

Enseñanza

ENSEÑANZA Y DIVULGACIÓN DE LAS CIENCIAS

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA SUPERFICIE SEMIESFÉRICA UNIFORMEMENTE CARGADA

RESUMEN

En este artículo se presenta un estudio del campo eléctrico que crea una superficie semiesférica y homogéneamente cargada, a lo largo de su eje de simetría.

La motivación para realizar este trabajo surgió al advertir que, en algunos libros de electricidad y magnetismo, se resolvía inadecuadamente el problema en el centro de la corteza semiesférica de carga. Algunos de estos textos, de especial relevancia en la enseñanza de Física en castellano como, “*Problemas de Física General*” de S. Burbano de Ercilla [1].

En este trabajo presentamos la solución correcta al problema, no solo de manera restringida para el centro de la superficie semiesférica, sino que además, hemos generalizado el resultado para cualquier punto que pertenece a su eje de simetría. Finalmente, se ha desarrollado un programa para comprobar la solución con métodos numéricos.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más recurrentes en electrostática es el estudio, a través de la ley de Coulomb, del campo eléctrico que genera una determinada distribución de carga. A medida que el cuerpo pierde simetría, y dependiendo del punto donde se desee estudiar el campo, el problema se complica, pudiendo llegar a ser analíticamente irresoluble.

En este artículo, vamos a desarrollar el estudio del campo eléctrico que se produce en el eje de simetría de una superficie semiesférica, de densidad uniforme de carga. La solución se obtendrá analíticamente utilizando la ley de Coulomb. Este problema, no es la primera

vez que se propone en un texto de fundamentos de electromagnetismo.

Si bien es cierto que algunos libros internacionales, como “*Electromagnetismo*” de John D. Kraus [2] ó “*Física (Vol.2)*” de Susan M. Lea [3], enuncian el problema, en ninguno de ellos se resuelve ni se cita solución. En tres textos escritos en español hemos encontrado planteado el problema, pero en dichos textos, se proporciona la solución únicamente en el centro de la corteza semiesférica. El único que arroja la solución correcta es Victoriano López [4] a través de un análisis en coordenadas esféricas, y que tan solo es aplicable para este punto.

Presentaremos los resultados tratando de seguir un orden lógico y creciente de dificultad. En primer lugar, calcularemos el campo eléctrico en el centro de la semiesfera. Discutiremos, los errores que han llevado a algunos autores a un resultado inadecuado, así como la solución de los mismos. Después generalizaremos el resultado para cualquier punto sobre el eje de simetría del cuerpo. Finalmente, presentaremos nuestra solución numérica y su comparación con el resultado analítico.

Permítasenos aclarar que, en este artículo, cuando hablamos del centro de la corteza semiesférica nos referimos a su centro de curvatura, es decir, lugar equidistante de todos los puntos de la superficie. El centro pertenece, por tanto, al plano ecuatorial. Vamos a tomar este punto como el origen del sistema de referencia para hacer todos los cálculos. El eje de simetría es por tanto perpendicular al plano ecuatorial y pasa por el origen. En nuestros cálculos corresponde al eje X (ver figura 1).

DESARROLLO DEL PROBLEMA

Campo eléctrico en el centro de la corteza semiesférica

El problema del campo eléctrico en el centro de una corteza semiesférica de carga se puede abordar de dos formas distintas. Bien, a través de una sucesión de anillos crecientes que en su conjunto conforman la corteza semiesférica (Burbano de Ercilla [1]). O también, a través de coordenadas esféricas aprovechando la simetría, de la misma manera que Victoriano López [4].

En ambos casos, si se procede convenientemente el resultado debe ser el mismo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{i}$$

Donde σ es la densidad superficial de carga y ϵ_0 la permitividad eléctrica en el vacío. Se ha tomado el eje X paralelo al eje de simetría del sistema. Este valor coincide con la mitad del campo eléctrico creado por un plano infinito con la misma densidad de carga (figura 3).

Si queremos calcular el campo eléctrico a través de una sucesión de anillos de carga, lo primero que debemos hacer es delimitar la orientación del grosor de los mismos. Como la corteza semiesférica no es una superficie plana, lo más adecuado es pensar que cada anillo posee cierta curvatura, de manera que, entre todos se pueda configurar una superficie semiesférica continua. Por ello, vamos a utilizar un grosor diferencial de arco (ds), para cada anillo. Otros autores han tomado elementos de grosor diferencial distintos (como dx , Burbano de Ercilla et al.), alcanzando un resultado incorrecto.

