100cias@uned
Facultad de Ciencias

N.º 2 (nueva época) | 2009
ISSN: 1989-7189

Enseñanza

TALLER Y LABORATORIO

TALLER DE MATEMÁTICAS

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS VÍA INTERNET: UN RECURSO INACABADO

Al lector le sorprenderá la numeración de los apartados de este trabajo, y la ubicación de cada apartado dentro del conjunto. Si hemos optado por presentar primero el apartado 5 es para mostrar el contenido tecnológico, a modo de escaparate, y que el lector decida si este trabajo tiene suficiente interés como para leer la filosofía educativa en el que se sustenta. Sin duda, una lectura adecuada debería seguir el orden natural de apartados, y así lo sugerimos.

5. EL ENTORNO DE EXPERIMENTACIÓN CON GRÁFICAS DE FUNCIONES

Todo a lo que se alude en los apartados 1-4 debe sugerir, más o menos, al lector la seriedad que debe aplicarse en los procesos de innovación docente al emplear laboratorios virtuales. No se puede llegar a pensar que una herramienta virtual es una herramienta educativa por sí misma. Negamos como innovación docente la simple novedad de utilizar, sin control educativo, un laboratorio virtual.

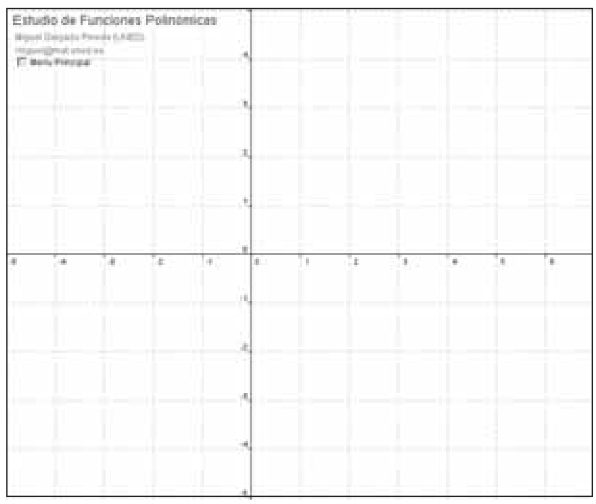
Si el laboratorio se emplea en procesos de enseñanza no presencial los controles deben ser más rigurosos, puesto que las dificultades didácticas en las que puede caer cualquier alumno suelen ser indetectables en la enseñanza a distancia, mientras que en la enseñanza presencial se detectan en un corto plazo de tiempo.

Procedemos a mostrar una ejemplificación que permita al lector entender las consideraciones previas que son formuladas en los restantes apartados de este trabajo. Nuestro objetivo es hacer visible algunos módulos independientes con el fin de presentar algunas situaciones de simulación aproximada. No describiremos el protocolo de uso, ni siquiera lo insinuaremos, para que cada profesor idee la utilización del laboratorio según su propio interés y el de sus alumnos. Si esto es así, el profesor hace suya la aplicación informática que se instancia en cada laboratorio. La colaboración de profesores con el autor no sólo no queda descartada si no que sería bienvenida.

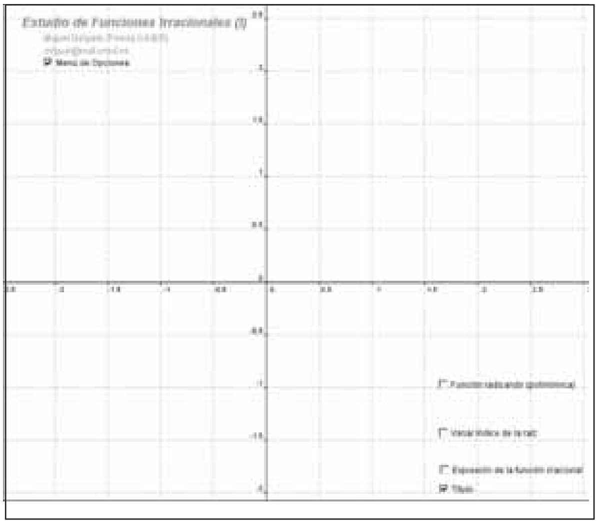
El objetivo en este caso es: El estudio de la gráfica de algunas funciones reales de variable real.

Ya se ha mencionado que los módulos son independientes, es decir, no es necesario desarrollar uno antes de desarrollar otro, aunque si es conveniente hacer una utilización secuencialmente de módulos desde un punto de vista educativo. Todos los módulos presentan características comunes con el fin facilitar la manipulación de los objetos presentes en la pantalla de cada módulo. Éstas son:

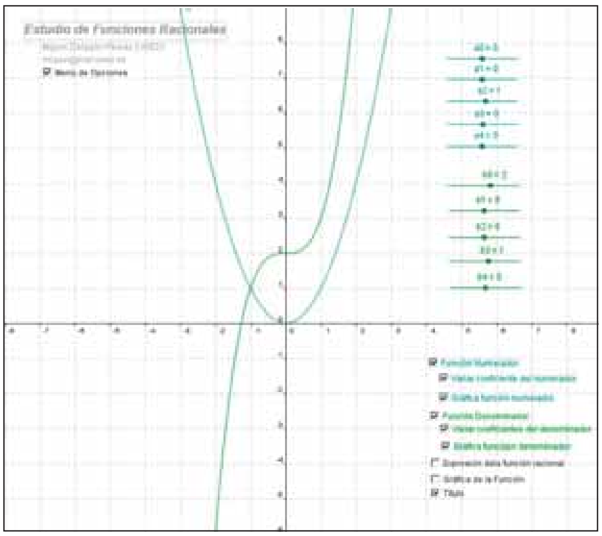
– Cada módulo se inicia presentado el título y un cuadradillo de selección, **Menú Principal**, que permite hacer visible el menú principal del módulo, mediante su marcado.



