2020
UNED

K-1014047

L.T
2020

UNED

PRINCIPIOS

DE

GEOMETRÍA.

UNED

Es propiedad.

UNED

Hª de la Educación y Educación Comparada

PRINCIPIOS

DE

ARITMETICA Y GEOMETRIA

POR

D. AMBROSIO MOYA Y D. JOAQUIN MARIA FERNANDEZ

DOCTORES EN CIENCIAS

Y CATEDRÁTICOS DE LOS INSTITUTOS DE MADRID

GEOMETRÍA

POR

D. AMBROSIO MOYA DE LA TORRE

TERCERA EDICION

MADRID: 1866

IMPRENTA DE D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTENEBRO

Colegiala, 6.

Este librito y otros de Fernandez Cardin se venden en las principales librerías de Madrid á los precios siguientes:

Aritmética (en rústica)...................	12 rs.
Algebra (id.)........................	14
Geometría (id.)......................	16
Principios de Aritmética (id.)............	4
Principios de Geometría por Moya (id.)......	5
Nociones de Aritmética para las escuelas de Instrucion primaria (con cubierta fuerte equivalente á pergamino)................	2
Encartonadas........................	2 1/2

En provincias podrá tener un real de aumento cada tomito de los Elementos, y medio los de los Principios de Aritmética y Geometría.

Los pedidos de fuera de Madrid pueden dirigirse á *D. Justo Serrano*, pasaje de Matheu.

UNED

PRINCIPIOS

DE

GEOMETRÍA.

Introduccion.

1. Geometría *es la ciencia que trata de la extension.*

Extension *es toda parte determinada del espacio*, como el lugar que ocupa un cuerpo, el solar de un edificio, la estatura de una persona, etc.

Dimensiones *de una extension son su largo, su ancho y su grueso:* el largo se denomina *longitud*, el ancho *latitud*, y el grueso *profundidad* ó *altura*. Ninguna extension puede tener más dimensiones que las tres citadas, si bien puede tener ménos.

2. Cuerpo geométrico *es toda extension con las tres dimensiones*, como el lugar que ocupa un cuerpo físico. Puede concebirse un número infinito de cuerpos en el espacio.

Superficie *es toda extension con dos solas dimensiones*, como el solar de un edificio. Los límites que separan á cada cuerpo del resto del espacio son superficies; y el lugar de la separacion de dos partes contiguas de un mismo cuerpo es tambien superficie. Puede concebirse un número infinito de superficies en el interior de todo cuerpo.

Línea *es toda extension con una sola dimension*, como la estatura de una persona. Los límites de las superficies son líneas: el lugar de la separacion de dos partes contiguas de una misma superficie es tambien línea; y lo es igualmente la interseccion de dos superficies que se cortan. Puede concebirse un número infinito de líneas en toda superficie.

Punto *es el límite elemental de la extension*. El punto no tiene dimension alguna. Son puntos los límites de las líneas: el lugar de la separacion de dos partes contiguas de una misma línea es tambien punto; y lo es igualmente la interseccion de dos líneas que se cortan. Puede concebirse un número infinito de puntos en toda línea.

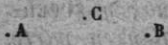
3. Toda extension tiene tres cualidades propias, que la distinguen de las demás: su *posicion*, su *figura* y su *magnitud*. Posicion *es el modo de estar*: estado, situacion ó actitud en el espacio. Figura *es el modo de ser*: carácter ó aspecto particular debido á la estructura, formacion ó construccion. Magnitud *es la cantidad de espacio que contiene*: la magnitud relativa de un cuerpo se llama *volúmen*, la de una superficie *área*, y la de una línea *longitud*.

Dos extensiones que tengan la misma figura y la misma magnitud son *iguales*, y pueden coincidir en una sola, haciendo que tengan ambas la misma posicion. Si tienen la misma magnitud y distinta figura se llaman *equivalentes*, y si tienen la misma figura y distinta magnitud se llaman *semejantes*.

4. El punto no tiene magnitud ni figura alguna: todos los puntos son iguales: solo se diferencian unos de otros en su posicion, y cuando esta es la misma coinciden en uno solo.

Para representar gráficamente los puntos se emplea una pequeña señal que no afecte figura alguna apreciable, como el punto de la escritura comun; y para designarlos se coloca una letra á la inmediacion de cada uno. Así se dice: el punto A, el punto B, el punto C., etc. (fig. 1.ª).

Fig. 1.ª



5. Las líneas se dividen en *rectas* y *curvas*.

Fig. 2.ª

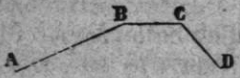
Recta *es la línea más corta entre dos puntos*, como AB (fig. 2.ª) Un hilo tirante, hecha abstraccion de su grueso, ofrece una imágen de la recta.

No hay más que una clase de líneas rectas; todas son adaptables por superposicion.

Fig. 3.ª

Curva *es la línea en que ninguna parte apreciable es recta*, como AB (fig. 3.ª). Hay infinitas clases de líneas curvas.

Fig. 4.ª



Se suele llamar LÍNEA QUEBRADA *la línea compuesta de dos ó más rectas, que prolongadas no forman una sola recta*, como ABCD (fig. 4.ª); y LÍNEA MISTA *la línea en parte recta y en parte curva.*

6. Las superficies se dividen en *planas* y *curvas*.

Superficie plana ó plano *es una superficie á la cual se adapta exactamente una recta aplicada en cualquier sentido.* La superficie libre del agua tranquila en un lago pequeño ofrece un ejemplo de superficie plana.

No hay más que una clase de superficies planas, y todas son adaptables por superposicion.

Superficie curva *es la superficie en que ninguna parte apreciable es plana.*

Hay infinitas clases de superficies curvas.

Se suele llamar SUPERFICIE QUEBRADA *la superficie compuesta de dos ó más superficies planas, que prolongadas no forman un mismo plano; y* SUPERFICIE MISTA *la superficie en parte plana y en parte curva.*

7. La Geometría se divide en *plana* y *del espacio.*

La GEOMETRÍA PLANA *trata de la extension cuyos puntos estan todos en un mismo plano.*

La GEOMETRÍA DEL ESPACIO *trata de la extension cuyos puntos no estan todos en un mismo plano.*

GEOMETRIA PLANA.

CAPITULO PRIMERO.

De las rectas.

8. Todas las líneas rectas tienen la misma figura, y solo se diferencian unas de otras en su posicion y en su magnitud.

Dos puntos determinan la posicion de una recta: es decir, por dos puntos puede siempre pasar una recta, pero nunca dos ó más rectas distintas. Si dos rectas tienen dos puntos comunes coinciden en toda su longitud. La posicion de una recta determina su *direccion:* así se dice que *varios puntos estan en una misma direccion cuando estan situados en una misma recta.*

La magnitud de una recta expresa la *distancia* entre sus extremos: así, *la distancia entre dos puntos es la longitud de la recta que los une.*

PROLONGAR *una recta es aumentar su magnitud conservando su misma direccion.* Las rectas son todas prolongables indefinidamente.

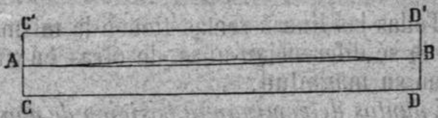
Trazado de las rectas.

9. En la mayor parte de los oficios y las artes, y sobre todo en el *dibujo lineal*, que es el arte de representar los objetos por líneas, hay necesidad de trazar líneas rectas.

Para trazar una recta sobre el papel se emplea la *regla*, colocándola de modo que uno de sus bordes longitudinales pase sobre los dos puntos que determinen la posicion de la recta que se quiere trazar, y conservándola fija en esta posicion se hace resbalar á lo largo de dicho borde un lápiz ó un tiralíneas, cuya punta se apoya en el papel (*).

Para comprobar la buena construccion de una regla, se traza con ella una línea AB (fig. 5.ª), y

Fig. 5.ª



haciéndola despues girar sobre el borde que sirvió para trazar esta línea hasta que tome la posicion inversa ABC'D', se traza otra línea AB por el mismo borde: si estas dos líneas coinciden, la regla está bien construida por dicho borde: pues la menor curvatura apreciable se haria muy sensible por este medio, que presenta el error duplicado.

Para trazar líneas rectas sobre un cuadro grande, sobre un entarimado, sobre una tapia, etc., se emplea una regla de gran tamaño ó reglon, como los que usan los carpinteros, albañiles, etc. Y

(*) Omitimos la descripcion de la regla, del lápiz y del tiralíneas, porque el profesor puede suplirla ventajosamente con muy pocas palabras, presentando dichos objetos á la vista de los alumnos; pero juzgamos á propósito advertir á los principiantes, para que adquieran el hábito de la exactitud, que el trazado de una recta será tanto más exacto cuanto mejor extendido esté el papel, cuanto más delgada sea la punta que la trace, cuanto mejor aplicada se lleve contra el borde de la regla y cuanto más recto sea este borde.

cuando dichas reglas no alcanzan á la longitud de la recta que se quiere trazar, se sujeta en las extremidades de esta una cuerda tensa impregnada de una tintura colorante, que por un movimiento vibratorio, en virtud de la elasticidad, deja marcada su huella rectilínea; de este medio hacen uso los aserradores de maderas y otros.

Los jardineros, empedradores y demás que trabajan en el suelo, trazan las rectas en él siguiendo la direccion de una cuerda tirante atada á dos clavos ó piquetes fijos en los dos puntos que determinan la posicion de la recta.

Por último, las alineaciones rectilíneas mayores que la longitud de las cuerdas, se marcan en el terreno por medio de piquetes ó jalones, clavados en los extremos de la línea y en algunos puntos intermedios, de modo que se hallen todos en la misma visual.

Medicion de las rectas.

10. MEDIR *una recta* (como medir una extension cualquiera) *es hallar el valor numérico de su magnitud;* y el valor numérico de una magnitud no es más que el número de veces que en ella está contenida otra magnitud constante de su misma naturaleza tomada por unidad.

La unidad para medir las líneas, llamada por lo mismo UNIDAD LINEAL, *es el* METRO *con sus múltiplos y divisores.*

Para medir una recta se coloca sobre ella, partiendo de uno de sus extremos, todas las veces consecutivas posibles la unidad lineal; si queda algun resto, menor necesariamente que dicha unidad, se coloca sobre él uno de los divisores de esta, y así se continúa hasta que no quede resto alguno ó quede un resto inapreciable.

Las rectas trazadas en el papel se miden tomando su longitud con el compás (*) y llevándola sobre el borde de una regla dividida en decímetros, centímetros y milímetros; y tambien colocando dicha regla, cuyos bordes estan cortados á chaflan para mayor precision, de modo que su corte se ajuste á la recta que se quiere medir: la numeracion de las divisiones de la regla indica en ambos casos el número de decímetros, centímetros y milímetros que constituye la medida buscada, y basta un poco de práctica para apreciar á ojo las fracciones de milímetro con suficiente aproximacion.

Las rectas de mayor longitud, como las que ofrecen la carpintería, la ebanistería, la arquitectura, etc., se miden con una regla de dos ó tres metros de longitud, dividida en decímetros y centímetros; y las distancias en el terreno, como las que ofrece la agrimensura, se miden con una cadena de hierro ó de cobre de un decámetro de longitud, ó con una cinta barnizada y dividida en metros, decímetros y centímetros.

11. Las magnitudes de las rectas, despues de medidas y representadas por sus valores numéricos, pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas y divididas por simples operaciones aritméticas; pero estas mismas operaciones pueden efectuarse por procedimientos gráficos, independientes en la forma de las reglas del cálculo numérico.

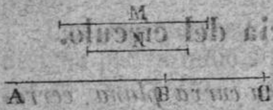
12. Sumar dos rectas dadas M y N.

(*) La descripcion del compás la omitimos por la misma razon que la de la regla.

UNED

Se traza una recta indefinida sobre la cual se lleva con el compás una distancia AB (fig. 6.ª) igual á M, y á su continuacion otra distancia BC igual á N: la distancia AC es la suma de las dos rectas dadas.

Fig. 6.ª



13. Hallar la diferencia entre dos rectas dadas AC y N.

Se lleva sobre la mayor AC, y á partir de uno de sus extremos C, una distancia CB igual á la menor N: la distancia AB es la diferencia buscada.

14. Multiplicar una longitud dada por un número, 7 por ejemplo.

Se coloca sobre una recta indefinida siete veces consecutivas la recta dada, y la distancia total es el séptuplo de dicha recta.

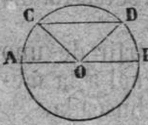
15. Para dividir una recta dada en cualquier número de partes iguales, aunque hay tambien en Geometría procedimientos exactos, que serán expuestos más adelante, puede efectuarse la operacion por tanteo con el compás, y obtener resultados cuando no rigurosamente exactos, tan aproximados como puede exigirse de las construcciones gráficas. En las artes y oficios no se emplea, por regla general, para la division de las rectas más medio que el aproximativo del tanteo.

CAPITULO II.

De la circunferencia del círculo.

16. CIRCUNFERENCIA *es una curva plana, cerrada, cuyos puntos equidistan todos de otro punto del mismo plano*, como ACDBA (fig. 7.ª), cuyos puntos equidistan de O. *Este último punto se llama* CENTRO.

Fig. 7.ª



CÍRCULO *es la superficie plana limitada por la circunferencia.*

RADIO *es toda recta limitada por el centro y un punto de la circunferencia*, como CO. Un círculo tiene infinitos radios, y todos ellos iguales, como OA, OB, OC, OD.

CUERDA *es toda recta limitada por dos puntos de la circunferencia*, como CD.

DIÁMETRO *es toda cuerda que pasa por el centro*, como AB. Un diámetro es duplo de un radio, y los infinitos diámetros de un mismo círculo son todos iguales. Todo diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales llamadas *semicircunferencias*, y al círculo en otras dos tambien iguales llamadas *semicírculos*.

ARCO *es una parte cualquiera de la circunferencia*, como AC, ABD, etc.

17. No hay más que una especie de circunferencias de círculo; todas tienen la misma figura, y solo se diferencian unas de otras en su posicion y en su magnitud. La posicion de una circunferencia está determinada en el plano que la contiene por la posicion de su centro en dicho plano. La magnitud de una circunferencia depende solamente de la longitud de su radio. Dos circunferencias de igual ra-

UNED

dio son iguales, y pueden coincidir haciendo que coincidan sus centros, y estando sobre un mismo plano.

Una circunferencia, y lo mismo un círculo, se designa por su radio ó por su diámetro, y á veces por solo su centro.

Toda cuerda *subtiende* dos arcos, en general desiguales, uno menor que la semicircunferencia y otro mayor, componiendo entre ambos la circunferencia entera; pero cuando se habla del arco subtendido por una cuerda, se hace referencia en general al menor de los dos: cuando es al mayor se necesita advertirlo.

En una misma circunferencia, y en circunferencias iguales, las cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y recíprocamente; y entre cuerdas desiguales la mayor subtiende mayor arco, y recíprocamente.

