TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero de Puentes y Caminos aprobado por la Escuela Central de Paris, Catedrático de Algebra superior y Geometría analítica en la Universidad de Madrid, etc.

CUARTA EDICION.

Madrid:
IMPRENTA DE ESPINOSA Y COMPAÑIA,
1852

Obras de Don Juan Cortázar.

Tratado de Aritmética. . . . . cuarta edicion, rústica. . 14 rs.

Tratado de Algebra elemental, cuarta edicion, idem. . . 15

Tratado de Geometría. . . . . cuarta edicion, idem. . . 17

Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica, y de topografía, segunda edicion. . . . . idem. . . 15

Tratado de Algebra superior. . . . . idem. . . 14

Memoria sobre el Cálculo del interés . . . . . idem. . . 4

Los cuatro primeros libros se venden tambien empastados á la holandesa, con 2 rs. de aumento.

Estas obras se venden en la librería de Sanchez, calle de Carretas.

INDICE.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LIBRO I.—PLANOS, ÁNGULOS DIEDROS Y ÁNGULOS POLIEDROS.

LIBRO II.—POLIEDROS.

LIBRO III.—LOS TRES CUERPOS REDONDOS.

LIBRO IV.—POLIEDROS SEMEJANTES.

LIBRO V.—ÁREAS Y VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

NOTA I.

NOTA II.

GEOMETRIA ELEMENTAL.

INTRODUCCION.

1. Todo cuerpo ú objeto material es largo, ancho y grueso; ó en otros términos, todo cuerpo tiene *longitud, latitud y profundidad*.

Estas tres propiedades de los cuerpos se llaman sus *dimensiones*. Luego todo cuerpo tiene tres dimensiones.

Los límites de los cuerpos se llaman *superficies*. Las superficies no tienen mas que dos dimensiones, longitud y latitud.

Los límites de las superficies se llaman *líneas*. Las líneas solo tienen una dimension, la longitud.

Los estremos de las líneas se llaman *puntos*. Los puntos no tienen dimension alguna.

2. La magnitud de un cuerpo, de una superficie ó de una línea se llama su *estension*. Por consiguiente hay tres clases de estension: estension de tres dimensiones ó de los cuerpos, estension de dos dimensiones ó de las superficies, y estension de una dimension ó de las líneas.

La estension limitada se llama *figura* (*a*).

3. Se dice que dos figuras son *equivalentes*, cuando tienen la misma medida (*b*) y diferente forma; y que son *iguales*, cuando tienen la misma medida y la misma forma, y que por tanto pueden coincidir.

(*a*) En la geometría se da tambien el nombre de *figura*, pero en otro sentido, á la reunion de líneas trazadas para la demostracion de un teorema ó resolucion de un problema.

(*b*) Se llama *medida ó valor numérico* de una cantidad la razon de la cantidad á otra de la misma naturaleza, que se toma por unidad.

La medida de una línea se llama *longitud* de la línea, la medida de una superficie se llama *área* de la superficie, y la medida del espacio que ocupa un cuerpo se llama *volúmen* del cuerpo.

4. La línea se divide en *recta, quebrada y curva.*

No es posible definir bien la línea recta; pero tampoco es necesario, pues todos sabemos lo que es dicha línea.

Línea *quebrada* es la línea que se compone de dos ó mas líneas rectas, sin ser toda una sola recta: tal es la *ABCD* (*figura* 1).

Línea *curva* es aquella línea de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es línea recta: tal es la *AB* (*fig.* 2).

Se dice que varios puntos *están en una misma direccion*, cuando están en una misma línea recta.

5. Se llama *distancia* entre dos puntos la línea *recta* comprendida entre ellos.

6. Se llama *plano ó superficie plana* aquella superficie, en la cual tomando dos puntos cualesquiera, la recta que pasa por ellos coincide enteramente con la superficie.

Superficie *quebrada* es la superficie cumpuesta de dos ó mas superficies planas, sin ser toda una sola superficie plana.

Superficie *curva* es aquella superficie de la cual ninguna porcion, por pequeña que sea, es superficie plana.

AXIOMAS.

1.° *La línea recta es la línea mas corta que se puede tirar entre dos puntos.*

2.° *Por dos puntos no puede pasar mas que una sola línea recta;* ó lo que es igual, *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

3.° *Dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto.*

4.° *Dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su estension indefinida.*

7. Se llama *circunferencia* una línea curva cerrada, cuyos puntos están todos en un plano, y equidistan de un punto interior llamado *centro.*

Círculo es la porcion de plano limitada por la circunferencia. A veces á la circunferencia se le da tambien el nombre de círculo.

Radio es una recta *OA* tirada desde el centro á la circunferencia (*fig.* 3).

Cuerda es una recta *AC*, que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda *BC* que pasa por el centro.

Arco es una porcion *AB* de la circunferencia.

Todos los radios de un mismo círculo son iguales; pues los radios son las distancias del centro á los diferentes puntos de la circunferencia, y estas distancias son iguales, segun la definicion de la circunferencia.

Todos los diámetros de un mismo círculo son iguales; pues cada uno vale dos radios.

Para trazar ó tirar una recta, se emplea la regla, y para trazar ó describir una circunferencia, se emplea el compás

8. Se llama *geometría* la ciencia que enseña á resolver los problemas de la estension.

La geometría elemental, que forma nuestro actual objeto, solo se ocupa de la línea recta y de la circunferencia, de las superficies planas terminadas por estas líneas, de ciertas superficies curvas que se originan de ellas, y de los espacios terminados por estas superficies.

La geometría se divide en geometría *plana* y geometría del *espacio*.

La geometría plana trata de las figuras planas, es decir, de las figuras cuyos puntos están todos en un plano.

La geometría del espacio considera las figuras cuyos puntos no están todos en un plano.

DIVISION DE LA GEOMETRIA.

GEOMETRIA PLANA.	GEOMETRIA DEL ESPACIO.
LIBRO I.	LIBRO I.
Línea recta y ángulos.	*Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.*
LIBRO II.	LIBRO II.
Polígonos.	*Poliedros.*
LIBRO III.	LIBRO III.
Círculo.	*Los tres cuerpos redondos.*
LIBRO IV.	LIBRO IV.
Polígonos semejantes.	*Poliedros semejantes.*
LIBRO V.	LIBRO V.
Areas de los polígonos y del círculo.	*Areas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos*

GEOMETRIA PLANA.

LIBRO I.

Línea recta y ángulos.

CAPITULO I.

Perpendiculares y oblicuas.

9. Se llama *ángulo* la separacion ó abertura de dos rectas indefinidas *CA* y *CB* (*fig.* 4) que se encuentran en un punto *C*, llamado *vértice* del ángulo.

Las dos rectas indefinidas *CA* y *CB*, que forman el ángulo, se llaman *lados* del ángulo.

Un ángulo se designa con tres letras, una de cada lado y la del vértice, colocando esta en medio. Si un ángulo está solo, se puede designar con la letra del vértice. Asi, el ángulo formado por las rectas *CA* y *CB*, se designará *ACB* ó *BCA* ó *C*.

Debiendo considerarse como indefinidos los dos lados del ángulo, resulta que la magnitud de un ángulo no depende de la de sus lados, sino de la separacion de estos; y asi, dos ángulos serán iguales, cuando coincidiendo el vértice y un lado, coincide tambien el otro lado, aunque los lados del uno sean mayores que los lados del otro.

10. Se llaman ángulos *adyacentes* los dos ángulos que forma una recta con otra con la cual concurre en un punto.

Asi, los ángulos *ACE* y *BCE* (*fig.* 5) son adyacentes; y tambien lo son los ángulos *ACD* y *BCD*.

11. Se dice que una recta *DC* es *perpendicular* á otra *AB*

cuando los ángulos adyacentes *ACD* y *BCD*, que forman las dos, son iguales.

Se dice que una recta *EC* es *oblícua* á otra *AB*, cuando los ángulos adyacentes *ACE* y *BCE*, que forman, son desiguales.

12. Se llama *ángulo recto* cualquiera de los dos ángulos adyacentes que forma una recta con otra á la cual es perpendicular. Así, los ángulos adyacentes iguales *ACD* y *BCD* son rectos.

TEOREMA 1 (*fig.* 5).

Por un punto de una recta no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicha recta.

Sea *AB* la recta y *C* el punto: digo que por este punto no se puede levantar á la recta *AB* mas que una sola perpendicular *CD*.

En efecto, siendo la *CD* perpendicular á la *AB*, los ángulos *ACD* y *BCD* son iguales. Otra cualquiera recta *CE*, que pase por el punto *C*, formará con la *AB* dos ángulos, el uno *ACE* mayor que el recto *ACD*, y el otro *BCE* menor que el recto *BCD*; luego dichos dos ángulos *ACE* y *BCE* son desiguales, y por tanto la *CE* es oblícua á la *AB*.

TEOREMA 2 (*fig.* 6).

Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Sean los dos ángulos rectos *ACD* y *EGH*: digo que son iguales.

En efecto, segun la definicion [11], los ángulos rectos adyacentes *ACD* y *BCD* son iguales, como tambien los *EGH* y *FGH*. Coloquemos la segunda figura sobre la primera, de modo que el punto *G* caiga sobre el punto *C*, y que la recta *EF* coincida con la *AB*: como en un punto *C* de una recta *AB* no se puede levantar á esta recta mas que una sola perpendicular, la recta *GH* coincidirá con la *CD*; y por consiguiente los ángulos rectos *ACD* y *EGH* son iguales [9].

13. Se llama ángulo *agudo* el ángulo menor que el recto, y ángulo *obtuso* el ángulo mayor que el recto (*a*).

(*a*) Es imposible definir bien los ángulos agudo y obtuso, si antes no se demuestra que todos los ángulos rectos son iguales.

TEOREMA 3 (*fig*. 5).

La suma de dos ángulos adyacentes ACE *y* BCE *es igual á dos ángulos rectos* (*a*).

Para demostrarlo, levanto en el vértice *C* la perpendicular *CD* á la *AB*, y tendré

$$ACE = ACD + DCE,$$
$$BCE = BCD - DCE;$$

sumando estas igualdades miembro á miembro, será

$$ACE + BCE = ACD + BCD;$$

es decir, que la suma de los dos ángulos adyacentes *ACE* y *BCE* es igual á dos ángulos rectos.

Corolarios. 1.º *Los cuatro ángulos* ACD, BCD, BCE *y* ACE (*fig*. 7), *que forma una recta con otra á la cual es perpendicular, son rectos;* pues, siendo la *DE* perpendicular á la *AB*, los dos ángulos *ACD* y *BCD* son rectos; luego sus adyacentes *ACE* y *BCE* son tambien rectos.

De aquí resulta que la recta *AB* forma con la *ED* dos ángulos *BCD* y *BCE* iguales, y que por tanto dicha recta *AB* es perpendicular á la *DE:* luego, *si una recta es perpendicular á otra, esta es perpendicular á la primera.*

2.º *La suma de los ángulos* consecutivos ACD, DCE, ECF *y* FCB (*fig*. 8), *formados hácia un mismo lado de una recta* AB, *es igual á dos ángulos rectos;* pues dicha suma equivale á la de los dos ángulos adyacentes *ACF* y *BCF*, que es igual á dos rectos.

3.º *La suma de todos los ángulos* consecutivos ACD, DCE, ECF, FCG, *etc*. (*fig*. 9), *formados al rededor de un punto* C *por*

(*a*) Todos los teoremas en que, por abreviar, se indiquen las partes de la figura, se deben enunciar en primer lugar como si tales partes no estuviesen indicadas; y volver en seguida á enunciar, refiriéndose á la figura, la hipótesi y la conclusion del teorema. Asi, el teorema actual se desenvolverá del modo siguiente: *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.* Sean los dos ángulos adyacentes *ACE* y *BCE*: digo que su suma es igual á dos ángulos rectos. Para demostrarlo, etc.

varias rectas que salen de este punto, es igual á cuatro rectos: pues prolongando una de dichas rectas *AC* en sentido contrario al suyo, la suma de todos los ángulos consecutivos, que están hácia un lado de la recta *AB*, es igual á dos rectos, y la suma de todos los ángulos consecutivos que están hácia el otro lado de la misma recta, es tambien igual á dos rectos: luego la suma de todos los ángulos propuestos es igual á cuatro rectos.

4.° *Un ángulo cualquiera es menor que dos ángulos rectos:* pues prolongando un lado de dicho ángulo, resulta otro ángulo adyacente al propuesto, y entre los dos valen dos ángulos rectos.

14. Si la suma de dos ángulos es igual á un ángulo recto, cada uno se llama *complemento* del otro; ó bien los dos se llaman *complementarios.*

Si la suma de dos ángulos es igual á dos ángulos rectos, cada uno se llama *suplemento* del otro; ó bien los dos se llaman *suplementarios.*

Dos ángulos que tengan el mismo complemento, ó el mismo suplemento, son iguales; pues en el primer caso á los dos les falta la misma cantidad para valer un ángulo recto; y en el segundo caso á los dos les falta la misma cantidad para valer dos ángulos rectos.

Teorema recíproco del 3. *Si dos ángulos* ACE *y* BCE (*figura* 10). *esteriores uno á otro, y que tienen el mismo vértice* C *y un lado comun* CE, *son suplementarios, tendrán en línea recta los otros dos lados* AC y BC: pues si *CB* no fuese prolongacion de *AC*, lo seria otra, tal como *CD*; y por consiguiente seria el ángulo *DCE* suplemento del *ACE* [*Teor.* 3]; pero por suposicion el ángulo *BCE* es suplemento del *ACE;* luego los ángulos *DCE* y *BCE*, que tienen el mismo suplemento *ACE*, serian iguales; lo que es absurdo.

15. Se llaman ángulos *opuestos por el vértice* dos ángulos de los que el uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.

TEOREMA 4 (*fig.* 11).

Los ángulos ACE *y* DCB *opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto, el ángulo *ACE* tiene por suplemento al *ACD*, y el ángulo *DCB* tiene tambien por suplemento al *ACD*; luego los dos ángulos *ACE* y *DCB*, que tienen el mismo suplemento, son iguales.

TEOREMA 5 (*fig.* 12).

Desde un punto A *tomado fuera de una recta* DE *no se puede bajar á esta recta mas que una sola perpendicular* AB.

Tiremos otra recta cualquiera *AC* desde el punto *A* á la recta *DE*, prolonguemos la *AB*, tomemos en su prolongacion la parte $A'B = AB$, y juntemos los puntos *C* y *A'*. Doblando la figura por la *BC*, caerá la *AB* sobre la *BA'* por ser iguales los ángulos rectos *ABC* y *A'BC*; el punto *A* caerá sobre el *A'*, por ser iguales las rectas *AB* y *A'B*; luego la recta *CA* y la *CA'*, que tienen comunes sus estremos, coincidirán; luego el ángulo *ACB* es igual al *BCA'*, ó bien, el ángulo *ACB* es mitad del *ACA'*; y como [*Teor.* 3, *Corol.* 4.°] este ángulo es menor que dos ángulos rectos, el *ACB* es menor que un ángulo recto; luego la *AC* es oblícua á la *DE* (*a*).

CAPITULO II.

Paralelas.

16. Si á dos rectas cualesquiera *AB* y *CD* (*fig.* 13) corta otra recta *EF*, esta toma el nombre de *secante* ó *transversal.*

Los cuatro ángulos *AGH*, *BGH*, *CHG* y *DHG* se llaman ángulos *internos*, y los otros cuatro ángulos *AGE, BGE, CHF* y *DHF* se llaman *esternos*.

Los ángulos *EGB* y *EHD*, uno esterno y otro interno, de un mismo lado de la secante, y que no son adyacentes, se llaman ángulos *correspondientes*. Por lo tanto son tambien an-

(*a*) Si siguiendo una marcha diferente de la que nosotros seguimos, se hubiese demostrado antes del teorema 5 el teorema 16, el teorema 5 se demostraria con mayor sencillez, sin necesidad de doblar la figura por la recta *BC*. Asi pues, el objeto que tenemos, al doblar la figura, es el suplir la falta del teorema 16, haciendo en la figura del teorema 5 el mismo razonamiento que en la demostracion del teorema 16.

gulos correspondientes los *AGE* y *CHE*, los *DHF* y *BGF*, los *CHF* y *AGF*.

Los ángulos internos *BGH* y *CHG* de diferente lado de la secante, y no adyacentes, se llaman ángulos *alternos*. Segun esto, son tambien ángulos alternos los *AGH* y *DHG* (*a*).

17. Se llaman *paralelas* dos rectas que están en un mismo plano, y que por mas que se prolonguen, no se encuentran.

La existencia de estas rectas se demuestra por cualquiera de las cuatro proposiciones siguientes.

TEOREMA 6.

Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas: pues si dichas rectas se encontrasen, desde el punto de su encuentro se podrian tirar dos perpendiculares á una recta; lo que es imposible [*Teor.* 5.]

TEOREMA 7 (*fig.* 14).

Si los ángulos alternos AGH *y* DHG *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

Siendo iguales los ángulos alternos *AGH* y *DHG*, sus suplementos *BGH* y *CHG* serán tambien iguales; y al contrario [14].

Desde el punto medio *I* de la *HG* tiro la *IK* perpendicular á la *AB*, y la prolongo hasta que encuentre en *L* á la *CD*: hago ahora girar á la figura *HIL*, en el mismo plano en que se halla, al rededor del punto *I* (*b*), hasta que la recta *IH* coincida con la *IG*, en cuyo caso el punto *H* caerá sobre el punto *G*, por ser iguales las dos rectas *IH* é *IG*; la recta *IL* coincidirá con la *IK*, por ser iguales los ángulos *HIL*, *KIG*, como opuestos por el vértice [*Teor.* 4]. Por ser iguales, segun la hipótesi, los ángulos *IHL*, *IGK*, la recta *HL* coincidirá con la *GK*, y por tanto el punto *L* caerá sobre el punto *K*; luego

---

(*a*) Es enteramente inútil la distincion de los ángulos alternos en *alternos internos y alternos esternos*, porque puede evitarse, y se evita siempre, la consideracion de estos últimos.

(*b*) Si el teorema 17 estuviese demostrado antes del 7, la demostracion actual seria mas sencilla. Asi, el objeto del movimiento del triángulo *HIL* es el suplir la falta del teorema 17; observacion análoga á la que hemos hecho al demostrar el teorema 5.

el ángulo *ILH* es igual al ángulo *IKG*; y como este es recto, segun la construccion, el *HLI* será tambien recto: luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares á la *KL*, y por tanto [*Teor.* 6.] son paralelas.

TEOREMA 8 (*fig.* 14).

Si dos ángulos correspondientes cualesquiera EGB *y* EHD *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

El ángulo *EGB* es igual al *AGH*, por ser opuestos por el vértice; pero por hipótesi el ángulo *EGB* es igual al *EHD*; luego los ángulos alternos *AGH* y *GHD* son iguales; luego [*Teor.* 7] las rectas *AB* y *CD* son paralelas.

TEOREMA 9 (*fig.* 14).

Si la suma de los ángulos internos BGH *y* DHG *de un mismo lado de la secante es igual á dos rectos, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

El ángulo *AGH* es suplemento del *BGH* [*Teor.* 3]; pero por hipótesi el ángulo *DHG* es suplemento del *BGH*; luego los dos ángulos alternos *AGH* y *DHG*, suplementos de uno mismo, son iguales: luego las rectas *AB* y *CD* son paralelas.

18. *Por un punto dado fuera de una recta no puede pasar mas que una sola paralela á dicha recta* (*a*).

Recíproco del 6. *Si una recta* EF (*fig.* 15) *es perpendicular á una de dos paralelas* AB, *tambien lo será á la otra* CD.

Pues si la *EF* no fuese perpendicular á la *CD*, por el punto *H* se podria tirar una recta *HL* perpendicular á la *EF*, y por tanto *HL* seria, segun el teorema directo, paralela á la *AB*: luego por el punto *H* pasarian dos paralelas á la *AB*, lo que es imposible.

Recíprocos de los 7, 8 y 9. Si á dos paralelas *AB* y *CD* (*fig.* 16) corta una recta *EF*: 1.° *Los ángulos alternos son iguales.* 2.° *Los ángulos correspondientes son iguales.* 3.° *La*

(*a*) Muchos esfuerzos se han hecho para demostrar con todo rigor este principio, llamado *Postulado* de Euclides, que la esperiencia lo demuestra con sencillez. En vista de la ineficacia de tales esfuerzos, admitiremos dicho principio, sin detenernos en demostraciones viciosas.

suma de los ángulos internos de un mismo lado de la secante es igual á dos rectos.

1.° Si el ángulo *AGH* no fuese igual al ángulo *DHG*, por el punto *G* se podria tirar una recta *IK*, que formase con la *EF* un ángulo *IGH* igual al *DHG*: dicha recta *IK* sería paralela á la *CD*, segun el teorema directo; luego por el punto *G* podrian pasar dos paralelas á la *CD*, lo que es imposible.

Del mismo modo se demuestran los otros dos teoremas recíprocos.

TEOREMA 10 (*fig.* 17).

Dos rectas AB *y* CD *paralelas á una tercera* EF *son paralelas entre sí:* pues tirando una recta *MN* perpendicular á la *AB*, lo será á su paralela *EF* [*Teor.* 6, *Recíp.*]; y por serlo á esta, lo será á su paralela *CD*: luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares á la recta *MN*, y por consiguiente son paralelas.

TEOREMA 11 (*figs.* 18 *y* 19).

Dos ángulos, cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.

1.° Sean *BAC* y *DEF* (*fig.* 18) los dos ángulos, cuyos lados son paralelos, y tienen dos á dos el mismo sentido: digo que estos ángulos son iguales.

Prolonguemos el lado *DE*, hasta que encuentre en *G* al lado *AC*: el ángulo *BAC* es igual al *DGC*, por ser correspondientes entre paralelas; el ángulo *DEF* es igual al *DGC* por la misma razon; luego los ángulos *BAC* y *DEF* son iguales.

2.° Sean los dos ángulos *BAC* y *DEF* (*fig.* 19), cuyos lados son paralelos, y tienen sentidos opuestos: digo que estos ángulos son iguales.

En efecto, prolonguemos los lados del ángulo *DEF* en sentido contrario al suyo, y resultará el ángulo *HEG*, cuyos lados son paralelos á los del ángulo *BAC*, y tienen el mismo sentido. Por consiguiente el ángulo *HEG* es igual al ángulo *A* [1.°]; pero tambien es igual al ángulo *DEF* [*Teor.* 4]: luego los ángulos *A* y *DEF* son iguales.

3.° Sean los dos ángulos *BAC* y *FEG* (*fig.* 18), cuyos lados son paralelos, y dos tienen el mismo sentido, y los otros dos sentido contrario: digo que estos ángulos son suplementarios.

Prolonguemos el lado *GE* en sentido contrario al suyo, y resultará el ángulo *DEF* suplemento del *FEG* é igual al ángulo A; luego el ángulo *FEG* y el ángulo *A* son suplementarios.

TEOREMA 11ª *fig.* 20).

Dos ángulos BAC *y* EDG, *cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Por el punto *A* levanto las dos perpendiculares *AK* y *AF* á los lados *AC* y *AB*; el ángulo *FAK* será igual al *BAC*, por tener ambos el mismo complemento *KAB*; pero el ángulo *FAK* tiene sus lados paralelos á los del ángulo *EDG* [*Teor*. 6], y por tanto es igual ó suplemento de este: luego el ángulo *BAC* es igual al *EDG*, ó es suplemento del *EDG*.

NOTA. Si los dos ángulos *BAC* y *EDG* son agudos, lo que se conocerá fácilmente por la figura á que correspondan, dichos ángulos serán iguales; y si uno es agudo y otro obtuso, serán suplementarios.

LIBRO II.

Polígonos.

Nociones preliminares.

Se llama *polígono* la porcion de plano terminada por líneas rectas: estas rectas se llaman *lados* del polígono.

Contorno de un polígono es el conjunto de sus lados. *Perímetro* de un polígono es el valor numérico de su contorno.

Se llama *triángulo* el polígono que tiene tres lados; *cuadrilátero* el polígono que tiene cuatro lados; *pentágono* el que tiene cinco; *exágono* el que tiene seis; *eptágono* el que tiene siete; *octógono* el que tiene ocho; *eneágono* el que tiene nueve; *decágono* el que tiene diez; *endecágono* el que tiene once; *dodecágono* el que tiene doce; *pentedecágono* el que tiene quince (*a*).

Se llama polígono *convexo* el polígono cuyo contorno no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos (*b*).

Se llama *diagonal* de un polígono toda recta que une los vértices de dos ángulos no adyacentes. Asi, la recta *AC* (*fig.* 21) es una diagonal.

(*a*) Esta nomenclatura es inútil, y no deberian quedar mas nombres particulares de los polígonos que *triángulo*, y quizá *cuadrilátero*; pues no conviene poner nombres nuevos sino á las cosas que, ocurriendo á menudo, exijen muchas palabras para ser designadas.

(*b*) Todos los polígonos de que nos ocuparemos en este tratado serán convexos.

CAPITULO I.

Triángulos.

TEOREMA 12 (*fig.* 22.)

Un lado cualquiera de un triángulo ABC *es menor que la suma de los otros dos.*

Siendo AC línea recta, es $AC<AB+BC$.

Corolario. *Un lado cualquiera de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos*: pues acabamos de demostrar que $AB+BC>AC$; luego, restando BC de ambos miembros, será $AB>AC-BC$.

TEOREMA 13 (*fig.* 23).

La suma de los tres ángulos de un triángulo ABC *es igual á dos ángulos rectos.*

Por el vértice de uno de los ángulos, C por ejemplo, tiro una paralela CD al lado opuesto, y tendré [*Teor.* 9. *Recíp.*]

$$A+ACD=2\ R\ (a),$$

ó bien $$A+ACB+BCD=2\ R:$$

los ángulos BCD y B son iguales, por ser alternos entre paralelas; luego $A+ACB+B=2\ R$.

Corolarios. 1.º *El ángulo esterno* BCD (*fig.* 22) *formado por un lado* BC *de un triángulo y la prolongacion de otro* AC, *es igual á la suma de los dos ángulos* A *y* B *no adyacentes á él;* pues el ángulo BCD y la suma de los ángulos A y B tienen el mismo suplemento ACB.

2.º *Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso*: pues, si alguno de estos casos fuese posible, la suma de los tres ángulos del triángulo seria mayor que dos rectos.

3.º *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercer ángulo del primer triángulo será igual al tercer ángulo*

(*a*) En adelante representaremos por R el ángulo recto.

del segundo triángulo: pues ambos ángulos son suplementos de sumas iguales.

Se llama triángulo *equilátero*, el triángulo que tiene sus tres lados iguales; triángulo *isósceles*, el que tiene dos lados iguales; triángulo *escaleno*, el que tiene sus tres lados desiguales.

Se llama triángulo *rectángulo*, el triángulo que tiene un ángulo recto; triángulo *obtusángulo*, el que tiene un ángulo obtuso; triángulo *acutángulo*, el que tiene sus tres ángulos agudos.

Los triángulos acutángulos y obtusángulos se comprenden en la denominacion comun de triángulos *oblicuángulos*.

En un triángulo rectángulo se llama *hipotenusa* el lado opuesto al ángulo recto, y los lados del ángnlo recto se llaman *catetos*.

Altura de un triángulo es la perpendicular bajada desde el vértice de un ángulo al lado opuesto, que entonces toma el nombre de *base*, ó á su prolongacion.

En el triángulo isósceles se llama *base* el lado desigual á los otros.

Vértice de un triángulo es el vértice del ángulo opuesto á la base.

4.° *En el triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios;* pues entre los dos valen un ángulo recto.

TEOREMA 14 (*fig.* 24).

Si desde un punto B *tomado en un lado de un ángulo agudo* BAC *se baja una perpendicular* BD *al otro lado, esta perpendicular caerá dentro del ángulo:* pues la perpendicular no puede coincidir con el lado *BA*, y si cayese fuera del ángulo, como en *BE*, el triángulo *BAE* tendria el ángulo recto *E* y el obtuso *BAE;* lo que es imposible.

TEOREMA 15 (*figs.* 25 y 26).

1.° *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, sus lados opuestos son iguales.*

2.° *Si un triángulo tiene dos ángulos desiguales, al mayor ángulo se opone mayor lado* (*a*)

(*a*) Anteponemos este teorema á la igualdad de los triángulos, porque es conveniente anteponer el teorema 145 á la igualdad y si-

1.° Sea el triángulo *ABC* (*fig.* 25), que tiene iguales los ángulos *A* y *C*: digo que los lados *BC* y *AB*, opuestos á dichos ángulos, son iguales.

Bajo desde el punto *B* la perpendicular *BD* al lado opuesto, y doblo la figura por la *BD*; caerá la *CD* sobre la *DA*, por ser iguales los ángulos *ADB* y *CDB*; la *BC* caerá sobre la *BA*, por ser iguales los ángulos *ABD* y *CBD*, como complementos de los iguales *A* y *C*; luego el punto *C* caerá sobre el punto *A*, y por consiguiente los lados *AB* y *BC* son iguales.

2.° Sea el triángulo *ABC* (*fig.* 26), en el cual el ángulo *A* es mayor que el *C*: digo que el lado *BC* es mayor que el *AB*.

Tiro por el punto *A* una recta *AD* que forme con la *AC* un ángulo $DAC=C$: los lados *AD* y *DC* del triángulo *ACD* serán iguales [1.°]. En el triángulo *ABD* tenemos $AD+DB>AB$; luego $CD+DB>AB$, ó $CB>AB$.

Recíproco. 1.° *Si un triángulo* ABC (fig. 25) *tiene dos lados iguales* AB *y* BC, *los ángulos opuestos* C *y* A *son iguales.*

2.° *Si un triángulo* ABC (fig. 26) *tiene dos lados desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo.*

1.° Si los ángulos *A* y *C* no fuesen iguales, seria el uno, *A* por ejemplo, mayor que el otro *C*; y por consiguiente [2.°] el lado *BC* seria mayor que el *AB*; lo que es contrario á la hipótesi, y por consiguiente absurdo: luego $A=C$.

2.° Si el ángulo *A* no fuese mayor que el *C*, seria igual al *C* ó menor que el *C*: si fuese igual al *C*, el lado *BC* seria igual al lado *AB*; lo que es contrario á la hipótesi. Si el ángulo *A* fuese menor que el *C*, seria el lado *BC* menor que el *AB*; lo que tambien es contrario á la hipótesi: luego $A>C$.

Corolarios. 1.° ***El triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales;*** pues lo son sus tres lados. Por consiguiente cada uno de sus ángulos valdrá $\frac{1}{3}$ de dos rectos, ó $\frac{2}{3}$ de un recto.

2.° ***La altura del triángulo isósceles divide en dos ángulos iguales al ángulo del vértice***: pues dichos dos ángulos son complementos de los ángulos iguales de la base.

---

metría de dos ángulos triedros, y procuramos siempre guardar la analogía entre la geometría plana y la del espacio.

TEOREMA 16 (*fig.* 27).

Dos triángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, *é igual el ángulo comprendido*, A=D.

Coloco el triángulo *DEF* sobre el *ABC*, de modo que el lado *DF* coincida con su igual *AC*, y que el punto *E* caiga hácia el mismo lado de la recta *AC* que el punto *B*. El lado *DE* caerá sobre el *AB*, por ser iguales los ángulos *A* y *D* por suposicion; el punto *E* caerá sobre el *B*, por ser iguales los lados *DE* y *AB* por suposicion; luego los lados *EF* y *BC*, que tienen unos mismos estremos, coincidirán; y por tanto los triángulos son iguales.

Nota. Tanto en este caso de igualdad de triángulos, como en los siguientes, los ángulos iguales en ambos triángulos están opuestos á lados iguales, y al contrario.

TEOREMA 17 (*fig.* 27)

Dos triángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen un lado igual*, AC=DF, *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales*, A=D, C=F.

Coloco el triángulo *DEF* sobre el *ABC*, de modo que el lado *DF* coincida con su igual *AC*, y que el punto *E* caiga hácia el mismo lado de *AC* que el punto *B*. Por ser iguales los ángulos *A* y *D*, el lado *DE* caerá sobre el lado *AD*; y por ser iguales los ángulos *C* y *F*, el lado *FE* caerá sobre el lado *CB*: luego el punto *E* caerá sobre el punto *B*, y por consiguiente los triángulos son iguales.

TEOREMA 18 (*fig.* 28).

Dos triángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Coloco el triángulo *DEF* de modo que uno de sus lados *DF* coincida con su igual *AC*, y que el vértice *E* caiga en *G* á diferente lado de *AC* que el vértice *B*. La igualdad de los dos triángulos quedará demostrada, si hacemos ver que los ángulos *ABC* y *AGC* son iguales [*Teor*. 16].

Tiro la recta BG: puede suceder que el punto en que corta á la AC esté entre los puntos A y C (*fig.* 1), esté en uno de sus estremos C (*fig.* 2), ó esté en la prolongacion de la recta AC (*fig.* 3).

1.° En los triángulos ABG, CBG, en que los lados AB y AG, BC y GC son iguales, el ángulo $ABG=AGB$; el ángulo $CBG=CGB$ [*Teor.* 15, *Recíp.* 1.°]; luego

$$ABG+CBG=AGB+CGB,$$
ó
$$ABC=AGC.$$

2.° En el triángulo ABG, en que los lados AB y AG son iguales, el ángulo $B=G$.

3.° En los triángulos ABG y CBG, en que los lados AB y AG, CB y CG son iguales, el ángulo $ABG=AGB$, el ángulo $CBG=CGB$; luego

$$ABG-CBG=AGB-CGB,$$
ó
$$ABC=AGC.$$

TEOREMA 19 (*fig.* 29).

Dos triángulos rectángulos ABC, DEF *son iguales, cuando tienen las hipotenusas* BC *y* EF *iguales, y un cateto* AC *del uno igual á un cateto* DF *del otro.*

Coloco el triángulo DEF, de modo que coincidan los dos catetos iguales AC y DF, y que el punto E caiga en G á diferente lado de AC que el punto B: la recta AG será prolongacion de AB [*Teor.* 3, *Recíp.*]. En el triángulo isósceles BCG el ángulo $GCA=BCA$ [*Teor.* 15, *Corol.* 2.°]; luego [*Teor.* 16] los triángulos ABC y AGC ó DEF son iguales.

19. Nota. Ocurre á menudo tener que demostrar que dos rectas son iguales, ó que dos ángulos son iguales; y esto se conseguirá en adelante, haciendo que dichas dos rectas, ó que dichos dos ángulos, correspondan á dos triángulos iguales.

TEOREMA 20 (*fig.* 30).

Si dos triángulos ABC, DEF (*fig.* 1) *tienen dos lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, *y el ángulo* A *comprendido por los dos lados del primero es mayor que el ángulo*

D *comprendido por los dos lados del segundo, el tercer lado* BC *del primer triángulo será mayor que el tercer lado* EF *del segundo.*

Coloco el triángulo DEF en ACG, es decir, de modo que el lado DF coincida con su igual AC, y que los dos triángulos queden á diferente lado de la recta AC. Tiremos ahora la recta AH que forme dos ángulos iguales con las dos rectas AB y AG: siendo el ángulo $BAC>CAG$ por suposicion, la bisectriz (*a*) AH caerá dentro del ángulo BAC, y cortará al lado BC en un punto H. Tirando ahora la GH, los dos triángulos BAH y GAH, que tienen el lado AH comun, el lado $AB=AG$ por hipótesi, y el ángulo $BAH=GAH$ por construccion, son iguales; luego $BH=GH$. Mas en el triángulo GHC es $GH+HC>GC$; luego $BH+HC>GC$, ó bien $BC>EF$.

Si los tres puntos B, C y G (*fig.* 2) están en línea recta, será $BC>BH$, ó $BC>GH$; luego con mayor razon $BC>GC$.

Recíproco. *Si dos triángulos* ABC, DEF (fig. 1) *tienen dos lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, *y el tercer lado* BC *del primero es mayor que el tercer lado* EF *del segundo, el ángulo* A *opuesto al tercer lado en el primer triángulo, será mayor que el ángulo* D *opuesto al tercer lado en el segundo triángulo.*

Si el ángulo A no fuese mayor que el D, seria $A=D$, ó seria $A<D$. En el primer caso, los triángulos ABC, DEF serian iguales [*Teor.* 16]; y por consiguiente seria $BC=EF$, contra la hipótesi. En el segundo caso, segun el teorema directo, seria el lado $BC<EF$; lo que tambien es contrario á la hipótesi: luego $A>D$.

TEOREMA 21 (*fig.* 31).

La perpendicular BA *bajada á una recta* DF *desde un punto* B *tomado fuera de esta recta, es menor que cualquiera oblícua* BC *tirada desde dicho punto á la recta.*

Siendo el triángulo ABC rectángulo en A, el ángulo ACB será agudo, y por tanto será menor que el recto BAC; luego [*Teor.* 15, 2.°] $BA<BC$.

(*a*) Se llama *bisectriz* de un ángulo, la recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

Recíproco. *La recta mas corta que se puede tirar desde un punto á otra recta, es perpendicular á esta*: pues si no lo fuese, se podria bajar desde dicho punto una perpendicular á la recta, y esta perpendicular seria la mas corta, contra lo supuesto.

20. Se llama *distancia* de un punto á una recta la perpendicular bajada desde dicho punto á la recta.

TEOREMA 22 (*fig.* 32.)

Si desde un punto tomado fuera de una recta se tiran una perpendicular y varias oblícuas: 1.° *Las oblícuas, que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales.* 2.° *De dos oblícuas, la que se aparta mas de la perpendicular, es mayor.*

1.° Sean las oblícuas BC y BD, y sea $AC{=}AD$; digo que $BC{=}BD$. Los triángulos rectángulos BAD y BAC son iguales [*Teor.* 16]; luego $BD{=}BC$.

2.° Sean las dos oblícuas BD y BE, y sea $AC{>}AD$; digo que $BE{>}BD$.

Tomo $AC{=}AD$ y tiro BC, que será igual á BD, porque dichas rectas BD y BC son oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular. Los ángulos BCA y BEA son agudos, por ser recto el ángulo BAE [*Teor.* 13, *Corol.* 2.°]; luego el ángulo BCE será obtuso, y por consiguiente mayor que el BEC: luego [*Teor.* 15, 2.°] $BE{>}BC$, ó $BE{>}BD$.

Corolario. *Desde un punto tomado fuera de una recta no se pueden tirar á la recta mas que dos oblícuas iguales*: pues otra oblícua que se tirase, se apartaria de la perpendicular mas ó menos que las primeras, y por consiguiente seria mayor ó menor.

Recíproco. 1.° *Las oblícuas iguales se apartan igualmente de la perpendicular.*

2.° *La mayor de dos oblícuas se aparta de la perpendicular mas que la menor.*

1.° Sean las dos oblícuas iguales BD y BC: digo que $AD{=}AC$.

Si AD no fuese igual á AC, seria mayor ó menor que AC. Si AD fuese mayor que AC, seria $BD{>}BC$ [*Teor.* 22, 2.°]; lo que es contrario á la hipótesi, y por consiguiente absurdo. Si AD fuese menor que AC, seria $BD{<}BC$ [*Teor.* 22, 2.°]; lo que tambien es contrario á la hipótesi.

Luego $AD=AC$.

2.° Sea la oblícua BE mayor que la BD: digo que EA será mayor que AD.

Si EA no fuese mayor que AD, seria igual á AD, ó seria menor que AD. Si EA fuese igual á AD, seria $BE=BD$ [*Teor*. 22, 1.°]; lo que es contrario á la hipótesi. Si EA fuese menor que AD, seria $BE<BD$ [*Teor*. 22, 2.°]; lo que tambien es contrario á la hipótesi.

Luego $AE>AD$.

21. Nota. Generalizando el método de demostracion empleado en este recíproco, seguido tambien en los recíprocos de los teoremas 15 y 20, podremos establecer el siguiente principio.

Cuando en uno ó varios teoremas se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sugeto, y las conclusiones respectivas sean todas diferentes, los recíprocos de dichos teoremas son ciertos.

En adelante advertiremos cuándo uno ó mas recíprocos se hallan en este caso, y esto solo bastará para estar seguros de su certeza; pero será conveniente que el lector los demuestre, como acabamos de demostrar el último recíproco.

Teorema 23 (*fig*. 33).

1° *Todo punto* D, *que esté en la perpendicular* CD *levantada á una recta* AB *en su punto medio* C, *equidista de los estremos* A *y* B *de dicha recta.*

2.° *Todo punto* E, *que esté fuera de la perpendicular* CD *levantada á una recta* AB *en su punto medio* C, *no equidista de los estremos de la recta.*

1.° Las rectas DA y DB son iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular CD, ó porque los triángulos ADC y BDC son iguales.

2.° Tiro la BD, y tengo en el triángulo BDE, $BD+DE>BE$; pero $BD=AD$; luego $AD+DE>BE$, ó $AE>BE$.

Recíproco. 1.° *Todo punto, que equidiste de los estremos de una recta, está en la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio.*

2.° *Todo punto, que no equidiste de los estremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio* [21].

TEOREMA 24 (*fig.* 34).

Si una recta CD *tiene dos puntos* C *y* D, *de los que cada uno equidista de los estremos* A *y* B *de otra recta* AB, *es perpendicular á esta, y la divide en dos partes iguales.*

Si en el punto medio de la *AB* levantamos una perpendicular á esta recta, dicha perpendicular pasará por los puntos *C* y *D*, por hallarse cada uno de estos puntos á igual distancia de los puntos *A* y *B* [*Teor.* 23, *Recip.* 1.º]; luego dicha perpendicular y la recta *CD*, que tienen dos puntos comunes, serán una misma recta; y por tanto la *CD* es perpendicular á la *AB*, y la divide en dos partes iguales (*a*).

TEOREMA 25 (*fig.* 35).

1.º *Todo punto* E *que esté en la bisectriz* CD *de un ángulo* ACB, *equidista de los lados* AC *y* BC *de dicho ángulo.*

2.º *Todo punto* H *interior á un ángulo* ABC, *y que esté fuera de la bisectriz* CD *del ángulo*, *no equidista de los lados* AC *y* BC *de dicho ángulo.*

1.º Las perpendiculares *EF* y *EG* (*fig.* 1) son iguales, porque los triángulos *ECF* y *ECG* tienen comun el lado *CE*, los ángulos en *C* iguales por suposicion, y los ángulos en *E* iguales, por ser complementos de los iguales en *C*: luego [*Teor.* 17] estos triángulos son iguales; luego $EF=EG$.

2.º Siendo el ángulo *BCD* agudo, por ser mitad del ángulo *ABC*, el ángulo *HCB* será agudo con mayor razon; luego [*Teor.* 14] la perpendicular *HI* caerá dentro de dicho ángulo *HCB*, ó lo que es igual, el pie *I* de dicha perpendicular caerá sobre el lado *CB*.

Como el ángulo *HCA* puede ser agudo, recto ú obtuso, el pie *F* de la perpendicular *HF* podrá caer sobre el lado *AC*, ó en el punto *C*, ó en la prolongacion del lado *AC*.

Si el pié de la perpendicular *HF* cae sobre el lado *AC*,

(*a*) Es fácil demostrar este teorema, sin fundarse en el anterior, guiándose por la nota [19], es decir, fundándose solamente en la igualdad de los triángulos.

tirando EG perpendicular á CB, y juntando los puntos H y G, tendremos [1.°] $EF=EG$; pero $EG+EH>HG$; luego

$$EF+EH>HG, \text{ ó } HF>HG;$$

y como $HG>HI$, será con mayor razon $HF>HI$.

Si el pie de la perpendicular HF cae en C (*fig.* 2), será [*Teor.* 21] $CH>HI$.

Si el pie F cae en la prolongacion del lado AC (*fig.* 3), tenemos [*Teor.* 21] $HI<HG$; luego con mayor razon $HI<HF$.

Recíproco. 1.° *Todo punto interior á un ángulo, que equidiste de los lados del ángulo, está en la bisectriz de dicho ángulo.*

2.° *Todo punto interior á un ángulo, que no equidiste de los lados del ángulo, está fuera de la bisectriz de dicho ángulo* [21].

CAPITULO II.

Polígonos en general.

TEOREMA 26.

La suma de todos los ángulos de un polígono convexo es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Tiremos desde uno de los vértices diagonales á todos los demás, las cuales dividirán al polígono en triángulos: cada uno de los dos triángulos estremos tendrá dos lados del polígono, y cada triángulo interior tendrá un solo lado del polígono; luego dichas diagonales dividen al polígono en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos. La suma de los ángulos de todos los triángulos es igual á la suma de los ángulos del polígono; y como la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos rectos, la suma de todos los ángulos del polígono será igual á tantas veces dos rectos como triángulos hay, es decir, como lados tiene el polígono menos dos.

NOTA. Si n es el número de lados y por consiguiente el número de ángulos del polígono, la suma de todos sus ángulos será $2R(n-2)=2Rn-4R$.

Corolario. *La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos.*

TEOREMA 27 (*fig.* 36).

La suma de todos los ángulos esteriores, que resultan prolongando en un mismo sentido todos los lados de un polígono, es igual á cuatro ángulos rectos.

En efecto, cada uno de los ángulos esteriores y su adyacente interior suman 2 rectos: luego la suma de todos los ángulos interiores y esteriores valdrá tantas veces 2 rectos como lados tiene el polígono; suma que, segun el teorema anterior, escede en dos veces 2 rectos á la de los ángulos interiores; luego la suma de los ángulos esteriores es igual á dos veces 2 rectos ó á 4 rectos.

NOTA. Haciendo uso del lenguage algébrico, se demostrará este teorema como sigue:

Siendo n el número de ángulos, $2Rn$ será la suma de los ángulos interiores y esteriores, restando de esta suma la de los ángulos interiores, que es $2Rn-4R$, resultará la suma de los ángulos interiores $2Rn-(2Rn-4R)=2Rn-2Rn+4R=4R$.

22. Se llama *paralelógramo* el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

TEOREMA 28 (*fig.* 37).

Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales.

Sea el paralelógramo $ABCD$: digo que los lados opuestos AB y CD son iguales, como tambien los lados opuestos AD y BC.

Tiro la diagonal BD; los dos triángulos ABD y BDC tienen comun el lado BD, los ángulos ABD y BDC iguales, por ser alternos entre paralelas, y los ángulos ADB y CBD iguales por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales; luego $AB=DC$ y $AD=BC$.

Altura del paralelógramo es la perpendicular bajada desde un punto de uno de sus lados al lado opuesto, el cual entonces toma el nombre de *base*.

Corolario. *Todos los puntos de una recta equidistan de su paralela.*

TEOREMA 29 (*fig.* 37).

Si los lados opuestos de un cuadrilátero ABCD *son iguales dos á dos,* AB=CD, AD=BC, *serán tambien paralelos dos á dos.*

Tiro la diagonal *BD*: los dos triángulos *ABD* y *CBD* tienen sus tres lados iguales respectivamente; luego dichos triángulos son iguales; y por tanto el ángulo *ABD=BDC*; luego [*Teor.* 7] *AB* y *DC* son paralelas. Tambien el ángulo *ADB=CBD*; luego *BC* y *AD* son paralelas.

TEOREMA 30 (*fig.* 37).

Si dos lados opuestos AB *y* CD *de un cuadrilátero* ABCD *son iguales y paralelos, los otros dos lados* AD *y* BC *son tambien iguales y paralelos.*

Tiro la diagonal *BD*: los dos triángulos *ABD* y *DBC* tienen comun el lado *BD*, el lado *AB=DC* por hipótesi, y el ángulo *ABD=BDC* por alternos entre paralelas; luego [*Teorema* 16] estos triángulos son iguales; luego *AD=BC*, y además el ángulo *ADB=DBC*; luego *AD* y *BC* son paralelas.

TEOREMA 31 (*fig.* 38).

Las diagonales AC *y* BD *de un paralelógramo se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Los triángulos *ABO* y *CDO*, que tienen los lados *AB* y *CD* iguales [*Teor.* 28], los ángulos *ABO* y *CDO* iguales por ser alternos entre paralelas, y los ángulos *BAO* y *DCO* iguales por la misma razon, son iguales [*Teor.* 17]; luego *AO=CO* y *BO=DO*.

23. Se llama paralelógramo *rectángulo*, ó simplemente *rectángulo*, el paralelógramo, cuyos ángulos son rectos.

Si se considera como base uno de los lados del rectángulo, la altura es el lado adyacente.

Cuadrado es un rectángulo, cuyos cuatro lados son iguales.

TEOREMA 32 (*fig.* 39).

Dos paralelógramos ABCD, EFGH, *que tienen dos lados respectivamente iguales,* AB=EF, AD=EH, *é igual el ángulo comprendido,* A=E, *son iguales.*

Coloco el paralelógramo *EFGH* sobre el *ABCD*, de manera que los dos ángulos iguales *A* y *E* coincidan: el punto *F* caerá entonces sobre el punto *B*, por ser $EF=AB$ por hipótesi; el punto *H* caerá sobre el *D*, por ser $EH=AD$ por hipótesi: la recta *HG* caerá sobre la *DC*, porque los ángulos *H* y *D* son iguales, como suplementos de los iguales *A* y *E* [*Teor*. 9, *Recíp*.]. Por la misma razon la recta *FG* caerá sobre la *BC*, y por tanto el punto *G* caerá sobre el punto *C*; luego los dos paralelógramos coinciden, ó son iguales.

Corolario. *Dos rectángulos de igual base y de igual altura son iguales.*

TEOREMA 33 (*fig*. 40).

Las diagonales AC *y* BD *de un rectángulo son iguales.*

Los triángulos rectángulos *ABD* y *ACD* son iguales, por tener el lado *AD* comun á los dos, é iguales los lados *AB* y CD; luego $AC=BD$.

Se llama *rombo* un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales, y cuyos ángulos no son rectos.

TEOREMA 33* (*fig*. 41).

Las diagonales AC *y* BD *de un rombo son perpendiculares entre sí:* pues el punto *A* equidista de *B* y *D*, y el punto *C* equidista tambien de *B* y *D*; luego [*Teor*. 24] *AC* es perpendicular á *BD*.

24. Se llama *trapecio* un cuadrilátero *ABCD* (*fig*. 42) que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no.

Los dos lados paralelos de un trapecio se llaman *bases* del trapecio.

Altura del trapecio es la perpendicular bajada desde un punto de una base á la otra.

TEOREMA 34 (*fig*. 42).

La recta EF *que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es*: 1.° *paralela á las bases* BC *y* AD; 2.° *igual á su semi-suma.*

1.° Tiro por el punto *F* la *HG* paralela al lado *BA*, y prolongo la base *BC* hasta que encuentre en *G* á la *HG*: los triángulos *CFG* y *HFD* son iguales [*Teor*. 17]; luego $GF=HF$.

Luego GF es mitad de GH, ó de su igual AB; y por tanto $GF=BE$. Luego el cuadrilátero $BGFE$ tiene iguales y paralelos los lados EB y FG; luego [*Teor.* 30] la recta EF es paralela á la BG, y por consiguiente á la AD.

3.° Siendo iguales los triángulos CGF y DFH, tendrémos $CG=DH$.

Ahora, $EF=BG=BC+CG$,
y $EF=AH=AD-DH$;
luego $2EF=BC+AD$,
y por consiguiente

$$EF=\frac{BC+AD}{2}.$$

LIBRO III.

Círculo.

CAPITULO I.

Líneas rectas en el círculo.

TEOREMA 35.

Una *recta no puede cortar á una circunferencia mas que en dos puntos*; pues si la cortase en mas, tirando radios á dichos puntos, se tendrian tiradas desde el centro á la recta mas que dos rectas iguales; lo que es imposible [*Teor.* 22, *Corol.*].

TEOREMA 35 * (*fig.* 43).

El diámetro AB *es mayor que cualquiera otra cuerda* DE.

Tiro los radios CD y CE á los estremos de la cuerda DE, y tendré en el triángulo DCE, $DC+CE>DE$; y como $DC+CE=AB$, será $AB>DE$.

TEOREMA 36.

Dos circunferencias de igual radio son iguales: pues colocando la una sobre la otra, de modo que sus centros coincidan, las circunferencias coincidirán por ser sus radios iguales.

TEOREMA 37 (*fig.* 43 *).

Todo diámetro AB *divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales*.

Doblando el círculo por el diámetro *AB*, el arco *ADB* deberá coincidir con el *AEB*; pues si algun punto del arco *ADB* cayese fuera del arco *AEB*, no serian iguales todos los radios de este círculo.

TEOREMA 38 (*fig.* 44).

