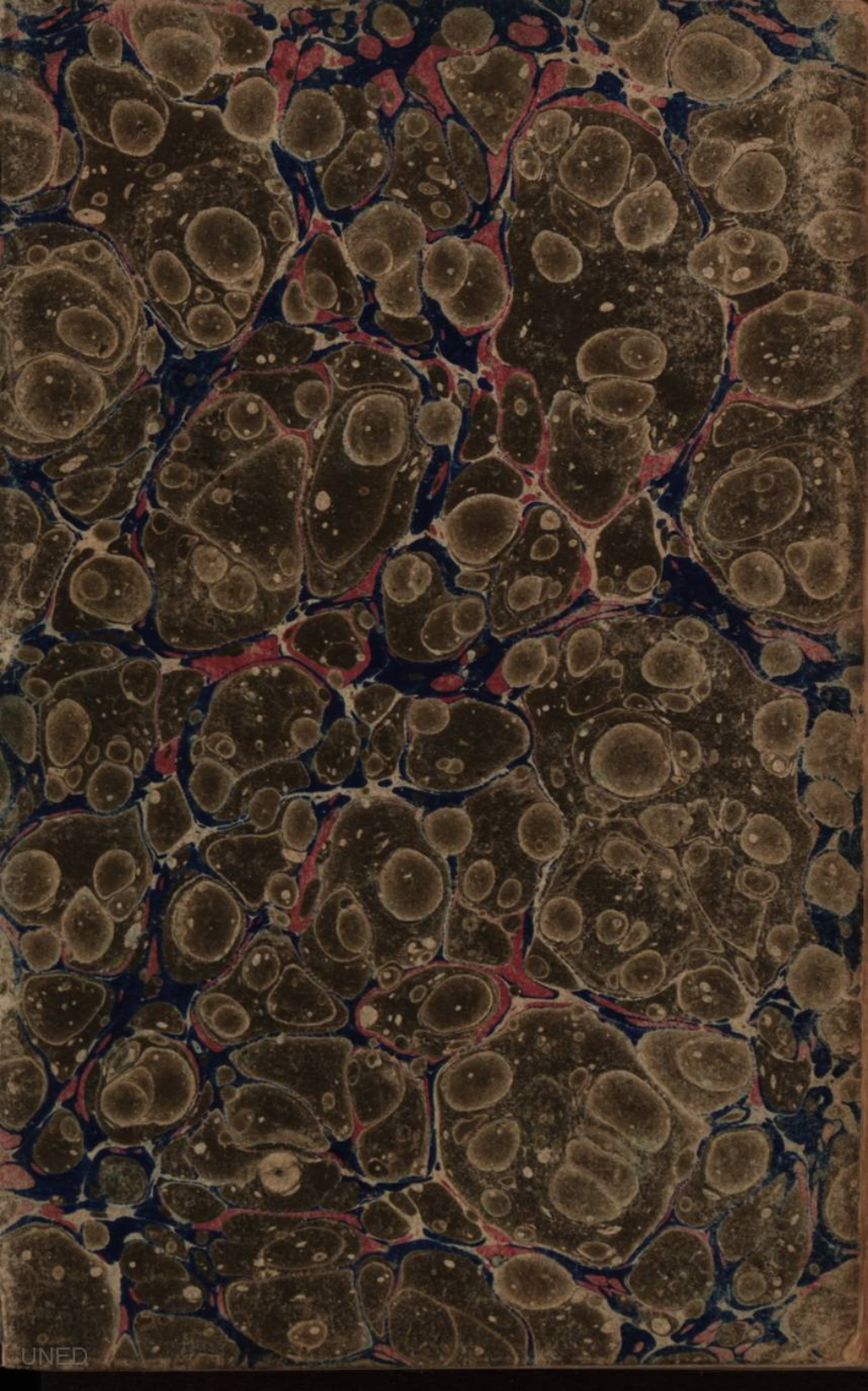

UNED

ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS.

Es propiedad del autor.— Todos los ejemplares llevan una contraseña.

V. 3

K.115248

L.T.
2876 V.1

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. JOAQUIN MARÍA FERNANDEZ Y CARDIN

DOCTOR EN CIENCIAS, LICENCIADO EN JURISPRUDENCIA
Y CATEDRÁTICO DE AQUELLA ASIGNATURA EN EL INSTITUTO DE PRIMERA CLASE
DE S. ISIDRO DE MADRID.

OBRA DE TEXTO PARA SEGUNDA ENSEÑANZA

ARITMÉTICA

SEXTA EDICION

Esteban Vidal

MADRID: 1869.

POR D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTENEBRO,
Impresor del Instituto de 1ª clase de S. Isidro.
Cardenal-Cisneros 10.

UNED

Esta obra y otras del mismo autor se venden en las principales librerías de Madrid á los precios siguientes:

Aritmética (en rústica)	12 rs.
Algebra (id)	14
Geometria (id.)	16
Principios de Aritmética (id)	4
Principios de Geometria por Moya (id)	5
Nociones de Aritmética para las escuelas de Instruccion primaria (con cubierta fuerte equivalente á pergamino)	2
Encartonadas	2 1/2

En provincias podrá tener un real de aumento cada tomito de los Elementos, y medio los de los Principios de Aritmética y Geometría.

Los pedidos de fuera de Madrid pueden dirigirse á *don Justo Serrano*, pasaje de Matheu.

PRÓLOGO.

«Un libro elemental de Matemáticas es una obra muy fácil ó muy difícil, dice un sabio Matemático del pasado siglo; es muy fácil si el autor no se propone más que hacer un libro, ó una compilacion que más pábulo dé ó materia de ejercicio á la memoria que á la reflexion y al entendimiento: y es muy difícil si el autor se ciñe á escribir con arreglo á sus ideas propias y á no aceptar las de otro sino apropiándoselas con imparcial exámen y meditacion detenida; si quiere conciliar la sencillez y la claridad con el rigor y la precision, ocupar la inteligencia sin fatigar la memoria, y no decir más de lo conveniente dejando adivinar lo que se calla. Por eso son tan raros los buenos libros elementales en medio de la *estéril abundancia* de tratados de Matemáticas, que por todas partes nos cerca y nos agobia sin enriquecernos.»

Grandes son en efecto las dificultades con que hemos luchado al realizar en nuestra obra el segundo extremo de esta máxima, y nos queda en el ánimo un prudente rezelo de no haberlo alcanzado por completo, á pesar de que al escribirla ni por un momento hemos perdido de vista la sabiduría del consejo, y de que hemos aportado á este trabajo todo el caudal de experiencia que pudimos adquirir en nuestra enseñanza. Quédanos, sin embargo, la consoladora idea de que en esta clase de trabajos no es la perfeccion absoluta lo que debe pedirse, sino la relativa al objeto á que el libro se consagra; y bajo este punto de vista creemos haber hecho lo posible por acercarnos á conseguirlo.

Una obra destinada á servir de texto para el estudio de las Matemáticas en la *segunda enseñanza* debe proponerse

UNED

dos fines, en nuestro juicio inseparables, y que deben realizarse completa y simultáneamente. De estos fines el primero es desenvolver, dar fuerza, vigor y precision al entendimiento de la juventud que empieza á dar sus primeros pasos en la carrera de las ciencias, y el segundo nutrirlo con una suma de conocimientos utilísimos para todas las profesiones científicas ó industriales, y siempre necesarios en todas las situaciones de la vida. Convertir el estudio de las Matemáticas en una verdadera gimnástica del espíritu, é implantar al propio tiempo en él las nociones fundamentales y eminentemente científicas de la cantidad, de la relacion y de la forma, debe ser el pensamiento superior y dominante de los libros de texto que se ponen en manos de la juventud. Mucho órden y mucha claridad, en suma, mucho *método*, son indispensables para lograr el fin primero; una razonable extension al par que una sóbria y atinada eleccion de las teorías, son necesarias para lograr el fin segundo.

Fieles á este doble pensamiento, que reina en toda la obra, hemos procurado que la exposicion de la doctrina en la *Aritmética* y en el *Algebra* vaya siempre animada por el espíritu del *análisis*. Antes de sentar una conclusion ó de establecer una regla, preparamos el camino que debe recorrer la mente principiando por el caso particular ó por el ejemplo determinado, y observando todas las circunstancias que pueden restringir, ampliar ó modificar el enunciado teórico, ó la regla práctica que al fin ponemos. Seguimos así los mismos pasos que naturalmente sigue el espíritu, el cual nunca aprende las cosas en general, sino que por lo particular que percibe se eleva á la nocion abstracta y universal. El método analítico, rico por la multitud de circunstancias que va haciendo notar, y ameno por la variedad de puntos de vista que ofrecen sus horizontes, convierte la enseñanza en un cómodo y distraido viaje que se hace de un pueblo á otro, intentando excursiones acá y allá y recogiendo noticias útiles y agradables por un extenso

y variado territorio. Deja además al entendimiento juvenil la siempre útil persuasion de hacer por sí mismo el descubrimiento á que insensiblemente se le va conduciendo.

No es de nuestro propósito encomiar ahora la utilidad de los estudios matemáticos para justificar la extension que les damos en nuestra obra elemental: son demasiado comunes é interesantes, se palpan por do quiera sus aplicaciones así en la vida práctica de las sociedades modernas, como en la region más elevada de las ciencias: ninguna carrera puede emprenderse hoy, que no exija esta necesaria iniciacion; ninguna profesion ú oficio puede escogerse que no tenga que acudir alguna vez á estos conocimientos. Menester es, pues, que se hallen adornados de ellos, no solamente los que van para carreras letradas, sino los que á nada más aspiran que á sacar de la segunda enseñanza la suma de conocimientos indispensables para los usos más comunes de la vida doméstica y social.

Esta es la razon porqué no hemos sido escasos en las teorías, ni mucho ménos en sus aplicaciones, que en seguida de cada una de ellas hemos intercalado. Al lado de la explicacion teórica ponemos la realizacion práctica y concreta, y con este método, cuya ventaja sabemos por experiencia, procuramos templar la aridez especulativa de la teoría ó de la regla, con el sabor de práctica utilidad que lleva el fruto que en seguida se coge y se aprovecha.

De intento hemos dejado para el fin de la Aritmética todas aquellas teorías que consideramos más difíciles y áridas, formando un complemento, cuyo provechoso estudio necesita de alguna preparacion.

Hémosle compuesto de las teorías que tratan de propiedades de los números, máximo comun divisor, mínimo comun múltiplo, con sus aplicaciones á los quebrados comunes y decimales; completándole con la extraccion de la raíz cuadrada y cúbica.

Creemos que todo lo relativo á las razones y proporciones, á las progresiones y á los logaritmos tiene un lugar

UNED

más oportuno en el Algebra que en la Aritmética; porque tan importantes teorías tienen allí su demostracion general, y son más comprensibles los desarrollos y aplicaciones prácticas de esta parte más elevada de la ciencia de los números.

Procuramos cuanto podemos ser breves sin pecar de oscuros, y en la exposicion de las reglas omitimos de intento aquellas preparaciones ó disposiciones puramente gráficas, que sin ser parte de ellas inhabilitan al discípulo para concebir y emprender las prácticas más libres y más variadas, que se usan en ulteriores tratados de esta vasta ciencia.

Siempre nos proponemos por norte la mayor facilidad y la mayor utilidad en el estudio; porque esto es lo ménos que puede pedirse á una obra de texto, siquiera esta sea considerada como un medio material, como un instrumento de la enseñanza. La experiencia que en ella nos ha guiado, será en adelante nuestro mejor criterio: á ella apelamos, y con ella, ilustrada por el maduro consejo de nuestros dignos comprofesores, contamos para dar á nuestra obra la perfeccion gradual y progresiva á que debe aspirar toda obra humana.

ADVERTENCIA.

En esta *sexta edicion* reproducimos la precedente sin más variaciones que alguna que otra correccion insignificante.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS.

INTRODUCCION.

1. *Se llaman* MATEMÁTICAS *las ciencias que tratan de la cantidad.*

2. CANTIDAD *es todo aquello que se concibe como compuesto de partes y divisible en ellas*, como una porcion de monedas, un grupo de árboles, la distancia entre dos puntos, la superficie de un terreno, etc. (*).

3. La cantidad puede ser *contínua* ó *discreta*.

(*) La definicion de la cantidad «Todo lo que es susceptible de aumento ó disminucion» nos parece defectuosa, porque comprende mucho más que lo definido: hay en efecto muchas cosas en las que cabe aumento ó disminucion, que no pueden llevar el nombre de cantidades: todas las afecciones de la sensibilidad, los placeres, los dolores, como tambien los conceptos morales de bueno y de malo, pueden ser mayores ó menores, pueden tener *más* ó *ménos*, y sin embargo repugna el llamarles cantidades, al ménos en el sentido en que se llama cantidad á lo que es objeto de la ciencia matemática.

Juzgamos que todas las dificultades que ofrece esta definicion de la cantidad, sin duda la más generalizada, nacen del carácter objetivo que la distingue. No son verdaderamente cantidades las cosas *cuantas* ó que se conciben como *cuantas*; sino que la cantidad es un concepto de la cosa y no la cosa misma. No pensemos, por consiguiente, en hallar los elementos lógicos de la buena definicion de la cantidad en las cosas cuantas, sino en el entendimiento que como tales las concibe.

La definicion que presentamos aquí saca sus elementos de los conceptos que el entendimiento aplica para juzgar las cosas como cuantas: estos conceptos son el de *unidad*, el de *pluralidad* y el de *totalidad*: todo aquello que consideramos como un todo compuesto de pluralidad de partes, es necesariamente para nosotros una cantidad; donde tales conceptos no entran, aunque lo cosa en cuestion pueda tener au-

UNED

CANTIDAD CONTÍNUA es *aquella cuyas partes estan unidas entre sí*, como la superficie de un terreno.

CANTIDAD DISCRETA es *aquella cuyas partes no tienen union ó enlace entre sí*, como una porcion de monedas.

La cantidad contínua es *mensurable*, y la discreta es *numerable* (*).

4. Las Matemáticas se dividen en dos ramas principales: ARITMÉTICA, *que trata de la cantidad discreta ó numerable*, y GEOMETRÍA, *que trata de la cantidad contínua ó mensurable.*

Otra rama superior se concibe, que es el ÁLGEBRA, *la cual trata de la cantidad en general, y prescinde de su naturaleza discreta ó contínua.*

5. Las Matemáticas no solo son ciencias, sino que son el más perfecto modelo de la ciencia.

Entiéndese por CIENCIA *una série de verdades dependientes unas de otras y subordinadas todas á un principio.*

Esta subordinacion rigurosa se obtiene por medio de la *demostracion.*

6. *La* DEMOSTRACION *es un raciocinio en que se resuelve una cuestion por principios evidentes.* La *cuestion* es aquel enunciado particular que se propone para ser demostrado.

La demostracion se divide en *directa* é *indirecta* ó *ad absurdum*. La primera se funda en la relacion que tiene una verdad con un principio evidente por sí mismo ó ya demostrado. La segunda es la que se funda en el absurdo que se seguiria si no fuese verdad lo que se propone.

7. Los principios en que se funda la demostracion matemática se llaman *axiomas.*

Los axiomas son verdades evidentes, universales y nece-

---

mento ó disminucion (intensivos), como sucede en las afecciones morales, no hay cantidad en el sentido matemático.

No es, pues, el *deseo pueril de singularizarse* quien nos ha impulsado á separarnos, en esta y alguna otra definicion, del camino comunmente seguido: ha sido la conviccion, la necesidad. Tal vez nos habrémos equivocado; pero concédasenos siquiera que obramos de buena fe y movidos por más nobles estímulos.

(*) La cantidad contínua tambien es numerable; pero esta numerabilidad supone la *mensurabilidad*, esto es, la posibilidad de una superposicion sucesiva de la cantidad que mide sobre la que es medida. La cantidad que mide es la unidad, á la cual se refiere, como á parte, la pluralidad que encierra el todo medido.

UNED

sarias, de comun aplicacion á todas las ciencias, y muy particularmente á las Matemáticas. Tal es por ejemplo: *dos cosas iguales con una tercera son iguales entre sí.*

8. Otras verdades hay que se llaman POSTULADOS Ó PETICIONES, *que son aquellas verdades fundamentales que tienen un carácter práctico, por cuanto en ellas se establece la evidente posibilidad de hacer alguna cosa*, como por ejemplo: De cualquier punto dado, á otro tambien dado, se puede tirar una línea recta. Los postulados figuran principalmente en la Geometría.

En otras proposiciones se definen los objetos de la ciencia matemática.

9. DEFINICION *es la explicacion de la naturaleza de una cosa por sus caractéres genéricos y diferenciales*, como por ejemplo: Ángulo es la extension comprendida entre dos rectas que concurren en un punto.

10. TEOREMA *es un enunciado especulativo en que se propone una verdad demostrable.*

En todo teorema hay siempre tres cosas: una *hipótesis* que sirve de dato á la demostracion; una *tesis* que expresa la verdad demostrable, y en seguida la *demostracion;* por ejemplo: Si dos términos de un quebrado se multiplican ó dividen por un mismo número (hipótesis), el valor del quebrado no se altera (tesis). A este enunciado sigue la demostracion.

11. PROBLEMA *es un enunciado práctico en que se propone hacer alguna cosa, enseñando y legitimando los procedimientos para lograrlo.*

En todo problema hay siempre tres cosas indispensables: una *propuesta*, por ejemplo, multiplicar quebrados; una *solucion* en que se dan las reglas para hacer esta multiplicacion, y una *demostracion* en que se hace ver que el uso de tales reglas conduce siempre á un resultado legítimo. Muy frecuentemente la demostracion de la regla precede á la regla misma que sirve para resolver el problema.

Tambien se llaman problemas en un sentido ménos riguroso, las cuestiones particulares y concretas que se proponen y resuelven como ejemplos ó aplicaciones prácticas de las reglas.

UNED

12. Otras proposiciones hay que se llaman COROLARIOS, *que son verdades especulativas ó prácticas que se deducen inmediata y fácilmente de una verdad anterior.*

13. Tambien hay *observaciones*, que son prevenciones ó advertencias que se van intercalando por todo el cuerpo de la ciencia matemática para facilitar las demostraciones.

Las observaciones tienen por objeto principal en esta obra hacer notar en un procedimiento ó en una teoría aquellas circunstancias importantes, que pueden erigirse en verdades de la ciencia por su legítima relacion con los principios fundamentales. Las observaciones suelen llamarse tambien *escolios*.

Las demostraciones matemáticas se extienden con mucha frecuencia á los teoremas *recíprocos*.

14. *Son* RECÍPROCOS *aquellos teoremas de los cuales el uno tiene por hipótesis y por tesis la tesis é hipótesis del otro*, por ejemplo: el radio que divide la cuerda en dos partes iguales, es perpendicular á ella; el radio que es perpendicular á la cuerda la divide en dos partes iguales. En la Geometría es muy frecuente la reciprocidad de los teoremas.

La demostracion de los teoremas recíprocos se funda ordinariamente en el absurdo que se sigue, y es indirecta. El absurdo que se deduce es la destruccion de la verdad establecida en el *teorema directo* ó en otra proposicion ya demostrada.

UNED

ARITMETICA.

PRELIMINARES.

15. ARITMÉTICA *es la ciencia de los números.*

16. NÚMERO *es el todo formado de una pluralidad de unidades*, como treinta varas, veinte libros, cinco sétimos de arroba.

17. UNIDAD *es la cantidad que sirve de medida al número, y á la cual este se refiere como el todo á la parte:* la vara, el libro, el sétimo de arroba, son las unidades de aquellos números.

La unidad es muchas veces arbitraria, y á su vez compuesta de otras unidades inferiores, como la vara se compone de tres piés, y es un verdadero número de piés.

La unidad en *abstracto* se llama *uno*.

18. El número se divide en *entero* y *quebrado*.

NÚMERO ENTERO *es una totalidad de unidades no referidas como inferiores á otra unidad superior* (*), como veinte varas.

NÚMERO QUEBRADO *es una totalidad de unidades inferiores referidas á otra unidad superior*, como las dos terceras partes de una vara.

La reunion de un número entero y un quebrado suele llamarse *número misto*, como veinte varas y dos tercios.

19. Los números pueden ser *abstractos* ó *concretos*.

NÚMERO ABSTRACTO *es el que no determina la especie de la unidad á que se refiere*, como ocho, cuarenta, etc,

---

(*) Estas definiciones, la de unidad, así como la distincion de números *enteros* y *quebrados*, son consecuencia natural de nuestra doctrina acerca de la cantidad (V. la nota del número 2.°). Rogamos al lector que compare estas definiciones con las que suelen darse, ligeramente en nuestro concepto, de estas cosas tan importantes en las obras de Matemáticas elementales ó magistrales. En tales definiciones ha de haber siempre mucho de metafísico, porque en ellas está todo lo metafísico que las Matemáticas encierran, que no es poco, á pesar de los que pretenden purgarlas de toda metafísica y de toda lógica. No calificamos esta pretension.

UNED

Número concreto *es el que determina la especie de la unidad*, como ocho varas, cuarenta duros, etc.

Los números concretos se dividen en *complejos* é *incomplejos*.

Se llaman números complejos *los que se componen de varios concretos de diferente especie, pero de la misma naturaleza*, como tres varas, dos pies, cinco pulgadas; dos quintales, una arroba, siete libras, cuatro onzas.

Son números incomplejos *los concretos de una sola especie*, por ejemplo: veinte varas ó cuarenta duros.

La Aritmética enseña á *expresar* los números, y á *componerlos* y *descomponerlos*.

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeracion de los enteros.

20. Numeracion *es aquella parte de la Aritmética que enseña á expresar los números.*

Los números pueden expresarse *de palabra* ó *por escrito*, la numeracion es por lo tanto *oral* ó *escrita*.

ARTICULO PRIMERO.

Numeracion oral.

21. La numeracion oral *enseña á expresar todos los números con muy pocas palabras.*

Hé aquí la manera como esto se consigue,

A los primeros números se dieron los nombres siguientes:

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Las unidades que estas nueve primeras palabras expresan, se han llamado *simples* ó *de primer órden*, y todo el artificio del sistema consiste en haber tomado la última *diez* unidades

UNED

de un órden para formar *una* del órden siguiente; y en contar por estas como por aquellas: así que, el número *diez* se considera como *una unidad compuesta*, llamada *decena* ó *unidad de segundo órden*, y se cuenta por decenas como por unidades simples, de este modo:

Una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro decenas,..., diez decenas.

A cuya nomenclatura sustituyó el uso otra ménos regular pero más concisa, que es la siguiente:

Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, CIEN.

Los números compuestos de decenas y unidades simples se expresan añadiendo al número de decenas alguno de los *nueve* nombres de las unidades simples, de este modo:

Diez y uno (*), *diez y dos, diez y tres, diez y cuatro,..., diez y nueve,* . . . . . .
noventa y uno, noventa y dos, noventa y tres, ..., noventa y nueve.

Se considera el número *ciento* como una nueva unidad, llamada *de tercer órden*, y se cuenta por cientos ó *centenas*, como por unidades ó decenas, del modo siguiente:

Ciento, dos cientos, ... (**), *nueve cientos, diez cientos* ó MIL.

Los números comprendidos entre dos números consecutivos de centenas, se expresan añadiendo al menor los *noventa y nueve* primeros números, de este modo:

Ciento uno, ciento dos, ..., ciento noventa y nueve, ..., nuevecientos uno, nuevecientos dos, ..., nuevecientos noventa y nueve.

Se toma el número *mil* como otra unidad compuesta, que se llama *millar* ó *de cuarto órden*, y se cuenta por millares, como por unidades, decenas y centenas, como sigue:

Mil, dos mil, ..., nuevecientos noventa y nueve mil, mil miles ó MILLON.

(*) Por la anomalía del lenguaje se dice: *once, doce, trece, catorce y quince*, en vez de *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco.*

(**) En vez de *cinco cientos* se dice *quinientos.*

UNED

Los números comprendidos entre dos números consecutivos de millares se expresan añadiendo al menor los *novecientos noventa y nueve* números primeros, de este modo:

Mil uno, mil dos, ..., mil novecientos noventa y nueve,

. . . . . .

novecientos noventa y nueve mil uno, ..., novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.

Las *decenas* y *centenas de millar* son *unidades de quinto* y *sexto órden.*

Se considera el *millon* como una nueva unidad compuesta, que será del *órden sétimo*, y se cuenta por unidades, decenas, centenas, millares, decenas y centenas de millar de millon, como por unidades sencillas.

De modo que los millones son unidades del *órden sétimo*, las decenas de millon del *octavo*, las centenas de millon del *noveno*, los millares de millon del *décimo*, las decenas de millar de millon del *undécimo*, y las centenas de millar de millon del *duodécimo.*

Finalmente, un millon de millones se llama *billon*, un millon de billones *trillon*, etc.; y se cuenta por billones, trillones, etc., como por millones (*).

22. En suma, con los nombres de los diez primeros números, y los de *ciento*, *mil* y *millon*, modificándolos y combinándolos convenientemente, pueden expresarse todos los números por muy grandes y complicados que sean.

Este sistema admirable se llama DECIMAL Ó DECENARIO, porque *diez unidades de un órden componen una decena del mismo órden ó una unidad del órden superior inmediato.*

OBSERVACION. Nótese que de la misma manera que se formó este sistema, pudo haberse formado otro cualquiera. Si se hubiese convenido, por ejemplo, en que *doce* unidades de un órden compusiesen una del órden siguiente; ó si se contase por *docenas* como por *dieces* ó *decenas*, resultaria el sistema *duodecimal*. Si *dos* unidades de un órden formasen una del siguiente, el sistema sería *binario*, etc.

(*) Los franceses cuentan solo por unidades, decenas y centenas de millon, llamando billon al millar de millon, y trillon al que nosotros billon, etc.

UNED

ARTICULO II.

Numeracion escrita.

23. *La* NUMERACION ESCRITA *enseña á representar todos los números con muy pocos signos ó caractéres.* Estos caractéres se llaman *cifras* ó *guarismos.*

Para conseguir esta representacion sistemática, se emplean los diez signos ó cifras siguientes:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

La cifra primera, llamada *cero*, es símbolo de la *nada*, porque *nada* expresa por sí misma; y así se dice que es *cifra no significativa:* las restantes son *cifras significativas.*

Con estas diez cifras se pueden expresar todos los números, conviniendo en que una de ellas, colocada á la izquierda de otra, represente unidades del órden superior inmediato, y por lo tanto exprese *unidades diez veces mayores que las de la cifra de la derecha;* ó lo que es igual, que la cifra que represente unidades sencillas, se coloque en el primer lugar de la derecha, la que exprese decenas en el segundo, la que centenas en el tercero, etc. De modo que segun este convenio, *cada cifra debe ocupar un lugar igual al órden de unidades que representa, contando estos lugares de derecha á izquierda.* Así que, el número *cuatrocientos treinta y seis*, que contiene cuatro centenas ó unidades de *tercer* órden, tres decenas ó unidades de *segundo* órden, y seis unidades sencillas ó del órden *primero*, se escribe: 436.

Noventa y dos mil setecientos trece, que contiene nueve unidades de *quinto* órden, dos del *cuarto*, siete del *tercero*, una del *segundo*, y tres del *primero*, se escribe así: 92713.

El *cero* sirve para ocupar el lugar de algun órden de unidades que falte en el número que se quiera escribir.

Así, *tres mil noventa*, como faltan centenas y unidades, se escribe: 3090.

24. Del convenio que se acaba de establecer es inmediata consecuencia, que

1.° Cada cifra tiene dos valores: uno *absoluto*, que es el que se refiere al número de unidades que expresa, y otro *relativo* que depende del órden de estas unidades.

2.° El valor de un número no se altera aunque se pongan uno ó más ceros á su izquierda; puesto que no se altera el lugar de las cifras, contándose éste de derecha á izquierda.

3.° Un número se hace *diez*, *cien*, *mil*, etc. veces mayor, colocando *uno*, *dos*, *tres*, etc. ceros á su derecha, porque las unidades de cada cifra se hacen entónces *diez*, *cien*, *mil*, etc. veces mayores.

Por el contrario, un número que termina en ceros se hace *diez*, *cien*, *mil*, etc. veces menor, suprimiendo *uno*, *dos*, *tres*, etc. ceros á su derecha.

El sistema de numeracion escrita, que se acaba de explicar, se llama tambien *decenario* ó *decimal;* porque con *diez* caractéres en ordenada combinacion representa todos los números imaginables.

OBSERVACIONES.

25. 1.ª Se pudo haber convenido en que las unidades sencillas ocupasen el primer lugar de la izquierda, las decenas el segundo, etc.; mas en tal caso los números no podrian escribirse en el órden con que se expresan de palabra, esto es, principiando por las unidades de órden superior, á no ser que se ejecutase en órden inverso á la escritura comun, es decir, de derecha á izquierda.

2.ª Si se hubiese convenido en que toda cifra puesta á la izquierda de otra expresase unidades dos veces mayores que las de esta, con *dos cifras* solamente se podrian haber escrito todos los números; si *tres veces* mayores con tres,..., si *doce veces* mayores, se necesitarian *doce cifras*, etc. Todos estos sistemas son más complicados que el decimal; porque no se conforman con la numeracion verbal, que es decimal tambien. Si la numeracion verbal fuese duodecimal, por ejemplo, la numeracion duodecimal escrita sería la más sencilla.

26. *Un número de varias cifras*, ya escrito, *se lee dando á cada una el valor absoluto y relativo que tiene*, ó lo que es igual, enunciando las unidades que expresa y la especie de éstas, segun el lugar que la cifra ocupa.

El número 384 se lee: *tres centenas*, *ocho decenas* y *cuatro unidades*, ó lo que es igual, *trescientos ochenta y cuatro*. 157895 se lee: *una centena de millar*, *cinco decenas de millar*

siete millares, ocho centenas, nueve decenas y *cinco unidades*, ó sea *ciento cincuenta y siete mil ochocientos noventa y cinco.*

Cuando el número es de muchas cifras, se facilita su lectura dividiéndole en secciones de seis guarismos cada una, empezando por la derecha. En la primera separacion se pone un 1, en la segunda un 2, etc. Cada seccion de seis cifras se divide en dos grupos de á tres con un punto, y todo queda reducido á leer aisladamente cada uno de estos grupos, pronunciando *mil* donde se halle un punto, y *millon*, *billon*. etc., donde se halle el 1, el 2, etc.

La lectura del número 64563700056003 se facilita de este modo: $64_{2}563.700_{1}056.003$, y se expresa: *sesenta y cuatro billones, quinientos sesenta y tres mil setecientos millones, cincuenta y seis mil tres.*

Signos usados en la Aritmética.

27. $+$ significa *más;* así, $3+4$ se lee: 3 *más* 4.
$-$ *menos;* así, $9-5$ se lee: 9 *menos* 5.
$\cdot$ ó $\times$ *multiplicado*; así, $7\cdot 2$ ó 7×2 se lee: 7 multiplicado por 2.
$:$ ó $-$ *dividido;* así, $6:3$ ó $\frac{6}{3}$ se lee: 6 *dividido* por 3.
$=$ *igual;* así, $7\times 2=14$ se lee: 7 multiplicado por 2 *igual* 14.

28. La separacion de dos cantidades por el signo $=$ se llama *igualdad;* recibiendo el nombre de *primer miembro* la cantidad que está ántes del signo igual, y de *segundo miembro* la que está despues. Así, $7\times 2=14$ es una igualdad; 7×2 es el primer miembro, y 14 el segundo.

29. ( ) se emplea para que los signos $+$, $-$, $\times$ y $:$ afecten al resultado de las operaciones indicadas dentro del paréntesis. Así, $(2+1+4)\times 6$ indica que la suma $2+1+4$, ó sea 7, se ha de multiplicar por 6, esto es, 7×6.

Si se omitiese el paréntesis, sería $2+1+4\times 6=3+4\times 6$, cuyo resultado es 27, en vez de 42 que representa del primer modo.

UNED

MEDIDAS MAS USUALES DEL ANTIGUO Y NUEVO SISTEMA.

SISTEMA ANTIGUO.		NUEVO SISTEMA.	
De longitud.			
30. 1 legua tiene.....	20.000 pies.	1 kilómetro tiene....	1.000 metros.
1 vara.....	3 pies.	1 metro.....	10 decimetros.
1 pie.....	12 pulgadas.	1 decimetro.....	10 centimetros.
1 pulgada.....	12 lineas.	1 centímetro.....	10 milimetros.
De capacidad.			
PARA ÁRIDOS.			
1 fanega tiene.....	12 celemines.		
1 celemin.....	4 cuartillos.	1 hectólitro tiene....	100 litros.
PARA LÍQUIDOS.		1 decálitro.....	10 litros.
1 cántara tiene.....	8 azumbres.	1 litro.....	10 decilitros.
1 azumbre.....	4 cuartillos.	1 decilitro.....	10 centilitros.
Las medidas para el aceite se arreglan á las de peso.			
De peso.			
1 quintal tiene.....	4 arrobas.	1 quintal métrico tiene	100 kilógramos.
1 arroba.....	25 libras.	1 kilógramo.....	1000 gramos.
1 libra.....	16 onzas.		
De dinero.			
1 duro tiene.....	20 reales.	1 escudo.....	10 rs. ó 1.000 milésimas
1 real.....	34 maravedís.		NOVÍSIMO.
		1 peseta.....	100 céntimos.
De tiempo.			
1 siglo tiene.....	100 años.		
1 año.....	12 meses.		
1 mes (comercial).....	30 dias.		
1 dia.....	24 horas.		
1 hora.....	60 minutos.		
1 minuto.....	60 segundos.		

UNED

CAPITULO II.

Operaciones aritméticas.

31. Las principales operaciones que se ejecutan en la Aritmética son la *adicion* y su contraria la *sustraccion*, la *multiplicacion* y su contraria la *division*. Estas cuatro operaciones pueden, sin embargo, reducirse á la primera, que por esto suele llamarse *operacion fundamental*.

ARTICULO I.

Adicion de los números enteros.

32. ADICION *es una operacion que tiene por objeto reunir varios números, llamados* SUMANDOS, *en uno, á que se da el nombre de* SUMA.

33. En la adicion pueden distinguirse dos casos: 1.° *sumar un número cualquiera con otro ú otros de una cifra:* 2.° *sumar números de varias cifras.*

34. 1.er CASO. La resolucion de este caso se reduce á agregar sucesivamente á uno de los sumandos las diferentes unidades que el otro contiene. Para ejecutar esta adicion $6+4$, puede decirse: 6 y 1 son 7, 7 y 1 son 8, 8 y 1 son 9, 9 y 1 son 10; de modo que $6+4=10$. Es mucho más breve la operacion, si se saben de memoria los resultados de la adicion de una cifra á un número cualquiera, y para esto venimos preparándonos fácil é insensiblemente desde la edad más tierna. Para ejecutar la suma $13+7$ decimos de una vez que componen 20, sin necesidad de hacer las siete adiciones parciales que exigiria la cifra 7. Sin embargo, á este procedimiento solemos acudir cuando olvidamos los resultados de la adicion de las cifras.

La adicion de varias cifras se verifica de la misma manera, pero sucesivamente: al resultado de la adicion de las dos primeras, añadimos la tercera; al resultado que se obtiene, aña-

UNED

dimos la cuarta, y así se continúa por toda la série de cifras que se quiera sumar; 3+7+5+2, se realiza diciendo: 3 más 7 son 10, 10 y 5 son 15, 15 y 2 son 17; así que

$$3+7+5+2=17.$$

35. 2.° CASO. Si tuviésemos que ejecutar la siguiente adicion 52+167+8+491, procederiamos por partes, reuniendo primero todas las cifras de las unidades de los sumandos, de esta manera: 2 y 7 son 9, 9 y 8 son 17, 17 y 1 son 18. En seguida reuniriamos todas las cifras de las decenas; mas al ejecutarlo tendriamos presente que el resultado anterior 18 equivale á 8 unidades y 1 decena; considerariamos á 8 como unidades de la suma, y uniriamos la decena á las decenas de los sumandos; diciendo: 1 y 5 (del primer sumando) son 6, 6 y 6 (del segundo) son 12, 12 y 9 son 21. Pasariamos luego á sumar las centenas; mas como el anterior resultado 21 decenas equivale á 1 decena y 2 centenas, considerariamos á la decena como correspondiente á la suma, y agregariamos las dos centenas á las de los sumandos, diciendo: 2 centenas y 1 (del segundo) son 3, 3 y 4 (del último) son 7 centenas. La suma, pues, que evidentemente representa la verdadera adicion ó reunion de los sumandos, es 7 centenas, 1 decena y 8 unidades; ó lo que es igual, 718.

Este procedimiento, que es universal y aplicable á cualquier ejemplo, se formula en la siguiente regla:

Para sumar números de varias cifras, se suman las unidades del mismo órden, principiando por el inferior; esto es, se reunen unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc. *Si de la suma de un órden cualquiera de unidades resultaren una ó más del órden superior inmediato, se reunirán á este:* y el número formado por estas sumas parciales será la suma pedida (*).

(*) El caso, no muy comun, en que de la suma de un órden cualquiera de unidades resultan 10 ó más del siguiente, suele sorprender á los principiantes: mas se resuelve por la regla general, reservando para el órden siguiente las decenas que de él hayan resultado, cualquiera que sea su número. Si al sumar los millares, por ejemplo, llegase esta suma á 123, se escribirian los 3 millares, y las 12 decenas de millar se reservarian para agregarlas á las decenas de millar de los sumandos. Lo

Ejemplo. Sean los sumandos 7846 + 305 + 4910 + 27.

Para mayor sencillez se suelen colocar los sumandos unos debajo de otros, de modo que esten en columna las unidades de un mismo órden, que son las que se suman entre sí, como se ve á continuacion:

Sumandos.....	7846
	305
	4910
	27
Suma.....	13088.

Se suman las cifras de la primera columna ó sean las unidades, de este modo; 6 y 5 son 11 y 7 son 18; se escribe el 8 debajo de la columna de las unidades, y se reserva la decena para sumarla con las decenas de la columna inmediata. Las decenas se suman así: 1 y 4 son 5 y 1 son 6 y 2 son 8, que se escribe debajo de las decenas de los sumandos. Se suman ahora las cifras de la tercera columna de este modo: 8 y 3 son 11 y 9 son 20; se escribe el 0 (centenas) debajo de las centenas, y se guardan los dos millares para sumarlos con los de la columna inmediata. Por último, se suman los millares de la manera siguiente: 2 (que resultaron de la adicion de las centenas) y 7 son 9 y 4 son 13, que se escribe á la izquierda del 0 anterior, ó sea de las centenas de la suma.

OBSERVACIONES.

36. 1.ª El número total de unidades comprendidas en la suma es independiente del órden en que los sumandos esten colocados; de donde resulta que la adicion puede ejecutarse principiando por la parte superior, inferior, etc. de cada columna.

2.ª Al sumar un órden cualquiera de unidades, pueden

---

mismo seria considerar las 12 decenas como compuestas de 1 centena y 2 decenas, y agregar cada una de estas cifras á la columna correspondiente.

En este caso, y siempre que el número de sumandos es muy considerable, conviene, para no equivocarse, dividir la operacion en varias adiciones parciales, y sumar luego los resultados obtenidos.

UNED

resultar alguna ó algunas del órden superior inmediato, al que no podrian agregarse fácilmente si las unidades de este último órden estuviesen ya sumadas, por cuya razon, la adicion debe principiarse por las unidades del órden inferior, y continuar por las del superior inmediato, etc.

37. Las reglas de la adicion y las que se dan para las demás operaciones son evidentes; mas al practicarlas, puede cometerse algun error; por lo que, para tomar como ciertos los resultados, *se prueban* las operaciones.

Se llama PRUEBA *de una operacion otra que se ejecuta para cerciorarse de la exactitud de ella.*

Aunque se puede tambien cometer error al practicar la prueba; sin embargo, es tan difícil que el error de esta se compense con el de la operacion principal, que, desde luego, *se puede tomar como cierto el resultado en que la operacion y la prueba esten conformes.*

De la naturaleza de la prueba se deduce, que no conviene emplearla cuando es más difícil que la operacion principal: tampoco es ventajosa cuando haya que escribir nuevas cifras; es mejor en estos casos repetir dos ó más veces la operacion principal.

38. *La adicion se prueba repitiéndola en un órden inverso de aquel en que se ejecutó:* es decir, principiando por la parte inferior á sumar las cifras de cada una de las columnas de unidades, decenas, centenas, etc., suponiendo que la vez primera se diese principio por la parte superior de las mismas columnas.

39. La adicion de los números *concretos* se verifica como la de los *abstractos*, que ya hemos ejecutado; teniendo presente que, para que pueda tener lugar esta operacion, *los sumandos han de ser de la misma especie.*

PROBLEMA.

Un comerciante tiene paños de seis clases distintas, á saber: 386 varas de primera clase, 89 de segunda, 125 de tercera, 4918 de cuarta, 812 de quinta, 408 de sexta; y quisiera averiguar el número total de varas.

Se escriben los sumandos como aquí vemos:

386
89
125
4918
812
408

6738:

se ejecuta la operacion como en el ejemplo anterior; y el resultado 6738 expresa el número total de varas de paño que el comerciante tiene.

ARTÍCULO II.

Sustraccion ó resta de los números enteros.

40. Sustraccion *es una operacion que tiene por objeto determinar uno de dos sumandos, dada la suma y el otro sumando.* Es operacion inversa ó regresiva de la adicion.

La suma dada se llama *minuendo;* el sumando conocido *sustraendo*, y el sumando que se determina *residuo*, *resto* ó *resta*, y tambien *diferencia.*

Corolario. *Un resto no varía aunque á minuendo y sustraendo se les añada ó se les quite un mismo número.*

41. En la sustraccion pueden distinguirse dos casos: 1.° *cuando el sustraendo tiene una cifra, teniendo una ó más el minuendo:* 2.° *cuando minuendo y sustraendo tienen más de una cifra.*

42. 1.er caso. Este caso se resuelve, segun la definicion de la sustraccion, averiguando qué número se ha de sumar con el sustraendo para que resulte el minuendo; y como este es el primer caso de la adicion, que se ejecuta de memoria, con igual facilidad se resuelve el caso presente. Así, 8 menos 5 son 3; de manera que 3 es el resto ó diferencia, porque 3 es el número que sumado con 5, produce 8, ú $8-5=3$; del mismo modo $21-8=13$.

43. 2.° caso. Si hubiésemos de restar de 859 el número 423, procederiamos por partes, como en la adicion, restando primero las unidades de primer órden, luego las decenas, centenas, etc., de este modo: 9 unidades menos 3 uni-

dades dan de resto 6 unidades; ó más sencillamente: 9 menos 3 son 6, 5 menos 2 son 3, 8 menos 4 son 4. De modo que la diferencia total es evidentemente 4 centenas, 3 decenas y 6 unidades, ó sean 436.

Este caso no ofrece dificultad cuando cada cifra del sustraendo es menor que la de igual órden del minuendo; mas si esto no sucediere, veamos cómo puede obviarse la dificultad. Supongamos que el minuendo fuese 74 y el sustraendo 26; siguiendo el procedimiento anterior, tendriamos que restar 6 de 4, lo que es imposible: para hacer posible la operacion, agregarémos á las 4 unidades del minuendo otras 10, ó sea una decena, lo que convierte en 14 las unidades del minuendo, y restando de estas las unidades del sustraendo, quedan 8 de diferencia. Agregando una decena al minuendo, se agrega tambien al resto; luego es preciso para que la diferencia no varíe, quitarle dicha decena, lo que se consigue (40 corol.) agregándola á las decenas del sustraendo y restando de 7 decenas 3, en lugar de dos que tiene dicho número; siendo por lo tanto 4 las decenas del resto. La diferencia total es, pues, 4 decenas y 8 unidades, ó lo que es igual 48.

El procedimiento empleado en los dos ejemplos precedentes, que es aplicable á cualquier otro, se reduce á la siguiente regla:

Para restar un número de más de una cifra de otro de varias, se rebajan los diferentes órdenes de unidades del sustraendo de sus iguales del minuendo: esto es, se restan las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc.

Si alguna cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, se agregan á ella 10 *unidades de su órden, se ejecuta esta resta parcial, y al restar las cifras del órden inmediato se añade á la del sustraendo otra unidad.* El número formado por todos los restos parciales es el buscado.

Ejemplo. Sea restar de 490812 el número 82054: ordenarémos la operacion para mayor sencillez como se ve á continuacion:

Minuendo.	490812
Sustraendo.	82054
Resta.	408758;

y la ejecutarémos de este modo: 2 menos 4 no puede ser; agregarémos 10 unidades al 2, lo que le convierte en 12; 12 menos 4 son 8, que se escribe en lugar de las unidades. Agrego 1 al 5 y son 6; 6 de 1 no pueden restarse; agrego á este 10 unidades de su órden, lo que le convierte en 11; 11 menos 6 son 5, que escribo en el lugar de las decenas. Agrego otra unidad al 0, cifra siguiente del sustraendo; 8 menos 1 son 7, que coloco en el lugar de las centenas; 0 menos 2 no puede ser; agrego 10 unidades de su órden al 0, cuarta cifra del minuendo; 10 menos 2 son 8, que se coloca en el lugar de los millares. Agrego otra unidad al 8; 9 menos 9 es 0, que se escribe en el quinto lugar; 4 menos nada son 4, que se escribe á la izquierda del resto anterior. El resto total es, pues, 408758.

En la práctica se puede emplear el lenguaje siguiente, que es más conciso: 12 menos 4 son 8, 11 menos 6 son 5, 8 menos 1 son 7, 10 menos 2 son 8, 9 menos 9 es 0, 4 menos nada son 4.

Observacion. Cuando alguna cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, se ha dicho (**43**) que se agregaban á aquella 10 unidades de su órden y una á la cifra del superior inmediato del sustraendo; mas como esto no podria verificarse si las unidades del órden superior se hubiesen restado ya, la sustraccion se debe principiar por las unidades de órden inferior y continuar por las del superior inmediato, etc.

44. *La sustraccion se prueba sumando el sustraendo con el resto, y esta suma,* segun la definicion, *será igual al minuendo,* si la operacion está bien hecha.

45. La sustraccion de los números concretos se verifica lo mismo que la de los abstractos, advirtiendo únicamente que *minuendo y sustraendo han de ser de la misma especie.*

PROBLEMA.

Un bosque tenia 87600 árboles, de los que se cortaron 4901. ¿Cuántos quedaron en él?

87600
4901
—————
Resultado: 82699.

ARTICULO III.

Multiplicacion de los números enteros.

46. *La* MULTIPLICACION *de dos números es la operacion que tiene por objeto hallar un tercer número que sea relativamente á uno de ellos lo que el otro es respecto á la unidad.*

Así, multiplicar 5 por 3 es determinar un número que contenga al 5 *tres veces*, ó al 3 *cinco veces;* es decir que este número es 15. El resultado de multiplicar 8 por *un medio* es 4, porque 4 contiene á 8 *media vez*, ó es la mitad de 8, y contiene á *un medio* ocho veces.

Esta es la multiplicacion abstracta, en la cual es indiferente referir uno á otro de los números que se multiplican, llamados *factores*, y al número que resulte, llamado *producto;* con tal que el otro factor se refiera á la unidad bajo la misma relacion. Esta reciprocidad de los factores es esencial á la multiplicacion. El factor que se refiere al producto se llama *multiplicando*, y el que á la unidad *multiplicador*.

47. En la multiplicacion de números concretos la denominacion de los factores no es indiferente: el que es de la misma especie que el producto que se busca es el *multiplicando*, y el otro factor el *multiplicador*. Si para hallar el número de reales que importan 45 varas á 67 reales cada vara, multiplico 67 por 45, el 67 es el multiplicando y el 45 el multiplicador.

Sin embargo, como las operaciones aritméticas *se realizan* sobre los números abstractos, ó despojados de su significacion concreta, demostrarémos para mayor claridad el siguiente

48. TEOREMA 1.° *Es inalterable un producto de dos factores, cualquiera que sea el órden de estos.*

Así, por ejemplo:

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

Con efecto, escríbanse en un renglon tantas unidades como tiene el 4; repítase este renglon tantas veces como unidades contiene el 3, y se tendrá el siguiente cuadro:

1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1

UNED

en el que el número de unidades es 4×3. Por otra parte, el número de unidades de cada columna es 3, el de estas columnas 4, luego el número de unidades de dicho cuadro es tambien 3×4. Luego

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

49. Segun la definicion de la multiplicacion, el producto de dos números enteros se puede determinar tomando uno de ellos como sumando el mismo número de veces que el otro contiene á la unidad. Esta suma, que casi siempre sería muy prolija, se abrevia por los procedimientos propios de la multiplicacion.

En esta se distinguen tres casos: 1.° *multiplicar un número de una cifra por otro de una cifra;* 2.° *multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, ó al contrario;* 3.° *multiplicar un número de varias cifras por otro de varias.*

50. 1.er caso. Para resolver este primer caso se deben saber de memoria los productos de dos números de una cifra, tales como los presenta la siguiente tabla, llamada *pitagórica*, de su inventor Pitágoras (*).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta tabla se forma escribiendo las nueve cifras significativas por su órden en el renglon superior: se suma cada cifra consigo misma, y las diferentes sumas colocadas debajo de los sumandos formarán el segundo renglon. Se suma cada nú-

(*) Algunos creen que no ha sido inventada por Pitágoras; pero éste fué al menos quien la dió á conocer.

UNED

mero del primer renglon con su correspondiente del segundo, y se tendrá el tercer renglon. Para formar el cuarto ú otro cualquiera, se suma cada cifra del primero con el número que tiene debajo de sí en el último.

Del método empleado en la formacion de la *tabla* se sigue: que los números del segundo renglon son los diferentes productos que resultan de multiplicar cada cifra del primero por 2; los del tercero son los productos del primero por 3, y así sucesivamente.

Luego *para hallar el producto de dos números de una cifra, se busca uno de los factores en el renglon superior y el otro en la primera columna de la izquierda, y donde la columna correspondiente al primero corta al renglon correspondiente al segundo, se encontrará el producto pedido.*

Para obtener el producto de 6×8, se baja la vista por la sexta columna hasta hallar el octavo renglon, y el número 48, que está en la casilla donde se cruzan, será el número pedido.

51. 2.° CASO. Si hubiésemos de multiplicar 4061 por 5, tambien procederiamos por partes multiplicando primero las unidades de este modo: 1 por 5 son 5 *unidades;* multiplicariamos luego las decenas así: 6 por 5 son 30; mas como en 30 decenas hay 0 *decenas* y 3 centenas, se reservarian las 3 centenas para añadirlas al producto siguiente, y diriamos: 0 por 5 es 0, que añadiéndole 3 forman 3 *centenas;* multiplicariamos por último los 4 mil'ares por 5, lo que daria 20 *millares.* De manera que el producto buscado es evidentemente 20 millares, 3 centenas, 0 decenas y 5 unidades, ó sea 20305.

Este procedimiento, que se puede aplicar á cualquier otro ejemplo, se formula en la siguiente regla.

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplica cada cifra del multiplicando por el multiplicador, principiando por las unidades y continuando por las decenas, centenas, etc.; y si en alguna de estas multiplicaciones parciales resultan unidades del órden siguiente, deben reservarse para añadirlas al producto inmediato.

EJEMPLO. Háyase de multiplicar 91071 por 9. La operacion se dispone colocando el multiplicador debajo de las

unidades del multiplicando como á continuacion se ve:

91071 multiplicando } factores del producto
9 multiplicador }

819639 producto:

y se dice; 9 por 1 son 9 (que se escribe en el lugar de las unidades); 9 por 7 son 63 (se coloca el 3 á la izquierda de las unidades) y van 6; 9 por 0 es 0 y 6 son 6 (que se escribe á la izquierda de las 3 decenas); 9 por 1 son 9 (que se escribe á la izquierda de las 6 centenas); 9 por 9 son 81 (que se pone á continuacion).

Resultado: 819639.

52. 3.er caso, Háyase de multiplicar 17851 por 5036. La operacion quedará ejecutada si se multiplica el multiplicando por 6, por 30 y por 5000, que son las partes de que se compone el multiplicador, y sumando luego los productos parciales obtenidos.

Segun el caso anterior, 17851 multiplicado por 6 da

107106 *unidades.*

Ahora para multiplicar el multiplicando por 30, se observará que es igual á sumarle 30 veces consigo mismo (**49**); y como estos 30 sumandos se pueden suponer divididos en 10 grupos de á tres sumandos, de este modo:

cada grupo dará
$$\left.\begin{matrix}17851\\17851\\17851\end{matrix}\right\}=53553$$
$$\left.\begin{matrix}17851\\17851\\17851\end{matrix}\right\}=53553$$
. . . . . ,

y los 10 grupos (**24**, 3.º) $17851\times30=53553\times10=535530$,
ó 53553 *decenas.*

Del mismo modo se veria que para multiplicar el multiplicando por 5000, no habria más que multiplicarle por 5 y agregar á este producto tres ceros, ó considerarle como representando millares: así que

$$17851\times5000=89255000$$
ó 89255 *millares.*

UNED

Por último, para sumar estos productos parciales se suman las cifras de un mismo órden (**35**), como á continuacion se ve:

```
  107106
   53553
89255
-------
89897636,
```

cuya colocacion se consigue haciendo que la primera cifra de cada producto parcial ocupe el lugar correspondiente al guarismo que sirvió de multiplicador.

A fin de que resulten menos productos parciales, se debe tomar por multiplicador el número que tenga menos cifras significativas, con lo que el producto total no varía (**18**).

Del procedimiento seguido en el ejemplo precedente, que es aplicable á cualquier otro del mismo caso, se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, se toma por multiplicador el factor que tiene menos cifras significativas, y se multiplica todo el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador: se colocan estos productos unos debajo de otros, de manera que la primera cifra de cada uno esté en el lugar correspondiente á la cifra del multiplicador que sirvió para formarle, se suman los productos parciales, y el resultado es el producto total que se busca.

Ejemplo. Sea multiplicar 3087014 por 200715.

La operacion se ordena, para mayor facilidad, como á continuacion se ve:

```
  3087014  multiplicando,
   200715  multiplicador.
-----------
 15435070 \
  3087014  \
 21609098   } productos parciales.
6174028    /
-----------/
619610015010 producto total.
```

La ejecucion no ofrece ninguna dificultad, sabida la regla precedente y la del segundo caso (**51**).

53. El producto de varios factores, v. gr., $3\times4\times7\times2$, indica que 3 se ha de multiplicar por 4, el producto 12 por 7, y el producto 84 por 2; de modo que

$$3\times4\times7\times2=12\times7\times2=84\times2=168.$$

54. Teorema 2.° *Un producto de varios factores enteros no varía, cualquiera que sea el órden de colocacion de estos.*

Sea, por ejemplo, el producto $3\times2\times5\times4$.

Si mudamos de lugar á dos factores consecutivos, v. gr., 2 y 5, el producto no varía. En efecto, $3\times2=3+3$: multiplicando ambos miembros por 5, será

$$3\times2\times5=3\times5+3\times5=3\times5\times2.$$

Si ahora se multiplica el primero y último miembro de esta igualdad por 4, resultará

$$3\times2\times5\times4=3\times5\times2\times4.$$

Mudando de lugar á dos factores consecutivos todas las veces necesarias, cada factor llegará á ocupar el lugar que se desee, sin que por esto se altere el producto. Luego un producto de varios factores, etc.

Corolario 1.° *Para multiplicar un producto de dos ó más factores por un número entero, basta multiplicar uno de los factores por este número.*

En efecto, si quisiéramos multiplicar el producto $7\times5\times6$ por 2, bastaria multiplicar, por ejemplo, el factor 5 por 2, pues $7\times10\times6=7\times5\times2\times6=7\times5\times6\times2$.

Corolario 2.° *Cuando en la multiplicacion uno ó más factores terminan en ceros, se ejecuta la operacion prescindiendo de ellos, y poniéndolos en seguida á la derecha del producto.*

Ya se ha visto (**24**, 3.°) que para hacer á un número 10, 100, 1000, etc, veces mayor, ó sea *para multiplicarle por* 10, 100, 1000, etc., *basta agregarle uno, dos, tres, etc. ceros;* de donde se infiere que todo número terminado en ceros se puede descomponer en dos factores, uno formado de las cifras que hay ántes de los ceros, y otro de la unidad seguida de tantos como al fin lleve dicho número; así

$$3700=37\times100;\quad 8060=806\times10.$$

UNED

Esto supuesto:

3700×435 ó $435 \times 3700 = 435 \times 37 \times 100 = 1609500$.

Del mismo modo:

$450 \times 600 = 45 \times 10 \times 6 \times 100 = 45 \times 6 \times 10 \times 100 = 270 \times 1000 = 270000$.

Estas operaciones se ordenan en la práctica como se ve á continuacion:

1.ª

	435
	3700
	3045
	1305
Resultado:	1609500.

2.ª

	450
	600
Resultado:	270000.

Observacion. Un producto de dos factores tiene tantas cifras como estos ó una menos.

Así, 3578×456 tiene 6 ó 7 cifras.

En efecto, el producto anterior está evidentemente comprendido entre

$$3578 \times 100 = 357800$$

y $$3578 \times 1000 = 3578000;$$

luego tendrá á lo menos seis cifras como el primero, y á lo más siete como el segundo.

55. *Se llama* múltiplo *de un número á su producto por un entero:* 14 es múltiplo de 2 y de 7, porque es igual á 7×2.

Al producto de un número por 2 se le da el nombre de *duplo*.

El producto de un número por 3, se llama *triplo*.

Al producto de un número por 4, se le da el nombre de *cuádruplo*, etc.

Todo número es múltiplo de su unidad: la vara es un múltiplo del pié, tomando este por unidad; el metro del decímetro, etc.

56. *Se llama* potencia *de un número el producto que resulta tomando dicho número varias veces por factor;* 16 es una potencia de 2, porque $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Al producto que resulta de tomar un número dos veces por factor se le da el nombre particular de segunda potencia ó cuadrado.

El producto que resulta de tomar un número tres veces por factor, se llama TERCERA POTENCIA *ó* CUBO.

Al producto que resulta de tomar un número cuatro veces por factor se le da el nombre de CUARTA POTENCIA, *etc.*

Las potencias de un número se indican escribiendo á la derecha de este, y un poco más elevado, otro número llamado *exponente* ó *grado de la potencia*, el cual contiene tantas unidades como veces está repetido el primero por factor. Así.

$3^2=3\times3=9$ es la segunda potencia ó cuadrado de 3.
$3^3=3\times3\times3=27$ es la tercera potencia ó cubo de 3.
$3^4=3\times3\times3\times3=81$ es la cuarta potencia de 3, etc.

Una potencia cualquiera de 1 *es igual á* 1.

La 1.ª *potencia de un número es igual al mismo número.*

57. *La multiplicacion se prueba cambiando el multiplicando en multiplicador y este en aquel*; y el producto debe ser igual al obtenido primero (**48**), si la operacion está bien hecha.

58. (*) *La multiplicacion de números concretos se verifica lo mismo que la de los abstractos.*

El problema general que comunmente se resuelve en la multiplicacion de concretos es el siguiente: *conociendo el valor de una unidad, hallar el de un número cualquiera de unidades de la misma especie.*

Ya hemos dicho (**47**) que el valor de la unidad conocida es el multiplicando, que el otro número, que se considera como abstracto, es el multiplicador, y que el producto será de la misma especie que el multiplicando (**).

OBSERVACION. Si el multiplicador no es de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, se reducirá á esta especie como se ve en el problema 3.º

(*) Los principios expuestos en este párrafo son generales, y aplicables, por lo tanto, á la multiplicacion de quebrados concretos, ya sean decimales ú ordinarios, y á la de los números complejos.

(**) En la Geometría ocurre, sin embargo, la resolucion de problemas en que es preciso multiplicar un número de unidades de longitud por otro tambien de unidades de longitud, y unidades de superficie por unidades longitudinales; y en ninguno de estos dos casos se considera el multiplicador como abstracto, siendo ademas el producto obtenido en el primero unidades de superficie, y el hallado en el segundo unidades de volúmen.

UNED

Ejemplo. **Un quintal de arroz costó 12 escudos, ¿cuánto costarán 32 quintales?**

En este ejemplo el valor del quintal, ó sea 12 escudos, es el multiplicando, y el número de quintales, ó sea 32, considerado como abstracto, será el multiplicador, y el producto serán escudos, que es la especie del multiplicando.

PROBLEMAS.

59. 1.° Teniendo una onza de oro 10880 maravedíses, ¿cuántos maravedíses tendrán 71 onzas?

10880 maravedíses
71

1088
7616

Resultado: 772480 maravedíses.

2.° Valiendo un hectólitro de trigo 40 reales, ¿cuánto valdrán 780 hectólitros?

780
40

Resultado: 31200 reales.

En este problema para ejecutar la operacion con más facilidad se cambia el multiplicando en multiplicador, y este en aquel, con lo cual no se altera el resultado, que será de la especie del verdadero multiplicando, que es 40 reales.

3.° Si un caballo anda en un minuto 113 metros, ¿cuánto andará en 3 horas?

Para resolver este problema se debe reducir el multiplicador á la especie de la unidad, cuyo valor expresa el multiplicando, es decir, las 3 horas á minutos; y como 3 horas componen 180 minutos, la operacion se ejecuta como se ve á continuacion:

113 metros
180

904
113

Resultado: 20340 metros.

UNED

Otros PROBLEMAS *que se resuelven por la multiplicacion.*

60. 1.° 20 pares de mulas emplearon 18 dias en trasportar cierto número de fanegas de trigo, ¿un par de mulas cuántos dias necesitará para trasportar la misma cantidad de trigo?

Este problema y sus análogos no estan comprendidos en el que se ha dicho que comunmente se resuelve en la multiplicacion de números concretos. Sin embargo, desde luego se ve que un par de mulas tardará 20 veces 18 dias, y por lo mismo el problema se resuelve como aquí se expresa:

18 dias
20

Resultado: 360 dias.

2.° 15 años, 7 meses y 14 dias, ¿cuántos dias componen? (*)

Este problema quedará evidentemente resuelto reduciendo primero los años á meses, para lo que basta multiplicar el número de años por 12, y agregar á este producto los 7 meses; reduciendo luego esta suma de meses á dias, para lo que se multiplica por 30, y agregando, por último, á este producto los 14 dias del problema.

La operacion puede disponerse del modo siguiente:

15 años
12

30
15
7

187 meses
30

5610
14

Resultado 5624 dias.

(*) La operacion empleada para resolver este problema y sus análogos se suele llamar *reduccion de un número complejo á incomplejo de la especie inferior.*

ARTICULO IV.

Division de los números enteros.

61. DIVISION *es una operacion que tiene por objeto hallar un factor, dado un producto y el otro factor.*

El producto dado se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor*, y el factor que se determina ó se halla *cociente*.

La division es operacion contraria y regresiva de la multiplicacion.

Segun esta definicion, como un producto de dos factores enteros contiene á uno de estos tantas veces como unidades tiene el otro factor (**49**); *el cociente expresa las veces que el dividendo contiene al divisor.* De donde se infiere, que *para dividir un número por otro bastará restar el divisor del dividendo todas las veces que se pueda, y el número de sustracciones verificadas será el cociente.* Así, 12 : 4 = 3; porque 4 se puede restar tres veces de 12.

Del mismo modo 17 : 7 = 2 y quedan 3; porque 7 se puede restar de 17 dos veces, y deja en la segunda sustraccion 3 de resto, de quien no puede restarse el divisor.

Este procedimiento sería muy largo en el caso de que el cociente hubiese de tener varias cifras; por cuya razon se emplea otro de que vamos á ocuparnos.

62. *Se llama* DIVISION EXACTA *aquella en que el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor.* En tal caso se dice que el dividendo es *divisible* por el divisor, á este se le da el nombre de *divisor*, *factor* ó *parte alícuota* del dividendo, y el cociente se llama exacto. Así, en 12 : 4 = 3, el 12 es *divisible* por 4, 4 es un *divisor*, *factor* ó *parte alícuota* de 12, y 3 es cociente *exacto*.

La unidad es divisor de un número entero cualquiera: el pie y la pulgada son divisores de la vara; el decímetro y el centímetro del metro, etc.

63. *Se llama* DIVISION INEXACTA *aquella en que el dividendo no contiene un número exacto de veces al divisor.*

COCIENTE ENTERO *en la division inexacta es el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor; y* RESÍDUO *es el resto que queda, quitado del dividendo el producto del co-*

ciente entero por el divisor. En 17 : 7 el cociente entero es 2 y el resíduo 3. *El resíduo es siempre menor que el divisor.*

En la division exacta *el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo*, segun la definicion dada (**61**).

En la division inexacta *el producto del cociente entero por el divisor más el resíduo es tambien igual al dividendo.*

64. En la division se pueden distinguir dos casos: 1.° cuando *el divisor tiene una sola cifra y el cociente ha de tener otra sola;* 2.° cuando *el divisor, el cociente ó ambos tienen dos ó más cifras.*

El cociente tendrá una sola cifra cuando agregando un cero al divisor resulte un número mayor que el dividendo. Así, el cociente de 30 entre 5 tendrá una sola cifra, porque 50 es mayor que el dividendo 30.

65. 1.er caso. Para resolver este primer caso, se halla por medio de la tabla de multiplicar una cifra, que multiplicada por la del divisor dé el dividendo ó el producto próximo menor, si no le hubiese igual. Así

$\frac{30}{5}$ ó $30 : 5 = 6$; porque $6 \times 5 = 30$.

Del mismo modo $76 : 9 = 8$ y quedan 4 de resíduo; porque $9 \times 8 = 72$, que es el mayor producto de 9 comprendido en 76, una vez que $9 \times 9 = 81$, producto mayor que el dividendo; y como la diferencia entre 72 y 76 es 4, el resíduo de la division es 4.

Observacion. Cuando la division es inexacta, el resultado puede indicarse así

$$76 : 9 = 8 + \frac{4}{9};$$

porque lo que hay que agregar al cociente entero ha de ser una cantidad que multiplicada por el divisor produzca el resíduo (**61**): luego debe agregársele el cociente del resíduo por el divisor.

El cociente entero, más el resíduo partido por el divisor, forman el *cociente completo* de la division inexacta.

66. 2.° caso. Sea dividir 928984 por 371. Como el cociente es un número que multiplicado por el divisor debe dar el dividendo (**61**); como por otra parte

$371 \times 1000 = 371000$, menor que 928984,

y $371 \times 10000 = 3710000$, mayor que 928984,

UNED

el cociente ha de ser mayor que 1000 y menor que 10000; luego tendrá cuatro cifras, ó sean millares, centenas, decenas y unidades; luego el dividendo 928984 ha de contener la suma de los cuatro productos parciales siguientes: 1.° millares del cociente por el divisor 371: 2.° centenas del cociente por 371: 3.° decenas del cociente por 371: 4.° unidades del cociente por el mismo 371: y además el resíduo si la division no fuese exacta.

Para determinar los millares del cociente observarémos que el producto de un número exacto de millares por el divisor, es el producto de un número que termina en tres ceros por 371; luego ha de ser un número que tambien termine en tres ceros (52), ó sea un número exacto de millares, luego dicho producto se encuentra en los 928 millares del dividendo. Este número de millares puede hallarse aumentado por los millares que resulten del producto de las centenas, decenas y unidades del cociente por el divisor, y alguna vez tambien por los millares del resíduo de la division; luego dividiendo los 928 millares del dividendo por el divisor, se hallará un número que no puede ser menor que los millares del cociente. Tampoco puede ser mayor; pues en tal caso excederia al menos en un millar á los millares del verdadero cociente; y como un millar vale más que las centenas, decenas y unidades que el cociente puede tener, resultaria, que dividiendo solo los millares del dividendo por el divisor, darian mayor cociente que dividiendo todo el dividendo por el divisor, lo que es absurdo.

Luego los millares del cociente se hallan dividiendo los millares del dividendo por todo el divisor.

La cifra de los millares del cociente se puede determinar ensayando la multiplicacion del divisor por cada cifra significativa, principiando el ensayo por las inferiores, hasta hallar un producto igual ó próximo mayor que los millares del dividendo. Así, como

$371 \times 1 = 371$, menor que 928 (que son los millares del
$371 \times 2 = 742$, menor que 928, [dividendo),
$371 \times 3 = 1113$, mayor que 928;

los millares del cociente son 2.

Para determinar las centenas del cociente, recordarémos primero que el dividendo está compuesto de la suma de los cuatro productos parciales, millares, centenas, decenas y unidades del cociente por el divisor, más el resíduo si le hay; luego si restamos de los millares del dividendo el primero de estos productos parciales, nos quedarán en el dividendo los otros tres, y además el resíduo. De modo que

928984
742

la diferencia. . . . . 186984 contiene el producto de las centenas del cociente por el divisor: el de las decenas del cociente por el divisor: el de las unidades del mismo cociente por el divisor, y el resíduo si le hay.

Del mismo modo que se hallaron los millares del cociente, dividiendo los millares del dividendo por el divisor, se hallan las centenas del cociente dividiendo las centenas de este segundo dividendo por el divisor; esto es, dividiendo 1869 por 371. Mas, como

$371 \times 4 = 1484$, menor que 1869,
$371 \times 5 = 1855$, menor que 1869,
y $371 \times 6 = 2226$, mayor que 1869;

las centenas del cociente son 5.

Para determinar las decenas del cociente, se resta el producto de las centenas del mismo por el divisor de las centenas del segundo dividendo, y

186984
1855

la diferencia. . . . . 1484 es el producto de las decenas y unidades del cociente por el divisor, más el resíduo si le hay.

De igual modo que se hallaron las centenas del cociente, dividiendo las centenas del segundo dividendo por el divisor, se hallan las decenas del cociente dividiendo las 148 decenas del tercer dividendo por el divisor 371. Mas como 148 es menor que 371, no hay decenas en el cociente. Debe, sin embargo, escribirse 0 en lugar de las decenas, para que los millares y centenas ocupen el lugar correspondiente.

UNED

Son, pues, 0 las decenas del cociente.

Para determinar las unidades del cociente, una vez que no hay decenas y que, por consiguiente, 1484 está solo formado del producto del divisor por dichas unidades y del resíduo, basta dividir el mismo 1484 por el divisor. Mas, como

$$371 \times 4 = 1484,$$

que es igual al cuarto dividendo, las unidades del cociente son 4.

El cociente total es por lo tanto 2 millares, 5 centenas, 0 decenas y 4 unidades, ó sean 2504.

OBSERVACIONES.

67. 1.ª El primer dividendo parcial 928 puede obtenerse desde luego tomando á la izquierda tantas cifras como sean necesarias para formar un número, que considerado como unidades sencillas, sea tan grande, al ménos, como el divisor, y menor que 10 veces este; es decir, que tenga tantas cifras como el divisor ó una más. El segundo dividendo parcial 1869 se obtiene restando del primero el producto de la primera cifra de órden superior del cociente por el divisor, y poniendo á la derecha del resto 186 la cifra siguiente 9 del dividendo: y de una manera análoga á esta última se forman los dividendos parciales, tercero, cuarto, etc.

2.ª Si al principio de la operacion se formasen los productos del divisor por 1, 2, 3, etc., hasta 9, la simple inspeccion de estos productos nos daria cada cifra del cociente, una vez obtenido el correspondiente dividendo parcial, cuyo medio es preferible á cualquier otro en divisiones en que el cociente deba tener muchas cifras.

68. De estas observaciones y del procedimiento empleado en el ejemplo anterior se deduce la siguiente regla:

Para dividir un número por otro, cuando el divisor, el cociente ó ambos tienen más de una cifra, se toman de la izquierda del dividendo tantas cifras como tiene el divisor ó una más, si tantas formasen un número que, considerado como unidades sencillas, fuese menor que el divisor. Estas cifras del dividendo total forman el primer dividendo parcial, que dividido por el divisor, da la primera cifra de órden supe-

rior del cociente. Se multiplica esta cifra del cociente por el divisor, y el producto se resta del primer dividendo parcial. A la derecha del resto se pone la cifra siguiente del dividendo total y el número así obtenido es el segundo dividendo parcial: se divide por el divisor, y la cifra que resulte es la segunda del cociente, que se coloca por lo tanto á la derecha de la que primero se obtuvo. Se multiplica la segunda cifra del cociente por el divisor, y el producto se resta del segundo dividendo parcial. A la derecha del resto se coloca la cifra siguiente del dividendo: el número así formado es el tercer dividendo parcial, que dividido por el divisor, da la tercera cifra del cociente. Así se continúa hasta que no haya más cifras en el dividendo total.

Si despues de colocar á la derecha de un resto la cifra siguiente del dividendo, resultase un número menor que el divisor, se escribe 0 *en el cociente, y se pone á la derecha del dividendo parcial la cifra siguiente del dividendo total.*

Formado un dividendo parcial, se determina la cifra que le corresponde en el cociente, ensayando la multiplicacion de los números de una cifra por el divisor, y la cifra que dé dicho dividendo ó el producto próximo menor, comprendido en él, será la verdadera.

69. Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en el cociente una cifra mayor que la verdadera, cuando el producto de esta cifra por el divisor no puede restarse del correspondiente dividendo parcial; y si se ha puesto de menos, cuando el resto sea mayor que el divisor (**63**).

Ejemplo. Divídase 164538 por 279.

La operacion se puede ordenar del modo siguiente:

Dividendo	1645.3.8	279 divisor
	1395	
	250 3	589 cociente entero $+\frac{207}{279}$.
	223 2	
	27 1 8	
	25 1 1	
Resíduo. . .	2 0 7	

UNED

Como las tres primeras cifras 164 del dividendo forman un número menor que el divisor 279, se toman las cuatro 1645, separándolas con un punto para formar el primer dividendo parcial. Siendo $5 \times 279 = 1395$ y $6 \times 279 = 1674$; se ve que la primera cifra del cociente es 5. Se coloca el producto de esta cifra por el divisor debajo del primer dividendo parcial, se resta de él, y al lado de la diferencia 250 se baja la cifra siguiente 3 del dividendo, anotándola con un punto.

Ahora, como $279 \times 8 = 2232$ y $279 \times 9 = 2511$, la segunda cifra del cociente es 8. Se coloca el producto de esta cifra por el divisor debajo del segundo dividendo parcial 2503, se resta de este, y al lado de la diferencia 271 se baja la última cifra del dividendo, anotándola con otro punto. Siendo $279 \times 9 = 2511$, menor que el último dividendo parcial 2718, la última cifra del cociente, ó sean las unidades, es 9. Se resta el producto de esta cifra por el divisor del tercer dividendo parcial 2718, y el resto 207 es el resíduo de la operacion; de modo que el cociente completo es $589 + \frac{207}{279}$ (**65**, obs.).

70. La sustraccion del producto de cada cifra del cociente por el divisor puede ejecutarse al mismo tiempo que se forma dicho producto, para lo que se resta de la cifra de las unidades del dividendo parcial el producto de la cifra del cociente por las unidades del divisor, de la cifra de las decenas del mismo dividendo el producto de la cifra del cociente por las decenas del divisor, y así sucesivamente; cuidando de agregar, si es preciso, á cada cifra del dividendo suficiente número de decenas de su órden para hacer la sustraccion posible, y añadiendo al producto parcial siguiente otras tantas unidades para que el resto no padezca alteracion (**40**, corol.).

Ejecutemos la division anterior con esta modificacion:

1645.3.8	279
250 3	$589 + \frac{207}{279}$
27 1 8	
2 0 7	

Sabiendo que 1645 : 279 da el cociente 5, se multiplica este por las unidades del divisor: como el producto 45 no puede restarse del 5, unidades del dividendo, se agregan á

este 4 decenas formando otras 45 unidades, y como 45 — 45 = 0, se escribe 0 debajo de las unidades del dividendo. Se multiplica ahora el mismo cociente 5 por la cifra siguiente 7 del divisor, y al producto 35 se le agregan 4 unidades (por haber agregado 4 decenas al minuendo anterior), lo que forma el sustraendo 39, mas como de 4, cifra siguiente del dividendo, no pueden restarse 39, se agregan al 4 otras 4 decenas, que forman por consiguiente 44, de cuyo número restado el 39, quedan 5 de resto, que se escriben debajo de la cifra 4 del dividendo. Se multiplica el cociente por la cifra 2, siguiente del divisor, y al producto 10 se agregan 4 unidades; la suma 14 se resta de 16, y la diferencia 2 se escribe debajo del 6, ó sea al lado del resto anterior.

Bajando al lado del resto total 250 el 3, cifra siguiente del dividendo, y sabiendo que 2503 : 279 da el cociente 8, se procede de este modo, análogo al anterior, pero en lenguaje más conciso: 8 por 9 son 72 á 73 va 1 (que se escribe debajo del 3) y se llevan 7 para agregar al producto siguiente: 8 por 7 son 56 y 7 son 63, á 70 van 7 (que se escribe debajo del 0) y se llevan otras 7 para el producto siguiente: 8 por 2 son 16 y 7 son 23 á 25 van 2 (que se escribe debajo del 5). Despues de bajar al lado del resto total 271 la última cifra del dividendo, y de averiguar que 2718 : 279 da el cociente 9, se continúa del mismo modo: 9 por 9 son 81, á 88 van 7 y se llevan 8: 9 por 7 son 63 y 8 son 71, á 71 va 0 y se llevan 7: 9 por 2 son 18 y 7 son 25, á 27 van 2; y 207 es el resíduo de la division.

Observacion. Puede tambien principiarse la multiplicacion por las unidades de especie superior del divisor, con tal que este producto se reste de la cifra de especie superior del dividendo parcial, ó de las dos primeras si este tuviese una cifra más que el divisor; multiplicando en seguida la cifra del cociente por la del divisor, de órden inmediato inferior á la primera, y restando este producto de la cifra de igual órden, ó sea de la siguiente del dividendo parcial, precedida del resto anterior si le hubo, y continuando así la operacion hasta haber restado el producto del cociente por las unidades del divisor del resto penúltimo, con la última cifra del dividendo total á su derecha.

Ejecutando las multiplicaciones y sustracciones anteriores

UNED

segun esta observacion, obtendriamos: 5 por 2 son 10, que restado de 16 quedan 6, cuyo resto unido á la cifra siguiente forman 64; 5 por 7 son 35, que restado de 64 quedan 29, cuyo resto unido á la cifra siguiente forman 295; 5 por 9 son 45, que restado de 295 quedan 250, como anteriormente se ha visto.

Continuarémos la segunda multiplicacion y sustraccion: 8 por 2 son 16, que restado de 25 quedan 9, cuya resta con la cifra siguiente forman 90; 8 por 7 son 56, que restado de 90 quedan 34, cuyo número con la cifra siguiente forman 343; 8 por 9 son 72, que restado de 343 quedan 271, como se halló por el método anterior. Del mismo modo se podria restar el producto del divisor 279 por la última cifra 9 del cociente del último dividendo parcial 2718.

71. El medio indicado al final de la regla (**68**) para determinar cada cifra del cociente, formado el correspondiente dividendo parcial, aunque seguro, no es siempre el más expedito. Por lo tanto daremos á conocer otro, que es el que se emplea con más ventaja, cuando se ha adquirido ya alguna práctica en la operacion.

Supongamos, para fijar las ideas, que se trata de dividir 164538 por 279.

Despues de ordenada la operacion como se ha visto (**69**), para determinar la primera cifra del cociente, siendo 1645 el primer dividendo parcial y 279 el divisor, observarémos que el producto de las dos centenas del divisor por la cifra del cociente, que vamos á determinar, es un número exacto de centenas, que debe hallarse en las 16 centenas del dividendo parcial; luego dividiendo las 16 centenas del dividendo por las dos del divisor se tendrá la verdadera cifra del cociente, ó un número mayor que ella; puesto que en las 16 centenas del dividendo pueden hallarse tambien las centenas que resultan de la suma de los productos de las decenas y unidades del divisor por la cifra que se trata de determinar en el cociente, y del resto de esta division parcial si le hubiese.

$$\begin{array}{r|l} 1645.3.8 & 279 \\ 250\,3 & \hline \\ 27\,1\,8 & 589+\frac{207}{279} \\ 2\,0\,7 & \end{array}$$

Para averiguar si la cifra de este modo determinada es mayor que la verdadera, se multiplica por el divisor y se ve si este producto se puede restar del dividendo parcial; pudiendo restarse, será la verdadera, pero si no, se le rebaja una unidad y se ensaya esta nueva cifra: continuando así hasta que la sustraccion pueda verificarse. Es conveniente para abreviar estos tanteos que la multiplicacion y sustraccion se principien por las unidades de especie superior (70, obs.). Así diremos: 16 entre 2 á 8; 8 por 2 son 16, que restado de 16 deja 0: este resto unido á la cifra siguiente forma 4; 8 por 7 son 56, que como no puede restarse de 4, indica que la cifra 8 es mayor que la verdadera. Rebájese una unidad y continúese: 7 por 2 son 14, que restado de 16 deja 2: este resto unido á la cifra siguiente forma 24; 7 por 7 son 49, que como tampoco puede restarse de 24, indica tambien que la cifra 7 es mayor que la verdadera. Rebajándole otra unidad se tendrá: 6 por 2 son 12, que restado de 16 deja 4: este resto unido á la cifra siguiente forma 44; 6 por 7 son 42, que restado de 44 deja 2: este resto unido á la cifra siguiente forma 25, mas como 6 por 9 son 54, que no puede restarse de 25, resulta tambien que la cifra 6 es mayor que la verdadera. Rebajando otra unidad tendremos: 5 por 2 son 10, que restado de 16 deja 6: este resto unido á la cifra siguiente compone 64; 5 por 7 son 35, que restado de 64 deja 29: este resto unido á la cifra siguiente forma 295; 5 por 9 son 45, que puede restarse de 295 y deja 250 de resto; luego la verdadera cifra del cociente es 5, y el resto total 250.

Todos estos raciocinios se hacen de memoria, con tal que no sea preciso continuar la sustraccion cuando el minuendo formado por el resto último y la cifra siguiente llegue á 100, porque con facilidad se resta mentalmente de un número que no pasa de dos cifras otro que tampoco puede exceder de 81 unidades. Se consigue esto advirtiendo que tan luego como el resto que se obtenga en una sustraccion, que se principia por las unidades de especie superior, como las anteriores, sea igual ó mayor que la cifra que se ensaya, esta ya no es mayor que la verdadera. En efecto, tanteando la cifra 5 dijimos: 5 por 2 son 10, que restado de 16 deja 6: este resto, aunque solo fuese 5, unido á las dos cifras siguientes del dividendo parcial,

UNED

compondria al ménos 500, y como la cifra 5 que se ensaya, multiplicada por las dos que restan del divisor, da un producto menor que 500, resulta que el producto del cociente por el divisor ya puede restarse del dividendo parcial, luego la cifra 5 que se tantea es la verdadera. Obtenida la verdadera cifra del cociente, la sustraccion del producto de esta por el divisor del dividendo parcial, se ejecuta principiando por las unidades sencillas, para evitar sustracciones parciales difíciles de ejecutar de memoria.

Segun esto, la determinacion de la segunda cifra del cociente, siendo el dividendo parcial 2503 y 279 el divisor, se verificará así: 25 entre 2 á 9; 9 por 2 son 18, que restado de 25 deja 7: este resto con la cifra siguiente compone 70; 9 por 9 son 81, que como no se puede restar de 70, indica que el 9 es cifra grande: 25 entre 2 á 8; 8 por 2 son 16, que restado de 25 deja de resto 9, mayor que la cifra 8 que se ensaya; luego dicha cifra es la verdadera.

Igualmente, siendo el tercer dividendo parcial 2718 y 279 el divisor, diriamos: 27 entre 2 á 9; 9 por 2 son 18, que restado de 27 deja el resto 9, que es igual á la cifra que se tantea; luego dicha cifra 9 es el verdadero cociente.

72. Del procedimiento empleado en este ejemplo, que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para determinar cada cifra del cociente se divide la primera ó dos primeras del dividendo parcial (segun tenga tantas como el divisor ó una más que este) *por la primera del divisor y el resultado será la cifra que se busca del cociente ó mayor que ella. A fin de cerciorarse si dicha cifra es ó no mayor que la verdadera, se multiplica por el divisor, y se resta el producto del dividendo parcial, principiando estas operaciones para mayor brevedad por las unidades de especie superior* (**70**, obs.) *Si la sustraccion no puede verificarse, la cifra que se ensaya es grande: se le rebaja una unidad y la cifra así obtenida se somete á una nueva comprobacion; continuando de este modo hasta que la sustraccion sea posible, ó hasta obtener un resto parcial igual ó mayor que la cifra que se comprueba, en cuyos casos esta cifra es buena.*

Observacion. El número de cifras del cociente entero es

igual, segun la primera regla, á la diferencia entre el número de cifras del dividendo y divisor, ó á esta diferencia aumentada en una unidad.

Abreviaciones de la division.

73. 1.ª La division de un número de varias cifras por otro de una sola puede ejecutarse, comprendida la regla anterior, con la sencillez que se ve en el siguiente

EJEMPLO. Sea dividir 8719 por 6,

$$8719 \mid 6$$
$$1453+\tfrac{1}{6}$$

8 entre 6 á 1 (que se escribe debajo del dividendo 8) y quedan 2, que unidas á la cifra siguiente forman 27. Ahora 27 entre 6 á 4 (que se escribe á la derecha del cociente anterior) y quedan 3, que con la cifra siguiente forman 31. Este número dividido por 6 da 5, y queda 1, que unida á la última cifra forman 19. Dividiendo 19 por 6, el cociente parcial 3 es la última cifra del cociente total, y el resto 1 el residuo de la operacion: siendo el cociente completo (**65**, obs.) $1453+\frac{1}{6}$.

2.° La division de un número terminado en ceros por 10, 100, 1000, y en general por la unidad seguida de ceros, se ejecuta suprimiendo á la derecha del dividendo tantos ceros como acompañen á la unidad (**24**, 3.°). Así 39000 : 100 = 390.

74. TEOREMA. *Para dividir un producto de dos ó más factores enteros por un divisor de cualquiera de estos, se divide el factor que da cociente exacto por el divisor, y el cociente obtenido, multiplicado por los factores restantes, es el cociente total.*

Porque el tal cociente multiplicado por el divisor produce el dividendo, que es el producto dado.

Así, para dividir 48×13 por 12, basta dividir 48 por 12 y multiplicar el cociente 4 por 13, porque (**54**, corol. 1.°)

$$4\times13\times12=12\times4\times13=48\times13,$$

luego el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo; luego dicho cociente 4×13 es el verdadero (**61**).

COROLARIO 1.° *Un cociente de division exacta no se altera dividiendo dividendo y divisor por un divisor de ambos.*

Porque como el dividendo es igual al producto del cociente

por el divisor, dividiendo dividendo y divisor por el mismo número no se altera esta igualdad, por lo tanto el cociente permanece el mismo. Así, 365 : 120 = 73 : 24, dividiendo ambos términos por 5.

Corolario 2.° (Otra abreviacion de la division exacta.) *Cuando dividendo y divisor terminan en ceros, se simplifica la division suprimiendo en los dos términos tantos ceros como hay en el que tiene ménos.*

Porque esto equivale á dividir dividendo y divisor (**24**, 3.°) por un mismo número. Así, dividir 3400 por 80, es lo mismo que dividir 340 por 8.

75. *La division se prueba multiplicando el cociente por el divisor, y agregando á este producto el residuo, si le hubiese; y el resultado debe ser igual al dividendo* (**63**), *si es que la operacion está bien hecha.*

76. (*) La division de los números concretos se ejecuta como la de los abstractos; distinguiendo, sin embargo, para mayor claridad dos casos:

1.° *Que dividendo y divisor sean de distinta naturaleza*, en cuyo caso el divisor se considera como abstracto, y el cociente es de la especie del dividendo; porque el primero debió ser el multiplicador y el segundo el multiplicando en la operacion que produjo al dividendo.

2.° *Que dividendo y divisor sean de la misma naturaleza*, en cuyo caso se considera el cociente como abstracto; porque el divisor debió ser el multiplicando y el cociente el multiplicador en la operacion que produjo al dividendo. La especie del cociente será la que el mismo problema indique.

77. 1.er caso. El problema general que comunmente se resuelve en este caso es el siguiente: *conocido el valor de un número cualquiera de unidades, hallar el de la unidad de la misma especie.*

El valor de las unidades conocidas es el dividendo, y el número de estas, que se considera como abstracto, el divisor,

---

(*) Los principios expuestos en estos párrafos son generales y aplicables por lo mismo á la division de quebrados concretos, ya sean decimales ú ordinarios, y á la de números complejos.

Observacion. Si el divisor no fuere de la especie de la unidad cuyo valor se va á determinar, se reducirá á dicha especie, como se verá en el problema 3.°

Ejemplo. **32 quintales de arroz costaron 4032 reales, ¿á cómo costó el quintal?**

El dividendo es 4032 reales, el divisor 32, que se considera como abstracto, y el cociente serán reales.

PROBLEMAS.

78. 1.° 317 metros de paño costaron 19020 reales, ¿á cómo costó el metro?

19020	317
00	60

Resultado: 60 reales.

2.° Un padre dejó 34505 escudos para repartir entre 6 hijos, ¿cuánto corresponde á cada uno?

34505 escudos	6
$5750+\frac{5}{6}$	

Resultado: 5750 escudos $+\frac{5 \text{ escudos}}{6}$.

3.° 13 quintales costaron 156 duros, ¿á cómo costó la arroba?

Para resolver este problema se debe reducir el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se trata de conocer, es decir, los 13 quintales á arrobas; y como 13 quintales componen 52 arrobas, la resolucion se ejecuta como á continuacion se ve:

156 duros	52
0	3 duros

Resultado: costó cada arroba 3 duros.

79. 2.° caso Si dividendo y divisor son de una misma naturaleza, *el problema indica cuál es el dividendo, cuál el divisor y la especie del cociente.*

PROBLEMAS.

1.° Un hectólitro de trigo costó 52 reales, ¿cuántos hectólitros se comprarán con 4680 reales?

Evidentemente se compran tantos hectólitros cuantas ve-

UNED

ces 4680 contenga á 52. Luego será

$$\begin{array}{r|l} 4680 & 52 \\ \hline 00 & 90 \end{array}$$

Resultado: 90 hectólitros.

2.° Teniendo una vara 36 pulgadas, 1889 pulgadas ¿cuántas varas componen?

$$\begin{array}{r|l} 1889 & 36 \\ 89 & \\ \hline 17 & 52+\frac{17}{36}. \end{array}$$

Resultado: 52 varas $+\frac{17}{36}$.

Otros PROBLEMAS *que se resuelven por la division.*

80. 1.° Un albañil empleó 360 dias en hacer una obra; 9 albañiles ¿cuántos dias tardarán en hacer otra igual?

Este problema y sus análogos, aunque comprendidos en el 1.er caso de division de concretos, no lo estan, sin embargo, en el problema general que comunmente se resuelve en dicho caso. No obstante, fácilmente se observará, que 9 albañiles tardará la novena parte del tiempo que empleó uno solo en hacer igual obra; y por lo mismo que el problema se resuelve como á continuacion se expresa:

$$\begin{array}{r|l} 360 \text{ dias} & 9 \\ 40 \text{ dias} & \end{array}$$

Resultado: 40 dias.

2.° 16614 onzas, ¿cuántos quintales, arrobas, libras y onzas componen (*)?

Desde luego se observa que para resolver este problema hay que dividir las 16614 onzas por 16, y el cociente serán libras, y el resto las onzas que quedan: dividiendo luego este cociente por 25, el nuevo cociente serán arrobas, y el resto

(*) A la operacion empleada para resolver este problema y sus análogos se suele llamar *reduccion de un número de especie inferior á complejo.*

las libras que han de quedar en el resultado; y así se continúa ordenando la operacion como á continuacion se expresa:

16614 onzas	16		
61	1038 libras	25	
134	38	41 arrobas	4
6 onzas	13 libras.	1 arroba	10 quintales.

Resultado: 10 quintales, 1 arroba, 13 libras y 6 onzas.

CAPITULO III.

Quebrados comunes.

ARTICULO I.

Nociones preliminares.

81. Se ha visto (**65**, obs.) que el cociente completo en las divisiones inexactas se componia del cociente entero y de la division indicada del resíduo por el divisor; así que $76:9=8+\frac{4}{9}$. Para formar una idea del cociente $\frac{4}{9}$, se supone la unidad dividida en nueve partes iguales entre sí: una de estas partes será un noveno de unidad, y cuatro serán 4 novenos.

Luego el cociente de un número menor por otro mayor se determina suponiendo dividida una unidad del dividendo en tantas partes iguales entre sí como unidades tenga el divisor, y tomando tantas de estas partes como unidades tenga el dividendo.

La cantidad $\frac{4}{9}$ y sus análogas se llaman *quebrados* (**18**) ó *fracciones*.

Es, pues, el QUEBRADO *un número de partes ó unidades inferiores, referidas á una unidad superior por una denominacion cualquiera;* por ejemplo: un número de cuartas, de novenas, de vigésimas, de centésimas, etc., partes de una unidad, que se llama *entera*. La denominacion que fija el grado de inferioridad del quebrado, respecto á su unidad propia, no es concreta como lo es la de *pie* respecto á *vara*, la de

onza respecto á *libra*, etc.; sino abstracta y puramente numérica; en lugar de *pie* diremos *tercia* de vara; en vez de *onza* diremos *décimasexta* parte de libra, etc.

82. El quebrado necesita, pues, para su expresion de dos números, que se llaman *numerador* y *denominador*.

DENOMINADOR *es el número que expresa las partes en que se considera dividida la unidad:* y NUMERADOR *el que expresa las partes de la unidad que contiene el quebrado.*

El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del quebrado ó de la *fraccion*.

Un quebrado se escribe, como ya se ha visto, poniendo el numerador sobre una raya horizontal y debajo el denominador.

Para expresar de palabra un quebrado se expresa el numerador con los numerales absolutos *uno*, *dos*, *tres*, etc., y luego el denominador, si no pasa de 10, con los partitivos *medios*, *tercios*, *cuartos*, etc.; y si pasa de 10, se expresa tambien con los numerales absolutos agregando la terminacion *avos*. Así, los quebrados

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{10},\ \frac{7}{11},\ \frac{13}{21},\ \text{etc.}$$

se expresan: *un medio*, *tres cuartos*, *cinco décimos*, *siete once avos*, *trece veintiun avos*, etc.

83. TEOREMA. *El cociente de toda division indicada es igual á un quebrado cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.*

Digo que $22:5$, ó 22 partido por 5 es igual á $\frac{22}{5}$, ó sea á veintidos quintos. Dividir 22 por 5 es lo mismo que tomar la quinta parte de 22; la quinta parte de 1 es $\frac{1}{5}$, luego la de 22 será la quinta parte de 1 repetida 22 veces, ó sea veintidos quintos: luego $22:5=\frac{22}{5}$.

Igual raciocinio se haria con otra division cualquiera; luego el cociente de toda division, etc.

COROLARIO 1.° *El numerador de un quebrado puede ser menor, igual ó mayor que su denominador.*

Un quebrado en que el numerador es menor que el denominador vale menos que la unidad, y por esto *se llama* QUEBRADO PROPIO, como

$$\frac{4}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{17}{20},\ \text{etc.}$$

Un quebrado en que el numerador es igual ó mayor que el denominador vale la unidad ó más que la unidad, y por esto se llama QUEBRADO IMPROPIO, como

$$\frac{3}{3}, \frac{7}{6}, \text{ etc.}$$

COROLORIO 2.° *Para hallar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador.* Así,

$$\frac{18}{6}=3, \quad \frac{17}{4}=4+\frac{1}{4},$$

que tambien se escribe $4\frac{1}{4}$, suprimiendo el signo + para mayor sencillez.