Observacion. Aunque la mayor cuerda subtiende mayor arco, la cuerda dupla no subtiende arco duplo.

Los arcos de una misma circunferencia y los de circunferencias iguales, son adaptables por superposicion.

Trazado de la circunferencia.

18. Para trazar una circunferencia sobre el papel, se toma con el compás una distancia igual al radio, se coloca una de sus puntas en el centro, y á su alrededor se hace girar la otra punta, armada del lápiz ó del tiralíneas, de modo que se apoye constantemente en el papel sin que la abertura del compás varíe.

Para trazar circunferencias, cuyos radios excedan del alcance del compás, se suple este por una regla que lleva al canto dos puntas, una fija para colocarla en el centro, y otra en una abrazadera movible á lo largo de la regla para tomar el radio, y que se sujeta á ella por un tornillo.

Para trazar circunferencias en el terreno, se suple el compás por una cuerda tirante.

Por regla general las circunferencias se trazan sobre un plano fijo, haciendo girar el radio alrededor del centro; pero tambien pueden trazarse permaneciendo fijo el radio y haciendo girar el plano alrededor del centro como una rueda. De este modo las trazan los torneros, los alfareros y otros.

19. **Trazar una circunferencia igual á otra dada.**

Se toma para la primera un radio igual al de la segunda. Para trazar una circunferencia doble de otra, se toma un radio doble; y en general, para trazar una circunferencia múltiple de otra, se toma un radio equimúltiplo.

Observacion. Aunque una circunferencia sea doble de otra, el círculo limitado por la primera no es duplo del limitado por la segunda.

20. **Dividir una circunferencia en dos partes iguales.**

Se traza un diámetro, y la circunferencia y el círculo quedan divididos en dos partes iguales.

21. **Trazar un arco igual á otro dado.**

Con el radio del arco dado se traza un arco indefinido, y tomando con el compás la cuerda del primero, se colocan sus extremos sobre el segundo: el arco comprendido entre ellos es igual al dado. Colocando de este modo cuerdas iguales en una circunferencia, se marcan en ella arcos iguales.

22. Por este medio, que suple la superposicion directa de los arcos, puede efectuarse la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los arcos de igual radio, del mismo modo que se expuso (12, 13, 14 y 15) para las rectas.

UNED

Medicion de la circunferencia.

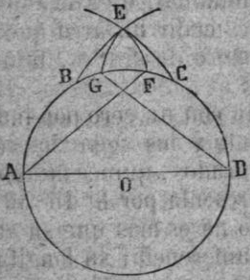
23. RECTIFICAR *una curva es hallar una recta de su misma longitud.*

Para medir líneas curvas es preciso, en general, rectificarlas y hallar su medida sobre la línea rectificada; puesto que la unidad lineal es rectilínea.

24. **Rectificar una circunferencia dada O.**

Se traza un diámetro AD (fig. 8.ª); se marca un arco AB y otro DC iguales, y cuya cuerda sea igual al radio AO; se traza el arco CE, con centro en A y radio AC, y el arco BE, con centro en D y radio DB hasta que se corten en E; y por último, se hace centro en B ó en C y con el radio BE ó CE se traza el arco EF ó EG: la distancia AF ó DG es la cuarta parte de la circunferencia rectificada.

Fig. 8.ª



OBSERVACION. El resultado anterior no es teóricamente exacto; tiene un error, por exceso, menor que media milésima del radio; pero esta aproximacion es suficiente en casi todas las aplicaciones prácticas.

25. *Se llama* RAZON DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO *el valor numérico de la circunferencia rectificada, tomando por unidad su diámetro*, ó sea el número de veces que la longitud de la circunferencia contiene á la de su diámetro: este número es 3,14159..... y por abreviacion convencional le representa la letra griega π. Así, expresando por r el radio de una circunferencia, la longitud de esta queda representada por el producto $2\pi r$.

Valor numérico de los arcos.

26. Los inconvenientes de la rectificacion de los arcos de círculo, para determinar su magnitud, hacen que esta se aprecie por valores numéricos. A cuyo fin se considera como unidad principal de arco la cuarta parte de la circunferencia, que se denomina *cuadrante;* se divide el cuadrante en 90 partes iguales llamadas *grados*, y se subdivide cada grado en 60 *minutos*, y cada minuto en 60 *segundos*. La circunferencia queda de este modo dividida en 360 grados, ó en 21600 minutos, ó en 1296000 segundos; y la operacion de medir un arco queda reducida á determinar el número de grados, minutos y segundos que contiene.

Los grados se representan con un cero por índice, los minutos con un acento y los segundos con dos: así, la graduacion ocho grados, quince minutos y cincuenta segundos se representa por $8^{\circ}\ 15'\ 50''$.

La graduacion de un arco no es más que su valor relativo respecto á la circunferencia; su longitud ó valor absoluto se determina por comparacion con el de la misma circunferencia, como se verá en los ejercicios siguientes.

Aplicaciones.

27. El diámetro de un duro es 20 líneas, ¿cuál es la longitud de su circunferencia?

Poniendo en la fórmula $2\pi r$ en vez de π su valor 3,14159, y en vez de r diez líneas, resulta para valor de la circunferencia del duro $2 \times 3{,}14159 \times 10 =$ 62,8318 líneas.

Hallar el diámetro de un estanque circular, cuya circunferencia tiene 117,65 metros.

Puesto que para hallar el valor de la circunferencia, cuando se da el de su diámetro, es necesario multiplicar este por π; cuando se dé el valor de la circunferencia para hallar el de su diámetro, será necesario dividir aquel por π. Así, en el caso actual el diámetro del estanque es $\frac{117,65}{3,14159}$ metros, ó bien efectuada la division, 37,45 metros.

Siendo el radio del ecuador terrestre 6376984 metros, ¿cuánto anda por hora cada punto de su circunferencia en el movimiento de rotacion de la tierra?

La circunferencia del ecuador es $2\times3,14159\times6376984$ met.$=40067738$ met., que es el camino recorrido por cada uno de sus puntos en las 24 horas: dividido, pues, dicho número por 24, resulta 1669489 met. para el número pedido.

Dos lugares situados en el ecuador estan á 5° 17′ de distancia en longitud, ¿cuánto distan en miriámetros?

Siendo la circunferencia del ecuador 40067738 metros, como tiene 360°, le corresponde á cada grado $\frac{40067738}{360}=111299$ metros, y á cada minuto $\frac{111299}{60}=1855$ met.; luego á los 5° 17′ corresponde $111299\times5+1855\times17=588030$ met., ó lo que es lo mismo 58,8 miriámetros, con un error menor que media centésima de miriámetro.

En el paralelo situado á los 47° de latitud, vale cada grado de longitud 75782 metr., ¿cuántos metros tendrá el radio de dicho paralelo?

La longitud de la circunferencia de este paralelo se obtendrá multiplicando por 360 el valor de uno de sus grados en metros, cuya longitud es $75782\times360=27281520$ met: dividido este número por la razon π ó 3,14159, resulta para valor del diámetro 8683984 met. y la mitad de este, ó sea 4341992 met., es el radio pedido.

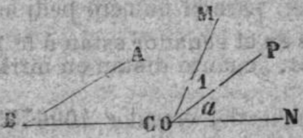
CAPITULO III.

De los ángulos.

28. Angulo *es la extension comprendida entre dos rectas que concurren en un punto*, como ABC (fig. 9.ª).

Lados *de un ángulo son las dos rectas que le forman*, como AB y BC.

Fig. 9.ª



Vértice *de un ángulo es el punto comun de sus dos lados*, como B.

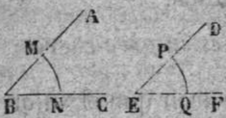
Un ángulo se designa con tres letras, una de cada lado y la del vértice, colocando siempre esta entre las otras dos; de este modo los ángulos de la figura se designan: ABC, MOP, PON. A veces basta para designarle una letra sola ó un número colocados en el vértice ó en su interior: así, puede decirse el ángulo B, el ángulo 1, el ángulo *a*, en vez de ABC, MOP, PON.

La magnitud de un ángulo determina la posicion relativa de sus dos lados, es independiente de la magnitud de estos, y solo varía cuando se modifica la direccion de los mismos.

29. *Se entiende por* arco correspondiente á un ángulo *el arco interceptado entre sus lados, y trazado desde el vértice como centro*. El arco correspondiente al ángulo B es MN, y el correspondiente al DEF es PQ (fig. 10).

Para trazar el arco correspondiente á un ángulo dado B, se hace centro en el vértice B con un radio arbitrario BM, y se traza el arco MN comprendido entre sus lados BA y BC. Y para construir el ángulo correspondiente á un arco dado PQ, se traza por el centro E del arco dado y por uno de sus extremos P una recta ED, y por el mismo centro E y el otro extremo Q otra recta EF; el ángulo DEF, que forman estas dos rectas, es el buscado.

Fig. 10.



Cada ángulo puede tener infinitos arcos correspondientes de radios distintos, pero todos de igual número de grados, aunque de distinta longitud: y cada arco solo puede tener un ángulo correspondiente.

Construccion de angulos.

30. Construir un ángulo igual á otro dado.

Se traza el arco correspondiente al ángulo dado (29), se traza luego un arco igual (21), y se construye el ángulo correspondiente á este arco (29).

31. Construir un ángulo igual á la suma de otros dos ángulos dados.

Se trazan con un mismo radio los arcos correspondientes á los dos ángulos dados (29), se halla la suma de estos dos arcos (22), y se construye el ángulo correspondiente al arco suma.

De un modo análogo se puede *construir un ángulo igual á la diferencia de otros dos ángulos dados, y construir un ángulo duplo, triplo, y en general múltiplo de otro.*

La division de un ángulo dado en cualquier número de partes iguales, se efectua en la práctica dividiendo por tanteo su arco correspondiente en el mismo número de partes iguales, y trazando rectas por el vértice y los puntos de division.

Medicion de los ángulos.

32. *La medida de un ángulo es su arco correspondiente.*

Observacion. Esto solo quiere decir que el valor numérico de un ángulo es igual al valor numérico de su arco correspondiente: pero de ningun modo que una cantidad se mida con otra de distinta especie.

Se llama ÁNGULO RECTO *el ángulo cuyo arco correspondiente es un cuadrante.*

Considerado el cuadrante como unidad principal para medir los arcos (26), se considera tambien el ángulo recto como unidad principal para medir los ángulos. Esta unidad se divide, como aquella, en 90 partes iguales, y á cada una de estas partes corresponde un arco de un grado: esto quiere darse á entender cuando se dice: *el ángulo recto tiene* 90 *grados.* El ángulo de un grado se divide en 60 partes iguales, y cada una de estas en otras 60, teniendo aquellas por arco correspondiente un minuto y estas un segundo. De este modo los ángulos se miden por grados, minutos y segundos, como los arcos, atribuyendo á cada ángulo la graduacion de su arco correspondiente.

Los ángulos trazados sobre el papel se miden con el *semicírculo graduado*, que se reduce á un semicírculo, por lo comun de laton ó de talco, cuya semicircunferencia está dividida en grados y medios grados, y estas divisiones estan numeradas de cinco en cinco ó de diez en diez, desde cero hasta 180°; y tambien con el *trasportador*, instrumento análogo al anterior, pero más perfeccionado en la graduacion de su circunferencia, denominada *limbo.*

UNED

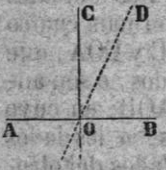
Para medir un ángulo se coloca el trasportador en el plano de dicho ángulo, de modo que su centro caiga sobre el vértice, y el cero de su division sobre uno de los lados; el otro lado cortará al limbo en un punto cuya numeracion da la medida buscada. Y para construir un ángulo de una graduacion dada, no hay más que marcar el centro del trasportador, el punto cero de su limbo, y la division de éste correspondiente á la graduacion dada; las dos rectas que unen los dos últimos puntos con el primero son los lados del ángulo pedido.

La graduacion de un arco de círculo cualquiera se determina trazando su ángulo correspondiente y midiendo este ángulo con el trasportador.

Pueden muy fácilmente ejecutarse con el trasportador todas las construcciones de los números 22, 30 y 31.

33. *Angulos* ADYACENTES *son dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado comun y los otros dos en prolongacion,* como AOD y DOB (fig. 11).

Fig.11.



Cuando dos ángulos adyacentes son iguales, como AOC y COB, son tambien ambos ángulos rectos; y en general todos los ángulos rectos son iguales aunque no sean adyacentes.

ANGULO AGUDO *es todo ángulo menor que un recto*, como DOB; y ÁNGULO OBTUSO *es todo ángulo mayor que un recto*, como AOD.

ANGULOS COMPLEMENTARIOS *son dos ángulos cuya suma es igual á un ángulo recto*, como COD y DOB: cada uno de estos ángulos se llama complemento del otro, y lo mismo se dice de sus respectivos arcos correspondientes trazados con igual radio.

ANGULOS SUPLEMENTARIOS, *ó el uno* SUPLEMENTO *del otro, son dos ángulos cuya suma es igual á dos* *ángulos rectos*. Los ángulos adyacentes son suplementarios.

CAPITULO IV.

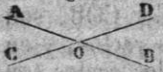
De las rectas perpendiculares.

34. **Rectas perpendiculares** (entre sí ó la una á la otra) *son dos rectas que forman ángulo recto*, como AO y OC (fig. 11). Dos perpendiculares indefinidas forman cuatro ángulos rectos.

Un punto determina la perpendicular á una recta; es decir, por un punto puede siempre pasar una perpendicular á una recta cualquiera, pero nunca dos ó más perpendiculares distintas á la misma recta.

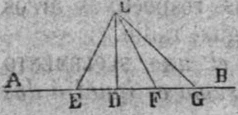
35. **Rectas oblícuas** (entre sí ó la una á la otra) *son dos rectas que forman ángulo agudo ú obtuso*, como DO y OB, ó AO y OD (fig. 12). Dos oblícuas indefinidas AB y CD forman cuatro ángulos AOD, DOB, BOC y COA, que considerados de dos en dos, ó son adyacentes como AOC y AOD, en cuyo caso son suplementarios; ó los lados del uno son las prolongaciones de los lados del otro, como AOC y BOD, y entónces se llaman *opuestos por el vértice* y son iguales.

Fig. 12.



Por un punto C puede pasar un número infinito de oblícuas CE, CF, CG, etc. (fig. 13) á una recta cualquiera AB; y se verifica: 1.° que todas las oblícuas son mayores que la perpendicular CD: 2.° que las oblícuas CE y CF, igualmente separadas de la perpendicular, son iguales;

Fig. 13.



y 3.° que de dos oblícuas CF y CG, la más separada de la perpendicular es la mayor.

Las rectas perpendiculares son de un uso frecuente en arquitectura, carpintería, maquinaria y todas las artes de construccion, y además son necesarias para casi todas las mediciones geométricas.

Trazado de rectas perpendiculares.