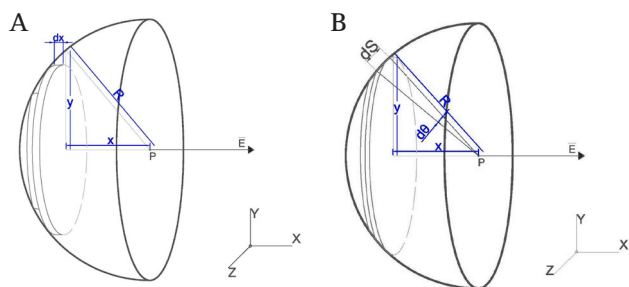


Figura 1. (A) Superficie semiesférica formada a través de una sucesión de anillos de grosor dx . La sucesión de anillos no coincide exactamente con el contorno de la semiesfera. En las regiones próximas al polo se subestima el grosor de cada anillo y por tanto, la cantidad de carga que contiene. El campo eléctrico que se obtiene al integrar con respecto al elemento dx , es inferior al real. (B) Superficie semiesférica compuesta por una sucesión de anillos de grosor ds . El contorno de la superficie coincide exactamente con la sucesión de anillos.

Nótese que, al considerar dx como el grosor de cada elemento, estamos subestimando la anchura de cada anillo infinitesimal y con ello, la cantidad de carga que contiene cada uno de ellos; efecto que se magnifica cuanto más nos acercamos al polo de la corteza semiesférica. Este planteamiento, que siguen algunos autores, deriva en un valor para el campo eléctrico inferior al real: $\vec{E} = \frac{\sigma}{6\epsilon_0} \hat{i}$ (S. Burbano de Ercilla et al. [1]). El mismo resultado se alcanza si consideramos anillos de grosor vertical, dy .

Sin embargo, al utilizar el elemento diferencial de arco ds , como el grosor de cada anillo infinitesimal, po-

demostramos envolver completamente la superficie semiesférica con toda su carga. Integramos a través del ángulo θ :

$$d\vec{E} = \vec{E}_{anillo} = \frac{k \cdot Q_{anillo} \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i} = \frac{k \cdot \sigma \cdot 2\pi R^2 \cdot \text{sen}\theta d\theta}{R^3} \hat{i} \quad (1)$$

Donde hemos utilizado:

$$Q_{anillo} = dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi y \cdot ds = \sigma \cdot 2\pi R \text{sen}\theta \cdot R d\theta \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = R \cos\theta \\ y = R \text{sen}\theta \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (3)$$

Donde R es el radio de la corteza semiesférica y $d\theta$ es el ángulo subtendido por el elemento diferencial de arco, ds . Obviamente, no existe componente del campo perpendicular al eje X por la simetría acimutal (sobre el ángulo φ).

La carga de cada anillo es un elemento diferencial de carga de la superficie sobre la que vamos a integrar. La variable x es la distancia desde el centro del anillo al punto donde se quiere calcular el campo eléctrico (centro de la semiesfera). La variable y es el radio de cada anillo infinitesimal, que aumenta según nos acercamos al origen. Nótese que la dependencia de las variables x e y en el denominador desaparece porque la suma de sus cuadrados es una constante, el radio de la semiesfera.

Integrando:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 2\pi k \sigma \hat{i} \cdot \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta \cos\theta d\theta = \\ &= 2\pi k \sigma \hat{i} \cdot \left[\frac{\text{sen}^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi k \sigma \hat{i} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{i} \end{aligned} \quad (4)$$

Podemos alcanzar el mismo resultado utilizando coordenadas esféricas, y calculando el campo eléctrico en el centro del sistema de referencia. Este tratamiento conlleva la resolución de una integral doble a lo largo de los ángulos θ y φ ; la coordenada radial ρ coincide con el radio de la semiesfera por lo que se mantiene constante.

$$\vec{E} = \iint \frac{k\sigma \cdot |J(\rho, \theta)| \cdot d\theta d\varphi}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}(\rho, \theta, \varphi) \quad (5)$$

Donde, $\vec{r}(\rho, \theta, \varphi)$ es el vector de posición que define cada punto de la corteza semiesférica y $J(\rho, \theta)$ es el determinante Jacobiano. Para una descripción detallada de la solución consultar 'Problemas resueltos de Electromagnetismo' de Victoriano López [4].

Campo eléctrico sobre el eje de simetría de la corteza semiesférica

En este apartado se resuelve el campo eléctrico que genera la corteza semiesférica a una distancia x_0 de su centro.