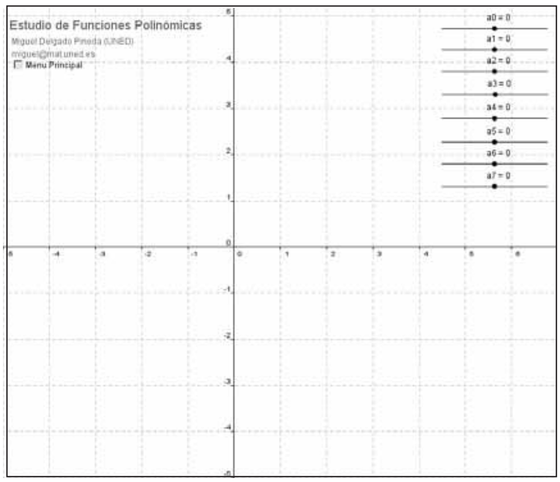
– Al desmarcar el cuadradillo del menú principal desaparecen las opciones de éste. Esto permite no entorpecer el seguimiento visual de cada experimentación.
– Cada una de las opciones del menú principal de cualquier módulo habilita, mediante el marcado del algún cuadradillo de selección, un submenú o alguna acción gráfica o textual.



- El título y los créditos se ocultan al desmarcar el cuadradillo **Título** del menú principal.
- La función objetivo del estudio de cada módulo es elegida por el usuario sin tener que teclear nada. Esta función está constituida por una o dos funciones auxiliares cuyas expresiones son modificables. Además, se puede hacer visible la gráfica de cada una de las funciones auxiliares.



- Las gráficas de las funciones auxiliares son visibles o no, aunque inicialmente están ocultas. Lo mismo ocurre con sus expresiones algebraicas. Esta operatividad permite diseñar prácticas que se basen en establecer relaciones oportunas de las funciones auxiliares con la función principal.
- Para cada función auxiliar se utiliza un color, tanto para su expresión como para su gráfica. Un color distinto para cada función auxiliar y distinto del de la función principal (color negro).
- El submenú correspondiente a una función auxiliar se escribe con letra del mismo color que la gráfica. Esta característica persigue que identifique todo lo concerniente a una función con un código de color.
- Las funciones auxiliares de aquellos módulos que las utilizan son funciones polinómicas. Inicialmente, todos los coeficientes de una función auxiliar son nulos.
- Un coeficiente puede, y debe, ser modificado al actuar sobre un deslizador cuyo desplazamiento está acotado en un intervalo [-*a*,*a*]. Este deslizador tiene un nivel de sensibilidad de dos decimales.
- Los deslizadores relativos a una función pueden quedar visibles aunque las opciones de los menús estén ocultas. Esto posibilita experimentar con funciones de gráficas similares y comprobar algunas variaciones gráficas significativas.

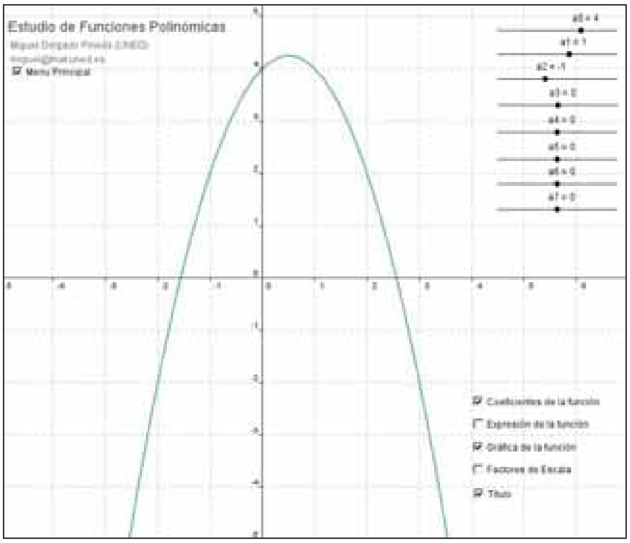


- El índice de la raíz empleada en los módulos de funciones irracionales varía según la posición de un deslizador. Inicialmente, el índice de raíz es dos y toma valores enteros en el intervalo [2,20]. Este deslizador puede estar visible aunque las opciones de los submenús estén ocultas.

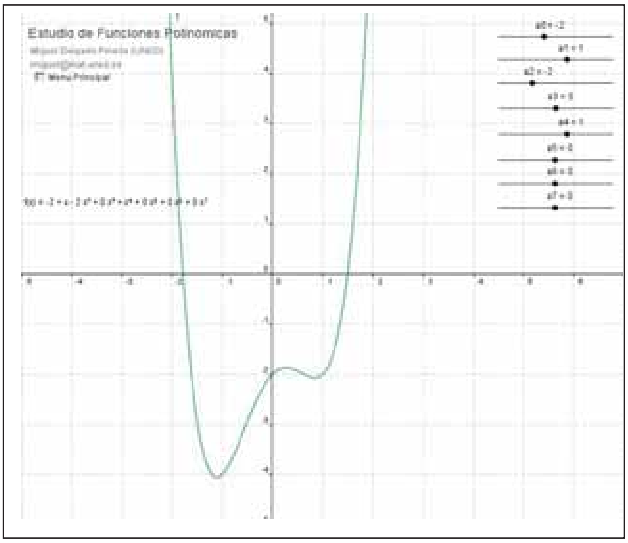
5.1. Módulo 1: Función polinómica

Este módulo está dedicado a presentar gráficas de funciones polinómicas de grado menor que ocho, es decir, aquella gráfica de función cuya expresión es un polinomio.

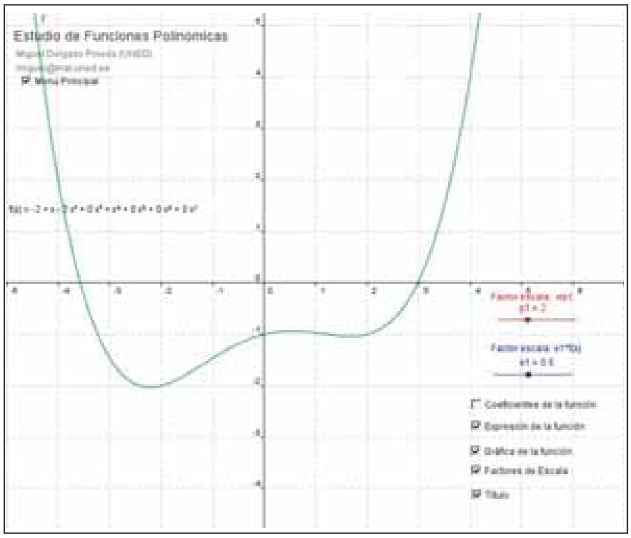
La opción **Coeficientes de la función** del menú inicial permite activar los deslizadores que se usan para variar los coeficientes del polinomio.