84. TEOREMA (recíp. del corol. anter.). *Todo número entero se puede poner en forma de quebrado, cuyo denominador sea otro número cualquiera, multiplicando este por el entero y poniendo al producto por denominador el dado; y todo número misto se puede reducir á quebrado, multiplicando el entero por el denominador, añadiendo al producto el numerador, y poniendo á la suma por denominador el del quebrado propuesto.*

Pues en el primer caso el entero se puede considerar como el cociente de una division exacta, en que el denominador dado es el divisor; y en el segundo el número misto se puede tambien considerar como el cociente completo de una division inexacta, en que la parte entera forma el cociente entero, el numerador del quebrado el resíduo de la division, y el denominador el divisor.

De modo que reduciendo 3 enteros á quebrado cuyo denominador sea 6, se tendrá

$$\frac{6\times 3}{6}=\frac{18}{6} \quad \text{y} \quad 4\frac{1}{4}=\frac{17}{4}.$$

OBSERVACIONES.

85. 1.ª Todo número entero se puede poner en forma de quebrado poniéndole por denominador la unidad. De modo que

$$7=\frac{7}{1}.$$

UNED

2.° El denominador de la unidad puesta en forma de quebrado puede ser un número cualquiera. Así

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\text{etc.}$$

ARTICULO II.

Propiedades de los quebrados.

86. Segun la idea que se acaba de dar de los quebrados, *un quebrado será tanto mayor cuanto mayor sea el número de partes que se tomen, y cuanto mayor sea cada una de estas partes; y al contrario.* Un quebrado será 2, 3, 4, ..., etc. veces mayor que otro, cuando dividida la unidad en el mismo número de partes, se tome de estas un número 2, 3, 4, ..., veces mayor, ó cuando tomando de ellas igual número, el valor de cada una sea 2, 3, 4, ..., veces mayor; y al contrario.

De donde se infiere que

1.° *De dos quebrados que tienen igual denominador, es mayor el que tiene mayor numerador: de dos quebrados que tienen igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador.*

Así que, $\frac{7}{9}$ es mayor que $\frac{5}{9}$; y $\frac{6}{13}$ es mayor que $\frac{6}{14}$.

2.° *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por dicho número entero, permaneciendo igual el denominador.* De modo que

$$\frac{4}{11}\times 2=\frac{4\times 2}{11}=\frac{8}{11}.$$

3.° *Para multiplicar un quebrado por un divisor cualquiera de su denominador, basta dividir este por dicho divisor, dejando el mismo numerador.* Así que

$$\frac{7}{15}\times 5=\frac{7}{15:5}=\frac{7}{3}.$$

4.° *Para dividir un quebrado por un número entero, se multiplica el denominador por dicho número entero, permaneciendo igual el numerador.* De modo que

$$\frac{3}{5}:4=\frac{3}{5\times 4}=\frac{3}{20}.$$

UNED

5.° *Para dividir un quebrado por un divisor cualquiera de su numerador, basta dividir este por dicho divisor, dejando el mismo denominador.* Así que

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}.$$

Como, segun el principio 2.°, multiplicando el numerador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda multiplicado por dicho número: y, conforme al 4.°, multiplicando el denominador por el mismo entero, el quebrado queda dividido por él; se deduce tambien que

6.° *Un quebrado no varía de valor multiplicando sus dos términos por un mismo número entero.*

Igualmente se infiere de los principios 3.° y 5.° que

7.° *Un quebrado no varía de valor dividiendo sus dos términos por un divisor comun á ambos* (*).

ARTICULO III.

Reduccion de quebrados á un comun denominador.

87. REDUCIR *quebrados á un* COMUN DENOMINADOR *es convertirlos en otros equivalentes que tengan denominadores iguales.*

88. *Para reducir quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro, si no fuesen más que dos los quebrados, ó por el producto de los denominadores de los demás, si pasasen de dos.*

De este modo se hallan quebrados de igual valor que los primitivos, pues resultan de multiplicar los dos términos de cada uno por un mismo número entero, con lo que no se al-

---

(*) No se deduce de esta proposicion y la del párrafo anterior, como á primera vista puede parecer, que tampoco un quebrado varía de valor agregando ó quitando de sus dos términos una misma cantidad; pues agregando crece el quebrado propio y disminuye el impropio, y quitando sucede lo contrario. Así que, $\frac{2+4}{7+4} = \frac{6}{11}$ es mayor que $\frac{2}{7}$, y $\frac{4+2}{3+2} = \frac{6}{5}$ menor que $\frac{4}{3}$.

tera su valor (**86**, 6.°); y tienen á la vez denominadores iguales, porque cada uno viene á formarse del producto de todos los denominadores de los quebrados que se quieren reducir, y dicho producto es el mismo para todos ellos (**54**).

EJEMPLOS.

1.° Sean los quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$: para reducirlos á un comun denominador se multiplican los términos del primero por 7 y los del segundo por 5, resultando

$$\frac{14}{35} \text{ y } \frac{20}{35},$$

que son los quebrados buscados.

2.° Sean los quebrados

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7};$$

se multiplican los dos términos del primero por el producto de 3 por 7 ó sea por 21: los dos términos del segundo por el producto de 2 por 7 ó sea por 14; y los dos términos del último por el producto de 2 por 3 ó sea por 6; resultando

$$\frac{21}{42}, \frac{28}{42}, \frac{30}{42}.$$

3.° Del mismo modo se hallaria que los quebrados

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{22}, \frac{5}{7}, \frac{6}{11},$$

se convierten en $\frac{462}{616}, \frac{308}{616}, \frac{440}{616}, \frac{336}{616}$.

Observacion. Cuando los denominadores tienen factores comunes, la reduccion puede hacerse más fácilmente observando por qué número conviene multiplicar los dos términos de cada quebrado para conseguir que todos tengan igual denominador (*).

(*) La regla general para el caso en que los denominadores tienen factores comunes, véase en el complemento, número **188**.

EJEMPLOS.

1.° Sean los quebrados

$$\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{13}{20}, \frac{1}{2};$$

y observarémos que si se multiplican los dos términos del primero por 2, los del segundo por 4 y los del último por 10, se convertirán en

$$\frac{14}{20}, \frac{12}{20}, \frac{13}{20}, \frac{10}{20},$$

quebrados equivalentes á los propuestos, y que tienen un mismo denominador.

2.° De una manera análoga se hallaria que

$$\frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6},$$

se pueden convertir en

$$\frac{21}{36}, \frac{27}{36}, \frac{20}{36}, \frac{24}{36}, \frac{6}{36}.$$

ARTICULO IV.

Simplificacion de los quebrados.

89. Aunque nos proponemos por ahora ocuparnos brevemente de la simplificacion de los quebrados, deben, sin embargo, precederla unas ligeras nociones sobre la divisibilidad de los números, que faciliten su ejecucion.

Se llama CIFRA PAR *la que es divisible por 2; é* IMPAR *la que no lo es.* Son cifras pares 2, 4, 6, 8; é impares 1, 3, 5, 7, 9.

90. TEOREMA 1.° *Si un número divide exactamente á dos ó más sumandos, divide tambien la suma de estos.*

Porque cada uno de los sumandos es igual al divisor multiplicado por el cociente (que es entero por hipótesis), luego la suma será igual al divisor multiplicado por la reunion de los

UNED

cocientes enteros; luego dicha suma dividida por el divisor da un cociente exacto.

Así, siendo divisibles cada uno de los números 12, 6 y 24 por 6, la suma 42 lo será igualmente. En efecto

$$12=2\times 6$$
$$6=1\times 6$$
$$24=4\times 6;$$

de donde $12+6+24=2\times 6+1\times 6+4\times 6,$

ó $42=(2+1+4)\times 6$ (*);

luego el cociente de la suma 42 por el divisor 6, es la suma de los números enteros $2+4+1$, luego es exacto.

Corolario. *Si un número divide exactamente á otro, divide tambien á un múltiplo cualquiera de este.*

Porque el múltiplo del número dado es este mismo número repetido varias veces por sumando: cada sumando es divisible por el divisor; luego tambien lo será la suma.

Así, un múltiplo cualquiera de 20 es igual á $20+20+20+\ldots\ldots$; luego si el 5 divide exactamente á 20, dividirá del mismo modo á dicho múltiplo.

91. Teorema 2.° *Un número es divisible por 2, si termina en cero ó cifra par.*

Porque si termina en cero es múltiplo de 10 (**24**, 3.°), y por lo tanto divisible por 2 (**90**, corol.). Si termina en cifra par se puede descomponer en dos sumandos, uno que contenga las decenas, y por lo tanto que termina en cero, y otro las unidades expresadas por la cifra par; luego los dos sumandos son divisibles por 2, luego tambien la suma ó sea el número dado.

De este modo 50 y 900 son divisibles por 2: porque

$$50=5\times 10,\quad 900=90\times 10;$$

luego son múltiplos de 10, y por lo tanto divisibles por 2.

De la misma manera 34 y 396 son divisibles por 2; porque

$$34=30+4,\quad 396=390+6;$$

(*) En esta notacion suponemos que

$$(2+1+4)\times 6=2\times 6+1\times 6+4\times 6,$$

esto es, que *para multiplicar la suma de dos ó más números por un tercero, basta multiplicar este por cada sumando, y sumar luego los productos parciales, y recíprocamente;* cuyas verdades son evidentes.

UNED

estos sumandos son divisibles por 2; luego tambien la suma.

92. Teorema 3.° *Un número es divisible por* 3, *si la suma de los valores absolutos de sus cifras es* 3 *ó un múltiplo de* 3.

Porque cada unidad de un órden superior al primero es un múltiplo de 9 más 1. Así.

$$10=9+1, \quad 100=99+1, \text{ etc.};$$

luego 2, 3, 4, etc., unidades de un órden superior al primero son un múltiplo de 9 más 2, 3, 4, etc., unidades sencillas. Así

$$400=100\times 4=(99+1)\times 4=99\times 4+4;$$

luego todo número se puede concebir compuesto de diferentes múltiplos de 9, y de la suma de los valores de sus cifras; luego si esta última es divisible por 3, como los múltiplos de 9 lo son (**90**, corol.), lo será tambien el número (**90**). Así, 312 es divisible por 3, porque

$$\begin{aligned} 300&=99\times 3+3\\ 10&=\ 9\times 1+1\\ 2&=\qquad 2\end{aligned}$$

ó

$$312=99\times 3+9\times 1+6;$$

luego todos los sumandos de que está compuesto el número 312 son divisibles por 3, luego la suma, ó sea el mismo número, tambien lo será (**90**) (*).

93. Teorema 4.° *Un número es divisible por* 5 *si termina en* 0 *ó en* 5.

Porque si termina en 0 es múltiplo de 10 y por lo tanto divisible por 5 (**90**, corol.); si termina en 5 se puede descomponer en dos sumandos, uno que contenga las decenas y otro las unidades: el que contiene las decenas termina en 0, y las unidades están formadas por la cifra 5; luego los dos sumandos son divisibles por 5, luego tambien la suma.

De modo que 50, 115, 800, etc., son divisibles por 5.

(*) Segun este mismo raciocinio *un número es divisible por* 9 *si la suma de los valores absolutos de sus cifras es* 9 *ó múltiplo de* 9. Asi 63 y 864 son divisibles por 9.

De una manera análoga se demostraria que *un número es divisible por* 11 *si la diferencia entre los valores absolutos de las cifras que ocupan lugar impar, y las que ocupan lugar par es* 0, 11 *ó un múltiplo de* 11. Asi 77, 9163 y 182908 son divisibles por 11.

UNED

94. Simplificar *un quebrado es reducirle á otro de igual valor y cuyos términos sean menores.*

Como un quebrado no varía de valor dividiendo sus dos términos por un divisor comun á ambos (**86**, 7.°); y ejecutando esta division disminuyen numerador y denominador, se infiere que

95. *Para simplificar un quebrado se dividen sus dos términos por 2 las veces que se pueda, luego por 3, por 5, y en general por todo número por quien se conozca que ambos términos son divisibles* (*).

Ejemplo. Si se quiere simplificar el quebrado $\frac{18}{36}$, se ve desde luego que sus dos términos son divisibles por 2 (**91**), y ejecutada la division queda reducido á $\frac{9}{18}$. Este quebrado tiene sus dos términos divisibles por 3 (**92**), y hecho, se convierte en $\frac{3}{6}$, cuyos dos términos son otra vez divisibles por 3, dando por resultado $\frac{1}{2}$, quebrado de igual valor que el primero, pero mucho más sencillo.

El anterior raciocinio puede, en resúmen, expresarse de esta manera:

$$\frac{18}{36} = \frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De un modo semejante se hallaria que

$$\frac{840}{1440} = \frac{84}{144} = \frac{42}{72} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

ARTICULO V.

Adicion de los quebrados.

96. En la adicion de los quebrados se pueden distinguir dos casos: 1.° *sumar quebrados con quebrados:* 2.° *sumar números mistos.*

97. 1.er caso. Para resolver este primer caso y para otras

(*) La regla general para la simplificacion de los quebrados véase en el complemento, número **185**, corol.

operaciones, que se ejecutan con los quebrados, conviene recordar (**81**) que los *medios*, *tercios*, *cuartos*, etc. de la unidad son especies diferentes de magnitud, como los *metros*, *decímetros*, *centímetros*, etc.; de modo que un quebrado podrá considerarse como una cantidad concreta, en que el denominador indica la especie, y el numerador las unidades que de esta especie deben tomarse. Segun esto, los quebrados abstractos y los que se refieren á una misma unidad son de igual especie cuando tienen denominadores iguales, y de diversa especie cuando los denominadores son diferentes. Luego

Para sumar quebrados que tienen denominadores iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador comun.

Si los quebrados no tienen denominador comun se reducen primeramente á él (**88**), *y luego se suman segun se acaba de exponer.*

EJEMPLOS.

1.° $\frac{3}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{3+5+1+4}{9}=\frac{13}{9}$.

2.° $\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{20}{140}+\frac{84}{140}+\frac{105}{140}=\frac{20+84+105}{140}=\frac{209}{140}$.

Observacion. Debiendo ser los resultados de las operaciones lo más sencillo que sea posible, cuando en la adicion ó cualquiera de las otras operaciones, que se ejecutan con los quebrados, se obtengan quebrados impropios, convendrá, por regla general, hallar los enteros que contienen (**83**, corol. 2.°), y si resultasen quebrados que puedan simplificarse, tambien convendrá ejecutar la simplificacion (**95**).

Así, en el primer ejemplo $\frac{13}{9}$ se convierte en $1\frac{4}{9}$, y en el segundo $\frac{209}{140}=1\frac{69}{140}$.

98. 2.° caso. *Para sumar números mistos basta evidentemente sumar los enteros con los enteros y los quebrados con los quebrados, principiando la operacion por estos, para que si de su suma resulta alguna unidad, sea agregada á los enteros.*

UNED

La operacion se dispone como se ve en los siguientes

EJEMPLOS.

1.°

Sumandos. . . . $17\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{4}$, $76\frac{2}{4}$

Resultado: $112\frac{3}{4}$

2.°

$76\frac{1}{2}\cdots\frac{105}{210}$

$25\frac{2}{3}\cdots\frac{140}{210}$

$\frac{4}{5}\cdots\frac{168}{210}$

$13\frac{3}{7}\cdots\frac{90}{210}$

90

$206\frac{83}{210}$

En el primer ejemplo la suma de los quebrados es $\frac{7}{4}$, y sacando los enteros será 1 y $\frac{3}{4}$. Se escribe el quebrado en el lugar correspondiente, y se lleva el entero para sumar con las unidades.

En el segundo hay que principiar por reducir los quebrados á un comun denominador, resultando de esta operacion los nuevos quebrados que se ponen al frente de los primitivos. La suma de aquellos es $\frac{503}{210}$, y sacando los enteros resulta 2 y $\frac{83}{210}$. Los enteros se suman con los enteros, como en el ejemplo anterior.

Observacion. La adicion de los números mistos puede ejecutarse tambien reduciéndolos á quebrados (84); mas este procedimiento es más largo en la práctica que el que acabamos de enseñar.

PROBLEMAS.

1.° Un comerciante tenia varios retales de paño: uno de $\frac{4}{5}$ de vara, otro de $\frac{2}{3}$, otro de $\frac{6}{7}$ y otro de $\frac{3}{4}$, y desea saber cuánto componen todos juntos.

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{6}{7}+\frac{3}{4}=\frac{336}{420}+\frac{280}{420}+\frac{360}{420}+\frac{315}{420}=\frac{1291}{420}=3\frac{31}{420}$$

Resultado: 3 varas y $\frac{31}{420}$ de vara.

2.° Un comerciante recibió cinco partidas de té: la primera de $18\frac{1}{4}$ libras, la segunda de $13\frac{1}{2}$, la tercera de $4\frac{3}{4}$, la cuarta de 76 y la quinta de $12\frac{1}{2}$, y

UNED

quiere averiguar el total de las libras recibidas.

La operacion se ejecuta como se ve á continuacion, advirtiendo que los quebrados quedan reducidos á un comun denominador (**88**, obs.) multiplicando por 2 los dos términos del segundo y cuarto, siendo el resultado 125 libras.

$$18\frac{1}{4}$$
$$13\frac{2}{4}$$
$$4\frac{3}{4}$$
$$76$$
$$12\frac{2}{4}$$
$$125 \text{ libras.}$$

ARTICULO VI.

Sustraccion de los quebrados.

99. La sustraccion de los quebrados comprende tres casos: 1.° *restar un quebrado de otro:* 2.° *restar un quebrado de un entero:* 3.° *restar números mistos.*

100. 1.er caso. Como los quebrados son de la misma ó diferente especie, segun tengan un mismo denominador ó denominadores distintos (**97**), resulta que

Para restar un quebrado de otro, cuando tienen denominadores iguales, se restan los numeradores y á la resta se pone por denominador el denominador comun.

Si los quebrados no tienen un denominador comun, se reducen primeramente á él (**88**), *y luego se restan como se ha dicho.*

EJEMPLOS.

1.° $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$. 2.° $\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{21}{28} - \frac{8}{28} = \frac{13}{28}$.

101. 2.° caso. *Para restar un quebrado* propio *de un entero, se toma del entero una unidad, la que se pone en forma de quebrado, cuyo denominador sea igual al denominador del*

UNED

sustraendo (**85**, 2.ª): *se resta este del quebrado así formado, y el resto se une al entero rebajándole una unidad.*

Así, para restar $\frac{3}{4}$ de 6, ejecutariamos la operacion como á continuacion se ve:

$$6-\frac{3}{4}=5\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}.$$

Tambien puede ponerse la unidad por denominador del entero (**85**, 1.ª), y queda este caso reducido al primero de la sustraccion. Así

$$6-\frac{3}{4}=\frac{6}{1}-\frac{3}{4}=\frac{24}{4}-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}.$$

Mas, como desde luego se observa, este procedimiento es más largo que el anterior.

102. 3.er caso. *Para restar números mistos, se resta el quebrado del quebrado y el entero del entero, y la reunion de estos dos restos forma el resultado que se busca.*

La operacion se puede ordenar como se ve en los siguientes

EJEMPLOS.

1.° Sea restar $10\frac{1}{3}$ de $18\frac{2}{3}$.

$$18\frac{2}{3}$$
$$10\frac{1}{3}$$

Resultado: $8\frac{1}{3}$.

2.° Restar $3\frac{2}{5}$ de $10\frac{6}{7}$.

$$10\frac{6}{7}\cdots\frac{30}{35}$$
$$3\frac{2}{5}\cdots\frac{14}{35}$$

Resultado: $7\frac{16}{35}$.

3.° Restar $\frac{4}{9}$ de $3\frac{1}{2}$.

$$3\frac{1}{2}\cdots\frac{9}{18}$$
$$\frac{4}{9}\cdots\frac{8}{18}$$

Resultado: $3\frac{1}{18}$

4.° Restar $7\frac{2}{3}$ de 11.

$$11\cdots\frac{3}{3}$$
$$7\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}$$

Resultado: $3\frac{1}{3}$

103. Puede ocurrir en este caso de la sustraccion que el quebrado del minuendo sea menor que el del sustraendo; si

UNED

quisiéramos restar, por ejemplo, $3\frac{5}{7}$ de $8\frac{2}{7}$, como $\frac{5}{7}$ no se puede restar de $\frac{2}{7}$ agregaríamos á este quebrado una unidad, lo que le convertiria (**84**), en $\frac{9}{7}$. Se efectua la sustraccion de los quebrados y el resto de estos es $\frac{4}{7}$. Al restar los enteros se agrega otra unidad al sustraendo para que por la primera agregacion no varíe el resto: de modo que la diferencia total es $4\frac{4}{7}$. Luego

Para restar números mistos, cuando el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, se agrega á aquel una unidad y otra al entero del sustraendo para que el resto no se altere, y la operacion se ejecuta por la regla anterior.

EJEMPLOS.

1.° Sea restar $5\frac{6}{9}$ de $7\frac{4}{9}$.

$$7\frac{4}{9}\cdots\frac{13}{9}$$
$$5\frac{6}{9}\cdots\frac{6}{9}$$

Resultado: $1\frac{7}{9}$.

2.° Restar $10\frac{1}{3}$ de $18\frac{2}{11}$.

$$18\frac{2}{11}\cdots\frac{6}{33}\cdots\frac{39}{33}$$
$$10\frac{1}{3}\cdots\frac{11}{33}\cdots\frac{11}{33}$$

Resultado: $7\frac{28}{33}$.

Observacion. Tambien puede resolverse este caso de la sustraccion de números mistos, reduciendo estos á quebrados; pero este procedimiento es más largo que el expuesto.

PROBLEMAS.

1.° De una regla de $\frac{3}{4}$ de vara de largo se quitó $\frac{1}{8}$ de vara, ¿qué longitud le quedó?

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

Resultado: $\frac{5}{8}$.

2.° De una caja de azúcar que contenia $14\frac{3}{5}$ arrobas, se vendieron $6\frac{1}{2}$ arrobas, ¿qué arrobas de azúcar quedaron?

$$14\frac{3}{5}\cdots\frac{6}{10}$$
$$6\frac{1}{2}\cdots\frac{5}{10}$$

Resultado: $8\frac{1}{10}$.

UNED

ARTICULO VII.

Multiplicacion de los quebrados.

104. En la multiplicacion se pueden distinguir tres casos: 1.° *Multiplicar un quebrado por otro*: 2.° *multiplicar un quebrado por un entero*: 3.° *multiplicar números mistos.*

105. 1.er caso. Sea multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$. Si el multiplicador fuese $\frac{1}{4}$, el producto de $\frac{5}{7}$ por $\frac{1}{4}$ sería, segun la definicion de la multiplicacion (**46**), un número 4 veces menor que el multiplicando; luego sería (**86**, 4.°) $\frac{5}{7\times4}$. Ahora, si el producto de $\frac{5}{7}$ por $\frac{1}{4}$ es $\frac{5}{7\times4}$, el producto del mismo número por $\frac{3}{4}$ se hallará evidentemente multiplicando el anterior por 3; luego el producto buscado será

$$\frac{5}{7\times4}\times3=(\mathbf{86},\ 2.°)\ \frac{5\times3}{7\times4}=\frac{15}{28}.$$

De donde se deduce que

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; y el producto de los numeradores será el numerador y el de los denominadores el denominador del quebrado que se busca. Así

$$\frac{6}{11}\times\frac{3}{8}=\frac{18}{88}=(\mathbf{95})\ \frac{9}{44}.$$

Corolario. *El producto de un quebrado por el mismo quebrado invertido es igual á la unidad.* Así

$$\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{35}{35}=1.$$

106. El producto de varios factores quebrados $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\cdots$, indica que $\frac{3}{4}$ se ha de multiplicar por $\frac{2}{3}$, este producto por $\frac{5}{7}$, etc.

Corolario 1.° *Para multiplicar varios quebrados se multiplican los numeradores y al producto se le pone por denominador el producto de todos los denominadores.*

De modo que

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{1\times2\times5}{4\times3\times7}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}.$$

UNED

2.° *Un producto de varios factores quebrados no varía, cualquiera que sea el órden de colocacion de estos factores.*

Porque el numerador del producto está formado del producto de los numeradores, y el denominador del producto de los denominadores; y estos productos de factores enteros no varían cualquiera que sea el órden de colocacion de dichos factores (**54**). Así

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

3.° *Tampoco varía un producto de factores enteros y quebrados cualquiera que sea el órden de colocacion de estos factores.*

Porque poniendo á los enteros por denominador la unidad (**85**, 1.ª), queda este corolario reducido al anterior. Así

$$\frac{3}{4}\times 5=5\times\frac{3}{4}.$$

Observacion. De estos dos corolarios se deduce la generalidad del corolario 1.° del n.° **54** y la del teorema del n.° **74** y sus corolarios.

107. *Se llama* quebrado de quebrado *la expresion que representa una ó varias partes iguales de un quebrado cualquiera.* Así, $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ es un quebrado de quebrado.

Si tratásemos de reducir á un quebrado solo el quebrado de quebrado que precede, observariamos que $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ es equivalente (**46**) á $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=$(**105**) $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Del mismo modo se vería que $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ equivale á

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{15}{168}=\frac{5}{56}.$$

Luego *para hallar el quebrado equivalente á un quebrado de quebrado, se multiplican entre sí todos los quebrados que expresan el dado.*

108. 2.° caso. *Para multiplicar un quebrado por un entero, ó lo que es igual* (**106**, corol. 3.°) *un entero por un quebrado, se multiplica el numerador por dicho número entero, dejando el mismo denominador* (**86**, 2.°), *ó se divide el denominador por el entero permaneciendo igual el numerador* (**86**, 3.°).

Observacion. El primero de estos procedimientos es general y fácil de aplicar á cualquier ejemplo, mas el segundo da

UNED

un resultado más sencillo, siempre que el denominador del quebrado sea divisible por el entero, y es por lo tanto preferible en este caso al anterior. Así

$\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{5}{6 \cdot 2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

109. 3.er CASO. *Para multiplicar números mistos se reducen primeramente á quebrados* (**84**), *y luego se ejecuta la operacion como se ha manifestado para el primero ó segundo caso.*

EJEMPLOS.

1.° $3\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{11}{4} = \frac{77}{8} = 9\frac{5}{8}$.

2.° $\frac{3}{5} \times 6\frac{1}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{49}{8} = \frac{147}{40} = 3\frac{27}{40}$.

3.° $2\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

4.° $4\frac{2}{3} \times 5 = \frac{14}{3} \times 5 = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$.

5.° $8 \times 5\frac{7}{9} = 8 \times \frac{52}{9} = \frac{416}{9} = 46\frac{2}{9}$.

OBSERVACION. Cuando uno de los factores es entero y el otro número misto, se ejecuta la operacion con más brevedad multiplicando separadamente las dos partes del misto por el entero, y sumando estos productos.

Sea, por ejemplo, multiplicar $136\frac{1}{2}$ por 73; la operacion se dispone y ejecuta de este modo:

$$\begin{array}{r} 136\frac{1}{2} \\ 73 \\ \hline 408 \\ 952 \\ 36\frac{1}{2} \\ \hline \text{Resultado:} \quad 9964\frac{1}{2} \end{array}$$

PROBLEMAS.

1.° $\frac{4}{5}$ de arroba de azúcar, á razon de 39 reales arroba ¿cuánto importan?

$\frac{4}{5} \times 39 = \frac{156}{5} = 31\frac{1}{5}$. Resultado: 31 reales y $\frac{1}{5}$ de real.

2.° $12\frac{2}{3}$ varas de paño, á razon de $20\frac{1}{4}$ reales vara, ¿cuánto importan?

$$12\frac{2}{3}\times 20\frac{1}{4}=\frac{38}{3}\times\frac{81}{4}=\frac{3078}{12}=256\frac{1}{2}.$$

Resultado: $256\frac{1}{2}$ reales.

ARTICULO VIII.

Division de los quebrados.

110. La division de los quebrados comprende cuatro casos: 1.° *dividir un quebrado por otro:* 2.° *dividir un quebrado por un entero:* 3.° *dividir un entero por un quebrado:* 4.° *dividir números mistos.*

111. 1.er caso. Sea dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{7}$, como el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo (**61**), dicho cociente es el producto del dividendo por el divisor invertido, esto es, $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$; pues este producto multiplicado por $\frac{5}{7}$ es igual al dividendo $\frac{2}{3}$ (**105**, corol.); en efecto

$$\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}.$$

Luego *para dividir un quebrado por otro se multiplica el dividendo por el divisor invertido: ó lo que es igual, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, siendo el primero de estos productos el numerador y el segundo el denominador del cociente buscado.* De modo que

$$\frac{4}{5}:\frac{10}{11}=\frac{44}{50}=(\mathbf{95})\frac{22}{25}.$$

Corolario. *Para dividir dos quebrados de igual denominador basta dividir el numerador del dividendo por el numerador del divisor.* En efecto

$$\frac{3}{7}:\frac{5}{7}=\frac{3\times 7}{5\times 7}=\frac{3}{5}.$$

112. 2.° caso. *Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero, permaneciendo el mismo el numerador* (**86**, 4.°); *ó se divide el numerador por el entero, dejando el mismo denominador* (**86**, 5.°).

Observacion. El primero de estos procedimientos es general

UNED

y fácilmente aplicable á cualquier ejemplo: el segundo da un resultado más sencillo, siempre que el numerador sea divisible por el entero, y es preferible en este caso al anterior. Así

$$\frac{5}{9}:4=\frac{5}{36}\,; \qquad \frac{8}{11}:2=\frac{4}{11}.$$

113. 3.er CASO. Sea dividir 9 por $\frac{5}{7}$; poniendo al entero por denominador la unidad (**85**, 1.ª) se convierte la operacion en

$$\frac{9}{1}:\frac{5}{7}=(\mathbf{111})\frac{9\times7}{5}.$$

Luego *para dividir un entero por un quebrado se multiplica el denominador de este por el entero, y al producto se le pone por denominador el numerador del quebrado.*

De modo que

$$6:\frac{3}{4}=\frac{6\times4}{3}=\frac{24}{3}=8.$$

COROLARIO. *El cociente de la unidad por un quebrado es igual al mismo quebrado invertido;* en efecto

$$1:\frac{5}{7}=\frac{1\times7}{5}=\frac{7}{5}.$$

114. 4.° CASO. *Para dividir números mistos se reducen á quebrados, y luego se ejecuta la operacion que corresponde, segun las reglas dadas para los casos precedentes.*

EJEMPLOS.

1.° $5\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}=\frac{11}{2}:\frac{7}{4}=\frac{44}{14}=3\frac{2}{14}=3\frac{1}{7}.$

2.° $\frac{2}{3}:8\frac{1}{5}=\frac{2}{3}:\frac{41}{5}=\frac{10}{123}.$

3.° $4\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{14}{3}:\frac{3}{4}=\frac{56}{9}=6\frac{2}{9}.$

4.° $7:3\frac{1}{2}=7:\frac{7}{2}=\frac{14}{7}=2.$

5.° $6\frac{1}{3}:4=\frac{19}{3}:4=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}.$

OBSERVACION. Como el producto de un número cualquiera por un quebrado propio es menor que el multiplicando, segun la definicion de la multiplicacion (**46**), resulta tambien (**61**), que cuando el divisor es un quebrado propio, el cociente es mayor que el dividendo.

PROBLEMAS.

1.° $\frac{3}{4}$ de arroba de azúcar costaron 32 reales, ¿á cuánto salió la arroba?

$$32 : \frac{3}{4} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}.$$

Resultado: 42 reales $\frac{2}{3}$ de real.

2.° 6 artesanos se comprometieron á hacer $76\frac{4}{5}$ varas de pared, ¿cuántas tiene que hacer cada uno?

$$76\frac{4}{5} : 6 = \frac{384}{5} : 6 = \frac{384}{30} = 12\frac{24}{30} = 12\frac{4}{5}.$$

Resultado: 12 varas $\frac{4}{5}$ de vara.

3.° $16\frac{1}{2}$ varas de terciopelo costaron $1167\frac{3}{8}$ reales ¿á cuánto salió la vara?

$$1167\frac{3}{8} : 16\frac{1}{2} = \frac{9339}{8} : \frac{33}{2} = \frac{18678}{264} = 70\frac{198}{264} = 70\frac{3}{4}.$$

Resultado: $70\frac{3}{4}$ reales la vara.

OBSERVACION GENERAL.

115. Las reglas dadas para las diferentes operaciones que se ejecutan con los quebrados, se fundan en los principios consignados en el número **86.**

Si, pues, hacemos ver que estos principios son ciertos para las divisiones indicadas, á que darémos el nombre general de *quebrados*, cualesquiera que sean los términos de estos y las cantidades que los multipliquen ó dividan, las reglas expuestas serán tambien generales.

Generalizacion y demostracion del segundo principio indicado.

Multiplicando el numerador de un quebrado, cuyos términos puedan á su vez ser quebrados, por un número cualquiera, el valor del quebrado queda multiplicado por este mismo número.

Sea $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}}$ el quebrado, y $\frac{11}{9}$ el número por el que se ha de multiplicar el numerador, digo que

$$\frac{\frac{3}{5} \times \frac{11}{9}}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}} \times \frac{11}{9}.$$

La primera de estas operaciones equivale (**105**) á

$$\frac{\frac{3\times11}{5\times9}}{\frac{7}{4}} = \frac{3\times11}{5\times9} : \frac{7}{4} = (\mathbf{111})\ \frac{3\times11\times4}{5\times9\times7}.$$

La segunda equivale (**111**) á

$$\frac{3\times4}{5\times7}\times\frac{11}{9} = (\mathbf{105})\ \frac{3\times4\times11}{5\times7\times9} = (\mathbf{54})\ \frac{3\times11\times4}{5\times9\times7}.$$

Estos dos resultados son iguales, luego la igualdad anterior es verdadera; y como lo mismo se hubiera demostrado, sí el denominador, numerador ó cantidad por que este se multiplica fuese un entero, el principio queda demostrado.

Con un razonamiento análogo se probaria que los principios del número **86**, enunciados con la misma generalidad que el precedente, son verdaderos.

Luego *las reglas dadas para las diferentes operaciones de los quebrados son generales.*

ARTICULO IX.

Valuacion de los quebrados ordinarios.

116. VALUAR UN QUEBRADO *es determinar su valor en unidades inferiores de una denominacion concreta* (*).

Sea valuar, por ejemplo, el quebrado $\frac{3}{8}$ de duro, esto es, hallar su valor en reales y maravedises. Como un duro tiene 20 reales, para determinar los reales que tiene el quebrado propuesto basta multiplicar el numerador 3 por 20 y partir el producto 60 por el denominador 8. De modo que

$$\frac{3}{8} \text{ de duro} = \frac{3\times20}{8} \text{ rs.} = \frac{60}{8} \text{ rs.} = 7\,\frac{4}{8} \text{ de real.}$$

(*) Esta operacion se llama tambien *reduccion de un quebrado de especie superior á complejo.*

UNED

Ahora, para hallar el valor de $\frac{4}{8}$ de real en maravedises, se procede de una manera análoga á la anterior, multiplicando el numerador 4 por 34 maravedises que el real contiene, y partiendo el producto por el mismo denominador 8. Así

$$\frac{4}{8} \text{ rs.} = \frac{4 \times 34}{8} \text{ mrs.} = \frac{136}{8} \text{ mrs.} = 17 \text{ mrs.}$$

De suerte que $\frac{3}{8}$ de duro equivalen á 7 reales y 17 maravedises.

117. De este procedimiento, que es aplicable á cualquier otro ejemplo, se deduce la siguiente regla:

Para valuar un quebrado ordinario se multiplica el numerador por el número de veces que la unidad á que se refiere el quebrado contiene la inferior inmediata, este producto se divide por el denominador, y el cociente entero es el número de unidades de superior especie que el quebrado contiene: el residuo se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene á la de especie inferior inmediata: el producto se divide por el mismo denominador, y el cociente entero es el número de unidades de segunda especie que contiene el quebrado; y así se continúa hasta que se halle cociente exacto, ó se llegue á la ínfima especie.

La operacion se ordena de este modo:

3 duros 20	
60 reales 4 reales 34	8 7 rs., 17 mrs.; resultado pedido.
136 mrs. 56 0	

OBSERVACIONES.

118. 1.ª *Si el quebrado que ha de valuarse fuere impropio, se divide desde luego el numerador por el denominador y se continúa la valuacion como en el caso anterior.*

UNED

Sea valuar $\frac{17}{3}$ de arroba.

17 arrobas	3
2 arrobas	5 arr., 16 lib., 10 onz., 10 adar., 2 tom.; resultado pedido.
25	
50 libras	
20	
2 libras.	
16	
32 onzas.	
2 onzas.	
16	
32 adarmes	
2 adarmes	
3	
6 tomines	
0	

Valúese, por último, el quebrado $\frac{4}{9}$ de cántara.

4 cántaras	
8	
32 azumbres	9
5 azumbres	3 azum., 2 cuart., $\frac{8}{9}$ de copa; resultado pedido.
4	
20 cuartillos	
2 cuartillos	
4	
8 copas.	

2.ª Cuando, como en este ejemplo, despues de llegar á la ínfima especie usual resulta quebrado, puede hacerse desaparecer despreciándole, si el numerador no llega á la mitad del denominador, ó añadiendo en vez de él una unidad á las unidades á que se refiere, si llega ó pasa de dicha mitad.

Así que, el resultado anterior puede considerarse tambien igual á 3 azumbres, 2 cuartillos y 1 copa.

UNED

CAPITULO IV.

Quebrados decimales.

ARTICULO PRIMERO.

Numeracion.

119. Si una unidad se considera dividida en 10 partes iguales, estas partes se llaman *décimas*: si se considera dividida en 100 partes, se llaman *centésimas:* si en 1000, se llaman *milésimas:* si en 10000, *diezmilésimas:* si en 100000, *cienmilésimas:* si en 1000000, *millonésimas*, y así sucesivamente. Las décimas, centésimas, milésimas, etc., se llaman tambien *unidades* DECIMALES *de primero, segundo, tercero*, etc. órden.

Segun esto, una unidad de un órden decimal cualquiera contiene diez del órden inferior inmediato: del mismo modo que una unidad de un órden cualquiera de los enteros contiene tambien diez del inmediato inferior (**23**). Así que: *una unidad* entera tiene *diez décimas*, una *décima* diez *centésimas*, una *centésima* diez *milésimas*, etc.; del mismo modo que un millar contiene diez centenas, una centena diez decenas y una decena diez unidades (**21**).

Se llama QUEBRADO DECIMAL *una totalidad de partes ó unidades decimales.* La *denominacion* de estos quebrados es regular y sistemática. Domina en ellos el mismo sistema decenario que en los enteros.

120. De la relacion que existe entre las partes decimales que forman los quebrados del mismo nombre, se infiere que estos pueden expresarse de palabra ó por escrito de igual modo que los números enteros (**21** y **23**), con solo la diferencia de manifestar al fin el nombre del último órden decimal, cosa que en los enteros es innecesaria, atendiendo á que el órden inferior es en ellos constante é igual á las unidades sencillas. De modo que, por ejemplo, 4 décimas, 7 centésimas y 8 mi-

UNED

lésimas, se expresan por 478 *milésimas*, así como 5 centenas, 9 decenas y 8 unidades, representan 598 unidades.

Puede evitarse en la escritura de los quebrados decimales el escribir al fin la especie de la última cifra, recordando que en los enteros (**23**) á medida que una cifra avanza un lugar hácia la izquierda, se hace diez veces mayor, y que por consiguiente se hace tambien diez veces menor por cada lugar que retrocede hácia la derecha. Si, pues, se fija el lugar de las unidades escribiendo *cero* en lugar de ellas, y un signo convencional despues, como una *coma*, por ejemplo, la cifra que se coloque á la derecha de la coma expresará un órden de unidades diez veces menores que las unidades sencillas, esto es, expresará *décimas* ó unidades decimales de primer órden, la que se coloque en el segundo lugar *centésimas* ó unidades decimales de segundo órden, etc.

Luego *para escribir los quebrados decimales, se señala el lugar de las unidades con un cero y una coma despues de él, y se coloca la cifra que representa las* décimas *en el primer lugar á la derecha de las unidades ó de la coma, la que expresa* centésimas *en el segundo, la que* milésimas *en el tercero, etc.; de modo que cada cifra debe ocupar un lugar igual al órden de unidades decimales que representa, contando estos lugares desde la coma hácia la derecha.*

Así 3 décimas, 5 centésimas y 6 milésimas, ó 356 milésimas, se escribe: 0,356.

El cero sirve, lo mismo que en los enteros, para ocupar el lugar de algun órden intermedio de unidades decimales que falte en el número que se escribe. De modo que 4 centésimas y 7 diezmilésimas, ó 407 diezmilésimas, se escribe: 0,0407.

Cuando el número sea misto, es decir, tenga enteros y decimales, no se necesita escribir cero en lugar de las unidades, sino que se pondrá la coma despues de estas.

Así, 46 enteros, 1 décima y 3 centésimas, ó sea 46 enteros y 13 centésimas, se escribe: 46,13.

A veces se refieren á la última denominacion decimal los mismos enteros que acompañan al quebrado: así, 72 décimas se escribe: 7,2.

121. *Los quebrados decimales se leen como si fueran nú-*

UNED

meros enteros, expresando al fin el órden decimal á que corresponde la última cifra.

El quebrado 0,73506 se lee: setenta y tres mil quinientas seis cienmilésimas.

Si el número fuese misto, la parte entera se lee como los números enteros, y la decimal como se acaba de indicar.

Tambien estos números mistos pueden leerse como si formasen solo un número entero, expresando al fin el órden decimal á que corresponde la última cifra.

Así, 74,36 se lee: setenta y cuatro enteros y treinta y seis centésimas, ó siete mil cuatrocientas treinta y seis centésimas.

122. Pueden tambien escribirse los quebrados decimales en forma de quebrados comunes. Sea, por ejemplo, el quebrado 0,051: una milésima es $\frac{1}{1000}$; luego

$$0{,}051 = \frac{51}{1000}.$$

Del mismo modo

$$47{,}39 = 47 + 0{,}39 = 47 + \frac{39}{100} = (\mathbf{84})\ \frac{4739}{100}.$$

Luego *para reducir un quebrado decimal, escrito en forma de entero, á quebrado ordinario, se pone por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya á la derecha de la coma, y por numerador el número entero formado por las cifras decimales; ó si el número dado fuese misto de entero y decimal, y se quisiere escribir en forma de quebrado impropio, se pondrá por numerador el número propuesto omitiendo la coma.*

123. Recíprocamente, una vez que

$$\frac{4739}{100} = 47{,}39 \text{ y } \frac{51}{1000} = 0{,}051$$

Para reducir un quebrado decimal escrito en forma de ordinario, á quebrado decimal escrito en forma de entero, ó lo que es igual, para dividir un entero por la unidad seguida de ceros, se separan con una coma de derecha á izquierda tantas cifras del numerador ó del dividendo como ceros acompañen á la unidad; y si no hubiese bastantes cifras que separar, se suplirán con ceros á la izquierda.

UNED

ARTICULO II.

Propiedades de los números decimales (*).

124. El valor relativo de las cifras que forman un número decimal depende solo del lugar que cada una ocupa respecto de la coma, ó de las unidades: así el número no varía no alterándose dicha colocacion; mas por cada lugar que la coma avanza hácia la derecha, el valor de cada cifra se hace diez veces mayor, sucediendo lo contrario cuando la coma retrocede hácia la izquierda. De donde se infiere que

1.° *Un número decimal no varía poniendo ó quitando ceros á continuacion de las cifras significativas.* Así

$$34,4=34,400.....$$

2.° *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañan á la unidad; y si no hubiese bastantes cifras á la derecha de la coma, se suplirán con ceros.* Así

$$7,451\times100=745,1 \qquad 7,451\times1000=7451$$
$$7,451\times10000=74510.$$

3.° *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros acompañen á la unidad; y si no hubiere bastantes cifras á la izquierda de la coma, se suplirán con ceros, puestos tambien á la izquierda de los enteros.* Así

$$658,45:100=6,5845 \qquad 658,45:1000=0,65845$$
$$658,45:10000=0,065845.$$

Observacion. Todo número entero se puede poner en forma de número decimal colocando á la derecha de las unidades una coma, y despues de esta los ceros que se quiera. Así

$$372=372,00.....$$

(*) Bajo la denominacion genérica de *número decimal* se comprenden los quebrados decimales y los números mistos ó formados por un entero y un quebrado decimal.

ARTÍCULO III.

Adicion de los números decimales.

125. Segun se ha visto (**120**), los diferentes órdenes de unidades de un número decimal estan sujetos á la misma ley de composicion que los números enteros; de donde se infiere que la adicion y áun la sustraccion de los decimales se puede verificar por las mismas reglas que iguales operaciones con los enteros.

Luego *la adicion de los números decimales se verifica sumando, como en los enteros, las unidades de un mismo órden principiando por el inferior, y la coma se escribe en la suma en el lugar correspondiente.*

La operacion se ordena, para no equivocarse, colocando los sumandos unos debajo de otros, de manera que las comas esten en columna.

Así, 37,5+125,46+8342,05+0,439+2,64 se suman de este modo:

37,5
125,46
8342,05
0,439
2,64
Suma. . . . . 8508,089.

PROBLEMA.

Un comerciante compra por una parte 56,4 metros de paño, por otra 134,65, por otra 7,46, por otra 72,136 y por otra 0,75, y desea averiguar el total de metros comprados.

56,4
134,65
7,46
72,136
0,75
Resultado: 271,396 metros.

UNED

ARTICULO IV.

Sustraccion de los números decimales.

126. *Para restar números decimales se rebajan, como en los enteros, los diferentes órdenes de unidades del sustraendo de sus correspondientes del minuendo, principiando por el inferior; y la coma se escribe en el resto en el lugar correspondiente.*

Para no equivocarse se ordena la operacion colocando el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las comas esten en columna.

Así, 45,76 — 7,28 se restan de este modo:

	45,76
	7,28
Resto.	38,48.

Si minuendo y sustraendo no tuvieren igual número de cifras decimales, se igualarán con ceros á la derecha; lo que no altera el valor de los datos (**124**, 1.°).

EJEMPLOS.

1.° Restar 0,1765 de 0,46.

0,4600	
0,1765	
0,2835	

2.° Restar de 13,5074 la cantidad de 6,85.

13,5074	
6,8500	
6,6574	

De una saca de 5,7 quintales de arroz se sacaron 2,45 quintales, ¿cuántos quedaron en ella?

	5,70	
	2,45	
Resultado:	3,25	quintales.

ARTICULO V.

Multiplicacion de números decimales.

127. En la multiplicacion de números decimales se pueden distinguir tres casos: 1.° *multiplicar un número decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros*; 2.° *multiplicar un número decimal por un entero, ó lo que es lo mismo, un entero por otro decimal*; 3.° *multiplicar un número decimal por otro decimal.*

128. 1.er CASO. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros acompañan á la unidad* (**124**, 2.°).

129. 2.° CASO. Háyase, por ejemplo, de multiplicar 17,54 por 13. Si prescindimos de la coma en el número decimal, se convertirá la operacion en multiplicar 1754 por 13; mas la supresion de la coma en el factor decimal equivale á correrla dos lugares á la derecha, y por consiguiente á multiplicarle por 100 (**124**, 2.°); luego el producto de 1754 por 13, ó sea 22802, es (**106**, obs.) 100 veces mayor de lo que le corresponde: luego haciéndole 100 veces menor ó separando las dos últimas cifras de la derecha con la coma (**124**, 3.°) se convertirá en el producto buscado; luego dicho producto es 228,02.

Como en cualquier otro ejemplo se puede hacer un raciocinio análogo al anterior, se deduce que

Para multiplicar un número decimal por un entero se prescinde de la coma, se hace la multiplicacion como si fuesen ambos factores números enteros, y luego se separan de derecha á izquierda tantas cifras como decimales habia en el factor que las llevaba.

EJEMPLOS.

1.° Multiplicar 47 por 3,51.

	3,51
	47
	24 57
	140 4
Producto buscado:	164,97

2.° Multiplíquese 0,00035 por 124.

124
0,00035
620
372

Resultado: 0,04340 ó 0,0434 (**124**, 1.°)

130. 3.er caso. Si hubiésemos de multiplicar 13,42 por 5,4 prescindiriamos de la coma en el multiplicando y multiplicador, lo que equivaldria á multiplicar el primero por 100 y el segundo por 10 (**124**, 2.°); luego el producto 72468, así obtenido, sería (**106**, obs.) 1000 veces mayor de lo que le corresponde; separando, pues, las tres cifras últimas con una coma (**124**, 3.°) se convertirá en 72,468, producto buscado.

Luego *para multiplicar un número decimal por otro decimal, se prescinde de las comas, se hace la multiplicacion como si fuesen enteros, y en el producto se separan de derecha á izquierda tantas cifras como decimales habia en ambos factores.*

EJEMPLOS.

1.° Multiplicar 18,36 por 0,34.

18,36
0,34
73 44
5,50 8

Resultado: 6,24 24

2.° Multiplíquese 0,0072 por 1,23.

1,23
0,0072
246
861

Resultado: 0,008856.

UNED

PROBLEMA.

Un comerciante compró 96,24 kilógramos de té á 90,5 reales kilógramo, ¿cuál es el importe total?

96,24
90,5
48 120
8661 6

Resultado: 8709,720 rs. ú 8709,72 rs.

ARTICULO VI.

Division de los números decimales.

131. En la division de los números decimales se pueden tambien distinguir tres casos: 1.° *dividir un número decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros:* 2.° *dividir un número decimal por un entero:* 3.° *dividir un número decimal por otro decimal.*

132. 1.er CASO. *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros acompañen á la unidad* (**124**, 3.°).

EJEMPLOS.

1.° 375,18 : 100 = 3,7518. 2.° 1,465 : 1000 = 0,001465.

133. 2.° CASO. Como los diferentes órdenes de unidades de un número decimal estan subordinados á la misma ley de composicion que los números enteros (**120**), la division en este caso se verifica, con leve diferencia, como si ambos términos fuesen enteros.

Si hubiésemos de dividir, por ejemplo, 4876,872 por 78, dividiriamos primero las 4876 unidades por 78, y 62 sería la parte entera del cociente. Para hallar la parte decimal observariamos que las 40 unidades del último resto de los enteros equivalen á 400 décimas, que con las 8 del dividendo forman 408; dividiendo ahora las 408 décimas por el divisor, el cociente 5 serán 5 décimas, que para que ocupen el lugar que les corresponde en el cociente debemos escribir una coma despues

UNED

de las unidades y colocarlas á la derecha de ella; y se continúa la operacion como si se dividiesen números enteros.

Luego *para dividir un número decimal por un entero se ejecuta la division como si el dividendo fuese tambien número entero; pero tan luego como la primera cifra decimal forme parte de un dividendo, se pone coma en el cociente ántes de ejecutar la division parcial.*

EJEMPLOS.

1.° Ejecútese la division anterior.

La operacion se ordena del modo siguiente:

4876,872	78
196	62,524
40 8	
1 87	
312	
0	

2.° Dividir 35,426 por 218.

35,426	218
13 62	0,162
546	
110	

Como el dividendo es menor que el divisor, puesto que el primero vale ménos de 36 unidades, y el segundo son 218, el cociente no tiene parte entera; se escribe por lo mismo cero en lugar de las unidades, y una coma despues de ellas. Tomando ahora por primer dividendo parcial las tres primeras cifras del dividendo, que son 354 décimas, y dividiendo este número por el divisor, el cociente 1 son las décimas, ó la primera cifra del cociente. La operacion se continúa despues del mismo modo que en los números enteros; advirtiendo que el quebrado $\frac{110}{218}$ que completaria el cociente, expresa partes de la unidad del último órden decimal, es decir $\frac{110}{218}$ de milésima.

3.° Sea dividir 0,34589 por 57.

0,34589	57
389	0,00606
47	

UNED

Como aquí tienen que formar el primer dividendo parcial las tres cifras 345 del dividendo, y estas tres cifras expresan *milésimas*, se escribe cero y coma en el cociente, y despues de la coma otros dos ceros para que la primera cifra 6 del cociente ocupe el lugar que le corresponde, que es el de las *milésimas*. La division se continúa despues como si se dividiesen números enteros, teniendo tambien presente que el quebrado que completa el cociente es $\frac{47}{57}$ de cienmilésima.

134. Luego *cuando el dividendo es menor que el divisor se pone en el cociente cero y coma, y despues de esta los ceros que sean necesarios para que la primera cifra del cociente ocupe el lugar que le corresponde; esto es, se escriben despues de la coma tantos ceros ménos uno como cifras decimales se necesite tomar para el primer dividendo parcial.*

135. 3.er CASO. Sea dividir 38,272 por 5,2.

Si multiplicamos dividendo y divisor por 10, como el cociente de toda division es un quebrado, y un quebrado no varía de valor multiplicando sus dos términos por un mismo número (**115**), tampoco varía el cociente; en cuyo caso la operacion se convierte en dividir 382,72 por 52.

Si hubiésemos de dividir 748 por 5,329, multiplicando ambos términos por 1000, la operacion se convertiria en la division de 748000 por 5329.

Como lo mismo puede hacerse en cualquier otro ejemplo, resulta que

Para dividir un número entero ó decimal por otro decimal, se multiplican ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, lo que sin alterar el cociente, reduce este caso al anterior ó á la division de números enteros.

OBSERVACIONES.

136. 1.ª En la division de decimales, cuando el cociente no es exacto, el error que se comete, tomándole por tal, es menor que una unidad del último órden decimal de dicho cociente.

Así, en el 2.º ejemplo del número **133**, el cociente completo sería $0,162+\frac{110}{218}$ de milésima; mas valiendo el quebrado

$\frac{110}{218}$ menos de una unidad, el error que se comete omitiéndole es menor tambien que una milésima.

2.ª Como un número decimal no varía poniendo ceros á continuacion de las cifras significativas (**124**, 1.º), y como por cada cero que se escribe resulta una cifra decimal más en el cociente, se deduce que este se puede aproximar al verdadero tanto como se quiera (*).

Si en el ejemplo 3.º del 2.º caso, quisiéramos hallar más aproximacion en el cociente, añadiriamos un cero al último resto 47, y dividiendo 470 por 57, el cociente sería la cifra de las millonésimas: así se podria continuar añadiendo un cero al último resto por cada cifra decimal que se quisiese obtener.

3.ª Pudiendo considerar á todo número entero como una fraccion decimal (**124**, obs.), *para aproximar por decimales un cociente inexacto de números enteros, basta escribir una coma despues del cociente entero y agregar un cero al último resto, y sucesivamente otro á cada uno de los que despues vayan resultando.*

Sea la division de 428 por 17; despues de hallar el cociente entero 25, se pone una coma á continuacion, se agrega un cero al último resto 3, y el número 30 se divide por el mismo divisor 17; al resto se agrega otro cero, y el cociente de dividirle por 17 se escribe á la derecha del cociente anterior 1, y así se prosigue como se ve á continuacion:

428	17
88	25,176.....
30	
130	
110	
8	

Corolario. *Para convertir un quebrado ordinario en quebrado decimal, se considera aquel quebrado como una division indicada del numerador por el denominador* (**83**), *y el cociente se aproxima por decimales, como se ha visto en la division anterior.*

(*) Los casos en que no es exacta la operacion continuándola suficientemente, se verán en el complemento, núm **195.**

PROBLEMA.

Un comerciante compró en 678,492 escudos 96,24 libras de té, ¿á cómo costó la libra?

67849,2	9624
481 20	7,05
0	

Resultado: 7,05 escudos.

ARTICULO VII.

Valuacion de los quebrados decimales.

137. Sea valuar el quebrado 0,53 de hora, esto es (**116**), hallar los minutos, segundos, etc., que contiene. Teniendo la hora 60 minutos, para averiguar los minutos que comprende el quebrado dado no hay más que multiplicarle por 60. Así, 0,53 de hora = 0,53 × 60 minutos = 31,80 minutos = 31 minutos y 0,8 de minuto. Para determinar ahora los segundos que este último quebrado contiene, basta multiplicarle tambien por 60. De modo que 0,8 de minuto = 0,8 × 60 segundos = 48 segundos.

El quebrado 0,53 de hora equivale, pues, á 31 minutos y 48 segundos. De este procedimiento se deduce que

Para valuar un quebrado decimal, se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene la inferior inmediata, y se hace igual operacion con los quebrados que vayan resultando, hasta que desaparezca el quebrado ó se llegue á la especie ínfima.

La operacion se puede ordenar de este modo (repitiendo el ejemplo anterior):

0,53 horas
60

31,80 minutos
60

48,00 segundos.

UNED

Valúese el quebrado 0,46 de vara.

0,46 varas
3
1,38 pies
12
76
3 8
4,56 pulgadas
12
1 12
5 6
6,72 líneas.

Resultado: 1 pie, 4 pulgadas, 6 líneas y 0,72 de línea.

Observacion. Cuando, como en este último caso, despues de llegar á la ínfima especie usual, resulte quebrado, puede hacerse desaparecer despreciándole si no llega á 5 décimas, ó añadiendo en lugar de él una unidad á las unidades á que se refiere, si llega ó pasa de 5 décimas. Así que, en el ejemplo anterior puede decirse que el resultado es un pie, 4 pulgadas y 7 líneas.

CAPITULO V.

Números complejos.

ARTICULO I.

Reduccion de un número complejo á incomplejo de una cualquiera de sus especies distinta de la inferior.

138. Trátase, por ejemplo, de reducir á meses el complejo de 15 años, 7 meses y 14 dias (*).

(*) Los números del nuevo sistema de pesos y medidas, cuyos múltiplos y divisores se ajustan á la numeracion decimal, se consideran como incomplejos. Así, 4 hectólitros, 5 decálitros y 7 decilitros, que se pueden expresar por 450,7 litros, ó 407 decilitros, etc., forman un número incomplejo.

UNED

Reduciendo dicho número á dias (**60**, 2.°), y poniendo al resultado 5624 dias por denominador 30, que es el número de dias que tiene el mes (comercial), el quebrado $\frac{5624}{30}$ meses será el incomplejo buscado.

Luego *para reducir un número complejo á incomplejo de una especie cualquiera distinta de la inferior, se reduce primero á esta* (*), *y al resultado se le pone por denominador el número de veces que la unidad de especie inferior está contenida en aquella á que quiere reducirse el complejo.*

139. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos, enteros ó quebrados, se ejecutan reduciendo, segun las reglas que preceden, los datos á incomplejos de la especie conveniente.

Esta regla general, aunque sencilla en teoría, no lo es igualmente en la práctica; por lo mismo vamos á exponer otras especiales para cada una de las indicadas operaciones (**).

ARTICULO II.

Adicion de los números complejos.

140. *Para sumar los números complejos se suma cada especie de unidades separadamente; de modo que se ejecutan tantas adiciones parciales como especies distintas contengan los sumandos. La operacion se principia por la especie inferior, se continua por la superior inmediata y así sucesivamente; á fin de que si en alguna suma parcial resultan unidades de la especie superior siguiente, se lleven para agregarlas á esta.*

EJEMPLOS.

1.° Súmense 13 dias, 7 horas y 4 minutos; con 2 dias, 18 horas y 13 minutos; con 10 dias, 20 horas y 36 minutos.

(*) Los números complejos se reducen á incomplejos de la especie inferior como se ve en el número **60**, problema 2.°

(**) La sencillez de la mayor parte de estas reglas y la analogía que guardan con las correspondientes á los números incomplejos, hacen innecesario en muchos casos el método analítico que nos hemos propuesto seguir.

UNED

La operacion se ordena del modo siguiente:

$\overset{1}{13}$ dias,	7 horas,	4 minutos.
2	18	13
10	20	36

Resultado: 26 dias, 21 horas, 53 minutos.

Se suman los minutos y luego las horas; mas como la suma 45 de estas compone 1 dia y 21 horas, se escribirán estas y se lleva 1 para sumar con los dias; sumando despues los dias, queda terminada la operacion.

2.°	10 duros,	13 reales,	$24\frac{2}{3}$ mrs..... $\frac{8}{12}$
	9	12	16
	416	»	$4\frac{1}{2}$ ..... $\frac{6}{12}$
	18	8	$15\frac{3}{4}$ ..... $\frac{9}{12}$
	6	15	» $\frac{5}{6}$ ..... $\frac{10}{12}$

Resultado: 461 duros, 9 reales, $27\frac{3}{4}$ mrs.

Al sumar los maravedises, en este último ejemplo, como son números mistos, se ejecutará la operacion segun se ha dicho (**98**) en la adicion de estos.

ARTICULO III.

Sustraccion de los números complejos.

141. *Para restar números complejos se restan las unidades de la misma especie; de modo que se ejecutan tantas sustracciones parciales como especies distintas contengan los datos. Si al ejecutar alguna de estas operaciones el sustraendo parcial fuese mayor que el minuendo, se agregan á este tantas unidades de su especie como contenga una de la superior inmediata, y se añadirá otra unidad al sustraendo inmediato superior; por cuya causa se da principio á la operacion por las unidades de especie inferior, se continua por la superior inmediata y así sucesivamente.*

UNED

EJEMPLOS.

1.° De 18 fanegas, 3 celemines y 2 cuartillos réstense 11 fanegas, 10 celemines y 1 cuartillo.

La operacion se ordena de este modo:

18 fanegas,	3 celemines,	2 cuartillos.
11	10	1
Resultado: 6 fanegas,	5 celemines,	1 cuartillo.

Despues de restar de 2 cuartillos 1 cuartillo, se pasa á hacer igual operacion con los celemines; mas de 3 no se pueden restar 10, por cuya razon se agrega al minuendo una fanega descompuesta en celemines, que con los 3 forman 15; de esta suma se restan los 10 del sustraendo, y en la siguiente operacion parcial se agrega otra fanega á las 11 del sustraendo.

2.° 13 varas, menos 7 varas, 2 pies y 10 $\frac{1}{2}$ pulgadas, ¿cuánto componen?

13 varas,	0 pies,	0 pulgadas.
7	2	10 $\frac{1}{2}$
Resultado: 5 varas,	0 pies,	1 $\frac{1}{2}$ pulgadas.

3.° ¿Qué edad tenia en 13 de Febrero de 1869 un sujeto que nació en 10 de Octubre de 1781?

Tiempo trascurrido hasta la época á que se refiere la pregunta.	1868 años,	1 mes,	13 dias.
Tiempo trascurrido hasta el nacimiento del sujeto. . .	1780	9	10
Diferencia ó edad pedida. .	87 años,	4 meses,	3 dias.

ARTICULO IV.

Multiplicacion de los números complejos.

142. En la multiplicacion de números complejos se suelen distinguir dos casos: 1.° *multiplicar un número complejo por otro incomplejo:* 2.° *multiplicar un número cualquiera complejo é incomplejo por otro complejo.*

UNED

Método ordinario.

143. 1.er CASO. *Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplican las especies de unidades del multiplicando por el multiplicador: de modo que se ejecutan tantas multiplicaciones parciales como especies distintas contiene el primero. La operacion se principia por la especie inferior, se continúa por la superior inmediata y así sucesivamente; á fin de que si de algun producto parcial resultan unidades de la especie superior siguiente, se reserven para agregarlas al producto de estas.*

EJEMPLOS.

1.° Una arroba de arroz costó 26 reales y 17 maravedises, ¿cuánto costarán 5 arrobas? (*)

La operacion se dispone como se ve á continuacion:

26 reales, 17 mrs.
5

Resultado: 132 reales, 17 mrs.

Se multiplican primero los 17 mrs. por el 5 multiplicador; y como el producto 85 compone 2 rs. y 17 mrs., se escriben estos, y los 2 rs. se llevan para agregarlos al producto de 26 reales por el mismo 5.

Cuando los productos parciales son complicados, la reduccion de unidades de especie inferior á la superior inmediata se efectúa despues, como se verá en los ejemplos que siguen:

2.° ¿Cuánto pesarán 72 fanegas de trigo, habiendo pesado 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas una fanega?

3 arrobas, 5 libras, 4 onzas.
72

Resultado: 216 arrobas, 360 libras, 288 onzas,
ó sea 231 arrobas, 3 libras, 0 onzas.

(*) Para distinguir en este ejemplo y siguientes el multiplicando del multiplicador, recuérdese lo dicho (**58**).

3.° Un azumbre de vino costó 6 reales y 12 maravedises, ¿cuánto costarán 10 cántaras?

Aquí debe primeramente reducirse el multiplicador á azumbres (**58**, obs.); y como 10 cántaras componen 80 azumbres, la operacion se ejecuta como se ve á continuacion:

	6 reales,	12 mrs.
	80	
Resultado:	480 reales,	960 mrs.,
ó sea	508 reales,	8 mrs.

4.° Una vara de paño costó 72 reales y 16 mrs., ¿cuánto costarán 10 tercias ó pies de la misma tela?

Reduciendo el multiplicador á varas (**58**, obs.), se convierte (**79**, 2.°) en $\frac{10}{3}$ de vara.

Luego el problema se resuelve como á continuacion se ve:

	72 reales,	16 mrs.
	$\frac{10}{3}$	
Producto por el numerador 10. . .	720	160
que dividido por el denominador 3 (**108**), da.	240 reales,	53 $\frac{1}{3}$ mrs.,
	ó sea 241 reales,	19 $\frac{1}{3}$ mrs.

5.° 17 pares de mulas emplearon 18 horas y 36 minutos en trasportar cierto número de fanegas de trigo. Para trasportar el mismo número de fanegas un par de mulas, ¿cuántas horas necesita?

Este problema y sus análogos no estan comprendidos en el que se ha dicho (**58**), que comunmente se resuelve en la multiplicacion de números concretos. Desde luego se observa, sin embargo, que si 17 pares de mulas tardan 18 horas y 36 minutos, un par tardará 17 veces más tiempo; luego será

	18 horas,	36 minutos.
	17	
	126	252
	18	36
Resultado:	306 horas,	612 minutos,
que equivale á	316 horas,	12 minutos.

UNED

144. 2.° CASO. *Para multiplicar un número complejo ó incomplejo por otro complejo, se reduce el multiplicador á incomplejo de aquella unidad cuyo valor es el multiplicando* (**58**, obs.), *y queda este caso convertido en el anterior ó en la multiplicacion de dos incomplejos.*

EJEMPLOS.

1.° 10 cahíces, 4 fanegas, y 3 celemines de trigo á 30 reales y 24 mrs. la fanega, ¿cuánto importan?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de fanega (**138**), se convierte en $\frac{1491}{12}$ de fanega; luego será

30 reales,	24 mrs.
$\frac{1491}{12}$	
44730	5964
	2982
Producto por el numerador 1491, ... 44730	35784
que dividido por el denominador 12, da ... 3727 reales,	2999 mrs.,
ó sea... 3815 reales,	7 mrs.

2.° 13 arrobas y 5 libras, á 16 reales libra, ¿cuánto importan?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de libra (**60**, 2.°), se convierte en 330 libras; luego será

16 reales.
330
48
48
Resultado: 5280 reales.

ARTICULO V.

Método de las partes alícuotas (*).

115 1.er CASO. **5 varas de paño á 26 reales y 17 mrs. la vara ¿cuánto importan?**

La resolucion de este problema se reduce á multiplicar 26 reales y 17 mrs. por 5 (**113**).

Es evidente que 26 reales $\times 5 = 130$ reales es el valor de las 5 varas de paño á 26 reales cada una. Ahora para multiplicar los 17 mrs. por el mismo 5, se discurre de este modo: si en lugar de 17 mrs. fuese 1 real el número por quien se ha de multiplicar el 5, el producto sería 5 reales; mas como 17 mrs. componen solo $\frac{1}{2}$ de real, dicho producto será la mitad de 5 reales, ó sea 2 reales y 17 mrs.

Luego el producto total se compone de 130 reales por una parte, y 2 reales y 17 mrs. por otra, ó lo que es igual, de 132 reales, 17 mrs.

La operacion se dispone para mayor sencillez como se ve á continuacion

	26 reales, 17 mrs.
	5
Producto por 26 reales.	130
—por $\frac{1}{2}$ de real ó sean 17 mrs.	2 17 mrs.
Resultado:	132 reales, 17 mrs.

2.° EJEMPLO. **Cuánto pesarán 72 fanegas de trigo, habiendo pesado 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas una fanega? (**).**

	3 arrobas, 5 libras, 4 onzas.	
	72	
Producto por 3 arrobas.	216 arrobas.	
—por $\frac{1}{5}$ de arroba ó sean 5 libras. .	14	10 libras
—*por $\frac{1}{5}$ de 5 libras ó sea 1 libra.* . .	2	22 *producto auxiliar*
—por $\frac{1}{4}$ de libra ó sean 4 onzas. . .		18
Resultado:	231 arrobas, 3 libras.	

Dispuesta la operacion como en el ejemplo 1.°, se multiplican las 3 ar-

---

(*) Se le da este nombre, porque para practicarle es preciso descomponer los números de las especies inferiores, que contienen los factores, en partes *alícuotas* (**62**) de la unidad de especie superior inmediata.

(**) Este problema y sus análogos se resuelven en la práctica con suma facilidad reduciendo el complejo á *cuarterones*, el que se convierte en 321: multiplicándole por 72, y separando con una coma las dos cifras de la derecha del producto 23112; de modo que el resultado es de 231,12 arrobas, ó, valuando (**137**) las 0,12 de arroba, 231 arrobas y 3 libras.

El procedimiento se funda en que la arroba tiene 100 cuarterones; luego reduciendo aquella á estos, un factor se hace 100 veces mayor; luego el producto 23112 será (**54**, corol. 1.°) 100 veces mayor de lo que le corresponde; luego separando las dos últimas cifras de la derecha (**124**, 3.°), quedará convertido en el verdadero.

UNED

robas por 72, y el producto parcial es 216 arrobas. Para multiplicar por 5 libras se observa, que si fuese por la arroba, el producto sería 72 arrobas, luego siendo por 5 libras, que forman $\frac{1}{5}$ de arroba, será $\frac{1}{5}$ de 72 arrobas, ó sea 14 arrobas y 10 libras.

Al multiplicar por 4 onzas se ve que este número es una parte alicuota muy complicada del factor anterior 5 libras; por lo tanto se halla el *producto auxiliar* por una libra, para lo que basta tomar $\frac{1}{5}$ de producto por 5 libras, lo que da 2 arrobas y 22 libras. Ahora como 4 onzas son $\frac{1}{4}$ de libra, se toma la cuarta parte de dicho producto auxiliar, y se tiene el correspondiente á 4 onzas, que es 18 libras.

Al sumar estos productos parciales se prescinde del producto por una libra, que solo se halló como *auxiliar* para determinar con mayor sencillez el de las 4 onzas. De modo que el resultado es

216 arr. + 14 arr. + 10 lib. + 18 lib. = 231 arr. y 3 lib.,

como en la resolucion que precede.

Del procedimiento empleado en los dos ejemplos anteriores se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplican las unidades de especie superior del multiplicando por el multiplicador; las de inferior especie se descomponen en PARTES ALÍCUOTAS *de la unidad de especie superior ó de otra cuyo producto correspondiente se halle determinado, y se toman iguales partes alicuotas del multiplicador ó de dicho producto conocido. La suma de los productos parciales, omitidos los auxiliares si los hay, será el producto total.*

3.° Un azumbre de vino costó 6 reales y 12 mrs., ¿cuánto costarán 10 cántaras?

Reduciendo las cántaras á azumbres (**60**, 2.°) se tendrá:

	6 reales,	12 mrs.
	80	
Producto por 6 reales.....	480 reales	
— por $\frac{1}{34}$ de real ó sea 1 maravedí.....	2	12 mrs
— por 11 mrs.....	25	30
Resultado:	508 reales,	8 mrs.

4.° Una vara de paño costó 72 reales y 16 mrs., ¿cuánto costarán 10 tercias ó pies de la misma tela?

Reduciendo á varas el multiplicador (**79**, 2.°) será:

	72 reales,	16 mrs.
	$\frac{10}{3}$	
Producto por 72 reales.....	240 reales	
— por $\frac{1}{34}$ de real ó sea un maravedí.....		$3\frac{1}{3}$ mrs.
— por 15 mrs.....	1	16
Resultado:	241 reales,	$19\frac{1}{3}$ mrs.

5.° 17 pares de mulas emplearon 18 horas y 36 minutos en trasportar cierto número de fanegas de trigo. Para trasportar

el mismo número de fanegas un par de mulas, ¿cuántas horas necesitan?

	18 horas, 36 minutos.	
	17	
Producto por 18 horas.	126 horas	
	18	
—por $\frac{1}{2}$ de hora ó sean 30 minutos.	8	30 minutos
—por $\frac{1}{5}$ de media hora ó sean 6 minutos, .	1	42
Resultado:	316 horas,	12 minutos

146. 2.° CASO. Sea multiplicar 30 reales y 24 mrs. por 124 fanegas y 3 celemines; lo que equivale á hallar el valor de 124 fanegas y 3 celemines, en el supuesto de que una fanega importa 30 reales y 24 mrs.

Despues de haber multiplicado todo el multiplicando por las 124 fanegas, como en el primer caso, para hallar el valor de los tres celemines, componiendo estos $\frac{1}{4}$ de fan., no hay mas que tomar $\frac{1}{4}$ de 30 rs. y 24 mrs., importe total de la fanega, y sumar este producto con los anteriores.

La operacion se dispone como se ve á continuacion, donde se notará que se expresan las especies del multiplicador, lo que solo tiene por objeto recordar la relacion que hay entre ellas.

		30 rs.,	24 mrs.
		124 fan.,	3 celem.
Valor de las 124 fanegas.	Producto por 30 reales.	3720 reales	
	— por $\frac{1}{2}$ de de real ó sean 17 mrs. . .	62	
	— por $\frac{1}{17}$ de medio real ó sea 1 marav.	3	22 mrs.
	— por 6 maravedises.	21	30 mrs.
Valor de $\frac{1}{4}$ de fanega ó sean 3 celemines.		7	23
	Resultado:	3815 reales,	7 mrs.

2.° EJEMPLO. **Un móvil recorre en una hora con movimiento uniforme 13 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 6 líneas, ¿qué espacio recorrerá, sujeto á iguales condiciones, en 20 horas, 36 minutos y 20 segundos?**

		13 varas,	2 pies,	5 pulg.,	6 líneas.
		20 horas,	36 minutos,	20 segundos.	
Valor de (ó espacio recorrido en) 20 horas.	Producto por 13 varas. . . .	260 varas			
	— por $\frac{1}{3}$ de vara ó sea un pié.	6	2 pies		
	— por id. id.	6	2		
	— por $\frac{1}{3}$ de pie ó 4 pulg. . .	2		8 pulgadas	
	— por $\frac{1}{4}$ de 4 pul. ó 1 pulg. .		1	8	
	— por $\frac{1}{3}$ de pulgada ó 6 líneas			10	
Valor de $\frac{1}{3}$ de hora ó 30 minutos.		6	2	8	9 líneas
—de $\frac{1}{5}$ de media hora ó 6 min.		1	1	1	9
—*de 1 minuto.*				8	$3\frac{1}{3}$ *v. aux.*
—de $\frac{1}{3}$ de minuto ó 20 seg. . .				2	$9\frac{1}{5}$
	Resultado:	284 varas,	2 pies,	3 pulg.,	$3\frac{1}{5}$ líneas.

UNED

Ordenada la operacion del modo que precede, se multiplica todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, ó sea por las 20 horas, del modo que se practicó en el primer caso (**145**).

Se descomponen luego los 36 minutos en 30 más 6. Como 30 minutos componen $\frac{1}{2}$ de hora y el multiplicando es el espacio recorrido por el móvil en una hora, el valor de 30 minutos se halla tomando la mitad del multiplicando. Siendo 6 minutos $\frac{1}{5}$ de 30, el valor de los 6 minutos se halla tomando $\frac{1}{5}$ del valor de 30 minutos.

Para hallar el valor de (ó el espacio recorrido en) 20 segundos, se observa que estos no son una parte alícuota sencilla de 6 minutos, y se determina el *valor auxiliar* de un minuto. Se suman los productos parciales, omitiendo solo el auxiliar, y la suma es el resultado pedido.

Del procedimiento empleado en estos ejemplos se deduce que

Para multiplicar un número complejo ó incomplejo por otro complejo, se multiplica todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, como se dijo en el primer caso: las unidades de especie inferior se descomponen en partes alícuotas de la unidad de especie superior ó de otra cantidad cuyo valor esté determinado, y se toman iguales partes alícuotas del valor de la unidad de especie superior ó de dicha cantidad de valor conocido. La suma de los productos parciales, omitiendo los auxiliares, si los hay, será el producto total.

3.° ¿Cuánto importan 987 varas, 2 pies, 7 pulgadas y 5 líneas á 65 reales y 23 maravedises la vara? (*).

65 reales, 23 mrs.
987 varas, 2 pies, 7 pulg., 5 líneas.

Valor de 987 varas.....	Producto por 65 rs...	4935 5922	
	—por 17 mrs.....	493 reales	17 mrs.
	—por $\frac{1}{17}$ de 17 mrs. ó 1 maravedí....	29	1
	—por 5 mrs.....	145	5
Valor de $\frac{1}{3}$ de vara ó 1 pie....		21	$30\frac{1}{3}$.... $\frac{144}{432}$
— de id..... ó id.....		21	$30\frac{1}{3}$.... $\frac{144}{432}$
— de $\frac{1}{2}$ de pie ó 6 pulgadas		10	$32\frac{1}{6}$.... $\frac{72}{432}$
— de $\frac{1}{6}$ de 6 pulg. ó 1 pulg.		1	$28\frac{1}{36}$.... $\frac{12}{432}$
— de $\frac{1}{3}$ de pulg. ó 4 líneas.			$20\frac{73}{108}$.... $\frac{292}{432}$
— de $\frac{1}{4}$ de 4 líneas ó 1 línea			$5\frac{73}{432}$.... $\frac{73}{432}$

Resultado: 64879 reales, $33\frac{365}{432}$ mrs.

Este ejemplo se resuelve como los dos precedentes.

(*) Elegimos este problema, para que se vea que ningun método simplifica lo bastante la resolucion de algunos cuyos datos estan expresados en medidas del antiguo sistema.

UNED

ARTICULO IV.

Aplicacion del método de las partes alícuotas á la multiplicacion de números mistos incomplejos y complejos.

1.er EJEMPLO. 18 libras á 82 $\frac{3}{4}$ reales la libra ¿cuánto importan?

82 $\frac{3}{4}$ reales.
18

Producto por 82 reales.	656 82		
— por $\frac{1}{2}$ de real.	9 reales		
— por $\frac{1}{2}$ de medio real ó $\frac{1}{4}$ de real. . . .	4	17 mrs.	
Resultado:	1489 reales	17 mrs.	

2.° ¿Cuánto importan 6 $\frac{4}{5}$ arrobas, habiendo costado una arroba 46 reales?

46 reales.
6 $\frac{4}{5}$

Valor de 6 arrobas. Producto por 46 reales.	276 reales		
Valor de $\frac{1}{5}$ de arroba.	9	6 $\frac{4}{5}$	mrs.
— de $\frac{3}{5}$ de arroba.	27	20 $\frac{2}{5}$	
Resultado:	312 reales,	27 $\frac{1}{5}$ mrs.	

3.° ¿Cuánto importan 12 $\frac{2}{3}$ varas de paño á 20 $\frac{1}{4}$ reales la vara?

20 $\frac{1}{4}$ reales.
12 $\frac{2}{3}$

Valor de 12 varas..... Producto por 20 reales.	240 reales		
— por $\frac{1}{3}$ de real.	3		
Valor de $\frac{1}{3}$ de vara.	6	33 $\frac{3}{4}$	mrs.
— de $\frac{1}{3}$ de idem.	6	33 $\frac{3}{4}$	mrs.
Resultado:	256 reales	33 $\frac{1}{2}$ mrs.	

4.° Un móvil anda en un minuto 50 $\frac{3}{4}$ varas, ¿cuánto andará con igual velocidad en 10 minutos y 25 segundos?

50 $\frac{3}{4}$ varas.
10 minutos, 25 segundos.

Valor de (ó espacio recorrido en) 10 minutos. Producto por 50 varas.	500 varas			
— por $\frac{1}{2}$ vara. .	5			
— por $\frac{1}{2}$ de media vara ó $\frac{1}{4}$ vara. .	2	1 pie	6 pulgadas	
Valor de $\frac{1}{3}$ de minuto ó 20 segundos	16	2 pies	9	
— de $\frac{1}{4}$ de la tercera parte de minuto ó 5 segundos.	4	8		3 líneas.
Resultado:	528 varas,	1 pie,	11 pulg.,	3 líneas.

UNED

5.° Una arroba costó 20 duros y 12 reales, $6\frac{7}{8}$ arrobas ¿cuánto costarán?

		20 duros, 12 reales. $6\frac{7}{8}$		
Valor de 6 arrobas.	Producto por 20 duros.	120		
	— por $\frac{1}{2}$ duro ó 10 reales. . .	3		
	— por $\frac{1}{5}$ de 10 reales ó 2 rs..		12 reales	
Valor de $\frac{4}{8}$ de arroba ó $\frac{1}{2}$ de arroba.		10	6	
— de $\frac{2}{8}$ de arroba ó $\frac{1}{4}$ de media arroba. .		5	3	
— de $\frac{1}{8}$ de arroba o $\frac{1}{2}$ de un cuarto de arroba..		2	11	17 mrs.
	Resultado:	141 duros,	12 rs.,	17 mrs.

ARTICULO VII.

Division.

147. Cuando dividendo y divisor son de diferente naturaleza (**76**), se distinguen otros dos casos: 1.° *dividir un número complejo por otro incomplejo:* 2.° *dividir un número complejo ó incomplejo por otro complejo.*

148. 1.er CASO. *Para dividir un número complejo por otro incomplejo* (de distinta naturaleza) *se dividen las diferentes especies de unidades del dividendo por el divisor: de modo que hay que ejecutar varias divisiones parciales. La operacion se principia por las unidades de especie superior, se continúa por la inferior inmediata, y así sucesivamente; á fin de que si en alguna division parcial resulta residuo, se reduzca á la especie inmediata inferior y se sume con las unidades que de esta haya en el dividendo, para formar el dividendo parcial siguiente.*

EJEMPLOS.

1.° 72 fanegas de trigo pesaron 231 arrobas y 3 libras, ¿cuánto pesará la fanega? (*).

(*) Para distinguir el dividendo del divisor en este ejemplo y siguientes, recuerdese lo dicho en el número **76.**

UNED

La operacion se ordena del modo siguiente:

1.er dividendo parcial....	231 ar., 3 libras	72
	15	
	25	3 ar., 5 lib., 4 onz.
	75	
	30	
	375 libras	
	3 id.	
2.° dividendo parcial....	378 libras	
	18	
	16	
	108	
	18	
3.er dividendo parcial....	288 onzas.	
	0	

Se dividen las 231 arrobas por 72, y el cociente 3 arrobas formará las unidades de especie superior del resultado: el residuo 15 arrobas de esta division se reduce á libras, y añadiéndole las 3 que hay en el complejo se forma el 2.° dividendo parcial 378 libras. Se reduce el resto de la última division 18 libras á onzas, y las 288 que compone, una vez que no hay onzas en el complejo, constituyen el 3.er dividendo parcial: se efectúa esta tercera division, y su cociente, reunido á los anteriores, compone el cociente total.

El resultado es, pues, 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas.

2.° 10 cántaras de vino costaron 508 reales y 8 maravedises, ¿á cómo costó la azumbre?

Aquí debe reducirse el divisor á azumbres (**77**, obs.), y luego la division se ejecuta como en el ejemplo anterior y á continuacion se ve:

508 reales, 8 maravedises	80
28	
34	6 reales, 12 maravedises.
112	
8i	
952 mrs.	
8 id.	
960 mrs.	
160	
0	

Resultado: 6 reales y 12 maravedises.

UNED

3.° 10 tercias ó piés de paño costaron 241 reales y 19 $\frac{1}{3}$ maravedises ¿á cómo costó la vara?

Reduciendo el divisor á varas (**77**, obs.) se convierte en $\frac{10}{3}$ de vara; será, pues, 241 reales, $19\frac{1}{3}$ mrs. dividido por $\frac{10}{3}$.

Para ejecutar esta division hay que multiplicar todo el dividendo por el denominador 3, y luego dividir este producto por el numerador 10 (**113**). De modo que tendremos:

(241 reales, 19 $\frac{1}{3}$ mrs.) $\times 3 : 10$

ó sea 723 reales, 58 mrs. | 10

3

34

102 mrs.

58 id.

160

0

72 reales, 16 mrs.

Resultado: 72 reales y 16 mrs.

4.° Un par de mulas empleó 316 horas y 12 minutos en trasportar una cantidad de trigo; para trasportar la misma cantidad 17 pares de mulas, ¿qué horas necesitan?

Este problema y sus análogos no estan comprendidos en el que se ha dicho (**77**) que comunmente se resuelve en la division de números concretos. Desde luego se observará, sin embargo, que 17 pares de mulas tardarán en trasportar la indicada cantidad de trigo, 17 veces menos tiempo que el empleado por un par en iguales circunstancias. Luego será

316 horas, 12 minutos | 17

146

10

60

600 minutos

12 id.

612 minutos

102

0

18 horas, 36 minutos

Resultado: 18 horas y 36 minutos.

149. 2.° CASO. *Para dividir un número complejo ó incomplejo por otro complejo* (de distinta naturaleza), *se reduce el divisor á incomplejo de aquella unidad cuyo valor se va á determinar, y queda este caso convertido en el anterior ó en la division de dos números incomplejos.*

UNED

EJEMPLOS.

1.° 124 fanegas y 3 celemines de trigo costaron 3815 reales y 7 maravedises, ¿á cómo costó la fanega?

Reduciendo el divisor á incomplejo de fanega (**138**) se convierte en $\frac{1491}{12}$ fanegas; luego (como en el problema 3.° del caso anterior) se tendrá:

(3815 reales, 7 mrs.)×12 : 1491.

45780 reales, 84 mrs.	1491
1050	
34	30 reales, 24 mrs.
420	
315	
35700 mrs.	
84 id.	
35784 mrs.	
5964	
0	Resultado: 30 reales, 24 mrs.

2.° 13 arrobas y 5 libras costaron 5280 reales, ¿á cómo costó la libra?

Reduciendo el divisor á incomplejo de libra se convierte en 330 libras. Luego será

528 reales	33
198	
0	16 reales.

Costó, pues, á 16 rs. la libra.

150. *Cuando dividendo y divisor son de una misma naturaleza* (**79**), *para ejecutar la division se convierten ambos términos en incomplejos de una misma especie, y queda este caso reducido á la division de dos números incomplejos.*

EJEMPLO. **Una vara de paño costó 52 reales y 12 maravedises, ¿cuántas varas se podrán comprar con 721 reales y 16 maravedises?**

Es evidente que se podrán comprar tantas varas como veces 52 reales y 12 maravedises estan contenidos en 721 reales y 16 maravedises. Luego este último número es el dividendo, el primero el divisor, y el cociente expresará varas, ó varas y divisores de la vara si no fuese exacto.

UNED

Reduciendo dividendo y divisor á mrs. (porque reducidos á reales se convierten en quebrados, y la division de estos no es tan sencilla) se reduce la operacion á dividir **24530** por **1780**, ó (**106**, obs.) á dividir **2453** por **178**, que se ejecuta como se ve á continuacion:

	2453	178
	673	13 varas, 2 pies, $4\frac{10}{89}$ pulg.
Resíduo.	139	
que reducido á pies	3	
da.	417	
Nuevo resíduo.	61	
que reducido á pulgadas	12	
	122	
	61	
da.	732	
Ultimo resíduo.	20	

Resultado: $13\frac{139}{178}$ varas, ó 13 varas, 2 pies, $4\frac{10}{89}$ pulgadas.

CAPITULO III.

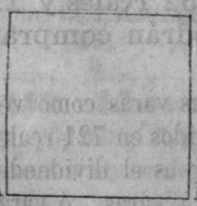
Sistema de pesos y medidas.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

151. CUADRADO (en Geometría) *es una figura terminada por cuatro rectas iguales, que se reunen formando escuadra ó ángulos rectos* (figura 1.ª).

Fig. 1.ª



LADO *del cuadrado es una de las cuatro rectas que lo forman*, como AB.

Se llama VARA CUADRADA, PIE CUADRADO, METRO CUADRADO, DECÍMETRO CUADRADO, etc., *cuadrados cuyos lados son respectivamente una vara, un pie, un metro, un decímetro*, etc.

Las medidas de superficie en un sistema cualquiera son casi siempre (*) cuadrados, que tienen por lados las medidas de longitud del mismo sistema; mas la relacion entre los múltiplos y divisores de estas medidas de superficie es muy distinta de la que hay entre las longitudinales que les sirven de lado. Propongámonos, por ejemplo, averiguar cuántos piés cuadrados contiene la vara. Para esto dividiremos dos lados opuestos del cuadrado en pies, y uniendo por rectas las divisiones que se encuentran á la misma altura, se tendrá la vara cuadrada dividida en tres fajas de un pié de ancho y tres de largo, como aparece de la fig. 2.ª; luego cada una de estas tres fajas contiene 3 pies cuadrados, luego las 3 contendrán 3×3; luego la vara cuadrada contiene 3^2 pies cuadrados (**56**).

Fig. 2.ª

152. Como se puede hacer un raciocinio análogo con otras dos medidas ó cuadrados de iguales condiciones, resulta que

Para averiguar las veces que una medida cuadrada mayor en un sistema contiene otra menor en el mismo, se eleva á la segunda potencia el número de veces que el lado de la mayor contiene al de la menor. Así, una vara cuadrada contiene $3^2=9$ pies cuadrados, un metro cuadrado $10^2=100$ decímetros cuadrados, etc.

153. Cubo (en Geometría) *es un sólido terminado por seis cuadrados* (tiene la forma de un dado) como la fig. 3.ª

Arista *en un cubo es cada una de las doce líneas formadas por la interseccion de dos cuadrados;* la cual es igual á un lado de este, como AB.

Se llama vara cúbica, pie cúbico, metro cúbico, decímetro cúbico, etc., *cubos cuyas aristas son respectivamente una vara, un pié, un metro, un decímetro, etc.*

(*) Decimos casi siempre, porque hay algunas medidas de superficie que no son cuadrados, ni pueden reducirse a cuadrado, cuyo lado tenga un número exacto de medidas longitudinales: el *celemin de tierra*, por ejemplo, podrá representarse por un rectángulo que tenga 12 estadales de base y 4 de altura; pero nunca por un cuadrado cuyo lado tenga un número exacto de estadales, de varas ni de pies.

El *dia de bueyes*, medida asturiana, es tambien un rectangulo, cuyos lados son por lo general 60 y 30 varas; mas tampoco se puede reducir á cuadrado, cuyo lado tenga un número exacto de medidas longitudinales.

UNED

Las medidas de volúmen en un sistema cualquiera son siempre cubos que tienen por aristas las medidas longitudinales del mismo sistema; pero la relacion entre los múltiplos y divisores de las medidas de volúmen ó cúbicas es muy distinta de la que existe entre las longitudinales que forman las aristas. Propongámonos averiguar cuántos pies cúbicos, por ejemplo, tiene la vara cúbica. Dividirémos cuatro aristas opuestas en tres partes iguales cada una, ó sea en tres piés, y suponiendo cortado el sólido por las divisiones que estan á la misma altura, se tendrá dividido en tres trozos de un pie de espesor cada uno, como aparece en la fig. 4.ª

Fig. 3.ª

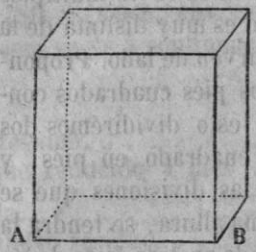
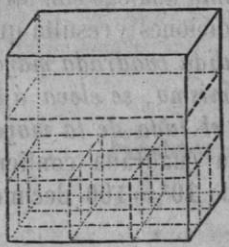


Fig. 4.ª



Dos caras opuestas de estos trozos tienen una vara cuadrada, que se puede suponer dividida (**151**) en nueve pies cuadrados: sobre cada uno de estos y dentro de dicho trozo, se puede colocar un pié cúbico, luego cada trozo contiene 9 pies cúbicos, luego los tres contendrán 9×3, ó $3\times3\times3$; luego la vara cúbica contiene 3^3 pies cúbicos (**56**).

154. Como se puede hacer un raciocinio análogo con otros dos cubos de iguales condiciones, se deduce que

Para hallar las veces que una medida cúbica mayor en un sistema, contiene á otra menor en el mismo, se eleva á la tercera potencia el número de veces que la arista de la mayor contiene á la de la menor. Así, una vara cúbica contiene $3^3=27$ pies cúbicos, un metro cúbico $10^3=1000$ decímetros cúbicos, etc.

UNED

ARTICULO II.

Sistema antiguo.

Medidas que estaban en uso al plantearse el nuevo sistema métrico.

LONGITUDINALES.

155.

La legua tiene.	20,000 pies (*).
La vara.	3 piés.
El pie.	12 pulgadas.
La pulgada.	12 líneas.
La línea.	12 puntos.

La legua se divide tambien en dos medias y en 4 cuartos.

La vara en 4 *cuartas* ó *palmos* y en 8 *ochavas*. Tambien se divide en 3 *tercias*.

El pié en 16 *dedos*.

El dedo en 2 medios, 4 cuartos, etc.

En agrimensura se usa del *estadal*, que tiene 4 varas.

DE CAPACIDAD PARA ARIDOS.

El cahiz tiene.	12 fanegas.
La fanega.	12 celemines
El celemin.	4 cuartillos.
El cuartillo.	4 ochavos.
El ochavo.	4 ochavillos.

La fanega se divide tambien en 2 medias fanegas y en 4 cuartillas.

DE CAPACIDAD PARA LIQUIDOS (excepto el aceite).

El moyo tiene.	16 cántaras.
La cántara.	8 azumbres.
La azumbre.	4 cuartillos.
El cuartillo	4 copas.

DE PESO.

El quintal tiene.	4 arrobas.
La arroba.	25 libras.
La libra.	16 onzas.
La onza	16 adarmes.
El adarme.	3 tomines.
El tomin.	12 granos.

(*) *La legua tiene* 6666 $\frac{2}{3}$ varas. El no formar un número entero de varas provino de que las leguas se referian siempre al *paso doble*, que representa 5 pies, y nunca á la vara, de manera que la legua contiene 4000 pasos dobles.

UNED

La unidad usada en platería es el *marco*, que contiene 8 onzas.

La libra medicinal tiene 12 *onzas*, la onza 8 *dracmas*, la dracma 3 *escrúpulos*, el escrúpulo 2 *óbolos*, y el óbolo 12 *granos*.

Las medidas para el aceite estan arregladas al peso, y se usa la arroba, que se divide en 2 medias, en 4 cuartos de arroba, en 8 medios cuartos y en 25 libras. La libra contiene 2 medias, 4 cuarterones ó *panillas*, ú 8 medias panillas.

AGRARIAS Y DE SUPERFICIE.

La legua cuadrada tiene (**152**)	20000'=400000000 pies cuadrados.
La fanega de tierra, que es un cuadrado de 24 estadales de lado, tiene.	24'=586 estadales cuadrados.
El estadal cuadrado. . .	4'= 16 varas cuadradas.
La vara cuadrada.	3'= 9 pies cuadrados.
El pie cuadrado.	12'=144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada. . .	12'=144 líneas cuadradas.