Al igual que en el caso anterior vamos a resolver el problema a través de anillos de carga con grosor ds (elemento diferencial de arco). La suma del campo eléctrico de todos los anillos coincide con el campo total que genera el cuerpo.

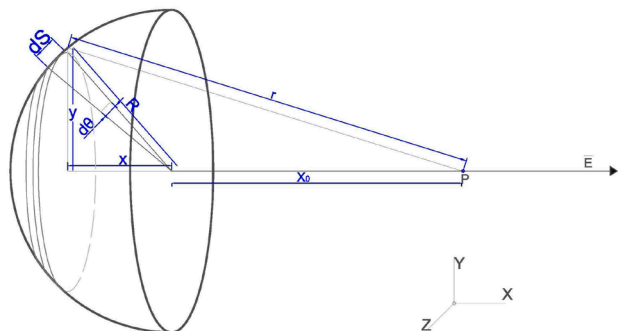


Figura 2. Campo eléctrico de una superficie semiesférica de carga a una distancia x_0 de su centro. Advertir que ahora la constante $x_0 \in (-\infty, \infty)$, y la variable $x \in (-1, 0)$.

La distancia de cada anillo al punto P es la variable $x' = x + x_0$. Donde x_0 es la distancia desde el origen, al punto donde queremos calcular el campo. Recordar que hemos elegido el centro de la corteza como el origen del sistema de referencia, por lo que x_0 puede ser positivo ó negativo según se encuentre a la derecha ó izquierda del centro de la corteza semiesférica. Al igual que en el caso anterior resolvemos la integral a través del ángulo:

$$d\vec{E} = \vec{E}_{\text{anillo}} = \frac{k \cdot Q_{\text{anillo}} \cdot x'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = 2\pi Rk\sigma \cdot \frac{y \cdot (x_0 - x) d\theta}{[(x_0 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \hat{i} \quad (6)$$

Usando la ecuación (2) para la carga de cada anillo, y escribiendo las variables x e y en función del ángulo:

$$\begin{cases} x = -R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (7)$$

Observar que ahora la variable x es definida negativa porque está a la izquierda del origen. Sustituyendo términos:

$$d\vec{E} = 2\pi R^2 k\sigma \cdot \frac{\sin\theta \cdot (x_0 + R\cos\theta) \cdot d\theta}{[(x_0 + R\cos\theta)^2 + R^2 \sin^2\theta]^{3/2}} \cdot \hat{i} \quad (8)$$

De modo que:

$$\vec{E}(x_0, 0, 0) = \int_0^{\pi/2} d\vec{E} = 2\pi R^2 k\sigma \cdot \hat{i} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{R\sin\theta\cos\theta + x_0\sin\theta}{[R^2 + x_0^2 + 2x_0R\cos\theta]^{3/2}} d\theta \quad (9)$$

Resolvemos la integral. El primer sumando es una integral por partes y segundo una integral inmediata:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{R\sin\theta\cos\theta}{[R^2 + x_0^2 + 2x_0R\cos\theta]^{3/2}} d\theta =$$

$$= \frac{|R + x_0| - \sqrt{R^2 + x_0^2}}{x_0^2 R} - \frac{1}{x_0 |R + x_0|} \quad (9.a)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x_0\sin\theta}{[R^2 + x_0^2 + 2x_0R\cos\theta]^{3/2}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{R\sqrt{R^2 + x_0^2}} - \frac{1}{R|R + x_0|} \quad (9.b)$$

Sumando (9.a.) y (9.b.) e introduciendo las constantes, llegamos a:

$$\vec{E}(x_0, 0, 0) = 2\pi k\sigma \frac{R^2}{x_0^2} \cdot \frac{(R + x_0) \cdot \sqrt{R^2 + x_0^2} - R|R + x_0|}{\sqrt{R^2 + x_0^2} \cdot |R + x_0|} \cdot \hat{i} \quad (10)$$

La ecuación (10) describe el campo eléctrico de la superficie semiesférica para cualquier punto x_0 que pertenece al eje de simetría. Resolviendo el valor absoluto vemos que existen dos posibles casos según la posición de x_0 :

(a) Punto sobre el semieje positivo, ó interior a la semiesfera ($x_0 > -R$):

$$|R + x_0| = (R + x_0)$$

$$\vec{E}(x_0, 0, 0) = 2\pi k\sigma \frac{R^2}{x_0^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + x_0^2} - R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \cdot \hat{i} \quad (10.a)$$

Resultado que, curiosamente, tiene un aspecto parecido al campo eléctrico que genera un disco de radio R y la misma densidad de carga σ , a una distancia x_0 de su centro:

$$\vec{E}_{\text{disco}}(x_0, 0, 0) = 2\pi k\sigma \cdot \frac{\sqrt{R^2 + x_0^2} - x_0}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \cdot \hat{i} \quad (11)$$

Nótese que ambos campos coinciden para $R = x_0$ (ver figura 3).

