cuyo conjunto constituye la fraccion contínua; y *cocientes incompletos*, los denominadores b, c, d,.... (Se llaman así los denominadores, porque b, por ejemplo, no es mas que la parte entera del número espresado por $b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}}$; c es solo la parte entera del número espresado por $c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}$, y así sucesivamente.)

Por oposicion, se llaman *cocientes completos* las espresiones $b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}$, $c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}$, $d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots}}$, en los cuales b, c, d, son solo la parte entera.

Cada *cociente completo* comprende implícitamente además de su entero, todos los cocientes subsiguientes de la fraccion contínua, porque su desarrollo es el que dá todos los cocientes posteriores. El último *cociente completo* es el denominador de la última fraccion integrante, y á lo menos es igual á 2, en virtud de la naturaleza especial del procedimiento empleado en reducir un quebrado á fraccion contínua (n.º 164).

Se llaman *reducidas* los resultados que se obtienen, convirtiendo sucesivamente en un solo número fraccionario cada una de las espresiones $a+\frac{1}{b}$, $a+\cfrac{1}{b+\frac{1}{c}}$....

Se llaman tambien *fracciones convergentes*, porque, segun demostrarémos muy pronto, cada vez se aproximan mas al número que se ha convertido en fraccion contínua, á medida que se toma mayor número de *fracciones integrantes*.

FORMACION DE LAS REDUCIDAS CONSECUTIVAS.

166. Veamos ahora si existe un medio sencillo y fácil de formar las diferentes reducidas.

La primera es a, que puede ponerse bajo la forma $\frac{a}{1}$.

La segunda es $a+\frac{1}{b}$, que reduciendo el entero á la especie del quebrado, se convierte en $\frac{ab+1}{b}$.

Para formar la tercera, representada por $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$, basta sustituir en la segunda $b+\frac{1}{c}$ en lugar de b; porque designando $b+\frac{1}{c}$ por b', tendremos

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=a+\frac{1}{b'}=\frac{ab'+1}{b'},$$

espresion que no difiere de $\frac{ab+1}{b}$, sino que en vez de b, se encuentra b', es decir, $b+\frac{1}{c}$.

Hagamos pues esta sustitucion y tendremos

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{ab+\frac{a}{c}+1}{b+\frac{1}{c}};$$

reduciendo los enteros á la especie de sus quebrados y multiplicando por c el numerador y el denominador,

$$\frac{(ab+1)\,c+a}{bc+1}.$$

La cuarta se obtendrá tambien sustituyendo en la tercera $c+\frac{1}{d}$ en lugar de c, lo cual dará,

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{(ab+1)\left(c+\frac{1}{d}\right)+a}{b\left(c+\frac{1}{d}\right)+1}=\frac{(ab+1)c+\frac{ab+1}{d}+a}{bc+\frac{b}{d}+1};$$

reduciendo los enteros á la especie de sus quebrados, y multiplicando ambos términos por d,

$$\frac{[(ab+1)c+a]\,d+ab+1}{(bc+1)\,d+b}.$$

Sin ir mas lejos puede ya comprenderse que el numerador de la tercer reducida puede obtenerse multiplicando el numerador de la segunda por el tercer cociente c y añadiendo al producto el numerador de la primera. Del mismo modo se forma el denominador por medio de los denominadores de la segunda y de la primera reducida.

El numerador y el denominador de la cuarta reducida se obtienen igualmente multiplicando respectivamente los dos términos de la tercera por el cuarto cociente d, y añadiendo á los productos respectivamente los dos términos de la segunda.

Si se fija la atencion en el modo de formarse las reducidas tercera y cuarta, se conocerá que la misma *ley de formacion* debe servir para las reducidas subsiguientes. Sin embargo, para demostrar rigorosamente su generalidad, recurriremos á un medio muy usado en Matemáticas. Haremos ver que si existe esa relacion entre tres reducidas consecutivas cualesquiera, existirá tambien respecto de la inmediata posterior; y esto bastará, porque entonces, habiéndola encontrado aplicable á la tercera, quedará demostrado que lo es á la cuarta; de serlo á esta, se deducirá que lo es á la quinta, y así sucesiva é indefinidamente.

Sean pues $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}$, $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}$, tres reducidas cualesquiera, y r el *cociente incompleto* en que nos hayamos detenido para formar la $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}$. Supongamos haber encontrado ya $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}=\frac{\mathrm{Q}r+\mathrm{P}}{\mathrm{Q}'r+\mathrm{P}'}$ (siendo $\mathrm{R}=\mathrm{Q}r+\mathrm{P}$ y $\mathrm{R}'=\mathrm{Q}'r+\mathrm{P}'$).

Añadamos una nueva fraccion integrante $\frac{1}{s}$ inmediatamente detrás de r, y sea $\frac{S}{S'}$ la reducida correspondiente; claro es que para formar $\frac{S}{S'}$, solo es necesario reemplazar en la espresion de $\frac{R}{R'}$ la espresion $r+\frac{1}{s}$ en vez de r; hecho lo cual, tendremos

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'};$$

donde claramente se ve que $\frac{S}{S'}$ se deduce de las dos precedentes en la forma arriba enunciada. Luego es general la ley que así lo espresa de la manera siguiente:

El numerador de una reducida cualquiera se forma multiplicando el numerador de la precedente por el cociente incompleto que le corresponde y añadiendo al producto el numerador de la reducida que antecede en dos lugares á la que se está formando. El denominador se forma con arreglo á la misma ley por medio de los dos denominadores inmediatamente anteriores.

Advertencia. Cuando el número reducido á fraccion continua y que hemos llamado x es menor que la unidad, se sustituye $\frac{0}{1}$ en vez de a, á fin de poder formar la tercer reducida, segun la ley que supone necesariamente que se hayan formado antes las dos primeras.

Propongámonos, por ejemplo, primero, formar las reducidas consecutivas de la fraccion continua,

$$\frac{65}{149}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}.}}}}}$$

Las primeras reducidas son $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{2}$.

Para formar la tercera, multiplicarémos el numerador 1 de la segunda por 3, y añadirémos al producto el numerador 0 de la primera: multiplicarémos despues el denominador 2 de la segunda por 3, y añadirémos al producto el denominador 1 de la primera: así obtendrémos $\frac{3}{7}$.

De un modo análogo formarémos las reducidas siguientes:

$$\frac{7}{16},\ \frac{17}{39},\ \frac{24}{55},\ \frac{65}{149}.$$

De igual manera hallaríamos las diferentes reducidas del quebrado $\frac{829}{347}$ (n.° 164), que son las siguientes:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{43}{18},\ \frac{829}{347}.$$

167. *Consecuencia de la ley precedente.* Resulta evidentemente de esta ley, que los términos de las diferentes reducidas, aumentan á medida que se toman mas fracciones integrantes, porque el numerador y el denominador de una reducida cualquiera son *al menos iguales* respectivamente á la suma de los *numeradores* ó de los *denominadores* de las dos precedentes.

PROPIEDADES DE LAS REDUCIDAS.

168. Primera propiedad. Si se toma en los ejemplos precedentes la diferencia entre dos reducidas consecutivas cualesquiera, conviniéndonos en restar siempre cada reducida de la subsiguiente, se encontrará constantemente por numerador de esta diferencia $+1$ ó -1, segun sea que la segunda de las reducidas consideradas ocupe *lugar par* ó *lugar impar,* siendo siempre el denominador de la diferencia igual al producto de los denominadores de las dos reducidas.

Así, en el primer ejemplo (de los dos últimos) tendremos

$$\frac{1}{2}-\frac{0}{1}=\frac{+1}{2\times1};\ \frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2\times7};\ \frac{7}{16}-\frac{3}{7}=\frac{+1}{16\times7}\ldots;$$

vamos á demostrar que esta propiedad es general.

Tomemos, á este fin, en la fraccion contínua general tres reducidas consecutivas cualesquiera

$$\frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{R}{R'}.$$

Tenemos $$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'-QR'}{R'Q'}.$$

Pero, segun lo dicho en el n.º 156, $R=Qr+P$, $R'=Q'r+P'$. Poniendo en vez de R y R' esos valores en el numerador de la anterior diferencia, tenemos

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{(Qr+P)\,Q'-Q\,(Q'r+P')}{R'Q'},$$

ó efectuando los cálculos y reduciendo

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{R'Q'};$$

donde se ve que el numerador de la diferencia $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$ *es numéricamente igual*, pero de *signo contrario*, al numerador de la diferencia

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{P'Q'}.$$

Es decir, *que los numeradores de dos diferencias consecutivas son numéricamente iguales, pero de signo contrario.*

Si ahora consideramos las dos primeras reducidas

$$\frac{a}{1}\ \text{y}\ \frac{ab+1}{b},\ \text{tendremos}\ \frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{+1}{b\times1};$$

luego, en virtud de lo demostrado, el numerador de la diferencia siguiente debe ser -1; el de la tercer diferencia será $+1$; y así sucesivamente.

Luego en general, *el numerador de una diferencia cual-*

quiera es $+1$, *si la segunda de las dos reducidas consideradas es de órden par, y* -1, *si es de órden impar;* el denominador se comprende sin demostracion que ha de ser igual al producto de los denominadores.

L. C. D. D.

169. Consecuencias de la propiedad precedente. *Una reducida de órden cualquiera* $\frac{R}{R'}$ (formada por las reglas del n.º 166) *es siempre una fraccion ó un número fraccionario irreducible.*

En efecto, supongamos por un momento que R y R' tienen un factor comun h; como, en virtud de la propiedad anterior, tenemos $RQ'-QR'=\pm 1$, resulta

$$\frac{RQ'-QR'}{h}, \text{ ó } \frac{RQ'}{h}-\frac{QR'}{h}=\frac{\pm 1}{h}.$$

Ahora bien, el primer miembro de esta igualdad es un número entero, porque R y R' son divisibles por h, mientras que por el contrario el segundo miembro es esencialmente una fraccion: luego es absurdo suponer que R y R' no sean primos entre sí.

De aquí resulta, que si se convierte en fraccion contínua un quebrado cuyos términos no sean primos entre sí, y se forman luego todas las reducidas consecutivas hasta la última inclusive, no se encontrará el quebrado propuesto en su forma primitiva, sino *simplificado y reducido á sus menores términos*, es decir, desembarazado del máximo divisor comun á sus dos términos.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{348}{924}$.

Convirtiéndola en fraccion contínua, se obtiene

$$\frac{348}{924}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{9}}}}},$$

y sus reducidas son....

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{29}{77}.$$

La última reducida $\frac{29}{77}$ es el valor del quebrado $\frac{348}{924}$, desembarazado del factor 12 comun á sus dos términos.

170. Segunda propiedad. Volviendo á la fraccion contínua general

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots\ldots}}}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

se conocerá facilmente, por un razonamiento análogo al hecho en el n.º 163 respecto de un ejemplo particular, que el valor de x está comprendido entre la primera y la segunda reducida, entre la segunda y la tercera, y así sucesivamente; de donde podria concluirse por analogía, que en general *el valor de* x *está comprendido entre dos reducidas consecutivas cualesquiera.*

Pero vamos á demostrar esta propiedad importantísima de un modo general.

Sean al efecto dos reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ de cualquier órden, y propongámonos valuar las diferencias $x-\frac{P}{P'}$, $x-\frac{Q}{Q'}$.

Observemos que si en la espresion de la reducida subsiguiente $\frac{R}{R'}$, ó $\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ se pone en lugar *del cociente incompleto* r, *el cociente completo* y, *ó* $r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t+\ldots}}$

en el cual es r la parte entera, se reproducirá el valor completo del número convertido en fraccion contínua, porque entonces se tendrá la reducida de la fraccion total contínua. Resultará, pues, en virtud de esta observacion,

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'};$$

de donde $x-\frac{P}{P'}=\frac{Q'y+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{(QP'-PQ')\,y}{(Q'y+P')\,P'};$

y $\quad x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Q'y+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{QP'-PQ'}{(Q'y+P')\,Q'};$

ó á causa de ser $QP'-PQ'=\pm 1$, $PQ'-QP'=\mp 1$ (n.º 168),

tendremos $\quad x-\frac{P}{P'}=\frac{\pm y}{(Q'y+P')\,P'},$

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{\mp 1}{(Q'y+P')\,Q'}.$$

Esto supuesto, como los números y, P, P', Q, Q', son por su naturaleza esencialmente positivos, se infiere que los dos resultados precedentes son *de signos contrarios*. Luego si tenemos $x >$ ó $< \frac{P}{P'}$, se debe tener necesariamente $x <$ ó $> \frac{Q}{Q'}$; lo cual quiere decir que si el número reducido en fraccion contínua es mayor ó menor que la reducida $\frac{P}{P'}$, será por el contrario menor ó mayor que $\frac{Q}{Q'}$. Luego finalmente, *el valor del número reducido á fraccion contínua está siempre comprendido entre dos reducidas consecutivas de cualquier órden.*

Observacion. Si la reducida $\frac{Q}{Q'}$ ocupa lugar par, ó es de órden par, el numerador de la diferencia entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$, ó $QP'-PQ'$, es positivo é igual á $+1$ (n.º 168); así, pues, tendremos $x>\frac{P}{P'}$ y $x<\frac{Q}{Q'}$. Luego, *todas las reducidas de lugar par son fracciones mayores, y todas las reducidas de lu-*

gar impar son fracciones menores que el número reducido á fraccion continua.

171. TERCERA PROPIEDAD. *Una reducida de órden cualquiera dá siempre un valor de* x *mas aproximado que la precedente.*

En efecto, consideremos las dos diferencias del n.º 170. Como tenemos (n.º 167) $Q' > P'$, resulta que el denominador $(Q'y + P')\,Q'$ es $> (Q'y + P')\,P'$; además y es > 1; luego por doble razon, la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$ es *numéricamente* menor que la diferencia entre x y $\frac{P}{P'}$.

Observacion. Como en virtud de la observacion del número 170 las reducidas de lugar *par* son fracciones mayores, y las reducidas de lugar *impar* fracciones menores que el valor de x; y como además, en virtud de lo acabado de demostrar, las reducidas *convergen* sin cesar hácia el valor de x á medida que se alejan de la primera, puede concluirse necesariamente: 1.º que las reducidas de lugar *par* van *disminuyendo* de valor desde la segunda en adelante: 2.º que, por el contrario, las reducidas de lugar *impar* van *aumentando* de valor desde la primera en adelante.

172. CUARTA PROPIEDAD. El grado de aproximacion que dá cada reducida puede valuarse de muchos modos.

Lo primero, de hallarse comprendido el valor de x (número 170) entre dos reducidas consecutivas cualesquiera $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, se infiere que la diferencia entre el valor de x y una cualquiera de ellas, es menor que la diferencia de estas $\frac{1}{P'Q'}$. Luego ya sabemos que *el error cometido, tomando una de dichas reducidas por valor de* x, *es menor que la unidad dividida por el producto de sus denominadores.*

Lo segundo, como la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$, prescindiendo del signo, está espresada (n.º 170) por $\frac{1}{(Q'y + P')\,Q'}$, y tenemos $y > 1$, de donde se saca

$$(Q'y + P')\,Q' > (Q' + P')\,Q',$$

resulta necesariamente

$$x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{(Q'+P')Q'},$$

y *à fortiori*,

$$x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'^2}.$$

Luego, *la diferencia entre* x *y* $\frac{Q}{Q'}$, *ó el error cometido en tomar* $\frac{Q}{Q'}$ *por valor de* x, *es menor que la unidad dividida por el producto del denominador de la reducida, multiplicado por la suma de este denominador con el de la reducida precedente;* ó con menos exactitud, pero con mas sencillez, *dicho error es menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida considerada.*

Advertencia. Es de notar que las tres propiedades precedentes se fundan en el mismo cálculo, que es el del n.º **170**: lo cual hace mas fáciles de retener las demostraciones.

173. Quinta y última propiedad. *Una reducida de órden cualquiera se aproxima al valor de* x, *no solo mas que todas las reducidas anteriores, sino tambien mas que cualquiera otra fraccion cuyo denominador sea menor que el de la reducida considerada:* de manera que se puede asegurar, que no existe ninguna otra fraccion que, *en términos mas simples*, dé un valor mas aproximado de x.

Sean $\frac{Q}{Q'}$ la reducida que se considera, y $\frac{m}{m'}$ una fraccion cualquiera tal que tenga el denominador $m'<Q'$; digo que $\frac{m}{m'}$ no se aproxima á x mas que $\frac{Q}{Q'}$.

En efecto, observemos primero que la fraccion $\frac{m}{m'}$ no puede estar comprendida entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$; porque para esto seria menester que la diferencia entre $\frac{m}{m'}$ y $\frac{P}{P'}$, que es $\frac{mP'-Pm'}{m'P'}$, fuera numéricamente menor que la diferencia $\frac{1}{P'Q'}$ entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$; lo cual es imposible, porque $mP'-Pm'$, número naturalmente entero, es al menos igual á 1, y $m'P'$ es menor que $P'Q'$, á consecuencia del supuesto $m'<Q'$. (No se puede suponer $mP'-Pm'=0$, porque resultaria $\frac{m}{m'}=\frac{P}{P'}$; y siendo entonces la fraccion $\frac{m}{m'}$ idéntica á la reducida inmediata anterior á $\frac{Q}{Q'}$, quedaria demostrada la proposicion.)

Luego, puesto que x está comprendida entre $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, y que, en virtud de lo acabado de decir, no sucede lo mismo con la fraccion $\frac{m}{m'}$, se infiere precisamente que si se escriben estos cuatro números por el órden de su magnitud, solo se podrán formar las dos combinaciones siguientes:

$$\frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{m}{m'},\quad \text{ó}\quad \frac{m}{m'},\ \frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'}.$$

En el primer caso es evidente que la diferencia entre x y $\frac{m}{m'}$ es mayor que la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$.

En el segundo es mayor que la diferencia entre x y $\frac{P}{P'}$, y por consiguiente mayor que la diferencia entre x y $\frac{Q}{Q'}$.

L. C. D. D.

Tambien se puede conocer esto calculando por el procedimiento del n.º 170 la diferencia $x-\frac{m}{m'}$, y comparando su espresion con la de la diferencia $x-\frac{Q}{Q'}$, establecida en el mismo número.

174. Para terminar la teoría elemental de las fracciones continuas, indicaremos el uso que puede hacerse de ellas en la valuacion aproximada de un quebrado irreducible cuyos términos sean muy grandes.

Se reduce el número propuesto á fraccion continua, por el procedimiento del n.º 164; despues se forman las reducidas consecutivas, por la ley del n.º 166. Así se obtiene una série de fracciones alternativamente mayores y menores que el número propuesto (n.º 170); *y entre estas fracciones se escoge la que dá el grado de aproximacion que se desea tener. Este grado está* indicado (n.º 172) por la espresion $\frac{1}{(Q'+P')Q}$, *ó* $\frac{1}{Q'^2}$, *siendo* $\frac{Q}{Q'}$ *la reducida considerada. La reducida debe ocupar un lugar tanto mas avanzado* (n.º 171), *cuanto mayor aproximacion se desee tener.*

Propogámonos, por ejemplo, valuar aproximadamente *la relacion de la circunferencia al diámetro.*

En Geometría se enseña que esa relacion valuada en decimales es 3,14159, ó $\frac{314159}{100000}$, valor aproximado hasta cien-milésimas.

Reduzcamos ese número á fraccion contínua, y tendremos

$$\frac{314159}{100000} \text{ ó } x = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{4}}}}}}};$$

formando las reducidas consecutivas, resultará, segun la ley del n.º 166,

$\frac{9208}{2931}$,

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9563}{3044},\ \frac{76149}{24239},\ \frac{314159}{100000}.$$

Tomando la fraccion $\frac{22}{7}$ por valor del número propuesto, cometeríamos un error menor que $\frac{1}{7\,(7+1)}$, ó $\frac{1}{56}$; pero esta reducida dá un grado de aproximacion mas considerable de lo que parece; porque como el número propuesto está comprendido entre $\frac{22}{7}$ y $\frac{333}{106}$, resulta que $\frac{22}{7}$ difiere de dicho número en menos de $\frac{22}{7}-\frac{333}{106}$, ó $\frac{1}{742}$; luego el error cometido es mucho menor que $\frac{1}{100}$. Por eso se usa mucho la espresion $\frac{22}{7}$, ó $3\,\frac{1}{7}$, para representar la relacion entre la circunferencia y el diámetro. *Esa relacion es la dada por Arquímedes.*

La cuarta reducida $\frac{355}{113}$, que no es mucho mas complicada que $\frac{333}{106}$, dá un valor mucho mas aproximado; porque hallándose el número propuesto entre $\frac{355}{113}$ y $\frac{9208}{2931}$, la diferencia entre él y $\frac{355}{113}$ es menor que $\frac{1}{113\times 2931}$, fraccion evidentemente menor que 0,00001. Es de notar que las dos fracciones $\frac{355}{113}$ y $\frac{314159}{100000}$, dan en decimales la misma aproximacion, siendo, sin embargo, la primera mucho menos complicada que la segunda. *La relacion* $\frac{355}{113}$ *es la dada por Adriano Mecio.* Las reducidas posteriores son ya demasiado complicadas para sustituir con ventaja al número propuesto.

No pasaremos mas adelante en el exámen de las propiedades de estos números; pero recomendamos á los estudiosos, ya familiarizados con el análisis algebráico, que quieran ensanchar sus conocimientos en este punto, la lectura de las obras tituladas: *Teoría de los números* por *Legendre* y *Disquissitiones Arithmeticæ* de *Gauss,* obra muy bien traducida al francés por *Poulet-Delisle.*

CAPITULO VI.

Formacion de las potencias y estraccion de las raices cuadradas y cúbicas de los números.

§. I. Formacion del cuadrado y estraccion de la raiz cuadrada.

175. *Nociones preliminares.* Se llama *cuadrado* (número 108) ó *segunda potencia* de un número, el resultado de multiplicar al número una vez por sí mismo, ó el producto de dos factores iguales al número; y *raiz cuadrada* ó *segunda* de un número, otro número que multiplicado por sí mismo, ó elevado al cuadrado, reproduce el número propuesto.

Así, el cuadrado de 7 es 49; y recíprocamente, la raiz cuadrada de 49 es 7. Igualmente, el cuadrado de 12 es 12×12 ó 144; y recíprocamente, la raiz cuadrada de 144 es 12.

La formacion del cuadrado de un número entero ó fraccionario no exige procedimiento alguno particular: basta multiplicar el número por sí mismo, siguiendo las reglas generales de la multiplicacion.

Pero no sucede lo mismo con la estraccion de la raiz cuadrada, que tiene por objeto: *Dado un número, hallar otro que, multiplicado por sí mismo, reproduzca el primero;* cuestion que solo puede resolverse por una operacion esencialmente distinta de las esplicadas hasta ahora, y que es de la mayor importancia en Geometría y en Algebra.

Esto supuesto, siendo los diez primeros números enteros

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

cuyos cuadrados son

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,

resulta que recíprocamente los números de la segunda línea tienen por raices cuadradas los números de la primera.

Á la simple vista de estas dos líneas, se conoce que entre los números enteros de una ó dos cifras, solo hay *nueve* que son *cuadrados de otros números enteros:* todos los demas tienen por raiz cuadrada un número entero mas una fraccion.

Así, 53, que está comprendido entre 49 y 64, tiene por raiz cuadrada 7 mas una fraccion; así tambien 91, comprendido entre 81 y 100, tiene por raiz cuadrada 9 mas una fraccion.

176. Pero lo que es muy notable, es que *si un número entero no tiene raiz cuadrada exacta en enteros, tampoco la tendrá en números fraccionarios.*

Esta proposicion, que al pronto puede parecer una paradoja, es una consecuencia del principio sentado en el n.º 130 sobre la divisibilidad de los números. En efecto, para que un número fraccionario irreducible $\frac{a}{b}$, pueda ser considerado como raiz cuadrada de un número entero, es necesario que su cuadrado $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, ó $\frac{a^2}{b^2}$, sea igual á un número entero. Pero esto es imposible, porque suponiendo como suponemos irreducible al número fraccionario $\frac{a}{b}$, no tendrán a^2 y b^2 otros factores primos mas que los que tenian a y b (n.º 130); y como estos son primos entre sí, tambien lo serán aquellos, y el nuevo quebrado $\frac{a^2}{b^2}$ será tambien *irreducible*, y no puede ser igual á un número entero.

La raiz cuadrada del número entero que no la tiene en enteros, y que por lo tanto no puede representarse exactamente por ningun número, se llama *número inconmensurable* ó *irracional*, lo cual significa que no puede medirse exactamente por medio de la unidad. Así, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, son números irracionales ó inconmensurables.

Entonces se dice que el número dado no es *cuadrado perfecto.*

177. La diferencia de dos *cuadrados perfectos consecutivos* es tanto mas considerable cuanto mayores son sus raices cuadradas, y su espresion es muy útil de conocer.

Sean al efecto dos números enteros consecutivos a y $a+1$.

Tenemos (n.º 112) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$; de donde, haciendo $b=1$, resulta

$$(a+1)^2=a^2+2a+1.$$

La diferencia entre $(a+1)^2$ y a^2 es por consiguiente $2a+1$; donde se ve *que la diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos, es igual al duplo del menor, mas una unidad*. Así, la diferencia entre los cuadrados de 348 y 347, es igual á dos veces 347 mas 1, ó 695; ó bien entre el cuadrado de 347 y el de 348 hay 694 números enteros que no son cuadrados perfectos.

Esplicadas estas nociones, propongámonos investigar un procedimiento para estraer la raiz cuadrada de un número, empezando por los enteros.

178. *Estraccion de la raiz cuadrada de un número entero.*

Si el número solo tiene una ó dos cifras, su raiz se obtiene facilmente de memoria (n.º 175), porque debe hallarse entre los nueve números primeros; consideremos, pues, un número compuesto de mas de dos cifras, por ejemplo 6084.

Constando este número de mas de dos cifras, su raiz tendrá mas de una; pero además es menor que 10000, cuadrado de 100; luego tendrá menos de tres cifras la raiz buscada: luego tiene precisamente dos, de modo que tendrá precisamente decenas y unidades. Si designamos las decenas por a y las unidades por b, tendremos (n.º 177)

6 0 8 4	78
4.9	148
1 1 8.4	8
1 1 8 4	1184
0	

$$6084=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

lo cual prueba que el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades consta *del cuadrado de las decenas, mas el duplo del producto de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades*.

Esto supuesto, si pudiéramos descubrir en 6084 el cuadrado de las decenas de la raiz, se obtendría facilmente la cifra de ellas; para esto, como el cuadrado de un número exacto de decenas no puede ser mas que un número exacto de centenas, resulta que el cuadrado buscado debe encontrarse en la parte

60, á la izquierda de las dos primeras cifras, que por esta razon se separan por medio de un punto; pero esa parte, además del cuadrado de decenas, puede contener centenas y millares procedentes de los otros términos del cuadrado. Ahora, como 60 está comprendido entre los cuadrados 49 y 64, cuyas raices respectivas son 7 y 8, digo que 7 es la *cifra de decenas* buscada; porque 6000 está evidentemente comprendido entre 4900 y 6400, que son los cuadrados de 70 y de 80; luego tambien lo está 6084. Luego la raiz pedida se compone de 7 decenas, mas un número de unidades menor que diez.

Hallada la cifra 7 de las decenas, se escribe á la derecha del número dado, separándolos por una raya vertical; despues se resta de 60 el cuadrado de 7, que es 49; á la derecha del resto 11 se bajan las otras dos cifras 84. El resultado 1184 debe contener todavía el *duplo del producto de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades.* Pero como decenas multiplicadas por unidades no pueden dar en el producto cifras inferiores á las decenas, separaremos con una coma la última cifra 4, porque seguramente el doble producto que buscamos debe solo hallarse en las cifras 118.

Luego si dividimos 118 por el duplo de las decenas, que es 14, el cociente 8 será *la cifra de las unidades* ó un número mayor. No podrá ser menor, porque el 118 contiene el duplo del producto de decenas por unidades, y por consiguiente este producto se ha de poder restar de él; pero podrá ser mayor, porque el 118, además de dicho producto, contiene las decenas procedentes del cuadrado de las unidades. Para comprobar si el cociente 8 es la verdadera cifra de unidades, basta escribirle á la derecha del 14, y multiplicar el número resultante 148 por el mismo 8. Así se forma evidentemente: 1.º el cuadrado de unidades; 2.º el duplo de decenas por unidades. Efectuada la multiplicacion, se obtiene 1184, número igual al sobrante de la primera operacion; haciendo la resta, se obtiene el resíduo 0; luego 78 es la raiz pedida.

En efecto, resulta de las operaciones precedentes, que de 6084 se han ido restando sucesivamente el cuadrado de 7 decenas, ó 70, mas el duplo del producto de 70 por 8, mas el cuadrado de 8; es decir, las tres partes que entran en la formacion del cuadrado de $70+8$, ó 78; y como el resultado de la sustraccion es 0, se infiere que 6084 es igual al cuadrado de 78.

Sirva de segundo ejemplo el número 841.

Como este número está comprendido entre 100 y 1000, debe su raiz constar tambien de dos cifras, que son decenas y unidades.—Se probará, como en el ejemplo precedente, que la raiz del mayor cuadrado contenido en 8, ó sea en la parte que está á la izquierda de las dos cifras primeras, es la cifra de decenas de la raiz buscada. El mayor cuadrado contenido en 8 es 4; por consiguiente, *la cifra de las decenas* es la raiz de 4, que es 2. Si se resta de 8 el cuadrado de esa cifra, que es 4, queda un resíduo 4: bajando á su derecha la seccion siguiente **41**, resultan **441**, cuyo número contiene todavía *el duplo del producto de las decenas por las unidades*, *mas el cuadrado de las unidades*.

8.4 1	29
4	49
4 4.1	
4 4 1	
0	

Aquí se probará tambien, como en el ejemplo precedente, que si separamos con una vírgula la última cifra de la derecha, y se divide el número de la izquierda **44** por **4**, duplo de las decenas halladas, el cociente será la cifra de unidades ó un número mayor. En efecto, aquí el cociente es **11**, y es evidente que no podemos tener por verdadera cifra de unidades ningun número mayor que 9 (pues de lo contrario resultaria no ser exacta la cifra hallada de decenas). Ensayaremos, pues, el 9: para esto se escribe el 9 á la derecha del **4**, duplo de las decenas, y se multiplica el 49 resultante por el mismo 9: como esta multiplicacion dá el producto **441**, que es igual al resto de la primera operacion, se infiere que 29 es la raiz pedida.

Reflexionando sobre el procedimiento que acabamos de seguir para estraer la raiz cuadrada de *un número de tres ó cuatro cifras*, se ve que hemos hecho dos operaciones principales. La *primera*, despues de haber separado las dos cifras primeras de la derecha, consiste en *estraer la raiz cuadrada del mayor cuadrado del número que queda á la izquierda*, *restando luego ese cuadrado del mismo número*. La cifra así obtenida espresa necesariamente las decenas de la raiz total; porque el cuadrado de dicha cifra seguida de un cero y el cuadrado de la misma aumentado en una unidad y seguido tambien de un cero, comprenden evidentemente al número propuesto. La *segunda* operacion, despues de bajar las dos cifras restantes á la derecha del resíduo y de cortar la última con un vírgula, consiste en dividir *el número que queda á la izquierda por el duplo de la cifra obtenida de la raiz*. El cociente será la cifra de las unidades ó un número mayor; para comprobarlo se forma su cuadrado y el duplo de su producto por la cifra de decenas antes obtenida. Si la suma de los dos productos es igual al resíduo de la primera operacion ó menor que esta suma, podemos estar seguros que el cociente hallado representa las unidades, y podemos escribirle á la derecha de las decenas: en el caso contrario se disminuye una unidad al cociente y se repite la misma comprobacion.

Advertencia. En la investigacion de la raiz cuadrada de un número no se puede obtener desde luego el cuadrado de las unidades; porque este cuadrado produce en general decenas (n.º 175) que se combinan con las procedentes del duplo del producto de decenas por unidades. De modo que es imposible determinar de un modo exacto en qué parte del número propuesto existe el cuadrado de las unidades.

Nos servirá de tercer ejemplo un número que no es cuadrado perfecto, 1287.

Aplicando á este número el procedimiento arriba seguido, hallamos la raiz 35 y el resíduo final 62; lo cual indica que 1287 no es cuadrado perfecto, pero que se halla comprendido entre el cuadrado de 35 y el de 36. En efecto, el cuadrado de 35 es 1225, y el de 36 es 1296, que escede á 1225 en 71, ó sea en $2\times35+1$ (n.º 177).

12.87	35
9	65
38.7	
325	
62	

Así, pues, cuando un número entero no es cuadrado perfecto, el procedimiento prescrito hace conocer *la raiz del mayor cuadrado contenido en él*, ó bien *la parte entera de su raiz cuadrada.*

Pronto veremos cómo se obtiene aproximadamente la fraccion que debe completar la raiz.

179. Pasemos á la estraccion de la raiz cuadrada de un número de mas de cuatro cifras.

Sea el número 56821444.

$$
\begin{array}{r|lll}
56.82.14.44 & 7538 & & \\
\cline{2-4}
49 & 145 & 1503 & 15068 \\
\cline{1-1}
78.2 & 5 & 3 & 8 \\
\cline{2-4}
725 & 725 & 4509 & 120544 \\
\cline{1-1}
571.4 & & & \\
4509 & & & \\
\cline{1-1}
12054.4 & & & \\
120544 & & & \\
\cline{1-1}
0 & & &
\end{array}
$$

Como el número propuesto pasa de 10000, su raiz debe ser mayor que 100, es decir, ha de tener mas de dos cifras. Pero sean estas cuantas quiera, siempre el número buscado puede considerarse como un conjunto de decenas y unidades simples (pues, por ejemplo, un número cualquiera 5367, puede descomponerse en $5360+7$, es decir, en 536 decenas y 7 unidades).

Esto supuesto, el cuadrado de la raiz buscada se compondrá precisamente de tres partes; cuadrado de decenas, duplo del producto de decenas por unidades, y cuadrado de unidades. El cuadrado de decenas dará lo menos centenas, luego no entrará en la última seccion 44, sino que deberá encontrarse enteramente en las cifras que quedan á la izquierda.

Ahora digo, que si se busca *la raiz del mayor cuadrado* contenido en 568214 considerado como si fueran unidades simples, se tendrá el número total de decenas de la raiz pedida.

En efecto, sea a la raiz del mayor cuadrado contenido en 568214: resulta que la raiz buscada tiene al menos un número a de decenas, porque $a^2\times 100$ puede restarse de 56821400, y con mayor razon de 56821444. Pero dicha raiz no podria tener $(a+1)$ decenas, porque siendo $(a+1)^2$ mayor que 568214, $(a+1)^2\times 100$ será tambien mayor que 56821400, escediéndole al menos en una centena, y por consiguiente no podrá restarse de 56821444.

Luego, finalmente, la raiz pedida se compone de a decenas mas un número de unidades menor que 10, quedando la cuestion reducida por lo pronto á estraer la raiz cuadrada del número 568214, considerado como de unidades simples.

Razonando sobre este número, como acabamos de hacer sobre el número propuesto, vendremos á parar al hecho de que para obtener las decenas de su raiz es menester estraer la raiz del mayor cuadrado entero contenido en las cifras que hay á la izquierda del 14, es decir, en 5682; y para obtener las decenas de esta nueva raiz, sería necesario á su vez, hacer abstraccion de las dos cifras de la derecha, 82, y estraer la raiz del mayor cuadrado entero contenido en 56.

Estraigamos, pues, la raiz de 56: el mayor cuadrado contenido en 56 es 49: su raiz es 7: escribimos 7 á la derecha del número propuesto; restamos 49 de 56; á la derecha del resíduo 7 bajamos la seccion siguiente 82 (porque tratamos de determinar la segunda cifra de la raiz del mayor cuadrado contenido en 5682). Separando la última cifra 2 de la derecha del 782, se divide el 78 por 14, duplo de la raiz antes hallada; se obtiene el cociente 5, que se escribe á la derecha del 14; el número resultante 145 se multiplica por 5, y el producto 725 se resta de 782: hecho esto, el 75 representa el conjunto de las decenas de la raiz del número 568214.

Para obtener las unidades de esa misma raiz, se baja al lado del resíduo 57 la siguiente seccion 14; se separa con una vírgula la cifra 4 de la derecha, y el número 571 se divide por 150, duplo de las dos cifras halladas de la raiz: el cociente 3 se escribe á la derecha del 150, y el número resultante 1503 se multiplica por el mismo 3: el producto 4509 se resta de 5714; y entonces el número 753 espresa ya el número *total* de decenas de la raiz buscada.

Para tener la cifra de unidades, se baja al lado del resíduo 1205 la última seccion 44; haciendo abstraccion de la última cifra 4, se divide el 12054 por 1506, duplo de las tres cifras halladas de la raiz: resulta el cociente 8, que se escribe á la derecha del 1506; el número así formado 15068 se multiplica por el mismo 8, y el producto 120544 se resta del resíduo y de las cifras separadas, con lo cual se obtiene el resíduo final 0. Por consiguiente, la raiz pedida es exactamente 7538: para comprobar la operacion basta multiplicar por sí misma la raiz hallada 7538.

Si han comprendido bien todas las partes del procedimiento antecedente, se deducirá facilmente el procedimiento siguiente:

Se divide el número en secciones de á dos cifras, principiando por la derecha (EL NÚMERO DE SECCIONES ES IGUAL AL NÚMERO DE CIFRAS DE LA RAIZ). *Se estrae la raiz del mayor cuadrado contenido en la primera seccion de la izquier-*

da, que á veces solo tiene una cifra, *y se tendrá la cifra primera de la raiz: se resta el cuadrado de esta cifra de la primera seccion.*

A la derecha del resíduo se baja la segunda seccion, se separa la primera cifra de la derecha, y el número que queda á la izquierda se divide por el duplo de la cifra hallada de la raiz. El cociente hallado es la segunda cifra de la raiz, que se escribe al lado del duplo, multiplicando por la misma cifra el número resultante y restando el producto del primer resíduo y de la segunda seccion.

Al lado del resíduo se baja la tercera seccion, se separa la primera cifra de la derecha, y el número que queda á la izquierda se divide por el duplo de las dos cifras halladas de la raiz: el cociente será la tercera cifra de la raiz; se escribe á la derecha del divisor, y el número resultante se multiplica por la misma cifra, restando el producto del segundo resíduo y de la tercera seccion. Así se continúa hasta bajar todas las secciones.

Si concluidas todas estas operaciones no queda resíduo alguno, el número dado es un cuadrado perfecto; si queda resíduo, no era el número cuadrado perfecto, pero se conoce entonces *la raiz del mayor cuadrado contenido en el número*, ó lo que es lo mismo, *la parte entera de la raiz cuadrada del número dado*. El resíduo debe ser (n.° 177) menor que el duplo de la raiz hallada mas *uno*, pues de lo contrario estarian mal determinadas las cifras de la raiz.

180. Proponemos para ejercicio estraer la raiz cuadrada de los números 17698849 y 698485: los resultados son

$$\sqrt{17698849}=4207;\ \sqrt{698485}=835 \text{ con el resíduo } 1260.$$

Observacion primera.—En el primero de estos dos ejemplos, al bajar la penúltima seccion, cuando se separa la primera cifra de la derecha, el número que queda á la izquierda es menor que el duplo de la raiz hallada: esto indica que la raiz buscada carece de decenas; por consiguiente debemos poner *cero* en la raiz, para dar á las cifras obtenidas su correspondiente valor relativo.

Observacion segunda.—De la naturaleza misma del procedimiento espuesto se infiere que *el número de cifras de la raiz es igual al de secciones formadas en el número propuesto*. Pero esta proposicion puede demostrarse tambien á *priori*, es decir, sin recurrir al procedimiento empleado.

En efecto, el cuadrado de 10^{n-1}, ó del número menor de n cifras, es igual á la unidad seguida de $2(n-1)$ ó $2n-2$ ceros, y espresa el número menor de $2n-1$ cifras.

Por otro lado, el cuadrado de 10^n, ó del número menor de $(n+1)$ cifras, es igual á la unidad seguida de $2n$ ceros y representa el menor número de $(2n+1)$ cifras.

Luego todo número compuesto de $(2n-1)$ cifras, ó de $2n$ á lo mas, que puede descomponerse en n secciones de á dos cifras (una de las cuales puede tener solo *una*), tiene su raiz comprendida entre 10^{n-1} y 10^n, y por consiguiente consta de n cifras.

181. *Observacion tercera.*—Muchas veces se conoce á la simple inspeccion de un número entero si no es cuadrado perfecto, cosa que puede ser útil en la práctica.—Hé aquí los principales indicios.

1.° Como todo número par puede representarse por $2n$, su cuadrado $4n^2$ es esencialmente divisible por 4.

Por consiguiente *todo número par que no sea divisible por* 4 (n.° 136) *no es cuadrado perfecto*. Igualmente, como el cuadrado de un número impar $(2n+1)$ es $(4n^2+4n+1)$, número que disminuido en *una* unidad es divisible por 4, se infiere que *no puede ser cuadrado perfecto el número impar que disminuido en una unidad, no sea divisible por* 4.

2.° En general, *todo número que teniendo un factor primo* a *no es divisible por* a^2, *no puede ser cuadrado perfecto*. Porque la raiz cuadrada de dicho número, si fuera entera, solo podria tener (n.° 130) la forma an, cuyo cuadrado a^2n^2 es divisible por a^2. Así un número divisible por 3 ó por 5, no podria ser cuadrado perfecto, si no es divisible por 9 ó por 25. Así tambien un número que siendo divisible por 15, no lo fuera por $(15)^2=225$, no podria ser cuadrado perfecto.

3.° *Ningun número terminado en una de las cifras* 2, 3, 7, 8, *puede ser cuadrado perfecto*. Porque en virtud de la composicion del cuadrado de un número que consta de mas de una cifra (n.° 175), las unidades simples del cuadrado, solo provienen del cuadrado de la cifra de unidades de la raiz; y ninguno de los cuadrados de las nueve cifras termina en 2, 3, 7, 8.

4.° *Ningun número acabado en* 5 *puede ser cuadrado perfecto, si no es* 2 *la cifra de sus decenas*. Este carácter se deduce tambien de la composicion del cuadrado de un número de dos ó mas cifras. Las dos últimas cifras del número propuesto solo pueden provenir en este caso del cuadrado de las unidades de la raiz; porque siendo esta 5, el duplo del producto de decenas por la cifra 5, es necesariamente un número de centenas; y como el cuadrado de 5 es 25, se infiere que las dos últimas cifras de todo número cuadrado cuya raiz acaba en 5, han de ser 25.

5.º Finalmente, *ningun número acabado en número impar de ceros puede ser cuadrado perfecto.* Esto es evidente, porque si la raiz fuera exacta, tendria que ser un número entero seguido de uno ó mas ceros, y su cuadrado tendria dos veces tantos ceros como tuviera la raiz, debiendo acabar por consiguiente en *un número par* de ceros, lo cual es contrario al supuesto.

Estraccion de la raiz cuadrada por aproximacion.

182. Cuando un número entero no es cuadrado exacto de otro número entero, no puede obtenerse exactamente (n.º 176) el valor de su raiz cuadrada; pero á lo menos es posible hallarla con cuanta aproximacion sea deseable.

Antes de esponer las reglas relativas á la valuacion aproximada de las raices cuadradas, es necesario hacer notar que siendo $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ ó $\frac{a^2}{b^2}$ el cuadrado de un número quebrado ó fraccionario $\frac{a}{b}$, recíprocamente es $\frac{a}{b}$ la raiz cuadrada de $\frac{a^2}{b^2}$.

Luego *para estraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos son cuadrados perfectos, basta estraer la raiz cuadrada del numerador y la del denominador, dividiendo despues la primera por la segunda.*

Esto supuesto, propongámonos en general *estraer la raiz cuadrada* en menos de un quebrado $\frac{1}{n}$ (*véase* la nota del número 93) *á un número* a, entero ó fraccionario; ó supongamos en otros términos que se pide un número que difiera de la raiz cuadrada del número a en menos de una cantidad dada $\frac{1}{n}$.