Tres puntos A, B *y* C, *que no están en línea recta, determinan la posicion de una circunferencia;* ó lo que es igual, *por tres puntos que no están en línea recta puede pasar una circunferencia, y no puede pasar mas que una.*

Juntemos por medio de las rectas *AB* y *BC* los tres puntos *A*, *B* y *C*, y en los puntos medios de estas dos rectas levantemos las *DE* y *FG* perpendiculares á dichas dos rectas: estas perpendiculares se encontrarán; pues si fuesen paralelas, siendo *AB* perpendicular á *DE*, tambien seria perpendicular á *FG*, pero *BC* es perpendicular a *FG*; luego por un punto *B* se podrian tirar dos perpendiculares *BA* y *BC* á una recta *FG*; lo que es imposible. Ahora el punto *O* equidista de los estremos *A* y *B* de la recta *AB* [*Teor* 23, 1.°], é igualmente el punto *O* equidista de los estremos *B* y *C* de la recta *BC*; luego el punto *O* equidista de los tres puntos *A*, *B* y *C*; luego haciendo centro en *O* y describiendo con el radio *OA* una circunferencia, pasará esta por los tres puntos *A*, *B* y *C*. Luego por tres puntos que no están en línea recta puede pasar una circunferencia.

De mostremos ahora que por tres puntos que no están en línea recta no puede pasar mas que una sola circunferencia.

Imaginemos que por los tres puntos *A*, *B* y *C* pase otra circunferencia diferente de la primera: las rectas *AB* y *BC* serán dos de sus cuerdas, y su centro, que debe equidistar de los puntos *A*, *B* y *C*, se hallará á un mismo tiempo en las dos perpendiculares *DE* y *FG* levantadas á las rectas *AB* y *BC* en sus puntos medios [*Teor.* 23, *Recip.* 1.°]; luego su centro será el punto *O*, el mismo que el de la primera circunferencia. Como ademas *OA* es un radio de la segunda circunferencia, esta segunda circunferencia y la primera tienen el mismo centro y el mismo radio, y por tanto coinciden. Luego por tres puntos que no están en línea recta no puede pasar mas que una sola circunferencia.

NOTA. *Si los tres puntos dados estuviesen en línea recta, la* *circunferencia no podria pasar por ellos*; pues está demostrado [*Teor.* 35] que una recta y una circunferencia no pueden tener tres puntos comunes.

Corolario. *Dos circunferencias no pueden cortarse mas que en dos puntos:* pues si tuviesen tres puntos comunes, coincidirian, segun acabamos de demostrar.

25. Una cuerda *AB* (*fig.* 45) de un círculo corresponde á dos arcos *AMB* y *AGB*, los cuales componen toda la circunferencia. Pero cuanto digamos en adelante del arco que corresponde á una cuerda, ó que una cuerda *subtiende*, se referirá al menor de los dos arcos.

TEOREMA 39 (*figuras* 45 y 46).

En círculos iguales ó en un mismo círculo: 1.º *Si dos arcos son iguales, sus cuerdas son tambien iguales.* 2.º *Si dos arcos son desiguales, el mayor tiene mayor cuerda.*

1.º Sean los dos arcos iguales *AMB* y *CND* (*fig.* 45) de dos círculos iguales: digo que sus cuerdas *AB* y *CD* son iguales.

Coloco el círculo *P* sobre su igual *O*, de modo que sus centros coincidan, y que el punto *C* caiga sobre el punto *A*: las dos circunferencias coincidirán [*Teor.* 36]; y como los dos arcos *AMB* y *CND* son iguales por hipótesi, el punto *D* caerá sobre el punto *B*; luego las cuerdas *AB* y *CD*, cuyos estremos son los mismos, son iguales.

Si los arcos iguales *AMB* y *EGF* son de un mismo círculo, acabamos de ver qúe $CD=AB$, y por la misma razon $CD=EF$; luego $AB=EF$.

2.º Sean los dos arcos desiguales *AMB* y *CND* (*fig.* 46), siendo este el mayor de los dos: digo que la cuerda *CD* es mayor que la *AB*.

Tomo desde el estremo *A* del arco menor un arco *AME* igual al mayor *CND*, tiro la cuerda *AE* y los radios *OB* y *OE*: las cuerdas *AE* y *CD* son iguales, segun acabamos de demostrar. Ahora, en los triángulos *OIE*, *AIB* tenemos

$$OI+IE>OE,$$
$$AI+IB>AB:$$

sumando estas dos desigualdades, será

$$OB+AE>OE+AB,$$

y quitando de los dos miembros las partes iguales OB y OE, resulta $AE>AB$, ó bien $CD>AB$ (*a*).

Recíproco. En un mismo círculo ó en círculos iguales:
1.° *Cuerdas iguales subtienden á arcos iguales.*
2.° *La mayor cuerda subtiende á mayor arco.* [21].

NOTA. Aunque los arcos crecen creciendo las cuerdas, no se verifica que los arcos sean proporcionales á las cuerdas; pues si se toma un arco duplo de otro, se verá que su cuerda es menor que el duplo de la cuerda del primero.

26. Se llama *tangente* á una circunferencia una recta que solo tiene un punto comun con la circunferencia. Este punto se llama *punto de contacto.*

La existencia de esta recta se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 40 (*fig.* 47).

La perpendicular AB *al radio, en el punto en que este corta á la circunferencia, es tangente á esta circunferencia.*

Siendo la OC perpendicular á la AB, es menor que cualquiera otra recta OA tirada desde el centro á la AB; luego el punto A está fuera del círculo; y como lo que acabamos de demostrar del punto A, se aplica á cualquier otro punto de la AB, escepto al punto C, se infiere que la recta AB es tangente á la circunferencia.

Recíproco. *La tangente* AB *á una circunferencia en un punto* C *es perpendicular al radio* OC *tirado al punto de contacto.*

Siendo AB tangente, tendrá todos sus puntos fuera del círculo, escepto el punto C; luego el radio OC es la recta mas corta que se puede tirar desde el centro á la tangente; luego [*Teor.* 21, *Recíp.*] el radio OC es perpendicular á la tangente.

Corolario. *En un punto* C *de una circunferencia no se puede tirar mas que una tangente*; puesto que la tangente es perpendicular al radio, y que por un punto de una recta no se puede levantar á la recta mas que una sola perpendicular [*Teorema* 1].

(*a*) Puede darse otra demostracion muy sencilla de este teorema, fundándose en el teorema [20].

TEOREMA 41 (*fig.* 48).

El diámetro FD *perpendicular á una cuerda* AB *divide á esta cuerda y á los dos arcos que ella subtiende en dos partes iguales.*

Tiro los radios *CA* y *CB*, los cuales serán dos oblícuas iguales con respecto á la cuerda *AB*; luego [*Teor.* 22, *Recíproco*] *AE*=*EB*.

Siendo la *DF* perpendicular á la *AB* en su punto medio *E*, serán iguales las cuerdas *AD*, *BD*, y las *AF*, *BF*; luego los arcos *AD* y *DB* serán iguales, y tambien los arcos *AF* y *BF* (*a*).

Nota. *La perpendicular levantada á una cuerda en su punto medio pasa por el centro;* pues el centro equidista de los estremos de la cuerda [*Teor.* 23, *Recíp.*]

TEOREMA 42 (*fig.* 49).

Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales

1.er *caso.* Sean *AB* y *CD* dos cuerdas paralelas; tirando el diámetro *EK* perpendicular á una de estas cuerdas *AB*, será tambien perpendicular á su paralela *CD* [*Teor.* 6, *Recíproco*]; luego, segun el teorema último, serán iguales los arcos *AE* y *BE*, como tambien los *CE* y *DE*; y por tanto sus diferencias *AC* y *BD* serán iguales.

2.º *caso.* Sean paralelas la tangente *FG* y la cuerda *CD*: tirando el diámetro *EK* al punto *E* de contacto, será perpendicular á la tangente y á su paralela la cuerda *CD*; luego los arcos *CE* y *DE* son iguales.

3er *caso.* Sean las paralelas las dos tangentes *FG* y *HI*: tirando una cuerda *CD* paralela á una de las tangentes, y por consiguiente á la otra, serán iguales, segun acabamos de demostrar, los arcos *CE* y *DE*, *CK* y *DK*; luego las sumas *ECK* y *EDK* son iguales.

(*a*) Este teorema pudiera demostrarse siguiendo el método que indica la nota [19].

TEOREMA 43 (*fig*. 50).

En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.° *Dos cuerdas iguales* AB *y* CD *equidistan del centro*.

2.° *Si dos cuerdas* AG *y* CD *son desiguales, la mayor dista menos del centro*.

Tirando los radios *AO* y *CO*; los triángulos rectángulos *OAE* y *OCF* que tienen iguales las hipotenusas *OA* y *OC*, é iguales tambien los catetos *AE* y *CF*, por ser mitades de cuerdas iguales, son iguales [*Teor*. 19]; luego $OE=OF$.

2.° Siendo la cuerda *CD* menor que la cuerda *AG*, el arco *CD* es tambien menor que el arco *ABG*: tomo pues sobre este arco el *AB* igual al *CD*, y tiro la cuerda *AB*, la cual es igual á la *CD* [*Teor*. 39, 1.°], y por consiguiente dista del centro lo mismo que esta. Ahora bien, la *OK* es oblícua á la *AG*, y por consiguiente $OR<OK$; luego con mayor razon $OR<OE$, ó bien $OR<OF$.

Recíproco. En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1° *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales*.

2.° *De dos cuerdas, la que menos dista del centro, es mayor* [21].

CAPITULO II.

Interseccion y contacto de dos circunferencias.

TEOREMA 44 (*fig*. 51).

Si dos circunferencias C *y* c *tienen un punto comun* A *fuera de la recta* Cc *que une sus centros, tambien tendrán otro punto comun*.

Bajemos desde el punto *A* la perpendicular *AP* á la recta *Cc*, tomemos en su prolongacion una parte *PB* igual á la *AP*, y tiremos las rectas *CA* y *CB*, *cA* y *cB*. Las rectas *CA* y *CB* son iguales [*Teor*. 22, 1.°]; luego el punto *B* corresponde á la circunferencia *C*. Tambien las *cA* y *cB* son iguales; luego el punto B corresponde á la circunferencia c; luego el punto B es comun á las dos circunferencias.

Corolario. *Si dos circunferencias tienen un solo punto comun, este punto está en la recta que une los centros;* pues si dicho punto estuviese fuera, las dos circunferencias tendrian, segun el teorema, dos puntos comunes, contra la hipótesi.

TEOREMA 45.

1.° *Si dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

2.° *Si dos circunferencias se tocan esteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.*

3.° *Si dos circunferencias se tocan interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

4.° *Si dos circunferencias son esteriores una á otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

5.° *Si dos circunferencias son interiores una á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

1.° Tiremos los radios CA y cA (*fig.* 52) á uno de los puntos de interseccion; resultará un triángulo ACc, en el cual tendremos [*Teor.* 12] $Cc<CA+cA$, y $Cc>CA-cA$.

2.° Tocándose las circunferencias en el punto A (*fig.* 53), este punto está en la recta que une los centros [*Teor.* 44, *Corol.*]; luego $Cc=CA+cA$.

3.° Hallándose el punto en que las dos circunferencias se tocan en la línea Cc (*fig.* 54) que une los centros [*Teor.* 44, *Corol.*], tendremos $Cc=CA-cA$.

4.° Es evidente (*fig.* 55) que

$$Cc=CA+AB+cB;$$

luego $$Cc<CA+cB.$$

5.° Es evidente (*fig.* 56) que

$$Cc=CA-cB-AB;$$

luego $$Cc<CA-cB.$$

Recíproco. 1.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, las circunferencias se cortan en dos puntos.*

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las circunferencias se tocan esteriormente.*

3.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las circunferencias se tocan interiormente.*

4.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las circunferencias son esteriores una á otra.*

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, las circunferencias son interiores una á otra* [21].

CAPITULO III.

Medida de los ángulos.

27. Llamaremos arco *correspondiente* á un ángulo al arco comprendido entre sus lados, descrito con un radio arbitrario desde el vértice como centro.

TEOREMA 46 (*fig.* 57).

1.° *Si dos ángulos* A *y* D *son iguales, sus arcos correspondientes* BC *y* EF *descritos con igual radio son iguales.*

2.° *Si dos ángulos* A *y* D *son desiguales, el mayor* A *tiene mayor arco correspondiente, estando los dos arcos descritos con igual radio.*

1.° Tiro las cuerdas *BC* y *EF*: los triángulos *ABC* y *DEF* son iguales [*Teor.* 16]; luego las cuerdas *BC* y *EF* son iguales, y por consiguiente los arcos *BC* y *EF* son iguales [*Teorema* 39, *Recíp.* 1.°].

2.° Los triángulos *ABC* y *DEF* tienen los lados *AB* y *AC* iguales á los *DE* y *DF*, y además el ángulo *A* es mayor que el *B*; luego [*Teor.* 20] la cuerda *BC* es mayor que la *EF*: luego el arco *BC* es mayor que el arco *EF* [*Teor.* 39, *Recíproco* 2.°].

Recíproco. 1.° *Si dos arcos de igual radio, correspondientes á dos ángulos, son iguales, los ángulos son iguales.*

2.° *Si dos arcos de igual radio, correspondientes á dos ángulos, son desiguales, el mayor corresponde á mayor ángulo* [21].

28. Se llama *cuadrante* la cuarta parte de la circunferencia.

TEOREMA 47 (*fig.* 58).

El arco BC *correspondiente á un ángulo recto* BAC *es un cuadrante.*

Prolongo el lado AC en sentido contrario al suyo, y haciendo centro en A, describo con un radio arbitrario AB una circunferencia: el arco DBC es media circunferencia [*Teorema* 37]; y como los ángulos BAC, BAD son rectos y por tanto iguales, sus arcos correspondientes BC, BD son iguales; luego BC es la cuarta parte de la circunferencia.

29. Se llaman *comensurables* dos cantidades de una misma naturaleza, cuando tienen una *medida comun*; es decir, cuando existe otra cantidad de la misma naturaleza que está contenida en las dos un número exacto de veces; y se llaman *incomensurables*, cuando no tienen medida comun (*a*).

La razon de dos cantidades comensurables de una misma naturaleza es la de los números de veces que contienen á su medida comun: pues si las dos cantidades son A y B, a su medida comun, m y n los números de veces que está contenida en A y B, será $A=ma$, $B=na$; luego $\frac{A}{B}=\frac{ma}{na}$. Si la unidad, á que se refieren las cantidades A y B, no está determinada, se podrá tomar a por unidad, y entonces $\frac{A}{B}=\frac{ma}{na}=\frac{m}{n}$. Si la unidad á que se refieren A y B está determinada, y es diferente de a, a será un factor comun á los dos términos del quebrado $\frac{ma}{na}$; y por consiguiente se podrá suprimir dicho factor comun, y quedará $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$.

(*a*) No debe confundirse la palabra *medida comun* de dos cantidades con la palabra *medida* de una cantidad (5, *Nota*).

Segun esto, la razon de dos cantidades comensurables de una misma naturaleza es un número comensurable; luego, siempre que la razon de dos cantidades de una misma naturaleza sea un número incomensurable, dichas cantidades serán incomensurables.

TEOREMA 48 (*figs.* 59 y 60).

Dos ángulos BAC, EDF (fig. 59) *son proporcionales á sus arcos correspondientes* BC, EF *trazados con el mismo radio.*

Pueden suceder dos casos: 1.º que los arcos *BC* y *EF* sean comensurables; 2.º que sean incomensurables.

1.er *caso.* Sea *CG* la medida comun de los dos arcos; y supongamos que esté contenida en el arco *BC* 8 veces, y en el arco *EF* 5 veces, tendremos

$$BC : EF :: 8 : 5.$$

Tirando radios á los puntos de division de los arcos, el ángulo *BAC* quedará dividido en 8 ángulos parciales, y el ángulo *EDF* quedará dividido en 5 ángulos parciales: todos estos ángulos parciales son iguales, porque sus arcos correspondientes trazados con el mismo radio son iguales; luego

$$BAC : EDF :: 8 : 5.$$

Por consiguiente

$$BAC : DEF :: BC : EF.$$

2.º *caso.* Si los arcos *BC* y *EF* (*fig.* 60) son incomensurables, imaginemos dividido uno de ellos, por ejemplo, el *EF*, en partes tan pequeñas como queramos, y que se lleve una de estas partes sobre el arco *CB* desde el punto *C*: el último punto de division no podrá caer en *B*, por ser los arcos *BC* y *EF* incomensurables. Sea *R* el último punto de division, y tiremos la recta *AR*.

Siendo comensurables los arcos *RC* y *EF*, tendremos, segun el primer caso,

$$\frac{RAC}{EDF}=\frac{RC}{EF}.$$

Ahora, como el punto *R* puede aproximarse al punto *B* tanto como se quiera, siendo suficientemente pequeñas las divisiones de *EF*, se infiere que *BC* es el límite de la cantidad variable BC; por consiguiente $\frac{BAC}{EDF}$ es el límite de la cantidad variable $\frac{BAC}{EDF}$, y $\frac{BC}{EF}$ es el límite de la cantidad variable $\frac{BC}{EF}$: luego, segun el teorema de los límites [*Alg. elem.*, *Nota 1.ª al fin*], tendremos

$$\frac{BAC}{EDF}=\frac{BC}{EF}.$$

Nota. Si EDF es la unidad para medir el ángulo BAC, la primera razon de la proporcion $\frac{BAC}{EDF}=\frac{BC}{EF}$ es [3, *Nota*] la medida del ángulo BAC; luego la segunda razon $\frac{BC}{EF}$ es tambien la medida del ángulo BAC. Luego *la medida de un ángulo es la razon de su arco correspondiente al arco correspondiente al ángulo tomado por unidad.*

Este enunciado se simplificará, tomando por unidad de los arcos el arco EF correspondiente al ángulo EDF tomado por unidad de los ángulos; pues entonces la razon $\frac{BC}{EF}$ es la medida del arco, ó abreviadamente, es el arco; luego en tal caso, *la medida de un ángulo es su arco correspondiente.*

Se toma ordinariamente por unidad de ángulos el ángulo recto (a); luego, para que la medida de un ángulo sea su arco, ó lo que es igual, para que el ángulo y su arco correspondiente tengan la misma medida ó el mismo valor numérico, se tomará por unidad de arcos el cuadrante [*Teor.* 47].

Para valuar los ángulos con facilidad, se dividen el cuadrante y el ángulo recto en 90 partes iguales llamadas *grados;* cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos;* cada minuto en 60 partes iguales llamadas *segundos*. Los

---

(a) En las partes elevadas de las matemáticas se toma por unidad de ángulos un ángulo cuyo arco correspondiente rectificado es igual al radio.

grados, minutos y segundos se indican respectivamente con los signos °, ′, ″. Asi, si un ángulo ó su arco correspondiente, que sabemos ya tienen la misma medida, es de 40 grados, 25 minutos y 30 segundos, se indicará $40° 25' 30''$.

30. Dos arcos cuya suma es un cuadrante, se llaman *complementarios ó complemento* uno de otro.

Dos arcos cuya suma es media circunferencia, se llaman *suplementarios ó suplemento* uno de otro.

31. Se llama ángulo *inscripto* el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son dos cuerdas.

TEOREMA 49 (*figs.* 61, 62 *y* 63).

La medida del ángulo inscripto es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Pueden suceder tres casos: 1.° que el centro esté en uno de los lados del ángulo; 2.° que el centro se halle comprendido entre los lados del ángulo; 3.° que el centro se halle fuera de dichos lados.

1.° Sea el ángulo *ABC* (*fig.* 61): digo que su medida es la mitad del arco *AC*.

Para domostrarlo, tiro el radio *AO*, y tendremos que el ángulo *AOC* esterno al triángulo *ABO* es igual á la suma de los ángulos *ABO* y *BAO;* mas estos dos ángulos son iguales, porque sus lados opuestos *AO* y *BO* son iguales; luego el ángulo *AOC* es doble del ángulo *ABO*, ó lo que es igual, el ángulo *ABO* es mitad del ángulo *AOC*. La medida de este es el arco *AC;* luego la medida del ángulo *ABC* es la mitad del arco *AC*.

2.° Sea el ángulo *ABD* (*fig.* 62): tiro el diámetro *BC*. La medida del ángulo *ABC* es, segun acabamos de demostrar $\frac{AC}{2}$, y la del ángulo *DBC* es $\frac{CD}{2}$; luego la del ángulo *ABD*, suma de los dos ángulos *ABC* y *DBC*, será

$$\frac{AC}{2}+\frac{CD}{2}=\frac{AC+CD}{2}=\frac{ACD}{2}.$$

3.° Sea el ángulo *ABE* (*fig.* 63): tiro el diámetro *BC*. La medida del ángulo *EBC* es $\frac{EC}{2}$, y la del ángulo *ABC* es $\frac{AC}{2}$;

luego la del ángulo EBA, diferencia de los ángulos EBC y ABC, será $\frac{EC-AC}{2}$ ó $\frac{EA}{2}$.

Corolarios. 1.° *Todos los ángulos inscriptos* ABC, ADC, AEC, (fig. 62*) *que comprenden entre sus lados el mismo arco* AC, *son iguales*; pues tienen por medida la mitad del arco AC.

2.° *El ángulo inscripto* ABC (*fig* 63*), *cuyos lados comprenden media circunferencia, es recto*: pues su medida es la mitad de la media circunferencia, ó un cuadrante.

TEOREMA 50 (*fig.* 64).

La medida del ángulo cuyos lados son una tangente y una cuerda, es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Pueden suceder tres casos: 1.° que el centro esté en la cuerda; 2.° que el centro esté entre los lados del ángulo; 3.° que el centro esté fuera de los lados del ángulo,

1.° Sea el ángulo CBD formado por la tangente CB y el diámetro BD: este ángulo es recto [*Teor.* 40, *Recip.*], y por tanto su medida es un cuadrante, que es la mitad del arco BAD.

2.° Sea el ángulo CBE: tiro el diámetro BD. La medida del ángulo CBD es $\frac{BAD}{2}$, la del ángulo inscripto EBD es $\frac{ED}{2}$; luego la del ángulo CBE es $\frac{BAD+ED}{2}$ ó $\frac{BAE}{2}$.

3.° Sea el ángulo CBA: tiro el diámetro BD. La medida del ángulo CBD es $\frac{BAD}{2}$, y la del ángulo inscripto ABD es $\frac{AD}{2}$; luego la del ángulo CBA es

$$\frac{BAD-AD}{2} \text{ ó } \frac{BA}{2}.$$

TEOREMA 51 (*fig.* 65).

La medida del ángulo ABD *formado por una cuerda* AB *y la prolongacion* BD *de otra cuerda* BC *es la semi-suma de los arcos que las dos cuerdas subtienden.*

Tirada la cuerda AC, será el ángulo $ABD=A+C$ [*Teor.* 13, *Corol.* 1.°]: la medida del ángulo A es $\frac{BFC}{2}$, y la del ángulo C es $\frac{BEA}{2}$; luego la del ángulo ABD es $\frac{BEA+BFC}{2}$.

TEOREMA 52 (*fig.* 66).

La medida del ángulo ABC, *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, es la semi-suma de los arcos* AC *y* ED *comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos.*

Tiro la cuerda DC: el ángulo $ABC=D+C$; luego la medida del ángulo ABC será la suma de las medidas de los ángulos D y C, es decir, $\frac{AC}{2}+\frac{ED}{2}$ ó $\frac{AC+ED}{2}$.

TEOREMA 52* (*fig.* 67).

La medida del ángulo, cuyo vértice está fuera del círculo, es la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Pueden suceder tres casos: 1.° que los lados sean dos secantes; 2.° una secante y una tangente; 3.° dos tangentes.

1.° Sea el ángulo ABC formado por dos secantes: tiro la DC, y tengo $ADC=ABC+C$, y por consiguiente $ABC=ADC-C$. La medida del ángulo ABC será segun esto la diferencia de las medidas de los ángulos ADC y C, esto es, $\frac{AC}{2}-\frac{DE}{2}=\frac{AC-DE}{2}$.

2.° Sea el ángulo CBH formado por una secante y una tangente: tiro la cuerda EF. El ángulo $CEF=B+EFB$, y por consiguiente $B=CEF-EFB$. Las medidas de estos dos ángulos son $\frac{CF}{2}$ y $\frac{EF}{2}$; luego la medida del ángulo CBF será $\frac{CF-EF}{2}$.

3.° Sea el ángulo KBH formado por dos tangentes: tiro la cuerda GF. El ángulo $GFH=GBF+BGF$, y por consiguiente

$$GBF=GFH-BGF.$$

La medida del ángulo GFH es $\frac{GCF}{2}$, y la del ángulo BGF es $\frac{GEF}{2}$; luego la del ángulo GBF será $\frac{GCF-GEF}{2}$.

PROBLEMAS

CORRESPONDIENTES A LOS TRES LIBROS PRIMEROS (*a*).

PROBLEMA 1 (*fig.* 68).

En un punto A *de una recta* CB, *levantar una perpendicular á esta recta.*

Tómense sobre la recta dada á uno y otro lado del punto A dos partes iguales AB y AC; haciendo centro en los puntos B y C descríbanse con un radio cualquiera, pero mayor que AB, dos arcos, los cuales se cortarán en dos puntos; desde uno de dichos puntos D tírese la DA, y esta será la perpendicular pedida.

En efecto, los dos arcos se cortarán en dos puntos, porque la distancia BC de los centros es menor que la suma de los radios; y es mayor que la diferencia de estos, pues en el caso actual esta diferencia es cero [*Teor.* 45, *Recíp.* 1.°]. Ahora, cada uno de los puntos A y D equidista de los puntos B y C; luego [*Teor.* 24] DA es perpendicular á CB.

PROBLEMA 2 (*fig.* 69).

En el estremo A *de una recta* AC, *que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.*

Descríbase una circunferencia que pase por el punto A, y

(*a*) Véase la nota primera al fin de la Geometría.

corte á la recta AC en un punto C; tírese el diámetro COB y la recta BA, que será la perpendicular pedida; puesto que el ángulo A es recto [*Teor*. 49, *Corol.* 2.º].

PROBLEMA 3 (*fig.* 70).

Desde un punto D *dado fuera de una recta* AB, *bajar una perpendicular á esta recta.*

Desde el punto dado D como centro descríbase un arco, que corte á la recta dada en dos puntos A y B; desde estos puntos descríbanse con el mismo radio dos arcos que se cortarán en un punto C: tírese la DC, y esta será la perpendicular pedida.

En efecto, siendo el radio, con que se han descrito los dos últimos arcos, igual al radio AD, y siendo $AD+BD>AB$, será $AC+CB>AB$; luego la distancia de los centros es menor que la suma de los radios, y es tambien mayor que la diferencia de estos radios, que en el caso actual es cero: luego [*Teor*. 45, *Recíp*. 1.º] los arcos se cortan en dos puntos D y C. Ahora, cada uno de los puntos D y C se halla á igual distancia de los puntos A y B; luego [*Teor*. 24] DC es perpendicular á AB.

PROBLEMA 4 (*fig.* 71).

Dada una recta AB *de longitud definida, dividirla en dos partes iguales por medio de una perpendicular.*

Desde los estremos A y B describo con un radio mayor que la mitad de la recta AB dos arcos que se cortarán en dos puntos C y D [*Teor*. 45, *Recíp*. 1.º], tiro la CD, y esta será perpendicular á la AB, y la dividirá en dos partes iguales; puesto que cada uno de los puntos D y C está á igual distancia de los estremos A y B de la recta AB.

NOTA. Dividiendo del mismo modo cada mitad de la recta en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos, y asi sucesivamente, se podrá dividir la recta en 4, 8, 16, etc. partes iguales.

PROBLEMA 5 (*fig.* 72).

Dado un ángulo A, *una recta* DF *y un punto* D *en ella, tirar por este punto otra recta que forme con la recta dada un ángulo igual al dado*

Con un radio arbitriario trazo el arco *BC* correspondiente al angulo *A*, y haciendo centro en *D* trazo con el mismo radio un arco indefinido: tomo sobre este arco una parte *FE* igual al arco *BC*, y tiro la recta *DE*, la cual formará con la *DF* el ángulo *D* igual al dado *A*; puesto que son iguales sus arcos correspondientes *BC* y *EF* trazados con el mismo radio [*Teorema* 46, *Recíp*. 1.°].

PROBLEMA 6 (*fig*. 73).

Por un punto G *dado fuera de una recta* CD, *tirar una paralela á esta recta.*

Haciendo centro en un punto cualquiera *F* de la *CD* describo el arco *GH*, y haciendo en seguida centro en *G* describo con el mismo radio el arco indefinido *FK*; tomo sobre él una parte *FA* igual al arco *GH*, y tirando la *GA*, esta será la paralela pedida.

Para demostrarlo, tiro la *GF*: serán iguales los ángulos *DFG* y *AGF*, porque lo son sus arcos correspondientes *GH* y *AF* trazados con el mismo radio; luego [*Teor*. 7] *GA* es paralela á *CD*.

PROBLEMA 7 (*fig*. 74).

Por un punto G, *dado fuera de una recta* CD, *tirar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á un ángulo dado.*

Por un punto cualquiera *A* de la *CD* tírese la *AH*, que forme con la *CD* un ángulo igual al dado; por el punto G tírese una paralela *GF* á la *AH*, y la *GF* será la recta perdida.

En efecto, el ángulo $GFD=HAD$, por ser correspondientes entre paralelas; pero *HAD* es igual al ángulo dado; luego el ángulo *GFD* es tambien igual al ángulo dado.

PROBLEMA 8 (*fig*. 75).

Dados dos lados m, n *y el ángulo comprendido* K *de un triángulo, construir este triángulo.*

En el estremo *A* de una recta $AB=m$ construyo un ángulo $A=K$, tomo sobre la recta *AE* una parte $AC=n$, y tirando la *BC*, el triángulo *ABC* será el pedido.

NOTA. Otro triángulo, que se construyera con los mismos datos seria igual al *ABC*, pues los dos tendrian dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego el problema es determinado.

PROBLEMA 9 (*fig.* 76.)

Dados un lado m *y dos ángulos* K *y* L *de un triángulo, construir el triángulo,*

Pueden suceder dos casos: 1.° que los ángulos dados *K* y *L* sean adyacentes al lado dado *m;* 2.° que uno de los ángulos *K* sea adyacente y el otro *L* opuesto al lado *m.*

1.er *caso.* En los estremos de una recta *AB=m* (*fig.* 1), construyo dos ángulos *A* y *B* iguales á los ángulos dados *K* y *L;* y el triángulo *ABC* que resulta, será el pedido.

2.° *caso.* En el estremo *A* de una recta *AB=m* (*fig.* 2) construyo un ángulo *A=K*, por el otro estremo *B* tiro una recta *BE* paralela á la *AF*, y construyendo el ángulo *CBE=L*, el triángulo *ABC* será el pedido: puesto que el lado *AB=m*, el ángulo *A=K*, y el ángulo *ACB=CBE=L.*

NOTA 1.ª Este problema seria imposible, si la suma de los dos ángulos *K* y *L* fuese igual á dos rectos ó mayor que dos rectos [*Teor.* 13].

Pero si la suma de los dos ángulos *K* y *L* es menor que dos rectos, el problema es posible; pues en el primer caso, si las rectas *AC* y *BC* fuesen paralelas, la suma de los ángulos *A* y *B* ó *K* y *L* seria igual á dos rectos, contra el supuesto [*Teor.* 9, *Recíp.*].

En el segundo caso, la recta *BC* tiene que encontrar á la *AF;* pues si no, por el punto *B* pasarian dos paralelas á la recta *AF*, lo que es imposible.

NOTA 2.ª Otro triángulo que se construyese con los mismos datos, seria igual al *ABC*, pues los dos tendrian un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales; y por tanto el problema es determinado.

PROBLEMA 10 (*fig.* 77).

✗ *Dados los tres lados* m, n *y* p *de un triángulo, construir el triángulo.*

Haciendo centro en los estremos de una recta *AB* igual á cualquiera de los tres lados, á *m* por ejemplo, describo dos arcos con dos radios iguales á *n* y *p*, y tiro desde el punto *C* de interseccion de estos dos arcos las rectas *CA* y *CB*, y el triángulo *ABC* será el pedido.

Nota 1.ª Este problema seria imposible, si el mayor de los tres lados fuese igual ó mayor que la suma de los otros dos [*Teor.* 12]. Pero si el mayor de los tres lados es menor que la suma de los otros dos, el problema es posible; pues cualquiera de los tres lados es en tal caso menor que la suma de los otros dos; luego $m<n+p$, $n<m+p$, y por consiguiente $m>n-p$; es decir que la distancia m de los centros de los arcos es menor que la suma de los radios n y p, y mayor que su diferencia: luego los arcos se cortarán en dos puntos.

Nota 2.ª Otro cualquier triángulo, que se construyese con los mismos datos, seria igual al triángulo *ABC*, pues los dos tendrian sus tres lados respectivamente iguales; luego el problema es determinado.

PROBLEMA 11 (*fig.* 78).

Dados la hipotenusa m *y un cateto* n, *construir el triángulo.*

1.ª *construccion* (fig. 1). Construyo un ángulo recto *A*, sobre uno de sus lados indefinidos tomo la parte $AC=n$, y haciendo centro en *C* describo con el radio m un arco, que cortará en *B* al otro lado, tiro la *CB*, y el triángulo *ACB* será el pedido: pues tiene la hipotenusa $CB=m$ y el cateto $AC=n$.

2.ª *construccion* (fig. 2). Sobre una recta $BC=m$ describo un semi-círculo; desde uno de los estremos *C* del diámetro *BC* describo con el radio $CA=n$ un arco, que cortará en *A* á la semi-circunferencia; tiro las cuerdas *AB* y *AC;* y el triángulo *ABC* será el pedido: pues tiene recto el ángulo *A*, la hipotenusa $BC=m$ y el cateto $AC=n$.

Nota. Otro triángulo cualquiera, que se construyese con los mismos datos, seria igual al *ABC*, pues los dos tendrian las hipotenusas iguales y un cateto del uno igual á un cateto del otro; luego el problema es determinado.

PROBLEMA 12 (*fig.* 79).

Dados dos lados m, n *y el ángulo* K *opuesto á uno de ellos* m, *construir el triángulo.*

Construyo un ángulo $BAD=K$ (*fig.* 1), tomo sobre uno de sus lados una parte $AB=n$, y haciendo centro en *B* describo con el radio m un arco, que en general cortará al lado AD en dos puntos C y C': tiro la BC, y el triángulo ABC es el pedido; pues tiene el ángulo $A=K$, el lado $AB=n$ y el lado $BC=m$.

Nota. Si el lado m opuesto al ángulo K es mayor que el lado n adyacente á dicho ángulo, el arco descrito desde B cortará á la recta indefinida en dos puntos C y C', uno á la derecha del punto A y otro á la izquierda; pues si desde B bajamos la perpendicular BE á la AD, siendo el radio del círculo mayor que BA, los puntos C y C' de interseccion del círculo y la recta AD distarán del punto E mas que el punto A [*Teor.* 22, *Recíp.* 2.°]; luego el punto A estará comprendido entre dichos puntos C y C'. Tirando pues la recta BC, el triángulo BAC será el único que satisface al problema.

Si el lado m es igual al n (*fig.* 2) (lo que no podrá suceder á no ser agudo el ángulo K), el segundo punto de interseccion del arco y la recta AD estará en A, y el triángulo isósceles ABC será el pedido.

Si el lado m es menor que el n (*fig.* 3) (lo que exije que el ángulo K sea agudo), pero mayor que la perpendicular BE, el arco cortará á la AD en dos puntos C y C' á la derecha de A; y los dos triángulos ABC, ABC' satisfacen á la cuestion; la cual por lo tanto tiene dos soluciones.

Si el lado m es igual á la perpendicular BE, no habrá mas que un solo triángulo, que es el triángulo rectángulo ABE.

Si el lado n es menor que la perpendicular BE, el problema es imposible.

PROBLEMA 13 (*fig.* 80).

Circunscribir un círculo á un triángulo ABC, *es decir, trazar una circunferencia, que pase por los tres vértices del triángulo.*

En los puntos medios de dos de los lados AB y AC levanto dos perpendiculares, y haciendo centro en su punto de interseccion O, describo con el radio OA una circunferencia, que pasará por los tres vértices del triángulo: pues correspondiendo el punto O á las dos perpendiculares DO y FO levantadas en los puntos medios de las rectas AB y AC, equidista de los tres puntos A, B y C [*Teor.* 23, 1.°].

Nota 1.ª Está demostrado [*Teor.* 38] que las perpendiculares *DO* y *FO* se encuentran, y que por los tres vértices no puede pasar mas que una circunferencia.

Nota 2.ª Si en el punto medio *E* del tercer lado *BC* levantamos una perpendicular á esta recta, dicha perpendicular pasará por el punto *O* equidistante de *B* y *C* [*Teor.* 23, *Recíp.* 1.º]. Luego *las tres perpendiculares á los tres lados de un triángulo levantadas en los puntos medios de dichos lados, se encuentran en un mismo punto, centro del círculo circunscripto al triángulo.*

Nota 3.ª Este problema puede enunciarse así: *trazar una circunferencia que pase por tres puntos que no esten en línea recta.*

PROBLEMA 14.

Dado un círculo ó un arco de círculo, hallar su centro.

Tomo tres puntos en la circunferencia ó en el arco, y los uno por medio de dos cuerdas; en los puntos medios de estas cuerdas levanto dos perpendiculares, y el punto de su encuentro será el centro: pues las perpendiculares levantadas en los puntos medios de las cuerdas pasan por el centro [*Teor.* 41, *Nota*]; luego el punto de su interseccion será el centro.

PROBLEMA 15 (*fig.* 81).

Dada una recta CD *y dos puntos* A *y* B *á un mismo lado de ella, hallar un punto en la recta, tal que si desde él se tiran dos rectas á los dos puntos dados, los ángulos que estas rectas forman con la recta dada sean iguales entre sí.*

Desde cualquiera de los dos puntos dados *B* bajo una perpendicular *BE* á la *CD*, la prolongo, tomo en su prolongacion *B'E*=*BE*, y tiro la recta *AB'*; el punto *I* será el punto pedido.

En efecto, tirando la recta *IB*, los triángulos rectángulos *IBE*, *IB'E* son iguales [*Teor.* 16]; luego el ángulo *BIE*=*B'IE*: pero tambien el ángulo *AIC*=*B'IE;* luego los ángulos *AIC*, *BIE* son iguales.

Nota 1.ª El camino mas corto para ir desde el punto *A* al punto *B*, tocando á la recta *CD*, es el *AIB*.

En efecto, otro camino tal como *AFB* se compone de las

Francisco Sagu

dos rectas AF y FB; y si tiramos la FB', será $FB'=FB$ [*Teor.* 22]; luego

$$AF+FB=AF+FB';$$

pero $$AF+FB'>AI+IB';$$

luego $$AF+FB>AI+IB.$$

Nota 2.ª Por medio de este problema se da bola por tabla en el juego del billar.

PROBLEMA 16.

Por un punto dado en una circunferencia tirar una tangente á dicha circunferencia.

Tírese un radio al punto dado, en su estremo levántesele una perpendicular, y esta será la tangente pedida [*Teor.* 40].

PROBLEMA 17 (*fig.* 82).

Desde un punto A *dado fuera de un círculo, tirar una tangente á la circunferencia.*

Júntense el punto dado A y el centro de la circunferencia dada C por medio de una recta AC; considerando á AC como diámetro, descríbase una circunferencia, y tirando las rectas AB y AD á los puntos de interseccion de las dos circunferencias, estas serán las tangentes pedidas.

Para demostrarlo, tiro los radios CB y CD: el ángulo ABC, que tiene el vértice en la circunferencia ABD, y cuyos lados comprenden la media circunferencia ADC, es un ángulo recto; luego AB es perpendicular á CB, y por tanto AB es tangente á la circunferencia C. Del mismo modo se demuestra que AD es tangente á la circunferencia C.

Nota. *Las dos tangentes* AB *y* AD *tiradas desde el punto* A *son iguales*; pues los triángulos rectángulos ABC y ADC son iguales [*Teor.* 19].

PROBLEMA 18 (*fig.* 83).

Describir sobre una recta dada AB *un arco capaz de un ángulo dado* K; es decir, *describir un arco, tal que todos los* *ángulos que tengan el vértice en él, y cuyos lados pasen por los estremos de la recta* AB, *sean iguales al ángulo dado* K.

En el estremo *A* formo un ángulo *BAC*=*K*, levanto en el punto *A* una perpendicular *AD* á la *AC*, y en el punto medio *E* de la *AB* levanto otra perpendicular á la *AB*: estas dos perpendiculares se encontrarán en un punto O, porque la suma de los dos ángulos *OAE* y *OEA* es menor que dos rectos. Haciendo centro en *O*, y describiendo con el radio *OA* una circunferencia, el arco *AGB* será el arco capaz del ángulo dado *K*.

En efecto, la circunferencia descrita desde el centro *O* con el radio *OA* pasará por *B*, porque las dos distancias *OA* y *OB* son iguales [*Teor*. 23]. La recta *AC* es perpendicular al radio *OA*, y por consiguiente es tangente á dicha circunferencia. Un ángulo cualquiera *AGB* inscrito, que comprenda entre sus lados el arco *AB*, es igual al ángulo *BAC* formado por la tangente *AC* y la cuerda *AB*, pues estos dos ángulos tienen por medida la mitad del arco *AB*; y como el ángulo *BAC* es igual al ángulo dado *K*, el ángulo *AGB* será tambien igual al ángulo *K*.

PROBLEMA 19 (*fig*. 84).

Dividir un ángulo BAC *en dos partes iguales.*

Haciendo centro en *A* trazo con un radio cualquiera el arco *BC* correspondiente á este ángulo; desde los puntos *B* y *C* describo con el mismo radio dos arcos que se cortarán en un punto *D* [*Teor*. 45, *Recíp*. 1.°]; tiro la *DA*, y esta dividirá al ángulo *BAC* en dos partes iguales.

En efecto, tirando las rectas *DB* y *DC*, los triángulos *BAD* y *CAD* son iguales [*Teor*. 18]; luego los ángulos *BAO* y *CAO* son iguales.

NOTA. Dividiendo cada ángulo mitad en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos iguales, y asi sucesivamente, se podrá dividir un ángulo en 4, 8, 16, 32, etc. partes iguales.

PROBLEMA 20 (*fig*. 85).

Inscribir un círculo en un triángulo ABC; es decir, *trazar una circunferencia á la cual sean tangentes los tres lados del triángulo.*

Divídanse en dos partes iguales dos ángulos A y C del triángulo, las bisectrices AO y CO se encontrarán en un punto O; pues si no, la suma de los ángulos OAC y OCA valdria dos rectos, lo que es absurdo. El punto de encuentro O de las bisectrices será el centro del círculo que se quiere construir; pues todos los puntos de la OA equidistan de los lados AB y AC [*Teor.* 25, 1.°], todos los puntos de la CO equidistan de los lados AC y BC; luego el punto O equidista de los tres lados AB, AC y BC; luego las tres perpendiculares OP, OQ y OR son iguales: si pues hago centro en O, y describo con el radio OP una circunferencia, pasará esta por los puntos P, Q y R; y como los lados del triángulo son perpendiculares á los radios OP, OQ y OR, serán tangentes al círculo; y por consiguiente el círculo quedará inscripto en el triángulo.

Nota 1.ª Otro punto cualquiera diferente del punto O estará fuera de una de las dos bisectrices, ó fuera de las dos, y por consiguiente no podrá equidistar de los tres lados del triángulo [*Teor.* 25, 2.°]. Luego *en un triángulo no se puede inscribir mas que una sola circunferencia.*

Nota 2.ª Si tiramos la bisectriz del ángulo B, pasará por el punto O [*Teor.* 25, *Recíp.* 1.°]. Luego *las tres bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un mismo punto, centro del círculo inscripto.*

PROBLEMA 21 (*fig.* 86).

Dadas dos rectas comensurables AB *y* CD, *hallar su mayor medida comun, y la razon de dichas rectas.*

Siendo $AB>CD$, llévese la recta CD sobre la AB todas las veces que se pueda: supongamos que CD esté contenida en AB dos veces, y quede un residuo EB. Llevo EB sobre CD; supongo que esté contenida tres veces, y quede un resíduo FD. Llevo FD sobre EB, y supongo que esté contenida dos veces, y quede un resíduo GB. Llevo GB sobre FD; supongo esté contenida tres veces exactamente: GB será la mayor medida comun de las dos rectas AB y CD.

Para demostrarlo, tengo las igualdades

$$AB=2CD+EB,\ CD=3EB+FD,$$
$$EB=2FD+GB,\ FD=3GB.$$

GB está contenida exactamente en FD, y por consiguiente en EB; GB está contenida exactamente en FD y en $3EB$, y por consiguiente en CD; GB está contenida exactamente en EB y en $2CD$, y por consiguiente en AB: luego GB es medida comun de AB y CD.

Para demostrar ahora que GB es la mayor medida comun de AB y CD, llamo D á esta mayor medida comun, y tendré que estando D contenida exactamente en AB y en $2CD$, lo estará en EB; estando D contenida exactamente en CD y en $3EB$, lo estará en FD; estando D contenida exactamente en EB y en $2FD$, lo estará en GB: luego D no es mayor que GB; y pues GB está contenida exactamente en AB y CD, se infiere que GB es la mayor medida comun de AB y CD.

Para hallar ahora la razon de las rectas AB y CD, tenemos segun las igualdades anteriores:

$$EB=2\times 3GB+GB=7GB,$$
$$CD=3\times 7GB+3GB=24GB,$$
$$AB=2\times 24GB+7GB=55GB;$$

luego $$\frac{AB}{CD}=\frac{55}{24}.$$

22. *Dadas dos rectas incomensurables, hallar su razon aproximada.*

Procédase como en el problema anterior, hasta que se llegue á un resíduo suficientemente pequeño, despréciese este resíduo, y hállese como antes la razon de las dos rectas.

23. *Medir una línea recta*

Hállese la razon entre la recta y la unidad, y esta razon será la medida de la recta (3, *Nota*).

LIBRO IV.

Polígonos semejantes.

CAPITULO I.

Lineas proporcionales.

TEOREMA 54 (*fig.* 87).

Si se divide una recta AB *en partes iguales, y por los puntos de division* A, C, D, B *se tiran paralelas* AE, CF, DG, BH, *que encuentren á otra recta* EH, *quedará esta tambien dividida en partes iguales entre sí.*

Tiro las *EI*, *FK*, *GL* paralelas á la *AB*: tendremos [*Teorema* 28] *EI*=*AC*, *FK*=*CD*, *GL*=*DB*; y como por hipótesi son iguales las partes *AC*, *CD*, *DB*, las *EI*, *FK*, *GL* serán tambien iguales. Además, siendo *EI*, *FK*, *GL* paralelas á la *AB*, son paralelas entre sí, y por tanto los ángulos *IEF*, *KFG*, *LGH* serán iguales [*Teor.* 8, *Recíp.*], como tambien [*Teorema* 11, 1.°] los ángulos *EIF*, *FKG*, *GLH*; luego los triángulos *EIF*, *FKG*, *GLH*, que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales; luego *EF*=*FG*=*GH*.

TEOREMA 55 (*figs.* 88 y 89).

Si en un trapecio ABCD *se tira una paralela* EF *á las bases, cortará á los dos lados* AB *y* DC *del trapecio en partes proporcionales;* es decir, que se tendrá la proporcion

$$AE : EB :: DF : FC.$$

Tenemos que considerar dos casos: 1.° las dos partes AE y EB son comensurables; 2.° dichas dos partes son incomensurables.

1.er *caso.* Supongamos que AG (*fig.* 88) sea la medida comun de las rectas AE y EB, y que esté contenida en AE 4 veces y en EB 7 veces: tendremos [29] la proporcion

$$AE : EB :: 4 : 7.$$

Tirando por los puntos de division paralelas á las bases, quedará la recta DC dividida en partes iguales [*Teor.* 54], de las que la DF contendrá 4, y 7 la FC; luego será

$$DF : FC :: 4 : 7.$$

De esta proporcion y de la anterior resulta esta otra:

$$AE : EB :: DF : FC.$$

2.° *caso.* Si las rectas AE y EB (*fig.* 89) son incomensurables, imaginemos dividida una de ellas, la EB por ejemplo, en partes iguales, tan pequeñas como queramos; y llevando una de estas partes sobre la recta EA desde el punto E, el último punto de division no podrá caer en A, por ser las rectas incomensurables: sea G el último punto de division, y tiremos la recta GH paralela á la AD. Siendo comensurables las rectas GE y EB, tendremos, segun el primer caso, $\frac{GE}{EB}=\frac{FH}{FG}$. Ahora, como las partes en que se divide la recta EB son tan pequeñas como se quiera, se infiere que el punto G puede aproximarse al punto A tanto como se quiera, y que por tanto AE es el límite de la cantidad variable GE; luego $\frac{AE}{EB}$ es el límite de la cantidad variable $\frac{GE}{EB}$, é igualmente $\frac{DF}{FC}$ es el límite de la variable $\frac{HF}{FC}$: luego, segun el teorema de los límites [*Alg. elem., Nota, al fin*],

$$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}.$$

NOTA. De la proporcion $AE : EB :: DF : FC$ resultan otras dos [*Aritm.* 172]:

$$AE+EB : AE :: DF+FC : DF,$$

ó bien
$$AB : AE :: DC : DF.$$

Tambien
$$AE+EB : EB :: DF+FC : FC,$$

ó bien
$$AB : EB :: DC : FC.$$

Recíproco. *Si una recta* EF (fig. 90) *divide en partes proporcionales á los lados* AB *y* DC *de un trapecio, será paralela á las bases.*

Si EF no fuese paralela á las bases, por el punto E se podria tirar la EG paralela á la BC, y por consiguiente á la AD; y segun el teorema directo, tendríamos la proporcion

$$AB : AE :: DC : DG;$$

pero por hipótesi tenemos

$$AB : AE :: DC : DF;$$

luego, como estas dos proporciones tienen los tres primeros términos los mismos, resultaria $DG=DF$; lo que es absurdo.

32 NOTA. Generalizando el método de demostracion que hemos seguido en este teorema recíproco, y en los recíprocos de los 5, 6, 7 y 21, tendremos la regla siguiente, para la demostracion de los teoremas recíprocos, que no están en el caso de la nota [21].

Supóngase que la conclusion no es cierta, y ejecútese una construccion en que se verifique la hipótesi del teorema directo, dedúzcase la conclusion de dicho teorema directo, y el absurdo quedará manifiesto.

En adelante, cuando algun teorema recíproco se halle en este caso, lo advertiremos, y dejaremos la demostracion al cuidado del lector; si no es preferible la demostracion directa, como en los teoremas 29 y 30 recíprocos del 28, y en el recíproco del 40.

TEOREMA 56 (*fig.* 91).

Si en un triángulo ABC *se tira una recta* DE *paralela á un lado* AC, *divide á los otros dos lados en partes proporcionales; y recíprocamente.*

1.° Por el punto B tiro una paralela á la DE, tomo sobre ella una parte arbitraria BF, por el punto F tiro la FH paralela á BC, y prolongo las DE y AC hasta que encuentren á la FH en los puntos G y H. Siendo en el trapecio $ABFH$ la DG paralela á la AH, tendremos la proporcion

$$BD : DA : : FG : GH;$$

pero $FG=BE$ y $GH=EC$; luego

$$BD : DA : : BE : EC.$$

2.° Hagamos la misma construccion. Tenemos por hipótesi la proporcion

$$BD : DA : : BE : EC.$$

Siendo $BE=FG$ y $EC=GH$, será tambien

$$BD : DA : : FG : GH;$$

luego [*Teor.* 55, *Recíp.*] la DG es paralela á la AH.

NOTA. De la proporcion $BD : DA : : BE : EC$ resultan otras dos [*Aritm.* 172]:

$$BD+DA : BD : : BE+EC : BE,$$

ó bien $$BA : BD : : BC : BE.$$

Tambien $BD+DA : DA : : BE+EC : EC,$

ó bien $$BA : DA : : BC : EC.$$

TEOREMA 57 (*fig.* 92).

La bisectriz BD *de un ángulo* B *de un triángulo, divide al lado* AC *opuesto á dicho ángulo en dos partes* AD *y* DC *proporcionales á los lados adyacentes* AB *y* BC.

Tiro por el punto C la CE paralela á la BD, y la prolongo hasta que encuentre á la prolongacion de la AB; tendremos [*Teor*. 56]

$$AD : DC :: AB : BE.$$

Ahora, el ángulo $E = ABD$, por ser correspondientes entre paralelas; el ángulo $ECB = CBD$, por ser alternos entre paralelas: y como por hipótesi es el ángulo $ABD = CBD$, serán iguales los ángulos E y ECB; luego sus lados opuestos BE y BC son iguales; y por tanto tendremos

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Recíproco. *Si una recta* BD, *que sale del vértice de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, será bisectriz de dicho angulo* [32].

CAPITULO II.

Triángulos semejantes.

33. En dos triángulos que tengan sus ángulos respectivamente iguales, se llaman *lados homólogos* los lados opuestos á ángulos iguales.

Asi, si los triángulos ABC, abc (*fig*, 93) tienen los ángulos A y a iguales, como tambien los B y b, los C y c; los lados BC y bc opuestos á los ángulos iguales A y a son lados homólogos: tambien lo son los AC y ac, los AB y ab.

34 Se llaman triángulos *semejantes*, los triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

La existencia de estos triángulos se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 58 (*fig*. 94).

