UNED

UNED

K.518483 L.T.
1799

UNED

UNED

PROGRAMAS

DE

PRIMERA ENSEÑANZA

POR

D. CARLOS YEVES

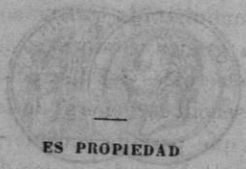
PREMIADOS EN LA EXPOSICIÓN UNIVERSAL DE VIENA

GEOMETRÍA Y DIBUJO

QUINTA EDICIÓN

MADRID
LIBRERÍA DE D. GREGORIO HERNANDO
calle del Arenal, núm. 11

1884



ES PROPIEDAD

Imprenta de Hernando, calle de Ferraz, núm. 13

ADVERTENCIA.

Es innegable que la instrucción primaria, para que sea fácilmente suministrada y fructuosamente recibida, debe dividirse en grados, conformes siempre á la edad y disposiciones intelectuales del discípulo. Adquirir primero una idea muy sencilla y general de la ciencia que se va á aprender, idea que permita considerarla en su conjunto; descender luego al estudio de los detalles más importantes, y ampliar, en fin, con los que no sean de tanto interés y con los conocimientos complementarios la idea fundamental que se adquirió al principio, es, en efecto, el procedimiento más lógico que para la enseñanza puede adoptarse, y el más conforme á la naturaleza de los individuos y de las cosas.

Esta consideración, y la no menos importante de que no salgan los niños de las escuelas, por limitado tiempo que á ellas concurran, sin noción general y completa, aunque sea poco detallada, de las asignaturas que comprende la primera enseñanza, son los fundamentos en que nos hemos apoyado para redactar nuestros programas, dividiéndolos en tres grados: grados dispuestos de tal modo que, estudiado el primero, se tenga ya conocimiento de lo esencial en cada asignatura; poseyendo con él en consecuencia un verdadero germen, susceptible luego fácilmente, con escaso trabajo, y hasta con los solos esfuerzos del

individuo, de adquirir desarrollo y de fructificar debidamente.

La experiencia propia ha venido en apoyo de esta opinión, corroborada luego con el parecer unánime de la prensa facultativa, con la distinción honrosa que hemos obtenido en la Exposición universal de Viena, y con el hecho de haberse agotado en breve espacio de tiempo las ediciones anteriores, á pesar de la época calamitosa que han atravesado, y atraviesan todavía, las escuelas y los maestros.

GEOMETRÍA

Y

NOCIONES DE DIBUJO.

GRADO PRIMERO.

GEOMETRÍA PLANA.

LECCIÓN PRIMERA.

De la extensión en general.

1. ¿Qué es Geometría?—2 ¿Qué es extensión? 3. ¿Qué son dimensiones?—4. ¿Cuántas y cuáles son las dimensiones?—5. ¿Qué es cuerpo geométrico?—6. ¿Qué es superficie?—7. ¿Qué es línea?—8. ¿Qué es punto?—9. ¿Qué es figura?—10. ¿Qué pueden ser las figuras?—11. ¿Qué son figuras iguales, equivalentes y semejantes?

1. Es *Geometría* la ciencia que trata de la extensión.

2. Se llama *extensión* una parte determinada del espacio, como el lugar que ocupa un cuerpo.

3. Y *dimensiones* los diversos sentidos en que es extenso un cuerpo, ó sea lo que tiene de *largo*, *ancho* y *grueso*.

4. Las dimensiones son tres: *longitud*, *latitud* y *profundidad*. Es *longitud* la extensión de lo largo de un cuerpo; *latitud*, la extensión de lo ancho, y *profundidad* la extensión de lo grueso.

5. Es *cuerpo geométrico* toda extensión con las tres dimensiones.—Tal es el cuerpo ABDCEFHG (fig. 1.ª).

6. *Superficie*, el límite de los cuerpos ó la extensión considerada en longitud y latitud.—Tal es la parte ABDC, ó la DBFH, etc.

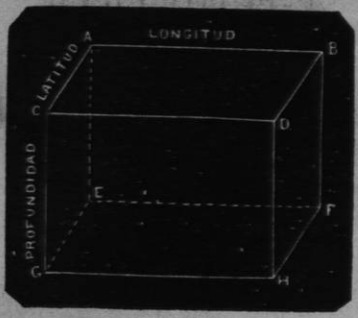


Fig. 1.ª

7. *Línea*, el límite de la superficie, ó la extensión considerada únicamente en longitud.—Tal es la parte AB, la BD, etc.

8. Y *punto* el límite de la línea. No tiene dimensión.

9. Se llama *figura* la forma de la extensión.

10. Las figuras pueden ser *iguales*, *equivalentes* y *semejantes*.

11. Son figuras *iguales* las que tienen la misma forma y extensión; *equivalentes*, las que tienen distinta forma é igual extensión; y *semejantes*, las que tienen la misma forma, pero distinta extensión.

LECCIÓN II.

De la línea.

1. ¿En qué se divide la línea?—2. ¿Qué es línea recta?—3. ¿Qué es línea curva?—4. ¿Qué es línea quebrada?—5. ¿Qué es línea mixta?—6. ¿Qué puede ser la línea recta?—7 ¿Qué es línea horizontal?—8. ¿Qué es línea vertical?—9. ¿Qué es línea inclinada?—10. ¿Cuáles son las principales propiedades de la línea recta?—11. ¿Cómo se miden las líneas rectas?—12. ¿Cuándo se dice que son iguales dos rectas?—13. ¿Qué son rectas proporcionales?

1. La línea se divide en *recta*, *curva*, *quebrada* y *mixta*.

2. Es *línea recta* la que tiene todos sus puntos en una misma dirección (fig. 2.ª).

Fig. 2.ª

3. *Línea curva*, aquella cuyos puntos se hallan todos en distinta dirección (fig. 3.ª).

Fig. 3.ª

4. *Línea quebrada* la que está compuesta de varias rectas, que no forman una sola recta (fig. 4.ª). También se llama poligonal.

Fig. 4.ª

5. Y *línea mixta* la que en parte es recta y en parte curva (fig. 5.ª).

Fig. 4ª.

6. La línea recta puede ser *horizontal*, *vertical* é *inclinada*.

7. Es *línea horizontal* la que tiene todos sus puntos á una misma altura (fig. 6.ª A).

8. *Línea vertical* la que tiene la dirección de una plomada (fig. 6.ª B).

9. Y *línea inclinada* la que no es horizontal ni vertical (fig. 6.ª C).

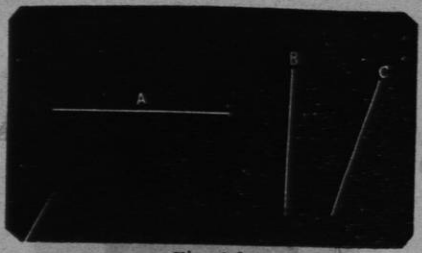


Fig. 6.ª

10 Las principales propiedades de la línea recta son las siguientes:

1.ª Determinar la distancia más corta entre dos puntos.

2.ª Quedar determinada por dos puntos.

11. Para medir una recta, se coloca sobre ella la unidad lineal elegida, tantas veces como aquélla la pueda contener, y si queda algún residuo, se coloca sobre él uno de los divisores de la unidad.

12. Son *iguales* dos rectas, cuando superpuestas una á otra se confunden exactamente sus extremos.

13 Y son dos rectas *proporcionales*, cuando contienen á la unidad que se elija para medirlas un número exacto, pero no igual de veces.

LECCIÓN III.

De la circunferencia.

1. ¿Qué es circunferencia y qué círculo?—2. ¿Qué líneas se consideran principalmente en el círculo y en la circunferencia? -3. ¿Qué es radio?—4. ¿Qué es diámetro y cómo divide á la circunferencia?—5. ¿Qué es semicircunferencia y semicírculo?—6. ¿Qué es cuadrante?—7. ¿Qué es arco?—8. ¿Qué es cuerda?—9. ¿Qué es sector?—10. ¿Qué es segmento?—11. ¿Qué es sagita?—12. ¿Qué es secante?—13. ¿Qué es tangente?—14. ¿Cómo se considera dividida toda circunferencia?—15. ¿Qué son circunferencias concéntricas, tangentes y secantes?

1. Es *circunferencia* una línea curva situada en un plano (MFNE, fig. 7.ª), cuyos puntos equidistan

de otro (O) llamado centro. Y *círculo* la porción de superficie comprendida por la circunferencia.

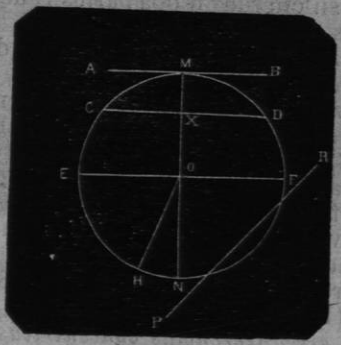


Fig. 7.ª

2. En la circunferencia y en el círculo hay que considerar principalmente lo siguiente: *radio, diámetro, semicircunferencia, semicírculo, cuadrante, arco, cuerda, sector, segmento, sagita, secante* y *tangente.*

3. Es *radio* toda recta trazada desde el centro á un punto cualquiera de la circunferencia (OH). Los radios de un mismo círculo son iguales.

4. *Diámetro*, toda recta trazada desde un punto á otro de la circunferencia, pasando por el centro (MN).—El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales (MDFN y MCEHN), y está compuesto de dos radios.

5. Es *semicircunferencia* la mitad de la circunferencia, y *semicírculo* la mitad del círculo (MDFN).

6. *Cuadrante*, la cuarta parte de la circunferencia (EHN).

7. *Arco*, una parte cualquiera de la circunferencia (EH).

8. *Cuerda*, la recta que une los extremos de un arco (CD).

9. *Sector*, la parte de círculo comprendida entre los radios y el arco correspondiente á ellos (HON).

10. *Segmento*, la parte de círculo comprendida entre un arco y su cuerda (CMDX).

11. *Sagita*, la parte de radio que, dividiendo á un arco y á su cuerda en dos partes iguales, se halla interceptada entre ellos (MX).

12. *Secante*, una recta que corta en dos puntos á la circunferencia (PR).

13. Y *tangente*, una recta que toca en un punto á la circunferencia, teniendo todos los otros fuera del círculo (AB).

14. Toda circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados;* cada grado se divide en 60 *minutos*, cada minuto en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros*, etc. La semicircunferencia tiene por lo tanto 180°, y el cuadrante 90° (1).

15. Son *circunferencias concéntricas* las que tienen un mismo centro (Aa, fig. 8.ª); *tangentes* las que

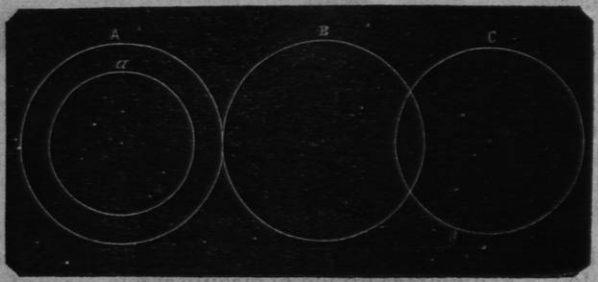


Fig. 8.ª

se tocan en un punto (A y B), y *secantes* las que se cortan en dos puntos (B y C).

---

(1) También se suele considerar dividida la circunferencia en cuatro cuadrantes, y cada uno de éstos en 100°.

LECCIÓN IV.

Propiedades de la circunferencia y medición de curvas.

1. ¿Qué cosas suceden en una misma circunferencia ó en circunferencias iguales?—2. ¿Qué es rectificar una curva?—3. ¿Cómo se rectifica una circunferencia?—4. ¿Por qué otro medio se puede hallar la longitud de la circunferencia?—5. ¿Qué relación hay entre el diámetro y la circunferencia?—6.—Dado el diámetro, ¿cómo se halla la longitud de la circunferencia? -7. ¿Y dado el radio?—8. ¿Cómo se averigua la longitud del diámetro y la del radio, sabida la de la circunferencia?—¿Cómo se dividen los arcos?

1. En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales sucede lo siguiente: 1.° Todos los radios son iguales. 2.° Los diámetros lo son asimismo. 3.° Arcos iguales tienen cuerdas iguales y recíprocamente. 4.° Á mayor arco corresponde mayor cuerda, y á mayor cuerda mayor arco.

2. Rectificar una curva, es hallar una recta de su misma longitud.

3. Para rectificar una circunferencia, ó sea hallar una recta de la misma longitud que ésta con poquísima diferencia, se traza un diámetro (AB, figura 9.ª) y haciendo centro en uno y otro de sus ex-

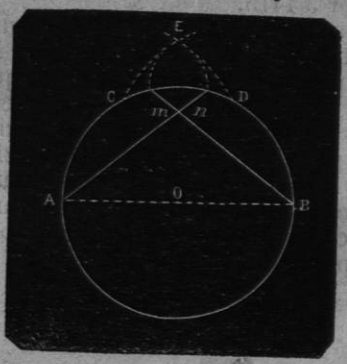


Fig. 9.ª

tremos (B y A) con un radio igual al del círculo, se

marcan dos arcos (A C y BD). Tomando luego por radio la distancia de los extremos del diámetro al arco opuesto (AD y BC), y haciendo centro en dichos extremos, se trazan dos arcos que se corten por la parte externa de la circunferencia (DE y CE). Se hace centro por fin en los extremos de los arcos primitivos (D y C), con un radio igual á su distancia al punto de intersección de los arcos (E), y se trazan dos arcos que se extiendan desde dicho punto hasta la circunferencia (E*m* y E*n*), y cada una de las distancias de estos puntos (*m* y *n*) á los extremos opuestos del diámetro (B y A) marcarán una recta (*m*B y *n*A) que será igual próximamente á la cuarta parte de la circunferencia.

4. Se puede también rectificar la circunferencia ó hallar su longitud, por el conocimiento de la relación que existe entre ella y el diámetro.

5. Entre el diámetro y la circunferencia existe la relación de 1 á 3'1415; lo cual quiere decir que la circunferencia es 3'1415 veces mayor que el diámetro.

6. Para averiguar la longitud de la circunferencia, sabida la del diámetro, se multiplica la longitud de éste por 3'1415.

7. Para averiguar la longitud de la circunferencia, sabida la del radio, se multiplica ésta por 2 y el producto por 3'1415.

8. Y para averiguar la longitud del diámetro, sabida la de la circunferencia, se divide la longitud de la circunferencia por 3'1415. Si se quiere averiguar la del radio, se divide por dos este cociente.

9. Para medir los arcos, se averigua primeramente qué parte son de la circunferencia, lo cual se consigue viendo cuántos grados, minutos, segundos, etc. tienen, y se toma la misma parte del valor total de la circunferencia á que corresponden ó deben corresponder.

LECCIÓN V.

De los ángulos.

1. ¿Qué es ángulo?—2. ¿De qué depende la magnitud de un ángulo?—3. ¿Cuál es la medida de un ángulo y cómo se miden éstos?—4. ¿Qué pueden ser los ángulos?—5. ¿Qué es ángulo recto?—6. ¿Qué es ángulo agudo?—7. ¿Qué es ángulo obtuso?—8. ¿Qué son ángulos adyacentes?—9. ¿Qué son ángulos complementarios?—10. ¿Qué son ángulos suplementarios?

1. Es *ángulo* la abertura ó inclinación de dos líneas que se encuentran en un punto.—Las líneas que constituyen un ángulo se llaman *lados*, y el punto en que se unen, *vértice* del ángulo.—Los ángulos se nombran por medio de tres letras, colocando siempre en medio la del vértice, ó por la del vértice solamente cuando el ángulo está solo.

2. La magnitud de un ángulo depende de la abertura de sus lados, no de la longitud de éstos.—Un ángulo no altera aunque sus lados se prolonguen.

3. La medida de un ángulo es la misma que la del arco comprendido por sus lados y trazado desde el vértice como centro.—Los ángulos, por consecuencia, se miden por grados, y tienen tantos como el arco correspondiente.

4. Los ángulos pueden ser *rectos*, *agudos* y *obtusos*.

5. Es *ángulo recto*, el que tiene 90° (fig. 10).

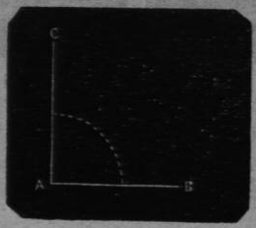


Fig. 10.