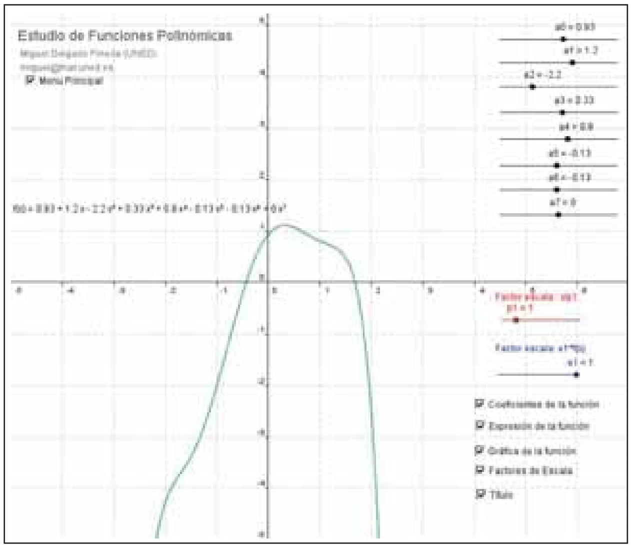
Sólo si la opción **Gráfica de la función** está marcada es posible ver la gráfica de la función. Esto mismo sucede con la expresión de la función, pues para que ésta sea visible se marca la opción **Expresión de la función.**



La opción del menú principal **Factores de escala** habilita un menú que posibilita modificar el factor de escala tanto para los valores en los que se calcula la función, donde x es sustituida por x/p_1, como la escala que se le aplica a la gráfica, donde se muestra $e_1 f(x)$ en lugar de $f(x)$. Esto se ejecuta sin hacer uso de cambios de escala en los ejes coordenados. Esta opción permite desarrollar una práctica en la cual la apariencia gráfica se mantiene aunque se modifiquen dichos factores.



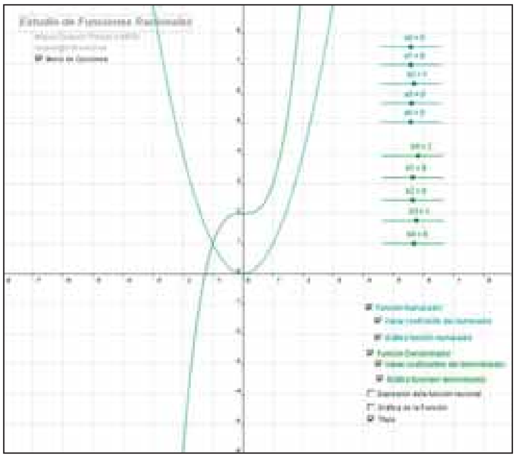
Todas las opciones y herramientas del módulo pueden ser visibles al mismo tiempo, si bien, la ventana puede quedar muy cargada información.



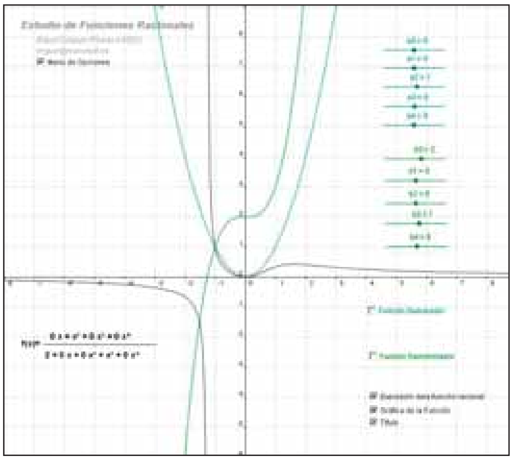
5.2. Módulo 2: Función racional

Este módulo es el correspondiente al estudio de las gráficas de funciones racionales, es decir, aquellas funciones cuyas expresiones son un cociente de dos funciones polinómicas de grado menor que cinco.

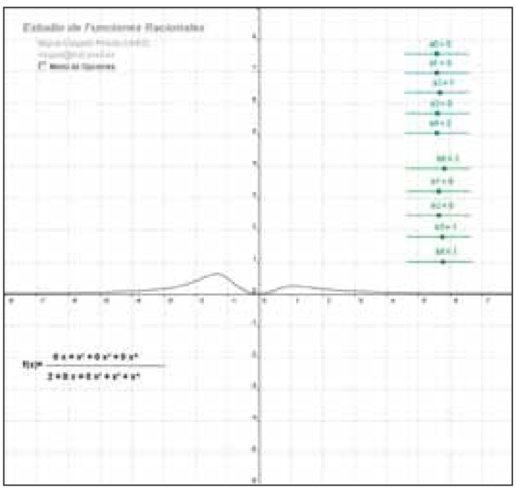
Las opciones **Función numerador** y **Función de nominador** del menú inicial permite activar los submenús correspondiente a las funciones auxiliares numerador y denominador. Con las opciones de estos submenús se habilitan los deslizadores para modificar los coeficientes de cada polinomio y hacer visible la correspondiente gráfica.



Las opciones **Gráfica de la función** y **Expresión de la función** actúan de la misma forma que las descritas en el módulo anterior, si bien, en este caso tratan la función racional definida.



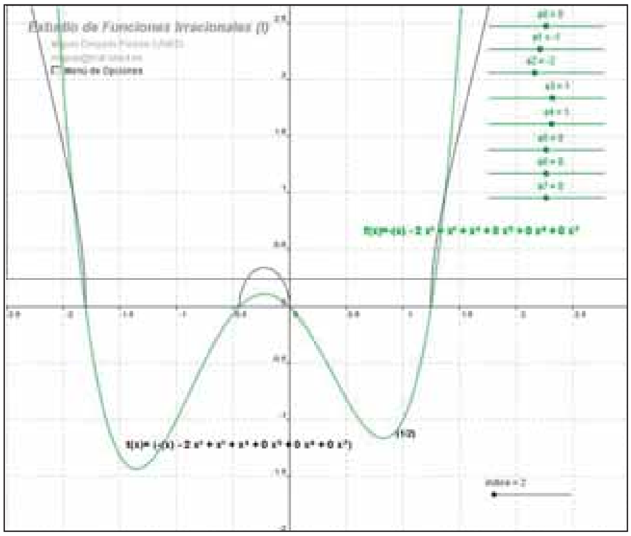
Es posible dejar visibles los deslizadores, sin nada más, para poder experimentar con familias de funciones racionales.



