Vida científica

N.º 10 (2017)
ISSN: 1989-7189

EFEMÉRIDES

400 AÑOS: JOHN NAPIER, INVENTOR DE LOS LOGARITMOS

Este año se cumplen cuatro siglos de la muerte del matemático y teólogo John Napier (1550-1617). Napier destacó tanto por ser un protestante convencido que dedicó su vida a una lucha feroz contra la Iglesia Católica como por sus contribuciones en el campo de las matemáticas, que le harían pasar a la historia por la invención de los logaritmos.

Bastantes años después de su muerte, el conocido filósofo escocés David Hume (1711-1776) calificaría a John Napier como "Gran Hombre". En palabras de Hume: "*the person to whom the title of 'great man' is most justly due than to any other whom his country has ever produced*".

John Napier nació el 1 de febrero de 1550 en Merchiston (Escocia) y murió el 4 de abril de 1617 en su ciudad natal. Hijo de Sir Archibald Napier (1534-1608), séptimo Lord de Merchiston y de Janet Bothwell (1538-1563), hija del juez y político Francis Bothwell y hermana del que llegaría a ser Obispo de Orkney. Sus padres se casaron en 1549, cuando Archibald tan sólo tenía 15 años.

Durante su infancia John estudió en el St. Salvador's College. En 1563, cuando tenía 13 años, ingresó en la St. Andrews University para estudiar Teología. Cabe y tuvo como mentor a John Rutherford, rector de la universidad en aquella época. La muerte de su madre, poco tiempo después de su ingreso en la universidad, motivo el abandono sus estudios de Teología y el inicio de viajar por Europa, por recomendación de su tío Adam Bothwell. Este escribió una carta al padre de Napier donde le sugería lo siguiente:

> *Señor, le ruego que envíe a su hijo a John a la escuela de Francia o a la de Flandes porque no puede aprender nada bueno en casa, nada de provecho en este mundo peligroso.*

Fue a lo largo de sus años de viaje por Europa cuando despertó su interés por las matemáticas y adquirió

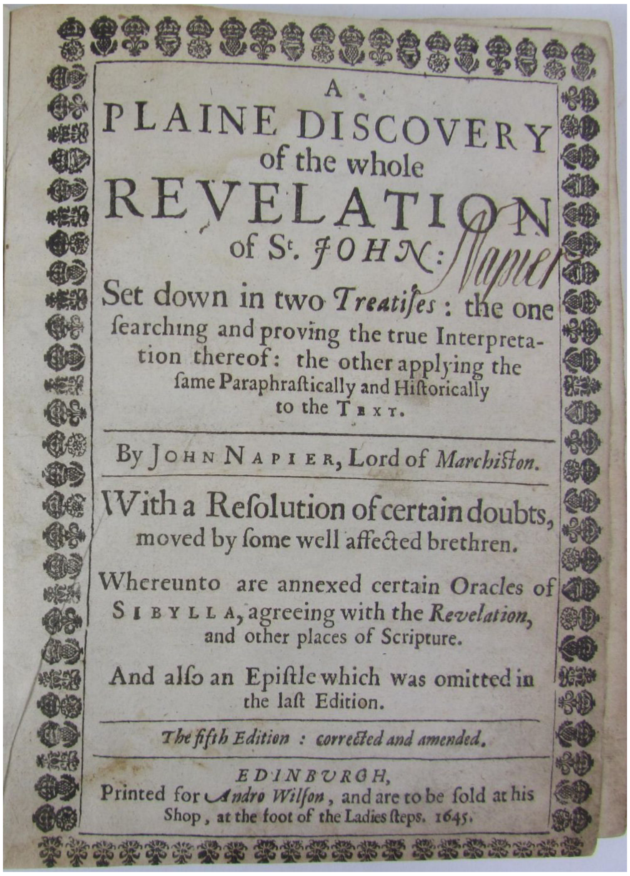
Figura 1. Retrato de Napier; John Napier de Merchiston.

conocimientos matemáticos. En 1571 regresó a Merchiston y, un año después, contrajo matrimonio con Elizabeth Stirling (1554-1579). En 1574 se mudaron al Castillo de Gardlant. John y Elizabeth tuvieron dos hijos: Archibald y Jane. En 1579, poco después del nacimiento de su hija Jane, la joven Elizabeth murió cuando tenía tan sólo 25 años. Tras la muerte de su esposa, Napier se casó con Agnes Chisholm (1551-1572) con quien tuvo diez hijos más. Tras la muerte de su padre en 1608, John heredó el Castillo de Merchiston donde pasaría el resto de su vida con su familia.