Si en un triángulo ABC *se tira una recta* DE *paralela á un lado* AC, *el triángulo parcial* BDE *que resulta, es semejante al triángulo propuesto*.

En efecto, los triángulos *ABC*, *DBE* tienen comun el ángulo *B*, iguales los ángulos *A* y *BDE* como correspondientes entre paralelas, y por la misma razon tambien iguales los ángulos *C* y *BED*, Ahora, siendo *DE* paralela á *AC*, tendremos [*Teor*. 56],

$$AB : BD : : BC : BE.$$

Tiremos *EF* paralela á *AB*, y será

$$BC : BE : : AC : AF;$$

pero $AF=DE$ [*Teor*. 28]; luego

$$BC : BE : : AC : DE.$$

Luego $$AB : BD : : BC : BE : : AC : DE.$$

Queda pues demostrado que los triángulos *ABC* y *DCE* tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales, y que por tanto estos triángulos son semejantes.

TEOREMA 59 (*fig*. 93).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen dos lados* AB *y* BC *del uno proporcionales á dos lados* ab *y* bc *del otro, é igual el ángulo comprendido*, B=b.

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG=ab$, y tiro la *GH* paralela al lado *AC*: tendremos [*Teor*. 56]

$$AB : BG : : BC : BH.$$

Por suposicion tenemos

$$AB : ab : : BC : bc;$$

y como estas dos proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales, resulta $BH=bc$. Luego los triángulos *GBH* y *abc* son iguales [*Teor*. 16.]; y pues el *GBH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

TEOREMA 60 (*fig*. 93).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen sus tres ángulos* A, B *y* C, a, b *y* c *respectivamente iguales*.

Tomo sobre el lado *AB* una parte $BG=ab$, lado homólogo de *AB*, y tiro la *GH* paralela al lado *AC*; será el ángulo

$BGH=A=a$; luego los dos triángulos BGH y abc son iguales [*Teor.* 17]: y pues el BGH es semejante al ABC, tambien el abc será semejante al ABC.

Colorario. *Dos triángulos que tengan dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes* [*Teor.* 13, *Corol.* 3.º].

TEOREMA 61 (*fig.* 93).

Dos triángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen sus lados proporcionales,* AB : ab : : AC : ac : : BC : bc.

Tomo sobre el lado AB una parte $BG=ab$, y tiro la GH paralela á la AC: tendremos

$$AB : BG :: BC : BH;$$

pero por hipótesi tenemos la proporcion

$$AB : ab :: BC : bc;$$

luego, como estas dos proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales, será $BH=bc$.

Tambien, por ser semejantes los triángulos ABC y BGH, es

$$AB : BG :: AC : GH,$$

y por suposicion $AB : ab :: AC : ac$;

luego $GH=ac$.

Luego los triángulos GBH y abc son iguales [*Teor.* 18]; y pues el GBH es semejante al ABC, tambien el abc será semejante al ABC.

TEOREMA 62 (*fig.* 95).

Dos triángulos rectángulos ABC, abc *son semejantes, cuando tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa,* AB : ab : : BC : bc.

Tomo sobre el lado AB una parte $BG=ab$, y tiro la GH paralela al lado AC: tendremos

$$AB : BG :: BC : BH;$$

pero por suposicion $AB : ab :: BC : bc$;

luego $BH=bc$.

Luego los triángulos rectángulos *GBH* y *abc* son iguales [*Teor.* 19]; y pues el *GBH* es semejante al *ABC*, tambien el *abc* será semejante al *ABC*.

TEOREMA 63.

Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente paralelos.

Sean *A*, *B*, *C* los tres ángulos del primer triángulo, y *a*, *b*, *c* los tres ángulos del segundo, teniendo los dos ángulos *A* y *a* sus lados paralelos, igualmente los *B* y *b*, los *C* y *c*: digo que estos triángulos son semejantes.

Sabemos [*Teor.* 11] que los ángulos, cuyos lados son paralelos, son iguales ó suplemento uno de otro. No pueden ser dos ángulos *A* y *B* de uno de los triángulos suplementos á la vez de dos *a* y *b* del otro, porque la suma de los cuatro ángulos *A*, *B*, *a* y *b* seria igual á cuatro rectos, lo que es absurdo; luego solo puede suceder que los tres ángulos del uno sean respectivamente iguales á los del otro, en cuyo caso los triángulos son semejantes; ó que uno de los ángulos de un triángulo sea suplemento de otro de los ángulos del otro triángulo; pero aun en este caso los triángulos son semejantes, pues tienen dos ángulos respectivamente iguales [*Teor.* 60, *Corol.*]

TEOREMA 64.

Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Se demuestra del mismo modo que el teorema anterior.

NOTA. Cuando dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, los lados homólogos son los paralelos ó los perpendiculares.

Consecuencias de la semejanza de dos triángulos.

TEOREMA 65 (*fig.* 96).

Las bases homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales á sus alturas.

Sean los dos triángulos semejantes *ABC* y *abc*, siendo iguales los ángulos *A* y *a*, *B* y *b*, *C* y *c*; tomemos por bases de estos triángulos los lados homólogos *AB* y *ab*: digo que estas bases serán proporcionales á las alturas *CD* y *cd*.

Pueden suceder dos casos: 1.º que las alturas caigan dentro de los triángulos; 2.º que caigan fuera.

1.er *caso* (*fig.* 1). Por ser semejantes los triángulos *ABC* y *abc*, tenemos la proporcion

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Tambien los triángulos rectángulos *BCD* y *bcd* son semejantes; luego

$$CD : cd :: BC : bc.$$

De estas dos proporciones resulta

$$AB : ab :: CD : cd.$$

2.º *caso* (*fig.* 2). Por ser semejantes los triángulos *ABC* y *abc*, tenemos la proporcion

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Tambien los triángulos rectángulos *BCD* y *bcd* son semejantes; luego

$$CD : cd :: BC : bc.$$

Por consiguiente

$$AB : ab :: CD : cd.$$

TEOREMA 66 (*fig.* 97).

Si varias rectas BA, BD, BE, BC, *que salen de un punto* B, *encuentran á dos paralelas* AC *y* FI, *dividen á estas paralelas en partes proporcionales.*

Siendo *FG* paralela á *AD*, los triángulos *ABD* y *FBG* son semejantes: sus lados homólogos serán proporcionales; y por tanto

$$AD : FG :: BD : BG.$$

Los triángulos *BDE* y *BGH*, semejantes por la misma razon, nos dan la proporcion

$$DE : GH :: BD : BG.$$

De estas dos proporciones, que tienen comun la razon *BD* : *BG*, resulta esta otra

$$AD : FG :: DE : GH.$$

Del mismo modo se demostraria que

$$DE : GH :: EC : HI.$$

TEOREMA 67 (*fig.* 98).

La perpendicular BD, *bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo á la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos* AD *y* DC *de la hipotenusa.*

Los triángulos *ABD* y *BCD*, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, nos dan [*Teor.* 64] la proporcion

$$AD : BD :: BD : DC.$$

Colorario. *La perpendicular* BD (fig. 99), *bajada desde un punto de la circunferencia á un diámetro* AC, *es media proporcional entre los segmentos del diámetro:* pues tiradas las cuerdas *AB* y *CB*, el ángulo *ABC* es recto [*Teor.* 49, *Corol.* 2.º].

TEOREMA 68 (*fig.* 98.)

Si desde el vértice B *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC *se baja una perpendicular á la hipotenusa:* 1.º *cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa* y *el segmento adyacente á dicho cateto*; 2.º *los cuadrados de los catetos* AB *y* BC *son proporcionales á los segmentos* AD *y* CD *de la hipotenusa.*

1.º Los triángulos *ABD* y *ABC*, que tienen comun el ángulo *A*, y los ángulos *ADB* y *ABC* iguales por ser rectos, son semejantes; luego sus lados homólogos son proporcionales; es decir,

$$AC : AB :: AB : AD.$$

Del mismo modo se demuestra la proporcion

$$AC : BC :: BC : CD.$$

2.º Acabamos de demostrar las dos proporciones

$$AC : AB :: AB : AD,$$
$$AC : BC :: BC : CD.$$

De ellas se deducen las dos igualdades

$$AB^2 = AC \times AD,$$
$$BC^2 = AC \times CD.$$

Dividiendo ordenadamente la primera por la segunda, tendremos, suprimiendo el factor AC comun á los dos términos de la segunda razon,

$$AB^2 : BC^2 :: AD : CD \ (a).$$

Corolario. *Si desde un punto* B (fig. 99) *de la circunferencia se baja una perpendicular á un diámetro* AC, *y desde dicho punto* B *se tiran las cuerdas* BA *y* BC *á los estremos de este diámetro: 1.º cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y el segmento adyacente á dicha cuerda; 2.º los cuadrados de las cuerdas* BA *y* BC *son proporcionales á los segmentos* AD *y* CD *del diámetro.*

1.º Siendo recto el ángulo ABC, acabamos de ver que cada cateto AB ó CB es medio proporcional entre la hipotenusa AC y el segmento adyacente AD ó CD.

2.º Tambien acabamos de demostrar la proporcion

$$AB^2 : BC^2 :: AD : CD.$$

TEOREMA 69, *llamado de Pitágoras* (*fig.* 98).

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa AC *es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* AB *y* CB.

Hemos demostrado [*Teor.* 68] que

$$AC \times AD = AB^2,$$

y que $$AC \times CD = BC^2.$$

(*a*) En las proporciones entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes es indiferente suponer que los términos de la proporcion son líneas, ó son longitudes ó medidas de dichas líneas; pero siempre que se trate de productos ó cuadrados de líneas, debe entenderse que son productos y cuadrados de sus valores numéricos, obtenidos éstos midiendo las líneas con una misma unidad.

Sumando estas dos igualdades miembro á miembro, y separando el factor comun AC, tendremos

$$AC(AD+CD)=AB^2+BC^2,$$

ó bien $$AC^2=AB^2+BC^2.$$

Nota. El teorema de Pitágoras se enuncia tambien de otro modo. Siendo el cuadrado de la hipotenusa igual á la suma de cuadrados de los catetos, resulta que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto*.

Segun esto, por el teorema de Pitágoras podremos hallar el valor numérico de cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo, conocidos los valores numéricos de los otros dos.

Ejemplo 1.º Hallar el valor de la hipotenusa, valiendo un cateto 4, y el otro cateto 3.

Llamando x al valor de la hipotenusa; tendremos $x^2=4^2+3^2$, ó $x^2=16+9$, ó $x^2=25$; luego [*Aritm.* 130] $x=\sqrt{25}$, ó $x=5$.

2.º Valiendo la hipotenusa 10, y un cateto 8, hallar el valor del otro cateto.

Sea x el valor de dicho cateto: tendremos

$$x^2=10^2-8^2,\ \text{ó}\ x^2=100-64,\ \text{ó}\ x^2=36,\ x=\sqrt{36},\ x=6.$$

33. Se llama *proyeccion* de una línea recta ó curva AB (*figura* 139) sobre una recta EF, la parte CD de esta segunda comprendida entre las perpendiculares bajadas sobre ella desde los estremos de la primera. La proyeccion de la hipotenusa sobre uno de los catetos es este cateto.

TEOREMA (70 *fig.* 140).

En todo triángulo el cuadrado de un lado BC *opuesto á un ángulo agudo* A *es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos* AC *por la proyeccion* AD *del otro sobre él.*

Siendo agudo el ángulo A, la perpendicular BD caerá dentro de dicho ángulo A [*Teor.* 15]. En el triángulo rectángulo BCD tenemos por el teorema de Pitágoras

$$BC^2=DB^2+DC^2 \qquad [1].$$

En el triángulo rectángulo ABD tenemos por el mismo teorema

$$BD^2=AB^2-AD^2 \qquad [2];$$

y como $DC=AC-AD$ (*fig.* 1.ª), ó $DC=AD-AC$ (*fig.* 2.ª), será en las dos

$$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD \qquad [3].$$

Sumando ordenadamente las igualdades [1], [2] y [3], resulta

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times AD.$$

TEOREMA 71 (*fig.* 141).

En todo triángulo obtusángulo el cuadrado del lado BC, *opuesto al ángulo obtuso* A, *es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, mas el duplo de uno de ellos* AC *multiplicado por la proyeccion* AD *del otro lado sobre él.*

Siendo obtuso el ángulo A, la perpendicular BD cae fuera del triángulo. En el triángulo rectángulo BCD es

$$BC^2=BD^2+DC^2 \qquad [1],$$

y en el triángulo rectángulo ABD

$$BD^2=AB^2-AD^2 \qquad [2];$$

y como $DC=AC+AD$, será

$$DC^2=AC^2+AD^2+2AC\times AD \qquad [3].$$

Sumando ordenadamente las igualdades [1], [2] y [3], resulta

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC\times AD.$$

Recíprocos de los 69, 70 y 71. 1.º *Si el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á dicho lado es recto.*

2.º *Si el cuadrado de un lado es menor que la suma de cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á dicho lado es agudo.*

3.º *Si el cuadrado de un lado es mayor que la suma de cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á dicho lado es obtuso* [21].

TEOREMA 72 (*fig.* 100).

Si dos cuerdas AB *y* CD *de un círculo se cortan, las partes* AE *y* EB *de la una son recíprocamente proporcionales á las partes* CE *y* ED *de la otra* [Aritm. 191, Nota].

Tiro las cuerdas AD y BC: los triángulos EAD y EBC son semejantes, porque tienen iguales los ángulos en E, y tambien los ángulos A y C [*Teor.* 49, *Corol.* 1.°]; luego sus lados homólogos son proporcionales: tendremos pues

$$AE : EC :: ED : EB.$$

TEOREMA 73 (*fig.* 101).

Si desde un punto E *fuera de un círculo se tiran dos secantes* EA y EC (que terminen en los segundos puntos A y C de interseccion con la circunferencia), *dichas secantes* EA y EC *están en razon inversa de sus segmentos esternos* EB y ED [*Aritm.* 191.]

Tirando las cuerdas AD y BC, los triángulos EAD y EBC son semejantes; pues además de tener comun el ángulo E, los ángulos A y C son iguales [*Teor.* 49, *Corol.* 1.°]; luego

$$AE : EC :: ED : EB.$$

TEOREMA 74 (*fig.* 102).

Si desde un punto E *fuera de un círculo se tiran una tangente* EA *y una secante* EC (que terminen, la primera en el punto de contacto, y la segunda en el segundo punto de interseccion), *la tangente* EA *es media proporcional entre la secante* EC *y su segmento esterno* ED.

Tirando las cuerdas AC y AD, los triángulos AED y AEC son semejantes, pues tienen comun el ángulo E, é iguales los ángulos EAD y ECA, porque ambos tienen por medida la mitad del arco AD [*Teors.* 49 y 50]; luego

$$EC : AE :: AE : ED.$$

CAPITULO III.

Polígonos semejantes en general.

---

36. En dos polígonos, cuyos ángulos son respectivamente iguales, se llaman *lados homólogos* los lados adyacentes á ángulos iguales.

Así, si los polígonos *ABCDEF* y *abcdef* (*fig.* 103) tienen iguales los ángulos *A* y *a*, *B* y *b*, *C* y *c*, etc , los lados *A B* y *ab*, adyacentes á los ángulos *A* y *B*, *a* y *b* respectivamente iguales, son homólogos. Igualmente serán homólogos los lados *BC* y *bc*, los *CD* y *cd*, etc.

37. Se llaman polígonos *semejantes* los polígonos que además de tener sus ángulos respectivamente iguales, tienen sus lados homólogos proporcionales.

La existencia de estos polígonos se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 75 (*fig.* 103).

Dos polígonos ABCDEF *y* abcdef, *compuestos de un mismo número de triángulos* ABC, ACD, ADE, *etc.*, abc, acd, ade, *etc, respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Los ángulos *B* y *b* son iguales, porque los triángulos *ABC* y *abc* son semejantes y están semejantemente colocados. Por la misma razon los ángulos *ACB* y *acb*, *ACD* y *acd* son iguales; luego los ángulos *BCD* y *bcd* son iguales. Del mismo modo se demuestra que los demás ángulos son respectivamente iguales.

Siendo semejantes los triángulos *ABC* y *abc*, tenemos

$$AB : ab :: BC : bc,$$
$$BC : bc :: AC : ac.$$

Siendo semejantes los triángulos *ACD* y *acd*, tenemos

$$CD : cd :: AC : ac.$$

De esta proporcion y de la anterior se deduce esta otra

$$BC : bc :: CD : cd.$$

Del mismo modo se demuestra que los demás lados homólogos son proporcionales. Luego [36] los polígonos son semejantes.

Recíproco. *Dos polígonos* ABCDEF, abcdef *semejantes, pueden descomponerse en triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos;*

Supongamos que sean iguales los ángulos A y a, B y b, C y c, etc. Tiremos las diagonales AC, AD, AE, ac, ad, ae: digo que los triángulos ABC, ACD, ADE, etc. serán respectivamente semejantes á los triángulos abc, acd, ade, etc.

En efecto, los triángulos ABC y abc tienen los ángulos B y b iguales: además, por ser semejantes los polígonos, es

$$AB : ab :: BC : bc;$$

luego [*Teor.* 59] dichos triángulos son semejantes. Por consiguiente

$$AC : ac :: BC : bc;$$

y como, por ser semejantes los polígonos, es

$$BC : bc :: CD : cd,$$

resulta $$AC : ac :: CD : cd.$$

Tambien, por ser semejantes los triángulos ABC y abc los ángulos ACB y acb son iguales: restándolos de los iguales BCD y bcd, los restos ACD y acd son iguales; luego los triángulos ACD y acd son semejantes [*Teor.* 59].

Del mismo modo se demuestra que los demás triángulos, que tienen la misma disposicion, son respectivamente semejantes.

TEOREMA 76.

Los perímetros AB+BC+CD+etc., ab+bc+cd+etc. *de dos polígonos semejantes* ABCDEF, abcdef *son proporcionales á sus lados homólogos.*

En efecto, tenemos por suposicion

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd, \text{ etc.};$$

luego [*Aritm.* 175]

$$AB+BC+CD+\text{etc.} : ab+bc+cd+\text{etc.} :: AB : ab.$$

CAPITULO IV.

Polígonos regulares.

---

38. Se dice que un polígono está *incripto* en un círculo, ó que un círculo está *circunscripto* á un polígono, cuando todos sus vértices están en la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó que un círculo está *inscripto* en un polígono, cuando todos sus lados son tangentes al círculo.

39. Se llama polígono *regular* el polígono que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos tambien iguales.

El triángulo equilátero y el cuadrado son dos polígonos regulares.

La proposicion siguiente demuestra que existen polígonos regulares de cualquier número de lados.

TEOREMA 77 (*fig.* 104).

Si se divide una circunferencia en tres ó mas arcos iguales, las cuerdas de dichos arcos formarán un polígono regular inscripto (a).

Supongamos que los arcos AB, BC, CD, etc., en que la circunferencia está dividida, sean iguales: digo que el polígono $ABCDE$ es regular.

Los lados AB, BC, CD, etc. son iguales, porque los arcos subtendidos por ellos son iguales. Los ángulos A, B, C, etc. son iguales, porque son ángulos inscriptos que comprenden entre sus lados igual arco: luego el polígono $ABCDE$ es regular.

Colorario. *Dividiendo en dos partes iguales los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto y tirando las cuerdas de los arcos mitades, estas cuerdas forman un nuevo*

(*a*) La circunferencia puede dividirse por tanteo en cualquier número de partes iguales.

polígono regular inscripto AFBGCHDIEK, *de duplo número de lados que el propuesto.*

Este polígono es regular, pues está formado por las cuerdas de los arcos iguales en que está dividida la circunferencia; y el número de sus lados es doble que el del propuesto, pues á cada lado del propuesto corresponden dos lados del nuevo polígono.

TEOREMA 78 (*fig.* 105).

Si se divide una circunferencia en tres ó mas arcos iguales, las tangentes á la circunferencia en los puntos de division A, B, C, D, E *forman un polígono regular circunscripto* MNPQR.

Tiro las cuerdas *AB*, *BC*, *CD*, etc.: estas cuerdas son iguales, porque lo son sus arcos; y los ángulos formados por las tangentes y las cuerdas son todos iguales, pues cada uno tiene por medida la mitad del arco que comprenden sus lados: luego los triángulos *AEM*, *ABN*, *BCP*, etc. son isósceles, y además son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; luego los ángulos *M*, *N*, *P*, *Q* y *R* son iguales.

Resulta tambien de la igualdad de dichos triángulos, que las rectas *AM*, *AN*, *BN*, *BP*, etc. son iguales, y que por tanto sus dobles *MN*, *NP*, *PQ*, etc. son iguales. Luego el polígono *MNPQR* es regular.

Colorario (*fig.* 106) *Dividiendo en dos partes iguales los arcos comprendidos entre los lados de un polígono regular circunscripto, y tirando tangentes en los puntos de division, resulta un nuevo polígono regular circunscripto* MNPRSTVXY *de duplo número de lados que el anterior.*

Este polígono es regular, pues está formado por las tangentes á la circunferencia en puntos que la dividen en partes iguales. El número de sus lados es duplo del número de lados del polígono propuesto; pues el número de arcos, en que la circunferencia queda dividida, es duplo del número de arcos en que lo estaba al principio; y por consiguiente el nuevo número de tangentes es tambien duplo del número primitivo.

TEOREMA 79 (*fig.* 107).

Si en los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto se tiran tangentes: 1.º *estas tan-*

gentes forman un polígono regular circunscripto de igual número de lados que el inscripto; 2.° cada dos vértices correspondientes de ambos polígonos y el centro estarán en línea recta.

La primera parte de este teorema es fácil de demostrar, pues las tangentes se tiran en puntos que dividen á la circunferencia en arcos iguales.

Para demostrar la segunda parte, tiro la *GH*, y tengo que el punto *O* equidista de *G* y *H*; tambien *NG*=*NH*, porque en el triángulo *NGH* son iguales los ángulos *NGH* y *NHG*; luego [*Teor.* 24] la *ON* es perpendicular á la *GH*; luego [*Teor.* 41] dividirá al arco *GBH* en dos partes iguales, y por tanto la *ON* pasará por *B*, punto medio de *GBH*; luego los tres puntos *O*, *B* y *N* están en la línea recta.

TEOREMA 80 (*fig.* 108).

Todo polígono regular ABCDE *puede inscribirse en un círculo, y puede circunscribirse á un círculo.*

1.° Sea *O* el centro de la circunferencia, que pasa por los tres vértices *A*, *B*, *C*: hagamos ver que esta circunferencia pasará por todos los demas vértices.

Tiro los rádios *OA*, *OB*, *OC* y la recta *OD*. En el triángulo *OBC* los ángulos *OBC* y *OCB* son iguales, por oponerse á lados iguales; restándolos de los ángulos *ABC* y *BCD* iguales por hipótesi, los restos *ABO* y *DCO* serán iguales; luego los triángulos *ABO* y *DCO* son iguales, por tener el lado *OB* igual al *OC*, el lado *AB*=*CD* por ser regular el polígono, y el ángulo *ABO*=*DCO*; luego *OD*=*OA*: luego la circunferencia que pasa por los tres puntos *A*, *B*, *C*, pasa tambien por el punto *D*; y como se demostraria del mismo modo que dicha circunferencia pasa por los demás vértices, se infiere que el polígono queda inscripto en el círculo.

2.° Siendo los lados del polígono cuerdas iguales del círculo circunscripto, estarán á igual distancia del centro [*Teor.* 43]; es decir, que las perpendiculares *OF*, *OG*, *OH*, etc. son iguales; luego, si hacemos centro en *O*, y describimos con el radio *OF* una circunferencia, esta pasará por los puntos *F*, *G*, *H*, etc.; y como los lados del polígono son perpendiculares á los radios *OF*, *OG*, *OH*, etc., y por tanto son tangentes á dicha circunferencia, se infiere que el polígono queda circunscripto al círculo.

40. Se llama *centro* de un polígono regular el centro de su círculo inscripto ó circunscripto. *Radios* del polígono regular son las rectas tiradas desde el centro á los vértices del polígono. *Apotemas* del polígono regular son las perpendiculares bajadas desde el centro á los lados.

NOTA. *Los triángulos, en que los radios de un polígono regular dividen al polígono, son todos iguales* [*Teor.* 18].

Segun esto, *los radios de un polígono regular dividen á sus ángulos en dos partes iguales.*

41. Se llama *ángulo en el centro* de un polígono regular el ángulo formado por dos radios tirados á los estremos de un lado. La medida de este ángulo es evidentemente $\frac{4R}{n}$, siendo n el número de lados.

TEOREMA 81 (*fig.* 109).

La razon del lado del cuadrado inscripto en un círculo al radio es $\sqrt{2}$

Sea AB un lado del cuadrado inscripto; tiro los radios CA y CB. Siendo el arco AB un cuadrante, el ángulo ACB es recto. En el triángulo rectángulo ABC tenemos por el teorema de Pitágoras

$$AB^2 = AC^2 + CB^2;$$

y llamando r al radio,

$$AB^2 = r^2 + r^2, \text{ ó } AB^2 = 2r^2,$$

de donde $\frac{AB^2}{r^2} = 2$, y por consiguiente [*Aritm.* 145]

$$\frac{AB}{r} = \sqrt{2}.$$

NOTA. 1.ª En virtud de este teorema se podrá hallar el lado del cuadrado inscripto en un círculo, siendo conocido el radio, y al contrario; pues de $\frac{AB}{r} = \sqrt{2}$, resulta $AB = r\sqrt{2}$; y por consiguiente $r = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, ó multiplicando los dos términos de este quebrado por su denominador, para que este sea racional, será $r=\frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

Nota. *El lado del cuadrado inscripto en un círculo y el radio son incomensurables*; pues su razon es incomensurable [29]. Siendo el lado del cuadrado inscripto en un círculo la diagonal de un cuadrado cuyo lado es el radio, resulta que *la diagonal de un cuadrado y su lado son rectas incomensurables.*

TEOREMA 82 (*fig.* 110).

El lado del exágono regular inscripto en un círculo es igual al radio de dicho círculo.

Sea AB un lado del exágono regular inscripto; tiro los radios CA y CB, y tengo [41] el ángulo $C=\frac{4R}{6}=\frac{2R}{3}=\frac{2}{3}$R; luego la suma $A+B$ de los otros dos ángulos del triángulo ABC valdrá $\frac{4}{3}R$; y como los dos ángulos A y B son iguales, por oponerse á los lados iguales AC y BC, cada uno de estos ángulos valdrá $\frac{2}{3}R$. Tenemos, pues, que los ángulos A y C son iguales; luego los dos lados CB y AB son iguales.

Nota. Conviene enunciar tambien este teorema de este otro modo: *la cuerda de la sesta parte de la circunferencia, ó del arco de* 60°, *es igual al radio.*

TEOREMA 83 (*fig.* 111).

La razon del lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo al radio es $\sqrt{3}$.

Sea AB el lado del triángulo equilátero inscripto, tiro el diámetro AC y la cuerda BC: siendo el arco AB $\frac{1}{3}$ de la circunferencia, y el arco ABC la mitad de la circunferencia, será el arco $CB=ABC-AB=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ de la circunferencia, y por consiguiente la cuerda CB es igual al radio.

En el triángulo rectángulo ABC tenemos por el teorema de Pitágoras

$$AB^2=AC^2-BC^2,$$

y llamando r al radio,

$$AB^2=4r^2-r^2, \text{ ó } AB^2=3r^2;$$

de donde $\frac{AB^2}{r^2}=3$; y por consiguiente [*Aritm. Complemento* 25, *Alg.* 117] $\frac{AB}{r}=\sqrt{3}$.

NOTA 1.ª Segun este teorema, podremos hallar el lado del triángulo equilátero inscripto, conociendo el radio, y al contrario; pues siendo $\frac{AB}{r}=\sqrt{3}$, se infiere que $AB=r\sqrt{3}$, y que $r=\frac{AB}{\sqrt{3}}$, ó multiplicando los dos términos de este quebrado por su denominador, para que este sea racional, será $r=\frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

NOTA 2.ª *El lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo y el radio son incomensurables;* pues su razon es incomensurable [29].

NOTA 3.ª *La apotema* OD *del triángulo equilátero inscripto en un círculo es igual á la mitad del radio;* pues los triángulos semejantes ADO y ABC nos dan

$$AD : AB :: DO : BC;$$

y como AD es mitad de AB, tambien DO será mitad de BC ó del radio.

42. Se dice que una recta está dividida en *media* y *estrema razon*, cuando está dividida en dos partes tales que la parte mayor es media proporcional entre dicha recta y la parte menor.

TEOREMA 84 (*fig.* 112).

El lado del decágono regular inscripto en un círculo es igual *á la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon.*

Sea AB un lado del decágono regular inscripto, tiro los rádios CA y CB: el ángulo $C=\frac{4R}{10}=\frac{2}{5}R$; luego $A+B=\frac{8}{5}R$; y como los ángulos A y B son iguales por oponerse á lados iguales, cada uno valdrá $\frac{4}{5}R$.

Esto supuesto, divido el ángulo A en dos partes iguales por la recta AD, y tendrè [*Teor.* 57]

$$BD : DC :: AB : AC \text{ [1]}.$$

Ahora, valiendo $\frac{2}{5}R$ el ángulo CAD, los lados AD y CD son iguales, por oponerse á los ángulos iguales C y CAD. Tambien el ángulo $ADB=C+CAD=\frac{4}{5}R$ [*Teor.* 13, *Corol.* 1.°], y por tanto los lados AB y AD, opuestos á los ángulos iguales ADB y ABD, son iguales; luego $DC=AB$; y la proporcion [1] será

$$BD : DC :: DC : BC.$$

Queda pues demostrado que el radio BC está dividido en D en media y estrema razon, y que su segmento mayor DC es igual al lado AB del decágono regular inscripto.

Nota. Hemos visto [*Teor.* 81] que la razon del lado del cuadrado inscripto al radio es $\sqrt{2}$; luego, si tomamos por unidad el radio, el valor del lado del cuadrado inscripto es $\sqrt{2}$. Por consiguiente, si las construcciones geométricas fuesen exactas, que no lo son, hallaríamos con exactitud una recta cuyo valor fuese $\sqrt{2}$. Lo mismo diríamos de otra raiz cuadrada incomensurable cualquiera $\sqrt{n}$, que es el valor de una recta media proporcional entre las rectas cuyos valores son 1 y n.

TEOREMA 85.

Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.

Consideremos dos exágonos regulares: valiendo los seis ángulos de un exágono 8 rectos [*Teor.* 26], cada ángulo del exágono regular valdrá $\frac{8R}{6}$; luego los ángulos de ambos polígonos son iguales.

Siendo iguales los lados de cada polígono, la razon de un lado de un polígono á otro lado del otro polígono es siempre la misma; luego los lados homólogos son proporporcionales: luego [36] los polígonos son semejantes.

TEOREMA 86 (*fig.* 113).

Los perímetros de dos polígonos regulares ABCDE, abcde *de un mismo número de lados son proporcionales á sus radios* AO, ao, *y á sus apotemas* OF, of.

Sean P y p los perímetros de los dos polígonos: por ser semejantes estos polígonos, tendremos [*Teor.* 76]

$$P : p :: AB : ab.$$

Si ahora tiramos los radios OB y ob, los triángulos OAB y oab serán semejantes, por ser iguales los ángulos OAB y oab, como mitades de los iguales EAB y eab [40, *Nota*], y tambien iguales los ángulos OBA y oba por la misma razon: luego [*Teor.* 65]

$$AB : ab :: AO : ao :: OF : of;$$

luego $$P : p :: AO : ao :: OF : of.$$

TEOREMA 87 (*fig.* 114).

Toda línea convexa (a) *cerrada* ABCD, *envuelta por otra línea cualquiera cerrada* PQRST, *es menor que esta.*

No pueden ser iguales todas las infinitas líneas $ABCD$, $PQRST$, etc., que encierran á la superficie plana $ABCD$; pues tirando la recta MN, que no corte á la $ABCD$, será $MN < MPQN$, y añadiendo á ambos miembros la parte $MTSRN$, resulta $MNRST < PQRST$.

No siendo iguales todas las líneas en número infinito,

(*a*) Se llama línea *convexa* la línea que no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos.

que encierran á la superficie plana *ABCD*, sucederá uno de estos dos casos: que existan entre estas líneas dos ó mas iguales en magnitud, menores que todas las demás, ó que exista una sola, menor que todas las demás.

Hemos visto que la *PQRST* es mayor que la *MNRST*; luego la *PQRST* no es de las menores: lo mismo se puede demostrar de otra cualquiera de las líneas mencionadas, diferente de la *ABCD;* luego no pueden existir dos de estas que sean iguales en magnitud y menores que todas las demás; luego existe una sola menor que todas las demás; y pues ninguna diferente de la *ABCD* es de las menores, esta es necesariamente la menor.

Corolarios. 1.º *La circunferencia es mayor que el perímetro de todo polígono inscripto, y menor que el de todo polígono circunscripto.*

2.º *Si desde un punto* C (fig. 115) *se tiran á los estremos de un arco convexo de cualquier curva dos tangentes* (a) CA y CB, *la suma de estas dos tangentes es mayor que el arco:* pues tirando la cuerda *AB*, tenemos, por el teorema,

$$AB+AC+BC>ADB+AB;$$

luego

$$AC+BC>ADB.$$

3.º *El perímetro de un polígono regular inscripto, que tenga duplo número de lados que otro polígono regular inscripto, es mayor que el de este.*

4.º *El perímetro de un polígono regular circunscripto, que tenga duplo número de lados que otro polígono regular circunscripto, es menor que el de este.*

TEOREMA 88.

El perímetro de todo polígono regular circunscripto á un círculo, es menor que 16 radios.

Sea *P* el perímetro de un polígono regular circunscripto, *p* el de su semejante inscripto, *R* la apotema del polígono cir-

---

(a) Entendemos por *tangente* á una curva cualquiera una recta que *toca* en un punto á dicha curva.

cunscripto, que será el radio del círculo, y r la apotema del polígono inscripto: tendremos [*Teo.* 83]

$$P : p :: R : r.$$

Si los dos polígonos son triángulos equiláteros, es [*Teorema* 83, *Nota* 3.ª] $R=2r$, y por consiguiente $P=2p$; pero p es menor que el perímetro del cuadrado circunscripto, que es evidentemente igual á $8R$; luego $2p<16R$, ó $P<16R$.

Si los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos tienen mas que tres lados, la apotema r del inscripto será mayor que $\frac{R}{2}$; pues siendo los arcos, en que está dividida la circunferencia, menores que $\frac{1}{3}$ de la circunferencia, las cuerdas correspondientes son tambien menores que el lado del triángulo equilátero inscripto [*Teor.* 39, 2.º], y por tanto distan del centro mas que este [*Teor.* 43, 2.º]. Siendo pues $\frac{R}{2}<r$, ó $R<2r$, será $P<2p$; y como $p<8R$, será con mayor razon $P<16R$.

Lema 1 (*fig.* 116). *Se puede inscribir en un círculo un polígono regular cuyo número de lados sea bastante grande, para que la diferencia entre el radio del círculo y la apotema del polígono sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea.*

Inscribamos un polígono regular de cualquier número de lados, despues otro polígono regular cuyo número de lados sea duplo que el anterior, despues otro de duplo número de lados que el último; é imaginemos que esta operacion se continúe indefinidamente: á medida que va creciendo el número de lados del polígono regular inscripto, es evidente que la magnitud de las cuerdas, ó lados del polígono, va disminuyendo; y por consiguiente [*Teor.* 43, 2.º] su distancia al centro, ó la apotema del polígono, va aumentando; luego la diferencia entre el radio del círculo y la apotema va disminuyendo. Para demostrar que esta diferencia puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada [*Arítm.* 123, *Nota*], llamemos R al radio del círculo, r á la apotema del polígono, n al número de sus lados, y a á uno de estos. Tenemos [*Teor.* 12, *Corol.*] $AO—OC<AC$, ó $R—r<\frac{a}{2}$. El perímetro del polígono es na, y es menor que el perímetro del cuadrado circunscripto al círculo, que vale 8 radios, esto es $na<8R$, de donde $a<\frac{8R}{n}$; luego con mayor razon $R—r<\frac{8R}{2n}$, ó $R—r<\frac{4R}{n}$.

El número de lados n puede llegar á ser mayor que cualquiera cantidad por grande que sea; luego el quebrado $\frac{4R}{n}$ podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, creciendo n suficientemente; luego entonces $R—r$ será con mayor razon menor que cualquiera cantidad dada.

Lema 2. *Se pueden inscribir y circunscribir á un círculo dos polígonos regulares de igual número de lados, tales que la diferencia de sus perímetros sea menor que cualquiera cantidad, tan pequeña como se quiera.*

Dividamos la circunferencia en tres ó mas arcos iguales; tiremos las cuerdas de estos arcos, y las tangentes á la circunferencia en los puntos de division: habremos inscripto y circunscripto dos polígonos regulares de igual número de lados. Inscribamos y circunscribamos otros dos polígonos regulares de duplo número de lados que los anteriores [*Teor.* 77, *Corol. y Teor.* 78, *Corol.*], despues otros dos de duplo número de lados que los últimos; y continuemos esta operacion indefinidamente. A medida que va duplicándose el número de lados de ambos polígonos inscripto y circunscripto, el perímetro del inscripto va aumentando [*Teor.* 87, *Corol.* 3.°], y el del circunscripto va disminuyendo [*Teor.* 87, *Corol.* 4.°]; luego la diferencia entre ambos perímetros va disminuyendo.

Para demostrar que esta diferencia puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea [*Aritm.* 123, *Nota*], llamemos P al perímetro del polígono circunscripto, p al de su semejante inscripto, R á la apotema del circunscripto y r á la apotema del inscripto: tendremos [*Teor.* 86]

$$P : p :: R : r,$$

ó bien [*Aritm.* 173]

$$P—p : P :: R—r : R,$$

de donde $P-p=\frac{P}{R}(R-r)$;

pero $P<16R$ [*Teor.* 88]; luego $P-p<16\,(R-r)$.

Ahora bien, haciendo que los polígonos tengan un número de lados suficientemente grande, puede el factor $R-r$ llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea [*Lema* 1]; luego tambien el producto $16\,(R-r)$ puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable; y con mas razon $P-p$ ès entonces menor que esta cantidad.

NOTA. Los teoremas 84 y 85 y los dos lemas, que acabamos de demostrar, tienen por principal objeto preparar la demostracion del teorema siguiente.

TEOREMA 89

Las circunferencias C *y* C′ *son proporcionales á sus radios* R y R′ (*a*).

Sean P y p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes circunscripto é inscripto á la circunferencia C; sean P' y p' los perímetros de dos polígonos, semejantes á los anteriores, circunscripto é inscripto á la circunferencia C'.

Es evidente que la razon $\frac{C}{R'}$ está comprendida entre las razones $\frac{P}{R}$ y $\frac{p}{R}$, y que la razon $\frac{C'}{R'}$ está comprendida entre las razones $\frac{P'}{R'}$ y $\frac{p'}{R'}$: pero [*Teor.* 86]

$$\frac{P'}{R'}=\frac{P}{R},\ \frac{p'}{R'}=\frac{p}{R};$$

luego la razon $\frac{C'}{R'}$ está comprendida entre las $\frac{P}{R}$ y $\frac{p}{R}$; luego las dos razones constantes $\frac{C}{R}$ y $\frac{C'}{R'}$ están comprendidas entre las variables $\frac{P}{R}$ y $\frac{p}{R}$.

Mas, sabemos que

$$\frac{P}{R}-\frac{p}{R}=\frac{P-p}{R}$$

puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea, multiplicando suficientemente los lados de los dos polígonos inscripto y circunscripto [*Lema* 2]; luego, segun el teorema de Arbogast [*Aritm. comp.*[to] 16], las constantes $\frac{C}{R}$ y $\frac{C'}{R'}$ son iguales, ó bien

$$C : R :: C' : R',$$

ó $$C : C' :: R : R'.$$

Corolarios. 1.° *Las circunferencias son proporcionales á sus diámetros*; esto es,

$$C : 2R :: C' : 2R'.$$

2.° *La razon de la circunferencia al diámetro es una cantidad constante;* pues la proporcion

$$C : 2R :: C' : R'$$

prueba, que la razon de una circunferencia á su diámetro es igual á la razon de otra circunferencia cualquiera á su diámetro; luego dicha razon es siempre la misma, ó es constante.

PROBLEMAS

RELATIVOS AL LIBRO IV.

PROBLEMA 24 (*fig.* 117).

Dividir una recta en cualquier número de partes iguales.

Supongamos que se quiera dividir la recta *AB* en cinco partes iguales.

Por uno de sus estremos *A* tiro otra recta indefinida *AC*, tomo sobre esta con una abertura cualquiera de compás cinco partes iguales *AD*, *DE*, etc.; tiro la *HB*, y por el punto *G* una paralela *GI* á la *HB*: *BI* será $\frac{1}{5}$ de *AB*. Llevando pues sobre la *IA* tres veces la *BI*, quedará la *AB* dividida en cinco partes iguales *AM*, *ML*, *LK*, *KI*, *IB*.

En efecto, siendo *GI* paralela á *HB*, tendremos [*Teor.* 56] $GH : AH :: IB : AB$; y pues *GH* es $\frac{1}{5}$ de *AH*, tambien *IB* es $\frac{1}{5}$ de *AB*.

PROBLEMA 25 (*fig.* 118).

Dividir una recta EF *en partes proporcionales á las de otra recta* AB.

Por uno de sus estremos *E* tiro otra recta indefinida *EG*, tomo sobre esta las partes *EH*, *HI*, *IK* iguales á las *AC*, *CD*, *DB*, tiro *KF*, y por los puntos *I*, *H* las paralelas *IL*, *HM* á la *KF*: las partes *EM*, *ML*, *LF*, en que queda dividida la *EF*, serán proporcionales dos á dos á las *EH*, *HI*, *IK*.

En efecto, siendo *HM* paralela á *IL*, tenemos [*Teor.* 56]

$$EM : EH :: ML : HI.$$

En el trapecio *MFKH* tenemos [*Teor.* 55], por ser *IL* paralela á las bases,

$$ML : HI :: LF : IK;$$

luego $\quad EM : EH :: ML : HI :: LF : IK.$

PROBLEMA 26 (*fig.* 119).

Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas m, n, p; es decir, *hallar una recta que sea el cuarto término de la proporcion* m : n :: p : x.

1.ª *construccion.* Sobre los lados de un ángulo *A* tomo las partes $AD=m$, $DC=n$, $AE=p$; junto el punto *D* con el *E*, y por el punto *C* tiro la *CB* paralela á la *DE*; *EB* será la cuarta proporcional, ó el valor de x.

En efecto, siendo *DE* paralela á *BC*, será [*Teor.* 56]

$$AD : DC :: AE : EB,$$

ó $\quad m : n :: p : EB.$

2.ª *construccion.* Sobre los lados de un ángulo *A* tomo las partes $AD=m$, $AC=n$, $AE=p$; junto el punto *D* con el

E, y por el punto *C* tiro la *CB* paralela á la *DE*, y *AB* será la cuarta proporcional: puesto que tenemos [*Teor.* 56, *Nota*]

$$AD : AC :: AE : AB,$$

ó

$$m : n :: p : AB.$$

3.ª *construccion.* Sobre una recta indefinida tomo las partes $AD=m$, $AC=n$; tiro por el punto *D* una recta cualquiera $DE=p$, junto los puntos *A* y *E*, y tiro por el punto *C* la *CB* paralela á la *DE*; *CB* es la cuarta proporcional: pues siendo semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*, será

$$AD : AC :: DE : CB,$$

ó

$$m : n :: p : CB.$$

PROBLEMA 27.

Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas m *y* n; es decir, *hallar una recta que sea el cuarto término de la proporcion continua* m : n : : n : x.

Este problema se resuelve del mismo modo que el anterior, del cual es un caso particular.

PROBLEMA 28 (*fig.* 120).

Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas m *y* n.

1.ª *solucion.* Tomo sobre una recta indefinida las partes $AB=m$, $BC=n$ á continuacion una de otra; considerando á la recta *AC* como diámetro, describo un semicírculo, levanto en *B* la perpendicular *BD* á la *AC*, y *BD* será la media proporcional pedida [*Teor.* 67, *Corol.*].

2.ª *solucion.* Tomo sobre una recta *AC* igual á la mayor de las dos rectas *m* una parte $AB=n$, describo sobre *AC* un semicírculo, levanto la perpendicular *BD*, y tiro la cuerda *AD*: esta será la media proporcional [*Teor.* 68, *Corol.* 1.º].

NOTA. Además de los métodos que acabamos de dar, para hallar cuartas, terceras y medias proporcionales, existen otros varios, aunque no tan sencillos, fundados respectivamente en los teoremas 72 y 73; 67, 68, 72 y 74; 74: su investigacion será un buen ejercicio para el lector.

PROBLEMA 29 (*fig.* 120*).

Dividir una recta AB *en media y estrema razon.*

En uno de los estremos A de la recta levanto una perpendicular $AC=\frac{1}{2}AB$; haciendo centro en C describo con el radio AC un círculo, tiro la BC, llevo la BD sobre la BA, y el punto E será el que divide á la recta en media y estrema razon.

En efecto, prolongo la BC hasta F, y tengo [*Teor.* 74]

$$BF : BA :: BA : BD,$$

de donde [*Arithm.* 173]

$$BA : BF-BA :: BD : BA-BD,$$

ó
$$BA : BE :: BE : AE.$$

PROBLEMA 30 (*figs.* 121 y 103).

Sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de un lado de un polígono dado, construir un polígono semejante al dado.

Supongamos en primer lugar que sobre la recta ac [*figura* 121], lado homólogo de AC, se quiera construir un triángulo semejante al ABC.

1.ª *solucion.* Tiro por el punto a una recta ad, que forme con la ac un ángulo $a=A$, tomo sobre el lado AC (prolongado, si es menor que ac) una parte $AD=ac$, por el punto D tiro la DE paralela á la CB, tomo sobre la ad una parte $ab=AE$, y tiro la bc: el triángulo abc será semejante al ABC; pues los dos triángulos abc y ADE son iguales [*Teor.* 16], y este es semejante al ABC [*Teor.* 58].

2.ª *solucion.* En los puntos a y c construyo dos ángulos iguales á los A y C; y el triángulo abc que resulta será semejante al ABC [*Teor.* 60, *Corol.*].

3.ª *solucion.* Tomo sobre la AC una parte $AD=ac$, y tiro por el punto D una paralela á la BC; sobre la ac construyo un triángulo abc igual al ADE, valiéndome de los tres lados de este; y el triángulo abc, igual al ADE [*Teor.* 18], será semejante al ABC.

Supongamos ahora que sobre la recta ab (*fig.* 103), lado homólogo de AB, queramos construir un polígono semejante al $ABCDEF$.

Tiro las diagonales *AC, AD, AE*: sobre la recta *ab* construyo un triángulo *abc* semejante al *ABC*, sobre la *ac* construyo un triángulo *acd* semejante al *ACD*; sobre la *ad* otro *aed* semejante al *AED*, y sobre la *ae* otro *aef* semejante al *AEF*: el polígono *abcdef* será semejante al *ABCDEF* [*Teor*. 75].

PROBLEMA 31 (*fig*. 122).

Inscribir un cuadrado en un círculo.

Tiro dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD*, y por sus estremos las cuerdas, las cuales formarán el cuadrado inscripto *ACBD*: pues los dos diámetros perpendiculares dividen á la circunferencia en los cuatro arcos iguales *AC, CB, BD* y *AD*: luego [*Teor*. 77] las cuerdas de estos arcos forman un polígono regular de cuatro lados, ó un cuadrado.

PROBLEMA 32 (*fig*. 123).

Inscribir un exágono regular en un círculo.

Llévese el radio como cuerda sobre la circunferencia, y esta quedará dividida en seis arcos iguales *AB, BC, CD*, etc.; puesto que el radio es la cuerda de la sesta parte de la circunferencia [*Teor*. 82, *Nota*]: tirando las cuerdas correspondientes á los seis arcos, se tendrá el exágono regular inscripto *ABCDEF* [*Teor*. 77].

PROBLEMA 33 (*fig*. 123).

Inscribir en un círculo un triángulo equilátero:

Inscríbase el exágono regular *ABCDEF*, y tírense las cuerdas *AC, CE* y *EA* de arcos duplos, de manera que formen un triángulo; y este será el triángulo equilátero inscripto [*Teor*. 77.]

PROBLEMA 34.

Inscribir en un círculo un decágono regular.

Divídase el radio en media y estrema razon, y llevando la parte mayor como cuerda sobre la circunferencia, quedará esta dividida en diez arcos iguales; puesto que la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon es igual al lado del decágono regular inscripto [*Teor*. 84]: tirando en seguida las cuerdas correspondientes á los diez arcos, se tendrá el decágono regular inscripto [*Teor*. 77].

PROBLEMA 35.

Inscribir en un círculo un pentágono regular.

Inscríbase el decágono regular, y tirénse las cuerdas de los arcos duplos, de manera que formen un pentágono; y este será el pedido [*Teor*. 77].

PROBLEMA 36.

Inscribir en un círculo un pentedecágono regular.

Llévese como cuerda el rádio sobre la circunferencia, y el arco correspondiente será $\frac{1}{6}$ de la circunferencia; llévese como cuerda sobre este arco desde uno de sus estremos la parte mayor del radio dividido en media y estrema razon, y el arco correspondiente será $\frac{1}{10}$ de la circunferencia; la diferencia de estos arcos será $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ de la circunferencia; luego tomando la cuerda de este arco, y llevándola sobre la circunferencia, quedará esta dividida en quince partes iguales; tirando las cuerdas, se tendrá el pentedecágono regular inscripto.

Nota. Acabamos de ver que se pueden inscribir en un círculo geométricamente, es decir, sin tanteo, polígonos regulares de 6 ó 3 lados, de 4, de 10 ó 5, y de 15. Como, estando inscripto un polígono regular, es fácil [*Teor*. 77, *Corol.*] inscribir otro de duplo, número de lados que él, se infiere, que sabremos inscribir sin tanteo en la circunferencia los polígonos regulares cuyo número de lados es cualquiera de los siguientes:

4, 8, 16, 32, 64....
3, 6, 12, 24, 48....
5, 10, 20, 40, 80....
15, 30, 60, 120, 240....

PROBLEMA 37 (*fig*. 124).

Dado un lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado del polígono semejante circunscripto.

Sea $AB=a$ un lado de un polígono regular inscripto, $CD=b$ será el lado del polígono regular circunscripto semejante [*Teors.* 79 *y* 85]; sea r el radio del círculo: tendremos [*Teor.* 65]

$$AB : CD :: OF : OE,$$

ó

$$a : b :: OF : r.$$

Pero en el triángulo rectángulo OAF tenemos, por el teorema de Pitágoras,

$$OF^2=OA^2-AF^2,$$

ó bien $OF^2=r^2-\frac{a^2}{4}$,

y por consiguiente $OF=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$; luego

$$a : b :: \sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} : r,$$

de donde $b=\dfrac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}$.

NOTA. Esta relacion puede servir para resolver el siguiente problema general: *dadas dos de las tres cantidades* a, b *y* r, *hallar la tercera* [*Alg.* 107].

PROBLEMA 38 (*fig.* 125).

Dado un lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado de otro polígono regular inscripto de duplo número de lados.

Sea $AB=a$ un lado de un polígono regular inscripto, $AC=b$ será el lado del polígono regular inscripto de duplo número de lados [*Teor.* 77, *Corol.*].

Siendo el arco ACB á lo mas $\frac{1}{3}$ de la circunferencia, y por tanto el arco AC á lo mas $\frac{1}{6}$ de la circunferencia, será el ángulo AOC agudo, y por consiguiente [*Teor.* 70]

$$AC^2=AO^2+CO^2-2CO\times OD;$$

y como $$OD=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},$$

será $$b^2=2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},$$

ó $$b=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}\ (a).$$

NOTA. Esta relacion puede servir para hallar cualquiera de las tres cantidades a, b y r, dadas las otras dos [*Alg.* 107].

PROBLEMA 39 (*fig.* 126).

Dados los perímetros p, P *de dos polígonos regulares semejantes inscripto y circunscripto, hallar los perímetros* p′ P′ *de dos polígonos semejantes inscripto y circunscripto de duplo número de lados.*

Sea AB un lado del polígono regular circunscripto, CD el de su semejante inscripto, n el número de lados de cada polígono. Tiremos la CE, la tangente CG y la OE; CE será [*Teorema* 77, *Corol.*] un lado del polígono regular inscripto de duplo número de lados, CG ó su igual EG será la mitad de un lado del polígono semejante circunscripto [*Teor.* 78, *Corolario*].