36. El trazado de las rectas perpendiculares sobre el papel puede hacerse por medio del trasportador, construyendo con él ángulos de 90°; pero es más cómodo en la práctica el uso de la *escuadra*, instrumento reducido, en su parte esencial, á dos bordes rectilíneos, que se encuentran formando ángulo recto.

Para *levantar* la perpendicular á una recta por un punto dado en ella, ó *bajar* la perpendicular á una recta por un punto exterior, se ajusta el borde de una regla á la recta dada, se aplica contra este borde uno de los lados de la escuadra, y se hace que esta resbale sobre la regla, que se conserva fija, hasta que el otro lado pase por el punto dado: en esta posicion el segundo lado de la escuadra sirve de regla para trazar la perpendicular pedida. La exactitud de la operacion depende del esmero con que se haya ejecutado y de la buena construccion de la escuadra.

Para comprobar la buena construccion de una escuadra, se traza con ella una perpendicular á una recta por un punto cualquiera, y haciéndola girar sobre dicha perpendicular hasta que tome la posicion inversa, como se hizo para comprobar la regla (9), se traza otra perpendicular á la misma recta por el mismo punto: si esta coincide con la anterior, la escuadra está bien construida; pues la

UNED

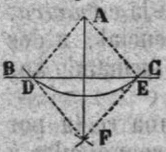
menor oblicuidad apreciable entre sus dos lados se haria muy sensible por este medio, que presenta el error duplicado.

Con la regla y el compás puede tambien ejecutarse el trazado de las rectas perpendiculares, sirviendo este medio de comprobacion al anterior.

37. Trazar la perpendicular á una recta BC por un punto exterior A.

Se hace centro en el punto dado A (fig. 14) con un radio mayor que su distancia á la recta dada, y se traza un arco que corte á dicha recta en dos puntos D y E; se hace luego centro en cada uno de estos puntos, con un mismo radio mayor que la mitad de su distancia DE, y se trazan dos arcos que se corten en un punto F; y uniendo este punto con el dado por medio de la recta AF, resulta la perpendicular pedida.

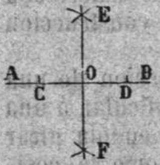
Fig. 14.



38. Trazar la perpendicular á una recta AB por un punto O dado en ella (fig. 15).

Se toma sobre la recta dada un punto á cada lado del O, y á igual distancia de él; se hace luego centro en cada uno de estos dos puntos C y D con un mismo radio, mayor que la distancia OC, y se trazan dos arcos que se corten en un punto E ó F; y uniendo este punto con el dado por medio de la recta EOF resulta la perpendicular pedida.

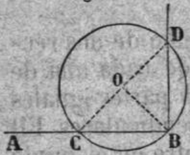
Fig. 15.



39. Trazar la perpendicular á una recta AB (fig. 16) por uno de sus extremos B, sin prolongarla.

Se hace centro en un punto O exterior á la

Fig. 16.

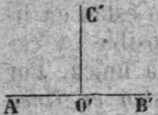


recta dada y más próximo á B que á A, y con el radio OB se traza una circunferencia, que pasará por B y cortará á la recta dada en un punto C: se traza luego el diámetro CD, y uniendo su extremo D con el de la recta dada B por medio de la recta DB, resulta la perpendicular pedida.

Aplicaciones del trazado de rectas perpendiculares.

40. **Medir la distancia de un punto C′ á una recta A′B′ (fig. 17).**

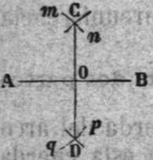
Fig. 17.



Se baja desde el punto dado C′ la perpendicular C′O′ á la recta dada, y midiendo la longitud de esta perpendicular resulta la distancia pedida.

41. **Dividir una recta limitada AB (fig. 18) en dos partes iguales por medio de una perpendicular.**

Fig. 18.



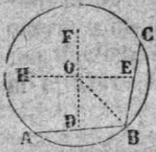
Se hace centro en un extremo A de la recta dada con un radio mayor que la mitad de dicha recta, y se trazan dos arcos á distinto lado de ella, *mn* y *pq;* se hace centro luego en el otro extremo B con el mismo radio, y se trazan otros dos arcos que corten á los anteriores en los puntos C, D: y uniendo estos dos puntos por medio de la recta CD resulta la perpendicular pedida, que corta á la recta dada en su punto medio O.

Observación. Todos los puntos de la perpendicular á una recta en su punto medio equidistan de los extremos de esta recta; y recíprocamente, todos los puntos equidistantes de los extremos de una recta se hallan situados en la perpendicular á dicha recta en su punto medio.

42. Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados, A, B y C (fig. 19).

Se unen los puntos dados por medio de dos rectas AB y BC: se divide cada una de estas dos rectas en dos partes iguales por medio de las perpendiculares FD y HE; y haciendo centro en el punto de interseccion O de estas dos perpendiculares, con el radio OB, se traza una circunferencia, que es la pedida.

Fig. 19.



OBSERVACION. Si los tres puntos A, B y C estuvieren en línea recta, el problema anterior sería imposible; pues las perpendiculares FD y HE no se cortarian: pero si dichos tres puntos no estan en línea recta, el problema será siempre posible, y resultará en cada caso una circunferencia única. Por eso se dice que *tres puntos que no esten en línea recta determinan una circunferencia de círculo.*

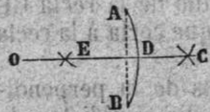
43 Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco dados.

Se toman tres puntos cualesquiera de la circunferencia dada ó del arco dado, y se halla como en el problema anterior el centro de la circunferencia que pase por dichos tres puntos.

44. Dividir un arco AB (fig. 20) en dos partes iguales.

Se traza la cuerda del arco dado, y se divide esta cuerda en dos partes iguales por medio de una perpendicular EC: esta perpendicular corta al arco en su punto medio D.

Fig. 20.

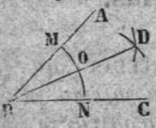


OBSERVACION. Puede omitirse el trazar la cuerda del arco dado, haciendo la construccion del número 41 desde los extremos de este arco, que son á la vez los de su cuerda.

45. Dividir un ángulo ABC (fig. 21) en dos partes iguales.

Se traza el arco MN correspondiente al ángulo dado, y se divide este arco en dos partes iguales, como en el problema anterior, por medio de la recta BD: esta recta divide al ángulo dado ABC en dos ángulos iguales ABD y DBC, y se llama *bisectriz* de dicho ángulo.

Fig. 21.



OBSERVACIONES. 1.ª Puede omitirse el trazar el arco MN, tomando sobre los lados del ángulo dado dos puntos M y N. equidistantes del vértice, y haciendo la construccion desde estos puntos como extremos de dicho arco.

2.ª Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados de dicho ángulo, y recíprocamente, todos los puntos equidistantes de los lados de un ángulo se hallan situados en la bisectriz del mismo.

CAPÍTULO V.

De las rectas paralelas.

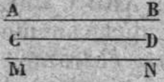


Fig. 22.

46. Rectas paralelas *son las rectas situadas en un mismo plano y que no pueden encontrarse por más que se prolonguen*, como AB, CD, MN (fig. 22).

Las perpendiculares DC y FG (fig. 23) *á una misma recta* AB *son rectas paralelas;* pero una perpendicular DC y una oblícua FE á una misma recta AB prolongadas, se encuentran necesariamente (*).

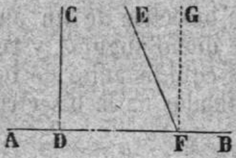


Fig. 23.

Un punto determina la paralela á una recta; es decir, por un punto F puede siempre pasar una paralela FG á una recta cualquiera DC, pero nunca dos ó más paralelas distintas á la misma recta.

Las paralelas tienen sus perpendiculares comunes: es decir, si una recta AB es perpendicular á otra FG, tambien es perpendicular á toda recta CD paralela á la segunda FG.

Dos rectas paralelas son equidistantes, es decir, todos los puntos de una recta equidistan de su paralela; y recíprocamente, todos los puntos de la segunda equidistan de la primera.

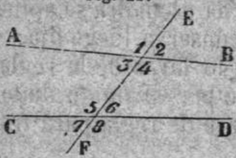
47. *La línea que corta á otras se llama* secante *de estas.*

(*) Esta proposicion es el célebre postulado de Euclides.

UNED

La secante EF (fig. 24) de dos rectas AB y DC forma con ellas ocho ángulos: cuatro con la primera, que son 1, 2, 3 y 4; y otros cuatro con la segunda, que son 5, 6, 7 y 8. De estos ocho ángulos, el 3, el 4, el 5 y el 6, que estan entre las dos rectas, son *internos*, y los otros cuatro *externos*.

Fig. 24.



Llamaremos ángulos ALTERNOS *á dos ángulos, ambos internos de distinto lado de la secante, y que no son adyacentes*, como 3 y 6, 4 y 5.

Angulos CORRESPONDIENTES *son dos ángulos, uno interno y otro externo del mismo lado de la secante, y que no son adyacentes*. como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

Si las dos rectas AB y CD son paralelas, los ángulos alternos son iguales, los ángulos correspondientes son tambien iguales, y los internos del mismo lado de la secante, 3 y 5, 4 y 6, ó los externos 1 y 7, 2 y 8, son suplementarios.

Trazado de rectas paralelas.

48. Las rectas paralelas se pueden trazar en el papel con el auxilio del trasportador ó el semicírculo graduado.

Para trazar por un punto dado E (fig. 25) la paralela á una recta dada CD, se baja con el trasportador desde el punto E la perpendicular EF á la recta dada, y se levanta luego por el mismo punto E la perpendicular EB á la recta EF; esta segunda perpendicular es la paralela pedida.

Fig. 25.

49. Con la escuadra se pueden trazar tambien las rectas paralelas, y este es el medio más comunmente empleado en el dibujo lineal.

Para trazar por un punto dado la paralela á una recta dada, se adapta á esta recta un lado de la escuadra: al otro lado de la misma escuadra se aplica el borde de una regla, que se conserva luego fija; y se hace resbalar la escuadra á lo largo de la regla, hasta que su primer lado pase por el punto dado: en esta posicion, dicho lado sirve de regla para trazar la paralela pedida.

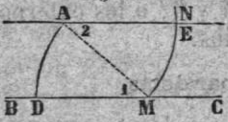
Observacion. Puede obtenerse igualmente la paralela pedida, trazando con la escuadra las dos perpendiculares trazadas al mismo fin con el trasportador en el número precedente.

Con la regla y el compás puede tambien ejecutarse el trazado de rectas paralelas.

50. Trazar la paralela á una recta BC por un punto exterior A (fig. 26).

Se hace centro en A con un radio AM, mayor que la distancia del punto á la recta, y se traza un arco indefinido MN: en el punto M, interseccion de este arco y la recta dada, se hace centro con el mismo radio y se traza el arco AD: se toma sobre MN una parte ME igual á AD; y por los puntos A y E se traza una recta, que es la paralela pedida.

Fig. 26.



Observacion. Puede obtenerse igualmente la paralela pedida, trazando con la regla y el compás las dos perpendiculares trazadas al mismo fin con el trasportador en el número 48.

51. Se resuelve tambien el problema anterior del modo siguiente, muy usado en las artes. Se baja desde el punto dado E (fig. 25) una perpendicular EF á la recta dada, y se levanta otra perpendicular HG á la misma recta dada por uno cualquiera de sus puntos H: se toma en la segunda una magnitud HG

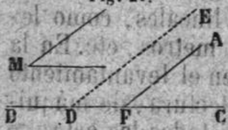
UNED

igual á EF; y por los puntos E y G se traza la recta AB, que es la paralela pedida.

Aplicaciones del trazado de rectas paralelas.

52. Por un punto A, dado fuera de una recta BC, trazar otra recta AF, que forme con la primera un ángulo AFC igual á otro ángulo dado M (fig. 27).

Fig. 27.



En un punto cualquiera D de la recta dada se construye sobre ella un ángulo EDC igual al dado M, y trazando por el punto A la recta AF paralela á ED, resulta la recta pedida.

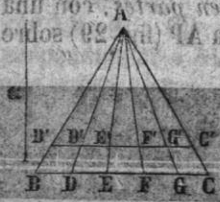
53. Trazar la paralela á una recta dada que diste de ella una longitud dada.

Se levanta una perpendicular á la recta dada por uno cualquiera de sus puntos: se toma sobre esta perpendicular, á partir de su pié, una distancia igual á la longitud dada; y por el extremo de esta distancia se traza una perpendicular á la perpendicular anterior. La segunda perpendicular es la paralela pedida.

54. Dividir una recta dada *a* en cualquier número de partes iguales, 5 por ejemplo.

Sobre una recta BC (fig. 28) indefinida, tómense cinco partes BD, DE, etc. iguales entre sí: haciendo centro en los extremos B y C de estas partes, y con un radio BC igual á la suma de las mismas, se trazan dos arcos que se cortarán en A: por este punto y los B y C se trazan las rectas AB y AC indefinidas. Ahora se toman sobre estas las partes AB′, y AC′ iguales á la recta dada *a*, y se traza la recta B′C′: por el punto A y los

Fig. 20.



UNED

D, E, F, etc. se trazan rectas tambien indefinidas; y la recta B′C′, que es igual á la *a*, queda dividida en cinco partes iguales.

La division de las rectas en partes iguales es el fundamento de la construccion de escalas.

55. Escala *es una recta dividida en partes iguales para medir las distancias sobre el papel.* Las partes de la escala sirven de unidad de medida, y representan siempre unidades lineales, como leguas, millas, varas, kilómetros, metros, etc. En la construccion de cartas ó mapas, en el levantamiento de planos, en el dibujo de arquitectura, de máquinas, etc. y en los diseños de casi todas las artes se hace constantemente uso de las escalas para referir á ellas la magnitud de las líneas del plano ó dibujo, y conocer así la verdadera magnitud del objeto que representa.

El uso general de las escalas se reduce á las dos cuestiones siguientes: 1.ª medir una longitud dada, ó sea dada una línea hallar su medida ó valor numérico; y 2.ª dado el valor numérico hallar la longitud.

Dos son las escalas más comunmente usadas: la de *cien* partes y la de *mil*.

Escala de cien partes.

Para construir la *escala de cien partes*, con una unidad dada M, se traza una recta AP (fig. 29) sobre

Fig. 29.

la cual se marcan diez distancias consecutivas AB, B1, 1 2, etc. iguales á M, numerándolas por órden correlativo, como se ve en la figura; se divide AB en diez partes iguales, y se numera estas en órden inverso á las anteriores. La primera numeracion corresponde á las unidades y la segunda á las décimas.

Para medir con esta escala una longitud dada, se toma con el compás y se coloca sobre la recta AP, de modo que uno de sus extremos coincida con un punto de division, situado á la derecha de B, por ejemplo C, y el otro caiga á la izquierda entre B y A, por ejemplo en 5. En este caso la longitud se compone: 1.° de CB, ó 3 unidades; y 2.° de B 5, ó cinco décimas; de modo que la expresion de dicha longitud es 3,5.