6. *Angulo agudo* el que tiene menos de 90° (fig. 11).

Fig. 11.

7. *Angulo obtuso*, es el que tiene más de 90° (fig. 12).

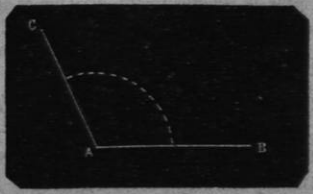


Fig. 12.

8 Son *ángulos adyacentes* los dos que se forman por la prolongación de uno de los lados de otro ángulo (fig. 13, ADC y CDB). Dos ángulos adyacentes valen siempre dos rectos ó 180°.

9. Son *ángulos complementarios* los que juntos valen un recto (fig. 14, DAC y CAB).

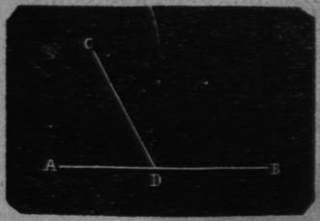


Fig. 13.

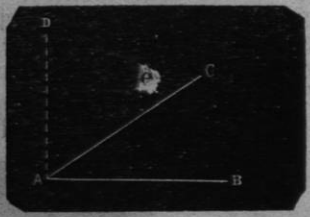


Fig. 14.

10. Son *ángulos suplementarios* los que juntos valen dos rectos (fig. 13). Todos los ángulos adyacentes son suplementarios.

LECCIÓN VI.

De las perpendiculares, oblicuas y paralelas.

1. ¿Qué pueden ser las rectas por la relación que tienen entre sí?—2. ¿Qué son rectas perpendiculares?—3. ¿Qué son oblicuas?—4. ¿Qué son paralelas?—5. ¿Cuántas perpendiculares y oblicuas se pueden bajar desde un punto á una recta?—7. Cuánto valen todos los ángulos que se pueden formar en un punto, á un lado y á los dos lados de una recta?—8. ¿Qué es secante?—9. ¿Cómo se llaman los ángulos formados por dos paralelas y una secante?—10. ¿Cuáles son las principales propiedades de las paralelas?

1. Las rectas, por la relación que tienen entre sí, pueden ser *perpendiculares*, *oblicuas* y *paralelas*.

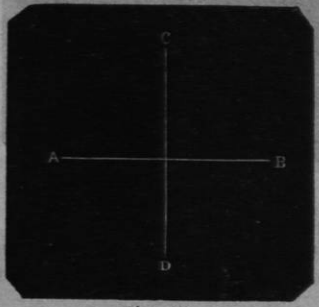


Fig. 15.

2. Son *rectas perpendiculares* las que forman uno ó más ángulos rectos (fig. 15).

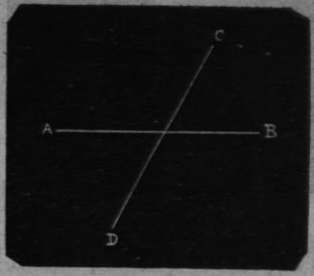


Fig. 16.

3. Son *oblicuas* las que forman uno ó más ángulos agudos ú obtusos (fig. 16). Por esto, á los ángu-

los que no son rectos, se les llama también oblicuángulos.

4. Son *paralelas* las rectas equidistantes en todos sus puntos: no se pueden encontrar por mucho que se prolonguen (fig. 17, AB y CD).

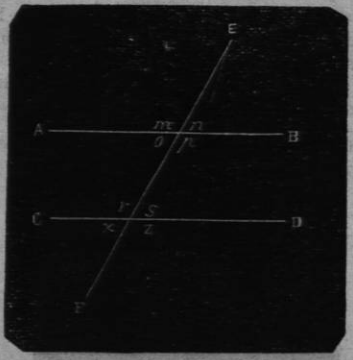


Fig. 17.

5. Desde un punto (M, fig. 18) fuera de una recta no se puede bajar á ésta más que una perpendicular (MD); pero es posible bajar infinitas oblicuas (ME, MC, MF...).

Fig. 18.

6. De todas las rectas que se puedan bajar á otra desde un punto, la más corta es la perpendicular (ND); las oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular son iguales (MF y MC), y la oblicua

que se aparta más de dicha perpendicular (ME) es la mayor.—Por esto se mide la distancia que hay entre un punto y una recta por medio de la perpendicular.

7. Todos los ángulos (fig. 19, AOE, EOC y COB) que se pueden formar en un punto á un lado de una recta, valen *dos* rectos, y todos los que se pueden formar al rededor de un punto (AOE, EOC, COB, BOF, FOD, DOA) valen *cuatro* rectos.

Fig. 19.

8. Toda recta (EF, fig. 17), que corta á dos paralelas se llama *secante*.

9. La secante forma con las paralelas ocho ángulos (*m*, *n*, *o*, *p*, *r*, *s*, *x*, *z*). Estos ocho ángulos se dividen en *internos* y *externos*. Son *internos* los cuatro (*o*, *p*, *r*, *s*) que están entre las paralelas, y son *externos* los otros cuatro (*m*, *n*, *x*, *z*) que están fuera de las paralelas. Los ángulos internos y externos situados en distinta paralela y á distinto lado de la secante (*os*, *pr*, y *mz*, *nx*) se llaman alternos, y los ángulos situados en diversa paralela y en distinto lado de la secante, uno dentro y otro fuera de las paralelas (*mr*, *ox*, y *ns*, *pz*), se llaman correspondientes.

10. Las principales propiedades de las paralelas son éstas:

1.ª Por un punto, sólo se puede trazar una paralela á una recta.

2.ª Una recta perpendicular á una de dos paralelas lo es á la otra.

3.ª Dos ó más rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.

4.ª Los ángulos alternos y correspondientes son iguales, y los dos internos ó externos de cada lado de la secante son suplementarios.

LECCIÓN VII.

De los polígonos.

1. ¿Qué es polígono?—2. ¿Á que se llama perímetro de un polígono?—3. ¿Qué es diagonal?—4. ¿Qué es polígono equilátero?—5. ¿Qué es polígono equiángulo?—6. ¿Qué es polígono regular?—7. ¿Qué es polígono irregular?—8. ¿Qué nombres reciben los polígonos, según el número de sus lados?—9. ¿Á qué se llama base de un polígono?—10. ¿Y altura?

1. Es *polígono* la porción de superficie plana comprendida entre rectas (figs. 20, 21, 22 y 23).

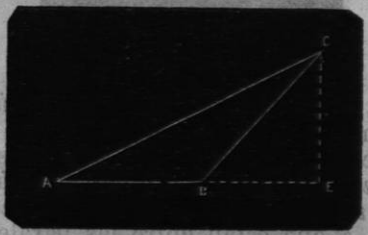


Fig. 20.

2. *Perímetro* de un polígono, la suma ó conjunto de sus lados. También se llama *contorno*.

3. Y *diagonal*, la recta que une dos vértices no contiguos BC (fig. 21) AD y AC (fig. 22).

4. Es *polígono equilátero* el que tiene sus lados iguales (fig. 22).

5. *Polígono equiángulo*, el que tiene iguales sus ángulos (fig. 22).

6. *Polígono regular*, el que tiene sus lados y ángulos iguales (fig. 22).

7. Y *polígono irregular* el que no tiene iguales todos sus lados y ángulos (fig. 23).

8. Los polígonos de tres lados se llaman *triángu-*

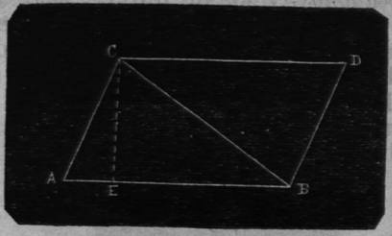


Fig. 21.

los; los de cuatro, *cuadriláteros;* los de cinco, *pentá-*

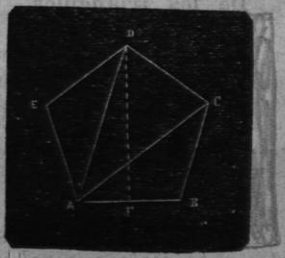


Fig. 22.

gonos; los de seis, *exágonos;* los de siete, *eptágonos;*

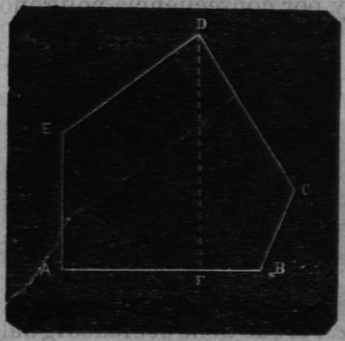


Fig. 23.

los de ocho, *octógonos;* los de nueve, *eneágonos;* los

de diez, *decágonos;* los de once, *endecágonos;* los de doce, *dodecágonos*, y los de quince, *pentadecágonos*. Todos los demás carecen de nombre especial, y se distinguen indicando el número de sus lados.

9. Se llama *base* de un polígono al lado sobre que insiste, AB (figs. 20, 21, 22 y 23).

10. Y *altura* de un polígono la perpendicular bajada á la base ó á su prolongación desde el vertice opuesto á ella, CE (figs. 20 y 21); DF (figs. 22 y 23).

LECCIÓN VIII.

De los triángulos.

1. ¿Qué pueden ser los triángulos atendiendo á sus lados?—2. ¿Qué es triángulo equilátero?—3. ¿Qué isósceles?—4. ¿Y escaleno?—5. ¿Qué pueden ser los triángulos atendiendo á sus ángulos?—6. ¿Qué es triángulo rectangulo?—7. ¿Y obtusángulo?—8. ¿Y acutángulo?—9. ¿Cuánto valen los tres ángulos de un triángulo?—10.—¿Qué particularidad ofrecen los triángulos respecto de sus lados y ángulos?—11. ¿En qué casos principales son iguales dos triángulos?—12. ¿En cuáles son semejantes?

1. Los triángulos, atendiendo á sus lados, pueden ser *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*.

2. Es *equilátero* el que tiene sus tres lados iguales (fig. 24).—Todo triángulo equilátero es también equiángulo, y por consecuencia polígono regular.

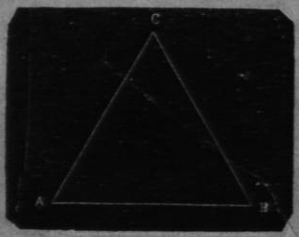


Fig. 24.

3. *Isósceles*, el que tiene dos lados iguales (fig. 25).

4. Y *escaleno* el que tiene desiguales sus tres lados (figs. 26 y 27).

5. Los triángulos, atendiendo á sus ángulos, pueden ser *rectángulos*, *obtusángulos* y *acutángulos*.

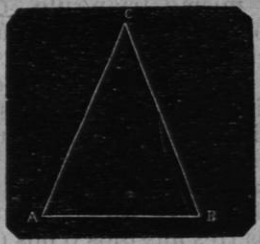


Fig. 25.

6. Es *rectángulo* el que tiene un ángulo recto (fig. 26).

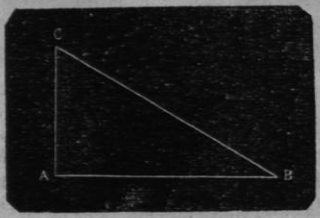


Fig. 26.

En los triángulos rectángulos, al lado (CB) opuesto al ángulo recto, se le da el nombre especial de *hipotenusa*, y á los otros dos (AC y AB) el de *catetos*.

7. Es triángulo *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso (fig. 27).

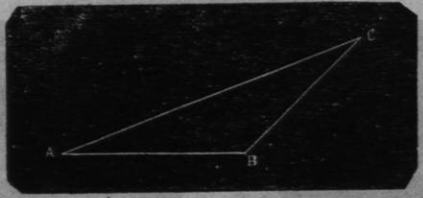


Fig. 27.

8. Y *acutángulo* el que tiene sus tres ángulos agudos (figs. 24 y 25).

UNED

9. Los tres ángulos de un triángulo valen siempre *dos* rectos.

10. En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y á ángulos iguales lados iguales; así como también al mayor lado mayor ángulo, y viceversa.

11. Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales sus lados; cuando tienen igual un lado y sus dos ángulos adyacentes, y cuando tieneu igual un ángulo y los lados que le forman.

12. Dos triángulos son semejantes, cuando tienen iguales los tres ángulos ó dos de ellos; cuando tienen sus lados proporcionales, y cuando tienen un ángulo iguales y proporcional los lados que le forman.

LECCIÓN IX.

De los cuadriláteros.

1. ¿En qué se dividen los cuadriláteros?—2. ¿Qué es trapezoide?—3. ¿Qué es trapecio?—4. ¿Qué es paralelogramo?—5. ¿Qué hay digno de advertir sobre los cuadriláteros?—6. ¿En qué se dividen los paralelogramos?—7. ¿Qué es romboide?—8. ¿Qué es rombo?—9. ¿Qué es rectángulo?—10. ¿Qué es cuadrado?—11. ¿Qué hay digno de observar sobre los paralelogramos?—12. ¿Cuándo serán iguales dos cuadriláteros?—13 ¿Cuándo serán semejantes?

1. Los cuadriláteros se dividen en tres clases: *trapezoide*, *trapecio* y *paralelogramo*.

2. Es *trapezoide* el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo (fig. 28).

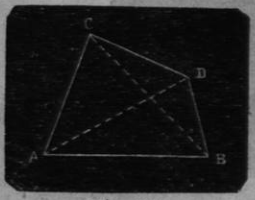


Fig. 28.

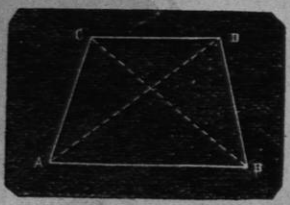


Fig. 29.

3. *Trapecio*, el cuadrilátero que tiene dos lados

(AB y CD, fig. 29) paralelos. A estos dos lados paralelos se les llama *bases*.

4. Y *paralelogramo*, el cuadrilátero que tiene paralelos sus lados opuestos (figs. 30, 31, 32 y 33).

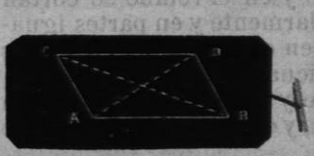


Fig. 30.

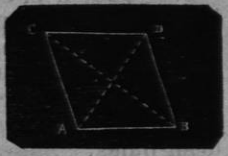


Fig. 31.

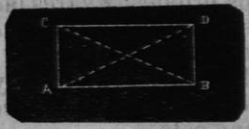


Fig. 32.

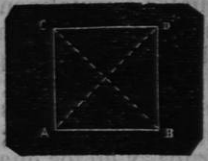


Fig. 33.

5. Hay digno de observar sobre los cuadriláteros:

1.° Que la suma de sus ángulos es siempre *cuatro* rectos.

2.° Que la diagonal (AD ó CB) los divide siempre en dos triángulos.

3.° Que en el trapecio (fig. 29), los dos ángulos (A y C, D y B) contiguos á un mismo lado no paralelo son suplementarios.

6. Los paralelogramos se dividen en cuatro clases: *romboide*, *rombo*, *rectángulo* y *cuadrado*.

7. Es *romboide* un paralelogramo que tiene desiguales sus lados y ángulos contiguos (fig. 30).

8. *Rombo*, un paralelogramo que tiene iguales todos sus lados y desiguales los ángulos contiguos á cada lado (fig. 31).

9. *Rectángulo*, un paralelogramo cuyos lados contiguos son desiguales, y sus ángulos todos rectos (fig. 32).

10. Y *cuadrado* un paralelogramo que tiene iguales sus lados y ángulos (fig. 33).

11. Hay digno de advertir sobre los paralelogramos:

1.° Que sus ángulos opuestos son iguales, y suplementarios los contiguos.

2.° Que la diagonal los divide en dos triángulos iguales.

3.° Que en el cuadrado y en el rombo se cortan las diagonales perpendicularmente y en partes iguales, y en el rectángulo y en el romboide, en partes iguales también, pero oblicuamente.

4.° Que en el cuadrado y en el rectángulo son iguales las dos diagonales, y en el romboidey rombo desiguales.