Para conseguirlo observemos que a puede ponerse en esta forma

$$\frac{a\times n^2}{n^2}.$$

Si ahora designamos por r la parte entera de la raiz cuadrada de an^2, este número an^2 estará comprendido entre r^2 y $(r+1)^2$; luego tambien $\frac{an^2}{n^2}$ estará comprendido entre

$$\frac{r^2}{n^2} \text{ y } \frac{(r+1)^2}{n^2};$$

por consiguiente la raiz de a estará tambien comprendida entre los mismos números $\frac{r^2}{n^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{n^2}$; es decir, entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$.

Luego finalmente $\frac{r}{n}$ representa la raiz cuadrada de a en menos de la fraccion $\frac{1}{n}$.

De donde puede concluirse el procedimiento siguiente: *Multiplíquese el número dado* a *por el cuadrado del denominador* n *de la fraccion que determina el grado de aproximacion que se desea tener; estráigase la parte entera de la raiz cuadrada del producto, y divídase esta parte entera por el mismo denominador* n.

Sirva de primer ejemplo, estraer la raiz cuadrada de 59 en menos de $\frac{1}{12}$ de la unidad.

Multiplíquese 59 por $(12)^2$ ó 144; resulta 8496; la parte entera de la raiz cuadrada de este número es 92.

Luego $\frac{92}{12}$ ó $\frac{93}{12}$ es la raiz cuadrada de 59 aproximada hasta $\frac{1}{12}$.

Repitamos en este ejemplo particular la demostracion general arriba dada.

El número 59 puede ponerse bajo esta forma... $\frac{59\times(12)^2}{(12)^2}$,

ó efectuando los cálculos del numerador... $\frac{8496}{(12)^2}$; pero la raiz cuadrada de 8496, en menos de una unidad, es 92; luego $\frac{8496}{(12)^2}$ ó 59 está comprendido entre $\frac{(92)^2}{(12)^2}$ y $\frac{(93)^2}{(12)^2}$. Luego la raiz cuadrada de 59 deberá tambien estar comprendida entre $\frac{92}{12}$ y $\frac{93}{12}$; es decir, que la raiz de 59 diferirá de $\frac{92}{12}$ en menos de $\frac{1}{12}$.

En efecto, los cuadrados de $\frac{92}{12}$ y de $\frac{93}{12}$ son $\frac{8464}{(12)^2}$ y $\frac{8649}{(12)^2}$, números que comprenden entre sí á $\frac{8496}{(12)^2}$ ó 59.

Sirva de segundo ejemplo el número misto $31\frac{4}{7}$ ó $\frac{221}{7}$, cuya raiz se quiere conocer en menos de $\frac{1}{23}$.

El producto de $\frac{221}{7}$ por $(23)^2$ es $\frac{221\times(23)^2}{7}$, ó efectuando los cálculos indicados en el numerador $\frac{116909}{7}$ y efectuando la division, $16701\frac{2}{7}$, número cuya raiz cuadrada en *menos de una unidad* es 129.

Luego $\frac{129}{23}$ ó $5\frac{14}{23}$ es la raiz cuadrada de $31\frac{4}{7}$ en menos de $\frac{1}{23}$.

Advertencia. En el ejemplo precedente, hemos estraido la raiz de $16701\frac{2}{7}$ haciendo abstraccion de los $\frac{2}{7}$, porque es evidente que si 16701 está comprendido entre los cuadrados de 129 y 130, lo está tambien $16701\frac{2}{7}$.

Esta observacion es aplicable á todos los casos en que solo se tiene necesidad de conocer la parte entera de la raiz cuadrada de un número misto: basta al efecto tomar en cuenta el entero y estraer su raiz en menos de una unidad.

Propondremos para ejercicio los ejemplos siguientes:

$$\sqrt{11}=\frac{49}{15}=3\,\frac{4}{15}\ \text{en menos de}\ \frac{1}{15};$$

$$\sqrt{223}=\frac{597}{40}=14\,\frac{37}{40}\ \text{en menos de}\ \frac{1}{40};$$

$$\sqrt{79\,\frac{8}{11}}=\frac{178}{20}=8\,\frac{18}{20}=8\,\frac{9}{10}\ \text{en menos de}\ \frac{1}{20};$$

$$\sqrt{\frac{7}{13}}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}\ \text{en menos de}\ \frac{1}{30}.$$

El artificio que sirve de base al procedimiento para aproximar la raiz cuadrada de un número, *consiste en comprender el número propuesto entre los cuadrados de dos números fraccionarios, cuyo denominador comun sea el de la fraccion que determina la aproximacion, y cuyos denominadores solo difieran en una unidad.*

183. *La aproximacion en decimales*, que es la mas usada, es una consecuencia de la regla precedente.

Para obtener la raiz cuadrada de un número entero en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$..... es necesario, en virtud de dicha regla, multiplicar el número propuesto por $(10)^2$, $(100)^2$, $(1000)^2$..... es decir, *escribir á la derecha del número dos, cuatro, seis, ocho..... ceros; estraer la raiz cuadrada del producto en menos de una unidad, y luego dividirla por* 10, 100, 1000,.....

En otros términos, *escríbanse á la derecha del número dado tantas veces dos ceros como cifras decimales se deseen: estráigase la parte entera de la raiz cuadrada del nuevo número, y sepárese á la derecha del resultado el número de cifras decimales pedido.*

Sea, por ejemplo, estraer la raiz cuadrada de 7 en menos de $\frac{1}{1000}$.

Escribiendo *seis* ceros á la derecha del 7, se obtiene el número 7000000, cuya raiz cuadrada entera es 2645: así, pues, 2,645 es la raiz pedida: lo cual quiere decir, que la raiz de 7 está comprendida entre 2,645 y 2,646.

Advertencia. Como despues de haber escrito el número necesario de ceros, se tiene que dividir el número en secciones de dos cifras, empezando por la derecha, puede omitirse el escribir los ceros de antemano, añadiendo solo una seccion por cada cifra que se quiera ir obteniendo.

Hé aquí la tabla del cálculo del ejemplo precedente:

$$
\begin{array}{l|llll}
7 & 2645 & & & \\
\cline{2-5}
30.0 & 46 & 524 & 5285 & \\
\quad 240.0 & 6 & 4 & 5 & \\
\qquad 3040.0 & & & & \\
\qquad\; 3975 & & & &
\end{array}
$$

Luego 2,645 es la raiz pedida.

Del mismo modo se hallaria

$$\sqrt{29}=5,38 \text{ en menos de } \frac{1}{100}.$$

$$\sqrt{227}=15,0665 \text{ en menos de } \frac{1}{10000}.$$

Observacion. La fraccion decimal procedente de la raiz cuadrada de un número entero que no es cuadrado perfecto, aunque compuesta de un número *ilimitado* de cifras, nunca puede ser *periódica;* porque si pudiera serlo, como vimos en los números 159 y 160, que toda fraccion periódica equivale á un quebrado ordinario *limitado*, resultaria que un número conmensurable era igual á otro número irracional (n.º 176), lo cual es absurdo.

184. Cuando es fraccionario el número cuya raiz cuadrada se quiere valuar en decimales, pueden presentarse dos casos: ó ser ya *fraccion decimal* el número propuesto, ó ser *quebrado ordinario*. Examinemos sucesivamente los dos casos.

Primer caso. *Propongámonos estraer la raiz cuadrada* de 3,425.

Como segun la regla del n.º 182, se ha de multiplicar este número por $(1000)^2$ ó 1000000, escribiremos *tres* ceros á su derecha, y despues suprimiremos la coma. Así se obtiene 3425000, número cuya raiz en menos de una unidad es 1849.

Luego 1,849 es la raiz pedida, aproximada hasta milésimas.

REGLA GENERAL. *Para estraer la raiz cuadrada de una fraccion decimal se empieza por escribir á la derecha del número dado los ceros necesarios para que el número total de cifras decimales sea* DUPLO *del número de cifras decimales que se quieran en la raiz; despues se prescinde de la vírgula y se estrae la raiz en menos de una unidad, separando luego á la derecha las cifras decimales pedidas.*

Esta regla es una consecuencia del procedimiento (n.° 89) de la multiplicacion de las fracciones decimales; pues segun dicho procedimiento, el *cuadrado* de una fraccion decimal, ó sea el producto de una fraccion por sí misma, debe tener doble número de cifras decimales que la raiz ó cantidad multiplicada en esa forma.

Advertencia. En el ejemplo precedente, si se pidiera la raiz de 3,425 aproximada solo hasta *décimas*, bastaria multiplicar el número dado por $(10)^2$ ó 100, corriendo la coma dos lugares hácia la derecha; y prescindiendo entonces (Advertencia del n.° 182) de la parte que queda á la derecha de la coma, se estraeria la raiz entera de 342, que sería 18; y por consiguiente 1,8 sería la raiz la del número propuesto.

SEGUNDO CASO. Para valuar en decimales la raiz cuadrada de un número cualquiera fraccionario, *se reduce primero á decimales por la regla del* n.° 91, *y se continúa la operacion hasta tener dos veces tantas cifras decimales como se quieran en la raiz, operando despues como en el caso anterior.*

Sea, por ejemplo, *estraer la raiz cuadrada* de $\frac{310}{13}$ *aproximada hasta centésimas.*

Convirtiendo en decimal el número dado, resulta $\frac{310}{13} =$ 23,8461, de donde, aplicando la regla del primer caso,

$$\sqrt{\frac{310}{13}} = \sqrt{23,8461} = 4,88,$$

aproximada hasta *centésimas.*

Hé aquí nuevas aplicaciones de las dos reglas precedentes:

$\sqrt{31,027}=5,570$ aproximada hasta *milésimas*;

$\sqrt{0,01001}=0,10004$ aproximada hasta *cien-milésimas*;

$\sqrt{2\frac{13}{15}}=1,693$ aproximada hasta *diez-milésimas*;

$\sqrt{\frac{11}{14}}=0,886$ aproximada hasta milésimas.

OBSERVACIONES IMPORTANTES *sobre la estraccion de la raiz cuadrada de las fracciones.*

185. Hasta ahora hemos supuesto que en la valuacion aproximada de las raices, se indicaba de antemano el grado de su aproximacion, siendo consecuencias de esta hipótesis las transformaciones que hacíamos en los números propuestos. Pero hay cuestiones numéricas que no fijan por el pronto el grado de aproximacion; y entonces es necesario al menos preparar los números de modo que podamos despues saber claramente el grado de aproximacion obtenido en el resultado.

Para esplicarnos mejor, propongámonos *estraer la raiz cuadrada* de una fraccion $\frac{a}{b}$, cuyo denominador es un número primo, ó en caso de no serlo, consta solo de factores primos elevados á la primera potencia, como son los números 13, $14=2\times7$, y $15=3\times5$.

Multiplicando por el denominador b los dos términos del quebrado propuesto, se obtiene $\frac{ab}{b^2}$; y si se designa por r la parte entera de la raiz del numerador ab, resultará que $\frac{ab}{b^2}$ ó $\frac{a}{b}$, está comprendido entre $\frac{r^2}{b^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{b^2}$. Luego la raiz cuadrada de $\frac{a}{b}$ estará tambien comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; y por consiguiente $\frac{r}{b}$ representa la raiz de $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{b}$, es decir, como ya se ha esplicado, faltándole menos de $\frac{1}{b}$ para ser la verdadera.

Aquí solo se aproxima el resultado hasta $\frac{1}{b}$, como acabamos de esplicar. Si se quisiera mayor grado de aproximacion, se podria buscar la raiz cuadrada de ab aproximada hasta la fraccion $\frac{1}{n}$, por ejemplo. (V. el n.º 182.) Designando entonces por $\frac{r'}{n}$ el valor de la raiz, tendriamos $\sqrt{ab}$ comprendido entre $\frac{r'}{n}$ y $\frac{r'+1}{n}$, y por consiguiente $\sqrt{\frac{ab}{b^2}}$ ó $\sqrt{\frac{a}{b}}$ estaria comprendido entre $\frac{r'}{nb}$ y $\frac{r'+1}{nb}$.

Así pues $\frac{r'}{nb}$ sería el valor de $\sqrt{\frac{a}{b}}$, aproximada hasta faltarle menos del quebrado $\frac{1}{nb}$ para ser la verdadera.

Propongámonos por ejemplo, la fraccion $\frac{7}{13}$. Este quebrado equivale á $\frac{7\times 13}{(13)^2}$ ó $\frac{91}{(13)^2}$. La raiz cuadrada de 91 es 9 en menos de una unidad, luego la raiz pedida es $\frac{9}{13}$, en menos de $\frac{1}{13}$.

Si se quiere mayor grado de aproximacion, se estrae la raiz de 91 aproximada hasta centésimas (n.º 183), que es 9,53; y entonces la raiz buscada será

$$\sqrt{\frac{7}{13}}=\frac{9,53}{13}=\frac{953}{1300}, \text{ en menos de } \frac{1}{1300}.$$

Advertencia. En este ejemplo al buscar la raiz de $\frac{7}{13}$, hemos hallado $\frac{9}{13}$, es decir, un quebrado *mayor* que el propuesto. Y así debia ser, porque el cuadrado de un quebrado es el producto del quebrado por sí mismo, y en la multiplicacion de los quebrados propios (n.º 60), siempre es el producto menor que uno cualquiera de los factores.

El artificio de la transformacion precedente, que consiste en *multiplicar por el denominador los dos términos del quebrado,* tiene por objeto hacer *cuadrado perfecto* al denominador, á fin de que el valor aproximado de la raiz que nos proponemos estraer, esté representado por un quebrado exacto y se pueda juzgar del grado de aproximacion obtenida. Ya habíamos dicho (n.º 8) que no podemos formar idea clara de un quebrado ó de un número fraccionario, sino concibiendo *la unidad dividida en un número exacto de partes iguales* y *tomando de ellas un número determinado.*

186. Hay casos en que puede hacerse cuadrado perfecto el denominador de una fraccion sin que haya necesidad de multiplicar por él mismo ambos términos. Tales son aquellos quebrados cuyo denominador contiene ya desde luego algun factor cuadrado. En este caso basta *multiplicar los dos términos del quebrado por el factor que en el denominador no es cuadrado perfecto.*

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{23}{48}$.

Observamos que 48 equivale á 16×3 ó $(4)^2 \times 3$; así, pues, multiplicando por 3 ambos términos, tendremos $\frac{23 \times 3}{(4)^2 \times (3)^2}$, ó $\frac{69}{(12)^2}$; siendo así el denominador cuadrado perfecto.

Estrayendo ahora la raiz de 69 aproximada hasta décimas, por ejemplo, obtenemos 8,3; luego $\frac{8,3}{12}$ ú $\frac{83}{120}$ es la raiz pedida aproximada hasta $\frac{1}{120}$.

A esta modificacion se refiere la preparacion que debe darse á toda fraccion decimal cuando se le quiere estraer la raiz cuadrada; preparacion que consiste *en hacer* PAR (si no lo es) *el número de cifras decimales.*

Sea, por ejemplo, la fraccion decimal 5,249.

Como el denominador de este quebrado es 1000 ó 100×10, basta multiplicar por 10 sus dos términos para que el denominador sea cuadrado perfecto, lo cual se consigue añadiendo un *cero* á la derecha del número propuesto; así se obtiene 5,2490. Estrayendo ahora la raiz de 52490 en menos de una unidad, hallamos 229: luego 2,29 es la raiz pedida aproximada hasta centésimas.

187. Casi todos los autores, al dar cuenta de la estraccion de la raiz cuadrada por aproximacion, sientan por *principio* que para estraer la raiz cuadrada de un quebrado *se estrae la del numerador y la del denominador*. Este principio es evidente (n.º 182) cuando ambos términos son cuadrados perfectos; pero deja de serlo, cuando los términos no tienen raiz cuadrada exacta ó son dos números cualesquiera. Por eso nosotros solo hemos sentado ese principio para el caso de ser cuadrados perfectos los dos términos. Despues hemos visto que era cierto (n.os 183 y 185) en el caso de ser cuadrado perfecto solo el denominador; y ahora podemos ya *admitirle para toda especie de fracciones*, sin inconveniente alguno en las aplicaciones numéricas; porque en último resultado para valuar la raiz cuadrada de una fraccion, se ha de hacer siempre cuadrado perfecto al denominador.

188. Escolio general.—Resulta evidentemente de los principios que se acaban de esplicar, que dado un número entero siempre puede obtenerse la espresion exacta de su raiz, si el número es cuadrado perfecto, y si no lo es, un valor tan aproximado como se quiera de su raiz verdadera: lo mismo sucede con los números fraccionarios.

Estos principios son completamente independientes del sistema de numeracion que se use; es decir, que los procedimientos esplicados para estraer la raiz cuadrada de los números, tanto enteros como fraccionarios, en el sistema decimal, serían absolutamente semejantes en otro cualquier sistema de numeracion. Para familiarizarse con las reglas, harán bien los principiantes en estraer raices, usando otro sistema de numeracion, por ejemplo, el duodecimal: pronto conocerán que para estraer la raiz á los números enteros, basta observar las reglas dadas en los n.os 179 y 183; y que para estraer la de las fracciones se han de preparar de un modo análogo al esplicado en los n.os 184, 185 y 186.

Ultimamente, es tal la naturaleza de los números cuadrados perfectos en el sistema decimal, que aun cuando se espresen en otro cualquier sistema, no dejan por eso de ser cuadrados perfectos; los números que no tienen raiz exacta en el sistema decimal, tampoco la tienen en cualquiera otro. Así los números *cuatro*, *nueve*, *diez y seis*,..., *cuarenta y nueve*,..., *noventa y uno*, son cuadrados perfectos en todos los sistemas; y los números *dos*, *tres*,..., *siete*,..., *once*, no tienen raiz exacta en ninguno. Esto procede de que la proposicion del número 176 está fundada en principios demostrados (n.os 129 y 130) independientemente de todo sistema particular de numeracion.

§. II. Formacion del cubo y estraccion de la raiz cúbica de los números.

189. Se llama *cubo ó tercera potencia de un número* el producto de tres factores iguales al mismo número, y *raiz cúbica* ó *raiz tercera* de un número, otro número cuyo cubo es igual al número propuesto.

La formacion del cubo de un número entero ó fraccionario se reduce por consiguiente á dos multiplicaciones sucesivas, que se efectúan por las reglas conocidas.

Los cubos de los diez primeros números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

son respectivamente

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.$$

Para formarlos se dice, por ejemplo, siendo el cubo de 7 igual á $7 \times 7 \times 7$, tendremos primero 7×7 son 49, y 7 veces 49 son 343. Lo mismo se forman los otros.

Recíprocamente los números de la segunda línea, que hemos puesto, tienen por *raices cúbicas* á los de la primera.

A la simple inspeccion de las dos líneas de números de que nos ocupan, se conoce que entre los números de una, dos, ó tres cifras, solo hay *nueve* que sean *cubos perfectos:* cada uno de los demas tiene por raiz cúbica un entero, mas una fraccion que *no puede espresarse exactamente*. En efecto, admitamos por un momento que un número entero N tiene por raiz cúbica exacta un número fraccionario tal como $\frac{a}{b}$: sería menester que elevando este número $\frac{a}{b}$ al cubo, resultára otra vez N. Pero esto es imposible, porque $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, dá por resultado $\frac{a^3}{b^3}$; y como siempre se puede suponer que $\frac{a}{b}$ es irreducible, resulta que a y b son primos entre sí; luego tambien lo serán a^3 y b^3; luego $\frac{a^3}{b^3}$ es un número fraccionario irreducible y no puede ser igual al número entero N.

Las raices de los números enteros que no son cubos exactos de otros números enteros no pueden segun esto obtenerse exactamente, y *son por lo tanto números* IRRACIONALES *ó* INCONMENSURABLES (n.° 176).

190. Así como para descubrir el procedimiento de la estraccion de la raiz cuadrada de un número entero cualquiera, hemos tenido precision de apoyarnos en la espresion del cuadrado de un *binomio* $(a+b)$, es decir, en la espresion del cuadrado de la *suma de dos cantidades*, así tambien para la estraccion de la raiz cúbica, es indispensable conocer la composicion del cubo de la misma suma $(a+b)$.

Ya encontramos (n.° 177) que

$$(a+b)^2 \text{ ó } (a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

Si multiplicamos por $(a+b)$ este primer resultado, segun la regla establecida (n.° 112) para la multiplicacion de un polinomio por otro, y hacemos la reduccion de términos semejantes, obtendremos

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+2ab^2 \\ +a^2b+ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Hagamos en esta fórmula $b=1$, y se convertirá en

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1;$$

de donde se deduce

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1;$$

lo cual nos dice que *la diferencia entre los cubos de dos números cualesquiera que difieren en una unidad, es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del mismo menor, mas la unidad.*

Así, la diferencia entre el cubo de 90 y el de 89 es igual á

$$3\times(89)^2+3\times89+1=24031.$$

Por esto podrá juzgarse cuánto difieren entre sí dos cubos perfectos consecutivos, cuando sus raices tomadas en la série natural de los números son algo considerables.

191. Busquemos ahora un procedimiento *para estraer la raiz cúbica de los números enteros.*

Por lo pronto, si el número no tiene mas de tres cifras, *su raiz se obtiene inmediatamente por medio de la simple inspeccion de los cubos de los nueve primeros números naturales.* Así, la raiz cúbica de 125 es 5; la raiz cúbica de 72 es 4 y una fraccion, ó 4 en menos de una unidad; la raiz cúbica de 841 es 9 en menos de una unidad, puesto que 841 cae entre 729, cubo de 9, y 1000, cubo de 10.

Consideremos, pues, ahora un número de mas de tres cifras.

Sea, por ejemplo, 103823 el número propuesto.

$$\begin{array}{r|l} 103,823 & 4 \\ \underline{64} & \overline{48} \\ 398.23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{48} \\ 384 \\ \underline{192} \\ 2304 \\ \underline{48} \\ 18432 \\ \underline{9216} \\ 110592 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 47 \\ \underline{47} \\ 329 \\ \underline{188} \\ 2209 \\ \underline{47} \\ 15463 \\ \underline{8836} \\ 103823 \end{array}$$

Hallándose el número dado comprendido entre 1000, cubo de 10, y 1000000, cubo de 100, su raiz cúbica se compondrá necesariamente de dos cifras, es decir, de decenas y unidades. Designemos por a las decenas y por b las unidades; tendremos (n.º 190)

$$103823 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Donde se ve que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades contiene *el cubo de decenas, mas el triplo del producto del cuadrado de decenas por unidades, mas el triplo del producto de decenas por el cuadrado de unidades, mas el cubo de unidades.*

Esto supuesto, no pudiendo el cubo de decenas dar unidades de órden inferior á los *millares*, se infiere que no formarán parte de el dicho cubo las tres últimas cifras á la derecha del número dado: de modo que el cubo de decenas se hallará precisamente en las cifras 103 (que separamos de las otras por medio de un punto). Siendo 4 la raiz del mayor cubo contenido en 103, será 4 la cifra de las decenas de la raiz buscada; porque 103823 está comprendido en 64000 ó $(40)^3$ y 125000, ó $(50)^3$; luego la raiz consta de 4 decenas, mas cierto número de unidades menor que *diez*.

Hallada ya la cifra de decenas, restemos su cubo 64 de 103: nos queda 39, que seguido de la seccion 823, dá 39823: este resultado contiene todavía el *triplo del producto del cuadrado de decenas por unidades*, mas las otras partes antes enunciadas. Como el cuadrado de un número de decenas no puede dar unidades de órden inferior al de centenas, se infiere que el triplo del producto del cuadrado de decenas por unidades solo puede hallarse en el 398 y no en las cifras 23 de decenas y unidades (que separaremos con un punto). Aquí podemos formar el triplo del cuadrado de las 4 decenas, lo cual dá 48; luego si dividimos 398 por 48, el cociente 8 será la cifra de las unidades de la raiz ó un número mayor; porque las 398 centenas contienen, además del triple producto del cuadrado de decenas por unidades, las centenas procedentes de las otras dos partes del cubo. Para comprobar si la cifra 8 es la verdadera, se podrian formar, como en la raiz cuadrada, con ella y con la cifra 4 de decenas, las tres partes que entran en 39823; pero en general *suele ser mas sencillo elevar* el 48 al cubo.

Hecha esa elevacion se obtiene 110592, número mayor que 103823; por consiguiente la cifra 8 es demasiado grande. Le rebajamos una unidad, y formando el cubo de 47, obtenemos

103823; luego el número propuesto es un cubo perfecto, cuya raiz es 47.

Advertencia. No se puede empezar por buscar la cifra de las unidades, porque las decenas y aun centenas (n.º 189) que han podido resultar de su cubo, se encuentran confundidas con las procedentes de las otras partes del cubo.

Propongámonos ahora estraer la raiz cúbica de 47954.

47.954	36	36
27	27	36
209		216
		108
		1296
47954		36
46656		7776
1298		3888
		46656

Hallándose comprendido el número 47954 entre 1000 y 1000000, su raiz cúbica debe estar comprendida entre 10 y 100; de modo que tendrá decenas y unidades. El cubo de las decenas está en los 47 *millares;* y probaríamos facilmente como en el ejemplo anterior que 3, raiz del mayor cubo contenido en 47, espresa dicho número de decenas. Restando de 47 el cubo de 3, que es 27, obtenemos el resíduo 20: bajando á su lado la cifra 9 de la seccion 954, tenemos 209 *centenas*, que son el *triple producto del cuadrado de decenas por unidades*, mas las *centenas* procedentes de las restantes partes del cubo. Luego, si formamos el triplo del cuadrado de las 3 decenas, que son 27 *centenas*, y dividimos el 209 por 27, el cociente 7 será la cifra de unidades ó un número mayor. Para comprobarlo, elevamos al cubo el 37, y obtenemos 50653, número mayor que 47954; luego la cifra 7 es demasiado grande: formamos, pues, el cubo de 36, y obtenemos 46656, número que, restado de 47954, dá el resíduo 1298. Por consiguiente el número propuesto no es cubo perfecto; y su raiz aproximada en menos de una unidad es 36. En efecto, la diferencia entre el número propuesto y el cubo de 36, es, como acabamos de ver, 1298, número menor que $3\times(36)^2+3\times36+1$ [diferencia entre $(36)^3$ y $(37)^3$], puesto que en el discurso de la operacion hemos visto que solo el triplo del cuadrado de 36 valia ya 3888.

192. Propongámonos ahora estraer la raiz cúbica de un número de mas de seis cifras, por ejemplo, de 43725658.

43.725.658	352		
27	27	35	352
		35	352
167		175	704
		105	1760
43725		1225	1056
42875		35	123904
8506		6125	352
		3675	247808
43725658		42875	649520
43614208			371712
Resíduo... 111450			43614208

Cualquiera que sea la raiz buscada, tiene necesariamente mas de una cifra; y se puede considerar compuesta de unidades y decenas solamente (advirtiendo que las decenas podrán constar de varias cifras).

El cubo de decenas dá á lo menos *millares*, por consiguiente se encuentra en la parte del número que está á la izquierda de sus tres primeras cifras 658. Ahora digo yo que si estraemos la raiz del mayor cubo contenido en 43725, considerado como unidades simples, tendremos el número total de las decenas de la raiz buscada. En efecto, sea a la raiz del mayor cubo contenido en 43725; se infiere desde luego que la raiz pedida tiene al menos un número a de decenas, pues $a^3 \times 1000$ puede restarse de 43725000, y *à fortiori*, de 43725658. Pero la raiz no podria tener $(a+1)$ decenas; porque siendo $(a+1)^3$ mayor que 43725, es claro que $(a+1)^3 \times 1000$ escederá á 43725000 al menos en *un millar*, y por tanto es mayor que 43725658. Luego finalmente la raiz pedida consta de un número a de decenas, mas un número de unidades menor que *diez*.

Con esto queda ahora la cuestion reducida á estraer la raiz cúbica de 43725; pero como este número tiene mas de tres cifras, su raiz tendrá mas de una, de modo que constará de decenas y unidades. Para obtener las decenas debemos separar las tres últimas cifras, 725, y estraer la raiz cúbica del mayor cubo contenido en 43. (Bien se comprende lo que deberia hacerse si este nuevo número tuviera mas de tres cifras.)

El mayor cubo contenido en 43 es 27, cuya raiz es 3, cifra que espresa el número de decenas de la raiz de 43725 (ó el de centenas de la raiz total). Restando de 43 el cubo de 3, que es 27, obtenemos el resíduo 16, á cuyo lado debemos bajar la primera cifra, 7, de la seccion siguiente 725, obteniendo así el número 167.

Formando el triplo del cuadrado de las 3 decenas, hallamos 27 *millares;* y si dividimos 167 por 27, el cociente 6 será la cifra de unidades de la raiz 43725, ó un número mayor. Fácilmente se comprueba que es en efecto mayor; ensayaremos por consiguiente el 5, elevando 35 al cubo: obtenemos 42875, número que restado de 43725, dá el resíduo 850. (Este resíduo es evidentemente menor que $3\times(35)^3+3\times35+1$, porque solo el cuadrado de 35, como en el ejemplo de arriba se ve, es igual á 1225.) Luego 35 es la raiz del mayor cubo contenido en 43725; luego 35 es el *número total de las decenas de la raiz buscada.*

Para obtener las unidades, se baja al lado del resíduo 850 la primer cifra, 6, de la seccion siguiente 658, lo cual dá 8506: se forma además el triplo del cuadrado de las 35 decenas (lo cual es fácil, porque en la comprobacion de la cifra anterior se formó ya el cuadrado de 35); despues se divide 8506 por dicho triplo, que es 3675: el cociente es 2, que se ensaya elevando al cubo el número 352: así se obtiene 43614208, número menor que el propuesto. Restándole de este, se obtiene el resíduo 111450. Luego 352 es la raiz cúbica de 43725658, en menos de una unidad.

Regla general. *Para estraer la raiz cúbica de un número entero, se divide el número en secciones de á tres cifras, principiando por la derecha, hasta que solo queden á la izquierda una, dos ó tres cifras á lo mas* (EL NÚMERO DE SECCIONES ES IGUAL AL NÚMERO DE CIFRAS DE LA RAIZ); *se estrae la raiz cúbica del mayor cubo contenido en la primera seccion de la izquierda; restando despues dicho cubo de la misma seccion, al lado del resíduo se baja la primera cifra de la segunda seccion, y el número resultante se divide por el triplo del cuadrado de la cifra hallada de la raiz: el cociente se escribe á la derecha de dicha raiz, y se eleva al cubo el número que forman ambas cifras: si el cubo resultante es mayor que las dos pri-*

meras secciones del número propuesto, se rebajan al cociente una ó mas unidades hasta obtener un cubo que pueda restarse de las dos primeras secciones; hecha la sustraccion, se baja al lado del resto la primera cifra de la tercera seccion, y el número así formado se divide por el triplo del cuadrado de las dos cifras halladas de la raiz; el cociente, si no es demasiado grande, será la cifra tercera de la raiz, y elevando al cubo el número formado por las dos cifras halladas y el cociente, el resultado podrá restarse del conjunto de las tres primeras secciones. Hecha esta nueva sustraccion, se baja al lado del resto la primera cifra de la cuarta seccion, continuando la misma série de operaciones hasta bajar la última seccion.

Observacion. Muchas veces en el discurso de la operacion, sospechando que uno de los cocientes es mayor de lo debido, le rebajamos una ó mas unidades; y luego al elevar al cubo la raiz hallada y restar del conjunto correspondiente de secciones del número dado, podemos obtener un resíduo que nos parezca escesivamente grande, haciéndonos por consiguiente creer que hemos rebajado demasiado la cifra ó cociente antedicho. Para asegurarnos entonces de la verdad, veremos si el resíduo es igual ó escede *á la suma del triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas uno;* y si así fuera, deberian aumentarse una ó mas unidades al último cociente.

A continuacion ponemos algunos ejemplos para que sirvan de ejercicio:

$\sqrt[3]{483249}=78$, quedando el resíduo 8697.

$\sqrt[3]{91632508641}=4508$, con el resíduo 20644129.

$\sqrt[3]{32977340218432}=32068$, exactamente.

193. *Estraccion de la raiz cúbica por aproximacion.* Cuando el número propuesto no es el cubo de otro número entero, el procedimiento enseñado nos dá solamente la parte entera de la raiz. Ya vimos en el n.º 189, que era imposible obtener exactamente la fraccion que debe completar la raiz hallada; pero eso no obstante podemos obtener una fraccion que difiera de aquella en una cantidad menor que cualquiera otra dada,

por pequeña que sea, siguiendo una regla análoga á la del número 182.

Propongamos, en general, *estraer la raiz cúbica ó tercera de un número* a (entero ó fraccionario), *aproximada hasta faltarle menos del quebrado* $\frac{1}{n}$ *para ser la verdadera.*

El número a puede ponerse bajo la forma $\frac{a \times n^3}{n^3}$; y si designamos por r la raiz cúbica del mayor cubo contenido en an^3, en menos de una unidad, el número $\frac{an^3}{n^3}$, ó a, estará comprendido entre $\frac{r^3}{n^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{n^3}$; luego tambien $\sqrt[3]{a}$ estará comprendida entre las terceras raices de esos dos números, es decir, entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$; luego finalmente $\frac{r}{n}$ es la raiz pedida en menos de $\frac{1}{n}$.

Así, pues, *para estraer la raiz tercera de un número en menos de una fraccion cualquiera* $\frac{1}{n}$, *se multiplica el número por el cubo del denominador* n; *se estrae la raiz entera del producto, y el resultado se divide por el mismo denominador* n.

Ejemplo. *Se pide la raiz cúbica de* 15, *en menos de* $\frac{1}{12}$.

Tendremos $15 \times 12^3 = 15 \times 1728 = 25920$. La raiz cúbica entera de 25920 es 29. Luego la raiz pedida es $\frac{29}{12}$, ó $2\frac{5}{12}$.

Sea tambien *estraer la raiz cúbica de* $37\frac{8}{13}$, ó $\frac{489}{13}$, *en menos de* $\frac{1}{20}$.

Tenemos $\frac{489}{13} \times (20)^3 = \frac{489 \times 8000}{13} = \frac{3912000}{13} = 300913\frac{1}{13}$.

La raiz cúbica entera de 300913 $\frac{1}{13}$, ó de 300913, que es lo mismo en este caso, es 67; luego $\frac{67}{20}$, ó 3 $\frac{7}{20}$, es la raiz pedida, en menos de $\frac{1}{20}$.

Del mismo modo hallaríamos

$$\sqrt[3]{47}=\frac{72}{20}=3\,\frac{12}{20}=3\,\frac{3}{5},\text{ en menos de }\frac{1}{20}:$$

$$\sqrt[3]{23\,\frac{7}{8}}=\frac{37}{13}=2\,\frac{11}{13},\text{ en menos de }\frac{1}{13}:$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15},\text{ en menos de }\frac{1}{30}.$$

194. La aproximacion en decimales es una consecuencia de la regla precedente.

Propongámonos valuar $\sqrt[3]{25}$ *con menos de* 0,001 *de error.*

Para esto es menester (n.º 193) multiplicar 25 por el cubo de 1000, que es 1000000000: escribiremos, pues, *nueve* ceros á la derecha del 25, y tendremos 25000000000. La raiz cúbica entera de este número es 2924; luego 2,924 será la raiz cúbica pedida, con menos de $\frac{1}{1000}$ de error, ó en menos de 0,001.

En general, *para valuar en decimales la raiz cúbica de un número entero, se escriben á la derecha del número tantas veces* TRES *ceros como cifras decimales se quieran en la raiz: se estrae la raiz cúbica entera del resultado, y á la derecha de esta raiz se cortan con una vírgula las cifras decimales pedidas.*

Advertencia. No es necesario escribir desde el principio todas las secciones de ceros: se pueden ir escribiendo á medida que se van necesitando, como se hizo en la raiz cuadrada (n.º 183).

195. Cuando el número propuesto es fraccionario, hay que

considerar dos casos: ó el número dado es *decimal*, ó es *quebrado comun*.

PRIMER CASO. *Sea estraer la raiz cúbica de* 3,1415, *en menos de* $\frac{1}{100}$.

Como en virtud de la regla del n.º 193 se ha de multiplicar el número por $(100)^3$, ó 1000000, basta evidentemente escribir *dos* ceros á la derecha de 3,1415, suprimiendo despues la vírgula, lo cual dá 3141500. La raiz cúbica entera de este número es 146; luego 1,46 es la raiz pedida, en menos de 0,01 de error.

Si se quisiera en la raiz otra cifra decimal, bastaria añadir á la derecha del resto obtenido una nueva seccion de *tres* ceros, procediendo despues segun costumbre.

REGLA GENERAL. Para estraer la raiz cúbica de una fraccion decimal con determinado grado de aproximacion, *hágase de modo* (escribiendo á la derecha de la fraccion un número conveniente de ceros) *que el número de cifras decimales sea* TRIPLE *del número de cifras que se quieren en la raiz; se suprime la vírgula; se estrae la raiz cúbica entera del número resultante, y á la derecha de esta raiz se separa el número pedido de cifras decimales.*

SEGUNDO CASO. Cuando se trata de un número fraccionario comun, *se reduce primero á decimales* (n.º 91), *continuando la operacion hasta tener en el cociente* TRES VECES *tantas cifras decimales como se quieran luego en la raiz: despues se procede como en el caso anterior.*

Hé aquí nuevas aplicaciones:

$\sqrt[3]{79}=4,2908$, aproximada hasta *diez-milésimas.*

$\sqrt[3]{3,00415}=1,4429$, aproximada hasta *diez-milésimas.*

$\sqrt[3]{0,00101}=0,10$, aproximada hasta *centésimas.*

$\sqrt[3]{\frac{14}{25}}=0,824$, aproximada hasta *milésimas.*

196. *Observacion sobre la estraccion de la raiz cúbica de las fracciones.*

Siempre que se ha de estraer la raiz cúbica de una fraccion, y no se fija de antemano el grado de aproximacion, conviene hacer sufrir al número dado ciertas transformaciones, como en la raiz cuadrada (n.° 185).

Sea $\frac{a}{b}$ el número propuesto, suponiendo que b es un número primo, ó un producto de factores primos elevados á la primera potencia.

Empecemos por hacer cubo perfecto al denominador, multiplicando por b^2 los dos términos de la fraccion, que entonces es $\frac{ab^2}{b^3}$. Designando por r la parte entera de la raiz cúbica de ab^2, se reconoce facilmente que $\frac{ab^2}{b^3}$, ó $\frac{a}{b}$, está comprendido entre $\frac{r^3}{b^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{b^3}$. Luego $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ estará tambien comprendido entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; luego $\frac{r}{b}$ es la raiz cúbica de $\frac{a}{b}$, con menos error que el designado por el quebrado $\frac{1}{b}$.

Si se quisiera mayor exactitud, sería preciso buscar un valor mas aproximado de $\sqrt[3]{ab^2}$, y dividir el resultado por b.

Cuando el denominador b contiene factores que son cubos perfectos y otros que son cuadrados perfectos, es mas fácil la preparacion de la fraccion.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{113}{360}$.

El número 360 es igual (n.° 144) á $2.3^2.5$; luego si se multiplican los dos términos de la fraccion por 3×5^2, ó 75, la fraccion podrá ponerse bajo la forma

$$\frac{113\times75}{2^3\times3^3\times5^3}=\frac{8475}{(30)^3}.$$

Estrayendo la raiz cúbica entera de 8475, lo cual dá 20, se encuentra $\frac{20}{30}$, ó $\frac{2}{3}$, que será la raiz pedida, con menos de $\frac{1}{30}$ de error.

La regla de la estraccion de la raiz cúbica de las fracciones decimales puede considerarse como un caso particular de esta última transformacion.

Para que el denominador de una fraccion decimal *sea cubo perfecto*, es decir, sea igual á $(10)^3$, $(1000)^3$,...., es necesario *hacer múltiplo de* TRES *el número de sus cifras decimales*, escribiendo á su derecha un número conveniente de ceros.

En fin, todo cuanto se ha dicho en los n.os 187 y 188, sobre la raiz cuadrada de los números, se aplica igualmente á la raiz cúbica, y en general á las raices de cualquier grado.

Sin embargo, en estos Elementos no podemos nosotros esponer los procedimientos de la estraccion de las raices de un grado superior al tercero, porque estan sus reglas fundadas en la composicion de las potencias de un binomio, y la *fórmula* á ellas relativa exige para su completo desarrollo conocimientos bastante estensos de Álgebra. Esto no obstante, en el último capítulo de esta obra daremos un método abreviado para estraer las raices de todos los grados.

CAPITULO VII.

Aplicaciones de las reglas de Aritmética.—Teoría de las razones y proporciones.

197. *Introduccion.* Despues de haber esplicado los procedimientos relativos á las diversas operaciones de la Aritmética, nos queda por cumplir una tarea bastante dificil, que es la de instruir á los principiantes en la resolucion de toda especie de cuestiones relativas á los números.

Se distinguen dos géneros principales de cuestiones, los teoremas y los problemas.

Ó nos podemos proponer el demostrar la existencia de ciertas propiedades pertenecientes á números conocidos y dados, en cuyo caso la cuestion toma el nombre de *teorema*. El capítulo V ofrece una multitud de cuestiones de este género; los principios relativos á la divisibilidad de los números, las propiedades de las fracciones decimales periódicas y las fracciones contínuas, son otros tantos teoremas.

Ó bien nos proponemos determinar ciertos números por el conocimiento de otros, con los cuales tienen relaciones indicadas en el enunciado; y entonces es un *problema* lo que se quiere resolver. Tales son las cuestiones que hemos presentado en el curso de los dos primeros capítulos, como aplicaciones de las diversas reglas de Aritmética.

Pero se presentan á veces problemas mas complicados, cuyos enunciados son tales, que cuesta algun trabajo *el descubrir y determinar la série de operaciones que deben efectuarse con los números conocidos y dados, para llegar al conocimiento de los números buscados;* esta determinacion constituye lo que se llama *análisis* ó *resolucion* del problema.

Existe, sin embargo, cierta clase de problemas para cuya resolucion pueden darse reglas fijas y seguras: tales son los que dependen de la teoría de las razones y proporciones. Por consiguiente es natural empezar por el desarrollo de esta teoría, que á causa de sus numerosas aplicaciones, debe considerarse como una de las mas importantes de la Aritmética.

§. I. De las razones y proporciones.

198. Ya dijimos (n.º 1) que no hay magnitud absoluta; que para formarnos idea de una magnitud cualquiera, es preciso compararla con otra convenida de la misma especie, que puede tomarse arbitrariamente ó en la naturaleza. El resultado de la comparacion es lo que hemos llamado *número*.

Pero si en lugar de comparar una cantidad con su unidad, queremos comparar dos cantidades cualesquiera de igual especie, lo cual equivale á comparar los *dos* números que las espresan, el *resultado de la comparacion* constituye entonces *la razon* de dichos dos números. La palabra *razon* en Matemáticas significa la idea que nos formamos de una cantidad, por medio de otra con la cual se compara, y que debe ser esencialmente de la misma especie.

En este sentido, *un número* es la espresion de la razon entre una cantidad y su *unidad*.

En general *hay dos modos de comparar entre sí dos cantidades.*

Ó bien queremos saber en cuánto escede la mayor á la menor; y el resultado se obtiene restando la menor de la mayor.

Ó bien se quiere saber cuántas veces contiene una á otra, lo que se hace dividiendo la primera por la segunda.

Así, sean 24 y 6 los dos números que se quieren comparar.

Tenemos $$24-6=18, \text{ y } \frac{24}{6}=4.$$

El resultado de la comparacion por sustraccion es 18; y el resultado de la comparacion por division es 4.

Para distinguir estas dos especies de razones, se acostumbraba antiguamente llamar á la primera *razon aritmética* y á la segunda *razon geométrica*. En el dia, con mejor acuerdo, suprimidas esas denominaciones, se llama la primera *razon por diferencia*, ó simplemente *diferencia*, porque es el resultado de una sustraccion; y la segunda *razon por cociente*, porque su objeto es ver cuántas veces contiene una cantidad á otra, ó simplemente *razon*, por ser la que con mas frecuencia ó casi siempre ocurre.

Por ejemplo, en la teoría de los números complejos, *la razon de la unidad principal* de cierta naturaleza *á una de sus subdivisiones*, ó *la razon de dos subdivisiones entre sí*, no es mas que el número de veces que una de ellas contiene á la otra. En la comparacion del nuevo Sistema de pesos y medidas con el antiguo, *la razon del metro á la vara*, y la *de la vara al metro*, *la razon del kilógramo á la libra*, y la *de la libra al kilógramo*, son números enteros ó fraccionarios procedentes de la division de dos números, que *en unidades de la misma especie*, espresan las medidas que se comparan.