La fanega de tierra se divide en 12 *celemines*, y el celemin en 4 *cuartillos*.

Tambien se usa como medida agraria la *aranzada*, que es un cuadrado de 20 estadales de lado, y que tiene por consiguiente (**152**) 20'=400 estadales cuadrados.

DE VOLÚMEN.

La vara cúbica tiene (**154**).	3'= 27 pies cúbicos.
El pie cúbico.	12'=1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica	12'=1728 líneas cúbicas.

DE DINERO.

El duro tiene.	20 reales.
El real.	34 maravedises.

Medidas antiguas que subsistirán despues de planteado el nuevo sistema, porque no han sido reemplazadas por otras.

DE TIEMPO (*).

156. *El siglo*.	100 años.
El año (**).	12 meses.

(*) La inconmensurabilidad que existe entre el año y el dia, unidades naturales del tiempo, ha impedido que estas medidas fuesen reemplazadas por otras acomodadas al sistema decimal, ó mas sencillas que las actuales.

(**) *Año* es el tiempo que la tierra emplea en hacer una revolucion completa al rededor del sol.

Dia es el tiempo que tarda la misma en ejecutar una revolucion sobre su eje.

Estos dos tiempos no tienen entre sí relacion exacta; así, aunque se dice que el

UNED

El mes comercial.	30 dias (*)
El dia.	24 horas.
La hora.	60 minutos.
El minuto.	60 segundos.

Tambien es medida de tiempo la *semana*, que tiene 7 dias; contándose 52 por un año.

DE LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia tiene. .	360 grados (**).
El grado.	60 minutos.
El minuto.	60 segundos.

ARTICULO III.

Nuevo sistema ó sea sistema métrico decimal.

157. Las *unidades* de las diferentes medidas de este sistema son las siguientes:

El METRO para las medidas de longitud (***).

El LITRO para las de capacidad de áridos y líquidos (****).

---

año comun es de 365 dias, tiene 365 dias, 5 horas, 48 minutos y 47,5 segundos. De modo que de 4 en 4 años se forma uno de 366 dias, llamado *bisiesto*. Los números de años de cada siglo divisibles por 4 son por esta razon bisiestos; por ejemplo, los años 4, 8, 12, ..., 68, 72, 76, etc.

Suponiendo que la diferencia 5 horas, 48 minutos, 47,5 segundos, compone cada 4 años un dia, se comete un error de 11 $\frac{1}{6}$ minutos próximamente. Para compensarle se cuenta solo como bisiesto un año *secular* de 4 en 4, entendiéndose por año secular el terminado en dos ó más ceros.

Habiéndose pues contado como bisiesto el año *secular* 1600, no lo serán ya los de igual clase hasta el 2000.

Siguiendo esta regla, que es la *Gregoriana*, todavia se comete el error de cerca de un dia cada 3000 años, error insignificante en tan largo período, y que aún podia corregirse declarando que los años divisibles por 4000 no fuesen tampoco *bisiestos*.

(*) Los meses *comunes* de Abril, Junio, Setiembre y Noviembre tienen 30 dias: Febrero tiene 28, excepto en los años bisiestos que tiene 29; los 7 meses restantes tienen 31 dias cada uno.

(**) Esta es la division antigua llamada *sexagesimal*. Modernamente se adoptó en Francia otra, llamada *centesimal*, que considera la circunferencia dividida en 400 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

(***) *Metro* se deriva de μετρον, palabra griega que significa medida. El *metro* tiene poco más de 3 pies y 7 pulgadas de la vara de Búrgos.

(****) *Litro* se deriva de λιτρα, nombre de una medida de liquidos entre los griegos. El *litro* equivale á casi dos cuartillos castellanos.

UNED

El GRAMO para las de peso (*).

El ÁREA para las de superficie (**).

El METRO CÚBICO para las de volúmen.

El *metro* es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París: su magnitud depende, pues, de las dimensiones de la tierra.

Las demás unidades se derivan del metro (que por esta razon se llama *unidad fundamental*) de este modo:

El *litro* es un vaso de igual capacidad que un cubo, cuyas dimensiones lineales interiores sean la décima parte del *metro*.

El *gramo* es lo que pesa en el vacío, y á la temperatura de cuatro grados centígrados, un volúmen de agua destilada igual á un cubo cuya arista sea la centésima parte del *metro*.

El *área* es un cuadrado, cuyo lado tiene diez *metros* de largo.

El *metro cúbico* es un cubo, cuya arista tiene un métro (**153**).

158. Los *múltiplos* de estas diferentes unidades se forman anteponiendo á cada una de las palabras griegas (***).

DECA, HECTO, KILO, Y MIRIA,

que significan... diez, ciento, mil y diez mil; y los *divisores*, anteponiendo á las mismas unidades las voces latinas

DECI, CENTI Y MILI,

que equivalen á.. décimo, centésimo y milésimo, como se ve á continuacion:

MEDIDAS LONGITUDINALES.

Múltiplos...	Miriá-metro	10000	metros.
	Kiló-metro	1000	metros.
	Hectó-metro	100	metros.
	Decá-metro	10	metros.
Unidad usual	METRO.		
Divisores...	Deci-metro	0,1	de id.
	Centi-metro	0,01	de id.
	Mili-metro	0,001	de id.

(*) *Gramo* se deriva de γραμμα, palabra griega que significa *una medida de peso*. El *gramo* equivale á poco más de medio adarme.

(**) *Area* se deriva de la palabra latina *área*, que significa campo ó superficie destinada al cultivo. El *área* tiene próximamente 143 varas cuadradas.

(***) Se adoptaron palabras griegas y latinas para la formacion de la nomenclatura del sistema, con el objeto de que fuese invariable y pudiese ser admitida en todas partes.

UNED

DE CAPACIDAD.

Múltiplos.	*Miriá-litro*	10000	*lit.* (*)
	Kiló-litro ó tonelada de arqueo	1000	litros.
	Hectó-litro	100	litros.
	Decá-litro	10	litros.
Unidad usual. . .	LITRO		
Divisores.	Deci-litro	0,1	de id.
	Centi-litro	0,01	de id.
	Mili-litro	0,001	*de id.*

DE PESO.

Múltiplos.	*Miriá-gramo*	10000	*gramos.*
	Kiló-gramo	1000	gramos.
	Hectó-gramo	100	gramos.
	Decá-gramo	10	gramos.
Unidad principal.	GRAMO (**).		
Divisores.	Deci-gramo	0,1	de id.
	Centi-gramo	0,01	de id.
	Mili-gramo	0,001	de id.

AGRARIAS (***).

Múltiplo. . .	Hect-área	100	áreas.
Unidad usual. . .	ÁREA.		
Divisor. . .	Centi-área	0,01	de área.

CÚBICAS.

Unidad usual.	METRO CÚBICO.			
Divis. Decímetro cúbico (154). .	0,1³	0,001	de metro cúbico.
Centímetro cúbico.	0,01³	0,000001	de metro cúbico.
Milímetro cúbico.	0,001³	0,000000001	de metro cúbico.

159. Desde luego se observa que las palabras *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria* se pueden sustituir con *decena*, *centena*, *millar* y *decena de millar* de la unidad á que se juntan, y las voces *deci*, *centi* y *mili* se pueden sustituir tambien con *décima*, *centésima* y *milésima* de la unidad á que van unidas. Así que, siendo el *metro* la *unidad* de longitud, sus múltiplos son *decenas*, *centenas*, *millares* y *decenas de millar* de *metro*, y sus divi-

---

(*) Los múltiplos y divisores omitidos por nuestra ley de pesos y medidas van de letra cursiva. Aunque realmente son innecesarios, los hemos puesto, sin embargo, para que se vea mejor el artificio del sistema.

(**) El *gramo* ha sido la unidad en la formacion del sistema; pero la unidad usual es hoy el kilógramo, como se verá más adelante (162).

(***) Notarase que no se cuenta la *deca-área* entre los múltiplos del *área*, ni la *deci-área* entre sus divisores; y esto es porque las superficies se valuan casi siempre (151) refiriéndolas á cuadrados, y ni 1000 metros cuadrados que representa la primera, ni 10 á que equivale la segunda, pueden reducirse á cuadrado, cuyo lado tenga número exacto de metros.

UNED

sores *décimas*, *centésimas* y *milésimas* de metro; pudiéndose decir otro tanto del *litro* y del *gramo*.

La naturaleza especial de las medidas de superficie y cúbicas (**151** al **154**) hace que sus múltiplos sean en las primeras de 100 en 100 veces mayores, y de 1000 en 1000 en las segundas, si fuese preciso formarlos; y que los divisores sean respectivamente de 100 en 100 y de 1000 en 1000 veces menores.

Para expresar, pues, por escrito un número cualquiera que contenga múltiplos y divisores de la unidad, se escribe como si fuese un número decimal (**120**), *colocando la* COMA *despues de las unidades; ántes de estas, y en el lugar correspondiente, los* MÚLTIPLOS; *y despues, en el lugar que tambien corresponda, los* DIVISORES; *cuidando de expresar al fin la especie de las unidades.*

Así, 3 *deca*metros, 5 metros, 4 *deci*metros y 6 *centi*metros, como que equivalen á 3 decenas, 5 unidades, 4 décimas y 6 centésimas de metro, se escriben: 35,46 metros.

7 *deca*litros, 9 litros y 6 *deci*litros, se escriben: 79,6 litros.

6 *hecto*áreas, 18 áreas y 3 *centi*áreas, se escriben: 618,03 áreas.

29 metros cúbicos, 46 *deci*metros cúbicos y 718 *centi*metros cúbicos, se escriben: 29,046718 metros cúbicos.

160. Recíprocamente, *para leer cada uno de estos números, se leen las cifras que estan ántes de la coma como enteros, expresando al fin la especie de la unidad, y las que estan despues se leen como decimales, expresando tambien la especie de la última cifra segun se hace con aquellos* (**121**).

El número 325,76 litros, se lee: 325 litros y 76 *centi*litros, cuyo número equivale á 3 *hecto*litros, 2 *deca*litros, 5 litros, 7 *deci*litros y 6 *centi*litros, que son los litros, múltiplos y divisores, que contiene el número dado. Del mismo modo 7856,06 áreas, se lee: 7856 áreas y 6 *centi*áreas, y 731,856 metros cúbicos se expresa por 731 metros cúbicos y 856 *deci*metros cúbicos.

161. El nombre especial que se da á cada múltiplo y á cada divisor, sirve solo para el caso en que sea necesario

UNED

cambiar de unidad, bien para ejecutar alguna operacion, ó bien porque la unidad empleada en la formacion del sistema sea muy pequeña ó demasiado grande, respecto de la cantidad que con relacion á ella se quiera expresar.

Así que, las grandes distancias, como las que hoy se valúan por leguas, deben expresarse en *kilómetros* ó *miriámetros*; y las menores que el metro, en *centímetros* y *milímetros*.

Las cantidades de áridos ó líquidos que en el antiguo sistema se expresan por cántaras ó fanegas, se valúan en *hectólitros*, y las menores que el litro en *centílitros*, etc.

El *cambio de unidad en cualquiera de sus múltiplos*, que equivale á la reduccion de un número complejo del antiguo sistema á incomplejo de alguna de sus especies (**138**) *se consigue corriendo la coma uno, dos, tres, etc., lugares hácia la izquierda, segun dicho múltiplo contenga á la unidad* 10, 100, 1000, *etc. veces; y en cualquiera de sus divisores, corriendo la coma uno, dos, tres, etc. lugares hácia la derecha, segun que la unidad contenga* 10, 100, 1000, *etc. veces á dicho divisor* (*).

Así, para expresar este número 37470,7 metros en *kilómetros*, bastará correr la coma tres lugares á la izquierda, puesto que el *kilómetro* tiene 1000 metros, y será 37,4707 *kilómetros*.

Del mismo modo 3,672 litros equivale á 367,2 *centílitros*.

Particularidades de las medidas de peso, de superficie y cúbicas.

MEDIDAS DE PESO.

162. El *gramo* ha sido la unidad de peso en la formacion del sistema; pero se vió luego que por su pequeñez no llenaba las necesidades ordinarias del comercio, y se tomó el *kilógra-*

(*) Se observará que el valor del número considerado como abstracto, varía corriendo la coma uno ó varios lugares á la izquierda ó á la derecha (**124**, 2.° y 3.°) pero que no sucede así considerándole como concreto, con tal que se varíe tambien la denominacion de las unidades de una manera conveniente. Así, el primero de los dos números 7347,07 metros y 7,34707 kilómetros, considerado como abstracto, es 1000 veces mayor que el segundo; mas si se le considera como concreto, se ve que la unidad á que se refiere es tambien 1000 veces menor que la de esta, y por consiguiente que los dos tienen un valor igual.

UNED

mo por unidad usual. Por una razon análoga fué preciso aumentar el único múltiplo del *kilógramo*, el *miriá*gramo, con otros dos múltiplos más, que son el *quintal métrico* y la *tonelada de peso*, de los que el primero, siguiendo la ley general de formacion, tiene 10 miriágramos y 100 *kilógramos*, y el segundo 1000.

Nuestra ley de pesos y medidas adoptó tambien estas modificaciones, que afectan poco el mecanismo del sistema.

De manera que la unidad usual en estas medidas, sus múltiplos y divisores legales son los que á continuacion se expresan:

Múltiplos.	Tonelada de peso.	1000 kilóg. ó sean. .	1000000 gramos.
	Quintal métrico..	100 kilóg. ó sean. .	100000 gramos.
	Miriágramo. . . .	10 kilóg. ó sean. .	10000 gramos.
Unidad usual. . .	KILÓGRAMO.		1000 gramos.
Divisores.	Hectógramo.	0,1	de kilóg. ó sean 100 gramos.
	Decágramo..	0,01	de kilóg. ó sean 10 gramos.
	Gramo.	0,001	de kilóg.
	Decigramo.	0,0001	de kilóg. ó sea 0,1 de id.
	Centígramo.	0,00001	de kilóg. ó sea 0,01 de id.
	Miligramo.	0,000001	de kilóg. ó sea 0,001 de id.

El *quintal métrico* y la *tonelada de peso* se toman por unidades cuando se quiere expresar cantidades de un peso considerable. Cuando por el contrario haya que indicar pequeñas cantidades, como las que hoy se expresan por onzas, adarmes y granos, será la unidad el *gramo*.

DE SUPERFICIE.

163. En estas medidas solo se hizo mérito (**158**) del *área*, su múltiplo la *hectárea* y su divisor la *centiárea*, que como medidas agrarias son suficientes; mas no para valuar en ellas toda clase de superficies. Para esto se puede formar una escala de medidas tan extensa como sea preciso, tomando por base las de longitud, como se indicó (**158**) y se ve á continuacion:

Múltiplos.	Miriámetro cuadrado (**152**).	10000'	100000000 metros cuadrados.
	Kilómetro cuadrado.	1000'	1000000 metros cuadrados.
	Hectóm. cuad. ó hec	100'	10000 metros cuadrados.
	Decám. cuad. ó área	10'	100 metros cuadrados.
Uni. MET. CUAD. Ó CENTIÁ.		1'	1 metro ó sean 100 decím. id.
Divis.	Decímetro cuadrad..	0,1'	0,01 de id. ó sean 100 centim. id.
	Centímetro cuadrad.	0,01'	0,0001 de id. ó sean 100 milim. id.
	Milímetro cuadrado.	0,001'	0,000001 de id.

UNED

De lo dicho en el número **152** y de lo que aparece en el cuadro precedente, se infiere que los múltiplos de las unidades de superficie van siendo de 100 en 100 veces mayores y los divisores de 100 en 100 veces menores; de modo que el *miriámetro cuadrado* tiene 100 *kilómetros cuadrados*, este 100 *hectómetros* tambien *cuadrados*, *etc.*: el *metro cuadrado* 100 *decímetros cuadrados*, este 100 *centímetros*, *etc.* De donde resulta igualmente que todos los múltiplos se deben escribir con dos cifras (exceptuando el superior, que puede llevar una sola), y los divisores con otras dos cada uno. Así 18 kilómetros cuadrados, 3 decámetros cuadrados, 25 metros cuadrados y 9 decímetros cuadrados, se escribirán: 18000325,09 metros cuadrados.

Recíprocamente, 457,65 áreas equivalen á 4 hectómetros cuadrados ó hectáreas, 57 decámetros cuadrados ó áreas y 65 metros cuadrados ó centiáreas (*).

Si, pues, el número de cifras decimales fuese impar se le agregará un cero. De este modo, para leer el número 27,5 metros cuadrados, se le añade un cero; y 27,50 metros cuadrados representan 27 metros cuadrados y 50 decímetros, tambien cuadrados.

El miriámetro y kilómetro cuadrados pueden tomarse por unidad en el caso de tener que expresar superficies de grande extension, como la de toda la tierra, la de un reino, etc. Cuando, por el contrario, se quieren expresar superficies de corta extension, el decímetro, el centímetro ó el milímetro cuadrados serán la unidad.

CÚBICAS.

164. Al ocuparnos de estas (**158**) no se hizo mérito de ningun múltiplo del metro cúbico, por haberse omitido en nuestra ley de pesos y medidas; mas su formacion puede ser conveniente en el caso de que sea preciso expresar volúmenes de considerable extension.

(*) Por lo dicho se ve claramente que no son una misma cosa miriámetro, kilómetro, hectómetro y decámetro *cuadrados*, que decenas de millar, millares, centenas y decenas de metro *cuadrado*, ni tampoco decímetro, centímetro y milímetro *cuadrados*, que la décima, centésima y milésima parte del metro cuadrado.

UNED

Tomando por base las medidas de longitud (**157**), puede completarse el cuadro de estas medidas como á continuacion aparece:

Múltiplos.	Miriámetro cúbico (**116**).....	10000^3 =	1000000000000	metros cúbicos.
	Kilómetro cúbico.	1000^3 =	1000000000	metros cúbicos.
	Hectómetro cúb..	100^3 =	1000000	metros cúbicos.
	Decámetro cúbic.	10^3 =	1000	metros cúbicos.
Uni. us. Metro cúb..		1^3 =	1	id. ó sean 1000 decím. id.
Divls.	Decímetro cúbico.	$0,1^3$ =	0,001	de id. ó 1000 centím. id.
	Centímetro cúbic.	$0,01^3$ =	0,000001	de id. ó 1000 milím. cúb.
	Milímetro cúbico.	$0,001^3$ =	0,000000001	de id.

De lo que precede y de lo dicho en el número **154**, se deduce que los múltiplos de las medidas cúbicas van siendo de 1000 en 1000 veces mayores, y los divisores de 1000 en 1000 veces menores; de modo que el *miriámetro cúbico* tiene 1000 *kilómetros cúbicos*, este 1000 *hectómetros cúbicos*, *etc.*: el metro cúbico 1000 *decímetros cúbicos*, el decímetro cúbico 1000 *centímetros cúbicos*, *etc.* De donde resulta igualmente que todos los múltiplos se deben escribir con tres cifras (excepto el de especie superior, que puede llevar una ó dos), y los divisores con otras tres cada uno (*).

Así, 25 hectómetros cúbicos, 6 decámetros cúbicos, 146 metros cúbicos y 18 decímetros cúbicos se escribe: 25006146,018 metros cúbicos.

Recíprocamente, 57003,419 hectómetros cúbicos equivalen á 57 kilómetros, 3 hectómetros y 419 decámetros cúbicos.

Si pues el número de cifras decimales no fuese múltiplo de 3, deberá completarse con uno ó dos ceros para que lo sea.

De este modo, para leer el número 785,46 metros cúbicos, se le añade un cero, y 785,460 metros cúbicos, representa 785 metros cúbicos y 460 decímetros cúbicos.

(*) Se ve, pues, que miriámetro, kilómetro, hectómetro y decámetro cúbicos no significan respectivamente 10000, 1000, 100 y 10 metros *cúbicos;* ni tampoco decímetro, centímetro y milímetro *cúbicos* significan 0,1, 0,01 y 0,001 de metro cúbico.

UNED

El miriámetro, el kilómetro, el hectómetro y el decámetro cúbicos pueden tomarse por unidad cuando se quiere expresar volúmenes de grande extension, como el del sol, el de la tierra, el de las aguas del mar, el de una montaña, etc. Cuando por el contrario se quiera expresar volúmenes de pequeña extension, el decímetro, el centímetro y el milímetro cúbicos serán la unidad.

Advertencia final.

165. El artículo 9.° de nuestra ley de pesos y medidas autoriza el uso de patrones que sean el doble, la mitad ó el cuarto de las unidades legales; mas esto nada complica el sistema, porque fácilmente se comprende que el *doble metro* será 2 metros; el *medio metro* 5 décimos de metro ó sean 5 decímetros; y el *cuarto de metro* 25 centésimos de metro, ó lo que es igual 25 centímetros, pudiendo decirse otro tanto de las demás unidades legales.

ARTICULO IV.

Sistema monetario (*).

166. En este sistema la unidad usual es el *escudo*: sus múltiplos y divisores son los que á continuacion se expresan (**).

Múltiplo. . . .	Doblon de Isabel. .	10 escudos	ó sean	100 reales.
Unidad usual.	Escudo.	1 id.	ó	10 id.
Divisores. . .	Real.	0,1 de id.	ó	1 de id.
	Décima.	0,01 de id.	ó	0,1 de id.
	Céntimo.	0,001 *de id.*	*ó*	0,01 *de id.*

Como el *doblon* es la decena, el *real* la décima parte, y la

(*) El *escudo*, moneda efectiva de plata, pesará 12 gramos y 980 miligramos, y su ley será de 900 milésimos de fino. (Ley de 26 de Junio de 1864.)

(**) Las monedas que deben acuñarse son: de oro, ademas del doblon de Isabel, el doblon de cuatro escudos, y el de dos: de plata, ademas del escudo, el duro, peseta, media peseta y real: de bronce, el medio real, cuartillo, décima y media décima. Todas estas monedas serán auxiliares para facilitar los cambios.

UNED

décima la centésima parte del *escudo;* cuando hubiéremos de escribir escudos con su múltiplo y divisores, se hará en la forma de números decimales. Así, 17 doblones, 3 escudos, 8 reales y 4 décimas, se escriben: 173,84 escudos.

Se puede cambiar de unidad de la misma manera que en el sistema métrico (**161**); y solo cuando sea preciso cambiar la unidad legal en *doblones* ó *reales* se hará uso de estos nombres.

NOVÍSIMO (*).

Una *peseta* tiene 100 céntimos.

PROBLEMAS *que facilitan la inteligencia de los sistemas métrico y monetario decimales, y demuestran las ventajas que ofrecen.*

1.° Un comerciante compró cuatro piezas de tela: la primera de 63,4 metros, la segunda de 209,5 id., la tercera de 100 id., la cuarta de 37,85 id., y desea saber el número de metros que las cuatro piezas componen.

1.ª pieza.	63,4	metros.
2.ª id.	209,5	
3.ª id.	100	
4.ª id.	37,85	metros.
Resultado:	410,75	

2.° En un terreno labrantío de 32,07 áreas, fué preciso destinar para edificar casa de labor 97,31 metros cuadrados, se desea saber cuánto terreno queda para cultivo.

Aquí hay que cambiar las unidades de uno de los dos modos siguientes:

32,0700 áreas	3207,00 metros cuadrados.
0,9731	97,31

Resultado: 31,0969 áreas, ó sean 3109,69 metros cuadrados.

(*) La nueva *peseta* es igual en peso (5 gramos), diámetro y liga al *franco*.
Las monedas que deberán acuñarse son: de *oro*, de 100 pesetas, 50, 10 y 5: de *plata*, de 5 pesetas, 2, una, 50 y 20 céntimos: de *bronce*, de 10 céntimos, 5, 2 y uno. Decreto de 19 de Octubre de 1868.

UNED

3.° Se compraron 46,58 hectólitros de vino á razon de 0,20 de escudo el litro, ¿cuánto han costado?

En este ejemplo hay que reducir los hectólitros á litros, ó deducir del valor del litro el del hectólitro, como se ve á continuacion:

	4658 litros		46,58 hectólitros.
	0,20 escudo		20 escudos,
	931,60 escudos		931,60 escudos.
Resultado:	931,6 escudos	ó	931 escudos y 6 reales.

4.° Por trasportar 305 toneladas de peso de un género cualquiera llevaron 829,50 reales, ¿cuánto importó el trasporte de cada tonelada?

El problema se resuelve dividiendo 829,50 reales por 305, como aparece á continuacion:

829,50	305
219 5	2,71
6 00	
2 95	

Resultado: 2,72 reales (**137**, obs.)

ARTICULO V.

Comparacion del antiguo y nuevo sistema de pesos y medidas.

167. Las ventajas más notables del sistema métrico decimal sobre el antiguo son las siguientes:

1.ª En el primero hay una sola medida de capacidad para áridos y para líquidos, al mismo tiempo que en el segundo hay dos, sin motivo que justifique esta duplicidad.

2.ª Las diferentes unidades del nuevo sistema dependen unas de otras, de modo que si alguna de ellas por el trascurso del tiempo sufre alguna alteracion, se calculará otra por medio de cualquiera de las demás, exactamente igual á la primitiva; no sucediendo otro tanto en el sistema antiguo, donde la inconexion entre las diferentes unidades hace imposible la resolucion de igual problema.

UNED

3.ª Las medidas del sistema métrico decimal tienen un tipo invariable en la naturaleza, de modo que aunque todas variasen de valor, la longitud del cuadrante del meridiano bastaria para determinar otras, sin diferencia apreciable, iguales á las primitivas.

4.ª Los múltiplos y divisores en el sistema nuevo se forman de una manera idéntica en cada clase de medidas, multiplicando la unidad por 10, por 100 ó por 1000 para obtener los primeros, y dividiéndola por iguales números para obtener los segundos; cuando en el sistema antiguo la ley de formacion es tan irregular como arbitraria, y difícil por lo tanto de conservar en la memoria.

5.ª Acomodándose la formacion del sistema métrico decimal á la numeracion de este nombre, el cálculo con tales medidas es facilísimo, comparado con el de los números complejos á que da lugar la irregularidad entre los múltiplos y divisores del sistema antiguo.

Compárese la resolucion del problema 3.° del número **146** con la de su análogo, 3.° tambien del número precedente, y de esta comparacion se deducirá la inmensa ventaja que bajo este punto de vista ofrece el sistema decimal sobre el antiguo.

COMPLEMENTO
DE LA ARITMÉTICA ELEMENTAL.

CAPITULO PRIMERO.

Propiedades de los números.

ARTICULO PRIMERO.

Números primos.

168. *Se llama* NÚMERO PRIMO Ó FACTOR SIMPLE, *aquel número entero que solo es divisible por sí mismo y por la unidad.* Los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, etc., son primos.

Se llama NÚMERO COMPUESTO Ó FACTOR COMPUESTO *el que es divisible por algun otro número entero, además de serlo por sí mismo y por la unidad*, como 4, 6, etc.

169. Propongámonos averiguar si el número 127, por ejemplo, es ó no primo.

Ningun número es divisible por otro mayor que su mitad, pues el cociente sería menor que 2 y por consiguiente inexacto, á no ser cuando el número se divide por sí mismo. Luego solo hay que ensayar la division del número dado por los enteros menores que su mitad. De estos pueden omitirse los divisores compuestos, una vez que no siendo 127 divisible por 2, 3, 5, 7 etc., no puede serlo por los compuestos de ellos; porque si lo fuese por alguno, por ejemplo 6, lo sería tambien por los factores simples 2 y 3 de que este está formado (**90**, corol.); lo que es contra lo que manifiestan las operaciones que se suponen practicadas.

UNED

Luego para averiguar si 127 es ó no primo, basta dividirle por los primos sucesivos 2, 3, 5, 7, etc., menores que su mitad.

No siendo 127 divisible por 2, por 3 ni por 5, ensayarémos la division por 7, por 11 y por 13, y veremos que ninguno da cociente exacto. Ahora se observará que el número dado dividido por 13 da por cociente entero 9, número menor que el divisor, y que este cociente será con mayor razon menor que el divisor cuando este, sea primo ó no, exceda al 13. Mas si en alguna de las divisiones de 127 por un número mayor que 13 el cociente fuese exacto, como en toda division exacta el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor (**63**), 127 sería divisible por dicho cociente menor que 13, lo que es absurdo.

Luego si dividiendo 127 por los números primos 2, 3, 5, etc., menores que 13, resulta en esta division un cociente menor que el divisor, se puede asegurar que el número propuesto es primo.

Generalizando el procedimiento empleado en este caso, tendremos la siguiente regla:

Para averiguar si un número cualquiera es ó no primo, se divide sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, etc.; *y si, no omitiendo ningun divisor primo intermedio, se llega sin hallar cociente exacto á un cociente entero menor que el divisor, el número dado será primo; en el caso contrario no lo será.*

170. *Se llaman números* PRIMOS ENTRE SÍ *los que no tienen más divisor comun que la unidad.*

Los números 8 y 15 son primos entre sí.

COROLARIO 1.° *Si un número primo no divide á otro cualquiera, los dos son primos entre sí.*

Porque como el primo solo es divisible por sí mismo, si no divide al otro, no pueden tener más divisor comun que la unidad.

Así, 13 y 32 son primos entre sí.

COROLARIO 2.° *Dos números primos son primos entre sí.*

UNED

ARTICULO II.

Máximo comun divisor.

171. Máximo comun divisor *de dos ó más números es el mayor número divisor de todos ellos* (**62**).

El máximo comun divisor de 12 y 18 es 6; el de 9, 18 y 27 es 9.

172. Teorema. *Si un número divide exactamente á minuendo y sustraendo, divide tambien al resto.*

En efecto, cada término de la sustraccion es igual al divisor multiplicado por el cociente, entero por hipótesis: luego la diferencia será igual al mismo divisor multiplicado por la diferencia de dos cocientes números enteros; luego la diferencia, entre minuendo y sustraendo dados, es un múltiplo del divisor y por lo tanto divisible por este (**90**, corol.).

Así, siendo 56 y 24 divisibles por 8, la diferencia 56—24 lo será igualmente. Porque

$$56-24=7\times8-3\times8=(7-3)\times8;$$

luego la diferencia entre los números dados es un múltiplo de 8, luego es divisible por 8.

Corolario 1.° *Si un número divide exactamente á otros dos, divide tambien al resíduo de la division del mayor por el menor.*

Porque el resíduo es la diferencia entre el dividendo y el producto del cociente entero por el divisor, y siendo el divisor por hipótesis divisible por el número dado, dicho producto, que es un múltiplo del divisor, tambien lo será (**90**, corol.); luego minuendo y sustraendo son divisibles por un mismo número, luego tambien lo será la diferencia.

Siendo 42 y 15 divisibles por 3, el resto 12 de la division del primero por el segundo lo será igualmente; porque

$$42-15\times2=12;$$

y siendo 42 y 15 divisibles por 3, como 15×2 lo es tambien, la diferencia 12 tiene que serlo segun el teorema.

Corolario 2.° Reciprocamente, *si un número divide exactamente al divisor y al resíduo, divide tambien al dividendo.*

Porque el dividendo es igual al producto del cociente ente-

UNED

ro por el divisor más el resíduo; y siendo estos dos sumandos divisibles por un mismo número, la suma, que es el dividendo (**63**), lo será tambien (**90**).

Tomando el ejemplo anterior, se tiene $42=15\times2+12$; si, pues, 3 divide á 12 y á 15, dividirá á 15×2 (**90**, corol.), y por consiguiente tambien á 42.

Corolario 3.° *Si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro, no divide tampoco á la suma.*

Porque como un sumando es la diferencia entre la suma y el otro sumando (**40**), si divide á estos dos últimos dividirá al primero segun el teorema; lo que es contra la hipótesis.

Si 3 divide á 9 y no divide á 5, no puede dividir á la suma 14, porque si la dividiere, como $14-9=5$, dividiria tambien al sumando 5; lo que es contra la hipótesis.

Observacion. De este corolario se deduce con facilidad que un número no es divisible por 2 cuando no termina en 0 ó en cifra par, por 5 cuando no termina en 0 ó en 5, por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras no es 3 ni múltiplo de 3.

173. Propongámonos determinar el *máximo comun divisor* de 42 y 15.

Es evidente que el máximo comun divisor de dos números no puede exceder al menor de ellos; y como todo número es divisible por sí mismo, si 15 divide á 42, será 15 el número buscado.

Ejecutando la division, el cociente entero es 2 y quedan de resíduo 12, luego 15 no es el máximo comun divisor de estos dos números.

Ahora, el máximo comun divisor de 42 y 15 divide tambien al resíduo 12 (**172**, corol. 1.°), luego no puede ser mayor que el máximo comun divisor de 15 y 12.

Por otra parte, el máximo comun divisor de 15 y 12 divide tambien á 42 (**172**, corol. 2.°), luego tampoco puede ser mayor que el máximo comun divisor de 42 y 15.

De donde se infiere que el máximo comun divisor de 42 y 15 es igual al máximo comun divisor de 15 y 12, ó generalizando, que *el máximo comun divisor del dividendo y divisor es igual al máximo comun divisor del divisor y resíduo.*

UNED

Esto supuesto, hallemos el máximo comun divisor de 15 y 12, para lo que discurriendo como ántes, dividiremos 15 por 12, el cociente entero es 1 y el resíduo 3: luego 12 no es el máximo comun divisor pedido.

Mas como el máximo comun divisor de dividendo y divisor es igual al de divisor y resíduo, hallarémos el mayor divisor comun de 12 y 3; y como 12 entre 3 da cociente exacto, resulta que 3 es el *máximo comun divisor* buscado.

De este procedimiento, aplicable á cualquier otro caso, se deduce la siguiente regla:

174. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor, el menor por el primer resíduo, este por el segundo y así sucesivamente hasta hallar el cociente exacto, en cuyo caso el último divisor es el máximo comun divisor pedido.*

La operacion se dispone de este modo:

42	15	12	3
12	2)	1)	4
	3	0	

Donde se ve que el *máximo comun divisor* de 42 y 15 es 3.

175. Ejemplo 2.° **Hallar el máximo comun divisor de 462 y 210.**

462	210	42
42	2)	5
	0	

Resultado: 42.

3.° **Determinar el máximo comun divisor de 78 y 35.**

78	35	8	3	2	1
8	2)	4)	2)	1)	2
	3	2	1	0	

Resultado: 1; luego los números dados son primos entre sí (**170**).

OBSERVACIONES.

176. 1.ª Cuando en el curso de la operacion un divisor sea primo y no dé cociente exacto, no hay necesidad de continuarla, porque los números dados son primos entre sí (**170**, corol. 1.°).

UNED

Así que, en el ejemplo anterior, visto que el 3 no divide al 8, ya se puede asegurar que 78 y 35 son primos entre sí.

2.ª Haciendo aplicacion de lo dicho (**172**, corol. 1.°) al último ejemplo, se verá que si un número divide á 78 y 35, divide tambien el resíduo 8: si divide á 35 y 8, divide al resíduo 3: si divide á 8 y á 3, divide al resíduo 2, y así sucesivamente hasta el último resíduo, y como este es, segun la regla, el máximo comun divisor de los dos números, é igual raciocinio puede hacerse con cualquiera otro ejemplo, resulta que

Si un número divide á otros dos, divide tambien al máximo comun divisor de estos (*).

ARTICULO III.

Descomposicion de un número en factores simples.

177. Teorema 1.° *Si se multiplican dividendo y divisor de una division inexacta por un número cualquiera, el cociente entero no varía y el resto queda multiplicado por el mismo número.*

Sea 25 el dividendo y 7 el divisor, el cociente entero será 3 y el resíduo 4. Vamos á demostrar que dividiendo 25·6 por 7·6, el cociente entero es tambien 3 y el resíduo 4·6.

En efecto (**63**) $25=3\times7+4$:

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por un número cualquiera, 6 por ejemplo, resulta

$$25\cdot6=3\times7\cdot6+4\cdot6.$$

Ahora, el resto 4 es menor que el divisor 7, luego 4·6 es menor tambien que 7·6; y por consiguiente la igualdad última demuestra que 25·6 dividido por 7·6, da 3 por cociente entero y 4·6 por resíduo.

Corolario 1.° *Si dos números se multiplican por un entero, el máximo comun divisor de los dos primeros queda mul-*

(*) De donde fácilmente se deduce *que para hallar el máximo comun divisor de varios números se halla el máximo comun divisor entre dos cualesquiera de ellos; despues el máximo comun divisor entre el máximo comun divisor hallado y otro cualquiera de dichos números, y así se continua hasta haber considerado á todos estos.*

UNED

tiplicado por el último: al contrario, *si dos números se dividen por un divisor comun, el máximo comun divisor de los dos primeros queda dividido por el mismo divisor comun.*

Porque multiplicando los dos números dados, el resíduo de la division del mayor producto por el menor queda tambien multiplicado por el mismo número, segun el teorema; el resíduo de la division del menor producto por el resíduo primero lo queda igualmente, y así en adelante hasta el último resíduo, que es el máximo comun divisor, el cual queda tambien multiplicado por el mismo número.

La segunda parte del corolario es una consecuencia necesaria de la primera.

Corolario 2.° *Si dos números se dividen por su máximo comun divisor, los cocientes son primos entre sí.*

Porque dividiendo los dos números dados por su máximo comun divisor, este queda dividido por sí mismo, conforme á la segunda parte del corolario anterior, dando por resultado 1: luego el máximo comun divisor de los cocientes es la unidad; luego son primos entre sí (**170**).

178. Teorema 2.° *Si un número entero divide á un producto de dos factores y es primo con uno de estos, dividirá al otro.*

Si 3 divide á 12×5 y es primo con el factor 5, dividirá á 12, porque el máximo comun divisor de 5 y 3 es 1: multiplicando 5 y 3 por 12, el máximo comun divisor de 5×12 y 3×12 será (**177**, corol. 1.°) $1 \times 12 = 12$: ahora, 3 divide evidentemente á 3×12 y por hipótesis á 5×12; luego tambien dividirá á 12, máximo comun divisor de estos productos (**176**, 2.°).

Corolario 1.° *Si un número primo divide al producto de varios factores, divide tambien á uno de estos.*

Sea 11 el número primo y $33 \times 46 \times 10 \times 18$ el producto; este producto se puede escribir como si tuviese dos solos factores de este modo:

$$33 \cdot 46 \cdot 10 \times 18.$$

Si 11 no divide al factor 18 será primo con él, y dividirá al otro factor $33 \cdot 46 \cdot 10$.

UNED

Este producto ó factor puede expresarse por

$$33 \cdot 46 \times 10.$$

Si 11 no divide á 10, será primo con él, y dividirá al otro factor expresado por

$$33 \cdot 46.$$

Por último, si 11 no divide á 46, dividirá á 33; luego 11 tiene que dividir á uno de los factores del producto dado, si dividia á este.

Corolario 2.° *Si un número primo divide á una potencia cualquiera de otro número, divide á este.*

Porque una potencia es el producto de un número por sí mismo varias veces (**57**); luego si el número primo divide á este producto, dividirá tambien (corol. ant.) á uno de sus factores ó sea el número dado. Así, dividiendo 5 á 20^3 dividirá á 20; porque

$$20^3 = 20 \times 20 \times 20.$$

Corolario 3.° *Las potencias de dos números primos entre sí forman otros dos números tambien primos entre sí.*

Porque si las dos potencias tuviesen un divisor comun, este dividiria á los dos números dados, segun el corolario anterior, lo que es contra la hipótesis.

Así que, siendo 8 y 9 primos entre sí, 8^5 y 9^4 lo son tambien; porque si 2, por ejemplo, dividiese á estas dos potencias, dividiria á 8 y 9; lo que es contra la hipótesis.

Corolario 4.° *Si un número es divisible por dos ó más números primos entre sí dos á dos, es divisible por el producto de todos ellos.*

Porque el número dado es un múltiplo de este producto. Si 1092 es divisible por 3, por 4 y por 7, es divisible tambien por $3 \times 4 \times 7$.

En efecto, siendo 1092 divisible por 3, se tendrá (**63**):

$$1092 = 364 \times 3.$$

Ahora, siendo 1092 divisible por 4, tambien lo sería el producto 364×3; y como 4 es primo con 3, dividirá el 364 segun el teorema; luego será

$$364 = 91 \times 4 \quad \text{ó} \quad 1092 = 91 \times 4 \times 3.$$

Por último, si 1092 es divisible por 7, $91 \times 4 \times 3$ lo sería igualmente; pero 7 es primo con 4 y con 3, luego dividiria,

UNED

segun el corolario 1.°, á 91, y por consiguiente se tendrá

$91 = 13 \times 7$ y $1092 = 13 \times 7 \times 4 \times 3 = 13 \times 7.4.3$;

luego 1092 es un múltiplo de $3 \times 4 \times 7$, luego es divisible por este producto.

Observacion. Luego un número es divisible por 6 cuando lo sea por 2 y por 3: lo será por 12 cuando lo sea por 3 y por 4, etc. etc.

179. Propongámonos descomponer á 126 en factores simples.

126 es divisible por 2 (**91**); luego se tendrá (**63**)

$$126 = 63 \times 2:$$

63 es divisible por 3 (**92**); luego resultará igualmente

$$63 = 21 \times 3 \quad \text{y} \quad 126 = 21 \times 3 \times 2;$$

21 es otra vez divisible por 3; luego tambien se tendrá

$21 = 7 \times 3$ y $126 = 7 \times 3 \times 3 \times 2 = 7 \times 3^2 \times 2$ (**56**).

Como el último cociente es número primo, se ha terminado la operacion.

Luego 126, descompuesto en factores primos, es $7 \times 3^2 \times 2$.

180 De este procedimiento, aplicable á cualquiera otro ejemplo, se deduce la siguiente regla:

Para descomponer un número en factores simples, se divide el número dado por uno de sus divisores primos: el cociente se vuelve á dividir por uno de sus divisores simples, y así sucesivamente hasta llegar á un cociente que sea número primo, el cual se dividirá por sí mismo. Los divisores empleados son los factores simples del número propuesto, y este es igual al producto de todos ellos.

Conviene, para mayor facilidad, que se elijan por divisores en primer lugar los números primos más sencillos, luégo los superiores inmediatos y así en adelante.

La operacion suele ordenarse de este modo:

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Luego $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

UNED

Otro EJEMPLO. Descompóngase el número 780 en factores simples.

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

Luego $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

ARTICULO IV.

Mínimo comun múltiplo.

181. *Llámase* MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de varios números el menor número divisible por todos ellos.*

El mínimo comun múltiplo de 30 y 20 es 60; el de 8, 12 y 9 es 72.

182. TEOREMA. *Un número no admite dos descomposiciones distintas en factores simples.*

La diversidad puede consistir: 1.° en que una descomposicion tenga algun factor que no haya en la otra: 2.° en que un mismo factor esté repetido más veces, ó tenga mayor exponente en una que en otra descomposicion.

Supongamos que $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ (**180**), en otra descomposicion admitiese el factor 7; en tal caso dividiendo 7 á 780 dividiria tambien á uno de los factores del producto $2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ (**178**, corol. 1.°); lo que es imposible, porque es primo con cada uno de ellos, incluso 2^2 (**178**, corol. 3.°).

Supongamos que $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ (**180**) tuviese en otra descomposicion 3^2, es decir que fuese, por ejemplo, $780 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13$; de estas dos igualdades resultaria

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13;$$

dividiendo por 3 los dos miembros de esta igualdad, se convertiria en

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 13 = 2^2 \times 5 \times 13;$$

el primer miembro es divisible por 3, luego el segundo tambien; luego 3 divide á uno de los factores del producto $2^2 \times 5 \times 13$, lo que es absurdo.

UNED

Luego un número no puede admitir dos descomposiciones distintas en factores simples.

Corolario. *Un número no es divisible por otro si no contiene todos los factores simples de este, repetido cada uno al ménos tantas veces como se halla en el divisor.*

Pues de lo contrario el dividendo admitiria dos descomposiciones distintas en factores simples.

Supongamos que 90, que es igual á $5\times3^2\times2$, fuese divisible por 21, que es igual á 7×3; en tal caso (**90**, corol.)

$$90=7\cdot3\times\text{cociente.}$$

En la multiplicacion del cociente por 7×3, el factor 7 no puede desaparecer, luego el 90 contendria entónces un factor 7 que no entra en la primera descomposicion; luego admitiria dos descomposiciones diferentes en factores simples, lo que es absurdo, segun el teorema.

Lo mismo se demuestra que el 90 no puede ser divisible por 12, donde se halla el factor 2^2.

Observacion. Fundándonos en este corolario y en el 4.° del teorema 2.°, núm. **178**, podriamos deducir una regla para determinar todos los factores ó divisores compuestos de un número cualquiera.

183. Propongámonos determinar el mínimo comun múltiplo de 20, 12, 70 y 36.

El número que sea divisible por 36, lo será tambien por 12 (**90**, corol.); luego podemos prescindir de este número en la determinacion del mínimo comun múltiplo.

Los números 20, 70 y 36, descompuestos en factores simples, dan (**180**)

$$20=2^2\times5 \quad 70=2\times5\times7 \quad 36=2^2\times3^2.$$

Un número será divisible por 20 si contiene á lo ménos á los factores 2^2 y 5, que son primos entre sí (**178**, corol. 3.°): lo será por igual razon por 70 si contiene á lo ménos los factores 2, 5 y 7: lo será por la misma razon por 36 si contiene á lo ménos los factores 2^2 y 3^2; luego el número $2^2\times3^2\times5\times7$, que contiene todos los factores indicados, es divisible por 20, 70 y 36, y por lo mismo por 12 tambien; luego $2^2\times3^2\times5\times7$ es múltiplo de todos los números dados.

UNED

Otro número que no contenga los factores 2^2, 3^2, 5 y 7, á lo ménos con los mismos exponentes, no es divisible á la vez por 20, 70, 36 y 12 (**182**, corol.): luego $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es el menor entre los infinitos números que pueden concebirse divisibles por 20, 70, 36 y 12, luego $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ es el mínimo comun múltiplo buscado.

Del procedimiento empleado en este caso se deduce la siguiente regla:

Para determinar el mínimo múltiplo comun á varios números se descomponen estos en sus factores simples, omitiendo aquellos que sean divisores de otros, y se forma un producto con los diferentes factores simples, poniendo á cada uno de estos el mayor exponente que lleve en las descomposiciones verificadas.

Otro EJEMPLO, Sea hallar el mínimo comun múltiplo de 40, 16, 64 y 35.

Descomponiendo 40, 64 y 35 en factores simples, puesto que el 16 se omite por ser divisor de 64, tendremos (**180**)

$$40 = 2^3 \times 5, \quad 64 = 2^6, \quad 35 = 5 \times 7.$$

Luego el mínimo comun múltiplo será

$$2^6 \times 5 \times 7 = 2240.$$

OBSERVACION. Si los números dados fuesen primos entre sí dos á dos, el mínimo comun múltiplo sería igual al producto de todos ellos. Así, el mínimo comun múltiplo de 7, 8, 13 y 15 es $7 \times 8 \times 13 \times 15$.

CAPITULO II.

Aplicacion del máximo comun divisor y mínimo comun múltiplo á la teoría de los quebrados ordinarios.

ARTICULO PRIMERO.

Reduccion de quebrados á su expresion más sencilla.

184. *Se dice que un quebrado está convertido en su expresion más sencilla, ó que es* IRREDUCIBLE, *cuando no puede expresarse por otro de menores términos.*

UNED

Corolario. *Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero.*

Porque si lo fuese, el denominador dividiria exactamente al numerador: mas como el denominador se divide tambien á sí mismo, los dos términos del quebrado dado serían divisibles por un mismo número; luego el quebrado propuesto no sería irreducible, lo que es contra la hipótesis.

Aunque la regla dada (**95**) para simplificar un quebrado es general y bastante para convertirle en irreducible, no siempre por su medio se consigue esto con facilidad, porque no la hay en conocer cuándo ambos términos son divisibles por 7, 11, 13, etc.: por esta razon vamos á exponer otra, que no está sujeta á los mismos inconvenientes.

Esta regla es una consecuencia del siguiente

185. Teorema. *Un quebrado cuyos dos términos son primos entre sí, es irreducible.*

Si el quebrado $\frac{8}{9}$ tiene numerador y denominador primos entre sí, no puede ser igual á otro de menores términos, por ejemplo $\frac{5}{7}$.

Porque si $\frac{8}{9}=\frac{5}{7}$, reduciendo estos quebrados á un comun denominador (**88**), resultaria

$$\frac{8\times 7}{9\times 7}=\frac{5\times 9}{9\times 7}.$$

Teniendo estos quebrados un comun denominador y siendo iguales, los numeradores lo serán tambien; luego

$$8\times 7=5\times 9.$$

Ahora, 8 divide al primer miembro de esta igualdad; luego tambien dividirá al segundo, mas por hipótesis es primo con el factor 9, luego dividirá al otro factor 5 (**178**): pero esto es imposible, pues se supone que 5 es menor que 8; luego $\frac{8}{9}$ no puede representarse por otro quebrado de menores términos, luego es irreducible.

Corolario. *Para reducir un quebrado á su expresion más sencilla se dividen sus dos términos por el máximo comun divisor de los mismos.*

UNED

Porque los cocientes obtenidos son primos entre sí (**177**, corol. 2.°), y por lo tanto el quebrado resultante es irreducible.

Ejemplo. Redúzcase el quebrado $\frac{130}{195}$ á su expresion más sencilla.

El máximo comun divisor de 195 y 130 es 65; dividiendo por él los dos términos del quebrado propuesto, resulta $\frac{2}{3}$, que es el quebrado irreducible equivalente al dado.

ARTICULO II.

Reduccion de quebrados al menor denominador comun posible.

186. Las reglas expuestas (**88**) para reducir quebrados á un comun denominador, producen muchas veces fracciones demasiado complicadas, y por eso vamos á exponer otra por medio de la cual se obtenga el menor denominador comun posible.

Como fundamento de ella demostrarémos el siguiente

187. Teorema. *Si un quebrado irreducible es equivalente á otro, los dos términos de este son* equi-múltiplos *de los dos términos de aquel.*

Si $\frac{3}{7}=\frac{39}{91}$

39 es un múltiplo de 3, y 91 es el mismo múltiplo de 7.

Reduciendo estos quebrados á un comun denominador, resulta

$$\frac{3\times 91}{7\times 91}=\frac{39\times 7}{91\times 7};$$

teniendo estos quebrados un comun denominador y siendo iguales, los numeradores lo serán tambien; luego

$$3\times 91=39\times 7.$$

Ahora, 3 divide al primer miembro de esta igualdad; luego tambien dividirá al segundo; pero es primo, por hipótesis, con el factor 7; luego dividirá al otro factor 39 (**178**); luego 39 es múltiplo de 3.

UNED

Dividiendo la igualdad evidente $39\times91=39\times91$ por la demostrada $3\times91=39\times7$, se tiene

$$\frac{39\times91}{3\times91}=\frac{39\times91}{39\times7},$$

y suprimiendo el factor 91 en los dos términos del primer quebrado y el 39 en los del segundo, resulta (**86**, 7.°)

$$\frac{39}{3}=\frac{91}{7}:$$

mas siendo 39 múltiplo de 3, $\frac{39}{3}$ da cociente exacto, $\frac{91}{7}$ dará el mismo cociente; luego 91 es igual múltiplo de 7 que 39 de 3.

Corolario. *Si un quebrado irreducible es equivalente á otro tambien irreducible, los dos términos de este son respectivamente iguales á los dos términos de aquel.*

Porque de lo contrario, los dos términos del último quebrado serían equi-múltiplos de los dos términos del primero; luego serían divisibles por un mismo número diferente de 1; luego el segundo quebrado no sería irreducible, lo que es contra la hipótesis.

188. Propongámonos reducir los quebrados

$$\frac{11}{12}, \frac{6}{16}, \frac{13}{20}, \frac{12}{21},$$

al menor denominador comun posible.

Desde luego observarémos que el segundo y cuarto de estos quebrados pueden expresarse por otros más sencillos; puesto que los dos términos de $\frac{6}{16}$ son divisibles por 2, y los de $\frac{12}{21}$ por 3; y pudiendo suceder que estos factores 2 y 3, que innecesariamente complican á dichos quebrados, compliquen tambien al denominador comun, como se verá sucede con el 2, los reduciremos de antemano á su más sencilla expresion; con lo que los quebrados propuestos se convertirán en

$$\frac{11}{12}, \frac{3}{8}, \frac{13}{20}, \frac{4}{7};$$

Ahora, los quebrados que vamos á determinar han de tener un comun denominador y deben ser además respectivamente equivalentes á los anteriores. Para que reunan esta condicion es necesario, segun el teorema último, que el denominador

comun que se obtenga sea múltiplo de todos los denominadores de dichos quebrados; luego el denominador comun no puede ser menor que el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados propuestos, reducidos á su más sencilla expresion.

Hallemos, pues, el mínimo comun múltiplo de 12, 8, 20 y 7; el cual es 840 (**183**).

Dividiendo 840 por el denominador 12 del primer quebrado, el cociente será exacto y da 70. Si los dos términos del primer quebrado se multiplican por 70, el quebrado resultante $\frac{770}{840}$ es equivalente al propuesto y tiene por denominador el mínimo comun múltiplo.

Ejecutando iguales operaciones con los quebrados restantes se convertirán: el segundo en $\frac{315}{840}$, el tercero en $\frac{546}{840}$ y el cuarto en $\frac{480}{840}$.

Luego los quebrados $\frac{770}{840}$, $\frac{315}{840}$, $\frac{546}{840}$, $\frac{480}{840}$, son equivalentes á los propuestos, tienen un denominador comun, y este es el menor posible.

De este procedimiento se deduce la siguiente regla:

Para reducir varios quebrados al menor denominador comun posible, se reduce cada uno de ellos á su expresion más sencilla, se halla el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados irreducibles, y este será el denominador comun. Para formar los numeradores, se multiplica el de cada quebrado irreducible por el cociente que resulte de dividir el mínimo comun múltiplo por el denominador del mismo quebrado.

Observacion. Si los denominadores de los quebrados irreducibles fuesen primos entre sí dos á dos, el mínimo comun múltiplo sería igual al producto de todos ellos (**183**, obs.), y la regla anterior produciria quebrados idénticos á los que resultan de la regla general del núm. **88**.

CAPITULO III.

Reduccion de quebrados ordinarios á decimales, y recíprocamente.

ARTÍCULO I.

Reduccion de quebrados ordinarios á decimales.

189. Ya se ha dicho (**136**, corol.) que *para convertir un quebrado ordinario en decimal equivalente, basta considerar aquel como una division del numerador por el denominador, suponiendo despues del numerador una coma y á continuacion de esta los ceros que se quiera.*

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos.

1.° Hallar la fraccion decimal equivalente á $\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r|l} 3,0\ldots & 4 \\ 20 & \hline 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

Luego $\frac{3}{4} = 0,75$.

2.° Reducir $\frac{5}{7}$ á quebrado decimal.

$$\begin{array}{r|l} 5,0\ldots & 7 \\ 10 & \hline 0,71428571\ldots. \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 3 & \end{array}$$

Luego $\frac{5}{7} = 0,71428571\ldots.$

3.° Conviértase $\frac{8}{15}$ en quebrado decimal.

$$\begin{array}{r|l} 8,0\ldots & 15 \\ 50 & \hline 0,533\ldots \\ 50 & \\ 5 & \end{array}$$

Luego $\frac{8}{15} = 0,533\ldots.$

Observacion. En el primer ejemplo el cociente resultó exacto, mas no ha sucedido lo mismo en el 2.° y 3.°, en los que la repeticion de los restos indica que no lo sería nunca por mucho que se prolongase la operacion.

En el caso de los dos últimos ejemplos se comprende que debiendo ser cada resto menor que el divisor, los restos deben repetirse, á lo más, despues de ejecutar tantas divisiones parciales como unidades menos una tiene el divisor. Así que, en el ejemplo 2.° habiendo resultado los restos 1, 3, 2, 6 y 4, no podia menos de repetirse alguno de los anteriores ó el dividendo 5, como sucedió á la sexta division parcial.

Repitiéndose los restos de los cocientes inexactos, se repiten los dividendos parciales, formados por ellos y por uno ó por más ceros á la derecha, y siendo preciso que los dividendos se repitan, se repetirán tambien las cifras del cociente, formando así *períodos* de una, dos ó más cifras, *tantas á lo más como unidades ménos una tiene el divisor.*

De la observacion que precede se deduce la division de las fracciones decimales en *exactas* y *periódicas.*

190. *Se llama fraccion decimal* exacta *la que contiene un número limitado de cifras*, como 0,75.

Se llama fraccion decimal periódica *aquella que contiene un número ilimitado de cifras, algunas de las que se repiten indefinidamente*, como 0,5333..... y 0,714285714.....

El *período* lo forman las cifras que se repiten; en el primero de los ejemplos anteriores el período es 3, en el segundo 714285.

Las fracciones periódicas se subdividen en *puras y mistas.*

Se llama fraccion periódica pura *aquella en que el período principia desde la coma*, como 0,4646.....

Se llama fraccion periódica mista *aquella en que el período no principia desde la coma*, como 0,5333.....

ARTICULO II.

Reduccion de quebrados decimales á ordinarios.

191. *Se llama* quebrado generador, *ó* fraccion generatriz *de otra fraccion decimal, el quebrado ordinario de*

que la fraccion decimal provino, ó equivalente á esta.

De modo que $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{8}{15}$ son respectivamente las fracciones generatrices de 0,75, 0,714285714...., y 0,533.....

En la reduccion de un quebrado decimal ordinario, ó sea en la determinacion de la fraccion generatriz de otra decimal dada, distinguiremos tres casos: 1.° *que la fraccion decimal sea exacta:* 2.° *que sea periódica pura:* 3.° *que sea periódica mista.*

192. 1.er CASO. *Para reducir una fraccion decimal exacta á fraccion ordinaria, se omite la coma, y el número que resulta se pone por numerador, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado* (**122**). Así

$$0,37=\frac{37}{100} \qquad 0,048=\frac{48}{1000}=\frac{24}{500}=\frac{12}{250}=\frac{6}{125} \qquad 47,39=\frac{4739}{100}.$$

OBSERVACION. El numerador del quebrado obtenido por la regla precedente no termina en cero, porque su última cifra es la última de la fraccion decimal, y si al fin de esta hubiese uno ó más ceros se omitirian por inútiles ántes de la reduccion (**124**, 1.°). Así

$$0,570=0,57=\frac{57}{100}.$$

COROLARIO. *Si una fraccion decimal es exacta, los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible son 2 y 5 ó uno de estos solamente, y el mayor exponente de 2 y 5 será igual al número de cifras decimales.*

El denominador de la fraccion generatriz es, segun la regla, la unidad seguida de ceros; y 10, 100, 1000, etc. no tiene más factores simples que 2 y 5: al simplificar dicha fraccion no pueden aparecer nuevos factores, pero sí podrán desaparecer el 2 ó el 5; luego la primera parte del corolario es evidente.

Los factores 2 y 5 se hallan en el denominador de la fraccion generatriz, ántes de simplificarla, con un exponente igual al número de cifras decimales; porque el número de estas es igual al de ceros que acompañan á la unidad, segun la regla, y $10=2\times5$, $100=2^2\times5^2$, $1000=2^3\times5^3$, etc. Por otra parte, no terminando el numerador en cero (obs. ant.) no es divisible por 10, luego los dos términos del quebrado solo pueden ser divisibles por uno de los factores 2 ó 5; luego el otro quedará despues de hecha la simplificacion con el mismo exponente que tenia ántes de ella; esto es, con un exponente igual al número de cifras decimales.

193. 2.° CASO. Este y el siguiente no pueden resolverse como el anterior; porque siendo la fraccion periódica indefi-

UNED

nida, los dos términos de la fraccion ordinaria equivalente tendrian un número ilimitado de cifras.

Propongámonos, pues, hallar la fraccion generatriz de 0,4545..... Tendrémos

$$\textit{fraccion generatriz} = 0{,}4545.....$$

Multiplicando por 100 los dos miembros de esta igualdad, con lo que no se altera y equivale en el segundo á colocar la coma despues del primer período, resulta

$$\textit{fraccion generatriz} \times 100 = 45{,}4545.....$$

Restando de esta igualdad la anterior, y advirtiendo que en la última la parte decimal tiene igual número de períodos que en la otra, puesto que en las dos es ilimitado, se tendrá

$$\textit{fraccion generatriz} \times 99 = 45.$$

De donde partiendo por 99 los dos miembros, resulta

$$\textit{fraccion generatriz} = \frac{45}{99} \quad \text{ó} \quad 0{,}4545..... = \frac{45}{99} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}.$$

Del método empleado en este ejemplo, que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para hallar el quebrado generador de una fraccion decimal periódica pura, ó para reducir esta á quebrado ordinario equivalente, se pone por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene dicho período. Así

$$0{,}142142..... = \frac{142}{999} \qquad 0{,}66..... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Corolario. *Si una fraccion decimal es periódica pura, ninguno de los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible es 2 ni 5.*

Porque el denominador termina, segun la regla, en 9; luego no es divisible por 2 ni por 5 (**172**, obs.) ántes de simplificar el quebrado resultante; y como la simplificacion no aumenta los factores de cada término del quebrado, sino que por el contrario los disminuye, tampoco lo será despues de convertido este en irreducible.

194. 3.er caso. Sea hallar el quebrado generador de la fraccion decimal 0,83535..... Tendrémos

$$\textit{fraccion generatriz} = 0{,}83535.....$$

Multiplicando por 1000 los dos miembros de esta igualdad, con lo que no se altera y equivale en el segundo á colocar la coma despues del primer período, resulta

$$\textit{fraccion generatriz} \times 1000 = 835{,}35.....$$

Multiplicando por 10 los dos miembros de la misma igualdad, con lo que tampoco se altera y equivale en el segundo á colocar la coma despues de la parte no periódica, se tiene

$$\textit{fraccion generatriz} \times 10 = 8{,}3535.$$

Restando esta igualdad de la anterior, y advirtiendo que en la última parte decimal tiene igual número de períodos que en la primera, puesto que en las dos es ilimitado, se tendrá

$$\textit{fraccion generatriz} \times 990 = 835 - 8.$$

De donde dividiendo los dos miembros por 990, resulta

$$\textit{fraccion generatriz} = \frac{835-8}{990} \text{ ó } 0{,}83535\ldots = \frac{835-8}{990} = \frac{827}{990}.$$

Del procedimiento empleado en este ejemplo, que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la regla siguiente:

Para hallar el quebrado generador de una fraccion decimal periódica mista, ó para reducir esta á quebrado ordinario equivalente, se pone por numerador la diferencia entre la parte no periódica y ésta unida con el primer período, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, y despues de los nueves tantos ceros como cifras no periódicas haya.

De modo que $0{,}533\ldots = \frac{53-5}{90} = \frac{48}{90} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

Si en este caso ó en el anterior la fraccion decimal fuese mista, se considerarán los enteros unidos á la parte no periódica ó formando ésta, si la fraccion no la tiene, y queda el caso 3.°; advirtiendo solamente, que *despues de los nueves del denominador no se pondrán más ceros que los que correspondian por la parte no periódica que habia ántes de unirle los enteros, ó ninguno si la fraccion era periódica pura.* Así

$$5{,}733\ldots = \frac{573-57}{90};$$

porque $5{,}733\ldots = 10 \times 0{,}5733\ldots = 10 \times \frac{573-57}{900} = \frac{573-57}{90}$.

De igual modo: $46{,}3535\ldots = \frac{4635-46}{99}$; porque

$46{,}3535\ldots = 100 \times 0{,}463535\ldots = 100 \times \frac{4635-46}{9900} = \frac{4635-46}{99}$.

Observacion. El numerador del quebrado obtenido por la regla precedente no termina en cero: porque su última cifra es la diferencia entre la última de la parte no periódica y la última del período, y estas

dos cifras no pueden ser iguales, pues de serlo, el período principiaria desde la última cifra inclusive de la parte no periódica. Si en la fraccion $0,3741515\ldots = \frac{37415-374}{99000}$, en que vemos que hay tres cifras no periódicas, se supone que las dos últimas cifras de los términos del numerador de la fraccion ordinaria equivalente son iguales, se convertirá en 0,375151...., ó en 0,374141....., donde la parte no periódica tiene solo dos cifras contra lo supuesto.

Corolario. *Si una fraccion decimal es periódica mista, los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible son 2 y 5 ó uno de estos, y además algun otro factor distinto de ellos; y el mayor exponente de 2 y 5 es igual al número de cifras no periódicas.*

El denominador de la fraccion generatriz se compone de tantos nueves como cifras tiene el período, y despues de los nueves de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, luego puede descomponerse en dos factores: el primero la unidad seguida de tantos ceros como lleva dicho número al fin, ó como cifras no periódicas hay; y el segundo formado por uno ó más nueves. El primero de dichos factores, como $10=2\times5$, $100=2^2\times5^2$, $1000=2^3\times5^3$, etc., es 2×5 elevado cada uno de estos factores simples á una potencia igual al número de cifras que tenga la parte no periódica; y no pueden tenerla más elevada en el denominador, porque el segundo factor, en que suponemos descompuesto á aquel, formado por uno ó varios nueves, no es divisible por 2 ni por 5, y no contiene por lo tanto á ninguno de estos números primos. Ahora, como el numerador del quebrado no termina en cero (obs. ant.), no es divisible por 10; luego los dos términos del quebrado solo pueden ser divisibles por uno de los factores simples 2 ó 5; luego el otro quedará despues de hecha la simplificacion con un exponente igual al número de cifras no periódicas.

Resta solo demostrar que en el denominador hay algun otro factor distinto de 2 y 5. En efecto, si así no fuese, multiplicando el numerador de la fraccion generatriz por la unidad seguida de suficiente número de ceros, como este factor sería en tal caso múltiplo del denominador ó igual con él, la fraccion generatriz se convertiria exactamente en decimal, y por lo tanto seria el quebrado generador de una fraccion decimal exacta, contra la hipótesis.

ARTICULO III.

Casos en que un quebrado ordinario reducido á decimal produce fraccion exacta, periódica ó mista.

Las proposiciones recíprocas de los tres corolarios de las reglas precedentes son tambien ciertas, es decir que

195. 1.° *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible son 2 y 5 ó uno de estos solamente, la fraccion decimal equivalente será exacta; y el número de cifras decimales será igual al mayor exponente de 2 y 5.*

Si la fraccion decimal no fuese exacta, sería periódica pura ó mista.

Si fuese periódica pura, los factores del denominador de la fraccion generatriz no serían 2 ni 5 (**193**, corol.), contra la hipótesis de la proposicion. Si fuese periódica mista, alguno de los factores del denominador de la fraccion generatriz sería diferente de 2 y 5 (**194**, corol.), lo que tambien es contra la misma hipótesis.

Luego la fraccion decimal equivalente es exacta.

Si el número de cifras decimales no fuese igual al mayor exponente de 2 y 5, sería mayor ó menor que dicho exponente.

Supongamos que el mayor exponente de 2 y 5 sea, por ejemplo, 4, y el número de cifras decimales 6, el mayor exponente de 2 y 5 del denominador de la fraccion generatriz irreducible sería en tal caso igual á 6, número de cifras decimales (**192**, corol.); lo que es contra la hipótesis que acaba de hacerse. Luego el número de cifras decimales á que da lugar un quebrado irreducible no puede ser mayor que el mayor exponente de 2 y 5, factores del denominador del mismo quebrado ordinario.

Lo mismo se demuestra que no puede ser menor; luego el número de cifras decimales tiene que ser igual al mayor exponente de 2 y 5.

196. 2.ª *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible no fueren 2 ni 5, la fraccion decimal equivalente será periódica pura, y el período tendrá tantas cifras á lo más como unidades menos una tiene el denominador.*

La primera parte de esta proposicion se demuestra *ad absurdum* como la primera parte de la anterior: la segunda está demostrada (**189**, obs.).

197. 3.ª *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible son 2 y 5, ó uno de estos, y algun otro factor distinto de 2 y 5, la fraccion decimal equivalente será periódica mista, y el número de cifras no periódicas será igual al mayor exponente de 2 y 5.*

Esta proposicion se demuestra tambien de una manera análoga á la primera.

Ejemplos. Los quebrados $\frac{29}{50}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{18}{125}$, como son respectivamente iguales á $\frac{29}{5^2\times 2}$, $\frac{3}{2^2}$, $\frac{18}{5^3}$, dan fracciones decimales exactas; debiendo tener la primera dos cifras decimales, la segunda otras dos, y la tercera tres.

Los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{21}$ dan fracciones decimales periódicas puras, no pudiendo exceder el período de la primera de dos cifras y el de la segunda de veinte.

Los quebrados $\frac{8}{35}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{29}{150}$, como son respectivamente iguales á $\frac{8}{7\times 5}$, $\frac{17}{2^3\times 3}$, $\frac{29}{2\times 3\times 5^2}$, dan fracciones decimales periódicas mistas; siendo el número de cifras de la parte no periódica, una en la primera, tres en la segunda y dos en la tercera.

UNED

CAPITULO IV.

Elevacion á potencias y extraccion de raíces de los números.

ARTICULO I.

Elevacion á potencias.

198. La elevacion de un número entero ó fraccionario á una potencia cualquiera, se reduce, segun la definicion de esta (**56**), á la multiplicacion del número dado por sí mismo una ó más veces. Conocidas pues, las reglas de la multiplicacion de los números, la operacion indicada no puede ofrecer ninguna dificultad.

EJEMPLOS.

1.° $25^4=25\times25\times25\times25=625\times25\times25=15625\times25=390625$.

2.° $130^2=130\times130=16900$.

3.° $130^3=130\times130\times130=16900\times130=2197000$.

4.° $0{,}71^2=0{,}71\times0{,}71=0{,}5041$.

5.° $0{,}71^3=0{,}71\times0{,}71\times0{,}71=0{,}5041\times0{,}71=0{,}357911$.

6.° $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$.

7.° $\left(2\frac{5}{7}\right)^3=\left(\frac{19}{7}\right)^3=\frac{19^3}{7^3}=\frac{6859}{343}$.

8.° $(2\times4\times5)^3=2\cdot4\cdot5\times2\cdot4\cdot5\times2\cdot4\cdot5=2\cdot2\cdot2\times4\cdot4\cdot4\times5\cdot5\cdot5=2^3\times4^3\times5^3$.

199. De la naturaleza de la elevacion á potencias se deducen las siguientes consecuencias comprobadas por los ejemplos precedentes.

1.ª *El cuadrado de un número que termina en ceros tiene duplo número de ceros que el dado; el cubo triplo número de ceros, etc.* (ejem. 2.° y 3.°).

2.ª *El cuadrado de un número decimal tiene duplo número de cifras decimales que el dado: el cubo triplo número de cifras decimales, etc.* (ejem. 4.° y 5.°).

3.° *Para elevar un quebrado ordinario á una potencia*

cualquiera, se elevan numerador y denominador á la misma potencia (ejem. 6.°).

4.ª *Para elevar un número misto, se reduce á quebrado y luego se eleva como este* (ejem. 7.°).

5.ª *Las potencias de los números mayores que la unidad van siendo mayores á medida que el exponente de la potencia es mayor, y las de los números menores que la unidad van siendo menores cuando crece el exponente* (ejem. 1.°, 2.°, 4.°, 5.° y 6.°)

6.ª *Para elevar á una potencia un producto de varios factores, basta elevar cada factor á la misma potencia y luego multiplicar estas potencias entre sí* (*).

ARTICULO II.

Extraccion de raíces.

PRELIMINARES.

200. *Se llama* RAÍZ DE CIERTO GRADO DE UN NÚMERO *otro número que elevado á una potencia de igual grado produce el propuesto.*

RAÍZ SEGUNDA Ó CUADRADA *de un número es otro número que elevado á la segunda potencia ó cuadrado produce el dado.*

La raíz cuadrada de 49 es 7; porque $7^2=49$.

RAÍZ CÚBICA *de un número es otro número cuyo cubo ó tercera potencia produce el primero.*

La raíz cúbica de 27 es 3; porque $3^3=27$.

La extraccion de raíces se indica con este signo $\sqrt{\ }$ al que se da el nombre de *radical*, entre cuyas ramas se coloca un número llamado *índice de la raíz*, que indica el grado de

---

(*) Esta consecuencia es cierta, aunque uno, varios ó todos los factores sean inconmensurables; porque está fundada en la definicion de las potencias, y en que *un producto no varía cualquiera que sea el órden de colocacion de sus factores*; y este teorema es cierto para los números enteros (**48** y **54**), para los quebrados ordinarios y números mistos (**106**, corol. 2.° y 3.°), para los decimales una vez que pueden reducirse exactamente á ordinarios (**192**, **193** y **194**), y por último para los números inconmensurables, supuesto que el valor de estos se puede hallar en decimales tan aproximado como se quiera, segun se infiere de los números **216** y **230**; y aun sería fácil demostrarlo con todo rigor.

esta; exceptuando la extraccion de la raíz cuadrada, que se acostumbra á indicar con solo el signo radical, omitiendo el índice 2 que le corresponde.

Así, $\sqrt{64}$ indica la raíz cuadrada de 64: $\sqrt[3]{27}$ la raíz cúbica de 27, etc.

201. No todos los números enteros tienen raíz exacta en números tambien enteros; porque es evidente que no todos estan formados por potencias exactas de otros.

Así que, la $\sqrt{8}$ no es exacta, porque no hay ningun número entero que elevado al cuadrado produzca 8: $\sqrt[3]{12}$ tampoco lo es por una razon análoga.

Esto supuesto, *se llama* RAÍZ ENTERA DE CIERTO GRADO *de un número mayor que* 1, *la raíz exacta de la mayor potencia entera de igual grado contenida en el mismo número.*

Así, la raíz cuadrada entera de 8 es 2; porque siendo $2^2=4$ y $3^2=9$, el mayor cuadrado contenido en 8 es 4, cuya raíz cuadrada es 2.

Por igual razon la raíz cúbica entera de 32 es 3.

COROLARIO. *La raíz entera de un número se diferencia de la verdadera en ménos de una unidad.*

Porque concretándonos al primero de los ejemplos anteriores, 8 está comprendido entre 4 y 9, luego su raíz cuadrada estará tambien comprendida entre las raíces cuadradas de estos dos números; luego será mayor que 2, raíz cuadrada del primero, y menor que 3, raíz cuadrada del segundo; luego tomando á 2 por raíz cuadrada de 8 se comete un error menor que la unidad. Lo mismo podriamos demostrar en cualquier otro ejemplo.

202. *Se llama* RESÍDUO DE LA RAÍZ DE UN NÚMERO *la diferencia entre dicho número y la potencia de igual grado de su raíz entera.*

COROLARIO. *El resíduo más una potencia de la raíz de igual grado que esta, componen evidentemente el número de que la raíz se extrajo.*

El resíduo de $\sqrt{7}$ es 3, porque $7-2^2=3$; y $2^2+3=7$.

203. TEOREMA 1.° *La diferencia entre la verdadera raíz de un número y su raíz entera, no puede expresarse exactamente por un quebrado ordinario ni decimal.*

UNED

Supongamos que sea $\frac{6}{9}$ lo que falta á 2 para ser la raíz cuadrada verdadera de 8; en tal caso $2\frac{6}{9}$ sería dicha raíz.

Reduciendo el misto á quebrado y convirtiendo este en irreducible, si no lo fuese, tendriamos

$$2\frac{6}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$$

Luego $\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8^2}{3^2}=8$; pero esta igualdad es absurda, pues siendo irreducible $\frac{8}{3}$ tambien lo es $\frac{8^2}{3^2}$ (**179**, corol. 3.°), y siéndolo este no puede ser igual á un número entero (**184**, corol.).

Si la diferencia viniese expresada por un quebrado decimal, reduciéndole á ordinario, se tendria el absurdo anterior.

Como este raciocinio puede hacerse con otros números cualesquiera y con otra raíz de grado distinto, el teorema general es cierto.

Corolario. *La raíz de un número entero que no puede expresarse exactamente por otro entero, no puede expresarse tampoco por un misto ordinario, ni decimal.*

204. Teorema 2.° *La raíz de un quebrado irreducible en que uno de sus términos no tiene raíz exacta, no puede expresarse tampoco exactamente por otro quebrado.*

Supongamos que siendo el quebrado $\frac{27}{32}$ irreducible, y no teniendo 32 raíz cúbica exacta, se tenga sin embargo $\sqrt[3]{\frac{27}{32}}$ igual al quebrado $\frac{3}{4}$ tambien irreducible, entónces $\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{32}$. Mas estos dos quebrados son irreducibles, el primero por lo dicho (**178**, corol. 3.°), y el segundo por hipótesis; luego $4^3=32$ (**187**, corol.); luego 32 tiene raíz cúbica exacta, lo que es contra la hipótesis.

205. *Se llaman* números irracionales *ó* inconmensurables *las raíces de números que no las tienen exactas;* y se les da este nombre porque no pudiendo expresarse por enteros ni por quebrados, no tienen relacion exacta con la unidad ni con parte alícuota de esta.

$\sqrt{8}$ $\sqrt[3]{12}$ $\sqrt[3]{\frac{27}{32}}$ son inconmensurables.

UNED

206. Se ha visto (**196**, 6.ª) que $(2\times4\times5)^3=2^3\times4^3\times5^3$; de donde se infiere (**200**) que

$$2\times4\times5=\sqrt[3]{2^3\times4^3\times5^3};$$

luego la raíz cúbica del producto $2^3\times4^3\times5^3$ se halla extrayendo la de cada factor y multiplicándolas entre sí: y como el mismo raciocinio puede hacerse con otro ejemplo cualquiera resulta que

Para extraer la raíz de un grado cualquiera de un producto de varios factores basta extraer la de igual grado de cada uno de dichos factores y multiplicar luego estas raíces entre sí.

Corolario. *Si un número se multiplica por una potencia cualquiera de otro, la raíz de igual grado del primero queda multiplicada por el segundo.*

Si el número 15, por ejemplo, se multiplica por 10^2, la raíz cuadrada de 15 queda multiplicada por 10.

En efecto, segun la regla, $\sqrt{15\times10^2}=\sqrt{15}\times10$.

ARTICULO III.

Raíz cuadrada de los números enteros.

207. En esta operacion se distinguen dos casos: 1.° *que el número no pase de* 100: 2.° *que sea mayor que* 100.

208. 1.er caso. Este caso se resuelve sabiendo de memoria los cuadrados de los diez primeros números, lo que se consigue por la tabla de multiplicar.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 (*).

La raíz cuadrada de cada número de la fila anterior es su correspondiente de la superior (**200**). Así

$$\sqrt{36}=6 \qquad \sqrt{81}=9 \qquad \text{etc.}$$

(*) De la simple inspeccion de este cuadro se infiere que de los números enteros desde 1 á 100, ambos inclusive, solo diez tienen raiz cuadrada exacta: y fácilmente se comprende que desde 1 á 1000, ambos tambien inclusive, ciento solamente darán la misma raíz exacta, etc. etc.

La raíz cuadrada entera de un número comprendido entre dos de la fila inferior es la raíz cuadrada del menor de estos (**201**). De modo que la $\sqrt{18}$ es 4 y el resíduo 2, la $\sqrt{94}$ es 9 y el resíduo 13, etc.

209. 2.° caso. La resolucion de este caso se funda en el siguiente

Teorema. *El cuadrado de la suma de dos números se compone del cuadrado del primero, más el duplo del primero multiplicado por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Es decir que, por ejemplo,

$$(8+5)^2=8^2+2\times 8\cdot 5+5^2.$$

Sumando 8 con 5 y elevando la suma 13 al cuadrado, tendriamos un resultado numéricamente igual al que queremos obtener; mas en tal caso no serviria para el objeto que nos proponemos.

Para ejecutar la elevacion sin que los dos sumandos dados formen un sólo número, ó sea para demostrar el teorema, observarémos que (**56**)

$$(8+5)^2=(8+5)\times(8+5),$$

y tambien que para obtener este producto basta multiplicar el primer factor $8+5$ primero por 8, despues por 5 y sumar los dos resultados.

$$(8+5)\times 8=8\times 8+5\times 8=8^2+5\times 8,$$
$$(8+5)\times 5=8\times 5+5\times 5=5\times 8+5^2.$$

Sumando estos dos resultados, se tendrá

$$(8+5)\times(8+5)=8^2+5\times 8+5\times 8+5^2.$$

Poniendo en lugar del primer miembro de esta igualdad, su equivalente $(8+5)^2$, y sustituyendo en el segundo, en vez de los sumandos iguales $5\times 8+5\times 8$, el duplo de uno de ellos $2\times 5\cdot 8$ ó $2\times 8\cdot 5$, resultará

$$(8+5)^2=8^2+2\times 8\cdot 5+5^2.$$

Corolario 1.° *El cuadrado de un número que contiene decenas y unidades* descompuesto en estas dos partes *consta del cuadrado de las decenas, duplo de las decenas por las unidades y cuadrado de las unidades.* Así

$$73^2=(70+3)^2=70^2+2\times 70\cdot 3+3^2.$$

Observacion. *El cuadrado de las decenas* termina siempre en dos ceros (**199**, 1.ª), y por consiguiente *es un número*

exacto de centenas: el duplo de decenas por unidades termina en un cero (**54**, corol. 2.°), y por tanto, *es un número exacto de decenas: el cuadrado de unidades es un número exacto de unidades.*

En el ejemplo anterior tendrémos

$$\begin{array}{r} 70^2 = 4900 \\ 2\times 70\cdot 3 = 420 \\ 3^2 = 9 \\ \hline 73^2 = 5329. \end{array}$$

Corolario 2.° *Si un número excede á otro en una unidad, el cuadrado del mayor excede al del menor en el duplo de este más uno.*

Sean los números 13 y 12.

$$13^2 = (12+1)^2 = 12^2 + 2\times 12 + 1$$

$$\begin{array}{rl} 12^2 = & \ldots\ldots\ldots\ldots 12^2 \\ \hline \text{Diferencia}\ldots\ldots & 13^2 - 12^2 = \quad 2\times 12+1. \end{array}$$

Corolario 3.° *El resíduo de la raíz cuadrada entera de un número es menor que el duplo de la misma raíz más uno.*

Porque los dos cuadrados entre quienes se halla el número dado (puesto que sus raíces se diferencian en la unidad), se diferencian en el *duplo de la raíz del menor más uno;* luego el número propuesto se diferenciará de cualquiera de ellos en ménos que esta cantidad.

210. Propongámonos extraer la raíz cuadrada entera de 5461, que no tiene más que cuatro cifras.

Siendo $10^2 = 100$ menor que el número dado, y $100^2 = 10000$ mayor que el mismo, la raíz cuadrada de 5461 será mayor que 10 y menor que 100; luego ha de constar de dos cifras, luego constará de *decenas y unidades.*

Para determinar las decenas de la raíz observarémos que siendo el número propuesto igual al cuadrado de la raíz entera más el resíduo, podrá considerarse formado por el cuadrado de las decenas, más el duplo de decenas por unidades, más el cuadrado de unidades, más el resíduo si le hay.

Ahora, como el cuadrado de las decenas es un número exacto de centenas (**209**, obs.), el cuadrado de las decenas de

la raíz que buscamos debe hallarse en las centenas del número dado, esto es, en 54 (que para mayor claridad separamos con un punto de este modo 54.61); mas como entre estas centenas pueden hallarse algunas, resultantes de la suma del duplo de decenas por unidades, cuadrado de unidades y resíduo, extrayendo la raíz cuadrada de 54 se encontrará 7, que no puede ser menor que las decenas de la raíz. Tampoco puede ser mayor, pues en tal caso excederia en una unidad, al ménos, á las decenas de la raíz del número dado, y por consiguiente sería mayor que toda la raíz de este número; luego la raíz cuadrada de las centenas de un número sería mayor que la raíz cuadrada de todo el número, lo que es absurdo.

Luego 7 son las verdaderas decenas de la raíz.

Luego las decenas de la raíz cuadrada de un número se determinan extrayendo la raíz cuadrada de las centenas de dicho número.

Para determinar las unidades de la raíz, recordarémos que todo el número 54.61 está formado por el cuadrado de las decenas de la raíz, duplo de decenas por unidades, cuadrado de unidades y por el resíduo, si le hay; luego si de las centenas del número dado restamos el cuadrado de las decenas, nos quedarán las otras dos partes más el resíduo. De modo que

número dado..... 54.61
cuadrado de decenas..... 49

la diferencia..... 5 61 contiene el duplo de decenas por unidades, el cuadrado de las unidades y el resíduo.

El duplo de decenas por unidades es un número exacto de decenas (**209**, obs.); luego esta parte del cuadrado debe hallarse en las 56 decenas del resto total anterior (que para mayor sencillez se separan con un punto, así 56.1): mas en este número de decenas pueden hallarse tambien algunas decenas que provengan de la suma del cuadrado de las unidades y resíduo; luego dividiendo las 56 decenas por el duplo de decenas halladas, ó sea por 14, se tendrá que el cociente 4 serán las unidades de la raíz ó un número mayor que estas.

Luego para determinar la cifra de las unidades de la raíz, se dividen las decenas que quedan despues de restar del nú-

mero dado el cuadrado de las decenas, por el duplo de las decenas halladas, y el cociente entero será la cifra de las unidades ó un número mayor que estas.

A fin de averiguar si la cifra 4 es ó no mayor de lo que corresponde, y tambien para determinar el resíduo de la operacion, formamos las otras dos partes del cuadrado de la raíz.

Duplo de decenas por unid... 4×14 dec.$=56$ decenas.
Cuadrado de las unidades..... $4^2=$..... 16 unidades.

Suma..... 576 unidades.

Como esta suma no puede restarse de la diferencia anterior 561, la cifra 4 es mayor de lo que corresponde.

Rebájesele una unidad, y formando las dos partes del cuadrado en esta hipótesis, es decir, de que las cifras de las unidades es 3, resultará:

Duplo de decenas por unid..... 3×14 decenas$=$ 42
Cuadrado de las unid..... $3^2=$..... 9

Suma..... 429.

Siendo esta suma menor que el resto precedente 561 se puede rebajar de este, y hallando la diferencia resultará el número 132; luego la cifra 3 es buena, y 132 es el resíduo de la operacion.

Luego la raíz cuadrada de 5461 es 73 y quedan 132 de resíduo.

Las dos partes del cuadrado pueden formarse más fácilmente escribiendo al lado del duplo de las decenas, que sirvió de divisor, la cifra de las unidades que se comprueba, y multiplicando el número así formado por la misma cifra que trata de comprobarse; lo que será (refiriéndonos á la última comprobacion) $143 \times 3 = 429$, cuyo producto comprende evidentemente dichas dos partes.

Luego para comprobar la cifra de las unidades que da la regla anterior, se escribe esta cifra á la derecha del divisor, se multiplica este número por la misma cifra, y si el producto puede restarse del dividendo anterior unido con las unidades que se separaron, la cifra que se comprueba es buena; si no, no lo será, y se le rebaja una unidad para ensayarla de nuevo.

UNED

La operacion puede ordenarse como á continuacion se ve:

```
54.6 1 | 73
       |-----
 5 6.1 | 143 × 3
 1 3 2 |
```

Sea extraer la raíz cuadrada entera de 546138, que no excede de seis cifras:

```
54.6 1.3 8 | 739
           |------
 5 6.1     | 143 × 3
 1 3 2 3.8 | 1469 × 9
       1 7 |
```

Siendo el número dado mayor que 100, su raíz cuadrada tendrá *decenas* y *unidades*.

Para hallar, pues, las decenas extraerémos la raíz cuadrada de las centenas del número dado, como se ha dicho en el ejemplo anterior (prescindiendo de las dos primeras cifras de la derecha, que por esto se separan con un punto).

Mas como las 5461 centenas forman un número mayor que 100 y que no pasa de cuatro cifras, su raíz cuadrada se hallará como en el anterior ejemplo; de donde resulta que las decenas de la raíz son 73, quedando 132 de resíduo.

El resíduo anterior con las dos cifras últimas del número dado á su derecha, forman 13238, que es el número que queda despues de restar del propuesto el cuadrado de las decenas; luego dividiendo las decenas de este número 1323.8 (á cuyo efecto se separan las unidades con un punto) por el duplo de las 73 decenas, ó sea por 146, el cociente entero, comprobado como se ha dicho en el ejemplo precedente, dará las unidades de la raíz.

De este modo se halla que la cifra de las unidades es 9, quedando 17 de resíduo.

Luego la raíz cuadrada de 546138 es 739, y el resíduo de la operacion 17.

Sea, por último, extraer la raíz cuadrada de 94864.

```
9.48.6 4 | 308
         |------
 48 6.4  | 608 × 8
 00 0 0  |
```

UNED

La única particularidad que ofrece este ejemplo es que al dividir las decenas del número 48 ó sea el 4 por 6, que es el duplo de la primera cifra, la division no puede dar ningun cociente entero, lo que indica que es cero la segunda cifra de la raíz: y como cero multiplicado por 60 da por producto cero, y cero restado de 48 deja por resto el mismo 48, se omiten estas operaciones, y se unen inmediatamente al 48 las dos cifras siguientes formando así el número 4864, cuyas decenas divididas por 60 dan la tercera cifra 8 de la raíz; resultando que $\sqrt{94864}=308$ exactamente.

El razonamiento hecho para reducir la extraccion de la raíz cuadrada de un número de 5 ó 6 cifras á la de otro de 3 ó 4, reduce igualmente la extraccion de la raíz cuadrada de un número de 9 ó 10 cifras á la de otro de 7 ú 8, y así sucesivamente.

211. Reuniendo, pues, bajo un solo contexto las reglas y advertencias precedentes, y dándoles un aspecto práctico para facilitar su ejecucion, tendrémos la siguiente regla general.

Para extraer la raíz cuadrada entera de un número mayor que 100 *se divide* (por medio de puntos), *principiando por la derecha, en grupos ó secciones de á dos cifras, sin que sea un obstáculo el que la última seccion tenga una cifra sola.*

El número de cifras de la raíz es igual al de grupos formados.

Se halla la raíz cuadrada entera de la primera seccion de la izquierda, y esta será la cifra de órden superior de la raíz. El cuadrado de esta cifra se resta de dicha primera seccion: se une al resto la seccion siguiente, separando del número así formado la cifra de la derecha y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la cifra hallada, el cociente entero será la segunda cifra de la raíz ó mayor que ella. La cifra que acaba de determinarse se comprueba escribiéndola á la derecha del divisor, y multiplicando el número resultante por la misma cifra.

Si el producto puede restarse del número formado por el dividendo en union de la cifra que se separó, la cifra hallada

UNED

es buena: si no, es grande, y se le rebaja una unidad sometiendo la cifra que resulta á igual comprobacion que la anterior: esta operacion se repite tantas veces como sea necesario para hacer posible la sustraccion indicada.

Al resto de esta sustraccion se une el grupo siguiente; se separa la cifra de la derecha con un punto; se divide lo que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, y el cociente entero (que podrá ser la tercera cifra de la raíz) *se somete á nueva comprobacion.*

De este modo se continúa hasta que se haya considerado el último grupo de la derecha.

Si despues de colocar á la derecha de un resto la seccion siguiente y de separar la cifra de la derecha, la parte que queda á la izquierda es menor que el duplo de la raíz hallada, se pone cero en la raíz y al número formado por el dividendo y cifra separada se le une la siguiente seccion (*).

OBSERVACIONES.

212. 1.ª Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en la raíz una cifra menor que la verdadera, cuando el resto que en seguida se obtenga sea igual ó mayor que el duplo de la raíz hallada más uno (**209**, corol. 2.º).

(*) Cuando se haya determinado más de la mitad de cifras de la raíz, se pueden calcular las restantes, con ménos error de una unidad, *dividiendo el resto por el duplo de la raiz hallada.*

En efecto: sea n el número propuesto, a la raiz hallada, b la parte que falta de esta raiz, y se tendrá:

$$n=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

de donde $$\frac{n-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Ahora, el número de cifras de a excede, por hipótesis, al duplo de las de b: y como el cuadrado de un número puede tener á lo más duplo número de cifras que este, resulta que $b^2<a$, y con mayor razon $b^2<2a$; luego $\frac{b^2}{2a}$ vale menos que la unidad; luego $\frac{n-a^2}{2a}$ expresa el valor de b con menos de una unidad de error.

Así, habiendo hallado que las primeras cifras de la raiz cuadrada de 8143967852 son 902 ó sean 90200 unidades y el resto 7927852, las dos últimas cifras se hallarán dividiendo dicho resto por 180400; de manera que la parte de raiz entera que falta es el cociente 43, y por consiguiente 90243 es la raíz entera del número propuesto.

Este procedimiento se emplea con gran ventaja en las aproximaciones.

2.ª De la formacion de los cuadrados de los números enteros se infiere que los números que terminan en 2, 3, 7, 8 ó un número impar de ceros no tienen raíz cuadrada exacta.

EJEMPLO. $\sqrt{81439678}$.

El número dado no tiene raíz exacta, puesto que termina en 8 (obs. anterior).

Por lo demás la operacion se ejecuta sin dificultad como se ve á continuacion:

81.43.9 6.7 8	9024	raíz entera.
43 9.6	1802×2	
7 9 2 7.8	18044×4	
Resíduo.... 7 1 0 2		

El resíduo 7102 no indica que la operacion esté mal hecha, pues es menor que el duplo de 9024 más 1.

213. La extraccion de la raíz cuadrada se prueba elevando al cuadrado la raíz hallada y sumando con esto el resíduo, si le hay; la suma debe ser igual al número dado para que la operacion esté bien hecha (**202**, corol.).

ARTICULO IV.

Raiz cuadrada de los números decimales y aproximacion de la de los enteros que no la tienen exacta.

214. En la extraccion de la raíz cuadrada de los decimales distinguiremos dos casos: 1.° *que el número de cifras decimales sea par:* 2.° *que sea impar.*

215. 1.er CASO. Sea extraer la raíz cuadrada de 3,56.

Si convertimos este número en entero, le habrémos multiplicado por 100 ó sea 10^2; mas la raíz cuadrada del número resultante 356 será 10 veces mayor que la del número propuesto (**206**, corol.); luego partiendo por 10 ó separando con una coma la última cifra de la raíz entera de 356, tendrémos la raíz pedida con ménos de 0,1 de error.

Si el número fuese 0,0478, convirtiéndole en entero le habrémos multiplicado por 10000 ó sea por 100^2; pero la raíz cuadrada del número resultante 478 es 100 veces mayor que la del número dado; luego dividiendo por 100 la raíz entera

UNED

de 478, tendrémos la raíz pedida con ménos de 0,01 de error.

Del mismo modo hariamos ver que si el número propuesto tuviese 6, 8, 10, etc. cifras decimales, su raíz cuadrada se determinaria con ménos de 0,001, 0,0001 ó 0,00001, etc. de error, hallando la raíz cuadrada entera del número dado, considerándole como entero, y separando despues á la derecha de su raíz entera 3, 4, 5, etc. cifras decimales.

Luego la raíz cuadrada de un número decimal, cuyo número de cifras decimales sea par, se halla dividiendo la raíz cuadrada entera de dicho número, considerado como entero, por la unidad seguida de un número de ceros igual á la mitad de cifras decimales que tenga el número dado. Así

$$\sqrt{0,5471} = \frac{\sqrt{5471}}{100} = \frac{73}{100} = 0,73.$$

OBSERVACIONES.