12. Dos cuadriláteros son iguales cuando tienen iguales é igualmente ordenados: 1.° sus lados y un ángulo formado por dos lados iguales; 2.° tres lados y los ángulos comprendidos por ellos; 3.° dos lados contiguos y los ángulos adyacentes á estos lados. En los paralelogramos bastan dos lados contiguos y el ángulo que forman; en los rectángulos dos lados contiguos, y en los cuadrados uno solo.

13. Dos cuadriláteros no paralelogramos son semejantes cuando se pueden dividir en dos triángulos semejantes, semejantemente dispuestos, y si son paralelogramos, basta para que sean semejantes que tengan igual un ángulo y proporcionales los lados que le formen. Los cuadrados son todos semejantes.

LECCIÓN X.

Del pentágono, exágono y demás polígonos.

1. ¿De qué modo se puede dividir todo polígono en triángulos?—2. ¿A qué se llama centro de un polígono regular?—3. ¿De cuántas maneras pueden ser los radios de un polígono regular?—4. ¿Qué son radios rectos?—5. ¿Qué son radios oblicuos?—6. ¿De qué modo queda dividido un polígono por medio de los radios oblicuos?—7. ¿Qué valor tienen todos los ángulos de un polígono?—8. ¿Cómo se averigua el valor de cada ángulo del polígono regular?—9. ¿Cuándo se dice que un polígono está inscripto en una circunferencio?—10. ¿Cuándo que está circunscripto?—11. ¿Cuándo serán iguales dos polígonos?—12. ¿Cuándo serán semejantes?

1. Todo polígono, regular ó irregular, se puede dividir en triángulos tirando diagonales desde uno

de sus ángulos (A, fig. 34) á todos los demás no adyacentes (C y D), ó bien trazando rectas desde un punto interior cualquiera á cada uno de los vértices.

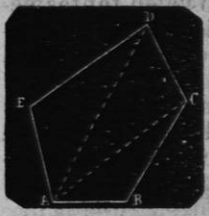


Fig. 34.

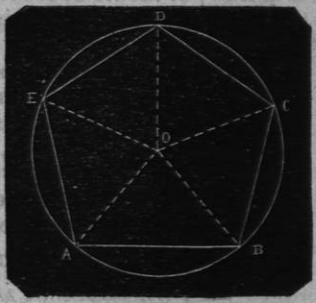


Fig. 35.

2. Se llama *centro* de un polígono regular al punto (O, figs. 35 y 36) que equidista de todos los vértices y del centro de todos los lados.

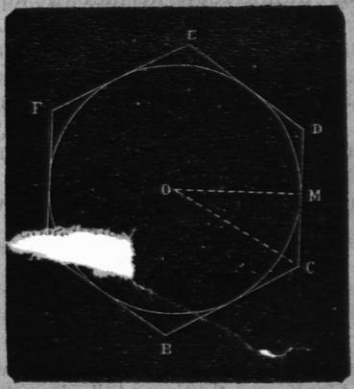


Fig. 36.

3. Los radios de un polígono regular pueden ser *rectos* y *oblicuos*.

4. Son *radios rectos*, las perpendiculares bajadas desde el centro del polígono al centro de los lados (OM, fig. 36). También se llaman *apotegmas*.

UNED

5. Son *radios oblicuos* las rectas que unen el centro en los vértices del polígono (OC, fig. 36).

6. Todo polígono regular (ABCDE, fig. 35) queda dividido por medio de los radios oblicuos (OA, OC, OD, OE) en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.

7. Los ángulos de todo polígono valen tantas veces dos rectos, ó 180°, como lados tienen menos. 2.—Así, los ángulos (ABCDEF) del polígono (fig. 36) valdrán $180^{\circ} \times 4 = 720^{\circ}$.

8. Para averiguar el valor de cada ángulo de un polígono regular, se divide el de todos ellos por el número de ángulos del polígono.--Así cada uno de los ángulos de un octógono regular valdrá $\frac{180 \times 6}{8} = \frac{1080}{8} = 135^{\circ}$.

9. Un polígono está *inscripto* en una circunferencia, cuando todos los lados de aquél son cuerdas de ésta (fig. 35).—Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.

10. Y un polígono está *circunscripto* á una circunferencia, cuando todos los lados de aquél son tangentes de ésta (fig. 36).—Todo polígono regular se puede circunscribir á una circunferencia.

11. Son iguales dos polígonos, cuando tienen respectivamente iguales y ordenados del mismo modo los lados y ángulos, ó bien respectiva y ordenadamente iguales los triángulos que los componen.

12. Y son semejantes; cuando están compuestos de igual número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

LECCIÓN XI.

De las áreas ó superficies.

1. ¿Qué es área de un polígono?—2. ¿Cuál es la unidad para la medición del área de los polígonos?—3. ¿Cómo se halla el área de un triángulo?—4. ¿Y la de un trapezoide?—5. ¿Y la del trapecio?—6. ¿Cómo se halla el área de los paralelogramos?—7. ¿Y la del cuadrado?—8. ¿Y la del polígono regular?—9. ¿Cómo se halla la de los polígonos irregulares?—10. ¿Y la de la circunferencia?

1. Es *área* de un polígono la medida de su extensión superficial.

2. La unidad para la medida de las áreas es siempre un cuadrado, que puede tener de lado un decímetro, un metro, un kilómetro, un pie, una vara..... una cualquiera de las medidas lineales.

3. Se obtiene el área de un *triángulo*, multiplicando su base por la mitad de su altura, ó la altura por la mitad de la base.

4. La de un *trapezoide*, descomponiéndole en dos triángulos por medio de una diagonal, hallando el área de cada uno de los dos triángulos y sumando los dos productos.

5. Se obtiene el área del *trapecio*, multiplicando su altura por la mitad de la suma de los lados paralelos.

6. El área de los *paralelogramos*, multiplicando la base por la altura.

7. Para hallar el área de un *cuadrado*, se multiplica la longitud de uno de sus lados por sí misma, ó se eleva al cuadrado.

8. Se obtiene el área del *polígono regular*, multiplicando la mitad de su perímetro por la apotema, ó la mitad de ésta por aquél.

9. Para hallar el área de un *polígono irregular*, se divide éste en triángulos por medio de diagonales que partan de un ángulo; se halla el área de cada triángulo y se suman todas.

10. Y se obtiene el área de un *círculo*, multiplicando la mitad de la circunferencia por el radio, ó la mitad de éste por la circunferencia.

LECCIÓN XII.

De la elipse, óvalo, huevo y espiral.

1. ¿De qué clase de curvas conviene tener conocimiento además de la circunferencia?—2. ¿Qué es elipse?—3. ¿A qué se llama ejes y focos de la elipse?—4. ¿Cómo se hallan los focos de la elipse?—5. ¿Qué es óvalo?—6. ¿A qué se llama ejes del óvalo, y cuál es el centro de éste?—7. ¿A qué línea se da el nombre de huevo?—8. ¿A qué se llama ejes del huevo?—9 ¿Qué es línea espiral?—10. ¿Cómo se rectifican todas estas curvas?

1. Además de la circunferencia, conviene tener conocimiento de las curvas llamadas *elipse*, *óvalo*, *huevo* y *espiral*.

2. Es *elipse* una curva cerrada (ADBC, fig. 37) simétrica en dos sentidos, cuyos puntos distan de otros dos (M y N) llamados focos, una suma igual á la recta llamada eje mayor (AB).

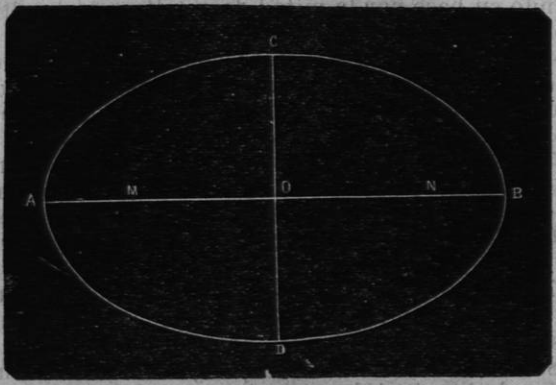


Fig. 37.

3. Se llama *ejes* de la elipse á dos líneas (AB y CD) perpendiculares, que la dividen en cuatro partes iguales, y *focos*, á dos puntos (M y N) situados en el eje mayor, cuyas distancias á cada punto de la elipse componen una suma igual á dicho eje mayor.

4. Se hallan los focos de la elipse tomando un radio igual á la mitad del eje mayor, haciendo centro en uno de los extremos del menor, y cortando á aquel con un arco á un lado y á otro. Los puntos de intersección del eje mayor y de los arcos serán los focos.

5. Es *óvalo* una curva cerrada simétrica en dos sentidos, y compuesta de cuatro ó más arcos de círculo, trazados de dos en dos con radio diferente (fig. 38).

6. Son *ejes* del óvalo, dos líneas (AB y DC) perpendiculares, que le dividen en cuatro partes iguales, y es *centro* el punto de intersección de los ejes.

7. Es *huevo* una curva cerrada simétrica en el sentido de su ancho, y más ancha en un extremo que en el opuesto (fig. 39).

8. Son *ejes* del huevo las dos líneas perpendicu-

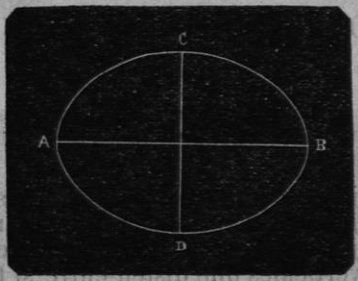


Fig. 38.

lares (AB y CD) que determinan su mayor longitud y anchura.

9. Es *línea espiral* una curva que, partiendo de un punto (A), va girando al rededor de él y apartándose siempre (fig. 40).

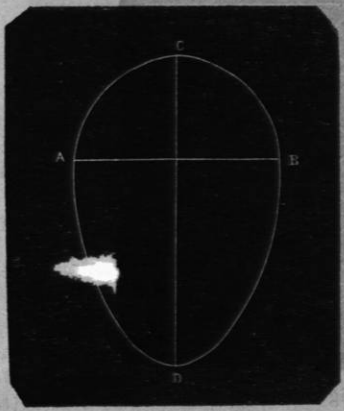


Fig. 39.

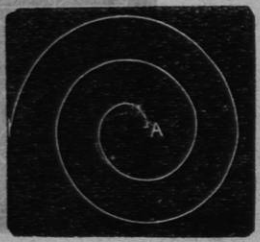


Fig. 40.

10. Como la elipse, el óvalo, el huevo y la espiral se componen de arcos de círculo, no hay que hacer otra cosa para rectificarlas que rectificar los diferentes arcos que componen cada una.

DIBUJO GEOMÉTRICO Á PULSO (1).

EJERCICIOS.

1. Dibujar rectas horizontales equidistantes.
2. Dibujar rectas verticales equidistantes.
3. Dibujar sobre rectas horizontales equidistantes, rectas verticales que disten entre sí tanto como aquéllas.
4. Trazar sobre el dibujo anterior rectas inclinadas de derecha á izquierda y de izquierda á derecha, de modo que corten diagonalmente los cuadrados que resultan de los trabajos anteriores (fig. 41).

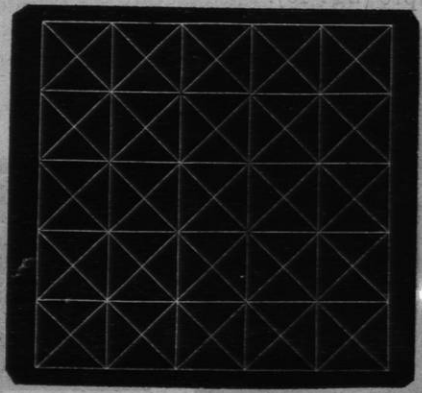


Fig. 41.

(1) El dibujo geométrico á pulso debe preceder al gráfico, no permitiéndose para su ejecución instrumento alguno, á no ser para efectuar comprobaciones. Cuídese mucho de que los discípulos coloquen el papel horizontalmente: de que refieran las rectas á los bordes del papel, única guía que se les consentirá; de que no mojen el lápiz: de que se acostumbren á trazar por medio de toques así las rectas como las curvas, indicándolas primeramente, y no dibujándolas de un solo golpe: de que borren con la goma cuanto salga poco perfecto, rectificándolo cuantas veces sea necesario, y de que, empezando por dibujar varias figuras pequeñas é

UNED

5. Dividir una recta, primero en dos, luego en cuatro, después en ocho, diez y seis, etc. partes iguales.

6. Dividir una recta en tres, nueve y veintisiete partes iguales.

7. Dividir una recta en tres, seis, diez y ocho y treinta y seis partes iguales.

8. Dividir una recta en cinco y en veinticinco partes iguales.

9. Dividir una recta en cinco, quince y treinta partes iguales.

10. Dividir una recta en cinco, diez y treinta partes iguales.

11. Dividir una recta en dos, diez y veinte partes iguales.

12. Dividir una recta en tres, quince y cuarenta y cinco partes iguales (1).

13. Dibujar varios ángulos agudos iguales.

14. Dibujar varios ángulos obtusos iguales.

15. Dibujar varios ángulos rectos.

16. Dibujar varios triángulos rectángulos iguales.

17. Dibujar varios triángulos acutángulos iguales.

18. Dibujar varios triángulos obtusángulos iguales (2).

19. Dibujar varios trapezoides iguales.

20. Dibujar varios trapecios iguales.

21. Dibujar un rectángulo, un cuadrado, un romboide y un rombo, y repetir varias veces el dibujo de estas cuatro figuras en igual tamaño.

22. Construir cuadrículas de varias clases ins-

iguales de una misma clase, simétricamente colocadas, concluyan por dibujarlas de gran tamaño.

(1) En todos los casos de división de rectas, se hará que las dividan sucesivamente en las partes pedidas por el orden que se exige. Para el caso 12 por ejemplo, se dividirá primero la recta en tres partes, después cada una de estas partes en cinco, para que resulten quince, y luego cada una de éstas en tres para obtener cuarenta y cinco.

(2) Lo mismo con los triángulos que con todos los demás polígonos y figuras, después de hacer que llene el discípulo dos ó más hojas de papel con figuras iguales, se les hará construir otras de mayor tamaño, ya inmediatamente después de aquéllas, ya cuando haya dibujado todas en pequeño.

cribiendo en ellas diversidad de curvas (figs. 42, 43, y 44) (1).

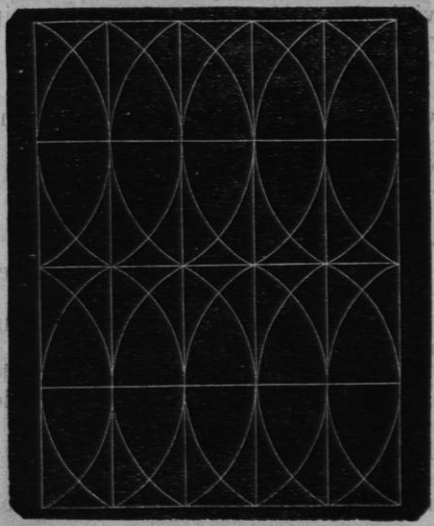


Fig. 42.

23. Dibujar varios cuadrados de pequeña dimensión y circunscribirles circunferencias.

24. Inscribir circunferencias en los mismos cuadrados.

25. Circunscribir é inscribir circunferencias en cuadrados de mayores dimensiones.

26. Dibujar varios pentágonos regulares iguales (2).

27. Circunscribir é inscribir circunferencias en pentágonos.

(1) Estos ejercicios tienen por objeto preparar al discípulo para el trazado de la circunferencia, de la elipse, del óvalo y de la línea espiral.

(2) Para dibujar el pentágono á pulso, se traza primero la base, se levanta en su centro una perpendicular que sirva de auxilio, y cuya longitud sea un poco mayor que vez y media la base, se trazan luego los lados adyacentes á ésta, y se unen sus extremos al de la perpendicular.

28. Dibujar varios decágonos regulares iguales (1).

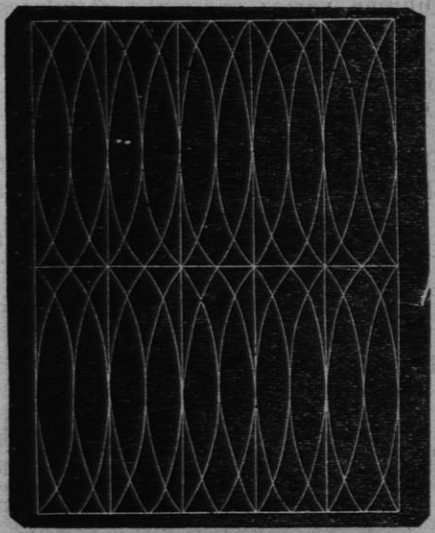


Fig. 43.