Así, pues, en adelante cuando nos servimos de la palabra *razon*, significamos *el resultado ó cociente de la division de dos números*; y si queremos espresar que hemos comparado entre sí dos números por sustraccion, usaremos la denominacion de *razon por diferencia*, ó simplemente de *diferencia*.

En toda razon, sea por cociente, sea por diferencia, se distinguen dos *términos*, que son los números que se comparan. El término que se enuncia ó se escribe primero se llama *antecedente*, y el otro *consecuente*.

199. Cuando dos razones por diferencia son iguales, el conjunto de los cuatro términos que las constituyen se llama *equi-diferencia*, por ser la espresion de dos diferencias iguales. (Antes se llamaba *proporcion aritmética*.)

Por ejemplo, sean los cuatro números 12, 5, 24, 17; como la diferencia entre 12 y 5 es 7, y la diferencia entre 24 y 17 es tambien 7, se dice que estos números forman una equi-diferencia, que se escribe así:

$$12 \,.\, 5 : 24 \,.\, 17,$$

colocando *un* punto entre el primero y segundo término, *dos* puntos entre el segundo y tercero, y *un* punto entre el tercero y cuarto.

La equi-diferencia se enuncia de la manera siguiente:

12 *es á* 5, *como* 24 *es á* 17;

lo cual quiere decir que 12 escede á 5 en tantas unidades como 24 escede á 17.

Tambien se puede escribir de este otro modo, en virtud de las notaciones antes admitidas:

$$12-5=24-17.$$

Los términos primero y tercero, 12 y 24, se llaman *antecedentes* de la equi-diferencia; el segundo y el cuarto, 5 y 17, se llaman *consecuentes:* estas denominaciones estan conformes con las dadas á los términos de la razon por diferencia.

Los términos primero y cuarto, 12 y 17, se llaman tambien *estremos;* el segundo y tercero, 5 y 24, se llaman *medios*.

200. Cuando dos razones por cociente son iguales, el conjunto de los cuatro números que las constituyen se llama *proporcion* (antes se llamaba *proporcion geométrica;* podria llamarse *equi-cociente;* pero está generalmente adoptado el nombre de proporcion).

Sean, por ejemplo, los cuatro números 15, 5, 36, 12; la razon de 15 á 5, ó el cociente de 15 por 5, es 3, lo mismo que la razon de 36 á 12; por consiguiente esos cuatro números forman una *proporcion*, que se escribe así:

$$15 : 5 :: 36 : 12,$$

colocando *dos* puntos entre los números primero y segundo, *cuatro* entre el segundo y el tercero, y *dos* entre el tercero y el cuarto.

Se enuncia la proporcion del mismo modo que la equi-diferencia: 15 *es á* 5, *como* 36 *es á* 12: lo cual significa que 15 contiene á 5 tantas veces como 36 á 12; y por consiguiente puede escribirse de esta otra forma:

$$\frac{15}{5}=\frac{36}{12}.$$

Las denominaciones de los términos son las mismas que en la equi-diferencia.

Así, 15 y 36 son los *antecedentes;* 5 y 12 son los *consecuentes:* 15 y 12 los *estremos;* 5 y 36 los *medios* de la proporcion.

Las equi-diferencias y las proporciones, en especial estas últimas, gozan de muchas propiedades que esplicaremos sucesivamente.

De las equi-diferencias.

201. Se llama *equi-diferencia* (n.º 199) la espresion de la igualdad de dos diferencias.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. *En toda equi-diferencia la suma de los términos estremos es igual á la suma de los términos medios.*

Sea la equi-diferencia

$$11 \,.\, 7 : 19 \,.\, 15;$$

tenemos evidentemente

$$11+15=7+19.$$

Mas para darnos cuenta de esta proposicion de un modo general, observemos que si los consecuentes fueran iguales á sus antecedentes, y se tuviera, por ejemplo,

$$11 \,.\, 11 : 19 \,.\, 19,$$

la proposicion sería manifiesta.

Para presentar en este estado á la equi-diferencia dada arriba, basta aumentar á cada consecuente la diferencia 4. Pero por esta adicion hemos aumentado claramente á uno de los medios y á uno de los estremos en la misma cantidad 4; luego la suma de los medios y la de los estremos han recibido el mismo aumento á la vez. Luego si despues de recibir este aumento son las dos sumas iguales, antes tambien debian serlo.

L. C. D. D.

Observemos además que, si los cuatro números no formáran *equi-diferencia*, sería necesario para hacer los consecuentes *iguales* á los antecedentes, añadirles *cantidades diferentes*; y como despues de esta adicion resultarian iguales la suma de estremos y la suma de medios, podríamos con justicia inferir que antes de tal adicion eran desiguales dichas sumas.

Luego, *si cuatro números, enunciados en cierto órden, ó escritos en la misma línea, forman equi-diferencia, la suma de los estremos es igual á la suma de los medios.*

Recíprocamente, *si la suma del primer término y el último es igual á la del segundo y el tercero,* ó si la *suma de* *los estremos es igual á la suma de los medios, los cuatro números forman una equi-diferencia, en el órden en que estan enunciados ó escritos.* Porque si no formáran equi-diferencia, la suma de los estremos, segun acabamos de ver, no sería igual á la de los medios, lo cual es contrario al supuesto.

Advertencia. Puede suceder que los antecedentes sean menores que los consecuentes, como en la equi-diferencia

$$9 . 14 : 18 . 23.$$

Pero los razonamientos serian iguales á los del caso anterior: bastaria añadir á los dos antecedentes *la diferencia comun* 5; lo cual equivaldria á añadir el mismo número á la suma de los estremos y á la suma de los medios.

Veamos ahora con qué precision se aplican las notaciones algebráicas á la propiedad precedente y á su recíproca.

Sean cuatro números a, b, c, d, que suponemos formar entre sí una *equi-diferencia.*

Tendremos, pues,

$$a . b : c . d,$$

ó bien tambien $$a - b = c - d.$$

Esto supuesto, añadamos á los dos miembros de esta igualdad la suma $b+d$, y tendremos

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

ó reduciendo, $$a + d = c + b;$$

luego *la suma de los estremos* a *y* d *es igual á la suma de los medios* c *y* b.

Recíprocamente, sean cuatro números a, b, c, d, tales que

$$a + d = c + b;$$

restemos $b+d$ de los dos miembros de esta igualdad, y tendremos

$$a + d - b - d = b + c - b - d,$$

ó reduciendo, $$a - b = c - d,$$

ó finalmente, $$a . b : c . d.$$

Luego, *estos cuatro números forman una equi-diferencia cuyos estremos son los dos términos de una de las sumas, y los medios los términos de la otra.*

202. Consecuencia. Resulta de la propiedad precedente que, *conociendo tres términos de una equi-diferencia, se obtendrá el cuarto*, si es un estremo, *restando de la suma de los medios el estremo conocido*, y si es un medio, *restando de la suma de los estremos el medio conocido.*

Así, pues, sea la equi-diferencia

$$23 \,.\, 11 : 49 \,.\, x$$

(designando x el término desconocido).

Como, en virtud de la propiedad fundamental, tenemos

$$x+23=11+49,$$

resulta $\quad x=11+49-23=37;$

lo cual dá $\quad 23 \,.\, 11 : 49 \,.\, 37.$

Del mismo modo en la equi-diferencia

$$31 \,.\, 25 : x \,.\, 78,$$

tenemos $\quad x+25=31+78;$

de donde $\quad x=31+78-25=84,$

y por consiguiente, $\quad 31 \,.\, 25 : 84 \,.\, 78.$

203. Algunas veces se presentan equi-diferencias cuyos términos medios son iguales, y que por eso se llaman *equi-difecias contínuas* (ó *proporciones aritméticas contínuas*).

Por ejemplo,

$$27 \,.\, 39 : 39 \,.\, 51$$

es una equi-diferencia contínua.

Como en este caso el duplo de uno de los medios debe ser igual á la suma de los estremos, en virtud de la propiedad arriba demostrada, resulta que *este medio es igual á la semi-suma de los dos estremos.*

Así, en la equi-diferencia

$$23 \,.\, x : x \,.\, 49$$

tenemos $\quad x=\dfrac{49+23}{2}=36.$

Este valor de x es lo que se llama *un medio diferencial* (ó *medio proporcional aritmético*) entre los números 23 y 49.

204. Hé aquí algunas otras propiedades de las equi-diferencias:

Se pueden *aumentar ó disminuir los dos antecedentes, aumentar ó disminuir los dos consecuentes, aumentar ó disminuir los dos primeros términos ó los dos últimos en una misma cantidad*, sin que deje de existir la equi-diferencia.

En efecto, es evidente que por medio de estas diversas transformaciones se aumenta ó disminuye en un mismo número la suma de los estremos y la suma de los medios; por consiguiente no se altera la igualdad de las dos sumas; y lo mismo sucede con la equi-diferencia, en virtud de la recíproca de la propiedad fundamental.

Tambien puede *invertirse el órden de los estremos*, ó *el de los medios*, ó *poner los medios en lugar de los estremos y viceversa*, sin alterar la equi-diferencia: porque es evidente que despues de esas variaciones la suma de los estremos sigue siendo igual á la de los medios.

En general, toda transformacion ejecutada con una equi-diferencia no la destruye, mientras deje la suma de los estremos igual á la de los medios.

Pero es inútil insistir mas en las propiedades de las equi-diferencias, porque son de escasísimo uso.

Pasemos á las propiedades de las proporciones propiamente dichas, ó sea de las *proporciones geométricas*.

De las proporciones.

205. Se entiende (n.º 203) *por proporcion* la espresion de la igualdad de dos *razones* ó *cocientes*.

Cuando cuatro números estan en proporcion, la *razon comun* que existe entre los dos primeros números y entre los dos últimos puede ser, ó un número entero, ó un número fraccionario, ó un quebrado propio.

Sean, por ejemplo, las proporciones

$$18 : 6 :: 24 : 8,$$
$$12 : 9 :: 36 : 27,$$
$$5 : 12 :: 20 : 48.$$

En la primera, la razon comun es 3; en la segunda tenemos $\frac{12}{9}=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$; luego la razon comun es un número esencialmente fraccionario.

En fin, en la tercera tenemos $\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$, suprimiendo el factor 4 comun á los dos términos; luego el quebrado propio $\frac{5}{12}$ es la razon comun.

Propiedad fundamental. *En toda proporcion el producto de los estremos es igual al de los medios.*

En efecto, esta propiedad sería evidente si en lugar de una proporcion tal como

$$18 : 6 :: 24 : 8,$$

tuviéramos una cuyos antecedentes y consecuentes fueran respectivamente iguales, como esta:

$$18 : 18 :: 24 : 24.$$

Para reducir á este estado la primera proporcion, basta evidentemente multiplicar cada consecuente por la razon comun 3; pero, haciendo esta multiplicacion, multiplicamos por un mismo número un medio y un estremo; luego tambien resultan multiplicados por un mismo número el producto de los medios y el de los estremos; y como son iguales los productos resultantes, se infiere que tambien lo eran los primitivos.

L. C. D. D.

Observemos además que, si los cuatro números no formáran proporcion, sería necesario, para hacer los consecuentes iguales á los antecedentes, multiplicar cada uno de estos por un número distinto, que espresára la razon del primer término al segundo, ó la del tercero al cuarto; y como despues de esta multiplicacion serían iguales el producto de estremos y el de medios, se infiere que estos productos eran desiguales antes de la multiplicacion.

De donde puede concluirse, que *si cuatro números enunciados ó escritos en cierto órden forman proporcion, el producto de los estremos es igual al de los medios.*

Recíprocamente, *si el producto de los dos términos estremos es igual al de los medios*, los números forman *una proporcion en el órden en que estan enunciados ó escritos.*

Porque si no hubiera proporcion entre los cuatro números, el producto de los estremos, segun acabamos de ver, no sería igual al de los medios, lo cual es contrario al supuesto.

Apliquemos las notaciones algebráicas á la demostracion de esta propiedad y de su recíproca.

Sean cuatro números a, b, c, d, en proporcion, es decir, tales que den la proporcion

$$a : b :: c : d,$$

ó lo que es lo mismo, la igualdad

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Multipliquemos por bd los dos miembros de esta igualdad, y tendremos

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d},$$

ó reduciendo $ad=cb.$

Luego, *el producto de los estremos*, ad, *es igual al de los* medios, cb.

Recíprocamente, sean cuatro números a, b, c, d, tales que

$$a\times d=c\times b;$$

dividamos los dos miembros de esta igualdad por bd; tendremos

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{b\times d},$$

ó suprimiendo los factores comunes,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

es decir, $a : b :: c : d.$

Luego *los cuatro números forman una proporcion cuyos* *estremos son los factores de uno de los dos productos, y cuyos medios son los factores del otro.*

206. Consecuencia.—De esta propiedad fundamental se deduce que, *conociendo tres términos de una proporcion, para obtener el cuarto*, si es un estremo, *se debe dividir el producto de los medios por el estremo conocido;* y si es un medio, *se debe dividir el producto de los estremos por el medio conocido.*

Así, sea la proporcion

$$18 : 24 :: 72 : x;$$

como tenemos

$$18 \times x = 24 \times 72,$$

resulta

$$x = \frac{24 \times 72}{18} = 96;$$

lo cual dá la proporcion

$$18 : 24 :: 72 : 96.$$

207. Puede suceder que los dos medios de una proporcion sean iguales entre sí, como en esta:

$$9 : 12 :: 12 : 16$$

y entonces la proporcion se llama *continua.* En este caso el producto de los medios equivale al *cuadrado* de uno de ellos, y por consiguiente este cuadrado es igual al producto de los estremos: luego *cada uno de los medios equivale á la raiz cuadrada del producto de los estremos.*

Sea, por ejemplo, la proporcion $50 : x :: x : 8$, siendo x el término medio desconocido de una proporcion *continua;* tendremos

$$x^2 = 50 \times 8 = 400,$$

de donde se deduce

$$x = \sqrt{400} = 20;$$

lo cual dá la proporcion

$$50 : 20 :: 20 : 8.$$

Sea en general la proporcion

$$a : x :: x : b;$$

resulta

$$x^2 = a \times b,$$

de donde

$$x = \sqrt{a \times b}.$$

Este valor de x es lo que se llama *un medio proporcional entre los dos números* a *y* b.

208. Otras propiedades.—*Se pueden multiplicar ó dividir los dos primeros términos*, ó *los dos últimos de una proporcion por un mismo número*, sin alterar la proporcion.

En efecto, la razon entre los dos primeros términos ó los dos últimos, no es mas (n.º 198) que el cociente de una division, cuyo dividendo y divisor son respectivamente el antecedente y el consecuente, y ya se sabe que no se altera el valor de un cociente, cuando se multiplican por un mismo número los dos términos de la division.

Tambien se puede *multiplicar ó dividir los dos antecedentes, multiplicar ó dividir los dos consecuentes por un mismo número*, sin alterar la proporcion.

Porque en estas transformaciones se multiplican siempre ó se dividen por un mismo número uno de los estremos y uno de los medios de la proporcion; por consiguiente el producto de estos debe quedar igual al producto de aquellos; condicion suficiente para que subsista la proporcion, segun prueba la recíproca de la propiedad fundamental.

Tambien se puede, como en la equi-diferencia, *invertir el órden de los estremos y el de los medios de una proporcion*, ó bien *poner los medios en lugar de los estremos y viceversa*, sin que deje de existir proporcion entre los cuatro términos.

Por ejemplo, de la proporcion $36 : 12 :: 75 : 25$, se deducen sucesivamente,

1.º Cambiando los medios..... $36 : 75 :: 12 : 25;$

2.º Cambiando los estremos.... $25 : 12 :: 75 : 36;$

3.º Poniendo los medios en lugar de los estremos y viceversa.... $12 : 36 :: 25 : 75.$

La razon *comun* es diferente en cada una de esas proporciones: así se ve que es 3 en la primitiva, $\frac{12}{25}$ en la primera derivada, $\frac{25}{12}$ en la segunda, y $\frac{12}{36}$ ó $\frac{1}{3}$ en la tercera. Pero sin embargo existen las proporciones, porque á pesar de esas mudanzas, siempre es el producto de los medios igual al de los estremos.

Advertencia. Los antiguos autores de Geometría designaban con los nombres de *alternar*, *invertir*, *permutar*, etc., las diversas transformaciones que se dan á los términos de una proporcion.

Las propiedades siguientes se usan continuamente en la Geometría, y merecen toda la atencion de los estudiosos.

209. PRIMERA PROPIEDAD.—En toda proporcion, *la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es al segundo término, como la suma ó la diferencia de los dos últimos es al cuarto.*

Así, en la proporcion

$$72 : 24 :: 45 : 15,$$

sumando tenemos

$$72 + 24 : 24 :: 45 + 15 : 15,$$

y restando

$$72 - 24 : 24 :: 45 - 15 : 15,$$

proporciones que pueden comprobarse facilmente.

Para darnos cuenta de esta propiedad de una manera general, observemos que añadiendo ó restando á cada antecedente su consecuente, no hacemos mas que aumentar ó disminuir *una unidad* á cada una de las razones; y como estas eran antes iguales, tambien lo serán despues.

De la proporcion

$$72 \pm 24 : 24 :: 45 \pm 15 : 15$$

($\pm$ se enuncia *mas ó menos*),

cambiando de lugar los medios, se deduce (n.º 208)

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 24 : 15;$$

pero teníamos $72 : 24 :: 45 : 15,$

ó bien $72 : 45 :: 24 : 15;$

luego, como dos números iguales á un tercero, son iguales entre sí, tendremos tambien

$$72 \pm 24 : 45 + 15 :: 72 : 45,$$

ó bien $72 \pm 24 : 72 :: 45 \pm 15 : 45.$

Luego tambien puede decirse que en toda proporcion, *la suma ó la diferencia de los primeros términos es al primero, como la suma ó la diferencia del tercero y cuarto es al tercero;* enunciado que sería fácil comprender en uno solo con su análogo anterior.

210. Segunda propiedad.—En toda proporcion, *la suma ó la diferencia de los antecedentes, es á la suma ó la diferencia de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es* á su consecuente.

Volvamos á tomar la proporcion anterior

$$72 : 24 :: 45 : 15,$$

y mudando de lugar los medios, tendremos

$$72 : 45 :: 24 : 15.$$

Nada nos impide aplicar á esta última proporcion la propiedad del número precedente; hecho lo cual, resultará

$$72 \pm 45 : 45 :: 24 \pm 15 : 15,$$

y mudando de lugar los medios,

$$72 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15, \text{ ó } :: 72 : 24.$$

Esta proporcion, enunciada en lenguaje ordinario y comparada con la proporcion $72 : 24 :: 45 : 15$, demuestra evidentemente la proposicion enunciada.

Si en la proporcion

$$72 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15,$$

se consideran primero los dos signos superiores y luego los inferiores, se deduce sucesivamente:

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 45 : 15;$$
$$72 - 45 : 24 - 15 :: 45 : 15;$$

de donde, á causa de la razon comun, se deduce

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 72 - 45 : 24 - 15,$$

ó bien, mudando de lugar los medios,

$$72 + 45 : 72 - 45 :: 24 + 15 : 24 - 15;$$

es decir, que en toda proporcion, *la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

211. Consecuencias de esta propiedad. 1.º Sea una série de números, a, b, c, d, e, f, g, h, i, k,...., tales que tengamos

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: i : k....;$$

digo que *en esta série de razones iguales, la suma de todos los antecedentes* a, c, e, g, i,.... *es á la suma de todos los consecuentes* b, d, f, h, k,.... *como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

En efecto, las dos primeras razones..........	$a : b :: c : d$
dan, en virtud de la propiedad precedente.......	$a+c : b+d :: c : d;$
pero como tenemos.	$c : d :: e : f,$
resulta...................	$a+c : b+d :: e : f;$
de donde, aplicando á esta nueva proporcion la misma propiedad........	$a+c+e : b+d+f :: e : f;$
pero tambien tenemos...	$e : f :: g : h;$
luego.....................	$a+c+e : b+d+f :: g : h;$
y por consiguiente......	$a+c+e+g : b+d+f+h :: g : h;$

y así sucesivamente, cualquiera que sea el número de las razones iguales.

2.° Sean dos fracciones iguales, $\frac{8}{12}, \frac{2}{3}$; *si hacemos la suma de los numeradores y luego la de los denominadores, resulta un nuevo quebrado* $\frac{10}{15}$, *igual á cada uno de los propuestos.*

En efecto, la igualdad $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, equivale á la proporcion

$$8 : 12 :: 2 : 3;$$

de donde, aplicando la propiedad anterior, resulta

$$8+2 : 12+3 :: 8 : 12 :: 2 : 3;$$

luego $$\frac{8+2}{12+3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Lo mismo sucederia si se hallara la diferencia de los numeradores y se partiera por la diferencia de los denominadores.

Las transformaciones que se refieren á las propiedades precedentes, se llamaban antes *componer* y *dividir*.

212. Tercera propiedad. *Si tenemos un número cualquiera de proporciones, y despues de haberlas colocado unas sobre otras, las multiplicamos ordenadamente, los productos resultantes forman tambien proporcion.*

Sean, por ejemplo, las tres proporciones

$$3 : 8 :: 12 : 32,$$
$$7 : 15 :: 28 : 60,$$
$$40 : 12 :: 50 : 15;$$

de su definicion resulta, que pueden escribirse de este otro modo:

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$

$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$$

$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}.$$

Multiplicando ahora estas igualdades miembro á miembro, resultarán necesariamente productos iguales. Efectuando pues esta operacion por la regla de la multiplicacion de los quebrados (véase el n.º 59), tendremos

$$\frac{3\times 7\times 40}{8\times 15\times 12}=\frac{12\times 28\times 50}{32\times 60\times 15};$$

de donde $3\times7\times40:8\times15\times12::12\times28\times50:32\times60\times15$, ó efectuando los cálculos,

$$840 : 1440 :: 16800 : 28800.$$

L. C. D. D.

Facilmente puede comprobarse la exactitud de esta última proporcion: porque dividiendo los dos últimos términos sucesivamente por 10 y por 2, resulta

$$840 : 1440 :: 840 : 1440,$$

proporcion evidente que se llama *proporcion idéntica*.

Advertencia. Es de notar que en virtud de las operaciones que acaban de efectuarse, *la razon comun* de la proporcion precedente, que es $\frac{840}{1440}$, es igual al producto de las *tres razones* de las proporciones dadas.

Así, siendo $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{10}{3}$, las tres razones de las proporciones dadas, será su producto $\frac{210}{360}$, que suprimiendo el factor 30 comun á los dos términos, se reducirá á $\frac{7}{12}$, resultado á que viene á parar tambien la fraccion $\frac{840}{1440}$, suprimiendo en sus dos términos el factor comun 120.

La razon $\frac{7}{12}$, que procede de la multiplicaciou de otras varias razones, se llama entre los aritméticos *razon compuesta.*

213. CONSECUENCIAS DE ESTA PROPIEDAD. 1.º *Cuando cuatro números forman proporcion, la forman tambien sus cuadrados, sus cubos, y en general sus potencias de un mismo grado.*

Para darnos cuenta de esta consecuencia, basta observar que, en virtud de la propiedad precedente, si se multiplican ordenadamente varias proporciones semejantes, el producto será tambien una proporcion.

2.º Recíprocamente, *si cuatro números forman proporcion, la forman tambien sus raices cuadradas y cúbicas, y en general sus raices del mismo grado.*

Sea la proporcion

$$a : b :: c : d, \text{ ó } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Como las dos razones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, son iguales, sus raices cuadradas lo serán tambien; tendremos pues

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{c}{d}}.$$

Pero sabemos que para estraer (n.º 187) la raiz cuadrada de un quebrado, se ha de estraer la raiz cuadrada del numerador y la del denominador, lo cual dá,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}};$$

luego $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}},$$

ó bien $$\sqrt{a}:\sqrt{b}::\sqrt{c}:\sqrt{d}.$$

El razonamiento sería análogo si se tratára de la raiz cúbica ó de cualquiera otra, partiendo siempre del principio general que *para estraer de un quebrado una raiz de un grado cualquiera, se ha de estraer la raiz del numerador y la del denominador, dividiendo la primera por la segunda.*

214. *Observacion.* Cuando los números a, b, c, d, no son *cuadrados perfectos*, las cantidades $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, son números irracionales; y la proporcion de arriba se verifica entonces entre números inconmensurables: de modo que nos vemos precisados á considerar entre números inconmensurables razones que en general son tambien inconmensurables; pudiéndosenos por consiguiente preguntar con justicia si á proporciones de esta especie pueden aplicarse todas las propiedades hasta aquí demostradas.

Para conocer que es afirmativa la respuesta, basta recordar que en los n.os 182 y 193 dijimos que todo número irracional puede siempre reemplazarse *mentalmente* por un número fraccionario exacto que solo difiera del número propuesto en una cantidad tan pequeña como se quiera, y que por consiguiente puede tomarse tan estremadamente pequeña, que no se pueda percibir el error cometido en despreciarlas. Hecho esto así en el caso presente, las razones dadas entre los números irracionales, vendrán á resultar existentes entre los conmensurables sustituidos, y ya se les podrán sin dificultad aplicar todos los razonamientos anteriores.

Respecto de las razones existentes entre números fraccionarios exactos, es fácil conocer, en virtud de la regla de la division de los quebrados, que pueden siempre reemplazarse por razones entre números enteros.

Por ejemplo, como la razon de $\frac{3}{7}$ á $\frac{5}{11}$ es el cociente de la division de $\frac{3}{7}$ por $\frac{5}{11}$, será igual (n.° 62) á $\frac{3}{7}\times\frac{11}{5}$, ó á $\frac{33}{35}$, es decir, á la razon de 33 á 35.

Del mismo modo, la razon de $\frac{7}{8}$ á $\frac{15}{23}$ es igual á $\frac{7}{8} \times \frac{23}{15}$, ó bien á la razon de 161 á 120.

Así, pues, todas las propiedades demostradas anteriormente acerca de las proporciones, suponiendo que sus términos son números enteros, se verifican siempre cualquiera que sea la naturaleza de los mismos.

§ II. De la Regla de tres y de las reglas que dependen de ella.

215. En aritmética se llama *regla de tres simple* aquella operacion por cuyo medio, *dados tres términos de una proporcion, se determina el valor del cuarto término desconocido.* Ya espusimos anteriormente (n.º 206) el medio de obtener dicho cuarto término, y asi para resolver una cuestion dependiente de la *regla de tres*, toda se reduce á formar la proporcion que indica el enunciado del problema, como vamos á ver en los ejemplos siguientes.

Primer ejemplo. *Se pide el precio de 384 kilógramos de un género cualquiera, suponiendo que 25 kilógramos del mismo han costado 650 reales.*

Análisis del problema. Supuesto que 25 kilógramos han costado 650 reales, es claro que 2, 3, 4.... veces mas kilógramos, deben costar necesariamente 2, 3, 4... veces mas dinero. Por consiguiente, los dos números de kilógramos estan en la misma razon que sus precios, y por lo tanto hay proporcion entre ellos.

Luego, si designamos por x el precio desconocido de los 384 kilógramos, tendremos la proporcion

$$25 \text{ kil.} : 384 \text{ kil.} :: 650 \text{ rs.} : x;$$

de donde (n.º 206)

$$x = \frac{384 \times 650}{25} = \frac{249600}{25} = 9984;$$

lo cual nos dice que el precio de los 384 kilógramos son 9984 reales.

Advertencia. En este ejemplo se podria simplificar la operacion, observando que los dos antecedentes de la proporcion de arriba son divisibles por 25; suprimiendo este factor comun, resulta

$$1 : 384 :: 26 : x;$$

de donde $$x = 384 \times 26 = 9984.$$

Nunca deben despreciarse estas simplificaciones cuando por fortuna llegan á presentarse.

SEGUNDO EJEMPLO. *Por 43 varas, 2 palmos y 3 pulgadas de cierta obra, hemos pagado* 743 reales y 15 maravedises: *queremos saber cuánto deberemos pagar por 77 varas, 2 palmos, 7 pulgadas de la misma obra.*

Es evidente que aquí tambien hay proporcion entre los dos números fraccionarios de vara y sus precios respectivos.

Sea, pues, x el precio pedido; tendremos la proporcion

43 var. 2 pal. 3 pul. : 77 var. 2 pal. 7 pul. :: 743 rs. 15 mrs. : x.

Por medio de las reglas establecidas para el cálculo de los números complejos, podríamos formar el producto de los dos medios y dividirle por el estremo conocido; pero se abreviarán considerablemente los cálculos, reduciendo á su especie inferior, y por consiguiente á pulgadas, los dos antecedentes que representan unidades de la misma naturaleza. Así obtenemos la nueva proporcion

1569 p. : 2797 p. :: 743 rs. 15 mrs. : x.

Con esto solo tenemos ya que efectuar la multiplicacion de un número complejo por un entero, y la division del producto resultante, por otro número entero, lo cual es mucho mas sencillo.

El producto de 743 reales, 15 maravedises por 2797 es igual á 2079404 reales 33 maravedises. Dividiendo este producto por 1569, resulta el cociente 1325 reales $10\frac{629}{1569}$ maravedises, que es el número buscado.

Este ejemplo es el único que propondremos de números complejos, pues se ve cuán facilmente se convierten en operaciones de números enteros. Téngase siempre presente que para esto basta reducirlos á su especie inferior, en particular los dos primeros términos de la proporcion, que siempre son de la misma naturaleza.

Tercer ejemplo. *Sabemos que 135 hombres han gastado 20 dias para hacer cierta obra: queremos saber cuántos dias gastarán 300 hombres para hacer la misma obra.*

Análisis. Si un número dado de hombres ha necesitado 20 dias para hacer una obra, es claro que otro número de hombres 2, 3, 4...., veces *mayor*, debe gastar 2, 3, 4,...., veces *menos* tiempo, siendo todas las demas circunstancias iguales; luego tantas cuantas veces esté el *primer* número de hombres, 135, contenido en el *segundo*, 300, otras tantas el número de dias necesarios al *segundo* número de hombres, es decir, el número buscado x estará contenido en el número 20 de dias necesarios al primer número de hombres.

Tendremos pues la proporcion

$$135 \text{ h.} : 300 \text{ h} :: x \text{ d.} : 20 \text{ d.},$$

ó poniendo los medios por estremos y vice-versa, es decir, invirtiendo á fin de poner á x en cuarto término, tendremos

$$300 : 135 :: 20 : x;$$

de donde sale $x = \frac{135 \times 20}{300} = \frac{2700}{300} = 9$ dias.

(En la proporcion pueden suprimirse, 1.° el factor 15 comun á los dos primeros términos, 2.° el factor 20 comun á los dos antecedentes: así queda la proporcion $1:9::1:x$, de donde $x=9$.)

216. *Observaciones sobre las razones directas ó inversas.*

Esta es la ocasion de fijar las ideas de los principiantes sobre el sentido de ciertas denominaciones muy usadas en el lenguaje matemático.

Las cuestiones que dependen de una *regla de tres simple*, contienen siempre en su enunciado cuatro números, dos de una especie y dos de otra. De ellos *tres* son conocidos y *uno* desconocido, con la circunstancia singular de que cada número de la segunda especie está íntimamente unido á uno de la primera, en virtud de las condiciones del enunciado.

Así, en el primer ejemplo de arriba, dos de los cuatro números representan pesos, y los otros dos *sus* precios *respectivos*. El precio del primer peso está ligado á él, y puede por consiguiente llamarse su término *correspondiente.* Del mismo modo estan ligados el segundo peso y su precio respectivo, y pueden llamarse términos *correspondientes.*

En el segundo ejemplo, dos de los cuatro números espresan longitudes, y los otros dos los respectivos precios de dichas longitudes. Cada uno de los precios se llama tambien el término *correspondiente* á la longitud por él valuada.

Finalmente, en el tercer ejemplo se consideran dos números de hombres y los dos números de dias empleados respectivamente por cada uno de ellos en hacer una misma obra. El número de dias gastados por el primer número de hombres es el término *correspondiente* á este primer número; y el segundo número de dias es el *correspondiente* del segundo número de hombres.

Esto supuesto, se dice que hay *relacion directa* entre los dos números de la primera especie y los otros dos de la segunda, ó bien, que son *directamente proporcionales* los dos números de la primera especie á los dos de la segunda, cuando despues de haber visto que forman proporcion, se observa que cada número aumenta ó disminuye al aumentar ó disminuir su correspondiente. Entonces uno de los términos de la primera especie y su *correspondiente* de la segunda deben formar *los dos antecedentes* de la proporcion; mientras el otro término de la primera especie y su *correspondiente* de la segunda forman *los dos consecuentes:* de modo que un término de la primera especie con su *correspondiente* de la segunda forman *un medio y un estremo*, y el otro término de la primera especie con *su correspondiente* forman *el otro medio y el otro estremo.*

Al contrario, hay *relacion inversa* entre los cuatro números, ó bien, los dos números de la primera especie son *inversa ó recíprocamente proporcionales á sus correspondientes,* cuando al aumentar un término disminuye su correspondiente y *viceversa.* Entonces un término de la primera especie y su correspondiente deben formar *los dos estremos;* y el otro término de la primera especie y su correspondiente deben formar *los dos medios.*

Volviendo á las proporciones de los tres ejemplos ya esplicados, se ve facilmente que en las dos primeras hay *relacion directa* entre los cuatro números, es decir, que los números de peso ó de longitud son *directamente proporcionales* á los dos precios respectivos; pero en el tercer ejemplo se ve que hay *relacion inversa*, ó bien, que los dos números de hombres son *reciprocamente proporcionales* á los dos números de dias (*).

El análisis del problema hace conocer siempre si la relacion es *directa* ó *inversa;* para lo cual, justificada ya la proporcionalidad, basta saber si al aumentar ó disminuir una de las cantidades de la primera especie, aumenta tambien ó disminuye su *correspondiente;* ó si por el contrario, al aumentar ó disminuir una cantidad de la primera especie, disminuye ó aumenta al revés *su correspondiente*. En el primer caso, *la relacion es directa;* en el segundo, *inversa;* es decir, que los dos números de la primera especie son *recíprocamente proporcionales* á los dos de la segunda, sus correspondientes.

Tambien se dice que en el primer caso cada cantidad de la primera especie está en *razon directa* de su correspondiente, y que en el segundo está en *razon inversa.*

Por ejemplo, el precio de una mercancía está en *razon directa* del número de unidades de la misma, porque *cuantas mas* unidades haya de ella, *tanto mas* dinero valen: al contrario, el número de dias necesarios á cierto número de hombres para hacer una obra, está en *razon inversa* del número de hombres; porque *cuantos mas* hombres haya, *tantos menos* dias necesitan.

217. Estas locuciones, aunque viciosas, son muy usadas en Matemáticas. Así, al hablar de dos quebrados que tienen igual denominador, decimos que estan en *razon directa de sus numeradores;* y si tienen igual numerador, decimos que *estan en razon inversa de sus denominadores.*

Para interpretar estas dos espresiones, consideremos primero los dos quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$, que tienen el mismo denominador.

Evidentemente tenemos la proporcion

$$\frac{7}{12} : \frac{11}{12} :: 7 : 11,$$

(*) Mauduit, uno de los mejores autores de Aritmética, es el que ha propuesto las denominaciones de *relacion directa* y *relacion inversa*.

porque la segunda razon no es mas que la primera multiplicada por 12.

Pero el quebrado $\frac{7}{12}$ y su numerador 7 forman los dos antecedentes, mientras el quebrado $\frac{11}{12}$ y su numerador 11 forman los dos consecuentes; luego los dos quebrados son *directamente* proporcionales á sus numeradores, ó estan en razon directa de sus numeradores.

Sean ahora los quebrados $\frac{15}{23}$, $\frac{15}{36}$, que tienen el mismo numerador.

Tenemos por lo pronto la proporcion

$$\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: \frac{1}{23} : \frac{1}{36},$$

cuya segunda razon no es mas que la primera dividida por 15.

Pero si multiplicamos los dos términos de la segunda razon por 23×36, tendremos, hecha la reduccion,

$$\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: 36 : 23;$$

y como vemos que el quebrado $\frac{15}{23}$ y su denominador 23 forman *los estremos*, y que el quebrado $\frac{15}{36}$ y su denominador 36 forman *los medios*, inferimos que los dos quebrados son *recíprocamente* proporcionales á sus denominadores, ó bien que estan en *razon inversa* de sus denominadores.

Ya en otro lugar (n.º 45) habíamos visto que un quebrado es *tanto mayor, cuanto mayor* es su numerador, permaneciendo sin mudanza el denominador; y que por el contrario, un quebrado es *tanto menor, cuanto mayor* es su denominador, permaneciendo sin mudanza el numerador.

Hemos creido deber estendernos bastante en estos principios, porque en la práctica hemos visto que los jóvenes se equivocan en la resolucion de las cuestiones relativas á las proporciones por falta de nociones suficientes para plantearlas.

218. Al resolver una cuestion dependiente de una *regla de tres*, es costumbre hacer de modo que el término desconocido quede por cuarto término de la proporcion.

Para conseguirlo, se empieza por escribir la razon de los dos términos de la especie de la incógnita. En seguida, habiendo de antemano determinado por el análisis del problema, si la *relacion* entre los cuatro números es *directa* ó *inversa*, se coloca la otra razon á la izquierda de aquella, de modo que el término correspondiente á x sea el *primer medio* ó el *primer estremo*, segun sea *directa* ó *inversa la relacion*. (Véase el n.º 216.)

Cuarto ejemplo. *Se supone que 45 obreros han hecho 280 metros de mampostería; y se quiere saber cuántos metros de la misma obra harán 76 hombres en el mismo tiempo.*

Sea x el número de metros buscado: empezaremos por escribir la razon. . . . . $280 : x$;
en seguida observaremos que la *relacion* es *directa*, pues cuantos mas hombres haya, mas metros de pared harán: luego, siendo x un consecuente ó un estremo, su correspondiente 76 debe ser el primer consecuente ó primer medio, y tendremos

$$45 : 76 :: 280 : x;$$

de donde se saca $x = \frac{76 \times 280}{45} = 472$ m., 89, valor aproximado hasta *centésimas*.

Quinto ejemplo. *La tripulacion de un buque tiene víveres solo para 20 dias; y sin embargo, ha de pasar todavía en el mar 35 dias sin poder tomar mas provisiones. Se pregunta cuánto debe rebajarse la racion diaria acostumbrada de cada individuo.*

Análisis. Sea 1 la racion ordinaria de cada individuo, y x la racion que debe dársele atendidas las circunstancias del caso: es claro que esta nueva racion debe ser dos veces, tres veces,... menor respecto de la primera, si el número de dias que han de durar los víveres es dos veces, tres veces,... mayor. Así, pues, las dos raciones son inversamente proporcionales á los dos números de dias.

Luego, si escribimos la razon $1 : x$,

el número 35 correspondiente á x, debe formar el primer estremo, puesto que x es el segundo: se escribirá por consiguiente

$$35 : 20 :: 1 : x;$$

de donde
$$x = \frac{20}{35} = \frac{4}{7};$$

de modo que la racion de cada individuo en este caso debe reducirse á los $\frac{4}{7}$ de la racion ordinaria.

Otra solucion. Puede llegarse al mismo resultado sin recurrir á las proporciones y de un modo mas sencillo.

Admitamos por un momento que solo queda para cada individuo una racion ordinaria que debe repartírsele en los 35 dias: es visto que entonces la razon diaria se reduciria á $\frac{1}{35}$ de la racion acostumbrada; pero como segun el enunciado, hay 20 raciones para cada individuo, se infiere que la racion actual debe ser $\frac{1}{35} \times 20$, ó $\frac{20}{35}$, es decir, $\frac{4}{7}$ de la racion ordinaria.

219. *Regla de tres compuesta.* Así se llama la operacion por cuyo medio se determina el *cuarto* término de una proporcion procedente de la multiplicacion *de dos ó mas proporciones.*

Sesto ejemplo. 20 *trabajadores han gastado* 18 *dias en hacer* 500 *metros de cierta obra; se quiere saber cuántos dias gastarán* 76 *trabajadores para hacer* 1265 *metros de la misma obra.*

Análisis. Este enunciado nos hace considerar *tres razones*, á saber; la razon de los dos números de trabajadores, la de los dos números de dias y la de los dos números de metros. Pero para simplificar la cuestion y reducirla á las cuestiones precedentes, supondremos por lo pronto que las dos compañías de trabajadores, tienen que hacer la misma parte de obra designada á los primeros, es decir, 500 metros. Entonces la cuestion se convierte en esta: 20 *trabajadores han gastado* 18 *dias en hacer* 500 *metros de cierta obra; se quiere saber cuántos dias gastarán* 76 *trabajadores para hacer la misma obra.*

Aquí hay evidentemente proporcion (con relacion *inversa*) entre los dos números de trabajores y los dos números de dias. Designando, pues, por x, no el *número de dias correspon-*

dientes al primer enunciado, sino el que se busca en virtud del nuevo enunciado, tendremos la proporcion

$$76 : 20 :: 18 : x \ldots \quad (1).$$

De esta proporcion podríamos sacar el valor de x; pero pronto comprenderemos que el hacerlo sería trabajo inútil. Basta razonar sobre x, considerándole como ya conocido por la proporcion.

Observemos ahora que, *siendo* x *el número de dias necesario* á los 76 trabajadores *para hacer* 500 *metros*, *solo nos falta saber cuántos dias necesitarian los mismos para hacer los* 1265 *metros*.

Siendo aquí uno mismo el número de trabajadores, es claro que si han de hacer dos veces, tres veces,... mas obra, gastarán dos veces, tres veces,.... mas dias; por consiguiente, hay proporcion (con *relacion directa*) entre los números de metros y los números de dias, y si designamos por x' (que se enuncia x *prima*) el número de dias buscado (que ya es la *incógnita* del problema propuesto en el primer enunciado), tendremos la nueva proporcion

$$500 : 1265 :: x : x' \ldots \quad (2).$$

(500 y x forman un estremo y un medio, porque la relacion es directa.)

Multipliquemos ahora ordenadamente las dos proporciones (1) y (2), y resultará (n.º 213)

$$76 \times 500 : 20 \times 1265 :: 18 \times x : x \times x',$$

ó suprimiendo el factor x, comun á los dos últimos términos,

$$76 \times 500 : 20 \times 1265 :: 18 : x'.$$

Luego $x' = \dfrac{20 \times 1265 \times 18}{76 \times 500} = 11\,\text{d.}\,\dfrac{187}{170}$, ó cerca de 12 dias.

Pasemos á otro ejemplo mas complicado.

Séptimo ejemplo. 500 *hombres*, *trabajando* 12 *horas diarias*, *han gastado* 57 *dias en abrir un canal de* 1800 *metros de largo*, 7 *metros de ancho y* 3 *de hondo: se quie-*

re saber cuántos dias gastarán 860 *hombres trabajando* 10 *horas diarias, para abrir otro canal de* 2900 *metros de largo,* 12 *de ancho y* 5 *de hondo, en un terreno tres veces mas duro que el primero.*

Hé aquí el cuadro de los cálculos cuya esplicacion daremos en seguida:

860 homb.	:	500 homb.	::	57 dias	: x dias...	(1),
10 hor.	:	12 hor.	::	x	: x'	(2),
1800 met. larg.	:	2900 met. larg.	::	x'	: x''	(3),
7 met. anch.	:	12 met. anch.	::	x''	: x'''	(4),
3 met. hond.	:	5 met. hond.	::	x'''	: x^{IV}	(5),
1 dureza	:	3 dureza	::	x^{IV}	: x^{V} ó X.	(6).

$$860\times10\times1800\times7\times3\times1:500\times12\times2900\times12\times5\times3::57:X;$$

de donde, $X=\dfrac{500\times12\times2900\times12\times5\times3\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1}=549\dfrac{51}{301}$ dias.

Análisis. En el enunciado de arriba distinguimos dos partes principales: la primera comprende los números

500 hom., 12 h., 57 d., 1800 m. lar., 7 m. anc., 3 m. hon., 1 dur.;

y la segunda los números

860, 10 X 2900 12 5 3.

(Como suponemos que el segundo terreno es *tres* veces mas difícil de cavar que el primero, podemos representar por 1 la dureza de este y por 3 la de aquel, como aquí se ve.)

Hemos designado por X el número de dias buscado.

Esto supuesto, empecemos por admitir que es una misma la obra que han de hacer las dos compañías de trabajadores, y que todos trabajan un mismo número de horas diarias.