216. 1.ª La regla anterior equivale evidentemente (y á esto se reduce la práctica) *á extraer la raíz cuadrada del número decimal como si fuese entero, cuidando de escribir una coma en la raíz al considerar el primer grupo decimal de la izquierda, bien sea para agregarle á un resto, ó bien para extraer de él la raíz cuadrada.*

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt{216,59}$.

2.1 6,5 9	14,7.....
1 1.6	24×4
2 0 5.9	287×7
5 0	

Resultado: 14,7 con ménos de 0,1 de error.

2.° $\sqrt{0,0625}$.

0,06.2.5	0,25
2 2.5	45×5
0 0	

Resultado: 0,25 exactamente.

2.ª Como á continuacion de una fraccion decimal se pueden suponer, sin que varíe, las secciones de á dos ceros que

UNED

se quiera; resulta que *en el caso de no ser exacta la raíz cuadrada de una fraccion decimal, se podrá aproximar por decimales todo lo que se quiera, para lo que basta agregar al residuo último, ó resultante de la última seccion decimal, dos ceros, lo que dará otra cifra decimal para la raíz: al residuo que entónces se halle se añaden otros dos ceros, y así en adelante hasta obtener toda la aproximacion que se desee;* advirtiendo que si el número dado considerado como entero no da raíz exacta, no se obtendrá nunca por más que se continúe la operacion (**203**, corol.).

Sea aproximar por decimales la raíz cuadrada del ejemplo 1.° del número anterior.

2.1 6,59	14,716.....
1 1.6	24 × 4
2 05.9	287 × 7
5 00.0	2941 × 1
2 05 90.0	29426 × 6
29 34 4	
etc.	

3.ª Como á todo número entero se le puede considerar como una fraccion decimal suponiendo una coma despues de los enteros, y á continuacion de esta todas las secciones de dos ceros que se quiera (**124**, obs.); resulta que *si un número entero no tiene raíz cuadrada exacta, se puede aproximar por decimales todo lo que se desee, para lo que basta escribir una coma despues de la raíz entera y agregar al residuo último dos ceros, lo que dará la primera cifra decimal: al resto que entónces se obtenga se agregan otros dos ceros y así sucesivamente;* advirtiendo que no se hallará raíz exacta por más que se alargue la operacion (**203**, corol.).

Ejemplo. Extráigase la raíz cuadrada de 14 con la aproximacion que se desee.

14	3,741.....
50.0	67 × 7
3 10.0	744 × 4
12 40.0	7481 × 1
4 91 9	
etc.	

UNED

217. 2.° CASO. *Si el número de cifras decimales es impar, se le agrega un cero, con lo que no varía* (**124**, 1.°), *y queda este caso reducido al anterior.*

ARTICULO V.

Raíz cuadrada de los quebrados ordinarios y números mistos.

218. En la extraccion de la raíz cuadrada de los quebrados ordinarios se distinguen tambien dos casos: 1.° *que ambos términos tengan raíz exacta:* 2.° *que los dos ó uno de ellos no la tenga.*

219. 1.er CASO. Sea $\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{3^2}{4^2}}$; como $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}$ (**199**, 3.ª), se tiene (**200**) $\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{3^2}{4^2}}=\frac{3}{4}$, ó sea á la raíz cuadrada de 9 partida por la raíz cuadrada de 16.

Como igual raciocinio puede hacerse con otro quebrado de iguales condiciones, resulta que

Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyos términos tienen raíz exacta, se extrae la del numerador y la del denominador, y se parte la primera por la segunda.

220. 2.° CASO. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyos términos ó uno de ellos no tienen raíz exacta, se convierte primero en irreducible, y si tampoco sus dos términos fuesen cuadrados perfectos, se reduce á fraccion decimal, obteniendo un número de cifras decimales duplo de las que ha de tener la raíz, y luego se procede como se ha dicho en el artículo anterior;* advirtiendo que no se hallará raíz exacta por más que se continúe la operacion (**204**).

EJEMPLO. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ con dos cifras decimales.

Como $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}7500$, será $\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{0{,}7500}=0{,}86$.

0,750 0	0,86
110.0	166×6
10 4	

UNED

221. *Para extraer la raiz cuadrada de un número misto se convierte en fraccionario, y se tiene uno de los dos casos precedentes.*

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{2}{3}$.

2.° $\sqrt{7\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{23}{3}}=\sqrt{7,6666...}=2,76...$

ARTICULO VI.

Raíz cúbica de los números enteros.

222. En esta operacion se distinguen dos casos: 1.° *que el número de que se quiere extraer la raíz cúbica no pase de* 1000; 2.° *que sea mayor que* 1000.

223. 1.er caso. Este caso se resuelve sabiendo de memoria los cubos de los diez primeros números, que son los que á continuacion se expresan:

Números. .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos.. . .	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 (*).

Cada número de la fila superior es la raíz cúbica del correspondiente en la inferior (**200**). Así

$$\sqrt[3]{27}=3,\ \sqrt[3]{512}=8,\ \text{etc.}$$

La raíz cúbica entera de un número comprendido entre dos de la fila inferior es la raíz del menor de estos (**201**). De modo que $\sqrt[3]{18}=2$ y el resíduo 10; $\sqrt[3]{194}=5$ y el resíduo 69, etc.

224. 2.° caso. La resolucion de este caso se funda en el siguiente

Teorema. *El cubo de la suma de dos números se compone del cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

(*) De la simple inspeccion de este cuadro se infiere que de los números enteros desde 1 á 1000, ambos inclusive, solo diez tienen raíz cúbica exacta, y facilísimamente se deduce tambien que desde 1 á 1000000, ambos igualmente inclusive, solo *ciento* tienen exacta la misma raiz, etc.

Es decir que, por ejemplo,

$$(8+5)^3=8^3+3\times8^2\cdot5+3\times8\cdot5^2+5^3.$$

Sumando el 8 con el 5 y elevando la suma 13 al cubo, se tendria un resultado numéricamente igual al que se quiere obtener; mas en tal caso no serviria para el objeto que nos proponemos.

Para ejecutar la elevacion sin que los sumandos 8 y 5 formen un solo número, observarémos que (**56**)

$(8+5)^3=(8+5)\times(8+5)\times(8+5)=(8+5)^2\times(8+5)$; mas el primer factor $(8+5)^2=8^2+2\times8\cdot5+5^2$ (**209**); luego multiplicando este segundo miembro, primero por 8 y despues por 5, y sumando los resultados, se tendrá el producto buscado.

$$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)\times8=8^2\times8+2\times8\cdot5\times8+5^2\times8=$$
$$8^3+2\times8^2\cdot5+5^2\times8,$$
$$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)\times5=8^2\times5+2\times8\cdot5\times5+5^2\times5=$$
$$8^2\times5+2\times8\cdot5^2+5^3.$$

Sumando los dos resultados, que se acaban de obtener, se tendrá

$$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)\,(8+5)=8^3+2\times8^2\cdot5+5^2\times8+$$
$$8^2\times5+2\times8\cdot5^2+5^3.$$

Sustituyendo en lugar del primer miembro de esta igualdad su equivalente $(8+5)^3$, y en el segundo en vez de $2\times8^2\cdot5+8^2\times5$ su equivalente $3\times8^2\cdot5$, y en vez de $5^2\times8+2\times8\cdot5^2$ su equivalente tambien $3\times8\cdot5^2$, se tendrá la siguiente igualdad, que demuestra el teorema,

$$(8+5)^3=8^3+3\times8^2\cdot5+3\times8\cdot5^2+5^3.$$

Corolario 1.° *El cubo de un número que contiene decenas y unidades* (descompuesto en estas dos partes) *consta de cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de decenas por unidades, más el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, más el cubo de las unidades.* Así

$$84^3=(80+4)^3=80^3+3\times80^2\cdot4+3\times80\cdot4^2+4^3.$$

Observacion. *El cubo de las decenas* termina siempre en tres ceros (**199**, 1.ª), y por consiguiente, *es un número exacto de millares: el triplo del cuadrado de decenas por unidades* termina en dos ceros (**199**, 1.ª y **54**, corol. 2.°), y por tanto *es un número exacto de centenas: el triplo de decenas por el cuadrado de unidades* termina en un cero (**54**, corol. 2.°), y

por lo mismo *es un número exacto de decenas, y el cubo de unidades es un número exacto de unidades.*

En el ejemplo anterior tendrémos

$$\begin{array}{r} 80^3 = 512000 \\ 3\times 80^2\cdot 4 = 76800 \\ 3\times 80\cdot 4^2 = 3840 \\ 4^3 = 64 \\ \hline 84^3 = 592704. \end{array}$$

Corolario 2.° *Si un número excede á otro en una unidad, el cubo del mayor excede al del menor en el triplo del cuadrado de este, más el triplo de este mismo, más uno.*

Sean los números 13 y 12.

$$\begin{array}{rl} 13^3 = (12+1)^3 = & 12^3 + 3\times 12^2 + 3\times 12 + 1 \\ 12^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots 12^3 \\ \hline \text{Diferencia} \qquad 13^3 - 12^3 = & \qquad 3\times 12^2 + 3\times 12 + 1. \end{array}$$

Corolario 3.° *El resíduo de la raíz cúbica entera de un número es menor que el triplo del cuadrado de dicha raíz, más el triplo de la misma, más uno.*

Porque los dos cubos entre quienes se encuentra el número dado (puesto que sus raíces se diferencian en la unidad) se diferenciarán en *el triplo del cuadrado de la raíz del menor, más el triplo de la raíz del menor, más uno:* luego el número propuesto se diferenciará de cualquiera de ellos en ménos que esta cantidad.

225. Propongámonos extraer la raíz cúbica entera de 432487, que no tiene más que seis cifras.

Siendo $10^3 = 1000$ menor que el número dado, y $100^3 = 1000000$ mayor que el mismo: la raíz cúbica de dicho número será mayor que 10 y menor que 100; luego ha de constar de dos cifras; luego constará de *decenas* y *unidades.*

Para determinar las decenas de esta raíz, observarémos que siendo el número propuesto igual al cubo de su raíz entera más el resíduo (**202**, corol.), podrá considerarse formado por el cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el

cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el resíduo, si le hay (224, corol. 1.°).

Ahora, el cubo de las decenas es un número exacto de millares (224, obs.); luego el cubo de las decenas de la raíz que buscamos debe hallarse en los millares del número propuesto, esto es, en 432 (que para mayor sencillez separamos con un punto de este modo 432.487); mas como entre estos millares pueden hallarse tambien algunos resultantes de la suma del triplo del cuadrado de decenas por unidades, triplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de las unidades y resíduo, extrayendo la raíz cúbica de dichos 432 millares, se hallará la cifra 7, que no puede ser menor que las decenas de la raíz. Tampoco puede ser mayor, pues en tal caso excederia al ménos en una unidad á las decenas de la raíz del número dado, y por consiguiente sería mayor que toda la raíz de este número; luego la raíz cúbica de los millares de un número sería mayor que la raíz cúbica de todo el número, lo que es absurdo.

Luego 7 son las verdaderas decenas de la raíz.

Luego las decenas de la raíz cúbica de un número se determinan extrayendo la raíz cúbica entera de los millares de dicho número.

Para determinar las unidades recordarémos que todo el número 432487 está formado por el cubo de decenas, triplo del cuadrado de decenas por unidades, triplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de unidades de la raíz y por el resíduo, si le hay; luego si de los millares restamos el cubo de decenas, nos quedarán las otras tres partes más el resíduo. De modo que

$$\begin{array}{rl} & 432487 \\ \text{cubo de decenas ó } 7^3=343 & \\ \text{la diferencia.....} & 89487 \end{array}$$

contiene el triplo del cuadrado de decenas por unidades, más el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, más el cubo de unidades, más el resíduo.

El triplo del cuadrado de decenas por unidades es un número exacto de centenas (224, obs.); luego esta parte del cubo debe hallarse en las 894 centenas del resto anterior (que para mayor sencillez se suponen separadas por un punto,

así 894.87); mas en este número de centenas pueden hallarse tambien algunas centenas resultantes de la suma del duplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de las unidades y resíduo; luego dividiendo las 883 centenas por el triplo del cuadrado de decenas, esto es, por $3\times7^2=147$, el cociente entero 6 serán las unidades de la raíz ó un número mayor que estas.

Luego para hallar las unidades de la raíz cúbica de un número, se dividen las centenas que quedan despues de restar de los millares del número dado el cubo de las decenas, por el triplo del cuadrado de las decenas halladas, y el cociente entero serán las unidades ó un número mayor que estas.

A fin de averiguar si la cifra 6, que se determinó segun esta regla, es ó no mayor que las unidades de la raíz, formarémos las tres partes restantes del cubo de la misma raíz.

Triplo del cuadrado de decenas por unidades.....	$3\times7^2\cdot6=882$	centenas.
Triplo de decenas por el cuadrado de unidades...	$3\times7\cdot6^2=756$	decenas.
Cubo de unidades.....	$6^3=216$	unidades.
Suma.....	95976	

Como esta suma es mayor que el resto total anterior 89487, que es el dividendo, en union con las dos cifras siguientes, resulta que la cifra 6 es mayor que las unidades de la raíz.

Rebájesele una unidad, y formando las tres partes del cubo en la hipótesis de que la cifra de las unidades es 5, resultará:

Triplo del cuadrado de decenas por unidades.....	735
Triplo de decenas por el cuadrado de las unidades..	525
Cubo de unidades.....	125
Suma.....	78875.

Siendo esta suma menor que el resto precedente 89487, se puede restar de él; luego 5 es la verdadera cifra de las unidades de la raíz.

Luego, para comprobar la cifra de las unidades que da la regla anterior, se forman las tres partes del cubo de la raíz, á saber: triplo del cuadrado de decenas por la cifra de las unida-

UNED

des que se ensaya, triplo de decenas por el cuadrado de unidades y cubo de la misma cifra de las unidades; se suman estas tres partes, y si la suma no es mayor que el dividendo que la produjo en union con las dos cifras que le siguen, dicha cifra es buena; en el caso contrario se le rebaja una unidad y se comprueba de nuevo.

Restando de 89487 la suma 78875 de las tres partes del cubo de la raíz, la diferencia 10612 es el resíduo de la operacion.

Luego $\sqrt[3]{432487} = 75$ y quedan 10612 de resíduo.

La operacion puede ordenarse como á continuacion se ve:

432.487	75
343	
894.87	147
788 75	
106 12	

Sea extraer la raíz cúbica entera de 432487039, que no excede de nueve cifras:

432.487.039	756
343	
894.87	147
788 75	
106 120.39	16875
102 062.16	
4 058 23	

Siendo el número propuesto mayor que 1000, su raíz cúbica tendrá *decenas* y *unidades*.

Para hallar, pues, las decenas, extraerémos la raíz cúbica de los millares del número dado, como se ha dicho en el ejemplo anterior (prescindiendo de las tres primeras cifras de la derecha, que por esto se separan con un punto).

Mas, como los 432487 millares forman un número mayor que 1000, y como por otra parte no excede de seis cifras, su raíz cúbica se hallará como en el ejemplo anterior; de donde resulta que las decenas de la raíz son 75 quedando 10612 de resíduo.

UNED

El resíduo anterior con las tres últimas cifras del número dado á su derecha componen 10612039, que es el número que queda despues de restar del propuesto el cubo de las decenas; luego dividiendo las centenas de este número 106120.39 (á cuyo efecto se separan las dos últimas cifras con un punto) por el triplo del cuadrado de las 75 decenas, ó sea por 16875, el cociente entero 6, comprobado como se ve á continuacion, dará las unidades de la raíz.

Triplo del cuadrado de las 75 decenas por 6 unidades.	101250
Triplo de las mismas decenas por el cuadrado de las unidades.	8100
Cubo de las mismas unidades.	216
Suma.	10206216.

Restando esta suma del dividendo unido con las dos cifras que estan á su continuacion, se halla que la cifra de las unidades es 6, y el resíduo 405823.

Luego $\sqrt[3]{432487039}=756$, quedando 405823 de resíduo.

Sea, por último, extraer la raíz cúbica de 9129329:

9.129.3 29	209
1 129 3.29	1200
1 129 3 29	
0 000 0 00	

La única particularidad que ofrece este ejemplo, consiste en que al dividir las centenas del número 1129, ó sea 11 por 12, que es el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz, la division no puede dar ningun cociente entero, lo que indica que es cero la segunda cifra de la raíz; y como este cero entra como factor en las partes restantes del cubo de la raíz 20, la suma de estas sería cero; y como cero restado de 1129 deja por resto el mismo número, se omiten estas operaciones y se unen inmediatamente al 1129 las tres cifras siguientes, formando así el número 11293.29, cuyas centenas divididas por 1200 dan la tercera cifra de la raíz.

UNED

Resultando que $\sqrt[3]{9129329} = 209$ exactamente.

El razonamiento hecho para reducir la extraccion de la raíz cúbica entera de un número de 7, 8 ó 9 cifras á la de otro de 4, 5 ó 6, reduce igualmente la extraccion de la raíz cúbica de un número de 10, 11 ó 12 cifras á la de otro de 7, 8 ó 9, la de un número de 13, 14 ó 15 á la de otro de 10, 11 ó 12, y así sucesivamente.

226. Reuniendo, pues, bajo un solo contexto las reglas y advertencias precedentes, y dándoles un aspecto práctico para facilitar su ejecucion, tendrémos la regla que sigue:

Para extraer la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, *se divide* (por medio de puntos) *principiando por la derecha, en grupos ó secciones de á tres cifras, sin que sea un obstáculo el que la última seccion de la izquierda tenga una ó dos cifras solamente.*

El número de cifras de la raíz es igual al de grupos formados.

Se halla la raíz cúbica entera de la primera seccion de la izquierda, y esta será la cifra de órden superior de la raíz. El cubo de esta cifra se resta de dicha primera seccion, se une al resto la seccion siguiente, separando del número así formado las dos cifras de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la cifra encontrada, el cociente entero será la segunda cifra de la raíz ó mayor que ella. La cifra que se acaba de determinar se comprueba formando las otras tres partes del cubo, á saber: triplo del cuadrado de la primera cifra por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda; se suman estas tres partes (teniendo en cuenta la especie de unidades que cada una expresa, **224**, obs.), *y la suma se resta del número formado por el dividendo anterior y las dos cifras separadas.*

Si la sustraccion puede verificarse, la cifra hallada es buena; si no es grande y se le rebaja una unidad, sometiendo la cifra que resulte á igual comprobacion que la anterior.

Al lado del resto de esta sustraccion se pone la seccion siguiente: se separan las dos cifras de la derecha con un

punto, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y el cociente entero (que podrá ser la tercera cifra de la raíz) *se somete á nueva comprobacion.*

De este modo se continúa hasta que se haya considerado el último grupo de la derecha.

Si, despues de colocar á la derecha de un resto la seccion siguiente, y de separar las dos cifras de la derecha, la parte que queda á la izquierda es menor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, se pone cero en la raíz, y al número formado por el dividendo anterior y las dos cifras separadas se une la siguiente seccion.

Observacion. Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en la raíz una cifra menor que la verdadera, cuando el resto que en seguida se obtenga sea igual ó mayor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, más el triplo de la misma raíz, más uno (**224**, corol. 3.°).

Ejemplo. $\sqrt[3]{7762392000}$.

7.7 62.392.000	1980
6 7.62	3
5 8 59	
0 9 03 3.92	1083
9 03 3.92	
0 00 0 00	

Comprobacion de la cifra 9.

9747	
4617	
729	
1021599	

Comprobacion de la cifra 8.

8664	
3648	
512	
903392.	

Como el resto obtenido de la determinacion de la cifra 8 en union con las cifras de la última seccion forman cero, y cero dividido por el triplo del cuadrado de la raíz hallada 198 es tambien cero, resulta que

$\sqrt[3]{7762392000} = 1980$ exactamente.

227. La extraccion de la raíz cúbica se prueba elevando al cubo la raíz hallada, y sumando con esta el resíduo si le

hay: la suma debe ser igual al número dado para que la operacion esté bien hecha (**202**, corol.).

ARTICULO VII.

Raíz cúbica de los números decimales y aproximacion de la de los enteros que no la tienen exacta.

228. En la extraccion de la raíz cúbica de los decimales se distinguen dos casos: 1.° *que el número de cifras decimales sea múltiplo de tres:* 2.° *que no lo sea.*

229. 1.er caso. Sea extraer la raíz cúbica de 18,726.

Si convertimos este número en entero, le habrémos multiplicado por 1000, ó sea por 10^3: mas la raíz cúbica del número 18726 resultante, será 10 veces mayor que la del número propuesto (**206**, corol.); luego partiendo por 10 la raíz entera de 18726, ó separando su última cifra con una coma, tendrémos la raíz pedida con ménos de 0,1 de error.

Si el número fuese 0,354278, convirtiéndole en entero le habrémos multiplicado por 1000000 ó sea por 100^3; pero la raíz cúbica del número resultante 354278 es 100 veces mayor que la del número dado (**206**, corol.); luego dividiendo por 100 la raíz entera de 354278 tendrémos la raíz pedida con ménos de 0,01 de error.

Del mismo modo hariamos ver que si el número propuesto tuviese 9, 12, 15, etc., cifras decimales, su raíz cúbica se determinaria con ménos de 0,001, 0,0001, 0,00001, etc. de error, hallando la raíz cúbica entera del número dado, considerándole como entero, y separando despues á la derecha de esta raíz tres, cuatro, cinco, etc., cifras decimales.

Luego la raíz cúbica de un número decimal, cuyo número de cifras decimales sea múltiplo de tres, se halla dividiendo la raíz cúbica entera de dicho número, considerado como entero, por la unidad seguida de un número de ceros igual á la tercera parte de cifras decimales que tenga el número dado.

Así, $\sqrt[3]{7,762392} = \frac{\sqrt[3]{7762392}}{100} = \frac{198}{100} = 1,98$ exactamente.

OBSERVACIONES.

230. 1.ª La regla anterior equivale evidentemente (y á esto se reduce en la práctica) *á extraer la raíz cúbica del número decimal como si fuera entero, cuidando de escribir una coma en la raíz al considerar el primer grupo decimal de la izquierda, bien sea para agregarle á un resto, ó bien para extraer de él la raíz cúbica.*

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[3]{15,086.}$

15,0 86	2,4
7 0.86	12
5 8 24	
1 2 62	

Resultado: 2,4 con ménos de 0,1 de error.

2.° $\sqrt[3]{0,000006859.}$

0,000.006.8 59	0,019
5 8.69	3
5 8 69	
0	

Resultado: 0,019 exactamente.

2.ª Como á continuacion de una fraccion decimal se pueden suponer, sin que varíe de valor (**124**, 1.°), las secciones de á tres ceros que se quiera, resulta que: *en el caso de que no sea exacta la raíz cúbica de una fraccion decimal, se puede aproximar por decimales todo lo que se desee, para lo que basta agregar al residuo último ó resultante de la última seccion decimal, tres ceros, lo que dará otra cifra decimal más para la raíz: al residuo que entónces se obtenga se añaden otros tres ceros; y así en adelante hasta obtener toda la aproximacion que se quiera;* advirtiendo que si el número propuesto, considerado como entero, no da raíz exacta, no se obtendrá por más que se continúe la operacion (**203**, corol.).

Sea aproximar por decimales la raíz cúbica del ejemplo primero de la observacion anterior. La operacion se ejecuta

UNED

como á continuacion se ve:

1 5,0 86	2,47.....
7 0.86	12
5 8 24	
1 2 62 0.00	1728
1 2 45 2 23	
16 7 77	
etc.	

3.ª Como á todo número entero se le puede considerar como una fraccion decimal suponiendo una coma despues de los enteros y á continuacion de esta los grupos de á tres ceros que se quiera (**124**, obs.), resulta que *si un número entero no tiene raíz cúbica exacta se puede aproximar por decimales todo lo que se desee, para lo cual basta escribir una coma despues de la raíz entera y agregar al residuo último tres ceros, lo que dará la primera cifra decimal: al resto que en seguida se obtenga se añaden otros tres ceros, y así sucesivamente:* advirtiendo que no se hallará raíz exacta por más que se alargue la operacion (**103**, corol.).

Ejemplo. Extráigase la raíz cúbica de 9 con la aproximacion que se quiera.

9	2,08....
10000.00	1200
9989 12	
10 88	
etc.	

Luego $\sqrt[3]{9}=2{,}08\ldots$

231. 2.° caso. *Si el número de cifras decimales no es múltiplo de tres, se le agrega uno ó dos ceros al fin para que lo sea* con lo que no varía (**124**, 1.°), y queda este caso convertido en el anterior.

ARTICULO VIII.

Raíz cúbica de los quebrados ordinarios y números mistos.

232. En la extraccion de la raíz cúbica de los quebrados ordinarios se distinguen otros dos casos: 1.° *que ambos térmi-*

UNED

nos tengan raíz exacta: 2.° que los dos ó uno de ellos no la tengan.

233. 1.er CASO. Sea $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}$; como $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3^3}{2^3}$ (**199**, 3.°) se tiene (**200**) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{3}{2}$; ó sea á la raíz cúbica de 27 partida por la de 8.

Como el mismo raciocinio puede hacerse con otro quebrado de iguales condiciones, resulta que

Para extraer la raíz cúbica de un quebrado, cuyos términos tienen raíz exacta, se extrae la del numerador y la del denominador y se parte la primera por la segunda.

234. 2.° CASO. *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado en que ambos términos ó uno de ellos no la tienen exacta, se convierte primero en irreducible, y si tampoco fuesen sus términos cubos perfectos, se reduce á fraccion decimal, obteniendo triplo número de cifras decimales de las que ha de tener la raíz;* advirtiendo que en este caso no se hallará nunca raíz exacta (**204**).

EJEMPLO. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ con dos cifras decimales.

Como $\frac{2}{3}=0{,}66....$, será

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0{,}666666....}=0{,}87....$$

0.666.6 66	0,87
512	
154 6.66	192
146 5 03	
8 1 63	

235. *Para extraer la raíz cúbica de un número misto se convierte en fraccionario y se tiene uno de los casos precedentes.*

EJEMPLOS. 1.° $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}$.

2.° $\sqrt[3]{5\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{43}{8}}=\sqrt[3]{5{,}375}=1{,}7$ con menos de $\frac{1}{10}$ de error.

UNED

TABLAS DE REDUCCION.

REDUCCION DE LAS MEDIDAS MÉTRICAS

Á LAS ACTUALES DE CASTILLA.

TABLA PRIMERA (*).

Medidas longitudinales.

Metros.	Líneas.	Pulgadas.	Pies.	Varas.	Leguas.
1 =	516,8 =	43,07 =	3,5889 =	1,1963 =	0,000179
2 =	1033,6 =	86,13 =	7,1778 =	2,3926 =	0,000359
3 =	1550,4 =	129,20 =	10,7668 =	3,5889 =	0,000538
4 =	2067,2 =	172,27 =	14,3557 =	4,7852 =	0,000718
5 =	2584,0 =	215,34 =	17,9446 =	5,9815 =	0,000897
6 =	3100,8 =	258,40 =	21,5335 =	7,1778 =	0,001077
7 =	3617,6 =	301,47 =	25,1225 =	8,3742 =	0,001256
8 =	4134,4 =	344,54 =	28,7114 =	9,5705 =	0,001436
9 =	4651,2 =	387,60 =	32,3003 =	10,7668 =	0,001615

TABLA II (**).

Medidas de capacidad para áridos.

Litros.	Ochavos.	Cuartillos.	Celemines.	Fanegas.	Cahices.
1 =	3,46 =	0,865 =	0,2162 =	0,018018 =	0,001501
2 =	6,92 =	1,730 =	0,4324 =	0,036035 =	0,003003
3 =	10,38 =	2,595 =	0,6486 =	0,054053 =	0,004504
4 =	13,84 =	3,459 =	0,8648 =	0,072071 =	0,006006
5 =	17,30 =	4,324 =	1,0811 =	0,090088 =	0,007507
6 =	20,76 =	5,189 =	1,2973 =	0,108106 =	0,009009
7 =	24,22 =	6,054 =	1,5135 =	0,126124 =	0,010510
8 =	27,68 =	6,919 =	1,7297 =	0,144142 =	0,012012
9 =	31,14 =	7,784 =	1,9459 =	0,162159 =	0,013513

TABLA III (***).

Medidas de capacidad para líquidos, excepto el aceite.

Litros.	Copas.	Cuartillos.	Cántaras.	Moyos.	Litros.	Copas.	Cuartillos.	Cántaras.	Moyos.
1 =	7,9 =	1,98 =	0,0620 =	0,003874	6 =	47,6 =	11,90 =	0,3719 =	0,23244
2 =	15,9 =	3,97 =	0,1240 =	0,007748	7 =	55,5 =	13,88 =	0,4339 =	0,27128
3 =	23,8 =	5,95 =	0,1860 =	0,011622	8 =	63,5 =	15,87 =	0,4959 =	0,30992
4 =	31,7 =	7,93 =	0,2479 =	0,015496	9 =	71,4 =	17,83 =	0,5579 =	0,34866
5 =	39,7 =	9,92 =	0,3099 =	0,019370					

(*) Esta tabla y las 6.ª, 7.ª, 9.ª, 14 y 15 estan calculadas en el supuesto de tener el metro 3,5889216 pies de Burgos.

(**) Esta tabla y la 10 fueron calculadas bajo el supuesto de tener la fanega de áridos 55,501 litros.

(***) Esta tabla y la 11 estan calculadas en el supuesto de tener la cántara de vino 16,133 litros.

UNED.

TABLA IV (*)

Medidas de capacidad para el aceite.

Litros.	Pa- nillas.	Li- bras.	Arrobas.	Litros.	Pa- nillas.	Li- bras.	Arrobas.
1 =	8,0 =	1,99 =	0,079598	6 =	47,8 =	11,94 =	0,477591
2 =	15,9 =	3,98 =	0,159197	7 =	55,7 =	13,93 =	0,557189
3 =	23,9 =	5,97 =	0,238795	8 =	63,7 =	15,92 =	0,636788
4 =	31,8 =	7,96 =	0,318394	9 =	71,6 =	17,91 =	0,716386
5 =	39,8 =	9,95 =	0,397992				

TABLA V (**).

Medidas de peso.

Kilógramos.	Adarmes.	Onzas.	Libras.	Arrobas.	Quintales.
1 =	566,4 =	34,78 =	2,1735 =	0,0869 =	0,021735
2 =	1112,8 =	69,55 =	4,3469 =	0,1739 =	0,043469
3 =	1669,2 =	104,33 =	6,5204 =	0,2608 =	0,065204
4 =	2225,6 =	139,10 =	8,6939 =	0,3478 =	0,086939
5 =	2782,0 =	173,88 =	10,8674 =	0,4347 =	0,108674
6 =	3338,5 =	208,65 =	13,0408 =	0,5216 =	0,130408
7 =	3894,9 =	243,43 =	15,2143 =	0,6086 =	0,152143
8 =	4451,3 =	278,20 =	17,3878 =	0,6955 =	0,173878
9 =	5007,7 =	312,98 =	19,5613 =	0,7825 =	0,195613

TABLA VI.

Medidas agrarias y de superficie.

Areas.	Pulgadas cuad.	Pies cuad.	Varas cuad.	Estadales cuad.	Fanegas de tierra.
1 =	185477,2 =	1288,04 =	143,115 =	8,945 =	0,0155
2 =	370954,3 =	2576,07 =	286,230 =	17,889 =	0,0311
3 =	556431,5 =	3864,11 =	429,345 =	26,834 =	0,0466
4 =	741908,6 =	5152,14 =	572,460 =	35,779 =	0,0621
5 =	927385,8 =	6440,18 =	715,575 =	44,723 =	0,0776
6 =	1112863,0 =	7728,22 =	858,691 =	53,668 =	0,0932
7 =	1298340,1 =	9016,25 =	1001,806 =	62,613 =	0,1087
8 =	1483817,3 =	10304,29 =	1144,921 =	71,558 =	0,1242
9 =	1669294,4 =	11592,32 =	1288,036 =	80,502 =	0,1398

(*) Esta tabla y la 12 han sido calculadas en el supuesto de tener la arroba de aceite 12,563056 litros.

(**) Esta tabla y la 13 fueron calculadas en el supuesto de que el quintal contiene 0,460093 quintales métricos.

UNED

TABLA VII.

Medidas cúbicas ó de solidez.

Metros cúbicos.	Pulg. cúb.	Pies cúb.	Varas cúb.
1=	79879,558=	46,226596=	1,712096146
2=	159759,116=	92,453192=	3,424192292
3=	239638,673=	138,679788=	5,136288138
4=	319518,231=	184,906384=	6,848384584
5=	399397,789=	231,132980=	8,560480730
6=	479277,347=	277,359576=	10,272576876
7=	559156,905=	323,586172=	11,984673022
8=	639036,462=	369,812768=	13,696769168
9=	718916,020=	416,039363=	15,408865314

TABLA VIII.

Monedas.

Décimas.	Mrs.	Décimas.	Mrs.	Décimas.	Mrs.
1=	3,4	4=	13,6	7=	23,8
2=	6,8	5=	17,0	8=	27,2
3=	10,2	6=	20,4	9=	30,6

NOVÍSIMO (*).

Escudos.	Pesetas	Escudos.	Pesetas.
1=	2,59	6=	15,57
2=	5,19	7=	18,17
3=	7,78	8=	20,76
4=	10,38	9=	23,36
5=	12,97	10=	25,95

Aunque en las tablas que preceden solo se hallan las equivalencias de los nueve números digitos de unidades del sistema métrico en unidades del sistema antiguo, se encuentra sin embargo con facilidad por medio de las mismas la equivalencia de otro número cualquiera mayor ó menor que los calculados.

Para mayor claridad distinguiremos dos casos: 1.° *reducir un número de unidades del sistema métrico, que sea diez, ciento, mil, etc., veces mayor ó menor que los que se hallan calculados en las tablas, á unidades del sistema legal antiguo;* 2.° *reducir otro número cualquiera de unidades del nuevo sistema al antiguo.*

1.er CASO. Para resolver el primero de estos problemas observarémos que en las tablas, al frente de cada uno de los números digitos, que ex-

(*) Decreto del 21 de Marzo de 1869.

presan las unidades del sistema métrico, se encuentran sus equivalencias en unidades del sistema antiguo, expresadas por un número decimal, y que estos números se hacen *diez*, *cien*, *mil*, ... veces mayores ó menores corriendo la coma uno, dos, tres, ... lugares á la derecha ó á la izquierda.

Si quisiéramos averiguar, por ejemplo, cuántas varas contienen 3 kilómetros, ó sean 3000 metros, veriamos por la 1.ª tabla que 3 metros valen 3,5889 varas; luego multiplicando este número por 1000, ó lo que es igual, corriendo la coma tres lugares hácia la derecha, se tendrán 3588,9 varas, que será la equivalencia de los 3 kilómetros.

Si estos se hubiesen querido reducir á otra especie de unidades, por ejemplo, á pies, veriamos en la misma tabla que 3 metros equivalen á 10,7668 pies, y por consiguiente que 3 kilóm. equivalen á 10766,8 pies.

Si se desease reducir 8 centímetros á líneas, se verá en la misma tabla 1.ª que 8 metros valen 4134,4 líneas; y como 8 centímetros es un número cien veces menor que 8 metros, resulta que 8 centímetros equivalen á 41,344 líneas.

De la misma manera se verá que 90 hectólitros, ó sean 9000 litros, equivalen (tabla 2.ª) á 162,159 fanegas ó á 13,513 cahíces.—Que 600 áreas equivalen (tabla 6.ª) á 5366,8 estadales cuadrados.—Que 1 decímetro cuadrado equivale á 18,54772 pulgadas cuadradas, puesto que el decímetro cuadrado es la diezmilésima parte del área.—Y por último, que 7 centímetros cúbicos valen 0,559156905 pulgadas cúbicas, puesto que 7 metros cúbicos equivalen (tabla 7.ª) á 559156,905 pulgadas cúbicas, y que 1 centímetro cúbico es la millonésima parte del metro cúbico.

2.° CASO. Para resolver el 2.° problema se descompone el número dado en otros que sean los calculados en las tablas, ó diez, cien, mil, ... veces mayores ó menores que ellos, y la resolucion del problema queda reducida á una suma de números decimales.

Si se preguntase cuántas arrobas componen 327,56 kilógramos, observarémos desde luego que el número dado se puede descomponer en 300 kilógramos, más 20 kilógramos, más 7 kilógramos, más 5 hectógramos, más 6 decágramos; y como el primero de estos números equivale (tabla 5.ª) á 26,08 arrobas, el segundo á 1,739 idem, el tercero á 0,6086 idem, el cuarto á 0,04347 idem, y el quinto á 0,005216 idem, sumando estos cinco números decimales se tendrá el resultado pedido.

Para mayor claridad se ordena la operacion como á continuacion aparece; bastando apreciar en cada sumando tantas cifras decimales como hay en el que tiene menos, agregando, sin embargo, las unidades que se lleven de la suma de la columna de los sumandos que está á la derecha de aquella por donde principia á sumarse.

300 k. g.....	26,08
20 id.....	1,739
7 id.....	0,6086
5 h. g.....	0,04347
6 decág.....	0,00522
Resultado.....	28,47 arrobas.

UNED

REDUCCION DE LAS MEDIDAS ACTUALES DE CASTILLA

Á LAS MÉTRICAS.

TABLA IX.

Medidas longitudinales.

Líneas.	Metros.
1 =	0,002
2 =	0,004
3 =	0,006
4 =	0,008
5 =	0,010
6 =	0,012
7 =	0,014
8 =	0,016
9 =	0,017

Pulgadas.	Metros.
1 =	0,023
2 =	0,046
3 =	0,070
4 =	0,093
5 =	0,116
6 =	0,139
7 =	0,163
8 =	0,186
9 =	0,209

Pies.	Metros.
1 =	0,278635
2 =	0,557270
3 =	0,835906
4 =	1,114541
5 =	1,393176
6 =	1,671811
7 =	1,950447
8 =	2,229082
9 =	2,507717

Varas.	Metros.
1 =	0,835906
2 =	1,671811
3 =	2,507717
4 =	3,343623
5 =	4,179528
6 =	5,015434
7 =	5,851340
8 =	6,687246
9 =	7,523151

Leguas.	Kilómetros
1/4 =	1,393176
1/2 =	2,786352
3/4 =	4,179528
1 =	5,572705
2 =	11,145409
3 =	16,718114
4 =	22,290819
5 =	27,863523
6 =	33,436228
7 =	39,008932
8 =	44,581637
9 =	50,154342

TABLA X.

Medidas de capacidad para áridos.

Ochavos.	Litros.
1 =	0,289
2 =	0,578
3 =	0,867

Cuartillos.	Litros.
1 =	1,156
2 =	2,312
3 =	3,468

Celemines.	Litros.
1 =	4,625
2 =	9,250
3 =	13,875
4 =	18,500
5 =	23,125
6 =	27,750
7 =	32,375
8 =	37,000
9 =	49,625

Fanegas.	Litros.
1 =	55,501
2 =	111,002
3 =	166,503
4 =	222,004
5 =	277,505
6 =	333,006
7 =	388,507
8 =	444,008
9 =	499,509

Cahices.	Litros.
1 =	666,012
2 =	1332,024
3 =	1998,036
4 =	2664,048
5 =	3330,060
6 =	3996,072
7 =	4662,084
8 =	5328,096
9 =	5994,108

UNED

TABLA XI.

Medidas de capacidad para líquidos, excepto el aceite.

Copas.	Litros.
1=.....	0,126
2=.....	0,252
3=.....	0,378

Cuartillos.	Litros.
1=.....	0,504
2=.....	1,008
3=.....	1,512

Azumbres.	Litros.
1=.....	2,017
2=.....	4,033
3=.....	6,050
4=.....	8,066
5=.....	10,083
6=.....	12,100
7=.....	14,116

Cántaras.	Litros.
1=.....	16,133
2=.....	32,266
3=.....	48,399
4=.....	64,532
5=.....	80,665
6=.....	96,798
7=.....	112,931
8=.....	149,064
9=.....	125,197

Moyos.	Litros.
1=.....	258,128
2=.....	516,256
3=.....	774,384
4=.....	1032,512
5=.....	1290,640
6=.....	1548,768
7=.....	1806,896
8=.....	2065,024
9=.....	2323,152

TABLA XII.

Medidas de capacidad para el aceite.

Panillas.	Litros
1=.....	0,126
2=.....	0,251
3=.....	0,377

Libras.	Litros.
1=.....	0,503
2=.....	1,005
3=.....	1,508
4=.....	2,010
5=.....	2,513
6=.....	3,015
7=.....	3,518
8=.....	4,020
9=.....	4,523

Arrobas.	Litros.
1=.....	12,563
2=.....	25,126
3=.....	37,689
4=.....	50,252
5=.....	62,815
6=.....	75,378
7=.....	87,941
8=.....	100,504
9=.....	113,068

TABLA XIII.

Medidas de peso.

Adarmes.	Kilógramos.
1=.....	0,002
2=.....	0,004
3=.....	0,005
4=.....	0,007
5=.....	0,009
6=.....	0,011
7=.....	0,013
8=.....	0,014
9=.....	0,016

Onzas.	Kilógramos.
1=.....	0,029
2=.....	0,058
3=.....	0,086
4=.....	0,115
5=.....	0,144
6=.....	0,173
7=.....	0,201
8=.....	0,230
9=.....	0,259

Libras.	Kilógramos.
1=.....	0,460
2=.....	0,920
3=.....	1,380
4=.....	1,840
5=.....	2,300
6=.....	2,761
7=.....	3,221
8=.....	3,681
9=.....	4,141

Arrobas.	Kilógramos.
1=.....	11,502
2=.....	23,005
3=.....	34,507
4=.....	46,009
5=.....	57,512
6=.....	69,014
7=.....	80,516
8=.....	92,019
9=.....	103,521

Quintales.	Kilógramos.
1=.....	46,009
2=.....	92,119
3=.....	138,028
4=.....	184,037
5=.....	230,047
6=.....	276,056
7=.....	322,065
8=.....	368,074
9=.....	414,084

UNED

TABLA XIV.

Medidas de superficie y agrarias.

Pulgadas cuad.	Metros cuad.
1 =	0,000539
2 =	0,001078
3 =	0,001617
4 =	0,002157
5 =	0,002696
6 =	0,003235
7 =	0,003774
8 =	0,004313
9 =	0,004852

Varas cuad.	Metros cuad.
1 =	0,698738
2 =	1,397477
3 =	2,096215
4 =	2,794953
5 =	3,493692
6 =	4,192430
7 =	4,891168
8 =	5,589907
9 =	6,288645

Celemines de tierra.	Áreas.
1 =	5,366310
2 =	10,732621
3 =	16,098931
4 =	21.465241
5 =	26,831552
6 =	32,197862
7 =	37,564173
8 =	42,930483
9 =	48,296793

Pies cuad.	Metros cuad.
1 =	0,077638
2 =	0,155275
3 =	0,232913
4 =	0,310550
5 =	0,388188
6 =	0,465826
7 =	0,543463
8 =	0,621101
9 =	0,698738

Estadales cuad.	Áreas.
1 =	0,111789
2 =	0,223596
3 =	0,335394
4 =	0,447193
5 =	0,558991
6 =	0,670789
7 =	0,782587
8 =	0,894385
9 =	1,006183

Fanegas de tierra.	Áreas.
1 =	64,395724
2 =	128,791449
3 =	193,187173
4 =	257,582898
5 =	321,978622
6 =	386,374346
7 =	450,770071
8 =	515,165795
9 =	579,161520

TABLA XV.

Medidas cúbicas.

Pulgadas cubicas.	Metros cúbicos.
1 =	0,000913
2 =	0,000025
3 =	0,000038
4 =	0,000050
5 =	0,000063
6 =	0,000075
7 =	0,000088
8 =	0,000100
9 =	0,000113

Pies cúbicos.	Metros cúbicos.
1 =	0,021633
2 =	0,043265
3 =	0,064898
4 =	0,086530
5 =	0,108163
6 =	0,129795
7 =	0,151428
8 =	0,173061
9 =	0,194693

Varas cúbicas.	Metros cúbicos.
1 =	0,584079
2 =	1,168159
3 =	1,752238
4 =	2,336317
5 =	2,920397
6 =	3,504476
7 =	4,088555
8 =	4,672635
9 =	5,256714

TABLA XVI.

Monedas.

Mrs.	Décimas.
1 =	0,294
2 =	0,588
3 =	0,882

Mrs.	Décimas.
4 =	1,176
5 =	1,471
6 =	1,765

Mrs.	Décimas.
7 =	2,059
8 =	2,353
9 =	2,647

UNED

NOVÍSIMO.

Pesetas.	Escudos.	Pesetas.	Escudos.
1=	0,385	6=	2,311
2=	0,770	7=	2,696
3=	1,156	8=	3,082
4=	1,541	9=	3,467
5=	1,926	10=	3,852

Con el auxilio de las tablas desde la 9.ª hasta la 15.ª se reduce un número cualquiera de unidades del sistema actual al métrico.

En esta reduccion pueden distinguirse dos casos: 1.° *reducir un número incomplejo, por ejemplo pies, á unidades del nuevo sistema:* 2.° *reducir un número complejo, por ejemplo quintales, arrobas, libras y onzas, á unidades del sistema métrico.*

1.er CASO. Para resolver el primero de estos casos, se procede de una manera análoga á la empleada en el caso 2.° de la página 170.

EJEMPLO. 3587 varas ¿cuántos metros componen?

3000 varas (tabla 9.ª)	2507,717
500	417,9528
80	66,87246
7	5,851340
	2998,393 metros.

2.° CASO. Para resolver el 2.° problema de los propuestos se halla el valor de cada especie de unidades, como se verifica en la resolucion del primero; y la suma de estos valores es el resultado que se pide.

EJEMPLO. 325 arrobas, 7 libras y 3 onzas, ¿cuántos kilógramos componen?

300 arrobas (tabla 13.ª)	3450,7
20	230,05
5	57,512
7 libras	3,221
3 onzas	0,086
Resultado	3741,5 kilógramos.

FIN.

UNED

ÍNDICE.

Capítulos.		Páginas.
	Introduccion.	1
	ARITMÉTICA.	
	Preliminares.	5
Primero.	Numeracion.	6
	Numeracion oral.	id.
	Numeracion escrita.	9
II.	Operaciones aritméticas *principales*.	13
	Adicion de los números enteros.	id.
	Sustraccion ó resta.	17
	Multiplicacion	20
	Division.	30
III.	Quebrados comunes.	45
	Nociones preliminares	id.
	Propiedades de los quebrados.	48
	Reduccion de quebrados á un comun denominador. . .	49
	Simplificacion de los quebrados	51
	Adicion.	54
	Sustraccion.	57
	Multiplicacion.	60
	Division.	63
	Valuacion de los mismos.	66
IV.	Quebrados decimales.	69
	Numeracion.	id.
	Propiedades de los números decimales	72
	Adicion.	73
	Sustraccion.	74
	Multiplicacion.	75
	Division.	77
	Valuacion de estos quebrados.	81
V.	Números complejos.	82
	Reduccion de un número complejo á incomplejo de una cualquiera de sus especies distintas de la inferior. .	id.
	Adicion de los números complejos.	83
	Sustraccion.	84
	Multiplicacion (método ordinario)	85
	Id. método de las partes alícuotas	89
	Aplicacion del método de las partes alícuotas á la mul-	

UNED

tiplicacion de los números mistos incomplejos y complejos. 93
Division de los números complejos. 94
VI. . . . Sistema de pesas y medidas. 98
Preliminares. . . . . id.
Sistema antiguo. 101
Nuevo sistema ó sea sistema métrico decimal. 103
Sistema monetario. 111
Comparacion del antiguo y nuevo sistema. 113

COMPLEMENTO.

Primero. Propiedades de los números. 115
Números primos . . . . . id.
Máximo comun divisor. 117
Descomposicion de un número en factores simples. . . 120
Mínimo comun múltiplo. 124
II. . . . . Aplicacion del máximo comun divisor y mínimo comun múltiplo á la teoría de los quebrados ordinarios. 126
Reduccion de quebrados á su expresion más sencilla. id.
Reduccion de quebrados al menor denominador comun posible. 128
III. . . . Reduccion de quebrados ordinarios á decimales y recíprocamente. 131
Reduccion de quebrados ordinarios á decimales. . . . id.
Reduccion de quebrados decimales á ordinarios. . . . 132
Casos en que un quebrado ordinario reducido á decimal produce fraccion exacta, periódica pura ó mista. 136
IV. . . . Elevácion á potencias y extraccion de raíces de los números. 138
Elevacion á potencias. . . . . id.
Extraccion de raíces (preliminares). 139
Raiz cuadrada de los números enteros. 142
Raíz cuadrada de los números decimales y aproximacion á la de los enteros que no la tienen exacta. . . 150
Raiz cuadrada de los quebrados ordinarios y números mistos. 153
Raiz cúbica de los números enteros. 154
Raiz cúbica de los números decimales y aproximacion á la de los enteros que no la tienen exacta. 163
Raíz cúbica de quebrados ordinarios y números mistos. 165
Tablas de reduccion. 167

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. JOAQUIN MARÍA FERNANDEZ Y CARDIN

DOCTOR EN CIENCIAS, LICENCIADO EN JURISPRUDENCIA
Y CATEDRÁTICO DE AQUELLA ASIGNATURA EN EL INSTITUTO DE PRIMERA CLASE
DE S. ISIDRO DE MADRID.

OBRA DE TEXTO PARA SEGUNDA ENSEÑANZA

ÁLGEBRA

SEXTA EDICION

MADRID: 1869.

POR D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTENEBRO,
Impresor del Instituto de 1.ª clase de S. Isidro,
Bordadores, 10.

UNED

ÁLGEBRA.

CAPÍTULO PRIMERO.

Preliminares.

Es propiedad del autor.— Todos los ejemplares llevan una contraseña.

ÁLGEBRA.

CAPITULO PRIMERO.

Preliminares.

ARTICULO PRIMERO.

Definiciones y principios convencionales.

1. *El* Álgebra *es una ciencia que trata de las propiedades generales de la cantidad, expresada por símbolos en que se prescinde de todo valor numérico.* Se llama por esta razon *Aritmética universal.*

Aunque las cifras que emplea la Aritmética pueden representar indiferentemente cualquiera especie de números ó magnitudes, no pueden dejar de tener su valor determinado, si bien convencional; aunque la cifra 4, por ejemplo, puede referirse á horas, leguas, libras, etc., nunca se puede confundir su valor abstracto con los de otras cifras. El Álgebra, por el contrario, aspira á una generalidad de expresion, que es incompatible con estas determinaciones numéricas de la cantidad, y necesita emplear signos que no tengan ningun valor ni por su naturaleza ni por su uso.

Los símbolos que el Álgebra maneja, son de dos especies. unos que expresan las cantidades, y otros que indican las operaciones.

Primera clase.

2. Para expresar las cantidades con la generalidad apetecida, usa el Álgebra de las letras del alfabeto. Así, a, b, c, etc.,

UNED

representan cantidades que pueden ser de diversa naturaleza, como reales, libras, varas, líneas, superficies, etc., y tener cualquier valor numérico:

$$1, 2, 3, \ldots, 1000, \ldots \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \text{ etc.}$$

En el uso de estos signos han de tenerse presentes ciertas convenciones.

Cuando son representadas con letras ciertas cantidades, sus análogas suelen expresarse para mayor sencillez con las mismas letras acentuadas.

Si a expresa una cantidad cualquiera, sus análogas se expresan por

$$a', a'', a''', \ldots, \text{ ó } 'a, ''a, '''a, \ldots,$$

que se leen, a prima, a segunda, a tercera, ..., ó primera a segunda a, tercera a, ...

Las letras mayúsculas se emplean para expresar cantidades *complejas*, que son las compuestas de uno ó más términos. A este uso se aplican tambien con frecuencia las minúsculas del alfabeto griego.

Las cantidades *incógnitas*, que son las que se tratan de conocer ó determinar en cada problema, se representan por las últimas letras del alfabeto x, y, z, etc.: las demás expresan cantidades conocidas.

Aunque el Álgebra no tiene sistema de numeracion, no le faltan letras, ni necesita usarlas con acentos complicados; porque en cálculos ó problemas diversos, una misma letra sirve para expresar cantidades diferentes.

Segunda clase.

3. Para indicar las operaciones usa el Álgebra de los mismos signos que se han dado á conocer, y de algunos otros, como se verá á continuacion.

Acerca de ellos se han de tener presentes estas convenciones.

El signo $+$ indica la adicion: así, para expresar que a se ha de sumar con b, se escribe

$$a+b,$$

y se lee: a más b.

El signo $-$ indica la sustraccion: para expresar que de a se

ha de restar b, se escribe

$$a-b,$$

y se lee: a ménos b.

Adviértase que los signos $+$ y $-$ tambien sirven para indicar el carácter positivo ó negativo de las cantidades, como luego explicarémos.

El signo $\pm$, llamado de *ambigüedad*, indica que una cantidad ha de ser sumada con otra ó restada de ella; así

$$a\pm b$$

significa y se lee: a más ménos b.

El signo $\times$, $\cdot$, ó la colocacion de una letra á continuacion de otra sin signo alguno entre ellas, indica la multiplicacion; así, para expresar que a se ha de multiplicar por b, se escribe

$$a\times b,\ a\cdot b \text{ ó } ab,$$

y se lee: a multiplicado por b ó ab simplemente.

4. *Se llama* COEFICIENTE *de una cantidad el factor numérico que la precede:* así, 4 es el coeficiente de $4ab$, y $\frac{2}{3}$ el de $\frac{2}{3}cde$. Tambien *se llama en general* COEFICIENTE *de una cantidad todo lo que la multiplica, sea número, sea letra ó expresion cualquiera algebráica, más ó ménos complicada.* Los coeficientes de x en las expresiones

$$5bcx,\quad \frac{n(n-1)}{2}x$$

son respectivamente $5bc$, $\frac{n(n-1)}{2}$.

Como una cantidad no se altera cuando se la multiplica por la unidad, *puede suponerse que toda cantidad ó letra lleva por coeficiente* 1, *si no lo tiene numérico:* así, a es lo mismo que $1a$.

El signo $:$ ó $\frac{}{}$ indica la division. Para expresar que a se ha de dividir por b se escribe

$$a:b \text{ ó } \frac{a}{b},$$

y se lee: a dividido ó partido por b ó a sobre b.

La elevacion á potencias se indica como en la Aritmética: así, para expresar que a se ha de elevar á la 2.ª, 3.ª, ..., n

UNED

potencia se escribe

$$a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n,$$

y se lee: a dos, a tres, ..., a elevada á n.

5. *Se llama* EXPONENTE *de una cantidad ó letra, el número ó letra que expresa las veces que está repetida por factor.*

Como una cantidad se puede suponer la primera potencia de sí misma, ó que está repetida una vez por factor, *puede suponerse tambien que toda cantidad lleva por exponente* 1, *si no lo tiene numérico ni literal:* así, a es lo mismo que a^1

Póngase mucho cuidado en distinguir el coeficiente del exponente: cuando la cantidad es numérica se ve bien el diferente oficio de uno y otro. Así, $5a$ es lo mismo que $a+a+a+a+a$; a^5 equivale á $aaaaa$; y si a vale 2, tendrémos en el primer caso $2+2+2+2+2$, que es 10, y en el segundo $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$, que es 32.

El signo $\sqrt{\ }$ indica la consideracion de raíces, y entre sus ramas se coloca, cuando pasa del segundo grado, el número que indica el grado de la raíz. Este número se llama *índice* del radical. Así para expresar la consideracion de la raíz cuadrada, cúbica, ..., del grado n de a, se escribe

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a},\quad \sqrt[n]{a},$$

y se lee: raíz cuadrada de a, raíz cúbica de a, ..., raíz n ó del grado n de a.

El signo $=$ es el de igualdad: la cantidad que está ántes de él se llama *primer miembro*, y la que está despues *segundo miembro* de la igualdad: así, para expresar que en a se considera tanto valor como en b, se escribe

$$a=b,$$

y se lee: a igual b.

El signo $>$ es el de mayoría, é indica que la cantidad que está ántes de él es mayor que la que está despues: así, para expresar que a es mayor que b, se escribe

$$a>b,$$

y se lee: a mayor que b.

El signo $<$, que es el mismo anterior escrito al revés, es el de minoría: así

$$a<b,$$

se lee: a menor que b.

En uno y otro caso hay lo que se llama una *desigualdad*, a es tambien el primer miembro y b el segundo de la desigualdad.

6. El paréntesis se emplea con frecuencia para que los signos ántes explicados afecten no solo á las cantidades inmediatas á ellos, sino al resultado de las operaciones indicadas dentro del paréntesis; así las expresiones

1.ª $(a+b)+(c-d)$,
2.ª $a-(c-d)$,
3.ª $(a+b)\times c$ ó $(a+b)c$,
4.ª $(a-b):(c+d)$,
5.ª $(abc)^4$,
6.ª $\sqrt{(a^2-b^2)}$ ó mejor $\sqrt{a^2-b^2}$,

indican: la 1.ª, que á la suma de a y b se ha de agregar la diferencia entre c y d: la 2.ª, que de a se ha de restar la diferencia entre c y d: la 3.ª, que la suma de a y b se ha de multiplicar por c: la 4.ª, que la diferencia entre a y b se ha de dividir por la suma de c y d: la 5.ª, que el producto de a por b y por c se ha de elevar á la cuarta potencia: y la 6.ª, que se ha de extraer la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de a y el cuadrado de b.

ARTICULO II.

Brevedad y generalidad del lenguaje algebráico.

7. A las anteriores convenciones estan reducidas la notacion y lectura algebráicas. Y es ciertamente maravilloso el grado de brevedad y generalidad que adquieren con ellas todas las especulaciones teóricas y procedimientos prácticos, que el Álgebra emprende acerca de las cantidades de toda especie.

Para demostrar la inmensa ventaja que bajo ambos conceptos lleva el cálculo algebráico al numérico, pueden presentar-

UNED

se en paralelo las tres resoluciones de una misma cuestion, empleando el lenguaje comun, el aritmético y el algebráico.

Supongamos que se trate de resolver el siguiente

PROBLEMA.

8. Dividir un número dado en tres partes tales, que el exceso de la mediana sobre la menor y el de la mayor sobre la mediana sean números dados.

Resolucion.

En lenguaje comun.	2.° *En lenguaje aritmético.*	3.° *En lenguaje algebráico.*
	Si es 20 el número que se va á dividir, 2 el exceso de la parte mediana sobre la menor, 4 el exceso de la mayor sobre la mediana y x la parte menor:	Si a designa el número que se va á dividir, b el exceso de la parte mediana sobre la menor, c el exceso de la parte mayor sobre la mediana y x la parte menor;
La parte mediana será igual á la menor más el exceso de la mediana sobre la menor.	La mediana será $x+2$.	La mediana será $x+b$.
La mayor será la mediana más el exceso de la mayor sobre la mediana.	La mayor será $x+2+4$.	La mayor será $x+b+c$.
Las tres partes reunidas componen el número propuesto.		
Luego la menor, más la menor, más el exceso de la mediana sobre la menor, más la menor, más el exceso de la mediana sobre la menor, más el exceso de la mayor sobre la mediana, componen el número que se ha dividir.	Luego $x+x+2+x+2+4=20$.	Luego $x+x+b+x+b+c=a$
Luego tres veces la parte menor, más dos veces el exceso de la mediana sobre la menor, más el exceso de la mayor sobre la mediana, componen tambien este número.	Luego $3x+2+2+4=20$, ó $3x+8=20$.	Luego $3x+2b+c=a$.

UNED

Luego tres veces la parte menor equivalen al número dado, ménos dos veces el exceso de la mediana sobre la menor y ménos una vez el exceso de la mayor sobre la mediana.	Luego $3x=12$.	Luego $3x=a-2b-c$.
Luego, en fin, la parte menor es igual al tercio de lo que quede despues que del número que se va á dividir, se reste dos veces el exceso de la mediana sobre la menor y una vez el exceso de la mayor sobre la mediana.	Luego $x=\frac{12}{3}$, ó $x=4$.	Luego $x=\frac{a-2b-c}{3}$.

El lenguaje comun es largo, difuso y casi imposible de retener por los esfuerzos de la memoria. Su excesiva vaguedad ó indeterminacion lo inhabilitan para la solucion del problema propuesto, que es de los más sencillos.

El lenguaje aritmético es más breve que el comun. Ejecutando, sin embargo, inmediatamente con los números todas las operaciones indicadas, al llegar al resultado se habrian como borrado los datos, y no podria descubrirse la relacion general que tienen con este resultado. La solucion sería esencialmente *particular*, y limitada á aquellos datos determinados.

El lenguaje algebráico es breve, compendioso y rápido; presenta á la mirada del espíritu, casi reducida á un punto, toda la marcha del raciocinio y del procedimiento resolutivo. No ejecutando, sino simplemente indicando las operaciones con las letras, se conservan siempre los datos en su natural relacion con la cantidad que se busca, y el resultado es por necesidad *general* y aplicable á toda clase de datos numéricos.

El resultado que se obtiene es una *fórmula*.

9. *Se entiende por* FÓRMULA *la expresion general del procedimiento que ha de seguirse para resolver un problema, ó de una propiedad general que puede consignarse en un teorema.*

$$x=\frac{a-2b-c}{3}$$

es la fórmula que enseña la manera de hallar la parte menor, restando del número que se ha de dividir en tres partes des-

UNED

iguales, dos veces el exceso de la mediana sobre la menor y una vez el exceso de la mayor sobre la mediana, y dividiendo este resto por tres.

Puede decirse que *el Algebra es la ciencia de las trasformaciones y de las fórmulas.*

ARTICULO III.

De las cantidades consideradas como positivas y como negativas.

10. La generalidad con que el Algebra considera la cantidad exige que en ella se tenga en cuenta, no solamente su valor respecto á una unidad cualquiera, sino tambien su manera de ser ó de influir en el resultado á que se aspira en el procedimiento. Las cantidades han de ser miradas bajo el doble concepto de la *cantidad* y de la *cualidad*: para apreciar los grados de temperatura, no solo conviene saber cuántos son; sino tambien si están por encima ó por bajo del *cero* del termómetro: para juzgar de la situacion de un capital, hay que saber si las cantidades ó partidas del balance corresponden al *haber* ó al *deber*: y para calcular la posicion de un móvil, es necesario tener conocidas, además de su velocidad, la direccion de su movimiento.

11. Bajo el concepto de su cualidad ó manera de ser, se dividen las cantidades en *positivas* y *negativas*. Consideradas como POSITIVAS *las que tienen un modo de ser determinado*, serán NEGATIVAS *las que tienen un modo de ser contrario á ellas.* Si a, considerada como *positiva*, representa los grados de calor sobre cero, las partidas que corresponden al haber, ó el número de varas andadas á la derecha de un punto; a, considerada como *negativa*, expresará los grados de temperatura bajo cero, las partidas correspondientes al deber ó las deudas, y las varas corridas á la izquierda del punto.

12. Para expresar el carácter positivo y negativo de las cantidades se emplean los dos signos $+$ y $-$, que sirven para indicar la adicion y la sustraccion. La sustraccion misma no es, con efecto, sino la oposicion de dos cantidades de contrario carácter: el sustraendo siempre es negativo respecto al minuendo.

UNED

El signo + no se emplea cuando la cantidad positiva está sola ó es la primera de una expresion compleja.

13. Las denominaciones de *positivo* y *negativo* son puramente relativas, y no denotan mayor excelencia ó privilegio de lo primero sobre lo segundo. Estas denominaciones se cambian cuando se muda de objeto en la consideracion algebráica: así, cuando consideramos el haber de un capital, es negativo el deber ó las deudas; y cuando consideramos las deudas, es negativo el haber, que ántes era positivo. Una cantidad bajo el concepto absoluto de cantidad y sin relacion con ninguna cuestion, no es positiva ni negativa.

14. Cuando se dice que las cantidades negativas son menores que cero, solo quiere expresarse que influyendo sobre las positivas las disminuyen, ó que añadidas á las positivas las aumentan ménos que si no se les añadiera nada. En este sentido puede decirse tambien que el que tiene una deuda de 7 pesos, tiene ménos que el que no tiene nada ó está en paz: esto se expresa

$$-7<0.$$

En igual sentido se dice que el que tiene una deuda de 100 pesos tiene ménos que el que tiene otra de 20; y por consiguiente que de dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor absoluto, y al contrario: así

$$-100<-20.$$

Una cantidad negativa, resultado de una sustraccion, no indica sino que el sustraendo es mayor que el minuendo; y que en vez de *exceso* de este sobre aquel, hay un *defecto* ó un exceso de aquel sobre este: los oficios de minuendo y sustraendo resultan cambiados, y este cambio se expresa por el carácter negativo de la diferencia: así

$$2-5=-3$$

indica que si en vez de restar 5 de 2, lo que es imposible, restásemos 2 de 5, hallaríamos la diferencia positiva entre estos dos números.

Corolario *Para restar de un número menor otro mayor se resta el menor del mayor, y á la diferencia se le pone el signo —.*

UNED

La teoría de los signos es de tanto interés en el Algebra como la de las cantidades.

ARTICULO IV.

Denominaciones de las varias formas de expresion algebráica.

15. *Se llama* CANTIDAD Ó EXPRESION ALGEBRÁICA *un conjunto de letras, ó de números y letras, unidos por medio de los signos que sirven para indicar las operaciones.*

Cantidad ENTERA *es la que no lleva ningun radical ni divisor.* Tambien se suele llamar entera algebráicamente una cantidad literal, aunque el coeficiente numérico sea quebrado, como

$$\frac{3}{5}abc.$$

Cantidad FRACCIONARIA Ó QUEBRADO LITERAL *es la que lleva algun divisor,* como

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+b}{c-b}.$$

Cantidad RACIONAL *es la que no lleva ningun radical.*

Cantidad RADICAL *es la que va afecta del signo de este nombre,* como $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt{a-b}$ (*).

16. *Se llaman* TÉRMINOS *de una expresion algebráica aquellas partes que están separadas unas de otras por los signos* $+$ *ó* $-$.

Así, la expresion algebráica $2a-\frac{a-b}{c}+\sqrt{a}$ tiene tres términos, que son: $2a$, $\frac{a-b}{c}$, $\sqrt{a}$.

MONOMIO *es una expresion que no consta más que de un término,* como $5a^7bc^2$, que se lee: cinco *a* siete *bc* dos.

POLINOMIO *es una expresion algebráica que consta de dos,*

(*) Las cantidades radicales son *racionales* cuando la raiz indicada puede extraerse exactamente, como $\sqrt{a^2}=a^1$; en los demás casos son *irracionales*, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{a}$, etc.

UNED

tres ó más términos. En el primer caso se llama *binomio* y en el segundo *trinomio*, etc. Así

$$5a+3b^2 \text{ es un binomio,}$$

$$4a^5-5ab+\frac{c}{d} \text{ es un trinomio.}$$

17. *Se llama* DIMENSION (*) *de un término ó monomio cada uno de los factores literales que contiene*, y GRADO *el número de dimensiones ó factores literales.*

El monomio $7a$ tiene solo una dimension ó es de primer grado; bc tiene dos dimensiones ó es de segundo grado: $5a^2b^4c$, como equivalente á $5aabbbbc$, tiene siete dimensiones ó es de sétimo grado.

Para averiguar el *grado* de un monomio racional y entero, se suman los exponentes de las letras que lo forman, suponiendo que la letra que no lleva exponente escrito, tiene por exponente la unidad (**5**). Así, el grado de $2ab^3c^7m$ es

$$1+3+7+1=12.$$

Un polinomio es *homogéneo* cuando todos sus términos son de igual grado: así, el polinomio

$$5a^3b-a^2x^2+c^3d+6a^4$$

es homogéneo, porque todos sus términos son de cuarto grado.

18. Se dice que un polinomio está *ordenado* con relacion á las potencias descendentes de una letra, cuando está escrito principiando por el término en que la letra *ordenatriz* tiene el mayor exponente, y siguiendo los demás por órden descendente. Así, el polinomio anterior, ordenado con relacion á las potencias descendentes de la letra a, es

$$6a^4+5a^3b-a^2x^2+c^3d.$$

Se dice que un polimonio está *ordenado* con relacion á las potencias ascendentes de una letra, cuando está escrito principiando por el término en que la letra ordenatriz tiene el menor exponente y siguiendo los demás por órden ascendente: así, el polinomio anterior ordenado de esta manera, será

$$c^3d-a^2x^2+5a^3b+6a^4.$$

(*) Esta palabra está tomada de la Geometría, que considera las dimensiones como factores de la superficie y del sólido.

UNED

ARTICULO V.

Valor numérico de las expresiones algebráicas y reduccion de términos semejantes.

19. *Se llama* VALOR NUMÉRICO *de una expresion algebráica el número que resulta sustituyendo á las letras números particulares y ejecutando las operaciones indicadas.*

El valor numérico de $2a^2b$, en el supuesto de que $a=5$, $b=1$, es $2\times5^2\times1=50$.

El de $\frac{3bc}{a}-a^2$, suponiendo que $b=2$, $c=7$, $a=10$, es $\frac{3\times2\times7}{10}-10^2=4,2-100=$(**14**, corol.)$-95,8$.

OBSERVACION. Es evidente, segun lo que precede, que los términos de un polimonio que alcancen valores positivos donde quiera que se hallen, contribuyen siempre á aumentar el resultado, y los negativos á disminuirlo, y por lo tanto que

El valor numérico de un polimonio no varía cualquiera que sea el órden de colocacion de sus términos. Así

$$3ab^3-c^3+ab-7=3ab^3-c^3-7+ab.$$

20. *Se llaman* TÉRMINOS SEMEJANTES *los que tienen las mismas letras y en cada una los mismos exponentes; pudiendo diferenciarse solamente en el signo y en el coeficiente numérico.*

Los términos $3ab^2$, $7ab^2$ y $-2b^2a$ son semejantes:

$4a^3b$ y $5ab^3$ no lo son.

Cuando un polinomio tiene términos semejantes, se puede *simplificar*, esto es, *reducir á uno solo los términos semejantes entre sí.*

Para esto se distinguen dos casos: 1.° *que los terminos semejantes tengan un mismo signo:* 2.° *que le tengan contrario.*

21. 1.er CASO. Sean los términos semejantes $3ab^2+7ab^2$. Como la parte literal ab^2 es igual en los dos, tendrá el mismo valor numérico (**19**); luego si convenimos en que represente

una unidad cualquiera, los dos términos dados valen 3 unidades *más* 7 unidades; luego valdrán 10 unidades, ó sea $10ab^2$; luego

$$3ab^2 + 7ab^2 = 10ab^2.$$

Si los términos semejantes fuesen $-5a^3b$ y $-ba^3$, tendriamos lo mismo que en el ejemplo anterior, esto es, que la parte literal podria representarse en cada uno por una unidad igual, un duro por ejemplo; serían, pues, los dos términos *ménos* 5 duros, *ménos* 1 duro; luego equivaldrán á *ménos* 6 duros (de la misma manera que se diria que quien *debe* 5 duros por una parte y 1 por otra, *debe* 6 duros), ó sea $-6ab^3$; luego

$$-5a^3b - ba^3 = -6a^3b.$$

Luego *para reducir términos semejantes de igual signo, se suman los coeficientes; y esta suma, con el signo comun, se pone por coeficiente de la parte literal.*

22. 2.° CASO. Sean $10a^3b$ y $-4a^3b$ los términos semejantes. Por lo dicho en el caso anterior es evidente que 10 veces una cantidad *ménos* cuatro veces la misma, es 6 veces dicha cantidad; luego

$$10a^3b - 4a^3b = 6a^3b.$$

Si los términos semejantes fuesen $3b^2n$ y $-8b^2n$; suponiendo, como en el primer caso, que la parte literal b^2n representa una unidad cualquiera, será 3 unidades *ménos* 8 unidades, que componen *ménos* 5 unidades (**14**, corol.), ó sea $-5b^2n$, luego

$$3b^2n - 8b^2n = -5b^2n.$$

Luego *para reducir términos semejantes de diferente signo, se resta el coeficiente menor del mayor, y la diferencia, con el signo del mayor, se pone por coeficiente de la parte literal.*

23. *Si hubiese muchos términos semejantes entre sí, unos positivos y otros negativos, se reducen los dos primeros á uno solo, éste se reduce con el tercero, el que resulte se reduce con el siguiente, y así sucesivamente;* ó tambien *se reducen á uno solo todos los términos positivos, á otro todos los negativos, y luego* (**22**) *se convierten en uno los dos resultados.*

UNED

Ejemplo. Simplifíquese el polinomio

$$7a^2b-8b+a^2b-10a^2b-a^2b-5a^4b+8a^2b+5a^4b.$$
$$1.^\circ \quad 2.^\circ \quad 3.^\circ \quad 4.^\circ \quad 5.^\circ \quad 6.^\circ \quad 7.^\circ \quad 8.^\circ$$

Los términos 1.°, 3.°, 4.°, 5.° y 7.° son semejantes. Para reducir los cinco á uno, diremos, el 1.° y 3.°

ó sea $7a^2b+a^2b=8a^2b$ (**21**):

este resultado y el 4.° término del polinomio,

ó sea $8a^2b-10a^2b=-2a^2b$ (**22**):

este resultado y el 5.° término del polinomio,

ó sea $-2a^2b-a^2b=-3a^2b$ (**21**):

este resultado y el 7.° término del polinomio,

ó sea $-3a^2b+8a^2b=5a^2b$ (**21**);

luego los cinco términos semejantes indicados se convierten en $5a^2b$.

El 2.° término $-8b$ no tiene semejante en el polinomio; luego se escribe como está.

El término 6.° $-5a^4b$ y el 8.° $+5a^4b$ se reducen evidentemente á cero ó *se destruyen*. Luego

$$7a^2b-8b+a^2b-10a^2b-a^2b-5a^4b+8a^2b+5a^4b=5a^2b-8b.$$

Tambien se pudo haber dicho $7a^2b+a^2b+8a^2b=16a^2b$ y $-10a^2b-a^2b=-11a^2b$ (**21**); luego los cinco términos semejantes se reducen á $16a^2b-11a^2b=5a^2b$ (**22**). Los términos restantes se reducirian como ántes, y se obtendria igual resultado total.

CAPITULO II.

Cálculo de las cantidades algebráicas.

Operaciones fundamentales.

24. Consideramos como tales la *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion y division*, que se llaman así por la analogía que guardan con las aritméticas de iguales nombres. Debe no obstante advertirse que la ejecucion de estas operaciones es muy distinta en una y otra ciencia. En el Álgebra, propiamente hablando, *no se ejecutan las operaciones*, esto es, no se confunden los datos en el resultado, sino que *se transforman en otras*, que producen igual efecto que las indicadas, y que

UNED

ó son más sencillas que estas, ó más á propósito para obtener el resultado que nos proponemos.

Debe advertirse tambien que la índole especial de los signos con que se representan las cantidades, y el doble concepto de *cantidad* y *cualidad* que se les atribuye, hacen que las definiciones, especialmente de las operaciones directas, dadas en la Aritmética, no sean bastante generales para reducir á su mayor sencillez las trasformaciones de que las cantidades algebráicas son capaces. Definirémos, pues, de nuevo dichas operaciones al ocuparnos de cada una de ellas.

ARTICULO I.

Adicion.

25. *Se llama* ADICION ALGEBRÁICA *una operacion, cuyo objeto es reunir dos ó más expresiones algebráicas en una sola, conservando á cada término el mismo signo que tiene.*

26. De esta definicion se infiere que

Para sumar cantidades monomias ó polinomias se colocan todos los términos de que constan, á continuacion unos de otros, con los mismos signos que llevan en los sumandos.

Si en la suma resultan términos semejantes, se reducen (**20**).

EJEMPLOS.

1.° $a+(+b)=a+b.$

2.° $-a+(+b)=-a+b.$

3.° $a+(-b)=a-b.$

4.° $-a+(-b)=-a-b.$

De la misma manera para ejecutar la adicion en el siguiente ejemplo

5.° $a+(b-c)+(f+d-m)+(-n-p),$

no hay más que suprimir los paréntesis y los signos + que estan fuera de ellos y que sirven solo para indicar la operacion, advirtiendo que es necesario restablecer ó poner de manifiesto los signos +, que indican que la b y la f son positivas, omitidos ántes por hallarse dichas letras al principio del segundo y tercer sumando.

De modo que

$$a+(b-c)+(f+d-m)+(-n-p)=a+b-c+f+d-m-n-p$$

27. Suelen colocarse los sumandos unos debajo de otros; y esta disposicion es ventajosa cuando hay términos semejantes, con tal que los polinomios se ordenen con relacion á las potencias descendentes ó ascendentes de una misma letra, y las potencias iguales de esta se correspondan en columna vertical, pues en tal caso la reduccion se ejecuta con mucha facilidad al mismo tiempo que la suma.

$$\text{Sumandos}\ldots\ldots\begin{cases} 7a^3b-2a^2b^2-5ab^3-b^4 \\ -4a^3b-5a^2b^2+5ab^3-2b^4 \\ a^3b+4a^2b^2\qquad\quad+6b^4 \end{cases}$$

$$\text{Suma}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 4a^3b-3a^2b^2\qquad+3b^4.$$

Observacion. Si se medita sobre la naturaleza de la adicion algebráica, se verá que comprende la adicion y sustraccion aritméticas, esto es, que el resultado es unas veces la suma de los valores absolutos de los sumandos, y otras la diferencia, segun que los datos alcancen valores del mismo signo ó de signo contrario.

ARTICULO II.

Sustraccion.

28. *Se llama* SUSTRACCION ALGEBRÁICA *una operacion cuyo objeto es, dada la suma algebráica de dos cantidades y una de estas determinar la otra.*

De donde se infiere que

El resto es una cantidad que sumada algebráicamente con aquella que se resta, ó sea el sumando conocido, produce la cantidad de que se resta, ó sea la suma dada (*).

29. Sea, pues, restar de la cantidad A monomia ó polinomia, positiva ó negativa, la cantidad b, y se tendrá

$$A-(+b)=A-b;$$

porque $A-b+b=A$ (**22**).

De igual modo se verá que

$$A-(-b)=A+b;$$

puesto que $A+b-b=A$ (**22**).

(*) De intento, aun valiéndonos de rodeos, no hacemos uso de los nombres *minuendo* y *sustraendo* empleados en la Aritmética; porque la significacion de estas denominaciones y su etimología las hacen impropias en el caso presente.

Réstese, por último, de dicha cantidad A el polinomio $b-c$ (*), y se tendrá

$$A-(b-c)=A-b+c;$$

porque $A-b+c+b-c=A.$

Luego *para restar de una cantidad otra algebráica, se escribe la primera con los mismos signos que tiene, y á continuacion la segunda con signos contrarios á los que llevaba.*

Si en el resultado se hallan términos semejantes se reducen.

EJEMPLO. Restar de $3ac^2-7a+5a^2c$ el polinomio $2a^2c+4ac^2-c$; se tendrá

$$3ac^2-7a+5a^2c-(2a^2c+4ac^2-c)=3ac^2-7a+5a^2c$$
$$-2a^2c-4ac^2+c=-ac^2-7a+3a^2c+c \quad (\mathbf{23}).$$

30. Si los datos de este problema se colocan de una manera análoga á los del problema del número **27** en la adicion, se tendrá más fácilmente:

Cantidad de que se resta.....	$5a^2c+3ac^2-7a$
Cantidad que se resta.....	$2a^2c+4ac^2 \quad -c$
Resultado.....	$3a^2c-ac^2-7a+c$

igual al anterior.

Tambien se suele ordenar la operacion, escribiendo la cantidad de que se resta, y debajo la que se resta con los signos mudados, quedando en tal caso la operacion ejecutada, pues que solo falta la reduccion de los términos semejantes, si los hay, como se ejecuta en la adicion y á continuacion se ve:

Cantidad de que se resta.....	$5a^2c+3ac^2-7a$
Cantidad que se resta.....	$-2a^2c-4ac^2 \quad +c$
Resultado.....	$3a^2c-ac^2-7a+c,$

idéntico al anterior.

OBSERVACIONES.

31. 1.ª Cuando convenga mudar de signo á uno, á varios ó

(*) Siempre que en lo sucesivo se necesite expresar un *polinomio* general, lo haremos por un *binomio* en que uno de los términos sea *positivo*, para que represente la suma de los valores absolutos de todos los términos positivos; y el otro *negativo*, para que su valor absoluto represente la suma de los valores absolutos de los términos negativos, y el signo — señale la cualidad negativa de dichos valores.

á todos los términos de un polinomio, no hay más que encerrar dentro de un paréntesis el término ó términos que deben mudar de signo, con los signos ya mudados, poniendo fuera del paréntesis y á su izquierda el signo —.

Si se quiere que en el polinomio

$$a-b+c-d+f$$

los términos $-b, -d, +f$ aparezcan con los signos contrarios, sin alterar el valor de dicho polinomio, se escribirá

$$a+c-(b+d-f);$$

porque ejecutando la sustraccion indicada resulta el polinomio dado.

2.ª Si se reflexiona sobre la naturaleza de la precedente operacion, se verá que tambien comprende la adicion y sustraccion aritméticas; esto es, que el resultado es unas veces la suma de los valores absolutos de las cantidades que se restan una de otra, y otras la diferencia entre las mismas, segun dichas cantidades tengan signo contrario ó igual.

ARTICULO III.

Multiplicacion.

32. *Se llama* MULTIPLICACION ALGEBRÁICA *de una cantidad por otra, la operacion cuyo objeto es hallar una tercera cantidad, que sea en signo y magnitud relativamente á uno de los factores lo que el otro es respecto de la unidad positiva.*

En esta operacion se distinguen tres casos: 1.º *multiplicar un monomio por otro:* 2.º *multiplicar un polinomio por un monomio ó al contrario:* 3.º *multiplicar un polinomio por otro polinomio.*

33. 1.er CASO. Ante todo observarémos que un monomio contiene cuatro cosas, *signo*, *coeficiente*, *letras* y *exponentes*.

Deduzcamos, en primer lugar, la regla para determinar el signo del producto.

Al efecto, supongamos para mayor sencillez que el valor absoluto del multiplicando es a, y b el del multiplicador, cuyo producto es ab, y expresemos siempre el signo de cada factor.

Sea 1.º $+a\times+b$.

El signo del multiplicador $+b$ es igual al de $+1$; luego

(segun la definicion) el del producto ha de ser igual al del multiplicando $+a$, esto es, *positivo*; luego el del producto tambien será *positivo*. Luego

$$+a\times+b=+ab.$$

2.° $-a\times-b$.

El signo del multiplicador $-b$ es contrario al de $+1$; luego el del producto ha de ser contrario tambien al del multiplicando $-a$; pero este es *negativo*; luego el del producto será *positivo*. Luego

$$-a\times-b=+ab.$$

3.° $+a\times-b$.

El signo del multiplicador $-b$ es contrario al de $+1$; luego el del producto ha de ser contrario al del multiplicando $+a$; luego ha de ser *negativo*. Luego

$$+a\times-b=-ab.$$

4.° $-a\times+b$.

El signo del multiplicador $+b$ es igual al de $+1$; luego el del producto ha de ser tambien igual al del multiplicando $-a$; luego ha de ser *negativo*. Luego

$$-a\times+b=-ab.$$

Los casos que se acaban de examinar son todos los que pueden ocurrir respecto á signos, y de ellos se deduce la regla siguiente:

Si los dos factores de un producto tienen igual signo, el producto es positivo; si tienen signo contrario, negativo,
ó abreviadamente

$+$ multiplicado por $+$ ó $-$ por $-$ dan $+$,
$+$ multiplicado por $-$ ó $-$ por $+$ dan $-$;

más breve aún

$$+\times+=+, \qquad +\times-=-,$$
$$-\times-=+, \qquad -\times+=-.$$

Corolario 1.° Un producto de dos ó más factores no varía de signo, aunque se varíe el órden de los factores; y como tampoco varía de valor absoluto (segun se demostró en la Aritmética) resulta que en *nada varía un producto aunque se cambie de lugar á los factores*.

Corolario 2.° *Un producto de cualquiera número de factores será* positivo, *si el número de factores negativos fuese*

UNED

par, y negativo en el caso contrario; y por consiguiente las potencias de grado par de cantidades positivas ó negativas son siempre positivas, *y las de grado impar son* positivas *si la cantidad que se eleva ó la raiz es positiva, y* negativas *en caso contrario.*

Corolario 3.° *Si en un producto cualquiera se varía de signo á un número par de factores, el producto no varía de signo; si se muda el signo á un número impar de factores, el producto varía de signo.*

34. Pasemos ya á deducir la regla que ha de seguirse en la multiplicacion de dos monomios respecto á los otros tres elementos, es decir, respecto á *coeficientes*, *letras* y *exponentes*.

Háyase, al efecto, de multiplicar $3a^2b^3c^2$ por $7a^4b$.

El factor $3a^2b^3c^2$ equivale (**5**) á..... $3aabbbcc$:

el factor $7a^4b$ á..... $7aaaab$;

luego el producto será

$$3aabbbcc \times 7aaaab.$$

Y como se puede variar de colocacion á los factores enteros ó quebrados sin que varíe el producto, el anterior se puede escribir así

$$3 \cdot 7 \times aaaaabbbbcc.$$

Mas como $aaaaaa = a^6$, $bbbb = b^4$ y $cc = c^2$ (**5**), tendrémos por último que

$$3a^2b^3c^2 \times 7a^4b = 21a^6b^4c^2.$$

Ahora, el coeficiente 21 del producto se forma multiplicando los coeficientes 3 y 7 de los factores: las letras a, b y c que entran en el producto, son las diferentes que entraban en los factores: el exponente 6 de la a en el producto es la suma de los exponentes 2 y 4 que esta letra tenia en los factores: el 4 de la b es tambien la suma de los exponentes 3 y 1 de dicha letra en ambos factores; y por último, el exponente 2 de la c, que no se hallaba más que en un factor, es el mismo que tenia en este.

De este raciocinio, aplicable á otro cualquier ejemplo, y de lo dicho respecto á los signos, se deduce la siguiente regla general.

Para multiplicar dos ó más monomios se determino el signo del producto por la regla anterior: se multiplican todos los coeficientes: á la derecha de este producto numérico se escri-

ben las letras diferentes que entran en todos los factores: á las letras que entren en dos ó más factores, se les pone á cada una por exponente la suma de los exponentes que dicha letra tenga en los factores donde se halle; y las que solo entren en un factor, se les deja á cada una el exponente que la misma lleva en este factor.

EJEMPLOS.

1.° $6a^2bc^3d^4 \times -abc^2 = -6a^3b^2c^5d^4$.

2.° $\frac{2}{3}ab^3c \times -bc^2 \times -2abf = \frac{4}{3}a^2b^5c^3f$.

3.° $-a^mb^rc^sd^2 \times -a^nb^3c^sg = a^{m+n}b^{r+3}c^{2s}d^2g$.

35. 2.° CASO. Háyase de multiplicar $a-b$ por m.

Si m es un número entero, el producto se hallará sumando $a-b$ consigo mismo tantas veces como unidades tenga m; luego a estará repetida por sumando m veces, y $-b$ otras m veces; luego el producto, despues de hecha la reduccion, resultará ser $ma-mb$. Luego

$$(a-b)\times m = am - bm.$$

Si m es un quebrado, podrémos representarle por $\frac{c}{d}$, siendo c y d números enteros, y el problema será

$$(a-b)\times\frac{c}{d}.$$

Esta multiplicacion se verificará tomando $\frac{1}{d}$ de $a-b$, y multiplicando el resultado por c.

Ahora para tomar $\frac{1}{d}$ de $a-b$, basta partir $a-b$ por d, cuyo cociente será

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d};$$

porque segun se ha visto cuando el monomio es entero, como lo es d,

$$\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)\times d = \frac{a}{d}\times d - \frac{b}{d}\times d = a-b.$$

UNED

Multiplicando, pues, por c dicho cociente $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$ se tendrá el producto pedido; y como c es tambien entero, de esta multiplicacion resulta

$$\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}\right)\times c=\frac{ac}{d}-\frac{bc}{d}.$$

Luego $$(a-b)\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}-\frac{bc}{d}.$$

ó $$(a-b)\times\frac{c}{d}=a\times\frac{c}{d}-b\times\frac{c}{d}.$$

Se ve, con efecto, que sustituyendo m en lugar de $\frac{c}{d}$, se tiene, como cuando m es entero,

$$(a-b)\times m=am-bm.$$

Por último, si el monomio m fuese negativo y se tuviese

$$(a-b)\times -m,$$

mudando el signo á $-m$, se tendria

$$(a-b)\times m=am-bm.$$

Pero mudando de signo á un factor se muda tambien al producto (**33**, corol. 3.°) luego el producto $am-bm$ es el que resulta de multiplicar $a-b$ por $-m$, solo que tiene signo contrario, luego mudándole el signo, que es convertirle en $-am+bm$, será el buscado.

Luego $$(a-b)\times -m=-am+bm.$$

Los productos obtenidos en el caso de ser m entero, quebrado, positivo ó negativo, son los mismos que se obtendrian multiplicando cada término del polinomio por el monomio y escribiendo á cada producto parcial el signo correspondiente.

Luego *para multiplicar un polinomio por un monomio, ó al contrario* (**33**, corol. 1.°), *se multiplica cada término del polinomio por el monomio, dando á cada producto parcial el signo que le corresponda en la multiplicacion parcial que le produce* (*).

---

(1) Se puede demostrar que esta regla es cierta, aunque el *monomio* sea *irracional*, por medio de un raciocinio análogo al expuesto en la nota del núm. **199** de la Aritmética.

EJEMPLOS.

1.° $(3a^2-5bc^2d-ab)\times 2ac^2=6a^3c^2-10abc^4d-2a^2bc^2$.

2.° $-4c\times(a-b^3+5ac-c^3)=-4ac+4b^3c-20ac^3+4c^4$.

OBSERVACIONES.

36. 1.ª *Si un polinomio no tiene términos semejantes, el producto que resulte de multiplicarle por un monomio tampoco los tiene;* porque siendo desemejantes los términos del polinomio propuesto, lo serán igualmente los que resultan de agregar á cada uno de ellos los factores literales que tiene el monomio, que es lo que se ejecuta en la multiplicacion, segun la regla. De donde se infiere tambien que *el producto de un polinomio, cuyos términos no son semejantes, por un monomio, tiene tantos términos como tenia el factor polinomio.*

2.ª Cambiando los dos miembros de la igualdad

$$(a-b)\,m=am-bm,$$

se tiene

$$am-bm=(a-b)\,m.$$

De donde se deduce que

Cuando dos ó más términos de un polinomio tienen un factor comun, se puede sacar este fuera de un paréntesis comprendiendo dentro lo que quede de dichos términos. Así

$$ax+2b^2x-x+c=x(a+2b^2-1)+c,$$

$$3x^2-5x=x(3x-5).$$

Tambien se acostumbra á indicar la descomposicion de esta otra manera.

$$ax+2b^2x-x+c=a\left|\begin{matrix}+2b^2\\-1\end{matrix}\right|x+c \quad \text{y} \quad 3x^2-5x=3x\left|\begin{matrix}\\-5\end{matrix}\right|x$$

37. 3.er caso. Sea multiplicar $a-b$ por $c-d$; sustituyendo m en lugar de $c-d$, se tendrá

$$(a-b)\,(c-d)=(a-b)\,m=am-bm.$$

Volviendo á escribir en lugar de m su valor $c-d$, resulta

$$(a-b)\,(c-d)=a(c-d)-b(c-d):$$

pero $a(c-d)=ac-ad$ (**35**) y $-b(c-d)=-bc+bd$ (**35**); luego $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd=ac-bc-ad+bd$,

UNED

Mas $ac-bc$ es el producto de $a-b$ por c, y $-ad+bd$ es el producto de $a-b$ por $-d$; luego

Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, dando á cada término del producto el signo que le corresponda en la multiplicacion parcial que le produce.

Si en el producto resultan términos semejantes se reducen.

38. Ejemplo. Sea multiplicar

$$5a^2x-2ax^2+4a^3 \text{ por } \frac{1}{2}x^3+a^2x-ax^2.$$

A fin de que la reduccion de los términos semejantes, si los hay, se ejecute con más facilidad, se ordenan los dos polinomios con relacion á las potencias descendentes ó ascendentes de una misma letra, que conviene sea la más repetida en ambos factores, y la operacion se dispone como se ve á continuacion (ordenando con relacion á la letra a).

Multiplicando ..... $4a^3+5a^2x-2ax^2$

Multiplicador..... $a^2x-ax^2+\frac{1}{2}x^3$

Producto por a^2x..... $4a^3x+5a^4x^2-2a^5x^3$

Id. por $-ax^2$... $-4a^4x^2-5a^3x^3+2a^2x^4$

Id. por $+\frac{1}{2}x^3$.. $2a^5x^3+\frac{5}{2}a^2x^4-ax^5$

Producto total reducido. $4a^3x+a^4x^2-5a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5$.

OBSERVACIONES.

39. 1.ª Como, segun la regla del precedente caso, cada término del multiplicador produce en la operacion tantos términos como tiene el multiplicando, *el número de términos del producto, ántes de la reduccion, es igual al número de términos del multiplicando, multiplicado por el número de términos del multiplicador.* Así que, si un factor tiene 6 términos y otro 4, el producto, ántes de la reduccion, tendrá $6\times4=24$ términos.

2.ª Si los términos de los factores se ordenan con relacion á las potencias descendentes de una misma letra, *el primer término del producto ordenado es el que resultó de multiplicar el*

UNED

primero del multiplicando por el primero del multiplicador: porque teniendo la letra por que se ordena mayor exponente en estos que en todos los restantes, la suma de los dos exponentes será mayor que la de otros dos cualesquiera de la misma letra, tomando uno en el multiplicando y otro en el multiplicador. Por una razon análoga, *el último término del producto ordenado es el que resulta de multiplicar el último del multiplicando por el último del multiplicador.*

De donde se infiere tambien, que dichos dos términos primero y último del producto ordenado no pueden ser semejantes con ninguno otro de este; y por lo tanto que *el producto de dos polinomios cualesquiera* (como ninguno de ellos sea cero) *ha de tener estos dos términos á lo ménos, despues de hecha la reduccion.*

3.ª Como en el producto de los polinomios se forma la parte literal de cada término, agregando á cada uno de los del multiplicando la parte literal de cada uno de los del multiplicador, resulta que *si los polinomios son homogéneos el producto lo será tambien, y tendrá un grado igual á la suma de los grados de los factores.*

Así, en el ejemplo del núm. anterior, siendo los polinomios homogéneos y de tercer grado cada uno, el producto será tambien homogéneo y de sexto grado, como en efecto sucede.

Otros EJEMPLOS *de multiplicacion algebráica.*

1.° $(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=$
$a^2+2ab+b^2.$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \end{array}$$

2.° $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

3.° $(a+b)\,(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$

40. Las fórmulas obtenidas en la resolucion de estos problemas traducidas al lenguaje comun, nos dan los siguientes

teoremas, de los que los dos primeros ya han sido demostrados en la Aritmética, aunque no de una manera tan general.

1.° *El cuadrado de una cantidad compuesta de dos partes consta de tres: cuadrado de la primera, duplo de la primera por la segunda y cuadrado de la segunda.*

2.° *El cubo de una cantidad compuesta de dos partes consta de cuatro: cubo de la primera, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda.*

3.° *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da por producto la diferencia de sus cuadrados.*

41. De lo dicho (**33**, corol. 2.°) respecto á los signos, se infiere *que obtenido un resultado ó fórmula en el supuesto de que una cantidad es positiva, para trasformarle en otro, suponiendo que dicha cantidad es negativa, ó al contrario, no hay más que cambiar el signo á las potencias impares de la cantidad que varió de signo.* Así

1.° $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2.° $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

3.° $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Estas dos primeras fórmulas, traducidas al lenguaje comun, nos darian otros dos teoremas análogos al 1.° y 2.° precedentes.