Para tomar en esta misma escala una longitud que tenga un valor numérico dado, se colocan las dos puntas del compás sobre la recta AP, una en la division que marca las unidades y otra en la que marca las décimas. Por ejemplo, la distancia cuya medida sea 6,7 se tomará con el compás colocando una de sus puntas en la sexta division de la derecha y la otra en la sétima de la izquierda, es decir, una en D y otra en N.

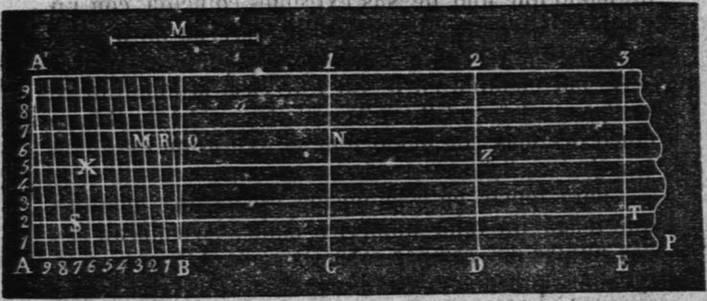
Escala de mil partes.

Para construir una *escala de mil partes*, con una unidad dada M se traza una recta AP (fig. 30) sobre la cual se marca una série de distancias consecutivas AB, BC, CD, etc. iguales á M: se levanta AA′ perpendicular á AP, y se toman en ella diez distancias consecutivas iguales A 1, 1 2, 2 3, etc.: por los puntos de division de la primera se trazan las rectas C1, D2, E3, etc. paralelas á la segunda, y por los de estas paralelas á la primera: se divide AB en diez partes iguales, se une A′ con el punto de division 9, y por los otros puntos de division se trazan paralelas á la recta A′9: y por último, se nu-

UNED

meran en órden correlativo, como se ve en la figura, las perpendiculares, las oblícuas y las paralelas á la recta AP. La primera numeracion corresponde á las unidades, la segunda á las décimas y la tercera á las centésimas de la unidad dada M.

Fig. 30.



Para medir con esta escala una longitud dada, se toma con el compás y se coloca sobre una de las paralelas á AP, de modo que sus extremos coincidan sensiblemente con dos puntos de division, M y N por ejemplo. En este caso la longitud se compone: 1.° de NQ ó 1 unidad; 2.° de MR ó 2 décimas, y 3.° de RQ ó 6 centésimas, de modo que la expresion de dicha longitud es 1,26. Del mismo modo se ve que la expresion de la distancia ST es 3,72.

Para tomar en esta misma escala una longitud que tenga un valor numérico dado, se colocan las puntas del compás sobre la paralela á la recta AP, cuya numeracion corresponda á las centésimas del valor dado, una en la oblícua correspondiente á las décimas y la otra en la perpendicular correspondiente á las unidades. Por ejemplo, la distancia cuya medida sea 2,65, se tomará con el compás colocando sus dos puntas en la paralela 5, una en la

UNED

oblícua 6 y otra en la perpendicular 2, es decir, una en X y otra en Z.

CAPITULO VI.

Interseccion y contacto de rectas y circunferencias.

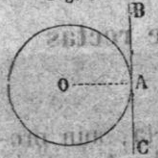
56. Una circunferencia y una recta, áun prolongada esta indefinidamente, no pueden tener más de dos puntos comunes. Sus distintas posiciones relativas son por lo tanto tres: ó tienen dos puntos comunes, en cuyo caso se llaman *secantes*, y dichos dos puntos se denominan de *interseccion;* ó tienen un solo punto comun, en cuyo caso se llaman *tangentes*, y dicho punto se denomina *de contacto* ó *de tangencia;* ó no tienen punto alguno comun, en cuyo caso son exteriores la una á la otra. En el primer caso la distancia del centro de la circunferencia á la recta es menor que el radio, en el segundo igual y en el tercero mayor.

La recta tangente á una circunferencia y el radio de ésta, que termina en el punto de contacto, son perpendiculares.

La consideracion de las rectas tangentes á las circunferencias tiene numerosas aplicaciones. Todo cuerpo que retenido hácia un punto fijo se mueve circularmente, por ejemplo, la piedra en una honda, cuando cesa de repente la causa que la retiene, como al disparar la honda, toma la direccion de la tangente á la circunferencia que describia, lo que se expresa diciendo que *se escapa por la tangente*. Las cuerdas que se arrollan á las *poleas* ó garruchas, figuran rectas tangentes á sus circunferencias. Y en general el trazado de rectas y circunferencias tangentes es indispensable en el dibujo de molduras, remates y adornos en casi todas las artes de construccion.

57. Trazar la tangente á una circunferencia O en un punto dado A (fig. 31).

Fig. 31.



Se traza el radio OA; y la perpendicular BC á este radio en su extremo A es la tangente pedida.

58. Trazar con un radio dado OA una circunferencia tangente á una recta BC en un punto dado A.

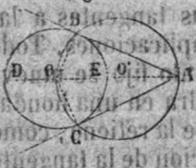
Por el punto dado se levanta una perpendicular á la recta dada, y se toma sobre dicha perpendicular una distancia AO igual al radio dado: en el extremo O de esta distancia se hace centro, y con dicho radio se traza una circunferencia, que es la pedida.

Observacion. Haciendo la construccion anterior por el otro lado de la recta BC, resulta otra circunferencia igual, tangente tambien en el punto A á la recta dada.

59. Trazar una tangente á una circunferencia O desde un punto exterior A (fig. 32).

Se une el punto dado A con el centro O por medio de la recta AO, y sobre esta recta como diámetro se traza una circunferencia O′, que cortará á la dada en dos puntos B y C: por cada uno de estos dos puntos y el dado A se traza una recta, y cada una de estas rectas AB ó AC es la tangente pedida.

Fig. 32.



Observaciones. 1.ª Las partes AB y AC de estas dos tangentes comprendidas entre su punto comun A y los de contacto B y C son iguales, y forman ángulos iguales con la recta AO, que une dicho punto comun A con el centro O de la circunferencia.

2.ª El centro de una circunferencia tangente á los dos lados de un ángulo está situado en la bisectriz de este ángulo.

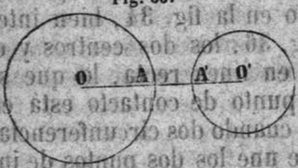
60. Trazar con un radio dado OB una circunferencia tangente á dos rectas que se cortan AB y AC.

Se traza la bisectriz AD (fig. 32) del ángulo BAC, formado por las dos rectas dadas : se traza una paralela á cualquiera de estas dos rectas que diste de ella una longitud igual al radio dado, y esta paralela cortará á la bisectriz en un punto O : en este punto se hace centro, y con el radio dado se traza una circunferencia, que es la pedida.

Observacion. Como dos rectas indefinidas que se cortan forman cuatro ángulos, puede hacerse la construccion anterior en cada uno de estos ángulos, y obtenerse cuatro circunferencias iguales tangentes á las mismas dos rectas.

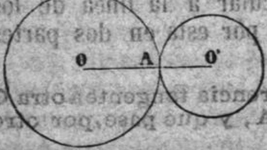
61. Dos circunferencias distintas no pueden tener más de dos puntos comunes. Sus diversas posiciones relativas son, pues, las cinco siguientes :

Fig. 33.



1.ª Exteriores la una á la otra sin tener punto alguno comun, como O y O' (fig. 33); en cuyo caso la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.

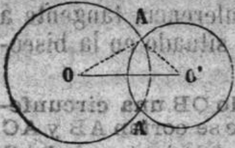
Fig. 34.



2.ª Tangentes exteriormente, como O y O' (fig. 34); en cuyo caso la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.

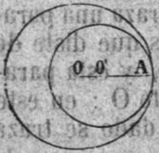
3.ª Secantes, como O y O' (fig. 35); en cuyo

Fig 35



caso tiene cada una parte dentro y parte fuera de la otra, y la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.

Fig. 36.



4.ª Tangentes interiormente, como O y O′ (fig. 36); en cuyo caso la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.

5.ª Interior una á otra sin tener punto alguno comun, como O y O′ (fig. 37); en cuyo caso la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios. El caso en que sean *concéntricas*, es decir, que tengan un mismo centro, está comprendido en esta quinta posicion.

Fig. 37.

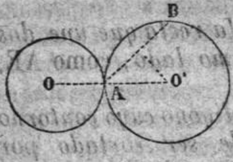
62. Cuando dos circunferencias son tangentes, bien exteriormente, como en la fig. 34, bien interiormente, como en la fig. 36, los dos centros y el punto de contacto están en línea recta, lo que se expresa diciendo que el punto de contacto está en *la línea de los centros*. Y cuando dos circunferencias son secantes, la recta que une los dos puntos de interseccion, que es *la cuerda comun* de las dos circunferencias, es perpendicular á la línea de los centros, y queda dividida por esta en dos partes iguales.

63. Trazar una circunferencia tangente á otra O (fig. 38) en un punto dado A, y que pase por otro punto tambien dado B.

Se traza la recta AB, y se la divide en dos par-

UNED

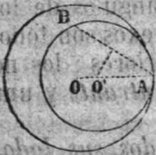
Fig. 38.



tes iguales por medio de una perpendicular: se prolonga el radio OA hasta que encuentre á la perpendicular anterior; se hace centro en el punto de interseccion O', y con un radio igual á O'A se traza una circunferencia, que es la pedida.

OBSERVACIONES. 1.ª Si el punto B (fig. 39) es

Fig. 39.



interior á la circunferencia dada, se resuelve el problema de un modo análogo, como se ve fácilmente en la figura. 2.ª Si el ángulo BAO fuese recto no se podria determinar el centro de la circunferencia pedida, y esta circunferencia se convertiria en la recta tangente en el punto A á la circunferencia dada.

64. El trazado de circunferencias secantes entre sí y con las líneas rectas es de un uso tan frecuente en las construcciones geométricas, que constituye el medio principal de resolucion de los problemas gráficos; y puede ya notarse por los precedentes que apénas hay alguno, áun de los más sencillos, en que no se determine algun punto por intersecciones de dos arcos ó de un arco y una recta.

CAPITULO VII.

De los polígonos.

65. POLÍGONO *es la porcion de superficie plana limitada por rectas.* Estas rectas, los ángulos que forman, y los vértices de estos ángulos, se llaman respectivamente *lados*, *ángulos* y *vértices* del polígono.

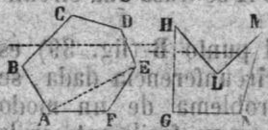
UNED

PERÍMETRO Ó CONTORNO *de un polígono es la suma ó conjunto de sus lados.*

DIAGONAL *de un polígono es la recta que une dos vértices no contiguos á un mismo lado*, como AE, (fig. 40).

POLÍGONO CONVEXO *es todo polígono cuyo contorno no puede ser cortado por una recta cualquiera en más de dos puntos*, como ABCDEF. El polígono GHLMN no es convexo. Los ángulos de los polígonos convexos son todos *salientes*, y las diagonales todas interiores: los no convexos tienen lo ménos un ángulo *entrante* y una diagonal exterior.

Fig. 40.



Un polígono es EQUILÁTERO *si todos sus lados son iguales; y* EQUIÁNGULO *si lo son todos sus ángulos.*

POLÍGONO REGULAR *es todo polígono que sea á la vez equilátero y equiángulo.*

Los que no reunen estas dos condiciones se llaman irregulares.

El polígono que tiene tres lados se llama TRIÁNGULO, *el que tiene cuatro* CUADRILÁTERO, *el que tiene cinco* PENTÁGONO, y así sucesivamente EXÁGONO, EPTÁGONO, OCTÓGONO, etc., á los que tienen *seis, siete, ocho*, etc.

66. En todo triángulo hay que considerar seis elementos, sus tres lados y sus tres ángulos.

Los tres lados estan sujetos á la condicion de ser cada uno de ellos menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia; y los ángulos, á la condicion de ser siempre la suma de los tres igual á dos rectos.

Los triángulos se dividen con respecto á sus lados en EQUILÁTEROS, *que tienen sus tres lados iguales*: ISÓSCELES, *que tienen dos lados iguales*; y

UNED

ESCALENOS, *que tienen sus tres lados desiguales.* Y con respecto á sus ángulos en RECTÁNGULOS, *que tienen un ángulo recto;* OBTUSÁNGULOS, *que tienen un ángulo obtuso; y* ACUTÁNGULOS, *que tienen los tres ángulos agudos.*

Todo triángulo equilátero es tambien equiángulo, y por lo tanto polígono regular.

En todo triángulo isósceles son iguales los dos ángulos opuestos á los lados iguales; el tercer lado se llama *base*, y se llama *altura* la distancia á la base desde el vértice opuesto.

En todo triángulo escaleno los tres ángulos son desiguales: el mayor está opuesto al mayor lado, el mediano al mediano, y el menor al menor: uno cualquiera de sus lados es la *base*, y la distancia á la base desde el vértice opuesto es la *altura*.

En todo triángulo rectángulo el lado mayor se llama *hipotenusa*, y los otros dos *catetos;* los dos ángulos agudos son complementarios.

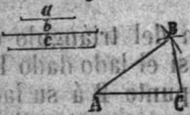
Los triángulos obtusángulos y los acutángulos se comprenden en la denominacion comun de *oblicuángulos*.

Un triángulo está determinado en general por tres de sus seis elementos, habiendo entre los tres por lo ménos un lado.

67. Construir un triángulo dados sus tres lados *a, b, c* (fig. 41).

Se traza una recta $AC = b$, y haciendo centro en sus extremos A y C, con radios respectivamente iguales á b y a, se trazan dos arcos que se cortarán en un punto B: uniendo este punto con A y C por medio de las rectas BA y BC resulta el triángulo pedido.

Fig. 41.



OBSERVACION. Si los tres datos *a*, *b* y *c* no satis-

UNED

facen á la condicion expresada en el núm. 66, la construccion del triángulo es imposible, pues los arcos, cuya interseccion determina el punto B, no pueden cortarse.

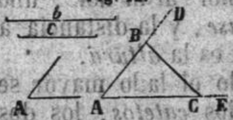
Casos particulares del problema anterior. 1.° Sobre una recta dada construir un triángulo equilátero. 2.° Construir un triángulo isósceles, dados la base y uno de los otros lados.

68. Construir un triángulo, dados los dos lados y un ángulo.

1.° Si el ángulo dado A es el comprendido entre los dos lados dados *b* y *c*.

Se construye un ángulo DAE=A (fig. 42), se toman sobre sus lados las distancias AC=*b* y AB=*c*, y uniendo los puntos B y C por medio de la recta BC resulta el triángulo pedido.

Fig. 42.



Casos particulares. 1.° Construir un triángulo isósceles dado el ángulo opuesto á la base y uno de los lados iguales. 2.° Construir un triángulo rectángulo dados los dos catetos.