Comprobamos que el campo eléctrico toma el valor conocido para el centro de la corteza semiesférica, cuando $x_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \vec{E}(x_0, 0, 0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} 2\pi k\sigma \cdot \frac{R^2}{x_0^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + x_0^2} - R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \cdot \hat{i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi k\sigma \hat{i} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{i} \quad (12.a)$$

Donde hemos aplicado la regla de L'Hopital para resolver la indeterminación.

Una segunda manera de comprobar este resultado es, calculando el campo eléctrico cuando el radio de la semiesfera tiende a infinito:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(x_0, 0, 0) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi K \sigma \cdot \frac{R^2}{x_0^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + x_0^2} - R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \cdot \hat{i} \rightarrow \pi K \sigma \hat{i} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{i} \quad (12.b)$$

En este caso, la distancia x_0 que separa el centro de la semiesfera del punto donde se calcula el campo eléctrico, es despreciable frente al radio de la corteza semiesférica de carga. Por ello, el campo eléctrico coincide con el que genera la corteza en su centro.

(b) Punto en el semieje negativo exterior a la corteza semiesférica ($x_0 < -R$):

$$|R + x_0| = -(R + x_0)$$

$$\vec{E}(x_0, 0, 0) = 2\pi k \sigma \frac{R^2}{x_0^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + x_0^2} + R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \cdot \hat{i} \quad (10.b)$$

Vemos que el campo cambia de sentido, como cabe esperar a la izquierda de la superficie semiesférica. Se observa también, que el campo es un poco más intenso para puntos de este lado de la corteza, lo que resulta razonable por ser la parte convexa de la superficie. En este lado, toda la carga genera campo de forma aditiva hacia la izquierda.

Calculando el valor de la función a un lado y a otro del punto $x_0 = -R$, se registra el salto finito conocido para la componente normal del campo eléctrico, a la superficie cargada con densidad σ :

$$\text{Si } x_0 > -R: \vec{E}^+(-R, 0, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (13.a)$$

$$\text{Si } x_0 < -R: \vec{E}^-(-R, 0, 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (13.b)$$

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}^+ - \vec{E}^- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} \quad (13.c)$$

En la figura 3, hemos querido comparar el campo eléctrico de la corteza semiesférica de carga con el de un disco y un plano infinito para $x_0 > 0$. Los tres cuerpos tienen la misma densidad de carga σ . Obviamente, el campo eléctrico del disco y de la corteza semiesférica, tienden al campo que generaría una carga puntual Q , cuando $x_0 \rightarrow \infty$, es decir: (advértase que, $Q = 2 \cdot Q_{\text{disco}}$)

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \vec{E}(x_0, 0, 0) \cong k \frac{Q}{x_0^2} \hat{i} \quad (14)$$

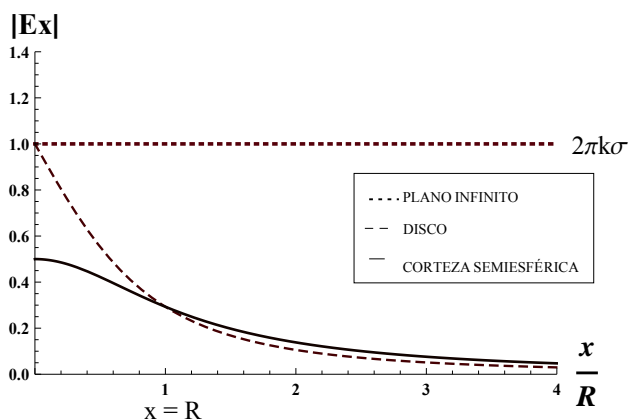


Figura 3. Gráfica comparativa del campo eléctrico sobre el eje X que generan, un plano infinito, un disco de radio R y una corteza semiesférica del mismo radio R. Todos los cuerpos tienen la misma densidad de carga σ . Sobre el eje Y, se representa el módulo del campo eléctrico normalizado al valor del campo de un plano infinito, esto es, $2\pi k \sigma = 1$. En el eje X, se representa la distancia normalizada al radio R.