La tercera no da nuevo resultado, como en efecto debe suceder, puesto que $(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)$.

ARTICULO IV.

Division.

42. La DIVISION ALGEBRÁICA (lo mismo que la aritmética) *tiene por objeto hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé por producto el dividendo.*

En esta operacion se distinguen tres casos: 1.° *dividir un monomio por otro:* 2.° *dividir un polinomio por un monomio:* 3.° *dividir un polinomio por otro polinomio.*

43. 1.er CASO. Deduzcamos ante todo el signo que ha de llevar el cociente. Al efecto supondrémos que el valor absoluto

del dividendo es a, el del divisor b, y q el del cociente. Recordemos tambien que el signo de este cociente ha de ser tal, segun la definicion, que multiplicado por el del divisor produzca el del dividendo.

Luego tendremos $\frac{+a}{+b}=+q$; porque $+q\times+b=+a$ (**33**).

Del mismo modo $\frac{-a}{-b}=+q$; porque $+q\times-b=-a$.

De igual manera $\frac{+a}{-b}=-q$; porque $-q\times-b=+a$.

Y por último $\frac{-a}{+b}=-q$; porque $-q\times+b=-a$.

Luego, respecto á los signos resulta la misma regla que para la multiplicacion, esto es, que

Si dividendo y divisor tienen un mismo signo, el cociente es positivo, si tienen signo contrario, negativo, ó abreviadamente

$+$ dividido por $+$ ó $-$ por $-$ dan $+$,
$+$ dividido por $-$ ó $-$ por $+$ dan $-$;

más breve aún

$$\frac{+}{+}=+ \text{ ó } \frac{-}{-}=+, \qquad \frac{+}{-}=- \text{ ó } \frac{-}{+}=-.$$

Corolario. *El signo del cociente no varia combiando el del dividendo y divisor.*

44. Pasemos ya á deducir la regla que ha de seguirse en la division de monomios respecto á los otros tres elementos, es decir, respecto á coeficientes, letras y exponentes.

Sea dividir $10a^6b^3c^2$ por $2a^4b^3$.

El coeficiente del dividendo es el producto del coeficiente del divisor por el coeficiente del cociente; luego el de este será $\frac{10}{2}=5$.

El exponente 6 de la a en el dividendo es la suma del exponente 4 de la a del divisor y del exponente de la a del cociente (**34**); luego el de a en el cociente será $6-4=2$.

La letra b, que tiene igual exponente en el dividendo y en el divisor, no puede formar parte del cociente; pues si la for-

mase, sumando el exponente que llevase en el cociente con el que lleva en el divisor, al multiplicar este por aquel, daria mayor exponente que el que dicha letra lleva en el dividendo, contra la definicion.

La letra c, que no se halla en el divisor, debe entrar en el cociente con el mismo exponente 2 que tiene en el dividendo, para que al multiplicar el cociente por el divisor aparezca en el dividendo con dicho exponente. Luego

$\frac{10a^5b^4c^2}{2a^4b^3}=5a^2c^2$; en efecto, $5a^2c^2\times 2a^4b^3=10a^6b^3c^2$.

De este raciocinio, que es aplicable á otro ejemplo cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para dividir un monomio por otro se determina el signo del cociente por la regla anterior: se divide el coeficiente del dividendo por el divisor: á la derecha de este cociente numérico se escriben las letras que tengan en el dividendo mayor exponente que en el divisor y las que solo se hallen en el primero de estos términos, omitiendo las que entren en ambos con igual exponente: á cada una de las letras que se halle en el dividendo y divisor, se le pone por exponente la diferencia entre los exponentes que la misma letra lleva en el dividendo y el divisor, y á las que solo entren en el dividendo se les deja el exponente que tienen en este término.

EJEMPLOS. 1.° $\frac{-6a^3b^5c^5d^4}{6a^3bc^3d^4}=-abc^2$.

2.° $\frac{-\frac{4}{3}a^3b^6c^6f}{-2b^5c^5}=\frac{2}{3}a^3b^4cf$.

3.° $\frac{a^mc^3d^rf^s}{a^nc^3d^2}=a^{m-n}cd^{r-2}f^s$.

En la resolucion de este tercer problema se supone $m>n$ y $r>2$.

OBSERVACIONES.

45. 1.ª La division será impracticable, segun la regla precedente: 1.° cuando en el divisor exista alguna letra que no haya en el dividendo: 2.° cuando alguna letra tenga en el dividendo menor exponente que en el divisor. En estos casos se indica solamente la operacion, determinando el signo del

quebrado resultante y simplificándole, cuando se pueda, como se verá más adelante (**58**). Así

$$\frac{ba^2d}{-c^2n} = -\frac{ba^2d}{c^2n}$$

2.ª Si se generaliza algo más la regla en la parte relativa á los exponentes, suponiéndola aplicable al caso en que una letra le tenga igual en el dividendo y divisor, se tendrá

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Para averiguar el valor que se puede dar á este nuevo símbolo, observarémos que proviene de la division de una cantidad por sí misma, cuyo cociente es 1; luego se puede convenir en que $a^0 = 1$; es decir, en que *toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.*

Este símbolo de la unidad puede servir para conservar en el cociente una letra que desaparece en la ejecucion de la division; y tambien para introducir la letra, que convenga, como factor de un término de una expresion algebráica, sin que el valor de esta sufra alteracion alguna. Así

$$\frac{3a^4b^3}{a^2b^2} = 3a^2b^0 \quad \text{y} \quad 4x^2 - 3x + 5 = 4x^2 - 3x + 5x^0$$

46. 2.° CASO. Ya se ha visto (**35**), fundado en la multiplicacion de un polinomio por un monomio, que

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, dando á cada término del cociente el signo que resulte en la division parcial que le produce.

EJEMPLO. $\dfrac{6a^2c^3 - 10abc^4 - 2a^2bc^3}{2ac^2} = 3a - 5bc^2 - ab.$

OBSERVACION. La operacion no dará cociente entero si alguna de las divisiones parciales no es practicable; porque en esta division (lo mismo que en la multiplicacion de un polinomio por un monomio y por razon análoga) no pueden resultar términos semejantes; luego si un cociente parcial es inexacto, como este no puede ser *destruido* por otro, formará parte del cociente total, que por lo tanto no puede ser entero.

En este caso pueden efectuarse las divisiones parciales

UNED

que sean posibles, indicando las restantes como se ha dicho (**45**, 1.ª). Así

$$\frac{4a^3b^2c-5a^2cd-3a^4b}{2ab}=2abc-\frac{5a^2cd}{2ab}-\frac{3}{2}a^3.$$

47. 3.er CASO. Esta operacion tiene por objete, como ya se ha indicado en la definicion, hallar un tercer polinomio que multiplicado por el divisor produzca el dividendo.

Si, pues, los tres polinomios se suponen ordenados con relacion á las potencias descendentes ó ascendentes de una misma letra, el primer término del cociente multiplicado por el primero del divisor dará el primero del dividendo (**39**, 2.ª).

Luego el primer término del cociente se hallará dividiendo el primero del dividendo por el primero del divisor.

El dividendo, por otra parte, puede considerarse formado del producto del divisor por cada uno de los términos del cociente; luego si del dividendo se resta el producto del primer término del cociente por todo el divisor, el resto será el producto del divisor por los términos restantes del cociente, es decir, por todos, excepto el primero; luego el segundo término del cociente, multiplicado por el primero del divisor, dará el primero del anterior resto (**39**, 2.ª).

Luego el segundo término del cociente se hallará restando del dividendo el producto del primero del cociente por todo el divisor, y dividiendo el primer término del resto ordenado por el primero del divisor.

De una manera análoga se determina el 3.º, 4.º, etc., términos del cociente.

Luego *para dividir un polinomio por otro se ordenan dividendo y divisor con relacion á las potencias descendentes ó ascendentes de la letra más repetida con diferentes exponentes; se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y este será el primero del cociente. Se multiplica el primer término del cociente por todo el divisor, y el producto se resta del dividendo: el primer término del resto, ordenado como dividendo y divisor, se divide por el primero del divisor, y se tendrá el segundo término del cociente. Se multiplica este segundo término del cociente por todo el divisor, y el producto se resta del resto anterior; el primer tér-*

UNED

mino del segundo resto, ordenado como el anterior, se divide por el primero del divisor y se tendrá el tercer término del cociente. Así se continua hasta que se halle un resto cero, ó hasta que alguna division parcial sea imposible.

EJEMPLO. Dividir $a^4x^2-5a^3x^3-ax^5+\frac{9}{2}a^2x^4+4a^5x$ por $5a^2x+4a^3-2ax^2$.

La operacion se dispone como se ve á continuacion.

Dividendo..	$4a^5x+a^4x^2-5a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5$	$4a^3+5a^2x-2ax^2$
Producto de a^2x por el divisor. . .	$4a^5x+5a^4x^2-2a^3x^3$	$a^2x-ax^2+\frac{1}{2}x$
1.er resto...	$-4a^4x^2-3a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5$	
Producto de $-ax^2$ por el divisor	$-4a^4x^2-5a^3x^3+2a^2x^4$	
2.° resto....	$2a^3x^3+\frac{5}{2}a^2x^4-ax^5$	
Producto de $\frac{1}{2}x^3$ por el divisor. . .	$2a^3x^3+\frac{5}{2}a^2x^4-ax^5$	
3.er resto. .	0	

Ordenado el polinomio con relacion á las potencias descendentes de a (ó ascendentes de x, pues en este caso es igual), se divide $4a^5x$ por $4a^3$, y el cociente a^2x es el primer término del cociente.

Se multiplica a^2x por $4a^3+5a^2x-2ax^2$ y el producto $4a^5x+5a^4x^2-2a^3x^3$ se coloca debajo del dividendo, procurando que se correspondan los términos en que la letra por que se ordena tenga el mismo exponente, como se advirtió (**30**): se resta este producto del dividendo, y se obtendrá el primer resto

$$-4a^4x^2-3a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5.$$

UNED

Se divide $-4a^4x^2$ por $4a^3$, y el cociente $-ax^2$ será el segundo término del cociente.

Se multiplica $-ax^2$ por $4a^3+5a^2x-2ax^2$, y el producto $-4a^4x^2-5a^3x^3+2a^2x^4$ se coloca debajo del primer resto: se ejecuta la sustraccion y se obtendrá el segundo resto

$$2a^3x^3+\frac{5}{2}a^2x^4-ax^5.$$

Se divide $2a^3x^3$ por $4a^3$ y el cociente $\frac{1}{2}x^3$ será el tercer término del cociente, que se multiplica por el divisor y se resta del segundo resto: el resíduo cero indica que la operacion se ha terminado.

OBSERVACIONES.

48. 1.ª Si al mismo tiempo que se forma el producto del divisor por cada término del cociente se mudan los signos á dicho producto, la sustraccion queda verificada (**30**), faltando solo la reduccion de términos semejantes (*).

2.ª Como el primer término del divisor multiplicado por cada uno del cociente da por producto el primero del dividendo parcial que le produjo, y mudando el signo á dicho producto destruye necesariamente al primero del dividendo parcial, *se puede omitir la multiplicacion de cada término del cociente por el primer término del divisor, suponiendo destruido el primero del dividendo parcial correspondiente.*

3.ª Siendo el último término del dividendo el producto del último del divisor por el último del cociente, hallaremos este, sin necesidad de haber obtenido los anteriores, dividiendo el término último del dividendo por el último del divisor.

Así, para hallar el último término del cociente anterior bastaria dividir $-ax^5$ por $-2ax^2$.

(*) Tambien puede hacerse la reduccion de términos semejantes al mismo tiempo que la multiplicacion y sustraccion; mas esto, en divisiones no tan sencillas como la presente, expone á los principiantes á cometer equivocaciones por atender a muchas cosas simultáneamente.

Resolvamos el problema primero teniendo en cuenta las dos primeras observaciones precedentes, y será

$$\begin{array}{r|l}
4a^5x+a^4x^2-5a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5 & 4a^3+5a^2x-2ax^2 \\
-5a^4x^2+2a^3x^3 & \hline
\cline{1-1} a^2x-ax^2+\frac{1}{2}x^3 \\
-4a^4x^2-3a^3x^3+\frac{9}{2}a^2x^4-ax^5 & \\
+5a^3x^3-2a^2x^4 & \\
\hline
2a^3x^3+\frac{5}{2}a^2x^4-ax^5 & \\
-\frac{5}{2}a^2x^4+ax^5 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

49. La division de polinomios será imposible, esto es, el cociente no será un polinomio entero, cuando el primer término del dividendo ó de alguno de los restos ordenados no sea divisible por el primero del divisor.

En este caso *se completa el cociente añadiendo al término ó términos enteros hallados un quebrado, cuyo numerador sea el resíduo y cuyo denominador sea el divisor* (*).

Ejecútese la siguiente division:

$$\begin{array}{r|l}
8a^4-4a^3-2a^2+6 & 2a^2-3a \\
+12a^3 & \hline
\cline{1-1} 4a^2+4a+5+\frac{15a+6}{2a^2-3a} \\
8a^3-2a^2+6 & \\
+12a^2 & \\
\hline
10a^2+6 & \\
+15a & \\
\hline
15a+6 &
\end{array}$$

Esta operacion no da cociente entero, porque $15a$, primer término del resto, no es divisible por $2a^2$, primero del divisor; por lo que se suspende la ejecucion, llegado este caso, y se completa el cociente, como se ha dicho y se ve en el ejemplo.

(*) En efecto, el quebrado que se forma multiplicado por el denominador da por producto el numerador (**59**), y mudando el signo á este producto destruye el último resto; por lo tanto, el quebrado formado completa el cociente.

UNED

CAPITULO III.

Quebrados ó fracciones literales.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

50. Se ha visto (**45**, 1.ª y **49**) que cuando una division es imposible, se escribe el dividendo ó el resíduo sobre una raya y debajo de ella el divisor, de este modo

$$\frac{6a^2b}{c^3n}, \quad \frac{15a+6}{2a^2-3a}.$$

Estas expresiones se llaman (**15**) quebrados ó fracciones literales.

Cualesquiera que sean los valores numéricos de las letras que forman estas fracciones, siempre representarán quebrados numéricos, más ó ménos complicados, como

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{9}{\frac{5}{2}}, \quad \frac{\frac{2}{5}}{8}, \quad \frac{\frac{7}{11}}{\frac{13}{6}}, \text{ etc.};$$

y como las reglas dadas para estos son generales (Arit. **115**), serán tambien aplicables á los quebrados ó fracciones de que ahora nos ocupamos; por lo que omitirémos dichas reglas para evitar inútiles repeticiones, indicando solo aquellas que por su mayor generalidad puedan ofrecer alguna duda en la aplicacion.

Aunque sean unas mismas las reglas para los quebrados numéricos y literales, su ejecucion es distinta; porque con las letras se opera de diverso modo que con los números, como se ha advertido (**24**), y resulta evidentemente de la comparacion de las operaciones algebráicas ya ejecutadas, con las aritméticas de igual nombre.

UNED

ARTICULO II.

Simplificacion.

51. Los quebrados literales se pueden simplificar, cuando ambos términos tienen factores comunes, suprimiendo estos, con lo que los quebrados no varian de valor (Arit. **86**, 7.° y **115**) (*). Así

$$\frac{4a^2b^3c^2f^6}{6ab^4c^4d^5}=\frac{2\times2\times a\times a\times b^3\times c^2\times f^6}{2\times3\times a\times b\times b^3\times c^2\times d^5}=\frac{2af^6}{3bd^5},$$

suprimiendo los factores 2, a, b^3, c^2, comunes á ambos términos.

Esto equivale evidentemente, en los monomios, á la siguiente regla:

Se restan los exponentes de una misma letra (el menor del mayor), *y queda la letra en el término en que tenia mayor exponente con un exponente igual á la diferencia hallada. El quebrado formado por los coeficientes numéricos se simplifica si se puede.* De modo que

$$\frac{8a^3b^5c}{4a^5b}=\frac{2b^4c}{a^2} \quad \text{y} \quad \frac{5ac^3}{10a^3bc^4}=\frac{1}{2a^2bc^2}.$$

Otros EJEMPLOS.

1.° $\dfrac{2a^2-2ab+2a^3}{6a^4b}=\dfrac{2a\,(a-b+a^2)}{2\times3\times a\times a^3\times b}=\dfrac{a-b+a^2}{3a^3b}$.

2.° $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=$(**40**, 1.° y 3.°) $\dfrac{(a+b)\,(a-b)}{(a+b)\,(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

Cuando (como sucede en el último ejemplo) los dos térmi-

(*) El principio en que se fundan la simplificacion y reduccion de quebrados á un comun denominador, se puede demostrar tambien de este modo: sea $\frac{a}{b}$ un quebrado, y m una cantidad cualquiera, digo que

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}.$$

En efecto, $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$; de donde $a=b\times\frac{a}{b}$; multiplicando los dos miembros por m, será $ma=mb\times\frac{a}{b}$; de donde $\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$.

UNED

nos del quebrado son polinomios, no es fácil la separacion de todos los factores comunes á numerador y denominador, y por consiguiente la reduccion de los quebrados *á su más simple expresion*. Solo puede conseguirse esto de una manera análoga á la practicada en la Aritmética (**185**, corol.), por medio del *máximo comun divisor algebráico*, cuya teoría no creemos de este lugar.

ARTICULO III.

Reduccion á un comun denominador.

52. Ejemplos.

1.° $\left\{\begin{matrix}\frac{a}{b}, & \frac{c}{d}, & \frac{m}{n}\ \text{(Ar. 88)},\\ \frac{adn}{bdn}, & \frac{bcn}{bdn}, & \frac{bdm}{bdn}.\end{matrix}\right.$ 2.° $\left\{\begin{matrix}\frac{a}{a+b}, & \frac{c+d}{a-b},\\ \frac{a^2-ab}{a^2-b^2}, & \frac{ac+bc+ad+bd}{a^2-b^2}.\end{matrix}\right.$

53. Si los denominadores tienen factores comunes, y se quiere que *el denominador comun sea el menor posible*, se procede aquí como se ha hecho con los quedrados numéricos (Arit. **188**), advirtiendo que

Se llama mínimo comun múltiplo de dos ó más expresiones literales enteras, el monomio ó polinomio que, teniendo menor número de factores literales y numéricos, sea divisible por todos ellos.

54. De donde se infiere que

Para determinar el mínimo comun múltiplo de varios monomios, se halla el mínimo comun múltiplo numérico (Aritmética **183**) *de los coeficientes, y á continuacion de este se escriben las letras diferentes que entran en dichos monomios, cada una con el mayor exponente que tenga* (*).

Así, el mínimo comun múltiplo de $4a^3b^5c$, $3a^2bc^3$, $6ab^2d$ es $12a^3b^5c^3d$.

(*) La determinacion del mínimo comun múltiplo entre expresiones polinomias tampoco la creemos de este lugar.

UNED

Otro EJEMPLO.

Reducir á un comun denominador (Arit. **188**) los quebrados

$$\frac{5mn}{4a^2b^5c}, \quad \frac{2d^2}{3a^3bc^3}, \quad \frac{m^2q}{6ab^3d}.$$

El mínimo comun múltiplo de los denominadores, es $12a^3b^5c^3d$: los cocientes de este por cada uno de dichos denominadores son respectivamente (**44**)

$$3c^2d, \ 4ab^4d, \ 2a^2b^5c^3:$$

el producto del primero de estos cocientes por el numerador del primer quebrado, el del segundo por el del segundo, y el del tercero por el del tercero, son por su órden

$$15c^2dmn, \ 8ab^4d^4, \ 2a^2b^3c^3m^2q;$$

luego los quebrados propuestos reducidos á un comun denominador son

$$\frac{15c^2dmn}{12a^3b^5c^3d}, \quad \frac{8ab^4d^4}{12a^3b^5c^3d}, \quad \frac{2a^2b^3c^3m^2q}{12a^3b^5c^3d}.$$

ARTICULO IV.

Adicion y sustraccion.

55. EJEMPLOS. 1.° $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ (Arit., **97**).

2.° $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

3.° $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ (Arit., **100**).

4.° $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

5.° $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a-c+d}{b}$ (**46**).

De este último ejemplo se infiere que

56. *Para reunir varias fracciones literales, de igual denominador y con diferentes signos, en una sola, se forma un polinomio sumando los numeradores de los quebrados que lleven el signo* +, *y restando los numeradores de los quebra-*

UNED

dos que tengan el signo —, y á este polinomio se le pone por denominador el denominador comun.

Si las fracciones no tienen igual denominador se reducen á él, y luego se ejecuta la trasformacion como acaba de indicarse.

Otro EJEMPLO.

$$\frac{a}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}-\frac{c-d}{a^2}=$$

$$\frac{a^2c+a^2d}{a^2(c^2-d^2)}+\frac{a^2c-a^2d-a^2bc+a^2bd}{a^2(c^2-d^2)}-\frac{c^2-cd^2-c^2d+d^2}{a^2(c^2-d^2)}=$$

$$\frac{a^2c+a^2d+a^2c-a^2d-a^2bc+a^2bd-c^2+cd^2+c^2d-d^2}{a^2(c^2-d^2)}=$$

$$\frac{2a^2c-a^2bc+a^2bd-c^2+cd^2+c^2d-d^2}{a^2(c^2-d^2)}.$$

ARTICULO V.

Reduccion de una expresion mista á quebrado.

57. EJEMPLOS. 1.° $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$ (**46**, obs.).

2.° $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$.

De la resolucion de estos ejemplos se deduce que

58. *Para reducir una expresion mista á quebrado se multiplica la parte entera por el denominador del quebrado propuesto, con este producto se suma algebráicamente el numerador del quebrado, si este lleva el signo +, ó se resta si lleva el signo —, y al polinomio así formado se le pone por denominador el mismo que el quebrado tiene.*

3.° $a-b-\frac{c-d}{m}=\frac{(a-b)\,m-c+d}{m}=\frac{am-bm-c+d}{m}$.

ARTICULO VI.

Multiplicacion.

59. EJEMPLOS. 1.° $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (Arit., **105**).

2.° $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}$ (Arit., **106**, corol.).

UNED

3.° $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ (Arit., **108**).

4.° $-a^2b \times \frac{2ad}{5bc} = \frac{-2a^2bd}{5bc} = -\frac{2a^2d}{5c}$.

5.° $\frac{a^2-c}{b+d} \times \frac{m+n}{b-d} = \frac{a^2m-cm+a^2n-cn}{b^2-d^2}$.

ARTICULO VII.

Division.

60. Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}$ (Arit., **111**).

2.° $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ (Arit., **112**).

3.° $c : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$ (Arit., **113**).

4.° $(a^2 - b^2) : \frac{c+d}{m} = \frac{a^2m-b^2m}{c+d}$

5.° $\frac{b+c}{m} : \frac{a^2-b}{c+b} = \frac{b^2+2bc+c^2}{a^2m-bm}$

ARTICULO VIII.

Operaciones con las expresiones mistas.

61. Las operaciones con las expresiones mistas se ejecutan en la misma forma que tienen, ó reduciéndolas á quebrados (**58**).

1.° $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(a^2b-\frac{c}{d}\right) = a^3b + \frac{a^2b^2}{c} - \frac{ac}{d} - \frac{b}{d}$.

$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(a^2b-\frac{c}{d}\right) = \frac{ac+b}{c} \times \frac{a^2bd-c}{d} = \frac{a^3bcd+a^2b^2d-ac^2-bc}{cd}$.

2.° $\left(\frac{c^2}{d} - ab^2\right) : bd = \frac{c^2}{bd^2} - \frac{ab}{d}$.

$\left(\frac{c^2}{d} - ab^2\right) : bd = \frac{-ab^2d+c^2}{d} : bd = \frac{-ab^2d+c^2}{bd^2}$.

UNED

CAPITULO IV.

Ecuaciones de 1.er grado con una incógnita.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

62. *Se llama* ECUACION *una igualdad en que entran una ó más cantidades desconocidas ó incógnitas;*

$4x=\frac{x}{4}+\frac{15}{2}$ y $ax+\frac{c}{2}=\frac{x}{b}$ son ecuaciones.

Lo mismo que en las igualdades, *recibe el nombre de* PRIMER MIEMBRO *la cantidad ó expresion que está ántes del signo* $=$, *y de* SEGUNDO MIEMBRO *la que está despues.*

Las ecuaciones pueden ser *numéricas ó literales.*

Se llama ECUACION NUMÉRICA *aquella en que todas las cantidades conocidas van expresadas por números, y* LITERAL *aquella en que una ó más cantidades conocidas están expresadas por letras.*

La primera de las ecuaciones anteriores es numérica, la segunda literal.

Se llama IDENTIDAD *una igualdad que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor numérico de las cantidades literales que entran en ella.*

$8=8$, $3b(b-a)=3b^2-3ba$ y $3x-5=\frac{6x-10}{2}$

son identidades.

63. VALORES *de una incógnita son aquellas cantidades que sustituidas en vez de ella en la ecuacion, la trasforman en una identidad.*

En este caso tambien se dice que *satisfacen ó verifican* la ecuacion. El valor de x en la ecuacion

$$4x=\frac{x}{4}+\frac{15}{2}$$

es 2; porque sustituyendo este número en vez de x, se tiene

$$4 \times 2 = \frac{2}{4} + \frac{15}{2} \text{ ó bien } 8 = 8,$$

cuya ecuacion queda *convertida en identidad, verificada ó satisfecha.*

RESOLVER UNA ECUACION *es hallar el valor ó valores de la incógnita ó incógnitas que contiene.*

64. *Se llama ecuacion* DETERMINADA *aquella en que la incógnita tiene un número limitado de valores, é* INDETERMINADA *en el caso contrario.*

Se da el nombre de ecuaciones EQUIVALENTES *á aquellas en que la incógnita ó incógnitas tienen los mismos valores.*

Es evidente, segun estas definiciones, que en vez de una ecuacion se puede sustituir otra equivalente.

Antes de resolver una ecuacion cualquiera, se ejecutan con ella ciertas operaciones preliminares de que vamos á ocuparnos, y que comprendemos bajo la denominacion general de *preparacion de las ecuaciones.*

ARTICULO II.

Preparacion de las ecuaciones.

65. PREPARAR UNA ECUACION *es trasformarla en otra equivalente, que reuna las circunstancias siguientes:* 1.ª *que todos sus términos, ó al ménos los desconocidos, sean enteros:* 2.ª *que aquellos en que entran las incógnitas se hallen en un miembro* (que generalmente es el primero) *y los conocidos en el otro:* 3.ª *que los términos donde una incógnita tiene exponente igual, se hallen reducidos á uno solo:* 4.ª *que sea positivo el término en que la incógnita tiene mayor exponente* (*).

Las ecuaciones $6x = 25$, $ax - by = c$, $ax^2 - x = 35$ estan preparadas.

66. La preparacion de las ecuaciones se funda en el principio siguiente:

El valor de las incógnitas no varía en una ecuacion aun-

(*) Tampoco debe hallarse la incógnita debajo de ningun signo radical.

UNED

que á sus dos miembros se añada ó quite una misma cantidad, ó se multipliquen ó partan por una cantidad igual (*).

67. Sea preparar esta ecuacion

$$\frac{x}{3}-5x-6=\frac{x}{5}+\frac{1}{2}.$$

Quitemos primero los denominadores de los quebrados que la ecuacion contiene.

Al efecto reducirémos todos sus términos á un comun denominador, lo que no puede alterar el valor de la incógnita, y se tendrá trasformada en la siguiente

$$\frac{10x}{30}-\frac{150x}{30}-\frac{180}{30}=\frac{6x}{30}+\frac{15}{30};$$

y suprimiendo ahora el denominador comun, lo que tampoco altera el valor de la incógnita (**66**), pues equivale á multiplicar cada término por 30, y por lo tanto ambos miembros por 30, se tendrá

$$10x-150x-180=6x+15;$$

y reduciendo los términos semejantes de cada miembro

$$-140x-180=6x+15.$$

Luego *para quitar los denominadores de una ecuacion, se multiplica el numerador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás quebrados, y cada entero por el de todos los denominadores.*

Si los denominadores tienen factores comunes, basta multiplicar el numerador de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el mínimo comun múltiplo de los denominadores por el denominador del mismo quebrado (**53**), *y cada entero por dicho mínimo comun múltiplo.*

68. Trasladarémos ahora el término 180 del primer miem-

(*) Si los dos miembros se multiplican por cero, entónces pueden ser distintos ó iguales los valores de las incógnitas, pues siempre se convertirá por dicha multiplicacion en la identidad $0=0$.

Si se multiplican ó dividen por una cantidad que contenga alguna incógnita, la nueva ecuacion suele admitir los valores de la primitiva, y otro ú otros más ó ménos.

Así, multiplicando la ecuacion $2x=8$ por $x-3$, la nueva ecuacion $2x(x-3)=8(x-3)$ admite para x, además del valor 4 que tiene en la primera, el valor 3. Dividiendo, puede suceder evidentemente lo contrario.

UNED

bro al segundo y el $6x$ de este á aquel. Al efecto sumarémos algebráicamente con los dos miembros de la ecuacion anterior la cantidad $+180-6x$, con lo que no se altera el valor de la incógnita (**66**), y se tendrá

$$-140x-180+180-6x=6x+15+180-6x:$$

y como $-180+180$ se destruyen, lo mismo que $+6x-6x$, resulta

$$-140x-6x=15+180.$$

Luego *para trasladar uno ó más términos de un miembro á otro no hay más que mudarles los signos.*

Reduciendo los dos términos semejantes, se tiene

$$-146x=195.$$

Mudando los signos á toda la ecuacion, con lo que no se altera el valor de la incógnita, porque equivale á multiplicar los dos miembros por -1, resultará por fin la ecuacion *preparada*

$$146x=-195.$$

Prepárese la ecuacion

$$a-\frac{b}{x-c}-\frac{c}{b}=\frac{5}{7}.$$

Quitando los denominadores por la regla precedente se tiene

$$7ab(x-c)-7b^2-7c(x-c)=5b(x-c).$$

Ejecutando las operaciones indicadas resulta

$$7abx-7abc-7b^2-7cx+7c^2=5bx-5bc.$$

Trasladando los términos desconocidos al primer miembro os conocidos al segundo, segun la regla última, se tiene

$$7abx-7cx-5bx=7abc+7b^2-7c^2-5bc.$$

Reduciendo á uno solo todos los términos donde se halla la incógnita (**36**, 2.ª), resulta por último la ecuacion preparada

$$(7ab-7c-5b)x=7abc+7b^2-7c^2-5bc.$$

69. Del procedimiento empleado en los dos ejemplos anteriores resulta la siguiente regla:

Para preparar una ecuacion: 1.° *se quitan los denominadores:* 2.° *se trasladan al primer miembro todos los términos desconocidos y al segundo los conocidos:* 3.° *se reducen á uno solo todos aquellos donde la incógnita tenga el mismo exponente:* 4.° *se mudan los signos á toda la ecuacion, si el tér-*

UNED

mino donde la incógnita tiene mayor exponente fuese negativo.

OBSERVACIONES.

70. 1.ª Si despues de cualquiera de estas trasformaciones hubiese operaciones indicadas, especialmente entre términos donde haya alguna incógnita; si en un mismo miembro resultasen términos semejantes que puedan reducirse, ó si todos los términos de la ecuacion fuesen divisibles por una misma cantidad, se ejecutarán estas operaciones ántes de pasar á la trasformacion siguiente.

2.ª La mayor parte de las veces no tienen lugar todas las trasformaciones que en la regla anterior se prescriben; si en la ecuacion no existen denominadores, por ejemplo, se omite la primera trasformacion, y así de las demás. Tampoco es indispensable que las trasformaciones se practiquen por el órden que en la regla se enumeran; sin embargo, el órden prescrito evitará algunas veces el tener que verificar una trasformacion dos veces en una preparacion misma.

Otros EJEMPLOS *de preparacion.*

1.° $$\frac{x}{5}+\frac{3}{4}-y=\frac{y}{2}+21.$$

Quitando los denominadores, advirtiendo que el mínimo comun múltiplo de estos es 20, se tiene

$$4x+15-20y=10y+420.$$

Trasladando los términos conocidos al segundo miembro y los desconocidos al primero, se hallará

$$4x-20y-10y=420-15.$$

Reduciendo los términos semejantes, se tendrá la ecuacion *preparada*

$$4x-30y=405.$$

2.° $$20x-10x^2+80=5x.$$

Partiendo toda la ecuacion por 5, resulta

$$4x-2x^2+16=x.$$

Trasladando se tiene $4x-2x^2-x=-16.$

Reduciendo los términos semejantes $3x-2x^2=-16.$

Mudando los signos á toda la ecuacion, se tiene la siguien-

te preparada $2x^2-3x=16$.

3.° $2x(b-c)+\frac{a}{b}=d-(x+a)4ab$.

Ejecutando las operaciones indicadas, se tiene

$$2bx-2cx+\frac{a}{b}=d-4abx-4a^2b.$$

Trasladando resulta

$$2bx-2cx+4abx=d-4a^2b-\frac{a}{b}.$$

Reduciendo á uno solo todos los términos donde entra la x

$$(2b-2c+4ab)x=d-4a^2b-\frac{a}{b}.$$

71. Aunque todas las ecuaciones se preparan de un mismo modo, como acaba de verse, no sucede otro tanto con la resolucion, que es más ó ménos complicada segun la clase de ecuacion de que se trate.

Por esta razon las ecuaciones se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor exponente de la incógnita cuando estan preparadas.

Se llama ECUACION DE PRIMER GRADO *aquella en que el mayor exponente de la incógnita es* 1, como $3bx=ab^2$.

ECUACION DE SEGUNDO GRADO *es aquella en que el mayor exponente de la incógnita es* 2, como $3x^2-bx=c$ y $ax^2=b$.

OBSERVACION. Cuando en algun término entran varias incógnitas, para averiguar el grado de la ecuacion se suman los exponentes que las diferentes incógnitas tienen en dicho término. Así, $axy^2-x^2=b$ es de tercer grado.

ARTICULO III.

Resolucion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

72. Preparada una ecuacion de esta clase tomará la forma general $Ax=\pm B$,

donde el signo $\pm$ indica que el segundo miembro puede ser positivo ó negativo; siendo la cantidad A un entero y B un

entero ó quebrado, y pudiendo representar una y otra monomios ó polinomios.

Si los dos miembros de la ecuacion anterior se dividen por A no variará el valor de la incógnita (**66**), y se convertirá en

$$\frac{Ax}{A} = \pm\frac{A}{B} \text{ ó bien } x = \pm\frac{B}{A},$$

ecuacion evidentemente *resuelta* (**63**), ó donde la *incógnita está despejada.*

Luego *para resolver una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, despues de preparada, se divide el segundo miembro por el coeficiente literal ó numérico de la misma incógnita.*

EJEMPLOS.

1.° Sea resolver la ecuacion

$$\frac{5x-8}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7x+2}{10}.$$

Preparada esta ecuacion (**69**), se convierte en $4x=36$; y resuelta en $x=\frac{36}{4}=9.$

2.° Sea resolver la ecuacion

$$\frac{ax}{a+b}+b=a+b.$$

Preparada esta ecuacion (**69**), se convierte en $ax=a^2+ab$; de donde $x=a+b.$

73. Observacion. La ecuacion $x=a+b$ se convierte en la identidad

$$a+b=a+b,$$

poniendo en vez de x la cantidad $a+b$; y no se trasforma en identidad por ninguna otra cantidad distinta de $a+b$; luego esta cantidad satisface á la ecuacion $x=a+b$, y no existe ninguna distinta de ella que lo verifique. Por otra parte, como esta ecuacion es equivalente á la primitiva $\frac{ax}{a+b}+b=a+b$ (**66**), tambien esta última será satisfecha por la cantidad $a+b$, y no podrá serlo por ninguna otra distinta.

UNED

Siendo aplicable el raciocinio precedente á otro cualquier ejemplo, resulta que

El valor hallado (segun la regla, **72**) para la única incógnita de la ecuacion de primer grado, satisface siempre la ecuacion; y no hay otro valor que la satisfaga, por cuya razon la ecuacion se llama *determinada* (*).

74. Para cerciorarse de que en la resolucion de una ecuacion no se ha cometido ningun error, *se comprueba*, esto es, se sustituye el valor hallado para la incógnita en la ecuacion primitiva, y si esta, ejecutadas las operaciones indicadas, se trasforma en una identidad, la ecuacion está bien resuelta (**63**); en el caso contrario no lo estará.

Sustituyendo en el primer ejemplo del número anterior en vez de x el valor hallado 9, se tendrá

$$\frac{5\times 9-8}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7\times 9+2}{10},$$

que ejecutando las operaciones indicadas, se convierte en la identidad

$$39=39;$$

luego 9 es el verdadero valor de la incógnita, ó la ecuacion está bien resuelta. Otro tanto sucederia en el segundo ejemplo.

ARTÍCULO IV.

Indicaciones sobre la resolucion de una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas.

75. Si hubiésemos de resolver una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas, la resolveriamos con relacion á una de ellas considerando las demás como conocidas; se darian valores arbitrarios á dichas incógnitas, y unidos estos con cada uno de los que resulten para la incógnita despejada, formarian diferentes sistemas de valores que resuelven la ecuacion.

Sea resolver la ecuacion $2x-3y=6$.

Resolviendo esta ecuacion con relacion á x, se tendrá

$$x=\frac{6+3y}{2}.$$

(*) El caso en que una ecuacion de primer grado con una incógnita aparece indeterminada no se opone á esta consecuencia; porque entónces no es propiamente una ecuacion, sino una identidad.

UNED

Luego

si $y=1$, $y=2$, $y=3$, etc.,

$x=\frac{9}{2}$, $x=6$, $x=7\frac{1}{2}$, etc.

Donde los valores que aparecen en columna son los que satisfacen la ecuacion, formando cada uno de estos conjuntos una *solucion de la misma*.

Si la ecuacion tiene tres incógnitas, para formar cada solucion se dan valores arbitrarios á dos de ellas; si tiene cuatro, á tres, etc. etc.

OBSERVACIONES.

76. 1.ª Es evidente que cada una de estas ecuaciones admite un número ilimitado de soluciones, ó que sus incógnitas pueden tener un número ilimitado de valores; por cuya razon la ecuacion de primer grado que tiene dos ó más incógnitas se llama *indeterminada*.

2.ª Cuando dos ó más incógnitas se hallan de tal manera ligadas entre sí en una misma ecuacion, que los diversos valores arbitrarios que una de ellas recibe, producen diversos valores en cualquiera de las demás, la incógnita que resulta variamente determinada se llama *funcion* de la que recibe valores arbitrarios, y esta se llama *variable*.

En la ecuacion $x=\frac{6+3y}{2}$, x es funcion de la variable y.

Si se supone despejada y, esta será funcion de la variable x en la ecuacion resultante $y=\frac{2x-6}{3}$.

ARTICULO V.

Valores que pueden hallarse para la incógnita en las ecuaciones de primer grado, y su significacion respecto á la ecuacion de donde dimanan.

77. Examinemos ahora los valores particulares que puede tener la incógnita en las ecuaciones de primer grado, segun los que se atribuyan á las cantidades conocidas que entran en las mismas.

La resolucion de la ecuacion general $Ax=\pm B$, nos da (**72**) $$x=\pm\frac{B}{A}\quad[1];$$

y separando los dos signos que contiene el $\pm$, resulta

$$x=\frac{B}{A}\quad\text{y}\quad x=-\frac{B}{A}.$$

Luego *el valor de la incógnita puede ser* positivo *ó* negativo, *conforme el segundo miembro de la ecuacion lleve el signo* + *ó el* — : entero *ó* quebrado, *segun que dicho segundo miembro dividido por el coeficiente de la incógnita, dé un cociente entero ó fraccionario.*

78. Supongamos que por efecto de valores particulares atribuidos á las cantidades que forman á B, se reduzca esta letra á cero, es decir que se tenga $B=0$, en este caso se tendrá tambien $x=\pm\frac{0}{A}$.

Esta expresion indica que el valor de la incógnita es cero, porque cero partido por cualquiera cantidad da por cociente cero. Así que, suponiendo $B=0$, se tiene

$$x=\pm 0=0,$$

ecuacion evidentemente absurda, miéntras x no se reduzca tambien á 0.

Luego *el valor* cero, *hallado para una incógnita, indica que la ecuacion de donde se deduce es absurda, ó al ménos que no puede ser satisfecha por ningun valor finito ni infinito.*

Observacion. Este valor de la incógnita satisface sin embargo á la ecuacion ó la trasforma en una identidad.

En efecto, si en $Ax=0$, se pone en vez de x cero, se tendrá

$$A\times 0=0,$$
$$0=0.$$

Luego *el valor* cero, *hallado para la incógnita, satisface la ecuacion que le produce.*

79. Supongamos ahora que tambien en virtud de valores particulares atribuidos á las cantidades de que A está formada, se tenga $A=0$, valiendo B una cantidad cualquiera, en tal caso se tendrá en la misma ecuacion [1],

$$x=\pm\frac{B}{0}.$$

El símbolo $\frac{B}{0}$ con que ahora se representa el valor de x es para nosotros desconocido. Examinemos el valor que se le puede atribuir.

UNED

Si se supone que A toma en dicha ecuacion [1] los valores

$$0{,}1 \quad , \quad 0{,}01 \quad , \quad \text{etc.},$$

los de x serán respectivamente

$$x = \pm\frac{B}{0{,}1} = \pm 10B, \qquad x = \pm\frac{B}{0{,}01} = \pm 100B, \text{ etc.}$$

Luego cuando A sea sumamente pequeña, el valor absoluto de x será sumamente grande; luego cuando $A=0$, el valor absoluto de x, ó sea $\frac{B}{0}$, será mayor que cualquier cantidad, por grande que esta sea.

Por esta razon *cuando un quebrado tiene por numerador una cantidad cualquiera, y por denominador cero, se dice que su valor absoluto es infinitamente grande ó que es el* INFINITO.

80. El símbolo $\frac{B}{0}$ ó el infinito, se representa por el signo ∞.

Así, en el supuesto de que $A=0$, se tiene

$$x = \pm\frac{B}{0} = \pm\infty.$$

La misma hipótesis de $A=0$, reduce la ecuacion general

$$Ax = \pm B$$

á

$$0 \times x = \pm B,$$

ó

$$0 = \pm B,$$

ecuacion evidentemente absurda miéntras B no se reduzca tambien á 0.

Luego *el valor* infinito *hallado para una incógnita, indica que la ecuacion de donde este valor se deduce es absurda, ó al ménos que no puede ser satisfecha por ningun valor limitado de la incógnita.*

Este valor se obtiene cuando la ecuacion *absurda* se resuelve por una fórmula general, mas si se resuelve directamente, el absurdo se manifiesta por la ecuacion $0=A$.

OBSERVACION. Por un razonamiento análogo al empleado para demostrar que toda cantidad de valor limitado partida por cero es igual al infinito, se demostraria que *toda cantidad, tambien de valor limitado, partida por el infinito es igual á cero, esto es, que*

$$\frac{B}{\infty} = 0.$$

UNED

A fin de averiguar si el valor infinito hallado para la incógnita en la hipótesis de $A=0$, satisface la ecuacion $Ax=B$, dividamos esta por x, y se tendrá

$$\frac{Ax}{x}=\pm\frac{B}{x} \quad \text{ó bien} \quad A=\pm\frac{B}{x}:$$

sustituyendo por x el infinito se tiene

$$A=\pm\frac{B}{\infty};$$

y como $A=0$ y $\pm\frac{B}{\infty}=0$, resultará la identidad

$$0=0.$$

Luego *el valor* infinito *hallado para la incógnita satisface la ecuacion que le produce.*

Propongámonos para mayor claridad resolver la ecuacion particular siguiente

$$\frac{5x}{3}-\frac{x}{2}=\frac{7x}{6}+10.$$

Preparada esta ecuacion (cuidando de no reducir los términos semejantes donde entra la incógnita con signos distintos) se tendrá $x(7-7)=60$;

de donde $$x=\frac{60}{7-7}=\frac{60}{0}=\infty,$$

ó haciendo ántes la reduccion de términos semejantes

$$0=60.$$

Si en la ecuacion propuesta se suman algebráicamente los dos quebrados del primer miembro, se convertirá en

$$\frac{7x}{6}=\frac{7x}{6}+10,$$

ecuacion evidentemente imposible para cualquiera valor limitado de x.

De manera que el resultado obtenido resolviendo la ecuacion está conforme con lo que desde luego se advierte en la misma.

81. Supongamos, por último, que se tenga á un tiempo $A=0$ y $B=0$, en tal caso la ecuacion [1] será

$$x=\pm\frac{0}{0}.$$

El símbolo $\frac{0}{0}$ con que se representa ahora el valor de la in-

UNED

cógnita es tambien desconocido. Veamos cuál puede ser su significacion.

El cociente $\frac{0}{0}$ ha de ser una cantidad que multiplicada por el divisor 0 dé por producto el dividendo 0 (**42**); y como toda cantidad cumple con esta condicion, resulta que $\frac{0}{0}$ *representa una cantidad cualquiera, ó es el símbolo de la indeterminacion.*

82. La misma hipótesis de $A=0$ y $B=0$, reduce la ecuacion general á $0\times x=0$,

ecuacion que queda satisfecha ó se convierte en la identidad

$$0=0,$$

por cualquiera valor que tome la incógnita.

Luego *el valor* $\frac{0}{0}$ *hallado para la incógnita indica, por lo general, que la ecuacion de donde provino admite para la misma incógnita infinitos valores.*

Este valor se obtiene cuando la ecuacion *indeterminada* se resuelve por una fórmula general; mas si se resuelve directamente, la indeterminacion se manifiesta por la ecuacion

$$0=0.$$

Propongámonos para mayor claridad resolver la ecuacion particular siguiente

$$\frac{2x}{3}-\frac{x}{5}+4=\frac{7x}{15}+\frac{12}{3}.$$

Preparada esta ecuacion (cuidando de no reducir los términos semejantes de signos diferentes) se tendrá

$$x(7-7)=60-60;$$

de donde $$x=\frac{60-60}{7-7}=\frac{0}{0},$$

ó haciendo ántes la reduccion de términos semejantes

$$0=0.$$

Si en la ecuacion propuesta se restan los quebrados del primer miembro y se sacan los enteros del quebrado $\frac{12}{3}$, se tendrá la identidad

$$\frac{7x}{15}+4=\frac{7x}{15}+4,$$

donde x puede tener un valor cualquiera sin que la igualdad desaparezca.

UNED

De manera que el resultado obtenido resolviendo la ecuacion, está conforme con lo que desde luego se advierte en la misma. A su vez toda ecuacion idéntica conduce á un valor $\frac{0}{0}$ para la incógnita.

83. No siempre que el valor de una incógnita se convierte en $\frac{0}{0}$, por una hipótesis cualquiera hecha en la fórmula de su valor, se ha de inferir que esta incógnita tiene un valor indeterminado en la misma hipótesis.

En efecto, si tuviésemos

$$x=\frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2},$$

el valor de x en la hipótesis de que $a=b$ se convierte en

$$x=\frac{a^3-a^3}{a^2-a^2}=\frac{0}{0};$$

mas si se observa que

$$\frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}=\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)},$$

y se suprime el factor comun $a-b$, se tendrá

$$x=\frac{ab}{a+b},$$

cuyo valor en la hipótesis de que $a=b$, se convierte en

$$x=\frac{a^2}{2a}=\frac{1}{2}a.$$

Luego *el valor* $\frac{0}{0}$, *que toma la incógnita en una hipótesis dada, proviene algunas veces de que existe un factor* cero *que aniquila numerador y denominador del quebrado á que la incógnita equivale. Para hallar, pues, el verdadero valor de la expresion indicada, se suprimen todos los factores comunes á numerador y denominador, se hace luego la hipótesis que reducia á cero cada uno de dichos términos, y el valor que entónces resulte para* x *será el verdadero.*

84. De todo lo expuesto se deduce que: 1.° *el valor de la incógnita en una ecuacion de primer grado puede ser* POSITIVO, NEGATIVO, ENTERO, QUEBRADO, CERO, INFINITO *é* INDETERMINADO: 2.° *todos estos valores, sustituidos en las ecuaciones que los producen, las satisfacen ó trasforman en identidades:* 3.° *el valor cero y el valor infinito indican que la ecuacion es absur-*

UNED

da: 4.° el valor indeterminado significa que la ecuacion es una identidad; á no ser que dicho valor provenga de un factor cero, comun á numerador y denominador de la fórmula que da el valor incógnito, en cuyo caso, convertida la expresion de la incógnita en irreducible, se halla su verdadero valor.

Observacion. Cuando una ecuacion es absurda sin que se haga ninguna hipótesis sobre los datos, la imposibilidad se manifiesta ántes de llegar al valor final de la incógnita por la ecuacion $0=A$. Si la imposibilidad proviniese de alguna hipótesis hecha sobre los datos en el valor general de la incógnita, verificada la misma hipótesis en la ecuacion primitiva, se manifestará lo absurdo de esta por la misma ecuacion $0=A$. En iguales condiciones la indeterminacion se manifiesta por la identidad $0=0$.

CAPITULO V.

Problemas de primer grado con una incógnita.

ARTICULO I.

Planteo y resolucion de estos problemas.

85. Ya se ha visto (**8**) que la resolucion de un problema consta de dos partes principales: 1.ª *plantear el problema ó sea expresar las condiciones del mismo por una ó más ecuaciones;* 2.ª *resolver la ecuacion ó ecuaciones resultantes.*

Esta segunda parte está sujeta á reglas sencillas para las ecuaciones de primer grado (como acaba de verse en el capítulo precedente y se verá en los siguientes inmediatos), y más ó ménos complicadas, pero siempre fijas, para las de grado superior.

No sucede otro tanto con el planteo de los problemas: para esto ni existe ni puede existir una regla general y exacta; nos contentarémos por lo tanto con hacer algunas indicaciones que, bien entendidas, conducen siempre al verdadero resultado.

86. *Para plantear un problema se indican, por medio de los signos correspondientes, las operaciones que con los datos é incógnitas deberian verificarse para comprobar los valores de estas si estuviesen ya determinados. De esta manera se*

UNED

obtienen expresiones distintas, por la forma, de una misma cantidad donde entran las incógnitas, cuyas expresiones igualadas producen la ecuacion ó ecuaciones necesarias.

87. COMPROBAR *los valores de las incógnitas es averiguar si satisfacen ó no todas las condiciones del problema.*

Un problema es de PRIMER GRADO *cuando la ecuacion ó ecuaciones, que resulten al plantearle, son de primer grado; de* SEGUNDO GRADO *cuando las ecuaciones resultantes son de segundo grado, etc.*

Un problema es DETERMINADO *cuando admite un número limitado de soluciones; é* INDETERMINADO *cuando admite un número ilimitado de soluciones.*

PROBLEMAS.

88. 1.° La suma de dos números es 137, la diferencia 43, ¿cuál será cada uno de estos números?

Llamando x el número menor, el mayor será $x+43$, y la suma de los dos $x+x+43$.

Tenemos, pues, las expresiones distintas $x+x+43$ y 137 de la suma de los dos números pedidos; luego estas expresiones son iguales; luego la ecuacion que resulta del planteo del problema será

$$x+x+43=137.$$

Resolviendo esta ecuacion, se tiene

$$x=\frac{94}{2}=47.$$

Luego el número menor es 47, y el mayor $47+43=90$.

Comprobacion. $47+90=137$,

$90-47=43$.

Luego los valores hallados satisfacen las condiciones del problema.

OBSERVACION. En este problema hay dos cantidades desconocidas, que son el número *mayor* y el *menor*, y se ha resuelto, sin embargo, como si hubiese una sola incógnita: esto es debido á la facilidad con que conocido uno de dichos números se determina el otro. En efecto, conocido el número mayor, el menor se halla restando del primero la diferencia dada; y conocido el menor, el mayor se halla sumando con aquel

UNED

la misma diferencia. Así que el problema pudo haberse planteado tomando por incógnita el número mayor, de esta manera: llamando x el número mayor, el menor será $x-43$ y la suma de los dos $x+x-43$; luego

$$x+x-43=137.$$

De donde (72) $$x=\frac{180}{2}=90.$$

Luego el número mayor es 90, y el menor $90-43=47$, valores iguales á los determinados anteriormente.

De donde se infiere que

Un problema que tiene dos ó más incógnitas podrá plantearse y resolverse como si tuviese una sola, con tal que la relacion que haya entre ellas sea tal que del valor de una se pueda deducir fácilmente el valor de las restantes, siendo indiferente en tal caso que se tome una ú otra como incógnita para plantearle.

89. **2.° En una poblacion invadida por la peste han muerto la décima parte de sus habitantes, la vigésima se hallan enfermos y la trigésima convalecientes: si hubiesen sido invadidos 190 individuos más, hubieran sido atacados la mitad de sus habitantes; ¿cuál era el número de estos ántes de la invasion?**

Llamando x el número de habitantes, el de muertos será $\frac{x}{10}$, el de enfermos $\frac{x}{20}$, y el de convalecientes $\frac{x}{30}$.

La suma de los invadidos más 190 tiene que ser igual á la mitad del número de habitantes; luego será este el planteo

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}+190=\frac{x}{2}.$$

De donde (72) $$x=\frac{11400}{19}=600.$$

90. **3.° Un padre tiene 41 años, su hijo 8, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será cuádrupla de la del hijo?**

Llámese x el número de años que han de trascurrir hasta que se verifique la condicion, la edad del padre será entónces $41+x$, y la del hijo $8+x$.

Como despues de trascurrir estos años la edad del padre debe ser cuádrupla de la del hijo ó $4(8+x)$, el planteo del problema será

$$4(8+x)=41+x.$$

Resolviendo esta ecuacion (72), se tiene

$$x=\frac{9}{3}=3.$$

Luego dentro de tres años la edad del padre será cuádrupla de la del hijo.

91. **4.° Un capitan ofrece á los soldados de su compañía, compuesta de 100 hombres, 4 reales por cada vez que den en el blanco; pero que han de dejar en el fondo de la compañía un real por cada vez que no den. Despues de hacer dos disparos cada soldado, se halló que el capitan debia entregarles 400 reales. ¿Cuántas veces dieron en el blanco y cuántas no?**

Llamando x el número de tiros que dieron en el blanco, el número de los que no dieron será $200-x$, lo que el capitan debia entregarles $4x$, lo que los soldados debian devolver al fondo $1\times(200-x)$; y como la diferencia de estas cantidades es 400, se tendrá

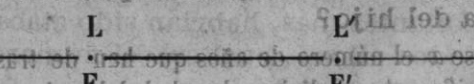
$$4x-(200-x)=400.$$

Resolviendo esta ecuacion (72), resulta

$$x=\frac{600}{5}=120.$$

Luego el número de tiros que dieron en el blanco es 120, el de tiros errados $200-120=80$.

92. **5.° Dos locomotoras L y L′ parten á un mismo tiempo en la direccion AB, de dos estaciones E y E′ situadas en la misma línea y distantes entre sí 20 leguas: L recorre 10 leguas por hora y L′ 6, ¿á qué distancia de la estacion E se encontrarán?**



Supongamos que el punto de encuentro sea B.

Llamando x la distancia EB, que recorre la locomotora L, la que recorre L' será $E'B = EB - EE' = x - 20$, el tiempo empleado por L en llegar á B será $\frac{x}{10}$, el empleado por L' será $\frac{x-20}{6}$; y como estos dos tiempos son iguales, la ecuacion del planteo es

$$\frac{x}{10} = \frac{x-20}{6}.$$

Resuelta esta ecuacion (**72**), se tiene

$$x = \frac{200}{4} = 50.$$

Luego la distancia de la estacion E al punto de encuentro son 50 leguas.

Generalizacion de los problemas anteriores.

93. 1.° Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la cantidad mayor y la menor.

Llamando s la suma, la diferencia d, y la cantidad mayor x; la menor será $x - d$, y la suma $x + x - d$; luego

$$x + x - d = s.$$

Resolviendo esta ecuacion, se tiene

$$x = \frac{s+d}{2};$$

luego la cantidad mayor es $x = \frac{s+d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$;

y la menor $x - d = \frac{s+d}{2} - d = \frac{s-d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$.

Estas fórmulas traducidas al lenguaje comun nos dicen que *La cantidad mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.*

94. 2.° En una poblacion invadida por la peste han muerto $\frac{1}{a}$ de sus habitantes, $\frac{1}{b}$ se hallan enfermos y $\frac{1}{c}$ convalecientes: si hubiesen sido invadidos d habitantes más, habrian sido atacados la mitad de todos ellos, ¿cuál era el número de estos ántes de la invasion?

Llamando x el número de habitantes ántes de la invasion,

el de muertos es $\frac{x}{a}$, el de enfermos $\frac{x}{b}$, el de convalecientes $\frac{x}{c}$; y como agregando d á los números anteriores se completa la mitad de individuos de la poblacion, el planteo del problema será

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}+d=\frac{x}{2}.$$

Resolviendo esta ecuacion, se tiene

$$x=\frac{2abcd}{abc-2bc-2ac-2ab}.$$

95. 3.° Un padre tiene a años, su hijo b, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será m veces la del hijo?

Llamando x el número de años que han de trascurrir, la edad del padre será entónces $a+x$, y la del hijo $b+x$; y como la edad del padre debe ser igual á m veces la del hijo, la ecuacion del problema será

$$m(b+x)=a+x.$$

Resolviendo esta ecuacion, se tiene

$$x=\frac{a-mb}{m-1}.$$

96. 4.° Un capitan ofrece á los soldados de su compañía, compuesta de a hombres, c monedas por cada vez que den en el blanco; pero que han de dejar en el fondo de la compañía d monedas por cada vez que no den. Despues de hacer b disparos cada soldado, se halló que el capitan debia entregarles g monedas. ¿Cuántas veces dieron en el blanco?

Llamando x el número de veces que dieron en el blanco, el de veces que no dieron será $ab-x$, el de monedas que debian recibir cx, y el de las que debian dejar en el fondo $d(ab-x)$; y como la diferencia entre las que debian recibir y devolver es g, la ecuacion del problema será

$$cx-d(ab-x)=g.$$

De donde

$$x=\frac{g+abd}{c+d}.$$

Observacion. Si quisiéramos resolver otro problema, que solo se diferenciase del anterior en que los soldados tuviesen

que *dejar en el fondo* g monedas en vez de *recibirlas*, tendriamos, como ántes, que el número de monedas que debian percibir sería cx, y las que debian entregar en el fondo de la compañía $d(ab-x)$; pero como esta cantidad ahora excede á la anterior en g monedas, la ecuacion del planteo sería en este caso $d(ab-x)-cx=g$.

De donde $x=\frac{abd-g}{c+d}$,

cuya fórmula no se distingue de la anterior sino en que la cantidad g, que mudó de acepcion (porque de ganancia que era para los soldados en el problema anterior, se ha convertido en pérdida para los mismos), ha mudado tambien de signo; luego la fórmula del primer caso puede servir para el segundo, ó al contrario, cambiando el signo á dicha letra.

De la misma manera, si en el problema 3.° se preguntase, no por los años que tienen que trascurrir, sino por los que han trascurrido desde que la edad del padre era m veces la del hijo, tendriamos que la edad del padre sería en la actualidad $a-x$, la del hijo $b-x$; y por consiguiente la ecuacion del planteo sería entónces

$$m(b-x)=a-x.$$

De donde $x=\frac{mb-a}{m-1}$,

cuya fórmula, mudando los signos á toda la ecuacion, lo que no altera el valor de la incógnita (**68**), se convierte en

$$-x=-\frac{mb-a}{m-1}, \quad \text{ó en} \quad -x=\frac{a-mb}{m-1},$$

una vez que para mudar el signo á un cociente basta mudarle al dividendo (**43**).

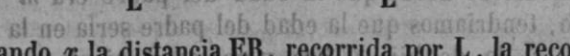
Comparando la fórmula $-x=\frac{a-mb}{m-1}$ con $x=\frac{a-mb}{m-1}$,

obtenida en la resolucion de dicho 3.er problema, se notará que no se distinguen sino en que la cantidad x, que mudó de acepcion (porque de años que *tenian que trascurrir* desde la época á que se refiere la pregunta, se convirtió *en años trascurridos* hasta la misma época), ha mudado tambien de signo; luego la fórmula del 1.er caso puede servir para el 2.° ó al contrario, cambiando el signo á dicha letra.

Como igual raciocinio se puede hacer con problemas análogos á los anteriores, resulta que se puede tomar como cierta; aunque hasta ahora no ha sido demostrada con todo rigor, la siguiente regla, debida á Descartes.

Las ecuaciones ó fórmulas de todo problema general sirven para resolver otros que solo se distinguen del primero en que ciertas cantidades, que ántes se tomaban en sentido determinado, despues se toman en sentido contrario, con tal que se mude el signo á las cantidades que cambien de cualidad ó modo de ser.

97. 5.° Dos locomotoras, L y L', parten á un mismo tiempo en la direccion AB, de dos estaciones E y E', situadas en la misma línea, y distantes entre sí d leguas; L camina v leguas por hora, y L' v' leguas, ¿á qué distancia de E se encontrarán?



Llamando x la distancia EB, recorrida por L, la recorrida por L' será $x-d$, el tiempo empleado por L en llegar á B será $\frac{x}{v}$, el empleado por L' será $\frac{x-d}{v'}$; y como estos tiempos son iguales, la ecuacion del planteo es

$$\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v'}.$$

Resolviendo esta ecuacion, se tiene

$$x=\frac{dv}{v-v'}.$$

ARTICULO II.

Significacion de los diferentes valores de la incógnita de un problema respecto de este.

98. *Valores enteros y positivos.* Estos valores son los que satisfacen casi siempre las condiciones del problema, como sucede en los que hemos hallado en la resolucion de los cinco problemas numéricos precedentes.

Decimos casi siempre, porque si por condiciones especiales del problema, el valor de la incógnita debiere estar comprendido entre ciertos límites, y no cumpliese con esta circunstancia, aunque el valor hallado

fuese *entero* y *positivo*, no satisfaria las condiciones del problema, y por lo tanto este sería imposible.

99. *Valores quebrados y positivos.* Estos valores tambien satisfacen por punto general las condiciones del problema.

No las satisfacen, sin embargo, *cuando alguna condicion exige que el resultado sea entero, ó cuando por la naturaleza misma de la cuestion la incógnita no admite valor quebrado.*

Supongamos que se hubiese de resolver este problema.

Hallar dos números enteros cuya suma componga 20, y cuya diferencia sea 7.

Valiéndonos de las fórmulas del 1.er problema general:

$$\text{número mayor} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2},$$

$$\text{Id. menor} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2},$$

haciendo en ellas $s=20$ y $d=7$, tendrémos

$$\text{número mayor} = \frac{20}{2} + \frac{7}{2} = 13\frac{1}{2},$$

$$\text{Id. menor} = \frac{20}{2} - \frac{7}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

Estos resultados nos dicen que el problema es imposible, porque los números hallados no llenan la condicion de ser *enteros*.

Supongamos que se haya de resolver este otro problema.

En una poblacion invadida por la peste han muerto la décima parte de sus habitantes, la vigésima se hallan enfermos, y la trigésima convalecientes; si hubiesen sido invadidos 200 indivíduos más, hubieran sido atacados la mitad de sus habitantes, ¿cuál era el número de estos ántes de la invasion?

Valiéndonos de la fórmula del segundo problema general

$$x = \frac{2abcd}{abc - 2bc - 2ac - 2ab},$$

y haciendo en ella $a=10$, $b=20$, $c=30$, $d=200$, se hallará

$$x = \frac{2\cdot10\cdot20\cdot30\cdot200}{10\cdot20\cdot30 - 2\cdot20\cdot30 - 2\cdot10\cdot30 - 2\cdot10\cdot20} = \frac{24000}{38} = 631\frac{11}{19}$$ habitantes,

cuyo resultado nos indica que el problema es imposible; porque por la naturaleza de la cuestion, el valor de la incógnita no puede ser quebrado.

100. *Valores negativos.* Resuélvase el siguiente problema.

Un padre tiene 54 años, su hijo 29, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será dupla de la del hijo?

UNED

Valiéndonos de la fórmula del tercer problema general

$$x=\frac{a-mb}{m-1},$$

y haciendo en ella $a=54$, $b=29$, $m=2$, tendrémos

$$x=\frac{54-2\cdot 29}{2-1}=\frac{-4}{1}=-4.$$

El resultado —4 años, como el tiempo es susceptible de variar de cualidad ó de tomarse en acepciones opuestas (**11**), indica con el signo negativo que se ha de tomar en sentido contrario al en que en el problema se propone: en este se exige que se cuente desde el instante de la pregunta hácia adelante, luego debe contarse desde el mismo instante hácia atrás. Así que, el —4 años hallado significa *que hacia cuatro años*, en la época de la pregunta, que la edad del padre era dupla de la del hijo.

De modo que el problema que es satisfecho por el resultado anterior cambiándole el signo, esto es, por +4 años, es el siguiente:

Un padre tiene 54 años, su hijo 29, ¿cuántos años hace que la edad del padre era dupla de la del hijo?

Resultado 4 años. Luego

1.° *El valor negativo de la incógnita, cuando la cantidad que representa puede tomarse en dos acepciones opuestas, indica que en el problema hay una condicion imposible, pero que se puede hacer posible cambiando la cualidad ó acepcion de la cantidad representada por la incógnita; y entónces el valor hallado para esta, considerándole como positivo, satisface al nuevo problema.*

Supongamos que se hubiese de resolver este otro problema.

En una poblacion invadida por la peste han muerto $\frac{1}{3}$ de sus habitantes, $\frac{1}{4}$ estan enfermos y $\frac{1}{5}$ convalecientes: si hubieran sido invadidos 17 indivíduos más, lo hubieran sido la mitad de sus habitantes, ¿cuál era el número de éstos ántes de la invasion?

Valiéndonos de la fórmula general del 2.° problema, empleada en el número anterior, y haciendo en ella $a=3$, $b=4$, $c=5$, $d=17$, tendrémos

$$x=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 17}{3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4}=\frac{2040}{-34}=-60.$$

El resultado —60 habitantes, como no es susceptible de variar de acepcion, indica desde luego que el problema es imposible.

Para averiguar la modificacion que en el problema propuesto debe hacerse á fin de que el valor +60 le satisfaga, tomarémos la ecuacion (**94**)

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}+d=\frac{x}{2},$$

que produjo la fórmula, y poniendo en vez de las cantidades indeterminadas las numéricas del problema precedente, resulta

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+17=\frac{x}{2}.$$

Si en esta ecuacion cambiamos el signo de la x, es evidente que así como la anterior es satisfecha por -60, lo será por $+60$ la siguiente:

$$-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{3}+17=-\frac{x}{2},$$

ó bien

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-17=\frac{x}{2}.$$

La precedente ecuacion puede traducirse en el siguiente problema, análogo al propuesto:

En una poblacion invadida por la peste han muerto $\frac{1}{3}$ de sus habitantes, $\frac{1}{4}$ estan enfermos y $\frac{1}{5}$ convalecientes: si hubiesen sido invadidos 17 indivíduos ménos, lo hubieran sido la mitad de sus habitantes, ¿cuál era el número de estos ántes de la invasion?

Resultado: 60. Luego

2.° *El valor negativo de la incógnita, cuando por la naturaleza de la cantidad que representa no es susceptible de variar de cualidad ó acepcion, significa que el problema es imposible; pero aún podrá convertirse en posible cambiando en la ecuacion del planteo el signo de la incógnita, y traduciendo la ecuacion resultante en otro problema análogo al propuesto.*

Observacion. Puede haber casos en que las condiciones físicas del problema impidan esta trasformacion.

Por último, resolvamos nuevamente el problema 2.°

Un padre tiene 41 años, su hijo 8, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será cuádrupla de la del hijo?

Supongamos que esto se verifica despues de 5 años.

Llamando x los años que han de trascurrir desde los 5 hasta que la condicion se verifique, se tendrá: edad del padre $41+5+x$, id. del hijo $8+5+x$; luego

$$4(13+x)=46+x;$$

de donde

$$x=-2.$$

Siendo posible este problema (**90**), ¿de qué proviene el valor negativo que acaba de hallarse para la incógnita? De que al plantearle se ha supuesto que la edad del padre se cuadruplicaria respecto de la del hijo despues de 5 años, siendo así que esto debe de suceder ántes de este tiempo.

De manera que el tiempo trascurrido desde la época de la pregunta hasta que se verifica la condicion del problema es $5+x=5-2=3$, como efectivamente sucede (**90**).

UNED

Rebajando, pues, 2 años de los 5 de la nueva hipótesis, segun indica el signo negativo del primero de estos números, se tiene el verdadero resultado. Luego

3.° *El valor negativo de la incógnita proviene tambien de una hipótesis falsa, hecha al plantear el problema; en este caso el problema es posible y el valor hallado, tomado en sentido contrario del que en dicha hipótesis se indica, resuelve la cuestion.*

Observacion. Las dos últimas consecuencias se pueden obtener con mucha facilidad por medio de la fórmula del 5.° problema general

$$x=\frac{dv}{v-v'}$$

suponiendo $v'>v$ para la primera; y que las locomotoras se reunen más á la derecha de E de lo que los valores particulares que se den á v, v' y d permitan, para deducir la segunda.

Los principiantes harán muy bien en deducir de esta fórmula las indicadas consecuencias.

101. *Valor cero.* Supongamos que se haya de resolver el siguiente problema:

Un padre tiene 52 años, su hijo 13, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será cuádrupla de la del hijo?

Valiéndonos de la fórmula del 2.° problema general

$$x=\frac{a-mb}{m-1},$$

haciendo en ella $a=52$, $b=13$ y $m=4$, se tendrá

$$x=\frac{52-4\times13}{4-1}=\frac{52-52}{3}=\frac{0}{3}=0.$$

Este valor indica que no debe trascurrir ningun tiempo para que la edad del padre sea cuádrupla de la del hijo, como debe suceder, puesto que en el acto de la pregunta se verifica la condicion, una vez que

$$52=13\times4.$$

Luego el *valor* cero *hallado para la incógnita de un problema indica que una condicion incluida en este es imposible de cumplir* (*)

102. *Valor infinito.* Supongamos que se haya de resolver el siguiente problema:

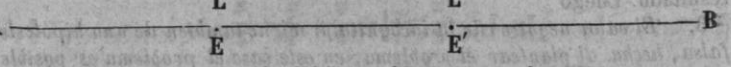
Dos locomotoras L y L' parten á un mismo tiempo en la direccion AB de las estaciones E y E', distantes entre sí 6 le-

---

(*) La imposibilidad expresada por el valor *cero* en este problema, proviene del sentido en que se enuncia; porque en él se supone que ha de trascurrir algun tiempo desde el momento actual hasta aquel en que la edad del padre sea cuádrupla de la del hijo. Pero si en el problema se pidiese de un modo general la epoca de este cumplimiento, sin atender á relacion ninguna con la actualidad, la solucion *cero* es legítima y natural; pues que indica que en la actualidad misma se verifica el cumplimiento. Otro tanto sucede en varios problemas geométricos.

UNED

guas, caminando cada una 8 leguas por hora, ¿á qué distancia de E se encontrarán?



Valiéndonos de la fórmula del 5.° problema general

$$x=\frac{dv}{v-v'},$$

haciendo en ella $d=6$, $v=8$ y $v'=8$, se tendrá

$$x=\frac{6\times 8}{8-8}=\frac{48}{0}=\infty.$$

Este valor significa (**79**) que la distancia de E al punto de reunion de las locomotoras es infinitamente grande, esto es, que no se encontrarán jamás, cuyo resultado está conforme con lo que del mismo problema se deduce; pues caminando las locomotoras con la misma velocidad, siempre existirá entre ellas la distancia de 6 leguas, que se supone, y por lo tanto no pueden hallarse nunca.

Luego *el valor infinito hallado para la incógnita de un problema indica que este es imposible* (*)

103. *Valor indeterminado.* Supongamos, por último, que se haya de resolver este problema:

Dos locomotoras L y L' parten al mismo tiempo de la estacion E en la direccion AB, y cada una con la velocidad de 8 leguas por hora, ¿á qué distancia se encontrarán?

Valiéndonos, como ántes, de la fórmula del 5.° problema general

$$x=\frac{dv}{v-v'},$$

haciendo en ella $d=0$, $v=8$ y $v'=8$, se hallará

$$x=\frac{0\times 8}{8-8}=\frac{0}{0}.$$

Este resultado indica (**81**) que se encontrarán á cualquiera distancia del punto de partida E, cuya consecuencia está conforme con lo que del mismo problema se deduce, pues si las locomotoras parten juntas, con la misma velocidad é igual direccion, irán siempre juntas; y por consiguiente la distancia de un punto cualquiera de la línea que recorren al punto de partida, será siempre una solucion del problema.

Luego *el valor indeterminado hallado para la incógnita de un problema significa que este admite infinitas soluciones.*

(*) La imposibilidad que en el problema anterior resulta, proviene del sentido en que esto se propone, porque de otro modo el valor infinito significa aquí que las locomotoras no se encontrarán jamás, y en este sentido es una verdadera solucion del problema. Otro tanto sucede en varios problemas geométrfcos.

UMED

CAPITULO VI.

Resolucion de los sistemas de ecuaciones de 1.er grado con dos ó más incógnitas.

PRELIMINARES.

104. *Se llama* SISTEMA *de ecuaciones la reunion de dos ó más ecuaciones que deben verificarse ó ser satisfechas simultáneamente.*

Se llama SOLUCION *de un sistema de ecuaciones el conjunto de valores de las incógnitas que verifican ó satisfacen todas las ecuaciones del sistema.*

RESOLVER *un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones.*

Se da el nombre de SISTEMA DETERMINADO *á aquel que solo admite un número limitado de soluciones; é* INDETERMINADO *en el caso contrario.*

Se llaman SISTEMAS EQUIVALENTES *aquellos que tienen las mismas soluciones.*

Es evidente, segun estas definiciones, que en vez de un sistema de ecuaciones se puede sustituir otro equivalente.

ARTICULO I.

Eliminacion.

105. ELIMINAR *una incógnita entre dos ecuaciones que contengan dos ó más, es deducir de ellas otra ecuacion que no contenga dicha incógnita, y donde las restantes tengan los mismos valores que en las ecuaciones primitivas.*

Dos son los principales métodos de eliminacion: 1.° *el de adicion ó sustraccion:* 2.° *el de sustitucion* (*).

(*) No hacemos mérito del método de los *multiplicadores indeterminados* debido á *Bezout*, por no dar á esta materia demasiada extension.

UNED

106. 1.er MÉTODO. En este método distinguirémos dos casos: 1.° *que la incógnita que se quiere eliminar tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones:* 2.° *que le tenga distinto.*

107. 1.er CASO. Sea eliminar z entre las ecuaciones preparadas

$$5x+2z=17,$$
$$4x-2z=10.$$

Sumando ordenadamente estas ecuaciones, esto es, primer miembro con primer miembro y segundo con segundo, es evidente que la ecuacion resultante

$$(5x+2z)+(4x-2z)=17+10,$$

ó bien $$5x+2z+4x-2z=27,$$

es satisfecha por los mismos valores de x y z que las anteriores; y reduciendo los términos semejantes, como $+2z$ y $-2z$ se destruyen, se trasformará en

$$9x=27,$$

que no contiene ya la z.

Sean las ecuaciones, entre las que se quiere eliminar la z,

$$5x+2z=17,$$
$$3x+2z=11.$$

Restando ordenadamente estas ecuaciones, es evidente que la ecuacion resultante

$$5x+2z-(3x+2z)=17-11,$$

ó bien $$5x+2z-3x-2z=6,$$

es satisfecha por los mismos valores de x y z que las ecuaciones de donde proviene; y reduciendo los términos semejantes (una vez que $+2z$ y $-2z$ se destruyen), se trasformará en

$$2x=6,$$

que tampoco contiene z.

Luego *para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones preparadas (en las que tiene el mismo coeficiente), se suman ordenadamente dichas ecuaciones, si los términos donde se halla la incógnita que se elimina tiene diferente signo, ó se resta una de otra si le tienen igual.*

108. 2.° CASO. Sea eliminar x entre las ecuaciones preparadas

$$3x+4y-5z=21,$$
$$2x-y+2z=10.$$

Multiplicando la primera de ellas por 2 y la segunda por

3, se convertirá el sistema dado en el equivalente (**66**)

$$6x+8y-10z=42,$$
$$6x-3y+6z=30,$$

donde la incógnita que se quiere eliminar tiene ya el mismo coeficiente; y aplicando por consiguiente la regla del primer caso, resulta

$$11y-16z=12.$$

Si las ecuaciones entre las que se quiere eliminar la x fuesen

$$8x+y+3z=38,$$
$$12x-2y+z=54;$$

como los coeficientes 8 y 12 tienen por mínimo comun múltiplo 24, bastará multiplicar la primera de las ecuaciones por $\frac{24}{8}=3$ y la segunda por $\frac{24}{12}=2$, y se obtendrá el sistema equivalente al dado (**66**)

$$24x+3y+9z=114,$$
$$24x-4y+2z=108,$$

donde la x tiene el mismo coeficiente; y aplicando por consiguiente la regla del primer caso, resulta

$$7y+7z=6.$$

Luego *para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones preparadas (en las que tiene coeficiente distinto), se trasforman dichas ecuaciones en otras donde el coeficiente sea igual, lo que se consigue multiplicando cada una de ellas por el coeficiente que tiene la incógnita que se quiere eliminar en la otra ecuacion*, ó (lo que es mejor si los coeficientes de dicha incógnita tienen factores comunes) *hallando su mínimo comun múltiplo, y multiplicando cada ecuacion por el cociente que resulte de dividir este mínimo comun múltiplo por el coeficiente de la incógnita en la misma ecuacion; y este caso quedará reducido al anterior.*

109. 2.° MÉTODO. Sea eliminar la x entre las ecuaciones

$$\frac{3}{2}x+2y=\frac{5}{2}z+\frac{21}{2},$$
$$2x+2z=10+y.$$

Despejando la x en una de estas ecuaciones, en la primera por ejemplo, se tendrá

$$x=\frac{5z-4y+21}{3};$$

UNED

y sustituyendo su valor en la segunda ecuacion, resulta

$$2\times\frac{5z-4y+21}{3}+2z=10+y,$$

ecuacion que evidentemente debe ser satisfecha por los mismos valores de z é y que las anteriores, y que ya no contiene la x.

Preparada esta ecuacion se convierte en

$$11y-16z=12;$$

y como el sistema de que se dedujo, preparado tambien, se convierte en el del primer ejemplo del 2.° caso anterior, se ve que igual resultado se obtiene por uno que por otro método, como debia suceder.

Luego *para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, se despeja en una de ellas la incógnita que se quiere eliminar, y se sustituye su valor en la otra ecuacion.*

110. Para hacer la sustitucion con más facilidad, lo que en algunos casos será conveniente, se puede despejar la incógnita en las dos ecuaciones.

Así, resolviendo las ecuaciones

$$\frac{3}{2}x+2y=\frac{5}{2}z+\frac{21}{2},$$

$$2x+2z=10+y,$$

con relacion á la x, se tendrá el sistema equivalente (**104**)

$$x=\frac{5z-4y+21}{3},$$

$$x=\frac{10+y-2z}{2};$$

y poniendo en lugar de x en la segunda su valor, tomado en la primera, resulta $\frac{5z-4y+21}{3}=\frac{10+y-2z}{2}$,

ecuacion que preparada es $11y-16z=12$, igual á la obtenida anteriormente.

El medio empleado para la eliminacion de esta incógnita, que, como se ve, es un caso particular del método de *sustitucion*, se suele llamar MÉTODO DE IGUALACION, *y consiste en despejar la incógnita que se quiere eliminar en las dos ecuaciones é igualar sus valores.*

Otro EJEMPLO *de eliminacion.*

111. Sea eliminar la x en las ecuaciones

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$
$$mx+ny=c.$$

Para ejecutar la eliminacion por el método de sustitucion, despejaríamos la x en la segunda ecuacion, y tendríamos

$$x=\frac{c-ny}{m};$$

y sustituyendo su valor en la primera, resultaria

$$\frac{\frac{c-ny}{m}}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Para ejecutar la misma eliminacion por el método de *adicion* ó *sustraccion*, prepararíamos de antemano el sistema propuesto, el cual se convertiria en

$$bx+ay=ab,$$
$$mx+ny=c;$$

multiplicando ahora la 1.ª de estas ecuaciones por m, y la 2.ª por b, se obtendria el sistema equivalente

$$bmx+amy=abm,$$
$$bmx+bny=bc;$$

y restando ordenadamente estas ecuaciones, resultaria la ecuacion pedida

$$amy-bny=abm-bc.$$

OBSERVACION. De la práctica de los dos métodos de eliminacion expuestos, se infiere que el de *adicion* ó *sustraccion* es el más sencillo en las ecuaciones de primer grado, sobre todo si estan preparadas; teniendo tambien la ventaja de producir la ecuacion resultante igualmente preparada, lo que no sucede con el de *sustitucion*: mas si las ecuaciones dadas no estuviesen preparadas, puede ser más breve este, que no exige la preparacion anterior de ambas ecuaciones; segun, pues, las circunstancias se empleará el método que se crea más conveniente.

ARTICULO II.

Reduccion de los sistemas de ecuaciones de 1.er grado.

112. La reduccion de los sistemas es necesaria consecuencia de la eliminacion de las incógnitas. A cada acto de adicion

UNED

ó sustraccion, ó de sustitucion, se sigue forzosamente una disminucion del número de las ecuaciones y la eliminacion de una incógnita. Esta materia, sin embargo, merece tratarse con algun detenimiento para no incurrir en inexactitudes.

Se dice que se REDUCE *un sistema de ecuaciones, cuando se convierte en otro que tiene una ecuacion ménos y una incógnita ménos, y en el que las incógnitas restantes tienen los mismos valores que en el primitivo.*

En esta operacion distinguirémos dos casos: 1.° *que todas las incógnitas que contenga el sistema entren en cada una de las ecuaciones de este:* 2.° *que alguna ó algunas de dichas ecuaciones no contengan todas las incógnitas.*

113. 1.er CASO. Sea reducir el siguiente sistema de ecuaciones, que ponemos preparadas para mayor claridad y colocadas las incógnitas por órden alfabético:

$$\begin{aligned}
&1.^{a} \quad u+4x-3y-z=9,\\
&2.^{a} \quad u-3x+3y+2z=3,\\
&3.^{a} \quad 5u-2x-y-5z=7,\\
&4.^{a} \quad -7u+6x+4y+6z=4,
\end{aligned}$$

Elegirémos para mayor sencillez la incógnita que tenga menores coeficientes, que en este ejemplo es la y. Eliminando esta incógnita entre las ecuaciones 1.ª y 2.ª (para lo que basta sumarlas, **107**) se tendrá la ecuacion resultante

$$2u+x+z=12.$$

Eliminando la misma incógnita y entre las ecuaciones 1.ª y 3.ª, se tendrá (simplificándola)

$$7u-5x-7z=6.$$

Eliminando la misma incógnita entre la 3.ª y 4.ª ecuacion, se tendrá $13u-2x-14z=32$.

Las tres ecuaciones que acaban de obtenerse, forman el sistema

$$\begin{aligned}
2u+x+z&=12,\\
7u-5x-7z&=6,\\
13u-2x-14z&=32,
\end{aligned}$$

que es el pedido.

Observacion. Tambien se puede obtener un sistema equivalente al hallado, eliminando la *y* entre las ecuaciones 1.ª y 2.ª, 1.ª y 3.ª, 1.ª y 4.ª: entre 1.ª y 2.ª, 2.ª y 3.ª, 3.ª y 4.ª: entre 1.ª y 3.ª, 2.ª y 3.ª, 2.ª y 4.ª, etc. etc. Mas debe advertirse con *especial cuidado* que el sistema que se obtuviese no entrando en alguna de las eliminaciones una ó más de las ecuaciones del primitivo, como por ejemplo, eliminando la *y* entre 1.ª y 2.ª, 1.ª y 3.ª, 2.ª y 3.ª del sistema anterior, no reuniria la circunstancia de tener en él las incógnitas los mismos valores que en el propuesto, y deberia desecharse por lo tanto (*).

Del procedimiento empleado en la reduccion del sistema anterior y de la observacion precedente, se deduce que

Para reducir un sistema de ecuaciones de primer grado (cuando todas las incógnitas se hallan en cada ecuacion), se elimina la incógnita entre dos cualesquiera de dichas ecuaciones, y se tendrá la primera ecuacion del sistema reducido: se elimina la misma incógnita entre otras dos ecuaciones, de las que una al ménos sea distinta de las tomadas anteriormente, y se tendrá la segunda ecuacion del nuevo sistema, y así se continua hasta obtener tantas ecuaciones ménos una como tiene el sistema propuesto: cuidando de que en las eliminaciones parciales verificadas entren todas las ecuaciones del sistema primitivo.

(*) El sistema obtenido de este modo es indeterminado (116).

Si un sistema tiene tres ecuaciones, como combinada la 1.ª con la 2.ª, la 1.ª con la 3.ª y la 2.ª con la 3.ª, se obtendrian tres ecuaciones, siendo suficientes dos para el sistema reducido: y por otra parte, tres cosas se pueden combinar de dos en dos de tres maneras distintas; resulta que se pueden obtener tres sistemas reducidos de forma distinta, mas todos *equivalentes*, porque las tres ecuaciones primitivas entran en la deduccion de cada uno.

Por una razon análoga, si el sistema tiene cuatro ecuaciones se pueden obtener *veinte* sistemas reducidos de diversa forma, pero de estos solo diez y seis darán para las incógnitas que comprenden los mismos valores que el sistema propuesto: los cuatro restantes, no habiendo entrado en su formacion alguna de las ecuaciones del sistema primitivo, serán indeterminados, aunque este no lo sea.

En el sistema de cuatro ecuaciones del texto, los reducidos que se obtuviesen eliminando una incógnita entre 1.ª y 2.ª, 1.ª y 3.ª, 2.ª y 3.ª; entre 1.ª y 2.ª, 1.ª y 4.ª, 2.ª y 4.ª; entre 1.ª y 3.ª, 1.ª y 4.ª, 3.ª y 4.ª y entre 2.ª y 3.ª, 2.ª y 4.ª, 3.ª y 4.ª, serian indeterminados, etc. etc.

UNED

114. 2.° CASO. Sea reducir el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}
&1.^a \quad u+4x-3y-z=9,\\
&2.^a \quad 2u+8y-2z=22,\\
&3.^a \quad 5u-2x-y-5z=7,\\
&4.^a \quad 7y+3z=17.
\end{aligned}$$

Como las ecuaciones 2.ª y 4.ª de este sistema no contienen la incógnita x, pueden desde luego formar parte del sistema reducido donde no entra dicha incógnita: eliminando, pues, esta entre las ecuaciones 1.ª y 3.ª, se tendrá la ecuacion

$$11u-5y-11z=23,$$

que reunida con las 2.ª y 4.ª anteriores forman el sistema reducido

$$\begin{aligned}
2u+8y-2z&=22,\\
7y+3z&=17,\\
11u-5y-11z&=23.
\end{aligned}$$

Si hubiésemos de reducir el sistema

$$\begin{aligned}
4x+5y-2z&=31,\\
2y-3z&=19,\\
3y+5z&=0;
\end{aligned}$$

como las dos últimas ecuaciones no contienen la incógnita x, estas ecuaciones forman el sistema reducido

$$\begin{aligned}
2y-3z&=19,\\
3y+5z&=0.
\end{aligned}$$

Luego *para reducir un sistema de ecuaciones de primer grado (cuando cada ecuacion no contiene todas las incógnitas) se toma el mayor número de ecuaciones que haya en el sistema dado, en que no entre una cualquiera de las incógnitas; y si estas ecuaciones no son bastantes para formar el sistema reducido, se forman las restantes eliminando la misma incógnita entre las ecuaciones donde se halle en el sistema primitivo, como se verificó en el primer caso.*

OBSERVACION. Si nos propusiésemos obtener un sistema reducido, en que no entrase una incógnita determinada, ó eliminar una incógnita dada en el sistema propuesto, es claro que solo se tomarian desde luego para el nuevo sistema las ecuaciones que no contuviesen dicha incógnita, deduciendo las restantes, como se dice en la regla precedente.

UNED

ARTICULO III.

Resolucion de los sistemas de ecuaciones de primer grado que tienen tantas incógnitas como ecuaciones.

115. Sea resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} u+4x-3y-z&=9\\ u-3x+3y+2z&=3\\ 5u-2x-y-5z&=7\\ -7u+6x+4y+6z&=4 \end{aligned}\right\} \quad [A].$$

Reduciendo este sistema (**113**), se convierte en

$$\left.\begin{aligned} 2u+x+z&=12\\ 7u-5x-7z&=6\\ 13u-2x-14z&=32 \end{aligned}\right\} \quad [B].$$

Reduciendo el sistema anterior, para lo que bastará eliminar la x entre las ecuaciones 1.ª y 2.ª, y entre la 1.ª y 3.ª, se obtiene el nuevo sistema reducido

$$\left.\begin{aligned} 34u-4z&=132\\ 17u-12z&=56 \end{aligned}\right\} \quad [C].$$

Reduciendo, por último, este sistema de dos ecuaciones, ó eliminando la z entre ellas, se tiene

$$85u=340.$$

Resolviendo esta ecuacion resulta

$$u=\frac{340}{85}=4.$$

Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones del sistema [C], en la 1.ª por ejemplo, se tendrá

$$34\times 4-4z=132;$$

de donde

$$z=\frac{4}{4}=1.$$

Sustituyendo ahora los valores de u y z en otra de las ecuaciones del sistema [B], en la primera por ejemplo, resulta

$$2\times 4+x+1=12;$$

de donde

$$x=3.$$

Sustituyendo, por último, en una de las ecuaciones del sis-

UNED

tema primitivo [A], en la segunda por ejemplo, los valores de u, z y x, se tendrá: $4-3\times3+3y+2\times1=3$;

de donde $$y=\frac{6}{3}=2.$$

Luego los valores de las incógnitas son... $\begin{cases} u=4 \\ x=3 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$

Comprobacion. Sustituyendo en el sistema [A] en vez de las incógnitas los valores hallados, se tiene

$$\begin{aligned} 4+4\times3-3\times2-1&=9 \quad \text{ó} \quad 9=9, \\ 4-3\times3+3\times2+2\times1&=3 \quad \text{ó} \quad 3=3, \\ 5\times4-2\times3-2-5\times1&=7 \quad \text{ó} \quad 7=7, \\ -7\times4+6\times3+4\times2+6\times1&=4 \quad \text{ó} \quad 4=4. \end{aligned}$$

Luego los valores hallados satisfacen las ecuaciones del sistema propuesto.

Sea resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 4x+5y-2z&=31 \\ 2y-3z&=19 \\ 3y+2z&=9 \end{aligned}\right\} \quad [A].$$

El primer sistema reducido es (114)

$$\left.\begin{aligned} 2y-3z&=19 \\ 3y+2z&=9 \end{aligned}\right\} \quad [B].$$

El segundo (eliminando la z entre estas dos ecuaciones) es

$$13y=65.$$

De donde $$y=\frac{65}{13}=5.$$

Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones del sistema B, en la segunda por ejemplo, se tiene

$$3\times5+2z=9;$$

de donde $$z=\frac{-6}{2}=-3.$$

Sustituyendo los valores de y y z en una de las ecuaciones del sistema [A], en la 1.ª por ejemplo, resulta

$$4x+5\times5-2\times-3=31.$$

De donde $$x=\frac{0}{4}=0.$$

UNED

Luego los valores de las incógnitas son... $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=-3, \end{cases}$

Cuyos valores se pueden comprobar como en el ejemplo anterior.

De la práctica de los ejemplos precedentes se deduce la siguiente regla:

Para resolver un sistema cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, se reduce el sistema dado: el sistema que se obtenga en esta reduccion se reduce de nuevo, y así sucesivamente hasta que resulte una sola ecuacion con una incógnita: se halla el valor de esta; se sustituye su valor en una de las ecuaciones del sistema que tenga dos, y se determinará el valor de otra incógnita: se sustituyen los valores de estas dos incógnitas en cualquiera de las ecuaciones que contenga una nueva incógnita del sistema, y se hallará el valor de otra incógnita. De este modo se continúa hasta haber hallado los valores de todas las incógnitas (*).

Es conveniente la comprobacion de los valores hallados, para evitar cualquier error á que la misma sencillez de la operacion da lugar con frecuencia.

Otro EJEMPLO.

Sea resolver el sistema [A].

$$\left.\begin{array}{r} 2t-u+2y-z=3 \\ u+y-6z=5 \\ 5t+2x+2y+z=7 \\ 2u-y\quad\quad=4 \\ 4t-u+8z=1 \end{array}\right\} \text{[A]}. \qquad \left.\begin{array}{r} 2t-u+2y-z=3 \\ u+y-6z=5 \\ 2u-y\quad\quad=4 \\ 4t-u+8z=1 \end{array}\right\} \text{[B]}.$$

$$\left.\begin{array}{r} u+y-6z=5 \\ 2u-y\quad\quad=4 \\ -u+5y-10z=5 \end{array}\right\} \text{[C]}. \qquad \left.\begin{array}{r} 2u-y=4 \\ 8u-7y=10 \end{array}\right\} \text{[D]}. \qquad 18y=36.$$

(*) La columna en que aparecen los valores de todas los incógnitas, obtenidos por la sustitucion regresiva del valor dado por la ecuacion final, suele llamarse *columna de retorno*.

UNED

Aplicando la regla precedente al sistema [A], se obtienen sucesivamente los sistemas [B], [C], [D] y la ecuacion final $18y=36$.

La ecuacion final nos da. . . . $y=2$,
el sistema [D]. . . . . $u=3$,
el —— [C]. . . . . $z=0$,
el —— [B]. . . . . $t=1$,
y el —— [A]. . . . . $x=-1$.

Observacion. En los sistemas de ecuaciones de primer grado de tantas ecuaciones como incógnitas, cada una de estas no puede tener más que un solo valor, pues se deduce el valor de cada una de una ecuacion de primer grado con una incógnita (**73**). De manera que estos sistemas no tienen más que una solucion, por cuya razon se llaman *determinados* (*).

ARTICULO IV.

Indicaciones sobre la resolucion de los sistemas con más y con ménos incógnitas que ecuaciones.

116. Si hubiésemos de resolver un sistema de m ecuaciones de primer grado con $m+n$ incógnitas, reduciriamos el sistema propuesto; el sistema obtenido se reduciria de nuevo, y asi sucesivamente hasta llegar á la ecuacion final, que tendria $n+1$ incógnitas; los conjuntos de valores que resuelven esta última ecuacion, combinados con cada uno de los que fuesen resultando para las incógnitas eliminadas, formarian las soluciones del sistema dado.

Siendo ilimitado el número de valores que para las incógnitas daria la ecuacion final (**76**, 1.°) el número de soluciones de estos sistemas es infinito, por cuya razon se llaman *indeterminados*.

117. Si, por el contrario, se hubiese de resolver un sistema de $m+n$ ecuaciones con m incógnitas, se tomarian m ecuaciones y de ellas se deducirian los valores de las m incógnitas; sustituyendo luego los valores hallados en las n ecuaciones restantes, si estas quedan satisfechas, el sistema propuesto es *posible* y *determinado;* en el caso contrario será *imposible*.