Como en este caso *cuantos mas* trabajadores haya, *menos* tiempo han de gastar, hay *relacion inversa* entre los dos números de trabajadores y los dos números de dias. Designando, pues, por x el número de dias necesario á los 860 hombres para abrir el primer foso, siendo su trabajo de 12 horas al dia, como el de los 500 hombres, tendremos la proporcion (1), en que 860 y su correspondiente forman los dos estremos.

Si ahora los 860 hombres en vez de trabajar 12 horas al dia trabajan solo 10 horas, deberán gastar necesariamente *mas* dias para hacer la misma obra. Luego atendiendo á los dos números de horas diarias de trabajo, encontramos tambien una *relacion inversa* entre los números 12 h. y 10 h., y los números x y x' de dias; lo cual dá la proporcion (2), cuyos estremos son 10 y su correspondiente x'.

Multiplicando ordenadamente entre sí las proporciones (1) y (2), y observando que el término x desaparece como factor comun á los dos últimos términos de la nueva proporcion, podríamos obtener el valor de x', que designaria el número de dias necesarios á los 860 hombres, para abrir el primer foso, trabajando 10 horas diarias; pero esto es inútil, y basta considerar á x' como determinada.

Hagamos ahora variar la longitud del foso, conservando todavía la misma anchura, la misma profundidad y la misma dureza de terreno.

Si pues el canal ó foso es *mas* largo, supuestas iguales las demas condiciones, se necesitarán forzosamente *mas* dias para abrirle; luego hay *relacion directa* entre los dos números 1800 y 2900 de metros y los dos números de dias x' y x'', (designando x'', que se enuncia *x segunda*, el número de dias *correspondiente* á los 2900 metros), de donde resulta la proporcion (3), en la cual 2900 y x'' forman *un medio* y *un estremo*.

Repitiendo los mismos razonamientos respecto de la anchura y de la profundidad, obtendremos las dos proporciones (4) y (5), en las cuales x''' y x^{IV} (ó *x tercera* y *x cuarta*) espresan los números de dias correspondientes á las variaciones de longitud y profundidad.

Finalmente, tomando en consideracion la diferencia de durezas de los dos terrenos, se encontrará evidentemente una *relacion directa*, y se obtendrá la proporcion (6), cuyo último número x^{V} ó X designa el número buscado.

Multiplicando ahora ordenadamente las *seis* proporciones sucesivamente planteadas, y observando que todos los términos x, x', x'', x''', x^{IV}, desaparecen como factores comunes al segundo antecedente y al segundo consecuente de la nueva proporcion, obtenemos la proporcion (7), de donde deducimos el valor de X, que despues de todas las simplificaciones, queda reducido á $549\frac{51}{301}$ dias.

Luego el número de dias pedido viene á ser unos 549.

Advertencia. Recordemos que obtenida la espresion

$$X = \frac{500 \times 12 \times 2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1},$$

antes de efectuar las multiplicaciones indicadas, conviene suprimir todos los factores comunes que se descubran en el numerador y el denominador.

Aquí, por ejemplo, hechas todas las supresiones, obtenemos

$$X = \frac{5 \times 4 \times 29 \times 5 \times 57}{43 \times 7},$$

ó efectuando ya los cálculos,

$$X = \frac{165300}{301} = 549\,\frac{51}{301}.$$

Este ejemplo, bien complicado por cierto, basta para hacer comprender á los estudiosos la marcha que deben seguir en cualquiera otro.

220. *Observaciones generales sobre la regla de tres.*— La operacion por cuyo medio se consigue determinar el número desconocido en las cuestiones precedentes se llama *regla de tres compuesta*, porque en efecto se llega á una proporcion cuya razon primera está formada por la multiplicacion de todas las razones comprendidas en el enunciado, escepto la razon de que hace parte la incógnita y que viene á ser la segunda de la proporcion.

En otro tiempo se dividia la regla de tres en *regla de tres simple y directa*, *regla de tres simple é inversa*, *regla de tres compuesta*, *directa é inversa á la vez*, etc.; pero ahora casi todos desechan estas denominaciones como viciosas, ó al menos como inútiles para la resolucion de las cuestiones.

El único cuidado que debe llevarse al colocar unas debajo de otras las diferentes proporciones cuyo producto ha de formar la proporcion final, es asegurarse si los cuatro números comparados en cada proporcion son *directa* ó *inversamente* proporcionales, escribiéndolos despues como indica la observacion del n.º 218.

Propondremos para ejercicio los ejemplos siguientes:

Octavo ejemplo. *15 hombres, trabajando 10 horas diarias, has gastado 18 dias para hacer 450 metros de cierta obra: se quiere saber cuántos hombres se necesitarán para hacer 480 metros de la misma obra en 8 dias trabajando 12 horas diarias.* [Respuesta: X = 30 hombres.]

Noveno ejemplo. *Para vestir 500 hombres se han necesitado 1200 metros de paño, de $\frac{5}{4}$ de ancho: se quiere saber cuántos metros de paño, que tenga $\frac{7}{8}$ de ancho, se necesitarán para vestir 960 hombres.* [Respuesta: 3291 metros $\frac{3}{7}$.]

Décimo ejemplo. *Un correo, andando 15 horas por dia, ha corrido 150 miriámetros en 20 dias; se desea saber cuántas horas diarias deberá correr para andar 160 miriámetros en 18 dias.* [Respuesta: 17 horas $\frac{7}{9}$.]

DE LA REGLA DE INTERÉS.

221. Se llama *interés* de una cantidad de dinero el beneficio que resulta á su dueño por haberla prestado, ó el precio de *alquiler* de dicha suma durante cierto tiempo: la cantidad prestada toma el nombre de *capital*.

El interés de una cantidad depende del *valor* del capital, del *tiempo* que dura el préstamo, y del *tanto por ciento* del interés. Se llama *tanto por ciento* el beneficio que deben producir en un año *cien* unidades de dinero.

El tanto por ciento, que puede considerarse como la *unidad de interés*, es convencional entre el que dá y el que toma prestado, y generalmente depende de la escasez ó abundancia de los capitales. Hay, sin embargo, en el comercio y en los bancos ciertos límites (fijados por la costumbre ó por la ley), que no pueden escederse sin incurrir en *usura*. (Se llama *usurero* el que presta su dinero á un tanto por ciento bastante superior al generalmente admitido.)

La regla de interés no es mas que un caso particular de la regla de tres compuesta, como vamos á ver en los siguientes ejemplos.

Primer ejemplo. *Se desea saber el interés de 4500 rs., prestados por dos años y cinco meses, á razon de 7 rs. p%.* (El signo p % es la abreviatura de la espresion *por ciento* usada en el comercio.)

Este enunciado equivale evidentemente al siguiente:

Si 100 rs. producen 7 rs. de interés al año, ¿cuánto deberán producir 4500 rs. prestados por 2 años y 5 meses?

Análisis y resolucion. Aplicando á este problema los principios establecidos anteriormente, diremos: los intereses de dos capitales prestados durante el mismo tiempo son directamente proporcionales á dichos capitales; así, llamando x al interés que en un año han de producir los 4500 rs., tendremos esta primera proporcion

$$100 : 4500 :: 7 : x \ldots. \ (1).$$

Observemos ahora que los intereses *de un mismo capital* son proporcionales directamente á los tiempos que está prestado; luego si designamos por X el interés de los 4500 rs. en 2 años y 5 meses, que es el interés pedido, tendremos esta nueva proporcion

$$1^{\text{año}} : 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}} :: x : X \ldots. \ (2),$$

multiplicando ordenadamente las proporciones (1) y (2), tendremos

$$100 : 4500 \times 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}} :: 7 : X,$$

y por consiguiente,

$$X = \frac{4500 \times 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}} \times 7}{100} = 315 \times 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}}.$$

Efectuando la operacion indicada en $315 \times 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}}$ como se ve al márgen, resultan 761,25 rs.; así, pues, el interés pedido asciende á esa cantidad.

$$\begin{array}{lr} & 315 \\ & 2^{\text{años}}\ 5^{\text{meses}} \\ \hline & 630 \\ 4^{\text{meses}} \ldots & 105 \\ 1 \ldots\ldots & 26,25 \\ \hline & 761,25 \end{array}$$

Sea en general un capital a *prestado durante un tiempo espresado por* t *á razon de* i *p %₀ al año.*

Haciendo las mismas reflexiones de arriba, vendremos á parar á las dos proporciones. . . . . $\left\{\begin{array}{l} 100 : a :: i : x \\ 1 : t :: x : X \end{array}\right\}$;

de donde se deduce. . . . . $100 : a \times t :: i : X$,

y por consiguiente, $X = \dfrac{a \times t \times i}{100} = \dfrac{ait}{100}$.

Esta fórmula $X = \dfrac{ait}{100}$ indica bajo una forma fácil de retener, el modo de determinar el interés de una cantidad cualquiera prestada durante un tiempo dado á determinado tanto p %.

Traducida al lenguage ordinario, significa que *se debe multiplicar la cantidad propuesta por el tanto de interés anual y por el tiempo del préstamo, dividiendo despues por* 100 *el resultado.* En esta operacion consiste la *regla de interés simple.*

222. Tambien se puede llegar á esta fórmula sin el auxilio de las proporciones, y por un medio que es útil conocer.

Supuesto que 100 rs. producen en la unidad de tiempo que es el año un número de reales designado por i, es claro que un solo real producirá $\dfrac{i}{100}$. Luego una suma cualquiera a producirá en un año $\dfrac{i}{100} \times a$, ó $\dfrac{ai}{100}$; y esta misma suma, al cabo de t años, habrá de producir $\dfrac{ait}{100}$ (*).

(*) El medio que acabamos de seguir para obtener la espresion $\dfrac{ait}{100}$, y que se designa bajo el nombre de *Método de reduccion á la unidad*, es aplicable á todos los problemas dependientes de la teoría de las proporciones; y uno de los mejores auto-

Advertencia. El quebrado $\frac{i}{100}$, que espresa el interés anual de la unidad de moneda, se presenta en ciertos casos bajo una forma muy sencilla.

Sea, por ejemplo, $i=5$ (lo cual significa que se ha hecho el préstamo al 5 p $^0/_0$ al año); resulta $\frac{i}{100}=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, de donde $\frac{ai}{100}=\frac{a}{20}$; lo cual dice que el interés de un capital prestado al 5 p $^0/_0$ anual, es igual á la vigésima parte de dicho capital. Sea tambien $i=10$; resulta $\frac{i}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Luego $\frac{ai}{100}=\frac{a}{10}$; es decir, que el interés de un capital prestado al 10 p $^0/_0$ es igual á la décima parte del capital.

223. Algunas veces se dá el tanto p $^0/_0$, no por un año, sino por un mes, que entonces se considera de 30 dias. (Véase el n.° 221.) En este caso se toma el mes por unidad de tiempo, pero el modo de operar es siempre el mismo.

Segundo ejemplo. *Se quiere saber el interés de* 5000 *rs. prestados durante* 315 *dias, ó* 10 *meses y* 15 *dias, á razon de* $\frac{3}{4}$ p $^0/_0$ *al mes.*

Haciendo, en la fórmula $X=\frac{ait}{100}$, $a=5000$, $t=10\frac{1}{2}$, $i=\frac{3}{4}$, obtenemos

$$X=\frac{5000\times10^1/_2\times{}^3/_4}{100}=50\times\frac{21}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3150}{8}=393{,}75.$$

Luego el interés pedido son 393 rs. 75 céntimos.

---

res, Mr. Reynaud, ha creido preferible usarle esclusivamente en su *Aritmética;* pero si este método tiene la ventaja de ser mas analítico que el otro, tiene tambien el inconveniente de ser mas prolijo en sus detalles. Estamos sin embargo muy lejos de querer despreciarle, al contrario, le recomendamos á los señores profesores como un escelente ejercicio en la pizarra ó encerado.

TERCER EJEMPLO. *Una suma de 3750 rs. ha producido en 2 años y 6 meses, un interés de 719 rs. 25 céntimos; se desea saber á qué tanto p $^0/_0$ se ha prestado.*

Razonando aquí como en el primer ejemplo, tendremos las dos proporciones. . . . . . $\left\{\begin{array}{l} 3750 : 100 :: 719,25 : x \\ 2^1/_2 : 1 :: x : X \end{array}\right\}$;

de donde se deduce $3750 \times 2\,^1/_2 : 100 :: 719,25 : X$.

$$\text{Luego} \quad X = \frac{719,25 \times 100}{3750 \times 2^1/_2} = \frac{71925}{9375} = 7,672;$$

es decir, que el tanto de interés es 7 rs. 67 p$^0/_0$ próximamente.

Facilmente se puede comprobar este resultado determinando el interés del capital 3750 rs., durante 2 años y 6 meses, á razon de 7, 67 p $^0/_0$ al año; aunque para mas exactitud es preciso tomar el número 7,672, tal cual le acabamos de encontrar.

Tambien puede encontrarse el tanto p $^0/_0$ por medio de la fórmula $X = \dfrac{ait}{100}$; pues de ella se deduce $100\ X = a \times i \times t$, de donde $i = \dfrac{100\ X}{a \times t}$.

Como aquí tenemos $a = 3750$, $t = 2\,^1/_2$, $X = 719,25$,

$$\text{será} \qquad i = \frac{71925}{3750 \times 2\,^1/_2} = \frac{71925}{9375},$$

que es lo mismo hallado antes.

224. Considerada en general esta fórmula contiene *cuatro* cantidades, a, i, t, X, que sucesivamente y una á una pueden suponerse *desconocidas*, dadas las otras tres, siendo siempre fácil el determinar la que se suponga desconocida.

Tambien pueden proponerse cuatro cuestiones esencialmente distintas, cuyos enunciados ponemos á continuacion con las soluciones respectivas.

1.° *Determinar el interés de un capital, prestado durante cierto tiempo, á un tanto por ciento dado.*

Sea X el interés pedido; será $X=\frac{ait}{100}$.

(Los dos primeros ejemplos se refieren á este caso.)

2.° *Determinar á qué tanto por ciento debe prestarse una suma para ganar al cabo de un tiempo dado un interés tambien dado.*

La fórmula es, en este caso, $i=\frac{100\,X}{at}$.

(El tercer ejemplo se refiere á esta cuestion.)

3.° *Determinar el tiempo que ha de durar el préstamo de cierta suma para producir un interés dado, á un tanto por ciento tambien dado.*

La fórmula es $t=\frac{100\,X}{ai}$.

Este valor de t debe calcularse siempre en la especie de unidades de tiempo que se fijó al designar el tanto por ciento; de modo que si el tanto por ciento es anual, se valuará t en años; si mensual, en meses.

4.° *Determinar el capital que deberá prestarse durante un cierto tiempo, para obtener un interés dado, á determinado tanto por ciento.*

La fórmula es $a=\frac{100\,X}{it}$.

Hé aquí nuevos ejemplos que servirán de ejercicio.

Cuarto ejemplo. *Se desea saber cuál es el capital que prestado 27 meses al $^1/_2$ p $^0/_0$ mensual, ha producido 1312 rs., 65 cént.*

[*Respuesta:* 9723 rs., 33 cént.]

Quinto ejemplo. *Una suma de 7400 rs. ha producido durante 27 meses, 832 rs., 50 céntimos; se desea saber cuánto producirá otro capital de 8500 rs. prestado durante 45 meses al mismo tanto por ciento, y cuál es este tanto.*

[*Respuesta:* 1593 rs., 75 cént. y 5 p $^0/_0$ anual.]

DE LA REGLA DE DESCUENTO.

225. Se llama *descuento* la parte que se desquita del importe de un documento cualquiera de crédito pagadero al cabo de cierto tiempo, y que se quiere cobrar antes de su vencimiento.

Para fijar las ideas, supongamos que *poseyendo un comerciante una letra de cambio de* 3000 rs. *pagadera al cabo de un año, se presenta en casa de un banquero para hacerla* DESCONTAR. *Se pregunta cuánto debe quedarse el banquero,* ó bien *qué suma debe entregar en el acto al comerciante.* Se sabe además que el tanto de interés es el 6 p $^0/_0$.

Análisis. Es claro que el comerciante debe recibir en el acto una cantidad tal, que reunida á su interés durante un año, produzca 3000 rs., importe de la letra.

Como 100 rs. producen 6 rs. de interés al año, se infiere que 100 rs. valdrán en un año 106 rs. contando unidos el capital y el interés; donde se comprende que una letra de 106 rs. pagadera dentro de un año equivale á 100 rs. pagados al contado. Luego para hallar el *valor actual* de una letra de 3000 rs., basta formar la proporcion

$$106 : 100 :: 3000 : x,$$

cuyo cuarto término representará la cantidad que debe entregar el banquero.

Tambien puede decirse: si por 106 rs. pagaderos en un año, debe descontar 6 rs. el banquero, ¿cuánto deberá descontar por la letra de 3000 rs.? Es decir,

$$106 : 6 :: 3000 : x';$$

proporcion cuyo cuarto término representa la ganancia del banquero, ó el *descuento* de la letra.

La primera proporcion dá $x=\frac{300000}{106}=2830\text{rs.},19\text{cs.};$

y la segunda. . . . . $x'=\frac{18000}{106}=\ 169,\ \ 81$

$$\overline{\quad 3000 \quad}$$

por consiguiente, *el valor actual* de la letra es 2830 rs., 19 cs.; ó bien el banquero debe descontar 169 rs., 81 cs.

En efecto, el capital 2830 rs., 19 cs., reunido á su interés 169 rs., 81 cs., reproduce los 3000 rs., importe de la letra. Las dos operaciones se sirven mútuamente de comprobacion.

Designemos en general por a el importe de un documento cualquiera de crédito, por t el tiempo que falta hasta su vencimiento, y por i el tanto de interés en la unidad de tiempo.

Como 100 rs. producen i al cabo de la unidad de tiempo, es claro que al cabo del tiempo t, deben producir una cantidad $i \times t$, ó it; y por consiguiente, $100+it$ representa el valor del capital 100 al cabo del tiempo t, incluso el interés que devenga durante el mismo tiempo; lo cual significa que un capital $100+it$ pagadero al cabo del tiempo t, equivale á 100 pagaderos al contado.

Luego para hallar el valor actual del documento a, debemos formar la proporcion

$$100+it : 100 :: a : x,$$

de donde $$x = \frac{100\,a}{100+it};$$

y para obtener el descuento del documento, escribiremos

$$100+it : it :: a : x,$$

de donde $$x = \frac{a \times it}{100+it}.$$

En lenguage ordinario, *el valor actual de un documento cualquiera de crédito se obtiene multiplicando su importe por* 100, *y dividiendo el producto por* 100, *mas el interés de* 100 *calculado con respecto al tiempo que debe pasar hasta el vencimiento.*

Para hallar el descuento, se multiplica el importe de la letra por el interés de 100 *rs. calculado para el tiempo propuesto, y dividiendo el producto por* 100, *mas el interés de* 100 *durante el mismo tiempo.*

Si la operacion es exacta, la suma de los dos resultados debe ser igual al importe de la letra.

Primer ejemplo. *Se desea saber el valor actual de una letra de* 4850 *rs. pagadera á los* $13\frac{1}{2}$ *meses, suponiendo que el tanto de interés es el* $\frac{3}{4}$ *p* % *al mes.*

Tenemos $a=4850,\ t=13\frac{1}{2},\ i=\frac{3}{4};$

de donde $i\times t=\frac{3}{4}\times 13\frac{1}{2}=\frac{81}{8}=10{,}125.$

Luego la fórmula $x=\dfrac{100a}{100+it}$

se convierte en $x=\dfrac{485000}{110{,}125}=\dfrac{485000000}{110125}=\ldots.4404{,}09,$

que son los reales que representan el valor actual de la letra.

La segunda fórmula nos dará

$$x'=\frac{4850\times 10{,}125}{110{,}125}=\frac{49106250}{110125}=\ldots.\ \ 445{,}91.$$

$$\overline{4850{,}00.}$$

226. Este modo de descontar no es el que emplean los banqueros y comerciantes, los cuales por lo comun descuentan á tanto p $^0/_0$ por año ó por mes; es decir, que establecen un tanto de descuento como se fija un tanto de interés.

Repetiremos el ejemplo anterior para tratarle por este otro método.

Se quiere descontar una letra de 4850 *rs., pagadera en* $13^1/_2$ *meses, al* $^3/_4$ *p* $^0/_0$ *al mes.*

Análisis. Como en virtud del enunciado, debemos desquitar $\frac{3}{4}$ p $^0/_0$ al mes, en $13\frac{1}{2}$ meses tendremos que desquitar $\frac{3}{4}\times 13\frac{1}{2}=\frac{81}{8}$, ó reduciendo á decimales, 10,125. Así, pues, para saber cuánto se ha de desquitar en 4850 rs., habremos de hacer la proporcion

$$100:10{,}125::4850:x;$$

de donde se saca

$$x=\frac{4850\times 10{,}125}{100}=491{,}06.$$

Si ahora, de 4850 quitamos 491,06, obtendremos el resíduo 4358,94 que representa el *valor actual* de la letra.

Comparando este resultado 4358,94 con el que obtuvimos antes por el primer método, observamos, como se ve al márgen, que el dueño de la letra recibe 45 rs. 15 cs. menos por el segundo método que por el primero.

$$\begin{array}{r} 4404{,}09 \\ 4358{,}94 \\ \hline 45{,}15 \end{array}$$

Para esplicar esta diferencia, conviene observar que los banqueros, al descontar 491 rs., 06 de 4850 rs., descuentan el interés que el mismo descuento deberia producir al cabo de los $13^1/_2$ meses, cuando rigorosamente no deberian descontar mas que el interés de la cantidad que actualmente entregan al poseedor de la letra, condicion que se cumple en el primer método.

La cantidad 491,06 que el banquero descuenta con arreglo al segundo método, se compone realmente de dos partes, que son, el interés actual de la letra, es decir, 445,91, mas el *interés de este interés*, como es fácil comprobar.

En efecto, la proporcion

$$100 : 10{,}125 :: 445{,}91 : x,$$

dá

$$x = \frac{445{,}91 \times 10{,}125}{100} = 45{,}1483875,$$

es decir, muy cerca de 45,15.

De esto resulta que los 45 rs. y 15 cs. son pérdida que sufre el poseedor de la letra y beneficio que se atribuye el banquero además del que legítimamente le corresponde en virtud de la anticipacion del pago.

A pesar de esto, generalmente se sigue en el comercio este segundo método, por ser su cálculo en la práctica mucho mas cómodo, rápido y sencillo.

En efecto, designemos por a el importe de una letra, por t el tiempo que ha de pasar hasta su vencimiento, y por i el tanto de interés, ó mejor dicho, el *tanto de descuento;* será, pues, $i \times t$ la cantidad que se ha de descontar de 100 rs. durante el tiempo t.

Esto supuesto, para obtener el descuento de la letra cuyo capital hemos representado por a, basta establecer la proporcion

$$100 : it :: a : x,$$

de donde
$$x = \frac{ait}{100},$$

fórmula semejante á la de la regla de interés, que solo comprende dos multiplicaciones y una division sencillas, mientras las dos fórmulas del primer método dan lugar á divisiones que suelen ser bastante complicadas.

Habria un medio de conciliar los dos métodos, que sería disminuir el tanto de descuento; pero la dificultad sería fijar la proporcion entre el tanto de descuento y el respectivo de interés en cada caso. Por eso se atienen todos generalmente al segundo método, en lo cual no hay injusticia ninguna, pues es un punto convencional entre el banquero y el poseedor de la letra.

227. A continuacion ponemos algunos ejemplos resueltos por uno y otro método.

Segundo ejemplo. *Se desea saber el valor actual de una letra de 2850 rs. 45 cs., pagadera al cabo de dos años y ocho meses, suponiendo que el tanto de interés son 8,75 p °/₀ al año.*

Primer método. Como 100 rs. producen 8,75 en un año, su interés al cabo de 2 años 8 meses, debe ser igual á 8,75×2 años 8 meses, ú $8,75 \times \frac{8}{3} = \frac{70}{3}$. Así, pues, el valor actual de la letra está espresado por

$$\frac{2850,45 \times 100}{100 \times \frac{70}{3}} = \frac{285045 \times 3}{370} = \frac{855135}{370};$$

la cantidad que se ha de descontar, está representada por

$$\frac{2850,45 \times \frac{70}{3}}{100 + \frac{70}{3}} = \frac{2850,45 \times 70}{370} = \frac{199531,5}{370}.$$

Efectuando las dos divisiones indicadas, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ} \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{855135}{370} = 2311{,}18 \\ 2.^{\circ} \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{199531{,}5}{370} = 539{,}27 \end{array}\right\} 2850{,}45.$$

Luego el valor actual de la letra es 2311 rs. 18 cs.; y el descuento 539 rs. 27 cs.

Segundo método. Siendo $\frac{70}{3}$ la cantidad que debe desquitarse á 100 rs. en dos años y ocho meses, el descuento de 2850 rs. 45 cs. será

$$\frac{2850{,}45 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{950{,}15 \times 70}{100} = 665 \text{ rs., } 105.$$

Luego el valor actual de la letra será

$$2850{,}45 - 665{,}10 = 2185{,}35.$$

Por consiguiente, el poseedor de la letra recibe por el segundo método 125 rs. 83 cs. menos que por el primero, como se ve al márgen.

$$\begin{array}{r} 2311{,}18 \\ 2185{,}35 \\ \hline 125{,}83 \end{array}$$

Esta pérdida, segun hemos observado antes, es el interés de los 539 rs. 25 cs.

En efecto, el interés de esta cantidad á razon de $\frac{70}{3}$ p $^0/_0$ en dos años y ocho meses, será

$$\frac{539{,}27 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{37748{,}9}{300} = 125{,}829.$$

TERCER EJEMPLO. *Un banquero ha abonado por una letra de 5600 rs. pagadera dentro de 14 meses, la cantidad de 5129 rs. 45 cs. Se quiere saber á qué tanto de interés p $^0/_0$ ha descontado.*

Primer método. Puesto que 5129 rs. 45 cs. representan el valor actual de 5600 rs., obtendremos la suma cuyo valor actual está representada por 100, formando la proporcion

$$5129,45 : 5600 :: 100 : x;$$

de donde $$x = \frac{560000}{5129,45} = 109,1735.$$

Así, pues, el interés de 100 rs. durante 14 meses serán 9 rs. 1735.

Dividiendo esta cantidad por 14, obtenemos 0,6552 que será el tanto de interés mensual; resultado que facilmente puede comprobarse descontando la letra á ese tanto p $^0/_0$.

(Hemos aproximado hasta *diezmilésimas* el tanto de interés para que sea mas exacta la comprobacion.)

Segundo método. Si se restan 5129,45 de 5600, se obtienen 470,55, que es la cantidad que el banquero se reserva en la letra de 5600.

Para saber ahora cuánto desquita de cada 100 en 14 meses, formaremos la proporcion

$$5600 : 470,55 :: 100 : x;$$

de donde $$x = \frac{40755}{5600} = 8,40.$$

Dividiendo este resultado por 14, tenemos 0,60, que es el tanto p $^0/_0$ correspondiente á cada mes, y que es en realidad el tanto p $^0/_0$ pedido.

Este tanto segun se ve es menor que el determinado por el otro método, y así sucede siempre.

228. El ejemplo siguiente comprende á la vez la regla de interés y el primer método de descuento.

Cuarto ejemplo. *Un comerciante compra á un fabricante cierta cantidad de géneros por 3859 rs. 25 cs.; pero no pudiendo pagarle al contado, le firma un pagaré á 18 meses. Se quiere saber cuál deberá ser la cantidad fijada en el pagaré, suponiendo el interés de $^3/_4$ p $^0/_0$ mensual.*

Análisis. Desde luego se comprende que el pagaré debe componerse de la suma debida en el momento de la compra, mas su interés durante los 18 meses.

Esto supuesto, siendo $\frac{3}{4}$ el interés de 100 en un mes, serán $\frac{3}{4}\times 18$ ó 13,50 el interés de 100 en 18 meses.

Luego para obtener el interés de 3859,25, basta formar la proporcion siguiente

$$100 : 13,50 :: 3859,25 : x;$$

de donde $x = \dfrac{3859,25\times 13,50}{100} = 520,99875$, ó 521.

Añadiendo este interés á los 3859,25, se obtienen 4380,25, que es el importe total del pagaré.

Se comprobará esta operacion por el primer método de descuento.

Al efecto formariamos la proporcion

$$113,50 : 100 :: 4380,25 : x,$$

y el cuarto término, que representará el actual valor del pagaré de 4380 rs. 25 cs., deberá ser igual á 3859 rs. 25 cs.

Al fin del capítulo VIII esplicaremos las reglas de interés compuesto y de descuento compuesto.

REGLA DE COMPAÑÍA.

229. Esta regla *tiene por objeto repartir entre varias personas asociadas en un mismo comercio la ganancia ó la pérdida procedente de su asociacion.*

Generalmente han convenido los negociantes (y así es conforme á la razon y la justicia) que la parte de ganancia ó pérdida de cada socio es, 1.° *proporcional al capital impuesto* cuando los tiempos son iguales, 2.° *proporcional al tiempo* cuando los capitales impuestos son desiguales. De donde resulta que siendo diferentes los capitales y los tiempos, *las ganancias ó pérdidas respectivas son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.*

Luego la cuestion, considerada bajo el punto de vista mas general, consiste en *repartir un número dado* (que es una ganancia ó una pérdida) *en partes directamente proporcionales á otros números dados.*

Sean, pues, A el número que debe repartirse; m, n, p, q,.... los números en cuya proporcion debe repartirse A; y x, x', x'', x''',.... las diferentes partes.

En virtud del enunciado, tendremos la siguiente série de razones iguales:

$$m : x :: n : x' :: p : x'' :: q : x''' .... ;$$

de donde, haciendo (n.º 211) la suma de los antecedentes y la de los consecuentes, tendremos:

$$m + n + p + q + ... : x + x' + x'' + x''' + ... :: m : x,$$

ó bien, puesto que $x + x' + x'' + x''' + ...$, suma de las partes, es igual á A,

$$\begin{aligned} m + n + p + q + ... : A &:: m : x \\ &:: n : x' \\ &:: p : x'' \\ &:: q : x''' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Lo cual prueba que, para obtener cada una de las partes, *basta multiplicar el número* A, *dado para repartir, respectivamente por cada uno de los números* m, n, p, q,...., *y dividir el producto por la suma* m + n + p + q +.... *de los mismos números.*

Hagamos algunas aplicaciones.

230. Primer ejemplo. *Tres personas se han reunido para un comercio; la primera ha puesto* 15000 *rs., la segunda* 22540, *y la tercera* 25600; *al cabo de un año han ganado* 12000 *rs.; se quiere saber la parte de ganancia correspondiente á cada socio.*

Análisis. Resulta de las consideraciones precedentes (y es además evidente por sí mismo), que el *capital social* (que es la suma de los tres capitales) *es á la ganancia total, como el capital de un socio es á su parte de ganancia.*

Luego la ganancia de un socio es igual al producto de la ganancia total multiplicada por su capital particular, y partida por el capital social.

Esto supuesto, sumando los tres capitales, obtenemos en este caso 63140 rs.

Tendremos, pues, sucesivamente las tres espresiones siguientes que nos darán la parte de ganancia de cada socio:

$$\text{Ganancia del } 1.^{\circ}\ x = \frac{12000 \times 15000}{63140} = 2850{,}81,$$

$$\text{del } 2.^{\circ}\ x' = \frac{12000 \times 22540}{63140} = 4283{,}81,$$

$$\text{del } 3.^{\circ}\ x'' = \frac{12000 \times 25600}{63140} = \underline{4865{,}38,}$$

$$12000{,}00,$$

como puede comprobarse haciendo la suma de las ganancias, que será igual á 12000 si la operacion está bien hecha.

Segundo ejemplo. *Un particular comienza una empresa con un capital de* 25000 *rs.* Cinco *meses despues, queriendo estenderse mas, recibe de un capitalista* 40000 *rs.* Seis *meses despues de este préstamo primero, encuentra un segundo capitalista que le suministra* 60000 *rs. Al cabo de dos años ha ganado en su empresa* 80000 *rs., y se trata de repartir esta ganancia entre los tres socios, teniendo en cuenta que han convenido en dar al primer empresario, además de su parte proporcional en la ganancia, una prima de* 5 *p* $^0/_0$ *sobre el beneficio total.*

Análisis. Ante todas cosas, retiraremos de los 80000 rs. ganados el 5 p $^0/_0$ que, segun el convenio, debe tomar el primer empresario; este tanto será $\frac{1}{20}$ de 80000, es decir, 4000 reales.

Nos quedan, pues, 76000 rs. que repartir entre las tres personas, proporcionalmente á los productos de sus capitales por el tiempo que han estado colocados en la empresa.

Esto supuesto, 1.º los 25000 rs. del primer empresario, empleados durante los 24 meses, dan por producto

$$25000 \times 24 = 600000.$$

2.º Los 40000 rs. del primer capitalista, que estuvieron empleados en la compañía $24 - 5 = 19$ meses, dan $40000 \times 19 = 760000$.

3.º En fin, los 60000 rs. del segundo capitalista, empleados en la compañía durante $24-5-6=13$ meses, dan $60000 \times 13=780000$ rs.

Luego la cuestion se reduce á repartir 76000 en proporcion á los tres números 600000, 760000 y 780000, ó lo que es lo mismo evidentemente, en proporcion á los tres números 60, 76 y 78.

La suma de estos tres números últimos es 214; por consiguiente, las tres partes serán

$$1.^{a}\text{ parte. . . }\frac{76000 \times 60}{214}=21308{,}41;$$

ó bien, añadiéndole la prima de 4000 rs. que le pertenece como encargado de la empresa. 25308,41

$$2.^{a}\text{ parte. . . }\frac{76000 \times 76}{214}=\frac{5776000}{214}=26990{,}65$$

$$3.^{a}\text{ parte. . . }\frac{76000 \times 78}{214}=\frac{5928000}{214}=27700{,}94$$

Comprobacion. . . . . 80000,00.

231. La regla de compañía es una de las operaciones mas usuales entre los hombres civilizados.

Las contribuciones que pagan al gobierno los individuos de una misma nacion, se determinan por medio de reglas de compañía.

Se llama *contribucion*, la cantidad que debe pagar anualmente cada individuo, guardando proporcion á su renta ordinaria; es para él una especie de *pérdida*, á que voluntariamente se somete para ayudar al gobierno en su marcha y en sus esfuerzos en favor del interés y el bien de todos.

La cuestion que tiene por objeto fijar el tanto de las contribuciones proporcionales, respecto de un número de individuos tan grande como el de un Estado cualquiera, parece al pronto muy complicada; pero las consideraciones siguientes bastarán para hacer ver cuán sencilla es su resolucion.

Supongamos para fijar las ideas que se trata solo de la *contribucion territorial*, es decir, de las contribuciones que se imponen sobre las rentas de *la propiedad inmueble*.

Las necesidades de un gobierno durante un año exi-

gen una contribucion territorial cuyo valor es A. ¿De qué modo procederá para hacer el repartimiento con justicia?

Solucion. Se empieza por repartir en el ministerio de Hacienda la suma A entre todas las provincias que componen el territorio, *proporcionalmente* á las rentas ordinarias de cada uno.

Sea B la cuota que corresponde á una cualquiera de las provincias. Hallándose esta dividida en partidos, se hace en el gobierno de la provincia la reparticion de la suma B entre los varios partidos, proporcionalmente á sus rentas ordinarias.

Sea C la suma que por su cuota debe pagar uno de los partidos. Como cada partido se divide en varios municipios, se reparte entre ellos la suma C, *proporcionalmente* á sus rentas ordinarias.

Sea D la cuota de un municipio. Su ayuntamiento hará la reparticion entre los varios propietarios dependientes de su autoridad, proporcionalmente á sus rentas.

Formadas así las listas de todos los contribuyentes propietarios, cada uno entrega su importe al cobrador respectivo del municipio. Estos remiten sus fondos á la tesorería provincial, de donde el gobierno los recoge á medida que se recaudan y los necesita.

232. A continuacion ponemos algunos problemas que se resuelven por medio de la regla de compañía.

Tercer ejemplo. *Repartir una cantidad de* 36000 *rs. entre cuatro personas, de modo que la segunda tenga dos veces mas que la primera; la tercera tanto como la primera y segunda juntas; y la cuarta tres veces mas que la tercera.*

A poco que reflexionemos sobre la naturaleza de esta cuestion, conoceremos que tomando por unidad la parte de la primera persona, y designándola por 1, es 2 la parte de la segunda; $2+1=3$ la parte de la tercera; y $3\times3=9$ la parte de la cuarta; luego la cuestion queda reducida á repartir 36000 rs. en cuatro partes que sean entre sí como los números 1, 2, 3 y 9; y por consiguiente está comprendida en la cuestion general del n.º 229.

Haciendo la suma de los cuatro números 1, 2, 3 y 9, resultan 15.

Por consiguiente, las cuatro partes serán:

$$1.^a \ldots\ldots \frac{1 \times 36000}{15} = 2400;$$

$$2.^a \ldots\ldots \frac{2 \times 36000}{15} = 4800;$$

$$3.^a \ldots\ldots \frac{3 \times 36000}{15} = 7200;$$

$$4.^a \ldots\ldots \frac{9 \times 36000}{15} = 21600;$$

$$\overline{36000.}$$

Algunas veces son quebrados ó números fraccionarios los números en cuya proporcion ha de repartirse una cantidad dada. Pero facilmente puede referirse este caso al de números enteros, reduciendo los quebrados á un comun denominador.

Así, para dividir una cantidad dada, a, en partes proporcionales á las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, redúzcanse estas á un comun denominador, y se tendrá $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$. Pero como los quebrados que tienen un mismo denominador son proporcionales á sus numeradores (n.° 217), todo se reduce á repartir la cantidad a proporcionalmente á los números 8, 9, 10; por consiguiente, las partes pedidas serán $\frac{8a}{27}$, $\frac{9a}{27}$, $\frac{10a}{27}$.

Cuarto ejemplo. *Al morir un sugeto hace testamento instituyendo cuatro herederos en la forma siguiente: el primero tomará* $\frac{1}{6}$ *del total de los bienes; el segundo* $\frac{2}{5}$; *el tercero* $\frac{4}{9}$; *y el cuarto* $\frac{1}{3}$. *Se quiere saber cuánto deberá tomar cada uno, bajo el supuesto de ascender la herencia á 40000 rs.*

Solucion. Si la suma de los cuatro quebrados $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{1}{3}$ fuera igual á 1, se cumplirian las condiciones del testamento tomando alternativamente de los 40000 rs. la parte indicada por cada uno de ellos.

Pero reduciéndolos á un comun denominador, obtenemos $\frac{15}{90}$, $\frac{36}{90}$, $\frac{40}{90}$, $\frac{30}{90}$, cuya suma es igual á $\frac{121}{90}$, ó $1\frac{31}{90}$, resultado mayor que la unidad; de donde se deduce que solo habria herencia para los tres primeros herederos si se siguiera estrictamente la letra del testamento.

Reflexionando sobre el enunciado, observaremos que la intencion del testador fué distribuir sus bienes entre los cuatro herederos, de modo que sus partes fuesen proporcionales á los números $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{1}{3}$.

Cumpliremos, pues, sus intenciones repartiendo los 40000 reales en partes proporcionales á los cuatro quebrados, y por consiguiente á los cuatro números 15, 36, 40 y 30, que son sus numeradores despues de reducidos á un comun denominador.

Siendo 121 la suma de esos números, las partes pedidas serán:

1.ª parte. . . .	$\frac{15 \times 40000}{121} =$	4958 rs.,	68 cs.,
2.ª	$\frac{36 \times 40000}{121} =$	11900,	82,
3.ª	$\frac{40 \times 40000}{121} =$	13223,	14,
4.ª	$\frac{30 \times 40000}{121} =$	9917,	36,
		40000,	00.

Quinto ejemplo. *Se hace una remonta de* 1200 *caballos que debe repartirse entre tres regimientos de dragones, en proporcion á su fuerza; la fuerza del primer regimiento es á la del segundo como* 11 *es á* 8; *y la fuerza del primer regimiento es á la del tercero como* 9 *es á* 7. *Se quiere saber cuántos caballos recibirá cada regimiento.*

Resulta evidentemente del enunciado que el número de caballos del segundo regimiento debe ser los $\frac{8}{11}$ de los del primero; y que el número de caballos del tercero debe ser los $\frac{7}{9}$ de los del segundo. Luego los tres números pedidos deben ser entre sí, como los números 1, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{9}$, ó reduciendo el entero y los quebrados á un comun denominador, como los tres números 99, 72 y 77.

Así obtendremos

para el primer regimiento. $\frac{99 \times 1200}{248} = 479\ \frac{1}{31}$,

para el segundo. . . . . . $\frac{72 \times 1200}{248} = 348\ \frac{12}{31}$,

para el tercero . . . . $\frac{77 \times 1200}{248} = 372\ \frac{18}{31}$,

$$\overline{1200.}$$

Advertencia. La suma de las fracciones produce 1; pero como en este caso es imposible la reparticion en fracciones, sería necesario dar un caballo mas al tercer regimiento, al cual ha correspondido el mayor quebrado.

Hay otras dos reglas que sin depender precisamente de la regla de tres, son muy importantes por ser muy usuales en la banca y en los diversos ramos de comercio. Llámanse *regla conjunta* y *regla de aligacion*.

REGLA CONJUNTA.

233. Esta regla tiene por objeto *determinar la relacion de las monedas de dos paises, conociendo de antemano su razon con las monedas de otros paises*. Toma el nombre de *regla conjunta* porque consiste en reducir á una sola por medio de la multiplicacion, varias razones dadas; lo cual dá lugar (n.º 212) á una *razon compuesta*.

Los dos ejemplos siguientes bastarán para dar una idea de esta regla y del modo de ejecutarla.

PRIMER EJEMPLO.

48 *francos. . . .* valen. . . 52 *chelines de Inglaterra;*
15 *chel. de Ingl. . . . . . .* 6 *florines de Alemania;*
50 *flor. de Alem. . . . . .* 7 *ducados de Hamburgo;*
14 *duc. de Hamb. . . . . .* 40 *rublos de Rusia.*

Se quiere saber cuántos rublos de Rusia valen 2500 *fs.*

Advertencia. Prevenimos al lector que los números adoptados arriba para espresar las relaciones de las diversas monedas, se han tomado casi arbitrariamente, hallándose sujetas á muchas alternativas esas relaciones, segun el cambio de una plaza con otra.

Solucion. Designemos por a, b, c, d, e, los *valores intrínsecos* (*) de las cinco monedas que entran en el enunciado, y por x el número de rublos que han de equivaler á los 2500 fs.; en virtud del enunciado, tendremos evidentemente las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} 48a &= 52b, \\ 15b &= 6c, \\ 50c &= 7d, \\ 14d &= 40e, \\ x \times e &= 2500a; \end{aligned}$$

de donde, multiplicando estas igualdades miembro á miembro, y suprimiendo los factores comunes a, b, c, d, e, resulta

$$48 \times 15 \times 50 \times 14 \times x = 52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500.$$

$$\text{Luego,} \quad x = \frac{52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500}{48 \times 15 \times 50 \times 14} = 433\,\frac{1}{3}.$$

Es necesario observar que no deben efectuarse los cálculos indicados en el numerador y en el denominador, hasta despues de haber suprimido los factores comunes á los dos términos.

(*) Se llaman VALORES INTRÍNSECOS los valores de las diferentes especies de monedas, referidas á una misma unidad, por ejemplo, al franco ó al real.

En la práctica se ejecutan esas simplificaciones en la forma puesta á continuacion.

$$\begin{array}{rrrrcrl}
1. \ . \ . & 2. \ . \ . & 12. \ . \ . & 48a & = & 52b. \ . \ . & 13 \\
& & 3. \ . \ . & 15b & = & 6c. \ . \ . & 1 \\
& & 1. \ . \ . & 50c & = & 7d. \ . \ . & 1 \\
& 1. \ . \ . & 2. \ . \ . & 14d & = & 40e. \ . \ . & 1 \\
& & & x \times e & = & 2500a. \ . \ . & 100.
\end{array}$$

Despues de disponer unas debajo de otras las cinco igualdades, como habíamos hecho mas arriba, empezamos por suprimir los factores comunes a, b, c, d, e.

Se suprime despues el factor 4 comun á 48 y á 52, lo cual dá los cocientes respectivos 12 y 13.

Se suprime tambien el factor 6, comun á 12 y á 6, que se convierten respectivamente en 2 y 1.