2.° Si el ángulo dado A es el opuesto á uno de los dos lados AB ó BC, se construye un ángulo DAE=A; sobre uno de sus lados se toma una distancia AB igual á uno de los dados, y con un radio igual á la otra, haciendo centro en B, se traza un arco, que cortará al otro lado en un punto C; uniendo este punto con el B por medio de la recta BC resulta el triángulo pedido.

Observación. La construccion del triángulo en este segundo caso será imposible si el lado dado BC es menor que la distancia del punto B á su lado opuesto AC; y si el lado BC es mayor que dicha distancia y menor que AB resultarán dos triángulos distintos.

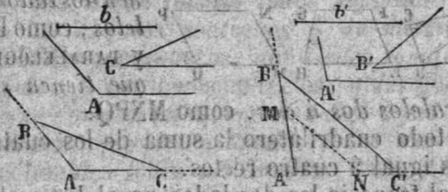
UNED

Caso particular. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto.

69. Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos.

1.° Si los datos son el lado b y sus dos ángulos contiguos A y C (fig. 43), se toma sobre una recta

Fig. 43.



cualquiera una parte AC$=b$, y en uno de sus extremos se construye un ángulo igual á A y en el otro un ángulo igual á C: el triángulo que resulte es el pedido.

2.° Si los datos son el lado b' y los ángulos A′ y B′, este opuesto á dicho lado, se toma sobre una recta cualquiera una parte $A'C'=b'$; y sobre ella en uno de sus extremos A′ se construye un ángulo $C'A'M=A'$: por un punto cualquiera M de la recta A′M se traza otra recta MN que forme con aquella un ángulo $A'MN=B'$, y trazando por el punto C′ la recta C′B′ paralela á MN resulta el triángulo pedido A′B′C′.

Observacion. La construccion del triángulo es imposible en los dos casos anteriores si la suma de los dos ángulos dados no es menor que dos rectos.

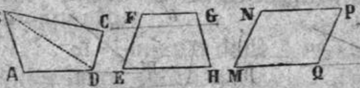
Casos particulares. Construir un triángulo isósceles, dados la base y uno de los dos ángulos iguales; y dados la base y su ángulo opuesto.

70. Construir un triángulo igual á otro dado.

Considerando como datos los tres lados del triángulo dado, ó dos lados y un ángulo, ó un lado y dos ángulos, se construye un nuevo triángulo, que será igual al propuesto.

71. Los cuadriláteros se dividen en TRAPEZOIDES, *que no tienen lados paralelos*, como ABCD (fig. 44): TRAPECIOS, *que tienen dos lados paralelos*, como EFGH; y PARALELÓGRAMOS, *que tienen sus lados paralelos dos á dos*, como MNPQ.

Fig. 44.



En todo cuadrilátero la suma de los cuatro ángulos es igual á cuatro rectos.

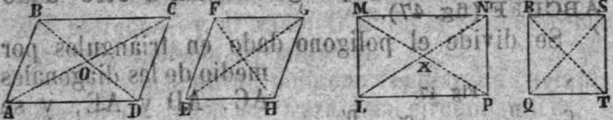
En el trapecio los dos lados paralelos se llaman *bases*, y se llama *altura* la distancia entre las bases. Los dos ángulos E y H contiguos á un mismo lado de los no paralelos son suplementarios, así como los H y G; y si uno de estos ángulos H es recto, el otro G tambien lo es, y el trapecio se llama *rectangular*. Si los dos ángulos E y H contiguos á una misma base son iguales, los otros dos F y G contiguos á la otra base son tambien iguales: en este caso los dos lados no paralelos son iguales y el trapecio se llama *isósceles*.

En el paralelógramo los lados opuestos MN y PQ son iguales, así como NP y MQ: los ángulos opuestos M y P son iguales, así como N y Q; y los ángulos M y Q contiguos á un mismo lado son suplementos, así como Q y P, P y N, N y M. *Base* de un paralelógramo es uno cualquiera de sus lados, y *altura* la distancia entre la base y su lado opuesto.

72. Los paralelógramos se dividen en ROMBOIDES, *que tienen desiguales los lados que forman un mismo ángulo y desiguales tambien los ángulos con-*

tiguos á un mismo lado, como ABCD (fig. 45):

Fig. 45.



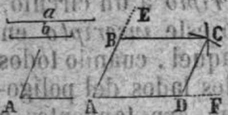
ROMBOS, *que tienen iguales todos sus lados y desiguales los ángulos contiguos á un mismo lado*, como EFGH; RECTANGULOS, *que tienen iguales todos sus ángulos*, y por lo mismo rectos, *y desiguales los lados que forman un mismo ángulo*, como LMNP; Y CUADRADOS, *que tienen iguales todos sus lados é iguales tambien todos sus ángulos*, como QRST.

Todos los paralelógramos quedan divididos por cada una de sus diagonales en dos triángulos iguales; y las dos diagonales se dividen mútuamente en dos partes iguales. En el romboide las dos diagonales son oblícuas y desiguales; en el rombo perpendiculares y desiguales; en el rectángulo oblícuas é iguales; y en el cuadrado perpendiculares é iguales.

73. Construir un paralelógramo dados un ángulo A y los dos lados que le forman *a* y *b*.

Se construye un ángulo EAF=A (fig. 46), y sobre sus lados se toman dos distancias AD=*a* y AB=*b*: haciendo centro en B con el radio *a* se traza un arco, y haciendo centro en D con el radio *b* se traza otro arco, que cortará al anterior en un punto C: se une este punto con B y con D por medio de las rectas CB y CD, y resulta el paralelógramo pedido.

Fig. 46.

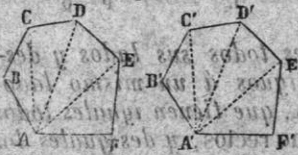


Casos particulares. 1.° Construir un rectángulo dadas la base y la altura. 2.° Construir un cuadrado conocido su lado. 3.° Construir un rombo dados el lado y un ángulo.

74. Construir un polígono igual á otro dado ABCDEF (fig. 47).

Se divide el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD y AE, y se construye otra série de triángulos $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$, $A'E'F'$ respectivamente iguales á los anteriores y en el mismo órden.

Fig. 47.

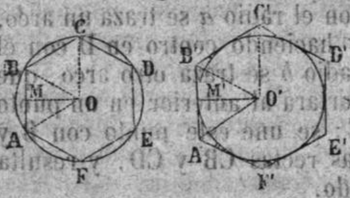


Tambien puede resolverse el problema anterior trazando por los vértices del polígono dado (fig. 48) un sistema de rectas paralelas, y tomando sobre ellas distancias iguales $AA'=BB'=CC'=DD'=EE'$: los extremos A', B', C', D', E' de estas distancias serán los vértices de un polígono igual al dado.

Fig. 48.

75. Un polígono está *inscripto* en un círculo, ó el círculo *circunscripto* al polígono, cuando todos los vértices del polígono estan en la circunferencia de dicho círculo, como ABCDEF (fig. 49). Y un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó éste *inscripto* en aquel, cuando todos los lados del polígono son tangentes á dicho círculo, como $A'B'C'D'E'F'$.

Fig. 49.



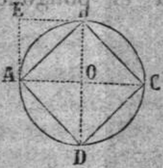
A todo polígono regular se le puede circunscribir una circunferencia é inscribir otra. Las dos circunferencias inscripta y circunscripta á un mismo polígono regular son concéntricas, y su centro O se denomina tambien *centro del polígono*. El radio OA de la circunferencia circunscripta se llama *radio del polígono*, y el radio O′M′ de la circunferencia inscripta *apotema del polígono*.

Para construir un polígono regular de cualquier número de lados se traza una circunferencia, se divide esta circunferencia en tantos arcos iguales como lados haya de tener el polígono, y las cuerdas de estos arcos son los lados del polígono.

76. Inscribir una circunferencia en un cuadrado.

Se trazan dos diámetros perpendiculares AC y BD (fig. 50), y uniendo sus extremos por medio de las rectas AB, BC, CD, DA resulta el cuadrado pedido.

Fig. 50.



Observacion. Trazando las tangentes al círculo en los vértices del cuadrado inscripto resulta un cuadrado circunscripto.

77. Inscribir en una circunferencia un exágono regular.

Se lleva sobre la circunferencia seis veces consecutivas una abertura de compás igual al radio (fig. 51), y quedará dividida exactamente en seis arcos iguales : se trazan las cuerdas de estos arcos y resulta el exágono pedido.

Fig. 51.

Observacion. Uniendo los vértices del exágono alternadamente por medio de las rectas BD, DF, FB, resulta el triángulo equilátero inscripto.

78. Construir un polígono regular dado su lado *a* y el número de lados, ocho por ejemplo.

Se inscribe en un círculo cualquiera un octógono regular ABCDEFGH (fig. 52) : sobre uno de sus lados AB (prolongado si fuere necesario) se toma una distancia AM$=a$: por el punto M se traza una paralela MB′ al radio OA hasta que encuentre al radio OB, ó á su prolongacion, en un punto B′: con el radio OB′ se traza una circunferencia concéntrica á la primera, y uniendo los puntos en que esta circunferencia corte á los radios del octógono primero, ó á sus prolongaciones, por medio de las rectas A′B′, B′C′, C′D′, D′E′, etc. resulta el polígono pedido.

Fig. 52.

CAPITULO VIII.

Areas planas.

79. Area *de una superficie es la medida de su magnitud*. Esta *medida* se halla por comparacion con otra superficie constante tomada como unidad; y *determinar una área* es hallar el número de veces que contiene al área unidad.

La UNIDAD DE ÁREAS, *llamada tambien* UNIDAD SUPERFICIAL, *es el cuadrado que tiene por lado la unidad lineal*. Si la *unidad lineal* es el metro, la *unidad superficial* es un cuadrado que tiene por lado un metro, y se llama *metro cuadrado;* si la nuidad lineal es el decímetro, la unidad superficial es un cuadrado, que tiene por lado un decímetro, y se llama *decímetro cuadrado*.

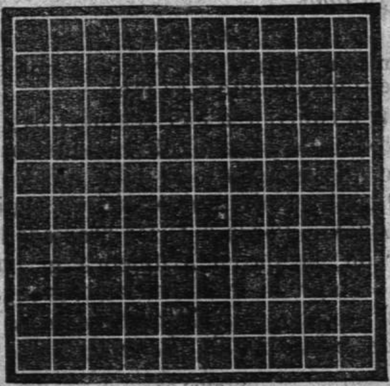
80. Las unidades superficiales en el sistema métrico decimal para la medicion de terrenos son : el

UNED

hectómetro cuadrado, que se denomina *hectárea*; el *decámetro cuadrado*, que se denomina *área*; y el *metro cuadrado*, que se denomina *centiárea*.

El decámetro cuadrado tiene cien metros cuadrados, pues se compone de diez filas contiguas formadas cada una por diez metros cuadrados, como se ve en la figura 53: de modo que el metro cua-

Fig. 53.



drado es la centésima parte del decámetro cuadrado. Por la misma razon el decámetro cuadrado es la centésima parte del hectómetro cuadrado; y en general cada unidad superficial del sistema métrico decimal es la centésima parte de su inmediata superior.

Así es que en dicho sistema la unidad inmediata superior al *área* (decámetro cuadrado) es la *hectárea* (cien áreas, hectómetro cuadrado), y la inferior inmediata la *centiárea* (centésima de área, metro cuadrado), sin que haya *deca-áreas* ni *deci-áreas*. Y la reduccion de unidades superficiales de una especie á su inmediata inferior ó á su inmediata superior se efectua multiplicando ó dividiendo respectivamente por ciento; lo que se consigue con una simple traslacion de la coma dos lugares á la derecha ó á la izquierda. Por ejemplo, 732,5684 hectáreas equivale á 73256,84 áreas y á 7325684 centiáreas, y descompuesto en forma complexa es igual á 732 hectáreas, 56 áreas y 84 centiáreas.

81. *El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.*

EJEMPLO.

Determinar el área del suelo de una sala cuadrada que tiene de lado 5,47 met.

Este lado equivale á 547 centímetros, y su cuadrado es 547×547=299209 centímetros cuadrados, ó lo que es igual, 29 met. cuad., 92 dec. cuad. y 9 cent. cuad., que es el área pedida.

OBSERVACION. Por la anterior propiedad del área del cuadrado, se da en Aritmética el nombre de *cuadrado* á un producto de dos factores iguales.

82. *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

EJEMPLOS.

1.° Hallar el número de baldosas de á pié cuadrado que son necesarias para el pavimento de una sala rectangular cuyo largo es 7 varas y 2 piés, y el ancho $4\frac{1}{2}$ varas.

La base de este rectángulo es 23 piés, y la altura $13\frac{1}{2}$ piés; y su área es $23\times13\frac{1}{2}=310\frac{1}{2}$ piés cuadrados. Es decir, que las baldosas necesarias son $310\frac{1}{2}$.

2.° Medir un campo cuyas lindes forman un paralelógramo que tiene por base 237 met. y por altura 123 met.

El área de dicho campo es 237×123=29151 metros cuadrados, ó lo que es igual, 2 hectáreas, 91 áreas y 51 centiáreas.

UNED

83. *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

EJEMPLO.

Hallar el número de azulejos de á decímetro cuadrado que son necesarios para cubrir un frontispicio triangular de 4,27 met. por base y 2,64 metros por altura.

La base de este triángulo es 427 centímetros, y la altura 264 centímetros; su área es $\frac{427\times264}{2}=56364$ centímetros cuadrados, ó lo que es igual, 563 decímetros cuadrados y 64 centímetros cuadrados. Es decir, que los azulejos necesarios son 563,64.

84. *El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

EJEMPLO.

Hallar el número de metros cuadrados de láminas de zinc que son necesarios para cubrir una vertiente de tejado de figura trapecial, que tiene de alero 17,25 met., de caballete 12,47, y de distancia entre uno y otro 5,34 met.

Las bases de este trapecio son 1725 cent. y 1247 cent., y la altura es 534 cent.: su área es $534\times\frac{1725+1247}{2}=793524$ centímetros cuadrados, ó lo que es igual, 79,3524 metros cuadrados.

85. *El área de un polígono cualquiera se halla en general descomponiéndole en triángulos, determinando separadamente el área de cada triángulo y sumando estas áreas. Pero si el polígono es regular, su área es igual á la mitad del producto de su perímetro por su apotema.*

86. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por su radio;* y como, siendo el radio r, la longitud de la circun-

ferencia es $2\pi r$ (núm. 25), el área del círculo estará expresada por $\frac{2\pi r \times r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$. Es decir que *el área de un círculo se halla multiplicando el cuadrado de su radio por la razon de la circunferencia al diámetro.*

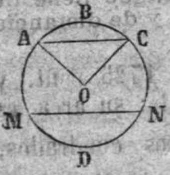
EJEMPLO.

Hallar en leguas cuadradas el área del círculo cuya circunferencia es el ecuador terrestre.

