996).
- [SJDC<sup>+</sup>94] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano y W. L. Ditto, *Controlling chaos in the brain*, *Nature* **370** (6491), 615-620 (1994).
- [SKTW05] M. S. Siewe, F. M. M. Kakmeni, C. Tchawoua y P. Wofo, *Bifurcations and chaos in the triple-well  $\hat{I}_6$ -Van der Pol oscillator driven by external and parametric excitations*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **357** (3-4), 383-396 (2005).
- [SNR08] T. U. Singh, A. Nandi y R. Ramaswamy, *Scenarios for generalized synchronization with chaotic driving*, *Physical Review E* **78** (2), 025205 (2008).
- [SSTL08] D. V. Senthilkumar, K. Srinivasan, K. Thamilaran y M. Lakshmanan, *Bubbling route to strange nonchaotic attractor in a nonlinear series LCR circuit with a nonsinusoidal force*, *Physical Review E* **78** (6), 066211 (2008).
- [ST95] J. Starrett y R. Tagg, *Control of a Chaotic Parametrically Driven Pendulum*, *Physical Review Letters* **74** (11), 1974-1977 (1995).
- [TS02] J. M. T. Thompson y H. B. Stewart, *Nonlinear dynamics and chaos*. Wiley, New York, 2002, 2nd ed.
- [TSVL06] K. Thamilaran, D. V. Senthilkumar, A. Venkatesan y M. Lakshmanan, *Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit*, *Physical Review E* **74** (3), 036205 (2006).
- [TZ08] V. E. Tarasov y G. M. Zaslavsky, *Fractional equations of kicked systems and discrete maps*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** (43) (2008).
- [Ver96] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. New York, 1996.
- [VML99] A. Venkatesan, K. Murali y M. Lakshmanan, *Birth of strange nonchaotic attractors through type III intermittency*, *Physics Letters A* **259** (3-4), 246-253 (1999).
- [WB92] B. R. Wu y J. A. Blackburn, *Well-Behaved Dynamics in a Parametrically Damped Pendulum*, *Physical Review A* **45** (10), 7030-7035 (1992).
- [WDJ06] R. Wang, J. Deng y Z. Jing, *Chaos control in duffing system*, *Chaos, Solitons and Fractals* **27** (1), 249-257 (2006).
- [WFP97] A. Witt, U. Feudel y A. Pikovsky, *Birth of strange nonchaotic attractors due to interior crisis*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **109** (1-2), 180-190 (1997).
- [Wig03] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* Springer, New York, 2003.
- [WSDG<sup>+</sup>04] M. E. K. Williams, M. P. Sadgrove, A. J. Daley, R. N. C. Gray, S. M. Tan, A. S. Parkins, N. Christensen y R. Leonhardt, *Measurements of diffusion resonances for the atom optics quantum kicked rotor*, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6** (1), 28-33 (2004).

- [WSH95] J. Wang, P.G. Sorensen y F. Hynne, *Transient Complex Oscillation in a Closed Belousov-Zhabotinsky Reaction*, Zeitschrift fur Physikalische Chemie **192**, 13 (1995).
- [WSSV85] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney y J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a Time-Series*, Physica D: Nonlinear Phenomena **16** (3), 285-317 (1985).
- [WVH03] S. B. Waluya y W. T. Van Horssen, *On approximations of first integrals for strongly nonlinear oscillators*, Nonlinear Dynamics **32** (2), 109-141 (2003).
- [WXFX07] Z. Wu, J. Xie, Y. Fang y Z. Xu, *Controlling chaos with periodic parametric perturbations in Lorenz system*, Chaos, Solitons and Fractals **32** (1), 104-112 (2007).
- [XH95] F. G. Xie y G. Hu, *Periodic-Solutions and Bifurcation Behavior in the Parametrically Damped 2-Well Duffing Equation*, Physical Review E **51** (4), 2773-2778 (1995).
- [YL96] T. Yalçinkaya y Y. C. Lai, *Blowout bifurcation route to strange nonchaotic attractors*, Physical Review Letters **77** (25), 5039-5042 (1996).
- [YL97] T. Yalçinkaya y Y. C. Lai, *Bifurcation to strange nonchaotic attractors*, Physical Review E **56** (2), 1623-1630 (1997).
- [YWZ07] Y. Yu, Q. Wang y H. Zhang, *The extension of the Jacobi elliptic function rational expansion method*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **12** (5), 702-713 (2007).
- [YXS06] X. Yang, W. Xu y Z. Sun, *Effect of bounded noise on the chaotic motion of a Duffing Van der pol oscillator in a  $\phi^6$  potential*, Chaos, Solitons and Fractals **27** (3), 778-788 (2006).
- [ZABL<sup>+</sup>06] S. Zambrano, E. Allaria, S. Brugioni, I. Leyva, R. Meucci, M. A. F. Sanjuán y F. T. Arecchi, *Numerical and experimental exploration of phase control of chaos*, Chaos **16** (1), 013111 (2006).
- [Zas05] George M. Zaslavsky, *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [Zas78] G. M. Zaslavsky, *Simplest Case of a Strange Attractor*, Physics Letters A **69** (3), 145-147 (1978).
- [Zha07] H. Zhang, *Extended Jacobi elliptic function expansion method and its applications*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **12** (5), 627-635 (2007).
- [ZMB92] T. Zhou, F. Moss y A. Bulsara, *Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential*, Physical Review A **45** (8), 5394-5400 (1992).
- [ZMS95] K. P. Zeyer, A. F. Münster y F. W. Schneider, *Quasiperiodic forcing of a chemical reaction: Experiments and calculations*, Journal of Physical Chemistry **99** (35), 13173-13180 (1995).