Cuando los coeficientes de las incógnitas son literales, las igualdades que resultan de la sustitucion de los valores de las incógnitas en las n ecuaciones restantes, se llaman *igualdades de condicion;* por expresar las

(*) Se exceptua el caso en que las ecuaciones del sistema sean contradictorias, ó no contengan condiciones distintas.

relaciones que han de tener entre sí dichos coeficientes para que el sistema sea posible.

ARTICULO V.

Imposibilidad é indeterminacion de los sistemas de tantas ecuaciones como incógnitas.

118. Ya se ha visto (**115**, obs.; **116** y **117**) que solo los sistemas de tantas ecuaciones como incógnitas son por punto general posibles y determinados. Mas es necesario para que esto se verifique que ninguna de sus ecuaciones sea absurda (**80**) ó idéntica (**82**); pues en tal caso es evidente que el sistema no pueda ser satisfecho por valores finitos de las incógnitas, ó por un número limitado de estos.

Aún hay otros casos en que los sistemas de que nos ocupamos pueden ser imposibles ó indeterminados.

Supongamos que se hubiese de resolver este sistema

$$y-x=a,$$
$$2y-2x=3a.$$

Eliminando cualquiera de las incógnitas, la y por ejemplo, entre estas dos ecuaciones, se tendrá (**108**)

$$2y-2x=3a,$$
$$2y-2x=2a,$$
$$\text{---------}$$
$$(2-2)x=a,$$

ó bien
$$0=a;$$

ó despejando la x ántes de la reduccion de sus coeficientes

$$x=\frac{a}{2-2}=\frac{a}{0}=\infty.$$

El mismo valor se hubiera hallado para la y.

Para interpretar los resultados que se acaban de obtener, examinemos el sistema de ecuaciones propuesto

$$y-x=a,$$
$$2y-2x=3a;$$

y se notará desde luego que estas ecuaciones son incompatibles ó expresan condiciones contradictorias; porque siendo la diferencia de dos cantidades igual á a, es imposible que el duplo de esta diferencia sea al mismo tiempo igual á $3a$.

Luego *el resultado* $0=a$ ó $x=\infty$, *hallado en la resolucion de un sistema de ecuaciones, indica que estas son* CONTRADICTORIAS *ó* INCOMPATIBLES *y que por lo tanto el sistema es absurdo.*

119. Supongamos que se hubiere de resolver este sistema

$$3x-2y=a,$$
$$6x-4y=2a.$$

UNED

Eliminando cualquiera de las dos incógnitas, la y por ejemplo (**108**), se tendrá

$$6x-4y=2a,$$
$$6x-4y=2a,$$
$$\overline{(6-6)x=0,}$$
$$0=0,$$

ó bien

ó despejando la x ántes de reducir sus coeficientes

$$x=\frac{0}{6-6}=\frac{0}{0}.$$

Para interpretar estos resultados, se observará que en el sistema dado

$$3x-2y=a,$$
$$6x-4y=2a,$$

las dos ecuaciones expresan una misma condicion; porque expresando la primera que tres veces una cantidad ménos dos veces otra es igual á a, tiene que verificarse que seis veces la primera cantidad ménos cuatro veces la otra componen $2a$. Esto sucede siempre que una ecuacion se ha deducido de otra ó de otras por medio de operaciones que no alteran el valor de las incógnitas (**66**), en cuyo caso no contiene más condiciones que las de aquella ó aquellas de que se dedujo. Reduciéndose, pues, las ecuaciones del sistema á una ménos, y quedando el mismo número de incógnitas, el sistema es indeterminado (**116**).

Luego *el resultado* $0=0$, ó $x=\frac{0}{0}$ *hallado en la resolucion de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, indica tambien que dos ó más de dichas ecuaciones expresan una misma condicion, ó que alguna es una consecuencia de otra ú otras, y por lo tanto que el sistema es indeterminado.*

120. De lo expuesto en los números anteriores se deduce que para que un sistema de ecuaciones de primer grado sea *posible y determinado*, debe reunir las circunstancias siguientes:

1.ª *Que contenga tantas ecuaciones como incógnitas.*

2.ª *Que ninguna de estas ecuaciones ha de ser imposible, ni una identidad.*

3.ª *Que estas ecuaciones no han de ser contradictorias.*

4.ª *Que cada ecuacion ha de expresar una condicion distinta.*

UNED

CAPITULO VII.

Resolucion de los problemas de primer grado con dos ó más incógnitas.

121. Estos problemas se plantean como los de primer grado con una incógnita (**86**); advirtiendo solo que para que el problema sea posible y determinado, es preciso que el sistema de ecuaciones, que en el planteo se obtenga, cumpla con las circunstancias expresadas en el núm. **120**.

PROBLEMAS.

122. **1.° Dos amigos hicieron en una fonda un gasto de 60 reales, que ninguno de ellos tenia bastante dinero para pagar. Satisfizo, al fin, el primero la deuda, habiendo tomado al efecto los $\frac{2}{3}$ de la cantidad que tenia el segundo: tambien hubiera podido éste satisfacerla tomando los $\frac{3}{4}$ de lo que tenia aquél, ¿cuánto dinero tenia cada uno?**

Sea x la cantidad que tenia el primero, la que tenia el segundo y: y como con la cantidad del primero, más los $\frac{2}{3}$ de la del segundo, se satisfizo la deuda: y la cantidad del segundo, mas los $\frac{3}{4}$ de la del primero, bastaban para satisfacerla; las ecuaciones del planteo serán

$$x+\frac{2}{3}y=60,$$

$$y+\frac{3}{4}x=60.$$

Preparando este sistema, para resolverle con más sencillez, se convierte en

$$3x+2y=180,$$
$$4y+3x=240;$$

y resuelto (**115**), se tiene $x=40$, $y=30$.

Luego el primero tenia 40 rs., y el segundo 30, cantida-

des que satisfacen las condiciones del problema; porque

$$40+\frac{2}{3}\times 30=60 \qquad \text{y} \qquad 30+\frac{3}{4}\times 40=60.$$

Observacion. Este problema se puede resolver tambien por medio de una sola incógnita. En efecto, llamando x la cantidad que tiene el primero de los amigos; como á la que tiene el segundo le faltan $\frac{3}{4}$ de la del primero para valer 60, la del segundo será

$$60-\frac{3}{4}x;$$

y por consiguiente el planteo es

$$x+\frac{2}{3}(60-\frac{3}{4}x)=60.$$

De donde la cantidad del primero ó $x=40$, y la del segundo $60-\frac{3}{4}\times 40=60-30=30$.

El planteo de este problema con dos incógnitas se verificó con más facilidad que con una sola; y esto es debido á que la relacion entre las cantidades desconocidas no es tan sencilla como al efecto convendria (**88**, obs.). En este caso, y en general siempre que la diminucion del número de incógnitas complique mucho el planteo, y áun las ecuaciones que de él resulten, *aconsejamos á los principiantes que empleen tantas incógnitas como cantidades desconocidas haya en el problema.*

123. 2.° **Hieron, rey de Siracusa, entregó á su platero Demetrio 20 libras de oro para fabricar una corona que habia ofrecido á Júpiter. Concluida la obra, se halló que la corona pesaba las 20 libras. Sin embargo, el rey sospechó que el platero le habia defraudado aleando plata con el oro, y encargó á Arquímedes que averiguase, sin destruir la corona, si sus sospechas eran ó no fundadas.**

Sabiendo este gran geómetra que el oro sumergido en el agua pierde 0,052 de su peso y la plata 0,099, pesó la corona sumergida en el agua, y habiendo hallado que su peso era de 18,75 libras, de-

dujo las libras de plata y de oro que la corona tenia. ¿Cómo puede esto averiguarse?

Llamando x el número de libras de oro, y el de plata y, se tendrá $x+y=20$.

Por otra parte, como una libra de oro sumergida en el agua pierde 0,052 de peso, x libras perderán $0{,}052x$.

Perdiendo una libra de plata 0,099 de su peso, y libras perderán $0{,}099y$; mas como el peso perdido por el oro y la plata de la corona es evidentemente el peso perdido por esta, esto es, $20-18{,}75=1{,}25$, la otra ecuacion del planteo será

$$0{,}052x+0{,}099y=1{,}25.$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por 1000, y reuniendo con ella la obtenida anteriormente, se tendrán las dos ecuaciones del problema

$$52x+99y=1250,$$
$$x+y=20.$$

De donde (**115**) $x=15{,}53$, $y=4{,}47$.

Luego el platero habia sustraido 4,47 libras de oro reemplazándolas con igual cantidad en peso de plata.

Observacion. No puede llegarse al planteo de este problema tal como Hieron le propuso, sin algun conocimiento de las leyes de la Física, lo mismo podria decirse de otra multitud de ellos, de que el anterior no es más que un ejemplo. De manera que aunque el Algebra proporciona reglas para la resolucion de las ecuaciones, para la formacion de estas se necesitan conocimientos en la ciencia á que el problema se refiere.

124. 3.° Tres amigos jugaron otras tantas noches sucesivas. En la primera noche perdió uno de ellos, y los otros dos ganaron, cada uno una cantidad igual á la que tenian ántes de principiar el juego: en la segunda noche perdió uno de estos, y ganaron los otros dos, cada uno una cantidad igual á la que tenian al comenzar el juego esta noche; en la tercera, el que hasta entónces habia ganado perdió con cada uno de los otros una cantidad igual á la que estos tenian ántes de principiar el juego esta

UNED

última noche. Habiendo quedado todos con 200 rs., ¿cuánto tenia cada uno ántes de principiar á jugar?

Llámese x la cantidad que tenia el que perdió la primera noche, la que tenia el que perdió la segunda y, la que tenia el que perdió la tercera z.

En la primera noche al 1.° le quedó: $x-z-y$; al 2.° $2y$; y al 3.° $2z$.

En la segunda noche al 1.° le quedó: $2(x-y-z)$; al 2.° $2y-2z-(x-y-z)=2y-2z-x+y+z=3y-z-x$; y al tercero $4z$.

En la tercera noche al 1.° le quedó: $2\times2(x-y-z)=4(x-y-z)=4x-4y-4z$; al 2.° $2(3y-z-x)=6y-2z-2x$; y al 3.° $4z-2(x-y-z)-(3y-z-x)=4z-2x+2y+2z-3y+z+x=7z-x-y$; y como al fin han quedado todos con 200 rs., las ecuaciones del planteo serán

$$\begin{aligned} 4x-4y-4z&=200,\\ 6y-2z-2x&=200,\\ 7z-x-y&=200, \end{aligned}$$

ó simplificándolas y escribiendo por órden las incógnitas, todo para mayor claridad, se tendrá

$$\begin{aligned} x-y-z&=50,\\ -x+3y-z&=100,\\ -x-y+7z&=200, \end{aligned}$$

De donde (**115**) $x=325$, $y=175$, $z=100$.

Observacion. En la resolucion de este problema se notará que hay que ejecutar varias operaciones preliminares ántes de obtener el planteo, lo que sucede con bastante frecuencia.

125. 4.° Un número consta de cuatro cifras, cuya suma es 16: la cifra de las centenas es dupla de la de los millares: la suma de las cifras de los millares, centenas y unidades es igual á la cifra de las decenas; y por último, agregando 4536 al número dado, resulta el mismo escrito en un órden inverso. ¿Cuál será este número?

Sea u la cifra de las unidades, la de las decenas x, la de

las centenas y, y la de los millares z; y las ecuaciones del planteo serán

$$u+x+y+z=16,$$
$$2z=y,$$
$$z+y+u=x,$$
$$u+10x+100y+1000z+4536=z+10y+100x+1000u,$$

ó preparándolas para mayor sencillez

$$u+x+y+z=16,$$
$$2z-y=0,$$
$$u-x+y+z=0,$$
$$999u+90x-90y-999z=4536.$$

De donde (**115**) $u=5$, $x=8$, $y=2$, $z=1$.

Luego el número pedido será 1285.

126. **5.° Un banquero tiene dos especies de monedas: a monedas de la primera especie componen un doblon: b de la segunda equivalen tambien á un doblon. Para componer otro doblon con c monedas de ambas especies ¿cuántas han de entrar de cada una de estas?**

Sean x las monedas que han de entrar de la primera especie, las de la segunda y; y como el total de monedas ha de ser c, se tiene desde luego la ecuacion

$$x+y=c.$$

Por otra parte, a monedas de la primera especie forman un doblon, luego una moneda de esta especie formará $\frac{1}{a}$ de doblon, y por consiguiente x, que han de entrar de esta especie, serán $\frac{x}{a}$ de doblon.

Por una razon análoga las y monedas de la segunda especie equivaldrán a $\frac{y}{b}$ de doblon; y como estas dos partes han de equivaler á un doblon, la otra ecuacion del planteo será

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

que preparada y reunida á la precedente, forman el sistema

$$bx+ay=ab,$$
$$x+y=c.$$

De donde (**115**) $x=\frac{a(c-b)}{a-b}$, $y=\frac{b(a-c)}{a-b}$.

Observacion. Las fórmulas obtenidas en este problema pueden servir para interpretar los diferentes valores que pueden obtenerse para las incógnitas en los problemas de primer grado que tienen dos ó más, cuya interpretacion omitimos; porque lo dicho desde el número **98** al **104** es general y aplicable por consiguiente á los problemas de dos ó más incógnitas.

UNED

127. 6.° Mira ese estanque: de la sierra umbría
Tributo vanle á dar cuatro raudales;
Llenarle puede el uno en todo un dia,
El otro necesita dos cabales,
El tercero hasta tres, y todavía
El último uno más, quedando iguales:
Si los cuatro á la vez libres corrieran,
¿Cuánto tiempo en llenarlo consumieran?

EPITAFIO.

7.° Hic Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius mirâ denotat arte tibi.
Egit sextantem juvenis: lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecimâ.
Septante uxori post hæc sociatur, et anno
Formosus quinto nascitur indè puer.
Semissem ætatis postquàm attigit ille paternæ,
Infelix subitâ morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur: hinc annos illius assequere.

¿Qué edad tenia Diofanto?

UNED

CAPITULO VIII.

Cuadrado de las cantidades algebráicas.

ARTICULO I.

Cuadrado de los monomios.

128. Sea elevar al cuadrado el monomio $3a^2bc^5$.

Segun la definicion del cuadrado (Arit., **56**), y recordando tambien lo expuesto en la multiplicacion de monomios (**33** y **34**), se tendrá

$$(3a^2bc^5)^2 = 3a^2bc^5 \times 3a^2bc^5 = 9a^4b^2c^{10}.$$

Del mismo modo

$$(-ab^3)^2 = -ab^3 \times -ab^3 = a^2b^6.$$

Luego *para elevar al cuadrado un monomio entero se eleva el coeficiente al cuadrado, se duplican todos los exponentes, y al resultado se le pone siempre el signo positivo.*

129. Elévese al cuadrado la fraccion $\frac{3a^3c}{2bd^4}$.

Se tendrá

$$\left(\frac{3a^3c}{2bd^4}\right)^2 = \frac{3a^3c}{2bd^4} \times \frac{3a^3c}{2bd^4} = \frac{3a^3c \times 3a^3c}{2bd^4 \times 2bd^4} = \frac{(3a^3c)^2}{(2bd^4)^2} = \frac{9a^6c^2}{4b^2d^8}.$$

Luego *para elevar un quebrado á la segunda potencia se eleva el numerador y denominador á la misma potencia.*

ARTICULO II.

Cuadrado de los polinomios.

130. El cuadrado de un binomio cualquiera $a+b$ es (**39**, 1.°) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Sea ahora elevar al cuadrado el polinomio $a+b+c$.

Haciendo $b+c=k$ se tendrá

$$(a+b+c)^2 = (a+k)^2 = a^2 + 2ak + k^2,$$

y poniendo en lugar de k y k^2 sus valores $b+c$ y $b^2+2bc+c^2$, resulta $(a+b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b^2+2bc+c^2)$

ó $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ [1].

UNED

Es evidente que un procedimiento análogo nos daria el cuadrado de un polinomio, cualquiera que fuese el número de sus términos.

Generalizando, pues, este resultado, se tiene la siguiente regla práctica:

Para elevar un polinomio al cuadrado, se cuadra el primer término y se multiplica el duplo del primero por todos los que le siguen: se cuadra el segundo y se multiplica el duplo de este por todos los que le siguen: se cuadra el tercero y se multiplica el duplo de este por todos los que le siguen; y así se continua hasta que se llegue á cuadrar el último.

OBSERVACIONES.

131. 1.ª Si un polinomio y su cuadrado se ordenan con relacion á una letra, el primer término del cuadrado será el cuadrado del primer término del polinomio, y el último el cuadrado del último (**39**, 2.ª).

2.ª Si del cuadrado del polinomio anterior $a+b+c$ (cuyos términos a, b, c, supondrémos ordenados con relacion á las potencias descendentes, por ejemplo, de una letra x) se resta el cuadrado del primer término ó sea a^2, quedará [1]

$$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,$$

donde teniendo la letra por que se ordena mayor exponente en a que en b, y en esta que en c, es evidente que en $2ab$ tiene mayor exponente que en cualquiera de los términos siguientes; luego $2ab$ es el primer término del resto ordenado con relacion á la misma letra x.

Luego *si del cuadrado de un polinomio, ordenado con relacion á una letra, se resta el cuadrado del primer término, el primer término del resto, ordenado con relacion á la misma letra, es el duplo del primer término de dicho polinomio multiplicado por el segundo.*

Si del cuadrado de dicho polinomio [1] restamos $(a+b)^2$ ó sea $a^2+2ab+b^2$, quedará

$$2ac+2bc+c^2,$$

donde, por igual razon que ántes, el término $2ac$ es en el que

UNED

la letra ordenatriz tiene mayor exponente; luego será el primer término del resto tambien ordenado.

Luego *si del cuadrado de un polinomio ordenado con relacion á una letra, se resta el cuadrado de la suma de los dos primeros términos, el primer término del resto, ordenado con relacion á la misma letra, será el duplo del primer término de dicho polinomio multiplicado por el tercero.*

Del mismo modo se haria ver que *restando del cuadrado de un polinomio ordenado con relacion á una letra, el cuadrado de la suma de sus tres primeros términos, el primer término del resto, ordenado con relacion á la misma letra, seria el duplo del primero del polinomio propuesto multiplicado por el cuarto término del mismo; y así sucesivamente.*

CAPITULO IX.

Raíz cuadrada de las cantidades algebráicas.

ARTICULO I.

Raíz cuadrada de los monomios.

132. Raíz cuadrada *de una cantidad es otra cantidad que elevada al cuadrado produce la primera.*

De esta definicion, que es igual á la que hemos dado en la Aritmética, y de la regla dada para la elevacion de un monomio al cuadrado (**128**), se infiere que

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio entero se extrae la raíz cuadrada del coeficiente y se dividen por 2 todos los exponentes.

La raíz podrá ser positiva ó negativa, una vez que ambas elevadas al cuadrado dan un resultado positivo (**33**, corol. 2.°), por cuya razon se le pone el signo ±. Así

$$\sqrt{9a^4b^2c^{10}} = \pm 3a^2bc^5, \qquad \sqrt{a^2b^6} = \pm ab^3.$$

Observacion. Cuando la cantidad de que se trate de extraer la raíz cuadrada es negativa, la operacion es imposible: porque bien se ponga á dicha raíz el signo + ó el —, elevada al cua-

UNED

drado produce un resultado positivo, y no la cantidad de donde la raíz se extrae.

Llámanse cantidades IMAGINARIAS *de segundo grado las raíces cuadradas de cantidades negativas;* y por oposicion á ellas, *se da el nombre de cantidades* REALES *á las que no son imaginarias.* $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-b}$ son cantidades imaginarias, y todas las que hemos expresado hasta ahora reales.

133. Tambien se infiere de la definicion anterior y de lo expuesto (**129**), que

Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado, se extrae la del numerador y denominador y se parte la primera por la segunda. Así

$$\sqrt{\frac{9a^6c^2}{4b^2d^8}} = \frac{\sqrt{9a^6c^2}}{\sqrt{4b^2d^8}} = \frac{\pm 3a^3c}{\pm 2bd^4} = \pm\frac{3a^3c}{2bd^4}.$$

OBSERVACION. Tanto en los enteros como en los quebrados, la raíz no será exacta: 1.° cuando el coeficiente numérico no sea un cuadrado perfecto: 2.° cuando el exponente de cada letra no sea divisible por 2.

En estos casos se deja la operacion indicada, simplificando si se puede la expresion resultante, como adelante se verá.

ARTICULO II.

Raíz cuadrada de los polinomios.

134. La extraccion de la raíz cuadrada de un polinomio tiene por objeto hallar otro polinomio que elevado al cuadrado produzca el propuesto.

Si, pues, suponemos ordenados los dos polinomios (el dado y su raíz) con relacion á una misma letra, el primer término del polinomio propuesto es igual al cuadrado del primero de la raíz (**131**, 1.ª).

Luego el primer término de la raíz se halla extrayendo la raíz cuadrada del primero del polinomio propuesto.

Si del polinomio dado se resta el cuadrado del primer término de la raíz, el primer término del resto será igual al duplo del primero de la raíz multiplicado por el segundo (**131**, 2.ª).

Luego el segundo término de la raíz se halla restando del

polinomio dado el cuadrado del primero de la raíz, y dividiendo el primero del resto por el duplo del primero de la raíz.

Si del polinomio dado se resta el cuadrado de los dos primeros términos de la raíz, ó (puesto que ya se ha restado de dicho polinomio el cuadrado del primer término) si del resto anterior se resta el duplo del primero de la raíz multiplicado por el segundo, y el cuadrado de este, el primer término de este nuevo resto es el duplo del primero de la raíz multiplicado por el tercero (**131**, 2.ª).

Luego el tercer término de la raíz se halla restando del primer resto el producto del duplo del primer término de la raíz más el segundo, por éste, y dividiendo el primer término del resto ordenado, por el duplo del primero de la raíz.

De una manera análoga se hallan los términos siguientes.

Reuniendo, pues, bajo un solo contexto las reglas anteriores y dándoles un sentido práctico para facilitar su ejecucion, tendrémos la siguiente regla, que guarda la mayor analogía con la extraccion de la raíz cuadrada de los números.

Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio se ordena éste con relacion á una letra. Se extrae la raíz cuadrada del primer término, y se tendrá el primer término de la raíz. El cuadrado del primer término de la raíz se resta del polinomio propuesto; se divide el primer término del resto por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el segundo término de esta. Al lado del duplo del primer término de la raíz se escribe para mayor sencillez el segundo: el binomio que forman se multiplica por dicho segundo término, y el producto se resta del resto anterior; se divide el primer término del resto por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el tercer término de esta.

Al lado del duplo de los dos primeros términos de la raíz se escribe el tercero, este polinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz, y el producto se resta del resto anterior: se divide el primer término del resto por el duplo del primero de la raíz; y así se continúa hasta que un resto sea cero, ó hasta que alguna division parcial no dé cociente exacto.

Ejemplo. Sea extraer la raíz cuadrada de

$$a^4 - 4a^3 + 4a^6 + 8a^3 + 4 - 4a^5.$$

UNED

La operacion se ordena de este modo:

Polinomio ordenado.....	$4a^6-4a^5+a^4+8a^3-4a^2+4$	$2a^3-a^2+2$ raíz.
	$-4a^6$	
1.er resto.....	$-4a^5+a^4+8a^3-4a^2+4$	$(4a^3-a^2)\times-a^2$
	$+4a^5-a^4$	
2.° resto.....	$8a^3-4a^2+4$	$(4a^3-2a^2+2)\times 2$
	$-8a^3+4a^2-4$	
3.er resto.....	0	

Despues de ordenado el polinomio propuesto, se extrae la raíz cuadrada de su primer término $4a^6$, cuya raíz cuadrada es $\pm 2a^3$ (**132**), esta cantidad tomando el signo positivo forma el primer término de la raíz; si se tomase el signo negativo tambien formaria el primer término de otra raíz, que solo se distinguiria de la hallada en que llevaria signos contrarios, de modo que el polinomio tiene dos raíces cuadradas, de las que una se deduce de la otra mudándole los signos.

$(2a^3)^2=4a^6$ se resta del polinomio propuesto.

$-4a^5$, primer término del resto, se divide por $4a^3$, duplo del primer término de la raíz, y el cociente $-a^2$ es el segundo término de esta. La operacion se continúa como indica la regla y aparece del cuadro precedente.

OBSERVACIONES.

135. 1.ª El polinomio resultante no será entero y racional, aunque el dado lo sea, cuando el primer término no tenga raíz cuadrada exacta, ó cuando alguna de las divisiones, que hayan de verificarse para hallar el 2.°, 3.° 4.°, etc. términos, no dé cociente exacto.

2.ª Un binomio no tiene raíz exacta; porque el cuadrado de un monomio es otro monomio, el de un binomio es un trinomio, y en general el de un polinomio cualquiera otro polinomio de más de dos términos.

Así que, $\sqrt{a^2+b^2}$ no es $a+b$, como suelen creer los principiantes. Nunca puede decirse que la raíz de una suma es la suma de las raíces de los sumandos, ni que la potencia de una suma es la suma de las potencias de los sumandos.

UNED

CAPITULO X.

Cálculo de los radicales de segundo grado.

ARTICULO PRIMERO.

Cálculo de los radicales reales de segundo grado.

136. El cálculo de estos radicales tiene por fundamento el siguiente

TEOREMA. *La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de sus factores.*

Es decir, que $\sqrt{ABC}=\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C}$. En efecto

$$(\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C})^2=\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}\times\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C},$$

ó reuniendo los radicales que tienen debajo una misma letra, se tendrá (*)

$$(\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C})^2=\sqrt{A}\sqrt{A}\times\sqrt{B}\sqrt{B}\times\sqrt{C}\sqrt{C};$$

y como $\sqrt{A}\sqrt{A}=A$, $\sqrt{B}\sqrt{B}=B$ y $\sqrt{C}\sqrt{C}=C$, segun la definicion dada (**132**), resulta que

$$(\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C})^2=ABC.$$

Luego $\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C}$ elevada al cuadrado produce ABC, luego es la raíz cuadrada de ABC (**132**); luego es cierta la igualdad $\sqrt{ABC}=\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C}$, que demuestra el teorema.

Simplificacion.

137. Cuando las cantidades monomias no tienen raíz cuadrada exacta se pueden simplificar muchas veces en virtud del teorema anterior, descomponiéndolas en factores de los que al-

(*) Véase lo dicho en la nota del número **199** de la Aritmética.

guno ó algunos tengan exacta dicha raíz, extrayéndola de ellos y dejando los restantes debajo del radical. Así

$$\sqrt{18a^3bc^4}=\sqrt{9a^2c^4\times 2ab}=3ac^2\sqrt{2ab}.$$

Este procedimiento equivale evidentemente á la siguiente regla práctica:

Para simplificar una cantidad radical de segundo grado se dividen por 2 los exponentes de las letras que estan debajo del radical, y las letras con el cociente entero por exponente quedan por coeficiente del radical y con el resto por exponente debajo de él. En cuanto al coeficiente numérico se descompone, si es posible, en dos factores, uno de los cuales tenga raíz cuadrada exacta, se extrae la raíz de este y la del otro queda indicada.

Ejemplo. $\sqrt{12a^5bc^2}=2a^2c\sqrt{3ab}$.

Recíprocamente. *Si conviniera que desapareciese el coeficiente de un radical de segundo grado, no habria más que elevarle al cuadrado y multiplicar este por la cantidad que está debajo del radical.* Así

$$2a^2c\sqrt{3ab}=\sqrt{(2a^2c)^2\times 3ab}=\sqrt{4a^4c^2\times 3ab}=\sqrt{12a^5bc^2}.$$

Reduccion de radicales semejantes.

138. *Se llaman* RADICALES SEMEJANTES *los que (ántes ó despues de simplificados) tienen debajo del radical la misma cantidad.*

$5\sqrt{ab}+7\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}$ son radicales semejantes.

Es evidente que $5\sqrt{ab}+7\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}=9\sqrt{ab}$,

y que $b\sqrt{bc}-\sqrt{bc}-ab^2\sqrt{bc}=(b-1-ab^2)\sqrt{bc}$.

Luego *para reducir radicales semejantes se suman algebráicamente sus coeficientes.*

Adicion y sustraccion.

139. Estas dos operaciones se ejecutan por las reglas dadas (**26** y **29**), y si resultan radicales semejantes se reducen (**138**).

Esta reduccion es propiamente su adicion ó sustraccion.

Multiplicacion.

140. Sea multiplicar $\sqrt{2ab}$ por $\sqrt{3ac}$.

En virtud del número **136**, se tiene

$$\sqrt{2ab}\times\sqrt{3ac}=\sqrt{2ab\times 3ac}=\sqrt{6a^2bc}=(\mathbf{137})\ a\sqrt{6bc}.$$

Si hubiésemos de multiplicar $3\sqrt{ac}$ por $-5\sqrt{ab}$ tendriamos $3\sqrt{ac}\times-5\sqrt{ab}=(^*)\ 3\times-5\times\sqrt{ac}\times\sqrt{ab}=$

$$-15\sqrt{a^2bc}=-15a\sqrt{bc}.$$

Luego *para multiplicar radicales de segundo grado se multiplican las cantidades que estan debajo de los mismos, y el resultado se escribe debajo de un radical del mismo grado, y se simplifica si se puede* (**137**). *Si los radicales tienen coeficientes, se multiplican tambien entre sí.*

Division.

141. Sea dividir $\sqrt{A}$ por $\sqrt{B}$.

Como $\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\right)^2=(\mathbf{129})\frac{(\sqrt{A})^2}{(\sqrt{B})^2}=\frac{A}{B}$ resulta que $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ es una cantidad que elevada al cuadrado produce $\frac{A}{B}$, luego es la raíz cuadrada de $\frac{A}{B}$ (**132**); luego $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$.

Segun esto, si hubiese de dividirse $a\sqrt{bc}$ por $b\sqrt{ab}$, se tendria tambien $\frac{a\sqrt{bc}}{b\sqrt{ab}}=\frac{a}{b}\times\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ab}}=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Luego *para dividir dos radicales de segundo grado se dividen las cantidades que estan debajo de los radicales, y el co-*

(*) Véase la nota del número **199** de la Aritmética.

UNED

ciente se coloca debajo de un radical del mismo grado. Si los radicales tienen coeficientes se dividen tambien.

EJEMPLO. $\frac{8\sqrt{a^2-b^2}}{-2\sqrt{a+b}} = -4\sqrt{a-b}$.

Elevacion al cuadrado y extraccion de la raiz cuadrada.

142. Es evidente, segun las definiciones dadas, que la elevacion al cuadrado y la extraccion de la raiz cuadrada son dos operaciones que se neutralizan, y por consiguiente que $(\sqrt{A})^2 = A$; y tambien (**136**) que $(B\sqrt{A})^2 = B^2A$.

143. Sea extraer la raiz cuadrada de $\sqrt{A}$.

$\sqrt{A} = \left(\sqrt{\sqrt{A}}\right)^2$, conforme á lo indicado en el número anterior. Elevando, pues, los dos miembros de esta igualdad al cuadrado se tendrá (**142** y **128**)

$$A = \left(\sqrt{\sqrt{A}}\right)^4;$$

Luego $\sqrt{\sqrt{A}}$ es una cantidad que elevada á la *cuarta* potencia produce A; luego es la raiz *cuarta* de A; luego

$$\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt[4]{A}.$$

Para extraer, pues, la raiz cuadrada de una cantidad radical de segundo grado se multiplican los indices.

Si el radical tiene coeficiente, se extrae de él la raiz cuadrada, y si no la tuviese exacta, se introduce debajo del radical (**137**, rec.), por no complicar la expresion.

OBSERVACION. Una vez que $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt[4]{A}$ es evidente que

$$\sqrt[4]{A} = \sqrt{\sqrt{A}},$$

y del mismo modo se haria ver que $\sqrt[8]{A} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}}$, etc.

Luego *para extraer de un número cualquiera una raiz cuyo índice sea una potencia exacta de 2, basta extraer sucesivamente la raiz cuadrada tantas veces como unidades tenga el exponente de 2.* Así

$$\sqrt[8]{6561} = \sqrt[2^3]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3.$$

Transformacion de algunas expresiones irracionales.

144. Cuando el denominador de un quebrado es irracional, conviene en muchos casos convertirle en racional. Hé aquí algunos ejemplos de estas trasformaciones de un uso frecuente.

1.° sea la expresion $\frac{M}{\sqrt{A}}$.

Multiplicando los dos términos por $\sqrt{A}$ resulta

$$\frac{M}{\sqrt{A}}=\frac{M\times\sqrt{A}}{\sqrt{A}\times\sqrt{A}}=\frac{M\sqrt{A}}{A}.$$

2.° Sea $\frac{M}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.

Multiplicando los dos términos por $\sqrt{A}-\sqrt{B}$, se tiene (**40**, 3.°)

$$\frac{M}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{M(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})\times(\sqrt{A}-\sqrt{B})}=\frac{M(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}.$$

Del mismo modo, si la expresion fuese $\frac{M}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, se tendria

$$\frac{M}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{M(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}=\frac{M(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

3.° Sea, por último, la expresion $\frac{M}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}$.

Considerando el denominador como un binomio cuyos dos primeros términos forman la primera parte y el tercero la segunda, y multiplicando numerador y denominador por la diferencia $\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$, resulta

$$\frac{M}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{M(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})-C}=\frac{M(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})}{A+2\sqrt{AB}+B-C}.$$

Volviendo á considerar el denominador como otro binomio cuya primera parte es $A+B-C$ y $2\sqrt{AB}$ la segunda, y multi-

UNED

plicando ambos términos del quebrado por $(A+B-C)-2\sqrt{AB}$, se tiene (**40**, 3.°) al fin

$$\frac{M}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{M(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})\,(A+B-C-2\sqrt{AB})}{(A+B-C)^2-4AB}.$$

ARTÍCULO II.

Cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado.

145. Para facilitar el cálculo de estas cantidades se les da una forma más á propósito.

Tomemos al efecto la expresion $\sqrt{-4}$.

Como $-4=4\times-1$, sustituyendo este valor de -4 debajo del radical, tendrémos

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times-1}=(\mathbf{136})\ \sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}.$$

Del mismo modo $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$;

Luego *toda cantidad imaginaria de segundo grado* se puede reducir á la forma de $A\sqrt{-1}$, es decir, que *es equivalente á la raiz cuadrada de la cantidad que está debajo del radical, considerada como positiva, multiplicada por* $\sqrt{-1}$.

146. Se ha convenido en aplicar á las cantidades imaginarias las mismas reglas que van expuestas para el cálculo de las cantidades reales, y en que $(\sqrt{-1})^2=-1$.

En esta doble hipótesis los resultados de las cuatro operaciones fundamentales con las expresiones de la forma $A\sqrt{-1}$ son los siguientes:

1.° $A\sqrt{-1}+B\sqrt{-1}=(A+B)\sqrt{-1}$.

2.° $A\sqrt{-1}-B\sqrt{-1}=(A-B)\sqrt{-1}$.

3.° $A\sqrt{-1}\times B\sqrt{-1}=AB\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=AB(\sqrt{-1})^2=AB\times-1=-AB$

4.° $\frac{A\sqrt{-1}}{B\sqrt{-1}}=\frac{A}{B}$.

De estos resultados se infiere que *la suma y diferencia de dos cantidades imaginarias de la forma indicada, son expresiones de la misma forma; el producto y el cociente son cantidades reales, el primero igual en valor absoluto al que resulta de la multiplicacion de los coeficientes de* $\sqrt{-1}$, *y el segundo igual en todo al que se deduce de la division de estos.*

147. Las expresiones imaginarias van muchas veces acompañadas de un sumando real, en cuyo caso toman la forma general

$$A+B\sqrt{-1}.$$

Veamos tambien los resultados que se obtienen, segun lo convenido (**146**), con las cantidades de esta forma.

1.° $(A+B\sqrt{-1})+(C+D\sqrt{-1})=(A+C)+(B+D)\sqrt{-1}$.

2.° $(A+B\sqrt{-1})-(C+D\sqrt{-1})=(A-C)+(B-D)\sqrt{-1}$.

3.° $(A+B\sqrt{-1})(C+D\sqrt{-1}=AC+CB\sqrt{-1}+AD\sqrt{-1}-BD=$
$(AC-BD)+(BC+AD)\sqrt{-1}$.

4.° $$\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}}=(\mathbf{144})\frac{(A+B\sqrt{-1})(C-D\sqrt{-1})}{(C+D\sqrt{-1})(C-D\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{(AC+BD)+(BC-AD)\sqrt{-1}}{C^2+CD\sqrt{-1}-CD\sqrt{-1}+D^2}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+\frac{BC-AD}{C^2+D^2}\sqrt{-1}.$$

De cuyos resultados se infiere que *la suma, diferencia, producto y cociente de dos imaginarias de la forma indicada, son expresiones imaginarias de la misma forma.*

OBSERVACION. Si en el producto anterior se supone

$$C=A \quad y \quad D=-B,$$

se convierte en $(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})=A^2+B^2$ (*) (como tambien se habrá notado al multiplicar $C+D\sqrt{-1}$ por $C-D\sqrt{-1}$, para obtener el denominador de la division verificada).

148. A dos expresiones imaginarias de la forma $A+B\sqrt{-1}$ y $A-B\sqrt{-1}$, que solo se distinguen en el signo del coeficiente de $\sqrt{-1}$, *se les da el nombre de imaginarias* CONJUGADAS.

De modo que *el producto de dos imaginarias conjudas es una cantidad real, igual á la suma de los cuadrados de la parte real de cualquiera de dichas expresiones.* Así $(4+3\sqrt{-1})(4-3\sqrt{-1})=4^2+3^2$.

Recíprocamente. Una vez que

$(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1}=A^2+B^2$ tambien se tendrá

$A^2+B^2=(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})$;

es decir, que *la suma de dos cantidades se puede descomponer en el pro-*

(*) La raiz cuadrada de la suma de los cuadrados A^2+B^2 se llama *módulo* de la expresion imaginaria $A+B\sqrt{-1}$; de modo que el módulo de esta es $\sqrt{A^2+B^2}$, y el de $4+3\sqrt{-1}$ será $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

UNED

ducto indicado de dos imaginarias conjugadas, tales que la parte real sea la raiz cuadrada de una de dichas cantidades, y la parte imaginaria la raiz de la otra cantidad multiplicada por $\sqrt{-1}$. Así

$$C+D=(\sqrt{C}+\sqrt{D}\sqrt{-1})(\sqrt{C}-\sqrt{D}\sqrt{-1}).$$

CAPITULO XI.

Ecuaciones de segundo grado y bicuadradas.

ARTICULO I.

Resolucion de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

149. Las ecuaciones de segundo grado despues de preparadas (**69**), y trasladando todos los términos al primer miembro, toman una de las tres formas siguientes:

$$1.^{a}\quad Ax^2+Bx+C=0,$$
$$2.^{a}\quad Ax^2+C=0,$$
$$3.^{a}\quad Ax^2+Bx=0.$$

Se llaman *completas* las que tienen la 1.ª forma, é *incompletas* las que tienen cualquiera de las otras dos.

Es evidente que las ecuaciones *incompletas* no son más que un caso particular de las *completas*, esto es, cuando $B=0$ ó $C=0$.

150. Resolvamos, pues, la ecuacion general

$$Ax^2+Bx+C=0 \qquad [1].$$

Multiplicando los miembros de esta ecuacion por $4A$, resulta

$$4A^2x^2+4ABx+4AC=0,$$

y trasladando el término conocido $+4AC$ al segundo miembro, la ecuacion resultante

$$4A^2x^2+4ABx=-4AC$$

tiene sus dos primeros términos iguales á los del cuadrado del binomio $2Ax+B$; pues que

$$(2Ax+B)^2=4A^2x^2+4ABx+B^2.$$

Si, pues, agregamos á los miembros de aquella ecua-

cion la cantidad $+B^2$, la ecuacion no varía (**66**), y el primer miembro de la misma será un cuadrado exacto, esto es, el cuadrado de $2Ax+B$. Así

$$4A^2x^2+4ABx+B^2=B^2-4AC,$$

ó $$(2Ax+B)^2=B^2-4AC \qquad [2];$$

luego la cantidad $2Ax+B$ es tal que elevada al cuadrado produce B^2-4AC, luego es la raíz cuadrada de esta cantidad (**132**); luego

$$2Ax+B=\pm\sqrt{B^2-4AC}.$$

Despejando la x en esta ecuacion de primer grado, resulta por último (**72**)

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad [3].$$

Esta es la fórmula general que con más facilidad se emplea en la resolucion de las ecuaciones de segundo grado. Se notará en ella que el doble signo del radical hace que la incógnita tenga dos valores, uno cuando el radical se toma con el signo $+$, y otro cuando con el signo $-$.

Así que, llamando x' y x'' los valores de la incógnita se tiene

$$x'=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad x''=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Estos valores, que satisfacen evidentemente la ecuacion [2] y por consiguiente la general [1], y que son los únicos que cumplen con esta condicion, se llaman *raíces* de la ecuacion; de manera que *toda ecuacion de segundo grado tiene dos raíces y no puede tener más de dos.*

151. De la comparacion de la fórmula [3] con la ecuacion general [1] se deduce la siguiente regla práctica:

Para resolver una ecuacion de segundo grado reducida á la forma $Ax^2+Bx+C=0$, *se escribe la incógnita, despues el signo de igualdad; luego un quebrado, cuyo numerador es el coeficiente del segundo término con signo contrario, ± la raíz cuadrada del cuadrado del mismo coeficiente, restando de él algebráicamente el cuádruplo del producto del coeficiente del primer término por el término conocido, y cuyo denominador es el duplo del primer coeficiente.*

EJEMPLOS.

1.° Resolver la ecuacion $x^2-\frac{x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$.

Preparada esta ecuacion, se convierte (**69**) en

$$6x^2+x=2 \quad \text{ó} \quad 6x^2+x-2=0:$$

y aplicando la regla anterior, se tiene

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times-2}}{2\times6}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{12}=$$

$$\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{-1\pm7}{12};$$

de donde separando las dos raíces, resulta

$$x'=\frac{-1+7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x''=\frac{-1-7}{12}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}.$$

2.° Resuélvase la ecuacion $x^2-6x+8=0$.

La regla precedente nos da

$$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times8}}{2\times1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=$$

$$\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2};$$

y separando las raíces se tiene

$$x'=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad \text{y} \quad x''=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

3.° Resolver la ecuacion literal

$$ax+x^2+\frac{a^2}{b}=-\frac{ax}{b}.$$

Preparada esta ecuacion se convierte (**69**) en

$$bx^2+(ab+a)x=-a^2,$$

ó bien

$$bx^2+(ab+a)x+a^2=0:$$

resolviéndola segun la regla anterior, resulta

$$x=\frac{-(ab+a)\pm\sqrt{(ab+a)^2-4a^2b}}{2b}=$$

$$\frac{-ab-a\pm\sqrt{a^2b^2+2a^2b+a^2-4a^2b}}{2b}=$$

$$\frac{-ab-a\pm\sqrt{a^2b^2-2a^2b+a^2}}{2b}=\frac{-ab-a\pm(ab-a)}{2b},$$

y separando las raíces

$$x' = \frac{-ab - a + ab - a}{2b} = \frac{-2a}{2b} = -\frac{a}{b},$$

y

$$x'' = \frac{-ab - a - ab + a}{2b} = \frac{-2ab}{2b} = -a.$$

152. Las ecuaciones incompletas

1.ª $Ax^2 + C = 0$,

2.ª $Ax^2 + Bx = 0$,

son, como se ha dicho (**149**), un caso particular de las completas, y por lo tanto pueden resolverse por la fórmula general

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Para resolver la primera de dichas ecuaciones se hace en esta fórmula $B = 0$, y se tendrá

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4AC}}{2A} = \pm\frac{1}{2A}\sqrt{-4AC} = (\textbf{137}, \text{ rec.})$$

$$\pm\sqrt{\frac{-4AC}{4A^2}} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

La fórmula $x = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$, comparada con la ecuacion primera, nos dice que

Para resolver una ecuacion de la forma $Ax^2 + C = 0$, *se escribe la incógnita, el signo* $=$, *luego* $\pm$ *un radical de segundo grado, y debajo de él el cociente que resulta de dividir el término conocido por el coeficiente del primero, con el signo contrario.*

Observacion. Las raíces de esta ecuacion serán ambas imaginarias si C es positiva en el primer miembro ó negativa en el segundo; en otro caso serán reales é iguales en valor absoluto, pero de signo contrario.

Ejemplo. Resolver la ecuacion

$$25x^2 - 9 = 0.$$

Aplicando la regla precedente, se tiene

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5};$$

de donde $x' = \frac{3}{5}$ y $x'' = -\frac{3}{5}$.

153. Para resolver la segunda de dichas ecuaciones in-

UNED

completas por la fórmula general, se hace en esta $C=0$, y la fórmula se convierte en

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2}}{2A}=\frac{-B\pm B}{2A};\text{ de donde}$$

$$x'=\frac{-B+B}{2A}=\frac{0}{2A}=0 \quad \text{y} \quad x''=\frac{-B-B}{2A}=\frac{-2B}{2A}=-\frac{B}{A}.$$

Comparadas estas raices con la ecuacion incompleta de la forma $Ax^2+Bx=0$ se infiere que

Una de las raices de esta ecuacion es 0, *y la otra es igual al cociente que resulta de dividir el coeficiente del segundo término por el del primero con signo contrario.*

Ejemplo. Resolver la ecuacion

$$\frac{x^2}{2}-3x=\frac{x^2}{5}.$$

Preparada esta ecuacion, se convierte en

$$3x^2-30x=0;$$

de donde segun la regla anterior,

$$x'=0 \quad \text{y} \quad x''=\frac{30}{3}=10.$$

Observacion. Si en la fórmula general se hace $A=0$, las dos raices se convierten en

$$x'=\frac{-B+\sqrt{B^2-0}}{2\times 0}=\frac{-B+B}{0}=\frac{0}{0},$$

y

$$x''=\frac{-B-\sqrt{B^2-0}}{2\times 0}=\frac{-B-\sqrt{B^2}}{0}=\frac{-2B}{0}=-\infty,$$

El valor $\frac{0}{0}$ de la primera de estas raices proviene de un factor cero, que reduce tambien á cero numerador y denominador. Para hacerle desaparecer se multiplica numerador y denominador de la fórmula

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

que da este valor, por $-B-\sqrt{B^2-4AC}$, y se tiene

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{(-B+\sqrt{B^2-4AC})(-B-\sqrt{B^2-4AC})}{2A(-B-\sqrt{B^2-4AC})}$$

$$=(40,\,3.^{\circ})\frac{B^2-(B^2-4AC)}{-2AB-2A\sqrt{B^2-4AC}}=\frac{B^2-B^2+4AC}{-2AB-2A\sqrt{B^2-4AC}}=$$

$$\frac{4AC}{-2AB-2A\sqrt{B^2-4AC}}=\frac{4C}{-2B-2\sqrt{B^2-4AC}};$$

y haciendo en el último miembro $A=0$, como se ha dicho, resulta que

$$x'=\frac{4C}{-2B-2B}=\frac{4C}{-4B}=-\frac{C}{B};$$

luego una de las raíces es $-\frac{C}{B}$, y la otra desaparece porque se hace igual al infinito; lo que está en conformidad con el resultado que se obtiene haciendo $A=0$ en la ecuacion general, la cual se convierte en $Bx+C=0$, cuya raíz es evidentemente $-\frac{C}{B}$.

ARTICULO II.

Trasformaciones de la fórmula general.

154. La fórmula general se puede trasformar en otra más sencilla, en el caso de ser divisible por 2 el coeficiente del segundo término.

En efecto, si en dicha fórmula

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

suponemos $\frac{B}{2}=B'$ se tendrá $B=2B'$, y sustituyendo en ella en vez de B su valor, resulta

$$x=\frac{-2B'\pm\sqrt{(2B')^2-4AC}}{2A}=\frac{-2B'\pm\sqrt{4B'^2-4AC}}{2A}=\frac{-2B'\pm2\sqrt{B'^2-AC}}{2A};$$

y dividiendo por 2 numerador y denominador, se tiene la fórmula

$$x=\frac{-B'\pm\sqrt{B'^2-AC}}{A} \qquad [4].$$

155. Otra forma se suele dar á la fórmula general, que si bien no es tan expedita en la práctica como la obtenida (**150**), sobre todo cuando los coeficientes del segundo y tercer término no son divisibles por el del primero, tiene la ventaja de guardar más analogía con el medio empleado en la resolucion de las ecuaciones superiores.

Volviendo á tomar dicha fórmula general, se tiene

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{-B}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}=(\textbf{137}\text{, rec.})$$

$$-\frac{B}{2A}\pm\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}}=-\frac{B}{2A}\pm\sqrt{\frac{B^2}{4A^2}-\frac{C}{A}}=-\frac{B}{2A}\pm\sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{C}{A}}.$$

UNED

Haciendo en esta fórmula para mayor sencillez $\frac{B}{A}=s$ y $\frac{C}{A}=p$, resulta

$$x=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p} \quad [5].$$

Si dividimos por A la ecuacion general

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

resulta $$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0;$$

y haciendo tambien en ella $\frac{B}{A}=s$, y $\frac{C}{A}=p$,

se tiene $$x^2+sx+p=0.$$

156. De la comparacion de esta ecuacion con la fórmula modificada [5], se deduce la siguiente regla práctica:

Para resolver una ecuacion de segundo grado de la forma $x^2+sx+p=0$, *se escribe la incógnita, despues el signo de igualdad: luego la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario: el signo* $\pm$: *un radical de segundo grado, y debajo de él el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, restando de él algebráicamente el término conocido, si se halla en el primer miembro de la ecuacion, ó sumándole si se halla en el segundo.*

EJEMPLOS.

1.° $$x^2-\frac{x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}.$$

Preparada esta ecuacion, se convierte (**69**) en

$$6x^2+x=2 \quad \text{ó} \quad 6x^2+x-2=0.$$

Dividiendo esta ecuacion por el coeficiente 6 de x^2, resulta

$$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0,$$

y resolviéndola por la regla anterior, se tiene

$$x=-\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}+\frac{48}{144}}=-\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{49}{144}}=$$

$-\frac{1}{12}\pm\frac{7}{12}$; de donde

$$x'=-\frac{1}{12}+\frac{7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}, \qquad x''=-\frac{1}{12}-\frac{7}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$$

2.° $$\frac{x^2}{4}+2=\frac{3x}{2}.$$

Preparada esta ecuacion, se convierte en

$$x^2-6x=-8 \text{ ó } x^2-6x+8=0,$$

y resolviéndola por la misma regla, dará

$$x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1;$$

de donde $x'=3+1=4$ y $x''=3-1=2$.

3.° $$ax+x^2+\frac{a^2}{b}=-\frac{ax}{b}.$$

Preparada esta ecuacion, resulta

$$bx^2+(ab+a)x=-a^2 \text{ ó } bx^2+(ab+a)x+a^2=0;$$

dividiéndola por el coeficiente de x^2 ó sea por b, se tiene

$$x^2+\frac{ab+a}{b}x+\frac{a^2}{b}=0.$$

y resolviéndola por la última fórmula

$$x=-\frac{ab+a}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{ab+a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{b}}=-\frac{ab+a}{2b}\pm\sqrt{\frac{a^2b^2+2a^2b+a^2}{4b^2}-\frac{a^2}{b}}$$

$$=-\frac{ab+a}{2b}\pm\sqrt{\frac{a^2b^2+2a^2b+a^2}{4b^2}-\frac{4a^2b}{4b^2}}=-\frac{ab+a}{2b}\pm$$

$$\sqrt{\frac{a^2b^2-2a^2b+a^2}{4b^2}}=-\frac{ab+a}{2b}\pm\frac{ab-a}{2b};$$

de donde $$x'=-\frac{ab+a}{2b}+\frac{ab-a}{2b}=\frac{-ab-a+ab-a}{2b}=-\frac{a}{b},$$

y $$x''=-\frac{ab+a}{2b}-\frac{ab-a}{2b}=-a.$$

ARTICULO III.

Relacion entre las raices de la ecuacion $x^2+sx+p=0$ y sus coeficientes.

157. Separando las raíces que da para la ecuacion la regla del número anterior, se tiene

$$x'=-\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p} \text{ y } x''=-\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s}{4}-p};$$

sumando estas raíces, resulta

$$x'+x''=-\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}-\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}=-s.$$

UNED

Multiplicándolas, se tiene

$$x'x''=\left(-\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}\right)\left(-\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}\right)=(\textbf{40}, 3.^\circ)$$

$$\frac{s^2}{4}-\left(\frac{s^2}{4}-p\right)=\frac{s^2}{4}-\frac{s^2}{4}+p=p.$$

Luego *la suma algebráica de las raíces de una ecuacion de la forma* $x^2+sx+p=0$, *es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario; y el producto es igual al término conocido.*

De donde tambien se deduce que

158. 1.° *Si la suma de dos números es* s *y su producto* p, *estos números son las raíces de la ecuacion*

$$x^2-sx+p=0.$$

2.° *Si se quiere formar una ecuacion de segundo grado, cuyas raíces sean números conocidos, se escribe* x^2; *luego la suma algebráica de dichos números, con signo contrario, por coeficiente de* x; *y por término conocido el producto de los mismos números.*

Así, $x'=4$ y $x''=2$ son raíces de la ecuacion

$$x^2-(4+2)x+4\times 2=0 \text{ ó bien de } x^2-6x+8=0.$$

159. Las ecuaciones de segundo grado con dos ó más incógnitas se resuelven de una manera análoga á las de primer grado de la misma clase (**75**).

ARTICULO IV.

Valores de la incógnita en las ecuaciones de segundo grado, y significacion de las raíces imaginarias.

160. La incógnita en estas ecuaciones puede tener los mismos valores que en las de primer grado (**84**), y además los *imaginarios*, de que entónces no se hizo mérito, porque no es lo comun que se hallen en aquellas ecuaciones.

Los valores examinados entónces tienen aquí la misma significacion respecto de las ecuaciones de donde dimanan; y por lo tanto no insistirémos ahora en este punto, sino que indicarémos solamente los que puede producir la fórmula general (**150** [3]), segun la relacion que haya entre los coeficientes A, B y C, que para mayor sencillez suponemos reales.

161. Puede considerarse siempre como positivo el coeficiente A en la ecuacion general

$$Ax^2+Bx+C=0;$$

porque si fuese negativo, se convertiria en positivo mudando los signos á toda la ecuacion, con lo que esta no varia (**66**).

Los coeficientes B y C pueden ser positivos ó negativos; de manera que escrita dicha ecuacion con la mayor generalidad, tiene la siguiente forma $Ax^2\pm Bx\pm C=0$,

que da lugar á las cuatro siguientes, cuyas raíces son, conforme á la fórmula general (**150** [3]), las que á continuacion de cada una se expresan.

Ecuaciones.	Raíces.
1.ª $Ax^2+Bx+C=0$.	$x'=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, $x''=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$.
2.ª $Ax^2-Bx+C=0$.	$x'=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, $x''=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$.
3.ª $Ax^2+Bx-C=0$.	$x'=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$, $x''=\frac{-B-\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$.
4.ª $Ax^2-Bx-C=0$.	$x'=\frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$, $x''=\frac{B-\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$.

De la simple inspeccion del cuadro precedente se deduce que cuando $4AC>B^2$, las raíces de las ecuaciones primera y segunda son *imaginarias;* porque la cantidad que está debajo del radical es entónces negativa.

Si $4AC<B^2$ entónces son reales todas, y las de la ecuacion primera *negativas* ambas; porque la cantidad que está ántes del radical lo es, y el valor de este es evidentemente menor que dicha cantidad; siendo por igual razon *positivas* las de la ecuacion segunda.

Las raíces de las ecuaciones tercera y cuarta son siempre reales, una positiva y otra negativa; siendo en la tercera menor la raiz positiva que la negativa, y en la cuarta al contrario.

Por último, si $4AC=B^2$, las raices de la primera ecuacion se convierten en $-\frac{B}{2A}$, y las de la segunda en $\frac{B}{2A}$. En tal caso se dice que estas ecuaciones tienen dos raíces iguales, negativa la primera y positiva la segunda.

Observacion. Las raíces imaginarias tienen la forma de cantidades *imaginarias conjugadas* (**148**).

EJEMPLOS.

1.° $3x^2+2x+5=0$....
2.° $2x^2-20x+80=0$.. } raíces imaginarias.
3.° $2x^2+7x+6=0$.... negativas y desiguales.
4.° $4x^2-8x+3=0$.... positivas y desiguales.
5.° $4x^2+4x+1=0$.... negativas é iguales.
6.° $x^2-6x+9=0$..... positivas é iguales.
7.° $3x^2+5x-10=0$... } una positiva y otra negativa, y ésta mayor que aquella.
8.° $x^2-2x-12=0$.... } una negativa y otra positiva, y ésta mayor que aquella.

UNED

Significacion de las raíces imaginarias.

162. *Las raíces imaginarias indican que la ecuacion es absurda;* porque para determinar una cantidad que la satisfaga es preciso ejecutar una operacion imposible (**132**, obs.).

Estas raíces, sin embargo, trasforman la ecuacion en identidad.

En efecto, sea la ecuacion $x^2-3x+9=0$, cuyas raíces son

$$x'=\frac{3+\sqrt{9-36}}{2}=\frac{3+\sqrt{-27}}{2}=(\mathbf{145})\ \frac{3+\sqrt{27}\sqrt{-1}}{2},$$

$$x''=(\mathbf{161}\text{, obs.})\ \frac{3-\sqrt{27}\sqrt{-1}}{2}.$$

Sustituyendo una de estas raíces, la primera por ejemplo, en la ecuacion anterior, se tiene

$$\left(\frac{3+\sqrt{27}\sqrt{-1}}{2}\right)^2-3\times\frac{3+\sqrt{27}\sqrt{-1}}{2}+9=$$

$$\frac{9+6\sqrt{27}\sqrt{-1}-27}{4}-\frac{9+3\sqrt{27}\sqrt{-1}}{2}+9=$$

$$\frac{9+6\sqrt{27}\sqrt{-1}-27}{4}-\frac{18+6\sqrt{27}\sqrt{-1}}{4}+9=$$

$$\frac{9-45}{4}+9=\frac{-36}{4}+9=-9+9=0,$$

luego el primer miembro de la ecuacion se convierte en 0, y como el segundo es 0 tambien, resulta de la sustitucion la identidad $0=0$.

ARTICULO V.

Ecuaciones bicuadradas.

163. Llámanse *ecuaciones bicuadradas* aquellas que despues de preparadas toman la forma $Ax^4+Bx^2+C=0$.

Estas ecuaciones se resuelven por las fórmulas de las de 2.° grado.

En efecto, haciendo en la ecuacion general $y=x^2$, se tendrá

$$Ay^2+By+C=0,$$

cuya ecuacion resuelta (**151**) da

$$y=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Volviendo á sustituir en esta ecuacion x^2 en vez de y, se tiene

$$x^2=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

cuya ecuacion resuelta como se ha dicho (**152**), ó extrayendo la raíz

cuadrada de los dos miembros, da la fórmula general

$$x=\pm\sqrt{\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}.$$

Esta fórmula contiene cuatro valores distintos, que dan lugar á las cuatro raices siguientes:

$$x'=\sqrt{\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}},\qquad x''=-\sqrt{\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}},$$

$$x''=\sqrt{\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}},\qquad x'''=-\sqrt{\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}.$$

ARTÍCULO VI.

Problemas de 2.° grado con una incógnita.

164. 1.° Un comerciante compró en 1000 reales cierto número de kilógramos de café, á tal precio que con el mismo dinero pudo haber comprado 10 kilógramos más, si cada uno le hubiese costado 5 reales ménos. ¿Cuál es el número de kilógramos comprados?

Llámese x este número, y el precio de cada kilógramo será $\frac{1000}{x}$.

Si hubiese comprado 10 kilógramos más, el número de estos sería $x+10$, y el precio de cada uno $\frac{1000}{x+10}$.

Ahora, siendo este precio inferior en 5 reales al precedente, la ecuacion del planteo será

$$\frac{1000}{x}-\frac{1000}{x+10}=5.$$

Preparada esta ecuacion, se convierte en

$$5x^2+50x-10000=0 \quad \text{ó} \quad x^2+10x-2000=0;$$

de donde (**151**) $x'=40$, $x''=-50$.

Resultado 40 kilógramos.

Para interpretar el segundo valor -50, observarémos que la cantidad representada por x puede tomarse en dos acepciones opuestas, porque una compra negativa se puede considerar como una venta; y por

consiguiente segun lo dicho (**100**, 1.°), esta raíz tomada como positiva corresponde al siguiente problema:

Un comerciante vendió en 1000 reales cierto número de kilógramos de café, á tal precio que si en el mismo dinero hubiera vendido 10 kilógramos ménos, cada kilógramo le habria valido 5 reales más.

Si se juzgase que la cantidad representada por x no podia variar de acepcion, para interpretar el valor -50, segun lo expuesto (**100**, 2.°) se mudaria el signo á la x en la ecuacion del planteo, la que se convertiria en

$$\frac{1000}{-x}-\frac{1000}{-x+10}=5 \quad \text{ó} \quad -\frac{1000}{x}+\frac{-1000}{-x+10}=5,$$

ó bien por último, $\dfrac{1000}{x-10}-\dfrac{1000}{x}=5$, cuya ecuacion traducida en problema análogo al propuesto, da el siguiente, que es satisfecho por el valor $+50$.

Un comerciante compró en 1000 reales cierto número de kilógramos de café á tal precio que con el mismo dinero hubiera comprado 10 kilógramos ménos, si cada uno le hubiese costado 5 reales más.

165. 2.° **Descomponer el número 20 en dos partes cuyo producto sea 96.**

Primera parte x, segunda $20-x$; luego será

$$x(20-x)=96.$$

Preparada esta ecuacion, se convierte en

$$x^2-20x+96=0;$$

de donde $x=\dfrac{20\pm\sqrt{20^2-4\times 96}}{2}=\dfrac{20\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{20\pm 4}{2}$:

y por consiguiente $x'=\dfrac{20+4}{2}=12$, $x''=\dfrac{20-4}{2}=8$; luego la primera parte es 12 ú 8, y la segunda 8 ó 12.

Observacion. Los dos valores de la incógnita satisfacen las condiciones del problema, lo cual consiste en que la ecuacion da indiferentemente la *primera* parte ó la *segunda*; como debia suceder, porque no hay condicion ninguna en ella por la que deba resultar una parte ántes que la otra.

166. 3.° **Hallar dos números cuya suma sea 10, y 20 la de sus cuadrados.**

Llamando x el número mayor, el menor será $10-x$, y la suma de sus cuadrados $x^2+(10-x)^2=20$.

Preparada esta ecuacion se convierte en

$$2x^2 - 20x + 80 = 0.$$

Las raíces de esta ecuacion son imaginarias (**161**); luego el problema es absurdo (**162**).

Generalizacion del segundo problema.

167. **Descomponer el número n en dos partes cuyo producto sea p.**

Primera parte x, segunda $n - x$; luego será $x(n-x) = p$.

Preparada esta ecuacion, se convierte en

$$x^2 - nx + p = 0;$$

de donde (**151**)

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4p}}{2} = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - 4p} = (\textbf{137}, \text{rec.})\ \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}.$$

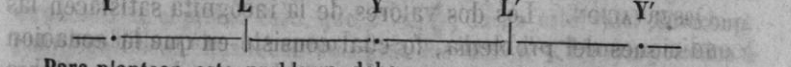
Observacion. El mayor valor que puede tener p en la ecuacion precedente para que las raíces no sean imaginarias (**132**, observacion), es $p = \frac{n^2}{4}$:

mas entónces cada una de las raíces de la ecuacion anterior resulta igual á $\frac{n}{2}$; luego

El mayor producto, que puede formarse con las dos partes en que se descompone un número, resulta cuando dichas partes son iguales.

Otro PROBLEMA.

168. **4.° Hallar en la recta que une dos luces L y L', de intensidades diferentes, el punto igualmente iluminado por las dos.**



Para plantear este problema debe suponerse conocido el siguiente principio, que se demuestra en la Física: «Las intensidades de una misma luz en puntos diferentes estan en razon inversa de los cuadrados de las distancias á dicha luz,» esto es, que á distancia *doble*, *triple*, etc., la intensidad es 4, 9, etc. veces menor.

Sea l la intensidad de L á un metro de distancia, l' la de L' á la misma distancia, d la distancia entre las dos luces, é Y el punto igualmente iluminado por ambas.

UNED

Llamando x la distancia LY, la YL' será $d-x$.

Segun el principio indicado, la intensidad l de la luz L á 2, 3, 4, etc., metros de distancia de esta luz, será $\frac{l}{4}$, $\frac{l}{9}$, $\frac{l}{16}$, etc., luego á la distancia x será $\frac{l}{x^2}$.

Por la misma razon la intensidad l' de la luz L' á la distancia $d-x$ será $\frac{l'}{(d-x)^2}$; y como en el punto Y las intensidades deben ser iguales, resulta la siguiente ecuacion del planteo

$$\frac{l}{x^2}=\frac{l'}{(d-x)^2}.$$

En lugar de resolver esta ecuacion por el método ordinario, se puede, para mayor facilidad, extraer la raíz cuadrada de los dos miembros, y poniendo á uno de ellos solo el signo $\pm$ (lo que produce los mismos valores que si ambos llevan este signo, como fácilmente se comprende), se tendrá

$$\frac{\sqrt{l}}{x}=\pm\frac{\sqrt{l'}}{d-x}.$$

Resolviendo esta ecuacion de 1.er grado, resulta (**69** y **72**)

$$x=\frac{d\sqrt{l}}{\sqrt{l}\pm\sqrt{l'}};$$

y separando los dos valores ó raíces de la ecuacion del planteo, se tiene

$$x'=\frac{d\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l'}} \quad \text{y} \quad x''=\frac{d\sqrt{l}}{\sqrt{l}-\sqrt{l'}}.$$

169. Es notable este problema, lo mismo que el de las locomotoras en las ecuaciones de primer grado (**92**), porque en él reciben una interpretacion natural y sencilla los diferentes valores que puede tener la incógnita, exceptuando los valores imaginarios.

Tres hipótesis principales harémos al efecto, que $l>l'$, que $l=l'$ y que $l<l'$.

Si se supone $l>l'$ resulta $x'>\frac{d}{2}$; porque d está multiplicada por el quebrado $\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l'}}$, que evidentemente es propio y mayor que $\frac{1}{2}$ en la hipótesis de $l>l'$; luego este valor coloca el punto igualmente iluminado entre L y L', más próximo á esta luz que á aquella, como debe suceder; porque siendo más intensa la luz L que la L', el punto donde las dos iluminan igualmente, debe alejarse de la primera y aproximarse á la segunda, que es más débil.

UNED

La misma hipótesis de $l > l'$ hace que $x'' > d$; porque el quebrado $\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l}-\sqrt{l'}}$ por quien d se ha de multiplicar, es evidentemente impropio; luego este valor determina otro punto igualmente iluminado en Y' á la derecha de L'.

Si se supone $l=l'$, el primer valor de la incógnita se convierte en

$$x' = \frac{d\sqrt{l}}{2\sqrt{l}} = \frac{d}{2};$$

luego este valor coloca el punto igualmente iluminado equidistante de las dos luces; como debia suceder, porque siendo estas de igual intensidad, no hay razon para que dicho punto se aproxime ó se separe de la una más que de la otra.

La otra raiz se convierte en

$$x'' = \frac{d\sqrt{l}}{\sqrt{l}-\sqrt{l'}} = \frac{d\sqrt{l}}{0} = \infty,$$

cuyo valor indica que no existe ningun otro punto igualmente iluminado en la recta en que las luces estan colocadas: como efectivamente debe suceder, porque teniendo las luces igual intensidad, solo los puntos equidistantes de ellas pueden estar igualmente iluminados, y no hay en la recta sobre que estan colocados más que el punto medio que cumpla con esta condicion.

Si al mismo tiempo que $l=l'$, se supone $d=0$, se tendrá

$$x' = \frac{0}{2\sqrt{l}} = 0 \quad \text{y} \quad x'' = \frac{0}{0},$$

cuyos valores manifiestan que un punto cualquiera de la línea está igualmente iluminado por una y otra luz, lo que evidentemente tiene que suceder, teniendo las dos igual intensidad y estando colocadas en un mismo punto.

Si se supone por último $l < l'$, resulta, por razones análogas á las expuestas en el primer caso, que $x' < \frac{d}{2}$; luego este valor coloca el punto igualmente iluminado entre las dos luces L y L', más próximo á aquella que á esta, segun debe verificarse, porque la primera es más débil por hipótesis.

Esta misma hipótesis da para x'' un valor negativo, y como aquí es susceptible de tomarse en dos acepciones opuestas (**100**, 1.°) indica con su signo que se ha de tomar en sentido contrario del que se tomó en el planteo: en este se tomaba desde L hácia la derecha, luego ahora se tomará desde L hácia la izquierda; luego el valor negativo de x'' determina otro punto igualmente iluminado en Y''.

UNED

ARTICULO VII.

Resolucion de los sistemas de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

170. Estos sistemas se resuelven verificando la eliminacion de una de las incógnitas por los métodos expuestos para las ecuaciones de primer grado, resolviendo la ecuacion obtenida en la eliminacion, sustituyendo los valores de la incógnita despejada en cualquiera de las ecuaciones del sistema, y hallando luego los valores de la incógnita restante.

Es de advertir que la ecuacion resultante de la eliminacion no pasará del segundo grado, cuando una de las ecuaciones del sistema sea de primer grado, con relacion á las dos incógnitas; pero en otro caso puede ascender al tercero ó cuarto grado; y como no sabemos resolver estas ecuaciones, á no ser bicuadradas, procurarémos que en los ejemplos que se propongan, no entren ecuaciones cuya resolucion nos sea por ahora desconocida.

Los sistemas de ecuaciones de segundo grado con más ó con ménos incógnitas que ecuaciones, se resuelven de una manera análoga á la expuesta (**116** y **117**) en los sistemas de primer grado de iguales condiciones.

ARTICULO VIII.

Problemas de segundo grado con dos ecuaciones y dos incógnitas.

171. 1.° **Dos trenes T y T′ salen á un tiempo al encuentro uno de otro de dos estaciones E y E′, distantes entre sí 200 kilómetros, y T llega á la estacion intermedia E″, distante de E 89 kilómetros, una hora ántes que T′.**

Parten á un mismo tiempo de esta estacion, cada uno con la velocidad y direccion que traia, esto es, T hácia E′ y T′ hácia E, y llegan á la misma hora á estas estaciones. ¿Cuántos kilómetros por hora anda cada uno?

T′ ——— T

E E″ E′

Llamando x los kilómetros que T recorre por hora, é y los que recorre T′; el tiempo empleado por T en llegar á la estacion intermedia será $\frac{89}{x}$ y el empleado por T′ en llegar á la misma $\frac{200-89}{y}=\frac{111}{y}$; como este emplea una hora más que el primero, tendrémos que

$$1+\frac{89}{x}=\frac{111}{y}.$$

Por otra parte, empleando despues T en recorrer 111 kilómetros el mismo tiempo que T′ en 89, se tiene tambien $\frac{89}{y}=\frac{111}{x}$.

Preparadas estas ecuaciones, resulta el sistema

$$xy+89y-111x=0.$$
$$111y-89x=0.$$

Resolviendo esta última ecuacion con relacion á y, se tiene

$$y=\frac{89x}{111};$$

y sustituyendo este valor de y en la primera ecuacion del sistema, se convierte en $89x^2-4400x=0$.

De donde $x'=0$, $x''=\frac{4400}{89}=49,3.....$;

y sustituyendo estos valores en la ecuacion resuelta con relacion á y, resulta $y'=0$, $y''=\frac{89\times 49,3....}{111}=39,6...$

Como el sistema de valores $x=0$ é $y=0$ no satisface las condiciones del problema, se halla por fin que T recorre 49,3..... kilómetros por hora y T' 39,6....

172. 2.° **Baco encontró á Sileno dormido junto á un tonel lleno de vino, aprovechó tan buena ocasion y se bebió la mitad del líquido: despertó Sileno y se bebió la otra mitad, empleando los dos 20 horas; si hubiesen bebido á un tiempo emplearian solo $7\frac{1}{2}$ horas. ¿En qué tiempo hubiera agotado cada uno el tonel?**

Llámese x el tiempo que tardaria Baco, y el que hubiera tardado Sileno y: el tiempo que emplearia Baco en beberse todo el líquido del tonel seria $\frac{x}{2}$, y Sileno $\frac{y}{2}$; como estos dos tiempos componen 20 horas, resulta

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=20.$$

Por otra parte, si Baco tarda x horas en beberse todo el líquido del tonel, en una hora beberá $\frac{1}{x}$ del mismo, en dos $\frac{2}{x}$, en siete horas y media se beberá $\frac{7,5}{x}$ del tonel.

Por igual razon Sileno se beberá en igual tiempo $\frac{7,5}{y}$ del mismo; y como entre los dos agotan el tonel, cuya capacidad podemos suponer representada por 1, tendrémos $\frac{7,5}{x}+\frac{7,5}{y}=1$.

Preparadas las dos ecuaciones obtenidas, forman el siguiente sistema

$$x+y-40=0,$$
$$10xy-75x-75y=0.$$

Resolviendo la primera de estas ecuaciones con relacion á x, se tiene

$$x=40-y:$$

y sustituyendo este valor en la segunda, resulta, despues de preparada

$$y^2-40y+300=0;$$

de donde $y=\frac{40\pm\sqrt{40^2-4\times 300}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{400}}{2}=\frac{40\pm 20}{2}$,

y por consiguiente

$$y'=\frac{40+20}{2}=30, \qquad y''=\frac{40-20}{2}=10.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion resuelta con relacion á x, se tiene

$$x'=40-30=10, \qquad x''=40-10=30.$$

Luego Sileno tardaria en agotar el tonel 30 horas ó 10,
y Baco 10 ó 30.

OBSERVACION. Estos dos resultados se interpretan como se ha dicho (**165**, obs.).

173. 3.° **Hallar dos números cuyo producto sea igual á 15 y á 34 la suma de sus cuadrados.**

Sean x é y dichos números, y se tendrá

$$xy=15, \qquad x^2+y^2=34.$$

Despejando la y en la primera de estas ecuaciones, se tiene

$$y=\frac{15}{x},$$

y sustituyendo este valor en la segunda, resulta

$$x^2+\left(\frac{15}{x}\right)^2=34,$$

cuya ecuacion preparada se convierte en

$$x^4-34x^2+225=0.$$

Resolviendo esta ecuacion por la fórmula general de las bicuadradas (**163**), se tiene

$$x=\pm\sqrt{\frac{34\pm\sqrt{34^2-4\times225}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{34\pm\sqrt{256}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{34\pm16}{2}},$$

y separando las raices, se hallará

$$x'=\sqrt{\frac{34+16}{2}}=\sqrt{25}=5, \qquad x'''=-\sqrt{\frac{34+16}{2}}=-\sqrt{25}=-5,$$

$$x''=\sqrt{\frac{34-16}{2}}=\sqrt{9}=3, \qquad x''''=-\sqrt{\frac{34-16}{2}}=-\sqrt{9}=-3,$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de x en la ecuacion resuelta con relacion á y, resultan para esta otros cuatro valores

$$y'=3,\ y''=5,\ y'''=-3 \text{ é } y''''=-5.$$

El problema, pues, tiene las cuatro soluciones siguientes:

1.ª $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ 2.ª $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$ 3.ª $\begin{cases}x=-5\\y=-3\end{cases}$ 4.ª $\begin{cases}x=-3\\y=-5.\end{cases}$

CAPITULO XII.

Razones y proporciones.

ARTICULO PRIMERO.

Razones.

174. *Llámase* RAZON *de dos cantidades el cociente que resulta de dividir la una por la otra.*

La cantidad que se divide se llama ANTECEDENTE, *y aquella por quien se divide* CONSECUENTE. El antecedente y consecuente juntos, reciben el nombre de *términos de la razon.*

Es, pues, la *razon* una division indicada ó un quebrado, en que el *antecedente* es el dividendo ó numerador, y el *consecuente* el divisor ó denominador.

Segun esto, la razon entre dos cantidades A y B debe escribirse, y se escribe, de una de estas dos maneras:

$$A : B \text{ ó } \frac{A}{B},$$

y se lee A *es á* B.

COROLARIO. *Una razon no varía multiplicando ó dividiendo sus dos términos por una misma cantidad.*

175. *Se llama* RAZON COMPUESTA *la que resulta de multiplicar dos ó más razones entre sí.*

$\frac{A \times C \times E}{B \times D \times F}$ es una razon compuesta de $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ y $\frac{E}{F}$.

COROLARIO. *Una razon compuesta no varía sustituyendo en lugar de una razon componente otra igual.*

UNED

Si $\frac{E}{F}=\frac{M}{N}$ en la razon compuesta anterior, evidentemente se tiene

$$\frac{A\times C}{B\times D}\times\frac{E}{F}=\frac{A\times C}{B\times D}\times\frac{M}{N} \quad \text{ó} \quad \frac{A\times B\times E}{B\times D\times F}=\frac{A\times C\times M}{B\times D\times N}.$$

ARTICULO II.

Proporciones.

176. *Llámase* PROPORCION *la igualdad de dos razones.*

Una proporcion se escribe de una de estas dos maneras:

$$A : B :: C : D \text{ ó } \frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

y se lee A *es á* B *como* C *es á* D.

Se llaman *términos* de una proporcion las cuatro cantidades que la forman, de los que el primero y cuarto reciben el nombre de *extremos*, y el segundo y tercero el de *medios*.

Cuando los términos medios de una proporcion son desiguales la proporcion se llama *discreta*, cuando son iguales se llama *continua*.

La proporcion $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ es discreta, y $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$ continua.

ARTICULO III.

Determinacion de un término cualquiera en una proporcion, conocidos los restantes.

177. La resolucion de este problema general se funda en el siguiente

TEOREMA. *El producto de los términos extremos es igual al de los medios en la proporcion discreta, y al cuadrado del término medio en la continua.*

Sean las proporciones $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ y $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$;

quitando los denominadores se convierten (**67**) respectivamente en $AD=BC$ y $AC=B^2$, cuyas igualdades demuestran el teorema.

178. El problema general, que nos proponemos resolver, se divide en dos para mayor sencillez: 1.° *hallar un término extremo, conocidos los restantes:* 2.° *hallar un término medio conocidos los demás.*

179. 1.° **Sea determinar X en la proporcion**

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{X}.$$

Se tiene (**177**) $AX=BC$; de donde $X=\frac{BC}{A}$.

Luego *para hallar un término extremo en la proporcion discreta, se multiplican los medios y el producto se parte por el otro extremo.*

Si la proporcion fuese $\frac{A}{B}=\frac{B}{X}$, se tendria (**177**)

$AX=B^2$; de donde $X=\frac{B^2}{A}$.

Luego *para hallar un término extremo en la proporcion contínua, se eleva al cuadrado el término medio, y este cuadrado se divide por el extremo conocido.*

180. 2.° **Sea determinar X en la proporcion**

$$\frac{A}{B}=\frac{X}{C}.$$

El teorema citado nos da $AC=BX$; de donde $X=\frac{AC}{B}$.

Luego *para hallar un término medio en la proporcion discreta se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.*

Si la proporcion fuese $\frac{A}{X}=\frac{X}{B}$, se tendria tambien

$X^2=AB$; de donde $X=\sqrt{AB}$.

Luego *para hallar un término medio en la proporcion*

UNED

continua se extrae la raiz cuadrada del producto de los extremos.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{3}{8}=\frac{6}{x}$, $x=\frac{8\times 6}{3}=16$.

2.° $\frac{x}{8}=\frac{8}{3}$, $x=\frac{8}{3}=21\frac{1}{3}$.

3.° $\frac{\frac{3}{5}}{x}=\frac{2}{10}$, $x=\frac{\frac{3}{5}\times 10}{2}=3$.

4.° $\frac{2}{x}=\frac{x}{8}$, $x=\sqrt{2\times 8}=4$.

ARTICULO IV.

Otras propiedades de las proporciones.

181. Teorema 1.° (recíproco del **177**). *Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, se puede formar con ellas una proporcion, poniendo por extremos las que hacen un producto y por medios las que forman el otro.*

Si AD=BC, se tendrá $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

En efecto, dividiendo por BD los dos miembros de la igualdad de la hipótesis, se tiene esta otra $\frac{AD}{BD}=\frac{BC}{BD}$, y simplificando

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

cuya proporcion demuestra el teorema.

Corolario general. *A toda proporcion se le pueden dar las trasformaciones que se quiera, con tal que el producto de los extremos permanezca igual al de los medios.*

182. De este corolario y de la naturaleza misma de la proporcion se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *Una proporcion no varia multiplicando ó dividiendo un extremo y un medio por una misma cantidad.*

2.ª *Tampoco varia una proporcion mudando de lugar los medios ó los extremos; poniendo los medios por extremos y estos por medios, ó cambiando de lugar las razones.*

Observacion. Cuando se cambian de lugar los medios de una proporcion, se dice que se *alterna*; cuando se ponen los medios por extremos y estos por medios, se dice que se *invierte*; y cuando se pone la primera razon por segunda y esta por primera, se dice que se *permuta*.

Siendo $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ una proporcion,

$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ es la misma *alternada*,

$\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$ es la primera *invertida*,

y $\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$ es tambien la primera *permutada*.

3.ª *Multiplicando ó dividiendo ordenadamente* (esto es, antecedente por antecedente y consecuente por consecuente en cada una de las razones) *dos ó más proporciones, los productos ó cocientes forman tambien proporcion.*

Observacion. De la primera parte de esta consecuencia se deduce la manera de *eliminar* con facilidad una incógnita entre dos proporciones, dos incógnitas entre tres proporciones, etc.

EJEMPLOS.

1.° Sea eliminar x entre las dos proporciones

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{x} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y},$$

multiplicándolas se tiene

$$\frac{A\times a}{B\times b}=\frac{C\times x}{x\times y};$$

y simplificando esta proporcion resulta

$$\frac{A\times a}{B\times b}=\frac{C}{y}.$$

2.° Sea eliminar x é y entre las proporciones

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{x},\quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y},\quad \frac{m}{n}=\frac{z}{y}.$$

UNED

Para que pueda eliminarse la y, es preciso que en una de las proporciones componentes esté en el numerador y en otra en el denominador, lo que se consigue invirtiendo la última proporcion. En tal caso las proporciones dadas serán las siguientes:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{x},\quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y},\quad \frac{n}{m}=\frac{y}{z},$$

que multiplicadas dan

$$\frac{Aan}{Bbm}=\frac{Cxy}{xyz},$$

y simplificando ésta resulta

$$\frac{Aan}{Bbm}=\frac{C}{z}.$$

4.ª *Una proporcion no varía elevando todos sus términos á una misma potencia, ó extrayendo de ellos una raíz de igual grado.*

Así, de $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se deduce

$$\frac{A^n}{B^n}=\frac{C^n}{D^n},\quad \text{y tambien}\quad \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\frac{\sqrt[n]{C}}{\sqrt[n]{D}}.$$

183. Teorema 2.° *Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos razones se puede formar proporcion.*

De $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ y $\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}$ se deduce evidentemente $\frac{C}{D}=\frac{P}{Q}$.

Corolario. *Si dos proporciones tienen iguales antecedentes ó consecuentes, con los consecuentes ó antecedentes distintos se puede formar proporcion:* pero de modo que los antecedentes ó consecuentes de cada una de las proporciones formen siempre un extremo y un medio de la nueva proporcion.

Porque alternadas las proporciones dadas tienen una razon comun. Así, las proporciones

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ y $\frac{A}{P}=\frac{C}{Q}$ alternadas dan $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ y $\frac{A}{C}=\frac{P}{Q}$;

de donde segun el teorema, resulta esta otra

$$\frac{B}{D}=\frac{P}{Q}.$$

Del mismo modo, las proporciones

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ y } \frac{P}{B}=\frac{Q}{D} \text{ alternadas dan } \frac{A}{C}=\frac{B}{D} \text{ y } \frac{P}{Q}=\frac{B}{D},$$

de donde resulta tambien

$$\frac{A}{C}=\frac{P}{Q}.$$

184. Teorema 3.° *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la primera razon es al consecuente ó antecedente de la misma, como la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razon es al consecuente ó antecedente de la misma.*

Es decir, que de la proporcion

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ se deduce } \frac{A\pm B}{B}=\frac{C\pm D}{D} \text{ y } \frac{A\pm B}{A}=\frac{C\pm D}{C}.$$

Sumando ± 1 con las razones de la proporcion dada, se tiene

$$\frac{A}{B}\pm 1=\frac{C}{D}\pm 1,$$

y reduciendo la expresion mista á quebrado, resulta

$$\frac{A\pm B}{B}=\frac{C\pm D}{D},$$

cuya proporcion comparada con la primitiva, da tambien (**183**, corol.)

$$\frac{A\pm B}{A}=\frac{C\pm D}{C}.$$

Corolario 1.° *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la primera razon es á la de antecedente y consecuente de la segunda, como el primer consecuente al segundo, ó como el primer antecedente al segundo.*

Alternando las dos proporciones resultantes del teorema, se halla

$$\frac{A\pm B}{C\pm D}=\frac{B}{D} \text{ y } \frac{A\pm B}{C\pm D}=\frac{A}{C}.$$

UNED

Corolario 2.° *En toda proporcion la suma de antecedente y consecuente de la primera razon es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razon es tambien á su diferencia.*

De $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se deduce (corol. 1.°) $\frac{A+B}{C+D}=\frac{B}{D}$, $\frac{A-B}{C-D}=\frac{B}{D}$;

de donde $\frac{A+B}{C+D}=\frac{A-B}{C-D}$ ó (**182**, 2.ª) $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$.

Corolario 3.° *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Alternando la proporcion $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se convierte en $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$,

la que da (corol. 1.°) $\frac{A\pm C}{B\pm D}=\frac{C}{D}$ y $\frac{A\pm C}{B\pm D}=\frac{A}{B}$.

Corolario 4.° *En toda proporcion la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia.*

De la proporcion $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se deduce (corol. 3.°)

$$\frac{A+C}{B+D}=\frac{A}{B} \text{ y } \frac{A-C}{B-D}=\frac{A}{B}.$$

de donde $\frac{A+C}{B+D}=\frac{A-C}{B-D}$ ó $\frac{A+C}{A-C}=\frac{B+D}{B-D}$.

Observacion. Los corolarios 1.° y 3.° anteriores suministran medio de trasformar una proporcion que tiene dos incógnitas en otra que contenga una sola, con tal que una incógnita sea extremo y la otra sea medio, y que se conozca la suma ó diferencia de dichas incógnitas.

Así, de $\frac{A}{B}=\frac{X}{Z}$ sabiendo que $X+Z=S$, se deduce (corolario 1.°)

$$\frac{A+B}{X+Z}=\frac{B}{Z} \text{ ó } \frac{A+B}{S}=\frac{B}{Z}.$$

De $\frac{X}{M}=\frac{Z}{N}$, sabiendo que $X-Z=D$, se deduce (corol. 3.°)

$$\frac{X-Z}{M-N}=\frac{X}{M} \text{ ó } \frac{D}{M-N}=\frac{X}{M}.$$

ARTICULO V.

Série de razones iguales.

185. *Se llama* SÉRIE DE RAZONES IGUALES *un conjunto de razones iguales todas entre sí.*

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{G}{H}=\frac{\text{etc.}}{\text{etc.}}$$

forman una série de razones iguales.

186. TEOREMA. *En toda série de razones iguales, la suma de un número cualquiera de antecedentes, es á la de sus consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Tomando de la série anterior las dos primeras razones, se tiene la proporcion

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D};$$

donde (**184**, corol. 3.°) se verifica

$$\frac{A+C}{B+D}=\frac{C}{D},$$

ó, poniendo en vez de la razon $\frac{C}{D}$ su igual $\frac{E}{F}$,

$$\frac{A+C}{B+D}=\frac{E}{F}.$$

Haciendo aplicacion del mismo corol. 3.° á esta proporcion, resulta

$$\frac{A+C+E}{B+D+F}=\frac{E}{F}.$$

Si en esta proporcion se sustituye en vez de la razon $\frac{E}{F}$ otra igual $\frac{G}{H}$, se tiene

$$\frac{A+C+E}{B+D+F}=\frac{G}{H}.$$

UNED

Aplicando á esta última proporcion el repetido corol. 3.°, resulta al fin

$$\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}=\frac{G}{H},$$

cuya proporcion, comparada con la série precedente, demuestra el teorema.

Corolario. *Si un antecedente ó consecuente es igual á la suma de los demás, el consecuente ó antecedente correspondiente será tambien igual á la suma de los otros.*

CAPITULO XIII.

Problemas que se resuelven por medio de proporciones.

187. La resolucion de estos problemas consta de dos partes: 1.ª planteo: 2.ª resolucion de la proporcion ó proporciones resultantes.

Plantear estos problemas es deducir de las condiciones que encierran tantas proporciones como incógnitas.

Resolver una ó varias proporciones es hallar el término ó términos desconocidos.

ARTICULO PRIMERO.

Problemas que se resuelven por medio de una proporcion.

188. La forma que toman los problemas, de que ahora se trata, reducidos á su más simple expresion, es una de las siguientes:

1.° { Si 6 arrobas costaron 72 reales,
9 arrobas costarán x reales.

2.° { Si 8 hombres tardan 20 dias en hacer una obra, 12 hombres tardarán x dias en hacer la misma.

Se observará que cada uno de estos problemas consta de cuatro cantidadas, *homogéneas de dos en dos*. En el 1.° hay 6

arrobas y 9 arrobas, 72 reales y x reales; y en el 2.° hay 8 hombres y 12 hombres, 20 dias y x dias.

A fin de distinguirlas, llamarémos *principales* las dos homogéneas conocidas, y las otras dos, de las que una es incógnita, se llamarán *relativas*.

Así, en el 1.° de dichos problemas, 6 arrobas y 9 arrobas serán las principales, 72 reales será la relativa á la primera, ó sea á 6 arrobas, y x reales será la relativa á la segunda principal, ó sea á 9 arrobas. De la misma manera 8 hombres y 12 hombres son las cantidades principales del segundo problema, 20 dias la relativa á la primera, y x dias á la segunda.

189. En el primero de los indicados problemas se notará que duplo, triplo, etc. número de arrobas costará tambien duplo, triplo, etc. número de reales; de manera que tantas veces como el número 9 (arrobas) esté contenido en 6 (arrobas), otras tantas x (reales) estará contenido en 72 (reales); de donde resulta

$$\frac{6}{9}=\frac{72}{x}.$$

cuya proporcion generalizada da la siguiente:

Una de las cantidades principales es á la otra, como la relativa á la primera es á la relativa á la segunda.

En este caso se dice que *las cantidades relativas estan en* RAZON DIRECTA *de las principales*, y recíprocamente, ó que las primeras son *directamente proporcionales ó* simplemente *proporcionales* á las segundas.

OBSERVACION. *Se conocerá si las cantidades relativas estan en razon directa de las principales, cuando duplicando una de estas su relativa queda duplicada.*

190. En el segundo de los anteriores problemas, duplo, triplo, etc. número de hombres tardará la mitad, tercera, etc. parte de dias en hacer la misma obra; de modo que tantas veces como el número 12 (hombres) *contenga* á 8 (hombres), otras tantas veces el número x (dias) *estará contenido* en 20 (dias), es decir que se tiene

$$\frac{12}{8}=\frac{20}{x},$$

cuya proporcion generalizada da la siguiente:

Una de las cantidades principales es á la otra, como la relativa á la segunda es á la relativa á la primera.

En este caso se dice que *las cantidades relativas estan en* RAZON INVERSA *de las principales*, y recíprocamente; ó que las primeras son *inversamente proporcionales* á las segundas.

OBSERVACION. *Se conocerá si las cantidades relativas estan en razon inversa de las principales, cuando duplicando una de estas su relativa queda dividida por dos.*

191. De lo dicho se infiere que

Para plantear los problemas que se resuelven por medio de una proporcion se averigua (**189** obs., y **190** obs.) si las cantidades que comprende estan en razon directa ó en razon inversa; en el primer caso se escribe la proporcion del número **189**, y en el segundo la del **190.**

OBSERVACION. Podrá suceder que duplicando una de las cantidades principales, su relativa no quede duplicada ni partida por dos, en tal caso dichas cantidades no son directa ni inversamente proporcionales, y por lo tanto el problema no puede resolverse por una proporcion; así que en este problema,

En agotar un pozo de 10 metros de profundidad se gastaron 300 reales, si tuviese 46 metros de profundidad, se gastarian x reales,

es evidente que las cantidades no estan en razon directa ni inversa, aunque el diámetro y demás condiciones sean iguales; porque si teniendo el pozo 10 metros se necesitan 300 reales, teniendo 20 se necesitará más del duplo de dicha cantidad, una vez que la dificultad de la extraccion del agua es mayor á medida que la profundidad aumenta (*).

(*) Con estas cuatro cantidades A y a, B y b, si son homogéneas dos á dos, esto es, A y a, B y b, se pueden formar solamente estas dos proporciones distintas

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b},\ \frac{A}{a}=\frac{b}{B}.$$

Si las cantidades fuesen abstractas, ó todas homogéneas, se podria formar además esta otra

$$\frac{A}{B}=\frac{b}{a}.$$

No pueden formarse más proporciones diversas con cuatro cantidades, cualesquiera

EJEMPLOS.

192. **1.° Se sabe que 100 varas equivalen próximamente á 83,59 metros, y se desea averiguar los metros que componen 751 varas.**

Este problema, bajo una forma más sencilla, es el siguiente:

100 varas equivalen á 83,59 metros,
751 varas equivaldrán á x metros.

Ahora, pues, es evidente que doble número de varas compondrá doble número de metros, y por lo tanto que las cuatro cantidades expresadas estan en razon directa (**189**, obs.). Luego el problema quedará planteado en la siguiente proporcion (**189**)

$$\frac{100}{751}=\frac{83,59}{x};\text{ de donde (179) } x=\frac{751\times 83,59}{100}=627,7609 \text{ metros.}$$

2.° Una locomotora, cuya velocidad es de 40 kilómetros por hora, recorre en 12 horas una línea, ¿cuántas horas tardaria en recorrer la misma distancia si la velocidad fuese de 48 kilómetros?

Puede presentarse más sencillamente este problema de la manera siguiente:

Con la velocidad de 40 kilómetros se tarda 12 horas en recorrer una línea; con la de 48 kilómetros se tarda x horas en recorrer la misma.

Aquí se observará que si con la velocidad 40 se tarda 12 horas en recorrer una distancia, con dupla velocidad se tar-

---

que sean; porque con las cuatro cantidades A, a, B, b, no se pueden formar más que los seis productos binarios Aa, AB, Ab, aB, ab, Bb, y con estos seis productos binarios no se pueden formar más que tres igualdades, donde entren las cuatro letras distintas A, a, B, b, que son

$$Aa=Bb,\quad AB=ab,\quad Ab=aB;$$

de donde resultan las tres proporciones únicas distintas (**181**) $\frac{A}{B}=\frac{b}{a}$ recíprocamente proporcionales, $\frac{A}{a}=\frac{b}{B}$ inversamente proporcionales, $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ directamente proporcionales.