Así se continúa hasta suprimir todos los factores comunes á los primeros y á los segundos miembros de las igualdades; y hechas todas las simplificaciones, se llega al resultado

$$3x = 130;$$

de donde $$x = \frac{1300}{3} = 433\,\frac{1}{3}.$$

Estas operaciones exigen un poco de hábito, pero no son difíciles. Es necesario únicamente tener cuidado de ir señalando los números que se dividen por un factor, reemplazándolos luego por el cociente correspondiente.

SEGUNDO EJEMPLO.

Un negociante francés quiere remitir á Lóndres 1200 *libras esterlinas. Ruega á un banquero de París que se encargue de esta comision ofreciéndole por ella el* 1 p $^0/_0$ *de la cantidad total. Se quiere saber en francos la suma que debe dar al banquero.*

Se sabe además que

26 *libras esterlinas*. . . valen. 150 *rublos;*
76 *rublos*. . . . . 30 *ducados de Hamburgo;*
20 *ducados de Hamburgo*. . . 42 *pesos españoles;*
12 *pesos españoles*. . . . . . . 65 *francos*.

Designemos por a, b, c, d, e, los valores intrínsecos de las monedas, y por x el valor de 1200 libras esterlinas en francos: tendremos las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{lllrl}
1\ldots 13\ldots & 26a & = & 150b\ldots & 1, \\
1\ldots & 75b & = & 30c\ldots & 3, \\
1\ldots & 20c & = & 42d\ldots & 21, \\
1\ldots & 12d & = & 65e\ldots & 5, \\
 & x\times e & = & 1200a\ldots & 100;
\end{array}$$

de donde se saca, efectuando las reducciones como arriba hemos hecho,

$$\begin{array}{lr}
x = & 31500, \\
\text{el } 1 \text{ p } {}^0\!/_0 \text{ es}\ldots\ldots\ldots = & 315, \\
\hline
 & 31815.
\end{array}$$

Luego el negociante debe entregar al banquero 31815 fs., para que este se encargue de hacer pagar en Lóndres las 1200 libras esterlinas.

234. La regla conjunta puede tambien considerarse como un caso particular de la regla de los quebrados de quebrados, establecida en el número 63.

Volvamos, en efecto, al ejemplo primero de los dos espuestos en el número precedente.

Decir que 48 francos valen 52 chelines de Inglaterra, es decir que 1 franco vale $\frac{52}{48}$ del chelin. Igualmente, como 15 chelines equivalen á 6 florines alemanes, se infiere que 1 chelin vale $\frac{6}{15}$ de florin aleman; y por consiguiente, 1 franco vale $\frac{52}{48}$ de $\frac{6}{15}$ del florin aleman. Del mismo modo, si 50 florines valen 7 ducados de Hamburgo, se infiere que 1 florin vale $\frac{7}{50}$ de ducado de Hamburgo, y por consiguiente, 1 franco vale los $\frac{52}{48}$ de los $\frac{6}{15}$ de los $\frac{7}{50}$ de 1 ducado de Hamburgo.

Continuando estos razonamientos, se llegará finalmente á probar que

$$2500 = 2500 \text{ veces los } \frac{5}{48} \text{ de los } \frac{6}{15} \text{ de los } \frac{7}{50} \text{ de los } \frac{40}{14} \text{ del rublo.}$$

Luego (n.º 65) 2500 francos $= \dfrac{52\times6\times7+40\times2500}{48\times15\times50\times14}$ del rublo; resultado encontrado arriba.

De la regla de aligacion.

235. Las cuestiones que conducen á esta regla son de dos especies:

O bien se tiene por objeto *hallar el valor medio de muchas clases de cosas, conociendo el número y el valor particular de cada clase;*

O bien se trata de *determinar las cantidades de cada clase de cosas que deben entrar en una mezcla ó aleacion, conociendo de antemano el precio ó valor de cada especie y el valor total de la mezcla.*

Solo nos ocuparemos de la primera especie, pues la segunda corresponde enteramente al Algebra.

Primer ejemplo. *Un mercader de vino ha mezclado vinos de diferentes cualidades, á saber: 250 arrobas á 12 rs. la arroba, 180 arrobas á 15 rs., y 200 arrobas á 16 rs.; se quiere saber el precio de la arroba de la mezcla.*

Observemos que el valor de las 250 arrobas á 12 rs, será 250 × 12 ó.	3000;
igualmente 180 arrobas á 15 rs. serán.	2700;
y finalmente, 200 arrobas á 16 rs. serán. . . .	3200;
luego el precio total de las tres clases de vino mezcladas será.	8900.

Si ahora sumamos, como se ve al márgen,	250
los tres números 250, 180 y 200, que valen	180
juntos 630, la cuestion quedará evidentemente	200
reducida á esta otra:	630

630 arrobas de vino cuestan 8900 rs.; *¿á cuánto sale la arroba?*

Para obtener este precio, basta dividir 8900 por 630, y el cociente 14 espresa el número pedido.

Regla general. Para tener el precio de la unidad de mezcla, es necesario, 1.º *multiplicar el precio de cada especie de cosas que se quieran mezclar, por el número de unidades de su especie, sumando luego los productos;* 2.º *sumar aparte los números de unidades de las diferentes clases de cosas;* 3.º *dividir la suma de los productos, ó el precio total, por la suma de los números de unidades.*

Segundo ejemplo. *Se quieren fundir reunidos* 23 *kilógramos de plata de* 825 *milésimas de ley;* 14 *kilógramos de* 910; 19 *de* 845; *y se quiere saber la ley de la aleacion resultante.*

Advertencia. Para comprender bien este enunciado, es necesario saber que en el comercio de platería, el oro y la plata van siempre mezclados con otros metales, por ejemplo, con cobre.

Esto supuesto, se dice que un lingote ó barra de oro ó plata tiene *tal ley*, cuando en un peso determinado, por ejemplo, en un kilógramo, contiene tal peso de oro ó de plata pura.

Así, una barra está á 9 décimos de ley, cuando en un kilógramo de la misma hay 9 décimos de oro ó de plata pura. (Esta ley es la establecida por el gobierno para las monedas actuales.) Del mismo modo, un lingote tiene la ley de 825 milésimos, cuando en un kilógramo contiene 0,825 de oro ó de plata pura.

Esto entendido, resulta del enunciado, que

1.º . . .	$23^{\text{kil.}}$	á $825^{\text{mil.}}$. . .	hacen	23×825 ó $18975^{\text{mil.}}$
2.º . . .	14	á 910.		14×910 ó 12740
3.º . . .	19	á 845.		19×845 ó 16055
	56			47770.

Luego los 56 kilógramos aleados contienen 47^{k},770 de plata pura.

Luego la ley de la nueva barra estará espresada por $\frac{47,770}{56}$ ó 0,853; es decir, que el lingote resultante de la aleacion de los tres primeros, tiene 853 milésimos de ley.

Tercer ejemplo. *Hemos empleado* 500 *obreros:* 160 *á razon de* 8 *rs. por dia,* 200 *á* 6 *rs.*, *y* 140 *á* 5. *Se quiere saber á cómo salen uno con otro.*

160 obreros	á 8 rs. hacen.	1280
200	á 6.	1200
140	á 5.	700
500		3180.

Luego, si 500 obreros han costado 3180 rs., un obrero solo costará $\frac{3180}{500}$, ó 6 rs. 36 cs.

236. Las determinaciones de los *valores medios* de varias cosas de valores diferentes, es un caso particular de la regla de aligacion de la primera especie.

Se llama *valor medio* de varias cosas cuyos valores particulares se conocen, *la suma de los valores de dichas cosas, dividida por la suma de tantas unidades como cosas hay.*

Así, en el caso en que solo se tienen dos cosas, su *valor medio* es la semi-suma de los valores de las cosas; en otros términos (n.º 203), es el *medio diferencial entre los valores de las dos cosas.*

Cuarto ejemplo. *Se han medido cuatro veces diferentes la longitud de un parque. Se ha encontrado la primera vez* $250^m,439$; *la segunda* $258^m,695$; *la tercera* $249^m,75$; *y la cuarta* $251^m,158$. *Se quiere saber la longitud del parque.*

Puesto que no estan conformes los resultados de medida obtenidos en las cuatro operaciones, es claro que el único medio de responder á la cuestion es buscar la *medida media* entre las cuatro medidas diferentes.

La suma de las medidas es 1002,042; dividiendo este resultado por 4, se obtiene 250,5105, que será la medida media.

De algunas otras cuestiones que pueden resolverse por solo el razonamiento.

237. En las cuestiones precedentes, los medios de llegar á la solucion buscada eran fijos y generales, es decir, susceptibles de aplicarse á todas las cuestiones de la misma especie. Pero hay otras infinitas que solo se enlazan en parte á ellas, ó que no tienen de ellas dependencia alguna. En este caso solo el Algebra puede suministrar métodos seguros y directos de reso-

lucion. Sin embargo, como es muy conveniente ejercitar de todos los modos posibles la inteligencia de los principiantes, vamos á tratar algunas cuestiones sin mas auxilio que el comun discurso, lo cual se llama resolver un problema *aritméticamente.*

Recordemos (n.º 197) que resolver ó analizar un problema es *procurar descubrir, reflexionando sobre su enunciado, en las relaciones dadas entre los números dados, la série de operaciones que con ellos deben efectuarse, para obtener los valores de los números desconocidos.*

PRIMER PROBLEMA. *Se quiere saber cuál es el número cuya mitad, tercera y cuarta parte sumadas con sus* $\frac{2}{7}$, *producen* 575.

Para resolver esta cuestion, empecemos por observar que tomar sucesivamente la *mitad*, la *tercera parte*, la *cuarta parte* y las *dos séptimas partes* de un número, y sumar despues todas esas partes, equivale á multiplicar el número por la suma de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, es decir, por $\frac{115}{84}$. Y como el producto del número buscado por $\frac{115}{84}$ ha de ser igual á 575, se infiere, en virtud de las definiciones de la division, que el número buscado debe ser igual al cociente de la division de 575 partido por $\frac{115}{84}$; es decir, igual á $575 : \frac{115}{84}$.

Efectuando la operacion indicada, resulta que el número pedido es 420.

Comprobacion.	420
mitad.	210
tercera parte.. . .	140
cuarta parte. . . .	105
una séptima parte.	60
otra séptima parte.	60
Total.	575.

Segundo problema. *Se piden tres números cuya suma sea igual á 96, y tales que el segundo esceda en 2 al primero, y el tercero esceda en 4 á la suma de los otros dos.*

Desde luego es evidente que si quitáramos 2 al segundo número, le dejaríamos igual al primero, y si quitáramos al tercero $2+4$ ó 6 unidades, le haríamos igual al duplo del primero; por consiguiente, la suma de los tres números sería cuádrupla del primer número, despues de hechas esas dos sustracciones.

Luego si quitamos de 96 la suma $2+6$, claro es que el resto 88 será el cuádruplo del número primero.

Luego este primer número valdrá $\frac{88}{4}$. . . . . . . ó 22.

El segundo será igual á. . . . . $22+2=24$

y el tercero. . . . . $46+4=50$

Comprobacion. . . . . . 96.

Tercer problema. *Hallar dos números tales, que si al primero se añade 21, la suma resultante sea el quintuplo del segundo, y que si al segundo se añade 21, la suma resultante sea el triplo del primero.*

Del enunciado se infiere que la diferencia entre el primer número y el quintuplo del segundo es igual á la diferencia entre el segundo número y el triplo del primero. Luego hay equidiferencia entre el primer número, el quintuplo del segundo, el mismo segundo y el triplo del primero: y como en toda *equidiferencia, la suma de estremos es igual á la suma de medios* (n.º 201), se sigue que el séstuplo del segundo número es igual al cuádruplo del primero; luego el segundo número será igual á los $\frac{4}{6}$ ó á los $\frac{2}{3}$ del primero. Pero este segundo número aumentado en 21, dá el triplo del primero; ó lo que es lo mismo, 21 es igual al triplo del primer número, disminuido en el segundo, ó en los $\frac{2}{3}$ del primero, es decir, igual al producto del primero por $\left(3-\frac{2}{3}\right)$, ó á los $\frac{7}{3}$ del primero.

Luego finalmente, el primero valdrá $21\times\frac{3}{7}$, ó 9. El segundo, que vale los $\frac{2}{3}$ del primero, es igual á $9 \times \frac{2}{3}$, ó 6.

En efecto: 1.º $9 + 21$ dan 30, que es el quintuplo de 6; 2.º $6 + 21$ son 27, que es el triplo de 9. Luego los dos números 9 y 6 son los números pedidos.

CUARTO PROBLEMA. *Se emplean tres obreros en hacer cierta obra. El primero la haria solo en* 12 *dias trabajando* 10 *horas por dia; el segundo en* 15 *dias trabajando* 6 *horas por dia; el tercero en* 9 *dias trabajando* 8 *horas por dia. Se quiere saber,* 1.º *en cuántos dias harán la misma obra, trabajando juntos los tres obreros;* 2.º *cuánto hará cado uno;* 3.º *cuánto ganará cada uno, si se dan para todos* 108 *rs.*

SOLUCION. Observemos por lo pronto que en virtud del enunciado, el primer obrero haría solo la obra en 12 dias × 10 ó 120 horas; luego en una hora haría $\frac{1}{120}$ de la obra.

El segundo la haría solo en 15×6, ó 90 horas; luego en una hora haría $\frac{1}{90}$.

El tercero la haría en 9×8, ó 72 horas; luego en una hora haría $\frac{1}{72}$.

Estos tres obreros, trabajando juntos, harian por consiguiente en una hora $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72}$, ó $\frac{12}{360}$, es decir, $\frac{1}{30}$ de la obra.

Luego, si necesitan una hora para hacer $\frac{1}{30}$ de la obra, es claro que gastarán 30 horas para hacer la obra entera.

Ahora, puesto que en una hora el primer obrero hace $\frac{1}{120}$, en 30 horas hará $\frac{1}{120} \times 30$, ó $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Del mismo modo, el segundo hará en 30 horas $\frac{1}{90} \times 30$, ó $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Finalmente, el tercero hará en 30 horas $\frac{1}{72} \times 30$, ó $\frac{5}{12}$.

Solo nos falta saber cuánto ganará cada obrero, en razon de la parte de trabajo que ha hecho. Para esto basta dividir

108 en partes proporcionales á las tres fracciones $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ó mas bien, á los tres números 3, 4 y 5, lo cual (2.º 229) efectuado, nos haría ver que las tres partes pedidas son 27, 36 y 45.

Las diversas cuestiones que acabamos de resolver pertenecen á la clase de aquellas que muchos autores tratan por la regla llamada de *falsa posicion simple ó compuesta*. Nosotros hemos creido conveniente pasar en silencio esta regla, porque en general deja mucha vaguedad en el espíritu, y porque la demostracion rigorosa de sus procedimientos está fundada en ciertos principios de Algebra, que por sí mismos conducen con mucha mayor facilidad á su inmediata resolucion.

CAPITULO VIII.

Teoría de las progresiones y de los logaritmos.

Este tratado de Aritmética sería incompleto si no comprendiera al menos las primeras nociones de la teoría de los logaritmos, que inventada por el escocés baron de Neper, es uno de los descubrimientos mas importantes de la ciencia matemática, pues con su ayuda se efectúan en brevísimo tiempo los mas complicados cálculos numéricos.

Pero antes de esplicar sus principios elementales, es indispensable dar á conocer las principales propiedades de dos séries de números que pueden considerarse como una estension de las equidiferencias y de las proporciones, que son las progresiones por diferencia y las progresiones por cociente.

§ I. De las progresiones.

238. *Progresiones por diferencia* (llamadas antes *progresiones aritméticas*).—Así se llama una série de números tales que cada uno escede al que le sigue ó al que le precede en una misma *cantidad constante* que se llama *razon* ó *diferencia* de la progresion.

Sean las dos séries

$$\div\ 2\ .\ 5\ .\ 8\ .\ 11\ .\ 14\ .\ 17\ .\ 20\ .\ 23\ .\ 26\ .\ 29 \ldots,$$
$$\div\ 60\ .\ 55\ .\ 50\ .\ 45\ .\ 40\ .\ 35\ .\ 30\ .\ 25\ .\ 20 \ldots;$$

en la primera, cada término escede al que le precede en el número constante 3; en efecto, $5-2=3$; $8-5=3$;.... 3 se llama la *razon* ó *diferencia* de la progresion.

En la segunda, cada término escede al que le sigue en el número constante 5;

así, 60 — 55 = 5; 55 — 50 = 5; 50 — 45 = 5;....

5 es aquí la razon de la progresion.

La primera se llama progresion *creciente*, porque los términos van aumentando; y la segunda progresion *decreciente*, porque los términos van disminuyendo.

Para espresar que varios números estan en progresion por diferencia, se escribe al principio el signo ÷, que significa *como*, y despues de cada término se escribe un punto que significa *es á*.

Esta notacion está fundada en que una progresion, segun se ha definido, no es mas que una série de *equidiferencias continuas*. (Véase el n.° 203.)

La progresion se enuncia así (considerando por ejemplo la primera de las dos puestas arriba):

Como 2 *es á* 5, 5 *es á* 8, 8 *es á* 11, 11 *es á* 14, ó mas sencillamente, 2 *es á* 5, *es á* 8, *es á* 11, *es á* 14....

Advertencia. Es fácil ver en esta série de equidiferencias,

2 . 5 : 5 . 8 : 8 . 11 : 11 . 14 : 14 . 17....

que cada término de la progresion propuesta es á la vez consecuente y antecedente, escepto el primer término que solo es antecedente, y del último de los términos que se consideran, el cual solo es consecuente.

239. **Primera propiedad.** *Valuacion de un término que ocupe cualquier lugar por medio del primer término.*

Resulta de la definicion de la progresion por diferencia, que en una progresion creciente,

el *segundo* término es igual al *primero* mas la razon;

el *tercero* es igual al *segundo* mas la razon, ó bien, es igual al *primero* mas *dos veces* la razon;

el *cuarto* es igual al *tercero* mas la razon ó al *primero* mas *tres veces* la razon.

En general *un término cualquiera es igual al primero, mas tantas veces la razon como términos hay delante de él.*

Para fijar las ideas en esta propiedad, y presentar un enunciado mas conciso, consideremos la série de los números

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \ldots\ldots\ldots i \,.\, l \,.\, k,$$

que supondremos en progresion creciente, y designemos por r la razon de la progresion.

Evidentemente tenemos, segun la naturaleza de la progresion,

$$\begin{aligned} b &= a + r, \\ c &= b + r = a + \ r + r = a + 2r, \\ d &= c + r = a + 2r + r = a + 3r, \\ e &= d + r = a + 3r + r = a + 4r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Luego, si designamos por n el lugar de un término cualquiera l, en cuyo caso $(n - 1)$ espresa el número de términos que le preceden, tendremos evidentemente

$$l = a + (n - 1)\, r. \ . \ . \ . \ (1),$$

espresion que traducida en lenguage ordinario, equivale al enunciado de arriba.

Si la progresion fuera de creciente, tendríamos por el contrario,

$$\begin{aligned} b &= a - r, \\ c &= b - r = a - r - r = a - 2r, \\ d &= c - r = a - 3r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$1 = a - (n - 1)\, r. \ . \ . \ . \ (2).$$

Las dos fórmulas (1) y (2) sirven para determinar un término cualquiera, sin vernos obligados á calcular todos los que le preceden, porque basta conocer el primer *término*, la *razon* y el número de términos comprendidos desde el primero hasta el que se quiere formar.

Sea, por ejemplo, la progresion $\div$ 2 . 5 . 8 . 11...., cuyo vigésimo término pedimos.

Aquí tenemos

$$a = 2, \ r = 3, \ n = 20;$$

luego la fórmula (1), hecha la sustitucion de estos números en lugar de las letras, se convierte en

$$l = 2 + 19 \times 3 = 59.$$

Del mismo modo hallaríamos para el sexagésimo término,

$$l = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

Sea tambien la progresion $\div$ 80 . 74 . 68 . 72...., cuyo duodécimo término se pide.

En este caso, tenemos $a = 80$, $r = 6$, $n = 12$; luego la fórmula (2) dá

$$l = 80 - 11 \times 6 = 14.$$

240. *Consecuencia de la propiedad precedente.* Estas mismas fórmulas conducen á la resolucion de una cuestion muy importante que tiene por objeto *intercalar entre dos números dados, tantos* MEDIOS DIFERENCIALES como se quieran, es decir, otros números que formen con los dos números dados una progresion por diferencia.

Propongámonos, por primer ejemplo, *intercalar* entre 3 y 57 OCHO MEDIOS DIFERENCIALES.

Como la progresion que queremos formar debe constar de 8 + 2 ó 10 términos contando en ellos los dos dados, se infiere (n.º 239) que el último término 57 es igual al primero 3, mas 9 veces la razon; luego si de 57 quitamos 3, la diferencia 54 será igual á 9 veces la razon, y por consiguiente 6, que es la novena parte de 54, será la espresion de la razon de la progresion.

Conociendo la razon, es fácil formar la progresion, que será

$$\div 3 . 9 . 15 . 21 . 27 . 33 . 39 . 45 . 51 . 57.$$

Sean en general a y l los dos números entre los cuales se quiere intercalar un número m de *medios diferenciales;* si designamos por n el número total de términos de la progresion que habrá de resultar, tendremos $n = m + 2$; de donde $n - 1 = m + 1$; y las dos fórmulas del número 239 se convierten en estas otras

$$l = a + (m + 1) r, \qquad l = a - (m + 1) r.$$

En la primera, restando a de los dos miembros, se saca

$$l - a = (m+1)\, r,$$

de donde $$r = \frac{l-a}{m+1}.$$

En la segunda, añadiendo á los dos miembros la cantidad $(m+1)\, r$, y restando l, tendremos

$$(m+1)\, r = a - l,$$

de donde $$r = \frac{a-l}{m+1}.$$

Luego *para intercalar entre dos números dados un número tambien dado de medios diferenciales, se restará el menor del mayor, y se partirá la diferencia por el número de términos que se quieren intercalar, mas* UNO.

El resultado así obtenido espresa la *razon* de la progresion, que podrá ser *creciente* ó *decreciente*.

Sirva de segundo ejemplo *intercalar entre* 2 *y* 29, 35 *medios diferenciales*.

Aquí tenemos $a = 2$, $l = 29$, $m = 35$;

luego $$r = \frac{29-2}{36} = \frac{3}{4};$$

y la progresion pedida será

$$\div\, 2 \,.\, 2\tfrac{3}{4} \,.\, 3\tfrac{1}{2} \,.\, 4\tfrac{1}{4} \,.\, 5 \,.\, 5\tfrac{3}{4} \ldots\ldots 29.$$

El vigésimo término de esta espresion, que es el décimonono medio diferencial, tiene por valor (n.º 239),

$$l = 2 + 19 \times \frac{3}{4} = 16\,\frac{1}{4}.$$

El 37.º término, que es el último de la progresion, será

$$l = 2 + 36 \times \frac{3}{4} = 29,$$

y así debia ser en efecto.

241. OBSERVACION. *Si entre los términos consecutivos de una progresion por diferencia, considerados de dos en dos, se intercala un número igual de medios diferenciales, todas las progresiones parciales así formadas, componen una sola y misma progresion.*

En efecto, sea la progresion $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f\ldots$; y sea m el número de medios que quieren intercalarse entre a y b, entre b y c, entre c y d,....; las razones de las progresiones parciales serán, segun acaba de verse, $\frac{b-a}{m+1}$, $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{d-c}{m+1}$....; pero todas estas cantidades son iguales, porque estando en progresion a, b, c...., debemos tener $b-a=c-b=d-c=$....; luego la razon es una misma en todas estas progresiones parciales. Y como además el *último* término de cada una de ellas es á la vez *primero* de la siguiente, podemos concluir que todas ellas enlazadas forman una sola progresion.

Propongámonos por ejemplo, *intercalar* 10 *medios diferenciales entre dos términos consecutivos cualesquiera de la progresion*

$$\div 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \ldots$$

La razon es aquí $\frac{3-1}{11}$, $\frac{5-3}{11}$, $\frac{7-5}{11}$,.... ó bien $\frac{2}{11}$.

Tendremos, pues,

$$\div 1 \,.\, 1\frac{2}{11} \,.\, 1\frac{4}{11} \,.\, 1\frac{6}{11} \ldots 2\frac{9}{11} \,.\, 3 \,.\, 3\frac{2}{11} \,.\, 3\frac{4}{11} \ldots 4\frac{9}{11} \,.\, 5 \,.\, 5\frac{2}{11} \ldots,$$

progresion evidente.

242. SEGUNDA PROPIEDAD. En toda progresion por diferencia, *la suma de dos términos cualesquiera tomados á igual distancia de los términos estremos*, es decir, del primero y del último término, *es igual á la suma de dichos dos estremos.*

Así, en la progresion

$$\div 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25 \,.\, 28 \,.\, 31 \,.\, 34 \,.\, 37,$$

tenemos

$$1+37=4+34=7+31=10+28\ldots$$

Para darnos cuenta de esta propiedad de un modo general, sean a y l los dos términos estremos, x el término que ocupa el lugar p, es decir, que tiene $(p-1)$ delante de él, y z un término que tiene $(p-1)$ detrás de él.

Esto supuesto, tenemos, en virtud de la fórmula del número 239,

$$x = a + (p-1)\,r.$$

Ahora, si no consideramos mas que la parte de progresion comprendida desde el término z inclusive hasta el término l tambien inclusive, será p el número total de los términos de esta progresion parcial, y tendremos

$$l = z + (p-1)\,r.$$

Donde se ve que l escede á z en la misma cantidad que x escede á a. Luego los cuatro números a, x, z, l, forman una *equidiferencia*. Y como en toda equidiferencia, *la suma de los medios es igual á la suma de los estremos* (n.º 201), tendremos aquí

$$x + z = a + l; \qquad \text{L. C. D. D.}$$

Advertencia. Cuando la progresion consta de un número *impar* de términos, el del medio forma con los dos estremos una *equidiferencia contínua*; y por consiguiente (n.º 203) *es igual á la semi-suma de los dos estremos.*

Así, en la progresion de arriba $\div 1 . 4 . 7 ....$, que se compone de trece términos, el séptimo término, 19, es igual á $\frac{1+37}{2}$, lo cual es evidente.

243. Consecuencia. Esta propiedad ofrece un medio muy sencillo de *obtener la espresion de la suma de todos los términos de una progresion por diferencia.*

Sea en efecto la progresion .... $\div a . b . c . \dots . i . k . l$, y designemos por S la suma desconocida de todos sus términos cuyo número supondremos ser n. Concibamos que esta progresion se escribe en órden inverso en la forma que se ve al lado.................... $\div l . k . i . \dots . c . b . a$;

es evidente desde luego que la suma de todos los términos de estas dos progresiones es igual á 2S.

Comparando ahora de dos en dos los términos que se corresponden en columna, tendremos, en virtud de la propiedad precedente, $a+l=b+k=c+i$....; luego 2S es igual á la suma parcial, $a+l$, repetida tantas veces como términos hay en la primera progresion; y por consiguiente,

$$2S=(a+l)\,n;$$

de donde, dividiendo por 2, $\quad S=\frac{(a+l)\,n}{2},$

es decir, que *la suma de los términos de una progresion por diferencia es igual al producto de la suma de los estremos multiplicada por la mitad del número de los términos*.

Aplicaciones. 1.ª *Se pide la suma de los* 25 *primeros términos de la progresion*. . . . ÷ 2 . 7 . 12 . 17 . . . .

Ante todas cosas, es preciso buscar la espresion del vigésimo quinto término, que, siendo 5 la razon, será (n.º 239),

$$r=2+24\times 5=122.$$

Luego $\quad S=\frac{(2+122)\,25}{2}=\frac{124\times 25}{2}=1550.$

2.ª *Se pide la suma de los* 100 *primeros términos de la progresion*. . . . ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9....

El término centésimo será

$$l=1+99\times 2=199.$$

Luego $\quad S=\frac{(1+199)\,100}{2}=10000,$

que es el cuadrado de 100.

En general, siendo

$$l=1+(n-1)\,2=2n+1$$

el término n de esta progresion, la suma de los n primeros términos será

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2,$$ que es el cuadrado de n.

Así, la suma de los **15** primeros términos es igual á 15×15 ó 225.

244. *De las progresiones por cociente* (ó *geométricas*). Así se llama *una série de términos tales que cada uno es igual al que le precede, multiplicado por un número constante, que es la* RAZON *de la progresion.*

La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun que la *razon* ó el número constante que espresa la razon de un término al que le precede, es *mayor* ó *menor* que la unidad.

La progresion por cociente se escribe poniendo dos puntos entre cada dos términos, y al principio el signo $\div\!\!:$, porque segun la definicion, se pueden considerar estos números como formando una série de *proporciones contínuas*.

Por ejemplo, sean las dos séries de números

$$\div\!\!:\ 2 : .\ 6 : .\ 18 : .\ 54 : .\ 162 : .\ 486 : .\ 1458 : \ldots,$$

$$\div\!\!:\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16} : \frac{3}{32} : \ldots$$

En la primera, cada término es igual al que le precede multiplicado por 3, y por tanto es una progresion creciente cuya *razon* es 3.

En la segunda, cada término es la mitad del que le precede, ó bien es igual al que le precede multiplicado por la fraccion $\frac{1}{2}$, luego es una progresion por cociente cuya *razon* es $\frac{1}{2}$.

Estas progresiones se enuncian del mismo modo que las progresiones por diferencia, á saber,

2 *es á* 6, *es á* 18, *es á* 54, *es á* 162, *es á*....;

y 12 *es á* 6, *es á* 3, *es á* $\frac{3}{2}$, *es á* $\frac{3}{4}$....

Si se considera cada progresion como una série de proporciones contínuas, resulta que cada término de la progresion es á la vez *consecuente* y *antecedente*, escepto el *primero*, que solo es antecedente, y el *último*, que es solo consecuente.

Las progresiones por cociente gozan propiedades análogas á las de las progresiones por diferencia.

245. Primera propiedad. *Valuacion de un término que ocupe un lugar cualquiera en una progresion por cociente.*

Sea la progresion general por cociente,

$$\dot{\div}\, a : b : c : d : e : f : g : h....,$$

y designemos por q la razon, que puede ser mayor ó menor que 1.

Tendremos evidentemente las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} b &= aq, \\ c &= bq = aq \times q = aq^2, \\ d &= cq = aq2 \times q = aq^3, \\ e &= dq = aq3 \times q = aq^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donde se ve que, en general, *un término cualquiera es igual al primer término multiplicado por una potencia de la razon, cuyo esponente está designado por el número de términos que preceden al que se considera.*

Así, designando por n el número de términos comprendido desde el término primero inclusive hasta el término l, se obtiene la fórmula

$$l = a \times q^{n-1},$$

por cuyo medio puede hallarse facilmente el valor de un término sin necesidad de formar todos los que le preceden.

Aplicaciones. 1.ª *Se pide el valor del duodécimo término de la progresion*

$$\dot{\div}\, 2 : 6 : 18 :....$$

La fórmula se convierte en $l = 2 \times 3^{11}$.

La cuarta potencia de 3 es $3 \times 3 \times 3 \times 3$, ú 81; multiplicando 81 por 81, obtenemos 6561, que será la octava potencia; multiplicando 6561 por 27, tercera potencia de 3, encontramos 177147, que será la undécima potencia.

Luego finalmente,

$$l = 2 \times 177147 = 354294.$$

2.ª *Se pide el* 10.º *término de la progresion*

$$\div 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \text{etc.}$$

La fórmula en este caso es

$$l = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9.$$

El cubo de 2 es 8; el cubo de 8, que será la novena potencia de 2, es igual á 512; luego

$$l = 12 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{128}.$$

Advertencia. Si el lugar que ocupa el término fuera un poco subido, el cálculo sería bastante laborioso; pero, sin embargo, llegaríamos á la espresion del término buscado, por medio de multiplicaciones sucesivas. En el primer ejemplo puede juzgarse con qué rapidez van aumentando de valor las potencias de un número, cuando el grado de la potencia es algo considerable, pues en la progresion $\div 2 : 6 : 18 : \ldots$, solo el duodécimo término es ya 354294.

246. *Consecuencia de la propiedad precedente. Intercalar entre dos números dados*, a *y* l, *un número cualquiera de medios* PROPORCIONALES. (Así se llaman otros números que forman con los dos propuestos una progresion por cociente.)

Solucion. Es evidente que para formar la progresion es necesario ante todas cosas conocer la *razon*.

Dividiendo por a los dos términos de la fórmula $l = aq^{n-1}$, se deduce

$$\frac{l}{a} = q^{n-1};$$

de donde $$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}.$$

Espresando n el número total de términos, tenemos necesariamente $n=m+2$, y por consiguiente, $n-1=m+1$.

Luego finalmente,

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Donde se ve que, *para obtener la razon, es necesario dividir el segundo número dado por el primero, y estraer al cociente la raiz del grado designado por el número de términos que se han de interpolar, mas* UNO.

Conociendo la razon de la progresion, se obtienen muy fácilmente sus diferentes términos, multiplicando sucesivamente el primer término a por la primera, por la segunda, por la tercera... potencia de q ó de $\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$.

Así, por ejemplo, el cuarto medio proporcional, que es el quinto de la progresion, valdria

$$a\times\left(\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}\right);$$

y análogamente los demás.

Advertencia. Hasta ahora no hemos esplicado nosotros procedimiento alguno para estraer raices de grado superior al tercero. Pero nuestro objeto principal era obtener para las progresiones por cociente, fórmulas análogas á las antes obtenidas para las progresiones por diferencia. Pronto esplicaremos un medio muy sencillo de efectuar todas estas operaciones.

247. Aquí se demuestra tambien, lo mismo que para las progresiones por diferencia, que *si, entre todos los términos de una progresion por cociente considerados de dos en dos, se interpola un mismo número de medios proporcionales,* *las progresiones parciales así formadas co[illegible]en una sola progresion.*

Sea $\div a : b : c : d....$ la progresion propues[illegible]

La razon, para la primera progresion parcial, sería

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}};\ \text{para la segunda}\ \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}};\ldots$$

Pero tenemos por el supuesto, $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}\ldots;$

luego los números $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}\ldots$ son iguales, etc.

248. SEGUNDA PROPIEDAD. *En toda progresion por cociente el producto de dos términos cualesquiera equidistante de los estremos, es igual al producto de los estremos.*

Sean, en efecto, x, z, dos términos tales que uno tenga $(p-1)$ términos delante, y el otro $(p-1)$ términos detrás.

El término x es igual al primero a multiplicado por q^{p-1}; tendremos, por consiguiente, $x=a\times q^{p-1}$.

El último término l es igual al término z multiplicado por q^{p-1}; y tendremos $l=z\times q^{p-1}$; donde se ve que los términos a, x, z, l, forman una proporcion

$$a : x :: z : l.$$

Luego (n.° 205), $x\times z=a\times l$. L. C. D. D.

249. Designemos finalmente por P el producto de todos los términos de la progresion

$$\div a : b : c : \ldots\ldots i : k : l,$$

multiplicados entre sí; es decir, que sea

$$P=abc.\ldots ikl,$$

ó $$P=lki.\ldots cba;$$

de donde se deduce $P^2=abc.\ldots ikl\times lki.\ldots cba;$

ó bien tambien, invirtiendo el órden de los factores,

$$P^2=al\times bk\times ci\times.\ldots ic\times kb\times la;$$

pero acabamos de ver que $al=bk=ci....;$

y el número de estos productos parciales es igual á n, número de los términos de la progresion propuesta;

así, pues, $$P^2 = (al)^n;$$

y por consiguiente, $$P = \sqrt[2]{(al)^n};$$

lo cual demuestra que el *producto de todos los términos de una progresion por cociente es igual á la raiz cuadrada de la potencia del grado* n *del producto de los dos estremos.*

Esta fórmula corresponde á la que dá la suma de los términos de una progresion por diferencia:

$$S = \frac{(a + l) \times n}{2}.$$

No espondremos aquí el medio de hallar *la espresion de la suma de los términos de una progresion por cociente*, porque esta cuestion es enteramente inútil al fin que nos hemos propuesto, y porque además supone algunos principios de Algebra que no hemos demostrado todavía.

250. *Correspondencia entre las propiedades de las dos especies de progresiones.* Comparemos ahora los resultados obtenidos.

Progresiones por diferencia.	*Progresiones por cociente.*
$l = a + (n-1)\, r$. . (n.° 230), . . .	$l = a \times q^{l-1}$. . . (n.° 243),
$r = \frac{l-a}{m+1}$. . . . . . (n.° 240), . . .	$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$. . . . (n.° 246),
$S = \frac{(a+l)\, n}{2}$. . . (n.° 243), . . .	$P = \sqrt{(al)^n}$. . . (n.° 240).

Estas fórmulas nos manifiestan que las operaciones que se ejecutan con dos elementos de una progresion por cociente, corresponden á operaciones mas sencillas, ejecutadas con los elementos análogos de una progresion por diferencia.

Así, la *multiplicacion* corresponde á una *suma;*
la *division* á una *sustraccion;*

la *formacion de potencias* á una *simple multiplicacion*, y la *estraccion de raices* á *una division*.

Guiado sin duda por estas consideraciones, el célebre inventor de los *logaritmos* consiguió simplificar los cálculos aritméticos, á contar desde la multiplicacion; sustituyendo las operaciones propias de una progresion por diferencia á las que debieran efectuarse con los términos de una progresion por cociente. Como en una obra elemental es imposible entrar en todos los detalles de este importantísimo descubrimiento, nos limitaremos á esplicar los resultados principales.

§ II. De los logaritmos.

251. Consideremos una progresion cualquiera *por cociente*, cuyo primer término sea 1, y una progresion *por diferencia*, cuyo primer término sea igual á 0. Sean, por ejemplo, las dos progresiones

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.
÷ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . 27 . 30 . 33
: 4096 : 8192 : 16384 : 32768 : . . . . (A).
. 36 . 39 . 42 . 45 . . . . (B).

Cada término de la progresion por diferencia se llama el *logaritmo* del término que ocupa el mismo lugar en la progresion por cociente.

En general, *se entienden por logaritmos unos números en progresion por diferencia, que corresponden término á término con otros números en progresion por cociente*, bajo la condicion, sin embargo, de que uno de los términos de la progresion por cociente sea 1, y 0 el término correspondiente en la progresion por diferencia (pronto veremos la razon de esta restriccion). Logaritmo de un número en particular es el término de la progresion por diferencia que ocupa el mismo lugar que en la progresion por cociente ocupa el número propuesto.

252. Primera propiedad. Sean a, b, dos términos tomados arbitrariamente en la progresion (A); y propongámonos obtener su producto. Al efecto, consideremos el *primer* término 1 de la progresion (A), dos términos a, b, y un cuarto término c, tal que haya tantos términos entre b y c, como entre 1 y a. Supongamos además que la progresion (A) concluye en el término c.

Consideremos tambien en la progresion (B) los cuatro términos que corresponden á los números 1, a, b, c, es decir, sus *logaritmos*, que, para abreviar, designaremos por 0 log. a, log. b, log. c (la notacion *log.* significa *logaritmo de....*).

Esto supuesto, resulta de la propiedad del n.º 245, que los cuatro números 1, a, b, c, forman una proporcion, porque a, b, son dos términos tomados á igual distancia de los estremos, en una progresion que concluye en el término c.

Así, tenemos $1\times c=a\times b$, ó $c=a\times b$.

Por otro lado, los cuatro términos 0, log. a, log. b, log. c, forman tambien (n.º 239) una equidiferencia.

Así, tenemos $0+\text{log. }c=\text{log. }a+\text{log }b$,
ó simplemente $\text{log. }c=\text{log. }a+\text{log. }b$.

Luego poniendo en lugar de c su valor $a\times b$,

$$\text{log. }(a\times b)=\text{log. }a+\text{log. }b.$$

Donde se ve que el *logaritmo del producto de dos números de la progresion* (A) *es igual á la suma de los logaritmos de los dos números.*

Segun esto, para obtener el producto de dos números cualesquiera de la progresion (A), *basta tomar sus logaritmos en la progresion* (B), *sumarlos, y despues buscar á qué número corresponde la suma;* el número correspondiente es el *producto pedido.*

Así, sean los dos números 64 y 256 los que se quieren multiplicar.

Tomo sus logaritmos 18 y 24 en la progresion (B); los sumo, busco á qué número corresponde la suma 42, y encuentro 16384, que será el producto pedido.

Del mismo modo se hallaria que 12+27, ó 39, suma de los logaritmos de 16 y 512, corresponde á 8192, producto de los números 16 y 512.

253. *Consecuencia.* Sean a, b, c, d.... varios números de la progresion (A); resulta de lo acabado de decir que

$$\text{log. }abc=\text{log. }ab+\text{log. }c=\text{log. }a+\text{log. }b+\text{log. }c;$$
$$\text{log. }abcd=\text{log. }abc+\text{log. }d=\text{log. }a+\text{log. }b+\text{log. }c+\text{log. }d;$$

y así sucesivamente.

Luego, en general, *el logaritmo del producto de un número cualquiera de factores es igual á la suma de los logaritmos de todos sus factores.*

Así, para obtener el producto de varios números de la progresion (A), basta *sumar sus logaritmos tomados en la progresion* (B), *y determinar á qué número corresponde la suma;* el número correspondiente es *el producto pedido.*

254. *Observacion.* Las dos igualdades $c = a \times b$ y $\log. c = \log. a + \log. b$, de donde se ha deducido la propiedad precedente, suponen evidentemente que el primer término de la progresion (A) es igual á 1, y el primer término de la progresion (B) es igual á 0.

Veamos ahora lo que sucederia si los primeros términos fueran otros números, por ejemplo, k en la primera, y $\log. k$ en la segunda.

En virtud de lo dicho en el número 252, tendríamos,

1.° En la progresion (A). . . . . . $k \times c = a \times b$,

de donde. . . . . $c = \dfrac{a \times b}{k}$;

2.° En la progresion (B). $\log. k + \log. c = \log. a + \log. b$;

de donde. . . . . $\log. c = \log. a + \log. b - \log. k$;

es decir, que *la suma de los logaritmos de dos números* a *y* b, *de la progresion* (A), *menos el primer término de la progresion* (B), *sería igual al logaritmo del cociente resultante de dividir el producto de los dos números* a *y* b *por el primer término de la progresion* (A).

Así, para hacer uso de esta propiedad sería necesario, 1.° sumar los logaritmos; 2.° restar de esta suma el primer término de la progresion (B), y buscar á qué número de la progresion (A) corresponde la diferencia; 3.° multiplicar el número correspondiente por el primer término de la progresion (A); y se obtendria el *producto pedido.*

Tendríamos por consiguiente que hacer *una suma, una resta y una multiplicacion* para hallar el resultado de una multiplicacion.

En la hipótesis de ser los primeros términos iguales á 1 y á 0 respectivamente, desaparecen la resta y la multiplicacion; por consiguiente es indispensable esta hipótesis (*véase* el número 251).

255. Segunda propiedad. Puesto que en la division el dividendo se puede considerar como un producto cuyos factores son el divisor y el cociente, se infiere que el logaritmo del dividendo es igual á la suma de los logaritmos respectivos del divisor y del cociente; por consiguiente, restando el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, tendremos el logaritmo del cociente.

Luego, *el logaritmo del cociente de la division de dos números de la progresion* (A), *es igual al esceso del logaritmo del dividendo sobre el logaritmo del divisor.*

Segun esto, para hacer una division entre dos números de la progresion (A), basta *tomar en la progresion* (B) *el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor, restar el segundo del primero, y determinar á qué número de la progresion* (A) *corresponde la diferencia;* así se obtendrá el *cociente pedido.*

Propongámonos dividir 16384 *por* 256.

Tomo en la progresion (B) los logaritmos 42 y 24 de los dos números; resto 24 de 42, y saco la diferencia 18; busco el número correspondiente á 18, y encuentro 64, que será el cociente pedido.