Tenemos, pues, $P=2n.\ AE$, $P'=4n.\ EG$; luego

$$2P : P' :: AE : EG \qquad [1].$$

Ahora, [*Teor.* 83]

$$P : p :: AO : OC=OE;$$

y siendo OG la bisectriz del ángulo AOE, será [*Teor.* 57]

(*a*) Esta espresion puede ponerse bajo la forma

$$b=\sqrt{\frac{r(2r+a)}{2}}-\sqrt{\frac{r(2r-a)}{2}}\ [Alg.\ 159].$$

$$AO : OE :: AG : EG;$$

luego $$P : p :: AG : EG,$$

y por consiguiente

$$P+p : p :: AE : EG.$$

De esta proporcion y la [1] resulta

$$2P : P' :: P+p : p,$$

de donde $$P'=\frac{2Pp}{P+p}.$$

Para hallar p', tenemos $p=2n.\ CF,\ p'=2n.CE;$

luego $$p : p' :: CF : CE.$$

Los triángulos ECF, EGH semejantes nos dan

$$CF : CE :: EH : EG;$$

luego $$p : p' :: EH : EG.$$

Mas $p'=4n.EH,\ P'=4n.EG;$ luego

$$p' : P' :: EH : EG.$$

De esta proporcion y la anterior resulta

$p : p' :: p' : P'$, de donde

$$p'=\sqrt{P'p}.$$

Nota. Los problemas 37, 38 y 39 tienen por principal objeto preparar la resolucion del problema siguiente.

PROBLEMA 40.

Hallar la razon aproximada π *de la circunferencia al diámetro* (a).

Siendo la razon de la circunferencia al diámetro la misma para todas las circunferencias [*Teor.* 89, *Corol.* 2.º], ha-

(*a*) Lambert demostró el primero que la razon de la circunferencia al diámetro es un número incomensurable. Véase lá geometría de Legendre.

llaremos esta razon, suponiendo que el diámetro del círculo vale 2; y por consiguiente que el radio vale 1. Si hallamos el valor de esta circunferencia, dividiéndolo por 2, habremos resuelto el problema [*Aritm.* 162].

Sabemos [*Teor.* 81, *Nota* 1.ª] que el lado del cuadrado inscripto vale $r\sqrt{2}$; y como actualmente $r=1$, el lado de dicho cuadrado valdrá $\sqrt{2}$: el lado del cuadrado circunscripto vale $2r=2$; luego los perímetros de los dos cuadrados inscripto y circunscripto valen $4\sqrt{2}$ y 8. Por el problema último podremos hallar los valores de los perímetros de los octógonos regulares inscripto y circunscripto, y en seguida los valores de los perímetros de los polígonos regulares inscripto y circunscripto de 16 lados, despues los de los polígonos regulares de 32 lados, y asi sucesivamente.

A medida que va duplicándose el número de lados de los dos polígonos semejantes, la diferencia de sus perímetros va disminuyendo, y puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea [*Lema* 2, *pag.* 80].

Supongamos, para fijar las ideas, que se quiera hallar el valor de π con menor error que una milésima: se continuará el cálculo de los perímetros, hasta llegar á dos, que se diferencien en menos de dos milésimas: pues, si por ejemplo hemos llegado á los valores de $P=6,28366...$ y $p=6,28264...$, será $P<6,284$, y $p>6,282$; luego $C=6,282+a$, siendo $a<2$ milésimas: por consiguiente $\frac{C}{2}=\pi=3,141+\frac{a}{2}$; y pues $\frac{a}{2}<1$ milésima, se infiere que $\pi=3,141$ con un error menor que 1 milésima.

Nota. Nos hemos valido para la resolucion de este problema del lado del cuadrado inscripto; pero en su lugar nos podríamos valer del de otro polígono regular cualquiera, por ejemplo, del lado del exágono. En este caso se hallaria el valor del lado del exágono circunscripto por el problema [36]; y multiplicando uno y otro por 6, tendríamos los perímetros de los dos exágonos inscripto y circunscripto, y despues se continuaria como antes.

Arquímedes halló que la razon de la circunferencia al diámetro es $\frac{22}{7}$, Mecio halló $\frac{355}{113}$, y los modernos han hallado en decimales 3,14159 26535 89793...

PROBLEMA 40.

Dado el radio, hallar la circunferencia, y al contrario.

Tenemos $\frac{C}{2R}=\pi$; de donde resulta

$$C=2\pi R,\ R=\frac{C}{2\pi}.$$

Ejemplo. ¿Cuál es el valor de una circunferencia cuyo radio es 10 varas?

Hemos hallado $C=2\pi R$; luego $C=2\times3,14159\times10$, ó $C=62,8318$ varas.

2.º ¿Cuál es el radio de una circunferencia cuya longitud es 1000 varas?

Tenemos $R=\frac{C}{2\pi}=\frac{1000}{2\times3,14159}=\frac{500}{3,14159}=159,15$ varas.

3.º ¿Cuál es la longitud de un arco de 73 grados, siendo el radio 25 varas.

El valor de la circunferencia es en el caso actual $3,14159\times50$; la longitud de un arco de un grado de dicha circunferencia es $\frac{3,14159\times50}{360}$, y la del arco de 73º. será $\frac{3,14159\times50\times73}{360}$.

Resuélvase por una proporcion.

4.º La longitud de un arco, siendo el rádio 21 varas, es 33,27 varas, ¿cuántos grados tendrá dicho arco?

La longitud de la circunferencia es $3,14159\times42$: el valor en grados del arco de 1 vara será $\frac{360}{3,14159\times42}$; luego el valor en grados del arco 33,27 varas será $\frac{360 \times 33,27}{3,14159 \times 42}$.

Resuélvase por una proporcion [*Aritm.* 194 *y* 195].

5.° Hallar el número de grados del arco que rectificado es igual al radio.

Siendo el radio R, la longitud de la circunferencia es $2\pi R$: formaremos pues la proporcion

$$2\pi R : R :: 360° : x°;$$

$$x = \frac{360° \times R}{2\pi R} \text{ ó } x = \frac{180°}{\pi} = 57°,29578.$$

LIBRO V.

Areas de los polígonos y del círculo.

CAPITULO I.

Areas de los poligonos.

43. *Area* de una superficie es la medida de esta superficie [3, *Nota*].

Para medir una superficie, se toma por unidad un cuadrado.

TEOREMA 90 (*fig.* 127).

Dos rectángulos ABCD, EFGH, *que tienen iguales bases* AB *y* EF, *son proporcionales á sus alturas* AD *y* EH.

Puede suceder que las alturas *AD* y *EH* sean comensurables ó incomensurables.

1° Si las alturas *AD* y *EH* son comensurables, sea *AI* su medida comun, que quepa en la altura *AD* 7 veces y en la altura *EH* 4 veces; tendremos [29]

$$\frac{AD}{EH}=\frac{7}{4}.$$

Tirando por los puntos de division paralelas á las bases, quedará dividido el rectángulo *ABCD* en 7 rectángulos parciales, y el rectángulo *EFGH* en 4: todos estos rectángulos parciales son iguales, pues tienen bases iguales y alturas iguales [*Teor.* 32, *Corol.*]; luego cualquiera de ellos es medida comun de los dos rectángulos *ABCD* y *EFGH*;luego [29]

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{7}{4}.$$

De esta proporcion y de la anterior resulta esta otra

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{AD}{EH}.$$

2° Si las alturas son incomensurables, imaginemos dividida una de ellas *EH* (*fig.* 128) en partes iguales, y llevando una de estas partes sobre la altura *AD* desde el punto *A*, el último punto de division no podrá caer en *D*, por ser las alturas incomensurables; sea *I* el último punto de division, y construyamos el rectángulo *ABLI*.

Por ser comensurables las alturas *AI*, *EH* tendremos, segun el primer caso,

$$\frac{ABLI}{EFGH}=\frac{AI}{EH}.$$

Siendo tan pequeñas como queramos las partes en que se supone dividida la *EH*, el punto *I* podrá acercarse al punto *D* cuanto se quiera; luego *ABCD* es el límite de la cantidad variable *ABLI*, y por consiguiente $\frac{ABCD}{EFGH}$ es el límite de la variable $\frac{ABLI}{EFGH}$; por la misma razon $\frac{AD}{HE}$ es el límite de la variable $\frac{AI}{EH}$: luego, segun el teorema de los límites,

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{AD}{EH}.$$

Nota. No hay que decir que las dos alturas *AD* y *EH* se han de medir con la misma unidad, aunque arbitraria.

Corolario. *Dos rectángulos que tienen iguales alturas son proporcionales á sus bases:* pues las alturas de los rectángulos pueden considerarse como bases, y las bases como alturas.

TEOREMA 91.

Dos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.

Sean R y R' los dos rectángulos, a y b la altura y base del primero, a' y b' la altura y base del segundo: digo que

$$R : R' :: a \times b : a' \times b'.$$

Sea R'' un tercer rectángulo, que tenga la altura a del primero y la base b' del segundo.

Los rectángulos R y R'', que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases; esto es,

$$R : R'' :: b : b'.$$

Los rectángulos R'' y R', que tienen igual base, son proporcionales á sus alturas; esto es,

$$R'' : R' :: a : a'.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor R'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$R : R' :: a \times b : a' \times b' \text{ (a)}.$$

NOTA. Las cuatro rectas a, b, a' y b' se han de medir con una misma unidad arbitraria.

Ejemplo. Hallar la razon de dos rectángulos, tales que la base del primero sea 3 varas, su altura 13 pies, la base del segundo 8 pies y la altura 39 pulgadas.

Como en este ejemplo las unidades á que están referidas las alturas y bases, ó sean las dimensiones de los dos rectán-

---

(*a*) En las proporciones

$$R : R'' :: b : b',$$
$$R'' : R' :: a : a'$$

es indiferente el considerar á R, R', R'' como superficies, ó como sus valores numéricos ó áreas; pero cuando se multiplican las dos proporciones, implícitamente se admite que estas letras representan números, pues seria absurdo el pretender multiplicar una superficie por otra.

gulos son diferentes, es menester referirlas á la misma unidad, por ejemplo á la pulgada: entonces las dimensiones del primer rectángulo serán 108 pulgadas y 156 pulgadas, y las dimensiones del segundo 96 pulgadas y 39 pulgadas: luego si llamamos, para mayor claridad, R y R' á los dos rectángulos, tendremos

$$\frac{R}{R'}=\frac{108\times156}{96\times39}=4\tfrac{1}{2};$$

luego la razon del primer rectángulo al segundo es $4\frac{1}{2}$; ó en otros términos, el primer rectángulo es $4\frac{1}{2}$ veces mayor que el segundo.

TEOREMA 92.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura; si la unidad lineal es el lado del cuadrado que se toma por unidad de superficie.

Sea R el rectángulo, b y a su base y altura, C el cuadrado que se toma por unidad, l su lado. Como el cuadrado es un rectángulo, cuyos lados son iguales, tendrémos, segun el teorema anterior,

$$\frac{R}{C}=\frac{b\times a}{l^2};$$

y como el primer miembro es la medida del rectángulo R [3, *Nota*], ó su área, resulta que *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura, dividido por la segunda potencia del lado del cuadrado que se toma por unidad; siendo las tres rectas medidas con la misma unidad arbitraria.*

Si el lado l del cuadrado, que se toma por unidad de superficie, es la unidad lineal, entonces $l^2=1$; y por consiguiente

$$\frac{R}{C}=a\times b,$$

que es el enunciado del teorema.

NOTA. En todas las reglas de medicion de superficies que siguen, tomaremos por unidad lineal, puesto que esta es arbitraria, el lado del cuadrado tomado por unidad superficial; y asi evitaremos en todas ellas la division del producto de dos rectas por la segunda potencia del lado de dicho cuadrado.

Corolario. *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado;* pues el cuadrado es un rectángulo cuya base y altura son iguales (*a*).

Segun esta regla, un pie cuadrado, es decir, un cuadrado que tiene por lado un pie lineal, tiene $12\times12=144$ pulgadas cuadradas; una vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados; etc.

TEOREMA 93 (*fig.* 129).

El área de un paralelógramo ABCD *es igual al producto de su base por su altura.*

Levanto en los puntos *A* y *B* las perpendiculares *AF* y *BE* á la *AB* hasta que encuentren al lado *DC* ó á su prolongacion: los triángulos rectángulos *ADF*, *BEC*, que tienen las hipotenusas *AD* y *BC* iguales, como tambien los catetos *AF* y *BE* [*Teorema* 28], son iguales. Restando del trapecio *ABCF* el triángulo *BEC*, queda el rectángulo *ABEF*; y restando del mismo trapecio el triángulo *ADF*, queda el paralelógramo *ABCD*; y como, si de una misma cantidad se restan cantidades iguales, los restos son iguales, se infiere que el rectángulo *ABEF* es equivalente al paralelógramo *ABCD* [3].

Ahora bien, el área del rectángulo *ABEF* es igual á $AB\times BE$; luego el área del paralelógramo *ABCD* es tambien igual á $AB\times BE$.

Corolario. *Los paralelógramos de igual base y de igual altura son equivalentes.*

TEOREMA 94 (*fig.* 130).

El área de un triángulo ABC *es igual á la mitad del producto de su base* AC *por su altura* BD.

Tiro por los vértices *B* y *C* dos paralelas á los lados opuestos, y resultará un paralelógramo *ACEB* de igual base y de

---

(*a*) De aqui viene el nombre de *cuadrado* que se da tambien á la segunda potencia de un número; pues dicha segunda potencia es el área de un cuadrado, cuyo lado tiene por valor dicho número.

Por una razon semejante se da á veces el nombre de *rectángulo* al producto de dos números.

igual altura que el triángulo: los dos triángulos ABC y BCE, que tienen sus tres lados iguales, son iguales; luego el triángulo ABC es mitad del paralelógramo $ACEB$. El área de este paralelógramo es igual al producto de su base por su altura; luego el área del triángulo será igual á la mitad del producto de su base por su altura.

Corolarios. 1.° *Los triángulos de igual base é igual altura son equivalentes.*

2.° *Todo triángulo es mitad de un paralelógramo de igual base é igual altura.*

3.° *Las áreas de dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas;* y por consiguiente, si los triángulos tienen bases iguales, sus áreas serán proporcionales á sus alturas; y si tienen iguales alturas, serán entre sí como sus bases.

TEOREMA 95 (*fig.* 131).

El área de un trapecio ABCD *es igual al producto de su altura* EF *por la semi-suma de sus bases* AB *y* DC.

Tiro la diagonal AC, y queda el trapecio dividido en los dos triángulos ABC y ADC, los cuales, considerando como bases suyas las del trapecio, tienen igual altura EF que este. La área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}AB \times EF$, y la del triángulo ADC es $\frac{1}{2}DC \times EF$; luego la del trapecio será

$$\tfrac{1}{2}AB \times EF + \tfrac{1}{2}DC \times EF = EF \times (\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC) = EF \times \frac{AB+DC}{2}.$$

NOTA. Hemos demostrado [*Teor.* 34] que la recta GH, que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio, es igual á la semi-suma de las bases; luego *el área del trapecio es tambien igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

TEOREMA 96.

El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro.

En efecto, sea l uno de los lados, a la apotema y n el número de lados; el perímetro será nl. Desde el centro tiremos radios á todos los vértices del polígono, y quedará éste descompuesto en tantos triángulos, todos iguales [39, *Nota*], como lados tiene: el área de uno de estos triángulos es $\frac{1}{2}la$; luego el área del polígono será $\frac{1}{2}la \times n = \frac{1}{2}a \times nl$; es decir, la mitad de la apotema multiplicada por el perímetro.

Nota. El área de un polígono irregular cualquiera puede hallarse, descomponiéndole en triángulos, hallando el área de cada triángulo, y sumando estas áreas.

CAPITULO II.

Area del circulo.

Lema 3. *Se pueden inscribir y circunscribir á un círculo dos polígonos regulares semejantes, cuyas áreas se diferencien en menos de cualquiera cantidad por pequeña que sea.*

Sean p y P los perímetros de dos polígonos regulares semejantes inscripto y circunscripto, r y R sus apotemas: las áreas de los dos polígonos serán $\frac{1}{2}rp$ y $\frac{1}{2}RP$. Ahora bien, r puede aproximarse á R, y p á P tanto como se quiera [*Lemas 1 y 2, pág. 80*], multiplicando suficientemente los lados de los dos polígonos inscripto y circunscripto; luego los dos productos $\frac{1}{2}rp$ y $\frac{1}{2}RP$ pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad dada.

TEOREMA 97.

El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.

Sea A el área del círculo, C la circunferencia, P y p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, circunscripto é inscripto, R y r sus apotemas: digo que $A=\frac{1}{2}CR$.

Las áreas de los dos polígonos son $\frac{1}{2}PR$ y $\frac{1}{2}pr$; y es evidente que A está comprendida entre estas dos áreas: tambien es claro que la cantidad $\frac{1}{2}CR$ está comprendida entre $\frac{1}{2}PR$ y $\frac{1}{2}pr$; luego A y $\frac{1}{2}CR$, cantidades constantes, están comprendidas entre las variables $\frac{1}{2}PR$ y $\frac{1}{2}pr$, variables que [*Lema 3*] pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad asignable; luego, segun el teorema de Arbogast, las constantes A y $\frac{1}{2}CR$ son iguales.

Nota. Siendo $C=2\pi R$ [*Probl. 40*], es $A=\pi R^2$.

Esta relacion nos da A conociendo R, y tambien nos da R conociendo A; pues de ella resulta

$$R^2=\frac{A}{\pi}, \text{ y por consiguiente } R=\sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

44. Se llama *sector* de círculo la porcion de círculo comprendida entre dos radios y el arco.

Asi, la superficie $ABCD$ (*fig.* 132) es un sector, y otro la superficie $AEBC$.

TEOREMA 98.

El área de un sector es igual á la mitad del producto de su arco por el radio.

Del mismo modo que se demostró el teorema 48, se demuestra que *el área del sector es á la del círculo, como el arco del sector es á la circunferencia:* si pues representamos por S el área del sector, por A la del círculo, por a la longitud del arco, y por C la de la circunferencia, tendremos

$$S : A :: a : C;$$

y por consiguiente [*Aritm.* 168]

$$S : A :: a\times\tfrac{1}{2}R : C\times\tfrac{1}{2}R.$$

Siendo iguales en esta proporcion los consecuentes A y $C\times\frac{1}{2}R$ [*Teor.* 97], los antecedentes serán tambien iguales; es decir, $S=a\times\frac{1}{2}R$; luego etc.

Ejemplo. Hallar el área de un sector, cuyo arco es de 73°, y el radio de 25 varas.

Todos los teoremas, en que hay que multiplicar líneas, exijen que se midan dichas líneas con la misma unidad: por tanto hallaremos primeramente las varas que tiene el arco, que son $\frac{3{,}14159\times5\times73}{36}$; y en seguida el área del sector será

$$\frac{3{,}14159\times5\times73}{36}\times\frac{25}{2} \text{ varas cuadradas.}$$

45. Se llama *segmento* de círculo cualquiera de las dos porciones del círculo comprendidas entre una cuerda y sus dos arcos correspondientes.

El área de un segmento ADB (*fig.* 132) menor que el semicírculo se hallará, restando del área del sector correspondiente *ADBC* la del triángulo *ABC*.

El área de un segmento *AEB* mayor que el semicírculo se hallará, añadiendo al área del sector *AEBC* la del triángulo *ABC*.

CAPITULO III.

Comparacion de las áreas.

TEOREMA 99 (*fig.* 133).

Las áreas de dos triángulos ABC, ADE, *que tienen un ángulo comun* A, *son proporcionales á los productos* AB×AC, AD×AE *de los lados que forman dicho ángulo.*

Tiro la recta *EB*; los dos triángulos *ABC*, *ABE*, que tienen sus bases *AC*, *AE* en una misma recta, y un mismo vértice *B*, y por consiguiente igual altura, son proporcionales á sus bases [*Teor.* 94, *Corol.* 3.º]; esto es,

$$ABC : ABE : : AC : AE.$$

Los triángulos *ABE* y *ADE*, que tienen sus bases *AB* y *AD* en línea recta, y un mismo vértice *E*, y por tanto igual altura, son entre sí como sus bases; esto es,

$$ABE : ADE : : AB : AD.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, y suprimiendo el factor *ABE* comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$ABC : ADE : : AC{\times}AB : AE{\times}AD.$$

TEOREMA 100 (*figs.* 134 *y* 103).

Las áreas de los polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.

Consideremos en primer lugar dos triángulos semejantes *ABC*, *abc* (*fig.* 134); tomemos por bases dos lados homólogos

AB y ab, adyacente cada uno á dos ángulos agudos, y bajemos las alturas CD y cd, que caerán dentro de los triángulos [*Teor.* 14]. Tenemos, por ser semejantes los triángulos propuestos,

$$AB : ab :: AC : ac.$$

Tambien los triángulos rectángulos ACD, acd son semejantes; luego

$$CD : cd :: AC :: ac.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y partiendo por 2 los dos términos de la primera razon, resulta

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd :: AC^2 : ac^2,$$

que es el enunciado del teorema.

Consideremos ahora dos polígonos semejantes cualesquiera $ABCDEF$, $abcdef$ (*fig.* 103), en los que son respectivamente iguales los ángulos A y a, B y b, C y c, etc. Desde dos ángulos iguales cualesquiera, A y a, tiremos diagonales á los vértices de todos los demás; los triángulos ABC y abc, ACD y acd, etc. serán respectivamente semejantes [*Teor.* 75, *Recíproco*]: luego, segun acabamos de demostrar, será

$$\left.\begin{array}{l} ABC : abc :: BC^2 : bc^2 \\ ACD : acd :: CD^2 : cd^2 \\ ADE : ade :: DE^2 : de^2 \\ AEF : aef :: EF^2 : ef^2 \end{array}\right\} [1].$$

Siendo semejantes los polígonos, tendremos

$$BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EF : ef;$$

y por tanto [*Aritm.* 171, *Corol.*]

$$BC^2 : bc^2 :: CD^2 : cd^2 :: DE^2 : de^2 :: EF^2 : ef^2;$$

las segundas razones de las proporciones [1] son, pues, todas iguales; luego las primeras seran tambien iguales. Por consiguiente [*Aritm.* 175]

$$ABC+ACD+ADE+AEF : abc+acd+ade+aef :: BC^2 : bc^2,$$

que es lo que se queria demostrar.

Corolario. *Las áreas de los polígonos regulares semejantes*

ABCDE, abcde (*fig.* 113) *son proporcionales á los cuadrados de sus radios y de sus apotemas.*

Acabamos de demostrar que

$$ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2;$$

pero, siendo semejantes los triángulos ABO y abo es [34, *y Teor.* 65]

$$AB : ab :: AO : ao :: OF : of;$$

lue o $$ABCDE : abcde :: AO^2 : ao^2 :: OF^2 : of^2.$$

TEOREMA 101.

Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios: pues, si R y r son los radios, πR^2 y πr^2 son las áreas de los círculos, y es evidente que

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2.$$

TEOREMA 102.

Si considerando como homólogos los tres lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el polígono construido sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los polígonos construidos sobre los catetos.

Sean a, b y c la hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo A, B y C las áreas de los tres polígonos semejantes construidos sobre ellos: digo que $A=B+C$.

En efecto, siendo semejantes los tres polígonos, tenemos [*Teor.* 100]

$$\frac{B}{A}=\frac{b^2}{a^2},\ \frac{C}{A}=\frac{c^2}{a^2};$$

luego $$\frac{B+C}{A}=\frac{b^2+c^2}{a^2};$$

pero, segun el teorema de Pitágoras, $a^2=b^2+c^2$; luego

$$A=B+C.$$

TEOREMA 103.

Si considerando como radios ó como diámetros los tres lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres círculos, el cons-

truido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.

Se demuestra del mismo modo que el teorema anterior (*a*)

✻ TEOREMA 102 *(*fig.* 136).

El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre las dos, mas el duplo del rectángulo construido sobre las mismas.

Sobre AC, suma de las rectas AB y BC, construyo un cuadrado $ACDE$, tomo $AF=AB$, y por los puntos B y F tiro las BG y FH perpendiculares á los lados AC y AE. La figura $ABIF$ es un cuadrado. Tambien la figura $IGDH$ es otro cuadrado; pues siendo

$$BG=FH,\ BI=FI,$$

resulta $GI=IH$. Este cuadrado es igual al construido sobre la recta BC.

Ahora bien,

$$ACDE=ABIF+IGDH+BIHC+EGIF:$$

los dos rectángulos $BIHC$, $EGIF$ son iguales, por tener bases iguales BI, FI, é iguales alturas IH, IG: luego

$$ACDE=ABIF+IGDH+2BIHC,$$

que es el enunciado del teorema.

✻ TEOREMA 103 *(*fig.* 137).

El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas es igual á la suma de cuadrados de estas dos rectas, menos el duplo del rectángulo construido sobre ellas.

Sobre la recta AB, diferencia de las dos rectas AC y BC,

(*a*) Es muy curioso el siguiente corolario de este teorema.

Si tomando por diámetros los tres lados de un triángulo rectángulo isósceles ABC (fig. 135), *se describen sobre ellos tres semicírculos* ABC, ADB *y* BGC, *el área de cada una de las figuras* ADBEA *y* BGCFB (que se llaman *lúnulas* de Hipócrates) *es igual á la mitad del área del triángulo* ABC.

construyo el cuadrado $ABGF$, sobre la recta AC construyo el cuadrado $ACDE$, y sobre la BC el cuadrado $BCIH$; y prolongo FG hasta que encuentre en K al lado DC.

El rectángulo $FEDK$ tiene por base $FK=AC$, y por altura $EF=BC$. El rectángulo $HGKI$ tiene por base $GH=AC$, y por altura $GK=BC$; luego estos dos rectángulos son iguales al construido sobre las dos rectas AC y BC. Ahora,

$$ABGF=ACDE+BCIH-EFKD-GKIH,$$

ó $$ABGF=ACDE+BCIH-2EFKD:$$

luego etc.

* TEOREMA 104 * (*fig.* 138).

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre los catetos (a).

Sea ACB el triángulo rectángulo en C; construyo sobre sus tres lados tres cuadrados AG, AI, BK, y digo que AG es equivalente á la suma $AI+BK$.

Desde el vértice del ángulo recto bajo la perpendicular CD á la hipotenusa, y la prolongo hasta que encuentre en E al lado FG; y tiro las rectas FM y HN paralelas á las AC y AB.

Los paralelógramos $CAFM$ y $BAHN$ son iguales, pues los lados CA y AF del primero son iguales á los AH y AB del segundo, y los ángulos comprendidos CAF y BAH son iguales, por estar ambos compuestos de un ángulo recto y del ángulo BAC [*Teor.* 32]. El paralelógramo $BAHN$ es equivalente al cuadrado $ACIH$, por tener los dos la misma base AH é igual altura [*Teor.* 99, *Corol.*]. El paralelógramo $CAFM$ es tambien equivalente al rectángulo $ADEF$, por tener los dos la misma base AF é igual altura: y pues los dos paralelógramos $BAHN$ y $CAFM$ son iguales, el cuadrado $ACIH$ y el rectángulo $AFED$ son equivalentes. Del mismo modo se demuestra que el cuadrado $BCKL$ es equivalente al rectángulo $BDEG$. Luego el cuadrado $ABGF$ es equivalente á la suma de los cuadrados $ACIH$ y $BCKL$.

(a) Este teorema está incluido como caso particular en el 102.

Nota. El producto de las longitudes ó valores numéricos de dos rectas representa el área del rectángulo construido sobre estas rectas; y la segunda potencia de la longitud de una recta es el área del cuadrado construido sobre ella: por consiguiente todos los teoremas, en que entran productos ó segundas potencias de rectas, pueden enunciarse, reemplazando dichos productos ó segundas potencias por rectángulos ó cuadrados construidos sobre dichas rectas. Así, el teorema último es el de Pitágoras enunciado en otros términos.

Al contrario, todo teorema, en que entren rectángulos y cuadrados, se podrá enunciar, reemplazando cada rectángulo por el producto de los números que representan á su base y altura, y cada cuadrado por la segunda potencia del número que represente á su lado.

Así, los teoremas 102* y 103* podrán enunciarse respectivamente como sigue.

La segunda potencia de la suma de dos números es igual á la suma de las segundas potencias de dichos números, mas el duplo del producto de los mismos números.

La segunda potencia de la diferencia de dos números es igual á la suma de las segundas potencias de dichos números, menos el duplo del producto de los mismos números (*a*).

PROBLEMAS

RELATIVOS AL LIBRO V.

PROBLEMA 41 (*fig.* 142.)

Reducir un polígono ABCDE *á otro equivalente que tenga un lado menos.*

Por los estremos *B* y *D* de dos lados adyacentes *BC*, *CD* del polígono tiro la diagonal *BD*, la cual formará con di-

(*a*) Obsérvese que la demostracion geométrica de estos teoremas comprende á toda clase de números comensurables é incomensurables; mientras que el razonamiento con que la mayor parte de los autores pretenden probar dichos teoremas en el álgebra, supone que los números son comensurables, y aun números enteros.

chos dos lados un triángulo; por el vértice *C* opuesto á *BD* tiro una paralela *CF* á esta recta, y la prolongo hasta que encuentre en *F* al lado *AB* prolongado; junto el punto *F* con el *D*, y el polígono *AFDE*, que tiene un lado menos que el propuesto, será equivalente á este.

En efecto, los triángulos *BCD* y *BFD* son equivalentes [*Teor.* 94, *Corol.*]; luego, si á cada uno se añade la figura *ABDE*, resulta que el polígono *ABCDE* es equivalente al *AFDE*.

PROBLEMA 42.

Reducir un polígono á triángulo equivalente.

Redúzcase el polígono á otro equivalente que tenga un lado menos, este á otro equivalente que tenga un lado menos, y asi sucesivamente, hasta que se encuentre un triángulo, el cual será equivalente al polígono dado.

PROBLEMA 43.

Reducir un triángulo á cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la mitad de la base y la altura, y el cuadrado construido sobre dicha media proporcional será equivalente al triángulo dado.

En efecto, si b y a son la base y altura de un triángulo, y m la media proporcional, será $\frac{1}{2}ab=m^2$.

El primer miembro de esta igualdad representa el área del triángulo, y el segundo la del cuadrado construido sobre la media proporcional; luego este cuadrado es equivalente al triángulo.

PROBLEMA 44.

Reducir un paralelógramo á cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la base y la altura de dicho paralelógramo; y el cuadrado construido sobre dicha media proporcional será equivalente al paralelógramo.

Se demuestra como la solucion anterior.

PROBLEMA 45.

Reducir un polígono cualquiera á cuadrado equivalente.

Redúzcase á triángulo equivalente, y este á cuadrado.

PROBLEMA 46.

Reducir un círculo á cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la mitad del radio y la circunferencia, y el cuadrado construido sobre ella será equivalente al círculo.

Se demostrará esta solucion como la del problema 33.

NOTA. Para poder resolver con exactitud este problema, que es el de la *cuadratura del círculo*, seria menester poder construir una recta exactamente igual á la circunferencia rectificada. Esto no se ha conseguido todavía, y muy probablemente no se conseguirá nunca.

PROBLEMA 47 (*fig.* 143).

Dado un polígono, construir otro semejante con el cual esté el primero en la razon de m *á* n.

Divídase una recta AB en dos partes AC y CB, que estén en la razon de m á n; sobre AB como diámetro descríbase un semicírculo, levántese la perpendicular CD á la AB, tírense las cuerdas AD y BD, tómese sobre la AD, prolongada si es preciso, una parte DE igual á un lado del polígono dado, por el punto E tírese la EF paralela á la AB: DF será el lado homólogo de DE en el polígono que se quiere construir.

En efecto, sea P el polígono dado, X el polígono semejante á P construido sobre DF considerado como lado homólogo de DE: será [*Teor.* 100]

$$P : X :: DE^2 : DF^2 \qquad [1].$$

Siendo semejantes los triángulos ABD y EFD, tendremos la proporcion

$$DE : DF :: DA : DB,$$

y por consiguiente

$$DE^2 : DF^2 :: DA^2 : DB^2.$$

De esta proporcion y la [1] resulta esta otra

$$P : X :: DA^2 : DB^2.$$

Ahora [*Teor.* 68, *Corol.* 2°]

$$AD^2 : BD^2 :: AC : BC :: m : n;$$

luego $P : X :: m : n$;

es decir, que X es el polígono pedido.

Solucion analítica. Sea P el área del polígono dado, X la del que se quiere construir, a uno de los lados del polígono dado, y x su lado homólogo en el polígono X; tendremos [*Teor.* 100]

$$P : X :: a^2 : x^2;$$

pero por suposicion $P : X :: m : n$;

luego $a^2 : x^2 :: m : n$,

de donde $x^2 = \frac{na^2}{m}$,

ó bien $x^2 = \frac{n}{m} a \times a$,

luego [*Aritm.* 165] x es una media proporcional entre las rectas $\frac{n}{m} a$ y a.

Casos particulares. *Construir un polígono semejante á uno dado, y que sea duplo, triplo, cuádruplo, etc. del polígono dado.*

1.° Si el nuevo polígono ha de ser duplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 2$; luego $x^2 = 2a^2$, ó $\frac{x}{a} = \sqrt{2}$; es decir, que [*Teorema* 81] x es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es a; ó bien x es el lado del cuadrado inscripto en un círculo cuyo radio es a.

2.° Si el nuevo polígono ha de ser triplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 3$; y $x^2 = 3a^2$, ó $\frac{x}{a} = \sqrt{3}$; luego [*Teor.* 83] x es el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo cuyo radio es a.

3.° Si el nuevo polígono ha de ser cuádruplo del polígono dado, será $\frac{n}{m} = 4$; y por consiguiente $x^2 = 4a^2$, ó $x = 2a$; luego el lado del nuevo polígono ha de ser doble de su homólogo en el polígono dado.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LIBRO I.

Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.

CAPITULO I.

Perpendiculares y oblicuas á un plano.

46. *Una recta que tiene dos puntos en un plano, está toda ella en el plano*: pues hemos dicho [6] que se llama plano una superficie tal, que si una recta pasa por dos puntos tomados á arbitrio en dicha superficie, coincide enteramente con la misma superficie.

TEOREMA 105 (*fig.* 144).

Tres puntos A, B *y* C, *que no están en línea recta, determinan la posicion de un plano;* ó lo que es igual, *por tres puntos* A, B *y* C, *que no están en línea recta, puede pasar un plano, y no puede pasar mas que un solo plano.*

Tiremos la recta *AB*: es evidente que por esta recta *AB* podrá pasar un plano, y que si este plano gira al rededor de la recta *AB*, llegará á pasar por el tercer punto *C*. Luego por tres puntos que no están en línea recta puede pasar un plano.

Para demostar que por dichos tres puntos no puede pasar mas que un solo plano, concibamos que por estos puntos pasen dos planos. Tiremos las rectas *AB* y *AC;* estas rectas estarán enteramente en los dos planos, porque cada uno tiene dos puntos en ellos [46]. Tomemos ahora un punto cualquiera *D* en uno de los planos, y tiremos en este plano la recta *DEF*, de modo que corte á las dos rectas *AB* y *AC*; lo que es posible, por hallarse las rectas *AB* y *AC* en los dos planos. Los puntos *E* y *F* están en los dos planos; luego la recta *DEF* estará enteramente en los dos planos, y por tanto el punto *D* se halla en los dos planos. Queda pues demostrado que todo punto de uno de los planos es tambien punto del otro plano; luego ambos planos tienen todos sus puntos comunes; luego forman un solo plano.

Corolarios. 1.º *Dos rectas que se cortan, determinan la posicion de un plano*: pues señalando un punto en cada una, diferente del punto comun, tendremos tres puntos que no están en línea recta; por estos tres puntos puede pasar un plano, el cual contiene á las dos rectas [46]. Ahora, si por las dos rectas pudiesen pasar dos planos, resultaria que por tres puntos no en línea recta podrian pasar dos planos diferentes; lo que es imposible.

2º. *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.*

En efecto, segun la definicion de las paralelas, estas rectas están en un mismo plano. Si fuera posible que por dos paralelas pasasen dos planos, tomando dos puntos en la una y uno en la otra, pasarian por tres puntos no en línea recta dos planos diferentes; lo que es absurdo.

3.º *La interseccion de dos planos es una recta*: pues si no fuese recta, se podrian tomar en ella tres puntos no en línea recta, por los cuales pasarian los dos planos, y por tanto estos planos coincidirian; contra el supuesto.

TEOREMA 106 (*fig.* 145).

Si una recta AB *es perpendicular á otras dos rectas* AC *y* AD *que pasan por su pie* A *en un plano* MN, *es perpendicular á otra cualquiera recta* AE, *que pasa por su pie en el mismo plano.*

Tiro una recta *DC* que corte á las tres rectas *AC*, *AD* y *AE*, prolongo la *AB* hácia el otro lado del plano *MN*, tomo en su prolongacion la parte *AB'*=*AB*, y tiro las rectas *BC*, *BE*, *BD*, *B'C*, *B'E*, *B'D*.

Las rectas *BC* y *B'C* son iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular *CA*, y por la misma razon las rectas *BD* y *B'D* son iguales: luego los triánlos *BCD* y *B'CD* son iguales [*Teor.* 18]; y por consiguiente los ángulos *BCE* y *B'CE* son iguales. Los triángulos *BEC* y *B'EC* son iguales [*Teor.* 16]; luego *BE*=*B'E*: luego la recta *EA*, que tiene los puntos *E* y *A* equidistantes de *B* y *B'*, es perpendicular á *BB'* [*Teor.* 24].

TEOREMA 107 (*fig.* 146).

Todas las perpendiculares AC, AD, AE, etc., *levantadas á una recta en uno de sus puntos* A, *están en un mismo plano*.

Por dos de estas rectas *AC* y *AD* hagamos pasar un plano *MN*, y admitamos que una de las otras rectas, *AE* por ejemplo, no se halle en este plano. Por las dos rectas *AB* y *AE* imaginemos un plano, el cual cortará al plano *MN* por la recta *AG*, diferente de la *AE*. Por ser la *AB* perpendicular á las dos rectas *AC* y *AD*, sería perpendicular á la *AG* [*Teor.* 106]; pero la *AE* es por suposicion perpendicular á la *AB*; luego por el punto *A* se podrian tirar dos perpendiculares *AE*, *AG* á la recta *AB* en un mismo plano *BAE*; lo que es imposible.

47. Se dice que una recta *es perpendicular* á un plano, ó que un plano es *perpendicular* á una recta, cuando la recta es perpendicular á todas las que pasan por su pie en dicho plano.

Segun esta definicion, una recta será perpendicular á un plano, si es perpendicular á dos rectas que pasan por su pie en dicho plano [*Teor.* 106].

Una recta que no es perpendicular á un plano, se llama *oblícua* al plano.

TEOREMA 108 (*fig.* 147).

Por un punto A *de un plano no se puede levantar mas que una sola perpendicular* AB *á dicho plano:* pues, si por dicho punto *A* se tira otra recta *AC*, y por las dos un plano, su interseccion con el plano *MN* será *DE*. Siendo *AB* perpendicular al plano *MN*, es perpendicular á la recta *DE* que pasa por su pie en dicho plano *MN;* luego la *AC* es oblícua á la *DE*, y por tanto es oblícua al plano *MN*.

TEOREMA 109 (*fig*. 148).

Desde un punto B, *dado fuera de un plano* MN, *no se puede bajar al plano mas que una sola perpendicular* BA: pues, tirando desde el punto *B* otra recta cualquiera *BC* al plano *MN*, y juntando los pies *A* y *C*, la recta *BA* será perpendicular á la *AC*, porque lo es al plano *MN* [47]: por consiguiente [*Teor*. 5] la *BC* es oblícua á la *AC*, y por tanto es oblícua al plano.

*TEOREMA 110 (*fig*. 149).

Por un punto dado A *de una recta* AB *no se puede tirar mas que un plano* CDE *perpendicular á dicha recta.*

Tiro otro plano cualquiera *CDF* por dicho punto *A*, y hago pasar por la recta *AB* un plano que corte á los dos *CDE* y *CDF* por las rectas *AG* y *AH;* la *AB* será perpendicular á la *AG*, porque lo es al plano *CDE;* luego la *AB* será oblícua á la *AH*, y por consiguiente oblícua al plano *CDF*.

*TEOREMA 111 (*fig*. 150).

Desde un punto B, *dado fuera de una recta* MN, *no se puede tirar mas que un solo plano* BD *perpendicular á la recta* MN.

Tiro otro plano cualquiera *BE* que corte á la recta *MN*, y desde un punto *B* de la interseccion de los planos tiro las dos rectas *BA* y *BC* á los puntos de interseccion de los planos y de la recta *MN*. Siendo el plano *BD* perpendicular á la recta *MN*, esta es perpendicular á la recta *AB* que pasa por su pie en el plano *BD;* luego la recta *MN* es oblícua á la *BC*, y por consiguiente es oblícua al plano *BE*.

TEOREMA 112 (*fig*. 148).

La perpendicular BA, *bajada á un plano* MN *desde un punto* B *esterior á él, es menor que cualquiera oblícua* BC *tirada desde dicho punto al plano:* pues tirada la *AC*, la *BA* es perpendicular á la *AC*, y por consiguiente la *BC* es oblícua; y ya se sabe [*Teor.* 21] que $BA<BC$.

Recíproco. *La recta mas corta que se puede tirar desde un punto á un plano, es perpendicular al plano* [32].

48. Se llama *distancia* de un punto á un plano la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.

TEOREMA 113 (*fig.* 151).

Si desde un punto tomado fuera de un plano se tiran una perpendicular y varias oblícuas: 1.° *Las oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales.* 2.° *De dos oblícuas, la que se aparta mas de la perpendicular, es mayor.*

1.° Sean las oblícuas *BC* y *BD*, y sea $AC=AD$: digo que $BC=BD$.

Los triángulos *ABC* y *ABD* son iguales [*Teor.* 16]; luego $BC=BD$.

2.° Sean las dos oblícuas *BD* y *BE*, y sea $AE>AD$: digo que $BE>BD$.

Tomo $AC=AD$, y tiro *BC*, que será igual á *BD* [1.°]; como $BE>BC$ [*Teor.* 22, 2.°], será $BE>BD$.

Recíproco. 1.° *Las oblícuas iguales se apartan igualmente de la perpendicular á un plano.*

2.° *La mayor de dos oblícuas se aparta de la perpendicular á un plano mas que la menor* [21].

TEOREMA 114 (*fig.* 152).

Si desde el pie de una perpendicular BA *á un plano* MN *se tira una perpendicular* AC *á una recta* DE *situada en el plano, la recta* CB *tirada desde el pie* C *de esta segunda perpendicular á un punto* B *de la primera será perpendicular á la recta* DE *situada en el plano.*

Tomo sobre la *DE* las partes iguales *CD* y *CE*, y tiro las rectas *DA* y *EA*, *DB* y *EB*: tendremos $AD=AE$ [*Teorema* 22, 1.°], y $DB=EB$ [*Teor.* 113, 1.°]; luego la recta *BC*, que tiene los puntos *B* y *C* equidistantes de los *D* y *E*, es perpendicular á la *DE* [*Teor.* 24].

CAPITULO II.

Paralelismo en el espacio.

TEOREMA 115 (*fig.* 155).

Por un punto G del espacio no se puede tirar mas que una sola paralela AB *á una recta* CD: pues otra recta cualquiera *EF*, que pase por dicho punto *G*, estará en el plano *ABCD*, ó estará fuera: si está en el plano, no puede ser paralela á *CD* [18]: si está fuera, tampoco; pues dos paralelas deben estar en un mismo plano.

TEOREMA 116 (*fig.* 156).

Dos rectas AB *y* CD *perpendiculares á un plano* MN *son paralelas.*

Las dos rectas *AC* y *CD* no pueden encontrarse, pues son perpendiculares á la recta *AC* que une sus pies.

Falta ahora demostrar que estas dos rectas *AB* y *CD* están en un mismo plano (*a*).

Para esto, tiro por el punto *C* la *EF* perpendicular á la *AC* en el plano *MN*, y junto el punto *C* con el punto *B*: la *BC* será [*Teor.* 114] perpendicular á la *EF*. Pero por ser *DC* perpendicular al plano, es perpendicular á la recta *EF*; luego las rectas *CA*, *CB* y *CD* son perpendiculares á la *EF*; luego [*Teor.* 107] estas tres rectas están en un mismo plano: y como la *BA* tiene dos puntos *B* y *A* en este plano, se hallará toda en él; las rectas *AB* y *CD* están pues en un mismo plano. Las rectas *AB* y *CD*, que no se encuentran y están en un mismo plano, son paralelas.

Recíproco. *Si una de dos paralelas es perpendicular á un plano, la otra tambien lo será* [32].

(*a*) Dos rectas pueden no encontrarse en el espacio y no ser paralelas, por no hallarse en el mismo plano. Asi, para poder asegurar que dos rectas son paralelas, se ha de demostrar que no se encuentran, y que además están en un mismo plano.

TEOREMA 117 (*fig.* 155).

Dos rectas AB, CD, *paralelas á una tercera* EF *en el espacio, son paralelas entre sí*: pues tirando un plano *MN* perpendicular á la *AB*, lo será á su paralela *EF* [*Teor.* 116, *Recíp.*]; y siendo perpendicular á la *EF*, será perpendicular á su paralela *CD*; luego las dos rectas *AB* y *CD* son perpendiculares al plano *MN*; y por tanto son paralelas.

49. Una recta y un plano que prolongados indefinidamente no se encuentran, se llaman *paralelos*.

TEOREMA 118 (*fig.* 156).

Si una recta AB es paralela á otra CD tirada en un plano MN, *es paralela al plano*.

La recta *AB* se halla en el plano *ABCD* [*Teor.* 105, *Corolario* 2.°]; este plano no tiene con el plano *MN* mas puntos comunes que los de la recta *CD*; y como la recta *AB* no puede encontrar á la *CD*, pues las dos son paralelas segun la hipótesi, se infiere que la *AB* no puede encontrar al plano *MN*.

50. Dos planos que por mas que se prolonguen no se encuentran, se llaman *paralelos*.

TEOREMA 119 (*fig.* 157).

Dos planos MN *y* PQ *perpendiculares á una recta* AB *son paralelos*: pues si dichos planos se encontrasen, tirando desde un punto *C* de su interseccion las rectas *AC* y *BC*, la recta *AC* estaria en el plano *MN* por tener dos puntos *A* y *C* en dicho plano; y por la misma razon la recta *BC* estaria en el plano *PQ*. La recta *AB* seria perpendicular á las *AC* y *BC*, por serlo á los planos *MN* y *PQ* [47]; luego desde el punto *C* se podrian tirar dos perpendiculares á la recta *AB*; lo que es imposible.

TEOREMA 120 (*fig.* 158).

Si á dos planos paralelos corta un tercer plano, las intersecciones son paralelas: pues dichas intersecciones se hallan en el plano secante; y no pueden encontrarse, aunque se prolonguen, por estar situadas en planos paralelos.

Recíproco del 119. *Si una recta* AB (fig. 158) *es perpendicular á un plano* MN, *es tambien perpendicular á cualquier plano* PQ *paralelo al primero.*

Por la recta *AB* tiro dos planos *CABD* y *EABF*, cuyas intersecciones con los planos *MN* y *PQ* serán respectivamente paralelas; es decir, *AC* será paralela á *BD* y *AE* á *BF*. Siendo *AB* perpendicular al plano *MN*, lo es á las rectas *AC* y *AE*; y por consiguiente tambien será perpendicular á las rectas *BD* y *BF*, paralelas á las *AC* y *AE*; luego [47] *AB* es perpendicular al plano *PQ*.

TEOREMA 121 (*fig.* 159).

Las paralelas AB, CD *comprendidas entre dos planos paralelos* MN, PQ *son iguales*: pues tirando por ellas un plano *ABDC*, sus intersecciones *AC* y *BD* con los planos paralelos serán paralelas; luego el cuadrilátero *ABDC* es un paralelógramo; y por tanto *AB*=*CD*.

Corolario. *Los puntos de un plano equidistan de su paralelo.*

TEOREMA 122 (*fig.* 160).

Si dos rectas AB y AC, *que se cortan, son paralelas á otras dos* DE *y* DF *que tambien se cortan, el plano* MN *que pasa por las dos primeras, será paralelo al plano* PQ *que pasa por las dos segundas.*

Desde el punto *A* bajo una perpendicular *AG* al plano PQ, y por el pie *G* de esta perpendicular tiro las *GH* y *GI* paralelas á las rectas *DE* y *DF*. Siendo *AB* y *GH* paralelas á la *DE*, serán paralelas entre sí [*Teor.* 117] y siendo *AC* y *GI* paralelas á la *DF*, serán paralelas entre sí. La recta *AG* es perpendicular á las *GH* y *GI*; luego lo será á sus paralelas *AB* y *AC*: luego [147] la *AG* es perpendicular al plano *MN*; y por consiguiente los dos planos *MN* y *PQ*, perpendiculares á la recta *AG*, son paralelos [*Teor.* 119].

TEOREMA 123 (*fig.* 161).

Dos ángulos BAC, EDF, *cuyos lados son respectivamente paralelos, y cuyos planos son diferentes, son iguales, si los lados* *paralelos* AB *y* DE, AC *y* DF *están dirigidos en el mismo sentido.*

Tomo *AB=DE*, *AC=DF*, y tiro las rectas *AD*, *BE*, *CF*, *BC* y *EF*. Siendo *AB* igual y paralela á *DE*, *AD* será igual y paralela á *BE* [*Teor.* 30]. Siendo *AC* igual y paralela á *DF*, será *AD* igual y paralela á *CF*; luego *BE* y *CF*, iguales y paralelas á *AD*, serán iguales y paralelas entre sí: luego *BC* será igual y paralela á *EF*. Luego los triángulos *ABC*, *DEF*, cuyos tres lados son respectivamente iguales, son iguales; y por tanto los ángulos *BAC* y *EDF* son iguales.

*TEOREMA 124 (*fig.* 162).

Si tres planos MN, PQ RS *paralelos cortan á dos rectas* AC *y* DF, *las cortan en partes proporcionales*; es decir, que tendremos la proporcion

$$AB : BC :: DE : EF.$$

Si las rectas *AC* y *DF* estuviesen en un mismo plano, el teorema seria cierto, y estaria comprendido en el teorema 55; pero en general las rectas *AC* y *DF* están en diferentes planos, y en este supuesto es en el que debemos demostrar el teorema.

Tiro las rectas *AD*, *CF*, y la *AF* que cortará al plano *PQ* en un punto *G*, junto los puntos *B*, *G* y los *E*, *G*. La recta *BG* es paralela á *CF* [*Teor.* 120]; luego

$$AB : BC :: AG : GF.$$

Por igual razon tendremos

$$DE : EF :: AG : GF.$$

De esta proporcion y la anterior resulta

$$AB : BC :: DE : EF.$$

51. Se llama *proyeccion* de un punto sobre un plano el pie de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano: y *proyeccion* de una línea recta ó curva sobre un plano la línea que forman las proyecciones de sus diferentes puntos sobre el mismo plano.

TEOREMA 105 (*fig.* 163).

La proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta.

Sea *AD* una recta, *a, b, c, d,* etc. las proyecciones de varios de sus puntos *A, B, C, D,* etc.: digo que las proyecciones *a, b, c, d,* etc. están en línea recta.

Las rectas *Aa* y *Bb* perpendiculares al plano *MN* son paralelas, y por consiguiente están en un mismo plano, en el cual está contenida la recta *AD*, por tener dos puntos *A* y *B* en él. Las rectas *Bb* y *Cc* perpendiculares al plano *MN* son paralelas, y por consiguiente están en un mismo plano, que tambien contiene á la recta *AD*: luego estos dos planos tienen comunes las dos rectas *AD* y *Bb;* luego [*Teor.* 105, *Corol.* 1.°] dichos planos coinciden; luego los tres puntos *a, b* y *c* están en la interseccion del plano *AaBb* con el *MN;* ó lo que es igual, dichos tres puntos están en línea recta. Del mismo modo se puede demostrar que otra proyeccion cualquiera *d* está en línea recta con las *a, b, c.*

Nota. Segun este teorema, dada una recta indefinida, se hallará su proyeccion, juntando por medio de una recta las proyecciones de dos de sus puntos. Si la recta es limitada, su proyeccion será la recta que une las proyecciones de sus estremos.

El plano que contiene á la recta y á su proyeccion, se llama plano *proyectante* de la recta; y el plano sobre el que se proyecta una línea, se llama *plano de proyeccion.*

TEOREMA 126 (*fig.* 164).

Si dos rectas AB *y* CD *son paralelas en el espacio, sus proyecciones son tambien paralelas;* pues si por dos puntos de cada una de estas dos rectas tiramos dos perpendiculares al plano de proyeccion, y juntamos las proyecciones *a* y *b*, *c* y *d* que resultan por medio de dos rectas, tendremos las proyecciones *ab* y *cd* de las dos rectas. Siendo *AB* paralela á *CD* por suposicion, y *Aa* paralela á *Cc* [*Teor.* 116], el plano proyectante *ABab* será paralelo al plano proyectante *CDcd* [*Teor.* 122]; luego las intersecciones *ab* y *cd* de estos planos con el tercero *MN* serán paralelas [*Teor.* 120].

TEOREMA 127 (*fig.* 165).