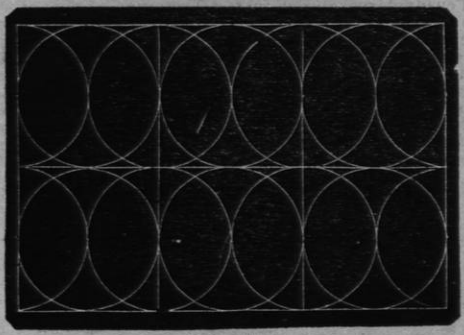


Fig. 44.

(1) Para dibujar á pulso el decágono, se traza primero un pentágono, ó se marcan los puntos de sus vértices, y se construye sobre cada lado un triángulo isósceles cuyos lados iguales sean algo más que la mitad del lado del pentágono.

29. Circunscribir é inscribir circunferencias en decágonos.

30. Dibujar varios exágonos regulares iguales (1).

31. Circunscribir é inscribir circunferencias en exágonos.

32. Dibujar varios octógonos regulares iguales (2).

33. Dibujar circunferencias con el auxilio de dos rectas que se corten en su centro perpendicularmente.

34. Dibujar circunferencias sin medio auxiliar alguno.

35. Dibujar elipses (3).

36. Dibujar óvalos.

37. Dibujar huevos.

38. Trazar líneas espirales (4).

(1) Para dibujar un exágono, se traza primero la base y se levantan en sus extremos perpendiculares de una longitud algo mayor que vez y media aquélla, para que sirvan de auxilio; se unen por medio de una recta los extremos superiores de las perpendiculares, y después á cada uno de los lados de éstas se construyen dos de los lados del exágono, iguales siempre á las bases.

(2) Se dibuja primero un cuadrado; se divide cada uno de sus lados en tres partes, se unen con rectas los puntos de división, y se borran los ángulos del cuadrado que quedan fuera del octógono.

(3) Lo mismo para la elipse que para el óvalo y el huevo puede servirse el discípulo como medio auxiliar, del previo trazado de los ejes.

(4) A estos ejercicios pueden seguir otros, que consistan en la ejecución de multitud de dibujos en que entren en combinación rectas y curvas, dibujos que el profesor hallará en abundancia en los tratados elementales de este arte, y que nosotros no incluimos por el presente en nuestra obra, á causa de creer bastante lo que antecede para la mayoría de los alumnos nuestras escuelas, á quienes los conocimientos anteriores pueden servir de de base para otros trabajos.

GRADO SEGUNDO.

DIBUJO GEOMÉTRICO.— PROBLEMAS.

PROBLEMAS GRÁFICOS.

LECCIÓN PRIMERA.

Rectas.

1. *Dividir una recta* (AB, fig. 1.ª) *en dos partes iguales* (AO y BO).

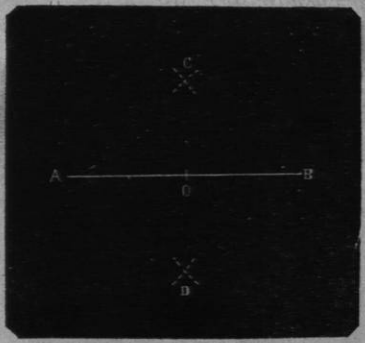


Fig. 1.ª

Haciendo centro sucesivamente en los extremos (A y B) de la recta, con un radio mayor que su mitad, se trazan á uno y otro lado de la recta arcos que se corten, y la recta determinada por los puntos (C y D) de intersección de los arcos, pasará por

el punto (O) medio de dicha recta, que quedará dividida en dos partes (AO y BO) iguales.

2. *En un punto* (O) *de una recta levantar una perpendicular* (fig. 2.ª).

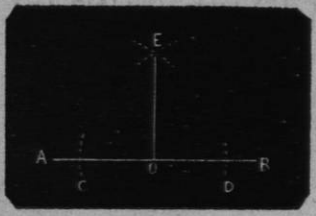


Fig. 2.ª

Haciendo centro en el punto (O) designado, se marcan en la recta (AB) dos puntos (C y D) equidistantes del primero, y sirviendo de centro estos nuevos puntos, se trazan dos arcos que se corten. El punto (E) de intersección de estos arcos y el punto dado determinan la perpendicular (EO).

3. *Desde un punto* (C) *fuera de una recta, bajar á ésta una perpendicular* (fig. 3.ª).

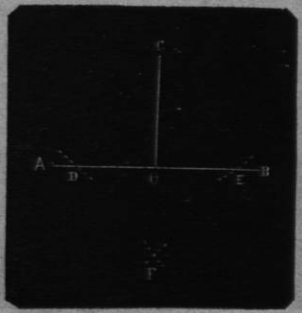


Fig. 3.ª

Haciendo centro en el punto (C) designado, se trazan con un mismo radio dos arcos (D y E), que corten á la recta, y sirviéndose de estos puntos como centros se trazan con un mismo radio dos arcos que se corten en un punto (F) al lado opuesto del punto

dado (C). Estos dos puntos (C y F) determinarán la perpendicular (CO).

4. *En un extremo* (B) *de una recta* (AB) *que no puede prolongarse, levantar una perpendicular* (figura 4.ª).

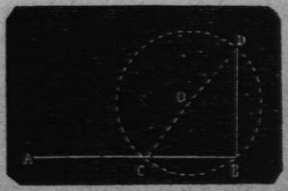


Fig. 4.ª

Haciendo centro en un punto (O) fuera de la recta más próximo al extremo (B) designado que al opuesto (A), se traza una circunferencia que pase por el extremo (B) en cuestión, y luego un diámetro (CD) por el otro punto (C), en que la circunferencia corta á la recta dada. El otro extremo (D) de este diámetro y el (B) de la recta determinará la perpendicular (DB).

Advertencia. Todos estos casos de levantar y bajar perpendiculares á una recta se pueden también resolver más fácilmente por medio de la escuadra. Se fija uno de los catetos de ésta sobre la recta dada, de manera que el otro cateto venga á coincidir con el punto de la perpendicular, y se traza ésta.

5. *Por un punto dado* (C, fig. 5.ª) *trazar una recta* (GH) *paralela á otra* (AB).

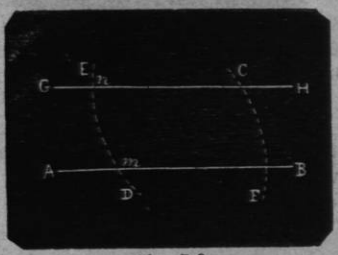


Fig. 5.ª

Haciendo centro en el punto (C) dado, se traza un arco (ED), que corte á la recta dada, y haciéndole

luego con el mismo radio en el punto (*m*) en que el arco ha cortado á la recta, se traza otro (CF) que también la corte y que pase por el punto en cuestión. Se mide en este arco la distancia de la recta al punto, se toma la misma (*mn*) en el otro arco, y el punto (*n*) de unión de los dos arcos y el dado (C) marcarán la dirección de la recta (GH) paralela á la dada.

Advertencia. Este caso, así como todos los que se refieren al trazado de rectas paralelas, se pueden resolver fijando una escuadra ó sujetándola con la mano sobre el papel, y corriendo otra sobre uno de los bordes de la fija. Cada uno de los diversos movimientos de la segunda determinará una paralela á la recta sobre que se haya fijado primeramente.

6. *Dividir una recta* (AB, fig. 6) *en un número cualquiera de partes iguales.*

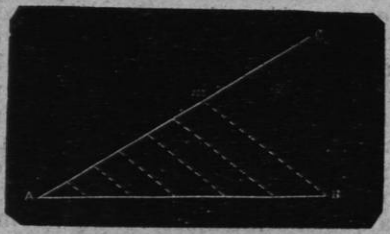


Fig. 6.ª

Desde uno de los extremos (A) de la recta dada se traza una recta indefinida (AC), y se marcan en ésta tantas partes iguales de cualquier extensión, seis por ejemplo, como sean aquellas en que la recta se ha de dividir. El punto (*m*) que marque la última división, se une con el otro extremo (B) de la recta, y señalando luego en ella los puntos á que vendrían á parar otras rectas paralelas á ésta, tiradas desde los puntos de división de la otra, quedará dividida la que se ha dado en el número de partes iguales que se pide.

LECCIÓN II.

Ángulos.

1. *Construir un ángulo* (*bac*, fig. 7.ª) *igual á otro dado* (BAC).

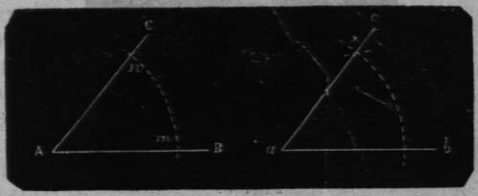


Fig. 7.ª

Haciendo centro en el vértice (A) se traza un arco que comprenda los dos lados del ángulo, y haciéndole luego en el extremo (*a*) de una recta, se traza otro arco con el mismo radio. Se toma luego la medida del arco (*mn*) comprendido entre los lados, se toma la misma medida en el otro arco, y el punto (*x*), que marca dicha medida, indicará con el extremo (*a*) de la recta la dirección del otro lado (*ac*).

2. *Dividir un ángulo* (CAB, fig. 8.ª) *en dos partes iguales.*

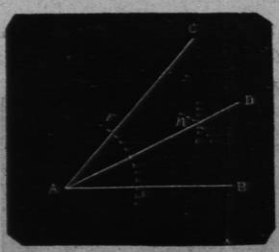


Fig. 8.ª

Haciendo centro en el vértice (A), se traza un arco (*rs*) que toque á los dos lados, y haciéndole después en los puntos de intersección (*r* y *s*), se trazan dos

arcos por la parte opuesta al vértice, y el punto (*n*) de intersección de estos arcos y el vértice, determinarán una recta (AD), que dividirá el ángulo en dos partes iguales.

3. *Dividir un ángulo* (CAB, fig. 9.ª) *en tres, cuatro, cinco ó más partes iguales.*

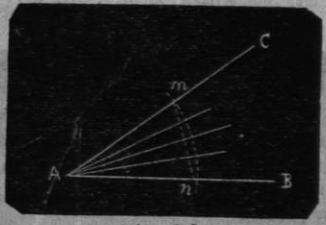


Fig. 9.ª

Haciendo centro en el vértice (A), se traza un arco que abarque los dos lados, y la cuerda (*mn*) correspondiente á este arco, se divide en las partes pedidas, cuatro por ejemplo. Se unen después por medio de rectas los puntos de división de la cuerda con el vértice del ángulo, y éste quedará dividido en el mismo número de partes.

LECCIÓN III.

Circunferencia.

1. *Trazar una circunferencia por tres puntos* (ABC, fig. 10) *dados.*

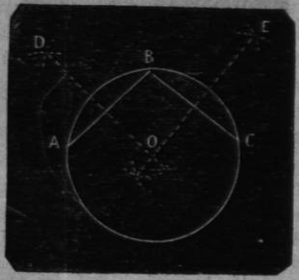


Fig. 10.

Se unen los puntos por medio de dos rectas (AB y BC), y se levantan perpendiculares (DO y EO) en sus puntos medios. El punto (O) en que estas perpendiculares se encuentran, será el centro de la circunferencia trazada con un radio igual á la distancia de dicho punto (O) á cualquiera (A, B ó C) de los tres dados; cuya circunferencia pasará por los citados puntos.

2. *Hallar el centro de una circunferencia* (fig. 10).

Se trazan dos cuerdas (AB y CB) que se encuentren en uno de sus extremos (B), se dividen dichas cuerdas en dos partes iguales, y el punto en que se encuentran las perpendiculares levantadas en cada uno de los puntos céntricos de las cuerdas, será el centro que se busca.

3. *Hallar el centro de un arco.*

Se trazan dos cuerdas que se corten en uno de sus extremos, y que estén comprendidas en el arco, procediéndose en todo lo demás como en los casos anteriores.

4. *Dividir un arco en dos partes iguales.*

Se traza la cuerda correspondiente al arco dado, y dividiendo ésta en dos partes iguales, como se efectúa con una recta aislada, quedará también el arco dividido en dos partes iguales por la perpendicular que pase por el centro de la recta.

5. *Dividir una circunferencia en* 2, 4, 8, 16, *etc. partes iguales.*

El diámetro divide desde luego á la circunferencia en dos partes iguales: si se trazan dos diámetros que se corten perpendicularmente, la circunferencia quedará dividida en cuatro partes iguales: si se quiere dividir en ocho, cada arco se divide en dos partes iguales; si en diez y seis, cada uno de estos últimos en otras dos, y así sucesivamente.

6. *Dividir una circunferencia en* 3, 6, 12, 24, *etc. partes iguales.*

Trazada la circunferencia, se divide ésta con la longitud de un radio, con lo cual queda exactamente dividida en seis partes iguales, y prescindiendo de los puntos de división pares ó de los impares, en tres. Si se quiere dividir en doce partes, cada uno de los

seis arcos se divide en dos; si estos nuevos se dividen del mismo modo, resultará la circunferencia dividida en veinticuatro, y así sucesivamente.

Observación. Tanto en este caso como en el anterior, y siempre que haya que dividir en dos partes iguales varios arcos iguales, basta con dividir uno, tomar la medida de su mitad y con ésta dividir los otros.

7. *Dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales.*

Se dividen los 360° que tiene la circunferencia por el número de partes en que ésta se quiere dividir, y el cociente dirá el número de grados y partes de grado que corresponderán á cada una de las partes ó arcos que se han de hacer de ella. Se toma luego con el semicírculo graduado el arco correspondiente de la circunferencia dada, y la medida de aquel arco se sobrepone sucesivamente en la circunferencia, que quedará con exactitud ó con inapreciable diferencia dividida en el número de partes iguales que se desea.

8. *Trazar una tangente que pase por un punto dado en la circunferencia.*

Se traza un radio desde el punto dado, y la perpendicular al extremo de este radio será la tangente pedida.

9. *Trazar una tangente* (AB ó AC, fig. 11) *á una*

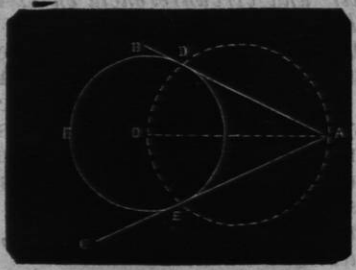


Fig. 11.

circunferencia (DFE) *desde un punto* (A) *dado fuera de ella.*

Se une el punto dado (A) con el centro (O) del cír-

culo, y tomando esta recta (AO) como diámetro, se traza una circunferencia cuyos puntos (D y E), de contacto con la dada, marcarán el punto por donde es preciso hacer pasar la recta ó rectas (AB y AC) tangentes á la circunferencia desde el punto (A) dado.

LECCIÓN IV.

Triángulos.

1. *Construir un triángulo equilátero* (fig. 12):

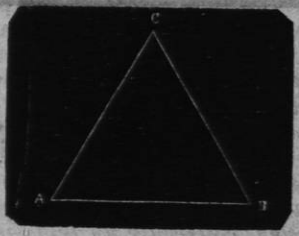


Fig. 12.

Con una abertura de compás igual á la recta (AB) sobre que se quiere construir el triángulo, y haciendo centro sucesivamente en sus extremos (A y B), se trazan dos arcos que se corten en un punto (C), el cual se unirá por medio de rectas á los extremos de la primera.

2. *Construir un triángulo isósceles* (fig. 13).

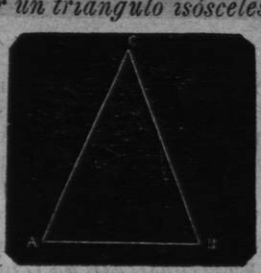


Fig. 13.

Haciendo centro en los extremos (A y B), de la

recta (AB) que se elija para base, y con un radio mayor ó menor que ella, se trazan dos arcos que se corten en un punto (C), el cual se une por medio de rectas á los extremos de aquélla.

3. *Construir un triángulo* (ABC, fig. 14) *con tres rectas dadas (a, b y c).*

Fig. 14.