Como curiosidad, mencionamos cierta controversia con su apellido, puesto que Napier aparece de diferentes formas en tota la literatura referente a la biografía del matemático: *Napier*, *Neper*, *Napeir*, *Nepair*, *Napare*, *Naperus* y *Neperus*.

NAPIER, EL TEÓLOGO PROTESTANTE

En su época existía una auténtica guerra civil entre protestantes y católicos, y Napier era un protestante convencido y un ferviente antipapista. Se hizo famoso por



A
PLAINE DISCOVERY
of the whole
REVELATION
of S^t. JOHN: Napier

Set down in two Treatises: the one searching and proving the true Interpretation thereof: the other applying the same Paraphrastically and Historically to the TEXT.

By JOHN NAPIER, Lord of Marchiston.

With a Resolution of certain doubts, moved by some well affected brethren.

Whereunto are annexed certain Oracles of SIBYLLA, agreeing with the Revelation, and other places of Scripture.

And also an Epistle which was omitted in the last Edition.

The fifth Edition: corrected and amended.

EDINBURGH,
Printed for Andro Wilson, and are to be sold at his Shop, at the foot of the Ladies steps. 1645.

Figura 2. Portada de la publicación de Napier "A plaine Discovery of the whole revelation of Saint John.

su publicación: "***A plaine Discovery of the whole revelation of Saint John***" (1593); libro, con más de 30 ediciones, que fue traducido al francés, al alemán y al holandés. En el prefacio del mismo escribió: "*Para prevenir el aparente peligro del papismo que está surgiendo en la isla*". Además, en un comentario sobre el Apocalipsis de San Juan, Napier defendía la idea de que el Papa de Roma era el Anticristo e incitaba a Escocia a expulsar a todos los papistas y ateos. También vaticinaba el fin del mundo.

Por otro lado, tenía la firme creencia de que el Rey de España, Felipe II, invadiría Escocia. Por ello, también se dedicó a diseñar máquinas de guerra para defender Escocia de España. Entre ellas podemos mencionar un tanque, un submarino y una ametralladora

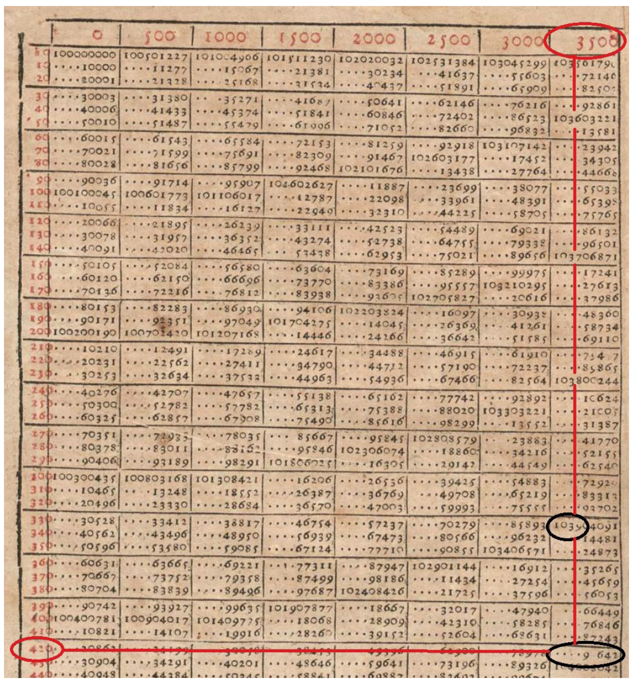
JOHN NAPIER Y LA INVENCIÓN DE LOS LOGARITMOS

Seeing there is nothing, that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers which besides the tedious expense of time, are for the most part subject to many slippery errors. I began, therefore, to consider in my mind, by what certain and ready art I might remove these hindrances.