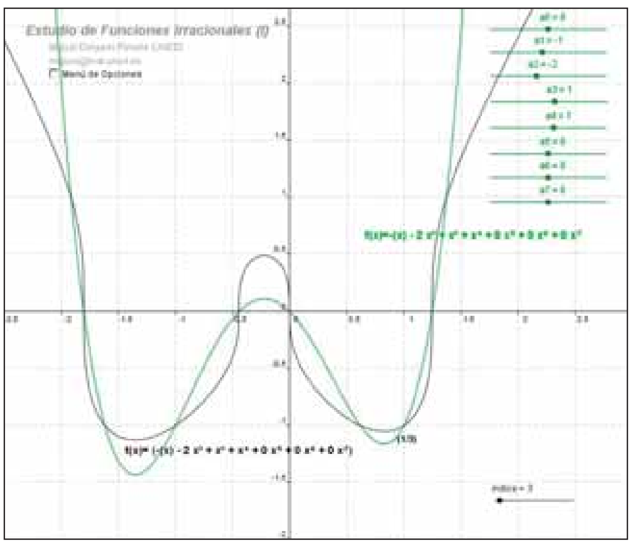
5.3. Módulo 3: Función raíz de un polinomio

En este módulo se tratan las gráficas de funciones definidas por la raíz de una función polinómica de grado menor que ocho. Inicialmente, el índice de la raíz es dos.

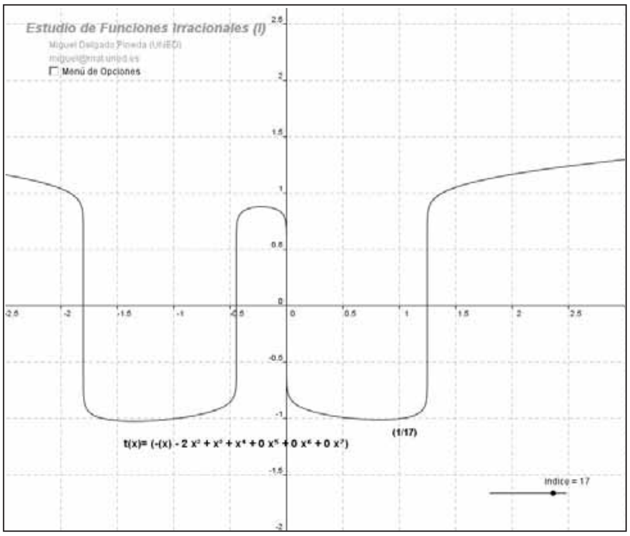
La opción **Función radicando** del menú inicial permite activar un submenú donde se habilitan los deslizadores de modificación de coeficientes. También permite activar la visualización de la gráfica de la función auxiliar.



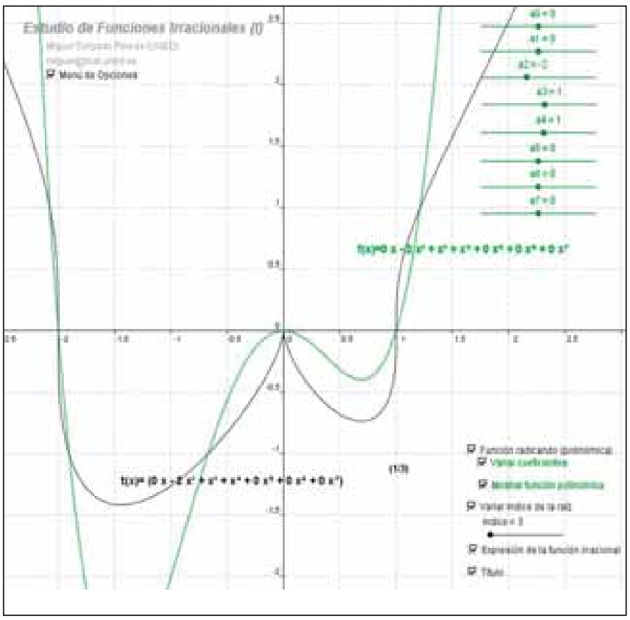
La opción **Variar índice de la raíz** permite hacer visible el deslizador que posibilita la variación de dicho índice.



La opción **Gráfica de la función** actúa de forma análoga que en módulos anteriores, si bien, en este caso se trata la función irracional con radicando polinómico.



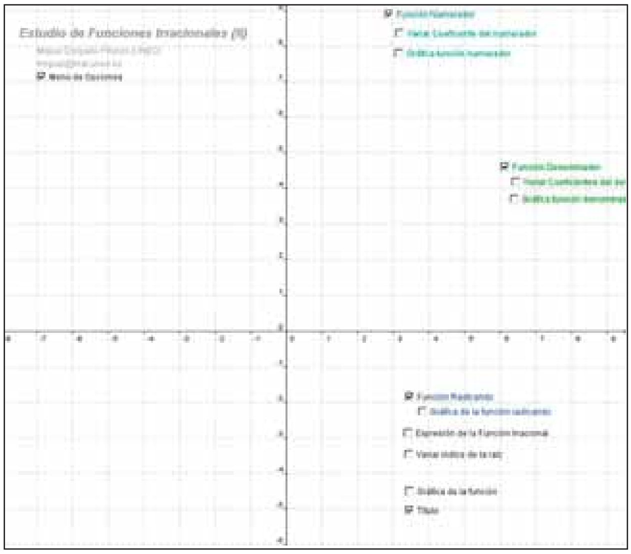
Si se dejan visibles los deslizadores únicamente, se facilita el diseño de experimentos con familias de funciones irracionales. También se pueden tener visibles todas las opciones y herramientas del módulo, aunque la ventana del laboratorio pueda quedar muy cargada de información.