DESARROLLO DEL PROBLEMA

Para comprobar el resultado, se ha construido una corteza semiesférica sobre la que se han situado 10000 cargas de 1 nC cada una de ellas, distribuidas aleatoriamente, a una distancia de 1 metro del origen. El algoritmo se ha programado en C++. Para conseguir la distribución uniforme de cargas sobre el cuerpo se ha programado su posición en coordenadas esféricas siguiendo la siguiente estructura:

$$R = 1 \quad (15.a)$$

$$\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow \theta(X) = \arccos(2X - 1) \quad (15.b)$$

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \varphi(Y) = \pi(Y + 0.5) \quad (15.c)$$

Donde X, Y son dos números reales aleatorios que pertenecen al intervalo $[0, 1]$. A cada carga puntual se le ha asignado una pareja de estas dos variables, por lo que ocupa una posición aleatoria dentro de la superficie semiesférica. Al ser el número de cargas posicionadas relativamente alto, podemos considerar que la distribución de las mismas es homogénea.

El programa suma la aportación al campo eléctrico que genera cada una de las cargas, siguiendo la ley de Coulomb, sobre el eje de simetría de la superficie (eje X). Se aplica, por tanto, el principio de superposición del campo eléctrico de cada una de las cargas sobre cada punto del eje de simetría. La siguiente gráfica, desarrollada en MATLAB, muestra el resultado obtenido y su comparación con la solución analítica:

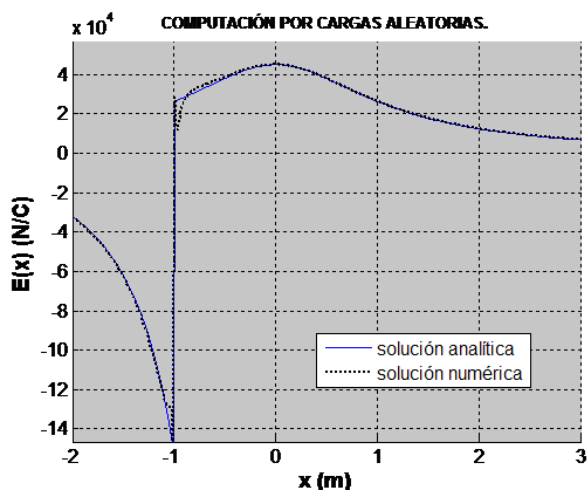


Figura 4. Computación numérica (línea punteada) para el campo eléctrico de una corteza semiesférica de carga y su comparación con el resultado analítico (línea continua azul). Ambos resultados son prácticamente coincidentes. Existen discrepancias cerca de la superficie interior a la esfera, donde prevalece la aportación discreta de las cargas. Se han utilizado $n = 10000$ cargas de 10^{-9} C cada una; el radio de la semiesfera es igual a 1 m. Se ha determinado el campo sobre 500 puntos del eje X en el intervalo $[-2,3]$.

Una segunda comprobación de nuestro resultado analítico se basa en la integración numérica de la ecuación (6), que representa, la aportación al campo eléctrico sobre el eje X que genera cada anillo de grosor ds que compone la superficie semiesférica. Hemos calculado esta integral con MATLAB para $n = 100$ anillos de grosor angular $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}$.

$$\bar{E}(x_0) \cong 2\pi R^2 k \sigma \sum_{i=1}^n \frac{\sin\theta_i \cdot (x_0 - R\cos\theta_i)}{[R^2 + x_0^2 + 2x_0R\cos\theta_i]^{\frac{3}{2}}} \Delta\theta \quad (16)$$

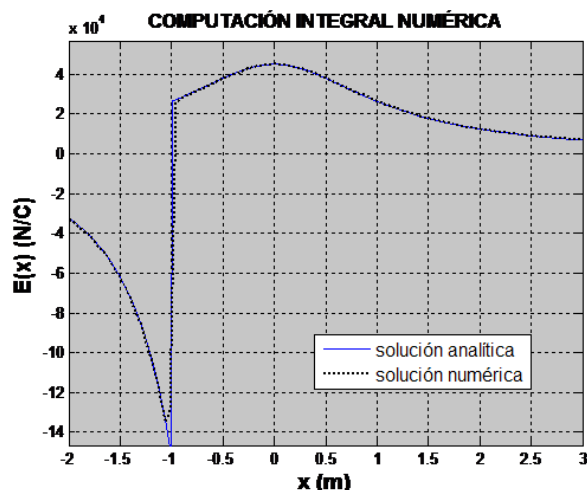


Figura 5. Solución numérica de la integral (9). Hemos dividido la superficie semiesférica en $n = 100$ anillos de grosor ds . Se ha representado la solución numérica para 101 puntos equidistantes del eje X en el intervalo $[-2, 3]$. La superficie semiesférica de radio $R = 1$ m esta cargada con $10 \mu\text{C}$.