John Napier

A lo largo del siglo XVI y a principios del siglo XVII, comenzaron a aparecer serias dificultades en los cálculos matemáticos que eran necesarios para resolver ciertos problemas físicos y astronómicos. Confeccionar tablas trigonométricas, determinar las raíces de un polinomio de grado n o determinar el valor de π con una precisión cada vez mayor ocupaba la mente y el tiempo de los algebristas de la época. Los cálculos eran manuales y requería ingentes cantidades de tiempo y esfuerzo y estaban sujetos a los riesgos inherentes al error humano. Se dice que el considerado el mejor algebrista de la época, François Viète (1540-1603) jamás retrocedía ante un cálculo matemático, aunque que pudiera acarrearle un día y medio de esfuerzo continuado.

Un ejemplo de la dificultad son los cálculos astronómicos realizados por el matemático y astrónomo alemán *Johannes Kepler* (1571-1630); un colaborador del astrónomo imperial *Tycho Brahe* (1546-1601). Las denominadas *Leyes de Kepler* que explican el movimiento de los planetas del sistema solar, fueron fruto de más de 22 años de minucioso análisis de datos observacionales y



	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500

Figura 3. Tabla de números razón o artificiales.

de arduo trabajo matemático de Kepler. Su perseverancia y su ideal pitagórico le hacían creer firmemente en un universo armónico regido por patrones matemáticos, y le permitieron que su trabajo culminara finalmente en sus tres leyes.

Algunos matemáticos de la época, como Jost Bürgi y John Napier, conscientes de la problemática descrita se dedicaron a tratar de mejorar los métodos de cálculo matemático, a "inventar" otro modo de hacer esos cálculos.

Jost Bürgi (1552-1632) era relojero y estaba especializado en la reparación de instrumentos astronómicos. Además, trabajaba como ayudante de Johannes Kepler. Para simplificar los cálculos astronómicos que realizaban, desde 1603 a 1611, se dedicó a confeccionar lo que podríamos considerar una tabla de antilogaritmos. Bürgi construyó su tabla a partir de una tabla del tipo de Stevin. Estas tablas comparaban sucesiones de potencias, con una base próxima a la unidad, con la sucesión formada por sus exponentes.

Para construir su propia tabla de Stevin, Bürgi utilizó la siguiente progresión geométrica:

$$g_k = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k ; k = 0,1,2,\ldots$$

que hizo corresponder con los términos de la progresión aritmética

$$a_k = 10k; k = 0,1,2,\ldots$$

obteniendo la siguiente sucesión de valores:

10^8	$10^8(1+10^{-4})$	$10^8(1+10^{-4})^2$	$10^8(1+10^{-4})^3$	$10^8(1+10^{-4})^4$	...
0	10	20	30	40	...

Los números de la primera fila se denominaron "números negros" y los de la segunda, "números rojos", debido al color con el que fueron impresos en la tabla de Burgi.

En 1620, a petición del propio Kepler, Burgi publicó su tabla en su obra: "*Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*" (Tablas de la progresión aritmética y geométrica).

Por su parte, John Napier dedicó más de 20 años de su vida al desarrollo de sus ideas sobre los logaritmos, trabajo que culminaría con la publicación de su obra "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos) en 1614, tres años antes de su muerte. En ella aparecía publicada su primera tabla de logaritmos y una breve descripción de cómo emplearlos.

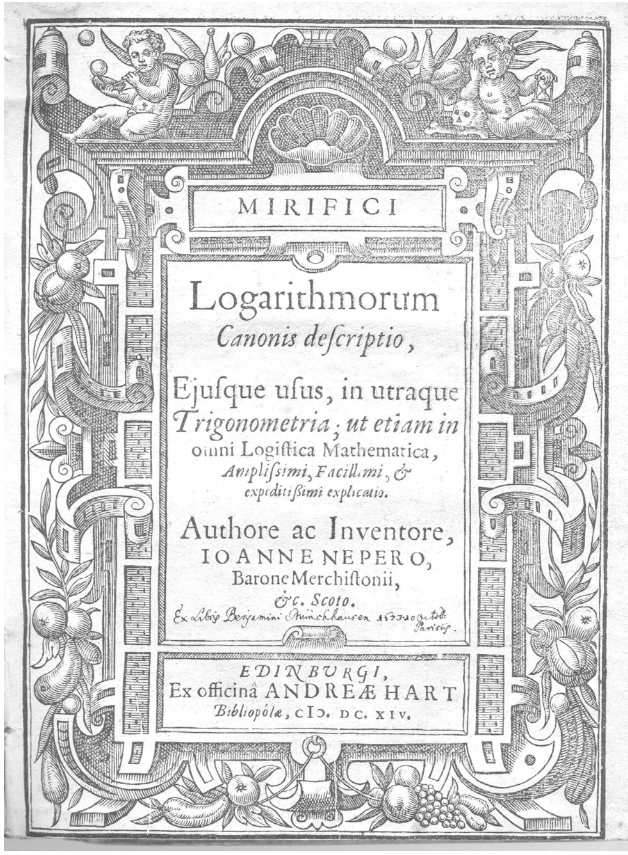


Figura 4. Publicación conteniendo la regla de logaritmo de Napier.