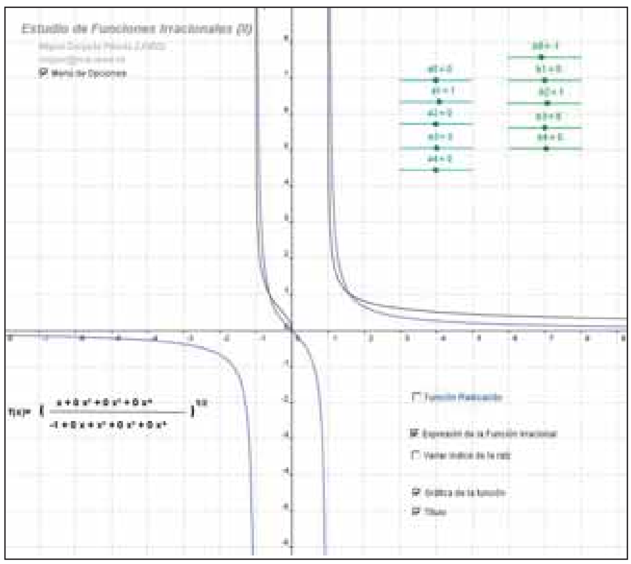
5.4. Módulo 4: Función raíz de una función racional

Este módulo se dedica al estudio de las gráficas de funciones definidas por la raíz de una función racional. En este caso las funciones numerador y denominador tienen las mismas restricciones que en el módulo 2, es decir, son dos funciones polinómicas de grado menor que cinco.

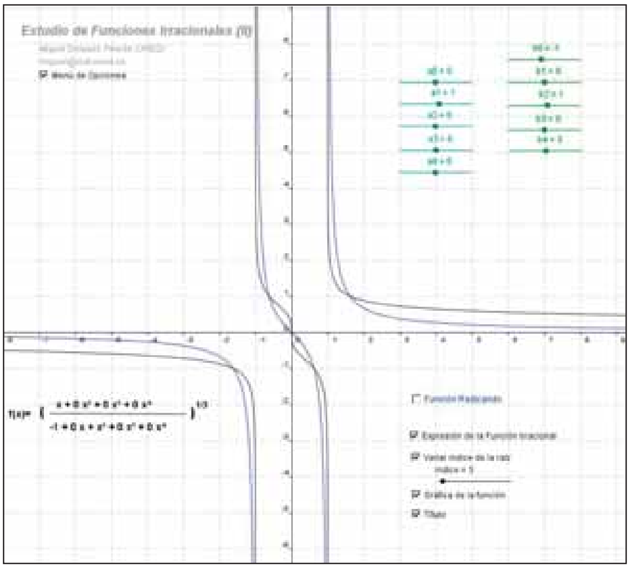
La opción **Función radicando** del menú inicial permite activar las opciones **Función numerador** y **Función denominador** para tratar con las funciones auxiliares numerador y denominador, y posibilitar el ver la gráfica del radicando.



Las restantes opciones operan de forma similar a las de igual nombre existentes en módulos anteriores.



La opción **Variar índice de la raíz** permite hacer visible el deslizador que posibilita la variación de dicho índice.

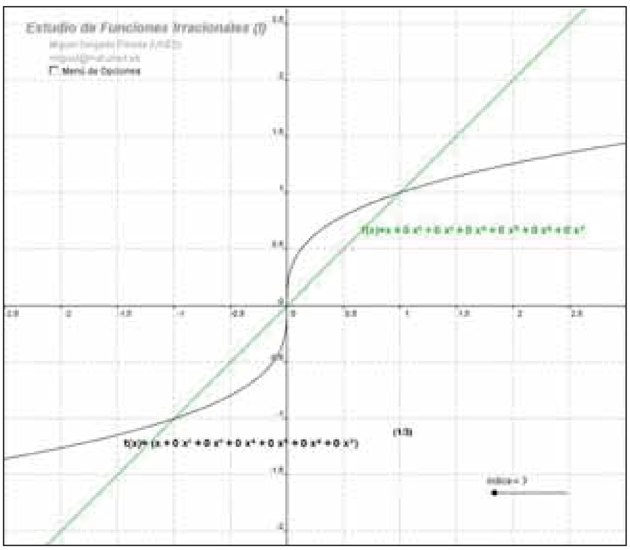


5.5. Un ejemplo de utilización

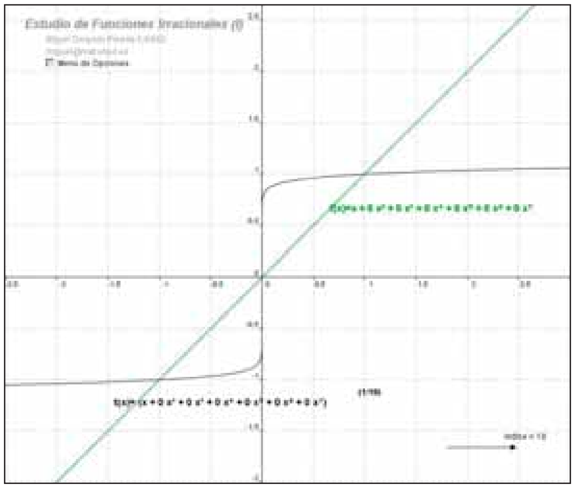
El reto que se quiere visualizar es: «Valore mediante una estrategia gráfica el posible valor de la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}.\text{ »}$$

En esencia, consiste en dibujar la función $f(x) = x$, como función radicando,



y analizar la gráfica de las funciones de expresión $f(x) = \sqrt[n]{x}$, para estimar el conjunto de valores $[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x},\ n \in N]$, y determinar inf $[\lim_{n\to\infty} \sqrt{x},\ n \in N]$.



1. INTRODUCCIÓN

Dar respuesta a tres preguntas básicas constituye el problema esencial de todo profesor: ¿Cómo se aprende?, ¿en dónde se aprende? y ¿cuándo se aprende? Poder formular una respuesta coherente obliga a determinar una estrategia que se basa en el desarrollo secuencial de actuaciones didácticas. Ahora bien, de cualquier respuesta didáctica emergen otras tres nuevas preguntas: ¿Cómo se enseña?, ¿en dónde se enseña? y ¿cuándo se enseña? Este conjunto de seis preguntas establece el marco inicial de referencia para cualquier trabajo educativo. Desarrollar un laboratorio, catalogado de virtual, accesible vía red para uso educativo no libera a su constructor de dar respuesta a las preguntas anteriores.

Disponer de un laboratorio remoto, con el cual cualquiera puede interactuar, establece un entorno más o menos experimental, que palía la dificultad de acceso a la experimentación directa. Ahora bien, un experimento en vivo, realizado en un laboratorio real requiere establecer ciertas normas de seguridad. Esto es así puesto que en el transcurso de la experimentación se pueden producir daños físicos que pueden ser irreparables. En los laboratorios virtuales no se producen tales daños físicos, pero no disponer de ciertas normas de utilización, mediante un protocolo claro, o no seguir ese protocolo de experimentación puede generar daños educativos que pueden ser irreparables en la práctica.