El ángulo agudo que forma una recta AB *con su proyeccion, es menor que el que forma dicha recta con otra cualquiera que pase por su pie en el plano de proyeccion.*

Desde un punto cualquiera *A* de la recta *AB*, bajo una perpendicular *AC* al plano *MN*, y junto los puntos *B* y *C*; tendré la proyeccion *BC* de la recta *BA*. Tomo ahora sobre una recta cualquiera *BD*, que pase por el punto *B* en el plano *MN*, una parte *BD*=*BC*, y junto los puntos *A* y *D*: los triángulos *ABC*, *ABD*, que tienen comun el lado *AB*, *BC*=*BD*, y *AC*<*AD* [*Teor.* 112], nos darán [*Teor.* 20, *Recíp.*] el ángulo *ABC*<*ABD*; que es lo que se queria demostrar.

El ángulo agudo que forma una recta con su proyeccion se llama *ángulo de la recta y del plano.*

52. Se llama *ángulo de dos rectas que no se cortan en el espacio*, el ángulo formado por una de ellas y una paralela á la otra tirada por un punto de la primera; ó bien el ángulo que forman dos rectas tiradas por un punto cualquiera del espacio paralelamente á las dadas.

CAPITULO III.

Angulos diedros.

53. Se llama *ángulo diedro* la separacion ó abertura de dos planos *ABC*, *DBC* (*fig.* 166) que se cortan.

Caras del ángulo diedro son los dos planos *ABC y DBC* que forman dicho ángulo.

Arista del ángulo diedro es la interseccion *BC* de las caras.

Un ángulo diedro se designa con cuatro letras; una de cada cara y las dos de la arista, que se colocan en medio: asi, el ángulo diedro, cuyas caras son *ABC* y *DBC* (*fig.* 167), se designará *ABCD*; el diedro cuyas caras son *ABC* y *EBC*, se designará *ABCE*.

Si un ángulo diedro está solo, puede designarse con las dos letras de la arista. Asi, el ángulo formado por los planos (*fig.* 166) *ABC* y *DBC* puede designarse *BC*.

Dos ángulos diedros se llaman *iguales*, cuando coincidiendo dos caras y las aristas, coinciden tambien las otras dos caras. De donde se infiere que la magnitud de un ángulo diedro no depende de la de sus caras, sino de la separacion de estas.

54. Se llaman ángulos diedros *adyacentes* los dos ángulos diedros formados por dos planos que se reunen en una recta. Asi, los dos ángulos diedros *ACED* y *BCED* (*fig.* 168) son adyacentes.

55. Un plano *CED* se llama *perpendicular* á otro *ACB*, cuando los ángulos adyacentes que forman son iguales.

Un plano es *oblícuo* á otro, cuando los ángulos adyacentes que forman son desiguales.

56. Se llama ángulo diedro *recto* cada uno de los dos diedros adyacentes formados por dos planos, de los que el uno es perpendicular al otro.

TEOREMAS 128 Y 129.

Por una recta dada en un plano no se puede levantar mas que un solo plano perpendicular al primero.

Dos ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Se demuestran estos dos teoremas del mismo modo que sus teoremas análogos 1 y 2.

57. Angulo diedro *agudo* es el ángulo diedro menor que el recto; y *obtuso* el mayor.

TEOREMA 130.

La suma de los ángulos diedros adyacentes es igual á dos ángulos rectos.

Se demuestra como su análogo el teorema 3.

Corolarios. 1.° *Los cuatro ángulos diedros, que forma un plano con otro al cual es perpendicular, son rectos.* De donde se infiere, que *si un plano es perpendicular á otro, este es perpendicular al primero.*

2.° *La suma de los ángulos diedros consecutivos formados hácia un mismo lado de un plano es igual á dos rectos.*

3.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos formados al rededor de una recta por varios planos que salen de esta recta, es igual á cuatro rectos.*

4.° *Un ángulo diedro cualquiera es menor que dos ángulos diedros rectos.*

Estos corolarios se deducen como sus análogos los del teorema 3.

58. Si la suma de dos ángulos diedros es igual á un diedro recto, cada uno se llama *complemento* del otro; ó bien los dos se llaman *complementarios*.

Si la suma de dos ángulos diedros es igual á dos diedros rectos, cada uno se llama *suplemento* del otro; ó bien los dos se llaman *suplementarios*.

59. Se llaman ángulos diedros *opuestos por la arista* dos ángulos diedros de los que el uno está formado por las prolongaciones de las caras del otro.

TEOREMA 131.

Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales.

Se demuestra como su análogo el teorema 4.

60. Llamaremos *ángulo plano correspondiente á un diedro* al ángulo formado por dos perpendiculares á la arista en un punto de esta, y cada una en cada plano.

TEOREMA 132 (*fig.* 166).

Dos ángulos planos ABD, ECF *correspondientes á un mismo diedro* BC *son iguales.*

Siendo *AB* y *EC* perpendiculares á la arista *BC*, y estando las dos en el plano *ABC*, son paralelas: por la misma razon las *BD* y *CF* son paralelas; luego los dos ángulos planos *ABD* y *ECF* tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego [*Teor*. 123] dichos ángulos son iguales.

TEOREMA 133 (*figs.* 169 y 170).

1.° *Si dos ángulos diedros* ABCD, EFGH (fig. 169) *son iguales, sus ángulos planos correspondientes* ABD *y* EFH *son iguales.*

2.° *Si dos ángulos diedros* ABCD, EFGH (fig. 170) *son desiguales, el ángulo plano* EFH *correspondiente al mayor diedro* EFGH *es mayor que el* ABD *correspondiente al menor diedro* ABCD.

1.° Coloco el diedro *EFGH* (*fig.* 169) sobre su igual de modo que coincidan, y supongo que entonces el ángulo plano *EFH* tome la posicion *E'F'H'*: segun el teorema 132, los ángulos planos *ABD* y *E'F'H'* son iguales; luego tambien son iguales los ángulos planos *ABD* y *EFH*.

2.° Hago pasar por la arista *FG* (*fig.* 170) un plano *GFI*, que forme con el *EFG* el ángulo diedro *EFGI* igual al *ABCD*: tendremos [1.°] que los ángulos planos correspondientes *ABD* y *EFI* son iguales; y como *EFI*<*EFH*, será *ABD*<*EFH*.

Recíproco 1.° *Si los ángulos planos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros son iguales.*

2.° *Si los ángulos planos correspondientes á dos diedros son desiguales, el mayor corresponde á mayor diedro que el menor* [21].

TEOREMA 134 (*fig.* 171).

Si una recta AB *es perpendicular á un plano* MN, *todo plano* PQ *que pase por ella, es perpendicular al primer plano* MN.

Tiro en el plano *MN* por el punto *B* la *CBD* perpendicular á la *PB*, los ángulos *ABC* y *ABD*, correspondientes á los diedros *QPBM* y *QPBN*, son iguales por suposicion; luego estos diedros son iguales [*Teor.* 133, *Recíp.* 1.°]; luego [55] el plano *PQ* es perpendicular al plano *MN*.

TEOREMA 135 (*fig.* 171).

Si dos planos MN, PQ *son perpendiculares entre sí, y en el uno* PQ *se tira una perpendicular* AB *á la interseccion* PB, *dicha perpendicular* AB *será tambien perpendicular al otro plano* MN.

Pues, siendo iguales por hipótesi los diedros *QPBM* y *QPBN*, los ángulos planos correspondientes *ABC* y *ABD* son tambien iguales [*Teor.* 133]; luego la recta *AB* es perpendicular á la *CD*; y como por suposicion es perpendicular á la *PB*, será perpendicular al plano *MN* [47].

Recíproco. *Si dos planos* MN *y* PQ *son perpendiculares entre sí, y en un punto* B *de la interseccion se levanta una perpendicular al uno* MN, *dicha perpendicular estará contenida en el otro plano* PQ [32].

TEOREMA 136 (*fig.* 172).

Si dos planos PA *y* SA *son perpendiculares á un tercero* MN, *la interseccion* AB *de los dos primeros será perpendicular á este tercer plano* MN; pues si en el punto *B*, comun á los tres planos, levanto una perpendicular al plano *MN*, estará contenida en los dos planos *PA* y *SA* [*Teor* 135, *Recíp.*]; luego dicha perpendicular coincidirá con la interseccion *AB*, y por tanto esta es perpendicular al plano *MN*.

TEOREMA 137.

Por una recta oblícua ó paralela á un plano no pueden tirarse dos planos perpendiculares al primero: pues si fuese posible tirar por dicha recta dos planos perpendiculares al primer plano, la interseccion de dichos dos planos seria perpendicular al primer plano [*Teor.* 136]; lo que es contrario á la hipótesi.

TEOREMA 138 (*fig.* 173).

Dos ángulos diedros CABD, cabd *son proporcionales á sus ángulos planos correspondientes* CBD, cbd.

Los ángulos planos *CBD* y *cbd* pueden ser comensurables ó incomensurables.

1.º Si los ángulos planos *CBD* y *cbd* son comensurables, supongamos que su medida comun sea el ángulo *cbm*, que quepa 6 veces en el ángulo plano *CBD* y 5 en el *cbd:* tendremos [29]

$$CBD : cbd :: 6 : 5.$$

Hagamos pasar planos por las rectas divisorias *BM*, *BN*, *BO*, etc.; *bm*, *bn*, *bo*, etc. y por las aristas *AB* y *ab:* estos planos dividirán al ángulo diedro *CABD* en 6 ángulos diedros parciales, y al ángulo diedro *cabd* en 5 ángulos diedros parciales: todos estos ángulos diedros parciales son iguales, por que lo son sus ángulos planos correspondientes; luego

$$CABD : cabd :: 6 : 5.$$

Por consiguiente

$$CABD : cabd :: CBD : cbd.$$

2.° Si los ángulos planos *CBD* y *cbd* son incomensurables, imaginemos que se divida uno de ellos, por ejemplo el *cbd*, en ángulos iguales, y que se tiren por el punto *B* en el plano *CBD* rectas que formen entre sí ángulos iguales á aquellos en que se divida el ángulo *cbd*: la última recta divisoria *BQ* no podrá caer sobre la *BD*, porque los ángulos planos *CBD* y *cbd* son incomensurables; pero la recta *BQ* se podrá aproximar á la *BD* tanto como se quiera, puesto que nosotros podemos imaginar dividido el ángulo *cbd* en ángulos tan pequeños como queramos, y que el ángulo *QBD* es menor que uno de estos ángulos.

Tiro el plano *ABQ*.

Por ser comensurables los ángulos *CBQ* y *cbd*, tendremos, segun el primer caso, $\frac{CABQ}{cabd}=\frac{CBQ}{cbd}$.

Ahora, pudiéndose aproximar cuanto se quiera la recta *BQ* á la *BD*, se infiere que los límites de las variables $\frac{CABQ}{cabd}$ $\frac{CBQ}{cbd}$ son las cantidades constantes $\frac{CABD}{cabd}$ y $\frac{CBD}{cbd}$; luego, segun el teorema de los límites, $\frac{CABD}{cabd}=\frac{CBD}{cbd}$.

Nota. Si *cabd* es la unidad para medir al ángulo diedro *CABD*, la primera razon de la proporcion $\frac{CABD}{cabd}=\frac{CBD}{cbd}$ es la medida del ángulo diedro *CABD* [3, *Nota*]: si tambien *cbd* es la unidad para medir al ángulo *CBD*, la segunda razon de dicha proporcion es la medida del ángulo *CBD*; luego, si la unidad para medir á un ángulo diedro es el diedro correspondiente á la unidad de los ángulos planos, la medida de un ángulo diedro y la de su ángulo plano correspondiente son iguales; ó en términos abreviados, *la medida de un ángulo diedro es su ángulo plano correspondiente*.

61. Las denominaciones de *alternos*, *correspondientes*, etc. se aplican á los ángulos diedros en los mismos casos que á los rectilíneos [16].

TEOREMA 139 (*fig.* 174).

Si á dos planos paralelos *MN* y *PQ* corta un tercer plano *RS*: 1.° *Los ángulos diedros alternos son iguales.* 2.° *Los ángulos diedros correspondientes son iguales.* 3.° *La suma de los dos ángulos diedros internos de un mismo lado del plano secante es igual á dos rectos.*

1.° Las intersecciones *AB* y *CD* del plano secante *RS* y los paralelos *MN* y *PQ* son paralelas [*Teor.* 120]; luego, si tiramos un plano *EFIG* perpendicular á la interseccion *AB*, lo será tambien á su paralela *CD* [*Teor.* 116, *Recip.*]. El plano *EFIG* cortará á los tres primeros por las rectas *GH* é *IK* paralelas, y por la *EF*; y puesto que dicho plano *EFIG* es perpendicular á la recta *AB*, esta será perpendicular á las *GO* y *OL*, que pasan por su pie *O* en dicho plano *EFIG*: luego el ángulo *GOL* es el ángulo plano correspondiente al diedro *MABS*, y por la misma razon el ángulo *KLO* es el ángulo plano correspondiente al diedro *QCDR*; y pues los dos ángulos alternos *GOL*, *KLO* son iguales, por ser paralelas las rectas *GH* é *IK*, los diedros alternos *MABS*, *QCDR* son iguales [*Teor.* 133, *Recip.* 1.°].

Del mismo modo se demuestran los otros dos teoremas.

TEOREMA 140 (*fig.* 175).

Si desde un punto tomado en el interior de un ángulo diedro BADC *se bajan dos perpendiculares á sus caras* AC *y* AB, *el ángulo de dichas perpendiculares es suplemento del diedro* BADC.

Siempre podemos tomar en el interior del diedro un punto *O*, tal que si desde él se bajan dos perpendiculares *OS* y *OT* á las caras, los pies de estas perpendiculares caigan en las caras del diedro y no en sus prolongaciones. Por dichas dos perpendiculares *OS* y *OT* hago pasar un plano, que cortará á la arista *AD* en un punto *F*, y á las caras del diedro por las rectas *FS* y *FT*. Siendo las rectas *OS* y *OT* perpendiculares á los planos *ABD* y *ACD*, el plano *OSFT* será perpendicular á los dos planos *ABD* y *ACD* [*Teor.* 134], y por consiguiente á su interseccion *AD* [*Teor.* 136]; luego *AD* será perpendicular á las rectas *FS* y *FT*, y por tanto el ángulo *TFS* es la medida del diedro *BADC*. En el cuadrilátero *OSFT*, siendo rectos los dos ángulos S y T, es [*Teor.* 26, *Corol.*] $O+SFT=2R$, es decir, que los ángulos O y SFT son suplementarios; y pues el ángulo SFT es la medida del diedro $BADC$, se infiere que el ángulo O es suplemento del diedro $BADC$.

Ahora, cualquiera que sea el punto del interior del diedro, desde el cual se bajen dos perpendiculares á sus caras, el ángulo que estas perpendiculares formen, será igual al ángulo O, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido [*Teor.* 123]; luego dicho ángulo será suplemento del diedro $BADC$.

CAPITULO IV.

Angulos poliedros.

---

162. Se llama ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido* la abertura de tres ó mas planos que concurren en un punto. Este punto se llama *vértice* del ángulo poliedro.

Un ángulo poliedro se enuncia con la letra del vértice, ó con dicha letra seguida de otra de cada arista.

Si el ángulo poliedro está formado por tres planos, se llama ángulo *triedro*.

Angulo poliedro *convexo* es el ángulo poliedro cuyas caras no pueden ser cortadas por una recta mas que en dos puntos (*a*)

TEOREMA **141** (*fig.* **176**).

Un ángulo plano cualquiera de un ángulo triedro es menor que la suma de los otros dos.

Sea V el ángulo triedro, y AVC el mayor de sus tres ángulos planos; digo que $AVC<AVB+BVC$.

Tiro en el plano AVC la recta VD, que forme con la arista VA el ángulo $AVD=AVB$; por un punto cualquiera D de la VD tiro una recta AC, que corte á las dos aristas VA y VC; tomo $VB=VD$, y tiro las rectas BA y BC.

(*a*) Todos los ángulos poliedros, de que nos ocuparemos en este tratado, serán convexos.

Los triángulos AVB y AVD son iguales [*Teor.* 16]; luego $AB=AD$: pero $AB+BC>AC$; luego $BC>DC$.

Los triángulos BVC y DVC nos darán [*Teor.* 20, *Recip.*] el ángulo $BVC>DVC$.

Añadiendo á ambos miembros de esta desigualdad los ángulos iguales AVB y AVD, será

$$BVC+AVB>DVC+AVD,$$

ó en fin

$$BVC+AVB>AVC.$$

Corolario. *Un ángulo plano cualquiera de un triedro es mayor que la diferencia de los otros dos:* pues, segun el teorema, tenemos

$$BVC+AVB>AVC;$$

restando BVC de ambos miembros, resulta

$$AVB>AVC-BVC.$$

TEOREMA 142 (*fig.* 177).

La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos.

Sea V el ángulo poliedro, compuesto de los ángulos planos AVB, BVC, CVD, DVE y EVA; digo que la suma de todos estos ángulos es menor que 4 rectos.

Para demostrarlo, tiremos un plano que corte á todas las aristas del ángulo poliedro, tomemos en el interior del polígono $ABCDE$, que resulta de la interseccion de dicho plano con las caras del ángulo poliedro, un punto cualquiera O, y tiremos á los vértices de este polígono las rectas OA, OB, OC, OD y OE. Cada uno de los lados del polígono $ABCDE$ puede considerarse como base de un triángulo lateral y de un triángulo del polígono; luego el número de triángulos laterales es igual al número de triángulos del polígono. Por consiguiente la suma de los ángulos de los triángulos laterales es igual á la suma de los ángulos de los triángulos del polígono.

En cada uno de los ángulos triedros, cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E, la suma de dos ángulos planos es mayor que el tercero [*Teor.* 141]; es decir, $VBA+VBC>ABC$, $VCB+VCD>BCD$, y asi en los demás tiedros: luego la suma de los ángulos de las bases de los triángulos laterales es mayor que la suma de los ángulos del polígono $ABCDE$; luego la suma de los ángulos del punto V será menor que la suma de los ángulos consecutivos del punto O; y como la suma de estos ángulos es igual á cuatro rectos, la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro V será menor que cuatro rectos.

*63 Dos ángulos triedros se llaman *suplementarios*, cuando los ángulos planos de cada uno son suplementos de los ángulos diedros del otro.

*TEOREMA 143 (*fig.* 178).

A todo ángulo triedro O corresponde otro ángulo triedro suplementario.

Siempre podemos tomar en el interior del triedro O un punto O', tal que si desde él se bajan las perpendiculares $O'D$, $O'E$, $O'F$ á las caras del triedro O, el punto O quede dentro del triedro O'.

Siendo las rectas $O'D$, $O'E$, $O'F$ perpendiculares á las caras BOC, AOC, AOB, el ángulo $EO'D$ es suplemento del diedro OC [*Teor.* 140], el ángulo $DO'F$ es suplemento del diedro OB, y el ángulo $EO'F$ es suplemento del diedro OA.

Los planos $DO'E$, $DO'F$, $EO'F$ son perpendiculares respectivamente á los planos BOC y AOC, BOC y AOB, AOB y AOC [*Teor.* 134]; y las rectas OC, OB, OA, intersecciones de estos planos, serán perpendiculares á los planos $DO'E$, $DO'F$, $EO'F$ [*Teor.* 136]; luego los ángulos planos AOB, AOC, BOC serán suplementos de los diedros $O'F$, $O'E$, $O'D$. Luego [63] los dos diedros O y O' son suplementarios.

*TEOREMA 144.

La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

Sean A, B, C los tres ángulos diedros del triedro, a', b', c' los tres ángulos planos del triedro suplementario del propuesto, suplementos respectivos de los ángulos A, B, C: tendremos [63]

$$A=2R-a',\ B=2R-b',\ C=2R-c';$$

luego $$A+B+C=6R-(a'+b'+c') \qquad [1].$$

La suma $a'+b'+c'$ de los ángulos planos del triedro suplementario del propuesto es menor que $4R$ [*Teor.* 142]; luego $$A+B+C>2R.$$

Tambien es evidente, sea por que cada ángulo diedro de un triedro es menor que dos rectos, sea por la igualdad [1], que la suma $A+B+C$ es menor que seis rectos.

Corolario. *La diferencia entre la suma de dos ángulos diedros de un triedro y el tercer ángulo diedro es menor que dos rectos:* pues en el triedro suplementario tendremos
$$a'+b'>c';$$
luego, reemplazando a', b' y c' por sus valores $2R-A$, $2R-B$, $2R-C$, será
$$2R-A+2R-B>2R-C;$$
y por consiguiente $$A+B-C<2R.$$

64. Se llaman ángulos triedros *simétricos* dos ángulos triedros, de los que el uno está formado por las prolongaciones de las aristas del otro.

TEOREMA 145 (*figs.* 179 *y* 180).

1.° *Si un ángulo triedro* VABC (fig. 179) *tiene dos ángulos diedros iguales* VA *y* VC, *los ángulos planos opuestos* BVC *y* BVA *son iguales.*

2.° *Si un ángulo triedro* VABC (fig. 180) *tiene dos ángulos diedros* VA *y* VC *desiguales, al mayor* VA *se opone mayor ángulo plano.*

1.° Prolongo las aristas en sentido contrario al suyo, y resultará el triedro $Vabc$ simétrico del propuesto. Coloquemos el triedro $Vabc$ sobre el $VABC$, de modo que la arista Va caiga sobre la VC, y que la arista Vc caiga sobre la VA, lo que es posible, por ser iguales los ángulos AVC y aVc. Siendo por hipótesi iguales los diedros VA y VC, y siendo el diedro Va igual al diedro VA, por ser opuestos por la arista [*Teor.* 151], el diedro VC será igual al diedro Va: luego el plano Vab caerá sobre el plano VBC. Del mismo modo se demuestra que el plano Vcb cae sobre el VAB; luego la arista Vb, interseccion de los planos Vab y Vac, caerá sobre la VB, interseccion de los planos VAB y VBC. Por consiguiente los ángulos planos

BVC y *bVa* son iguales; y como el $bVa=BVA$, los ángulos *BVA* y *BVC* serán iguales.

2.° Tiro por la arista *VA* un plano *VAD* que forme con el *AVC* un ángulo diedro *DAVC* igual al diedro *VC:* sea *VD* la interseccion de dicho plano con el *BVC*. Siendo en el triedro *VADC* iguales los diedros *DAVC* y *VC*, los ángulos planos *DVC* y *AVD*, opuestos á ellos, son iguales [1.°]. En el triedro *VABD* tenemos [*Teor.* 141]

$$VBD+DVA>BVA;$$

luego $$BVD+DVC>BVA,$$

ó $$BVC>BVA.$$

Recíproco. 1.° *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos iguales, los ángulos diedros opuestos son iguales.*

2.° *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos desiguales, al mayor se opone mayor ángulo diedro* [21].

TEOREMA 146 (*fig.* 181).

Dos ángulos triedros simétricos VABC, VDEF *tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales; pero no pueden coincidir, si los tres ángulos planos del uno son desiguales.*

En efecto, el ángulo $AVB=DVE$, el $AVC=DVF$, el $BVC=EVF$; el ángulo diedro $AV=DV$, por ser opuestos por la arista [*Teor.* 131], y por la misma razon el diedro $BV=EV$, y el diedro $CV=FV$.

Para demostrar que estos dos triedros no pueden coincidir, observemos que, siendo segun la hipótesi desiguales los tres ángulos planos del triedo *VABC*, y por consiguiente desiguales tambien sus tres ángulos diedros [*Teor.* 145, *Recip.* 2.°], los tres ángulos planos del triedro *VDEF* serán desiguales entre sí, y por consiguiente serán tambien desiguales los tres ángulos diedros de dicho triedro *VDEF*. Coloquemos ahora el triedro *VDEF*, de modo que las aristas *FV* y *DV* coincidan con las *AV* y *CV:* entonces las aristas *EV* y *BV* quedarán á un mismo lado del plano *AVC;* mas como el diedro *VC* no es igual al diedro *VA*, y por tanto el diedro *VF* nó es igual al *AV*, el plano *FVE* no puede coincidir con el *AVB*, y por consiguiente los triedros no coinciden. Si colocamos el triedro *VDEF*, de modo que la arista *VD* coincida con la *VA*, y la *VF* con la *VG*; las aristas *VE* y *VB* quedarán á uno y otro lado del plano *AVG*, y por consiguiente tampoco coinciden los triedros.

Queda, pues, demostrado que los dos triedros simétricos *VABC*, *VDEF* tienen sus seis elementos respectivamente iguales, y que no pueden coincidir.

TEOREMA 147 (*fig*. 182).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen dos ángulos planos respectivamente iguales*, AVB=A'V'B', AVC=A'V'C', *igualmente dispuestos, é igual el ángulo diedro comprendido*, VA=V'A'.

Coloquemos el triedro *V'A'B'C'* sobre el *VABC*, de modo que las aristas *V'A'*, *V'C'* coincidan con las *VA*, *VC*: el plano *A'B'V'* caerá sobre el plano *ABV*, por ser iguales los diedros *AV* y *A'V'*; y la arista *V'B'* caerá sobre la *VB*, por ser iguales los ángulos planos *AVB* y *A'V'B'*. Luego los dos triedros, cuyas tres aristas coinciden, son iguales.

NOTA. Si los ángulos planos respectivamente iguales *AVB* y *A'V'B'*, *AVC* y *A'V'C'* (*figs*. 181 y 183) tienen disposicion contraria, los triedros *VABC*, *V'A'B'C'* serán simétricos.

En efecto, el triedro *VDEF* simétrico del *VABC* tiene el ángulo *DVE*=*AVB*=*A'V'B'*, el ángulo *DVF*=*AVC*=*A'V'C'*, y el ángulo diedro *DV*=*AV*=*A'V'*; luego los dos triedros *VDEF*, *V'A'B'C'* tienen dos ángulos planos respectivamente iguales, igualmente dispuestos (como se verá facilmente, si se coloca el triedro *VDEF* con el vértice hácia arriba en posicion análoga á la del triedro *V'A'B'C'*) é igual el diedro comprendido; luego [*Teor*. 147] dichos dos triedros son iguales; y pues el *VDEF* es simétrico del *VABC*, tambien el *V'A'B'C'* será simétrico del *VABC*.

TEOREMA 148 (*fig*. 182).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen un ángulo plano igual*, AVC=A'V'C', *y los diedros adyacentes respectivamente iguales*, BVAC=B'V'A'C', BVCA=B'V'C'A', *é igualmente dispuestos*.

Coloquemos el triedro *V'A'B'C'* sobre el *VABC*, de modo que coincidan las aristas *V'A'* y *VA*, *V'C'* y *VC*: el plano *A'B'V'* caerá sobre el plano *ABV* por ser iguales los diedros *BVAC* y *B'V'A'C'*, y el plano *B'C'V'* caerá sobre el *BCV* por la misma razon. Luego la arista *V'B'*, que tiene que caer al mismo tiempo sobre los planos *BAV* y *BCV*, caerá sobre la *VB;* y por consiguiente los triedros son iguales.

Nota. Si los ángulos diedros respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 181 *y* 183), se demostrará como en [*Teor.* 147, *Nota.*], que los dos triedros *VABC* y *V'A'B'C'* son simétricos.

TEOREMA 149 (*fig.* 184).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales*, AVB=A'V'B', AVC=A'V'C', BVC=B'V'C', *é igualmente dispuestos.*

El teorema quedará demostrado, si hacemos ver que dos ángulos diedros *BVAC* y *B'V'A'C'*, opuestos á dos ángulos planos iguales *BVC* y *B'V'C'*, son iguales [*Teor.* 147].

Tomo sobre las seis aristas las seis partes iguales *VA*, *VB*, *VC*, *V'A'*, *V'B'*, *V'C'*, y tiro las rectas *AB*, *AC*, *BC*, *A'B'*, *A'C'*, *B'C'*. Los triángulos *VAB* y *V'A'B'*, *VAC* y *V'A'C'*, *VBC* y *V'B'C'* son iguales [*Teor.* 16]; luego los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son iguales [*Teor.* 18].

Tenemos, pues, que los triedros *ABCV*, *A'B'C'V'* [62] tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales; y como los triángulos *VAB* y *VAC* son isósceles, los ángulos *VAB* y *VAC* de las bases serán agudos [*Teor.* 12, *Corol.* 2.º]; y por la misma razon los ángulos *V'A'B'* y *V'A'C'* serán agudos.

Esto supuesto, tomo sobre las aristas *AV* y *A'V'* las partes iguales *AD* y *A'D'*, y construyo los dos ángulos planos *EDF* y *E'D'F'* correspondientes á los dos diedros *BAVC* y *B'A'V'C'*; las perpendiculares *DE* y *DF* á la arista *AV* encontrarán á los lados *AB* y *AC*, y no á sus prolongaciones en sentido contrario, por ser agudos los ángulos *DAB* y *DAC*; é igualmente las perpendiculares *D'E'* y *D'F'* á la arista *A'V'* encontrarán á los lados *A'B'* y *A'C'*. Tiro ahora las rectas *EF* y *E'F'*: los triángulos rectángulos *DAE* y *D'A'E'*, *DAF* y *D'A'F'* son iguales [*Teor.* 17]; luego *AE*=*A'E'* y *DE*=*D'E'*, *AF*=*A'F'* y *DF*=*D'F'*: los triángulos *AEF* y *A'E'F'* son iguales [*Teorema* 16]; luego *EF*=*E'F'*. Finalmente los triángulos *DEF* y *D'E'F'* son iguales [*Teor.* 18]; luego los ángulos *EDF* y

E' D' F' son iguales; luego [*Teor.* 133, *Recip.* 1.°] los diedros *BVAC* y *B'V'A'C'* son iguales.

NOTA. Si los ángulos planos respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 181 *y* 183), se demostrará como en [*Teor.* 147, *Nota*] que los dos triedros son simétricos.

TEOREMA 150 (*fig.* 185).

Dos ángulos triedros VABC, V'A'B'C' *son iguales, cuando tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales,* BVAC=B'V'A'C', AVBC=A'V'B'C', AVCB=A'V'C'B', *é igualmente dispuestos.*

Sean *OPQR*, *O'P'Q'R'* los triedros suplementarios de los propuestos: tendremos que serán iguales sus ángulos planos *POQ* y *P'O'Q'*, *POR* y *P'O'R'*, *QOR* y *Q'O'R'* como suplementos de los diedros iguales de los triedros propuestos: luego [*Teor.* 149] los diedros *QPOR* y *Q'P'O'R'* serán iguales: luego tambien serán iguales los ángulos planos *AVC* y *A'V'C'* suplementos de los diedros iguales *QPOR* y *Q'P'O'R'*: luego los dos triedros propuestos tienen un ángulo plano igual *AVC=A'V'C'*, y los ángulos diedros adyacentes respectivamente iguales é igualmente dispuestos; luego [*Teor.* 148] dichos triedros son iguales.

NOTA Si los ángulos diedros respectivamente iguales tienen disposicion contraria (*figs.* 181 *y* 183), se demostrará como en [*Teor.* 147, *Nota*] que los dos triedros son simétricos.

* PROBLEMA 48 (*fig.* 186).

Por un punto O, *dado en un plano* MN, *levantar una perpendicular al plano.*

Tiro en el plano una recta *OA*, y por un punto *A* tomado en ella la levanto en dicho plano una perpendicular *AB*; por la *AB* hago pasar un plano *PBA*, tal que el ángulo diedro *PABO* sea agudo; por el punto *A* tiro en este plano la *AP* perpendicular á la *AB*; y finalmente en el punto *O* y en el plano *OAP*, levanto la perpendicular *OP* á la *AO*; y la *OP* será perpendicular al plano *MN*.

Pues, siendo *OA* y *AP* perpendiculares á la *BA*, el plano

PAO es perpendicular á la *BA* [47], y por consiguiente al plano *MN* [*Teor*. 134]: luego [*Teor*. 135] la *PO*, perpendicular á la interseccion *OA* de los dos planos perpendiculares *PAO* y *MN*, será la perpendicular al plano *MN*.

✽ PROBLEMA 49 (*fig*. 187).

Desde un punto P, *tomado fuera de un plano* MN, *bajar una perpendicular al plano.*

Tírense desde el punto *P* tres rectas iguales *PA*, *PB* y *PC* hasta el plano *MN*; hállese el centro *O* de la circunferencia que pasa por los tres puntos *A*, *B* y *C*, y la *PO* será la perpendicular al plano *MN*.

Pues siendo iguales las rectas *PA*, *PB* y *PC*, sus pies *A*, *B* y *C* estarán á igual distancia del pie de la perpendicular [*Teor*. 113, *Recíp*. 1.º]; mas tambien están á igual distancia del centro *O*, y no hay en el plano ningun otro punto diferente del *O*, que esté á igual distancia de los puntos *A*, *B* y *C* [*Teor*. 38]; luego el centro *O* es el pie de la perpendicular al plano *MN*.

✽ PROBLEMA 50 (*fig*. 188).

Dadas dos rectas AB *y* CD *que no están en un mismo plano, hallar su mas corta distancia.*

Por un punto *B* de la *AB* tiro la *BE* paralela á la *CD*, desde un punto cualquira *D* de la *CD* bajo la *DF* perpendicular al plano *ABE*, por el pie *F* de esta perpendicular tiro la *FG* paralela á la *BE*, y finalmente tiro la *GH* paralela á la *DF*; y la *GH* será perpendicular á las dos rectas, y al mismo tiempo su mas corta distancia.

En efecto, siendo la recta *DC* paralela á la *BE*, es paralela al plano *ABE* [*Teor*. 118]; y siendo la *DF* perpendicular á este plano, su paralela *HG* es tambien [*Teor*. 116, *Recíp*.] perpendicular al plano *ABE*, y por consiguiente á las dos rectas *AB* y *GF*: siendo la *HG* perpendicular á la *GF*, será tambien perpendicular á su paralela *CD*.

Para demostrar ahora que la *HG* es la línea mas corta que puede tirarse entre las dos rectas *AB* y *CD*, tiro una recta cualquiera LK entre estas rectas, y la LM paralela á la HG: tendremos que, por ser GH perpendicular al plano ABE, su paralela LM es tambien perpendicular al plano ABE, y por tanto la LK es oblícua á dicho plano: luego $LK>LM$, ó $LK>HG$.

LIBRO II.

Poliedros.

Nociones preliminares.

66. Se llama *poliedro* el cuerpo terminado por polígonos: estos polígonos se llaman *caras* del poliedro.

Se llama *tetraedro* el poliedro que tiene cuatro caras; *pentaedro* el que tiene cinco caras; *exaedro* el que tiene seis; etc.

Se llama poliedro *convexo* el poliedro cuya superficie no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos (a).

Se llama *diagonal* de un poliedro la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

CAPITULO I.

Pirámides.

67. Se llama *pirámide* el poliedro cuyas caras son un polígono cualquiera llamado *base* y varios triángulos que tienen un mismo vértice.

Vértice ó *cúspide* de la pirámide es el vértice comun á las caras triángulares.

(a) Todos los poliedros, de que nosotros nos ocuparemos, serán convexos.

Altura de la pirámide es la perpendicular bajada desde la cúspide al plano de la base.

Pirámide *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., es la pirámide que tiene por base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

El tetraedro es una pirámide triangular.

68. Se llama pirámide *regular* la pirámide que tiene por base un polígono regular, y cuyas aristas laterales son todas iguales.

69. De esta definicion se infiere: 1.º *que todos los triángulos laterales de una pirámide regular son iguales* [Teor. 18]; 2.º *que el pie de la altura de una pirámide regular es el centro de la base*; pues los pies de las aristas laterales iguales equidistan del pie de la altura [*Teor.* 113]; mas dichos pies, que son los vértices del polígono regular, equidistan tambien del centro de este polígono; luego el pie de la altura es el centro de la base.

70. Se llama pirámide *troncada* ó *tronco* de pirámide la porcion de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte á todas las aristas laterales.

TEOREMA 151 (*fig.* 189).

Dos tetraedros ABCD, EFGH *son iguales, cuando tienen dos caras respectivamente iguales*, ABC=EFG, ABD=EFH, *igualmente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido* CABD =GEFH.

Coloco el tetraedro *EFGH* sobre el *ABCD*, de modo que las caras iguales *EFG* y *ABC* coincidan, y que los vértices *D* y *H* queden á un mismo lado del plano *ABC*: siendo iguales los diedros *GEFH* y *CABD*, los planos *HFE* y *DBA* coincidirán; y como estas caras son iguales, el punto *H* caerá sobre el punto *D*; luego los dos tetraedros, cuyos vértices coinciden, son iguales.

TEOREMA 152 (*fig.* 189).

Dos tetraedros ABCD, EFGH *son iguales, cuando tienen una cara igual*, ABC=EFG, *adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Coloco el tetraedro *EFGH* sobre el *ABCD*, de modo que las caras iguales *EFG* y *ABC* coincidan, y que los vértices *H* y *D* caigan hácia un mismo lado de la cara *ABC*: siendo iguales los diedros *GEFH* y *CABD*, el plano *HFE* caerá sobre el plano *DBA*, y por la misma razon el plano *HEG* caerá sobre el plano *DAC*, y el plano *HFG* sobre el *DBC*. Luego el vértice *H*, que tiene que caer al mismo tiempo sobre los tres planos *DBA*, *DAC* y *DBC*, caerá sobre el vértice *B*; luego los tetraedros son iguales.

TEOREMA 153 (*fig.* 189).

Dos tetraedros ABCD, EFGH *son iguales, cuando tienen tres caras respectivamente iguales,* ABC=EFG, ABD=EFH, ADC =EHG, *é igualmente dispuestas.*

Siendo iguales, y estando igualmente dispuestas dichas tres caras, los ángulos planos *BAC* y *FEG*, *BAD* y *FEH*, *DAC* y *HEG* serán iguales; y como están igualmente dispuestos, los triedros *A* y *E* son iguales [*Teor.* 149]; y por consiguiente el diedro *CABD*=*GEFH*; luego [*Teor.* 151] los tetraedros *ABCD* y *EFGH* son iguales.

TEOREMA 154 (*fig.* 190).

Toda seccion FGHIK *paralela á la base* ABCDE *de una pirámide es semejante á dicha base.*

En efecto, tiro desde un vértice *A* de la base diagonales á todos los demas, tiro en seguida los planos *VAC*, *VAD*: siendo paralelos los planos *ABCDE* y *FGHIK*, serán paralelos los lados de ambos polígonos, como tambien las diagonales [*Teor.* 120]; luego los triángulos *ABC* y *FGH*, *ACD* y *FHI*, *ADE* y *FIK* son semejantes, pues sus ángulos son respectivamente iguales [*Teor.* 123]; luego los polígonos *ABCDE* y *FGHIK* son semejantes [*Teor.* 73].

PROBLEMA 51 (*fig.* 190).

Dada una pirámide troncada ADFI *de bases paralelas, hallar la altura* VO *de la pirámide total y la* VP *de la pirámide deficiente.*

Supóngase construida la pirámide total *VABCDE*, y tírese un plano *VBO* por la altura *VO* y una arista *VB*: las intersecciones BO y GP de este plano y los planos paralelos $ABCDE$, $FGHIK$ serán paralelas [*Teor*. 120].

Los triángulos semejantes VAB y VFG, VBO y VGP nos dan

$$AB : FG :: VB : VG,$$
$$VB : VG :: VO : VP;$$
luego
$$AB : FG :: VO : VP.$$

Los términos VO y VP de esta proporcion son las dos alturas que nos proponemos hallar. Para esto modifico dicha proporcion de manera que no quede mas que un solo término incógnito; lo que se puede, porque la diferencia $VO-VP$ es la altura PO del tronco que se supone conocida [*Aritmética* 207, *Nota*].

Tenemos [*Aritm*. 173]

$$AB-FG : AB :: VO-VP=PO : VO,$$
$$AB-FG : FG :: VO-VP=PO : VP,$$

de donde

$$VO=\frac{AB\times PO}{AB-FG},$$

$$VP=\frac{FG\times PO}{AB-FG}.$$

CAPITULO II.

Prismas.

---

71. Se llama *prisma* el poliedro cuyas caras son dos polígonos paralelos é iguales, y paralelógramos todas las demas. Las dos caras paralelas é iguales se llaman *bases* del prisma, y las otras se llaman *caras* laterales.

Altura de un prisma es la perpendicular bajada desde un punto de una base al plano de la otra.

Prisma *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc. es el prisma cuya base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

72. Para construir un prisma, se tiran por los vértices

de un polígono $ABCDE$ (*fig.* 191) las paralelas AF, BG, CH, etc. hácia un mismo lado de este polígono, y cortándolas en seguida por un plano $FGHIK$ paralelo al $ABCDE$, el poliedro AH que resulta será un prisma.

Porque, siendo las rectas AB, BC, CD, etc. paralelas á las FG, GH, HI, etc. [*Teor.* 120], los cuadriláteros $AFGB$, $BGHC$, etc. son paralelógramos. Además los ángulos de los dos polígonos $ABCDE$, $FGHIK$ son respectivamente iguales [*Teor.* 123]; luego estos dos polígonos pueden coincidir; y por tanto [71] el poliedro AH es un prisma.

Prisma *recto* es el prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases; y prisma *oblícuo* es el prisma cuyas aristas laterales son oblícuas á las bases.

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos; pues siendo las aristas laterales perpendiculares á las bases, son perpendiculares á los lados de estas bases.

Seccion *recta* de un prisma oblícuo es la seccion perpendicular á las aristas laterales.

73. Se llama prisma *regular* el prisma recto cuya base es un polígono regular.

74. Prisma *troncado* ó *tronco* de prisma es la porcion de prisma comprendida entre la base y un plano oblícuo á ella, é intermedio entre ambas bases.

TEOREMA 155 (*fig.* 192).

Dos prismas rectos de igual base é igual altura son iguales.

Sean los dos prismas rectos FC y QN, cuyas bases $FGHIK$, $QRSTV$ son iguales, y cuyas alturas AF, LQ son tambien iguales: digo que estos dos prismas son iguales.

Coloco el prisma QN sobre el FC, de modo que coincidan sus bases iguales: la arista QL caerá entonces sobre la FA, porque en un punto F de un plano no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicho plano, y como dichas dos aristas FA y QL son iguales, el punto L caerá sobre el punto A. Del mismo modo se demuestra que los puntos M, N, O, P caen sobre los B, C, D, E. Luego los dos prismas coinciden ó son iguales.

TEOREMA 156 (*fig.* 191).

Toda seccion LMNOP *paralela á la base* ABCDE *de un prisma es igual á dicha base.*

En efecto, los lados de los polígonos *ABCDE*, *LMNOP* son respectivamente paralelos [*Teor.* 120]; luego los cuadriláteros *ABML*, *BCNM*, etc. son paralelógramos; y por tanto $AB=LM$, $BC=MN$, $CD=NO$, etc. Los ángulos de dichos polígonos son respectivamente iguales [*Teor.* 123]; luego estos polígonos pueden coincidir, ó son iguales.

75. Se llama *paralelepípedo* el prisma cuya base es un paralelógramo.

Paralelepípedo *rectángulo* es el paralelepípedo que además de ser recto, tiene por base un rectángulo.

Las seis caras de un paralelepípedo rectángulo son rectángulos.

Cubo es el paralelepípedo cuyas seis caras son seis cuadrados.

TEOREMA 137 (*fig.* 193).

Las caras laterales opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

Sea el paralelepípedo *EC*: digo que la cara *ADHE* es igual y paralela á la cara *BCGF*, y la cara *ABFE* igual y paralela á la cara *DCGH*.

Los dos paralelógramos *ADHE*, *BCGF* tienen iguales los lados *AE* y *BF*, por ser lados opuestos del paralelógramo *AEFB*, y por igual razon tienen iguales los lados *AD* y *BC*: además los ángulos *DAE*, *CBF* son iguales [*Teor.* 123]; luego [*Teor.* 32] dichos paralelógramos son iguales.

Las mismas caras *ADHE*, *BCGF* son paralelas, por pasar una y otra por dos rectas *AE* y *AD*, *BF* y *BC* respectivamente paralelas [*Teor.* 122].

Del mismo modo se demuestra que las dos caras *ABFE* y *DCGH* son iguales y paralelas.

CAPITULO III.

Poliedros simétricos.

*76 Dos puntos se llaman *simétricos*, cuando están en una misma recta perpendicular á un plano, y á igual distancia de dicho plano.

Dos rectas se llaman *simétricas*, cuando dos puntos de la una son simétricos de otros dos puntos de la otra.

*TEOREMA 158 (*fig.* 194).

Dos rectas limitadas AB *y* A'B', *cuyos estremos son simétricos, son iguales.*

Sean a y b los puntos en que las rectas AA', BB' cortan al plano MN, respecto al cual son simétricos los estremos A y A', B y B': doblando el trapecio $ABB'A'$ por la recta ab, caerá la recta aA' sobre la recta aA, por ser rectos los ángulos $A'ab$ y Aab; el punto A' caerá sobre el punto A, por ser iguales las rectas aA' y aA. Del mismo modo se demuestra que el punto B' caerá sobre el punto B: luego las rectas AB y $A'B'$ son iguales.

Corolario. *Dos ángulos* BAC, B'A'C' (fig. 195), *cuyos lados* AB *y* A'B', AC *y* A'C' *son simétricos, son iguales.*

En primer lugar los vértices A y A' son simétricos; pues el punto A, interseccion de las dos rectas BA y CA, tendrá su simétrico sobre las rectas $B'A'$ y $C'A'$; y por tanto el punto A' será simétrico del punto A.

Sean B y B' dos puntos simétricos de los lados AB y $A'B'$, C y C' dos puntos simétricos de los lados AC y $A'C'$: tiro las rectas BC y $B'C'$. Siendo simétricos los estremos de las rectas AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, BC y $B'C'$ [76], estas rectas son iguales [*Teor.* 158]; luego los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales [*Teor.* 18]; y por consiguiente los ángulos BAC y $B'A'C$ son iguales.

*TEOREMA 159 (*fig.* 196).

Si varios puntos A, B, C, D, E *están en un mismo plano, sus simétricos* A', B', C', D', E' *están tambien en un mismo plano.*

Juntemos por medio de dos rectas AB, AC tres de los puntos dados, y por otras dos rectas $A'B'$, $A'C'$ sus tres simétricos: para demostrar que otro punto cualquiera D' está en el plano $A'B'C'$, tiro las rectas AD y $A'D'$, y tendré que los ángulos BAC y $B'A'C'$, BAD y $B'A'D'$, CAD y $C'A'D'$ son iguales [*Teor.* 158, *Corol.*]; y como

$$BAD=BAC+CAD,$$

por hallarse las tres rectas AB, AC, AD en un mismo plano, será tambien

$$B'A'D'=B'A'C'+C'A'D';$$

luego el punto D' está en el plano $B'A'C'$; porque sino, el punto A' seria el vértice del triedro $A'B'C'D'$, y se tendria [*Teor.* 141].

$$B'A'D'<B'A'C'+C'A'D'.$$

Luego queda demostrado que todos los puntos A', B', C', D', etc., simétricos de los propuestos, están en un mismo plano.

*77. Dos poliedros se llaman *simétricos,* siempre que puedan colocarse de modo que todos los vértices del uno sean respectivamente simétricos de los vértices del otro.

*TEOREMA 160 (*fig.* 196).

Dos poliedros simétricos tienen iguales respectivamente las caras cuyas aristas son simétricas, é iguales respectivamente los diedros cuyas aristas son simétricas.

Las caras, cuyas aristas son simétricas, son iguales, porque sus lados son respectivamente iguales, por ser rectas cuyos estremos son simétricos [*Teor.* 158]; y sus ángulos son respectivamente iguales [*Teor.* 158, *Corol.*]: luego dichas caras pueden coincidir, y por tanto son iguales.

Sean $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ dos ángulos sólidos de los dos poliedros [62], siendo simétricos los vértices A y A', B y B', C y C', etc. de dichos poliedros: digo que los ángulos diedros $CBAE$ y $C'B'A'E'$, cuyas aristas son simétricas, son iguales.

En efecto, los triedros $ABCE$ y $A'B'C'E'$ tienen sus ángulos planos respectivamente iguales [*Teor.* 158, *Corol.*]: si imaginamos que el triedro $A'B'C'E'$ da una media vuelta al rededor del punto A', tomará la posicion $A''B''C''E''$: este triedro es simétrico del $ABCE$ [*Teor.* 149, *Nota*]; luego los dos triedros $ABCE$ y $A'B'C'E'$ son simétricos; y por consiguiente [*Teor.* 146] los diedros $CBAE$ y $C'B'A'E'$ son iguales.

Del mismo modo se demuestra que los otros ángulos diedros de los dos poliedros son respectivamente iguales.

NOTA. Aunque dos poliedros simétricos tienen respectivamente iguales sus caras y ángulos diedros, no pueden coincidir en general; pues sus ángulos triedros no pueden coincidir en general [*Teor.* 146], y por tanto tampoco pueden coincidir sus ángulos sólidos.

LIBRO III.

Los tres cuerpos redondos.

CAPITULO I.

Cono.

78. SE llama *cono* el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo *VCA* (*fig.* 197) que gira al rededor de uno de los catetos *VC*.

En este movimiento el cateto movible *AC* describe un círculo, cuyo centro es el punto *C*; pues la recta *AC* es perpendicular en todas sus posiciones al cateto *VC*, y por consiguiente describe un plano [*Teor*. 107]. Además el punto *A* se halla en todas las posiciones del cateto *AC* á igual distancia del punto *C*; luego la curva *AB* es una curva plana, cuyos puntos están todos á igual distancia del punto *C*; es decir, que dicha curva es una circunferencia.

Se llama *eje* ó *altura* del cono el cateto fijo del triángulo generador.

Base del cono es el círculo descrito por el cateto movible del triángulo generador.

Lado del cono es la hipotenusa del triángulo generador.

Vértice ó *cúspide* del cono es el vértice del ángulo opuesto al cateto movible del triángulo generador.

Cono troncado ó *tronco de cono* es la parte de cono comprendida entre la base y un plano que corta á todos los lados del cono.

TEOREMA 161 (*fig.* 197).

Toda seccion PRS *paralela á la base de un cono es un círculo, cuyo centro está en el eje.*

Por los lados *VA*, *VQ*, *VB*, etc. y por el eje tiro los planos *VAC*, *VQC*, *VBC*, etc.; las intersecciones *AC* y *PO*, *QC* y *RO*, *BC* y *SO* de dichos planos y los paralelos *AB* y *PS* serán paralelas [*Teor*. 120]; luego los triángulos semejantes *VAC* y *VPO*, *VQC* y *VRO*, *VBC* y *VSO* nos dan las proporciones

$$VC : VO :: AC : PO,$$
$$VC : VO :: QC : RO,$$
$$VC : VO :: BC : SO.$$

Estas proporciones tienen sus tres primeros términos respectivamente iguales; luego $PO = RO = SO$. Vemos que la curva *PRS* es una curva plana, cuyos puntos equidistan del punto *O*; dicha curva es pues una circunferencia cuyo centro es *O*.

*79. Se llama plano *tangente* al cono un plano que solo tiene un lado comun con la superficie del cono.

TEOREMA 162 (*fig.* 198).

Todo plano VAB, *que pasa por un lado* VA *del cono y por la tangente* AB *á la base en el pie de dicho lado* VA, *es tangente al cono.*

Todos los puntos de la circunferencia de la base, escepto el punto *A*, están fuera de la tangente *AB*; luego qualquier otro lado, diferente del *VA*, no tiene con el plano *VAB* mas punto comun que el punto *V*; luego todos los lados del cono, escepto el lado *VA*, están fuera del plano *VAB*; y por tanto [79] este plano es tangente al cono.

Recíproco. *Todo plano* VAB *tangente al cono corta al plano de su base por una recta* AB *tangente á dicha base.*

Pues siendo el plano *VAB* tangente al cono, no tendrá con la superficie del cono mas lado comun que el *VA*; luego la interseccion *AB* no tiene con la circunferencia de la base del cono mas punto comun que el punto *A*; luego dicha interseccion *AB* es tangente á la base del cono.

Corolario. *Por un punto de la superficie lateral del cono no* *se puede tirar mas que un plano tangente al cono;* pues el plano tangente contiene al lado que pasa por el punto dado [79] y á la tangente á la base tirada por el pie de dicho lado [*Teorema* 162, *Recíp.*]; y ya se sabe [*Teor.* 105, *Corol.*] que por dos rectas, que se cortan, no puede pasar mas que un solo plano.

PROBLEMA 52 (*fig.* 197.)

Dado un cono troncado ABPS *de bases paralelas, hallar la altura* VC *del cono total, y la* VO *del cono deficiente.*

Supóngase construido el cono entero *VAB*, y tírese un plano *VAC* por el eje *VC* y un lado *VA* del cono: las intersecciones *PO* y *AC* de este plano y los planos paralelos *AB* y *PS* serán paralelas [*Teor.* 120]; luego los triángulos *VAC* y *VPO* serán semejantes, y nos darán

$$AC : PO :: VC : VO;$$

de donde [**Aritm.** 207, *Nota*]

$$AC-PO : AC :: VC-VO=OC : VC=\frac{AC\times OC}{AC-PO},$$

$$AC-PO : PO :: VC-VO=OC : VO=\frac{PO\times OC}{AC-PO}.$$

CAPITULO II.