Cada uno de los 360° de esta circunferencia tiene 20 leguas, de modo que dicha circunferencia tendrá de longitud $360 \times 20 = 7200$ leguas : su diametro será $\frac{7200}{3,14159} = 2291,8331$ leguas y su radio 1145,9165 leguas. El área de dicho círculo será $\frac{7200 \times 1145,9165}{2} = 4125299$ leguas cuadradas, con menor error de una legua cuadrada.

87. *Se llama* SECTOR *de círculo la parte de este comprendida entre dos radios y un arco*, como ABCO (fig. 54) : *y* SEGMENTO *la parte comprendida entre una cuerda y su arco*, como MDN.

Fig. 54.



El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su arco por el radio.

Un segmento de círculo ABC es la diferencia entre un sector ABCO y un triángulo AOC. Determinando separadamente el área del sector y la del triángulo, y restando la segunda de la primera, se tendrá el área del segmento.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

CAPITULO PRIMERO.

Rectas y planos.

De la definicion misma del plano (núm. 6), resulta que si una recta tiene dos puntos en un plano está toda ella situada en el mismo plano.

88. *Tres puntos que no esten en línea recta determinan la posicion de un plano* : es decir, por dichos tres puntos puede siempre pasar un plano; pero nunca dos ó más planos distintos; y si dos planos tienen comunes tres puntos que no esten en línea recta, dichos dos planos coinciden en uno solo. La anterior propiedad tiene innumerables aplicaciones prácticas : los muebles de tres pies conservan estabilidad sobre un suelo desigual y no *cojean* como los de cuatro, porque el plano que los sostiene queda siempre determinado por sus tres puntos de apoyo; y por la misma razon se *montan* sobre *trípodes* los objetos y aparatos que han de permanecer estables y sin balancear sobre un suelo cualquiera.

La posicion de un plano queda tambien deter-

UNED

minada por dos rectas que se cortan, ó por dos rectas paralelas.

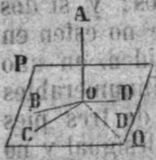
89. La superficie plana puede concebirse *engendrada* (formada ó construida) por el movimiento de una recta que, apoyándose en otras dos rectas fijas que se corten ó sean paralelas, resbala á lo largo de ellas. En esta *generacion* del plano las dos rectas fijas se llaman *directrices* y la recta móvil *generatriz*.

En las artes se realiza frecuentemente este modo de generacion del plano. Los carpinteros y picapedreros para labrar superficies planas apoyan sobre dos rectas fijas, que trazan de antemano como directrices, el canto de una regla que sirve de generatriz.

90. *La interseccion de una recta y un plano es un punto.* Este punto se llama tambien *pie* de la recta sobre el plano.

Se dice que es una recta PERPENDICULAR Á UN PLANO *ó que es un* PLANO PERPENDICULAR *á una recta, cuando la recta es perpendicular á todas las que en dicho plano pasen por su pie*: la recta AO, perpendicular á BO, CO, DO, etc. (fig. 55), que pasan por su pie O en el plano PQ, es perpendicular á este plano. Para que una recta sea perpendicular á todas las que en un plano pasen por su pie, basta que lo sea á dos de estas.

Fig 55.



Se dice que es una RECTA OBLÍCUA Á UN PLANO *ó que es un* PLANO OBLÍCUO *á una recta, cuando la recta y el plano* (prolongados si es necesario) *se cortan y no son perpendiculares.*

Se dice que es una recta PARALELA Á UN PLANO *ó que es un* PLANO PARALELO *á una recta, cuando la recta y el plano no pueden cortarse por más que se* *prolonguen*. Para que una recta sea paralela á un plano, basta que lo sea á una recta cualquiera situada en el plano.

91. Una recta y un plano indefinidos no pueden tener más que dos clases de posiciones relativas, ó se cortan, ó son paralelos. En el primer caso pueden ser perpendiculares ú oblícuos: en el segundo no pueden tener punto alguno comun.

Dos rectas indefinidas en el espacio no pueden tener más que tres clases de posiciones relativas: ó se cortan, ó son paralelas, ó *se cruzan*. En el primer caso estan situadas en un mismo plano (número 88); y pueden ser perpendiculares ú oblícuas: en el segundo tambien estan situadas en un mismo plano (núm. 88), y no tienen punto alguno comun; pero en el tercero no puede haber plano alguno que contenga á la vez á las dos rectas, y estas por tanto no pueden cortarse ni ser paralelas. Una recta que corte á un plano, y otra cualquiera situada en este sin pasar por el pie de la primera, son dos rectas que se cruzan.

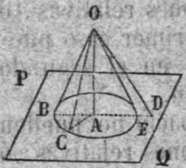
Dos planos indefinidos no pueden tener más que dos clases de posiciones distintas: ó se cortan, ó no se cortan. *Si dos planos se cortan, su interseccion es una recta. Los planos que prolongados indefinidamente no se cortan se llaman* PARALELOS.

92. En el espacio, lo mismo que en el plano, un punto *exterior* determina la perpendicular á una recta dada (núm. 34); pero por un punto O (figura 55), de una recta AO se puede en el espacio tirar un número infinito de perpendiculares á la misma recta AO, tales como BO, CO, DO, etc. y todas ellas estan situadas en un mismo plano PQ, que es perpendicular á la recta AO.

Por un punto no puede tirarse más recta perpendicular á un plano dado, que una sola; ni más plano perpendicular á una recta dada que uno solo.

La perpendicular OA (fig. 56) es la mínima distancia del punto O al plano PQ: las oblícuas OB, OC, OE, que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales, y la oblícua OD, que se aparta más, es mayor.

Fig. 56.



Por un punto se puede tirar un número infinito de rectas paralelas á un plano dado, y todas ellas estan situadas en un mismo plano, que es paralelo al plano dado; y tambien un número infinito de planos paralelos á una recta dada, y todos ellos se cortan en una sola recta paralela á la dada.

93. **Por un punto A (fig. 56) dado en un plano PQ levantar la perpendicular AO á este plano.**

Haciendo centro en A con un radio cualquiera se traza una circunferencia BCE en el plano dado; se marcan en ella tres puntos cualesquiera B, C, E; y colocando en estos puntos los extremos de tres rectas iguales, mayores que AB (determinadas por tres reglas ó tres hilos tirantes de igual longitud), se reunen los otros tres extremos en un mismo punto O. La recta que pase por O y por A es la perpendicular pedida.

94. **Por un punto O (fig. 56) dado fuera de un plano PQ bajar la perpendicular OA á este plano.**

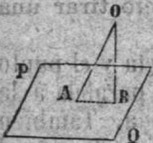
Se bajan desde O tres oblícuas iguales OB, OC, OE (por medio de la regla, ó de un hilo tirante, ó del compás); y se halla el centro A de la circunferencia que pase por los tres puntos, B, C, E. La recta que pase por O y por A es la perpendicular pedida.

95. *Se llama* PROYECCION DE UN PUNTO *sobre un plano el pie de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano; y* PROYECCION DE UNA LÍNEA *sobre un plano, la línea que forman las proyecciones*

de todos sus puntos sobre el mismo plano. La proyeccion de una recta AO sobre un plano PQ es otra recta AB (fig. 57).

La distancia entre un punto O y un plano PQ se mide por la distancia OB que hay entre el punto O y su proyeccion B sobre el plano.

Fig. 57.



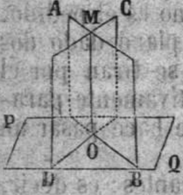
La distancia entre un plano y una recta paralelos se mide por la distancia entre la recta y su proyeccion sobre el plano.

El ángulo de una recta AO y un plano PQ oblícuos, se mide por el ángulo OAB que dicha recta forma con su proyeccion AB sobre el plano.

96. Por un punto O (fig. 58) dado en una recta OM tirar el plano PQ perpendicular á esta recta.

Se hace que por la recta dada pasen dos planos AB y CD (*): en el primero se traza por el punto dado la perpendicular OB á la recta dada, y en el segundo la OD perpendicular tambien en el mismo punto á la misma recta. El plano PQ, que pasa por estas dos perpendiculares, es el pedido.

Fig. 58.



97. Por un punto D dado fuera de una recta OM tirar el plano PQ perpendicular á esta recta.

Por la recta y el punto dados se hace pasar un plano DC, y en él se traza por el punto D la recta DO perpendicular á OM: por la recta dada OM se hace pasar otro plano cualquiera AB, y en él se

(*) Esta operacion se encuentra hecha por lo general en la práctica, porque las líneas no se presentan jamás aisladas, sino formando muchas veces aristas de los cuerpos en cuya superficie se opera.

traza por el punto O la recta OB perpendicular á OM. El plano PQ, que pasa por las dos rectas OB y OD, es el pedido.

Todos los planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.

98. Por un punto dado en el espacio tirar una paralela á una recta dada.

En el plano determinado por la recta y el punto dados se tira por el punto dicho una paralela á la recta dada, y se tiene la recta pedida. Tambien puede resolverse el mismo problema tirando por el punto dado, primero un plano perpendicular á la recta dada, y despues una recta perpendicular á este plano: esta perpendicular es la paralela pedida.

99. Por un punto dado tirar un plano paralelo á otro.

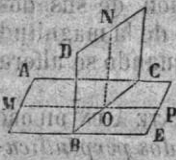
Se tira por el punto, primero una recta perpendicular al plano dado, y luego un plano perpendicular á esta recta: este último plano es el pedido. O de otro modo: se trazan en el plano dado dos rectas cualesquiera que se corten, se tiran por el punto dado otras dos rectas respectivamente paralelas á las anteriores, y por ellas se hace pasar un plano que es el pedido.

Dos planos paralelos son equidistantes: es decir, todos los puntos de cada uno de ellos equidistan del otro. Esta propiedad ofrece el medio siguiente para resolver el problema anterior; por tres puntos del plano que no esten en línea recta se levantan al mismo plano tres perpendiculares, iguales á la distancia entre el punto y el plano dados, y haciendo pasar un plano por los tres extremos de estas perpendiculares se tiene el plano pedido.

100. El ángulo de dos rectas en el espacio se aprecia del modo siguiente: si las rectas se cortan,

como estan ambas situadas en un mismo plano, se aprecia lo mismo que en la Geometría plana: si son paralelas, su ángulo es nulo, así en el espacio como en el plano; y si las dos rectas se cruzan como MP y DN (fig. 59), aunque no estan situadas en un mismo plano, y propiamente hablando, no forman ángulo, su inclinacion mútua se aprecia por el ángulo AMP que una de ellas MP forma con una paralela MA á la otra DN, tirada por uno cualquiera de sus puntos M.

Fig. 59.



La mínima distancia entre dos rectas que se cruzan es la perpendicular comun.

101. Hallar la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan MP y DN.

Por un punto M de la primera se tira la MA paralela á la segunda: por las dos rectas MP y MA se tira un plano AE: por un punto D de la segunda se tira la DB perpendicular al plano AE: por el pie B de esta perpendicular se tira la BC paralela á MA; y por el punto O en que esta paralela corta á la MP se levanta la perpendicular ON al plano AE hasta que encuentre á la recta CD en un punto N. Esta recta ON es la perpendicular comun á las dos rectas dadas, y su longitud es la mínima distancia pedida.

CAPÍTULO II.

Angulos diedros y poliedros.

102. *Angulo* DIEDRO *ó simplemente* DIEDRO *es la extension comprendida entre dos planos que se cortan.* Estos planos se llaman *caras*, y su interseccion *arista* del diedro.

Un diedro se designa con cuatro letras, una de

UNED

cada cara y las dos de la arista, colocando estas entre las otras dos.

En el diedro QAPR (fig. 60) las caras son los planos PQ y PR, y la arista su interseccion AP.

Fig. 60.

La magnitud de un diedro determina la relativa posicion de sus dos caras, es independiente de la magnitud de estas, y solo varía cuando se altera la inclinacion mútua de las mismas.

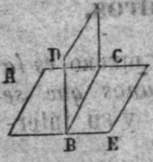
103. Angulo plano correspondiente á un diedro *es el ángulo rectilíneo formado por dos perpendiculares á la arista en un mismo punto de esta y una en cada cara.* Siendo AR y AQ perpendiculares á AP, el ángulo plano correspondiente al diedro QAPR es QAR.

La medida de un diedro es su ángulo plano correspondiente. Es decir, el valor numérico de un diedro es igual al de su ángulo plano correspondiente, el cual á su vez es igual (núm. 32) al de su arco correspondiente. Por eso los diedros se aprecian en grados, minutos y segundos, como los ángulos rectilíneos y como los arcos de círculo: y por eso mismo para medir un diedro basta medir su ángulo plano correspondiente.

104. *El diedro cuyo ángulo plano es recto se llama* diedro recto.

Diedros adyacentes *son dos diedros que tienen la misma arista, una cara comun y las otras dos caras en prolongacion una de otra,* como ABCD y DBCE (figura 61). Cuando dos diedros adyacentes son iguales, son tambien ambos diedros rectos; y en general todos los diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Fig. 23.



UNED

Todo diedro menor que un recto se denomina *agudo*, y todo diedro mayor que un recto *obtuso*.

DIEDROS COMPLEMENTARIOS *son dos diedros cuya suma es igual á un diedro recto;* y SUPLEMENTARIOS *otros dos cuya suma es igual á dos rectos*. Los diedros adyacentes son suplementarios.

105. PLANOS PERPENDICULARES (entre sí ó el uno al otro) *son dos planos que forman un diedro recto*, como AE y DC (fig. 59).

Los planos que no son perpendiculares ni paralelos se llaman *oblícuos*.

Todos los planos que pasen por una recta perpendicular á un plano son perpendiculares á este. Por un punto se puede tirar un número infinito de planos perpendiculares á otro: todos los que pasen por la perpendicular á este otro desde dicho punto.

Por una recta que no sea perpendicular á un plano, puede siempre tirarse un plano perpendicular al primero, pero nada más que uno.

106. Por una recta situada en un plano, ó por una oblícua ó paralela al mismo, tirar el plano perpendicular al primero.

Por un punto de la recta se tira una perpendicular al plano dado; y haciendo luego pasar un plano por esta perpendicular y por la recta dada resulta el plano pedido.

107. Entre las infinitas posiciones que una recta puede tener en el espacio, hay una que por sus aplicaciones merece particular atencion: esta es la que toma el hilo de la *plomada* (*) en su estado de

(*) La *plomada* no es más que un peso cualquiera (una masa de plomo por ejemplo, de donde toma su nombre) suspendido de un punto fijo por medio de un hilo flexible.

equilibrio. La direccion de dicho hilo se llama *vertical:* es la misma de la *gravedad*, ó fuerza que atrae todos los cuerpos hácia el centro de la tierra; y la describe en su caida un cuerpo abandonado á su propio peso.

Por un punto dado puede siempre pasar una vertical y nada más que una; cada punto tiene la suya, y los extremos de la vertical de cada lugar, prolongada en ambos sentidos hasta la bóveda celeste, son el *zenit* y el *nadir* de aquel lugar.