Aprender corresponde a una acción del individuo y la experimentación es una vía para aprender. Parece que favorecer la experimentación del individuo asegurando la ausencia de daños físicos es suficiente para modificar «adecuadamente», o favorecer, el aprendizaje. Ahora bien, si se disponen de recursos suficientes con los que experimentar y cada individuo tiene acceso a ellos, cabe preguntarse: ¿Por qué se enseña? La respuesta es inmediata y corresponde a un «instinto vital» de toda sociedad como ente vivo que es. Una sociedad, o un grupo social, no es una simple unión de individuos, pues ésta se basa en el conjunto de interrelaciones de sus componentes y las relaciones con otras sociedades.

Una sociedad que no desee desaparecer en poco tiempo debe perpetuar sus principios fundacionales, por un lado, y adaptarse adecuadamente a las sociedades vecinas con las que se relaciona, por otro. Éstas son obligaciones vitales, por ello se establece máxima prioridad a los procesos de enseñanza de los principios básicos a las nuevas generaciones que emergen en el seno social. Esto obliga que la enseñanza se adapte en todo instante al momento histórico del entorno social.

En general, los principios básicos suelen ser expresables en términos de conocimientos tanto generales como específicos y de la utilización práctica de estos conocimientos. Podemos destacar como ejemplo la necesidad existencial de la adquisición del conocimiento relativo al ecosistema que tienen los individuos de los grupos sociales indígenas del Amazonas para asegurar la supervivencia del grupo, así como el empleo de dicho conocimiento.

El conocimiento relativo a una sociedad compleja como las sociedades modernas no es acumulable en un individuo, por ello se requiere actuar sobre todos los nuevos miembros con el fin de minimizar pérdidas del conocimiento de una a otra generación. Si bien existen mecanismos tecnológicos suficientes para asegurar el almacenamiento de esos conocimientos, no es menos cierto que dichos conocimientos no se transforman en sabiduría si no existen individuos que los empleen. La falta de utilizadores genera pérdidas prácticas que en algunos casos no son sustituibles por otras prácticas, y hay que redescubrirlas cuando se vuelvan a necesitar.

Aun asegurando la aplicación un considerable esfuerzo económico y humano a la enseñanza, no siempre se genera el aprendizaje necesario para no depender del cambio generacional. Esto depende en gran medida de la actitud de los individuos y de la algorítmica aptitudinal que se haya empleado en el proceso de enseñanza.

Hemos obviado la referencia a cuestiones como: ¿qué se aprende?, ¿qué se enseña?, ¿para qué se aprende? y ¿para qué se enseña? Pues es tarea de cada grupo social y de cada individuo marcar sus objetivos específicos en la medida que responden a sus deberes sociales. En este artículo tan sólo afrontamos parte del conocimiento matemático como objetivo social.

2. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE Y EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La capacidad del individuo es sin duda un factor importante a la hora de producirse aprendizaje matemático. ¿Quién aprende? Podemos decir que aprende matemáticas quien está preparado para aprender más que quien quiere aprender. Sin duda, querer acceder a estos conocimientos es una condición necesaria para que se produzca su aprendizaje.

La sólida belleza de las Matemáticas no es un factor desencadenante del aprendizaje en todos los individuos. Esta belleza tan sólo mueve a quienes atesoran cierta cantidad de conocimiento matemático. Podemos realizar una analogía con las bondades de un nuevo tipo (o marca) de cerveza, quizás cualquier bebedor prudente la pruebe y sepa apreciarla. Sin embargo, cualquier niño la repudia directamente por amarga.

Las Matemáticas disponen de bases del conocimiento matemático (científico) y de reglas propias, que rigen dichos conocimientos, iniciadas en los tiempos de los clásicos griegos. No podemos renunciar a ellas, ni obviarlas, a la hora de aprender matemáticas, y menos en actuaciones que son catalogadas como actuaciones didácticas. Otra cosa es el rigor matemático que debe ser empleado en cada etapa educativa. Es la autoridad académica quien establece el nivel de rigor requerido en cada momento, pero ninguna autoridad está capacitada para cambiar el significado de los objetos matemáticos, aunque pueda emplear objetos aproximados suficientemente manejables.

No renunciar a las reglas matemáticas en el proceso de aprendizaje genera algunas dificultades didácticas independientes del individuo que aprende, pues están relacionadas con la naturaleza de los conceptos matemáticos.

En algunos casos, las dificultades se derivan de la necesaria restricción del lenguaje natural al entorno matemático para poder precisar este tipo de conocimiento, o del nivel de formalización de estos conceptos o del rigor demandado. Estas son dificultades temporales y puntuales que se solventan en poco tiempo. En otros casos, las dificultades están presentes en cualquier sociedad sin importar el momento histórico ni la situación social. Son dificultades intemporales y universales dentro del conocimiento matemático. Este último tipo de dificultad condicionan fuertemente el aprendizaje, y el alumno aislado las afronta con una estrategia más o menos memorística con poco, o ningún, significado personal.

Otra vez resulta ser factor importante la capacidad del que aprende a la hora de producir el proceso de enseñanza matemática. Es fácil comprobar en el día a día de un profesor que enseñar a determinados individuos es más costoso que a otros. ¿Quién enseña? Al enseñar Matemáticas no sólo se tropieza con las dificultades personales de cada alumno, si no con las dificultades universales. Se intenta mitigar todas las dificultades aplicando las herramientas didácticas y tecnológicas disponibles en cada momento en la sociedad o grupo. Es el agente enseñante quien determina el empleo de las herramientas técnicas disponibles en relación a la capacidad de quien aprende. Como ejemplo, podemos citar la estrategia educativa que empleaba Sócrates con sus discípulos: Solicitaba la búsqueda de respuesta a las preguntas que secuencialmente planteaba. Conducía sus razonamientos para que pudieran llegar al entendimiento de las cuestiones en profundidad, a la elaboración de posibles soluciones y a la comprobación de la coherencia de éstas.