Se toma una recta (AB) igual á una de ellas (*a*), y haciendo centro sucesivamente en sus extremos con radios iguales á las otras dos rectas (*b* y *c*), se trazan das arcos que se unan en un punto (C), desde el cual se trazan rectas á los extremos de la primera.

4. *Dado un ángulo (a,* fig. 15) *y las rectas (b y c) que le constituyen, construir un triángulo.*

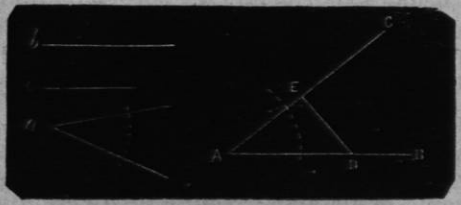


Fig. 15.

Sobre una recta (AB) se construye un ángulo (BAC) igual al dado, se toman en los lados (AB y AC) de este ángulo, á partir desde su vértice (A), partes (AD y AE) respectivamente iguales á las rectas dadas (*b* y *c*), y se unen los extremos (D y E) de estas partes por medio de una recta (ED).

5. *Dado un lado (a,* fig. 16) *y los dos ángulos adyacentes á él (b y c), construir un triángulo.*

Sobre una recta (AB) igual á la dada (*a*), se construye un ángulo (CAB) igual á uno de los dados (*b*), y

sobre el otro extremo (B) de la misma recta se construye un ángulo (ABC) igual al segundo dado *(c)*, y se prolongan las rectas resultantes hasta que se encuentren en un punto (C).

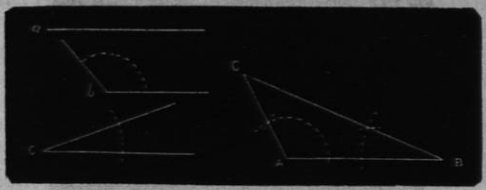


Fig. 16.

6. *Construir un triángulo igual á otro dado.*

Se consideran como datos los tres lados del triángulo dado, ó un ángulo y sus dos lados, ó un lado y sus dos ángulos adyacentes, y se resuelve el caso como el correspondiente de los anteriores.

7. *Circunscribir una circunferencia á un triángulo.*

Se dividen dos de los lados del triángulo en dos partes iguales, por medio de perpendiculares, y el punto en que se encuentren éstas, será el centro de la circunferencia circunscrita, siendo el radio la distancia de dicho punto á uno de los vértices.

8. *Inscribir una circunferencia en un triángulo.*

Se dividen los ángulos del triángulo en dos partes iguales, y el punto de reunión de las rectas divisorias será el centro de la circunferencia inscrita, siendo el radio la distancia común de dicho punto á las rectas.

LECCIÓN V.

Cuadriláteros.

1. *Construir un trapecio.*

Se trazan dos rectas paralelas y se cortan por otras dos que no tengan esta circunstancia.

2. *Construir un romboide* (fig. 17).

Sobre un punto cualquiera (G) de una de dos rec-

tas paralelas (AB y CD), se construye un ángulo (HGB) que no sea recto, y cuyo nuevo lado (GH) corte á la otra paralela (CD). Con un radio (GE) ma-

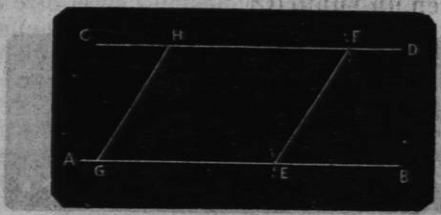


Fig. 17.

yor ó menor que el comprendido entre ambas paralelas (HG), se toma una misma longitud (GE y HF) en éstas, partiendo desde los extremos (H y G) del lado interceptado, y se unen por medio de una recta los puntos (F y E) marcados con dicho radio.

3. *Construir un rombo.*

Se construye con el romboide, aunque tomando en las paralelas una parte igual al lado interceptado entre las dos.

4. *Construir un rectángulo.*

Se construye como el romboide, sin más diferencia que la de cortar las paralelas por una perpendicular, ó formar en el punto elegido un ángulo recto.

5. *Construir un cuadrado.*

Se construye como el rectángulo: pero tomando en cada paralela una parte igual á la recta que las paralelas intercepten.

6. *Construir un cuadrilátero* (ABDC, fig. 18) *igual á otro dado* (*abdc*).

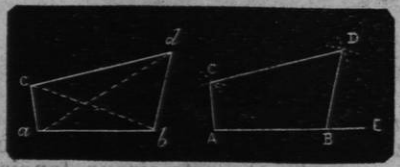


Fig. 18.

Sobre una recta (AE), se toma una parte (AB)

igual á uno de los lados (*ab*) del cuadrilátero dado, y haciendo centro en el extremo (A) de la recta á la diagonal (*ad*), que parte del extremo (*a*) correspondiente del cuadrilátero, y después en el otro extremo (B), con un radio igual al lado (*bd*) del cuadrilátero que se levanta en el punto correspondiente, se trazan dos arcos que se corten. Se hace luego lo mismo con la otra diagonal (*bc*) y el lado (*ac*) del cuadrilátero que se eleva en el extremo: y los puntos (B y D) de intersección de los arcos se unen entre sí, y cada uno de ellos con el extremo (A y B) correspondiente de la recta.

7. *Dado un ángulo* (*c*, fig. 19) *y sus dos lados* (*a* y *b*) *construir un paralelogramo.*

Fig. 19.

Sobre el extremo (A) de una recta (AB) se construye un ángulo (CAB) igual al dado (*c*), y en los lados de dicho ángulo se toman partes (AD y AE) iguales respectivamente á cada uno (*a* y *b*) de los lados que se designan. Haciendo luego centro en los extremos (E y D) de las partes que se han tomado, con radios (AD y AE) respectivamente iguales á las rectas dadas, se trazan dos arcos que se corten en un punto (F), el cual se une á los extremos (E y D) de las partes tomadas en cada una de las rectas que constituyen el ángulo.

Observación. Del mismo modo se construye un *rectángulo*, siempre que se den dos lados adyacentes; un *rombo* si se da un lado y un ángulo, y un *cuadrado*, dando solamente un lado.

LECCIÓN VI.

Polígonos en general.

1. *Construir un polígono regular de cualquier número de lados.*

Trazada una circunferencia, se divide ésta en tantos arcos iguales como lados se pidan para el polígono, y se unen por medio de cuerdas los dos extremos de cada arco.

2. *Construir sobre una recta dada un polígono regular de cualquier número de lados.*

Sea, por ejemplo, un octógono. Sobre cada uno de los extremos de la recta dada, se construye con el transportador ó semicírculo, un ángulo de valor que corresponda al polígono por su número de lados. En el octógono, este valor es 45°. Se da luego á los lados de estos ángulos una longitud igual á la de la recta dada; en cada uno de los extremos de estos lados se construye otro ángulo de igual valor, y se da á las nuevas rectas la longitud de la dada, continuando así hasta cerrar el polígono.

3. *Construir un polígono (abcde*, fig. 20) *igual á otro dado* (ABCDE).

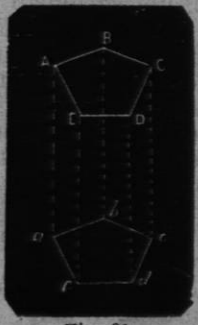


Fig. 20.

Desde cada uno de los vértices (A, B, C, D y E) del polígono dado, se trazan rectas paralelas (A*a*, B*b*, C*c*,

D*d* y E*e*), tomando sobre ellas distancias iguales (A*a*=B*b*=C*c*=D*d*=E*e*), y los extremos (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) de estas distancias marcarán los vértices de un polígono igual al dado.

También se puede resolver este problema dividiendo el polígono dado en triángulos, por medio de diagonales trazadas desde uno de los vértices, y construyendo una serie de triángulos iguales á los del polígono y dispuestos del mismo modo.

4. *Inscribir una circunferencia en un polígono regular.*

Se traza uno de los radios rectos del polígono, y con él, sirviendo de centro el mismo polígono, se traza una circunferencia.

5. *Circunscribir una circunferencia á un polígono.*

Haciendo centro en el del polígono, con un radio igual al oblicuo de éste, se traza una circunferencia.

LECCIÓN VII.

Elipse, óvalo huevo y espiral.

1. *Construir una elipse* (fig. 21).

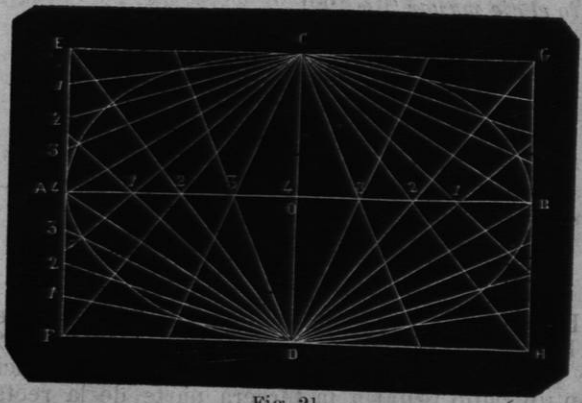


Fig. 21.

Sobre dos ejes arbitrarios (AB y CD), cortados per-

pendicularmente por su centro (O), ó sobre dos ejes dados, dispuestos del mismo modo, se construye un rectángulo (EGHF). Cada una de las mitades (AO y OB) del eje mayor se divide en un número cualquiera de partes iguales, cuatro por ejemplo, y cada una de las mitades (EA y AF, GB y BH) de los lados menores del rectángulo, se divide también en el mismo número de partes iguales. Partiendo luego desde cada uno de los extremos (C y D) del eje menor, se trazan hacia un lado y otro rectas que pasen por los puntos de división del eje mayor, y concluídos éstos, otras que terminen en los puntos de división de la mitad del rectángulo correspondiente á cada punto y al lado hacia donde se van trazando las rectas. Hecho esto, se hace pasar una curva por los puntos de contacto correspondientes de las rectas, y se tendrá la elipse.

También se puede trazar esta figura fijando en los focos los extremos de un hilo cuya longitud sea igual al eje mayor, y señalando con un lápiz los diferentes puntos que corresponden al hilo tirante, los cuales se unen luego por medio de una curva, que será la elipse.

2. *Construir un óvalo de círculos iguales secantes, dado el eje mayor* (fig. 22).

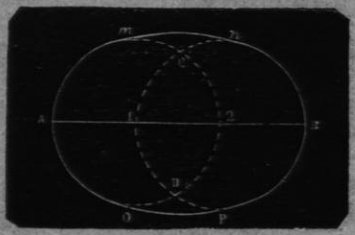


Fig. 22.

Divídase la recta dada (AB) en tres partes iguales (A1, 12 y 2B), y desde cada uno de los puntos (1 y 2) de división marcados, trácese una circunferencia con un radio igual á la tercera parte de la recta. Luego, desde los puntos (C y D) de contacto de las circunferencias, trácense arcos (*mn* y *op*) que unan

las circunferencias y se tendrá el óvalo (*Amn Bpo*).

3. *Construir un óvalo dados los dos ejes* (AB, CD fig. 23).

Fig. 23.

Se trazan perpendicularmente y cortándose en dos partes las dos rectas (AB y CD), y sobre el semieje mayor AO se construye un triángulo equilátero AEO. Se toma en la línea EO una parte OF igual al semieje menor. y desde el extremo C de éste se traza una recta CG, que llegue hasta la línea AE, pasando por F. Tómese la distancia AG, y aplíquese desde los extremos A y B del eje mayor sobre éste, marcando los puntos correspondientes H é Y. Desde el punto G trácese una recta GJ, que pase por el punto H y encuentre al eje menor ó á su prolongación; tómese desde O la parte OL igual á OJ, y desde los puntos L y J trácense las rectas indefinidas JM y LP que pasen por el punto Y y la LN que pase por H, con lo cual quedarán determinados los arcos GCQ y RDS, que se han de trazar respectivamente desde J y L, y los arcos GAR y QBS, cuyos centros son H é Y.

4. *Sobre una recta dada* (AB. fig. 24), *construir la línea llamada huevo.*

Divídase la recta dada (AC) en tres partes iguales (AO, OC y CB), y haciendo centro en el primer punto de división (O), trácese una circunferencia con un radio igual á la tercera parte de la recta. La otra parte (CB) que queda fuera de la circunferencia di-

vídase en dos partes iguales, y por su centro (D) trácese otra circunferencia tangente á la primera. Hágase pasar por el centro (O) de esta primera cir-

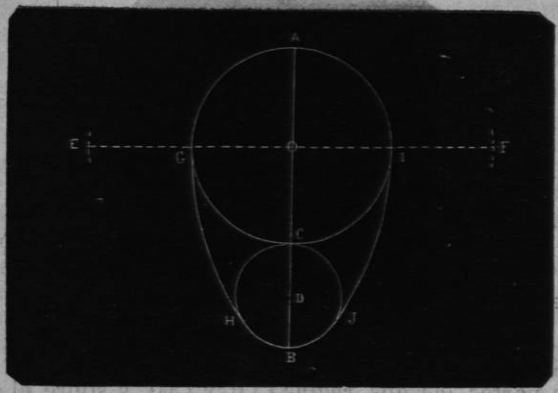


Fig. 24.

cunferencia una recta (EF) perpendicular á la dada (AB), y desde dicho centro (O) tómese á una y otra parte de la recta porciones (OE y OF) iguales al diámetro de la misma circunferencia, y los extremos de los arcos IJ y GG, que acabarán de cerrar el óvalo.

5. *Trazar una línea espiral* (fig. 25).

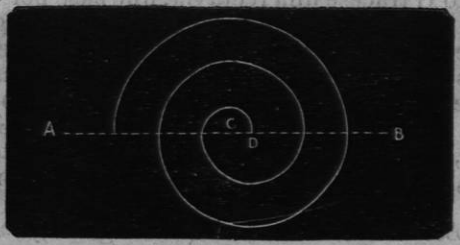


Fig. 25.

Se traza una recta auxiliar indefinida (AB), y haciendo centro en uno de sus puntos (C) se traza una semicircunferencia. Se hace luego centro en el punto (D) en que se empezó la espiral, y se traza otra

semicircunferencia unida á la primera, y así se continúa, haciendo centro alternativamente en ambos puntos (C y D).

LECCIÓN VIII.

Construcción de figuras equivalentes á otras.

1. *Dividir una recta* (AB, fig. 26) *en media y extrema razón.*

Levantando en (B), uno de los extremos de la recta, una perpendicular (BO) igual á su mitad, tomando ésta por radio y trazando una circunferencia, se une luego el extremo (A) de la recta con el centro (O), y se toma en la recta dada una parte (AC) igual á la distancia (AD) que hay desde dicho extremo á la circunferencia, con lo cual resultará

$$AB : AC : : AC : CB.$$

Observación. El mismo procedimiento se emplea para hallar una media proporcional entre dos rectas, para lo cual se unen las dos como si fueran una sola recta.

2. *Reducir un cuadrilátero á triángulo equivalente* (fig. 27).

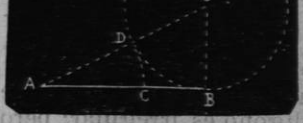


Fig. 26.

Fig. 27.

Sea el cuadrilátero ABDC. Se prolonga uno cualquiera de sus lados (CD), se traza la diagonal BC, se une el vértice A por medio de una recta AE, paralela á la diagonal BC, con la prolongación de la recta CD, y se tira la diagonal BE, con lo cual se tendrá el triángulo EDB, equivalente al cuadrilátero dado.

3. *Reducir un pentágono á cuadrilátero equivalente* (fig. 28).

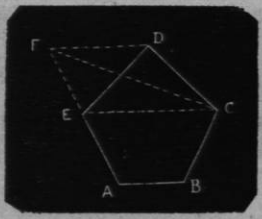


Fig. 28.

Sea el pentágono ABCDE. Se tira la diagonal EC, se prolonga el lado AE hasta encontrar la paralela FD á la diagonal, y se traza otra diagonal FC, con lo que se tendrá el cuadrilátero ABCF, equivalente al pentágono dado.

Observación. Valiéndose de una construcción análoga, se puede reducir todo polígono á otro equivalente que tenga un lado menos.

4. *Reducir un círculo, ó construir un triángulo equivalente próximamente á un círculo.*

Se rectifica la circunferencia, cuya mitad será la base del triángulo, y la altura de éste el diámetro del círculo.