La propiedad relativa á la division se espresa así de una manera abreviada: $\log.\ \frac{a}{b} = \log.\ a - \log.\ b.$

256. Tercera propiedad. Como una potencia de un grado cualquiera de un número es (n.° 108, 7.°) el producto de tantos factores iguales al número como unidades tiene el esponente de la potencia, se infiere evidentemente (n.° 253) que *el logaritmo de una potencia de cualquier grado de un número de la progresion* (A), *es igual al logaritmo del número, multiplicado por el esponente de la potencia.*

Así, $\log.\ a^5 = \log.\ a.a.a.a.a = 5 \log.\ a;$
$\log.\ a^7 = 7 \log.\ a;$
y en general, $\log.\ a^m = m \times \log.\ a.$

Luego, para obtener el resultado de la formacion de una potencia de un número cualquiera de la progresion (A), *basta tomar en la progresion* (B) *el logaritmo del número dado, multiplicarle por el esponente de la potencia, y determinar á qué número de la progresion* (A) *corresponde el producto; el número correspondiente será la potencia pedida.*

Sea, por ejemplo, elevar 32 *á la tercera potencia.*

Tomo 15, logaritmo de 32; le multiplico por 3, esponente de la potencia, lo cual me dá 45; busco á qué número corresponde 45, y encuentro 32768, que será la tercera potencia de 32.

257. CUARTA Y ÚLTIMA PROPIEDAD. Sabemos que dos números, representados uno por a y otro por a^m, estan ligados entre sí de tal modo, que, siendo el segundo la potencia del grado m del primero, es el primero la raiz del grado m del segundo.

Acabamos de probar que

$$\log.\ a^m = m \times \log.\ a;$$

luego dividiendo por m,

$$\log.\ a = \frac{\log.\ a^m}{m};$$

es decir, que *el logaritmo de una raiz de cualquier grado de un número, es igual al logaritmo del número, dividido por el índice de la raiz;* lo cual se espresa así:

$$\log.\ \sqrt[m]{b} = \frac{\log.\ b}{m}.$$

Por consiguiente, para estraer la raiz del grado m de un número de la progresion (A), *basta tomar su logaritmo en la progresion* (B), *dividirle por* m, *buscar á qué número corresponde el cociente, y el número correspondiente será la raiz pedida.*

Sirva de ejemplo estraer la raiz tercera de 32768.

Tomo 45, logaritmo de 32768, y le divido por 3, índice de la raiz; encuentro 15, que tiene 32 por número correspondiente; luego 32 es la *raiz pedida.*

Sirva tambien de ejemplo estraer la raiz quinta de 32768.

Tomo 45, que es el logaritmo de 32768; le divido por 5, índice de la raiz que quiero estraer, y obtengo 9. El número correspondiente á 9 en la progresion (A) es 8; luego 8 es la raiz quinta de 32768.

Construccion de las tablas de logaritmos.

258. Las consideraciones precedentes bastan para hacer

comprender la utilidad de *una tabla de logaritmos*, es decir, de una tabla que comprenda, por una parte una série de números en progresion por cociente, y por otra sus logaritmos, ó números en progresion por diferencia (debiendo satisfacer ambas progresiones á la condicion indicada en el número 251).

Y como, segun hemos visto en otro lugar, todas las operaciones que hayan de hacerse con números de cualquier naturaleza se pueden convertir siempre en operaciones con números enteros, se infiere que para simplificar los cálculos bastaria que la tabla contuviera los logaritmos de los números enteros. Veamos, pues, cómo han conseguido formar esa tabla.

Entre todos los sistemas, en *número infinito*, de dos progresiones, una por cociente y otra por diferencia, que pudieran tomarse, se han escogido la progresion décupla

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000....,$$

y la série natural de los números

$$\div 0 . 1 \quad . 2 \quad . 3 \quad . 4 \quad . 5 \quad . 6............$$

Esto supuesto, concibamos que entre los números 1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000...., se interpola (n.° 246) un cierto número de *medios proporcionales* (el número entre cada pareja) bastante grande para tener seguridad de que 2, 3, 4,.... 9 | 11, 12, 13,.... 99 | 101, 102, 103,.... 999, están comprendidos entre dichos medios proporcionales, ó al menos difieren de algunos de ellos en una cantidad tan pequeña que se les pueden sustituir sin error sensible.

Concibamos en seguida que entre los términos 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4,.... de la progresion por diferencia, se interpolan tantos medios diferenciales como medios proporcionales hemos interpolado antes; es claro, segun lo susodicho, que los términos de la nueva progresion por diferencia serán los logaritmos de los términos de la nueva progresion por cociente.

Si ahora suponemos que, en el número inmenso de términos de las dos progresiones, no se tienen en cuenta sino los números enteros 1, 2, 3, 4, 5,.... 9, 10, 11, 12,...., pertenecientes á la progresion por cociente y los logaritmos que les correspondan, obtendremos una tabla que comprenderá,

Por una parte, todos los números enteros consecutivos, que á la verdad, ya no formarán entre sí una progresion por cociente, pero que sin embargo deben ser considerados como términos de una progresion de esa especie;

Por otra parte, sus logaritmos, que no formarán ya una progresion por diferencia, pero que sin embargo deben considerarse como términos de una progresion de esa especie y ocupan respectivamente los mismos lugares de la primitiva progresion por diferencia que ocupaban los otros términos sus correspondientes en la primitiva progresion por cociente.

Por lo tanto, son aplicables á todos los números de la tabla así formada y á sus logaritmos las propiedades relativas á las diversas operaciones aritméticas.

Advertencia. Al pronto parecerá difícil comprender cómo se ha conseguido interpolar entre dos números dados, 1 y 10, por ejemplo, un número muy grande de medios proporcionales, porque solo para interpolar *dos* sería necesario (n.º 246), segun la fórmula $q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$, que dá la espresion de la razon, estraer, con un grado muy grande de aproximacion, la raiz tercera de $\frac{10}{1}$, ó 10, operacion que es ya bastante laboriosa. ¿Qué sería, pues, si se tratara de interpolar *diez millones* de términos como indican los tratados de aritmética? Pero nuestro objeto era únicamente hacer concebir la posibilidad de la existencia de una tabla de logaritmos. En los tratados superiores de las matemáticas es donde se encuentran los métodos de determinacion que efectivamente se han empleado, y que son mucho mas espeditos de lo que al pronto parece.

259. Pondremos, sin embargo, un método elemental que es bastante fácil de comprender, porque solo exige estracciones sucesivas de raices cuadradas.

Supongamos que queremos *determinar* en particular *el logaritmo de* 5.

Como 5 está comprendido entre 1 y 10, interpolemos *un solo medio proporcional* entre 1 y 10, y despues un solo medio diferencial entre 0 y 1.

Tenemos (n.º 207) $\quad 1 : x :: x : 10;$

de donde $\quad x=\sqrt{10}=3,16227766\ldots;$

y (n.º 203) $\quad 0 \,.\, z : z \,.\, 1;$

:

de donde $$z=\frac{1}{2}=0,5.$$

Esto supuesto, $\frac{1}{2}$, ó 0,5, será evidentemente el logaritmo de $\sqrt{10}$, resultado conforme con la propiedad del núm. 257, porque tenemos $\log.\ \sqrt{10}=\frac{1}{2}\log.\ 10=\frac{1}{2}$.

Ahora, como 5 es mayor que 3,162...., y mas pequeño que 10, interpolemos *otro medio proporcional* entre 3,162.... y 10, y despues *un nuevo medio diferencial* entre $\frac{1}{2}$ y 1;

resultará $$3,16227766.... : x :: x : 10;$$

de donde $$x=\sqrt{31,622776....}=5,623....;$$

y $$\frac{1}{2} . z : z . 1;$$

de donde $$z=\frac{3}{4}=0,75.$$

El nuevo medio diferencial será el logaritmo del nuevo medio proporcional.

Hallándose ahora el número 5 comprendido entre 3,162.... y 5,623...., debemos todavía interpolar un medio proporcional entre 3,162.... y 5,623...., y despues un medio diferencial entre 0,5 y 0,75.

Es evidente que continuando esta série de interpolaciones de medios proporcionales, llegaremos á determinar dos que solo diferirán uno de otro en una cantidad tan pequeña como queramos, y que comprenderán al número 5. Podremos, pues, sin error sensible sustituir á uno de ellos el 5, y entonces el medio diferencial correspondiente al medio proporcional será el logaritmo pedido. Por medio de operaciones análogas obtendríamos los logaritmos de 2, 3, 7....

Observemos además que solo necesitamos calcular directamente los logaritmos de los *números primos;* pues los logaritmos de los números múltiplos podríamos obtenerlos facilísimamente por medio de los logaritmos de los números primos, valiéndonos de las propiedades esplicadas en los números 252 y 256.

Por ejemplo, tendríamos log. $15=$log. $(5\times3)=$log. $5+$ log. 3; log. $36=$log. $(2^2\times3^2)=2$ log. $2+2$ log. 3; y así de los demás.

Disposicion y uso de las tablas vulgares.

260. Se llaman *logaritmos vulgares* aquellos cuya formacion se funda en el sistema de las dos progresiones

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000....$$
$$\div 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4....,$$

porque esta tabla es la que mas comunmente se usa. Tambien se llaman *logaritmos de Briggs*, que fué el primer autor de una tabla de esta especie.

De la inspeccion de las dos progresiones resulta,

1.° *Que el logaritmo de la* UNIDAD *es* CERO;

2.° *Que el logaritmo de* 10 *es* 1;

3.° Que los logaritmos de todos los números enteros y fraccionarios, comprendidos entre 1 y 10, son *menores que la unidad;* que los de los números comprendidos entre 10 y 100 se componen de *una unidad mas una fraccion;* que los de los números comprendidos entre 100 y 1000 se componen de *dos unidades mas una fraccion;* y así sucesivamente.

En las tablas de Briggs estas fracciones estan valuadas en decimales.

Así, los logaritmos de los números de una *sola* cifra estan representados por una *fraccion decimal propia;* los logaritmos de los números de *dos* cifras tienen 1 por *parte entera*, que va seguida luego de una fraccion decimal.

Los logaritmos de los números de *tres* cifras tienen 2 por parte entera....

En general, *la parte entera* del logaritmo de un número contiene *tantas unidades menos* UNA, como cifras tiene el número si es entero, ó como tenga la parte entera si fuera fraccionario.

Esta parte entera de un logaritmo se llama *característica,* porque por su medio se puede saber el órden superior de unidades que hay comprendidas en el número correspondiente al logaritmo propuesto.

Así, 2,74056.... corresponde á un número de tres cifras, es decir, á un número comprendido entre 100 y 1000; igualmente 4,05678.... es el logaritmo de un número comprendido entre 10000 y 100000.

261. Conociendo el logaritmo de un número cualquiera, se puede obtener facilmente el logaritmo de un número 10, 100, 1000,.... veces mayor, para lo cual basta *añadir* 1, 2, 3,.... *unidades á la característica.*

Sea, en efecto, a, un número cuyo logaritmo se conoce; tenemos (n.º 252).

$$\log.\ (a\times 10)=\log.\ a+\log.\ 10=\log.\ a+1;$$
$$\log.\ (a\times 100)=\log.\ a+\log.\ 100=\log.\ a+2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\log.\ (a\times 10^n)=\log.\ a+\log.\ 10^n=\log.\ a+n.$$

Recíprocamente, siendo conocido el logaritmo de un número, para obtener el de un número 10, 100, 1000.... veces menor, basta *restar de la característica* 1, 2, 3,.... *unidades.*

En efecto, tenemos (n.º 258),

$$\log.\frac{a}{1000}=\log.\ a-\log.\ 1000=\log.\ a-3;$$

y así sucesivamente.

De aquí podemos concluir que los logaritmos de los números 4567 | 456,7 | 45,67 | 4,567, por ejemplo, no difieren unos de otros en la parte decimal, sino únicamente en la característica, que es 3 para el primer número, 2 para el segundo, 1 para el tercero y 0 para el cuarto.

En general, el logaritmo de un número fraccionario decimal es el mismo que el logaritmo de su numerador, ó número propuesto, suprimida la vírgula, diferenciándose solo en la característica, y no en la *mantisa* ó parte decimal del logaritmo.

Es bueno observar que esta propiedad es peculiar del sistema de logaritmos de Briggs; y por esto es preferible á otro cualquiera, pues las fracciones decimales son las mas usadas en el cálculo.

262. Era imposible colocar en las tablas mas logaritmos que los de los números enteros; porque, como dos números enteros consecutivos comprenden una infinidad de números fraccionarios, no habria razon para colocar los unos y dejar los otros. Además, los cálculos que exige la formacion de una tabla, serian muy laboriosos si se hubiera de estender mas allá de cierto límite, aunque fuera muy reducido.

Así, hay tablas que llegan hasta 10000, otras hasta 20000; unas de las mas estensas, que son las de *Callet*, llegan hasta 108000.

Pero como las aplicaciones logarítmicas requieren muchas veces la investigacion del logaritmo, ya de un número entero que escede los límites de las tablas, ya de un número fraccionario, ¿de qué modo obtenerle en este caso? Lo haremos ver en algunos ejemplos. (Supondremos en todo lo subsiguiente que se usan las tablas pequeñas de *Reynaud* ó las de *Lalande.*)

263. **Dado un número cualquiera, determinar su logaritmo.**

1.° *Sea determinar el logaritmo de* 254329.

Teniendo *seis* cifras este número, debe ser 5 la característica de su logaritmo (n.° 260); por consiguiente, la cuestion se reduce á encontrar la parte decimal.

De lo dicho en el n.° 261, se infiere que su parte decimal es la misma que la del logaritmo de 2543,29.

Por medio de esta preparacion, que consiste en *separar hácia la derecha del número bastantes cifras para que se encuentre en las tablas la parte que queda á la izquierda*, se obtiene un número comprendido entre 2543 y 2544; así, su logaritmo es igual al de 2543, *mas* una parte de la diferencia que existe entre *log*. 2544 y *log*. 2543.

En la tabla encontramos *log*. 2543 $=$ 3,40535; tambien encontramos que es 17 la diferencia entre *log*. 2544 y *log*. 2543; diferencia que espresa unidades del quinto órden decimal, ó sea del órden de las *cien-milésimas*.

Esto supuesto, á fin de hallar la parte de esta diferencia, que debe añadirse á *log*. 2543, para obtener el de 2543,29, se forma esta proporcion: *Si, para una unidad de diferencia entre los números* 2544 *y* 2543, *tenemos* 17 *cien-milésimas de diferencia entre sus logaritmos, para* 0,29 *de diferencia entre* 2549,29 *y* 2543, *¿cuál será la diferencia entre sus logaritmos?* O bien,

$$1 : 17 :: 0{,}29 : x;$$

de donde $x = 17 \times 0{,}29 = 4{,}93;$

y este cuarto término 4,93, son las *cien-milésimas* que deben añadirse al logaritmo 3,40535 para tener el logaritmo pedido.

Como solo se debe tener en cuenta la parte de la izquierda de la vírgula en el cuarto término hallado, se añaden 4 ó mas bien 5 (porque la primera cifra de la derecha de la vírgula vale mas de 5), á la cifra de las *cien-milésimas*, que es la última de 3,40535; y se obtiene

$$\log. 2543{,}29 = 3{,}40540;$$

luego $\log. 254329 = 5{,}40540.$

En la práctica se dispone así el cálculo:

$$\log. 254329 = \log. 2543{,}29 + 2$$

$$\log. 2543 = 3{,}40535$$

Dif. tabular.... 17

$1 : 17 :: 0{,}29 : x = 4{,}93\ldots\ldots = 5$

Luego. . . . . . . $\log. 2543{,}29 = 3{,}40540$

y por consiguiente. . . $\log. 254329 = 5{,}40540.$

2.° *Sea tambien determinar el logaritmo de* 1784967.

Tenemos $\log. 1784967 = \log. 1784{,}967 + 3$

$$\log. 1784 = 3{,}25139$$

Dif. tabular.... 25

$1 : 25 :: 0{,}967 : x = 24{,}175\ldots\ldots = 24$

Luego. . . . . . . $\log. 1784{,}967 = 3{,}25163$

y por consiguiente, . $\log. 1784967 = 6{,}25163.$

264. *Advertencia.* Para resolver las dos cuestiones precedentes, se ha formado *proporcion entre las diferencias de los números y las diferencias de sus logaritmos.*

Se demuestra en Algebra que esta proporcion nunca es rigorosamente exacta; pero que se aproxima tanto mas á la exactitud, cuanto mayores son los números con que se forma; y se prueba tambien que cesando las tablas pequeñas, el error cometido no influye en la quinta cifra decimal del logaritmo, cuando el número es superior á 1000; de modo que en este caso, la proporcion puede considerarse como enteramente exacta. Hé aquí por qué: cuando un número escede los límites de las tablas, deben separarse á su derecha las menos cifras posibles.

3.° *Se pide el logaritmo de* $37\frac{43}{59}$.

Este número equivale á $\frac{2226}{59}$; luego (n.° 255)

$$\log.\ 37\frac{43}{59} = \log.\ 2226 - \log.\ 59.$$

En la tabla encontramos. . . . . $\log.\ 2226 = 3{,}34763$,
$\log.\ \ 59 = 1{,}77085$;

de donde, efectuando la sustraccion, $\log.\ 37\frac{43}{59} = 1{,}57668.$

En cuanto al logaritmo de un número fraccionario decimal, tal como 479,2564, ya hemos visto (n.° 261) que todo se reduce á determinar el logaritmo de 4792564 como acaba de esplicarse, restando despues 4 unidades á la característica; ó bien, se puede decir:

$$\log.\ 479{,}2564 = \log.\ 4792{,}564 - 1$$

$$\log.\ 4792 = 3{,}68052$$

Dif. tabular..... 9
$1 : 9 :: 0{,}564 : x = 5{,}076.$ . . . . . $=$ 5,

de donde. . . . . $\log.\ 4792{,}564 = 3{,}68057.$
Luego. . . . . $\log.\ 479{,}2564 = 2{,}68057.$

Véase al fin de este capítulo (n.° 273) *la esplicacion de los logaritmos de los quebrados propios.*

265. **Dado un logaritmo cualquiera, hallar el número que le corresponde.**

Cuando, para efectuar ciertas operaciones aritméticas, se recurre á los logaritmos, se llega ordinariamente á un resultado, que espresa al logaritmo del *número buscado;* y por medio de la tabla es necesario entonces determinar á qué número corresponde el logaritmo.

1.º Consideremos el caso en que la característica es 3, que es la mayor de todas las de las tablas pequeñas.

Sea encontrar el número correspondiente al logaritmo 3,45936.

Se empieza por buscar este logaritmo entre los de los números de cuatro cifras; y se le encuentra comprendido entre 3,45924 y 3,45939, que son los logaritmos de 2879 y 2880; luego el número buscado es igual á 2879 *mas* una fraccion.

Para obtener esta fraccion, tomamos la diferencia tabular 15, y la diferencia 12 entre el logaritmo dado y el de 2879; despues se forma la proporcion:

Si 15 *cien-milésimas de diferencia entre log.* 2880 *y log.* 2879, *suponen una unidad de diferencia entre estos dos números, siendo* 12 *cien-milésimas la diferencia entre el logaritmo dado y el de* 2879, *¿cuál deberá ser la diferencia entre los números correspondientes?*

O bien, $15 : 1 :: 12 : x$; de donde $x = \frac{12}{15} = 0{,}8$.

Añadiendo este cuarto término á 2879, obtenemos 2870,8, que es el número pedido.

Hé aquí el cuadro de los cálculos:

Llamando N al número buscado, tenemos

	log. N = 3,45936
Hallamos en la tabla.	log. 2879 = 3,45924
	Dif. 12
	Dif. tabular. . . . 15

$$15 : 1 :: 12 : x = 0{,}8;$$

luego $$N = 2879{,}8.$$

266. *Advertencia.* El valor de N obtenido en el ejemplo precedente, se ha encontrado igual á $2879 + \frac{12}{15}$ (con menos de $\frac{1}{15}$ de error), antes de la reduccion á decimales, suponiendo exacta la proporcion, hipótesis que puede y debe admitirse

aquí (n.° 264), puesto que á la simple inspeccion de la tabla de logaritmos se reconoce que aumentos constantes é iguales á una unidad en los números, corresponden (en esta parte de la tabla) á aumentos constantes é iguales á 15 unidades (del órden de *cien-milésimas*), en los logaritmos correspondientes, ó lo que es lo mismo, que una unidad (del órden de las *cien-milésimas*) de aumento en los logaritmos, corresponde á $\frac{1}{15}$ de aumento en los números.

Ahora, en vez de dejar al cuarto término de la proporcion $\left(\text{ó la fraccion } \frac{12}{15}\right)$ esta forma, bajo la cual se habia presentado naturalmente, lo hemos reducido á decimales, como se hace ordinariamente para la mayor comodidad del cálculo; así hemos encontrado la fraccion 0,8, exactamente igual á $\frac{12}{15}$: y es importante observar que si la reduccion no hubiera sido exacta en *décimas*, habria sido preciso sin embargo detener la operacion en la *primera* cifra decimal, por la razon siguiente:

Cada 15.ª parte contiene tantas centésimas como veces contiene el número 100 al 15; de aquí se sigue que cuando se sabe cuántas 15.as partes contiene un número (con menos error de *una*), no por eso se sabe cuántas 100.as, 1000.as, 10000.as.... contiene dicho número; mientras que, al contrario, se puede muy bien deducir el número de 10.as (con menos error de *una*) del de 15.as partes, porque siendo $\frac{1}{10}$ mayor que $\frac{1}{15}$, cada 15.ª parte de aumento no puede á la vez aumentar en mas de una el número de las 10.as

De este razonamiento generalizado resulta la regla siguiente, aplicable á todos los casos en que, buscando un número por medio de su logaritmo, hay precision de emplear la proporcion para determinarle: *el número de cifras decimales* que es permitido calcular al hallar el cuarto término, *siempre debe ser inferior, al menos en una unidad, al número de cifras que componen la diferencia tabular, disminuido en una unidad*. Esta regla es general, cualquiera que sea la tabla usada: así las tablas de Callet darán la cifra de las 100.as siempre que la diferencia tabular pase de 100, y solo las cifras de las 10.as en todos los demás casos; las tablas de Lalande no darán con exactitud ni aun las cifras de las 10.as, siempre que la diferencia tabular sea menor que 10. (Para mas pormenores, véase el *Algebra.*)

2.° *Sea determinar el número correspondiente al logaritmo* 1,56834.

Podríamos empezar por buscar este logaritmo entre los de los números de dos cifras; pero como es probable que no le encontráramos, es preferible añadir desde luego 2 á la característica, lo cual dá 3,56834. Buscando ahora, segun la regla de arriba, el número correspondiente á este nuevo logaritmo, hallamos 3,56834 = log. 3701,2. Pero como añadiendo 2 unidades á la característica, hemos multiplicado (n.° 264) por 100 el número buscado, para obtener este será preciso dividir por 100 el número obtenido 3701,2; lo cual dá finalmente 37,012 que será el número pedido aproximado hasta milésimas.

Sea tambien hallar el número correspondiente á 0,86784.

Tenemos por lo pronto

$$3{,}86784 = \log.\ 7376{,}3;$$

luego $$0{,}86784 = \log.\ 7{,}3763,$$

aproximado hasta *diez-milésimas.*

Propongámonos finalmente determinar el número correspondiente á 5,47659.

Quitando primero 2 unidades á la característica, tenemos

$$3{,}45976 = \log.\ 2996{,}3;$$

y como quitando 2 unidades á la característica, hemos hecho al número 100 veces menor, es preciso multiplicar 2996 por 100, lo cual dá 299630, que será el número pedido con menos de una *decena* de error.

Las tablas pequeñas no permiten obtener mayor grado de aproximacion. Si la característica fuera mayor que 5, el grado de aproximacion sería menor todavía. Por eso deben emplearse las mayores tablas posibles cuando haya de ejecutarse un cálculo que exija cierta exactitud.

Aplicaciones de la teoría de los logaritmos.

Veamos ahora las diversas aplicaciones que pueden hacerse de las tablas de logaritmos á las operaciones de aritmética.

267. Regla de tres. *Determinar, por logaritmos, el cuarto término de la proporcion* a : b :: c : x.

Tenemos (n.º 206) $x = \frac{b \times c}{a}$;

de donde, tomando los logaritmos y aplicando las propiedades de los n.os 252 y 255,

$$\log. x = \log. b + \log. c - \log. a.$$

Luego, *despues de haber hecho la suma de los logaritmos de los medios, se restará el logaritmo del estremo conocido; se buscará á qué número corresponde la diferencia, y así se obtendrá el número pedido.*

Sea, por ejemplo, la proporcion 37 : 259 :: 497 : x.

$$\log. x = \log. 259 + \log. 497 - \log. 37$$

$$\begin{array}{lr} \log. 259 = & 2,41330 \\ \log. 497 = & 2,69636 \\ \hline & 5,10966 \\ \log. \ 37 = & 1,56820 \\ \hline \end{array}$$

luego $\log. x = 3,54146$,
y por consiguiente, $x = 3479,1$,
valor aproximado hasta *décimas.*

Segundo ejemplo. Se pide, *por logaritmos*, el valor de la espresion

$$x = \frac{37 \times 49 \times 17 \times 175}{29 \times 69 \times 154}.$$

(Esta espresion puede considerarse como el término desconocido de una regla de tres compuesta.)

Tomando los logaritmos de los dos miembros, tenemos

$$\log. x = l.\ 37 + l.\ 49 + l.\ 17 + l.\ 175 - l.\ 29 - l.\ 69 - l.\ 154.$$

$$\begin{array}{ll}
\log.\ 37 = 1,56820 & \log.\ 29 = 1,46240 \\
\log.\ 49 = 1,69020 & \log.\ 69 = 1,83885 \\
\log.\ 17 = 1,23045 & \log.\ 154 = 2,48877 \\
\log.\ 175 = \underline{2,24304} & \\
\qquad\quad 6,73189 & \\
\qquad\ \underline{-5,48877} & \\
\end{array}$$

$$\log.\ x = 1,24312;$$

de donde $x = 17,503,$ con menos de 0,001 de error.

268. *De los complementos aritméticos.* En el ejemplo precedente hemos tenido que restar la suma de varios logaritmos, de la suma de otros varios. *Las dos adiciones y la sustraccion* efectuadas para la determinacion del resultado, pueden reemplazarse *por una sola adicion* empleando los complementos aritméticos.

Se llama *complemento aritmético* de un logaritmo, la cantidad que es necesario añadirle para formar 10 unidades; ó en otros términos, *es el resultado que se obtiene restando de 10 el logaritmo.*

Así, compl. arit. $4,50364 = 10 - 4,50364$;

y para obtener este complemento es evidentemente necesario, segun la regla de la sustraccion, restar cada cifra de 9, escepto la última cifra significativa de la derecha que se resta de 10; lo cual dá

$$\text{compl. arit. } 4,50364 = 5,49636.$$

Del mismo modo,

$$\text{compl. arit. } 7,32568 = 2,67432.$$

Los complementos aritméticos de los logaritmos se obtienen con suma facilidad, y por decirlo así, casi á la simple inspeccion de los mismos.

Advertencia. Si la última cifra de la derecha del logaritmo fuera 0, sería menester restar de 10 la primera cifra significativa que hubiera á la derecha del 0, y de 9 las demas cifras de la izquierda.

Así, compl. arit. 5,32570 = 4,67430;
así tambien, compl. arit. 8,62400 = 1,37600.

Esto supuesto, propongámonos restar de la suma de los cuatro logaritmos L, L', L'', L''', la suma de otros tres logaritmos l, l', l''; y designemos por D la diferencia. Tenemos evidentemente

$$\mathrm{D} \ldots \text{ó} \ldots \mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''-l-l'-l''=$$

$$\mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''+10-l+10-l'+10-l''-30,$$

ó lo que es lo mismo,

$$\mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''+\text{compl. } l+\text{compl. } l'+\text{compl. } l''-30;$$

de donde se deduce esta regla general:

Tómense los complementos aritméticos de los logaritmos sustractivos; súmense estos complementos y los logaritmos aditivos; y despues réstense de la característica del resultado, tantas veces 10, *ó tantas decenas, como complementos se hayan tomado.*

Repitamos el último ejemplo del número precedente.

Tenemos

$$\mathrm{l.}\ x=\mathrm{l.}\ 37+\mathrm{l.}\ 49+\mathrm{l.}\ 17+\mathrm{l.}\ 175-(\mathrm{l.}\ 29+\mathrm{l.}\ 69+\mathrm{l.}\ 154);$$

log. 37	= 1,56820
log. 49	= 1,69020
log. 17	= 1,23045
log. 175	= 2,24304
compl. log. 29	= 8,53760
compl. log. 69	= 8,16115
compl. log. 154	= 7,81248
	31,24312.

Siendo 31,24312 el resultado de esta adicion, le restaremos 3 *decenas*, y quedará 1,24312, que será la diferencia pedida, y es en efecto el resultado antes obtenido (n.° 267).

El uso de los complementos arifméticos abrevia mucho los cálculos por logaritmos.

269. Progresiones por cociente. *Nos proponemos intercalar entre dos números dados* a *y* b, *un número* m *de medios proporcionales.*

La fórmula $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ hallada en el n.° 246, se convierte por la aplicacion de los logaritmos en

$$\log.\ q=\frac{\log.\ b-\log.\ a}{m+1}.$$

Supongamos, por ejemplo, que queremos *interpolar entre* 3 y 4, 25 *medios proporcionales.*

Tenemos en este caso,

$$a=3,\quad b=4,\quad m=25;$$

de donde se deduce

$$\log.\ q=\frac{\log.\ 4-\log.\ 3}{26}.$$

En las tablas encontramos

$$\log.\ 4=0{,}60206,$$
$$\log.\ 3=0{,}47712;$$

de donde $\log.\ 4-\log.\ 3=0{,}12494;$
luego, dividiendo por 26, $\log.\ q=0{,}00480.$

Buscando el número correspondiente á este logaritmo, hallamos $q=1{,}0111$, valor aproximado hasta *diez-milésimas.*

Si ahora queremos *formar el* 10.° *medio proporcional, que es el* 11.° *término de la progresion,*

Llamemos x al medio proporcional buscado; tendremos (número 246)

$$x=3\left(\sqrt[26]{\frac{4}{3}}\right)^{10};$$

de donde, aplicando los logaritmos,

$$\log.\ x=\log.\ 3+\frac{10\ (\log.\ 4-\log.\ 3)}{26}.$$

Y ya hemos visto que $\log. 4 - \log. 3 = 0,12494;$
de donde. . . . . $10 (\log. 4 - \log. 3) = \underline{1,24940};$

luego. . . . . $\frac{10}{26} (\log. 4 - \log. 3) = 0,04805:$

tenemos además. . . . . $\log. 3 = \underline{0,47712};$

luego finalmente. . . . $\log. x = 0,52517.$

Buscando ahora á qué número corresponde este logaritmo, hallamos 3,3510, que será el medio proporcional pedido.

Las reglas de *interés compuesto* y de *descuento compuesto* se reducen á la determinacion de un término de una progresion por cociente.

270. INTERÉS COMPUESTO. *Prestada una cantidad* a *durante un número* n *de años ó de meses, á razon de* i *por ciento al año ó al mes, se quiere saber su valor al cabo del tiempo* n, *contando no solo el capital* a *y sus intereses acumulados, sino tambien los intereses de los intereses durante el mismo tiempo.*

Análisis. Puesto que 100 rs. producen una cantidad i en un año, es claro (n.os 221 y 222) que a producirá $\frac{a \times i}{100}$; así, pues, el capital a prestado durante un año, se convierte al cabo de este tiempo en

$$a + \frac{a \times i}{100}, \text{ ó bien } a\left(1 + \frac{i}{100}\right),$$

espresion que comprende reunidos el capital y su interés del primer año.

Esa suma puede ahora considerarse como un nuevo capital prestado durante el segundo año; designémosla por a' para simplificar, y encontraremos que, al cabo del segundo año, se convertirá en

$a'\left(1 + \frac{i}{100}\right)$, espresion que tambien comprende reunidos el capital y el interés.

Poniendo en vez de a' su valor, tendremos,

$$a\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right) = a\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2.$$

Designando por a'' este nuevo capital, tendremos que la suma del capital y su interés al cabo del tercer año será

$$a''\left(1+\frac{i}{100}\right),$$

ó bien, poniendo en vez de a'' su valor,

$$a\left(1+\frac{i}{100}\right)^2\left(1+\frac{i}{100}\right)=a\left(1+\frac{i}{100}\right)^3.$$

Luego, en general, designando n el número de años que ha durado el préstamo del capital a, y representando A el valor de este capital unido á sus intereses y á los intereses de los intereses, se obtiene

$$A=a\left(1+\frac{i}{100}\right)^n=a\left(\frac{100+i}{100}\right)^n.$$

Primer ejemplo. *Se pide, en interés compuesto, el valor de* 12000 *rs. prestados durante* 6 *años, á razon de* 5 *p* $^0/_0$ *al año.*

En este caso tenemos $a=12000$, $i=5$, $n=6$; luego la fórmula se convierte en

$$A=12000\left(\frac{100+5}{100}\right)^6=12000\ (1{,}05)^6.$$

Esta operacion sería muy laboriosa si se hubiera de efectuar directamente; pero si se aplican los logaritmos, resulta

$$\log.\ A=\log.\ 12000+6\log.\ 1{,}05.$$

De las tablas tomamos. . . .	log. 1,05	= 0,02119;
de donde.	6 log. 1,05	= 0,12714:
tomamos tambien.	log. 12000	= 4,07918;
luego.	log. A	= 4,20632;

y por consiguiente. A=16081 rs.

Las tablas pequeñas no pueden dar mayor grado de aproximacion.

Advertencia. En este ejemplo, la suma del capital, de los intereses, y de los intereses de los intereses acumulados, sube á. . . . . 16081: por otro lado, si buscamos (n.° 221) el interés simple de 12000 rs. en 5 años á razon de 5 p $^0/_0$, encontramos. . . . . 3600.

Diferencia. . . . . 481.

Donde se ve que los intereses de los intereses ascienden á 481 rs.

Segundo ejemplo. *Se pide, en interés compuesto, el valor de* 5628 *rs. prestados durante* 9 $^1/_2$ *meses, á razon de* $\frac{3}{4}$, *ó de* 0,75 *p* $^0/_0$ *al mes.*

Empecemos por determinar el valor del capital al cabo de 9 meses.

Como en este caso se toma el mes por unidad de tiempo, se hace en la fórmula general,

$$a=5628,\ i=0,75,\ n=9,\ \text{lo cual dá}$$

$$A=5628\left(\frac{100+0,75}{100}\right)^9=5628\times(1,0075)^9;$$

de donde aplicando los logaritmos,

$$\log. A=\log. 5628+9 \log. 1,0075.$$

En la tabla encontramos. . .	log. 1,0075 = 0,00324;
de donde.	9 log. 1,0075 = 0,02916;
además.	log. 5628 = 3,75035;
luego.	log. A = 3,77951;

y por consiguiente A = 6019 rs.

Para obtener ahora el interés de 6019 rs. durante 15 dias, ó $\frac{1}{2}$ mes, recurrimos á la fórmula $\frac{ait}{100}$ (n.° 221), en la cual $a=6019$, $i=0,75$, $t=\frac{1}{2}$, lo cual dá $\frac{ait}{100}=\frac{6019\times0,75\times{}^1/_2}{100}$ $=\frac{6019\times75}{20000}=23$, con menos error de una unidad.

Luego, finalmente, 6042 rs. espresan el valor del capital 5628 rs., al interés compuesto (*).

271. Descuento compuesto. Las dos cantidades A y a que entran en la fórmula $A=a\left(\frac{100+i}{100}\right)^n$, tienen entre sí una relacion tal, que si a es un capital prestado en el dia de hoy, A es su valor al cabo de cierto tiempo; luego *recíprocamente*, designando A una suma pagadera al cabo de n unidades de tiempo, a espresará su *valor actual;* suponiendo siempre que se atiende á los intereses acumulados y á los intereses de los intereses del capital a.

De esa fórmula se deduce

$$a=\frac{A}{\left(\frac{100+i}{100}\right)^n}$$

Se puede por consiguiente considerar que esta nos dá el valor actual de una letra cuyo importe es A, y que es pagadera dentro de n años, teniendo en cuenta el interés compuesto del valor actual.

Ejemplo. *Se pide el valor actual de una suma de 30000 rs. pagadera al cabo de 7 años, suponiendo, 1.° que el descuento sea compuesto, 2.° que el tanto de interés es el 6 p °/₀ anual.*

Hagamos en este caso, $A=30000,\ n=7,\ i=6$;

y la fórmula se convertirá en $a=\frac{30000}{(1,06)^7}$; de donde, aplicando los logaritmos,

$$\log.\ a=\log.\ 30000-7,\ \log.\ 1,06.$$

(*) En la práctica pueden reducirse las dos operaciones precedentes á una sola, poniendo inmediatamente en la espresion general de A, $n=9\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$; pero este modo de proceder está fundado en la teoría de los esponentes fraccionarios, que solo en Álgebra pueden esplicarse clara y cumplidamente.

Tenemos. . . . . log. 30000 = 4,47712;
por otra parte, log. 1,06 = 0,02531;
de donde 7 log. 1,06 = 0,17717 . . . . . . — 0,17717;

luego. . . . . log. a = 4,29995;
y por consiguiente, $a = 19950$ rs.

Buscando el valor actual de 30000 rs., segun la regla de descuento simple, hallaríamos. 21126,76,
resultado que difiere del precedente en. . . . . . 1176,76.

No nos estenderemos mas en las aplicaciones de las tablas de logaritmos. Lo que precede basta para dar una idea de toda su importancia.

Logaritmos de las fracciones.

272. En todas las cuestiones precedentes solo hemos tenido que considerar logaritmos de números enteros ó de números fraccionarios mayores que la unidad; logaritmos que, ó son parte de la tabla cuya formacion hemos indicado (n.os 258 y 259), ó pueden obtenerse facilmente, si siendo enteros, esceden los límites de las tablas, ó si son fraccionarios, mayores que la unidad.

Sabemos tambien que, en el sistema de Briggs, los logaritmos de todos los números enteros ó fraccionarios, mayores que la unidad, están comprendidos entre 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4....; es decir, que los *logaritmos de los números comprendidos desde la unidad al infinito están comprendidos desde* 0 *al infinito;* de modo que no existe ningun número, por pequeño ó por grande que sea respecto de la unidad, que no pueda considerarse como el logaritmo de otro número mayor que la unidad.

En este supuesto, es natural preguntar si los quebrados propios tienen logaritmos, y cómo se espresan.

Para responder á estas cuestiones volvamos á la progresion décupla,

$$\div\!\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots,$$

y observemos que siendo cada término igual al que le precede multiplicado por 10, *recíprocamente* cada término es igual al que le sigue dividido por 10. Por consiguiente, si se prolonga esta progresion mas abajo del término 1, dividiendo sucesivamente 1 por las diversas potencias de 10, es decir, por 10, 100, 1000,.... lo cual dá las fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... se deduce la nueva progresion

$$\div\!\!\div \ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots,$$

que se puede suponer empezada en una fraccion $\frac{1}{10^n}$ tan pequeña como se quiera.

Volvamos tambien á la progresion por diferencia

$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \ldots,$$

y observemos que siendo cada término igual al que le precede aumentado en 1, tambien *recíprocamente* cada término es igual al que le sigue disminuido en 1. Esto supuesto, continuemos esta progresion á la izquierda del primer término 0 (ó hasta mas abajo de 0), restando sucesivamente 1, 2, 3, 4,.... de este primer término, lo cual dá los resultados —1, —2, —3, —4....; y tendremos la nueva progresion por diferencia

$$\div \ldots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots,$$

que se puede suponer empezada en un término cualquiera $-n$, siendo n un número tan grande como se quiera.

Por este medio se obtiene el sistema de las dos progresiones

$$\div\!\!\div \ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots,$$

$$\div \ldots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots,$$

dividida cada una en dos partes, contando desde los términos 1 y 0.

La primera parte, contada de izquierda á derecha, en ambas progresiones, está compuesta de términos que comprenden *todos los números mayores que la unidad y sus logaritmos respectivos*. (Estos logaritmos son, segun ya hemos observado, todos los números imaginables comprendidos desde 0 hasta el infinito.)

La segunda parte, contada de derecha á izquierda, se compone de términos que comprenden *todos los números menores que la unidad y sus logaritmos respectivos*, siendo estos los mismos logaritmos de la primera parte, pero precedidos del signo —, que entonces sirve para distinguir los logaritmos de los números menores que la unidad, de los logaritmos correspondientes á los números mayores que la unidad.

273. En general, sea $\frac{a}{b}$ un quebrado propio, lo cual supone $a<b$.

Digo que tenemos $\log.\frac{a}{b}=-\log.\frac{b}{a}$.

En efecto, como tenemos evidentemente $\frac{a}{b}=1:\frac{b}{a}$, resulta (n.º 255) $\log.\frac{a}{b}=\log.1-\log.\frac{b}{a}$.

Luego á causa de ser $\log.1=0$ (n.º 260),

$$\log.\frac{a}{b}=-\log.\frac{b}{a}.$$

L. C. D. D.

Donde se ve que *el logaritmo de una fraccion es el logaritmo de la misma fraccion invertida, tomado con el signo —*.

Así, $\log.\frac{3}{4}=-\log.\frac{4}{3}=-(\log.4-\log.3)$;

$$\log.\frac{23}{47}=-\log.\frac{47}{23}=-(\log.47-\log.23);$$

lo cual suministra esta regla: *para obtener el logaritmo de un quebrado, réstese el logaritmo del numerador del logaritmo del denominador, y tómese el resultado con el signo —*.

274. Establecidos estos principios, hagamos algunas aplicaciones.

1.º *Se pide*, por logaritmos, *el valor del producto* $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}$.

Tenemos (n.º 59) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}=\frac{3\times5\times11}{7\times12\times13}$;
de donde (n.º 273)

$$\log.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-\log.\frac{7\times12\times13}{3\times5\times11}=$$

$$\log.3+\log.5+\log.11-\log.7-\log.12-\log.13,$$

ó empleando los complementos aritméticos,

$$=\log.3+\log.5+\log.11+c.\log.7+c.\log.12+c.\log.13-30.$$

Efectuando la operacion indicada, se reconoce que

$$\log.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-0{,}82074.$$

Llamando x al número correspondiente á 0,82074, tendremos (n.º 273)

$$-0{,}82074=\log.\frac{1}{x}.$$

Por consiguiente, todo está reducido á determinar á x.
Pero se halla, segun la regla establecida en el n.º 265,

$$0{,}82074=\log.6{,}6181;$$

de donde $x=6{,}6181.$

Por consiguiente, el número buscado $\frac{1}{x}$ vale

$$\frac{1}{6{,}6181}=0{,}1511.$$

Advertencia. En este ejemplo no podemos estar enteramente seguros de la exactitud de la última cifra decimal del número 6,6181, segun lo dicho en el n.º 266; pero lo estamos de la última cifra del número 0,1511 (véase la nota puesta al fin de la obra, n.º 20).

Regla general. Para hallar á qué número corresponde un logaritmo afectado del signo —, *búsquese lo primero á qué número corresponde el logaritmo, prescindiendo de su signo, y divídase despues la unidad por el número así obtenido;* el cociente, valuado en decimales, es el *número pedido.*

Tambien se puede recurrir al artificio siguiente: *póngase el logaritmo* $-0,82074$ *bajo la forma* $4-0,82074-4$, lo cual equivale *á aumentar y disminuir á la vez el logaritmo propuesto en 4 unidades;* así resulta

$$-0,82074=3,17926-4.$$

Segun las tablas tenemos

$$3,17926=\log.\ 1511;$$

de donde $\quad 3,17926-4=\log.\ 1511-\log.\ 10000$ (n.º 261);

y por consiguiente $-0,82074=\log.\dfrac{1511}{10000}=\log.\ 0,1511.$

Este último medio es en general mas sencillo y sobre todo mas rigoroso que el primero, porque en la espresion $\dfrac{1}{x}$, obtenida por este, x es un divisor inexacto (*); mientras que por la naturaleza del segundo medio no hay que temer esta causa de error.

Sea tambien, por ejemplo, *determinar el número correspondiente al logaritmo* $-2,35478$.

Como el logaritmo dado está comprendido entre -2 y -3, el número correspondiente debe estar comprendido entre $\dfrac{1}{100}$ y $\dfrac{1}{1000}$. Para obtener su valor por el *segundo medio*, se pone el logaritmo bajo la forma $6-2,35478-6=3,64522-6$.

Tenemos $\quad 3,64522=\log.\ 4417,9;$

luego $\quad 6-2,35478-6$, ó $-2,35478=\log.\ \dfrac{4417,9}{1000000}$;

ó bien $\quad -2,35478=\log.\ 0,0044179.$

(*) Véase la nota colocada al fin de la obra, n.º 20.