Cilindro.

80. Se llama *cilindro* el cuerpo engendrado por un rectángulo *ABOP* (*fig.* 199) que gira al rededor de uno de sus lados *PO*.

En este movimiento los lados *BO* y *AP*, adyacentes al lado fijo *PO*, describen dos círculos cuyos centros son los puntos *O* y *P;* lo que se demuestra como en [78]. Estos dos círculos son iguales, pues tienen igual radio.

Se llama *eje* del cilindro el lado fijo *PO* del rectángulo generador.

Bases del cilindro son los círculos *BC* y *AD*, que describen los lados del rectángulo generador, adyacentes al eje.

Lado del cilindro es el lado del rectángulo generador paralelo al eje.

Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases.

TEOREMA 163 (*fig.* 199).

Toda seccion SVT *paralela á la base del cilindro es un círculo igual á la base, y su centro está en el eje* PO.

Por los lados *SB*, *VR*, *TC*, etc. y por el eje tiro los planos *SBOQ*, *VROQ*, *TCOQ*, etc.: las intersecciones *SQ* y *BO*, *VQ* y *RO*, *TQ* y *CO* serán paralelas; luego los cuadriláteros *SBOQ VROQ*, *TCOQ* son paralelógramos; luego *SQ*=*BO*, *VQ*=*RO*, *TQ*=*CO*: y pues *BO*, *RO*, *CO* son iguales, tambien *SQ*, *QV*, *TQ* son iguales; luego la curva *SVT* es plana, y tiene todos sus puntos á igual distancia del punto *Q*; luego dicha curva es una circunferencia cuyo centro es *Q*. Ahora, como los lados *SQ* y *BO* de las dos circunferencias *SVT*, *BRC* son iguales, dichas circunferencias son tambien iguales.

*81. Se llama plano *tangente* al cilindro un plano que solo tiene un lado comun con la superficie del cilindro.

TEOREMA 164 (*fig.* 200).

Todo plano ABC, *que pasa por un lado* AB *del cilindro y por la tangente* BC *á la base en el pie de dicho lado* AB, *es tangente al cilindro*.

Pues todos los puntos de la circunferencia de la base están fuera de la tangente *BC*, escepto el punto *B;* luego todos los lados del cilindro están fuera del plano *BAC*, escepto el lado *AB;* luego [81] este plano es tangente al cilindro.

Recíproco. *El plano* ABC *tangente al cilindro corta al plano de la base de este por una recta* BC *tangente á dicha base;* pues dicho plano tangente no tiene con el cilindro mas lado comun que el *AB*; luego todos los puntos de la *BC* están fuera de la base del cilindro, escepto el punto *B*; luego la recta *BC* es tangente á la base del cilindro.

Corolario. *Por un punto de la superficie lateral del cilindro no puede pasar mas que un solo plano tangente al cilindro:* pues el plano tangente contiene al lado del cilindro que pasa por el punto dado en la superficie de este, y á la tangente á la base tirada por el pie de dicho lado; y ya se sabe que por dos rectas que se cortan no puede pasar mas que un solo plano.

CAPITULO III.

Esfera.

82. Se llama *esfera* el cuerpo engendrado por un semicírculo *ABC* (*fig.* 201) que gira al rededor de su diámetro *AC*.

Centro de la esfera es el centro *O* del semicírculo generador.

Radios de la esfera son las rectas tiradas desde el centro á la superficie de la esfera.

Todos los radios de una esfera son iguales; ó lo que es igual, *todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan del centro:* pues los radios de la esfera son los radios del círculo generador en sus diferentes posiciones.

Diámetro de la esfera es la recta que pasa por el centro, y termina por ambos lados en la superficie de la esfera.

Todos los diámetros de una esfera son iguales; pues cada uno se compone de dos radios.

TEOREMA 165 (*fig.* 202).

Cortando la esfera por medio de un plano, la seccion AB *que resulta, es un círculo.*

Si el plano secante pasa por el centro de la esfera, la curva de interseccion es una circunferencia; pues todos sus puntos están en dicho plano, y equidistan del centro de la esfera, por ser puntos de la superficie de esta.

Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, tiro una perpendicular *OC* á dicho plano, y las rectas *OA*, *OB*, *OD*, *OE*, etc. Siendo estas rectas radios de la esfera, son todas iguales; y como son oblícuas al plano *AB*, los puntos *A*, *B*, *D*, *E*, etc. equidistan del punto *C* [*Teor.* 113, *Recíproco* 1.º]: luego la curva *AB* tiene todos sus puntos en un plano y á igual distancia del punto *C*; luego dicha curva es una circunferencia, cuyo centro es el punto *C*.

Círculo *máximo* de la esfera es el círculo cuyo plano pasa por el centro de la esfera; y círculo menor es el círculo cuyo plano no pasa por el centro.

TEOREMA 166 (*fig.* 201).

Todo círculo máximo BD *divide á la esfera en dos partes iguales* BAD *y* BCD, *llamadas* hemisferios: pues, si se coloca la parte *ABD* sobre la *CBD*, de modo que, siendo el círculo *BD* comun á dichas dos partes, el punto *A* caiga hácia el mismo lado de este círculo que el punto *C*, todos los puntos de la superficie *BAD* coincidirán con los de la superficie *CBD*, porque los radios de la esfera son todos iguales.

TEOREMA 167.

Dos círculos máximos de una misma esfera se cortan mútuamente en dos partes iguales: pues, pasando sus planos por el centro de la esfera, la interseccion es un diámetro comun á los dos círculos, el cual divide á cada círculo en dos partes iguales.

* TEOREMA 167 (*fig.* 201*).

Cuatro puntos A, B, C *y* D, *que no están en un mismo plano, determinan la posicion de una esfera.*

Sean *O* y *P* los centros de los círculos circunscriptos á los triángulos *ABC* y *ACD*: levantando las perpendiculares *OR* y *PS* á dichos planos, estas perpendiculares se encontrarán.

En efecto, tiremos las rectas *OG* y *PG* al punto medio de la recta *AC*, comun á los dos triángulos: estas rectas *OG* y *PG* serán perpendiculares á la *AC* [*Teor.* 24]; luego el plano *OGP* será perpendicular á la *AC* [47], y por consiguiente á los planos *ABC* y *ACD* [*Teor.* 134]. La recta *OR* perpendicular al plano *ABC* estará contenida en el plano *OGP* [*Teor.* 135, *Recíp.*], é igualmente la recta *PS* estará contenida en el plano *OGP*. Ahora, si las dos rectas *OR* y *PS*, que se hallan en un mismo plano, fuesen paralelas, siendo la *GO* perpendicular á la *OR*, seria tambien perpendicular á la *PS* paralela á la *OR* [*Teor.* 6, *Recíp.*]; y por consiguiente, desde el punto *G* se podrian tirar dos perpendiculares *GP* y *GO* á la *PS*, lo que es imposible. Las dos rectas *OR* y *PS* están pues en un mismo plano y se encuentran en un punto *Q*.

Esto supuesto, el punto *Q* equidista de los tres puntos A, *B* y *C* [*Teor.* 113], é igualmente de los tres puntos *A*, *C* y *D*; luego dicho punto *Q* equidista de los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Luego la esfera, cuyo centro sea el punto *Q* y pase por uno de los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D*, pasará por los otros tres. Queda asi demostrado que por cuatro puntos que no están en un plano puede pasar una esfera.

Demostremos ahora que por dichos cuatro puntos no puede pasar otra esfera diferente de la primera.

Imaginemos que por los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* pase otra esfera: el centro de esta nueva esfera deberá hallarse en la perpendicular *OR*; pues si estuviese fuera, la perpendicular bajada desde él al plano *ABC* no pasaria por el punto *O* [*Teor.* 108]; y por consiguiente las tres distancias de dicho centro á los puntos *A*, *B*, *C* no serian iguales. Por la misma razon el centro de dicha esfera debe estar en la perpendicular *PS*: luego el centro de esta esfera es el punto *Q*. Luego esta esfera y la primera, que tienen el mismo centro é igual radio, son una misma esfera.

Nota. Si los cuatro puntos dados están en un mismo plano, y corresponden á una misma circunferencia, existirá una infinidad de esferas que pasen por ellos; pues todos los puntos de la perpendicular levantada al círculo en su centro equidistan de todos los puntos de la circunferencia; y por tanto serán centros de dichas esferas.

Si los cuatro puntos están en un mismo plano, y la circunferencia que pasa por tres de ellos no pasa por el cuarto, la esfera no podrá pasar por dichos cuatro puntos: pues si esto fuese posible, un plano cortaria á la superficie de la esfera por una línea diferente de la circunferencia; lo que es absurdo [*Teor.* 165].

83. Se llaman *polos* de un círculo de la esfera dos puntos de la superficie de la esfera, tales que cada uno equidista de todos los puntos de la circunferencia de dicho círculo.

TEOREMA 168 (*fig.* 203).

Los estremos P *y* P' *de un diámetro* PP' *perpendicular al plano* AB *ó* A'B' *de un círculo de la esfera son polos de dicho círculo.*

Consideremos en primer lugar el círculo máximo *AB*; tiro los radios *OA*, *OB*, *OC*, etc. y las rectas *PA*, *PB*, *PC*, etc., que serán iguales [*Teor*. 113, 1.°]; luego [83] P es polo del círculo AB. Del mismo modo se demuestra que P' es polo del círculo AB.

Sea ahora $A'B'$ un círculo menor: tiro las rectas $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, etc.; PA', PB', PC', etc.; y los radios OA', OB', OC', etc. Siendo iguales los radios, las rectas $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, etc. son iguales [*Teor*. 113, *Recíp*. 1.°]; y por consiguiente son tambien iguales las rectas PA', PB', PC', etc. [*Teor*. 113, 1.°]: luego el punto P es polo del círculo $A'B'$. Del mismo modo se demuestra que el punto P' es polo de dicho círculo.

TEOREMA 169 (*fig*. 204).

Si desde un punto P *de la superficie de la esfera se traza con una abertura constante de compás* (a) *una curva* BDEC *sobre dicha superficie, esta curva será una circunferencia, de la que el punto* P *será uno de los polos.*

Tiro los radios OD, OE, OC, etc. á diferentes puntos de la curva $BDEC$; tiro tambien las rectas PD, PE, PC, etc.: los triángulos POD, POE, POC, etc. son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos OPD, OPE, OPC, etc. son iguales. Tiro ahora desde el punto D una perpendicular DQ al radio PO, y las rectas EQ, CQ, etc.: los triángulos PQD, PQE, PQC, etc. son iguales [*Teor*. 16]; luego los ángulos PQD, PQE, PQC, etc. son iguales; y como el primero de estos ángulos es recto, los otros tambien son rectos; es decir, que las rectas DQ, EQ, CQ, etc. son perpendiculares al radio OP, y por tanto estas rectas están en un mismo plano [*Teor*. 107]. Luego la curva BC tiene todos sus puntos en un plano, y á igual distancia del punto Q; luego dicha curva es una circunferencia. Ahora, como el punto P está á igual distancia de todos los puntos de la circunferencia $BDCB$, dicho punto P es polo del círculo $BDCB$ [83].

84. Se llama plano *tangente* á una esfera el plano que tiene un solo punto comun con la superficie de la esfera.

(*a*) El compás debe de ser de los modernos, cuyas puntas pueden doblarse.

TEOREMA 170 (*fig.* 205).

Todo plano AB *perpendicular al radio* OC *en el punto en que este corta á la superficie de la esfera, es tangente á la esfera.*

Siendo el radio *OC* perpendicular al plano *AB*, es menor que cualquiera otra recta *OD* tirada desde el centro al plano *AB* [*Teor.* 112]; luego el punto *D* está fuera de la esfera. todos los puntos del plano *AB* están, segun esto, fuera de la esfera, escepto el punto *C*; luego el plano *AB* es tangente á la esfera [84].

Recíproco. *El plano* AB *tangente á una esfera es perpendicular al radio* OC *tirado al punto de contacto.*

Siendo el plano *AB* tangente á la esfera, tiene todos sus puntos fuera de la esfera, escepto el punto *C*; luego el radio *OC* es la línea mas corta que se puede tirar desde el centro al plano tangente: luego [*Teor.* 112, *Recíp.*] el radio *OC* es perpendicular al plano tangente *AB*.

Corolario. *Por un punto de la superficie de la esfera no se puede tirar mas que un solo plano tangente á la esfera*; puesto que el plano tangente es perpendicular al radio, y que por un punto de una recta no se puede tirar mas que un solo plano perpendicular á ella [*Teor.* 110].

85. Se llama *ángulo esférico* la separacion ó abertura de dos arcos *AB* y *AD* (*fig* 206) de círculo máximo.

Lados del ángulo esférico son los dos arcos que lo forman.

Vértice de un ángulo esférico es el punto de interseccion de los lados.

El valor de un ángulo esférico *BAD* se aprecia por el del ángulo rectilíneo *SAT* formado por dos tangentes *SA* y *AT* tiradas á los arcos *AB* y *AD* en el vértice de dicho ángulo (*a*).

Segun esto, el ángulo esférico *BAD* y el ángulo diedro *BACD*, formado por los planos de los arcos del primero, tienen la misma medida; pues el ángulo *SAT* es el ángulo plano correspondiente al diedro *BACD*.

86. Se llama *triángulo esférico* la porcion *ABC* (*fig.* 207)

(*a*) El valor de un ángulo curvilíneo se aprecia siempre por el ángulo rectilíneo formado por las tangentes á las dos curvas tiradas en su punto de interseccion.

de superficie de esfera comprendida entre tres arcos AB, AC, BC de círculo máximo, menores que media circunferencia.

Lados del triángulo esférico son los arcos de círculo maximo que lo forman.

Angulo triedro *correspondiente* á un triángulo esférico es el triedro $OABC$ formado por los radios OA, OB, OC tirados á los vértices del triángulo. Por el contrario, el triángulo esférico ABC se llama triángulo esférico *correspondiente* al triedro $OABC$.

Los lados del triángulo esférico son las medidas de los ángulos planos del triedro correspondiente, y los ángulos del triángulo esférico son las medidas de los ángulos diedros de dicho triedro [85].

TEOREMA 171 (*fig.* 207, 1.ª).

Un lado cualquiera AB *de un triángulo esférico* ABC *es menor que la suma de los otros dos*: pues en el triedro $OABC$, correspondiente al triángulo esférico ABC, es [*Teor.* 141]

$$AOB<AOC+BOC;$$

luego, reemplazando estos ángulos por sus medidas, será

$$AB<AC+BC.$$

Corolario. *Un lado cualquiera de un triángulo esférico es mayor que la diferencia de los otros dos.*

Se demuestra como los corolarios de los teoremas 12 y 141, análogos al teorema actual.

TEOREMA 172 (*fig.* 207, 1.ª).

La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima: pues siendo

$$AOB+AOC+BOC<4R \text{ [Teor. 142]},$$

será, llamando C á la circunferencia máxima, y reemplazando los ángulos de esta desigualdad por sus medidas,

$$AB+AC+BC<C.$$

*87. Dos triángulos esféricos se llaman *suplementarios* cuando los lados de cada uno son suplementos de los ángulos del otro.

✲TEOREMA 173 (*fig.* 208).

A todo triángulo esférico ABC *corresponde otro suplementario* DEF.

Sea $O'DEF$ el triedro suplementario del triedro $OABC$ [*Teor.* 143], y DEF el triángulo esférico correspondiente á dicho triedro O'. Siendo suplementarios los triedros O y O', tendremos [63] las igualdades siguientes:

$$AOB+EO'DF=2R,\qquad DO'E+BOAC=2R,$$
$$AOC+DO'EF=2R,\qquad DO'F+AOBC=2R,$$
$$BOC+DO'FE=2R,\qquad EO'F+AOCB=2R.$$

Poniendo en estas igualdades en vez de los ángulos diedros los ángulos de los dos triángulos esféricos, y en vez de los ángulos planos los lados de dichos triángulos, tendremos

$$AB+D=2R,\qquad DE+A=2R,$$
$$AC+E=2R,\qquad DF+B=2R,$$
$$BC+F=2R,\qquad EF+C=2R;$$

luego [87] los dos triángulos esféricos ABC y DEF son suplementarios.

✲TEOREMA 174.

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.

Véase la demostracion del teorema 144, análogo al actual.

Corolario. *La diferencia que hay entre la suma de dos ángulos de un triángulo esférico y el tercer ángulo es menor que dos rectos.*

Véase la demostracion del corolario del teorema 144.

✲88. Segun el teorema 174, puede existir un triángulo esférico que tenga dos ángulos rectos, los tres ángulos rectos, dos ángulos obtusos y aun los tres obtusos. El triángulo esférico que tiene un ángulo recto, se llama triángulo esférico *rectángulo*; el que tiene dos ángulos rectos, *birectángulo*; y el que tiene sus tres ángulos rectos, *trirectángulo*.

En el triángulo esférico rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

✲ TEOREMA 174 * (*fig.* 209).

En todo triángulo birectángulo: 1.° *el vértice del ángulo oblícuo es polo del lado opuesto;* 2.° *el ángulo en el polo tiene por medida su lado opuesto.*

Sea el triángulo *ABC* birectángulo en *A* y *C*: digo que el punto *B* es polo del lado *AC*, y que el ángulo *ABC* tiene por medida el lado opuesto *AC*.

1.° Construyo el triedro *OABC* correspondiente al triángulo esférico *ABC*. Siendo rectos los ángulos esféricos *BAC* y *BCA*, ó los ángulos diedros *BAOC* y *BCOA*, los planos *AOB* y *COB* son perpendiculares al plano *AOC*; luego [*Teor.* 136] la interseccion *BO* es perpendicular al plano *AOC*, y por tanto [*Teor.* 168] el punto *B* es polo del arco *AC*.

2.° Siendo la recta *OB* perpendicular al plano *AOC*, será [*Teor.* 106] perpendicular á las rectas *AO* y *OC*; luego el ángulo *AOC* es el ángulo plano correspondiente al diedro *AOBC*, y por tanto [*Teor.* 138, *Nota*] es la medida de este; y como el arco *AC* es la medida del ángulo *AOC*, se infiere que el arco *AC* es la medida del ángulo diedro *AOBC* ó del ángulo esférico *ABC*.

Nota. La segunda parte de este teorema puede enunciarse asi: *La medida de un ángulo esférico es el arco de círculo máximo descrito desde su vértice como polo, y comprendido entre sus lados.*

✲ TEOREMA 175.

1.° *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son tambien iguales.*

2.° *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos desiguales, al mayor se opone mayor lado.*

Se demostrará fácilmente, construyendo los triedros correspondientes á ambos triángulos, y aplicando á estos triedros el teorema 145.

Recíproco 1.° *En todo triángulo esférico isósceles los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales.*

2.° *En todo triángulo esférico á mayor lado se opone mayor ángulo* [21].

*89. Se llaman triángulos esféricos *simétricos* los triángulos esféricos correspondientes á dos triedros simétricos.

Segun esto, dos triángulos esféricos simétricos, situados sobre una misma esfera ó sobre esferas iguales, tienen sus seis elementos respectivamente iguales, pero no pueden coincidir en general; pues los triedros correspondientes, siendo simétricos, tienen sus seis elementos respectivamente iguales, y no pueden coincidir en general [*Teor.* 146.]

*TEOREMA 176 (*fig.* 207).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, *igualmente dispuestos, é igual el ángulo comprendido*, A=D.

Los triedros *OABC, PDEF* correspondientes á dichos triángulos tienen iguales los ángulos planos *AOB* y *DPE, AOC* y *DPF*, y el ángulo diedro *BAOC=EDPF*; luego [*Teor*: 147] dichos triedros son iguales, y por consiguiente los dos triángulos esféricos *ABC, DEF* correspondientes á dichos triedros son tambien iguales.

*TEOREMA 177 (*fig.* 207).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen un lado igual*, AC=DF, *y los ángulos adyacentes respectivamente iguales*, A=D, C=F, *é igualmente dispuestos*.

*TEOREMA 178 (*fig.* 207).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales*, AB=DE, AC=DF, BC=EF, *é igualmente dispuestos*.

*TEOREMA 279 (*fig.* 107).

Dos triángulos ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen sus tres ángulos res-*

pectivamente iguales, A=D, B=E, C=F, *é igualmente dispuestos.*

Estos tres teoremas se demostrarán fácilmente, como se ha demostrado el 176, valiéndose de sus análogos los teoremas 148, 149 y 150.

✲ TEOREMA 180 (*fig.* 210).

La línea mas corta, que se puede tirar en la superficie de una esfera entre dos puntos de la misma, es el arco menor de círculo máximo que pasa por ellos.

Sea AaB un arco de círculo máximo, menor que media circunferencia, y $ACDEB$ una curva cualquiera que no corte al arco AB, tirada en la superficie de la esfera entre los mismos estremos A y B; digo que $AaB<ACDEB$.

Desde los puntos A y B tiro dos arcos de círculo máximo AD y BD á un punto D, tal que estos dos arcos queden dentro de la superficie curva $ACDEBA$; tiro en seguida desde los estremos A y D del arco AD otros dos arcos de círculo máximo AC y DC á un punto C, tal que estos dos arcos queden dentro de la superficie $ACDA$; y continúo esta construccion indefinidamente.

Tenemos [*Teor.* 171]

$$AaB<AbD+BcD;$$

tambien $\qquad AbD<AdC+DeC,$

y por consiguiente $\quad AbD+BcD<AdC+DeC+BcD.$

No siendo iguales todas las líneas AaB, $AbDcB$, $AdCeDcB$, etc., sucederá uno de estos dos casos: que existan dos ó mas líneas iguales en magnitud, que sean mayores que todas las demás, ó que exista una sola línea mayor que todas las demás.

La línea AaB no es de las mayores, puesto que es menor que la $AbDcB$: tampoco esta es de las mayores, porque es menor que la $AdCeDcB$; y como lo mismo puede decirse de todas las demás líneas mencionadas, diferentes de la $ACDEB$, se infiere que no pueden existir dos líneas iguales en magnitud, que sean mayores que todas las demas; luego existe una sola línea mayor que todas las demas; y pues ninguna de dichas líneas, diferente de la *ACDEB*, es de as mayores, esta es la mayor.

Si la curva cortase al arco *AaB*, se sacaria fácilmente en consecuencia de lo que se acaba de demostrar, que dicha curva es mayor que el arco *AaB*.

*PROBLEMA 53 (*fig.* 210*).

Dada una esfera O, hallar su radio por medio de una construccion geométrica.

Desde un punto cualquiera *P* de la superficie de la esfera como polo se describe una circunferencia cualquiera *AB* [*Teorema* 169]; se señalan tres puntos en esta circunferencia, y se construye un triángulo cuyos tres lados sean las tres cuerdas que unen dichos tres puntos, y se circunscribe un círculo á este triángulo. Se construye en seguida un triángulo rectángulo *MQN*, cuya hipotenusa *MQ* sea igual á *PA*, y el cateto *MN* igual al radio del círculo circunscripto; se prolonga el otro cateto, y en el medio de *MQ* se levanta una perpendicular *EC* hasta que encuentre en *C* á la *QN* prolongada: la recta *QC* será igual al radio de la esfera.

Para demostrarlo, tiremos la cuerda *PA*, el radio *AD* del círculo *AB*, y desde el centro *O* la perpendicular *OR* á la *PA*.

El triángulo, cuyos tres lados son las tres cuerdas que unen los tres puntos tomados sobre la circunferencia *AB*, es igual al triángulo formado por dichas cuerdas; luego colocado uno sobre otro coincidirian; y como á un triángulo no se puede circunscribir mas que un solo círculo [*Teor.* 38], se infiere que el círculo circunscripto al triángulo es igual al círculo *AB*; luego la recta *MN*, igual al radio de dicho círculo, es tambien igual al radio *AD* del círculo *AB*. Luego los dos triángulos rectángulos *APD* y *MQN* son iguales [*Teor.* 19], y por consiguiente el ángulo *APD* es igual al ángulo *MQN*. Luego los dos triángulos rectángulos *PRO* y *QEC*, que tienen iguales los lados *RP* y *EQ*, é iguales respectivamente los ángulos adyacentes, son iguales; luego *CQ*=*OP*.

LIBRO IV.

Poliedros semejantes.

CAPITULO I.

Tetraedros semejantes.

90. En dos tetraedros, que tengan sus ángulos diedros respectivamente iguales, se llaman *caras homólogas* las caras adyacentes á ángulos diedros iguales.

Asi, si los tetraedros *VABC* y *vabc* (*fig.* 211) tienen los ángulos diedros *VA* y *va* iguales, como tambien los *VB* y *vb*, los *VC* y *vc*, etc.; las caras *VAB* y *vab*, adyacentes á diedros respectivamente iguales, son caras homólogas: tambien son caras homólogas las *VAC* y *vac*, *VBC* y *vbc*, *ABC* y *abc*.

91. Se llaman tetraedros *semejantes* los tetraedros que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos, y sus caras homólogas semejantes.

La proposicion siguiente demuestra la existencia de estos tetraedros.

TEOREMA 181 (*fig.* 211).

Si en un tetraedro VABC *se tira un plano* DEF *paralelo á la base, el tetraedro parcial* VDEF *que resulta es semejante al tetraedro propuesto.*

En efecto, los ángulos diedros *EVDF* y *BVAC* son iguales, pues son uno mismo; y los ángulos diedros *DVEF* y *AVBC*, *DVFE* y *BVCA* son iguales por la misma razon. Los ángulos diedros *VDEF* y *VABC* son iguales, por ser correspondientes entre planos paralelos [*Teor.* 139], y por la misma razon los ángulos diedros *VDFE* y *VACB*, *VFED* y *VBCA* son iguales.

Las caras laterales *VDE* y *VAB*, *VDF* y *VAC*, *VEF* y *VBC* son semejantes, por ser paralelas las rectas *DE* y *AB*, *DF* y *AC*, *EF* y *BC* [*Teor.* 120]. Las caras *DEF* y *ABC* son semejantes [*Teor.* 154]. Luego los dos tetraedros *VDEF* y *VABC* son semejantes, pues sus ángulos diedros son respectivamente iguales y están semejantemente dispuestos, y sus caras homólogas son semejantes [91].

TEOREMA 182 (*fig.* 211).

Dos tetraedros VABC, vabc *son semejantes, cuando tienen dos caras respectivamente semejantes* VAB *y* vab, VAC *y* vac, *semejantemente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido* BVAC=bvac.

Tomo sobre la arista *VA* una parte *VD=va*, y por el punto *D* tiro un plano *DEF* paralelo al *ABC*: la interseccion *DE* será paralela á *AB*, y por consiguiente el ángulo *VDE=VAB=vab;* luego los dos triángulos *VDE* y *vab*, que tienen un lado igual, *VD=va*, adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales. Por la misma razon el triángulo *VDF=vac*. El ángulo diedro *EVDF=bavc* por hipótesi. Luego los dos tetraedros *VDEF*, *vabc* son iguales [*Teor.* 151]; y pues el *VDEF* es semejante al *VABC* [*Teor.* 181], tambien el *vabc* es semejante al *VABC*.

TEOREMA 183 (*fig.* 211).

Dos tetraedros VABC, vabc *son semejantes, cuando tienen una cara semejante,* AVC *á* avc, *adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos*, BVAC=bvac, AVCB=avcb, VACB=vacb.

Tomo *VD=va*, y por el punto *D* tiro un plano *DEF* paralelo al *ABC:* el ángulo *VDF=VAC=vac;* luego los dos triángulos *VDF* y *vac* son iguales. El ángulo diedro *EDVF=bavc* y el *DVFE=avcb* por suposicion; y el *VDFE=VACB=vacb* [*Teor.* 139]: luego los tetraedros *VDEF, vabc* son iguales [*Teor.* 152]; y pues el *VDEF* es semejante al *VABC*, el *vabc* es tambien semejante al *VABC*.

TEOREMA 184 (*fig.* 211).

Dos tetraedros VABC, vabc *son semejantes, cuando tienen tres caras* VAB *y* vab, VAC *y* vac, VBC *y* vbc, *semejantes y semejantemente dispuestas.*

Tomo *VD=va*, y por el punto *D* tiro un plano *DEF* paralelo al *ABC:* el ángulo *VDE=VAB=vab*; luego los dos triángulos *VDE* y *vab* son iguales [*Teor.* 17]. Por la misma razon los triángulos *VDF* y *vac* son iguales. Los triángulos *VEF* y *vbc* son iguales, por ser *VE=vb*, *VF=vc*, y el ángulo *EVF=bvc*. Luego los dos tetraedros *VDEF*, *vabc* son iguales [*Teor.* 153]; y pues el tetraedro *VDEF* es semejante al *VABC*, tambien el *vabc* es semejante al *VABC*.

CAPITULO II.

Poliedros semejantes en general.

92. En dos poliedros, cuyos ángulos diedros son respectivamente iguales, se llaman *caras homólogas* las caras adyacentes á ángulos diedros respectivamente iguales.

93. Se llaman poliedros *semejantes* los poliedros que además de tener sus ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos, tienen sus caras homólogas semejantes.

La existencia de estos poliedros se demuestra por la proposicion siguiente.

TEOREMA 185 (*fig.* 190).

Si en una pirámide VABCDE *se tira un plano* FGHIK *paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la pirámide propuesta.*

Este teorema se demuestra del mismo modo que el teorema 181, caso particular del actual.

TEOREMA 186 (*fig.* 190).

Las bases ABCDE, FGHIK *de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas* VO *y* VP.

En efecto, siendo semejantes las bases *ABCDE, FGHIK*, tendremos [*Teor*. 96]

$$ABCDE : FGHIK :: AB^2 : FG^2.$$

Los triángulos semejantes *VAB* y *VFG*, *VBO* y *VGP* nos dan

$$AB : FG :: VB : VG :: VO : VP;$$

luego $ABCDE : FGHIK :: VO^2 : VP^2$.

NOTA. *Las alturas* VO *y* VP *de las dos pirámides semejantes son proporcionales á sus aristas homólogas.*

Corolario. *Si en dos pirámides* ABCD *y* EFGHI (fig. 212) *de bases equivalentes* BCD, FGHI, *é igual altura*, AO=EP, *se tiran dos planos paralelos á las bases y á igual distancia de sus vértices*, Ao=Ep, *las secciones* bcd, fghi *que resultan son equivalentes.*

Acabamos de demostrar que

$$BCD : bcd :: AO^2 : Ao^2,$$
$$FGHI : fghi :: EP^2 : Ep^2;$$

y como por suposicion $BCD=FGHI$, $AO=EP$, $Ao=Ep$, resulta $bcd=fghi$.

TEOREMA 187 (*fig.* 213).

Dos poliedros, compuestos de un mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.

Sean los dos poliedros *ABCDEFG*, *abcdefg* compuestos de los tetraedros *GABC*, *GACD*, *GADE*, *GBCF* (*a*); *gabc*, *gacd*,

---

(*a*) Para ver con claridad que estos cuatro tetraedros componen el poliedro *ABCDEFG*, imagínese que por los tres puntos *G*, *B* y *C* se tira un plano, y se separa del poliedro el tetraedro *GBCF*; quedará la pirámide pentagonal *GABCDE*, que evidentemente se compone de los tres tetraedros *GABC*, *GACD* y *GADE*.

gade, *gbcf* respectivamente semejantes: digo que estos poliedros son semejantes.

Los ángulos diedros *AB* y *ab* son iguales, porque son ángulos diedros de los dos tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos *GABC* y *gabc*.

El ángulo diedro *BAGE* se compone de los diedros *BAGC*, *CAGD* y *DAGE*, y el ángulo diedro *bage* se compone de los diedros *bagc*, *cagd* y *dage*; y siendo estos diedros parciales respectivamente iguales, por corresponder á tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, los diedros *BAGE* y *bage* serán iguales.

Del mismo modo se demuestra que todos los demás ángulos diedros de los poliedros son respectivamente iguales.

Las caras *AGE* y *age* son semejantes, por corresponder á los tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos *GADE* y *gade*. Las caras *ABCDE* y *abcde* son semejantes, porque los triángulos *ABC* y *abc*, *ACD* y *acd*, *ADE* y *ade*, que las componen, tienen la misma disposicion, y son respectivamente semejantes, por ser caras de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Del mismo modo se demuestra que las demás caras homólogas de los poliedros son respectivamente semejantes.

Luego [93] los dos poliedros *ABCDEFG* y *abcdefg*, que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes, son semejantes.

Recíproco. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

Sean los dos poliedros semejantes *ABCDEFG* y *abcdefg*, siendo semejantes las caras *ABCDE* y *abcde*, *ABFG* y *abfg*, *GAE* y *gae*, etc. que tienen la misma disposicion, y siendo iguales los diedros *FABC* y *fabc*, *BAGE* y *bage*, etc. que tambien tienen la misma disposicion. Tiremos desde los vértices *G* y *g* de dos ángulos poliedros formados por caras respectivamente semejantes las rectas *GB* y *GC*, *gb* y *gc*, de modo que las caras, que componen dichos ángulos poliedros *G* y *g*, estén todas descompuestas en triángulos. Dividamos tambien en triángulos semejantemente dispuestos las otras caras que no forman dichos ángulos poliedros *G* y *g*. El poliedro *ABCDEFG* quedará descompuesto en los tetraedros *GABC*, *GACD*, *GADE* y *GBCF*, y el poliedro *abcdefg* quedará descompuesto en los tetraedros *gabc*, *gacd*, *gade* y *gbcf*: digo que estos tetraedros son respectivamente semejantes

En efecto, los tetraedros *GABC* y *gabc* tienen semejantes las caras *GAB* y *gab*, las *ABC* y *abc* [*Teor*. 75, *Recíp*.], é iguales por suposicion los ángulos diedros comprendidos *GABC* y *gabc*; luego [*Teor*. 182] estos tetraedros son semejantes.

Los tetraedros *GACD* y *gacd* tienen semejantes las caras *GAC* y *gac*, por corresponder á los tetraedros semejantes *GABC* y *gabc*, y tambien tienen semejantes las caras *CAD* y *cad*, é iguales los diedros *GACD* y *gacd*, como suplementos de los iguales *GACB* y *gacb*; luego dichos tetraedros *GACD* y *gacd* son semejantes.

Del mismo modo se demuestra que todos los demas tetraedros semejantemente dispuestos son semejentes.

94. En dos poliedros semejantes se llaman aristas *homólogas* los lados homólogos de las caras homólogas.

TEOREMA 188 (*fig*. 213).

Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes son proporcionales.

Sean *AB* y *GD* dos aristas cualesquiera del primer poliedro, *ab* y *gd* sus homólogas: digo que

$$AB : ab :: GD : gd.$$

En efecto, por ser semejantes los poliedros, las caras homólogas *ABGF* y *abgf*, *AEG* y *aeg*, *EGD* y *egd* son semejantes; y por tanto

$$AB : ab :: AG : ag,$$
$$AG : ag :: EG : eg,$$
$$EG : eg :: DG : dg;$$

luego
$$AB : ab :: DG : dg.$$

CAPITULO III.

Poliedros regulares.

95. Se dice que una pirámide está *inscripta* en un cono, ó que un cono está *circunscripto* á una pirámide, cuando el

vértice de la pirámide es el mismo que el del cono, y la base de la pirámide está inscripta en la base del cono.

Se dice que una pirámide está *circunscripta* á un cono, ó que un cono está *inscripto* en una pirámide, cuando el vértice de la pirámide es el mismo que el del cono, y la base de la pirámide está circunscripta á la base del cono.

Se dice que un prisma está *inscripto* en un cilindro, ó que un cilindro está *circunscripto* á un prisma, cuando las dos bases del prisma están inscriptas en las dos bases del cilindro.

Se dice que un prisma está *circuscripto* á un cilindro, ó que un cilindro está *inscripto* en un prisma, cuando las dos bases del prisma están circunscriptas á las dos bases del cilindro.

96. Se llama poliedro *regular* el poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales.

TEOREMA 189.

No hay mas que cinco poliedros regulares.

En efecto, para formar un ángulo sólido, es menester por o menos tres ángulos planos, y que además la suma de los ángulos planos, que han de formar el ángulo sólido, valga menos que cuatro rectos [*Teor.* 142].

Esto supuesto, con tres ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $2R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene cuatro triángulos equiláteros por caras, y se llama *tetraedro regular* (*fig.* 214).

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{8}{3}R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene ocho triángulos equiláteros por caras, y se llama *octaedro regular* (*fig.* 215).

Con cinco ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{10}{3}R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene veinte triángulos equiláteros por caras, y se llama *icosaedro regular* (*fig.* 216).

Con seis ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{12}{3}R=4R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de cuadrado, cuya suma es $3R$, se puede formar ángulo sólido: el poliedro correspondiente tiene seis cuadrados por caras, y se llama *exaedro regular* ó cubo (*fig.* 217).

Con cuatro ángulos de cuadrado, cuya suma es $4R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de pentágono regular se puede formar ángulo sólido; porque la suma de los cinco ángulos de un pentágono regular es igual á $6R$ [*Teor*. 26]; luego un ángulo de un pentágono regular valdrá $\frac{6}{5}R$; y por consiguiente tres ángulos de pentágono regular valdrán $\frac{18}{5}R$. El poliedro correspondiente tiene doce pentágonos regulares por caras, y se llama *dodecaedro regular* (*fig*. 218).

Con cuatro ángulos de pentágono regular, cuya suma es $\frac{24}{5}R$, no se puede formar ángulo sólido.

Con tres ángulos de exágono regular no se puede formar ángulo sólido; pues valiendo los seis ángulos del exágono regular $8R$ [*Teor*. 26], un solo ángulo del exágono regular valdrá $\frac{8R}{6}=\frac{4}{3}R$; y por consiguiente tres ángulos de exágono regular valdrán $\frac{12}{3}R=4R$.

Ahora bien, cuanto mas lados tenga un polígono regular, tanto mas valen sus ángulos; pues, si n es el número de lados del polígono, y por consiguiente tambien n el número de sus ángulos, $2R(n-2)=2Rn-4R$ será el valor de la suma de todos [*Teor*. 26, *Nota*]; luego $\frac{2Rn-4R}{n}=2R-\frac{4R}{n}$ será el valor de un solo ángulo. Creciendo n, disminuye el quebrado sustraendo $\frac{4R}{n}$, y por tanto la diferencia $2R-\frac{4R}{n}$ aumenta.

Si pues la suma de tres ángulos de exágono regular vale $4R$, la suma de tres ángulos de eptágono regular, octógono regular, etc. será mayor que $4R$; y por consiguiente no se podrá formar ángulo sólido.

Queda pues demostrado, que no pueden existir mas poliedros regulares queel tetraedro, octaedro, icosaedro, exaedro y dodecaedro.

LIBRO V.

Areas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.

CAPITULO I.

Areas de los poliedros.

TEOREMA 190.

El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de su base por la altura de uno de los triángulos laterales.

Sea a la altura de uno de los triángulos laterales, b su base, y n el número de estos triángulos; nb será el perímetro de la base de la pirámide: digo que el área lateral de la pirámide es $\frac{1}{2}nb\times a$.

El área de uno de los triángulos laterales es $\frac{1}{2}ba$; y como todos estos triángulos son iguales [69], el área de todos, ó la lateral de la pirámide, será $\frac{1}{2}ba\times n=\frac{1}{2}nb\times a$.

TEOREMA 191.

El área lateral de una pirámide regular troncada de bases paralelas es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la semisuma de los perímetros de las dos bases.

Sea a la altura de uno de los trapecios laterales, b y b' sus dos bases, n el número de estos trapecios, nb y nb' serán los perímetros de las dos bases: digo que el área lateral de la pirámide troncada es $a\times\frac{nb+nb'}{2}$.

El área de uno de los trapecios laterales es $a.\frac{b+b'}{2}$; luego, como todos ellos son iguales, el área lateral del tronco será $a.\frac{b+b'}{2}\times n=a\times\frac{nb+nb'}{2}$.

TEOREMA 192.

El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.

Sea a la altura del prisma recto, y b, b', b'', etc. las bases de los rectángulos laterales; $b+b'+b''+$ etc. será el perímetro de la base del prisma: digo que el área lateral de este es $a(b+b'+b''+\text{etc.})$.

Las áreas de los rectángulos laterales son ab, ab', ab'', etc.; luego el área lateral del prisma será $ab+ab'+ab''+\text{etc.}=a(b+b'+b''+\text{etc.})$.

TEOREMA 193 (*fig.* 218*).

El área lateral de un prisma oblícuo FC *es igual al producto de una de sus aristas laterales* AF *por el perímetro de su seccion recta* LMNOP.

Considerando como bases de los paralelógramos laterales las aristas AF, BG, CH, etc., los lados LM, MN, NO, etc. serán las alturas de dichos paralelógramos, puesto que dichas aristas son perpendiculares á la seccion recta, y por consiguiente á las rectas que pasan por su pie en el plano de esta seccion.

El área del paralelógramo $ABGF$ es $AF\times LM$, la del paralelógramo $BCHG$ es $BG\times MN=AF\times MN$, la del paralelógramo $DCHI$ es $CH\times NO=AF\times NO$, etc.: luego el área lateral del prisma es

$$AF\times LM+AF\times MN+AF\times NO+\text{etc}=AF(LM+MN+NO+\text{etc.}),$$

conforme al enunciado del teorema.

Nota. El área de un poliedro cualquiera se halla sumando las áreas de todas sus caras.

CAPITULO II.

Areas de los cuerpos redondos.

97. Axioma. *Toda superficie plana es menor que cualquiera otra superficie terminada en el mismo contorno.*

TEOREMA 194 (*fig.* 114).

Toda superficie convexa (a) *cerrada, envuelta por otra superficie cualquiera cerrada, es menor que esta.*

Imaginemos que la línea convexa *ABCD* y la línea convexa ó no *PQRST* representen dos superficies cerradas, convexa la primera y convexa ó no la segunda.

No pueden ser iguales todas las infinitas superficies *ABCDA*, *PQRSTP*, etc., que encierran al espacio *ABCD*; pues, tirando un plano *MN*, interior al espacio *PQRST*, y que no corte á la superficie *ABCDA*, será la superficie plana *MN* menor que la superficie *MPQN* terminada en el mismo contorno que el plano (*Axioma*); y añadiendo á ambas superficies la superficie *MTSRN*, resulta que la superficie *MNRSTM* es menor que la *PQRSTP*.

No siendo iguales todas las superficies en número infinito que encierran al espacio *ABCD*, sucederá uno de estos dos casos: que existan dos ó mas superficies iguales en magnitud, menores que todas las demás, ó que exista una sola superficie menor que todas las demás.

Hemos visto que la superficie *PQRSTP* es mayor que la *MNRSTM*; luego la superficie *PQRSTP* no es de las menores. Lo mismo se puede demostrar de cualquiera otra de las superficies mencionadas, diferente de la *ABCDA*; luego no pueden existir dos superficies, iguales en magnitud, que sean

---

(*a*) Se llama superficie *convexa* aquella superficie que no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos.

menores que todas las demás; luego existe necesariamente una sola superficie menor que todas las demás: y pues ninguna diferente de la *ABCDA* es de las menores, esta es la menor.

TEOREMA 195 (*fig.* 219).

El área lateral de un cono es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.

Sea C la circunferencia de la base del cono, L su lado, A su área lateral: digo que $A=\frac{1}{2}CL$.

Sean P y p los perímetros de las bases de dos pirámides regulares de igual número de caras, circunscripta é inscripta al cono, R y r las apotemas de dichas bases, L y l las alturas de los triángulos laterales: las áreas totales de dichas dos pirámides serán

$$\tfrac{1}{2}RP+\tfrac{1}{2}LP \text{ y } \tfrac{1}{2}rp+\tfrac{1}{2}lp \text{ (\textit{Teors.} 96 \textit{y} 190).}$$

Ahora, multiplicando suficientemente el número de caras de las dos pirámides circunscripta é inscripta, y por consiguiente el número de lados de los dos polígonos circunscripto é inscripto, bases de dichas pirámides, puede llegar (*Lemas* 1 *y* 2, *págs.* 79 *y* 80) r á diferenciarse de R, y p de P en menos de cualquiera cantidad dada. Al mismo tiempo l puede llegar á diferenciarse de L tan poco como se quiera; pues en el triángulo VCc es $VC-Vc<Cc$, ó $L-l<R-r$: y como $R-r$ puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, con mas razon $L-l$ será entonces menor que qualquiera cantidad tan pequeña como se quiera.

Segun esto, las dos cantidades variables $\frac{1}{2}RP+\frac{1}{2}LP$ y $\frac{1}{2}rp+\frac{1}{2}lp$ pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad asignable, multiplicando suficientemente el número de caras de las dos pirámides regulares circunscripta é inscripta.

Ahora bien, el área total $\frac{1}{2}RC+A$ del cono está comprendida entre las áreas totales de las dos pirámides circunscripta é inscripta $\frac{1}{2}RP+\frac{1}{2}LP$ y $\frac{1}{2}rp+\frac{1}{2}lp$ [*Teor.* 194]. Tambien es evidente que la cantidad $\frac{1}{2}RC+\frac{1}{2}LC$ es menor que $\frac{1}{2}RP+\frac{1}{2}LP$ y mayor que $\frac{1}{2}rp+\frac{1}{2}lp$: luego, segun el teorema de Arbogast,

$$\tfrac{1}{2}RC+A=\tfrac{1}{2}RC+ LC,$$

ó

$$A=\tfrac{1}{2}LC.$$

Nota. Siendo $C=2\pi R$, será $A=\pi RL$, relacion que puede servir para hallar cualquiera de las tres cantidades A, R y L, dadas las otras dos.

TEOREMA 196 (*fig.* 220).

El área lateral de un cono troncado de bases paralelas es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases.

Cortemos un cono VCD por medio de un plano AB paralelo á la base: sea A el área lateral del cono troncado $ABCD$, L su lado AC, C y c las circunferencias de sus dos bases: digo que $A=L\times\frac{C+c}{2}$.

Por el punto D levanto una perpendicular al lado VD, tomo sobre ella una parte $DE=C$, tiro la VE, y por el punto B una paralela BF á la DE. Los triángulos semejantes VDE, VBF nos dan la proporcion

$$DE : BF :: DV : BV \qquad [1].$$

Tenemos tambien

$$C : c :: OD : PB,$$

y

$$OD : PB :: DV : BV;$$

luego

$$C : c :: DV : BV.$$

Esta proporcion y la [1] tienen tres términos respectivamente iguales; luego $BF=c$.

Ahora, el área lateral del cono VCD es $\frac{1}{2}VD\times C$, y la del triángulo VDE es $\frac{1}{2}VD\times DE$; luego estas dos áreas son iguales. Del mismo modo se demuestra que el área lateral del cono VAB es igual á la del triángulo VBF. Luego el área lateral del cono troncado $ABCD$ es igual á la del trapecio $BDEF$. El área de este trapecio es $BD\times\frac{DE+BF}{2}$; luego la área lateral del cono troncado será esta misma, ó $BD\times\frac{C+c}{2}$: y pues hemos llamado A al área lateral del cono y L á su lado, será

$$A=L\times\frac{C+c}{2}.$$

NOTA. Sea C' la circunferencia GH, que resulta cortando el cono por medio de un plano paralelo á las bases, tirado por el punto medio G del lado AC; tiro por el punto H una paralela HI á la DE; y se demostrará como antes que $HI=C'$.

Mas [*Teor.* 34] $HI=\frac{DE+BF}{2}$; luego $C'=\frac{C+c}{2}$; y por consiguiente $A=L\times C'$.

Luego *el área lateral de un cono troncado de bases paralelas es igual al producto de su lado por la circunferencia de una seccion paralela á las bases y equidistante de ellas.*

NOTA. Si llamamos R y r á los radios de las circunferencias C y c, será $C=2\pi R$, $c=2\pi r$; luego

$$A=\pi L(R+r),$$

relacion que sirve para hallar cualquiera de las cuatro cantidades A, L, R y r, dadas las otras tres.

TEOREMA 197.

El área lateral de un cilindro es igual al producto de la circunferencia de su base por su altura.

Sea A el área lateral del cilindro, a su altura, C la circunferencia de su base: digo que $A=Ca$.

Sean P y p los perímetros de las bases de dos prismas regulares de igual número de caras, circunscripto é inscripto al cilindro, R y r sus apotemas: las áreas totales de los dos prismas serán [*Teoremas* 96 y 192]

$$\tfrac{1}{2}RP+\tfrac{1}{2}RP+aP=RP+aP \qquad [1],$$
$$\tfrac{1}{2}rp+\tfrac{1}{2}rp+ap=rp+ap \qquad [2].$$

Multiplicando suficientemente el número de caras de los prismas circunscripto é inscripto, y por consiguiente el número de lados de sus bases, r puede llegar á diferenciarse de R, y p de P tan poco como se quiera; luego las dos cantidades variables [1] y [2] pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad asignable.

Ahora, el área total del cilindro $\tfrac{1}{2}RC+\tfrac{1}{2}RC+A$ ó $RC+A$ está comprendida entre las áreas totales [1] y [2] de los dos prismas [*Teor.* 194]: tambien es evidente que $RC+aC$ está comprendida entre las mismas cantidades [1] y [2]; luego, segun el teorema de Arbogast,

$$RC+A=RC+aC, \text{ ó } A=aC.$$

NOTA. Siendo $C=2\pi R$, será $A=2\pi Ra$, relacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades A, R y a, dadas las otras dos.

TEOREMA 198 (*fig.* 221) (a).

Si un triángulo isósceles ABC *gira al rededor de una recta* MN *esterior á él, y que pasa por su vértice en su plano, el área de la superficie engendrada por la base* AC *es igual á su proyeccion* DC *ó* DE *sobre el eje* MN *multiplicada por la circunferencia cuyo radio es la altura* BG.

Hay que considerar tres casos: 1.° que la base AC (*figura* 1) del triángulo isósceles toque por un estremo al eje MN; 2.° que la base AC (*fig.* 2) del triángulo isósceles no toque ni sea paralela al eje MN; 3.° que la base AC (*fig.* 3) del triángulo isósceles sea paralela al eje MN.

1.° La base AC (*fig.* 1) del triángulo isósceles ABC describe en su movimiento la superficie lateral de un cono, cuya área es [*Teor.* 195]

$$AC\times\pi AD=CG\times 2\pi AD \quad [1].$$

Los triángulos ADC y BCG son semejantes; luego

$$CG : CD :: BG : AD,$$

de donde $$CG\times AD=CD\times BG.$$

Sustituyendo en la espresion [1] del área lateral del cono en lugar de $CG\times AD$ su igual $CD\times BG$, resulta que dicha área es $CD\times 2\pi BG$, conforme á la conclusion del teorema.

2.° La base AC (*fig.* 2) describe en su movimiento al rededor del eje MN la superficie lateral de un cono troncado, cuyas bases paralelas tienen por radios AD y CE. La área lateral de este cono es (*Teor.* 196, *Nota*)

$$AC\times 2\pi GH \quad [1].$$

Si tiramos la CI perpendicular á la AD, los triángulos BGH y ACI, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son semejantes; y por tanto

$$AC : BG :: CI=DE : GH,$$

de donde resulta $$AC\times GH=BG\times DE.$$

(a) Preparatorio para llegar al área de la zona.

Sustituyendo en la espresion [1] del área del cono troncado en lugar de $AC\times GH$ su igual $BG\times DE$, resulta que dicha área es $DE\times 2\pi BG$, conforme al teorema.

3.° La base AC (*fig.* 3) describe la superficie lateral de un cilindro, cuya área es [*Teor.* 197]

$$DE\times 2\pi AD = DE\times 2\pi BG.$$

98. Se llama *sector poligonal* la porcion $OABCD$ (*figura* 222) de polígono regular comprendida entre los radios OA y OD, y dos ó mas lados de dicho polígono.

Se llama *base* de un sector poligonal la línea quebrada $ABCD$ formada por los lados del polígono correspondientes á dicho sector poligonal.

Corolario. *Si un sector poligonal* OABCD (fig. 222) *gira al rededor de uno de sus dos radios* OA, *el área de la superficie engendrada por la base* ABCD *es igual á su proyeccion* AG *sobre el eje* OA *multiplicada por la circunferencia* C *del círculo inscripto.*

En efecto, tirando los radios intermedios OB, OC y las perpendiculares BE, CF, DG al eje, tendremos que las áreas de las superficies descritas por los lados AB, BC y CD serán respectivamente

$$AE\times C,\ EF\times C,\ FG\times C;$$

luego el área de la superficie engendrada por la base $ABCD$ del sector poligonal será

$$(AE+EF+FG)C = AG\times C.$$

99. Se llama *zona* esférica la superficie descrita por un arco del sector circular que gira al rededor de uno de sus dos radios.

Las circunferencias descritas por los estremos del arco generador se llaman *bases* de la zona.

Altura de una zona es la proyeccion del arco generador sobre el radio que se toma por eje [35, pág. 65].

Si uno de los estremos del arco generador toca al eje, la zona descrita no tendrá mas que una base, que será la circunferencia descrita por el otro estremo.