Se sabe que Napier conoció, gracias a John Craig, el método de Prostafairesis, utilizado a finales del siglo XVI y a principios del siglo XVII, por los astrónomos de la época para la denominada "navegación astronómica". Este método permitía aproximar la multiplicación y la división de números utilizando identidades trigonométricas.

Por otro lado, sus ideas para inventar los logaritmos surgieron a través del estudio de los trabajos previos de Stifel, "Arithmetica Integra" (1564) y de las obras de Arquímedes. Se dedicó a estudiar las potencias, las progresiones aritméticas y geométricas y a buscar las relaciones numéricas entre ambas.

Identificó la relación existente entre el producto y cociente de dos potencias y la adición y sustracción de sus respectivos exponentes. Sin embargo, la notación que utilizamos en la actualidad, debida al filósofo y matemático René Descartes, fue introducida poco después de la muerte de Napier.

La idea de Napier fue la siguiente: si quería obtener una progresión geométrica cuyos términos fueran muy cercanos uno a otros debía tomar como razón un número que fuera prácticamente uno.

Napier tomó para ello el número

$$r = 1 - \frac{1}{10^7} = 0.9999999$$

y consideró la progresión geométrica dada por:

$$a_L = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Los términos de esta sucesión están formados por una progresión geométrica decreciente de potencias enteras crecientes. Para evitar los números decimales, decidió añadir el factor 10^7, quedando definido el número N como:

$$N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

siendo L el "Logaritmo de Napier del número *N*".

A partir de esta definición queda claro que el *Logaritmo de Napier* de 10^7 es 0 y que el Logaritmo de Napier de

$$10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 9999999$$

es 1.

Dividiendo números y logaritmos por 10^7, podemos comprobar que obtenemos de forma aproximada un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$.

En efecto, tenemos que:

$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \cong 0.3678794228$ mientras que

$\frac{1}{e} \cong 0.3678794412$, prácticamente el mismo valor.

La tabla que confeccionó Napier estaba formada por los logaritmos de las funciones trigonométricas, dado que su invención pretendía simplificar los complicados cálculos astronómicos de la época.

En una de las columnas aparecían los logaritmos de los senos de los ángulos del primer cuadrante, ordenados de forma creciente, desde 1' en adelante. Esto permitía calcular fácilmente los logaritmos de los cosenos (senos de los ángulos complementarios). En otra de las columnas aparecían los logaritmos de las tangentes.

En un primer momento Napier denominó a su creación: "*Números artificiales*" o "*Números de Relación*". Sin embargo, más adelante decidió llamarlos "*Logaritmos*" (del griego: "logos"=razón y "arithmo"=número), es decir, "Números de Razón".

EXPLICACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA MECÁNICA DE LAS IDEAS DE NAPIER

Para poder explicar desde un punto de vista físico la correspondencia existente entre dos sucesiones de números, Napier procedió como sigue:

- Supongamos dos puntos A y B que se mueven en línea recta, siendo el movimiento de A rectilíneo uniforme y el de B un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.
- Consideremos el segmento AB y una semirrecta CDE.

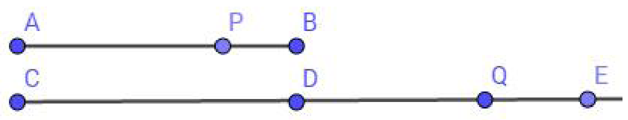


Figura 5. Imagen sobre la concepción mecánica de los logaritmos.

Supongamos que en el segmento *AB* tenemos un punto P que parte de A con una velocidad v y que se mueve a lo largo del mismo de modo que su velocidad decrece proporcionalmente a su distancia del punto B. Por otro lado, consideremos un punto Q, que parte en el mismo instante del punto C de la semirrecta, con una velocidad constante igual a v. Napier denominó logaritmo de la distancia de P a B a la distancia variable de C a Q.