Estos ejemplos bastan para hacer ver que los números que corresponden á logaritmos afectados del signo —, pueden obtenerse muchas veces con grado muy alto de aproximacion.

El segundo medio, segun esto, consiste evidentemente *en restar el logaritmo propuesto de tantas unidades, mas 4, como tiene su característica, determinando el número correspondiente al resultado así obtenido, y dividiéndolo por la unidad seguida de tantos ceros como unidades se hayan tomado para efectuar la resta.*

2.° *Se pide la* 11.ª *potencia de la fraccion* $\frac{13}{15}$.—Tenemos (n.° 273)

$$\log.\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -\log.\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -11\left(\log.\ \frac{15}{13}\right).$$

Pero $\log.\ \frac{15}{13} = 0,06215;$

de donde $11 \times \log.\ \frac{15}{13} = 0,68365;$

y por consiguiente, $\log.\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -0,68365 = \log.\ 0,2072.$

Luego 0,2072 es el número pedido.

3.° *Se pide la raiz* 7.ª *de* $\frac{2}{3}$.

Tenemos $\log.\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = -\log.\sqrt[7]{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{1}{7}\log.\ \frac{3}{2}\right).$

Pero $\log.\ \frac{3}{2} = 0,17609;$

de donde $\frac{1}{7}\log.\ \frac{3}{2} = 0,02515;$

luego $\log.\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = -0,02515 = \log.\ 0,94374;$

luego finalmente $\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = 0,94374.$

275. Escolio. La investigacion de los logaritmos de los quebrados nos ha conducido á una especie particular de números, llamados en Algebra *números negativos,* por oposicion á los números ordinarios, que se llaman *números positivos* ó *números absolutos*. La consideracion de los números *negativos* en la teoría de los *logaritmos* es tan indispensable como la de los números *positivos,* pues solo con ellos pueden espresarse los logaritmos de las fracciones. Esto es tan cierto, que en la hipótesis (muy admisible) de haber establecido al principio el sistema de las dos progresiones

$$\div\!\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} \ldots,$$

$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \;\ldots,$$

en cuyo caso todas las fracciones habrian tenido logaritmos positivos, y tanto mayores cuanto menores hubieran sido las fracciones; en esta hipótesis, digo, los logaritmos de los números mayores que la unidad, á saber, 1, 10, 100, 1000, 10000...., y todos los comprendidos entre ellos, habrian sido representados necesariamente por la série de números *negativos* 0, —1, —2, —3, —4,.... y todos los números comprendidos entre estos.

Otro modo de considerar los logaritmos.

276. Euler en sus Elementos de Álgebra ha establecido entre las diversas operaciones de la Aritmética una comparacion muy ingeniosa que vamos á esponer, porque dá lugar á un nuevo modo de considerar los logaritmos.

Designemos por a, b, c, tres números cualesquiera, y propongámonos esta cuestion general: *Dadas dos cualesquiera de estas tres cantidades, determinar la tercera por medio de una de las operaciones aritméticas efectuada con las cantidades dadas.*

La operacion mas sencilla sin contradiccion y la primera que se presenta á la imaginacion, es la adicion.

Propongámonos, pues, *hallar á* c *por la adicion de los dos números* a *y* b.

Esta relacion entre los tres números a, b, c, estará espresada por la igualdad

$$a+b=c \quad (1),$$

que dá al mismo tiempo

$$a=c-b \quad \text{ó} \quad b=c-a.$$

Donde se ve que si en lugar de buscar á c, buscáramos el valor de a ó de b, la misma igualdad (1) daria *por una sustraccion* la cantidad desconocida.

Así, pues, la adicion y la sustraccion estan ligadas entre sí por una misma igualdad $a+b=c$.

Advertencia. Si en la igualdad $a=c-b$, se supone $c<b$, el valor de a se reduce evidentemente á un número *negativo;* por consiguiente, estas clases de números traen su orígen de sustracciones indicadas é imposibles de efectuar.

La adicion de varios números iguales conduce á la *multiplicacion.*

Propongámonos *hallar á* c *por la multiplicacion de los números* a *y* b.

Esta relacion estará indicada en la igualdad

$$ab=c \quad (2);$$

de donde se deduce

$$a=\frac{c}{b}, \quad \text{ó} \quad b=\frac{c}{a}.$$

Luego si, en lugar de buscar á c por medio de la igualdad (2), buscáramos el valor de a ó de b, obtendríamos el valor del número desconocido, *dividiendo* c por b, ó c por a.

Así, pues, la *multiplicacion y la division* estan ligadas entre sí por la misma igualdad $ab=c$.

Advertencia. En la hipótesis de ser $c<b$, ó de no ser c exactamente divisible por b, la espresion $\frac{c}{b}$, es una *fraccion ó un número fraccionario.* Luego las fracciones traen su orígen de divisiones que no pueden efectuarse exactamente.

Finalmente, la multiplicacion de varios números iguales conduce á la *formacion de las potencias.*

Supongamos, pues, *que se quiere hallar el valor de* c *haciendo el producto de* b *números iguales á* a.

Esta relacion se espresará por medio de la igualdad

$$a^{b} = c \quad (3);$$

de donde se deduce $a = \sqrt[b]{c}$,

lo cual prueba que, para obtener á c, cuando se conocen a y b, es necesario efectuar una *formacion de potencia;* y que para obtener el valor de a cuando se conocen b y c, es necesario efectuar una *estraccion de raiz.*

Pero ahora, *conociendo* a *y* c, *¿cómo hallaremos á* b*?*

Antes de responder á esta cuestion, recapitulemos lo que acabamos de decir.

La igualdad $a+b=c$ reune las dos operaciones conocidas con los nombres de *adicion y sustraccion;* pudiendo la segunda de estas dos operaciones dar lugar á los *números negativos.*

La igualdad $ab=c$ reune *la multiplicacion y la division;* de donde nace la idea de las *fracciones y números fraccionarios.*

Observemos además que en cada una de estas igualdades, $a+b=c$, $ab=c$, el número a y el número b se obtienen respectivamente, por medio de *la misma operacion* efectuada con las dos cantidades conocidas (lo cual se espresa diciendo que a y b entran de una manera semejante ó simétrica en estas igualdades).

Del mismo modo, la igualdad $a^{b}=c$ reune *la formacion de las potencias y la estraccion de las raices ;* de donde nacen los *números* inconmensurables.

Pero entre esta igualdad y las dos precedentes hay una diferencia, y es que, para hallar el valor de a, basta una estraccion de raiz; mientras que para hallar el valor de b, se necesita una operacion particular, que en cierto modo constituirá la 7.ª *operacion de la Aritmética.*

Si aplicamos pues á la igualdad

$$a^{b} = c$$

la propiedad del n.º 256, resulta

$$b.\ \log.\ a = \log.\ c;$$

de donde deducimos $b = \dfrac{\log.\ c}{\log.\ a}$;

es decir, que el valor de b se obtiene por medio de los logaritmos.

277. Hagamos algunas aplicaciones.

Supongamos, en la igualdad $a^b = c$, $a = 3$ y $c = 81$; entonces tendremos

$$3^b = 81;$$

de donde $$b = \frac{\log. 81}{\log. 3}.$$

Tenemos $\log. 81 = 1{,}90849$; $\log. 3 = 0{,}47712$;

luego $$b = \frac{1{,}90849}{0{,}47712} = 4 + \frac{1}{47712}.$$

Despreciando el quebrado $\frac{1}{47712}$, que es muy pequeño, y que aquí procede de que los logaritmos nunca son exactos, se encuentra $b = 4$; y en efecto $3^4 = 81$.

Propongámonos, por último, la cuestion siguiente: *La poblacion de un pais aumenta cada año en $\frac{1}{50}$ de lo que era al empezar el mismo año; se pregunta al cabo de cuántos años se habrá duplicado.*

Designemos por a el estado de la poblacion al principio del primer año, y por a', a'', a''',.... su estado al principiar los demás años.

Como por hipótesis, la poblacion a resulta aumentada al concluir el primer año en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principiar, la espresion de su estado al terminar el año primero ó comenzar el segundo, será

$$a + \frac{a}{50} = a\left(1 + \frac{1}{50}\right) = a\left(\frac{51}{50}\right),$$

ó bien a', segun las notaciones arriba convenidas.

Como al terminar el segundo año, habrá crecido la poblacion a' en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principiar el año, su espresion será

$$a' + \frac{a'}{50} = a'\left(1 + \frac{1}{50}\right) = a'\left(\frac{51}{50}\right),$$

ó bien, poniendo en lugar de a' su valor $a\left(\frac{51}{50}\right)$, tendremos

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^2 = a''.$$

Del mismo modo hallaríamos que el estado de la poblacion, al cabo del tercer año, es $a''\left(\frac{51}{50}\right) = a\left(\frac{51}{50}\right)^3$; y asi sucesivamente.

Luego, si designamos por x el número *desconocido* de años, $a\left(\frac{51}{50}\right)^x$ espresará el estado de la poblacion al fin del último año. Además, segun el enunciado, este mismo estado está representado por $2a$: luego tendremos la igualdad

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2a;$$

suprimiendo el factor a comun á los dos miembros, queda

$$\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2;$$

de donde $x = \dfrac{\log.\ 2}{\log.\ \left(\frac{51}{50}\right)} = \dfrac{\log.\ 2}{\log.\ 51 - \log.\ 50}.$

Buscando en las tablas los logaritmos de 2, de 51 y de 50, hechos todos los cálculos, se encuentra $x = 35 + \frac{3}{860}$.

Luego, al cabo de 35 años poco mas, se habrá duplicado la poblacion.

Por consiguiente, *los logaritmos conducen á una especie particular de operaciones, indispensables para la resolucion de ciertas cuestiones.*

FIN.

NOTA

SOBRE LAS APROXIMACIONES NUMÉRICAS.

Esta nota está dividida en dos partes: *en la primera* se supone que se dan exactamente los números con los cuales se han de ejecutar las operaciones aritméticas, y se esponen métodos mas espeditivos que los esplicados en el cuerpo de la obra para obtener los resultados de las operaciones con un grado determinado de aproximacion.

En la segunda parte se opera con números que solo se conocen aproximadamente, y se trata de fijar el grado de aproximacion que en los resultados puede obtenerse, atendida la naturaleza de los números dados y el sistema de operaciones ejecutadas con ellos.

OBSERVACION PRELIMINAR.

1. Siempre que se trata de convertir una fraccion ordinaria en decimal, y resulta infinito el número de cifras decimales del cociente, ordinariamente se dá fin á la valuacion en un cierto órden decimal. Aquí pueden ocurrir dos casos: ó bien la cifra que sigue á la última que se toma es *menor* que 5, ó bien es *igual* ó *superior* á 5.

En el primer caso, es evidente que la parte tomada en el cociente espresa el valor buscado, no solo con menos de *una unidad* de error del órden de la última cifra de la derecha, sino tambien con error de menos de *media unidad* del mismo órden, siendo entonces *en menos* el error cometido.

En el segundo caso, si se aumenta una unidad á la última cifra tomada, se tiene tambien el valor pedido, con un error menor que *media unidad* del mismo órden; pero entonces se comete un error *en mas*, menor que el que resultaria de la supresion pura y simple de las cifras siguientes á la última tomada.

Sirva de ejemplo valuar en decimales el quebrado $\frac{19}{23}$.

```
170     | 23
 90     |------------------
 210    | 0,739130434 7
    30
     70
      100
        80
        110
         180
          19
```

En este ejemplo, las partes 0,739|0,7391|0,7391304|...., espresan *en menos* el valor total del cociente aproximado hasta *media milésima*, ó *media diezmilésima*, ó *media diezmillonésima*, pues las partes despreciadas son evidentemente menores que la mitad de una milésima, ó de una diezmilésima, ó de una diezmillonésima.

Pero 0,74 | 0,739130435 | espresan *en mas* el cociente aproximado hasta *media centésima* ó *media milmillonésima;* porque las cantidades que en este supuesto se han añadido al cociente son evidentemente menores que la mitad de una *centésima* ó de una *milmillonésima*.

De donde se deduce que el cociente de una division susceptible de prolongarse al infinito por su desarrollo en decimales, puede siempre valuarse, sea *en menos* sea *en mas*, con un error menor que *media unidad* de un órden decimal cualquiera. Basta que se sepa si la cifra siguiente á aquella en que nos queremos detener, debe ser *menor* que 5, ó bien *igual* ó *superior* á 5.

Es de notar aquí que no se necesita conocer el verdadero valor de la cifra siguiente á la última tomada; es decir, que no se necesita determinar dicha cifra; basta considerar el resíduo correspondiente á la cifra de la última operacion. — Si este resto es *menor que la mitad* del divisor, ó *igual* ó *superior* á dicha mitad, puede asegurarse que la cifra inmediata posterior habria de ser menor que 5, ó igual ó superior á 5.

Así, en el ejemplo precedente se ve que todos los restos correspondientes á los cocientes 9, 1, 3, 0, 4, 3, son 3, 7, 1, 10, 8, 11, números evidentemente menores que la mitad del divisor 23; mientras que los restos correspondientes á las cifras 3 *centésimas*, 4 *milmillonésimas*, son 21 y 18, números mayores que la mitad del divisor.

Una observacion análoga puede hacerse respecto de la raiz cuadrada desarrollada en decimales.

Como, segun la fórmula del n.º 177,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

tenemos $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$,

resulta que, si a designa la parte ya encontrada de la raiz, segun el resto correspondiente es á lo mas igual á a, ó bien superior á a, se puede asegurar que a espresa la raiz aproximada con menos error de media unidad del órden de la última cifra á la derecha de a, y que el error cometido es *en menos* ó bien que $a+1$ espresa *en mas* la misma raiz, aproximada en media unidad del órden de la última cifra; y esto sin que haya necesidad de hacer una nueva operacion, que daria ciertamente una cifra menor ó mayor que 5, ó igual al mismo 5.

Pasemos ahora al objeto principal que nos hemos propuesto.

PRIMERA PARTE.

En las cuestiones de aritmética (véase el fin del 4.º capítulo) hemos tenido muchas veces que efectuar operaciones en donde figura crecido número de cifras decimales, aun cuando para lograr el objeto de la cuestion, baste obtener el resultado con mucho menor número de ellas. Por eso es útil enseñar métodos que, sin necesidad de ejecutar por entero las operaciones, nos dén con toda exactitud las cifras decimales necesarias.

MÉTODO ABREVIADO DE MULTIPLICACION.

2. Empecemos por la multiplicacion, y tomemos los dos números 34,253467 y 5,4637, suponiendo que *en el producto solo se quiere aproximacion hasta milésimas.*

El artificio que hemos de emplear consiste en hacer las multiplicaciones por las diferentes cifras del multiplicador, teniendo solo en cuenta los productos de *milésimas* ó *de unidades superiores á ellas*, como son *centésimas*, *décimas*, *unidades simples*, *etc.* Sin embargo, como bastan 10 *diezmilésimas* para hacer una *milésima*, es tambien necesario atender á las *diezmilésimas* que pueden dar los productos parciales.

Segun estas primeras observaciones, hé aquí cómo se debe operar:

$$
\begin{array}{r l}
34{,}253467 & \\
73645 & \\
\hline
1712673 & \quad \textit{diezmilésimas.} \\
137013 & \\
20551 & \\
1027 & \\
239 & \\
\hline
187{,}1503 &
\end{array}
$$

Se empieza por escribir la cifra de las *unidades* del multiplicador debajo de la cifra de las *diezmilésimas* del multiplicando, y se colocan á continuacion las demás cifras del primero, invirtiendo el órden en que estaban escritas; de modo que la cifra de las *décimas* del multiplicador cae necesariamente bajo la cifra de *milésimas* del multiplicando, la cifra de las *centésimas* del primero bajo la cifra de las *centésimas* del segundo, y así sucesivamente. Si hubiera cifras de *decenas*, *centenas*, etc., en el multiplicador, vendrian á quedar colocadas bajo las cifras de las *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc., del multiplicando. En una palabra, por medio de esta colocacion, cada cifra del multiplicador queda situada bajo la cifra del multiplicando que, multiplicada por ella, ha de producir *diezmilésimas*.

Esto supuesto, se empieza multiplicando por la cifra 5 del multiplicador todas las cifras del multiplicando, comenzando por el 4 que corresponde á la cifra 5, y despreciando el producto de 67 por 5, del cual solo aprovecharemos las 3 unidades de especie superior que dá el producto de 6 por 5, y que espresan *diezmilésimas*. Esta primera multiplicacion nos dá 1712673 *diezmilésimas*, que se escriben oportunamente debajo de los factores.

Pasando ahora á la cifra 4 de las décimas del multiplicador, se multiplica por ella todo el multiplicando, empezando por la cifra 3 y despreciando el producto de 467 por 4, del cual solo se reserva la *unidad* de especie superior que dá el producto cuatro veces 4, porque esta unidad es *una diezmilésima;* así se obtienen 137013 *diezmilésimas*, que se colocan debajo del primer producto, porque ambos espresan *diezmilésimas.*

Del mismo modo se opera con respecto á las demás cifras del multiplicador, cuidando de *comenzar cada multiplicacion parcial en la cifra del multiplicando que está colocada inmediatamente encima de la cifra del multiplicador que se considera, y añadiendo al producto únicamente las unidades superiores, que dá la cifra del multiplicando en donde comienza la multiplicacion.*

Así se obtienen los tres nuevos productos 20551, 1027 y 239, que se colocan de modo que se correspondan las cifras. Se suman en seguida todos los productos, y resulta 1871503, á cuyo número es necesario cortarle con una vírgula *cuatro* cifras decimales, porque debe espresar *diezmilésimas.*

Finalmente, se tacha la última cifra, y se encuentra 187,150, que será el producto pedido aproximado hasta milésimas.

Es fácil comprobar este resultado, efectuando la multiplicacion por completo.

Advertencia. Podria creerse, segun este procedimiento, que como en apariencia hemos tenido en cuenta todas las *diezmilésimas* procedentes de los productos parciales, la cifra de las *diezmilésimas* sería tambien exacta; pero no resulta así, sino menor de lo que debe en muchas unidades. Esto depende de que la suma de las unidades del órden de *cienmilésimas* puede dar varias unidades del órden superior inmediato. Sin embargo, debe considerarse que el error no puede influir en la cifra de *milésimas*, porque para esto era necesario que el multiplicador estuviera compuesto de diez cifras á lo menos, atendiendo que, segun el proceder de arriba, el error cometido en cada multiplicacion parcial es en general menor que *una diezmilésima.*

3. Por lo demás, aun pueden disminuirse mucho los errores cometidos en el curso del cálculo, usando las modificaciones siguientes:

Siempre que á la simple inspeccion de las dos cifras de la derecha de la cifra del multiplicando en que comienza cada multiplicacion parcial, se reconoce que la segunda de las cifras del producto del conjunto de las dos cifras arriba dichas, por la cifra del multiplicador, *es igual* ó *superior* á 5, se añade una unidad á la primera cifra de la izquierda del producto, para añadirla en seguida al resultado de la multiplicacion parcial que se ejecuta.

Hagamos ver la práctica de esta modificacion en el mismo ejemplo tratado antes.

34,253467
73654
1712673
137014
20552
1028
240
117,1507

En la primera multiplicacion parcial, como el producto de 67 por 5 dá 33, nos limitamos á añadir 3 al producto de 34,2534 por 5; lo cual dá 1712673, como en el primer modo de operar.

Pero en la segunda multiplicacion, como el producto del conjunto de las dos primeras cifras, 46, de la derecha de la cifra 3, por la cifra 4 del multiplicador, es 184, añadiremos 2 y no 1, al producto de 34,253 por 4, lo cuál dá 137014 en lugar de 137013, que habíamos obtenido en la forma anterior.

Del mismo modo, siendo 204 el producto de 34 por 6, añadiremos 2 en lugar de 1 al producto de 34,25 por 6; lo cual dá 20552 en lugar de 20551.

Se verá tambien del mismo modo, que los dos últimos productos deben ser 1028 y 240.

Sumando ahora los productos parciales, se obtiene por resultado 117,1507 en lugar de 117,1503.

Este nuevo resultado prueba, segun de lo dicho en el número 1 de esta nota, que 117,151 es el valor del producto con menos de *media milésima* de error, pues es mayor que 5 la cifra inmediata posterior á las *milésimas*.

Apliquemos á un nuevo ejemplo el procedimiento y sus modificaciones.

Propongámonos obtener aproximado hasta cienmilési-

mas el producto de los números 763,05403678956 y 254,4630578.

```
7 6 3,0 5 4 0 3 6 7 8 9 5 6
  8 7 5 0 3 6 4 4 5 2
---------------------------
1 5 2 6 1 0 8 0 7 3 5 8
  3 8 1 5 2 7 0 1 8 3 9
    3 0 5 2 2 1 6 1 4 7
      3 0 5 2 2 1 6 1 5
        4 5 7 8 3 2 4 2
          2 2 8 9 1 6 2
              3 8 1 5 3
                5 3 4 1
                  6 1 0
---------------------------
1 9 4 1 6 9,0 6 3 4 6 7
```

Supuesto que deseamos obtener exactamente las *cinco* primeras cifras decimales, es necesario tener en cuenta las *millonésimas* que pueden dar los productos parciales. Para esto, despues de haber invertido el órden de las cifras del multiplicador, le colocamos debajo del multiplicando, de modo que la cifra 4 de las unidades de aquel se corresponda con la de *millonésimas* de este; con lo cual las otras cifras quedan naturalmente colocadas en el órden prescrito arriba; en seguida se efectúan las multiplicaciones, con el cuidado de añadir á cada producto parcial las unidades procedentes de la multiplicacion de la parte despreciada del multiplicando por la cifra correspondiente del multiplicador.

En este ejemplo hemos aumentado una unidad á las que llevábamos en las multiplicaciones 1.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª y 7.ª, por la razon espuesta en el primer ejemplo; y como la cifra *tachada* es mayor que 5, podemos concluir que 194169,06347 espresa el producto *en mas*, sin llegar el esceso á *media cienmilésima*.

4. *Primera observacion.* Reflexionando sobre la naturaleza del procedimiento abreviado de la multiplicacion, y sus modificaciones indicadas en el n.º 3, es fácil ver que en cada multiplicacion parcial, el error cometido ya *en mas*, ya *en menos*, es menor que la mitad de la unidad del órden decimal inmediato posterior al en que se debe terminar la aproximacion. Por consiguiente, se necesitarian 20 cifras á lo menos en el multiplicador, para que pudiera llegar á solo una unidad el error final cometido en la última cifra de la derecha del producto aproximado.

Hay mas; como los errores parciales cometidos *en mas* ó *en menos*, se compensan hasta cierto punto, casi se puede asegurar que la cifra siguiente solo difiere de la verdadera en una ó en dos unidades á lo mas.

Efectuando la multiplicacion precedente segun las reglas ordinarias, encontramos, en efecto, que el producto, hasta esa cifra decimal inclusive, es 194169,0634681. Donde se ve que la sesta cifra decimal hallada por el método abreviado solo difiere de la verdadera en una unidad. Aquí, la suma de los errores cometidos *en menos* escede á la suma de los errores cometidos *en mas*.

5. *Segunda observacion*. Una ligera dificultad puede presentarse en las aplicaciones; y es cuando quiere obtenerse el resultado con menos error de *media unidad* de un órden decimal determinado (véase el n.° 1 de esta Nota). Como la cifra *tachada* puede tener de mas ó de menos algunas unidades, y como puede suceder que sea poco diferente de 5, no se sabe si deberá tomarse como está la cifra en que se ha detenido la aproximacion, ó si se le deberá aumentar una unidad.

En este caso el único medio seguro de resolver la dificultad es buscar el producto con una cifra mas de las que quieran tenerse. Como en virtud de lo dicho arriba, esta cifra debe ser siempre exacta, al despreciarla en el producto obtenido, podremos tomar el producto que nos quede, en la forma que esté, ó añadirle una unidad, segun sea menor que 5, ó igual, ó superior á 5 la cifra despreciada.

Así, si se quiere obtener el producto con menos de *media diezmilésima* de error, por ejemplo, se procederá como si quisiéramos obtenerla con menos de una *cienmilésima* de error; y la cifra de las cienmilésimas obtenida nos indicará si debemos añadir una unidad á la cifra de las *diezmilésimas*, ó dejarla tal cual esté.

6. *Tercera observacion*. Tambien puede suceder que el multiplicando no tenga bastantes cifras decimales para que puedan corresponderse las cifras de las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicador, con las cifras á que deben corresponder segun la regla. En este caso se suplen con ceros los lugares que faltan á la derecha del multiplicando.

Sea, por ejemplo, *multiplicar* 1825,4037 por 2427,125, y supongamos que se quiere un producto exacto hasta las *diezmilésimas* inclusive.

```
1825,40370000
      5217242
─────────────
3650807400000  cienmilésimas.
 730161480000
  36508074000
  12777825900
    182540370
     36508070
      9127020
─────────────
443048,295536
```

Como se necesita que la cifra de las *unidades* del multiplicador corresponda á la cifra de las *cienmilésimas* del multiplicando, y que las *decenas*, *centenas*, etc., correspondan á las *millonésimas*, *diezmillonésimas*, etc., se escriben *cuatro* ceros á la derecha del multiplicando, que se convierte en 1825,40370000. La operacion se efectúa en seguida del modo arriba dicho.

Aconsejamos á los principiantes que se ejerciten en los ejemplos de multiplicacion tratados en los n.os 103 y siguientes.

7. Finalmente, el método anterior es aplicable á la multiplicacion de dos números enteros, compuestos uno y otro de un número algo crecido de cifras, cuando en el producto solo se busca exactitud hasta la cifra de un cierto órden.

Sean, por ejemplo, *los dos números* 279456 y 89764, *cuyo producto se quiere con menos de* UN MILLON *de error.*

```
 279456
  46798
───────
 223565  centenas de millar.
  25151
   1956
    168
     11
───────
 250851
```

Para tener un producto exacto hasta los *millones* inclusive es necesario tener en cuenta las *centenas de millar* que pueden dar los productos parciales. Así, se escribirá el multiplicador invertido debajo del multiplicando, de modo que la cifra de sus *unidades* quede colocada bajo la cifra de las *centenas de millar,* la cifra de las *decenas* bajo la cifra de las *decenas de millar,* etc.; y se efectuará como antes la operacion, obteniendo que el producto pedido son 25085 *millones*, resultado algo mayor que el verdadero, pues en todos los productos parciales se ha añadido una unidad á las que se llevaban procedentes de las cifras despreciadas.

MÉTODO ABREVIADO PARA LA DIVISION.

8. Para la division de dos cantidades compuestas de un gran número de cifras, hay tambien un medio mas sencillo que el procedimiento ordinario, de obtener el cociente con cierto grado de aproximacion.

Consideraremos primero el caso en que, siendo dos números enteros el dividendo y el divisor, se quiere sacar el cociente *con menos de una unidad de error;* despues será fácil deducir el caso de dos fracciones decimales.

El método que vamos á esponer está fundado en que, segun el procedimiento ordinario de la division, la determinacion de cada una de las cifras del cociente solo depende comunmente de las dos ó tres primeras cifras del dividendo, y de la primera ó dos primeras cifras del divisor; de donde resulta que pueden obtenerse las verdaderas cifras del cociente sin atender á las últimas cifras de cada dividendo parcial. Esto supuesto, hé aquí la regla del procedimiento abreviado.

Suprímanse á la derecha del dividendo tantas cifras MENOS DOS, *como hay en el divisor; hágase en seguida la division de lo que queda á la izquierda por el divisor, en la forma ordinaria.* Si no hay resíduo, *pónganse á la derecha del cociente tantos ceros como cifras se hayan cortado en el dividendo.* Pero si queda resíduo, como sucede de ordinario, *divídase el resíduo, no por el mismo divisor* (lo cual ya no es posible), *sino por el divisor despues de tacharle la última cifra de la derecha.* Sin embargo, en la multiplicacion del nuevo divisor por la cifra obtenida en el cociente, *téngase cuidado de tener en cuenta las unidades de especie superior que se llevan del producto de la cifra tachada, por la cifra del cociente* (teniendo presente la modificacion indicada en el n.º 3). *Divídase despues el nuevo resíduo por el divisor precedente, al cual se tachará de antemano otra cifra á la derecha* (teniendo tambien en cuenta la observacion que acabamos de hacer acerca de la multiplicacion del nuevo divisor por la cifra del cociente). *Continúese de este modo, suprimiendo en cada division una cifra á la derecha del divisor, hasta tanto que el divisor solo quede sin tachar una cifra. Tachando* entonces la última cifra obtenida en el cociente, *quedará á la izquierda el cociente pedido.*

Para darnos cuenta de este procedimiento, vamos á proponer un ejemplo sencillo, tratándole primero por el procedimien-ordinario y despues por el que acabamos de enunciar.

Sea dividir 430456846 *por* 5683.

430456846	5683	4304568|46	5683
32646	75744	32646	757|446
42318		42318	
25374		2537	
26426		264	
3694		37	
		3	

La division de la izquierda está hecha segun las reglas ordinarias, y es inútil detenernos en ella; ocupémonos solamente de la segunda.

Segun la regla, separamos *dos* cifras á la derecha del dividendo, porque tiene *cuatro* el divisor; se divide el número que queda á la izquierda, 4304568, por 5683, y se obtiene el cociente 757 y el resíduo 2537.

Hecho esto, se tacha la última cifra 3 del divisor, y se divide 2537 por 568, lo cual dá el cociente 4; se multiplica 568 por 4 añadiendo al producto la *unidad* que se lleva del producto 12 de la cifra suprimida por 4, y el resultado, 2273, de esta multiplicacion se resta de 2537, quedando por resíduo 264.

Suprimiento la cifra 8 en el último divisor, y dividiendo 264 por 56, se obtiene el cociente 4. Multiplicando 56 por 4, y añadiendo al producto las tres unidades que se llevan de la multiplicacion de las dos cifras tachadas por 4, resulta 227, que, restado de 264, dá el resíduo 37.

Dividiendo finalmente 37 por 5, resulta el cociente 7; pero esta cifra es mayor de lo que debe, porque aceptándola como exacta tendríamos que restar $5 \times 7 + 5$, ó 40 de 37. Escribiremos, pues, la cifra 6. *Tachando* ahora esta última cifra, hallamos el cociente pedido 75744, con menos de una unidad de error. (Muy luego hablaremos de la cifra tachada.)

Comparando las dos operaciones anteriores, se advierte que las dos ó tres cifras primeras son idénticas en cada division parcial, y por consiguiente las cifras del cociente deben ser las mismas en una y otra; pero en las multiplicaciones por las diferentes cifras del cociente, nunca deben olvidarse las modificaciones del n.º 3; de lo contrario se obtendrian resíduos demasiado grandes, que podrian dar en el cociente cifras superiores á las verdaderas.

9. *Advertencia.* Como en el ejemplo anterior la primera cifra de la izquierda de la parte suprimida en el dividendo es *menor* que 5, puede inferirse que al resíduo 2537 le falta menos de *media unidad* del órden de la cifra 7. Si la cifra de la izquierda de que estamos hablando fuera 5, ó superior á 5, convendria aumentar una unidad á la última cifra de la derecha de la parte conservada en el dividendo, y entonces este tendria un esceso *de menos de media unidad* del órden de su última cifra.

Por otro lado, en virtud de las modificaciones del n.º 3, cada uno de los dividendos parciales de las operaciones siguientes está necesariamente *aumentado ó disminuido en menos de media unidad* del mismo órden.

Todos estos errores, unos *en mas*, otros *en menos*, se compensan en gran parte. Pero en todo caso, puede asegurarse que el *límite* del error total cometido, sea *en mas*, sea *en menos*, en el último dividendo parcial obtenido tachando sucesivamente todas las cifras del divisor menos la primera, *está espresado por tantas medias unidades* del órden de la primera cifra de la parte suprimida del dividendo, *como operaciones parciales se hayan hecho, siguiendo el procedimiento abreviado.*

Dividiendo este *límite* por la primera cifra de la izquierda del divisor, se obtiene por cociente el *número de unidades que tiene de mas ó de menos* la cifra *tachada* del cociente de la division total.

Segun esto, se ve que sería necesario que fuera muy considerable (al menos igual á 20) el número de divisiones parciales efectuadas por el método abreviado para que se hubiera de temer *una sola* unidad de error en la cifra que precede á la cifra tachada.

Sirva de segundo ejemplo *dividir* 54034705678904 6 *por* 2786459.

```
5403470567|89046   | 2786459
26170115           |---------------
  10919846         | 1939|188973
   25604697        |
      526567
      247921
       25004
        2712
         204
           9
           1
```

Despues de haber separado *cinco* cifras á la derecha del dividendo (es decir, *dos menos* que hay en el divisor), se divide la parte de la izquierda por todo el divisor, lo cual dá el cociente 1939, y el resíduo 526567. Aquí la última cifra lleva aumentada una unidad por la razon dicha en el número 8.

Hecho esto, se suprime la última cifra 9 del divisor, y se divide 526567 por 278645; se obtiene el cociente 1 y el resíduo 247921, que se divide por 27864; resulta el cociente 8 y el resíduo 25004, que se divide por 2786; y así sucesivamente hasta llegar al resíduo 9, que dividido por 2, dá el cociente 3 (no 4, que sería demasiado grande). *Se tacha* la cifra 3, y se obtiene 193918897, que será el cociente pedido.

10. *Observacion.* Si al principio de la operacion, cuando se han suprimido á la derecha del dividendo las cifras prescritas por la regla, no contiene al divisor la parte restante á la izquierda, *se suprimen desde luego á la derecha del divisor el número de cifras necesario para que el nuevo divisor esté contenido en la parte de la izquierda del dividendo.*

Sirva de ejemplo *dividir* 30564897 *por* 67364.

```
30564|897   | 67364
30565       |------
 3619       | 4537
  251
   49
    2
```

Como, despues de la separacion de las tres últimas cifras á la derecha del dividendo, la parte de la izquierda, 30564, ó mas bien 30565, no contiene al divisor, se suprime la última cifra del divisor, despues se divide 30565 por 6736, lo cual dá el cociente 4 y el resíduo 3619, con el cual se opera como antes.

11. Ahora podemos ya esplicar el procedimiento que conviene al caso en que, siendo fracciones decimales los dos números, se pide el cociente con cierto grado de aproximacion, por ejemplo, aproximado hasta *milésimas*, hasta *diezmilésimas*, etc.

Se empieza por reducir la division á la de dos números enteros por la regla del número 90; *se escriben despues á la derecha del dividendo tantos ceros como cifras decimales se quieran en el cociente; se hace la division segun la regla dada* (Nota, n.º 8); *y se separan á la derecha del cociente el número de cifras decimales pedidas, mas una, tachando luego la última cifra.*

Primer ejemplo. *Se pide el cociente de* 1234,569 *por* 27,35894, *aproximado hasta milésimas.*

$$
\begin{array}{r|l|l}
1234569 & 00000 & 2\cancel{7}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{4} \\
\cline{3-3}
140211 & & 45124\cancel{8} \\
3416 & & \\
680 & & \\
133 & & \\
24 & & \\
3 & &
\end{array}
$$

Empiezo por escribir *dos* ceros á la derecha del dividendo, suprimiendo la coma en él y en el divisor, lo cual reduce la operacion á dividir 123456900 por 2735894. Despues, como se piden *tres* cifras decimales en el cociente, escribo *tres* ceros mas á la derecha del dividendo, es decir, divido 12345690000 por 2735894, y busco el cociente con menos de una unidad de error. Encuentro 45124; pero como escribiendo tres ceros mas á la derecha del dividendo, le hemos hecho *mil* veces mayor, para reducir el cociente á su justo valor, es preciso separar tres cifras decimales á la derecha, obteniendo así 45,124, que será el cociente pedido.

Advertencia. En este ejemplo, el *límite* en mas ó en menos del error cometido en la cifra *tachada* del cociente es $\frac{5}{2}:2$, ó $\frac{5}{4}$, segun lo dicho en el número 9; lo cual prueba que el verdadero valor de la cifra *tachada* es superior á 5; luego 45,125 espresa el valor del cociente, con menos de *media milésima de error*.

Tambien podria aplicarse á la investigacion de un cociente con menos de *media unidad de error* de cierto órden decimal, la regla dada para la multiplicacion en el número 5.

Búsquese una cifra decimal mas de las indicadas en el enunciado; y segun sea la penúltima cifra *menor* que 5, *igual* ó *superior* á 5, *así se tomará* la parte de la izquierda tal cual está ó aumentada en una unidad en el resultado pedido.

SEGUNDO EJEMPLO. *Se quiere tener con menos de* 0,0001 *de error el cociente de* 229,4703568 *dividido por* 7,3594.

```
22947035|680  | 73594
   86883      |----------
  132895      | 311|8058
   59302      |
     427
       5
       0
```

Como en virtud de lo dicho, deberian escribirse *tres* ceros á la derecha del divisor, y luego *cuatro* á la derecha del dividendo, basta escribir desde luego *uno solo* á la derecha de este, suprimiendo la vírgula en ambos; con lo cual queda la operacion reducida á dividir 22947035680 por 73594.

Así se encuentra 311806. Luego el cociente pedido es 31,1806.

MÉTODO ABREVIADO PARA LA ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA.

12. Cuando ya se han obtenido mas de la mitad del número de cifras que debe tener una raiz cuadrada, se pueden determinar las restantes por medio de una simple division.

Designemos en efecto por N el número cuya raiz cuadrada buscamos, y supongamos que su raiz debe constar de $(2n+1)$

cifras. Llamemos a el valor relativo de la parte representada por las $(n+1)$ primeras cifras de la izquierda de la raiz, y b la parte espresada por las n cifras restantes, parte que se trata de determinar.

Tenemos la igualdad

$$N=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

de donde, restando a^2 á los dos miembros,

$$N-a^2=2ab+b^2,$$

ó dividiendo por $2a$,

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Esto supuesto, como por hipótesis b solo consta de n cifras, tenemos necesariamente $b<10^n$, y por consiguiente $b^2<10^{2n}$.

Por otro lado, el número espresado por a consta de $(2n+1)$ cifras, de las cuales son ceros las n primeras de la derecha; por consiguiente resulta

$$a, \text{ y con mayor razon } 2a>10^{2n}.$$

Luego $\frac{b^2}{2a}$ es un quebrado propio; por consiguiente, segun la última igualdad de arriba, el cociente espresado por $\frac{N-a^2}{2a}$, *escede* á b en una cantidad *menor* que la unidad. De esta consideracion deducimos la regla siguiente:

Despues de haber obtenido mas de la mitad del número de cifras de la raiz cuadrada, para determinar las restantes basta *dividir el resíduo* $N-a^2$ *que resulte, por el duplo de la raiz hallada considerada en su valor relativo.*

Sirva de primer ejemplo estraer la raiz cuadrada de 4735678956 *con menos de una unidad de error.*

Busquemos primero las tres primeras cifras por el procedimiento ordinario. (Véase el n.º 179.)

4 7 3 5 6 7 8 9 5 6	688	
1 1 3.5		
1 1 1 6.7	12.8	136.8
2 2 3 8 9 5 6	8	8

La primera parte de esta raiz resulta ser 688, quedando el resíduo 2238956, que en virtud de la regla de arriba, debemos dividir por el dúplo de 688 considerado con su valor relativo, es decir, por 137600.

2238956	137600
862956	16
37356	

Siendo 16 la parte entera del cociente, deducimos que la raiz buscada es 68816 *con menos de una unidad de error.*

En efecto, si elevamos al cuadrado el número 68816, obtenemos el producto 4735641856, que restado del número propuesto, dá el resíduo 37100, menor que el duplo de 68816 aumentado en una unidad. (Véase el n.º 177.)

[Como el resíduo es menor que la raiz obtenida 68816, se puede tambien asegurar (Nota, n.º 1) que á dicha raiz le falta *menos de media unidad.*]

El resíduo 37100 puede obtenerse por otro medio mas pronto que el de la elevacion de 68816 al cuadrado. En efecto, como restando del número propuesto el cuadrado de 688, hemos obtenido el resíduo 2238956, basta *formar el doble producto de* 688 *con dos ceros, por* 16, *y despues el cuadrado de* 16, *restando de* 2238956 *la suma de las dos partes.*

13. Supongamos ahora que se quiere valuar en decimales la fraccion que debe añadirse á 68816; con arreglo á lo dicho en el número 183, es necesario escribir á la derecha del resíduo 37100, DOS VECES tantos ceros como cifras decimales queramos tener, continuando la operacion en la forma ordinaria. Aquí es donde el método abreviado puede recibir una grande estension.

En efecto, para obtener *cuatro* cifras decimales (puesto que la raiz determinada tiene ya *cinco* cifras), basta dividir 37100 seguido de *ocho* ceros por el duplo de 68816, ó 137632, seguido de *cuatro* ceros, ó lo que es lo mismo, 371000000 por

137632; y como este cociente se busca con menos error que una unidad del órden de su última cifra, se le puede aplicar la regla de la division abreviada.

37100 0000	~~137632~~
9574	26958
1316	
77	
8	
0	

37100
9574

Así se obtiene el cociente 2695. Por consiguiente 68816,2695 espresa la raiz cuadrada del número propuesto con menos de una diezmilésima de error.

Una nueva division daria *ocho* cifras decimales mas; pero sería necesario de antemano hallar la *diferencia* que existe entre el número propuesto seguido de *ocho* ceros y el cuadrado de 688162695. Para esto, como ya hemos obtenido el resíduo anterior 37100, bastaria *formar el doble producto de* 688160000 *por* 2695, *y despues el cuadrado de* 2695, *restando de* 37100 *con* OCHO *ceros la suma de las dos partes*, lo cual sería mucho mas sencillo que elevar al cuadrado el número 688162595.

Esta sustraccion es en todos casos indispensable para la comprobacion de los cálculos; porque antes hemos visto, 1.º que $\frac{N-a^2}{2a}$ dá un cociente *por esceso;* 2.º que el empleo del procedimiento abreviado de la division puede dar tambien (Nota, n.º 9) un cociente por esceso; por consiguiente, por esta doble razon es muy posible que la última cifra hallada tenga una ó dos unidades *de mas*, lo cual se conocerá en la imposibilidad de hacer la sustraccion. Ya sabemos cómo puede reducirse á su justo valor la última cifra si en efecto resultára mayor de lo debido.

14. Presentaremos por segundo ejemplo el cuadro de los cálculos relativos á *la valuacion de* $\sqrt{2}$ *en decimales.*

1.º *Aplicacion del procedimiento ordinario.*

2	1,41	
10.0	24	281
40.0	4	1
11 9		

2.° *Determinacion de las dos cifras siguientes por la division.*

$$\begin{array}{r|l} 11900 & 282 \\ \cline{2-2} 620 & \quad 42 \\ 56 & \end{array}$$

La raiz con menos de 0,0001 de error, es 1,4142.

3.° *Determinacion del nuevo resíduo.*

$$\begin{array}{rr} \text{Producto de } 28200 \text{ por } 42 = & 1184400 \\ \text{cuadrado de } 42 = & 1764 \\ \hline \text{Suma. . . .} & 1186164 \\ \text{Restando esta suma de. . . .} & 1190000 \\ \hline \text{Diferencia. . . .} & 3836 \end{array}$$

4.° *Determinacion de las* CUATRO *cifras siguientes por medio de la division abreviada.*

$$\begin{array}{r|l} 38360\ \overline{000} & 28284 \\ \cline{2-2} 10076 & 13562 \\ 1591 & \\ 177 & \\ 7 & \\ 0 & \end{array}$$

La raiz con menos de 0,00000001 de error es 1,41421356.

5.° *Determinacion del nuevo resíduo.*

$$\begin{array}{rr} \text{Producto de } 282840000 \text{ por } 1356 = & 383531040000 \\ \text{cuadrado de } 1356 = & 1838736 \\ \hline \text{Suma. . . . .} & 383532878736 \\ \text{Restando esta suma de. . . . .} & 383600000000 \\ \hline \text{Queda la diferencia. . . .} & 67121264 \end{array}$$

6.° *Determinacion de las* OCHO *cifras siguientes por la* *division abreviada*. (Se han suprimido como inútiles *siete* ceros en el dividendo.)

$$\begin{array}{r|l}
671212640 & \cancel{2}\cancel{8}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2} \\ \cline{2-2}
105527216 & 23730950\cancel{8} \\
20674403 & \\
875413 & \\
26885 & \\
1429 & \\
15 & \\
1 &
\end{array}$$

La raiz con menos de 0,0000000000000001 de error, es

1,4142135623730950.