5. *Cuadrar un triángulo, ó hallar un cuadrado equivalente á un triángulo.*

Hállese una media proporcional entre la base del triángulo y la mitad de su altura, y constrúyase sobre ella un cuadrado.

6. *Cuadrar un polígono cualquiera.*

Se reduce el polígono á triángulo, y después se cuadra éste, cuando el polígono es irregular; pero si es regular, se halla una media proporcional entre la apotema y la mitad del perímetro, y esa media proporcional será el lado del cuadrado equivalente.

7. *Cuadrar un círculo.*

Se rectifica la circunferencia, se halla una media proporcional entre su mitad y el radio, y ésta será el lado del cuadrado equivalente á la circunferencia.

Problemas numéricos.

1. ¿Qué longitud compondrán tres líneas de 8,45 metros, 7,7 y 8,12 de longitud respectiva?

$$8{,}45 + 7{,}7 + 8{,}12 = 24{,}27 \text{ metros.}$$

2. ¿Qué diferencia habrá entre dos líneas que respectivamente tienen 84,5 metros y 67,495?

$$84{,}5 - 67{,}495 = 17{,}005.$$

3. ¿Cuál será la magnitud de un ángulo compuesto de tres que cuentan respectivamente 8° 5′ el uno, 15° 35′ el otro, y 4° 25′ el tercero?

$$8^\circ\,5' + 15^\circ\,35' + 4^\circ\,25' = 28^\circ\,5'.$$

4. Si se divide en seis partes iguales un ángulo de 130°, ¿qué magnitud tendrá cada parte?

$$\frac{130^\circ}{6} = 21^\circ,40'.$$

5. ¿Cuál será la magnitud del arco subtendido por el lado de un exágono regular inscripto?

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

6. ¿De qué magnitud serán los arcos en que hay que dividir la circunferencia para inscribir en ella un polígono regular de quince lados?

$$\frac{350^\circ}{15} = 24^\circ.$$

7. ¿De qué magnitud serán los arcos en que hay que dividir la circunferencia para inscribir en ella un polígono regular de siete lados?

$$\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ,25',42{,}85''\ldots$$

8. ¿Qué valor tendrá cada uno de los ángulos de un pentágono regular?

$$\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = \frac{540}{5} = 108^\circ.$$

9. ¿Cuánto valdrá cada uno de los ángulos de un dodecágono regular?

$$\frac{180^\circ \times (12-2)}{12} = \frac{190^\circ \times 10}{12} = \frac{1800}{12} = 150^\circ.$$

10. ¿Cuánto valdrá cada uno de los ángulos de un eptágono regular?

$$\frac{180^\circ \times (7-2)}{7} = \frac{180^\circ \times 5}{7} = \frac{900}{7} = 128^\circ,34',17'',8'''.$$

11. ¿Qué longitud tendrá una circunferencia cuyo diámetro mide 0,74 metros?

$$C = 0{,}74 \times 3{,}1415 = 2{,}32471 \text{ metros.}$$

12. ¿Qué longitud tendrá una circunferencia cuyo radio es de 8,5 metros de largo?

$$C = 2 \times 8{,}5 \times 3{,}1415 = 17 \times 3{,}1415 = 53{,}4055 \text{ metros.}$$

13. ¿Cuál será la longitud del diámetro y cuál la del radio de una circunferencia que tiene 98 metros?

$$D = \frac{98}{3{,}1415} = 31{,}19 \text{ metros.}$$

$$R = \frac{98}{2 \times 3{,}1415} = \frac{98}{6{,}283} = 15{,}59 \text{ metros.}$$

14. Siendo de 20 líneas el diámetro de un duro, ¿cuánto medirá su circunferencia?

$$C = 20 \times 3{,}1415 = 61{,}83 \text{ líneas.}$$

15. Teniendo de longitud el ecuador terrestre 40067,772 kilómetros, ¿cuál será la del radio y la del diámetro de la tierra?

$$R = \frac{40067{,}772}{2 \times 3{,}1415} = \frac{40067{,}772}{6{,}283} = 6377{,}172 \text{ kilómetros.}$$

$$D = \frac{40067{,}772}{3{,}1415} = 12754{,}344.$$

16. Distando dos pueblos situados en el ecuador 12° 2′, ¿cuántos kilómetros distarán?

Circ.ª del ecuador ó 40067,772 Km. $\frac{}{360^o} = 111,299$ kilómetros cada grado, y $\frac{111,299}{60 \text{ mins.}} = 1,855$ kilómetros el minuto: luego 12° y 2' tendrán $(112,299 \times 12^o) + (1,855 \times 2) = 1335,588 + 3,71 = 1339,298$ Km., que será la distancia de los dos pueblos.

17 ¿Qué área será la de un triángulo cuya base tiene 7 metros, y su altura 4,8?

$$\frac{7 \times 4,8}{2} = 16,8 \text{ metros cuadrados.}$$

18. ¿Qué área tendrá un trapecio siendo una de sus bases de 13 metros, otra de 9 y su altura de 6,74?

$$\frac{13+9}{2} \times 6,74 = \frac{22}{2} \times 6,74 = 11 \times 6,74 = 74,14 \text{ metros cuads.}$$

19. ¿Qué área tendrá un paralelogramo de 5 metros de base y 8 de altura?

$$5 \times 8 = 40 \text{ metros cuadrados.}$$

20. ¿Qué área tendrá un cuadrado de 7 metros de lado?

$$7 \times 7, \text{ ó bien } 7^2 = 49 \text{ metros cuadrados.}$$

21. ¿Cuál será el área de un polígono regular, cuyo perímetro tiene 824 metros y su apotema 75?

$$\frac{824 \times 75}{2} = 30.900 \text{ metros cuadrados.}$$

22. ¿Cuál será el área de un círculo de 12 metros de radio?

Circ.ª = 2 radios ó 24 metros $\times$ 3,1415 = 75,496 metros: luego

$$\frac{\text{Circ.ª ó } 75,496 \text{ M.} \times 24 \text{ M.}}{2} = \frac{1811,904}{2} = 905,952 \text{ metros cuadrados.}$$

23. ¿Qué área tendrá un círculo cuya circunferencia cuenta 24 metros?

$$\text{Radio} = \frac{\text{Circ.}^{a} \text{ ó } 24 \text{ M.}}{2 \times 3{,}1415} = \frac{24}{6.283} = 3{,}501 \text{ metros.}$$

luego $\frac{24 \times 3{,}501}{2} = 42{,}012$ metros cuadrados.

24. ¿Cuál será el radio y cuál el diámetro de una circunferencia de 50,264 metros cuadrados de área?

$$\text{Radio} = \sqrt{\frac{50{,}264}{3{,}1415}} = \sqrt{16} = 4 \text{ metros.}$$

$$\text{Diámetro} = 4 \times 2 = 8 \text{ metros.}$$

25. ¿Qué número de ladrillos de 12 decímetros cuadrados se necesitan para embaldosar una sala de 8 metros de largo y 6 de ancho?

$$\frac{8 \text{ M. ó bien } 80 \text{ dm.} \times 6 \text{ ms. ó sean } 60 \text{ dm.}}{12 \text{ dm.}} =$$

$$\frac{80 \times 60}{12} = \frac{4800}{12} = 400 \text{ baldosas.}$$

26. ¿Cuántos azulejos de 16 decímetros en cuadro se necesitan para cubrir una superficie triangular de 7,2 metros de base y 4 de altura?

$$\frac{\frac{1}{2} 72 \text{ dm.} \times 40 \text{ dm.}}{16} = \frac{36 \times 40}{16} = \frac{1440}{16} = 90 \text{ azulejos.}$$

27. ¿Cuántas planchas de cinc de 1,50 metros de lado se necesitan para cubrir un tejado en forma de trapecio, cuyo alero tiene 15 metros y su caballete 9, siendo 12,5 metros la distancia de uno á otro?

$$\frac{\frac{15 \times 9}{2} \times 12{,}5}{1{,}50} = \frac{12 \times 12{,}5}{1'50} = \frac{150}{1{,}50} = 100 \text{ planchas.}$$

GRADO TERCERO.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LECCIÓN PRIMERA.

De las superficies en general.

1. ¿Qué es Geometría del espacio?—2. ¿Qué es superficie plana y superficie curva?—3. ¿Cuándo será una recta perpendicular á un plano?—4. ¿Cuándo será oblicua?—5. ¿Cuándo será paralela?—6. ¿Cómo se mide la distancia de un punto á un plano?—7. Cuántos puntos determinan la posición de un plano?—8. ¿Qué propiedades tienen las rectas relativamente á los planos?—9. ¿A qué se llama proyección de un punto y de una línea sobre un plano?—10. ¿Qué posiciones relativas pueden tener los planos?—11. ¿Qué es ángulo diedro y cuál su ángulo plano correspondiente?—12. ¿Qué es ángulo triedro y poliedro?

1. Es *Geometría del espacio* la parte de esta ciencia que trata de las figuras que no tienen todos sus puntos en un mismo plano.

2. Las superficies pueden ser *planas* y *curvas*. Es superficie plana, ó simplemente *plano*, aquella á que se puede aplicar una recta en todos sentidos; y es superficie curva aquella á que no se puede aplicar una recta en todos sentidos. Si las superficies curvas se consideran por el lado de la curva entrante, se llaman *cóncavas*, y si por el lado saliente de la curva, se llaman *convexas*.

3. Es una recta (EM, fig. 1.ª) *perpendicular* á un plano (ABCD), cuando lo sea á todas las que pasan por su pie (M) en el plano.

4. Es una recta (FG) oblicua á un plano, cuando no sea perpendicular á dos ó más rectas situadas á su pie (G) en el plano.—La intersección (M ó G) de una línea con un plano es un punto.

5. Es una recta *paralela* á un plano, cuando no se puede encontrar con él por mucho que se les prolongue.

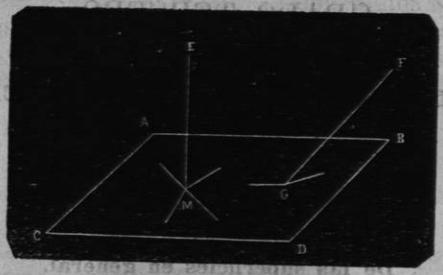


Fig. 1.ª

Cuando una recta es perpendicular, oblicua ó paralela á un plano, también el *plano* es *perpendicular*, *oblicuo* ó *paralelo* á la recta.

6. La distancia de un punto á un plano se mide por medio de la perpendicular bajada al plano desde el punto.

7. Para determinar la posición de un plano cualquiera en el espacio, bastan tres puntos que no estén en línea recta.

8. Las principales propiedades de las rectas, relativamente á los planos, son las siguientes:

1.ª Si una recta tiene dos puntos en un plano, estará en el plano toda ella.

2.ª Si una recta es perpendicular á otras dos que pasan por su pie en un plano, es también perpendicular á cuantas rectas se tracen en el mismo plano por su pie.

3.ª Por un punto dado en un plano ó fuera de él, no se puede trazar á éste más que una perpendicular.

4.ª Si desde un punto fuera de un plano se bajan á éste una perpendicular y varias oblicuas, la perpendicular será la más corta, las oblicuas que se aparten igualmente del pie de la perpendicular serán iguales, y la que más se aparte de éste será la mayor.

5.ª Dos ó más rectas perpendiculares á un plano son paralelas.

6.ª Toda recta paralela á otra trazada en un plano es paralela á éste.

7.ª Las paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales.

9. Se llama *proyección de un punto* (A. fig. 2.ª)

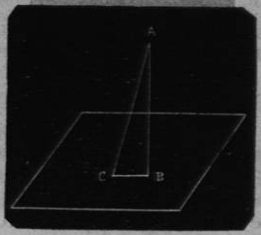


Fig. 2.ª

sobre un plano, el pie de la perpendicular (B) bajada desde dicho punto; y *proyección de la línea* (AC) sobre un plano, la línea (CB) que forma las proyecciones de todos sus puntos sobre el plano.

10. Los planos, relativamente considerados, pueden ser perpendiculares, oblicuos y paralelos. Un plano (FEAC, ó bien HGIJ, fig. 3.ª) es *perpendicular*

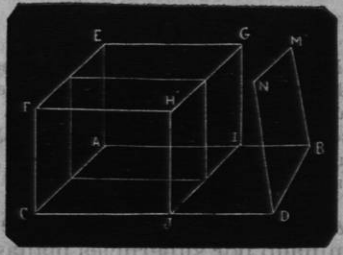


Fig. 3.ª

á otro (ABCD) cuando le encuentra sin inclinarse á un lado más que á otro. Es *oblicuo* (MNDB), cuando encuentra á otro plano (ABDC) inclinándose con desigualdad. Y es un plano (EGHF) paralelo á otro (ABDC). cuando no le puede encontrar por más que se prolonguen ambos.—La intersección (IJ) de dos planos (ABDC y GHJI) es una línea.

11. Entiéndese por ángulo *diedro* (fig. 4.ª), el espacio indefinido que comprenden dos planos que se cortan. Los planos que le forman se llaman *caras*, y su intersección (BC) *arista*. El ángulo plano (ABD)

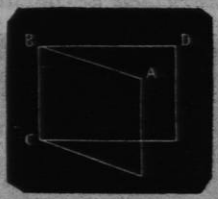


Fig. 4.ª

correspondiente á un diedro, es el formado por dos rectas (AB y BD) trazadas en sus caras y perpendiculares á sus aristas en un mismo punto.

12. Al ángulo formado por tres planos que concurren en un punto, se le llama *triedro*, y es *poliedro* el que está formado por cuatro ó más planos.

LECCIÓN II.

De los poliedros.

1. ¿Qué es poliedro?—2. ¿Qué nombre reciben sus elementos constitutivos?—3. ¿Qué es diagonal de un poliedro?—4. ¿Qué nombres reciben los poliedros por su número de caras?—5. ¿Cuál es la base y la altura de un poliedro?—6. ¿Qué se entiende por área de un poliedro?—7. ¿Qué por volumen?—8. ¿Cuál es la unidad de volumen?—9. ¿Qué es poliedro regular é irregular?—10. ¿Cómo se clasifican los poliedros?

1. Es *cuerpo poliedro*, ó simplemente *poliedro*, el espacio terminado por superficies planas.

2. A los planos que constituyen un poliedro se les llama *caras;* á los ángulos de estas caras y á los diedros y poliedros que forman entre sí, *ángulos;* á los límites comunes de dos caras, *aristas;* y al punto común de los vértices de los ángulos planos, *vértices* del poliedro.

3. Se llama *diagonal* del poliedro á toda recta que une dos vértices no contiguos á una misma cara.

4. Los poliedros por el número de caras, se dividen en *tetraedros* ó de cuatro caras *pentaedros*, de cinco *exaedros*, de seis, etc.

5. Se llama *base* de un poliedro á la cara sobre que insiste, y *altura* á la perpendicular bajada á la base ó á su prolongación, desde el vértice ó desde uno de los vértices más distantes de ella.

6. Se entiende por *área* de un poliedro la suma de las áreas de todas sus caras.

7. Se entiende por *volumen* de un poliedro la medida de su magnitud.

8. La unidad de volumen es un poliedro (fig. 8.ª), llamado *cubo*, que es el más regular de todos, así como sucede con el cuadrado respecto á los polígonos. Está compuesto de seis caras cuadradas é iguales, siendo iguales también, por consecuencia, todas sus aristas, que pueden tener de longitud un centímetro, un decímetro, un metro ú otra cualquier unidad lineal.

9. Es *poliedro regular* aquel cuyas caras son polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos diedros son también iguales. Al poliedro que no tiene estas condiciones se le llama *irregular*.

10. Los poliedros se clasifican ó dividen en *prismas*, *pirámides* y *cuerpos regulares* é *irregulares*.

LECCIÓN III.

Del prisma.

1. ¿Qué es prisma?.—2. ¿Cómo se clasifican los prismas atendiendo á sus bases?—3. ¿Cómo se clasifican atendiendo á la dirección de sus aristas respecto á las bases?—4. ¿Cuándo se dice que un prisma es regular?—5. ¿Qué es paralelep pedo?—6. ¿Qué es paralelepípedo rectangular?—7. ¿Qué es cubo?—8. ¿Cómo se halla el área de un prisma recto?—9. ¿Y el área de un prisma oblicuo?—10. ¿Cómo se halla el volumen de un prisma?