Con esta aproximación de la ecuación (9), se ha calculado el campo eléctrico sobre 101 puntos equiespaciados del eje X en el intervalo $[-2,3]$. Hemos representado el resultado en la figura 5.

Podemos ver que existe un buen acuerdo entre los dos resultados computados y nuestra solución analítica. Observamos leves discrepancias en un entorno de $x=-R$. En esta zona del eje X, donde se produce la transición de un lado a otro de la superficie, los resultados numéricos, por razones obvias, no son tan precisos.

CONCLUSIONES

La excelente coherencia que muestran las figuras 4 y 5 entre las dos soluciones computadas y el resultado analítico, confirma que el resultado es válido no solo para el centro de la superficie semiesférica, sino también, para todo su eje de simetría.

Pensamos que, el problema del campo eléctrico sobre el eje de simetría de una semiesfera maciza y homogéneamente cargada de densidad ρ , se podría resolver, utilizando una idea similar, a través de discos de radio creciente y grosor diferencial de arco.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Manuel Jiménez Martín, alumno de tercer curso de la EPSI-EA Universidad Antonio de Nebrija, quien fue el primero en interesarse por este problema, mientras cursaba la asignatura de primer curso, *Física II: electricidad y magnetismo*, durante la primavera de 2012.

Queremos agradecer al Dr. Marc Meléndez Schofield, las buenas ideas aportadas al trabajo, así como el desarrollo y obtención de la aproximación numérica por cargas aleatorias.

También cabe citar a los alumnos de primer curso: Jesús Aguilar, José Pablo Morilla y David Gutiérrez, quienes han participado en la revisión de las ecuaciones.

Por último añadir que, sin el estimable apoyo a la docencia e investigación, de la Universidad Antonio de Nebrija y de la UNED este trabajo no habría sido posible.

REFERENCIAS

- [1] Burbano de Ercilla, S., Burbano, E. & García, C.: *Problemas de Física general*. Tebar, Barcelona, 2004.
- [2] Krauss, J.D.: *Electromagnetismo*. Mc Graw-Hill. Mexico, 1985.

- [3] Lea, S.M. & Burke, J.R.: *Física (Vol.2). La naturaleza de las cosas*. Thomson Paraninfo S.A., Madrid, 2001.
- [4] López Rodríguez, V.: *Problemas resueltos de electromagnetismo*. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1990.
- [5] Pintos, M. & Ruso, J.M.: *Introducción al electromagnetismo*. Ed. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2008.
- [6] Griffiths, D.J.: *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall International Edition. Nueva York, 1999.
- [7] Tipler, P.A. & Mosca, G.: *Física para la ciencia y tecnología (Vol.2)*. Reverte, Barcelona, 2010.
- [8] Alonso, M. & Finn, E.J.: *Física (Vol.2): campos y ondas*. Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1995.
- [9] Feynman, R.P., Leighton, R. & Sands, M.: *Física (Vol.2): electromagnetismo y materia*. Fondo Educativo Interamericano S.A., México, 1972.
- [10] Serway, R.A. & Jewett, J.W.: *Física (Vol.2)*. Ed. Thomson, México, 2005.
- [11] Sears, F.W., Zemansky, M., Young, H. & Freedman, R.: *Física Universitaria (Vol.2)*. Pearson Addison-Wesley, México, 2009.
- [12] Quesada, F.S., Soto, L.S., Ruiz, M.S. & Sánchez-Barriga, J.: *Fundamentos de electromagnetismo*. Síntesis, Madrid, 1999.
- [13] Purcell, E.M.: *Electricidad y magnetismo (Vol.2)*. Reverte, Barcelona, 1988.
- [14] Barger, V.D. & Olsson, M.G.: *Classical electricity and magnetism. A contemporary perspective*. Allyn and Bacon, Boston, 1987.
- [15] Jackson, J.D.: *Classical electrodynamics*. John Wiley & sons, Nueva York, 1998.

Ángel del Vigo García
 Dpto. de Física Fundamental
 Jaime Sánchez Renedo
 Escuela Politécnica, Universidad Antonio de Nebrija