Lema 4. *La zona descrita por el arco* ad (fig. 223) *del sector circular* Oad *es:* 1.° *mayor que la superficie descrita por la base* abcd *del sector poligonal inscripto*, 2.° *menor que la* *superficie descrita por la base* ABCD *del sector poligonal circunscripto.*

1.° La superficie descrita por la base *abcd* del sector poligonal inscripto, mas el círculo descrito por el radio *fd* componen una superficie convexa cerrada, envuelta por la zona descrita por el arco *ad* y el círculo descrito por el radio *fd*; luego [*Teor.* 194] la primera superficie es menor que la segunda; luego, restando de ambas el círculo descrito por el radio *fd*, tendremos que la superficie descrita por la base *abcd* del sector poligonal será menor que la zona descrita por el arco *ad*; ó lo que es igual, la zona descrita por el arco *ad* será mayor que la superficie descrita por la base *abcd* del sector polígonal inscripto.

2.° Tiro la tangente *dh*, y la *hi* perpendicular al eje *OA*: la superficie descrita por la recta *dh* es la de un cono troncado de bases paralelas, y la descrita por la recta *Dh* es la de un cono troncado ó cilindro. La área del primer cuerpo es $dh.\pi(df+hi)$ [*Teor.* 196], y la del segundo es $Dh.\pi(De+hi)$; y como $dh<Dh$, y $df<De$, la primera es menor que la segunda. Luego la superficie descrita por la base del sector poligonal circunscripto es mayor que la descrita por la línea quebrada *ABChd*.

Ahora se demuestra como en 1.° què la zona es menor que la superficie descrita por la línea quebrada *ABChd;* luego con mayor razon la zona es menor que la superficie descrita por la base del sector poligonal circunscripto.

Lema 5. *Se pueden inscribir y circunscribir á un sector de círculo dos sectores poligonales* OABCD, Oabcd (fig. 223), *tales que girando al rededor de un radio* OA *comun á dichos sectores, las áreas de las superficies descritas por sus bases se diferencien en menos de cualquiera cantidad dada.*

Sean *R* y *r* las apotemas de los dos sectores poligonales: las áreas de las superficies descritas por las dos bases de ambos sectores son [*Teor.* 198, *Corol.*]

$$Ae\times2\pi R,\ af\times2\pi r.$$

Ahora, multiplicando suficientemente el número de lados de las bases de los dos sectores, *r* se podrá aproximar á *R* tanto como se quiera. Tambien *af* y *Ae* pueden diferenciarse en tan poco como se quiera. En efecto, la diferencia entre *af* y *Ae* es $Aa+fe$: si tiramos *fm* paralela á *OD*, será $ef<fm$

$=Dd=Aa$; luego la diferencia entre Ae y af es menor que $2Aa$. Siendo ag paralela á AG, será

$$\frac{Aa}{Gg}=\frac{aO}{gO}, \text{ ó } \frac{Aa}{R-r}=\frac{R}{r},$$

de donde resulta

$$2Aa=\frac{2R}{r}(R-r).$$

Creciendo el número de lados de las bases de los dos sectores poligonales, r va creciendo, $\frac{2R}{r}$ va por lo tanto disminuyendo, y al mismo tiempo $R-r$ puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada; luego $2Aa$ puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada; y con mayor razon la diferencia entre Ae y af puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable. Luego las dos áreas $Ae\times2\pi R$, y $af\times2\pi r$ pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad por pequeña que sea.

TEOREMA 199 (*fig.* 223).

El área Z de una zona es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo máximo.

Consideremos en primer lugar la zona de una base descrita por el arco ad del sector circular Oad. Inscribo y circunscribo al sector circular Oad dos sectores poligonales $Oabcd$ y $OABCD$, cuyas bases $abcd$ y $ABCD$ tengan sus lados paralelos. Las áreas de las superficies descritas por las bases de los dos sectores poligonales son $Ae\times2\pi.OG$, $af\times2\pi.Og$. La área Z de la zona está comprendida [*Lema* 4, *pág.* 177] entre estas dos áreas: tambien $af\times2\pi.OG$ está comprendida entre las mismas; luego, como dichas dos áreas pueden diferenciarse en menos de cualquiera cantidad dada [*Lema* 5, *pag.* 178], las constantes Z y $af\times2\pi.OG$, comprendidas entre ellas son iguales, segun el teorema de Arbogast; luego etc.

Consideremos ahora la zona de dos bases descrita por el arco bd; esta zona es la diferencia de las zonas de una base descritas por los arcos ad y ab. Las áreas de estas son, segun acabamos de demostrar, $af \times 2\pi.OG$ y $al \times 2\pi.OG$; luego la área de la zona descrita por el arco bd será

$$af \times 2\pi.OG - al \times 2\pi.OG = (af - al)2\pi.OG = fl \times 2\pi.OG,$$

conforme al teorema.

TEOREMA 200.

El área de la superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por la circunferencia del círculo máximo.

En efecto, cortando la esfera por un plano, queda su superficie dividida en dos zonas de una base, cuyas dos alturas componen el diámetro de la esfera: sea a la altura de la una, a' la de la otra, y R el radio de la esfera. Las áreas de dichas dos zonas son

$$2\pi Ra \text{ y } 2\pi Ra';$$

luego la área de la esfera será

$$2\pi Ra + 2\pi Ra' = 2\pi R(a + a');$$

y pues $a + a'$ es el diámetro de la esfera, queda demostrado el teorema.

NOTA. Si llamamos A al área de la esfera, será $A = 2R \times 2\pi R$, ó $A = 4\pi R^2$, relacion por medio de la cual se hallará A conociendo R, y al contrario.

Corolario. 1.º *La área de la esfera es cuádrupla de la de su círculo máximo*; pues la área del círculo máximo es πR^2.

2.º *El área de la esfera es igual á la lateral del cilindro circunscripto, y es los $\frac{2}{3}$ de la total de dicho cilindro*: pues el área lateral del cilindro circunscripto es [*Teor.* 197]

$$2R \times 2\pi R = 4\pi R^2;$$

y la total será $\quad 4\pi R^2 + \pi R^2 + \pi R^2 = 6\pi R^2;$

y es claro que el área $4\pi R^2$ de la esfera es $\frac{2}{3}$ de $6\pi R^2$.

100. Se llama *huso esférico* la parte $ABCDA$ (*fig.* 206) de la superficie de la esfera comprendida entre dos semi-circunferencias máximas ABC y ADC.

TEOREMA 201 (*fig.* 206).

El área de un huso esférico ABCDA *es al área* E *de la esfera, como el ángulo esférico* BAD *del huso es á* 4 *rectos.*

Para demostrar este teorema, antepondremos el lema siguiente: *dos husos de una misma esfera son iguales, cuando sus ángulos esféricos son iguales;* pues si hacemos coincidir los dos ángulos esféricos iguales, las dos semi-circunferencias máximas de un huso coincidirán con las dos del otro, y por consiguiente los dos husos coincidirán.

Pasemos ahora á la demostracion del teorema.

Pueden suceder dos casos: 1.° que el ángulo esférico *BAD* del huso sea comensurable con su adyacente el ángulo esférico *DAE*; 2.° que dicho ángulo esférico *BAD* sea incomensurable con el ángulo esférico *DAE*.

1.er *caso.* Supongamos que la medida comun de los ángulos esféricos *BAD* y *DAE* esté contenida 7 veces en aquel y 19 veces en este: tendremos [29]

$$BAD : DAE :: 7 : 19.$$

El huso *ABCDA* contiene 7 husos parciales, y el huso *ADCEA* contiene 19 husos parciales: todos estos husos parciales son iguales, segun el lema; luego

$$ABCDA : ADCEA :: 7 : 19.$$

Luego $\quad ABCDA : ADCEA :: BAD : DAE.$

De esta proporcion resulta esta otra [*Aritm.* 172]:

$$ABCDA : ABCDA + ADCEA :: BAD : BAD + DAE,$$

ó $\quad ABCDA : \frac{E}{2} :: BAD : 2R,$

ó en fin $\quad ABCDA : E :: BAE : 4R,$

conforme al enunciado del teorema.

2.° *caso.* Si el ángulo esférico *BAD* es incomensurable con el ángulo esférico *DAE*, se demostrará el teorema del mismo modo que el 2.° caso del teorema 48.

Corolario. *Tomando por unidad de ángulos el ángulo recto, el área del huso es igual á la del círculo máximo* πr^2 *multiplicada por el ángulo esférico* BAD *del huso.*

Acabamos de demostrar que

$$ABCDA : 4\pi r^2 :: BAD : 4;$$

por consiguiente $\qquad ABCDA = \pi r^2 \times BAD.$

Ejemplo. Hallar el área de un huso de una esfera de 10 varas de radio, y cuyo ángulo esférico correspondiente es de 33°.

Como en el teorema último el ángulo recto vale 1, el valor del ángulo del huso será $\frac{33}{90} = \frac{11}{30}$. Luego el área del huso será $\pi.10^2.\frac{11}{30} = 31,4159 \times \frac{11}{3} = 115,1916$ varas cuadradas.

☼ TEOREMA 202 (*fig.* 224).

Dos triángulos esféricos simétricos ABC, DEF *son equivalentes.*

Sea P (*fig.* 1.ª) el polo del círculo que pasa por los tres vértices A, B y C, Q el polo del círculo que pasa por los tres vértices D, E y F (*a*): tiremos las cuerdas AB, AC, BC, DE, DF, EF. Los dos triángulos rectilíneos ABC, DEF son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego, si colocamos los círculos circunscriptos á estos triángulos, de modo que dichos triángulos coincidan, los círculos coincidirán [*Teor.* 38], y por consiguiente los polos P y Q coincidirán tambien; tendremos pues [83] $PA=PB=PC=QD=QE=QF$: luego los triángulos esféricos PAB y QDE, PBC y QEF, PAC y QDF, que tienen sus tres lados respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales [*Teor.* 178].

Por consiguiente

$$PAB+PBC-PAC=QDE+QEF-QDF,$$

ó bien $\qquad ABC=DEF;$

(*a*) Cada uno de estos círculos es un círculo menor; pues si fuese círculo máximo, teniendo su circunferencia con cada lado del triángulo esférico dos puntos (dos vértices) comunes, los lados del triángulo esférico coincidirian con dicha circunferencia máxima, y por consiguiente no habria triángulo esférico.

es decir, que los dos triángulos esféricos ABC y DEF son equivalentes [3].

Pueden suceder que los polos P y Q (*fig.* 2) caigan sobre dos lados AC y DF: entonces se demuestra como en el caso anterior que $PAB=QDE$, y $PBC=QEF$: por consiguiente

$$PAB+PBC=QDE+QEF,$$

ó $$ABC=DEF.$$

Puede suceder finalmente que los polos P y Q (*fig.* 3) caigan dentro de los triángulos: entonces se demuestra como en los dos casos anteriores que

$$PAB=QDE,\ PBC=QEF,\ PAC=QDF:$$

luego $$PAB+PBC+APC=QDE+QEF+QDF,$$

ó $$ABC=DEF.$$

✻TEOREMA 203 (*fig.* 225).

Tomando por unidad de ángulos el ángulo recto, el área de un triángulo esférico es igual á la del círculo máximo multiplicada por la semisuma de los tres ángulos del triángulo disminuida en una unidad.

Sea el triángulo esférico ABC, á cuyos ángulos esféricos llamaremos A, B, C: digo que su área

$$T=\pi r^2\left(\frac{A+B+C}{2}-1\right).$$

Prolongo el lado AB, hasta que sea una circunferencia entera $ABED$, y prolongo los otros dos lados AC y BC, hasta que sus prolongaciones encuentren á esta circunferencia en los puntos D y E, y se encuentren ellas en el punto F; y tiro los diámetros AE, BD y CF.

Los dos triángulos esféricos ABF y CDE correspondientes á los triedros simétricos $OABF$ y $OCDE$ [*Teor.* 146] son simétricos [88], y por tanto equivalentes. El huso, cuyo ángulo esférico es A, se compone del triángulo propuesto y del BCE. El huso, cuyo ángulo esférico es B, se compone del triángulo propuesto y del ACD. El huso, cuyo ángulo esférico es C, se compone del triángulo propuesto y del ABF, ó de su equivalente el DCE.

Ahora bien, tenemos [*Teor.* 201, *Corol.*]

$$T+BCE=\pi r^2.A,$$
$$T+ACD=\pi r^2.B,$$
$$T+DCE=\pi r^2.C.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que los cuatro triángulos ABC, BCE, ACD, DCE componen la superficie de media esfera, será

$$2T+2\pi r^2=\pi r^2\,(A+B+C),$$

de donde
$$2T=\pi r^2\,(A+B+C-2);$$

y por consiguiente
$$T=\pi r^2\left(\frac{A+B+C}{2}-1\right).$$

Ejemplo. Hallar el área de un triángulo esférico situado en una esfera cuyo radio es 10 varas, y cuyos tres ángulos son 80°, 100° y 120°.

Para que un triángulo esférico sea posible, es menester que la suma de sus tres ángulos sea mayor que 180°, y que la diferencia entre la suma de dos de dichos ángulos y el tercero sea menor que 2 ángulos rectos [*Teor.* 174]; condiciones que se verifican actualmente.

Observemos ahora, que en el teorema que acabamos de demostrar, el ángulo recto vale 1; luego los valores de los tres ángulos dados serán $\frac{80}{90}=\frac{8}{9}$, $\frac{10}{9}$ y $\frac{12}{9}$: luego el área de dicho triángulo esférico será

$$314{,}159\times\left(\frac{4+5+6}{9}-1\right)=314{,}159\times\frac{2}{3}=209{,}439 \text{ varas}$$

cuadradas.

CAPITULO III.

Comparacion de las áreas.

TEOREMA 204.

Las áreas de los poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.

Sean C, C', C'', etc. las caras de un poliedro; c, c', c'', etc. las del otro, respectivamente semejantes á las primeras; A una arista de C, A', una arista de C', A'' una arista de C'', etc.; a una arista de c homóloga de la A, a' una arista de c' homóloga de la A', a'' una arista de c'' homóloga de la A'', etc.: tendremos, por ser respectivamente semejantes las caras, las proporciones

$$C : c :: A^2 : a^2,$$
$$C' : c' :: A'^2 : a'^2,$$
$$C'' : c'' :: A''^2 : a''^2,$$
etc.

Las segundas razones de estas proporciones son iguales, pues siendo [*Teor* 188]

$$A : a :: A' : a' :: A'' : a'', \text{ etc.},$$

será tambien $A^2 : a^2 :: A'^2 : a'^2 :: A''^2 : a''^2$, etc.

Luego las primeras razones de dichas proporciones son iguales; luego [*Aritm.* 175]

$$C+C'+C''+\text{etc.} : c+c'+c''+\text{etc.} :: A^2 : a^2;$$

que es el enunciado del teorema.

101. Se llaman conos *semejantes* los conos cuyos triángulos generadores son semejantes.

TEOREMA 205.

Las áreas laterales de los conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, á los cuadrados de sus alturas, ó á los cuadrados de sus lados.

Sean R y r los radios de las bases de los dos conos semejantes, A y a sus alturas, L y l sus lados; πRL y πrl serán las áreas laterales de los dos conos [*Teor.* 195, *Nota.*]; digo que

$$\pi RL : \pi rl : : R^2 : r^2 : A^2 : a^2 : : L^2 : l^2.$$

Siendo semejantes los triángulos generadores, será

$$L : l : : R : r.$$

Tambien $\pi R : \pi r : : R : r;$

luego $\pi RL : \pi rl : : R^2 : r^2 : : A^2 : a^2 : : L^2 \cdot l^2.$

102. Se llaman cilindros *semejantes* los cilindros cuyos rectángulos generadores son semejantes.

TEOREMA 206.

Las áreas laterales de los cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, ó á los cuadrados de sus alturas.

Llamando R y r á los radios de las dos bases, A y a á las alturas de los dos cilindros; $2\pi RA$ y $2\pi ra$ serán las áreas laterales de los cilindros: digo que

$$2\pi RA : 2\pi ra : : R^2 : r^2 : : A^2 : a^2.$$

En efecto, por ser semejantes los rectángulos generadores, es

$$A : a : : R : r.$$

Tambien $2\pi R : 2\pi r : : R : r;$

luego $2\pi RA : 2\pi ra : : R^2 : r^2 : : A^2 : a^2.$

TEOREMA 207.

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios; pues siendo R y r los radios, $4\pi R^2$ y $4\pi r^2$ son las áreas de las esferas; y es evidente que

$$4\pi R^2 : 4\pi r^2 : : R^2 : r^2.$$

CAPITULO IV.

Volúmenes de los poliedros.

—

103. Se llama *volúmen* de un cuerpo la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo [3].

Para medir el espacio que ocupa un cuerpo, se toma por unidad un cubo.

TEOREMA 208 (*fig.* 226).

Dos paralelepípedos rectángulos AG *y* ag *que tienen iguales bases* EFGH *y* efgh, *son proporcionales á sus alturas* AE y ae.

1.° Si las alturas *AE* y *ae* son comensurables, supongamos que la medida comun quepa 7 veces en *AE* y 4 veces en *ae*; tendremos [29]

$$AE : ae :: 7 : 4.$$

Tirando por los puntos de division de las alturas planos paralelos á las bases, el paralelepípedo *AG* quedará dividido en 7 paralelepípedos parciales, y el paralelepípedo *ag* en 4; todos estos paralelepípedos parciales son iguales, pues tienen bases y alturas iguales [*Teor.* 156]; luego

$$AG : ag :: 7 : 4.$$

Por consiguiente

$$AG : ag :: AE : ae.$$

2.° Si las alturas *AE* y *ae* son incomensurables, se demostrará el teorema como se demostró su análogo el 87.

Nota. Las *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo son las tres aristas de uno de sus ángulos triedros: por consiguiente, cuando dos paralelepípedos rectángulos tienen bases iguales, tienen dos dimensiones del uno iguales respectivamente á dos dimensiones del otro; y por tanto el teorema último puede enunciarse asi: *dos paralelepípedos rectángu-*

los que tienen dos dimensiones comunes, son proporcionales á sus terceras dimensiones.

TEOREMA 209.

Dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimension comun, son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones.

Sean P y P' los dos paralelepípedos rectángulos; a, b y c las dimensiones del primero; a, b' y c' las del segundo: digo que

$$P : P' :: b \times c : b' \times c'.$$

Sea P″ un tercer paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones sean a, b y c'.

Los paralelepípedos P y P'' que tienen dos dimensiones comunes a y b, serán entre sí como sus terceras dimensiones c y c', esto es,

$$P : P'' :: c : c'.$$

Los paralelepípedos P'' y P' tienen comunes las dos dimensiones a y c'; luego

$$P'' : P' :: b : b'.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor P'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$P : P' :: b \times c : b' \times c' \ (a).$$

TEOREMA 210.

Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus tres dimensiones.

(a) En las proporciones

$$P : P'' :: c : c', \ P'' : P' :: b : b'$$

puede considerarse á P, P', P'' como paralelepípedos, ó como medidas de estos paralelepípedos; pero cuando se multiplican estas proporciones, se admite implícitamente que P, P', P'' representan sus medidas; pues seria absurdo pretender multiplicar un paralelepípedo por otro.

Sean P y P' los dos paralelepípedos, a, b y c, a', b' y c' sus dimensiones: digo que

$$P : P' :: a\times b\times c : a'\times b'\times c'.$$

Sea P'' un tercer paralelepípedo que tenga las dimensiones a, b' y c'.

Los paralelepípedos P y P'', que tienen comun la dimension a, serán entre sí como los productos de las otras dos dimensiones, esto es,

$$P : P'' :: b\times c : b'\times c'.$$

Los paralelepípedos P'' y P', que tienen comunes las dos dimensiones b' y c', serán entre sí como sus terceras dimensiones a y a', esto es,

$$P'' : P' :: a : a'.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, y suprimiendo el factor P'' comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$P : P' :: a\times b\times c : a'\times b'\times c'.$$

Ejemplo. Hallar la razon de dos paralelepípedos rectángulos, cuyas dimensiones sean: las del primero 3 pies, 5 pies y 7 pies, y las del segundo 2 varas, $1\frac{1}{3}$ varas y 3 varas.

Como los tres teoremas [208, 209 y 210] suponen que la unidad, con que se han de medir las dimensiones de los dos paralelepípedos, ha de ser cualquiera, pero la misma para todas ellas, reduciremos las dimensiones del segundo paralelepípedo á pies, y entonces estas dimensiones serán 6 pies, 4 pies y 9 pies. Llamando, para mayor claridad, P y P' á los dos paralelepípedos, tendremos

$$\frac{P}{P'}=\frac{3.5.7}{6.4.9}=\frac{35}{72};$$

es decir, que la razon del primer paralelepípedo al segundo es $\frac{35}{72}$, ó lo que es igual, el primer paralelepípedo es los $\frac{35}{72}$ del segundo.

TEOREMA 211.

El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, si la unidad lineal es el lado del cubo tomado por unidad de espacio.

Sea P el paralelepípedo rectángulo, a, b, c sus tres dimensiones, C el cubo que se toma por unidad y l su lado. Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas tres dimensiones son iguales, tendremos [*Teor.* 210]

$$\frac{P}{C}=\frac{a\times b\times c}{l^3}.$$

El primer miembro es la medida del paralelepípedo P ó su volúmen [3]; luego *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, dividido por la tercera potencia del lado del cubo que se toma por unidad de espacio; siendo medidas las cuatro rectas con la misma unidad arbitraria.*

Si el lado l del cubo C es la unidad lineal, será $l=1$, $l^3=1$, y por consiguiente $\frac{P}{C}=a\times b\times c$, que es el enunciado del teorema.

Nota. Como $b\times c$ representa el área de la base del paralelepípedo, siendo unidad de superficie una cara de la unidad de espacio [*Teor.* 92], se puede enunciar el teorema anterior en estos otros términos: *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Nota. En todas las reglas de medicion de espacios que siguen, tomaremos por unidad lineal el lado del cubo tomado por unidad de espacio; y asi evitaremos en todas ellas la division del producto de tres rectas por la tercera potencia del lado de dicho cubo.

Corolario. *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado:* pues el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales (a).

(a) De aqui viene el nombre de *cubo* que se da tambien á la tercera potencia de un número; pues dicha tercera potencia es el volúmen de un cubo cuyo lado tiene por valor dicho número.

Segun esta regla, un pie cúbico, es decir, un cubo que tiene por arista un pie lineal, tiene $12\times12\times12=1728$ pulgadas cúbicas; una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos; etc.

TEOREMA 212 (*fig.* 227).

Todo prisma oblícuo EC *es equivalente á un prisma recto* NL, *cuya altura* NI *es igual á la arista lateral* AE *del primero, y cuya base* NOPQ *es la seccion recta de este.*

En efecto, coloquemos el prisma troncado *NOPQEFGH* sobre el prisma troncado *IKLMABCD*, de modo que coincidan las bases iguales *NOPQ*, *IKLM*: la arista *NE* coincidirá entonces con la arista *IA*, pues las dos son perpendiculares al plano *IKLM* en el punto *I;* y como las dos rectas *NE* é *IA* son iguales, el punto *E* caerá sobre el punto *A*.

Del mismo modo se hace ver que los otros vértices *F*, *G*, *H* caerán sobre los *B*, *C*, *D*. Luego los poliedros *NG* é *IC*, cuyos vértices coinciden, son iguales. Restando de ambos poliedros iguales el prisma troncado *IG*, comun á los dos, los restos *NL* y *EC* tendrán el mismo volúmen, ó serán equivalentes.

TEOREMA 213 (*fig.* 228).

El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

1.° Consideremos en primer lugar el paralelepípedo recto *EC*, siendo rectángulos las cuatro caras *ADHE*, *DCGH*, *BCGF*, *ABFE*, y las otras dos *ABCD*, *EFGH* paralelógramos oblicuángulos; digo que su volúmen será el producto de su base por su altura, ya se tome por base el paralelógramo oblicuángulo *EFGH*, ó ya uno cualquiera *ABFE* de los cuatro rectángulos.

Prolongo las cuatro aristas *DC*, *AB*, *EF* y *GH* paralelas y correspondientes á los dos paralelógramos oblicuángulos, tomo en la prolongacion de una de ellas *DC* una parte $QP=DC$, y por los puntos *Q* y *P* tiro dos planos perpendiculares á dichas aristas. Siendo recto el paralelepípedo *EC*, los ángulos diedros *ADCG* ó *MQPT*, *DABE* ó *QMNR*, *AEFG* ó *MRST*, *DHGE* ó *QVTR* son rectos; y por consiguiente los ángulos *M*, *Q*, *V*, *R* correspondientes á ellos [60] son rectos: luego las caras *MQVR* y *NPTS* son rectángulos, y como además las aristas *MN*, *QP*, *RS*, *VT* son perpendiculares á estos rectángulos, el paralelepípedo *RP* es rectángulo [75]. Este paralelepípedo rectángulo es equivalente al propuesto *EC* [*Teorema* 212]; y pues el volúmen del *RP* es [*Teor.* 211, *Nota*] $RSTV \times RM$, ó $MNSR \times RV$, tambien el volúmen del *EC* será cualquiera de estos productos. Mas el rectángulo *RSTV* es equivalente al paralelógramo *EFGH*, por tener igual base y altura, y el rectángulo *MNSR* es igual al rectángulo *ABFE* por la misma razon; luego el volúmen del paralelepípedo *EC* es $EFGH \times EA$, ó $ABFE \times RV$, conforme al teorema.

2.º Supongamos ahora que el paralelepípedo *EC* sea oblicuángulo, es decir, que sus seis caras sean paralelógramos oblicuángulos: digo que su volúmen será igual al producto de su base por su altura, siendo base cualquiera de las seis caras.

Prolongo cuatro aristas paralelas, y construyo el paralelepípedo recto *RP* equivalente al propuesto [*Teor.* 212]: el volúmen del *RP* es [1.º] el producto de su base *RSTV* por su altura, que es la distancia de las caras *RSTV* y *MNPQ*; luego el paralelepípedo propuesto tendrá el mismo volúmen. Mas el rectángulo *RSTV* es equivalente al paralelógramo *EFGH*, y considerando á estos dos paralelógramos como bases, los dos paralelepípedos tienen la misma altura; luego el volúmen del paralelepípedo oblicuángulo *EC* es el producto de su base *EFGH* por su altura.

Corolario. *Dos paralelepípedos de bases equivalentes é igual altura son equivalentes.*

TEOREMA 214 (*figs.* 229 *y* 227).

El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.

Para demostrar este teorema, conviene distinguir dos casos: 1.º que el prisma triangular sea recto; 2.º que sea oblícuo.

1.er *caso.* Sea el prisma triangular recto *ABCDEF* (*figura* 229): digo que su volúmen es $DEF \times DA$.

Construyo el paralelepípedo recto *DG* de doble base é igual altura que el prisma propuesto. Este paralelepípedo se compone de los dos prismas rectos *ABCDEF* y *BCGEFH*, que tienen iguales bases é iguales alturas; luego dichos prismas son iguales [*Teor.* 156]; luego el prisma propuesto *ABCDEF* es la mitad del paralelepípedo *DG;* el volúmen en este paralelepípedo es [*Teor.* 213] $DEHF \times DA$; luego el del prisma será $\frac{1}{2}DEHF \times DA$, ó $DEF \times DA$.

2.º *caso.* Sea el prisma triangular oblícuo *ABDEFH* (*figura* 227): construyo el paralelepípedo *EC*. Los dos prismas triángulares *ABDEFH*, *BDCFGH*, de que se compone este paralelepípedo, no pueden coincidir; pues los dos ángulos triedros *C* y *E*, cuyos ángulos planos son respectivamente iguales, son simétricos, como se ve claramente construyendo el triedro simétrico del triedro *C* ó *E* [64].

Para demostrar en este caso la equivalencia de los dos prismas triangulares, prolongo las aristas *AE*, *BF*, *CG* y *DH* del paralelepípedo, y construyo el paralelepípedo recto *NL* equivalente al *EC* [*Teor.* 212]; y tiro tambien las diagonales *KM* y *OQ*.

Segun el teorema 212, el prisma recto *NM* es equivalente al oblícuo *ED*, y el prisma recto *PM* es equivalente al oblícuo *GD*: pero segun el primer caso del teorema actual, los dos prismas rectos *MN* y *PM* son iguales; luego los oblícuos *ED* y *GD*, equivalentes á ellos, serán equivalentes entre sí; luego cada uno de ellos será mitad del paralelepípedo *EC*; y pues el volúmen de este es el producto de su base *EFGH* por su altura, el volúmen del prisma triangular *ED* será el producto de su base *EFH* por su altura.

Corolarios. 1.º *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, dividiendo la base en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un vértice á los demás, y tirando planos por estas diagonales y por las aristas correspondientes, quedará el prisma descompuesto en prismas triangulares de igual altura. El volúmen de cada prisma triangular es igual al producto de su base por su altura; luego el volúmen del prisma propuesto será igual á la altura, factor comun, multiplicada por la suma de todas las bases de los prismas triangulares, ó por la base del prisma propuesto.

2.º *Dos prismas, que tienen bases equivalentes é igual altura, son equivalentes.*

3.º *Dos prismas de bases equivalentes son proporcionales á sus alturas; y si tienen alturas iguales, son entre sí como sus bases.*

TEOREMA 215 (*fig.* 230).

Dos tetraedros que tienen iguales alturas y bases equivalentes, son equivalentes.

Sean los dos tetraedros *ABCD*, *EFGH*, cuyas alturas son iguales, y cuyas bases son equivalentes: digo que estos tetraedros son equivalentes.

Coloquemos dichos tetraedros, de manera que sus bases estén sobre un mismo plano. Dividamos la altura comun *MN* en cualquier número de partes iguales, y por los puntos de division tiremos planos paralelos á las bases: las secciones correspondientes de cada uno de estos planos con los tetraedros serán equivalentes [*Teor.* 186, *Corol.*]. Considerando á estas secciones como bases, construyamos prismas esternos al primer tetraedro, y prismas internos al segundo. El primer prisma esterno *KL* y el primer interno *OP* son equivalentes, por tener bases equivalentes é igual altura [*Teorema* 214, *Corol.* 2.°]. Por la misma razon son equivalentes el segundo esterno y el segundo interno, el tercer esterno y el tercer interno, y asi sucesivamente; pero el último esterno no tiene equivalente entre los internos. Luego la diferencia entre la suma de los prismas esternos y la de los internos es el último prisma esterno, cuya base es la del tetraedro, y cuya altura es una de las partes en que se ha dividido la altura comun. Luego, si dividimos esta altura en partes suficientemente pequeñas, la diferencia entre la suma de los prismas esternos y la de los internos puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea.

Sea *E* la suma de los prismas esternos al tetraedro *ABCD*, *I* la suma de los prismas internos al tetraedro *EFGH*, es evidente que $ABCD<E$, y que $EFGH>I$.

Imaginemos ahora que tomando por bases las secciones de los tetraedros *ABCD* y *EFGH* se construyan prismas internos al tetraedro *ABCD* y esternos al tetraedro *EFGH*: los primeros serán respectivamente equivalentes á los internos del tetraedro *EFGH* [*Teor.* 219, *Corol.* 2.°], y los segundos á los esternos del tetraedro *ABCD*; luego la suma de los prismas internos al tetraedro *ABCD* será *I*, y la suma de los prismas esternos al tetraedro *EFGH* será *E*; y por tanto es claro que $ABCD>I$, y que $EFGH<E$. Los dos tetraedros

ABCD y *EFGH* están, pues, comprendidos entre las sumas variables *E* é *I*, las cuales, hemos demostrado, pueden diferenciarse en menos de cualquiera cantidad asignable; luego, segun el teorema de Arbogast, los tetraedros *ABCD* y *EFGH*, comprendidos entre dichas variables, son iguales.

TEOREMA 216 (*fig.* 231).

El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.

Sea el tetraedro *VABC*: por los puntos *A* y *C* de su base tiro dos rectas *AD* y *CE* paralelas é iguales á *BV*, y las rectas *DE*, *DV* y *VE*: tendremos un prisma *AE* que tiene la misma base y altura que el tetraedro. Este prisma se compone del tetraedro propuesto *VABC* y de la pirámide cuadrangular *VACED*.

Por los puntos *D*, *V* y *C* hago pasar un plano, que dividirá á esta pirámide en los tetraedros *VDEC* y *VDAC*, los cuales son equivalentes, porque sus bases *DEC* y *ADC* son iguales, y su altura, que es la perpendicular bajada desde el punto *V* al plano *ADEC*, es la misma. Considerando ahora que el tetraedro *VDEC* tiene su vértice en *C*, su base será el triángulo *DVE*; y por consiguiente este tetraedro es equivalente al tetraedro propuesto, pues ambos tienen bases iguales, y la misma altura, que es la del prisma *AE*; luego los tres tetraedros, de que se compone este prisma, son equivalentes; y por tanto el tetraedro propuesto es el tercio del prisma. Ahora, el volúmen del prisma es el producto de su base por su altura; luego el volúmen del tetraedro es el tercio del producto de su base por su altura.

Corolario. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

En efecto, dividiendo la base en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un vértice á los demás, y tirando planos por estas diagonales y por las aristas correspondientes, quedará la pirámide descompuesta en tetraedros, cuya altura comun será la de la pirámide: el volúmen de cada tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura; luego el volúmen de la pirámide será igual al tercio de la altura, factor comun, multiplicada por la suma de todas las bases de los tetraedros, que es la base de la pirámide.

TEOREMA 217 (*figs*. 232 *y* 233).

El volúmen de una pirámide troncada de bases paralelas es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas: es decir, que si B es la base mayor, b la menor, a la altura del tronco y V su volúmen, será

$$V=\tfrac{1}{3}a\left(B+b+\sqrt{Bb}\right).$$

Consideremos en primer lugar un tetraedro troncado $ABCDEF$ (*fig*. 232): tiro desde el vértice C las rectas CD y CE; la pirámide troncada se compone del tetraedro $CDFE$ y de la pirámide cuadrangular $CABED$: el volúmen del tetraedro $CDEF$ es evidentemente $\tfrac{1}{3}aB$. Tiro ahora la recta BD; la pirámide cuadrangular se compone de los tetraedros $CABD$ y $CBED$: el volúmen del $CABD$ es $\tfrac{1}{3}ab$. Para hallar el volúmen del $CBED$, tiro la recta CG paralela á BE, la GH paralela á DF, y además las GB y GD: el tetraedro $CBED$ es equivalente al $GBED$ ó $BDGE$, por tener la misma base DBE é igual altura, puesto que sus vértices C y G están en una recta paralela á BE, y por tanto al plano DBE [*Teor*. 118]. Ahora, siendo el triángulo EHG igual al ABC [*Teor*. 17], y teniendo los triángulos GHE y GDE las bases EH y ED en línea recta, su vértice G comun, y por consiguiente la misma altura, será [*Teor*. 94, *Corol*. 3.º],

$$b : EDG :: EH : ED.$$

Los triángulos EDG y EDF tienen las bases EG y EF en línea recta, y un mismo vértice D; luego

$$EDG : B :: EG : EF.$$

Mas, siendo semejantes los triángulos EHG y EDF, es

$$EH : ED :: EG : EF;$$

luego $$b : EDG :: EDG : B,$$

de donde $EDG=\sqrt{Bb}$. Luego el volúmen del tetraedro $BDGE$ es $\tfrac{1}{3}a\sqrt{Bb}$.

Luego el volúmen de la pirámide triangular troncada, que se compone de los tres tetraedros $CDEF$, $DABC$ y $CDEB$, ó su equivalente $BDGE$, es

$$V=\tfrac{1}{3}aB+\tfrac{1}{3}ab+\tfrac{1}{3}a\sqrt{Bb},$$

ó bien $$V=\tfrac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Sea ahora AG (*fig.* 253) una pirámide troncada cualquiera de bases paralelas, y $VABCD$ la pirámide deficiente: construyo un tetraedro $V'MNO$, cuya base MNO sea equivalente á la base mayor B de la pirámide troncada, cuya altura $V'R$ sea igual á la altura VP de la pirámide $VEFGH$. Tomo $V'S=VQ$, y tiro por el punto S un plano paralelo á la base MNO: la seccion IKL será equivalente á la base $ABCD$ [*Teor.* 186, *Corol.*], y por consiguiente $IKL=b$; ademas la altura SR del tetraedro troncado IO es igual á la $QP=a$.

Siendo equivalentes las dos pirámides $VEFGH$ y $V'MNO$, como tambien las dos $VABCD$ y $V'IKL$ [*Teor.* 216, *Corol.*], los troncos AG y LM serán equivalentes. El volúmen del LM es, segun acabamos de hallar, $\tfrac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb})$; luego el volúmen del AG es tambien $\tfrac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb})$.

NOTA. La relacion $V=\tfrac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb})$ sirve para hallar cualquiera de las cuatro cantidades V, a, B y b, dadas las otras tres.

TEOREMA 218 (*fig.* 234).

Todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros, que tienen por base comun la del prisma, y cuyos vértices son los de la otra base del prisma.

Sea el prisma triangular troncado DC: construyo los tres tetraedros $BDEF$, $ADEF$, $CDEF$, cuya base es la del prisma y cuyos vértices son los de la otra base del prisma: digo que el prisma es equivalente á la suma de estos tres tetraedros.

Desde luego el prisma se compone de los tetraedros $BDEF$, $BADF$ y $BACF$.

El tetraedro $BADF$ es equivalente al tetraedro $EADF$ ó $ADEF$, por tener la misma base ADF é igual altura, pues sus vértices están en la recta BE paralela á la base.

El tetraedro $BACF$ es equivalente al tetraedro $EDCF$ ó $CDEF$, por tener bases equivalentes CAF y CDF, é igual altura. Queda pues demostrado que el prisma troncado DC es equivalente á la suma de los tres tetraedros $BDEF$, $ADEF$ y $CDEF$.

Corolario 1.° *El volúmen de un prisma triangular troncado es igual al tercio del producto de su base por la suma de las tres perpendiculares bajadas á esta base desde los tres vértices de la otra.*

Corolario 2.° *El volúmen de un prisma troncado cualquiera se hallará descomponiéndole en prismas triangulares troncados, hallando el volúmen de cada uno, y sumando dichos volúmenes.*

Nota. El volúmen de un poliedro cualquiera se halla descomponiéndole en pirámides, hallando el volúmen de cada una, y sumando estos volúmenes.

CAPITULO V.

Volúmenes de los cuerpos redondos.

TEOREMA 219.

El volúmen V *de un cono es igual al tercio del producto de su base* B *por su altura* a.

Inscribo y circunscribo al cono dos pirámides regulares de igual número de caras; sea p el área de la base de la pirámide inscripta, P el área de la base de la pirámide circunscripta, a la altura comun del cono y de las dos pirámides: los volúmenes de dichas pirámides serán $\frac{1}{3}ap$ y $\frac{1}{3}aP$ [*Teor.* 216, *Corol.*]. Multiplicando suficientemente el número de caras de las dos pirámides inscripta y circunscripta, y por consiguiente el número de lados de sus dos bases, p se puede aproximar á P tanto como se quiera [*Lema* 3, *pág.* 100], y por consiguiente $\frac{1}{3}ap$ puede aproximarse á $\frac{1}{3}aP$ tanto como se quiera.

El volúmen V del cono se halla evidentemente comprendido entre los volúmenes $\frac{1}{3}aP$ y $\frac{1}{3}ap$ de las dos pirámides circunscripta é inscripta: tambien es claro que $\frac{1}{3}aB$ se halla comprendido entre las cantidades variables $\frac{1}{3}aP$ y $\frac{1}{3}ap$; y pues estas variables pueden diferenciarse en menos de cualquiera cantidad dada, las constantes V y $\frac{1}{3}aB$, comprendidas entre ellas, son iguales.

Nota. Siendo $V=\frac{1}{3}aB$, y $B=\pi r^2$, será $V=\frac{1}{3}\pi ar^2$, relacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades V, a y r, dadas las otras dos.

TEOREMA 220 (*fig.* 235).

El volúmen de un cono troncado de bases paralelas es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.

Sea $ABCD$ el cono troncado de bases paralelas, VAB el cono deficiente, V el volúmen del cono troncado, a su altura PO, B y b sus bases CD y AB; $\sqrt{Bb}$ será la media proporcional entre dichas bases: digo que

$$V=\tfrac{1}{3}a\left(B+b+\sqrt{Bb}\right).$$

Sea $V'MNQ$ un tetraedro de base equivalente é igual altura que el cono; tomo $V'K=VP$, y por el punto K tiro un plano paralelo á la base MNQ; la seccion RST que resulta, será equivalente á la base AB del cono (se demuestra del mismo modo que el *Corolario del Teor.* 186), y la altura $KH=PO=a$. El tetraedro $V'MNQ$ y el cono VCD son equivalentes [*Teors.* 216 *y* 219], é igualmente el tetraedro $V'RST$ y el cono VAB son equivalentes; luego la pirámide troncada $RSTMNQ$ y el cono troncado $ABCD$ serán equivalentes.

El volúmen de la pirámide troncada es [*Teor.* 217]

$$V=\tfrac{1}{3}KH\left(RST+MNQ+\sqrt{RST\times MNQ}\right);$$

luego el volúmen del cono troncado será esta misma cantidad; y reemplazando la altura y las bases por sus valores a, B y b, resulta

$$V=\tfrac{1}{3}a\left(B+b+\sqrt{Bb}\right).$$

NOTA. Si R y r son los radios de las dos bases, será $B=\pi R^2$, $b=\pi r^2$, y por consiguiente $\sqrt{Bb}=\pi Rr$; luego

$$V=\tfrac{1}{3}\pi a(R^2+r^2+Rr),$$

relacion por medio de la cual se puede hallar cualquiera de las cuatro cantidades V, a, R y r, dadas las otras tres.

TEOREMA 221.

El volúmen V *de un cilindro es igual al producto de su base* B *por su altura* a.

Inscribo y circunscribo al cilindro dos prismas regulares de igual número de caras; sea p la área de la base del prisma inscripto, P la de la base del prisma circunscripto, a la altura comun al cilindro y á los dos prismas: los volúmenes de los dos prismas regulares inscripto y circunscripto á dicho cilindro serán [*Teor.* 214, *Corol.*] pa y Pa. Está demostrado [*Lema* 3, *pág.* 100] que multiplicando suficientemente el número de lados de los polígonos regulares semejantes inscripto y circunscripto á la base del cilindro, p se puede aproximar á P tanto como se quiera; luego la variable ap puede aproximarse á la variable aP tanto como se quiera. El volúmen V del cilindro está evidentemente comprendido entre los volúmenes ap y aP de los dos prismas inscripto y circunscripto; y tambien es claro que aB está comprendido entre ap y aP; luego, segun el teorema de Arbogast, $V=aB$.

NOTA. Si r es el radio de la base del cilindro, será $B=\pi r^2$; luego $V=\pi r^2 a$, relacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades V, r y a, dadas las otras dos.

TEOREMA 194 (*figs.* 236, 237 *y* 238) (a).

Si un triángulo ABC *gira al rededor de una recta* MN *esterior á él, y que pasa por su vértice* A *en su plano, el volúmen del espacio que engendra dicho triángulo es igual á la área de la superficie descrita por la base* BC *multiplicada por el tercio de su altura* AD.

Pueden suceder tres casos: 1.° que uno de los lados del triángulo coincida con el eje, 2.° que la base prolongada encuentre al eje, 3.° que la base sea paralela al eje.

Primer caso (*fig.* 236). Consideremos en primer lugar el triángulo ABC (*fig.* 1), en que los ángulos A y C adyacentes al lado que coincide con el eje sean agudos: bajo desde el vértice B una perpendicular BE al eje MN; esta perpendicular caerá dentro del triángulo ABC. El cuerpo descrito por el triángulo ABC, en su movimiento, se compone de los dos conos descritos por los dos triángulos ABE y CBE, cuyos volú-

(a) Preparatorio para llegar al volúmen del sector esférico.

menes son [*Teor*. 219] $\frac{1}{3}AE\times\pi BE^2$ y $\frac{1}{3}CE\times\pi BE^2$; luego el volúmen del espacio engendrado por el triángulo ABC será

$$\tfrac{1}{3}AE\times\pi BE^2+\tfrac{1}{3}CE\times\pi BE^2=\tfrac{1}{3}(AE+CE)\pi BE^2= \tfrac{1}{3}AC\times\pi BE^2 \quad [1].$$

Ahora, los productos $AC\times BE$, $BC\times AD$ son iguales, por que cada uno es doble del área del triángulo ABC; luego, sustituyendo en la espresion [1] en vez de $AC\times BE$ su igual $BC\times AD$, el volúmen en cuestion será

$$\tfrac{1}{3}AD\times\pi BE.BC;$$

y pues $\pi BE.BC$ es [*Teor*. 195] el área de la superficie cónica descrita por la base BC, queda demostrado el teorema.

Supongamos ahora que uno de los ángulos A adyacente al lado AC sea recto (*fig*. 2): el triángulo ABC describirá un cono, cuyo volúmen es $\frac{1}{3}AC\times\pi AB^2$; y como $AC\times AB=BC\times AD$, el volúmen de dicho cono será $\frac{1}{3}AD\times BC.\pi AB$, conforme al enunciado del teorema.

Supongamos finalmente que uno de los ángulos A (*fig*. 3) adyacente al lado AC sea obtuso, en cuyo caso la perpendicular BE caerá fuera del triángulo. El cuerpo descrito por el triángulo ABC es la diferencia de los cuerpos descritos por los triángulos BEC y BEA, cuyos volúmenes son $\frac{1}{3}EC\times\pi BE^2$ y $\frac{1}{3}EA\times\pi BE^2$; luego el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo ABC será $\frac{1}{3}AC\times\pi BE^2$; y sustituyendo en lugar de $AC\times BE$ su igual $BC\times AD$, dicho volúmen será

$$\tfrac{1}{3}AD\times BC.\pi BE.$$

Segundo caso. Si la base BC (*fig*. 237) prolongada encuentra al eje en E, el cuerpo descrito por el triángulo ABC es la diferencia de los cuerpos descritos por los dos triángulos ABE y ACE, que se hallan en el primer caso: los volúmenes de estos cuerpos (llamando A y A' á las áreas de las superficies descritas por los lados BE y CE) son $\frac{1}{3}AD\times A$ y $\frac{1}{3}AD\times A'$; luego el volúmen pedido será

$$\tfrac{1}{3}AD\times A-\tfrac{1}{3}AD\times A'=\tfrac{1}{3}AD(A-A');$$

y como $A-A'$ es la área descrita por el lado BC, queda demostrado el teorema.

Tercer caso. (*fig*. 238). Consideremos en primer lugar el triángulo ABC (*fig*. 1), en que un ángulo B de la base es recto. El cuerpo engendrado por dicho triángulo es la diferencia entre el cilindro engendrado por el rectángulo $ABCE$ y el cono engendrado por el triángulo ACE; y como el volúmen de este cono es [*Teors.* 219 *y* 221] el tercio del volúmen del cilindro, el volúmen del cuerpo en cuestion será $\frac{2}{3}$ del volúmen del cilindro; es decir, $\frac{2}{3}BC\times\pi AB^2=\frac{1}{3}AB\times BC.2\pi AB$, conforme al enunciado del teorema.

Si los ángulos B y C de la base son agudos (*fig.* 2), el cuerpo descrito por el triángulo ABC se compondrá de los dos cuerpos descritos por los dos triángulos rectángulos ABD y ACD, cuyos volúmenes (llamando A y A' á las áreas de las superficies cilíndricas descritas por los lados BD y DC) son, segun acabamos de demostrar,

$$\tfrac{1}{3}AD\times A \text{ y } \tfrac{1}{3}AD\times A';$$

luego el volúmen pedido será

$$\tfrac{1}{3}AD\times A+\tfrac{1}{3}AD\times A'=\tfrac{1}{3}AD(A+A').$$

Si uno de los ángulos B de la base (*fig.* 3) es obtuso, el volúmen del cuerpo descrito por el triángulo ABC es la diferencia de los volúmenes de los cuerpos descritos por los triángulos ACD y ABD, que son $\frac{1}{3}AD\times A$ y $\frac{1}{3}AD\times A'$, siendo A y A' las áreas de las superficies cilíndricas descritas por los lados CD y BD; luego el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo ABC es $\frac{1}{3}AD\times A-\frac{1}{3}AD\times A'=\frac{1}{3}AD(A-A')$.

Corolario. *Si un sector poligonal* OABCD (fig. 222) *gira al rededor de uno de sus radios* OA, *el volúmen del espacio engendrado por dicho sector es igual á la área descrita por la base* ABCD *multiplicada por el tercio de la apotema* OH: pues llamando A, A', A'' á las áreas de las superficies descritas por los lados AB, BC, CD, los volúmenes de los cuerpos descritos por los triángulos OAB, OBC, OCD serán $\frac{1}{3}A\times OH$, $\frac{1}{3}A'\times OH$, $\frac{1}{3}A''\times OH$; luego el volúmen pedido será $\frac{1}{3}OH(A+A'+A'')$; luego etc.

100. Se llama *sector esférico* el cuerpo engendrado por un sector circular, que gira al rededor de uno de sus dos radios.

TEOREMA 223 (*fig.* 223).

El volúmen V *de un sector esférico es igual al producto de la área* Z *de la zona correspondiente por el tercio del radio.*

Sea *Oad* el sector circular, que girando al rededor del radio *Oa* engendra al sector esférico, al mismo tiempo que el arco *ad* engendra á la zona correspondiente. Inscribamos y circunscribamos á dicho sector circular dos sectores poligonales *OABCD*, *oabcd*, cuyas bases *ABCD*, *abcd* tengan igual número de lados: los volúmenes de los cuerpos engendrados por estos dos sectores poligonales serán (llamando R y r á las apotemas de los sectores poligonales, A y a á las áreas de las superficies descritas por sus bases) $\frac{1}{3}RA$, $\frac{1}{3}ra$. Multiplicando suficientemente el número de lados de las bases de los dos sectores, r se puede aproximar á R tanto como se quiera, y al mismo tiempo a se puede aproximar á A tanto como se quiera [*Lema* 5, *pág.* 178]; luego las cantidades variables $\frac{1}{3}RA$ y $\frac{1}{3}ra$ pueden llegar á diferenciarse en menos de cualquiera cantidad. El volúmen V del sector esférico está evidentemente comprendido entre los volúmenes $\frac{1}{3}ra$ y $\frac{1}{3}RA$ de los cuerpos engendrados por los dos sectores poligonales: tambien $\frac{1}{3}RZ$ está comprendido entre $\frac{1}{3}ra$ y $\frac{1}{3}RA$, puesto que Z está [*Lema* 4, *pág.* 177] comprendida entre a y A; luego, segun el teorema de Arbogast,

$$V=\tfrac{1}{3}RZ.$$

TEOREMA 224.

El volúmen de una esfera es igual al producto de su área por el tercio del radio.

En efecto, la esfera se compone de dos sectores esféricos, cuyas zonas correspondientes componen la superficie de la esfera; luego, si Z y Z' son las áreas de dichas zonas, los volúmenes de los sectores esféricos serán $\frac{1}{3}RZ$ y $\frac{1}{3}RZ'$, y por consiguiente el volúmen de la esfera será $\frac{1}{3}R(Z+Z')$; luego, etc.

NOTA. Sea V el volúmen de la esfera, será $V=\frac{1}{3}R\times4\pi R^2$, ó $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, relacion que puede servir para hallar V conociendo R, y al contrario.

La espresion que acabamos de hallar para el volúmen de la esfera, puede escribirse asi: $V=2R\times\frac{2}{3}\pi R^2$; es decir, *el volúmen de una esfera es igual á su diámetro multiplicado por los $\frac{2}{3}$ del círculo máximo*; enunciado análogo al del área de la esfera.

Corolario. *El volúmen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volúmen del ci-*

lindro circunscripto: pues el volúmen de este cilindro es $2R\times\pi R^2 = 2\pi R^3$; y es evidente que el volúmen $\frac{4}{3}\pi R^3$ de la esfera es $\frac{2}{3}$ de $2\pi R^3$.

101. Se llama *segmento esférico* el espacio comprendido dentro de una zona y del plano ó de los planos que la terminan. El segmento tendrá una ó dos bases, si la zona correspondiente tiene una ó dos bases.

Para hallar el volúmen de un segmento esférico CAB (*figura* 239) de una base, menor que un hemisferio, se hallarán los volúmenes del sector $OACB$ y cono OAB correspondientes, y se restarán. Si el segmento esférico CDE es mayor que un hemisferio, se sumarán los volúmenes del sector $OAFB$ y cono OAB correspondientes.

El volúmen de un segmento esférico $ABDE$ de dos bases es la diferencia de los volúmenes de los dos segmentos esféricos correspondientes de una base CDE y CAB.

CAPITULO VI.

Comparacion de los volúmenes.

TEOREMA 225.

Los volúmenes de los poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.

Consideremos en primer lugar dos pirámides semejantes: sean B y b sus bases, A y a sus alturas; tendremos [*Teorema* 186]

$$B : b :: A^2 : a^2.$$

Tambien $\frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a :: A : a$;

luego $\frac{1}{3}AB : \frac{1}{3}ab :: A^3 : a^3$;

es decir, los volúmenes de las pirámides son proporcionales á los cubos de sus alturas: y pues las alturas son proporcionales á dos aristas homólogas cualesquiera [*Teorema* 186, *Nota*], se infiere que los volúmenes de dichas pirámides son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.