Para obtener las diez y seis cifras siguientes sería necesario calcular el nuevo resíduo segun el método indicado arriba, y añadiéndole un número conveniente de ceros, dividirle en seguida por el duplo de la parte ya encontrada de la raiz. Y así sucesivamente.

Advertimos que en esta operacion y en las que despues pudieran hacerse, convendria despreciar la última ó las dos últimas cifras de la derecha, en atencion á lo dicho en el n.º 9 de esta Nota.

15. Puede estenderse á la raiz cúbica la regla abreviada de la estraccion de la raiz cuadrada.

En efecto, la fórmula

$$N=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

dá

$$N-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3,$$

ó dividiendo los dos miembros por $3a^2$,

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}.$$

Suponiendo que la raiz cúbica de N debe constar de $(2n+1)$ cifras, y que a designa el valor relativo de las $(n+1)$ primeras cifras de la izquierda de la raiz, y b el valor de las n últimas, tenemos necesariamente $b<10^n$, y por consiguiente $b^2<10^{2n}$, $b^3<10^{3n}$.

Por otro lado, tenemos $a > 10^{2n}$, de donde a^2, y con mayor razon $3a^2 > 10^{4n}$.

Se ve, pues, 1.° que $\frac{b^2}{a}$ es un quebrado propio; 2.° que $\frac{b^3}{3a^2}$ es tambien otro quebrado propio menor que $\frac{1}{10^n}$, cuyo valor puede influir poquísimo en la parte entera del cociente de la division de $N - a^3$ por $3a^2$.

De donde resulta esta regla: cuando se han obtenido ya mas de la mitad del número de cifras de una raiz cúbica, basta, para determinar las cifras siguientes, *dividir la diferencia entre el número propuesto y el cubo de la raiz obtenida, tomada en su valor relativo, por el triplo del cuadrado de la misma raiz.*

No insistimos en las aplicaciones de esta regla, porque apenas tiene uso alguno.

SEGUNDA PARTE.

16. Hasta aquí hemos supuesto que eran exactos los números dados, y que el resultado buscado debia obtenerse con un grado de aproximacion determinado de antemano, condicion que siempre ha sido posible cumplir. Ahora vamos á suponer que los números dados solo se conocen aproximadamente, y en este supuesto tratamos de determinar *à priori* el máximo grado de aproximacion con que puede obtenerse el resultado de las operaciones que deben efectuarse.

La resolucion de esta cuestion, tal cual acabamos de plantearla, es indispensable en muchos casos, por ejemplo, cuando se opera con logaritmos que, segun esplicamos en su teoría, solo son exactos hasta cierto órden decimal determinado.

Empecemos por la adicion y la sustraccion.

Para fijar las ideas, supongamos que en una operacion análoga á la del segundo ejemplo del n.° 267, hemos tenido que sumar entre sí 25 logaritmos ó complementos logarítmicos (n.° 268), y que el resultado de la operacion haya sido 6,94268, logaritmo cuyo número correspondiente tratamos de averiguar.

Cada uno de los 25 logaritmos sumados tenia, ó podia tener un error de una cantidad que podria elevarse hasta *media unidad* de su último órden; de donde se sigue que en la suma total podria tenerse un error de 12 ó 13 unidades del mismo órden. Así, no solamente no deberá atenderse á la diferencia que existe entre el logaritmo propuesto y el inmediato inferior de la tabla (consecuencia que se verificaría aun cuando la diferencia tabular fuera mayor que 10; véase la *Advertencia* del n.° 266), sino que además, no habiendo medio alguno de decidir cuál es la verdadera cifra de las unidades de cuarto órden del número buscado, debemos contentarnos con decir que será 8760000 con menos de *una decena de millar* de error.

El ejemplo precedente basta para enseñar lo que deberia hacerse en casos semejantes, por lo cual no insistiremos mas en este punto.

17. Antes de pasar á las otras operaciones de la aritmética, daremos á conocer acerca de la multiplicacion un nuevo principio que nos servirá en lo sucesivo.

Sean en general dos números enteros a y b, compuestos el uno de m cifras y el otro de n cifras; llamemos P á su producto, y propongámonos determinar cuántas cifras tendrá este producto.

Desde luego, como tenemos

$$a<10^m \text{ pero } >10^{m-1}.$$
$$\text{y } b<10^n \text{ pero } >10^{n-1},$$

resultará (n.° 212) que

$$\text{P, ó } ab<10^{m+n} \text{ pero } >10^{m+n-2},$$

lo cual hace ya ver que el número de las cifras del producto P es á lo mas igual á $m+n$, y á lo menos igual á $m+n-1$.

Trátase ahora de averiguar en qué casos tendrá $m+n$ cifras, y en qué casos $m+n-1$.

Para conseguirlo, consideremos P como un dividendo y a como un divisor; el número b, que por el supuesto consta de n cifras, será el cociente. En la division de P por a, pueden suceder dos casos: ó las m primeras cifras de la izquierda del producto P forman un número por lo menos igual á a, ó bien forman un número menor que a.

En el primer caso, como el primer dividendo parcial contiene m cifras, y cada nueva cifra bajada en el dividendo debe dar una cifra mas en el cociente, que ha de constar de n cifras, es necesario que el número de cifras del dividendo P sea $m+n-1$. (Véase la Nota al fin del n.° 40.)

En el segundo caso será $m+1+n-1$, es decir, $m+n$.

Observemos además, que lo acabado de decir respecto de a como divisor, se verificaria lo mismo si en su lugar tomáraramos á b.

Concluyamos de aquí, que en toda multiplicacion de dos factores, el uno de m, y el otro de n cifras, *el número total de las cifras del producto es* m + n — 1, ó m + n, *segun que uno cualquiera de los factores está ó no está contenido en la parte de la izquierda del producto, tomada con tantas cifras como tiene el factor que se compara.*

18. Entendido esto, pasemos á la *multiplicacion;* y para simplificar la cuestion consideremos primero el caso en que se hubieran de multiplicar entre sí dos números que espresan unidades enteras; despues será fácil deducir el caso de dos fracciones decimales, pues la multiplicacion de estas se reduce á la de enteros, con solo suprimir la coma.

Tomemos, para mas generalidad, dos números enteros compuestos uno de m cifras y otro de n cifras (siendo $m>n$), y supongamos que á los dos les falta ó les sobra media unidad del primer órden para ser exactos (*). Es claro que, segun las reglas ordinarias de la multiplicacion (**), en el producto total puede haberse cometido un error que equivalga:

1.° á la mitad de todo el multiplicando, cuyo error generalmente está espresado por un número m de cifras;

2.° á la mitad de todo el multiplicador, cuyo error suele estar representado por un número n de cifras;

3.° al producto $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, ó $\frac{1}{4}$. (Los dos últimos errores pueden despreciarse con relacion al primero en el supuesto $m>n$.)

(*) Para determinar las cifras del producto en que no puede haber duda, podrian *multiplicarse los números propuestos despues de añadirles ó quitarles media unidad del órden de su última cifra de la derecha, tomando en seguida las cifras comunes á los dos resultados.* Pero este modo de operar sería demasiado largo, y puede llegarse con seguridad al mismo término por medio de un método mas simple que vamos á esponer.

(**) Llamando a y b los dos números dados, $\pm e$, $\pm f$ los dos errores cometidos, tenemos (n.° 112)

$$(a\pm e)\,(b\pm f)=ab\pm af\pm be\pm ef.$$

De donde puede inferirse que las m últimas cifras de la derecha del producto son ó pueden ser inexactas.

Así, pues, *en toda multiplicacion de dos números enteros que tengan media unidad de error en su última cifra de la derecha, el producto puede tener tantas cifras inexactas á la derecha como cifras tiene el número mayor.*

El error cometido es menor que $\frac{10^m}{2}$ si tenemos $m > n$; pero el límite del error es 10^m cuando se tiene $m = n$.

19. Cuando uno de los factores dados es exacto y el otro tiene un error de *media unidad* del primer órden, *el número de las cifras inexactas del producto es igual al número de cifras del factor exacto,* porque el error cometido equivale en general á la mitad de este factor.

Hagamos algunas aplicaciones, y sirvan *de primer ejemplo* los dos números 87564219 y 64327.

El error cometido en esta multiplicacion puede valuarse del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lrl} 1.^{\circ} & 87564219 \times \frac{1}{2} = & 43782109\,\frac{1}{2} \\ 2.^{\circ} & 64327 \times \frac{1}{2} = & 32163\,\frac{1}{2} \\ 3.^{\circ} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = & \frac{1}{4} \end{array}\right\} = 43814273\,\frac{1}{4},$$

número compuesto de *ocho* cifras. Así, pues, en el producto total las cifras inferiores á las *centenas de millon* deben despreciarse como generalmente inexactas, y la parte de la izquierda espresará entonces el producto con menos error que *media centena de millones.*

Por consiguiente, en este ejemplo debe omitirse el hacer toda la multiplicacion, reduciéndose á valuar (Nota, n.° 7) el producto hasta las centenas de millon exactamente.

$$\begin{array}{r}
87564219 \\
72346 \\
\hline
525385 \\
35026 \\
2627 \\
175 \\
61 \\
\hline
563274
\end{array}$$

El resultado 56327, considerado como representando millones, espresa el valor del producto buscado, con menos error que media centena de millones, como puede verse haciendo por completo la multiplicacion.

Sirva de *segundo ejemplo* multiplicar 32,470563 por 8,70345, suponiendo que cada uno de estos números tiene menos de *media unidad* de error del órden de la última cifra decimal.

Lo primero deberíamos (n.º 89) hacer abstraccion de la vírgula, y despues de haber efectuado la multiplicacion, separar *once* cifras á la derecha del producto. Pero en virtud de lo dicho en el número 18 de esta Nota, debemos considerar como inexactas las *ocho* últimas cifras del producto; por lo cual el resultado solo podrá ser exacto hasta las *diezmilésimas*. Por consiguiente la cuestion queda reducida á valuar hasta *milésimas* el producto de las dos fracciones decimales.

$$\begin{array}{r}
32{,}470563 \\
54\ 3078 \\
\hline
259\ 7645 \\
22\ 7294 \\
974 \\
130 \\
16 \\
\hline
282\ 6059
\end{array}$$

El producto es 282,606 con menos de *media milésima* de error.

Sirva de *tercer ejemplo* multiplicar

0,0001083 por 0,05836.

El producto debe tener 7+5, ó sea 12 cifras decimales (n.º 89); pero como, segun lo dicho en el número precedente, las *cuatro* últimas cifras decimales son inexactas, se infiere que deberemos calcular el producto con solo *ocho* cifras decimales, y la última cifra de la derecha no tendrá mas error que *media unidad*, ó á lo mas *una unidad* del órden de esta última cifra.

Hecho así por el método abreviado (Nota, n.º 3), obtenemos el producto pedido, que es 0,00000632.

20. *Observacion.* El principio establecido acerca del número total de cifras de un producto (Nota, n.º 17), dá orígen á un nuevo enunciado de la regla relativa á la multiplicacion de dos números aproximados.

Puesto que en un producto de dos factores, uno de m cifras y otro de n cifras, el número total de cifras es $m+n-1$, ó $m+n$, y que en el supuesto de ser solo aproximada la última cifra de cada factor, el número de cifras del producto que deben escluirse, como generalmente inexactas, está (Nota, n.º 18) espresado por m (siendo m al menos igual á n), se infiere necesariamente que *el número de cifras del producto que fijamente resultan exactas, es* (n—1), ó n, *segun que uno cualquiera de los factores está ó no está contenido en la parte de la izquierda del producto, tomada con tantas cifras como tiene el factor que con él se compara.*

Cuando, de los dos factores dados, el de m cifras es exacto, y al otro le falta ó le sobra á lo mas *media unidad* del órden de la última cifra de la derecha, *el número de cifras del producto, que resultan exactas, es tambien* (n—1), ó n, *puesto que el de las cifras inexactas está representado por* m (Nota, n.º 17).

Este nuevo enunciado no puede en general servir *à priori* para la multiplicacion, porque antes de decidir si el número de cifras que resultan exactas en el producto es $(n-1)$, ó n, es preciso conocer las primeras cifras de la izquierda del mismo producto. Pero se concibe que nos servirá de mucho en la division donde el producto se dá *à priori*, del mismo modo que uno de los factores.

21. *En la division de números* aproximados se pueden hacer tres hipótesis: *ó solo el dividendo es aproximado,* siendo el divisor exacto; *ó solo el divisor es aproximado*, siendo exacto el dividendo; ó bien finalmente el dividendo y el divisor *son ambos aproximados.*

Primera hipótesis. Consideremos primero dos números enteros, y supongamos que solo el primero (el dividendo) tiene *media unidad* de error del órden de las unidades simples; y concibamos que el cociente de su division se ha desarrollado en un número infinito de cifras decimales, segun el procedimiento conocido.

Llamemos m al número de cifras del divisor, n al número de cifras del cociente (empezando desde la primera cifra significativa de la izquierda), con cuya exactitud se puede contar, atendido el error que conocemos en el dividendo, y p el número total de las cifras del dividendo que se han empleado en la determinacion de las n cifras del cociente. Este número p puede descomponerse en dos partes p', p'', de las cuales la primera á la izquierda es el número de las cifras del dividendo primitivo, y la segunda el número de ceros que ha sido preciso añadirle; de modo que tendremos

$$p = p' + p''.$$

Esto supuesto, si del dividendo cuyo número de cifras es p, se resta el resíduo correspondiente á la cifra n^{esima} del cociente (cuyo resto solo puede tener á lo mas m cifras), la diferencia, compuesta tambien de p cifras, es igual al producto de las m cifras del divisor por las n cifras del cociente; y en virtud del principio establecido (Nota, n.° 17), tendremos

$$p' + p'' = m + n - 1,$$
ó
$$p' + p'' = m + n,$$

segun que las m cifras del divisor están ó no contenidas en las m primeras cifras de la izquierda del dividendo.

Pero, como se supone exacto el divisor, se infiere (n.° 17) que el número total del número de cifras inexactas del producto del divisor por el cociente, está espresado por m. Además está tambien representado por $p'' + 1$, porque, segun el supuesto, la última cifra del dividendo primitivo es inexacta, y las cifras siguientes son tambien inexactas. Tenemos, pues, $m = p'' + 1$; lo cual dá por la sustitucion de este valor de m en las dos relaciones precedentes,

$$p' = 1 + n - 1 = n, \text{ de donde } n = p',$$
ó bien
$$p' = 1 + n, \text{ de donde } n = p' - 1.$$

Concluyamos de aquí que *el número de cifras del cocien-*

te con cuya exactitud puede contarse, es igual al número de cifras del dividendo propuesto, ó á este número MENOS UNO, *segun que el divisor esté ó no esté contenido en las* m *primeras cifras del dividendo* (empezando desde la primera cifra significativa de la izquierda).

22. Esplanemos esta regla con ejemplos.

Sea, en primer lugar, dividir 3745687 por 5638, siendo exacto el divisor, y teniendo la última cifra de la izquierda del dividendo un error de media unidad.

Como el divisor no está contenido en las *cuatro* primeras cifras de la izquierda del dividendo, y este contiene *siete* cifras, se infiere que en la operacion podrán tomarse en cuenta las *seis* primeras cifras de la izquierda del cociente. Además es evidente que la parte entera de este cociente debe tener *tres* cifras. Luego el cociente debe calcularse aproximado hasta milésimas.

$$\begin{array}{l|l} 3745687 & 5638 \\ \cline{2-2} 36288 & 664,386 \\ 24607 & \\ 20550 & \\ 36360 & \\ 25320 & \\ 2768 & \end{array}$$

El cociente buscado es 664,384 con menos de *media milésima* de error.

Se ve en efecto que faltándole ó sobrándole á la última cifra *media unidad simple*, y siendo el divisor mayor que *mil*, el error cometido es menor que $\frac{0,001}{2}$.

Hay mas: como el duplo de 5638 escede á 10000, se podria prolongar la operacion hasta las diezmilésimas, y se tendria el valor del cociente con menos de *una diezmilésima* de error. Pero esta circunstancia no es mas que accidental, y así nunca se contará mas que con las cifras dadas por la regla precedente.

Sirva de nuevo ejemplo dividir 873 por 3765847.

Como el dividendo tiene *tres* cifras, está contenido en 8730000, se infiere que el número de las cifras del cociente que pueden aprovecharse es *tres*. Por otro lado, como para comenzar la division se deben escribir *cuatro* ceros á la derecha del dividendo, es preciso que la cifra de las unidades y las *tres* primeras cifras decimales sean ceros. La última cifra de la derecha espresa por consiguiente *millonésimas*.

Así se halla por resultado final 0,000232 con menos de *media millonésima* de error.

Tomemos por tercer ejemplo dividir 37,5 por 0,2983. Como el dividendo tiene *tres* cifras y el divisor, hecha abstraccion de la vírgula, se halla contenido en las *cuatro* primeras cifras del dividendo, se infiere que podremos tener en cuenta *tres* cifras en el cociente. Por otro lado, como la division de los dos números propuestos equivale á la de 375000 por 2983, que dá *tres* cifras para la parte entera del cociente, resulta que el cociente obtenido solo podrá hallarse con menos error que *media unidad*.

Dividiendo 375000 por 2983, se obtiene el resultado 126, sin ser permitido prolongar mas adelante la operacion.

Advertencia. En este ejemplo, como la operacion se ha reducido á la division de 375000 por 2983, y el divisor escede á 1000, se podria creer que el error cometido en el cociente deberia ser menor que 0,001; pero observemos que para reducir la division á este estado, ha sido necesario multiplicar 37,5 por 10000, ó 375 por 1000; luego el error de la última cifra 5 se ha multiplicado tambien por 1000; y se puede asegurar solamente que el error cometido en el cociente es menor que la mitad de $0{,}001 \times 1000$, ó menor que *media unidad* del órden de los enteros.

23. Segunda hipótesis. Sean A y a dos números enteros que se quieren dividir uno por otro, m el número de las cifras del divisor a, cuya última cifra de la derecha puede tener media unidad *de mas* ó *de menos*. Propongámonos lo primero determinar un límite del error cometido cuando se calcula el cociente q con cierto número de cifras.

Tenemos evidentemente

$$q \text{ ó } \frac{A}{a} < \frac{A}{a-\frac{1}{2}}, \text{ pero} > \frac{A}{a+\frac{1}{2}};$$

de donde designando por α el error cometido cuando se toma bien sea $\frac{A}{a-\frac{1}{2}}$, bien sea $\frac{A}{a+\frac{1}{2}}$ por valor de q,

$$e < \frac{A}{a-\frac{1}{2}} - \frac{A}{a+\frac{1}{2}} < \frac{A}{a2-\frac{1}{4}},$$

espresion que puede ponerse bajo la forma $e < \dfrac{\frac{A}{a}}{a-\frac{1}{4a}}$,

ó $e < \dfrac{q}{a-\frac{1}{4a}}$.

Este resultado demuestra que el error no llegará á influir en una unidad en la última cifra del cociente, mientras se tenga $q < a$. Pero para que esto se verifique, es necesario *primeramente* que el cociente buscado solo conste de m cifras; *en segundo lugar*, que el mayor número de cifras que se puedan colocar en el cociente de modo que satisfagan á esta condicion sea m ó $(m-1)$, segun que las m primeras cifras de este cociente formen un número mas pequeño, ó mayor que las m cifras del divisor.

Concluyamos de aquí generalmente que siempre que el divisor es aproximado, siendo exacto el dividendo, *el número de cifras del cociente con que se puede contar, es igual al número de cifras del divisor, ó á este número* MENOS UNA, *segun que las* m *cifras obtenidas en el cociente formen un número mayor ó menor que el divisor.*

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos, y sea el primero dividir 547 por 8769.

Como la primera cifra de la izquierda del cociente debe ser 6, se infiere necesariamente que las cuatro primeras formarán un número menor que el divisor. Así, pues, segun la regla precedente, puede calcularse el cociente con cuatro cifras. Su reduccion á decimales no dará ni *unidades simples*, ni *décimas*; luego puede valuarse con *cinco* cifras decimales, y se obtiene por fin ser 0,06237, aproximado hasta *cienmilésimas*.

Sirva de segundo ejemplo dividir 547 por 1548. Aquí la primera cifra de la izquierda del cociente debe ser 3, lo cual prueba que las cuatro primeras cifras del cociente formarán un número mayor que el divisor; luego segun la regla precedente, solo deben tenerse en cuenta *tres* cifras. Además, la parte entera del cociente reducido á decimales es *cero;* por consiguiente, puede obtenerse su valor aproximado hasta *milésimas.* Hecha la operacion se obtiene el resultado 0,353.

Consideremos ahora dos fracciones decimales; y sirva de tercer ejemplo dividir 23,479 por 534,7896.

Como el divisor tiene *siete* cifras y la primera de la izquierda del cociente será un 4, se infiere que el cociente puede tener *siete* cifras (contando desde la primera significativa de la izquierda) que pueden creerse exactas. Además, como evidentemente se necesita escribir *tres* ceros para comenzar la division, lo cual prueba que la cifra de *unidades* y la de *décimas* son ceros, resulta necesariamente que el cociente tendrá *ocho* cifras decimales. Por consiguiente, en este ejemplo podrá valuarse el cociente con menos de 0,00000001 de error.

En efecto, si conservando el mismo dividendo 23,479 se toman sucesivamente por divisores los números

534,78955,. . . . 534,7896,. . . . 534,78965,

y se aplica el método abreviado (Nota, n.º 8), se hallarán los resultados respectivos

0,043903249 | 0,043903247 | 0,043903243,

lo cual prueba que 0,04390325 es el valor del cociente con menos de *media cienmillonésima* de error.

24. Tercera y última hipótesis. *Finalmente*, si el dividendo y el divisor tienen inexacta la última cifra de la derecha, *el número de cifras del cociente que con seguridad pueden creerse exactas es á lo mas igual al menor de los dos números que designan las reglas relativas á las dos primeras hipótesis.*

Nos servirá de primer ejemplo dividir 356,3749 por 2,47936.

La regla del n.º 21 daria *siete* cifras; pero la del n.º 23 solo dá *seis* (porque la primera cifra de la izquierda del cociente es 1); luego el número de cifras del cociente con que podemos contar es *seis*. Además, la parte entera del cociente debe constar de *tres* cifras; por consiguiente, podrá el cociente valuarse aproximado hasta milésimas.

Efectuada la division, obtenemos el resultado 143,736.

Sirva de segundo ejemplo dividir el logaritmo de 15 por el logaritmo de 7.

En las tablas de logaritmos encontramos

$$\log.\ 15 = 1{,}17609,$$
$$\log.\ \ 7 = 0{,}84510.$$

(Estos dos logaritmos son exactos con menos error que media unidad del órden de la quinta cifra decimal.)

La aplicacion de cada una de las dos reglas á este ejemplo, nos dice igualmente que serán *cinco* las cifras exactas del cociente; y como la parte entera debe tener evidentemente una sola cifra significativa, se infiere que el cociente puede aproximarse hasta *diezmilésimas:* así hallamos

$$\frac{\log.\ 15}{\log.\ 7} = \frac{117609}{84510} = 1{,}3916.$$

Advertencia. Esta última cuestion sirve de base en Álgegra á la resolucion de ecuaciones esponenciales. (Véase además el n.° 227 de esta Aritmética.)

25. Todavia nos resta hablar de la *estraccion de la raiz cuadrada* de los números aproximados.

Consideremos primero un número entero cualquiera A, cuya última cifra de la derecha tenga *media unidad* de error; y concibamos que su raiz cuadrada se ha desarrollado en un número indefinido de cifras decimales segun el procedimiento conocido. Llamemos n el número de cifras exactas de la raiz, y p el número total de cifras del cuadrado empleadas en determinar las n cifras de la raiz. Pueden presentarse dos casos:—ó el número de cifras de A es *impar*, ó es *par*.

En el primer caso, como resulta de la naturaleza misma del procedimiento de la raiz cuadrada de un número entero que las n primeras cifras de la izquierda de la raiz forman un número menor que las n primeras cifras de la izquierda del cuadrado, tendremos necesariamente (Nota, n.° 17),

$$p = 2n - 1 = n + n - 1,$$

ó designando por p' el número de cifras de A y por p'' el número de ceros escritos á la derecha de A para la determinacion de las n primeras cifras de la raiz,

$$p'+p''=n+n-1.$$

Observemos ahora que, en la multiplicacion de la raiz por sí misma (suponiendo media unidad de error en su última cifra), el producto contiene (n.º 22) n cifras inexactas. Por otro lado, el número de cifras inexactas de ese mismo producto está espresado por $p''+1$, puesto que es inexacta la última cifra de A, y lo son tambien los p'' ceros escritos á la derecha de A; por consiguiente tenemos

$$n=p''+1;$$

y la igualdad anterior se convierte en

$$p'+p''=p''+1+n-1;$$

de donde $$n=p'.$$

En el segundo caso, como las n primeras cifras de la izquierda de la raiz forman por el contrario un número mayor que las n primeras cifras de la izquierda del cuadrado, tenemos entre p y n la relacion

$$p=2n=n+n,$$

ó, reemplazando como antes p por $p'+p''$, y observando que el número de cifras inexactas del cuadrado de la raiz está espresado á un tiempo mismo por n y por $p''+1$,

$$p'+p''=p''+1+n;$$

de donde $$n=p'-1.$$

Luego regla general: *el número de cifras con que se puede contar en el desarrollo de $\sqrt{A}$ en decimales, es igual al número de cifras de A, ó al mismo número* MENOS UNA, *segun consta A de un número* IMPAR, *ó de un número* PAR *de cifras.*

26. *Advertencia.* La regla precedente no sufre restriccion alguna mientras el número de cifras de A es *impar.* Pero

si es *par*, es susceptible de una modificacion muy importante.

Para examinarla, añadamos y quitemos alternativamente al número A *media unidad* del órden de la última cifra de la derecha; y propongámonos valuar la diferencia Δ que existe entre $\sqrt{A+\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{A-\frac{1}{2}}$.

Segun las reglas del Álgebra, tenemos

$$\Delta=\sqrt{A+\frac{1}{2}}-\sqrt{A-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{A}}+K,$$

siendo K una fraccion muy pequeña que puede despreciarse en comparacion de $\frac{1}{2\sqrt{A}}$.

Así, pues, la diferencia Δ está realmente representada por la espresion $\frac{1}{2\sqrt{A}}$.

Esto demuestra que, si se redujeran á decimales las cantidades $\sqrt{A+\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{A-\frac{1}{2}}$, las dos espresiones resultantes tendrian una parte comun tal, que la unidad de la última cifra consecutiva sería menor que $\frac{1}{2\sqrt{A}}$.

Esto supuesto, supongamos primero que A se compone de un número *impar* de cifras espresado por $2p+1$; lo cual supone $p+1$ secciones de á dos cifras (la primera seccion de la izquierda consta de solo una).

Despues de haber calculado las $p+1$ primeras cifras de la raiz segun el procedimiento ordinario, se podrán determinar las p cifras siguientes, sea por el mismo procedimiento, sea por el método abreviado del número 12; y siendo menor que $\frac{1}{2.10^p}$, el error cometido no influirá en una unidad en la cifra que ocupa el lugar $2p+1$. Así, pues, en este caso, se podrá contar con $2p+1$ cifras.

Ahora, si A consta de un número *par* de cifras $2p$, estaremos seguros de la exactitud de las p cifras siguientes que dá el método abreviado si se tiene $\frac{1}{2\sqrt{A}}$ menor que $\frac{1}{10^p}$; y esto se verifica cuando la primera cifra de la izquierda de $\sqrt{A}$ es igual ó superior á 5; circunstancia que se verifica, como es fácil conocer, siempre que la primera seccion de la izquierda del número propuesto es 25 ó superior á 25.

Concluyamos de aquí, que en el caso en que el número de cifras de A es PAR, *el número de cifras con que se puede contar es igual al número de cifras de A, ó á este número* MENOS UNA, *segun que la primera seccion de la izquierda es igual ó superior á 25, ó bien menor que 25.*

27. *Primer ejemplo.* Estraer la raiz cuadrada de 57806.

Como este número tiene *cinco* cifras, se infiere que su raiz cuadrada podrá calcularse tambien con *cinco* cifras; y como la parte entera debe constar de *tres*, la raiz podrá obtenerse aproximada hasta *centésimas.* Hecho el cálculo, resulta la raiz 240,42.

Segundo ejemplo. Estraer la raiz cuadrada de 73854986.

Este número tiene *ocho* cifras, y las dos primeras de la izquierda valen mas de 25, de donde se infiere (n.º 26) que se pueden calcular *ocho* cifras en la raiz, y como la parte entera debe constar de *cuatro*, la raiz resultará aproximada hasta *diezmilésimas.*

Hecho el cálculo, resulta la raiz 8593,8924.

Consideremos ahora fracciones decimales.

Tercero y cuarto ejemplos. Valuar la raiz de 8,256479 y de 23,567846.

Segun la regla establecida en el número 186, es necesario lo primero hacer abstraccion de la vírgula, dividiendo los dos resultados por 1000, cuando se haya obtenido la raiz.

Hecho esto, en la investigacion de las raices cuadradas de 8256479 y de 23567846, la aplicacion de la regla del n.º 26 de esta Nota nos dice que podemos contar con *siete* cifras. Además, la parte entera de la raiz cuadrada de cada uno de los números propuestos, solo debe tener *una* cifra: por consiguiente, cada raiz puede obtenerse con *seis* cifras decimales.

Resulta, en efecto,

$$\sqrt{8,256479} = 2,873409,$$

y $$\sqrt{23,567846} = 4,854673.$$

Quinto y sesto ejemplos. Valuar los números $\sqrt{6{,}73543}$ y $\sqrt{47{,}37596}$.

Lo primero, en conformidad con la regla del n.º 186, debemos hacer *par* el número de cifras decimales, añadiendo un *cero* á la derecha de cada uno de los números dados, y despues, suprimiendo la vírgula y estraidas las raices cuadradas de los números resultantes 6735430 y 47375960, dividir por 1000 cada una de las raices.

En la investigacion de la raiz de 6735430, como la primera seccion de la izquierda tiene *solo una* cifra, es necesario aplicarle la primera parte de la regla del número 25, no teniendo sin embargo cuenta de la última cifra de la derecha, que es enteramente inexacta; así resultará que podemos aprovechar *seis* cifras en la raiz. Además, la parte entera de la raïz cuadrada del número propuesto, solo debe tener una cifra. Luego finalmente, la raiz pedida puede calcularse con cinco cifras decimales; y se tiene

$$\sqrt{6{,}73543} = 2{,}59527.$$

Del mismo modo, como en la investigacion de la raiz de 47375960, la primera seccion de la izquierda consta de *dos* cifras, es necesario aplicar la regla del n.º 26, despreciando la última cifra de la derecha, que es enteramente inexacta; así quedarán *siete* cifras (porque la primera seccion de la izquierda es mayor que 25). Además, la parte entera de la raiz del número propuesto *solo* puede tener una cifra; por consiguiente podrá calcularse la raiz con *seis* cifras decimales.

Hecho el cálculo resulta

$$\sqrt{47{,}37596} = 6{,}883020.$$

Advertencia. Se puede comprobar facilmente la exactitud de los resultados obtenidos en los ejemplos precedentes, aumentando y disminuyendo media unidad á la última cifra de cada uno de los números, y operando despues con los nuevos resultados.

28. *Observaciones.* 1.ª Del análisis de los cuatro últimos ejemplos resulta una consecuencia muy importante, y es que, siempre que la parte entera de un número fraccionario de-

cimal consta solo de *una* ó de *dos* cifras, *el número total de cifras decimales que pueden aprovecharse en la raiz es* Á LO MENOS *igual al número de cifras decimales que contiene la fraccion propuesta.*

2.ª Cuando la parte entera del número propuesto consta de *mas de dos* cifras, el número de cifras decimales que se pueden aprovechar en la raiz *escede siempre* al de las cifras decimales que contiene el número propuesto.

Sea n el número de secciones de á dos cifras que tiene la parte entera del número propuesto (la última seccion de la izquierda podrá tener una sola cifra), y sea p el número de cifras decimales contenidas en el número propuesto. *El número total de cifras decimales que pueden aprovecharse, está espresado generalmente por* $n-1+p$.

(Este número es $n+p$ cuando la primera seccion de la izquierda tiene dos cifras y es mayor que 25).

3.ª Cuando por el contrario se trata de una fraccion propia decimal, el número de cifras decimales que pueden aprovecharse en la raiz, *puede ser menor que el número de cifras decimales de la fraccion propuesta;* y esto se verifica cuando las cifras inmediatamente posteriores á la vírgula son ceros, ó bien cuando siendo *par* el número de cifras decimales, vale menos de 25 la primera seccion de la izquierda.

En todos los demás casos, *el número de cifras decimales es el mismo que el del número propuesto.*

29. En esta última observacion están fundados los cálculos relativos á la determinacion de la razon de la circunferencia al diámetro; y para que nada se eche de menos en la teoría de las aproximaciones numéricas, terminaremos esta Nota esplicando el método de los polígonos regulares isoperímetros. Este método, que se encuentra espuesto en la *Geometría* de M. Vincent, reasume en cierto modo todos los principios establecidos en la nota precedente.

Sean R, r, el radio y la apotema del cuadrado, cuyo lado es igual á 1; R$'$, r', el radio y el apotema del octógono regular isoperímetro del cuadrado; R$''$, r'', el radio y la apotema del polígono regular de diez y seis lados, isoperímetro de los dos precedentes; y así sucesivamente.

Segun el método precitado, tenemos las fórmulas

$$r'=\frac{R+r}{2} \quad R'=\sqrt{Rr'}.$$

Esto supuesto, siendo 1 el lado del cuadrado, son $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\frac{1}{2}$ los valores de R y de r. Tendremos pues

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0,707106781\ (\sqrt{2}=1,414213562,\ \text{Nota, n.}^{\circ}\ 14),$$

$$r=\frac{1}{2}=0,5;$$

lo cual dá $$r'=\frac{R+r}{2}=0,603553390,$$

$$R'=\sqrt{Rr'}=\sqrt{0,707106781\times 0,603553390}.$$

Para efectuar este último cálculo, observemos que cada uno de los dos factores sub-radicales tiene menos de *media* unidad de error del órden de su última cifra de la derecha, y por consiguiente el producto (Nota, n.º 18) puede valuarse con menos de una unidad de error del órden de dicha última cifra segun el método abreviado de los números 2 y 3. Así se obtiene por el pronto

$$R'=\sqrt{0,426776695}.$$

Ahora, como el número cuya raiz cuadrada quiere estraerse es una fraccion decimal cuya primera seccion de la izquierda es mayor que 25, se infiere (Nota, n.º 26) que esta raiz puede obtenerse con *nueve* cifras decimales; y aplicando el método ordinario para la determinacion de las *cinco* primeras cifras, y despues el método abreviado del n.º 12 para las *cuatro* restantes, hallamos

$$R'=0,653281482.$$

Pasemos á la determinacion de R'' y de r''. Tenemos

$$r''=\frac{R'+r'}{2}=\frac{0,603553390+0,653281482}{2}=0,628417436,$$

y $$R''=\sqrt{R'r''}=\sqrt{0,653281482\times 0,628417436},$$

y procediendo con esta espresion como con la de R', hallamos

$$R'' = 0,640728862.$$

Y así sucesivamente.

Hé aquí el cuadro de operaciones continuadas hasta el radio R^{XIII} y el apotema r^{XIII}.

LADO DEL CUADRADO IGUAL Á 1.

$$\left.\begin{array}{lll} R & = \frac{1}{2}\sqrt{2} & = 0,707106781 \\ r & = \frac{1}{2} & = 0,500000000 \end{array}\right\} 1,207106781,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r' & = \frac{R+r}{2} & = 0,603553390 \\ R' & = \sqrt{R.r'} & = 0,653281482 \end{array}\right\} 1,266834872,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r'' & = \frac{R'+r'}{2} & = 0,628417436 \\ R'' & = \sqrt{R'.r''} & = 0,640728862 \end{array}\right\} 1,269146298,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r''' & = \frac{R''+r''}{2} & = 0,634573149 \\ R''' & = \sqrt{R''.r'''} & = 0,637643577 \end{array}\right\} 1,272216726,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{IV}} & = \frac{R'''+r'''}{2} & = 0,636108363 \\ R^{\mathrm{IV}} & = \sqrt{R'''.r^{\mathrm{IV}}} & = 0,636875507 \end{array}\right\} 1,272983870,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{V}} & = \frac{R^{\mathrm{IV}}+r^{\mathrm{IV}}}{2} & = 0,636491935 \\ R^{\mathrm{V}} & = \sqrt{R^{\mathrm{IV}}.r^{\mathrm{V}}} & = 0,636683692 \end{array}\right\} 1,273175627,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{VI}} & = \frac{R^{\mathrm{V}}+r^{\mathrm{V}}}{2} & = 0,636587813 \\ R^{\mathrm{VI}} & = \sqrt{R^{\mathrm{V}}.r^{\mathrm{VI}}} & = 0,636635751 \end{array}\right\} 1,273223564,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{VII}} & = \frac{R^{\mathrm{VI}}+r^{\mathrm{VI}}}{2} & = 0,636611782 \\ R^{\mathrm{VII}} & = \sqrt{R^{\mathrm{VI}}.r^{\mathrm{VII}}} & = 0,636623766 \end{array}\right\} 1,273235548,$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^{\mathrm{VIII}} & = \frac{R^{\mathrm{VII}}+r^{\mathrm{VII}}}{2} & = 0,636617774 \\ R^{\mathrm{VIII}} & = \sqrt{R^{\mathrm{VII}}.r^{\mathrm{VIII}}} & = 0,636620770 \end{array}\right\} 1,273238544,$$

$$\left.\begin{aligned} r^{\text{IX}} &= \frac{R^{\text{VIII}} + r^{\text{VIII}}}{2} &&= 0{,}636619272 \\ R^{\text{IX}} &= \sqrt{R^{\text{VIII}} . r^{\text{IX}}} &&= 0{,}636620021 \end{aligned}\right\} 1{,}273239293,$$

$$\left.\begin{aligned} r^{\text{X}} &= \frac{R^{\text{IX}} + r^{\text{IX}}}{2} &&= 0{,}636619646 \\ R^{\text{X}} &= \sqrt{R^{\text{IX}} . r^{\text{X}}} &&= 0{,}636619833 \end{aligned}\right\} 1{,}273239479,$$

$$\left.\begin{aligned} r^{\text{XI}} &= \frac{R^{\text{X}} + r^{\text{X}}}{2} &&= 0{,}636619739 \\ R^{\text{XI}} &= \sqrt{R^{\text{X}} . r^{\text{XI}}} &&= 0{,}636619786 \end{aligned}\right\} 1{,}273239525,$$

$$\left.\begin{aligned} r^{\text{XII}} &= \frac{R^{\text{XI}} + r^{\text{XI}}}{2} &&= 0{,}636619762 \\ R^{\text{XII}} &= \sqrt{R^{\text{XI}} . r^{\text{XII}}} &&= 0{,}636619774 \end{aligned}\right\} 1{,}273239536,$$

$$\left.\begin{aligned} r^{\text{XIII}} &= \frac{R^{\text{XII}} + r^{\text{XII}}}{2} &&= 0{,}636619768 \\ R^{\text{XIII}} &= \sqrt{R^{\text{XII}} . r^{\text{XIII}}} &&= 0{,}636619771 \end{aligned}\right\} 1{,}273239539.$$

De la inspeccion de los valores de r^{XIII} y de R^{XIII} resulta que si se desprecia la última cifra de la derecha en cada uno de ellos, tendremos 0,63661977 por valor de cada radio, con menos de media unidad de error del órden de la última cifra de la derecha.

Dividiendo ahora el perímetro constante 4 por el número aproximado 0,63661977, y aplicando la regla del n.º 23, hallamos 6,2831853, que será la razon de la circunferencia al radio aproximada hasta diezmillonésimas, ó bien

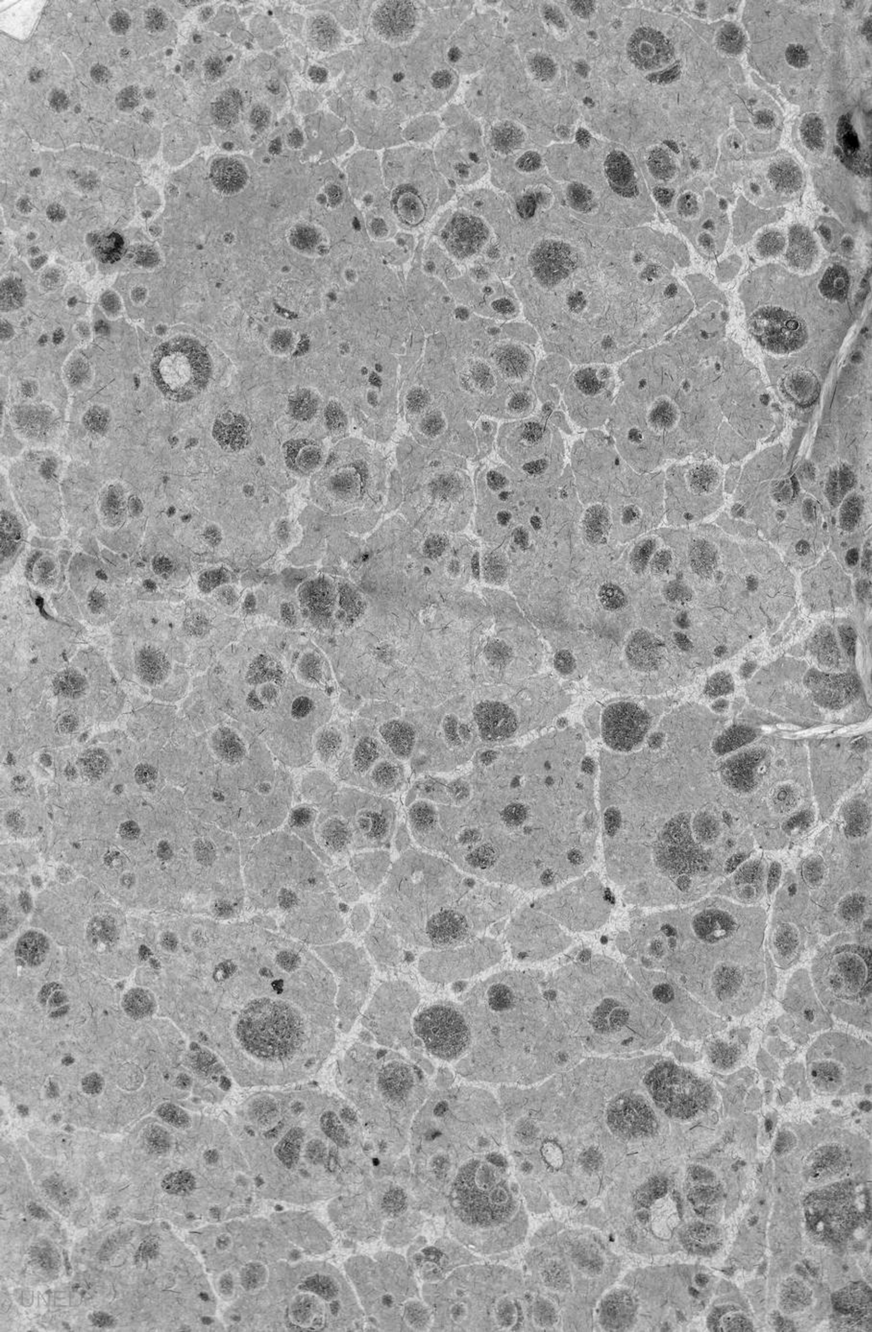
$$3{,}1415926,$$

razon de la circunferencia al diámetro.

Advertencia. Es de notar que para obtener esta razon con menos error de una unidad de un órden decimal determinado, es necesario, al seguir la marcha precedente, calcular al principio los radios con dos cifras decimales mas de las que se quieren tener en el resultado. Se continúan las operaciones hasta tanto que los dos radios solo difieran uno de otro en una cantidad menor que la mitad de la unidad del órden de la penúltima cifra de la derecha. Entonces se desprecia la última cifra; y despues se divide el perímetro constante por el valor de uno de los radios, despreciando dicha última cifra, y añadiendo, si es del caso, una unidad á la penúltima.

FIN DE LA NOTA SOBRE LAS APROXIMACIONES NUMÉRICAS.

Fran.co de Soto



BOURDON

ARITMETICA