1. Es *prisma* un poliedro (fig. 5.ª) terminado por su longitud en dos caras (ABCDE y FGHIJ) iguales y paralelas, y lateralmente por paralelogramos (EDIJ, EAFJ, etc.).—A las dos caras iguales que terminan la longitud del prisma, se les llama *bases*.

2. Los prismas se clasifican, atendiendo á sus bases, en *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., según sean éstas triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Hay también tantas especies de

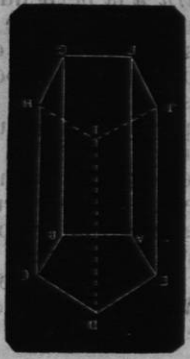


Fig. 5.ª

prismas cuadrangulares cuantas son las especies de cuadriláteros, y así se llama prisma *trapezoidal* al que tiene por bases trapezoides, *trapecial* al que tiene trapecios, *romboidal* al que tiene romboides, y *rombal* al que tiene rombos.

3. Atendiendo á la dirección de las aristas, respecto á las bases, se clasifican los prismas en *rectos* y *oblicuos*. Es *prisma recto* el que tiene las aristas perpendiculares á las bases, y *oblicuo* el que las tiene oblicuas.—Se llama *sección recta* de un prisma oblicuo la sección perpendicular á las aristas laterales.

4. Un prisma es *regular* cuando es recto y tiene por bases dos polígonos regulares.

5. Es *paralelepípedo* el prisma cuyas bases son paralelogramos.

6. Y *paralelepípedo rectangular* el que tiene por bases rectángulos.

7. Se llama *cubo* á un paralelepípedo cuyas bases y lados son cuadrados.

8. El *área* de un prisma recto es igual al producto del perímetro de una de sus bases por la altura del prisma, sumado con las áreas de las bases.

9. El *área* de un prisma oblicuo es igual al producto de una sección recta por la altura de una de sus aristas, sumado con las áreas de las bases.

10. El *volumen* de todo prisma es igual al producto de su base por su altura; esto es, al producto del área de su base por la altura del prisma.

LECCIÓN IV.

De la pirámide.

1. ¿Qué es pirámide?—2. ¿Cómo se clasifican las pirámides por sus base?—3. ¿Qué es apotema?—4. ¿Cuándo es regular una pirámide?—5. ¿Qué es pirámide truncada?—6. ¿Cómo se halla el área de una pirámide?—7. ¿Y la de una pirámide truncada?—8. ¿Cómo se halla el volumen de una pirámide?—9. ¿Y el de una pirámide truncada?

1. Es *pirámide* un poliedro cuya base (ABCDE, fig. 6.ª) es un polígono cualquiera, y sus caras late-

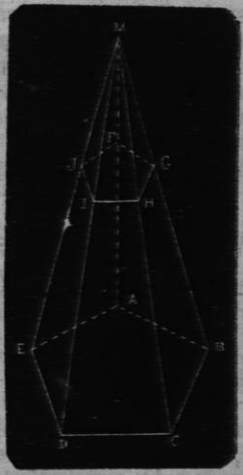


Fig. 6.ª

rales triángulos; cuyos vértices se reunen en un punto común (M) llamado *cúspide*.

2. Las pirámides se clasifican ó dividen en *trian-*

gulares, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., según tengan por base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

3. Llámase *apotema* en la pirámide regular, á la altura de cualquiera de sus caras laterales.

4. Es *regular* una pirámide cuando tiene por base un polígono regular, y cuando el pie de la perpendicular que marca su altura coincide con el centro de la base.

5. Se llama *pirámide truncada* ó *tronco de pirámide*, á la parte de ella comprendida entre la base y un plano (FGHIJ) paralelo á ésta.

6. El *área* de una pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base, sumado con el área de ésta.

7. El *área* de una pirámide truncada es igual al producto de su apotema por la semisuma de los perímetros de las bases, sumado con las áreas de éstas.

8. El *volumen* de una pirámide es igual al tercio del producto de su base por su altura.

9. El *volumen* de un tronco de pirámide es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y la media proporcional entre ellas.

LECCIÓN V.

De los poliedros regulares.

1. ¿Cuáles son los poliedros regulares?—2. ¿Qué es tetraedro regular?—3. ¿Qué es exaedro regular?—4. ¿Qué es octaedro regular?—5. ¿Qué es dodecaedro regular?—6. ¿Qué es icosaedro regular?—7. ¿Cómo se halla el área de un poliedro cualquiera?—8. ¿Y el volumen?—9. ¿Cuándo son los poliedros iguales?—10. ¿Y semejantes?

1. Los poliedros regulares son cinco: *tetraedro*, *exaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* é *icosaedro*.

2. Es *tetraedro regular*, un poliedro (fig. 7.ª) que tiene por caras cuatro triángulos equiláteros iguales, reuniéndose tres en cada vértice. Tiene 6 aristas y 4 vértices.

3. *Exaedro regular*, un poliedro termin ado por

seis cuadrados (fig. 8.ª). Tiene 12 aristas y 8 vértices.

4. *Octaedro regular*, un poliedro (fig. 9.ª) que tiene por caras ocho triángulos equiláteros iguales, reuniéndose cuatro en cada vértice. Tiene 12 aristas y 6 vértices.

Fig. 7.ª

Fig. 8.ª

Fig. 9.ª

5. *Dodecaedro regular*, un poliedro (fig. 10) que tiene por caras doce pentágonos regulares iguales, reuniéndose tres en cada vértice. Tiene 30 aristas y 20 vértices.

6. *Icosaedro regular*, un poliedro (fig. 11) que

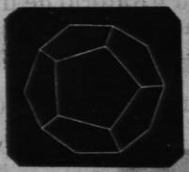


Fig. 10.

Fig. 11.

tiene por caras veinte triángulos equiláteros iguales, reuniéndose cinco en cada vértice. Tiene 30 aristas y 12 vértices.

7. Para hallar el *área* de un poliedro regular cualquiera, se multiplica el área de una cara por el número de éstas, y para hallar la de uno irregular, se suman las áreas de todas sus caras.

8. Para hallar el *volumen* de un poliedro regular cualquiera, se multiplica su área por el tercio de la apotema; y si es irregular, se divide en poliedros conocidos, y se halla el volumen de cada uno, sumando luego el de todos.

9. Dos ó más poliedros son *iguales* cuando tie-

nen respectiva y ordenadamente iguales las aristas y caras, así como también los ángulos diedros y poliedros.

10. Dos ó más poliedros son *semejantes*, cuando tienen respectiva y ordenadamente semejantes las caras, é iguales los ángulos diedros y poliedros.

LECCIÓN VI.

Del cilindro y del cono.

1. ¿Qué son cuerpos redondos y cuáles son?—2. ¿Qué es cilindro?—3. ¿A qué se llama en el cilindro eje, bases y altura?—4. ¿Cómo se halla el área del cilindro?—5. ¿Y el volumen?—6. ¿Qué es cono?—7. ¿A qué se llama en el cono cúspide, eje, base y altura?—8. ¿A qué se llama cono truncado?—9. ¿Cómo se halla el área del cono?—10. ¿Y el volumen?

1. Son *cuerpos redondos* aquellos cuya superficie no tiene esquinas ó ángulos, y que se consideran engendrados por el movimiento giratorio de una figura plana sobre uno de sus lados, como si éste fuera un eje.—Los cuerpos redondos son tres: *cilindro*, *cono* y *esfera*.

2. Es *cilindro* (fig. 12), un cuerpo redondo en su

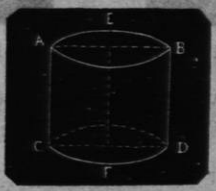


Fig. 12.

superficie lateral, que tiene por bases dos círculos iguales y paralelos. Se le considera como engendrado por el movimiento giratorio de un rectángulo (EBDF) sobre uno de sus lados (EF) como eje.

3. Se llama *eje* del cilindro á la línea (EF) sobre que se considera ha girado un rectángulo (EBDF) para formar el cilindro. Son *bases* del cilindro los

dos círculos iguales y paralelos. Es *altura* la distancia que hay entre sus dos bases.

4. El *área* del cilindro es igual al producto de la circunferencia de una base por la altura, sumado con las áreas de las dos bases.

5. El *volumen* de un cilindro es igual al producto del área de una de sus bases por la altura.

6. Es *cono* (fig. 13) un cuerpo redondo en la superficie lateral, que tiene un círculo por base y termina en un punto por la parte opuesta á ella. Se considera como engendrado por el movimiento giratorio de un triángulo rectángulo (AHC) sobre uno de sus catetos (CH) como eje.

Fig. 13.

7. Se llama *cúspide* ó *vértice* del cono, al punto (C) opuesto á la base: *eje* al cateto (CH) sobre que ha girado el triángulo engendrador del cono: *base* al círculo sobre que insiste el cono; y *altura* á la distancia (CH) de la cúspide á la base.

8. Se llama *cono truncado* (DE) á la parte de cono comprendida entre la base y un plano secante paralelo á ella.

9. El *área* del cono es igual al producto de la circunferencia de su base por la mitad de su lado, sumado con el área del círculo que le sirve de base.

10. El *volumen* del cono es igual al área del círculo que le sirve de base, multiplicado por la tercera parte de la altura.

LECCIÓN VII.

De la esfera.

1. ¿Qué es esfera?—2. ¿A qué se llama en la esfera centro, radio, diámetro, eje y polos?—3. ¿Cuántas clases de círculos se consideran en la esfera?—4. ¿Qué es círculo máximo?—5. ¿Qué es círculo mínimo?—6. ¿Qué es zona esférica?—7. ¿Cómo se halla el área de la esfera?—8. ¿Y el volumen?

1. Es *esfera* (fig. 14) un cuerpo redondo en todos los puntos de su superficie, que equidistan de otro

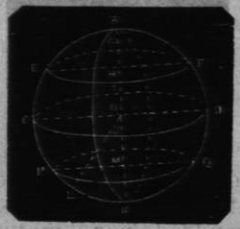


Fig. 14.

(O) llamado centro. Se considera como engendrada por un semicírculo (AFDQB) girando sobre su diámetro (AB) como sobre un eje.

2. Se llama *centro* de la esfera á un punto (O) equidistante de todos los de su superficie; *radio*, á toda recta (OL) que une el centro con un punto de la superficie de la esfera; *diámetro*, á la recta (AB) que une dos puntos de la superficie esférica, pasando por el centro; *eje*, á la misma recta llamada diámetro, cuando se considera á la esfera en movimiento al rededor de ella; y *polos*, á los puntos (A y B) extremos del eje.

3. En la esfera se consideran dos clases de círculos: *máximos* y *mínimos*.

4. Es *círculo máximo* (CJDI) el que pasando por el centro divide á la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios*.

5. Es *círculo mínimo* (EGFH) el que no pasando

por el centro divide á la esfera en dos partes desiguales.

6. Es *zona esférica* (EHFG...CJDI) la faja ó porción de superficie de la esfera comprendida entre dos círculos.

7. El *área* de la esfera es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo por su diámetro.

8. El *volumen* de la esfera es igual al producto de su superficie por el tercio del radio.

DIBUJO GEOMÉTRICO Á PULSO.

EJERCICIOS.

1. Dibujar un prisma triangular (1).
2. Dibujar un prisma cuadrangular.
3. Dibujar un prisma exagonal.
4. Dibujar un prisma exagonal oblicuo.
5. Dibujar un prisma exagonal oblicuo, marcando en él una sección recta.
6. Dibujar un paralelepípedo rectangular.
7. Dibujar un cubo.
8. Dibujar una pirámide triangular (2).
9. Dibujar una pirámide cuadrangular.
10. Dibujar una pirámide pentagonal, marcando por medio de una sección ó plano el tronco de la misma.
11. Dibujar una pirámide exagonal.
12. Dibujar un tronco de pirámide de cualquier número de lados.
13. Dibujar varios tetraedros de distinto tamaño.
14. Dibujar varios exaedros de distinto tamaño.
15. Dibujar varios octaedros de distinto tamaño.
16. Dibujar varios dodecaedros de distinto tamaño (3).

(1) Para dibujar á pulso un prisma, se traza primero una de las bases, y desde los varios ángulos de ésta se trazan rectas paralelas entre sí, que se unen luego por el otro extremo á medio de rectas paralelas á las de la base trazada primeramente. Las líneas que pasan por detrás de los planos anteriores, se marcan con puntos, así en esta figura como en todas las otras.

(2) Para el dibujo de las pirámides se traza primero la base: desde el centro de ésta se levanta una perpendicular de la altura que la pirámide haya de tener, y se une el extremo de dicha perpendicular con los vértices del polígono de la base por medio de rectas.

(3) Para dibujar el dodecaedro se traza primeramente el pentágono central, y después, sobre cada uno de sus lados, los otros cinco pentágonos iguales entre sí.

17. Dibujar varios icosaedros de distinto tamaño (1).

18. Dibujar varios cilindros de distinto tamaño, señalando el eje.

19. Dibujar varios conos de distinto tamaño, señalando el eje.

20. Dibujar varios troncos de cono.

21. Dibujar varias esferas, señalando el eje

22. Dibujar esferas, marcando en cada una de ellas un círculo máximo.

23. Dibujar esferas, marcando en cada una de ellas dos círculos máximos que se corten perpendicularmente (2).

24. Dibujar esferas, marcando en cada una un círculo máximo y otro mínimo paralelos.

25. Dibujar esferas, marcando en cada una un círculo máximo y otro mínimo, que se corten perpendicularmente.

(1) Se traza un triángulo equilátero (*abc*, fig. 11), divídense sus lados en dos partes iguales, cuyos puntos de división se unen por medio de rectas, y se construye luego sobre cada uno de los lados (*ab*, *bc*, *ca*) del triángulo primitivo un triángulo, cada uno de los cuales se divide en dos partes iguales por medio de rectas que unan el vértice de cada uno con los puntos de división de los lados del primitivo.

(2) Para el dibujo de los círculos máximos se traza primeramente un diámetro auxiliar, y para el de los mínimos una cuerda.

PROBLEMAS NUMÉRICOS.

28. Hallar el área lateral de un prisma recto que tiene 2,5 metros de perímetro en su base y 95 centímetros de altura.

$$2{,}5 \times 0{,}95 = 2{,}375 \text{ metros cuadrados.}$$

29. Hallar el área total de un prisma recto regular exagonal, de 1,25 metros de altura, y cuyas bases tienen 78 centímetros de lado y 72 la apotema.

ÁREA DE LAS BASES:

$$\frac{0{,}78 \times 6}{2} \times 0{,}72 \times 2 = 2{,}34 \times 0{,}72 \times 2 = 3{,}3696 \text{ met. cuadr.}$$

ÁREA LATERAL: $4{,}68 \times 1{,}25 = 5{,}85$ metros cuadrados.

TOTAL: $3{,}3696 + 5{,}85 = 9{,}2196$ metros cuadrados.

30. Hallar cuántas piezas de papel de 30 metros de largo y 1,50 de ancho se necesitan para empapelar las paredes de una habitación de figura octogonal, que mide 3 metros de altura, siendo el ancho de cada uno de sus ocho frentes 4,70 metros.

ÁREA DE LA HABITACIÓN: $4{,}70 \times 8 \times 3 = 112{,}8$ met. cuadr.

ÁREA DE CADA PIEZA DE PAPEL: $30 \times 1{,}50 = 45$ met. cuadr.

PIEZAS DE PAPEL QUE SE NECESITAN: $\frac{112{,}8}{45} = 2{,}5$ piezas.

31. Hallar el área lateral de un prisma oblicuo, que tiene por sección recta un cuadrado de 25 centímetros de lado, y cada una de cuyas aristas laterales tiene 1,40 metros de longitud.

$$0{,}25 \times 4 \times 1{,}40 = 1{,}40 \text{ metros cuadrados.}$$

32. Hallar el área lateral de una pirámide que tiene 1,20 metros de perímetro en su base, y cuya apotema mide 82 centímetros.

$$\frac{1{,}20 \times 0{,}82}{2} = 0{,}492 \text{ metros cuadrados.}$$

33 Hallar el área total de una pirámide triangular, cuya base es un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado y 9 de altura, y cuya apotema mide 85 centímetros.

ÁREA DE LA BASE: $\frac{12 \times 9}{2} = 54$ centímetros cuadrados.