Hoy en día las matemáticas se reflejan como el aglomerado de conocimiento algorítmico por excelencia, siendo el carácter finito y manipulador de sus elementos «abstractos» lo más destacado y recordado por quienes las estudiaron. Esta concepción forma parte del subconsciente común de nuestra sociedad; sin embargo, esto no es cierto en la actual sociedad tecnológica. Pongamos un ejemplo: El concepto de medir de la Grecia clásica se corresponde a lo que hoy en día podemos aludir por contar el número de veces que se empleaba un elemento patrón (unidad). De hecho, en este sentido, sólo son conmensurables las cantidades enteras positivas y las proporciones positivas. Podríamos decir que algo era medible si puede establecerse algún mecanismo de conteo, de forma análoga a la manera de aproximar el área de una sala contando el número de baldosas del suelo. Este proceso contador se colapsaba con el simple hecho de intentar medir la diagonal de un cuadrado, apareciendo los inconmensurables. Hoy, veinticuatro siglos después, tenemos completamente formalizado el concepto de número real y de medida, y no desde hace mucho. Hoy asumimos que tales conceptos son componentes fundamentales del pensamiento matemático presente en nuestra sociedad.

3. APRENDIZAJE Y COMPETENCIA MATEMÁTICA

Existen áreas de conocimiento matemático de carácter algorítmico-algebraico y otras cuya base se sustenta en conceptos que han ido siendo elaborados a lo largo de los últimos siglos, entre estas últimas se encuentra el Análisis o Cálculo Matemático. Si bien el Análisis tiene una praxis algebraica que el alumno capta con relativa facilidad, también tiene una estructura conceptual profunda, que pasa inadvertida a la mayoría de los estudiantes e, incluso, profesores de Enseñanza Secundaria o de Universidad. Si en el proceso de enseñanza tan sólo se hace hincapié en las reglas algebraicas, entonces, el alumno sólo aprende la manipulación de los objetos, abandonando sus significados intrínsecos por cuestión de economía de esfuerzos. Si en algún momento ese alumno debe enseñar ese conocimiento, únicamente generará estrategias manipulativas, que pueden caer en un sin sentido, donde algunas cosas son válidas porque sí, y otras no son válidas porque no.

El que aprende debe ampliar su forma de pensar al tratar con ciertos objetos matemáticos. Parte de estar familiarizado con un tipo de razonamiento tipo discreto y debe adquirir una forma de razonar que le permita tratar cuestiones de carácter continuo. El que enseña debe favorecer de alguna forma esa transformación (o evolución) de pensamiento. Así pues, el alumno necesita evolucionar en su forma de pensar con los objetos del Análisis Matemático si quiere ser competente en esta área matemática. Sin duda, la competencia requiere familiarizarse con esa naturaleza profunda para poder detectarla en las diversas situaciones donde aparece.

Ante la necesidad de esta adaptación, aparece la dificultad didáctica Efecto Frontera descrita por la desaparición de los conceptos propios del Análisis. En consecuencia se desarrolla la creencia de que el aprendizaje del Cálculo se transforma en una algebraización de sus elementos. Un ejemplo elemental se muestra en el caso de las funciones, donde no se distingue el concepto de función de su expresión algebraica, fórmula para muchos, sin ser relacionadas con sus distintas representaciones.

Sorprendentemente, esta dificultad perdura mucho tiempo entre las creencias del alumno, y permanece activa a lo largo de su desarrollo académico si no se ataja adecuadamente. Una cierta razón de este perdurar es que la praxis empleada en la enseñanza es bastante algebraica una vez que se parte de los resultados adecuados. Sin embargo, es necesario que el alumno sepa elegir los resultados de partida y la razón de su elección. Al faltar esta parte esencial, se genera cierta inseguridad en los alumnos. No pueden analizar con profundidad los problemas y llegar a conclusiones satisfactorias en las que el nuevo conocimiento se encuentre entroncado en su pensamiento de forma coherente y eficaz. En ese caso, nos encontramos con alumnos que sólo solventan satisfactoriamente los problemas cuando se redactan en planteamientos muy teóricos o próximos al planteamiento teórico.

4. ENSEÑANZA MATEMÁTICA CONCEPTUAL Y VISUAL

Asegurar que el estudiante aprende los significados de los conceptos y de los resultados es la vía apropiada para que estos adquieran las competencias tanto en Matemáticas como en sus aplicaciones. El profesor, emulando a Sócrates, paseando o no, debe acompañar al estudiante en su aprendizaje, suscitando preguntas que le lleven a plantearse cuestiones y debe ayudarle a buscar las respuestas aunque su modelo de enseñanza sea no presencial. La finalidad última debe ser que aparezcan las habilidades y las competencias para que el alumno afronte situaciones que no pueden ser previstas en el aula, pues existen una enorme cantidad de ejemplos, situaciones, y diversidad de los objetos a los que se puede aplicar una definición concreta o un resultado. Esta finalidad no cambia si no existe el aula como lugar de encuentro físico, es decir, en la enseñanza no presencial.

¿Cómo puede el profesor de enseñanza no presencial inducir en el alumno las ideas que se aplicarán a distintos casos? Empleando alguna Ingeniería Didáctica adecuada a cada concepto, que represente un reto para el alumno de adquirir el conocimiento y generar sus conclusiones. Esta ingeniería debe verificar que lo aprendido es correcto y coherente con lo que se pretende aprender. Además, debe ser compatible con los tiempos de aprendizaje empleados por sus alumnos, es decir, con el empleo de estudios discontinuos y estudios no sincronizados con la disponibilidad del profesor.

La respuesta a la que aludimos se corresponde con el empleo de laboratorios virtuales vía Internet. Una respuesta basada en las necesidades de un aprendizaje conceptual y referenciada como un proyecto dentro del marco IV Proyecto de Redes de Innovación Docente de la UNED, correspondiente al curso 2009-2010.

Nos referimos a laboratorios virtuales específicos donde se experimente con sus normas de empleo que aseguren la adquisición del conocimiento base, y sus guías cronométricas que orientan la velocidad de aprendizaje y sugieren tiempos de interacción suficientes.

Esa respuesta corresponde a la oportuna utilización de:

- El *Entorno Virtual disponible*, en nuestro caso, los entornos virtuales de la UNED.
- El *Entorno de Experimentación Conceptual Aproximado*, compuesto por múltiples módulos de simulación, cuya finalidad es experimentar mediante simulación de la información Matemática usando applets Java.
- El *Entorno de Soporte Didáctico*, compuesto por el conjunto de guías didácticas que contienen los protocolos de utilización para que el alumno asuma el reto de su aprendizaje, siguiendo un método de preguntas y respuestas inspirado en el método al que aludíamos al principio del trabajo.