Consideremos ahora dos poliedros semejantes cualesquiera: sabemos [*Teor.* 187, *Recíp.*] que dichos poliedros se componen de tetraedros dispuestos del mismo modo y respectivamente semejantes. Sean T, T', T'', etc. los tetraedros que componen el primer poliedro, t, t', t'', etc. los que componen el segundo, respectivamente semejantes á los del primero; sean A y a dos aristas homólogas de los tetraedros T y t, A' y a' dos aristas homólogas de los tetraedros T' y t', A'' y a'' dos aristas homólogas de los tetraedros T'' y t'', etc.: tendremos, segun se acaba de demostrar,

$$\left.\begin{array}{l} T : t :: A^3 : a^3, \\ T' : t' :: A'^3 : a'^3, \\ T'' : t'' :: A''^3 : a''^3, \end{array}\right\}[1].$$
etc.

Sabemos, [*Teor.* 188] que

$$A : a :: A' : a' :: A'' : a'', \text{ etc.};$$

y por consiguiente [*Aritm.* 171, *Corol.*]

$$A^3 : a^3 :: A'^3 : a'^3 :: A''^3 : a''^3, \text{ etc.};$$

luego las segundas razones de las proporciones [1] son iguales; luego las primeras son tambien iguales. Por consiguiente [*Aritm.* 175]

$$T + T' + T'' + \text{etc.} : t + t' + t'' + \text{etc.} :: A^3 : a^3;$$

luego etc.

TEOREMA 226.

Los volúmenes de los conos semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, á los cubos de sus alturas, ó á los cubos de sus lados.

Sean R y r los radios de las bases de los dos conos semejantes, L y l sus lados, A y a sus alturas, $\frac{1}{3}\pi R^2 A$ y $\frac{1}{3}\pi r^2 a$ serán los volúmenes de los dos conos: digo que

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 A : \tfrac{1}{3}\pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3.$$

Siendo semejantes los triángulos generadores de los dos conos [101], es

$$A : a :: R : r.$$

Tambien $\frac{1}{3}\pi R^2 : \frac{1}{3}\pi r^2 :: R^2 : r^2$;

luego $\frac{1}{3}\pi R^2 A : \frac{1}{3}\pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$.

TEOREMA 227.

Los volúmenes de los cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, ó á los cubos de sus alturas.

Llamando R y r á los radios de las bases de los cilindros, A y a á sus alturas; $\pi R^2 A$ y $\pi r^2 a$ serán los volúmenes de dichos cilindros [*Teor.* 211]; digo que

$$\pi R^2 A : \pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3.$$

En efecto, por ser semejantes los rectángulos generadores de los los cilindros [102], es

$$A : a :: R : r.$$

Tambien $\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2$;

luego $\pi R^2 A : \pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3$.

TEOREMA 128.

Los volúmenes de las esferas son proporcionales á los cubos de sus radios: pues si R y r son los radios de las dos esferas, $\frac{4}{3}\pi R^3$ y $\frac{4}{3}\pi r^3$ son sus volúmenes [*Teor.* 224, *Nota*]; y es evidente que

$$\frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 :: R^3 : r^3.$$

PROBLEMA 54 (*fig.* 240).

Dada la arista VA=a *de un tetraedro regular* VABC, *hallar su volúmen* V.

Tomemos por base una cara cualquiera ABC, y bajemos la altura VO del tetraedro regular, la cual caerá en el centro O del triángulo equilátero ABC [69, 2.°]: tendremos [*Teor.* 216],

$$V = \frac{1}{3} VO \times ABC.$$

Para hallar VO, observaremos que esta recta es un cateto del triángulo VAO rectángulo en O; luego, segun el teorema de Pitágoras, tendremos

$$VO=\sqrt{a^2-AO^2};$$

y como [*Teor.* 80] $\frac{a^2}{AO^2}=3$, y por consiguiente $AO^2=\frac{a^2}{3}$, será

$$VO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para hallar el área del triángulo ABC, prolongo el radio AO, hasta que encuentre en P al lado BC, al cual es perpendicular [*Teor.* 24], y tendremos

$$ABC=\frac{a}{2}\times AP;$$

pero en el triángulo rectángulo ABP es

$$AP=\sqrt{a^2-BP^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3};$$

luego $$ABC=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Por consiguiente

$$V=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

ó $$V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2},$$

relacion que tambien puede servir para hallar a conociendo V.

NOTA I.

SOBRE LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

1. En la geometría existen tres clases de problemas: 1.° problemas *gráficos*, es decir, problemas en que hay que ejecutar alguna construccion por medio de la regla y el compás, como son los problemas 1, 2, 3..... 35; 41, 42..... 50; 2.° problemas *generales numéricos*, es decir, problemas en que se quiere hallar la ecuacion que liga á varias cantidades geométricas, ó lo que es igual, la relacion que hay entre dichas cantidades, como son los problemas 36, 37, 38, 39, 40, 51, 52, 53 y 54; 3.° problemas *particulares numéricos*, esto es, casos particulares de los problemas generales, como son los ejemplos de las páginas 92, 101, 110, 182 y 184.

2. En la resolucion de los problemas gráficos pueden seguirse dos métodos: el primero, llamado método *analítico*, consiste en suponer que el problema está resuelto, haciendo un croquis de la construccion que se pide, y en llegar por medio de este croquis á la construccion desconocida; lo que se conseguirá con tanta mayor facilidad, cuanto mejor se sepan los teoremas de la geometría.

El segundo método, llamado método *sintético*, consiste en ejecutar desde luego la construccion, y en demostrar despues que dicha construccion satisface al problema. Segun esto, el método sintético solo puede seguirse en problemas cuya solucion se conoce; pero en un problema nuevo, ó en un problema cuya solucion se ignora, hay que seguir, y se sigue naturalmente, el método analítico.

Nosotros hemos seguido el método sintético en la esposicion de los problemas gráficos.

3. En la resolucion de los problemas generales numéricos pueden seguirse tambien ambos métodos.

Para seguir el método analítico, se supone el problema resuelto, y se halla en consecuencia la relacion pedida.

Hemos seguido este método en los problemas generales numéricos [1], que hemos nombrado en el número 1 de esta nota.

Para seguir el método sintético en estos problemas, se enuncia un teorema en que se fija la relacion que hay entre las cantidades en cuestion, relacion que por lo tanto debe ser conocida, y se demuestra luego que dicha relacion es cierta.

Por ejemplo, si se quisiera esponer sintéticamente el problema 36, se enunciaria el teorema siguiente:

El lado de un polígono regular circunscripto es igual al producto del radio por el lado del polígono semejante inscripto, dividido por la raiz cuadrada de la diferencia de cuadrados del radio y de la mitad de este lado.

Seguiria la demostracion del mismo modo que en la resolucion analítica de dicho problema.

Asi pues, todo problema general numérico puede considerarse como teorema; y al contrario, todo teorema que dé una relacion entre cantidades, puede esponerse como problema general numérico.

Para que se acabe de comprender esta transformacion de teoremas en problemas y al contrario, se observará que los teoremas 81, 82, 83 y 84 suelen esponerse comunmente en forma de problemas.

Tambien los problemas y teoremas gráficos pueden transformarse en teoremas y problemas; pero en general es poco conveniente esta transformacion.

4. Para resolver un problema particular numérico, se despeja la incógnita en la ecuacion del problema general en que está comprendido el problema particular, y en seguida se ejecutan las operaciones numéricas indicadas por el valor de la incógnita.

Ejemplos. 1.° *Hallar el radio de una esfera, cuyo volúmen es 10000 pies cúbicos.*

Despejando R en la relacion $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ [*Teor.*224], tendré

$$R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Reemplazando ahora V por su valor particular 10000, será

$$R=\sqrt[3]{\frac{3\times2500}{\pi}}.$$

2.° *Hallar el radio de la base mayor de un cono troncado de bases paralelas, cuyo volúmen, altura y radio de la base menor son respectivamente* 10000 *pies cúbicos,* 10 *pies,* 5 *pies.*

En la relacion $V=\frac{\pi a}{3}(R^2+r^2+Rr)$

hallada [*Teor.* 220] son conocidas las cantidades V, a y r, y la incógnita es R; por consiguiente hay que resolver una ecuacion completa de segundo grado [*Alg.* 171].

Tendremos $\frac{3V}{\pi a}=R^2+r^2+Rr$ [1];

$$R^2+Rr=\frac{3V}{\pi a}-r^2,$$

$$R=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{3V}{\pi a}-\frac{3r^2}{4}}.$$

De estos dos valores el segundo es negativo, y por consiguiente no corresponde al problema. El primero es real y positivo; pues la ecuacion [1] nos dice que $\frac{3V}{\pi a}$ es mayor que r^2, y con mayor razon que $\frac{3r^2}{4}$; y tambien, segun la misma ecuacion, $\frac{3V}{\pi a}-\frac{3r^2}{4}>\frac{r^2}{4}$; luego $\sqrt{\frac{3V}{\pi a}-\frac{3r^2}{4}}>\frac{r}{2}$; luego el primer valor de R es real y positivo.

Si siendo los datos arbitrarios, se diera á r un valor tal que el radical fuese imaginario, ó que el radical, siendo real, fuese menor que $\frac{r}{2}$, el valor de R saldria imaginario ó negativo; y esto daria á entender que el problema particular era imposible, á causa de la incompatibilidad de los datos.

En el problema particular propuesto tendremos $V=10000$, $a=10$, $r=5$; sustituyendo estos valores en el valor de R, resulta:

$$R=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{30000}{\pi . 10}-\frac{75}{4}},$$

ó

$$R=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{3000}{\pi}-\frac{75}{4}}.$$

NOTA II.

SOBRE EL CONO Y CILINDRO OBLICUOS.

Cono oblicuo.

5 Se llama superficie *cónica* la superficie engendrada por una recta indefinida que pasa siempre por un punto dado, y recorre una curva cualquiera.

El punto dado, la curva dada y la recta movible se llaman respectivamente *centro*, *directriz* y *generatriz* de la superficie cónica.

La superficie cónica se compone de dos superficies separadas por el centro, las cuales se llaman *hojas* de la superficie cónica.

Se llama superficie cónica *circular* la superficie cónica cuya directriz es una circunferencia.

6. Si solo consideramos una hoja de la superficie cónica circular, el espacio comprendido dentro de la hoja y el plano de la directriz se llama *cono*, el centro y el círculo correspondiente á la directriz toman los nombres de *vértice* y *base* del cono.

Eje del cono es la recta tirada desde el vértice al centro de la base.

El cono es *recto*, si el eje es perpendicular á la base; y *oblícuo*, si el eje es oblícuo á la base.

El cono recto y el cono engendrado por un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de los catetos [78] son uno mismo, si la generatriz y la base del primero son iguales al lado y base del segundo; pues colocados uno sobre otro, de modo que coincidan las dos bases, los ejes de ambos coincidirán tambien [*Teor.* 108]; y como estos dos ejes son iguales [*Teor.* 19], los dos vértices coincidirán; y por tanto los dos conos coinciden.

Segun esto, el cuerpo redondo llamado cono es un cono recto.

TEOREMA.

Toda seccion paralela á la base de un cono oblícuo es un círculo, cuyo centro está en el eje.

Se demuestra del mismo modo que el teorema 161 su análogo en el cono recto.

7. La definicion del plano tangente á un cono oblícuo es la misma que la del plano tangente á un cono recto [79].

TEOREMA.

Todo plano que pasa por una generatriz del cono oblícuo y por la tangente á la base en el pie de dicha generatriz, es tangente á dicho cono.

Recíproco. *Todo plano tangente á un cono oblícuo corta al plano de la base por una recta tangente á dicha base.*

Corolario. *Por un punto de la superficie lateral del cono oblícuo no se puede tirar mas que un plano tangente á dicho cono.*

Estos tres teoremas se demuestran del mismo modo que sus análogos en el cono recto.

8. La área de la superficie lateral de un cono oblícuo no puede hallarse en la geometría elemental.

9. El volúmen de un cono oblícuo entero ó troncado se halla por las mismas reglas que los volúmenes de los conos rectos entero y troncado; y se demuestran las reglas tambien del mismo modo.

10. Si en un triángulo VAB (*fig.* 241) se tira una recta CD que forme con dos lados del triángulo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados; es decir, el ángulo $VCD = B$, y por consiguiente el $VDC = A$, dicha recta CD se llama *antiparalela* á la base AB del triángulo.

En un cono oblícuo VAB se llama seccion *principal* el triángulo VAB que pasa por el eje, y es perpendicular á la base AB [*Teor.* 137].

Fundándose en los teoremas 135 y 113, se demuestra fácilmente que la seccion principal de un cono oblícuo pasa por las dos generatrices máxima y mínima de dicho cono.

Si en un cono oblícuo *VAB* se tira por una recta *CD* antiparalela á la base de la seccion principal un plano *CGD* perpendicular á esta seccion, la interseccion *CGD* de dicho plano y el cono se llama seccion *antiparalela* á la base.

TEOREMA.

La seccion CGD *antiparalela á la base de un cono oblícuo* VAB *es un círculo.*

Por un punto cualquiera *G* de la curva *CGD* tiremos un plano paralelo á la base del cono, y por consiguiente perperndicular á la seccion principal; la curva *EGF* será media circunferencia [5, *Teor.* 1.°]. Siendo los dos planos *EFG* y *CGD* pependiculares al *VAB*, su interseccion *GH* será [*Teorema* 136] perpendicular al *VAB*, y por consiguiente [47] á las rectas *EF* y *CD* que pasan por su pie *H* en el plano *VAD*.

Siendo *GH* perpendicular á *EF*, tendremos [*Teor.* 67, *Corolario*]

$$GH^2 = EH \times HF.$$

Los triángulos *EHC* y *DHF* son semejantes, pues el ángulo $CEH = VAB = HDF$, y tambien los ángulos en *H* son iguales; luego

$$EH : HD :: CH : HF,$$

de donde $EH \times HF = HD \times CH;$

luego $GH^2 = HD \times CH.$

Sea *O* el punto medio de la recta *CD*, será $HD = OD + OH$, y $CH = CO - OH = OD - OH$; luego

$$GH^2 = (OD + OH)\,(OD - OH) = OD^2 - OH^2;$$

pero por el teorema de Pitágoras

$$GH^2 = FG^2 - OH^2;$$

luego $OG = OD;$

es decir, que el punto *G* dista de *O* lo mismo que los *D* y *C*; y como lo que acabamos de demostrar del punto *G* puede demostrarse de otro punto cualquiera de la curva *CGD*, se infiere que esta curva tiene todos sus puntos en un plano y á igual distancia de un punto interior; luego dicha curva es una circunferencia.

Cilindro oblícuo.

11. Se llama superficie *cilíndrica* la superficie engendrada por una recta indefinida que, conservándose siempre paralela á sí misma, recorre una curva cualquiera.

La curva dada y la recta movible se llaman *directriz* y *generatriz* de la superficie cilíndrica.

Se llama superficie cilíndrica *circular* la superficie cilíndrica cuya directriz es una circunferencia.

TEOREMA.

Todo plano paralelo á la directriz de una superficie cilíndrica circular da una circunferencia igual á la directriz en su interseccion con la superficie cilíndrica.

Tirando por el centro de la directriz una paralela á la generatriz, y por esta paralela y varias generatrices planos, se demostrará el teorema, como se demostró el 163.

12. Se llama *cilindro* el espacio *ABMN* (*fig.* 242) comprendido entre la superficie cilíndrica circular, el plano de la directriz y un plano paralelo á esta.

Bases del cilindro son los dos círculos que le terminan.

Eje del cilindro es la recta que une los centros de las dos bases.

Cilindro *recto* es aquel cuyo eje es perpendicular á la base; y *oblícuo* es aquel cuyo eje es oblícuo á la base.

El cilindro recto y el cilindro engendrado por un rectángulo que gira al rededor de uno de sus lados [80] son uno mismo, si el eje y la base del primero son iguales al eje y base del segundo; pues colocados uno sobre otro de modo que sus bases coincidan, los ejes coincidirán [*Teor.* 110]; y como estos ejes son iguales, los centros de las otras dos bases coincidirán; luego las otras dos bases coincidirán tambien, y por tanto los dos cilindros coinciden.

Segun esto, el cuerpo redondo llamado cilindro es un cilindro recto.

13. La definicion del plano tangente al cilindro oblícuo es la misma que la del plano tangente al cilindro recto.

TEOREMA.

Todo plano que pasa por una generatriz del cilindro oblícuo y por la tangente á la base en el pie de dicha generatriz, es tangente al cilindro.

Recíproco. *Todo plano tangente á un cilindro oblícuo corta al plano de la base par una recta tangente á dicha base.*

Corolario. *Por un punto de la superficie lateral del cilindro oblícuo no se puede tirar mas que un plano tangente á dicho cilindro.*

Estos tres teoremas se demuestran del mismo modo que sus análogos en el cilindro recto.

14. *El área lateral de un cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz por la circunferencia de su seccion recta.*

Este teorema se puede demostrar, separando los dos cilindros troncados, y juntándolos por sus dos bases; en cuyo caso resulta un cilindro recto de bases elípticas, cuya área lateral es el producto de su altura (generatriz del propuesto) por la circunferencia de su base; lo que se demuestra como el teorema 197. Mas como la rectificacion de una elipse depende del cálculo integral, se puede decir que la geometría elemental no da medios para medir la superficie lateral de un cilindro oblícuo.

El volúmen de un cilindro oblícuo se halla por la misma regla que el volúmen del cilindro recto, y se demuestra la regla tambien del mismo modo.

Si en un paralelógramo $MABN$ se tira una recta CD, que forme con los lados MA y NB del paralelógramo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados; es decir, el ángulo $MCD=B$, y por consiguiente el ángulo $CDN=A$, dicha recta se llama *antiparalela* á la base AB del paralelógramo.

En un cilindro oblícuo $MABN$ se llama *seccion principal* el paralelógramo $MABN$ que pasa por el eje y es perpendicular á la base [*Teor.* 137].

Si en un cilindro oblícuo AN se tira por una recta CD antiparalela á la base de la seccion principal un plano CGD perpendicular á esta seccion, la interseccion CGD de dicho plano y el cilindro se llama seccion *antiparalela* á la base.

TEOREMA.

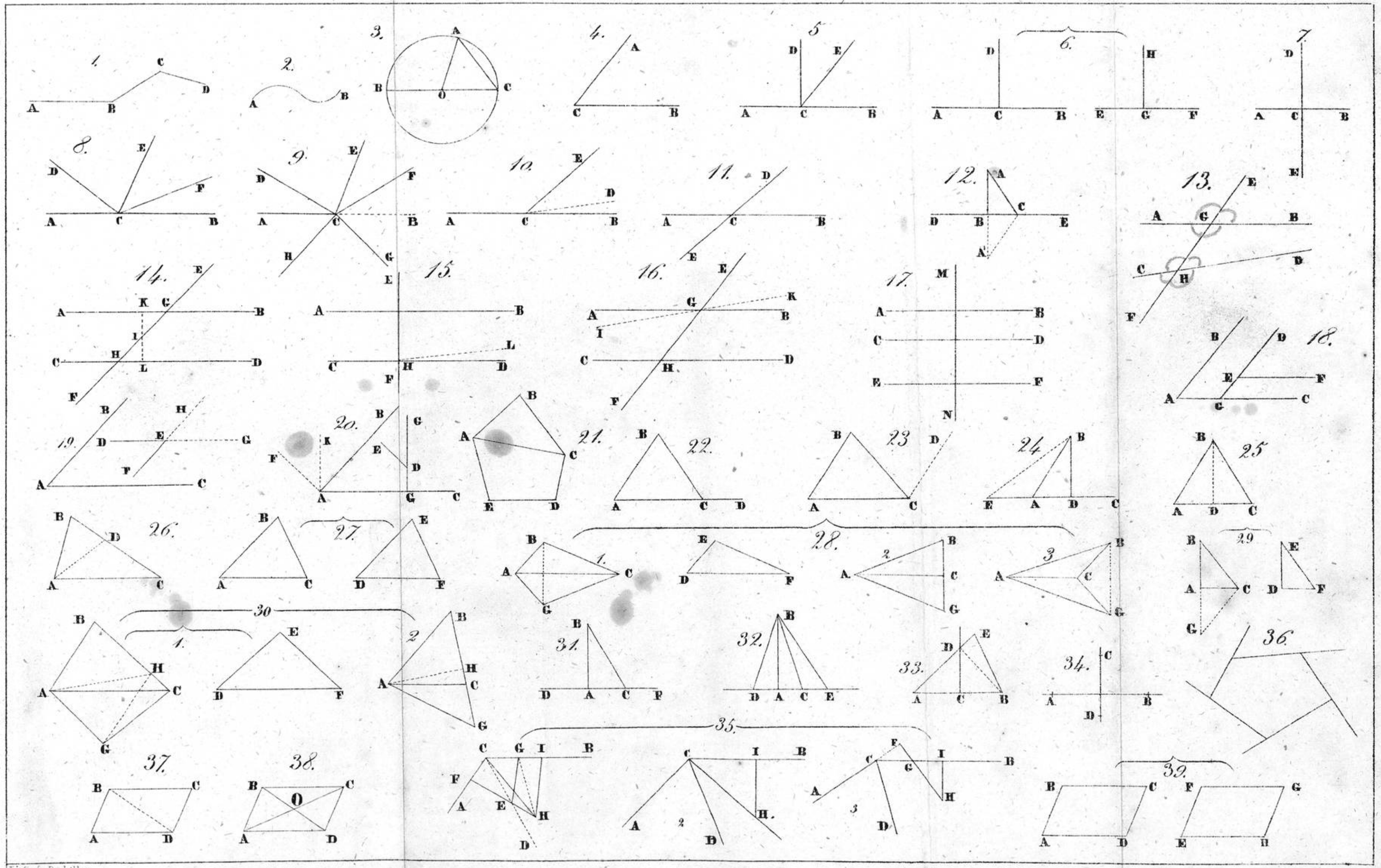
La seccion CGD *antiparalela á la base de un cilindro oblícuo es un círculo.*

Se demuestra este teorema de un modo análogo al que se ha seguido en la demostracion del teorema correspondiente del cono oblícuo; pero con alguna mayor facilidad, en atencion á que $CH=EH$, y $HD=HF$.

ERRATAS.

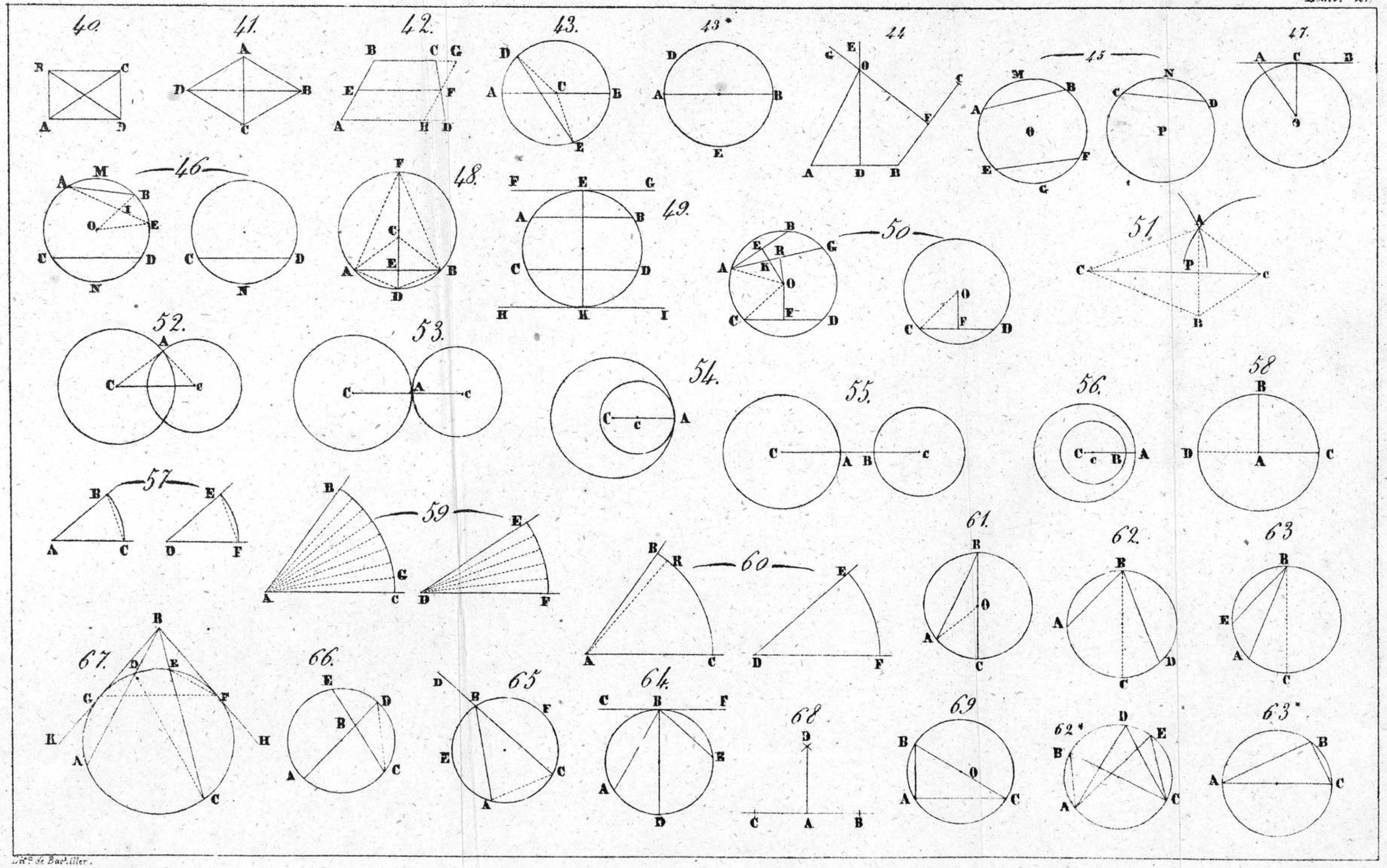
Pag.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
21	16	AC	AE
23	15 y 24	ABC	ACB
55	12	EC	FC
Id.	24	FG	FC
81	22	$\frac{C}{R'}$	$\frac{C}{R}$
112	1	uno	una

En la figura 132 falta una E en la parte inferior del círculo.
En la figura 152 falta la línea EB.

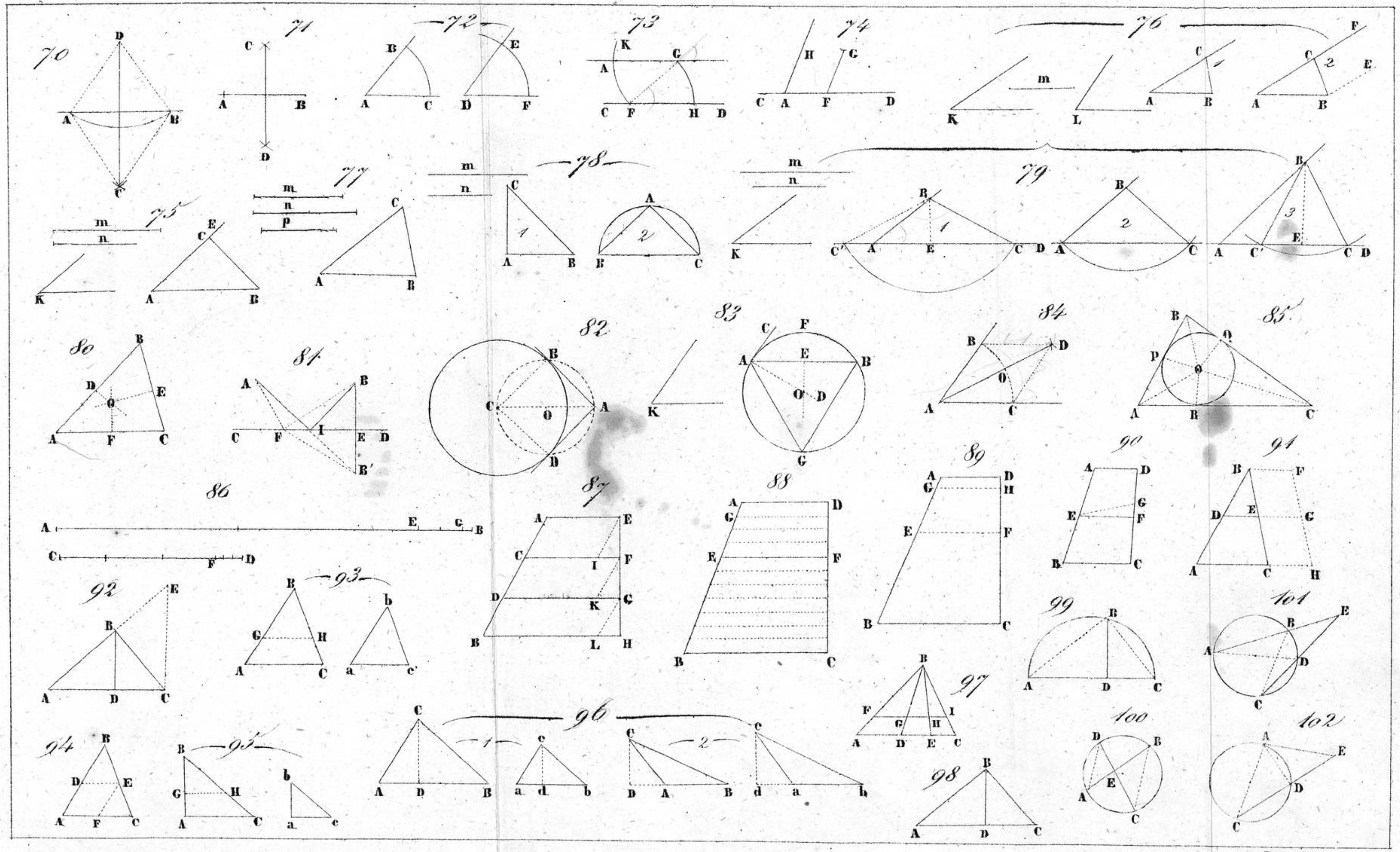


Litª de Bachiller.

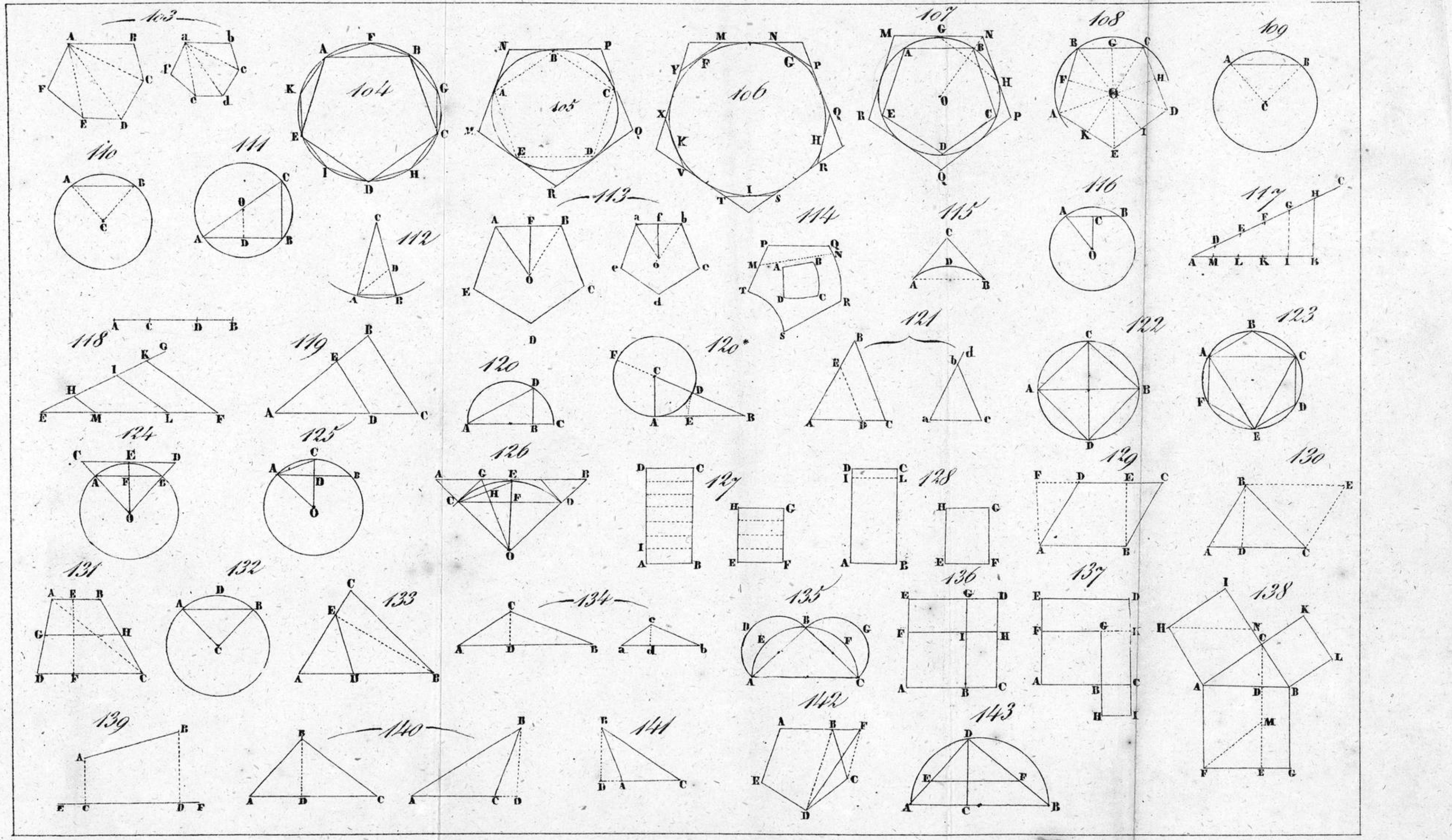
cóncavos
convexos



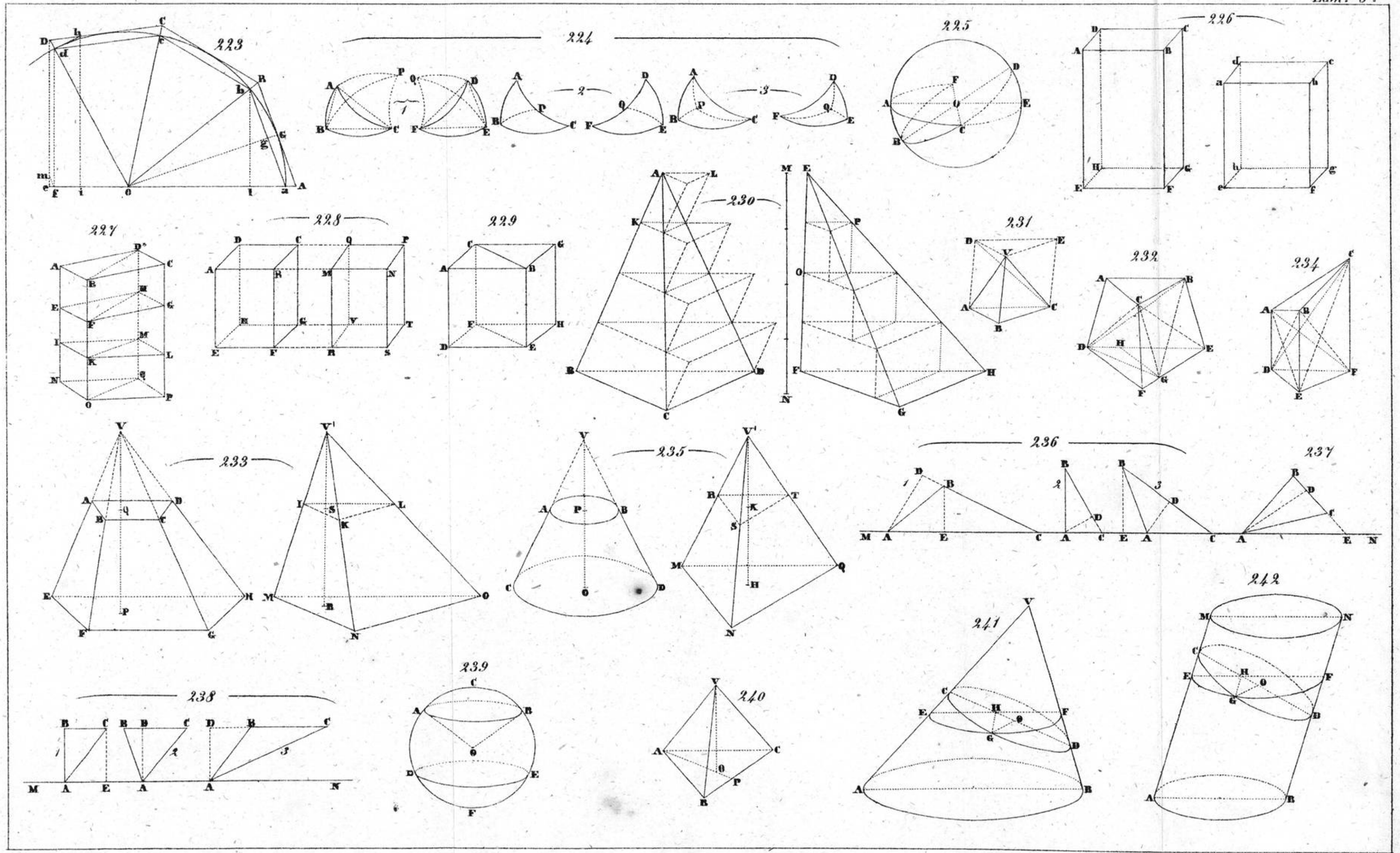
Litª de Bachiller.



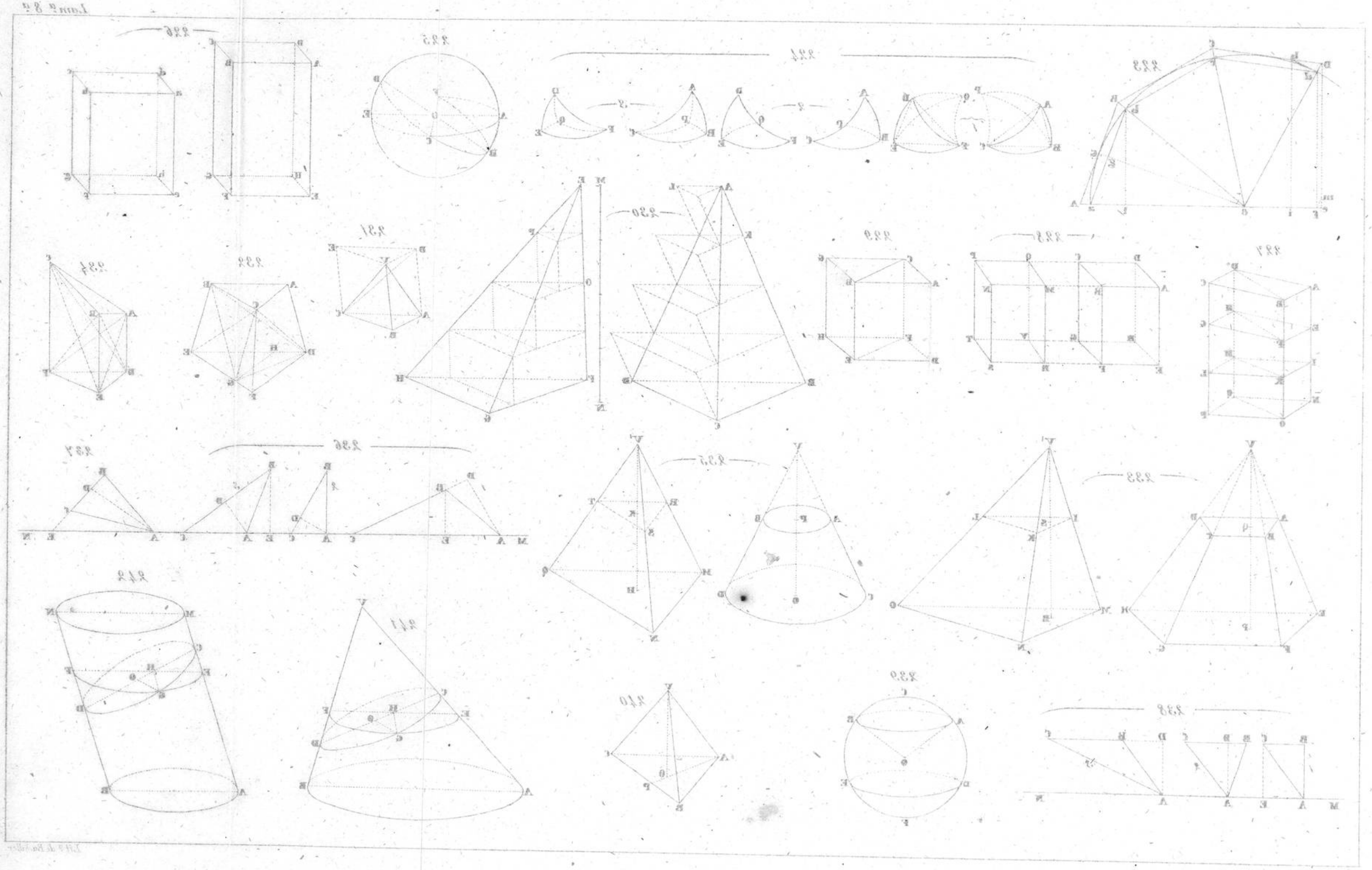
Litª de Bachiller

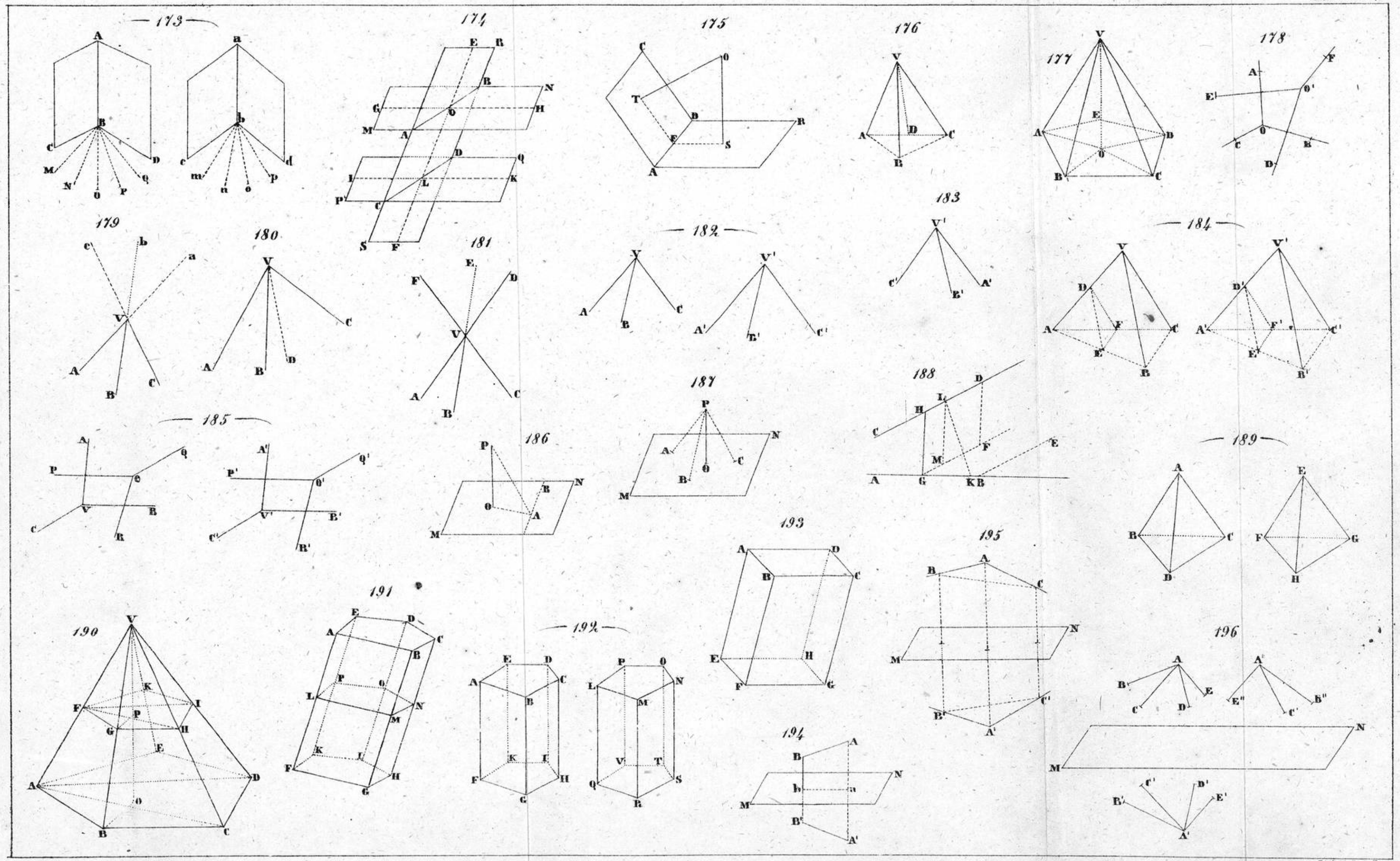


Lit.ª de Bachiller

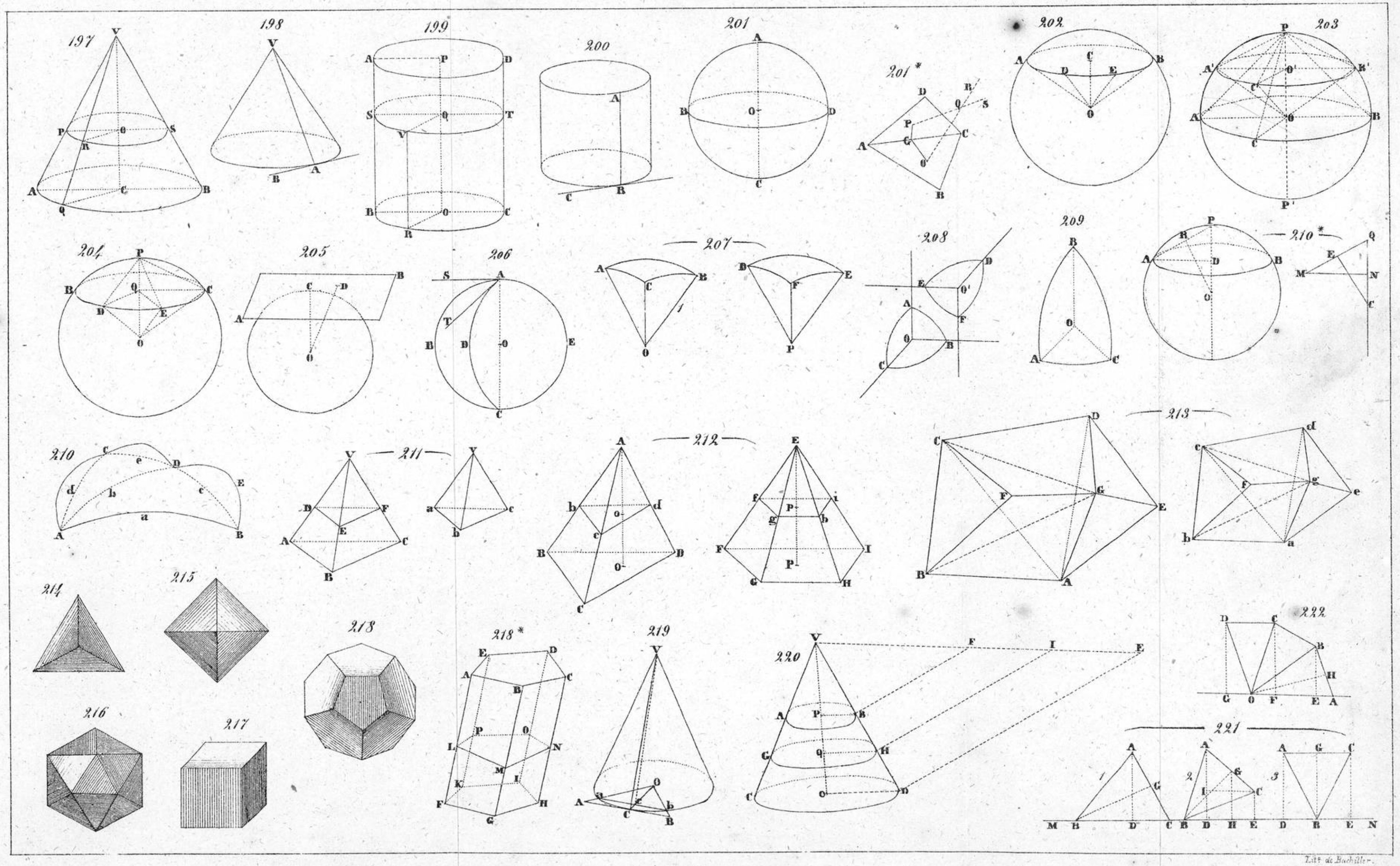


Litª de Bachiller.

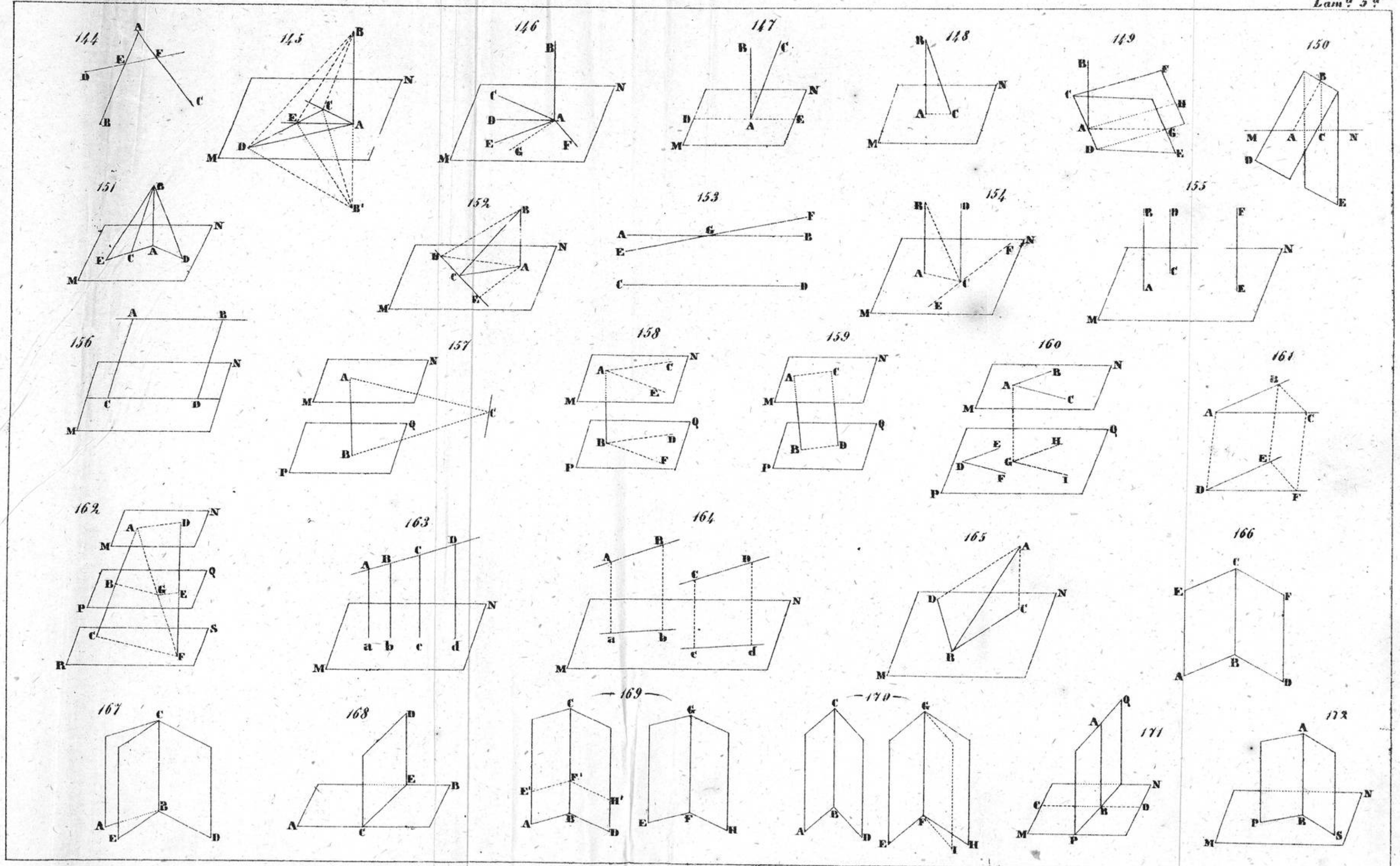




Litª de Bachiller.



Litª de Bachiller



Litª de Bachiller.

TRATADO

DE

GEOMETRI

. U.