UNED

dará la mitad de tiempo; estan, pues, las cantidades precedentes en razon inversa (**190**, obs.), y el problema quedará planteado en la proporcion siguiente (**190**)

$\frac{40}{48}=\frac{x}{12}$; de donde (**180**) $x=\frac{40\times12}{48}=10$ horas.

3.° Para prendas de 160 soldados se necesitaron 360 metros de paño, ¿cuántos metros se necesitarán para surtir de las mismas prendas á 831?

160 soldados necesitaron 360 metros,
831 soldados necesitarán x metros;

de donde $\frac{160}{831}=\frac{360}{x}$, y $x=\frac{831\times360}{160}=1869{,}75$ metros.

4.° En un buque hay víveres para 40 dias, temiéndose que la navegacion se prolongue hasta 64 dias, ¿qué parte de racion debe darse á cada individuo para que los víveres duren todo ese tiempo?

Por 40 dias hay 1 racion para cada individuo,
Por 64 dias habrá x racion para cada uno;

de donde (**190**) $\frac{64}{40}=\frac{1}{x}$; y $x=\frac{40\times1}{64}=\frac{5}{8}$ de racion.

5.° El tres por ciento consolidado se cotiza á 31,70, ¿cuánto producirán 100 unidades de moneda empleadas en este papel?

31,70 producen 3,
100 producirán x;

de donde (**189**) $\frac{31{,}70}{100}=\frac{3}{x}$, y $x=\frac{3\times100}{31{,}70}=9{,}464$ (*).

ARTICULO II.

Problemas que se resuelven por dos ó más proporciones.

133. Para resolver estos problemas se forman tantas proporciones distintas como sean necesarias para atender á todas las circunstancias de cada uno: entre las proporciones formadas se eliminan (**182**, 3.ª obs.) todas sus incógnitas, excepto la del problema; y por último, se resuelve la proporcion resultante. Todo segun puede observarse en los siguientes

---

(*) Todos estos problemas y los siguientes pueden resolverse por el *método de reduccion á la unidad*. V. *Principios de Aritmética*, núm. **110**.

EJEMPLOS.

1.° 10 operarios hicieron 240 varas de pared en 4 dias, ¿cuántas varas harán en 5 dias 9 operarios sujetos á iguales condiciones?

10 operarios en 4 dias hicieron 240 varas,
9 operarios en 5 dias harán x varas.

Si prescindimos del número de dias que los operarios emplean, quedará el problema reducido al siguiente:

10 operarios hicieron 240 varas,
9 operarios harán z varas;

de donde (**189**) $$\frac{10}{9}=\frac{240}{z}.$$

Atendiendo ahora al número de dias y prescindiendo del de operarios (circunstancia á que ya se ha atendido) el problema se reduce al siguiente:

En 4 dias se hicieron z varas,
en 5 dias se harán x varas;

de donde (**189**) $$\frac{4}{5}=\frac{z}{x}.$$

Eliminando la z (**182**, 3.ª obs.), entre las proporciones

$$\frac{10}{9}=\frac{240}{z} \quad \text{y} \quad \frac{4}{5}=\frac{z}{x},$$

se tiene $\frac{4\times10}{9\times5}=\frac{240}{x}$; de donde $x=\frac{9\times5\times240}{4\times10}=270$ varas.

2.° Se uniformaron 1800 soldados con 50 piezas de paño de 90 metros de largo y 12 decímetros de ancho, ¿qué piezas se necesitarán para uniformar el mismo número de soldados, teniendo aquellas 60 metros de largo y 14 decímetros de ancho?

Teniendo 90 metros de largo y 12 decímetros de ancho fueron necesarias 50 piezas; si tuviesen 60 metros de largo y 14 decímetros de ancho, se necesitarian x piezas. Atendiendo solo al largo de las piezas y llamando z el número de estas, en este caso se tendrá (**190**)

$$\frac{90}{60}=\frac{z}{50}.$$

UNED

Prescindiendo del largo y atendiendo al ancho se tiene (**190**)

$$\frac{12}{14}=\frac{x}{z}.$$

Eliminando la z entre estas proporciones (**182**, 3.ª obs.), resulta

$\frac{90\times12}{60\times14}=\frac{x}{50}$; de donde $x=\frac{90\times12\times50}{60\times14}=64\frac{2}{7}$ piezas.

CAPITULO XIV.

Otros problemas que se resuelven por medio de una ó más proporciones.

ARTICULO PRIMERO.

Interés simple.

194. *Se llama* INTERÉS *el rédito que produce un capital prestado con ciertas condiciones.*

El interés es *simple y compuesto.*

INTERÉS SIMPLE *es el producido solo por el capital, y* COMPUESTO *el producido por el capital é intereses devengados y que se van acumulando al capital primitivo.*

El interés que producen 100 reales en la unidad de tiempo, que generalmente es un año, se llama *tanto* por ciento.

En los problemas de interés simple *se supone que este es proporcional al capital y al tiempo que dura el empréstito.*

195. PROBLEMA. **¿Qué interés produce el capital c en el tiempo t, siendo i el tanto por ciento?**

Este problema equivale al siguiente:

100 unidades en 1 año producen i,

c unidades en t años producirán y.

De donde (**193**) $\frac{100}{c}=\frac{i}{z}$, $\frac{1}{t}=\frac{z}{y}$, y por consiguiente

$\frac{100}{ct}=\frac{i}{y}$; y por último $y=\frac{cit}{100}$ [1].

Luego *para hallar el interés se multiplica el capital por el tanto por* 100 *y por el tiempo, reducido á años ó á fraccion de año, y el producto se divide por* 100.

UNED

OBSERVACIONES.

196. 1.ª Conocidas tres de las cuatro cantidades, y, c, i, t, que entran en la fórmula anterior, se puede determinar la otra.

Despejando sucesivamente cada una de las tres últimas cantidades, se tienen las otras tres fórmulas

$$c=\frac{100y}{it}\ [2], \qquad i=\frac{100y}{ct}\ [3], \qquad t=\frac{100y}{ci}\ [4].$$

2.ª Si el tiempo fuese igual á un año, lo que sucede con frecuencia, la fórmula general se convierte, haciendo $t=1$, en

$$y=\frac{ci}{100}\ [5];$$

es decir, que en este caso *el interés se determina multiplicando el capital por el tanto por* 100, *y separando las dos cifras de la derecha con una coma.*

EJEMPLOS.

1.° ¿Qué interés producen en un año 6000 pesetas al 5 por 100?

La fórmula [5] nos da

$$y=\frac{6000\times 5}{100}=300 \text{ pesetas.}$$

2.° ¿Qué interés producen 10000 rs. al 6 por 100 en tres meses?

De la fórmula [1] se deduce

$$y=\frac{10000\times 6\times \frac{3}{12}}{100}=\frac{10000\times \frac{3}{2}}{100}=100\times \frac{3}{2}=150 \text{ reales.}$$

3.° ¿Qué capital se necesita para producir en 90 dias 200 escudos al 4 por 100?

La fórmula [2] nos da

$$c=\frac{100\times 200}{4\times \frac{90}{360}}=\frac{20000}{4\times \frac{1}{4}}=20000 \text{ escudos.}$$

UNED

4.° 72000 reales produjeron en 20 dias 220, ¿cuál ha sido el tanto por 100?

De la fórmula [3] se deduce

$$i=\frac{100\times220}{72000\times\frac{20}{360}}=\frac{22000}{72000\times\frac{1}{18}}=\frac{22}{72\times\frac{1}{18}}=\frac{22}{4}=5\frac{1}{2}.$$

5.° ¿En qué tiempo 2000 escudos producen 60 al 5 por 100?

De la fórmula [4] resulta

$$t=\frac{100\times60}{2000\times5}=\frac{6000}{10000}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Resultado: $\frac{3}{5}$ de año, ó sean 7 meses y 6 dias.

ARTICULO II.

Descuento.

197. En una letra ó pagaré, que debe satisfacerse dentro de cierto plazo, se consideran dos valores, el que la letra expresa, y aquel á que se reduce si de presente se quiere hacer efectivo su valor. El primero de estos valores se llama *nominal*, el segundo *actual*, y la diferencia entre los dos *descuento*.

Así, por ejemplo, en una letra de 4000 rs. cuyo plazo vence dentro de 2 meses, el *valor nominal* es 4000; el *valor actual* algo ménos de 4000, puesto que es natural que para satisfacer de presente lo que debe pagarse dentro de un plazo más ó ménos largo, se haga alguna rebaja por razon del anticipo: esta rebaja ó sea la diferencia entre los valores *nominal* y *actual* es el *descuento*.

Segun esto, conocidas dos de estas tres cantidades, valor *nominal*, valor *actual* y *descuento*, por medio de una simple suma ó resta se halla la otra.

198. Problema. **Una letra de c reales vence dentro del tiempo t, ¿cuál será el descuento que debe hacerse para cobrarla de presente, siendo i el tanto por 100 convenido?**

Si 100 reales en un año producen i, en t tiempo produci-

UNED

rán it, luego $100+it$ expresa la cantidad en que se convierten 100 reales con sus intereses en t tiempo; luego por $100+it$ reales que se han de pagar dentro de t tiempo debe descontarse, para ser pagados de presente, el interés que producen 100 reales, esto es, it; luego el problema se reduce al siguiente: por $100+it$ se deben descontar it; por c se descontará d;

de donde $\frac{100+it}{c}=\frac{it}{d}$, y por consiguiente $d=\frac{cit}{100+it}$.

Luego *para hallar el descuento se multiplica el valor nominal de la letra ó pagaré por el tanto por ciento y por el tiempo reducido á años ó fraccion de año, y el producto se divide por* 100 *sumado con el tanto por* 100 *multiplicado por el tiempo.*

Ejemplo. **¿Qué descuento debe hacerse para pagar al contado una letra de 4000 escudos, que vence dentro de 2 meses, siendo 6 el tanto por 100?**

Segun la fórmula general se tendrá

$$d=\frac{4000\times 6\times\frac{2}{12}}{100+6\times\frac{2}{12}}=\frac{4000}{101}=39{,}60 \text{ escudos.}$$

Observacion. Conocidas tres de las cuatro cantidades c, d, i, t, que entran en la fórmula general, se puede determinar la otra y hallar tres fórmulas análogas á las ya obtenidas (**196**, 1.ª).

199. En el comercio se hacen los descuentos determinando el interés que produce el valor nominal de la letra ó pagaré en el tiempo que debe trascurrir hasta su vencimiento; de manera que estos problemas se resuelven en tal caso por la fórmula general (**195**)

$$y=\frac{cit}{100}.$$

Resolviendo el problema precedente por esta fórmula, se tiene

$$y=\frac{4000\times 6\times\frac{2}{12}}{100}=40.$$

Luego el descuento es en este caso 40 escudos.

Observacion. Este método produce, como acaba de verse, mayor des-

UNED

cuento que el anterior, y la razon es óbvia: segun aquel, se descuenta proporcionalmente á la cantidad que se anticipa, que es el valor actual, y segun este, proporcionalmente al valor nominal de la letra ó pagaré; de modo que si bien este segundo método de descontar es más sencillo, no es equitativo, sino que perjudica al tenedor de la letra, una vez que se le cobran intereses por una cantidad mayor de la que se le anticipa.

ARTICULO III.

Partes proporcionales.

200. Problema. **Dividir A en partes proporcionales á las cantidades** a, b, c, **etc.**

Llámense x, x', x'', etc. estas partes, y se tendrá

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{x'}=\frac{c}{x''}=\ldots;$$

de cuya série de razones iguales resulta (**186**)

$$\frac{a+b+c+\ldots}{x+x'+x''+\ldots}=\frac{a}{x}=\frac{b}{x'}=\frac{c}{x''}=\ldots;$$

ó teniendo presente que $x+x'+x''+\ldots=A$,

$$\frac{a+b+c+\ldots}{A}=\frac{a}{x}=\frac{b}{x'}=\frac{c}{x''}=\ldots;\text{ de donde}$$

$$x=\frac{A}{a+b+c+\ldots}\times a, \qquad x'=\frac{A}{a+b+c+\ldots}\times b,$$

$$x''=\frac{A}{a+b+c+\ldots}\times c, \quad \text{etc.}$$

Luego *para hallar una de las partes, se divide la cantidad dada* A *por la suma de las cantidades* a+b+c+... *á que las partes deben ser respectivamente proporcionales, y el cociente se multiplica por la cantidad á que la parte á que se determina ha de ser tambien proporcional.*

EJEMPLOS.

1.° Cuatro albañiles ajustaron una obra en 374

reales: el 1.° trabajó 10 dias, 8 el 2.°, 12 el 3.° y 14 el 4.° ¿Cuánto corresponde á cada uno?

$$\text{Al 1.°}\ \frac{374}{10+8+12+14}\times 10=\frac{374}{44}\times 10=85,$$

$$\text{al 2.°}\ \ldots\ldots\ \frac{374}{44}\times 8=68,$$

$$\text{al 3.°}\ \ldots\ldots\ \frac{374}{44}\times 12=102,$$

$$\text{al 4.°}\ \ldots\ldots\ \frac{374}{44}\times 14=119,$$

$$\text{Total}\ \ldots\ldots\ 374.$$

2.° Una provincia, compuesta de las municipalidades A, B, C, D, E, debe dar el contingente de 140 soldados: teniendo la municipalidad A 325 mozos sorteables, la B 205, la C 188, la D 174, y la E 452, ¿cuántos soldados corresponden á cada una?

$$A=\frac{140}{325+205+188+174+452}\times 325=\frac{140}{1344}\times 325=33{,}8 \text{ ó } 33,$$

$$B=\ldots\ldots\ \frac{140}{1344}\times 205=21{,}3 \text{ ó } 21,$$

$$C=\ldots\ldots\ \frac{140}{1344}\times 188=19{,}5 \text{ ó } 19,$$

$$D=\ldots\ldots\ \frac{140}{1344}\times 174=18{,}1 \text{ ó } 18,$$

$$E=\ldots\ldots\ \frac{140}{1344}\times 452=47{,}1 \text{ ó } 47,$$

$$\text{Suma}\ \ldots\ldots\ 138.$$

Los dos soldados que faltan por razon de las fracciones decimales, que no pueden apreciarse en este caso, se sortean entre las mismas municipalidades.

Las contribuciones se imponen tambien por la fórmula precedente. El Gobierno las reparte entre las diferentes provincias segun la riqueza de cada una; la provincia las divide por municipalidades proporcionalmente á la riqueza de ellas; y las municipalidades las derraman por indivíduos conforme tambien á la riqueza de cada uno.

UNED

ARTICULO IV.

Regla de compañía.

201. *Se llama* REGLA DE COMPAÑÍA *la que enseña á determinar la ganancia ó pérdida correspondiente á cada uno de varios compañeros, proporcionalmente al capital de cada uno, y al tiempo que este capital estuvo en el fondo comun.*

202. La regla de compañía se divide en *simple y compuesta: es simple, cuando los capitales han permanecido un mismo tiempo en el fondo, ó cuando son iguales; y compuesta cuando capitales y tiempo son diferentes.*

203. Segun la definicion dada, las ganancias ó pérdidas en la regla de compañía simple se deben repartir proporcionalmente á los capitales ó á los tiempos por que fueron impuestos.

Luego la regla de compañía simple es un caso particular del problema general del número **200**: y por lo tanto se resuelve por aquella fórmula.

EJEMPLOS.

1.° Tres comerciantes reunieron sus capitales, importando el del 1.° 500 escudos, 460 el del 2.° y 540 el del 3.°: ganaron 300 escudos. ¿Cuánto corresponde á cada uno?

Al 1.° $\frac{300}{500+460+540}\times 500=\frac{300}{1500}\times 500=100$ escudos,

al 2.°. . . . . $\frac{300}{1500}\times 460=92$ id.

al 3.°. . . . . $\frac{300}{1500}\times 540=108$ id.

Comprobacion. 300

2.° Un comerciante empleó 4000 duros en cierta especulacion; pero necesitando mayor cantidad para terminarla, y no pudiendo disponer de ella, interesó á un compañero en el negocio, quien em-

pleó á los 5 meses otros 4000 duros. Se terminó el negocio al año de iniciado, produciendo una ganancia de 1500 duros. ¿Cuánto corresponde á cada uno?

Al 1.º . . . . . $\frac{1500}{12+7}\times 12=\frac{1500}{19}\times 12=947\frac{7}{19}$ duros.

al 2.º . . . . . $\frac{1500}{19}\times 7=552\frac{12}{19}$ id.

Comprobacion. . . . . 1500.

204. La regla de compañía compuesta se funda en el siguiente

Teorema. *Las ganancias ó pérdidas de los socios son proporcionales al capital de cada uno multiplicado por el tiempo.*

En efecto, sean C y C′ los capitales de dos socios, T y T′ los tiempos por que han sido impuestos, G y G′ las ganancias respectivas, y se tendrá

C capital en T tiempo produce G,
C′ capital en T′ tiempo producirá G′;

de donde $\frac{C}{C'}=\frac{G}{x}$, $\frac{T}{T'}=\frac{x}{G'}$ y por consiguiente

$$\frac{CT}{C'T'}=\frac{G}{G'},$$

cuya proporcion demuestra el teorema.

Corolario. Luego *las ganancias ó pérdidas deben repartirse proporcionalmente al capital de cada socio multiplicado por el tiempo respectivo* (por la fórmula general del número **200**).

Ejemplo. Tres comerciantes hicieron compañía: el 1.º puso 6000 rs. por 8 meses, el 2.º 3000 por un año, y el 3.º 11000 por diez meses; perdieron 6500 reales. ¿Qué pérdida debe sufrir cada uno?

UNED

Refiriendo el tiempo á una misma unidad, á meses por ejemplo, corresponderá segun el corolario anterior.

$$\text{Al 1.°. . . . . } \begin{cases} \dfrac{6500}{6000\times8+3000\times12+11000\times10}\times6000\times8= \\ \dfrac{6500}{194000}\times 48000=1608\dfrac{48}{194} \text{ reales.} \end{cases}$$

$$\text{al 2.°. . . . . } \frac{6500}{194000}\times 36000=1206\frac{36}{194} \text{ id.}$$

$$\text{al 3.°. . . . . } \frac{6500}{194000}\times 110000=3685\frac{110}{194} \text{ id.}$$

Comprobacion. . . . . 6500.

ARTICULO V.

Regla de aligacion.

205. *Se llama* REGLA DE ALIGACION *la que tiene por objeto determinar el precio medio de una mezcla, formada de varias cosas diferentes (que no sufren deterioro al mezclarse), conociendo la cantidad de cada una y el precio respectivo: ó determinar las cantidades que deben mezclarse de varios efectos, conociendo el precio medio y el de los efectos que se mezclan.*

Son, pues, dos los problemas que deben resolverse: 1.° *hallar el precio medio:* 2.° *hallar la cantidad que de cada efecto debe entrar en la mezcla.*

206. PROBLEMA 1.° **Se mezclaron A hectólitros de trigo de a reales cada uno, con B hectólitros de á b reales, con C hectólitros de á c reales. ¿Cuál será el precio de la mezcla?**

A hectólitros de a reales importan $A\times a$, B hect. á b rs. $B\times b$, C hect. á c rs. $C\times c$; luego $A+B+C$ hect. valen $A\times a+B\times b+C\times c$; luego un hectólitro valdrá

$$\frac{A\times a+B\times b+C\times c}{A+B+C}.$$

Luego *para determinar el precio medio se hallan los dife-*

rentes valores de las cantidades mezcladas, y la suma de estos se divide por la suma de las medidas.

Ejemplo. **Se mezclaron 50 kilógramos de arroz de á 2 reales kilógramo, con 80 de 1,5 con 70 de á 3 reales. ¿Cuál será el precio medio de la mezcla?**

$$\text{Precio medio} = \frac{50\times 2+80\times 1{,}5+70\times 3}{50+80+70} = \frac{430}{200} = 2{,}15 \text{ reales.}$$

Problema 2.° **Se ha de mezclar té de a reales kilógramo, con té de $a+g+p$ reales. ¿Cuántos kilógramos se tomarán de cada clase para que el precio medio sea $a+g$ reales?**

Llamando x el número de kilógramos del precio inferior, y z el de kilógramos del precio superior, cada kilógramo de a reales produce una ganancia de $a+g-a=g$: cada kil. de $a+g+p$ reales una pérdida de $a+g+p-(a+g)=p$: luego x kilógramos del precio inferior producirán la ganancia gx, y z del superior una pérdida expresada por pz.

Mas como la mezcla debe verificarse sin perder ni ganar, segun implícitamente se deduce del problema, la pérdida debe ser igual á la ganancia, y por consiguiente $gx=pz$; de donde (**181**) $\frac{g}{p}=\frac{z}{x}$.

Luego *las cantidades que deben mezclarse de cada especie, estan en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.*

207. De donde se deduce que

Para hallar la razon en que deben mezclarse dos efectos de precio distinto, cuyo precio medio sea dado, se halla la diferencia entre los precios medio é inferior, y este número representa las unidades que han de mezclarse del efecto de precio superior: se halla la diferencia entre este precio y el medio, y el número hallado son las unidades que han de mezclarse del precio inferior.

EJEMPLOS.

1.° **¿En qué razon se ha de mezclar trigo de á 109 reales hectólitro con trigo de á 90 reales, para que el precio medio sea 97 reales?**

Del precio inferior se mezclarán $109 - 97 = 12$ hectólitros, y del superior $97 - 90 = 7$.

La operacion se dispone así:

$$97 \begin{cases} 109... & 7, \\ 90... & 12. \end{cases}$$

Si fuesen más de dos los efectos que deben mezclarse, se combina cada uno de precio inferior con otro de precio superior, y si no hubiese tantos de este precio como de aquel ó al contrario, se combina uno de los primeros con dos ó más de los segundos ó viceversa, como se ve en los ejemplos siguientes.

2.° ¿Cuántos hectólitros de vino de á 24, 20, 16 y 15 escudos se han de mezclar, para que el precio de la mezcla sea 19 escudos?

$$19 \begin{cases} 24.... & 4, \\ 20.... & 3, \\ 16.... & 1, \\ 15.... & 5. \end{cases}$$

3.° ¿Cuántos kilógramos de pólvora de á 18, 20 y 24 reales se han de mezclar para vender la mezcla á $21\frac{1}{2}$ reales?

$$21\frac{1}{2} \begin{cases} 24.... & 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}, \\ 20.... & 2\frac{1}{2}, \\ 18.... & 2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observacion. El 2.° problema, de los que comprende la regla de aligacion, es *indeterminado*, puesto que pueden ser satisfechas las condiciones que encierra por todos los números que estén en la misma razon que los hallados; así, en el ejemplo 1.° los números 14 y 24, 21 y 36, ..., $3\frac{1}{2}$ y 6, $1\frac{3}{4}$ y 3, etc. etc., que estan en la misma razon que los 7 y 12 hallados, son tambien soluciones de dicho ejemplo.

Este problema puede hacerse *determinado* agregando una condicion más, como por ejemplo, que la suma de las cantida-

des mezcladas sea un número dado, que de uno de los efectos que se mezclen éntre una cantidad determinada, que la diferencia entre dos de las cantidades de los efectos que se mezclan sea tambien conocida, etc.

ARTICULO VI.

Regla conjunta.

208. *Se llama* REGLA CONJUNTA *la que enseña á determinar la relacion que existe entre dos cantidades, por medio de la relacion que estas tienen con otras cantidades intermedias.*

Los problemas que esta regla comprende se pueden resolver por dos ó más proporciones, como se ha visto (**193**); pero se resuelven más fácilmente fundándose en el siguiente

209. TEOREMA. *Si se multiplican ordenadamente dos ó más igualdades de tal forma, que la especie del segundo miembro de cada una sea la misma que la del primer miembro de la igualdad siguiente, los productos forman una nueva igualdad, cuyo primer miembro es de la primera especie y el último de la última.*

Es decir que de

$$\begin{aligned} A^{\text{metros}} &= B^{\text{toesas}}, \\ C^{\text{toesas}} &= D^{\text{varas}}, \\ E^{\text{varas}} &= F^{\text{pies}}, \end{aligned}$$

se deduce $ACE^{\text{metros}} = BDF^{\text{pies}}$.

En efecto, multiplicando los dos miembros de la primera igualdad por C y los de la segunda por B, resulta

$$\begin{aligned} AC^{\text{metros}} &= BC^{\text{toesas}}, \\ BC^{\text{toesas}} &= BD^{\text{varas}}; \end{aligned}$$

Como AC^{metros} y BD^{varas} son respectivamente iguales á BC^{toesas}, se tiene $AC^{\text{metros}} = BD^{\text{varas}}$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por E, y los de la tercera por BD, se tendrá

$$\begin{aligned} ACE^{\text{metros}} &= BDE^{\text{varas}}, \\ BDE^{\text{varas}} &= BDF^{\text{pies}}; \end{aligned}$$

UNED

de donde

$$\text{ACE}^{\text{metros}} = \text{BDF}^{\text{pies}},$$

resultado que se podria extender al caso en que las igualdades fuesen 4, 5, etc., y que por lo tanto demuestra el teorema.

210. Problema. **5 arrobas de cierto género costaron 185 reales. ¿Cuánto costarán 156 kilógramos, en el supuesto de que 300 kilógramos componen 26 arrobas?**

Llamando x el valor de los 156 kilógramos, se tendrán las igualdades siguientes.

$$x^{\text{reales}} = 156^{\text{kilógramos}},$$
$$300^{\text{kilógs.}} = 26^{\text{arrobas}},$$
$$5^{\text{arrobas}} = 185^{\text{reales}};$$

luego $x \times 300 \times 5^{\text{reales}} = 156 \times 26 \times 185^{\text{reales}}$;

de donde $x = \frac{156 \times 26 \times 185}{1500} = 500{,}24$ reales.

Luego *para resolver un problema, relativo á la regla conjunta, se escribe* (principiando por la incógnita para mayor sencillez) *una série de igualdades de la forma que expresa el teorema anterior, continuando esta série hasta que el último miembro sea de la misma especie que la incógnita: se multiplican ordenadamente dichas igualdades, y se despeja la incógnita en la ecuacion resultante.*

Ejemplo **¿Cuántos reis contiene un real, en el supuesto de que 19 reales equivalen á 5 francos, 480 francos á 19 libras esterlinas y una libra esterlina á 4608 reis?**

$$x^{\text{reis}} = 1^{\text{real}},$$
$$19^{\text{reales}} = 5^{\text{francos}},$$
$$480^{\text{francos}} = 19^{\text{libras esterlinas}}$$
$$1^{\text{lib. est.}} = 4608^{\text{reis}};$$

de donde $x \times 19 \times 480^{\text{reis}} = 5 \times 19 \times 4608^{\text{reis}}$,

y por consiguiente $x = \frac{5 \times 19 \times 4608}{19 \times 480} = \frac{23040}{480} = 48$ reis.

CAPITULO XV.

Progresiones.

ARTICULO PRIMERO.

Progresiones aritméticas.

211. *Llámase* PROGRESION ARITMÉTICA *ó por diferencia una serie de términos tales, que cada uno es igual al precedente sumado con una cantidad constante, llamada* RAZON *de la progresion.*

Se llama progresion CRECIENTE *aquella en que la razon es positiva y los términos van por lo tanto aumentando; y* DECRECIENTE *en el caso contrario.*

Las progresiones aritméticas se suelen escribir así:

$\div 3.5.7.9.11.13....$, *creciente* cuya razon es $+2$,

$\div 16.12.8.4.0.-4.-8....$, *decreciente* cuya razon es -4;

y se leen: 3 *es aritméticamente á* 5, *es á* 7, *es á* 9, etc.

16 *es aritméticamente á* 12, *es á* 8, *es á* 4, etc.

212. Dos problemas principales se resuelven en las progresiones: 1.° *hallar un término cualquiera conociendo el primero, la razon y el número de términos:* 2.° *hallar la suma de todos los términos, conociendo el primero, el último y el número de términos.*

213. PROBLEMA 1.° **Sea a el primer término, d la razon, y n el número de términos.**

Segun la definicion, la progresion será la siguiente

$$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.\text{etc.};$$

y llamando l el último término, ó sea el que ocupa el lugar n, se tendrá evidentemente

$$l=a+(n-1)d \qquad [1].$$

Luego *un término cualquiera de una progresion aritmética es igual al primero, sumado con el producto de la razon por el número de términos precedentes ó por el total de términos ménos uno.*

UNED

EJEMPLOS.

1.° Hallar el término décimo de la progresion

$$\div 1.7.13.19....$$

Llamando l este término será

$$l=1+(10-1)\times 6=55.$$

2.° Hallar el término octavo de la progresion

$$\div 15.12.9....$$

Llamando l dicho término, se tiene

$$l=15+(8-1)\times -3=-6.$$

COROLARIO. *La suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual á la suma de estos.*

Llamando a y l los extremos, x el término que tiene m términos antes de sí, z el que tiene m términos despues y d la razon, se tendrá

$$x=a+md;$$

considerando z como primer término de una progresion que tiene m términos despues, se tiene tambien

$$l=z+md \text{ ó } z=l-md;$$

y sumando esta última ecuacion con la primera, resulta

$$x+z=a+md+l-md=a+l.$$

Consecuencias de la fórmula $l=a+(n-1)d$.

214. Por medio de la fórmula [1] se puede hallar cualquiera de las cantidades a, d, n, l, conocidas las restantes.

Despejando la a, se tiene

$$a=l-(n-1)d.$$

1.ª Luego *el primer término de una progresion aritmética es igual al último, restando de él el producto del número de términos ménos uno por la razon.*

EJEMPLO. ¿Cuál es el primer término de una progresion aritmética en que el último es 12, 7 el número de términos y 2 la razon?

$$a=12-(7-1)\times 2=0.$$

Despejando la n en dicha fórmula, resulta

$$n=1+\frac{l-a}{d}.$$

2.ª Luego *el número de términos de una progresion aritmética es igual á la unidad, sumada con el cociente que resulta de dividir el último ménos el primero por la razon.*

Ejemplo. ¿Cuántos términos tiene una progresion, cuyo primer término es —5, el último 19 y 4 la razon?

$$n=1+\frac{19+5}{4}=7.$$

Despejando la d en la misma fórmula, se tendrá

$$d=\frac{l-a}{n-1}.$$

3.ª Luego *la razon de una progresion aritmética es igual á la diferencia entre el último término y el primero, partida por el número de términos ménos uno ó por el número de medios más uno.*

Ejemplo. ¿Cuál es la razon de una progresion, cuyo primer término es 20, el último 0, y 6 el número de términos?

$$d=\frac{0-20}{6-1}=-4.$$

215. Esta última consecuencia facilita el modo de *interpolar un número cualquiera de medios aritméticos entre dos números;* pues para esto basta determinar la *razon.*

Así, para interpolar 7 medios entre 8 y 12, se tendrá

$$d=\frac{12-8}{9-1}=\frac{1}{2},$$ y por consiguiente

$$\div 8.8\tfrac{1}{2}.9.9\tfrac{1}{2}.10.10\tfrac{1}{2}.11.11\tfrac{1}{2}.12.$$

Observacion. *Si entre los términos consecutivos de una progresion aritmética se interpola un mismo número de medios, los términos de la progresion y los medios interpolados forman una nueva progresion.*

Porque la diferencia entre dos términos consecutivos en la progresion primitiva es la razon de esta, y por consiguiente igual para dos términos seguidos cualesquiera; luego la fórmula precedente da la misma razon para cada progresion parcial: y como el último término de cada una de estas es el pri-

UNED

mero de la siguiente, las progresiones parciales forman una sola progresion.

Así, interpolando dos medios entre los términos de la progresion $\div 1.4.7.10.13.$ etc.: como

$$d=\frac{4-1}{4-1}=1,\quad d=\frac{7-4}{4-1}=1,\quad \text{etc.};$$

se tiene la nueva progresion

$$\div 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.\ \text{etc.}$$

216. Problema 2.° **Sea hallar la suma de los términos de la progresion** $\div a.b.c.\ldots.h.k.l.$

Llamando s esta suma, se tendrá

$$s=a+b+c+\ldots+h+k+l,$$

ó $$s=l+k+h+\ldots+c+b+a;$$ de donde

$$2s=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\ldots+(c+h)+(b+k)+(a+l):$$

y como cada sumando es igual á $a+l$ (**213**, corol.), y hay tantos sumandos como términos tiene la progresion, llamando n este número resulta

$$2s=(a+l)n;$$

de donde $$s=\frac{(a+l)n}{2} \qquad [2].$$

Luego *la suma de los términos de una progresion aritmética es igual á la mitad del producto de la suma de los extremos por el número de términos.*

Ejemplo. Hallar la suma de los términos de la progresion

$$\div 1.2.3.4.\ldots.98.99.100:$$

$$s=\frac{(1+100)100}{2}=5000.$$

OBSERVACIONES.

217. 1.ª Por medio de la fórmula [2] se puede hallar cualquiera de las cantidades a, l, n, s, conocidas las otras tres.

2.ª Las dos fórmulas de los problemas generales resueltos

$$l=a+(n-1)d, \qquad s=\frac{(a+l)n}{2},$$

contienen las cinco cantidades a, d, l, n, s, de las que cono-

cidas tres, por medio de estas ecuaciones se pueden determinar las restantes.

PROBLEMA.

218. **1.° Un propietario desea hacer un pozo de 20 metros de profundidad; pagando por el primer metro 10 escudos, por el segundo 14 y así sucesivamente aumentando 4 escudos por cada metro, ¿cuánto le costará el último?**

El último metro será el término 20 de una progresion cuyo primer término es 10 y la razon 4; luego será (**213**)

$$l=10+(20-1)4=86 \text{ escudos.}$$

219. **2.° Un cuerpo al caer de cierta altura recorre en el primer segundo 17,58 pies, en el siguiente 52,74, es decir 35,16 más que en el anterior, y aumenta esta misma cantidad en cada uno de los segundos sucesivos. ¿Qué espacio recorrerá en un minuto? (*)**

El espacio que recorre en un minuto estará expresado por la suma de los términos de una progresion aritmética, cuyo primer término es 17,58, la razon 35,16 y 60 el número de términos.

El último término de esta progresion será (**213**)

$$l=17,58+(60-1)\times 35,16=2092,02,$$

y la suma ó espacio recorrido (**216**)

$$s=\frac{(17,58+2092,02)60}{2}=63288 \text{ pies.}$$

ARTICULO II.

Progresiones geométricas.

220. *Llámase* PROGRESION GEOMÉTRICA *ó por cociente una série de términos de los que cada uno es igual al precedente*

(*) Los datos de este problema solo pueden tomarse como exactos para puntos inmediatos á la superficie de la tierra, que tengan aproximadamente la misma latitud y altura sobre el nivel del mar que Madrid, y prescindiendo de la resistencia del aire.

multiplicado por una cantidad constante, llamada RAZON *de la progresion.*

Se llama progresion CRECIENTE *aquella en que la razon vale más que la unidad, y cuyos términos van por lo tanto aumentando; y* DECRECIENTE *en el caso contrario.*

Las progresiones geométricas se escriben de este modo:

$\div\div 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \ldots$, *creciente* cuya razon es 2,

$\div\div 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \ldots$, *decreciente* cuya razon es $\frac{1}{3}$;

y se leen: 4 *es geométricamente á* 8, *es á* 16, *es á* 32, etc.,

18 *es geométricamente á* 6, *es á* 2, *es á* $\frac{2}{3}$, etc.

221. En estas progresiones se resuelven los mismos dos problemas principales que en las aritméticas.

PRÓBLEMA 1.° **Hallar un término cualquiera, dado el primero, la razon y el número de términos.**

Siendo a el primer término, y q la razon, la progresion será

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \text{etc.}$$

Llamando l el último término, ó sea el que ocupa el lugar n, se tendrá evidentemente

$$l = aq^{n-1} \qquad [1].$$

Luego *un término cualquiera de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon, expresada por el número de términos precedentes, ó por el total de términos ménos uno.*

EJEMPLOS.

1.° Hallar el término 8.° en la progresion

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : \text{etc.}$$

$$l = 1 \times 2^7 = 128.$$

2.° Hallar el término 6.° en la progresion

$$\div\div 6 : 2 : \frac{2}{3} : \text{etc.}$$

$$l = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 6 \times \frac{1}{243} = \frac{2}{81}.$$

Consecuencias de la fórmula $l = aq^{n-1}$.

222. Por medio de esta fórmula [1] se puede hallar cual-

quiera de las cantidades a, q, n y l, conocidas las otras tres; aunque por ahora no nos sea posible determinar n en valores de las otras (V. **260**).

Despejando a, se tiene

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}.$$

1.ª Luego *el primer término de una progresion geométrica se halla dividiendo el último por la razon elevada á una potencia expresada por el número de términos ménos uno.*

Ejemplo. Hallar el primer término de una progresion geométrica en que el último es 32, 2 la razon y 4 el número de términos.

$$a = \frac{32}{2^3} = 4.$$

Despejando q^{n-1} en dicha fórmula [1], resulta

$$q^{n-1} = \frac{l}{a};$$

y extrayendo la raíz del grado $n-1$ de los dos miembros de esta ecuacion, se tiene $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.

2.ª Luego *la razon de una progresion geométrica es igual á la raíz del grado* $n-1$ *del cociente, que resulta de dividir el último término por el primero.*

Ejemplo. Hallar la razon de una progresion geométrica cuyo primer término es 2, el último 162, y 5 el número de términos.

$$q = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

223. Esta última consecuencia facilita el modo de *interpolar un número cualquiera de medios geométricos entre dos números;* pues para esto basta determinar la *razon.*

Así, para interpolar 2 medios geométricos entre 5 y 40 se tendrá

$q = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = 2$ y por consiguiente $\therefore 5 : 10 : 20 : 40$,

Observacion. *Si entre los términos consecutivos de una progresion geométrica se interpola un mismo número de medios, los términos de la progresion y los medios interpolados forman una nueva progresion.*

Porque el cociente de un término de la progresion primitiva por el que le precede es la razon de esta, y por consiguiente igual para dos términos consecutivos cualesquiera; luego la fórmula precedente da la misma razon para cada progresion parcial; y como el último término de cada una de estas es el primero de la siguiente, las progresiones parciales forman una sola progresion.

Así, interpolando dos medios entre los términos de la progresion $\div 1 : 27 : 729 : 19683$; como

$$q=\sqrt[3]{\frac{27}{1}}=3,$$

se tiene la nueva progresion

$$\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683.$$

224. Problema 2.° **Hallar la suma de los términos de la progresion** $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^{n-2} : aq^{n-1}$.

Llamando s la suma se tendrá

$$s=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots..+aq^{n-2}+aq^{n-1};$$

multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por q, resulta

$$qs=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots..+aq^{n-1}+aq^n;$$

y restando de esta ecuacion la anterior

$$qs-s=aq^n-a;$$

de donde $$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{aq^{n-1}\times q-a}{q-1},$$

y poniendo en vez de aq^{n-1} su valor (**221**), resulta al fin

$$s=\frac{lq-a}{q-1} \quad [2].$$

Luego *la suma de los términos de una progresion geométrica es igual á la diferencia entre el producto del último término por la razon y el primero, dividida por la razon ménos uno.*

EJEMPLOS.

1.° Hallar la suma de los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es 1, el último 128 y 2 la razon.

$$s = \frac{128 \times 2 - 1}{1} = 255.$$

2.° Hallar la suma de 5 términos de una progresion, cuyo primer término es 18 y $\frac{1}{3}$ la razon.

Valiéndonos de la fórmula $s = \frac{aq^n - a}{q-1}$,

de donde se dedujo la [2], se tiene

$$s = \frac{18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 - 18}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{18 \times \frac{1}{243} - 18}{-\frac{2}{3}} = \frac{18 - \frac{18}{243}}{\frac{2}{3}} = 26\frac{8}{9}.$$

OBSERVACIONES.

225. 1.ª Por medio de la fórmula [2] se puede hallar cualquiera de las cantidades a, l, q, s, conocidas las otras tres.

2.ª Las fórmulas generales halladas

$$l = aq^{n-1}, \quad s = \frac{lq - a}{q-1}$$

contienen las cinco cantidades indeterminadas a, l, n, q, s, de las cuales conocidas tres, se pueden determinar las restantes por medio de dichas fórmulas ó ecuaciones; advirtiendo nuevamente que, cuando n es incógnita, la ecuacion que la contiene se resuelve como se verá más adelante (**262**). Tampoco se puede hallar por ahora el valor de q cuando l sea incógnita, si $n > 3$; pues en tal caso la ecuacion que la determina es superior al segundo grado.

PROBLEMAS.

226. 1.° **Preguntado un chalan por el precio del caballo que vende, contesta que solo quiere que se le dé un céntimo por el primer clavo, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente duplicando hasta los 32, que tienen las cuatro herraduras. ¿Cuánto pide por el caballo?**

UNED

Este precio es la suma de los términos de una progresion geométrica cuyo primer término es 1, 2 la razon y 32 el número de términos; luego será (**224**)

$$s=\frac{1\times 2^{32}-1}{2-1}=2^{32}-1=4294967295 \text{ céntimos}=$$
$$42949672{,}95 \text{ reales.}$$

227. 2.° **Un cosechero, de un tonel que contiene 100 hectólitros de vino añejo, saca diariamente 10 hectólitros y los reemplaza con igual cantidad de vino nuevo. ¿Qué cantidad de vino añejo quedará en el tonel al cabo de seis dias?**

El primer dia quedan 90 hectólitros, el segundo un décimo ménos ó sean 81, y así sucesivamente; de modo que la cantidad que se busca es el término sexto de una progresion geométrica, en que el primero es 90, el segundo 81, y por consiguiente la razon $\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$; luego será

$$l=90\times\left(\frac{9}{10}\right)^5=53{,}1441 \text{ hectólitros.}$$

228. 3.° **El inventor del juego de ajedrez, á quien su soberano ofrecia una recompensa, se limitó á pedir, como premio de la invencion, un grano de trigo por la primera de las 64 casillas que el tablero contiene, 2 por la segunda, 4 por la tercera, y así sucesivamente duplicando hasta la casilla 64. ¿A cuánto ascenderia la cantidad de trigo pedida?**

El número de granos de trigo es la suma de los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es 1, 2 la razon y 64 el número de términos; luego será (**224**)

$$s=\frac{1\times 2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1=2^{32}\times 2^{32}-1=$$
18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo (*).

(*) Para formar una idea aproximada de la enorme cantidad de trigo que representa este número, supongamos que 5 granos de trigo colocados en línea compongan

CAPITULO XVI.

Logaritmos.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

229. *Llámanse* LOGARITMOS *los términos de una progresion aritmética que principia por cero, correspondientes á los de una geométrica, llamados* NÚMEROS, *que principia por la unidad.*

En las dos progresiones

$$\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots : q^n,$$
$$\div 0 . d . 2d . 3d . \ldots\ldots . nd,$$

0 es el *logaritmo* de 1, d del número q, $2d$ de q^2 ....., nd de q^n.

Se supone generalmente que estas progresiones son crecientes, y que la razon q de la geométrica es positiva y siempre diferente de la unidad.

230. De aquí parece inferirse que no existen logaritmos para los números quebrados; no es así, sin embargo, porque continuando hácia la izquierda las progresiones anteriores, se tendrá

$$\div \frac{1}{q^n} : \ldots\ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^m : \ldots : q^n : \ldots : q^{m+n}$$
$$\div -nd. \ldots . -3d. -2d. -d . 0 . d . 2d. \ldots . md. \ldots . nd. \ldots . (m+n)d$$

cuyas progresiones continuadas indefinidamente á derecha é izquierda, y tomando para la razon q una cantidad superior á la unidad, pero que se aproxime á esta de una manera conveniente, manifiestan que

---

un centímetro (cuya hipótesis nada tiene de exagerada), un centímetro cúbico tendrá 125 granos, un decímetro 125000, y por consiguiente un hectólitro 12500000 granos de trigo. En este supuesto el número hallado equivale á más de 1 475 739 525 896 hectólitros; y suponiendo á 100 reales el hectólitro, el valor de la expresada cantidad sería mayor que 147 573 952 589 690 reales.

De manera que para proporcionar hoy la cantidad de trigo que tan *módestamente* pedia el inventor del ajedrez, se necesitaria agotar nuestro presupuesto del Estado por espacio de cerca de 100000 años.

UNED

1.° *Todos los números comprendidos entre cero y el infinito pueden tener sus correspondientes logaritmos.*

2.° *El logaritmo de la unidad es* cero.

3.° *Los números mayores que* 1 *tienen logaritmos* positivos, *y los menores que* 1 negativos.

4.° *Los números* negativos *no tienen logaritmos* (*).

ARTICULO II.

Propiedades generales de los logaritmos.

231. El fundamento de estas propiedades es el siguiente

TEOREMA. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Segun la disposicion de las progresiones anteriores, un *número* cualquiera es una potencia de la razon expresada por el número de términos que preceden, y su *logaritmo* es un múltiplo de la razon expresado por el mismo número de términos precedentes.

Así, $2d$ es el logaritmo de q^2, $3d$ el de q^3...., md el de q^m, nd el de q^n, y el de $q^m \times q^n = q^{m+n}$ será $(m+n)d$;
luego (indicando con L. el logaritmo del número que se escribe á continuacion)

$$\text{L.}(q^m \times q^n) = (m+n)d = md + nd = \text{L.}q^m + \text{L.}q^n,$$

ó bien $$\text{L.}(q^m \times q^n) = \text{L.}\ q^m + \text{L.}\ q^n.$$

Siendo, pues, a y b dos números cualesquiera,
se tendrá $$\text{L.}\ ab = \text{L.}\ a + \text{L.}\ b.$$

Este raciocinio se puede extender á un número cualquiera de factores $abcd$.....

En efecto, $\text{L.}(a \times bcd..) = \text{L.}\ a + \text{L.}bcd....$,

$\text{L.}(b \times cd...) = \text{L.}\ b + \text{L.}cd.....$,

$\text{L.}(c \times d.....) = \text{L.}\ c + \text{L.}d.....$,

luego $$\text{L.}\ abcd..... = \text{L.}\ a + \text{L.}\ b + \text{L.}\ c + \text{L.}\ d + ...,$$

cuya última igualdad demuestra el teorema de la manera más general.

(*) Puede decirse que los logaritmos de los números negativos son imaginarios verdaderamente.

UNED

COROLARIO 1.° *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.*

En efecto, sea $x=\frac{a}{b}$; de donde

$$xb=a$$

y segun el teorema $\text{L}.x+\text{L}.b=\text{L}.a$; por consiguiente

$$\text{L}.x=\text{L}.a-\text{L}.b.$$

COROLARIO 2.° *El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de la cantidad.*

Sea $x=a^n$, y se tendrá

$$\text{L}.x=\text{L}.a^n=\text{L}.aaaa\ldots=\text{L}.a+\text{L}.a+\text{L}.a+\ldots=n\text{L}.a,$$

ó bien $$\text{L}.x=n\times\text{L}.a.$$

COROLARIO 3.° *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad dividido por el índice de la raiz.*

En efecto, de $x=\sqrt[n]{a}$ se deduce

$$x^n=a,$$

y segun el corolario anterior

$$n\times\text{L}.x=\text{L}.a;\quad \text{de donde}$$

$$\text{L}.x=\frac{\text{L}.a}{n}.$$

232. Segun lo que acaba de verse (corol. 1.°), no es necesario que la progresion geométrica contenga más números que los enteros, ni la aritmética más logaritmos que los correspondientes á estos, puesto que el logaritmo de un quebrado propio é impropio, se puede hallar restando del logaritmo del numerador el del denominador.

Si existiesen, pues, calculados los logaritmos de los números enteros, por medio del teorema anterior y sus corolarios, se facilitarian las operaciones aritméticas rebajándolas un grado; es decir que la *multiplicacion* se convertiria en *adicion*, la *division* en *sustraccion*, la *elevacion á potencias* en *multiplicacion*, y la *extraccion de raices* en *division*.

Lo largo y complicado de las operaciones simplificadas, sobre todo de la elevacion á potencias y extraccion de raíces, indica desde luego lo interesante de esta teoría.

ARTICULO III.

Diferentes sistemas de logaritmos.

233. La reunion de dos progresiones de las circunstancias expresadas, esto es, que la aritmética principie por cero y la geométrica por la unidad, forman un *sistema de logaritmos*; de manera que el número de sistemas que pueden imaginarse es ilimitado, y un mismo número tendrá necesariamente logaritmos diversos en sistemas tambien diferentes.

Los sistemas se distinguen unos de otros por el *número que tiene por logaritmo la unidad, el cual recibe el nombre de* BASE.

De todos los sistemas imaginables solo dos han sido hasta hoy empleados: el sistema *neperiano* (*), llamado así del nombre de Neper, inventor de los logaritmos, y el *vulgar* ó de Briggs, que es el que comunmente se emplea en los cálculos.

Las dos progresiones siguientes forman el sistema de Neper.

$$\begin{array}{l} \div 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \text{etc.} \\ \div 0 \ . \ \alpha \ . \ 2\alpha \ . \ 3\alpha \ . \text{etc.} \end{array}$$

Suponiendo, pues, que el término de la progresion aritmética que ocupa el lugar $n+1$ sea la unidad, dicho término será $n\alpha = 1$; de donde

$$n = \frac{1}{\alpha}$$

y el término correspondiente de la progresion geométrica

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

que es la base del sistema neperiano (**).

(*) Tambien se llama *hiperbólico* de una propiedad de la curva llamada hipérbole.

(**) En el Algebra superior se halla que el valor de esta base que se expresa por e, es $e = 2{,}718281828$ ....

234. Briggs tomó por base de su sistema el número 10, que es tambien la base de nuestro sistema de numeracion decimal, y por progresion aritmética la série de los números naturales; de manera que las progresiones fundamentales de su sistema son las siguientes:

$$\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots.$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . \ldots.$$

Para que estas progresiones puedan prestar alguna utilidad en la simplificacion de las operaciones aritméticas, es necesario que la geométrica contenga todos los números enteros hasta cierto límite, y la aritmética los logaritmos correspondientes á dichos números; pues de lo contrario las ventajas de que hemos hablado (**232**) recaerian solo sobre números expresados por la unidad seguida de ceros, y con estos son tan fáciles los cálculos aritméticos, que es casi inútil cualquier otra simplificacion.

Veamos cómo puede conseguirse.

ARTICULO IV.

Formacion de las tablas de los logaritmos vulgares.

235. *Llámanse* TABLAS DE LOGARITMOS *unos cuadros ó libros en que se hallan, dispuestos en columna, los números enteros desde* 1 *hasta cierto límite, como* 10000, 11000, 100000, 108000, *etc., y á la derecha en columna tambien, sus logaritmos correspondientes.*

La formacion de las tablas de los logaritmos vulgares se reduce, como ya se indicó, á hacer que la progresion geométrica esté formada por los números naturales, y que la aritmética contenga los términos correspondientes á dichos números.

Esto puede conseguirse interpolando m medios entre cada dos términos consecutivos de una y otra progresion, en cuyo caso resultarán dos nuevas progresiones (**215**, obs. y **223**, id.), y entre los términos de la progresion geométrica se hallarán números que se aproximen cuanto se quiera, siendo m suficien-

temente grande, á la série de números naturales; tomando, pues, estos números y los logaritmos de aquellos á quienes más se aproximan, se habrán construido las tablas.

Fácil es interpolar m medios en la progresion aritmética; porque siendo la razon de esta (**214**, 3.ª)

$$d=\frac{2-1}{n-1}=\frac{1}{m+1}$$

no presenta dificultad alguna la determinacion de este quebrado por grande que m sea.

No ofrece igual facilidad la interpolacion de los m medios geométricos, pues siendo la razon de la nueva progresion (**222**, 2.ª)

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{10}{1}}=\sqrt[m+1]{10}$$

se ve que habria que extraer la raíz del grado $m+1$ de 10 para conseguir lo que se pretende; y debiendo ser m un número muy superior á 2, la operacion aparece como impracticable.

No lo es, sin embargo, si se reflexiona que el número de medios que se quiere interpolar es arbitrario, y que por lo tanto podrémos elegir uno tal que $m+1$ sea una potencia exacta de 2, para lo que basta tomar $m=2^n-1$, en cuyo caso la extraccion de la raíz del grado $m+1$ se reduce á tantas extracciones sucesivas de la raíz cuadrada como unidades tenga el exponente de 2 (**143**, obs.).

236. Si se quisiere, pues, formar unas tablas, cuyos logaritmos tuviesen exactas las dos primeras cifras decimales, tomariamos una potencia de 2, que fuese mayor que 100; y como

$$2^7=128,$$

interpolariamos 127 medios aritméticos y otros tantos geométricos entre cada dos términos consecutivos de las progresiones del sistema.

La razon de la progresion aritmética sería en esta hipótesis

$$d=\frac{1}{128}=0{,}0078125,$$

y la de la geométrica

$$q=\sqrt[128]{10}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots}\,10}}=1,01815172\ldots\ldots$$

Despues de interpolados los 127 medios aritméticos y geométricos tomariamos de estos los números 1, 2, 3, 4, etc., que se escribirian en fila vertical, colocando á la derecha los logaritmos de los números que más se les aproximasen respectivamente, y resultarian construidas las tablas con las dos primeras cifras decimales exactas; porque siendo la razon de la progresion aritmética

$$\frac{1}{128}<\frac{1}{100},$$

los logaritmos en la nueva progresion aritmética se diferenciarán en ménos de $\frac{1}{100}$; luego aunque en lugar de un término de esta progresion se tome para las tablas el inmediato superior ó inferior, el error no llega á $\frac{1}{100}$.

Un procedimiento análogo nos daria 3, 4, 5, 6, etc. cifras decimales (*).

Observacion. El método seguido en la construccion de las tablas nos indica que son inexactos los logaritmos de los números conmensurables diferentes de la unidad seguida de ceros; porque se obtienen reemplazando unas cantidades por otras que no son rigorosamente iguales con las primeras. Por esta razon los resultados aritméticos obtenidos empleando los logaritmos serán suficientemente aproximados en la mayor parte de los casos comunes, pero no exactos; circunstancia que debe tenerse muy presente en lo sucesivo.

(*) En la construccion de las tablas de logaritmos ordinarios se tomó $m+1=2^{60}$ de donde ha resultado

$$d=\frac{1}{2^{60}}=0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 86\ldots\ldots$$

$$q=\sqrt[2^{60}]{10}=0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 99\ldots$$

UNED

ARTICULO V.

Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios.

237. Además de las propiedades comunes á todos los sistemas (**230** y **231**), tiene el de Briggs otras, que dimanan de la naturaleza de las progresiones que le forman.

Ante todo observarémos que el logaritmo de un número puede ser *entero*, *quebrado* ó *mixto*.

Se llama CARACTERÍSTICA *la parte entera de un logaritmo;* y MANTISA *la fraccion decimal del mismo.*

238. La simple inspeccion de las progresiones fundamentales de este sistema

$$\begin{array}{l} :: 1 : 10 : 100 : 1000 : \text{etc.} \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . \text{etc.}, \end{array}$$

nos da las consecuencias siguientes:

1.ª *Los logaritmos de los números expresados por la unidad seguida de ceros, ó que son potencias exactas de* 10, *tienen solo característica: los de los comprendidos entre* 1 *y* 10 *mantisa solamente, y los de los superiores á* 10, *pero que no son potencias exactas de este número, tienen característica y mantisa.*

RECÍPROCAMENTE. *El número correspondiente á un logaritmo, que solo tenga característica, es la unidad seguida de ceros: el correspondiente á un logaritmo, que tiene mantisa solamente, es mayor que* 1 *y menor que* 10; *y el que corresponde á un logaritmo, que tiene característica y mantisa, es superior á* 10 *y diferente de la unidad seguida de ceros.*

Los logaritmos de los números desde 1 hasta 10 exclusive tienen 0 de característica, desde 10 hasta 100 tambien exclusive 1, desde 100 á 1000 tienen 2, desde 1000 á 10000 tienen 3, y en general

2.ª *El logaritmo de un número tiene tantas unidades de característica, como cifras ménos una tiene la parte entera de dicho número.*

RECÍPROCAMENTE. *La parte entera del número, correspondiente á un logaritmo, tendrá tantas cifras más una como unidades tenga la característica.*

UNED

239. Se ha visto (**230**, 3.°) que los logaritmos de los quebrados propios son negativos; pero no es esta la forma más conveniente para emplearlos en los cálculos; es mucho más expedito operar con logaritmos de característica negativa y mantisa positiva. Veamos, pues, cómo pueden convertirse unos en otros.

Sea convertir el logaritmo $-3,481790$ en otro de característica negativa y mantisa positiva.

Se tiene evidentemente

$$-3,481790=-3-0,481790;$$

agregando á esta cantidad $-1+1$ no se altera su valor, y resulta

$$-3-1+1-0,481790=-4+1-0,481790;$$

restando de 1 la fraccion decimal (para lo que basta restar todas las cifras de 9 ménos la última significativa de la derecha, que se resta de 10, segun se ve á continuacion)

$$\begin{array}{r} 1,000000 \\ 0,481790 \\ \hline 0,518210, \end{array}$$

tendrémos $-4+1-0,481790=-4+0,518210$

ó escribiendo $\overline{4}$, con lo que se indica que solamente el 4 es negativo, se tiene al fin

$$-3,481790=\overline{4},518210.$$

Del procedimiento empleado en este ejemplo, que es aplicable á cualquiera otro, se deduce la regla siguiente:

Para convertir un logaritmo negativo en otro de característica negativa y mantisa positiva, se aumenta una unidad á la característica, se escribe sobre ella el signo —, y luego se resta cada una de las cifras de la mantisa dada de 9, excepto la última significativa de la derecha que se resta de 10.

Así $-4,950700=\overline{5},049300,$

y $-0,431908=\overline{1},568092.$

UNED

Recíprocamente. *Para convertir un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva en otro negativo, se rebaja una unidad de su característica, y se resta cada cifra de la mantisa de* 9, *excepto la última significativa que se resta de* 10.

Observacion. En adelante siempre expresarémos los logaritmos de los quebrados propios bajo la primera de estas formas, esto es, con *característica negativa* y *mantisa positiva.*

240. Otras propiedades de los logaritmos vulgares tienen por fundamento el siguiente

Teorema. *La mantisa del logaritmo de un número no varía, aunque este se multiplique ó divida por una potencia entera de* 10; *pero la característica se aumenta ó disminuye tantas unidades como tenga el exponente de* 10.

En efecto,

$$\text{L.}\,(a\times 10^n)=(\textbf{231})\ \text{L.}\,a+\text{L.}\,10^n=(\textbf{231},\ \text{corol. 2.}^{\circ})$$
$$\text{L.}\,a+n\,\text{L.}\,10=(\textbf{238},\ 1.^{\text{a}})\ \text{L.}\,a+n,$$
$$\text{ó}\qquad \text{L.}\,(a\times 10^n)=\text{L.}\,a+n\quad[1].$$
$$\text{L.}\frac{a}{10^n}=(\textbf{231},\ \text{corol. 1.}^{\circ})\ \text{L.}\,a-\text{L.}\,10^n=$$
$$\text{L.}\,a-n\,\text{L.}\,10=\text{L.}\,a-n,$$
$$\text{ó}\qquad \text{L.}\frac{a}{10^n}=\text{L.}\,a-n\quad[2].$$

Las igualdades [1] y [2] demuestran las dos partes del teorema, cuyo recíproco es tambien verdadero evidentemente.

De este modo si el número

. . . . . .

325000	tiene por logaritmo	5,511883
32500	tendrá	4,511883
3250		3,511883
325		2,511883
32,5		1,511883
3,25		0,511883
0,325		$\overline{1}$,511883
0,0325		$\overline{2}$,511883
0,00325		$\overline{3}$,511883

etc.

El ejemplo recíproco es el mismo anterior, cambiando los primeros miembros en segundos y estos en primeros.

Corolario. *La mantisa del logaritmo de una fraccion decimal propia puede tomarse como positiva, y en tal caso es la misma que la de esta fraccion considerada como número entero, y la característica tendrá tantas unidades negativas como ceros más uno haya entre la coma y la primera cifra significativa.*

ARTICULO VI.

Uso de las tablas de logaritmos.

241. Son las más conocidas entre nosotros las españolas de Vazquez Queipo y Calvet, y las francesas de Callet y Lalande. Las primeras contienen los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 11000 con seis cifras decimales: las segundas hasta 100000; hasta 10000 las de Lalande, y hasta 108000 las de Callet; estas tres últimas con siete cifras de aproximacion (*).

Las de Vazquez Queipo se recomiendan por su sencillez y disposicion ingeniosa, la cual conocida se comprende fácilmente la de las más complicadas. Además en su reducido volúmen contienen multitud de fórmulas y aplicaciones del mayor interés. A ellas, pues, nos referirémos en todo lo que sigue.

242. Precede á estas tablas una concisa y clara explicacion, mediante la cual con facilidad se resuelve el problema general «dado un número hallar el logaritmo correspondiente,» y su recíproco. Es inútil por consiguiente que aquí se repita dicha explicacion, porque si el alumno no tiene las tablas á la vista, no la entenderá fácilmente, y si las tiene será una repeticion innecesaria. Solo insistirémos en los dos casos particulares siguientes:

1.° *Dado un número que no se halle en las tablas, determinar su logaritmo.*

2.° *Dado un logaritmo cuya mantisa no se halla en las tablas, determinar el número correspondiente.*

(*) Las de Lalande tenian solo cinco cifras decimales; pero fueron extendidas por *Marie* hasta siete.

UNED

243. 1.er caso. Sea hallar el logaritmo de un número superior al límite de las tablas, por ejemplo,

L. 456789.

La característica de este logaritmo es 5 (**238**, 2.ª): la mantisa es la misma que la del número 4567,89 (**240**). La mantisa del logaritmo de 4567, que se halla en las tablas, es 659631. Para determinar la parte de mantisa correspondiente á 0,89 se supone que *la diferencia entre los números mayores que* 1000, *que se distinguen en la unidad ó en ménos que esta, es proporcional á la diferencia entre sus logaritmos* (*).

Siendo 1 la diferencia entre dos números consecutivos, si llamamos D la diferencia entre sus logaritmos ó sea la diferencia que dan las tablas, d la diferencia menor que la unidad entre dos números, y D′ la de sus respectivos logaritmos, se tendrá

$$\frac{1}{d} = \frac{D}{D'} \quad [1].$$

De donde $D' = D \times d$.

Luego *para hallar la parte de mantisa correspondiente á la fraccion decimal, que acompaña á un número entero mayor que* 1000, *se multiplica la diferencia que dan las tablas entre los logaritmos de los números que comprenden á dicho número misto, por la fraccion decimal de este.*

Así que, hallándose el número 4567,89 comprendido entre 4567 y 4568, y siendo la diferencia entre los logaritmos de estos dos números enteros 59 millonésimas, resulta: parte de mantisa correspondiente á $0,89 = 0,89 \times 59$ *millonésimas* $= 44,51 = 45$ *millonésimas* próximamente.

(*) Esta proporcion no es rigorosamente exacta; pero el error se disminuye á medida que aumentan los números. En efecto, la diferencia entre los logaritmos de 1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000, 1000 y 10000, etc., es 1; y como en el primer caso esta diferencia se reparte entre 9 números, en el segundo entre 90, en el tercero entre 900, en el cuarto entre 9000, etc., resulta que cuando los números pasan de 1000 la diferencia entre las diferencias de los logaritmos de números consecutivos puede ser menor que una cantidad cualquiera, por pequeña que esta sea.

De manera que

$$L.\,4567{,}89 = \begin{cases} 3{,}659631 \\ \quad\quad 45 \end{cases}$$

y por consiguiente $L.\,456789 = 5{,}659676.$

Tampoco contienen las tablas los logaritmos de los quebrados y números mistos; mas los de los primeros, si son decimales, se hallan como se ha dicho (**240**, corol.); si ordinarios, como los de divisiones indicadas (**231**, corol. 1.°); y los de los números mistos, siendo decimales, se hallan como los de estas fracciones, y si son ordinarios reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña. Así

$$L.\,0{,}345 = \overline{1}{,}537819.$$

$$L.\frac{5}{7} = L.5 - L.7 = -0{,}146128 = \overline{1}{,}853872.$$

$$L.\,73{,}42 = 1{,}865814.$$

$$L.\,9\frac{3}{4} = L.\frac{39}{4} = 0{,}989005.$$

241. 2.° CASO. Determinar el número, cuya mantisa 785346 no se halla en las tablas.

Como esta mantisa está comprendida entre 785330 y 785401, el número que se busca estará comprendido entre 6100 y 6101; luego será igual al primero de estos más *la parte* correspondiente á 16 millonésimas, diferencia entre la mantisa dada y la próxima menor.

Para determinar esta parte, se halla d en la proporcion [1]; de donde resulta $d = \frac{D'}{D}$.

Luego *para determinar la fraccion decimal que se ha de agregar á un número, cuya mantisa de su logaritmo no se halla en las tablas, se divide la diferencia entre dicha mantisa y la próxima menor por la diferencia entre las dos mantisas que comprenden la dada, ó sea por la diferencia de las tablas.*

Así que, siendo en el ejemplo propuesto la primera de estas diferencias 16 millonésimas y la segunda 71 millonésimas, se tendrá

Frac. dec. corr. 16 *millonésimas* $=\frac{16}{71}=0{,}23$ (*).

Luego el número cuya mantisa es 785346,

si la característica es 7, será 61002300
si 6, 6100230
si 5, 610023
si 4, 61002,3
si 3, 6100,23
si 2, 610,023
si 1, 61,0023
si 0, 6,10023
si $\overline{1}$, 0,610023
si $\overline{2}$, 0,0610023

CAPITULO XVII.

Aplicaciones de los logaritmos.

ARTICULO PRIMERO.

Del complemento logarítmico.

245. *Se llama* COMPLEMENTO *de un logaritmo otro logaritmo que sumado con el primero produce* cero *ó una cantidad dada.*

Llamarémos COMPLEMENTO Á CERO *de un logaritmo otro logaritmo, que sumado con el primero le destruya ó produzca cero.*

El complemento á cero del logaritmo de un número a, le indicarémos así $C_0L.\,a$.

COROLARIO. *El* COMPLEMENTO Á CERO *de un logaritmo es otro logaritmo de igual valor absoluto, pero de signo contrario.*

Porque $L.\,a+C_0L.\,a=0$; de donde

$$C_0L.\,a=-L.\,a.$$

(*) Solo se toman dos cifras decimales por la razon indicada [**243**, (*)], y aun no es siempre exacta la segunda.

246. Segun este corolario, para hallar el complemento á cero de un logaritmo cualquiera bastará mudarle de signo, y *así se practica cuando solo contiene característica.*

De modo que siendo $L.1000=3$ $C_0L.1000=-3$;
$L.0,01=-2$, $C_0L.0,01=2$.

Mas si el logaritmo constase de característica y mantisa, la expresion resultante no sería á propósito para facilitar el cálculo, para esto es necesario que la mantisa sea positiva, séalo ó no la característica. Veamos cómo puede conseguirse.

247. Distinguirémos dos casos; 1.° que el logaritmo cuyo complemento se quiere determinar corresponda á un número mayor que 1, en cuyo caso será *positivo* (**230**, 3.°): 2.° que corresponda á un número menor que 1, en cuyo caso tendrá la característica *negativa* y la mantisa *positiva* (**239**, obs.).

1.er CASO. Hallar el complemento á cero de

$$3,481790.$$

Este complemento será (**245**, corol.)

$$-3,481790:$$

pero este logaritmo negativo equivale (**239**) á

$$\overline{4},518210;$$

luego este es el complemento del logaritmo dado, bajo la forma que se desea.

Comprobacion:

$$\begin{array}{r} 3,481790 \\ \overline{4},518210 \\ \hline 0,000000 \end{array}$$

2.° CASO. Hallar el complemento á cero de

$$\overline{5},310071$$

Este complemento será (**245**, corol.)

$$-(\overline{5},310071)=-(-5+0,310071)=5-0,310071=$$
$$4+1-0,310071=4,689929;$$

luego este resultado es el complemento á cero del logaritmo dado bajo la forma que se desea.

Comprobacion:

$$\begin{array}{r} \overline{5},310071 \\ 4,689929 \\ \hline 0,000000 \end{array}$$

248. Del procedimiento empleado en estos dos ejemplos, que es aplicable á cualquiera otro comprendido en los casos

precedentes, se deduce la siguiente regla, análoga á la del número **239**.

Para hallar el complemento á cero de un logaritmo (que tiene mantisa) se muda el signo á la característica y se le agrega — 1 : *se resta cada una de las cifras de la mantisa dada de* 9, *excepto la última significativa de la derecha que se resta de* 10.

Así, siendo $L.4875 = 3,687975$,
será $C_0L.4875 = \overline{4},312025$.
Siendo $L.0,0186 = \overline{2},269513$,
será $C_0L.0,0186 = 1,730487$.

249. *Se llama* COMPLEMENTO *á* 10 *de un logaritmo otro logaritmo que sumado con el primero produce* 10.

El complemento á 10 del logaritmo de a, le indicarémos así

$$C_{10}L.a.$$

COROLARIO. *El complemento á* 10 *de un logaritmo es la diferencia entre* 10 *y dicho logaritmo.*

Porque $L.a + C_{10}L.a = 10$; de donde
$C_{10}L.a = 10 - L.a$.

250. Para determinar este complemento se distinguen los mismos casos que en el complemento á cero, esto es: 1.° que el logaritmo sea positivo: 2.° que sea de característica negativa y mantisa positiva.

1.er CASO. Hallar el complemento á 10 de 4,253718.

Este complemento será (**249**, corol.).

$$10 - 4,253718 = 5,746282.$$

Comprobacion:

$$\begin{array}{r} 4,253718 \\ 5,746282 \\ \hline 10,000000. \end{array}$$

2.° CASO. Hallar el complemento á 10 de $\overline{3},465320$.

Este complemento será (**249**, corol.)

$$10 - (\overline{3},465320) = 10 - (-3 + 0,465320) = 10 + 3 - 0,465320 =$$
$$10 + 2 + 1 - 0,465320 = 12,534680.$$

Comprobacion:

$$\begin{array}{r} \overline{3},465320 \\ 12,534680 \\ \hline 10,000000. \end{array}$$

251. Del procedimiento empleado en estos dos ejemplos, que es aplicable á cualquiera otro comprendido en los mismos casos, se deduce la siguiente regla:

Para hallar el complemento á 10 *de un logaritmo cualquiera, se resta cada una de sus cifras, inclusas las de la característica, de* 9, *excepto la última significativa de la derecha que se resta de* 10.

Así, siendo $L.4875 = 3,687975$,
será $C_{10}L.4875 = 6,312025$.
Siendo $L.0,0186 = \overline{2},269513$,
será $C_{10}L.0,0186 = 11,730487$.

252. La sustraccion de un logaritmo de otro puede convertirse en adicion por medio del *complemento*; lo que es ventajoso, sobre todo, cuando de la suma de dos ó más logaritmos se debe restar uno ó más; pues que entónces todas estas operaciones se reducen á una simple adicion.

Si tuviésemos que ejecutar esta resta

$$L.\ a - L.\ b:$$

como $-L.\ b = C_0L.\ b$ (**245**, corol.); se tendria

$$L.\ a - L.\ b = L.\ a + C_0L.\ b.$$

Luego *para restar un logaritmo de otro, se suma con el minuendo el complemento á cero del sustraendo.*

De igual modo

$$L.\ a - L.\ b = L.\ a + (10 - L.\ b) - 10 = (\textbf{249}, \text{corol.})$$
$$L.\ a + C_{10}L.\ b - 10.$$

Luego *para restar un logaritmo de otro, se suma con el minuendo el complemento á* 10 *del sustraendo, y del resultado se restan* 10 *unidades.*

ARTICULO II.

Operaciones por medio de los logaritmos.

253. MULTIPLICACION. *Para ejecutar una multiplicacion por medio de logaritmos, se hallan los logaritmos de los factores, se suman, se busca en las tablas el número correspondiente á este logaritmo, y se tendrá el producto pedido* (**231**).

EJEMPLO. Sea ejecutar la siguiente multiplicacion:

$$x = 4875 \times 3,25 \times 0,0148;$$
$$L.\ 4875 = 3,687975$$
$$L.\ 3,25 = 0,511883$$
$$L.\ 0,0148 = \overline{2},170262$$
$$L.\ x = 2,370120 = L.\ 234,488$$

y $x = 234,488$.

254. Division. *Para ejecutar una division por medio de logaritmos se resta del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, se busca en las tablas el número correspondiente á la diferencia (considerada como logaritmo), y se tendrá el cociente* (**231**, corol. 1.°); *ó lo que es mejor, se suma con el logaritmo del dividendo el complemento á cero del logaritmo del divisor, y el número correspondiente á esta suma (considerada como logaritmo) será el cociente* (**252**) (*).

Ejemplo. Sea ejecutar la siguiente division

$$x=\frac{18570}{393};$$

$$\text{L. } 18570=4,268812$$
$$\text{C}_0\text{L. } 393=\overline{3},405607$$
$$\text{L.}x=1,674419=\text{L. } 47,2518$$

y $$x=47,2518.$$

255. Elevacion á potencias. *Para elevar una cantidad á una potencia cualquiera por medio de logaritmos, se multiplica el exponente de la potencia por el logaritmo de la cantidad, se busca en las tablas el número correspondiente á este producto (considerado como logaritmo), y se tendrá la potencia pedida* (**231**, corol. 2.°).

EJEMPLOS.

1.° Ejecutar la siguiente elevacion á potencias:

$$x=7^5.$$

$$\text{L. } 7=0,845098$$
$$5$$
$$\text{L. } x=4,225490=\text{L. } 16806,9$$

y $$x=16807.$$

Observacion. Se toma para x un valor que se diferencia del hallado en una décima; porque la potencia indicada debe producir un número entero, y dicha diferencia proviene de la inexactitud de los logaritmos (**236**, obs.).

(*) Si se emplea el complemento á 10, se suma el logaritmo del dividendo con el complemento del logaritmo del divisor y se restan 10 unidades antes de buscar el número correspondiente.

UNED

2.° Sea $x=\left(\frac{3}{7}\right)^6$;

$$\text{L.}x=6\times(\text{L.}3+\text{C}_0\text{L.}7)$$
$$\text{L.}3=0,477121$$
$$\text{C}_0\text{L.}7=\bar{1},154902$$
$$\bar{1},632023$$
$$6$$
$$\text{L.}x=\bar{3},792138=\text{L. }0,006196$$

y
$$x=0,006196.$$

Observacion. Al ejecutar la multiplicacion del logaritmo $\bar{1},632023$ por 6, debe tenerse presente que, como la mantisa es positiva, las 3 *unidades* que resultan de 6×6, producto de las *décimas* por 6, son tambien positivas; y las 6 que resultan del producto -1×6, que es la característica, por 6, son negativas; de manera que $+3-6=-3$, son las unidades del logaritmo ó sea la característica, segun se ha hallado.

256. Extraccion de raíces. *Para extraer la raiz de cualquier grado de una cantidad, se divide el logaritmo de esta por el índice del radical, y el número que dan las tablas para este logaritmo será la raiz pedida* (**231**, corol. 3.°).

Ejemplo. $x=\sqrt[7]{0,4563}$;

$$\text{L. }0,4563=\bar{1},659250,$$
$$\text{L.}x=\frac{\bar{1},659250}{7}=\bar{1},951321=\text{L.}0,893965$$

y
$$x=0,893965.$$

Observacion. Al ejecutar la division precedente se notará que no siendo -1 divisible por 7, y no pudiendo tampoco unirse á la cifra siguiente de la mantisa, que es positiva, la operacion parece impracticable. *Para obviar esta dificultad, se agregan suficiente número de unidades negativas á la característica* -1, *para que esta se convierta en un número divisible por 7; y á fin de que el cociente no se altere, se agrega*

igual número de unidades positivas á la primera cifra de la mantisa.

Así, agregando —6 á la característica, esta se convierte en —7, que dividido por 7 da —1; y agregando 6 unidades á la primera cifra de la mantisa, forman con ella 66 décimas, cuyo número dividido por 7 da 9; despues se continúa la operacion como en la Aritmética.

Otros EJEMPLOS.

257. 1.° $\frac{160}{436}=\frac{x}{5405}$:

$$x=\frac{160\times5405}{436},$$

$$L.x=L.160+L.5405+C_0L.436.$$

$$L.160=2,204120$$
$$L.5405=3,732796$$
$$C_0L.436=\overline{3},360514$$
$$L.x=3,297430=L.1983,48$$

y $$x=1983,48$$

258. 2.° $$x=\sqrt[5]{\left(\frac{76\times250}{148\times15}\right)^3}.$$

$$L.x=\frac{3(L.76+L.250+C_0L.148+C_0L.15)}{5};$$

$$L.76=1,880814$$
$$L.250=2,397940$$
$$C_0L.148=\overline{3},829738$$
$$C_0L.15=\overline{2},823909$$
$$0,932401$$
$$3$$
$$2,797203|5$$
$$L.x=0,559441=L.3,62612$$

y $$x=3,62612,$$

UNED

259. 3.° $x=\frac{-160\times5405}{436}$.

Al determinar el valor de x hallariamos que no se puede tomar el logaritmo de -160, porque los números negativos no tienen logaritmos (**230**, 4.°); mas si se observa que este signo cambia el de toda la expresion, no hay más que hallar el valor de esta como si todos los factores fuesen positivos, y mudar luego el signo al resultado.

Así que, habiendo hallado (**257**)

$$\text{L. } 160+\text{L. } 5405+\text{C}_0\text{L. } 436=\text{L. } 1983{,}48,$$

será $-\frac{160\times5405}{436}=-1983{,}48$ ó $x=-1983{,}48$.

260. 4.° $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.

$\text{L. } q=\frac{\text{L.}l+\text{C}_0\text{L.}a}{n-1}$; de donde $n=1+\frac{\text{L.}l+\text{C}_0\text{L.}a}{\text{L.}q}$.

261. 5.° $x=\frac{a^2+b^2}{c^2-d^2}$.

Esta fórmula puede prepararse mejor para el cálculo logarítmico, descomponiendo el denominador en dos factores, una vez que

$$c^2-d^2=(c+d)\,(c-d),$$

y se tendrá $x=\frac{a^2+b^2}{(c+d)\,(c-d)}$; de donde

$$\text{L. } x=\text{L. } (a^2+b^2)+\text{C}_0\text{L.}(c+d)+\text{C}_0\text{L.}(c-d).$$

Observacion. El numerador no es susceptible de descomposicion en factores reales; de modo que su logaritmo no puede tomarse más que como se ha indicado. Los principiantes creen comunmente que

$$\text{L. } (a^2+b^2)=2\text{L.}a+2\text{L.}b:$$

pero esto es un error, porque $2\text{L.}\,a+2\text{L.}\,b=\text{L.}\,a^2b^2$; es decir que toman el logaritmo del producto de dos números por el de la suma de los mismos.

Lo único que aquí puede hacerse para facilitar el cálculo *es hallar separadamente por medio de logaritmos el valor del número* a^2 *y luego el de* b^2, sumar estos números y buscar despues el logaritmo de la suma.

UNED

ARTICULO III.

Ecuaciones exponenciales.

262. *Se llama* ECUACION EXPONENCIAL *aquella en que la incógnita entra por exponente.*

1.ª $a^x = b$,

2.ª $b^{a^x} = c$,

3.ª $c^{b^x} = d$,

. . . . .

$$\vdots$$

$$e^{d^x} = f,$$

son ecuaciones exponenciales: la 1.ª es de *primer órden*, y significa que a elevada á x produce b: la 2.ª, de *segundo órden*, y significa que b elevada á la potencia expresada por a^x es igual á c: la 3.ª, de *tercer órden*, y significa que c elevada á la potencia expresada por a^{b^x} equivale á d, ..., la última la supondremos *del órden* n.

La ecuacion exponencial de 1.er órden

$$a^x = b,$$

se resuelve fácilmente por logaritmos.

En efecto $$x\text{L.}\, a = \text{L.}\, b;$$

de donde $$x = \frac{\text{L.}\, b.}{\text{L.}\, a.}$$

263. Consideremos ahora la ecuacion exponencial del órden n.

Tomando los logaritmos de sus dos miembros,

$$\vdots$$

se tendrá $$d^{a^x} \times \text{L.}\, c = \text{L.}\, f;$$

de donde $$d^{a^x} = \frac{\text{L.}\, f}{\text{L.}\, e}$$

Como del mismo modo podriamos rebajar esta ecuacion del grado -1 á otra del grado $n-2$, esta á otra del grado $n-3$, y así sucesivamente, resul ta que

Para resolver una ecuacion exponencial superior al primer grado y de la forma

$$e^{a^{\cdot^{\cdot^{x}}}} = f,$$

se toman los logaritmos de sus dos miembros, con lo que se reduce al órden inferior inmediato: se despeja el factor donde la incógnita entre por exponente: se toman los logaritmos de los dos miembros, con lo que se reduce al órden inmediato inferior; y así se continúa hasta que se obtenga una ecuacion de primer órden, la cual se resuelve como se ha visto (**262**) (*).

EJEMPLO. $$4^{2^{x}} = 65536.$$

Tomando los logaritmos se tiene

$$2^x \times L.4. = L.65536:$$

de donde $$2^x = \frac{L.65536}{L.4} = \frac{4,816480}{0,602060} = 8,$$

y resolviendo la ecuacion resultante (**262**) se tendrá por último $$2^x = 8,$$

$$x = \frac{L.8}{L.2} = \frac{0.903090}{0,301030} = 3.$$

ARTICULO IV.

Interés compuesto.

264. Ya se ha dicho (**194**) que INTERÉS COMPUESTO *es el producido por el capital é intereses que se le van acumulando.*

Si uno presta, por ejemplo, 200 reales al 10 por 100 á interés compuesto, dicha cantidad el primer año produce 20 reales, que no se perciben entónces, sino que se *capitalizan* ó acumulan al capital primitivo; de manera que este al principiar el segundo año es de 220. Este capital produce en el segundo año 22 reales, que se *capitalizan* de nuevo formando al principio del tercer año un capital de 242. El interés producido por este capital en el tercer año se vuelve á capitalizar

(*) Al resolver estas ecuaciones se ve que hay que tomar logaritmos de logaritmos..... hasta un órden n. Estos logaritmos pueden llamarse *logo-logaritmos*,..... *logo-n-logaritmos.*

UNED

al principio del cuarto; y así se continúa hasta la terminacion del tiempo estipulado, ó hasta que se hayan devuelto el capital é intereses producidos.

Resolvamos los problemas generales siguientes:

265. 1.er PROBLEMA. **Hallar la cantidad A en que se convierte el capital c con sus intereses, á interés compuesto, al cabo de t años, siendo r el interés de 1 real (ó de la unidad de moneda) en un año.**

El interés que produce el capital c en un año será evidentemente cr, y el capital é interés al cabo de este tiempo

$$c+cr=c(1+r);$$

de manera que *para hallar en lo que se convierte el capital* c, *con sus intereses acumulados en un año, basta multiplicarle por* $1+r$.

Luego al fin del segundo año el capital c con sus intereses se convierte en $c(1+r)(1+r)=c(1+r)^2$,

al fin del tercero en $c(1+r)^3$,

al fin del cuarto en $c(1+r)^4$,

. . . . . .

y al cabo de t años será, por último, $c(1+r)^t$;

y por consiguiente

$$A=c(1+r)^t.$$

266. El método seguido para obtener la fórmula precedente demuestra que es cierta independientemente de la especie de la unidad de tiempo representada por t, con tal que r se refiera á la misma especie de unidad: es decir, que lo mismo es aplicable al caso en que t exprese años, con tal que r sea el interés de la unidad de moneda en *un año*, que cuando una y otra cantidad se refieren á meses, semanas, dias, etc.

Tambien es aplicable dicha fórmula al caso en que t sea un número fraccionario.

Supongamos que $t=n$ años $+m$ meses ó $\left(n+\frac{m}{12}\right)$ y vamos á demostrar que siendo r el interés de un real en un año, se tendrá

$$A=c\,(1+r)^{n+\frac{m}{12}} \text{ años.}$$

En efecto, llamando r' el interés que produce un real en un mes, en 12 meses el real con sus intereses se convierte en

$$(1+r')^{12};$$

y como el interés de un real en un año es r, se tiene

$$(1+r')^{12}=1+r;$$

de donde $$1+r'=(1+r)^{\frac{1}{12}}.$$

Por otra parte, el capital c se convertirá al cabo de $(n\times 12+m)$ meses en $$c(1+r')^{n\times 12+m}_{n+\text{años}}$$

Sustituyendo en esta fórmula en vez de $1+r'$ su valor, se tiene

$$c(1+r)^{\frac{n\times 12+m}{12}} = c(1+r)^{\left(n+\frac{m}{12}\right)\text{años}}$$

ó bien $$A=c(1+r)^{\left(n+\frac{m}{12}\right)\text{años}}.$$

En la práctica se supone siempre que el interés se compone por años exactos. Así que cuando t es un quebrado propio de año, se calcula á interés simple (**195**), y cuando impropio, el interés por el número entero de años se determina á interés compuesto, y por la fraccion restante á interés simple; ó bien, cuando las liquidaciones se hacen en una época determinada, el interés se calcula como simple por la fraccion de tiempo anterior y posterior á dicha época, y por el número de años que media entre la primera y última liquidacion, el interés se determina como compuesto. La mayor sencillez en las operaciones (que casi siempre se consigue por ser conocido el tanto por ciento en un año) es lo único que justifica este procedimiento, que por otra parte es irregular y contradictorio (*).

267. La fórmula obtenida en el número penúltimo contiene las cantidades generales A, c, r, t, cada una de las cuales puede determinarse siendo conocidas las otras tres.

Tomando los logaritmos de los dos miembros para hacer los despejos con más facilidad, se tendrá

$$\text{L. A}=\text{L. }c+t\,\text{L.}(1+r) \qquad [1].$$

Despejando L. c, se tiene

$$\text{L. }c=\text{L. A}-t\,\text{L. }(1+r) \qquad [2].$$

Despejando L. $(1+r)$, pues que el valor r no puede hallarse hasta que $1+r$ sea conocido, resulta

$$\text{L. }(1+r)=\frac{\text{L. A}-\text{L.}c}{t} \qquad [3].$$

(*) Cuando el tiempo es menor que un año, un mismo capital produce mas á interés simple que á interés compuesto; y cuando pasa de un año, sucede lo contrario.

UNED

Despejando t, por último, se halla

$$t=\frac{L.A-L.c}{L.(1+r)} \quad [4].$$

EJEMPLOS.

268. **1.° Se han impuesto 20000 reales á interés compuesto, ¿qué suma debe recibirse al cabo de 6 años por capital é intereses, siendo 6 el tanto por 100?**

Valiéndonos de la fórmula [1], y teniendo en cuenta que el interés de un real en un año al 6 por 100 es 0,06, se tendrá

$$L.20000=4,301030$$
$$t\times L.(1+r)=6\times L.1,06=6\times 0,025506=0,151836$$
$$L.A=4,452856=L.28370,8;$$

de donde $A=28370,8$ reales.

2.° ¿Qué cantidad se necesita imponer á interés compuesto para percibir al cabo de 10 años 6000 reales por capital é intereses, siendo 5 el tanto por 100?

Empleando la fórmula [2], y teniendo tambien presente que $r=0,05$, resulta

$$L.6000=\ 3,778151$$
$$-10\times L.1,05=-10\times 0,021189=-0,211890$$
$$L.c=\ 3,566261=L.3683,5;$$

de donde $c=3683,5$ reales.

3.° 1000 duros se han convertido, á interés compuesto, en 25 años, en 3386 duros. ¿Cuál ha sido el tanto por 100?

Haciendo uso de la fórmula [3], hallarémos

$$L.3386=3,529687$$
$$C_0L.1000=3$$
$$L.(1+r)=\frac{0,529687}{25}=0,21187=L.1,05;$$

de donde $1+r=1,05$ y por consiguiente $r=0,05$.

4.° ¿En cuántos años se duplicará un capital á interés compuesto, siendo 6 el tanto por 100?

Empleando la fórmula [4], y suponiendo que el capital es 100, puesto que aquí es indiferente, se tendrá

$$\text{L. } 200 + C_0\text{L. } 100 = 2{,}301030 - 2 = 0{,}301030,$$
$$\text{L. } 1{,}06 = 0{,}025306;$$

de donde $$t = \frac{0{,}301030}{0{,}025306} = 11{,}892,$$

ó $t = 11$ años, 10 meses y 21 dias próximamente.

El capital, pues, no se duplica á los 11 años, y se convierte en más del duplo á los 12; y como en la práctica el interés se compone por años exactos (**266**), para hallar el resultado conforme con ella, se determina la cantidad en que se convierten 100 reales á interés compuesto en 11 años, se halla la diferencia entre este resultado y el duplo del capital, ó sean 200, y luego por la fórmula del interés simple (**196** [4]) se calcula el tiempo necesario para que el resultado hallado en los 11 años produzca dicha diferencia. Este tiempo sumado con 11 años forma la nueva solucion, que se diferencia de la anterior en ménos de 1 dia, como es fácil comprobar.

5.° Una nacion tiene 16 millones de habitantes, y se aumenta un indivíduo por 400 en cada año, ¿cuál será el número de sus habitantes dentro de un siglo?

Este problema se resuelve por la fórmula [1], donde

$c = 16000000$, $r = \frac{1}{400} = 0{,}0025$ y $t = 100$;

luego se tendrá $\text{L. } 16000000 = 7{,}204120$

$$100 \times \text{L. } 1{,}0025 = 0{,}108400$$
$$\text{L. A} = 7{,}312520 = \text{L. } 20536100$$

y finalmente $A = 20536100$.

Si se quiere más aproximacion en este resultado, sería necesario valernos de tablas que tuviesen mayor número de cifras decimales en la mantisa

269. 2.° PROBLEMA. Hallar la cantidad A en que se convierte *a* con sus intereses, impuesta (á interés compuesto) al principio de cada año, por espacio de *t* años, siendo r el tanto por 1 anual.

UNED

a impuesta al principio del primer año se convierte al cabo de t años en

$$a(1+r)^t:$$

a impuesta al principio del segundo año se convierte al cabo de $t-1$ años en

$$a(1+r)^{t-1}:$$

a impuesta al principio del tercer año se convierte al cabo de $t-$ años en

$$a(1+r)^{t-2}:$$

. . . . . .

a impuesta al principio del último año se convierte al fin del mismo en

$$a(1+r);$$

luego A es igual á la suma de las cantidades precedentes; y como estas forman evidentemente una progresion geométrica, cuyo primer término es $a(1+r)$, el último $a(1+r)^t$, $1+r$ la razon y t el número de términos se tendrá (224)

$$A=\frac{a(1+r)^t\times(1+r)-a(1+r)}{r}$$

ó bien

$$A=\frac{a(1+r)^{t+1}-a(1+r)}{r} \qquad [1].$$

En esta fórmula entran las cuatro cantidades generales A, a, t, r, cada una de las cuales se puede determinar en valores de las otras tres; advirtiendo que para hallar el valor de t con más facilidad se emplearán los logaritmos, y que el de r no puede determinarse por ahora, porque para esto seria necesario (siempre que $t=2$ ó $t>2$) resolver una ecuacion de grado superior al segundo.

Despejando a se tiene

$$a=\frac{Ar}{(1+r)^{t+1}-(1+r)} \qquad [2].$$

Para despejar t con más facilidad hagamos $1+r=b$, y se tendrá

$$A=\frac{ab^{t+1}-ab}{r};$$

de donde

$$b^{t+1}=\frac{Ar+ab}{a}$$

y tomando los logaritmos, resulta

$$(t+1)\text{ L. }b=\text{L. }(Ar+ab)-\text{L. }a;$$

de donde

$$t=\frac{\text{L. }(Ar+ab)-\text{L. }a}{\text{L. }b}-1.$$

Volviendo á sustituir en vez de b su valor $1+r$, se tendrá por último

$$t=\frac{\text{L. }[Ar+a(1+r)]-\text{L. }a}{\text{L. }(1+r)}-1 \qquad [3].$$

UNED

270. Ejemplo. **Un artesano impone en una Caja de Ahorros un duro cada semana por espacio de 8 años. ¿Qué capital habrá reunido al cabo de este tiempo, siendo 4 el tanto del interés?**

Este problema se resuelve por la fórmula [1] para lo que se hallará el valor de las cantidades a, t, r.

$a=1$; y como se supone que el año tiene 52 semanas, $t=8\times52=416$, el interés de un duro en un año es 0,04: para hallar el de la misma unidad en una semana nos valdremos de la fórmula [3] del número **267**, haciendo en ella $A=1{,}04$, $c=1$, $t=52$; de manera que

$$\text{L.}(1+r)=\frac{\text{L. }1{,}04}{52}=\frac{0{,}017033}{52}=0{,}000327=\text{L. }1{,}000753;$$

$$1+r=1{,}000753,$$

$$r=0{,}000753.$$

Sustituyendo en la fórmula [1] los valores que se acaba de determinar resulta

$$A=\frac{(1{,}000753)^{417}-1{,}000753}{0{,}000753}.$$

No estando dispuesta esta fórmula para el cálculo logarítmico, solamente hallarémos por medio de logaritmos el valor de

$$(1{,}000753)^{417} \qquad \text{y se tendrá}$$

$$417\times\text{L. }1{,}000753=417\times0{,}000327=0{,}136359=\text{L. }1{,}36886;$$

y por consiguiente

$$(1{,}000753)^{417}=1{,}36886.$$

Sustituyendo este resultado en el valor anterior de A, se tiene al fin

$$A=\frac{1{,}36886-1{,}000753}{0{,}000753}=\frac{0{,}368107}{0{,}000753}=\frac{368107}{753}=488{,}85$$

ó bien $A=488{,}85$ duros próximamente.

271. En las Cajas de Ahorros resuelven este problema de una manera diversa. Supónese que cada imposicion semanal se ha verificado al principio del mes siguiente; que estas cantidades producen interés simple hasta fin de Diciembre del año de la imposicion; los intereses entónces se acumulan al capital, que sigue produciendo á interés compuesto por años hasta principio de aquel en que se verifica la devolucion, calculándose el interés como simple por los meses cumplidos desde Enero de este último año hasta que el imponente haya recogido capital é intereses. Este procedimiento simplifica notablemente los cálculos, cuando las imposiciones se hacen de una manera más irregular de la que suponemos en el problema anterior, sobre todo si durante la imposicion se retiran una ó más partes del capital, como sucede con frecuencia. No obstante, podria

UNED

conciliarse la exactitud con la brevedad, calculando tablas convenientemente dispuestas, valiéndose de la fórmula arriba empleada. La índole de este trabajo no nos permite entrar en más pormenores.