Este proyecto tiene una estructura modular ampliable, bien con nuevos módulos temáticos bien con otras aplicaciones internet, o bien con nuevos retos o utilizaciones. En un núcleo básico, a cada módulo le corresponde básicamente un applet y un protocolo de uso con los que se desarrollan distintas aproximaciones al concepto, con los cuales tendrá que trabajar el estudiante y tendrá que hacer pruebas hasta que el concepto haya sido manejado y aprendido. Es el cuidadoso diseño del protocolo de utilización lo que posibilita la función de acompañamiento y sugerencia al alumno.

Los applets son concebidos dentro del marco de Visualización de los Conceptos Matemáticos, de forma que al utilizar las capacidades gráficas del ordenador se permita una adquisición abductiva de la aceptación de conocimiento tratado. Además, al emplear la capacidad de emular fenómenos continuos a partir de la discretización natural del proceso digital, se permite acceder al alumno a un nivel de experimentación y recreación de los conceptos. En esencia, la labor de sugerencia en las visualizaciones y su interactividad aumentan las posibilidades de aprendizaje del alumno que interactúa con el módulo de aprendizaje.

Destacamos que la función pedagógica no descansa en la repetición similar a la de un libro de ejercicios, sino en la estimulación a la reflexión por medio de la observación de un fenómeno experimental y aproximativo que el applet posibilita y el protocolo adjunto sugiere.

El Entorno de Experimentación compuesto por el conjunto de módulos forma un entorno visual, dinámico e interactivo con posibles funcionalidades colaborativas, que guía al alumno en la toma de contacto y aprehensión de los conceptos.

A la hora de tratar con aproximaciones gráficas, entendemos que «visualizar» no es un sinónimo de ver, sino de adquirir conocimiento. Visualizar un concepto es almacenar toda la información del concepto codificada dentro de una imagen. Para recordar dicho concepto, tan sólo hay que acceder a la imagen evocadora y decodificar la información.

La imagen portadora es necesaria para que se produzca el proceso de visualización y no es más que una representación aproximada del concepto. Es una representación concreta (o particular) no necesariamente genérica.

Suele ocurrir que se muestra una imagen portadora y que el estudiante ve una simple imagen sin información añadida, puesto que la simple transmisión de la imagen portadora no pone en marcha el proceso de visualización del receptor. Se requiere una secuencia de preguntas o retos adecuados para iniciar la decodificación de ese tipo de imágenes.

La imagen de un ejemplo y la elección de los ejemplos son cruciales en cada módulo en el primer contacto del alumno con el saber simulado. Ni vale cualquier imagen ni vale cualquier ejemplo como punto de partida. Se requieren aquellos que tengan una propiedad arquetípica y que representen de forma clara la propiedad que se desarrolla, es decir se hacen necesarios los denominados «ejemplos arquetípicos».

Sólo mediante una cuidada selección de la presentación podemos lograr los fines que nos proponemos para que el alumno genere su propia imagen fruto de la compresión y reflexión. No obstante, una vez trabajado el ejemplo propuesto de inicio se desarrollan otros usos con el mismo applets, admitiendo cambios de ejemplo para ampliar el conocimiento del alumno y situar nuevos elementos conceptuales en conexión con el adquirido. El uso de un applet no sólo sirve para presentar de forma gradual un concepto, si no que puede ser usado para presentar variaciones ejemplificables y contraejemplos. Esto permite que el profesor, aun en la distancia, pueda desarrollar una estrategia de acompañamiento del alumno muy útil.

Se presenta la base suficiente para que el estudiante mediante la analogía pueda obtener resultados distintos a los que ha visto o rechazarlos justificadamente, es decir, haya alcanzado un nivel de madurez y unas habilidades que le permitan analizar otros casos. Nada más opuesto a la enumeración tradicional de conceptos perfectamente enunciados donde el alumno los «traduce y aplica» a los ejemplos. Lo sugerido con las técnicas de visualización ayuden a extraer el concepto y, una vez descubierto, tan sólo se tiene que formalizar la idea que ya se posee. El proceso que proponemos es más respetuoso con la Teoría del Conocimiento y con el proceso histórico, pues si se acude a las fuentes que han dado a lugar a los conceptos, se descubrirá que el método que seguimos es el más natural, aunque se emplee tecnología informática.

La presentación inicial de conocimiento que realizamos ni es de tipo deductivo ni es de tipo inductivo; de hecho, perseguimos una adquisición de conocimiento empleando procesos de abducción, es decir, empleamos un método heurístico en el que el alumno sea llevado al concepto y no al revés, de la misma forma en que el alumno se ha hecho consciente del mundo que le rodea. El alumno debe crear su propia imagen portadora de la información relativa al concepto.

Por supuesto, los ejemplos arquetípicos no cubren la variedad de posibilidades de los ejemplos con los que el Análisis Matemático trabaja y aparecen algunos ejemplos «patológicos», al igual que los números irracionales en los griegos. Estos son fundamentales en un segundo o tercer nivel de conocimiento, pero deben de ser evitados en primera aproximación para permitir al alumno un primer nivel de visualización.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Matemática Visual: El aprendizaje del concepto de derivada de una función en un punto mediante el desarrollo de una ingeniería visual.* M. Delgado Pineda. Proc. de Informática Educativa, UNED (Madrid, España, 2009).
2. *Objetos Matemáticos dentro del marco de una Matemática Visual.* M. Delgado Pineda. Proc. de EDUMAT 2009 (Buenos Aires, Argentina, 2009).
3. *Representation, vision and visualization cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues from learning.* R. Duval. Procceding (021) ERIC P. (México, 1999).
4. *Historia de la Matemática.* C.B. Boyer. Alianza Editorial (Madrid, 2001).
5. *Elementos de Historia de las Matemáticas.* N. Bourbaki. Alianza (Madrid, 1995).
6. *Calculus.* M. Spivak. Ed. Reverté, S.A. (Barcelona, 1982).
7. *Principios de Análisis Matemático.* E. Linés. Ed. Reverté, S.A. (Barcelona, 1983).
8. *Analyse Mathématique: Fonctions d'une variable.* G. Chilov. Éditions de Moscou. (Moscú, 1978).

Miguel Delgado Pineda
Dpto. de Matemáticas Fundamentales