ÁREA LATERAL DE LA PIRÁMIDE:

$12 \times 3 \times \frac{85}{2} = 12 \times 3 \times 42{,}5 = 1530$ centímetros cuadrados.

ÁREA TOTAL: $54 + 1530 = 1584$ centímetros cuadrados.

34 Hallar el número de metros cuadrados de láminas de cinc que se necesitarán para cubrir un chapitel de una torre octogonal regular, cada una de cuyas caras tiene 2,50 metros de base y 6 de altura.

$$2{,}50 \times 8 \times \frac{6}{2} = 2{,}50 \times 8 \times 3 = 60 \text{ metros.}$$

35 Hallar el área lateral de una pirámide regular truncada, cuya base inferior tiene 2,4 metros de perímetro, la superior 1,70 y la apotema 3,25.

$$\frac{2{,}4 + 1{,}70}{2} \times 3{,}25 = 2{,}5 \times 3{,}25 = 8{,}125 \text{ metros cuadrados.}$$

36. Hallar el área lateral de un cilindro de 5 metros de altura, y cuya base tiene 2 metros de radio.

LA CIRC. DE LA BASE SERÁ: $3{,}1415 \times 2 \times 2 = 12{,}566$ m. cuad.

EL ÁREA LATERAL PEDIDA: $12{,}566 \times 5 = 62{,}83$ m. cuadr.

37. Hallar el área total de un cilindro que mide 6 metros en la circunferencia de sus bases y que tiene 8 de altura.

RADIO DE LAS CIRCUNFERENCIAS DE LAS BASES:

$$\frac{6}{2 \times 3{,}1415} = \frac{6}{6{,}283} = 0{,}95 \text{ metros.}$$

ÁREA DE LAS DOS BASES: $\frac{6 \times 0{,}94}{2} \times 2 = 6 \times 0{,}94 = 5{,}64$ m. cd.

ÁREA LATERAL DEL CILINDRO: $6 \times 8 = 48$ m. cuadr.

ÁREA TOTAL DEL CILINDRO: $5{,}64 + 48 = 53{,}64$ m. cuadr.

UNED

38. ¿Cuántos ladrillos de un decímetro cuadrado se necesitarán para cubrir el interior de un pozo de 1,40 metros de diámetro y 25 de altura?

CIRCUNFERENCIA DEL POZO: $3{,}1415 \times 1{,}40 = 4{,}3981$ metros.

ÁREA DEL POZO: $4{,}3981 \times 25 = 109{,}9525$ metros cuadrados.

LADRILLOS QUE SE NECESITAN: $109{,}9525 \times 100 = 10995{,}25$.

39. Hallar el área lateral de un cono cuya base tiene 3 metros de circunferencia y cuyo lado es de 2,50.

$$\frac{3 \times 2{,}50}{2} = 3{,}75 \text{ metros cuadrados.}$$

40. Hallar el área total de un cono que mide en la circunferencia de su base 20 centímetros, y cuyo lado es de 40.

RADIO DE LA BASE: $\frac{20}{2 \times 3{,}1415} = \frac{20}{6{,}283} = 3{,}18$ dm. cuadr.

ÁREA DE LA BASE: $\frac{20 \times 3{,}18}{2} = \frac{63{,}60}{2} = 31{,}80$ dm. cuadr.

ÁREA LATERAL DEL CONO: $\frac{20 \times 40}{2} = \frac{800}{2} = 400$ dm. cuadr.

ÁREA TOTAL:

$31{,}80 + 400 = 431{,}80$ dm. cuadr. $= 4{,}318$ metros cuadrados.

41. Hallar el número de metros cuadrados de hoja de lata que se necesitarán para forrar una tina, de forma cónica, que tiene 3 metros de lado y 4,6 en la circunferencia de su boca.

$$\frac{3 \times 4{,}6}{2} = 6{,}9 \text{ metros cuadrados.}$$

42. Hallar el área de una esfera de 2,3 metros de radio.

CÍRCULO MÁXIMO DE LA ESFERA: $3{,}1415 \times 2{,}3^2 = 16{,}619$.

ÁREA DE LA ESFERA: $16{,}619 \times 4 = 66{,}476$ metr. cuadrados.

43. Hallar el área de una esfera cuyo círculo máximo mide 25 metros.

DIÁMETRO DEL CÍRCULO MÁXIMO: $\frac{25}{3,1415} = 7,96$ metros.

ÁREA DE LA ESFERA: $25 \times 7,96 = 199$ metros cuadrados.

44. Teniendo de longitud el ecuador terrestre 40067,772 kilómetros, ¿cuál será el área de la tierra?

LONG. DEL DIÁMETRO TERRESTRE: $\frac{40067,772}{3,1415} = 12754,344$.

ÁREA DE LA TIERRA:

$40067,772 \times 12754,344 = 511038147,401568$ kilóm. cuadrados.

45. Hallar el volumen de un prisma cuya base tiene de área 2 metros cuadrados, y cuya altura es de 5 metros.

$2 \times 5 = 10$ metros cúbicos.

46. Hallar el volumen de un prisma triangular, en que el triángulo de su base tiene 3 metros de base y 2,50 de altura, siendo la del prisma 15 metros.

ÁREA DE LA BASE: $\frac{3 \times 2,50}{2} = 3,72$ metros cuadrados.

VOLUMEN DEL PRISMA: $3,72 \times 15 = 55,80$ metros cúbicos.

47. Hallar el número de metros cúbicos de agua que contendrá un estanque rectangular de 16 metros de largo, 5 de ancho y 3 de alto.

ÁREA DE LA BASE: $16 \times 5 = 80$ metros cuadrados.

VOLUMEN DEL ESTANQUE. $80 \times 3 = 240$ metros cúbicos,

que será el agua que contenga.

48. Hallar los decímetros cúbicos de aire que contendrá una sala de forma cúbica, que tiene tres metros de lado.

$3 \times 3 \times 3 = 27$ metros cúbicos $= 2700$ dm. cúbicos.

49. Hallar cuántas cajas de un decímetro cúbico

podrá contener un cajón de 2 metros de largo, 1,50 de ancho y 1 de alto.

VOLUMEN DEL CAJÓN:

$2 \times 1{,}50 \times 1 = 3$ metros cúbicos $= 300$ decímetros cúbicos,

que serán las cajas del tamaño dado que se podrán contener en el cajón.

50 **23**. Hallar el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de 75 centímetros, y que tiene 1,72 metros de altura.

ÁREA DE LA BASE:

$75 \times 75 = 5625$ cm. cuad. $= 0{,}5625$ metros cuadrados.

VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE:

$$\frac{0{,}5625 \times 1{,}72}{3} = 0{,}3225 \text{ metros cúbicos.}$$

51 **24**. Hallar el volumen de una pirámide cuya base es un exágono de 5,6 metros cuadrados, y que tiene 1,20 metros de altura.

$$\frac{5{,}6 \times 1{,}20}{3} = 2{,}24 \text{ metros cúbicos.}$$

52 **25**. Hallar el volumen de una columna cilíndrica de 7 metros de altura, cuya base tiene 8 metros de circunferencia.

ÁREA DE LA BASE: $8 \times \frac{8}{2 \times 3{,}1415} = 8 \times 1{,}27 = 10{,}16$ m. cuad.

VOLUMEN DEL CILINDRO: $10{,}16 \times 7 = 71{,}12$ metros cúbicos.

53 **26**. ¿Cuántos metros cúbicos de agua contendrá el pilón cilíndrico de una fuente, el cual tiene 3 metros de radio y 1,30 de altura?

BASE DEL PILÓN:

$$\frac{3{,}1415 \times 3 \times 2 \times 3}{2} = 3{,}1415 \times 3 \times 3 = 27{,}3735 \text{ metros cuadrados.}$$

VOLUMEN DEL PILÓN: $27{,}3735 \times 1{,}30 = 35{,}58555$ metr. cúb.,

que serán los que de agua contendrá el pilón.

54 **27**. Hallar el volumen de un cono cuya base tiene de área 6,45 metros, y cuya altura es de 4 metros.

$$\frac{6,45\times4}{3}=8,6 \text{ metros cúbicos.}$$

56 28. Hallar el volumen de una esfera de 25 centímetros de diámetro.

ÁREA DEL CÍRCULO MÁXIMO:

$$3,1415\times25\times\frac{25}{4}=3,1415\times25\times6,25=492,109375 \text{ cm. cuad.}$$

VOLUMEN DE LA ESFERA:

$$492,109375\times\frac{25}{3}=4099,271093 \text{ dc. cúb.}=4,099271093 \text{ m.cúb.}$$

57 29. Hallar el volumen de una esfera cuyo círculo máximo tiene 3 metros.

ÁREA DEL CÍRCULO MÁXIMO:

$$\frac{3}{3,1415}:4\times3=\frac{0,95}{4}\times3=0,69 \text{ metros cuadrados.}$$

VOLUMEN DE LA ESFERA: $0,69\times\frac{0,475}{3}=0,69\times0,1583=$

0,109227 metros cúbicos = 109 decímetros y 227 centímetros cúbicos.

58 30. Hallar el volumen de la tierra, sabiendo que su área es 511038147,401 kilómetros cuadrados, y que su radio tiene 6377,172 kilómetros.

$$511038147,401\times\frac{6377,172}{3}, \text{ ó sea } 2125,724=$$

1086326054845,843324 kilómetros cúbicos.

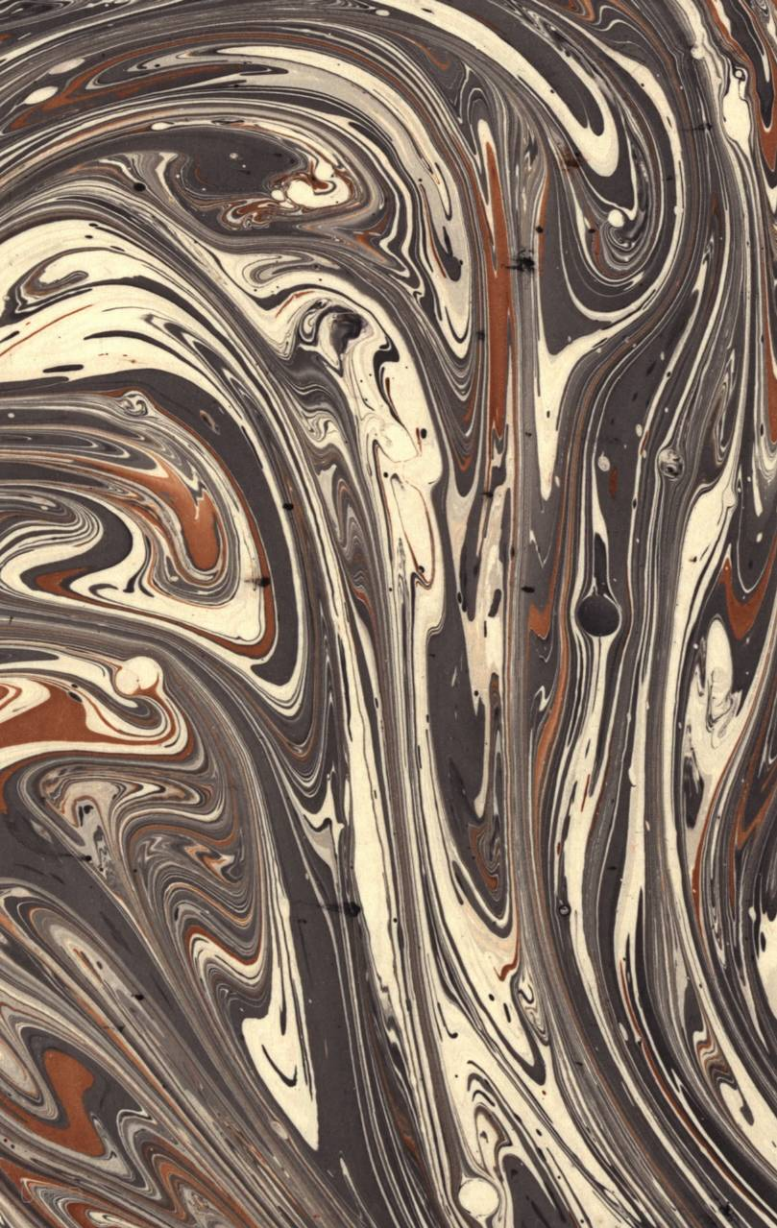
FIN.

UNED

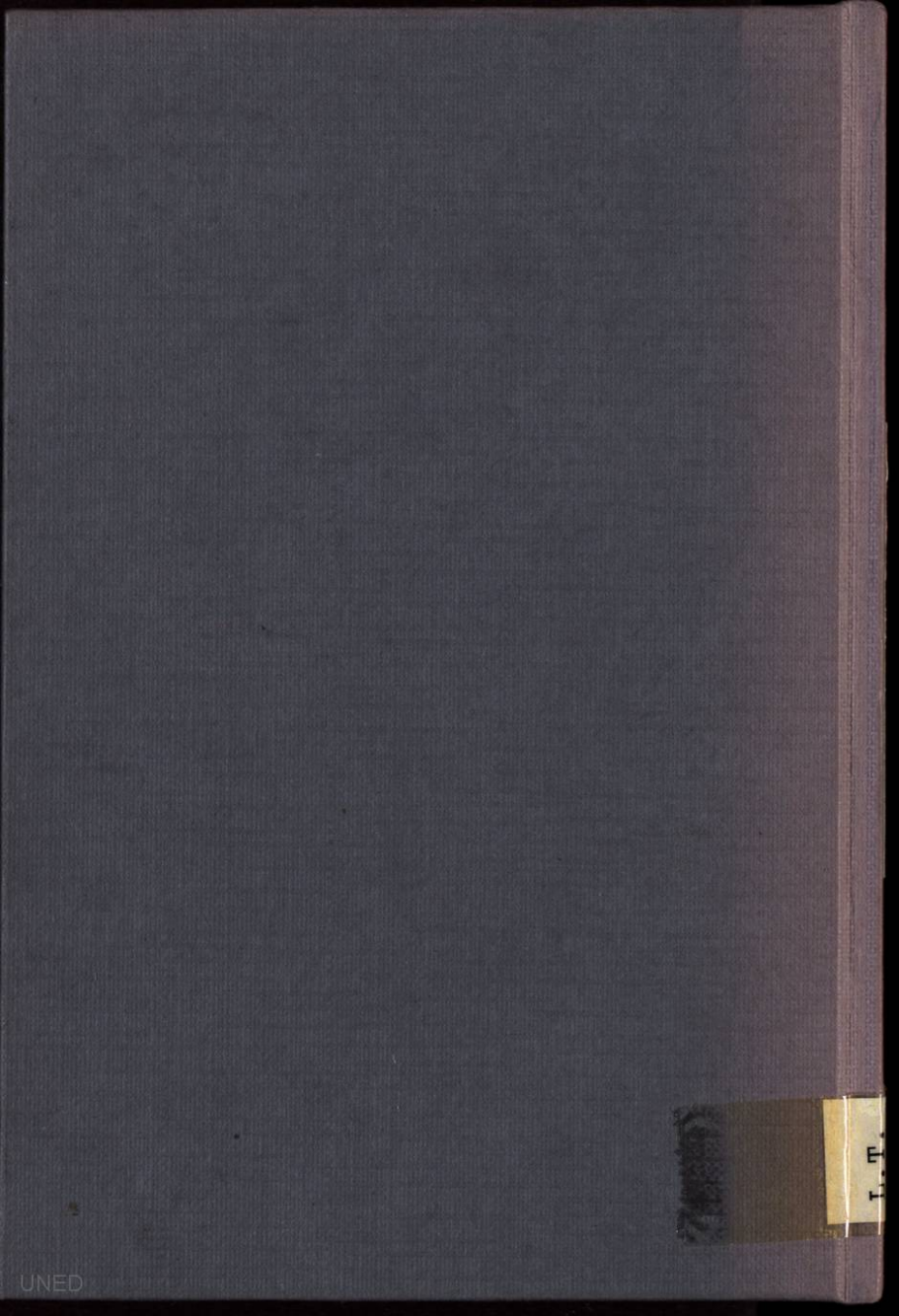
UNED

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA
BIBLIOTECA

UNED



10000518483BICE
L.T. 1799


UNED

1799

GEOMETRIA Y DIBUJO