108. *Se llama* PLANO VERTICAL *todo plano que pasa por una recta vertical.* Los lienzos de pared y las hojas de las puertas y ventanas son generalmente planos verticales: el *meridiano* es en cada lugar un plano vertical.

Por un punto pueden pasar infinitos planos verticales: todos los que pasen por la vertical de aquel punto. La interseccion de dos planos verticales es una recta vertical.

Dos puntos que no esten en la misma vertical determinan un plano vertical: el que pase por la recta que los une y por la vertical de uno de ellos.

Para construir un plano vertical hay que tomar como directrices dos rectas (núm. 89), que una de ellas por lo ménos sea vertical. De este medio se valen los albañiles para construir las paredes y los tabiques.

109. *Se llama* PLANO HORIZONTAL *todo plano perpendicular á una recta vertical.* Los suelos y los techos de las habitaciones, y la superficie superior de las mesas y otros muebles son en general planos horizontales. El mejor ejemplo de plano horizontal le presenta la superficie libre del agua tranquila en un vaso ó estanque de poca extension: la superficie de los mares, aun supuesta una calma completa, no

puede considerarse como plana, porque participa de la curvatura de la tierra; pero una pequeña parte de ella determina en cada lugar la posicion de su plano horizontal.

Por un punto dado puede siempre pasar un plano horizontal, y nada más que uno: el único plano perpendicular en aquel punto á la vertical del mismo.

110. *Se llama* RECTA HORIZONTAL *toda recta situada en un plano horizontal.* Por un punto dado pueden pasar infinitas rectas horizontales: todas las trazadas por dicho punto en el plano horizontal del mismo.

Toda recta horizontal es perpendicular á la vertical, y todo plano vertical es perpendicular al horizontal.

Las líneas y los planos perpendiculares á la vertical se llaman horizontales, porque son en cada lugar paralelos al *horizonte racional* y al *horizonte sensible.* Y por su paralelismo con la superficie libre de todo líquido tranquilo, á la cual se denomina el *nivel del líquido*, suele designárselos en las artes con las expresiones de *líneas de nivel* y *superficies de nivel;* por cuya razon se comprenden bajo el nombre de *niveles* todos los instrumentos destinados á determinar la posicion de una recta ó de un plano horizontales.

Las rectas horizontales se determinan por los niveles. Y para construir un plano horizontal hay que tomar como directrices dos rectas horizontales que se corten. De este modo se coloca horizontal el tablero de una mesa de billar.

Toda recta perpendicular á un plano horizontal es una vertical, y toda recta perpendicular á un plano vertical es una horizontal.

111. *Las rectas y los planos que no son vertica-*

les ni horizontales se llaman INCLINADOS AL HORIZONTE *ó simplemente* INCLINADOS.

La *inclinacion al horizonte de una recta* es el ángulo que dicha recta forma con el plano horizontal, y se mide por el ángulo que forma con su proyeccion sobre este plano, llamada proyeccion horizontal: el ángulo que una recta inclinada forma con la vertical es complemento de su inclinacion al horizonte.

La *inclinacion al horizonte de un plano* es el ángulo que dicho plano forma con el plano horizontal, y se mide por el ángulo plano correspondiente al diedro formado por dichos dos planos: el ángulo que un plano inclinado forma con la vertical es complemento de su inclinacion al horizonte.

Por un punto dado en un plano inclinado puede siempre pasar una recta horizontal situada en dicho plano, y nada más que una: la interseccion del plano inclinado con el plano horizontal del punto dado. Todas las rectas horizontales situadas en un mismo plano inclinado son paralelas.

112. *Se llama* LÍNEA DE MÁXIMA PENDIENTE *de un plano inclinado toda recta situada en dicho plano que sea perpendicular á una horizontal situada tambien en el mismo.* Todas las líneas de máxima pendiente de un mismo plano son rectas paralelas. Estas rectas son, entre todas las que pueden trazarse en un plano inclinado, las que tienen mayor inclinacion al horizonte: su direccion la determina el hilo de la plomada en su estado de equilibrio sobre el plano inclinado, y la describe en su caida un cuerpo abandonado á su propio peso sobre dicho plano. Las filas de canales de los tejados estan generalmente dirigidas segun la línea de máxima pendiente del plano inclinado del tejado.

La inclinacion al horizonte de una línea de

UNED

máxima pendiente de un plano inclinado mide la inclinacion al horizonte de dicho plano.

Para construir un plano inclinado se toman como directrices en general una de sus horizontales y una de sus líneas de máxima pendiente.

113. *Angulo* POLIEDRO *es la extension comprendida por tres ó más planos que concurren en un punto, y tienen dos á dos una recta comun.*

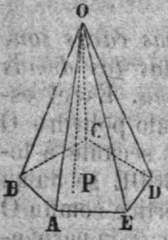
Los planos se llaman *caras*, las rectas comunes reciben el nombre de *aristas*, y el de *vértice* el punto donde concurren.

Se enuncia un ángulo poliedro con la letra del vértice seguida de otra de cada arista: cuando está solo basta con la primera.

Un ángulo poliedro se llama *convexo* cuando cortadas todas sus caras por medio de un plano, la interseccion es un polígono convexo.

El ángulo poliedro OABCDE (fig. 62), ó simplemente O, tiene por caras los ángulos rectilíneos AOB, BOC, COD, DOE y EOA; por aristas las rectas OA, OB, OC, OD y OE; y por diedros AOBC, BOCD, CODE, DOEA y EOAB.

Fig. 62.



Este ángulo poliedro es convexo, porque cortadas todas sus caras por un plano, resulta por interseccion el polígono convexo ABCDE.

Se llama TRIEDRO *el ángulo poliedro que tiene tres caras*. Los ángulos triedros son todos convexos.

CAPITULO III.

Cuerpos geométricos.

114. POLIEDRO *es el cuerpo terminado por planos*. Estos planos se llaman *caras* del poliedro; los ángulos de estas caras y los diedros y poliedros que forman entre sí, sus lados y sus vértices, se llaman respectivamente *ángulos*, *aristas* y *vértices* del poliedro.

DIAGONAL *de un poliedro es toda recta que une dos vértices no contiguos á una misma cara.*

El menor número de caras que puede tener un poliedro es cuatro.

El poliedro que tiene cuatro caras se llama *tetraedro*, el que tiene cinco *pentaedro*, el que tiene seis *exaedro*, y así sucesivamente.

115. PIRÁMIDE *es un poliedro cuyas caras son, una un polígono cualquiera, y todas las demás triángulos que tienen un vértice comun*. Es el espacio comprendido dentro de un ángulo poliedro O cortado por un plano ABCDE (fig. 61) secante á todas las aristas. La cara poligonal ABCDE se llama *base*: las otras, caras *laterales*; el vértice comun O á las caras laterales, *vértice* ó *cúspide*; y la perpendicular OP bajada desde la cúspide al plano de la base, *altura* de la pirámide.

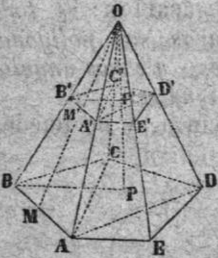
La pirámide se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que tenga por base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc. Los tetraedros son pirámides triangulares.

Una pirámide se llama *regular* cuando su base es un polígono regular y el pié de su altura es el centro de la base. Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles é iguales.

Apotema de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras laterales.

Si una pirámide OABCDE se corta por un plano paralelo á la base, la seccion A'B'C'D'E' (fig. 63) es semejante á la base.

Fig. 63.

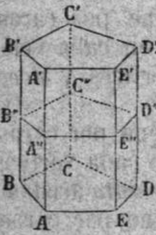


Tronco de pirámide ó *pirámide truncada* es la parte ABCDEA'B'C'D'E' de una pirámide OABCDE, comprendida entre la base y un plano secante paralelo á ella. La otra parte OA'B'C'D'E', comprendida entre el plano secante y el vértice, se llama *pirámide deficiente*.

116. **Prisma** *es un poliedro cuyas caras son dos polígonos iguales y paralelos, y todas las demás paralelógramos*, como ADCDEA'B'C'D'E' (fig. 64). Las caras iguales y paralelas se llaman *bases*: las otras, caras *laterales*; y la distancia entre las bases, *altura* del prisma.

El prisma se llama *triangular*, *cuadrangular*, etc., segun que sus bases son triángulos, cuadriláteros, etc.

Fig. 64.



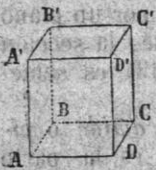
Un prisma se llama *recto* cuando sus aristas laterales son perpendiculares á las bases, y *oblícuo* cuando son oblícuas. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.

Seccion recta de un prisma oblícuo es la seccion perpendicular á las aristas laterales.

Un prisma se llama *regular* cuando es recto y sus bases son polígonos regulares.

Si un prisma ABCDEA'B'C'D'E' (fig. 64) se corta por un plano paralelo á las bases, la seccion A''B''C''D''E'' es igual á las bases.

Fig. 65.

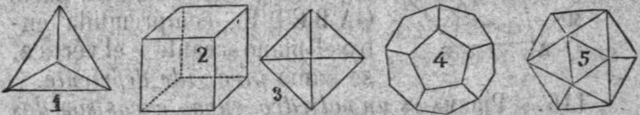


Paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelógramos, como ABCDA'B'C'D' (fig. 65).

117. **Poliedro regular** *es todo poliedro cuyas caras son polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales.*

Los poliedros regulares son cinco, y no pueden ser más (fig. 66).

Fig. 66.



1.° El *tetraedro regular*, que tiene por caras *cuatro* triángulos equiláteros iguales, y en cada vértice se reunen tres : tiene *cuatro* vértices y *seis* aristas.

2.° El *exaedro regular* ó *cubo*, que tiene por caras *seis* cuadrados iguales, y en cada vértice se reunen tres : tiene *ocho* vértices y *doce* aristas.

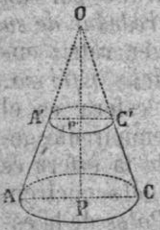
3.° El *octaedro regular*, que tiene por caras *ocho* triángulos equiláteros iguales, y en cada vértice se reunen cuatro : tiene *seis* vértices y *doce* aristas.

4.° El *dodecaedro regular*, que tiene por caras *doce* pentágonos regulares iguales, y en cada vértice se reunen tres : tiene *veinte* vértices y *treinta* aristas.

5.° El *icosaedro regular*, que tiene por caras *veinte* triángulos equiláteros iguales, y en cada vértice se reunen cinco : tiene *doce* vértices y *treinta* aristas.

118. Cono *es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo* AOP (fig. 67) *que gira alrededor de uno de sus catetos* OP (*). *Eje* del cono es el cateto fijo OP del triángulo generador, y mide la *altura* del cono. *Base* del cono es el círculo descrito por el cateto móvil AP. *Lado* del cono es la hipotenusa AO del triángulo generador: esta hipotenusa engendra en el movimiento la *superficie cónica*, y se llama por esto *generatriz*. *Vértice ó cúspide* del cono es el vértice O, opuesto al cateto móvil AP del triángulo generador. *Altura* del cono es la distancia del vértice á la base.

Fig. 67.

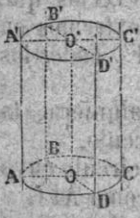


Toda seccion A'C' paralela á la base de un cono es un círculo, cuyo centro P' está en el eje.

Tronco de cono ó cono truncado es la parte de cono comprendida entre la base y un plano secante paralelo á ella.

119. Cilindro *es el cuerpo engendrado por un rectángulo* AOO'A' (fig. 68) *que gira alrededor de uno de sus lados* OO'. *Eje* del cilindro es el lado fijo OO' del rectángulo generador, y mide la *altura* del cilindro. *Bases* del cilindro son los dos círculos descritos por los lados AO y A'O' adyacentes al eje. *Lado* del cilindro es el lado AA' del rectángulo generador opuesto al eje: este lado engendra en el movimiento la *superficie cilíndrica*, y por eso se llama tambien

Fig. 68.



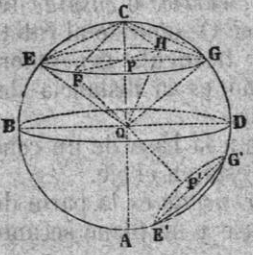
(*) El cono y el cilindro que se definen aquí son únicamente los llamados *rectos* y *circulares*.

generatriz. Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases.

Toda seccion paralela á las bases de un cilindro es un círculo igual á dichas bases y cuyo centro está en el eje.

120. Esfera *es el cuerpo engendrado por un semicírculo* ABC (fig. 69) *que gira al rededor de su diámetro* AC. La semicircunferencia generatriz engendra en el movimiento la *superficie esférica.*

Fig. 69.



Centro de la esfera es el centro O del semicírculo generador. *Eje* de la esfera es el diámetro AC del semicírculo generador. *Polos* de la esfera son los extremos A y C del eje. *Radios* de la esfera son todas las rectas comprendidas entre el centro y la superficie esférica, como OA, OE, OF. Todos los radios de una esfera son iguales, y por tanto, todos los puntos de la superficie esférica equidistan del centro.

Diámetros de la esfera son todas las rectas que pasan por el centro y tienen sus dos extremos en la superficie esférica, como AC, BD, FF′. Todos los diámetros de una esfera son iguales.

Cortando la esfera por un plano cualquiera, la seccion BD, EG ó E′G′ es siempre un círculo.

Círculo máximo de una esfera es el círculo cuyo plano pasa por el centro de la esfera, como AEG y BD: los que no pasan por dicho centro se llaman *menores*, como EG y E′G′. Los círculos máximos tienen por centro el de la esfera: cada uno divide á la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios;* y cada dos se dividen mútuamente en dos partes iguales.

UNED

La línea más corta que se puede trazar entre dos puntos sobre la superficie de una esfera es el arco de círculo máximo que los une.

ZONA *esférica* es la parte de superficie esférica descrita por un arco cualquiera BE del círculo generador. Las circunferencias BD y EG, descritas por los extremos del arco generador de la zona, se llaman *bases* de la zona, y *altura* la distancia PO entre los planos paralelos de sus dos bases.

Si uno de los extremos C del arco generador EC está en el eje, la zona no tiene más que una base EG, y su altura es la distancia CP de dicho extremo C á la base.

Las zonas de una base se llaman tambien *casquetes esféricos*.

CAPITULO IV.

Areas y volúmenes de los cuerpos geométricos.

121. ÁREA DE UN CUERPO *es la medida de su superficie.*

El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base.

EJEMPLO.

Hallar el número de varas cuadradas de láminas de zinc que son necesarias para cubrir el chapitel de una torre octogonal regular, teniendo cada cara del chapitel $3\frac{1}{2}$ varas de altura y $\frac{3}{4}$ de base.