DIFERENCIAS ENTRE LOS LOGARITMOS DE NAPIER Y LOS ACTUALES

Una de las principales diferencias con los logaritmos que usamos en la actualidad es que en el caso de los logaritmos de Napier $log 1 \neq 0$, por convenio tomó $log 10^8 = 1$.

Además, los logaritmos de Napier no verifican las conocidas propiedades de nuestros logaritmos, a saber:

$$log_k(a \cdot b) = log_k(a) + log_k(b)$$

$$log_k\left(\frac{a}{b}\right) = log_k(a) - log_k(b)$$

En efecto, utilizando los logaritmos de Napier dados dos números $L_1 = log N_1$ y $L_2 = log N2$, tenemos que:

$$N_1 = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_1}$$

$$N_2 = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_2}$$

Por tanto:

$$N_1 \cdot N_2 = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_1} \cdot 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_2}$$

Es decir:

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = 10^7 \left(1 - 10^{-7}\right)^{L_1 + L_2}$$

De donde se concluye que:

$$log\left(N_1\right) + log\left(N_2\right) = log\left(\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7}\right)$$

De modo similar se puede comprobar que no verifican el resto de propiedades de los logaritmos que usamos en la actualidad.

LA INFLUENCIA DE HENRY BRIGGS EN EL TRABAJO DE NAPIER

Henry Briggs (1561-1630) nació en Londres y trabajó como profesor de matemáticas en Oxford desde 1619. Briggs fue quien animó a Napier a definir los logaritmos decimales que usamos en la actualidad. Para ello trabajaron de forma conjunta partiendo de la comparación de las siguientes progresiones, para centrar los logaritmos en el sistema decimal:

...	0,01	0,1	1	10	100	...
...	-2	-1	0	1	2	...

Briggs se dedicó a confeccionar la tabla de logaritmos decimales. La primera Tabla de Briggs fue publicada en 1617 y contenía los logaritmos decimales con los números desde el 1 al 10^8 con una precisión de 8 cifras decimales. Más adelante, en 1624, publicó "*Aritmética Logarítmica*", formada por tablas de logaritmos de 14 cifras desde el 1 al 20000 y desde el 90000 al 100000. En 1633 publicó otra obra dedicada a los logaritmos: "*Logarithmorum Chilias Prima*" (Introducción a los Logaritmos).

La idea principal de Briggs era la siguiente: al extraer de forma sucesiva la raíz cuadrada a un número, si el número de extracciones es grande el número original tenderá a 1.

Vamos a ilustrar esta aserción con un ejemplo:

Dado el número 10, supongamos la siguiente igualdad, donde α es un número pequeño.

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} = 1 + \alpha$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\sqrt[2^n]{10} = 1 + 2\alpha + \alpha^2$$

Si n es grande, podemos despreciar el valor de α^2, de modo que tenemos que:

$$\alpha = \frac{\sqrt[2^n]{10} - 1}{2}$$

De modo que:

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} - 1 \approx \frac{\sqrt[2^n]{10} - 1}{2}$$

Multiplicando ambos miembros por 2^{n+1} se obtiene:

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10} - 1\right) \approx 2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right)$$

Poniendo $x = \sqrt[2^n]{10}$ tenemos que $log_{10}x = \frac{1}{2^n}$ y entonces:

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10} - 1\right) = \frac{x - 1}{log_{10}x} \qquad (1)$$

Podemos obtener el mismo valor tomando, en lugar de 10, $x \approx \sqrt[2^m]{10}$.

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right) \approx \frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{10} - 1\right)}{log_{10}a}$$

De donde obtenemos finalmente:

$$log_{10}a \approx \frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{10} - 1\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right)}$$

Es decir, con esta metodología, calcular logaritmos decimales equivale a extraer las raíces cuadradas sucesivas del número cuyo logaritmo pretendemos hallar.

LA RABDOLOGÍA DE JOHN NAPIER

Otra de las aportaciones de John Napier a la simplificación de los cálculos matemáticos de la época fue la publicación de otra de sus grandes obras: "Rabdología" (1617).

En este libro Napier presentaba un nuevo método de cálculo rápido, dirigido sobre todo a simplificar el cálculo de multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas y cúbicas.