272. 3.er PROBLEMA **Hallar el capital c que se ha de imponer á interés compuesto, para percibir al fin de cada año la cantidad a; de modo que en t años se haya percibido el capital primitivo y los intereses devengados.**

El capital c se convertirá al cabo de t años (**265**) en

$$c(1+r)^t.$$

Por otra parte la cantidad a, que se percibe al fin del primer año, se convertirá al cabo de los $t-1$ años restantes en

$$a(1+r)^{t-1};$$

la cantidad a percibida al fin del segundo año, se convertiria al cabo de los $t-2$ años restantes en

$$a(1+r)^{t-2};$$

al fin del tercer año se convertiria en

$$a(1+r)^{t-3};$$

. . . . . .

al fin del último se percibiria a;

luego las cantidades percibidas con los intereses devengados forman los términos de una progresion geométrica cuyo primer término puede ser a, el último $a(1+r)^{t-1}$, y $1+r$ la razon; esto es (**224**)

$$\frac{a(1+r)^t - a}{r}$$

y como esta cantidad es igual á la anteriormente obtenida, resulta al fin

$$c(1+r)^t = \frac{a(1+r)^t - a}{r(1+r)^t}.$$

Esta fórmula contiene las cuatro cantidades c, a, t, r, cada una de las cuales se puede determinar en valores de las otras tres; advirtiendo que para determinar t es menester emplear los logaritmos, y que r no puede hallarse por ahora, porque su determinacion depende (siempre que $t=2$ ó $t>2$) de la resolucion de una ecuacion de grado superior al 2.°

Despejando c se tiene

$$c = \frac{a(1+r)^t - a}{a(1+r)^t} \quad [1].$$

Despejando a resulta

$$a = \frac{cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \quad [2].$$

Para despejar t, haremos $1+r=b$ en la fórmula general, y se tendrá

$$cb^t = \frac{ab^t - a}{r};$$

de donde $$b^t=\frac{a}{a-cr};$$

sustituyendo en vez de b su valor $1+r$, resulta

$$(1+r)^t=\frac{a}{a-cr}$$

y tomando los logaritmos

$$t\times L.(1+r)=L.\,a-L.\,(a-cr);$$

de donde por último

$$t=\frac{L.\,a-L.\,(a-cr)}{L.\,(1+r)} \quad (3).$$

EJEMPLOS.

273. **1.° ¿Qué capital se necesita imponer á interés compuesto para que recibiendo 20000 rs. anuales, se perciba en 10 años capital y réditos, siendo 5 el tanto por 100 del interés?**

La fórmula (1) sirve para la resolucion de este problema, mas como no está dispuesta para el cálculo logarítmico, solamente hallarémos por logaritmos el valor de $(1+r)^t$, y luego se calculará el valor de c por el método ordinario.

Como $$L.\,(1+r)^t=t\times L.(1+r),$$

sustituyendo en vez de r y t sus valores, se tendrá

$$10\times L.\,(1{,}05)=10\times 0{,}021189=0{,}211890=L.\,1{,}62888$$

y $$(1+r)^t=1{,}62888.$$

Sustituyendo ahora este último valor y el de a en dicha fórmula, resulta

$$c=\frac{20000\times 1.62888-20000}{0{,}05\times 1{,}62888}=\frac{12577{,}6}{0{,}081444}=154432 \text{ rs. próximamente.}$$

2.° Una municipalidad adelantó 10000 duros para hacer una carretera provincial, con la condicion de que en 20 años se le habia de reintegrar de capital é intereses. ¿Qué cantidad le debe satisfacer la provincia anualmente, siendo 6 el tanto por 100 estipulado?

Este problema se resuelve por la fórmula (2), para lo que se procederá de una manera análoga á la anterior.

$$L.\,(1+r)^t=t\times L.\,(1+r)=20\times L.\,1{,}06=0{,}506120=L.\,3{,}20716$$

y $$(1+r)^t=3{,}20716;$$

sustituyendo este valor y el de c y r en dicha fórmula, resulta

$$a=\frac{10000\times 0{,}06\times 3{,}20716}{3{,}20716-1}=871{,}84 \text{ duros próximamente.}$$

UNED

3.° Un comerciante tomó 40000 rs. á interés compuesto: satisface por ellos anualmente 6000 rs. ¿En cuántos años extinguirá la deuda siendo $4\frac{1}{2}$ el tanto por 100 convenido?

La fórmula [3] sirve para resolver este problema.

Tendrémos, segun la misma,

$$t=\frac{\text{L. } 6000-\text{L. } (6000-40000\times 0{,}045)}{\text{L. } 1{,}045}=\frac{3{,}77815-3{,}623249}{0{,}019116}=8{,}1 \text{ años}$$

próximamente.

4.° Una señora de 64 años de edad disfruta la viudedad de 16000 rs. ¿Qué capital representa esta pension, suponiendo que sea el 5 por 100 el interés del dinero?

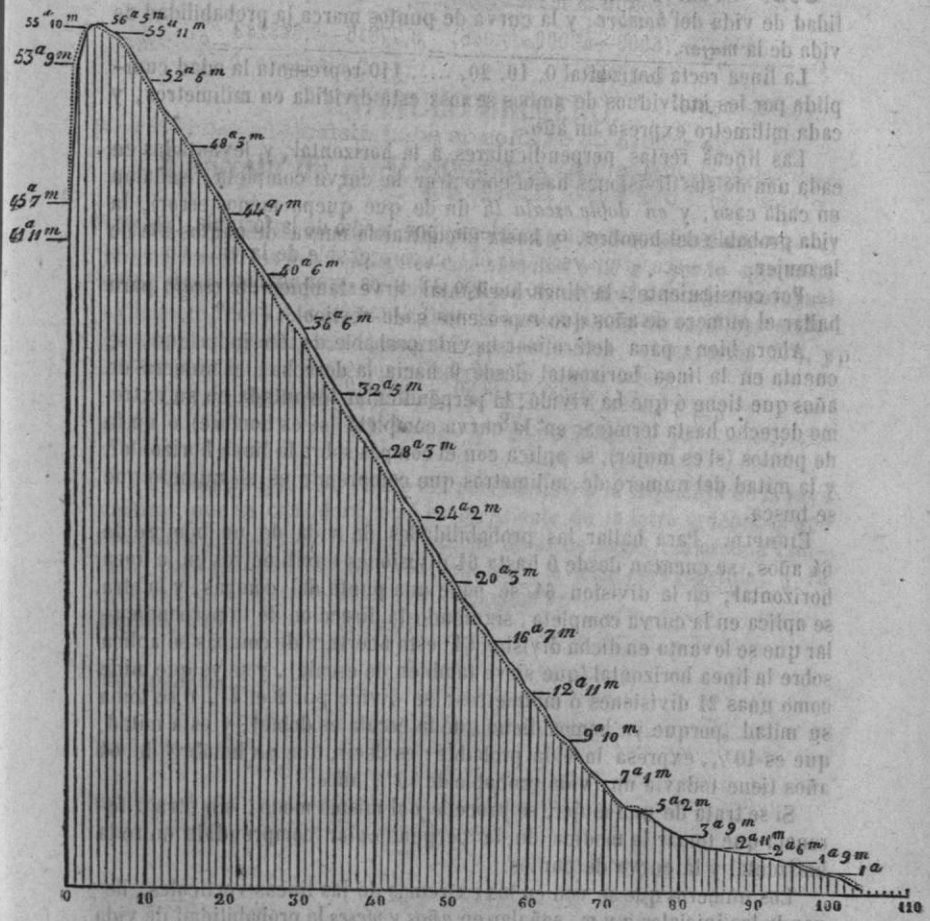
Se puede resolver este problema por medio de la fórmula [1]; mas para esto es necesario averiguar el tiempo probable de la vida de la persona en cuestion, siendo este tiempo 10 años próximamente, segun la figura de la página siguiente, se tendrá como en el ejemplo 1.°

$$(1+r)^t=1{,}62888$$

y $$c=\frac{16000\times 1{,}62888-16000}{0{,}05\times 1{,}62888}=\frac{10061{,}08}{0{,}081444}=123533 \text{ reales.}$$

CURVAS DE PROBABILIDAD DE LA VIDA

construidas segun los datos de Demonferrand.



274. *Se llama* VIDA PROBABLE, *correspondiente á una edad determinada, el tiempo que debe trascurrir para que el número de individuos de aquella edad se halle reducido á la mitad.*

Así, cuando se dice, por ejemplo, que la probabilidad de la vida de los hombres de 20 años es 44 y un mes, se entiende que de los que cumplen 20 años la mitad mueren ántes que trascurran otros 44 y un mes, es decir, ántes de cumplir 64 y un mes, y la otra mitad despues.

UNED

Explicacion de la figura.

275. La curva señalada con una linea completa, marca la probabilidad de vida del *hombre*, y la curva de puntos marca la probabilidad de vida de la *mujer*.

La linea recta horizontal 0, 10, 20, ..., 110 representa la edad cumplida por los individuos de ambos sexos: está dividida en milímetros, y cada milímetro expresa un año.

Las líneas rectas perpendiculares á la horizontal, y levantadas en cada una de sus divisiones hasta encontrar la curva completa, señalan en cada caso, y *en doble escala* (á fin de que quepa ménos error), la vida probable del hombre, y hasta encontrar la curva de puntos, la de la mujer.

Por consiguiente, la línea horizontal sirve tambien de *escala* para hallar el número de años que representa cada vertical.

Ahora bien: para determinar la vida probable de un individuo, se cuenta en la línea horizontal desde 0 hácia la derecha, el número de años que tiene ó que ha vivido; la perpendicular levantada en su extremo derecho hasta terminar en la curva completa (si es hombre) ó en la de puntos (si es mujer), se aplica con el compás sobre la línea horizontal, y la mitad del número de milímetros que comprende es el número que se busca.

Ejemplo. Para hallar las probabilidades de vida de un hombre de 64 años, se cuentan desde 0 hasta 64 divisiones ó milímetros en la línea horizontal; en la division 64 se pone una punta del compás, y la otra se aplica en la curva completa, siguiendo la direccion de la perpendicular que se levanta en dicha division 64: esta abertura de compás se aplica sobre la línea horizontal (que sirve tambien de escala), y se ve que mide como unas 21 divisiones ó milímetros: se divide por 2 el 21, ó se toma su mitad (porque ya hemos dicho que la escala es doble), y esta mitad, que es 10 ½, expresa la vida probable: es decir, que un hombre de 64 años tiene todavía una vida probable de 10 ½ años.

Si se trata de una mujer, se procede del mismo modo, sin otra diferencia que tomar la medida de la perpendicular comprendida entre la horizontal y la curva de puntos.

Los números que se ven en los extremos de las líneas verticales, llevando las iniciales *a* y *m*, señalan en *años* y *meses* la probabilidad de vida del hombre de 5 en 5 años. Exceptúanse los cinco primeros números de la izquierda, los cuales representan: el primero (41 años, 11 meses), el punto de partida de la curva completa, ó la probabilidad de la vida del *hombre* recien nacido hasta un mes: el segundo (43 años, 7 meses), el arranque de la curva de puntos, ó la probabilidad de la vida de la *mujer* recien nacida hasta un mes; y los tres siguientes la probabilidad del hombre á los *uno*, *dos* y *tres* años respectivamente.

COMPLEMENTO

DEL ALGEBRA ELEMENTAL.

CAPITULO PRIMERO.

Ejemplo de multiplicacion de polinomios.

276. Si hubiésemos de multiplicar $x^2+ab+bx+ax$ por $cx+x^2-x-c$, ordenariamos los dos polinomios con relacion á la x, por lo que se ha dicho (**38**); mas como hay términos donde la letra *ordenatriz* tiene igual exponente, conviene tambien (para la reduccion de los términos semejantes, que aquellos se reduzcan á uno solo (**36**, observacion 2.ª), y los dos polinomios propuestos se escribirán de este modo:

$$x^2+(a+b)x+ab \quad \text{y} \quad x^2+(c-1)x-c,$$

ó así

$$\begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab \\ +b & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l|l} x^2+c & x-c. \\ -1 & \end{array}$$

La cantidad que está dentro del paréntesis ó á la izquierda de la raya vertical (que se considera como el *coeficiente* de la letra ordenatriz que está fuera del paréntesis ó á la derecha de dicha raya), se ordena tambien, para mayor facilidad, con relacion á la letra más repetida; y la operacion se ejecuta como á continuacion se ve:

Multiplicando. . . $\begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab \\ +b & \end{array}$

Multiplicador. . . $\begin{array}{l|l} x^2+c & x-c \\ -1 & \end{array}$

Producto por x^2. . $\begin{array}{l|ll} x^2+a & x^3+abx^2 & \\ +b & & \end{array}$

Id. por $+c$ $\begin{array}{l|l} x & \\ -1 & \end{array}$ . . . . $\begin{array}{l|lll} +c & x^2+ac & x^2+abc & x \\ -1 & +bc & -ab & \\ & -a & & \\ & -b & & \end{array}$

Id. por $-c$. . . . $\begin{array}{lll} -cx^2 & -ac & x-abc \\ & -bc & \end{array}$

Producto total reducido. . . . . $\begin{array}{l|lll} x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x-abc \\ +b & +ac & -ab & \\ +c & +bc & -ac & \\ -1 & -a & -bc & \\ & -b & & \\ & -c & & \end{array}$

La determinacion del primer producto parcial y del tercero no ofrece

dificultad por ser x^3 y $-c$ expresiones sencillas; no sucede otro tanto con el multiplicador parcial $+c\,|\,x$. Para multiplicar este por el primer
$\quad\quad\quad

Al dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor, fácilmente se halla que x^4 dividido por x^2 da x^2 por cociente; mas para dividir el *coeficiente* de x^4 por el de x^2, como uno y otro son polinomios se ejecutará esta operacion parcial tomándolos ordenados conforme estan de esta manera:

$$\begin{array}{r|l} 6a^4-3a^3b+2a^2b^2-ab^3 & 2a^2-ab \\ +3a^3b & \hline \\ \hline & 3a^2+b^2 \\ +2a^2b^2-ab^3 & \\ -2a^2b^2+ab^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Siendo $3a^2+b^2$ el cociente de los coeficientes de los dos primeros términos, el primer término del cociente será:

$$(3a^2+b^2)x^2 \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} 3a^2 \\ +b^2 \end{array} \Big| x^2$$

De la misma manera para determinar el segundo término del cociente será preciso dividir el coeficiente $-2a^3+ab$ del primer término del resto, por el coeficiente $2a^2-ab$ del primero del divisor, cuya division se ejecuta asi:

$$\begin{array}{r|l} -2a^3+ab & 2a^2-ab \\ -ab & \hline \\ \hline & -1 \\ 0 & \end{array}$$

Siendo -1 este cociente, como por otra parte $x^2:x^2=x$, el segundo término del cociente será

$$-1\times x=-x.$$

278. Del procedimiento de la ordenacion se infiere:

1.° Que el cociente será el mismo, cualquiera que sea la letra ordenatriz.

2.° Que tampoco será el cociente distinto aunque la letra ordenatriz sea distinta en cada division parcial, es decir, aunque para hallar el primer término del cociente se ordenen dividendo y divisor con relacion á una letra, y para hallar el segundo se ordenen el primer resto y el divisor con relacion á otra, etc.

3.° Que se puede omitir la ordenacion, con tal que se cuide de dividir el término donde una letra tiene mayor exponente en el dividendo por aquel donde esa misma letra tiene mayor exponente en el divisor (*).

(*) Si se omite la ordenacion y se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, etc., siguiendo en lo demas la regla dada, no se hallará cociente exacto aunque el polinomio dividendo sea divisible por el polinomio divisor.

Es tal, sin embargo, el enlace de las operaciones algebraicas, que en cualquiera estado que se halle una division sin ordenar, si el último resto y el divisor se ordenan, todavía resultará (despues de reducidos los términos semejantes) el mismo co-

De todo lo que se deduce que la ordenacion tal como se prescribe en la regla, tiene por objeto determinar el cociente con la mayor facilidad posible.

Ejecútese la division del polinomio

$2a^3bx^4+abx^5-a^3b^2x-2ab^3x^3+a^3bx^3-b^3x^3$ por $2ax+x^2+a^2$, ordenándolos con relacion á las diferentes letras que contienen, empezando, para apreciar mejor la ventaja de la ordenacion, por la letra más repetida con diferentes exponentes.

Ordenando los polinomios dados con relacion á la x, que es la letra más repetida con diferentes exponentes, se tendrá:

$$\begin{array}{r|l|l} abx^5+2a^3bx^4+a^3b & x^3-2ab^2x^2-a^2b^2x & x^3+2ax+a^2 \\ -b^3 & & abx^2-b^2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2a^3bx^4-a^3bx^3 \\ \hline 1.^{er}\text{ resto.}\ldots\ldots\ldots -b^3x^3-2ab^2x^2-a^2b^2x \\ \qquad\qquad +2ab^2x^2+a^2b^2x \\ \hline 2.^{o}\text{ resto.}\ldots\ldots\qquad 0 \end{array}$$

Ordenando con relacion á la a, tendrémos:

$$\begin{array}{r|l|l} bx^3a^3-b^3x & a^3-2b^2x^2 & a-b^3x^3 \\ +2bx^4 & +bx^3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l} a^2+2xa+x^2 \\ \hline bx^3a-b^3x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2bx^4a^2\ -bx^3a \\ \hline 1.^{er}\text{ resto.}\ldots\ldots -b^3xa^3-2b^3x^2a-b^3x^3 \\ \qquad\qquad +2b^3x^2a+b^3x^3 \\ \hline 2.^{o}\text{ resto.}\ldots\ldots\qquad 0 \end{array}$$

Ordenando con relacion á la b, y teniendo presente que no entrando en el divisor puede suponerse en cada uno de sus términos con el exponente cero (**15**, 2.°), se tendrá:

$$\begin{array}{r|l|l} -x^3 & b^3 & +ax^5 \\ -2ax^2 & & +2a^2x^4 \\ -a^2x & & +a^3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l|l} b & x^3 & b^3 \\ & +2ax & \\ & +a^2 & \\ \hline & -xb^3+ax^3b & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \hline 1.^{er}\text{ resto.}\ldots\ldots\ldots\ldots +ax^5 \\ \qquad\qquad +2a^2x^4 \\ \qquad\qquad +a^3x^3 \\ \hline 2.^{o}\text{ resto.}\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} b \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

---

ciente exacto, que se hubiera obtenido, si desde el principio de la operacion se hubiese ordenado.

En efecto, sea A el dividendo, B el divisor, Q el cociente exacto que resultaria ordenando A y B desde el principio de la operacion, y q la parte del cociente hallada sin ordenar.

El resto último de la division sin ordenar seria: $A-Bq$.

El cociente de este resto por el divisor, ordenados los dos: $\frac{A-Bq}{B}=Q-q$.

Este cociente, sumado con la parte hallada sin ordenar, seria por fin, $Q-q+q=Q$.

UNED

1.ª division parcial

$$\begin{array}{r|l} -x^3-2ax^2-a^2x & x^2+2ax+a^2 \\ \cline{1-1} +2ax^2+a^2x & \overline{-x} \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2.ª division parcial

$$\begin{array}{r|l} ax^5+2a^2x^4+a^3x^3 & x^3+2ax+a^2 \\ \cline{1-1} -2a^2x^4-a^3x^3 & \overline{ax^2} \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Se ve, pues, que el cociente es igual en los tres casos; pero la division es más fácil ordenando con relacion á la x, que es la letra que se encuentra más repetida, y más difícil cuando se ordena con relacion á la b, que es la que ménos se repite en el dividendo y divisor.

279. Cuando solo se quiera averiguar si la division es ó no posible, por preferirse la simple indicacion de la operacion á la expresion mista que produce la trasformacion del núm. **49**, ó por cualquiera otra causa, se conocerá la imposibilidad:

1.° Si en el divisor existe alguna letra que no hay en el dividendo, porque el cociente no contendrá dicha letra, y un polinomio que no contiene una letra, multiplicado por otro que la contiene, no puede producir un tercero independiente de la misma, como es el dividendo.

La division de $7a^3+5a^2-a$ por a^2-b es imposible.

2.° Cuando el término (ó grupo de términos) donde una letra tiene el mayor ó menor exponente en el dividendo no sea divisible por el primer término (ó grupo de términos) donde la misma letra tiene el mayor ó menor exponente en el divisor. Porque ordenando con relacion á dicha letra, los términos donde tenga el mayor ó menor exponente en el dividendo serán el primero y último términos de este polinomio, y los del divisor serán igualmente el primero y último del mismo, cuyos cocientes respectivos, esto es, el del primero del dividendo por el primero del divisor, y del último por el último, deben ser el primero y último términos del cociente.

Así, $5a^6b^4-2a^5b^3+6b^5a^4b^5+3a^3b-a^3b^4$ dividido por $a^2b-a^2b^3$ no da cociente exacto, porque $3a^3b$ no es divisible por a^2b, que son los términos donde la b tiene menor exponente en el dividendo y divisor.

3.° Cuando se llegue á un término del cociente donde la letra por que se ordena (por las potencias descendentes), tenga un exponente, que sumado con el que la misma letra tiene en el último del divisor, dé una suma menor que el exponente que dicha letra tiene en el último del dividendo. Porque el último término del cociente, multiplicado por el último del divisor, ha de dar el último del dividendo: mas como en los cocientes parciales sucesivos la letra ordenatriz irá siendo menor cada vez, resulta que no se puede encontrar ningun término que multiplicado por el último del divisor produzca el último del dividendo; luego la division es imposible.

UNED

Esta division

$$\begin{array}{r|l} 6a^8-4a^7+3a^6 & a^3-a^2 \\ +6a^7 & \overline{6a^5+2a^4+5a^3} \\ \hline 2a^7+3a^6 & \\ +2a^6 & \\ \hline 5a^6 & \end{array}$$

es irrealizable, porque el exponente 3 de la a en el último término del cociente, sumado con el 2 de la misma en el último del divisor, da por suma 5, menor que el exponente 6 de la a en el último del dividendo.

4.° Cuando en el dividendo entra una letra que no hay en el divisor, si todo este no divide exactamente á cada uno de los coeficientes de dicha letra. En efecto, siendo x la letra expresada, la forma del dividendo ordenado con relacion á ella será: Ax^3+Bx^2+Cx+D,

ó $$Ax^3+Bx^2+Cx+Dx^0;$$

y si llamamos M al divisor, se hallará por cociente (**46**)

$$\frac{A}{M}x^3+\frac{B}{M}x^2+\frac{C}{M}x+\frac{D}{M}x^0;$$

luego si los diferentes coeficientes de dicha letra x no son divisibles por M, el cociente no será entero (**46**, obs.)

5.° La division de un monomio por un polinomio no da cociente exacto. Porque si el cociente fuese monomio, multiplicado por el divisor daria por producto un polinomio de igual número de términos: si fuese polinomio, el producto por el divisor tendria á lo ménos dos términos (**39**, 2.ª); luego no hay ninguna cantidad entera monomia ni polinomia que multiplicada por el divisor produzca el dividendo, luego la division es imposible.

Si se tratase de hallar un cociente que fuese entero solo con relacion á la letra ordenatriz, es decir que esta no se hallase en ningun término por denominador, fuesen ó no quebrados sus coeficientes; en tal caso es evidente que se podria continuar la division hasta que en el primer término de algun resto la letra ordenatriz tenga menor exponente que en el primero del divisor. De manera que si el mayor exponente de dicha letra en el divisor es la unidad, se puede continuar la operacion hasta que el último resto no contenga á la letra ordenatriz.

Otros EJEMPLOS *de la division de polinomios.*

280. La resolucion general de los ejemplos de que vamos á ocuparnos, tiene por fundamento el siguiente

TEOREMA. *Si un polinomio de la forma* $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+U$ *se divide por el binomio* $x-a$, *deja por residuo* $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+TA+U$, *esto es, el mismo polinomio dividendo reemplazando* x *por* a.

UNED

En efecto, ejecutando la division se hallará cierto número de términos en el cociente, que representarémos por Q, y un resíduo independiente de x (**279**, al fin), que llamarémos R; luego se tendrá

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+U=Q(x-a)+R.$$

Como x puede tener un valor cualquiera en la precedente igualdad, subsistirá esta aunque se reemplace x por a, sin que R varie por ser independiente de x; mas entónces se tiene

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+Ta+U=Q(a-a)+R=Q\times 0+R=R,$$

igualdad que demuestra el teorema.

Corolario. *Si un polinomio se reduce á cero cambiando* x *en* a, *dividido por* x — a *dará cociente exacto;* porque el residuo es igual á cero.

Así, x^m-a^m es divisible por $x-a$; puesto que el residuo habia de ser $R=a^m-a^m=0$.

Ejecútese esta division:

$$\begin{array}{l|l}
x^m-a^m & x-a \\
+ax^{m-1} & \hline
\cline{1-1} & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1} \\
ax^{m-1}-a^m & \\
+a^2x^{m-2} & \\
\cline{1-1}
a^2x^{m-2}-a^m & \\
\cdots\cdots & \\
a^{m-2}x^2-a^m & \\
+a^{m-1}x & \\
\cline{1-1}
a^{m-1}x-a^m & \\
+a^m & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

281. Traducida la fórmula del cociente que se acaba de hallar al lenguaje comun, nos da la regla siguiente:

La primera parte del binomio, ó sea x, *se halla en todos los términos ménos en el último, y la* a *en todos ménos en el primero: el exponente de x en el primer término es el mismo que lleva en el dividendo disminuido en una unidad, en el segundo disminuido en dos, y así sucesivamente hasta que en el último término se reduce á cero: el exponente de* a, *por el contrario, es cero en el primer término,* 1 *en el segundo,* 2 *en el tercero, y así sucesivamente hasta el último término, donde es igual al que la misma letra lleva en el dividendo disminuido en una unidad. El número de términos es igual al exponente de* a *ó* x *en el dividendo: todos son positivos y no tienen coeficiente numérico.*

Efectúense por esta regla las divisiones siguientes:

1.ª $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$ 2.ª $\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=x^2+ax+a^2$.

3.ª $\dfrac{x^4-a^4}{x-a}=x^3+ax^2+a^2x+a^3$ 4.ª $\dfrac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$.

UNED

OBSERVACION. La fórmula precedente sirve tambien para hallar el cociente en el supuesto de que se cambie el signo á la a (**41**), y se hallará entónces, *siendo* m *par*,

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\mp\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1},$$

cuya fórmula no se distingue de la anterior sino en que los signos son alternativamente positivos y negativos.

Así $$\frac{x^4-a^4}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3.$$

Si m fuese *impar*, tendriamos

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\mp\ldots-a^{m-2}x+a^{m-1},$$

fórmula que solo se distingue de la que precede en que al último término le corresponde ser positivo, siendo negativo en la precedente, por ser par el número de sus términos. Así

$$\frac{x^5+a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4.$$

282 La expresion $\frac{x^m+a^m}{x-a}$ no da cociente exacto, pues el resto de la division es (**280**) $a^m+a^m=2a^m$; y la fórmula de este cociente (que puede deducirse de una manera análoga á la del número **281**), será

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}\ (*).$$

OBSERVACION. Cambiando el signo de a en la fórmula inmediata, daria *siendo* m *par*,

---

(*) De la expresion más general $\frac{x^{rm}-a^{rm}}{x^r-a^r}$, se podrian deducir otras fórmulas análogas á las precedentes.

En efecto, haciendo $x^r=X$, y $a^r=A$ será (**281**, obs.)

$$\frac{X^m-A^m}{X-A}=X^{m-1}+AX^{m-2}+A^2X^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+A^{m-2}X+A^{m-1},$$

y volviendo á poner en lugar de X y A sus valores, tendriamos:

$$\frac{x^{rm}-a^{rm}}{x^r-a^r}=(x^r)^{m-1}+a^r(x^r)^{m-2}+(a^r)^2(x^r)^{m-3}+\ldots+(a^{rm-1})=$$

$$x^{rm-r}+a^rx^{rm-2r}+a^{2r}x^{rm-3r}+\ldots+a^{rm-r}.$$

UNED

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\mp\ldots\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1}+\frac{2a^m}{x+a};$$

y *siendo* m *impar*.

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\mp\ldots\ldots-a^{m-2}x+a^{m-1}-\frac{2a^m}{x+a}.$$

CAPITULO III.

Potencias de las cantidades algebráicas.

ARTICULO PRIMERO.

Coordinaciones, permutaciones y combinaciones.

Coordinaciones.

283. *Se llaman* COORDINACIONES *los diferentes grupos que se pueden formar con varios elementos, entrando en cada uno igual número de estos; de modo que los grupos solo se distingan en algun elemento ó en el modo con que estan colocados.*

Las coordinaciones se llaman BINARIAS, TERNARIAS, etc., *segun que el número de elementos de cada grupo sea dos, tres*, etc.

284. En las coordinaciones hay dos problemas generales que resolver: 1.° *formar las coordinaciones binarias, ternarias*, etc., *de un número cualquiera de elementos*: 2.° *determinar las que pueden formarse conociendo el número de elementos y el órden de las coordinaciones.*

285. 1.er PROBLEMA. **Sea formar las coordinaciones binarias, ternarias, etc., de los elementos ó letras** a, b, c, d.

Si al lado de la a colocamos sucesivamente una por una las demás letras, al lado de la b una por una las letras restantes, y repetimos igual operacion con las c y d, se tendrán los siguientes grupos.

$$\begin{matrix} ab, & ba, & ca, & da, \\ ac, & bc, & cb, & db, \\ ad, & bd, & cd, & dc, \end{matrix}$$

que serán todas las coordinaciones binarias de las cuatro letras ó elementos dados; porque como al lado de cada letra se ha colocado cada una de las restantes, cualquier otro grupo de dos, que se formase, seria necesariamente la repeticion de uno de los anteriores.

Siendo aplicable el mismo procedimiento á otro ejemplo de cualquier número de elementos, resulta que

UNED

Para formar las coordinaciones binarias de m *elementos, basta colocar al lado de cada elemento uno por uno los restantes.*

Si al lado de la primera coordinacion binaria *ab*, colocamos una por una las letras restantes, y se repite lo mismo con la segunda *ac*, con la tercera, cuarta, etc., se tendrán los grupos siguientes

abc, bac, cab, dab,
abd, bad, cad, dac,
acb, bca, cba, dba,
acd, bcd, cbd, dbc,
adb, bda, cda, dca,
adc, bdc, cdb, dcb,

que serán todas las coordinaciones ternarias de los cuatro elementos dados; porque como al lado de cada coordinacion binaria posible, se han colocado cada uno de los elementos que no entran en ella, cualquier otro grupo de tres, que se formase, seria la repeticion de uno de los anteriores.

Siendo aplicable igual procedimiento á cualquier otro número de elementos, resulta que

Para formar las coordinaciones ternarias de m *elementos, se forman primero las binarias, y al lado de cada una de estas se colocan uno por uno los elementos restantes.*

De igual manera se haria ver que

Para formar las coordinaciones cuaternarias se forman las ternarias, y al lado de cada una de estas se colocan uno por uno los elementos restantes.

Y en general que

Para formar las coordinaciones del órden n *de* m *elementos, se formarán primero las del órden* n—1, *y al lado de cada una de estas se colocarán uno por uno los elementos restantes.*

Ejemplo. Fórmense todos los números posibles de á tres cifras diferentes, con los pares 2, 4, 6, 8.

Las coordinaciones binarias serán (segun la regla precedente)

24, 42, 62, 82,
26, 46, 64, 84,
28, 48, 68, 86,

Las coordinaciones ternarias son (segun la regla dada para este caso)

246, 426, 624, 824,
248, 428, 628, 826,
264, 462, 642, 842,
268, 468, 648, 846,
284, 482, 682, 862,
286, 486, 684, 864,

que son los números pedidos.

UNED

280. 2.° PROBLEMA. **Sea determinar el número de coordinaciones *binarias*, *ternarias*, etc., que pueden formarse con *m* elementos.**

Como las coordinaciones binarias con *m* elementos se forman colocando al lado de cada uno los restantes, y estos son $m-1$, cada elemento da $m-1$ coordinaciones binarias; luego los *m* darán $m(m-1)$.

Llamando, pues, $Coord.\ {}^{2}_{m}$ las coordinaciones binarias de *m* elementos se tendrá

$$Coord.\ {}^{2}_{m} = m(m-1).$$

Como las coordinaciones ternarias se forman colocando al lado de cada binaria uno por uno los elementos restantes, y estos son $m-2$, cada coordinacion binaria da $m-2$ ternarias, luego las $m(m-1)$ binarias darán

$$Coord.\ {}^{3}_{m} = m(m-1)(m-2).$$

Por razones análogas se tendrá

$$Coord.\ {}^{4}_{m} = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Y en general

$$Coord.\ {}^{n}_{m} = m(m-1)(m-2).....(m-n+1) \qquad [1].$$

OBSERVACION. Para hacer más fácilmente aplicacion de la fórmula general, nótese que el número de factores es igual al grado de las coordinaciones, que el primer factor es el número de elementos, y cada uno de los siguientes va disminuyendo una unidad.

EJEMPLO. **¿De cuántas maneras se podrán colocar 30 estudiantes en un aula que tiene 6 bancos de 5 asientos cada uno?**

Haciendo en la fórmula general $m=30$, y sabiendo que $n=5$, se tendrá

$$Coord.\ {}^{5}_{30} = 30\times29\times28\times27\times26 = 17\,100\,720\ (*).$$

Permutaciones.

287. *Se llaman* PERMUTACIONES *las coordinaciones en que todos los elementos entran en cada grupo*; de manera, que cuando los elementos se consideran como cantidades separadas por el signo de multiplicar, las permutaciones de un mismo número de elementos son siempre productos iguales.

De esta definicion se infiere que

Para formar las permutaciones de n elementos se forman primero las coordinaciones binarias, luego las ternarias, cuaternarias, etc. hasta el

---

(*) Si se empleasen 5 minutos en cada colocacion, tardarian más de 160 años en colocarse de todas las maneras posibles.

UNED

órden n, esto es, hasta que entren los *n* elementos en cada grupo, y estos grupos formarán las permutaciones pedidas.

Ejemplo. **Fórmense todas las palabras posibles con las cuatro letras siguientes, entrando las cuatro en cada palabra:**

a, o, s, y.

Coordinaciones binarias de estas cuatro letras

ao, oa, sa, ya,
as, os, so, yo,
ay, oy, sy, ys.

Id. ternarias de las mismas letras

aos, oas, sao, yao,
aoy, oay, say, yas,
aso, osa, soa, yoa,
asy, osy, soy, yos,
ayo, oya, sya, ysa,
ays, oys, syo, yso,

Id. cuaternarias de las cuatro letras ó sean *permutaciones* de las mismas.

aosy, oasy, saoy, yaos,
aoys, oays, sayo, yaso,
asoy, osay, soay, yoas,
asyo, osya, soya, yosa,
ayos, oyas, syao, ysao,
ayso, oysa, syoa, ysoa.

De la misma definicion se deduce que

Haciendo en la fórmula general [1] $m=n$, se tendrá el número de permutaciones de *n* elementos; de modo que representando por P_n el número de estos grupos, se tendrá

$$P_n = n(n-1)(n-2).....(n-n+1),$$

ú observando que el último factor sería 1, el penúltimo 2, el anterior 3, etc., y escribiendo estos factores en un órden inverso,

$$P_n = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot.....n \qquad [2]$$

De esta fórmula general, se deducen las particulares

$$P_2=1\cdot2, \quad P_3=1\cdot2\cdot3, \quad P_4=1\cdot2\cdot3\cdot4, \text{ etc.}$$

Ejemplo. **¿Cuántas colocaciones distintas puede dar un jugador de malilla á las doce cartas que tiene en la mano?**

El número de colocaciones es evidentemente el de permutaciones de 12 elementos; haciendo, pues, en la fórmula general [2] $n=12$, se tendrá

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12=479\,001\,600.$$

UNED

que es el número de maneras distintas en que puede colocar sus cartas.

Combinaciones.

288. *Se llaman* COMBINACIONES *las coordinaciones que solo se distinguen por uno ó más de los elementos que entran en los grupos;* de modo que cuando los elementos se consideran como cantidades separadas por el signo de multiplicar, las combinaciones forman siempre productos distintos, aunque de igual número de factores.

Las combinaciones se llaman binarias, ternarias, etc., segun que el número de elementos de cada grupo sea dos, tres, etc.

289. Aquí, lo mismo que en las coordinaciones y permutaciones, se deben resolver dos problemas generales: 1.° *formar las combinaciones binarias, ternarias, etc., de un número cualquiera de elementos:* 2.° *determinar las que pueden formarse conociendo el número de elementos y el órden ó grado de las combinaciones.*

290. 1.er PROBLEMA. **Sea formar las combinaciones binarias, ternarias, etc., de los elementos ó letras colocadas en fila**

$$a, b, c, d.$$

Si al lado de la letra *a* colocamos una por una las siguientes, al lado de la letra *b* se colocan una por una las que siguen, etc., se tendrán estos grupos

$$\begin{matrix} ab, & bc, & cd. \\ ac, & bd, & \\ ad, & & \end{matrix}$$

que serán todas las combinaciones binarias que pueden formarse con las cuatro letras dadas; porque una letra cualquiera forma un grupo con cada una de las otras, y por lo tanto cualquier otro que se formase sería idéntico con alguno de los anteriores, ó al ménos constaria de los mismos elementos.

Como igual raciocinio puede hacerse con otro número cualquiera de elementos, se infiere que

Para formar las combinaciones binarias de m *elementos, basta colocar estos por órden, y luego aparte* y *al lado de cada uno se colocan uno por uno los siguientes.*

Si al lado de la primera combinacion *ab* binaria colocamos una por una las letras que siguen al elemento *b*, que es el último de los que componen dicha combinacion binaria, y repetimos igual operacion con los demás grupos, se tendrán los siguientes

$$\begin{matrix} abc, & bcd, \\ abd, & \\ acd, & \end{matrix}$$

que serán las combinaciones ternarias de las cuatro letras; porque una combinacion binaria cualquiera forma un grupo con cada una de las le-

UNED

tras restantes, y por lo tanto cualquier otro grupo, que se formase con tres elementos, seria idéntico con uno de los precedentes, ó al ménos se compondria de los mismos elementos.

Pudiendo hacerse igual raciocinio con otro número cualquiera de elementos resulta que

Para formar las combinaciones ternarias de m *elementos, colocados por órden, se forman primero las combinaciones binarias de los mismos, y al lado de cada una se colocan uno á uno los elementos que siguen en órden al último de la combinacion binaria.*

De igual manera se haria ver que

Para formar las combinaciones cuaternarias de m *elementos, colocados por órden, se formarian primero las combinaciones ternarias, y al lado de cada una de estas se colocarian uno por uno los elementos que siguen en órden al último de la combinacion ternaria.*

Y en general, que *para formar las combinaciones del órden* n *de* m *elementos ordenados, se forman primero las del órden* n—1, *y al lado de cada una de ellas se colocan uno por uno los elementos que siguen al último de la combinacion del órden* n—1 *de que se trata.*

EJEMPLO. **Fórmense los ternos posibles con los números**

13, 7, 30, 22, 80.

Las combinaciones binarias ó *ambos* de estos números son

13, 7, 7, 30, 30, 22, 22, 80.
13, 30, 7, 22, 30, 80,
13, 22, 7, 80,
13, 80,

Y las ternarias ó *ternos* serán

13, 7, 30, 7, 30, 22, 30, 22, 80.
13, 7, 22, 7, 30, 80,
13, 7, 80, 7, 22, 80,
13, 30, 22,
13, 30, 80,
13, 22, 80,

OBSERVACION. De la regla anterior y práctica de este ejemplo se deduce que formadas las combinaciones del órden *n* de *m* elementos, para obtener las del mismo órden de *m*+1 elementos, basta agregar á las anteriores las que resultan de colocar el nuevo elemento al lado de cada una de las combinaciones del órden *n*—1 de los *m* primeros elementos.

291. 2.° PROBLEMA. **Sea determinar el número de combinaciones binarias, ternarias, etc., que pueden formarse con *m* elementos.**

Segun las definiciones dadas y lo que se observa en la formacion de las coordinaciones y combinaciones de igual número de elementos, una combinacion binaria *ab* produce las coordinaciones *ab* y *ba*, esto es, tantas como permutaciones se pueden hacer con dos elementos, es decir,

UNED

$1\cdot2$ (**287**); luego el número de combinaciones binarias de m elementos, multiplicado por el de permutaciones de dos elementos, producen el número de coordinaciones binarias de los m elementos. Llamando, pues, $Comb.\,{}^{2}_{m}$ el número de combinaciones binarias de dichos m elementos, se tendrá

$$Comb.\,{}^{2}_{m} \times P_2 = Coord.\,{}^{2}_{m}.$$

De donde (**79**)

$$Comb.\,{}^{2}_{m} = \frac{Coord.\,{}^{2}_{m}}{P_2}$$

ó poniendo en lugar del numerador y denominador de este quebrado sus valores (**286** y **287**), se tendrá

$$Comb.\,{}^{2}_{m} = \frac{m(m-1)}{1\cdot2}.$$

Del mismo modo, una combinacion ternaria *abc* produce las coordinaciones ternarias *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, esto es, tantas como permutaciones se pueden hacer con tres elementos; luego el número de combinaciones ternarias de m elementos, multiplicado por el de permutaciones de tres elementos, produce el de coordinaciones ternarias de los m elementos; luego dividiendo estas por las permutaciones resultarán las combinaciones. Luego

$$Comb.\,{}^{3}_{m} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}.$$

De igual manera se tendrá que

$$Comb.\,{}^{4}_{m} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

Y en general

$$Comb.\,{}^{n}_{m} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4.....n} \qquad [3].$$

Observacion. Si de m números diferentes colocados en una urna se extraen n; estos formarán una combinacion, y los $m-n$ que quedan en ella formarán otra distinta; y como esto se repetiria tantas veces cuantas se ejecutase una extraccion de m números, que se diferenciasen de los anteriores en uno ó más elementos, resulta que para cada combinacion del órden n de m números se concibe otra del órden $m-n$, ó que *el número de combinaciones de* m *elementos, tomados de* n *en* n, *es igual al de* m *elementos tomados de* m — n *en* m — n.

Ejemplo. **¿Cuántos ternos se puedon formar con los 90 números de la loteria primitiva?**

El número de ternos es el de combinaciones ternarias, que pueden

UNED

hacerse con 90 elementos; haciendo, pues, $m=90$ y $n=3$ en la fórmula general anterior, se tendrá

$$\textit{Número de ternos}=\frac{90\times89\times88}{1\cdot2\cdot3}=117480.$$

APLICACIONES.

292. *Se llama* PROBABILIDAD *de un hecho la relacion del número de casos favorables al número de casos posibles, cuando todos son posibles igualmente.*

Así, si de una urna que contiene 40 bolas, 30 blancas y 10 negras, se extrae una al acaso, la probabilidad de que sea blanca es $\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$, y la de que sea negra $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$.

OBSERVACION. En cada acontecimiento incierto hay dos probabilidades contrarias; la de que del acontecimiento se verificará, y la de que no, las cuales sumadas componen la unidad. En el ejemplo anterior $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Esta unidad puede compararse á la *certeza*.

Otros PROBLEMAS.

293. **1.° ¿Qué probabilidad tenia un jugador de lotería primitiva de acertar un extracto cualquiera, un extracto determinado, un terno, un cuaterno y un quinterno?**

1.° *Un extracto cualquiera.* El número de casos favorables al jugador es 5, el de casos posibles es 90; luego la probabilidad favorable al jugador es $\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$, y la contraria ó la del Estado (**292**, obs.) $\frac{17}{18}$.

2.° *Un extracto determinado.* El número de casos favorables al jugador es 1, el de casos posibles 90; luego la probabilidad favorable al jugador es $\frac{1}{90}$, y la contraria ó favorable al Estado $\frac{89}{90}$.

3.° *Ambo.* El número de casos favorables al jugador es el de combinaciones binarias con los 5 extractos, esto es (**291**), $\frac{5\times4}{1\cdot2}=10$, el de casos posibles es el de combinaciones binarias con 90 elementos, esto es (**291**) $\frac{90\times89}{1\cdot2}=4005$; luego la probabilidad del jugador es $\frac{10}{4005}=\frac{1}{400,5}$, y la del Estado (**292**, obs.) $\frac{399,5}{400,5}$.

4.° *Terno.* El número de casos favorables al jugador es el de combinaciones ternarias con los 5 extractos; esto es (**291**) $\frac{5\times4\times3}{1\cdot2\cdot3}=10$, el de

casos posibles es el de combinaciones ternarias con los 90 números, esto es (**291**) $\frac{90\times89\times88}{1\cdot2\cdot3}=117480$; luego la probabilidad favorable al jugador es $\frac{10}{117480}=\frac{1}{11748}$, y la del Estado $\frac{11747}{11748}$.

5.° *Cuaterno.* La probabilidad del jugador es $\frac{1}{511038}$, la del Estado $\frac{511037}{511038}$.

6.° *Quinterno.* La probabilidad del jugador es $\frac{1}{43949268}$, la del Estado $\frac{43949267}{43949268}$.

Observacion. De los números que preceden se deduce que para que hubiese igualdad entre el jugador de lotería primitiva y el Estado, debería éste abonar 17 por 1 en la jugada á un extracto cualquiera: 89 por 1 en la jugada á extracto determinado: 399 $\frac{1}{2}$ por 1 en los ambos: 11747 por 1 en los ternos; 511037 por 1 en los cuaternos; y 43949267 por 1 en los quinternos (*).

294. 2.° **¿Qué probabilidad tiene un jugador de tresillo de recibir espada y basto en una mano (**)?**

(*) El Estado abonaba 10 por 1 en las jugadas á cualquier extracto: 50 por 1 en las jugadas á extracto determinado: 238 por 1 en los ambos solos (170 más el 40 por 100); 4250 por 1 en los ternos solos (2125 más el 100 por 100).

En las jugadas á terno y ambo estaban dispuestas las tarifas de modo que habia la misma probabilidad de ganancia para el Estado que en las jugadas á ambo solo y á terno *seco*.

De aquí se deduce que la ganancia probable del Estado en esta lotería era próximamente el 41 por 100 en las jugadas á cualquier extracto, el 44 por 100 en las jugadas á extracto determinado, el 40 por 100 en los ambos y el 64 por 100 en los ternos.

Esta injustificada desigualdad, la aficion desordenada que entre los jugadores se iba cada dia aumentando, hasta el punto de aventurar imprudentemente cuantiosos intereses, y áun de poner en peligro más ó ménos remoto el crédito de la Nacion, obligaron al Gobierno á suprimirla á principios del año de 1862. Tan moralizadora medida merece los más sinceros elogios de las personas verdaderamente ilustradas.

No se admitian jugadas al cuaterno ni al quinterno. Bien pensado. Para formarse una idea aproximada de la dificultad de acertar en estas jugadas, basta saber que aunque se celebrasen 20 extracciones cada año, se necesitarian más de 2500 años para que saliesen todos los cuaternos, y más de 2.000,000 de años para que saliesen todos los quinternos; y esto en el supuesto más favorable de que no se repitiese ninguno.

(**) La resolucion de estos problemas se facilita mucho con la teoría del *cálculo de las probabilidades*. La probabilidad de recibir una carta, la espada por ejemplo, entre las 9 cartas es $\frac{9}{40}$: la de recibir despues el basto de las 39 cartas restantes entre las 8 que le faltan, es $\frac{8}{39}$: luego la probabilidad *compuesta* es

$$\frac{9}{40}\times\frac{8}{39}=\frac{72}{1560}=\frac{3}{65}.$$

El número de casos favorables son las combinaciones binarias que pueden hacerse con las 9 cartas que recibe, esto es, $\frac{9\times8}{1\cdot2}=36$: el de casos posibles es el número de combinaciones binarias que pueden hacerse con 40 cartas, esto es, $\frac{40\times39}{1\cdot2}=780$: luego la probabilidad buscada es

$$\frac{36}{780}=\frac{3}{65}.$$

Tambien se puede plantear de esta otra manera. El número de casos favorables es el de combinaciones del órden 7.°, que se pueden formar con 38 elementos, puesto que rebajando de las 40 cartas espada y basto quedan 38, y combinadas estas de 7 en 7, y agregando á cada una de estas combinaciones las dichas dos cartas, resultan otras tantas combinaciones del órden 9.°, que todas satisfacen al jugador, esto es

$\frac{38\times37\times36\times35\times34\times33\times32}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$: el de casos posibles son las combinaciones del órden 9.° con 40 elementos, esto es, $\frac{40\times39\times38\times37\times36\times35\times34\times33\times32}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$; luego la probabilidad es

$$\frac{\frac{38\times37\times36\times35\times34\times33\times32}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}}{\frac{40\times39\times38\times37\times36\times35\times34\times33\times32}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}}=\frac{1}{\frac{40\times39}{8\cdot9}}=\frac{8\times9}{40\times39}=\frac{9}{5\times39}=\frac{3}{65}.$$

ARTICULO II.

Potencias de los monomios.

295. Sea elevar al cubo el monomio $2a^3bc^2$.

Segun la definicion dada de las potencias (Arit. **56**) y recordando tambien lo expuesto en la multiplicacion de monomios (**34**), se tendrá

$$(2a^3bc^2)^3=2a^3bc^2\times2a^3bc^2\times2a^3bc^2;$$

donde se observa que el coeficiente numérico 2 debe entrar tres veces por factor en el resultado, ó elevado á la tercera potencia: que todas las letras tienen que hallarse en el mismo resultado; y por último, que debiendo entrar el exponente de cada una tres veces por sumando, debe

quedar multiplicado cada uno por el exponente 3 de la potencia.

De modo que $(2a^2bc^3)^3 = 2a^2bc^3 \times 2a^2bc^3 \times 2a^2bc^3 = 8a^6b^3c^9$.

De este procedimiento, aplicable á cualquier otro ejemplo, y de lo dicho (**33**, corol. 2.°) respecto á los signos, se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio á una potencia cualquiera se eleva á la misma potencia el coeficiente numérico: se multiplica el exponente de cada letra por el de la potencia; y si este exponente de la potencia es de grado impar el resultado llevará el mismo signo que el que tenga la cantidad que se eleva ó la raiz, pero si es par *llevará siempre el signo +.*

296. Sea elevar á la cuarta potencia el quebrado $\frac{a^2b^5}{d^3c}$, y se tendrá

$$\left(\frac{a^2b^5}{d^3c}\right)^4 = \frac{a^2b^5}{d^3c} \times \frac{a^2b^5}{d^3c} \times \frac{a^2b^5}{d^3c} \times \frac{a^2b^5}{d^3c} =$$

$$\frac{a^2b^5 \times a^2b^5 \times a^2b^5 \times a^2b^5}{d^3c \times d^3c \times d^3c \times d^3c} = \frac{(a^2b^5)^4}{(d^3c)^4} = \frac{a^8b^{20}}{d^{12}c^4},$$

Luego *para elevar un quebrado á una potencia cualquiera se elevan numerador y denominador á la misma potencia.*

Otros EJEMPLOS *de elevacion de monomios.*

1.° $(\pm 3a^3bc^5)^4 = 81a^{12}b^4c^{20}$.

2.° $(5abc^3m)^3 = 125a^3b^3c^9m^3$.

3.° $(-a^4bd^3)^5 = -a^{20}b^5d^{15}$.

4.° $\left(-\frac{3a^2c}{4bd^3}\right)^4 = \frac{81a^8c^4}{256b^4d^{12}}$.

ARTICULO III.

Fórmula del binomio de Newton.

297. Se puede elevar un polinomio á una potencia cualquiera multiplicándole por sí mismo tantas veces ménos una como unidades tenga el exponente de la potencia: pero este procedimiento seria embarazoso é interminable en algunos casos; por cuya razon *Newton* dedujo una fórmula para elevar un binomio á cualquier potencia sin necesidad de formar las potencias inferiores: cuya fórmula es aplicable con iguales ventajas á la elevacion de toda clase de polinomios.

Ocupémonos de la deduccion de esta fórmula. Al efecto, multiplíquen-

UNED

se entre sí varios binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., cuya primera parte es comun y la segunda distinta, y se tendrá (**38**, 2.°)

$$\begin{array}{l|l|l} & x+a & \\ & x+b & \\ \hline (x+a)(x+b)= x^2+a & x+ab & \\ & b & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} & x+a & & \\ & x+b & & \\ & x+c & & \\ \hline (x+a)(x+b)(x+c)= x^3+a & x^2+ab & x+abc & \\ & b & ac & \\ & c & bc & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} & x+a & & & \\ & x+b & & & \\ & x+c & & & \\ & x+d & & & \\ \hline (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)= x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd & \\ & b & ac & abd & \\ & c & ad & acd & \\ & d & bc & bcd & \\ & & bd & & \\ & & cd & & \end{array}$$

298. Observando la ley de formacion de estos productos se notará que

1.° x tiene en el primer término un exponente igual al número de factores binomios, en el segundo este exponente disminuye una unidad, en el tercero otra, y así sucesivamente hasta el último término, donde no se halla dicha letra, ó puede suponerse que tiene por exponente 0.

2.° El coeficiente de x en el primer término es 1, en el segundo la suma de las segundas partes de los binomios, en el tercero la suma de las combinaciones binarias de las segundas partes de los factores binomios, en el cuarto la suma de las combinaciones ternarias de las mismas segundas partes, y el último se compone del producto de las segundas partes de los binomios.

299. Para cerciorarse de la generalidad de esta ley, supongámosla cierta para $m-1$ binomios, cuyo producto expresarémos por

$$x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+Cx^{m-4}+\ldots\ldots+U,$$

donde A representa la suma de las segundas partes, B la de las combinaciones binarias de las mismas, C la de las combinaciones ternarias, etc.; y multiplicando este polinomio por un nuevo binomio $x+l$, se tendrá

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} & x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+Cx^{m-4}+\ldots\ldots+U & & & \\ & x+l & & & \\ \hline x^m+a & x^{m-1}+B & x^{m-2}+C & x^{m-3}+\ldots\ldots+lU, & \\ l & lA & lB & & \end{array}$$

en cuyo resultado se ve que: 1.° el exponente del primer término es igual al número de los m factores binomios, en el segundo disminuye una unidad, en el tercero otra, y así sucesivamente: 2.° el coeficiente del primer término es 1, el del segundo $A+l$ es la suma de las segun-

das partes de los m factores binomios; el del tercero $B+lA$ es la suma de las combinaciones binarias de las segundas partes de los m binomios (**290**, obs.); y por fin, el último término lU es el producto de las segundas partes de los m factores binomios. Luego si la ley es cierta para $m-1$ factores binomios, lo será para m, es decir, para un número de factores que excede en una unidad á los anteriores: hemos visto que dicha ley es cierta para 4 factores binomios, luego lo será para 5, luego tambien para 6 y así sucesivamente; *luego la ley es general.*

300. Para deducir de esta ley una fórmula general para la elevacion de un binomio á cualquier potencia, hagamos a la segunda parte de todos los factores $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., y el producto anterior se convertirá en

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots\ldots=(x+a)^m=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^m+ & x^{m-1}+ & a^2 & x^{m-2}+a^3 \\ a & a^2 & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^2 & a^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad x^{m-3}+\ldots\ldots+a^m$$

La a se halla repetida por sumando en el coeficiente del segundo término, tantas veces como segundas partes tienen los binomios; y como el número de estos es m, el coeficiente del segundo término será

$$a+a+a+\ldots\ldots=ma.$$

La a^2 se halla tambien repetida por sumando en el coeficiente del tercer término, tantas veces como combinaciones binarias se puedan formar con las m segundas partes; luego el coeficiente del tercer término será (**291**)

$$a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots=\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^2.$$

Por una razon análoga el coeficiente del cuarto término es (**291**)

$$a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3.$$

Y en general el que ocupa el lugar $n+1$ es

$$a^n+a^n+a^n+\ldots\ldots=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}a^n.$$

Sustituyendo estos valores en vez de los coeficientes en el precedente resultado, se tendrá por último

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^2x^{m-2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots\ldots+a^m,$$

UNED

que es la fórmula pedida, la cual se conoce, como ya se ha indicado, con el nombre de *fórmula del binomio de Newton.*

OBSERVACIONES

acerca de la construccion de la fórmula del binomio.

301. 1.ª El término, que ocupa el lugar $n+1$,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}a^n x^{m-n},$$

se llama *término general;* porque de él se deducen el 2.°, 3.°, 4.°, etc., haciendo $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc.

2.ª El exponente de x, ó sea la primera parte del binomio, es m en el primer término, en el segundo disminuye una unidad, y así sucesivamente hasta que en el último término es 0; por el contrario, el de a ó sea de la segunda parte del binomio, en el primer término es 0, en el segundo 1, en el tercero 2, y así sucesivamente aumentando una unidad hasta que en el último término tiene m por exponente.

De donde tambien se infiere que el número de términos de la fórmula es $m+1$.

3.ª El término que ocupa el lugar $n+1$, ya hemos dicho que era el érmino general (obs. 1.ª)

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

ó bien $$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-1)n}a^n x^{m-n}.$$

El que ocupa el lugar n ó sea el precedente (que se puede hallar sustituyendo en el general $n-1$ por n), será

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}.$$

Si el coeficiente de este término se multiplica por $m-n+1$, que es el exponente de x en el mismo, y se divide por n, que es el exponente de a aumentado en una unidad, resulta evidentemente el coeficiente del término general que hemos copiado ántes, y que ocupa en la fórmula el lugar siguiente á este de que tratamos; luego

El coeficiente de un término cualquiera se forma multiplicando el del término anterior por el exponente que en este lleva la primera parte del binomio, y dividiendo el producto por el exponente de la segunda parte (tambien en el término anterior) *aumentado en una unidad.*

4.ª Las expresiones y tambien los desarrollos

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^2x^{m-2} + \ldots + a^m,$$

$$(a+x)^m = a^m + mxa^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2a^{m-2} + \ldots + x^m,$$

son iguales. Además el primero, segundo, tercero, etc., términos del segundo desarrollo son idénticos respectivamente al último, penúltimo, antepenúltimo, etc. términos del primer desarrollo; luego los términos que se corresponden en columna en los dos desarrollos son el primero y el último, el segundo y penúltimo, y en general los equidistantes de los extremos de cualquiera de ellos; y como los términos correspondientes tienen el mismo coeficiente, resulta que

Los coeficientes de los términos de la fórmula del binomio equidistantes de los extremos, son iguales.

5.ª Si en la fórmula del binomio se hace $x=1$ y $a=1$, se convierte en

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots + 1.$$

Luego la suma de todos los coeficientes es igual á 2^m; y como la suma de estos, ménos el primero (que no representa número de combinaciones) expresa el número de combinaciones posibles con m elementos, el total de estos es $2^m - 1$.

6.ª Cuando los dos términos del binomio son positivos, todos los términos del desarrollo lo son tambien, pero si uno de ellos fuese negativo, serán negativos todos aquellos donde este término tenga potencias impares (**33**, corol. 2.º) (*).

302. De la fórmula del binomio y de las observaciones que preceden se deduce la siguiente regla práctica.

Para elevar un binomio á la potencia del grado m *se eleva la primera parte del binomio á la potencia de igual grado, y se tendrá el primer término del desarrollo: se multiplica* m *por el producto de la segunda parte del binomio por la potencia* m—1 *de la primera, y se tendrá el segundo término: se forma el coeficiente del tercer término como se ha dicho* (**301**, 3.ª), *y este coeficiente se multiplica por el producto de la segunda parte con un exponente una unidad mayor que el anterior, y de la primera con un exponente una unidad menor* (**301**, 2.ª), *y se tendrá el tercer término: así se continúa hasta haber formado* m+1 *términos; advirtiendo que despues que se haya calculado la mitad de los coeficientes, si el número de términos es par, ó uno más de la mitad si es impar, los restantes serán respectivamente iguales á los anteriores* (**301**, 4.ª)

(*) Si los dos fuesen negativos lo serán todos si la potencia es de grado impar; y si fuese par, todos serán positivos. En efecto $(-a-b)^{2n+1} = (-(a+b))^{2n+1} = -(a+b)^{2n+1}$, y $(-a-b)^{2n} = (a+b)^{2n}$.

Los signos del desarrollo serán los indicados (**301**, 6.ª).

EJEMPLOS.

1.° $(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

2.° $(c-b)^6=c^6-6bc^5+15b^2c^4-20b^3c^3+15b^4c^2-6b^5c+b^6$.

3.° $(2a^2+3bc^2)^4=(2a^2)^4+4\times3bc^2\times(2a^2)^3+6\times(3bc^2)^2\times(2a^2)^2$
$+4\times(3bc^2)^3\times2a^2+(3bc^2)^4$.

ARTICULO IV.

Potencias de los polinomios.

303. Sea elevar al cubo el polinomio $a+b+c$.

Haciendo $b+c=k$ se tiene (**302** ó **39**, 2.°)

$$(a+b+c)^3=(a+k)^3=a^3+3a^2k+3ak^2+k^3,$$

y poniendo en vez de k, k^2, k^3 sus valores $b+c$, $b^2+2bc+c^2$,
$b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ resulta

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)$$ ó

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

Un procedimiento semejante nos daria el cubo de un polinomio, cualquiera que fuese el número de sus términos, y tambien de una manera análoga se hallaria una potencia de cualquier grado de un polinomio; de modo que es exacto, como ya hemos indicado, que la fórmula del *binomio* proporcionaria medio de elevar los polinomios á las potencias de todos los grados.

CAPITULO IV.

Raíces de las cantidades.

ARTICULO I.

Raíces de los números.

304. Del mismo modo que el cuadrado y cubo de un binomio nos sirvieron de fundamento en la Aritmética para la extraccion de la raiz cuadrada y cúbica de los números, podriamos ahora valernos de la fórmula del *binomio* para la extracion de la raíz 4.ª, 5.ª ó del grado m, de un número cualquiera; mas omitirémos esta teoría, ya porque raras veces ocurrirá hacer aplicacion de estas reglas, ya tambien porque si ocurriere, puede en algunos casos reducirse á la extraccion de la raíz cuadrada ó cúbica (como se ha visto **143** obs. y **329** obs), ó se efectúa la operacion por medio de logaritmos (**256**).

ARTICULO II.

Raíces de los monomios.

305. La extraccion de raices tiene por objeto aquí (lo mismo que en la Aritmética) *hallar una cantidad que elevada á una potencia de igual grado produzca la cantidad cuya raiz se intenta extraer.*

306. Deduzcamos ante todo el signo que debe llevar la raíz.

Al efecto expresemos el índice general de las raíces de grado impar por $2n+1$, y el de las de grado par por $2n$; por a la cantidad de que se va á extraer la raiz, y por r, r' los valores absolutos respectivos de dichas raíces, y se tendrá

$$\sqrt[2n+1]{+a}=+r, \text{ porque } (+r)^{2n+1}=+a \ (\mathbf{295}).$$

De igual manera $\sqrt[2n+1]{-a}=-r$; porque $(-r)^{2n+1}=-a$.

Del mismo modo $\sqrt[2n]{+a}=\pm r'$; porque $(\pm r')^{2n}=+a$.

Por último $\sqrt[2n]{-a}$ indica una operacion imposible; porque

$$(\pm r')^{2n}=+a.$$

Respecto á los signos tenemos, pues, la siguiente regla:

Si el exponente de la raiz es impar, *el signo del resultado ó de la raiz es el mismo que el de la potencia ó cantidad de donde se extrae; si es* par,

el signo del resultado ó de la raiz es $\pm$, *siendo positiva la cantidad de donde se extrae.*

Cuando la raiz es de grado par y la cantidad negativa, la operacion es imposible.

307. *Se llaman cantidades* IMAGINARIAS *las raices de grado par de cantidades negativas.*

308. De la regla dada (**295**) para elevar un monomio á una potencia cualquiera, de la definicion de las raices (**305**), y de lo que acaba de exponerse respecto á signos, se infiere que

Para extraer una raiz cualquiera de un monomio, se determina el signo por la regla anterior, se extrae la raiz de igual grado del coeficiente, y se dividen los exponentes de las letras por el índice del radical. Así

$$\sqrt[3]{8a^6b^9}=2a^2b.$$

309. Tambien se infiere de la definicion de raiz y de lo expuesto (**296**) que

Para extraer la raiz de un quebrado se extrae la de numerador y denominador, y se parte la primera por la segunda. Así

$$\sqrt[4]{\frac{16a^8b^4}{c^{12}d^8}}=\frac{\pm 2a^2b}{\pm c^3d^2}=\pm\frac{2a^2b}{c^3d^2}.$$

Otros EJEMPLOS *de la extraccion de raices de los monomios.*

310. 1.° $\sqrt[5]{-a^{10}b^5c^{20}}=-a^2bc^4$. 2.° $\sqrt[4]{16a^8b^{12}d^4}=\pm 2a^2b^3d$.

3.° $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3}{c^9d^{12}}}=\frac{2a^2b}{c^3d^4}$.

OBSERVACION. La raíz no será exacta: 1.° cuando el coeficiente numérico no sea una potencia perfecta de igual grado que el índice de la raíz: 2.° cuando el exponente de cada letra no sea divisible por el índice de la raíz.

En estos casos se deja la operacion indicada, simplificando la expresion resultante, si se puede, como se verá más adelante.

ARTICULO III.

Raíces de los polinomios.

311. Del mismo modo que se dedujo (**134**) la regla para la extraccion de la raiz cuadrada de los polinomios de la elevacion de estos al cuadrado, se pueden deducir otras para la extraccion de la raiz cúbica, y en general de un grado cualquiera, de la elevacion de un polinomio al cubo ó á una potencia de igual grado que la raiz que se quiere extraer.

El objeto que nos hemos propuesto no nos permite entrar aqui en más pormenores.

CAPITULO V.

Cálculo de los radicales aritméticos.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

312. Hemos visto (**132**) que las raíces de 2.° grado de cantidades positivas tienen dos valores, uno positivo y otro negativo. Lo que entónces se ha notado es un caso particular de una propiedad general de los radicales, á saber, que *todo radical tiene tantos valores diversos como unidades contiene su índice*, propiedad cuya demostracion no es de este lugar; pero cuya existencia es conveniente indicar para no dar á la presente teoría una generalidad incompatible aún con el debido rigor.

En los *radicales algebráicos* se consideran todos los valores que contienen.

En los *radicales aritméticos* solo se considera el valor real y positivo ó aritmético que contienen.

El cálculo de estos últimos tiene por fundamento los dos teoremas siguientes.

313. TEOREMA 1.° *La raiz de un producto de varios factores es igual al producto de las raices de igual grado de dichos factores.*

Es decir que $\sqrt[n]{abc\ldots} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \ldots$ En efecto,

$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \ldots\right)^n = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} \ldots \times \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} \ldots \times \ldots,$$

ó reuniendo los radicales que tienen debajo una misma letra, se tendrá (*)

$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \ldots\right)^n = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{a} \ldots \times \sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{b} \ldots \times \sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{c} \ldots \times \ldots;$$

y como $\sqrt[n]{a}$ entra n veces por factor de sí mismo,

(*) Véase lo dicho en la nota del número **199** de la Aritmética.

se tiene $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\ldots=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$; por igual razon

$$\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{b}\ldots=b,\quad \sqrt[n]{c}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{c}\ldots=c, \text{ etc.}$$

de donde resulta que $\left(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots.\right)^n=abc\ldots$

Luego $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\times\ldots$ es una cantidad que, elevada á la potencia n, produce abc, luego es la raíz n de $abc\ldots$ (**305**); luego es cierta la igualdad

$$\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots,$$

que demuestra el teorema.

314. Teorema 2.° *Un radical aritmético no varia de valor multiplicando su índice por un número entero y elevando á una potencia de igual grado la cantidad que se halla debajo del radical; ó dividiendo su índice por uno de sus divisores y extrayendo una raiz de igual grado de la cantidad que está debajo del radical.*

Es decir que, suponiendo que A es un valor aritmético ó absoluto

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[mn]{A^m}.$$

En efecto $A=\left(\sqrt[n]{A}\right)^n$; porque es evidente que una cantidad no varia extrayendo de ella la raíz n y elevando el resultado á la potencia n.

Elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia m la igualdad tampoco variará, y tendrémos (**295**)

$$A^m=\left(\sqrt[n]{A}\right)^{mn}.$$

Luego $\sqrt[n]{A}$ es una cantidad que, elevada á la potencia mn, produce A^m, luego es la raiz mn de A^m; luego es cierta la igualdad

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[mn]{A^m},$$

que demuestra las dos partes del teorema.

Simplificacion de radicales.

315. Cuando las cantidades monomias no tienen raiz exacta, se pueden simplificar muchas veces en virtud de lo expuesto (**313**), descomponiéndolas en factores, de los que alguno ó algunos tengan raiz exacta, extrayéndola de estos y dejando los restantes debajo del radical. Así

$$\sqrt[3]{24a^5b^3c^6}=\sqrt[3]{8a^3c^6\times3a^2b^3}=2ac^2\sqrt[3]{3a^2b^3}.$$

Este procedimiento equivale evidentemente á la siguiente regla práctica.

Para simplificar una cantidad radical se dividen los exponentes que tienen las letras debajo del radical, por el índice de este, y las letras con el cociente entero por exponente quedan por coeficiente del radical, y con el resto por exponente debajo de él. En cuanto al coeficiente numérico, se descompone, si es posible, en dos factores, uno de los cuales tenga raiz exacta, se extrae la raiz de este y la del otro queda indicada.

Otros EJEMPLOS.

316. 1.° $\sqrt[3]{27a^5b^3c} = 3a^2b\sqrt[3]{a^2c}$. 2.° $\sqrt[5]{ab^{10}c^{14}} = b^2c^2\sqrt[5]{ac^4}$.

Reciprocamente. *Si conviniera que desapareciese el coeficiente de un radical, no habria más que elevarle á una potencia de igual grado que el índice, y multiplicar esta potencia por la cantidad que está debajo del radical;* porque simplificando este se convertiria en el dado. Asi

$$2ac^2\sqrt[3]{3a^2b^2} = \sqrt[3]{(2ac^2)^3 \times 3a^2b^2} = \sqrt[3]{8a^3c^6 \times 3a^2b^2} = \sqrt[3]{24a^5b^2c^6}.$$

317. Otra especie de simplificacion puede hacerse con los radicales, *cuando el índice es divisible por un número entero y la cantidad que está debajo del radical tiene exacta la raiz de igual grado que dicho divisor, extrayendo esta y ejecutando la division;* lo que no altera el valor del radical (**314**).

De modo que $\sqrt[4]{25a^2b^4} = \sqrt{5ab^2}$.

Reduccion de radicales á un mismo índice.

318. Del mismo modo que fundándonos en que «un quebrado no varia de valor multiplicando sus dos términos por un mismo número entero» dedujimos en la Aritmética la regla para reducir quebrados á un comun denominador, del núm. **314** se deduce que

Para reducir dos ó más radicales á un mismo índice se multiplica el índice de cada uno por el producto de los índices de los demás, y se eleva la cantidad que está debajo del radical á una potencia de igual grado que dicho producto.

Asi $4\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{9b^2}$, $\sqrt[5]{a^3-b}$

se convierten en sus equivalentes

$4\sqrt[30]{a^{15}b^{15}}$, $\sqrt[30]{9^{10}b^{10}}$, $\sqrt[30]{(a^3-b)^6}$.

319. De igual manera, *si los índices de los radicales tienen factores comunes, para reducirlos á un mismo índice se halla el mínimo comun múl-*

UNED

tiplo de los índices, y este será el índice comun, se divide el mínimo comun múltiplo por el índice de cada radical, y el cociente será la potencia á que ha de elevarse la cantidad que está debajo del mismo radical.

Si se quiere que el índice comun sea el menor posible, es menester simplificar de antemano los radicales (**315**).

Así, $\sqrt[3]{5b^3c^3}$, $\sqrt{abc}$, $b\sqrt[4]{a^2-b^2}$, siendo 12 el mínimo comun múltiplo de los índices, se convierten en

$$\sqrt[12]{5^4b^{12}c^8}, \qquad \sqrt[12]{a^6b^6c^6}, \qquad b\sqrt[12]{(a^2-b^2)^3}$$

Reduccion de radicales semejantes.

320. *Se llaman radicales semejantes los que (ántes ó despues de simplificados) tienen un mismo índice y la misma cantidad debajo del radical; de modo que solo pueden diferenciarse en el signo que está ántes del radical y en el coeficiente de este.*

$10\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{a^2b}$, $-3\sqrt[3]{ba^2}$, son radicales semejantes.

Es evidente que $10\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{a^2b}-3\sqrt[3]{ba^2}=8\sqrt[3]{a^2b}$,

y que $a\sqrt{ab}-\sqrt{ab}-c^2d\sqrt{ab}=(a-1-c^2d)\sqrt{ab}$.

Luego *para reducir los radicales semejantes se suman algebráicamente sus coeficientes.*

ARTICULO II.

Adicion y sustraccion.

321. Estas dos operaciones se ejecutan por las reglas dadas (**26** y **29**), y si resultan radicales semejantes se reducen (**320**). Esta reduccion es propiamente su adicion ó sustraccion.

ARTICULO III.

Multiplicacion.

322. En esta operacion se distinguen dos casos: 1.° *que los radicales tengan un mismo índice*: 2.° *que le tengan diverso.*

323. 1.er CASO. Sea multiplicar $\sqrt{2ab}$ por $\sqrt{3ac}$.

En virtud del número **313**, se tiene

$$\sqrt{2ab}\times\sqrt{3ac}=\sqrt{2ab\times3ac}=\sqrt{6a^2bc}=(\mathbf{316})a\sqrt{6bc}.$$

Como igual procedimiento puede emplearse con otro ejemplo cualquiera, resulta que

Para multiplicar cantidades radicales de igual índice, se multiplican las cantidades que estan debajo de los radicales, y el producto se coloca debajo de un radical del mismo grado, el cual se simplifica si se puede (**315**).

Si se hubiese de multiplicar $3\sqrt[3]{a^2c^2}$ por $-5\sqrt[3]{ab^2}$, tendriamos

$$3\sqrt[3]{a^2c}\times-5\sqrt[3]{ab^2}=3\times-5\times\sqrt[3]{a^2c}\times\sqrt[3]{ab^2}=-15\sqrt[3]{a^3b^2c}=$$
$$-15a\sqrt[3]{b^2c}\ (*).$$

Luego si *los radicales tienen coeficientes, se multiplican estos, y el producto se pone por coeficiente del radical resultante del producto de los radicales de los factores.*

321. 2.° CASO. *Para multiplicar radicales de diferente índice se reducen á uno mismo* (**318**), *y queda este caso convertido en el anterior.*

EJEMPLOS.

1°. $\sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt{ab}=\sqrt[6]{9a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^3b^3}=\sqrt[6]{9a^7b^5}=a\sqrt[6]{9ab^5}$.

2.° $(c-d)\sqrt[4]{a+b}\times a\sqrt{a-b}=(c-d)\sqrt[4]{a+b}\times a\sqrt[4]{(a-b)^2}=$
$(ac-ad)\sqrt[4]{(a+b)\ (a^2-2ab+b^2)}$.

ARTICULO IV.

Division.

325. En esta operacion tambien se distinguen dos casos: 1.° *que los radicales tengan un mismo índice*: 2.° *que le tengan diferente.*

326. 1.er CASO. Sea dividir $\sqrt[3]{A}$ por $\sqrt[3]{B}$.

Como $\left(\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}\right)^3=$(**296**) $\frac{\left(\sqrt[3]{A}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{B}\right)^3}=\frac{A}{B}$, resulta que $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ es una cantidad que elevada al cubo produce $\frac{A}{B}$; luego es la raiz cúbica de $\frac{A}{B}$ (**305**); luego $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}=\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$.

Luego *para dividir dos cantidades radicales de igual índice, se dividen las cantidades que estan debajo de los radicales, y el cociente se coloca debajo de un radical del mismo grado.*

(*) Véase la nota del número **314**.

Si se hubiese de dividir $a^2\sqrt[3]{b^2c}$ por $b\sqrt[3]{a^2b^2}$,

se tendria $$\frac{a^2\sqrt[3]{b^2c}}{b\sqrt[3]{a^2b^2}}=\frac{a^2}{b}\times\frac{\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}=\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}.$$

Luego *si los radicales tienen coeficientes diferentes de* **1**, *se dividen estos, y el cociente se pone por coeficiente del radical resultante del cociente de los radicales dados.*

327. 2.° CASO. *Para dividir radicales de diferente índice se reducen á uno mismo* (**318**), *y queda este caso convertido en el anterior.*

EJEMPLOS.

1.° $$\frac{a^2b\sqrt[3]{ab^2}}{5ab\sqrt{bc}}=\frac{a^2b\sqrt[6]{a^2b^4}}{5ab\sqrt[6]{b^3c^3}}=\frac{a}{5}\sqrt[6]{\frac{a^2b}{c^3}}.$$

2.° $$\frac{8\sqrt{a+b}}{-2\sqrt[4]{a+b}}=\frac{8\sqrt[4]{(a+b)^2}}{-2\sqrt[3]{a+b}}=-4\sqrt[4]{a+b}.$$

ARTICULO V.

Elevacion á potencias.

328. Sea elevar $\sqrt[n]{A}$ á la potencia m; segun la definicion de las potencias se tendrá

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m=\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{A}\ldots=(\mathbf{323})\sqrt[n]{A\times A\times A}\ldots=\sqrt[n]{A^m}.$$

Luego *para elevar una cantidad radical á una potencia, se eleva la cantidad que está debajo del radical, y el resultado se coloca debajo de un radical que tenga el mismo índice que el primitivo, cuya cantidad radical se simplifica si se puede* (**315** y **317**).

Si el radical tiene coeficiente, se eleva tambien este.

EJEMPLOS.

1.° $$\left(\sqrt[3]{2a^2c}\right)^2=\sqrt[3]{(2a^2c)^2}=\sqrt[3]{4a^4c^2}=a\sqrt[3]{4ac^2}.$$

2.° $$\left(5\sqrt[4]{a-b}\right)^2=5^2\times\sqrt[4]{(a-b)^2}=25\sqrt{a-b}.$$

UNED

ARTICULO VI.

Extraccion de raíces.

329. Sea extraer la raiz m de $\sqrt[n]{A}$.

$\sqrt[n]{A}=\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^m$; porque es evidente que la extraccion de la raíz m de una cantidad y la elevacion á la potencia m de la misma, son dos operaciones que se neutralizan, sin producir ninguna alteracion en la cantidad sobre que se ejecutan.

Elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia n, la igualdad no varía, y se tendrá (**295**)

$A=\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^{mn}$; luego $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$ es una cantidad que elevada á la potencia mn produce A, luego es la raíz mn de A; luego

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}.$$

Para extraer, pues, la raiz de una cantidad radical se multiplican los índices, y el resultado se simplifica si se puede.

Si el radical tiene coeficiente, se extrae la raiz de él (**314**), *y si no la tuviese exacta, se introduce debajo del radical* (**316**, rec.), por no complicar la expresion.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{ab^3}}=\sqrt[15]{ab^3}.$

2.° $\sqrt{9\sqrt[3]{4a^2c^3}}=3\sqrt[6]{4a^2c^3}=3\sqrt[3]{2ac}.$

3.° $\sqrt[3]{a\sqrt{ab}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3b}}=\sqrt[6]{a^3b}.$

OBSERVACIONES.

330. 1.° Siendo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}$ y $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[nm]{A}$,

resulta que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}$,

es decir que *el órden de la extraccion sucesiva de varias raices no hace variar el resultado.*

2.° Una vez que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$, es evidente que $\sqrt[mn]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$;

de donde resulta que *para extraer una raiz cuyo índice es un número compuesto, basta extraer sucesivamente las raices cuyos índices sean los factores simples del índice compuesto.* Así

$$\sqrt[6]{64000000} = \sqrt[3]{\sqrt{64000000}} = \sqrt[3]{8000} = 20.$$

OBSERVACION GENERAL.

331. Las operaciones con polinomios formados por radicales aritméticos, ó por estos y cantidades no radicales, se ejecutan por las mismas reglas que las de polinomios que no contienen radicales, teniendo en cuenta para la ejecucion la teoría precedente.

CAPITULO VI.

Generalizacion del cálculo algebráico respecto á los exponentes.

ARTICULO I.

Exponentes negativos.

332. La regla de los exponentes en la division nos da (**44**), cuando m es mayor que n.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Si convenimos en que estas expresiones sean equivalentes, aunque m sea menor que n, esto es, cuando se tenga $n = m + r$, y sustituimos este valor de n en el segundo miembro de la igualdad anterior, se tendrá

$$a^{m-(m+r)} = a^{m-m-r} = a^{-r}.$$

Sustituyendo el mismo valor de m en el primer miembro, resulta

$$\frac{a^m}{a^{m+r}} = \frac{a^m}{a^m \times a^r} = (\mathbf{58})\ \frac{1}{a^r}.$$

Luego $$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

UNED

Luego *toda cantidad con exponente negativo es equivalente á la unidad partida por la misma cantidad con exponente positivo;* y por lo tanto se puede trasformar una expresion en otra sin que varíe de valor.

333. Estas trasformaciones nos proporcionan medio de ejecutar la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces con cantidades de exponentes negativos, como se observará en los ejemplos siguientes:

1.° $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$.

2.° $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

3.° $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

4.° $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\frac{m}{a^n}} = a^{-\frac{m}{n}}$.

De la comparacion del primer miembro con el último de cada una de las igualdades precedentes, se deduce que las reglas dadas para los exponentes positivos son tambien aplicables al caso en que los exponentes sean negativos.

ARTICULO II.

Exponentes fraccionarios.

334. La regla de los exponentes en la extraccion de raíces nos da (**160**) cuando m es divisible por n;

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Si convenimos en que estas expresiones sean equivalentes, aunque m no sea divisible por n, tendrémos que

Toda cantidad con exponente quebrado es equivalente á una cantidad radical cuyo índice es el denominador del quebrado, y debajo del que se halla la misma cantidad con el numerador por exponente, pudiendo por consiguiente trasformarse una expresion en otra, sin que varíe de valor.

335. Estas trasformaciones nos proporcionan medio de ejecutar la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces de

UNED

cantidades de exponentes quebrados, como aparece en los ejemplos siguientes:

1.° $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[s]{a^r} = (\mathbf{324}) \sqrt[ns]{a^{ms}} \times \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$.

2.° $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} : \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{\frac{a^{ms}}{a^{nr}}} = \sqrt[ns]{a^{ms-nr}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$.

3.° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r = (\mathbf{328}) \sqrt[n]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{n}} = a^{\frac{m}{n} \times r}$.

4.° $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}} = (\mathbf{329}) \sqrt[rn]{a^m} = a^{\frac{m}{rn}} = a^{\frac{m}{n} : r}$.

De la comparacion del primer miembro de estas igualdades con el último se deduce que las reglas dadas para los exponentes enteros son aplicables al caso en que dichos exponentes sean quebrados.

OBSERVACION GENERAL.

336. De lo expuesto en estos dos últimos artículos se infiere que las reglas relativas á los exponentes, sean estos enteros, quebrados positivos ó negativos, son generales, esto es, que *en la multiplicacion se suman algebráicamente los exponentes de una misma letra; en la division, del exponente que tiene la letra en el dividendo se resta algebráicamente el que la misma lleva en el divisor; en la elevacion á potencias se multiplica el exponente de la letra por el de la potencia, y en la extraccion de raices se divide el exponente de la letra por el índice de la raiz.*

Tambien son aplicables estas reglas al caso en que los exponentes sean números inconmensurables, como fácilmente se infiere de lo expuesto [Arit., **199** (*)]; y por último, por *extension* se aplican del mismo modo á las cantidades de exponentes imaginarios.

FIN.

ÍNDICE.

Capítulos.		Páginas.
Primero.	PRELIMINARES.	3
	Definiciones y principios convencionales.	id.
	Brevedad y generalidad del lenguaje algebráico.	7
	De las cantidades consideradas como positivas y como negativas.	10
	Denominaciones de las varias formas de expresion algebráica	12
	Valor numérico de las expresiones algebráicas y reduccion de términos semejantes.	14
II.	CÁLCULO DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.	16
	Adicion.	17
	Sustraccion.	18
	Multiplicacion	20
	Division.	28
III.	QUEBRADOS Ó FRACCIONES LITERALES.	36
	Preliminares.	id.
	Simplificacion	37
	Reduccion á un comun denominador.	38
	Adicion y sustraccion.	39
	Reduccion de una expresion mista á quebrado.	40
	Multiplicacion	id.
	Division.	41
	Operaciones con las expresiones mistas.	id.
IV.	ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.	42
	Preliminares	id.
	Preparacion de las ecuaciones.	43
	Resolucion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita	47
	Indicaciones sobre la resolucion de una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas.	49
	Valores que pueden hallarse para la incógnita en las ecuaciones de primer grado, y su significacion respecto á la ecuacion de donde dimanan.	50
V.	PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA	56
	Planteo y resolucion de estos problemas.	id.

UNED

Significacion de los diferentes valores de la incógnita de un problema respecto de este. 63
VI. . . . Resolucion de los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos ó mas incógnitas. 69
Eliminacion. . . . . id.
Reduccion de los sistemas de ecuaciones de primer grado. 73
Resolucion de los sistemas de ecuaciones de primer grado que tienen tantas incógnitas como ecuaciones. 77
Indicaciones sobre la resolucion de los sistemas con más y con ménos incógnitas que ecuaciones. 80
Imposibilidad é indeterminacion de los sistemas de tantas ecuaciones como incógnitas. 81
VII. . . . Resolucion de los problemas de primer grado con dos ó mas incógnitas. 83
VIII . . . Cuadrado de las cantidades algebráicas. 89
Cuadrado de los monomios. . . . . id.
Cuadrado de los polinomios. . . . . id.
IX. . . . Raiz cuadrada de las cantidades algebráicas. 91
Raiz cuadrada de los monomios. . . . . id.
Raiz cuadrada de los polinomios 92
X. . . . . Cálculo de los radicales de segundo grado. 95
Cálculo de los radicales reales de segundo grado. . . id.
Cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado. 100
XI. . . . Ecuaciones de segundo grado y bicuadradas. 102
Resolucion de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. . . . . id.
Trasformaciones de la fórmula general. 107
Relacion entre las raices de la ecuacion $x^2+sx+p=0$ y sus coeficientes. 109
Valores de la incógnita en las ecuaciones de segundo grado, y significacion de las raices imaginarias. . . 110
Ecuaciones bicuadradas 112
Problemas de segundo grado con una incógnita . . . 113
Resolucion de los sistemas de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas 118
Problemas de segundo grado con dos ecuaciones y dos incógnitas. . . . . id.
XII. . . . Razones y proporciones. 121
Razones. . . . . id.
Proporciones. 122
Determinacion de un término cualquiera en una proporcion, conocidos los restantes. . . . . id.
Otras propiedades de las proporciones. 124
Série de razones iguales. 129

UNED

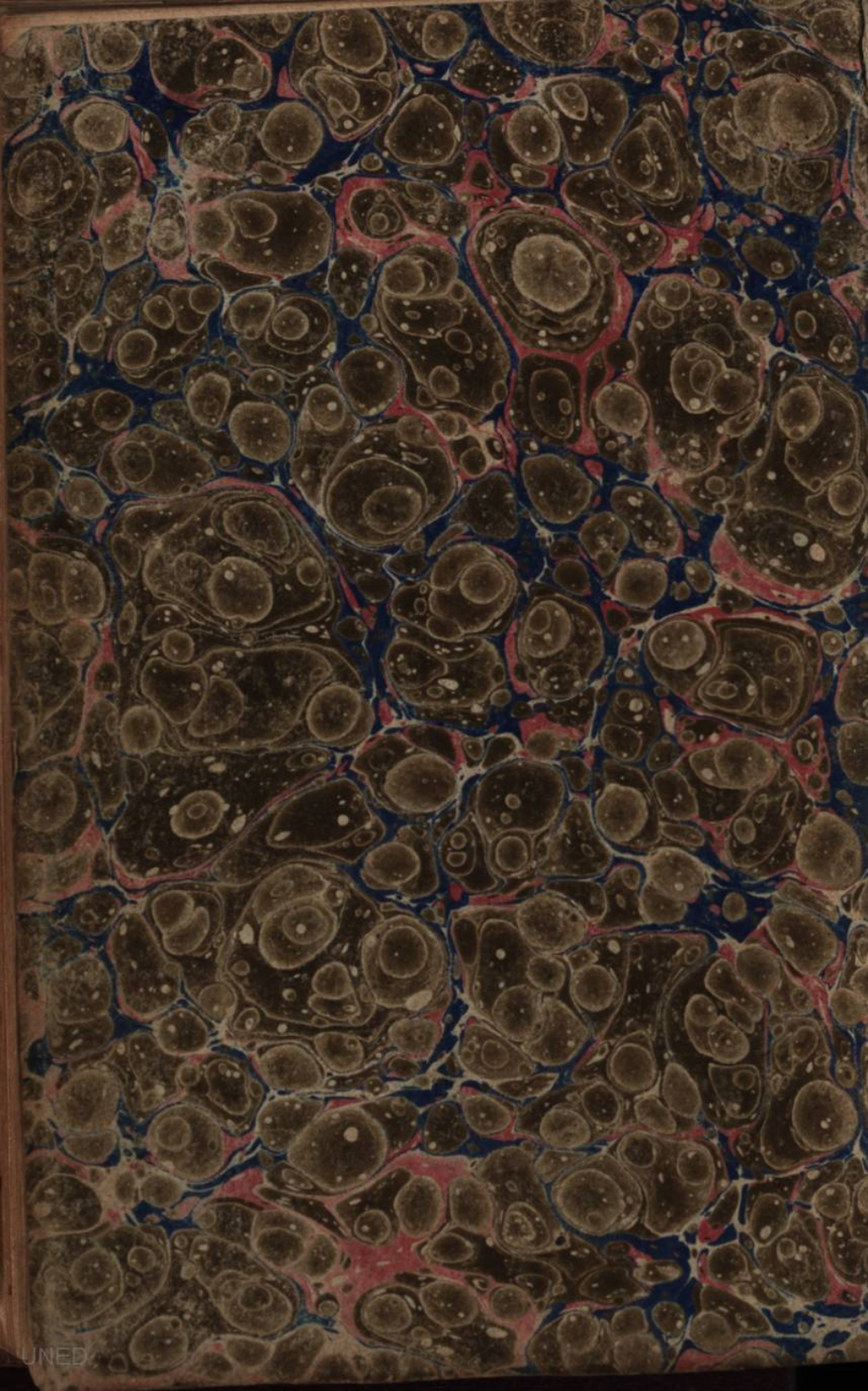
XIII. . . Problemas que se resuelven por medio de proporciones. 130
Problemas que se resuelven por medio de una proporcion. . . . . id.
Problemas que se resuelven por dos ó más proporciones. 134
XIV. . . Otros problemas que se resuelven por medio de una ó mas proporciones. 136
Interés simple. . . . . id.
Descuento. 138
Partes proporcionales. 140
Regla de compañia. 142
Regla de aligacion. 144
Regla conjunta. 147
XV. . . . Progresiones. 149
Progresiones aritméticas. . . . . id.
Progresiones geométricas. 153
XVI. . . Logaritmos. 159
Preliminares. . . . . id.
Propiedades generales de los logaritmos. 160
Diferentes sistemas de los logaritmos. 162
Formacion de las tablas de los logaritmos vulgares. . 163
Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios. 166
Uso de las tablas de logaritmos. 169
XVII. . . Aplicaciones de los logaritmos. 172
Del complemento logarítmico. . . . . id.
Operaciones por medio de los logaritmos. 175
Ecuaciones exponenciales. 180
Interés compuesto. 181

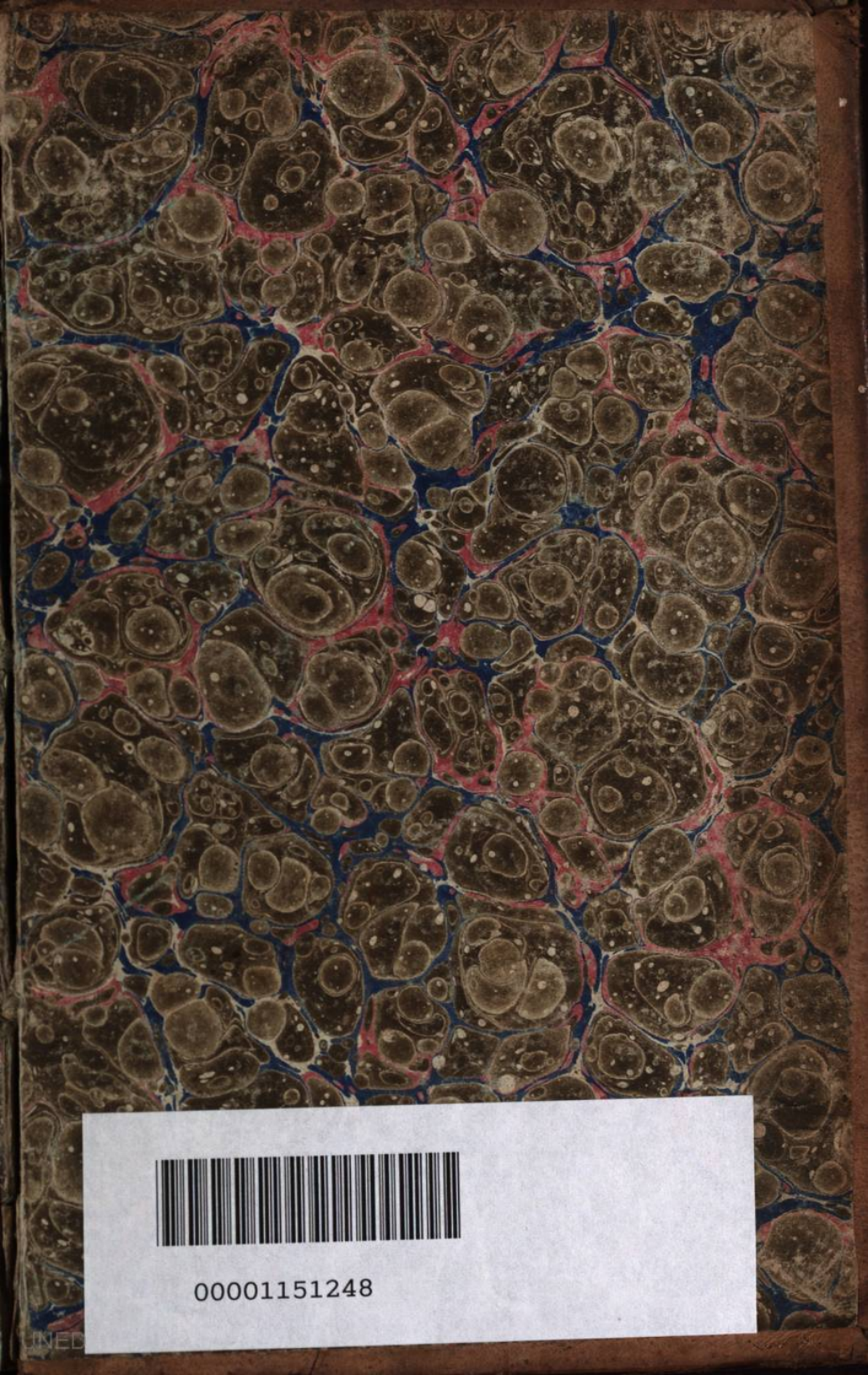
COMPLEMENTO.

I. . . . . Ejemplo de multiplicacion de polinomios. 193
II. . . . . Continuacion de la division de polinomios. 194
III. . . . Potencias de las cantidades algebráicas. 201
Coordinaciones, permutaciones y combinaciones. . . id.
Potencias de los monomios. 210
Fórmula del binomio de Newton. 211
Potencias de los polinomios 216
IV. . . . Raíces de las cantidades. 217
Raíces de los números. . . . . id.
Raíces de los monomios. . . . . id.
Raíces de los polinomios. 218

UNED

V. . . . . Cálculo de los radicales aritméticos. 219
Preliminares. . . . . id.
Adicion y sustraccion 222
Multiplicacion . . . . . id.
Division. 223
Elevacion á potencias. 224
Extraccion de raices. 225
VI. . . . Generalizacion del cálculo algebráico respecto á los exponentes. 226
Exponentes negativos . . . . . id.
Exponentes fraccionarios 227




00001151248

UNED

L.T.
2876
V.1
UNED