El chapitel será una pirámide octogonal regular, que tendrá de apotema $3\frac{1}{2}$ varas, y de perímetro en su base $\frac{3}{4}\times 8=\frac{24}{4}=6$; por consiguiente su área lateral será $\frac{3\frac{1}{2}\times 6}{2}=3\frac{1}{2}\times 3=9\frac{3}{2}=10\frac{1}{2}$, número de varas cuadradas pedido.

122. *El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de su apotema por la semisuma de los perímetros de sus dos bases.*

EJEMPLO.

La peana de una imágen es un tronco de pirámide triangular regular, en que el lado de la base inferior tiene 38 centím., el de la superior 21, y la altura de las caras 44. ¿Cuánto costará el dorar dicha peana á razon de 15 reales el decímetro cuadrado?

El perímetro de la base inferior será $38\times 3=114$ centím., y el de la superior $21\times 3=63$ centímetros: luego el área lateral de la peana será $\frac{114+63}{2}\times 44=3894$ centímetros cuadrados, ó bien 38,94 decímetros cuadrados; y el importe del dorado será $38{,}94\times 15=584{,}10$ reales.

123. *El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.*

EJEMPLO.

Un salon octogonal tiene 3,5 met. de altura, y sus frentes 2,5 met. de anchura; ¿cuántas piezas de papel de 20 met. de largo y 4 decím. de ancho se necesitarán para empapelarle?

Las paredes del salon forman un prisma recto de 3,5 met. de alto, cuya base es un octógono que tiene de perímetro 2,5 met.$\times 8=20$ met.: luego el área lateral de dicho prisma será 3,5 met. $\times 20$ metros$=70$ met. cuad. Cada pieza del papel forma un rectángulo cuyas dimensiones son 20 met. y

UNED

0,4 met.; y cuya área equivale á 20 met.×0,4 metros=8 metros cuadrados: dividiendo, pues, los 70 met. cuad. que han de empapelarse por los 8 met. cuad. que tiene cada pieza de papel, resulta $\frac{70}{8}=8\frac{3}{4}$ para el número de piezas necesarias.

124. *El área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de las aristas laterales por el perímetro de la seccion recta.*

EJEMPLO.

Hallar el área lateral de un prisma oblícuo cuya seccion recta es un rombo de 72 centím. de lado, y las aristas laterales tienen 1,85 met. de longitud.

El perímetro de la seccion recta será 72 centímetros×4=2,88 met.; luego el área lateral del prisma será 2,88 met.×1,85 met.=5,328 metros cuadrados: ó sean 5 met. cuad., 32 decím. cuadrados y 80 centím. cuad.

125. *El área de un poliedro cualquiera se halla sumando las áreas de todas sus caras.*

126. *El área lateral de un cono es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.*

EJEMPLO.

Hallar el número de pizarras cuadradas de un decímetro de lado que son necesarias para cubrir el chapitel cónico de una torre redonda, teniendo dicho cono 5,4 met. de lado, y 3,5 met. de diámetro en su base.

La circunferencia de la base del chapitel será 3,5 met.×π=3,5 met.×3,14159=10,995565 metros; luego el área leteral será $\frac{10{,}995565 \text{ met.}\times 5{,}4 \text{ met.}}{2}=$ 29,6880255 met. cuad., ó sea 2968,80255 decímetros cuad., que es el número de pizarras necesarias.

127. *El área lateral de un tronco de cono es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases.*

EJEMPLO.

Hallar el número de pies cuadrados de hoja de lata necesarios para forrar una tina, cuya forma es un cono truncado de una vara de lado, vara y media de diámetro en su base del fondo, y dos varas de diámetro en su boca.

La circunferencia de la base inferior será 1,5 varas$\times\pi=$1,5 v.$\times$3,14159$=$4,712385 v.; la de la otra base será 2 v.$\times$3,14159$=$6,28318 v.: luego el área lateral de la tina será

$$\frac{4{,}712385 \text{ v.}+6{,}28318 \text{ v.}}{2}\times 1 \text{ v.}=5{,}4977825 \text{ varas cuad.}$$

ó sea 5,4977825$\times$9$=$49,4800425 pies cuad., que es el número pedido.

128. *El área lateral de un cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia de su base.*

EJEMPLO.

¿Cuántos azulejos de á decímetro cuadrado son necesarios para cubrir la pared de un estanque cilíndrico de 3 met. de altura y 7 met. de diámetro?

La circunferencia de la base será 7 met.$\times\pi=$ 21,99113 met.: luego el área lateral del estanque será 21,99113 met.$\times$3 met.$=$65,97339 met. cuadrados, ó sea 6597,339 decím. cuad., que es el número de azulejos pedido.

129. *El área de una superficie esférica es igual al producto del diámetro por la circunferencia del círculo máximo.* Y como la longitud de la circunferencia cuyo radio es r se expresa por $2\pi r$ (número 25), el área de la esfera de radio r tiene por expresion $2\pi r\times 2r=4\pi r^2$.

UNED

EJEMPLO.

Considerado el globo terrestre como una esfera cuyo radio es 6366,2 kilómetros, hallar en kilómetros cuadrados el área de la superficie total de la tierra.

Poniendo en la fórmula $4\pi r^2$ en vez de r el valor 6366,2 kilóm., y en vez de π 3,1415926 resulta $4\times3,1415926\times(6366,2)^2=509296173$ kilómetros cuad. próximamente, ó bien 5092962 miriámetros cuadrados.

130. *El área de una zona esférica es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del círculo máximo.*

EJEMPLOS.

1.° Siendo 507 miriámetros la distancia entre los planos de los trópicos terrestres, es decir, la altura de la zona tórrida, hallar el área de esta zona en miriámetros cuadrados.

Multiplicando dicha altura 507 mir. por la circunferencia del círculo máximo, que es $2\pi\times636,62$ mir., resulta 2028000 mir. cuad. para el área de la zona tórrida.

2.° Siendo 52,65 mir. la altura del casquete esférico que forma cada una de las dos zonas glaciales, hallar el área de estas zonas en miriámetros cuadrados.

El área de una de ellas será $52,65\times2\times3,1415926\times636,62=210600$ miriámetros cuad.; y su duplo 421200 será el área de las dos zonas glaciales sumadas.

OBSERVACION. Sumando las áreas de la zona tórrida y de las dos zonas glaciales se obtiene 2449200 miriám. cuad., que es algo ménos de la mitad de 5092962 mir. cuad., área de la superficie total del globo terrestre, hallada en el núm. 129; por consiguiente, las dos zonas templadas, cuya altura es de

330,47 miriámetros cada una, y su área respectiva de 1321880,45 mir. cuad., ocupan 2643761 miriámetros cuad., que es algo más de la mitad de la superficie terrestre.

131. VOLÚMEN *de un cuerpo es la medida de su magnitud.*

Esta medida se halla por comparacion con otro cuerpo constante tomado como unidad; y *determinar un volúmen* es hallar el número de veces que contiene al volúmen unidad.

La UNIDAD DE VOLÚMEN *es el cubo que tiene por lado la unidad lineal.* Si la *unidad lineal* es el metro, la *unidad de volúmen* es un cubo que tiene por lado ó arista un metro, y se llama *metro cúbico;* si la unidad lineal es el decímetro, la unidad de volúmen es un cubo que tiene por arista un decímetro, y se llama *decímetro cúbico*, etc.

132. Las unidades de volúmen en el sistema métrico decimal, son: el *metro cúbico*, que constituye la *tonelada de arqueo;* el *decímetro cúbico*, que aplicado á la medicion de los líquidos y áridos se denomina *litro;* y el *centímetro cúbico*.

El metro cúbico tiene mil decímetros cúbicos, pues se compone de diez capas superpuestas y formadas cada una por diez filas contiguas, que tienen cada una diez decímetros cúbicos: de modo que el decímetro cúbico es la milésima parte del metro cúbico. Por la misma razon el centímetro cúbico es la milésima parte del decímetro cúbico: y en general, cada unidad de volúmen del sistema métrico decimal es la milésima parte de su inmediata superior, y contiene mil veces á su inmediata inferior. Así es que la reduccion de unidades de volúmen de una especie á su inmediata inferior, ó á su inmediata superior, se efectua multiplicando ó dividiendo respectivamente por mil; lo que se consigue con una simple

UNED

traslacion de la coma tres lugares á la derecha ó á la izquierda. Por ejemplo, 47630,508 decímetros cúbicos equivale á 47,630508 metros cúbicos y á 47630508 centím. cúb.; y descompuesto en forma compleja es igual á 47 met. cúb., 630 decím. cúbicos y 508 cent. cúb.

133. *El volúmen de un cubo es igual al cubo de su lado.*

EJEMPLO.

Hallar el volúmen de aire contenido en una sala de forma cúbica, que tiene de largo, de ancho y de alto 6,25 met.

El lado de este cubo es 625 centím., y su cubo es $625 \times 625 \times 625 = 244140625$ centím. cúb., ó lo que es igual 244 met. cúb., 140 decím. cúbicos y 625 centím. cúb.

Observacion. Por la anterior propiedad del volúmen de un cubo, se da en Aritmética el nombre de cubo á un producto de tres factores iguales.

134. *El volúmen de todo prisma es igual al producto de su base por su altura:* es decir, el área de la base multiplicada por la altura.

EJEMPLOS.

1.° Determinar el volúmen de un pilar prismático, cuya altura es 4,35 met., y cuya base tiene de área 1,2576 metros cuadrados (*).

Multiplicando el área de la base por la altura resulta para el volúmen pedido $1,2576 \times 4,35 = 5,470560$ metros cúbicos, ó sea 5 met. cúb., 470 decím. cúb. y 560 centím. cúb.

(*) Las determinaciones de volúmenes de objetos de construccion suelen llamarse *cubicaciones*.

UNED

2.° Hallar en pies cúbicos el volúmen de una sala cuyo pavimento tiene de largo 7 varas y 2 pies, y de ancho $4\frac{1}{3}$ varas, siendo la altura del techo 5 varas.

La sala es un paralelepípedo cuya base es el pavimento, y este tiene por área (núm. 82 ej.) $310\frac{1}{3}$ pies cuadrados; luego el volúmen pedido será $310\frac{1}{3}$ p. cuad.$\times$5 v.$=310\frac{1}{3}$ p. cuad.$\times$15 p.$=$ $4657\frac{1}{2}$ pies cúbicos.

3.° Hallar el número de cajas de á decímetro cúbico que puede colocarse en un cajon rectangular de 2,7 met. de largo y 1,4 met. de ancho, y 1,8 met. de alto.

El cajon es un paralelepípedo rectángulo, cuya base tiene por área 2,7 met.$\times$1,4 met.$=$3,78 metros cuadrados: y por consiguiente su volúmen es 3,78 met. cuad.$\times$1,8 met.$=$6,804 metros cúbicos, ó sea 6804 decímetros cúbicos, que es el número pedido.

Observacion. El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual, como se ha visto, al producto de sus tres dimensiones.

135. *El volúmen de toda pirámide es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

EJEMPLO.

Suponiendo que la mayor de las pirámides de Egipto fuera completamente una pirámide perfecta, y admitiendo, con algunas de sus descripciones, que tenga 144 metros de altura y 272 metros de lado en su base cuadrada, hallar el volúmen de dicha pirámide.

El área de su base será 272$\times$272$=$73984 metros cuadrados, y por consiguiente su volúmen será $\frac{73984\times144}{3}=3551232$ metros cúbicos.

136. *El volúmen de un poliedro cualquiera se halla considerándole dividido en prismas ó en pirámides, determinando separadamente el volúmen de cada uno de estos cuerpos, y sumando despues estos volúmenes parciales.*

137. *El volúmen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura.* Y designando por r el radio de la base y por a la altura, como el área de la base es (núm. 86) πr^2, el volúmen del cilindro estará expresado por $\pi r^2 a$.

EJEMPLO.

Hallar la cantidad de agua contenida en un estanque cilíndrico de base horizontal, siendo esta base un círculo de 9,8 met. de diámetro y la altura del nivel del agua sobre el fondo 2,5 met. (*).

La masa de agua contenida en el estanque forma un cilindro cuya base circular tiene por radio 4,9 met., y por área $\pi r^2 = 3,14159 \times 4,9 \times 4,9 = 75,4295759$ metros cuadrados; por consiguiente su volúmen es 75,4295759 met. cuad. $\times$ 2,5 met. $=$ 188,573939̄75 metros cúbicos, ó sea 188573,93975 decímetros cúbicos; y como un decímetro cúbico de líquido equivale á un litro, la cantidad de agua contenida en el estanque será 188573,93975 litros.

138. *El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura.* Y designando por r el radio de la base y por a la altura, como el área de la base es (núm. 86) πr^2, el volúmen del cono estará expresado por $\frac{\pi r^2 a}{3}$.

(*) Las determinaciones de cantidades de líquidos contenidos en recipientes ó vasijas suelen llamarse *aforos*.

EJEMPLO.

Hallar la cabida de una alcuza de 18 centímetros de altura, y 18 centímetros de diámetro en su base.

El líquido contenido en la alcuza llena forma un cono cuya base circular tiene por radio 9 centímetros, y por área $\pi r^2 = 3,14159 \times 9 \times 9 = 254,46879$ centímetros cuadrados: por consiguiente su volúmen será $\frac{254,46879 \text{ centím. cuad.} \times 18}{3} = 1526,81274$ centímetros cúbicos, ó sea 1,52681274 decímetros cúbicos, que equivale á 1 litro y 526,81274 mililitros.

139. *El volúmen de una esfera es igual al tercio del producto de su área por su radio.* Y designando por r el radio, como el área de la esfera es (núm. 129) $4\pi r^2$, su volúmen estará expresado por $\frac{4\pi r^2 \times r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

EJEMPLOS.

1.° Hallar el número de pies cúbicos de gas necesarios para llenar un globo esférico de 24 piés de diámetro.

El radio de la esfera de gas, que llene el globo, será 12 piés, el área de esta esfera será $4\pi r^2 = 4 \times 3,14159 \times 12^2 = 1809,55584$ pies cuadrados, y su volúmen será $\frac{1809,55584 \times 12}{3} = 7238,22336$ pies cúbicos, que es el número pedido.

2.° Hallar la cabida de un perol hemisférico cuyo radio es 0,73 metros.

Su volúmen será la mitad del de una esfera de igual radio, es decir, $\frac{2\pi r^3}{3} = \frac{2 \times 3,14159 \times 0,73^3}{3} =$ 0,7817281228 metros cúbicos, ó lo que es igual

781,72812288 decímetros cúbicos, es decir, 781 litros y 728,12288 mililitros.

3.° Considerada la tierra como una esfera cuyo radio es 636,62 miriámetros, hallar su volúmen.

El volúmen pedido estará dado por la expresion

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \times 3,14159 \times (636,62)^3}{3} = 1080759538,601772319016$$

miriámetros cúbicos.

FIN.

UNED

INDICE.

UNED

UNED

ÍNDICE

UNED

00001014047
UNED

L.T.
2020

UNED