El nuevo método utilizaba unos prismas de base cuadrada con los números del 0 al 9 y sus respectivos múltiplos. Estos prismas, son conocidos como las "varillas de Napier" o los "huesos de Napier". Estas varillas eran un artilugio que permitía transformar las multiplicaciones en simples sumas y simplificar el resto de cálculos antes mencionados.

Las varillas de Napier estaban formadas por 10 prismas rectos de base cuadrada de 1 cm de lado y de 10 cm de alto. Cada uno de ellos llevaba grabada una cifra del 0 al 9 y sus respectivos múltiplos, de modo que los múltiplos inscritos en caras opuestas siempre sumaban 9.

En su "Rabdología", Napier explica cómo utilizar las varillas y cómo construirlas. Además, se dedicó a comercializarlas entre astrónomos, matemáticos y economistas, como medio mecánico para agilizar sus engorrosos cálculos.

La Rabdología de Napier constaba de 4 partes diferenciadas:

- En la primera parte, Napier describe el método de las varillas para realizar cálculos como multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas y cúbicas. También explicaba como emplear las varillas para realizar reglas de tres (directas e inversas).
- En la segunda parte de la obra mostraba ejemplos de problemas que se podían resolver empleando el método de las varillas.
- En la tercera parte de "*Rabdología*", Napier presentaba otra construcción, un "*prontuario*". En este caso se trataban de varias láminas alargadas colocadas en una caja y que, a diferencia de las varillas, sólo permitían realizar multiplicaciones de números muy largos.
- Finalmente, en la cuarta parte de su obra desarrollaba lo que denominó "Aritmética Local". Realmente lo que presentaba en esa parte era la aritmética binaria. En efecto, Napier mostraba cómo realizar operaciones en base dos empleando un tablero de ajedrez. Explicaba cómo cambiar de una base a la otra (de binaria a decimal y viceversa) y cómo utilizar el tablero para calcular multiplicaciones y divisiones binarias.

Sus varillas no sólo se utilizaron en Europa, sino que también tuvieron un considerable éxito en China y Japón. Giacomo Rho, publicaría el primer libro en chino sobre el uso de las Varillas de Napier en 1631, poco después de que Napier publicara su Rabdología. No sólo eso, cientos de años después, en el siglo XIX se seguirían publicando libros explicando el funcionamiento de las Varillas de Napier.

Sin embargo, con el tiempo se fueron empleando cada vez más sus logaritmos y el uso de las Varillas de Napier fue menguando. En palabras de J.A. Cervera: "*No deja de ser interesante, e incluso algo irónico, que lo que truncó el éxito de la Rabdología de Napier fue la invención de los logaritmos, del mismo autor*".

A MODO DE CONCLUSIÓN

Queda claro que la invención de los logaritmos supuso un auténtico hito en el modo de calcular de la época, que benefició enormemente al desarrollo de la astronomía, simplificando de forma significativa la labor de quienes se dedicaban a esta rama de la ciencia. Sin embargo, creo que en la actualidad no somos conscientes de la importancia de su creación, tal vez porque hoy contamos con calculadoras científicas que nos permiten calcular sin pestañear logaritmos y los valores de las funciones trigonométricas que en su día tabularon matemáticos como Napier, Briggs o Bürgi. A veces es preciso echar la vista atrás y ver todo lo que permitió llegar a las matemáticas que hoy conocemos.

REFERENCIAS

[1] Cervera JA (2004). John Napier (1550-1617) y su libro de Rabdología. *Historia de las Ciencias y las técnicas* **1**, 347–356.

[2] Briant K, Scott P (2005). John Napier. *Australian Mathematics Teachers* **61**.

[3] Ribnikov K (1987). Historia de las Matemáticas-Editorial Mir, Moscú (Rusia).

[4] Kline M (1994). El Pensamiento Matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial, Madrid (España).

[5] Karlson P (1966). La Magia de los números. Editorial Labor, Barcelona (España).

[6] Roldán I, Sampayo M (2015). Historia de los logaritmos y su difusión en España por Vicente Vázquez Queipo". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **18**, 354–355.

[7] Pierce RC (1977). A brief history of logarithms. *The two-year College Mathematics Journal* **8**, 22–26.

[8] Navarro-Loidi J, Llombart J (2008). The introduction of logarithms into Spain. *Historia mathematica* **35**, 83–101.

Adoración Medina Albós
Departamento de Matemáticas Fundamentales