

EFEMÉRIDES

1908, EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

El 21 de septiembre de 1908, Hermann Minkowski interviene en la sesión inaugural de la 80 Asamblea de científicos y médicos alemanes celebrada en Colonia. Su intervención recogía los aspectos fundamentales de la formulación cuatridimensional de la relatividad especial; sus palabras iniciales llegarían a ser famosas¹: *Los puntos de vista sobre el espacio que deseo presentar ante ustedes surgieron del seno de la física experimental, y de ahí proviene su solidez. Son puntos de vista radicales. De aquí en adelante, el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse, y sólo una especie de unión entre los dos soportará una realidad independiente. Concluye su intervención de la siguiente manera: La validez sin excepción del postulado universal [postulados relativistas] quiero pensar que es el verdadero núcleo de la imagen electromagnética del mundo, la que, descubierta por Lorentz y revelada mejor por Einstein, está ahora abierta a la plena luz del día².*

Estas palabras provocaron fuerte impacto en el selecto auditorio formado por las mentes científicas más prestigiosas y brillantes del momento. El nuevo formalismo matemático lo presentó en varias conferencias³. Ahora se cumple el centenario de esta aportación de Minkowski, que recordamos a continuación.

Hermann Minkowski nació el 22 de junio de 1864 en Alexotas, Rusia, (en la actualidad Kaunas, Lituania) y falleció en Gotinga, Alemania, el 12 de enero de 1909. Era el segundo hijo del matrimonio formado por Lewin Minkowski (hombre dedicado a los negocios) y Rachel Taubmann, ambos alemanes, que durante algún tiempo residieron en Rusia, concretamente hasta



Hermann Minkowski.

que Hermann tenía 8 años cuando se trasladó la familia a Königsberg (Alemania)⁴, ciudad desde la cual Lewin continuó atendiendo a sus negocios.

Los primeros estudios los realizó Hermann en el *Gymnasium* de Königsberg donde enseguida mostró su buena disposición por las matemáticas. En 1880 inicia sus estudios

universitarios en la Universidad de Königsberg, donde también los finaliza, si bien, tres semestres los realizó en la prestigiosa Universidad de Berlín. Como estudiante coincide con David Hilbert (1862-1943) y al claustro de profesores pertenecía Adolf Hurwitz (1859-1919) prestigioso matemático de la época.

Inicia su carrera profesional como matemático estudiando "formas cuadráticas" que le llevaron, en 1885, a presentar su doctorado en la misma universidad en que había realizado sus estudios⁵.

En 1881, la Academia de las Ciencias de París convoca un Gran Premio para las Ciencias Matemáticas sobre el tema "expresar un número entero como suma de cinco cuadrados". Asunto de interés en el mundo matemático tratado por algunos matemáticos, como, por ejemplo, F.G. Eisenstein (1832-1852) había realizado algunos estudios, pero su publicación fue insuficiente. En 1867, H.J. Smith (1826-1883), también había trabajado sobre este tema y publicado un artículo algo incompleto, por

1. Estas ideas las había presentado con anterioridad, aunque con limitada difusión, el 5 de noviembre de 1907, en la Sociedad Matemática de Gotinga, pero su publicación se demoró hasta 1915 cuando ya había fallecido. "Das Relativitätsprinzip", *Annalen der Physik*, **47**, 927-938 (1915).

2. Minkowski, H.: "Raum und Zeit", *Phys. Zeitschr.*, **10**, 104-111, (1909).

3. Corry, L.: "Hermann Minkowski and the postulate of relativity", *Arch. Hist. Exact. Sci.*, **51**, 28-34 (noviembre 1998). En esta publicación se recoge todas las publicaciones de Minkowski sobre estas cuestiones.

4. Hoy Kaliningrado (Rusia). Ciudad de la Prusia oriental situada junto al Báltico. Adquirió cierta notoriedad por haber vivido en ella Kant (1724-1804) y por poseer siete puentes sobre el río Pregel, que fueron preocupación de estudio de Euler (1707-1783): trataba averiguar si era posible seguir un camino que cruzase todos los puentes una sola vez y que finalizase llegando a punto de partida. No lo hay. En 1830, Jacobi (1804-1851) y Neumann (1903-1957) crearon una escuela de física y matemáticas que adquirió gran fama.

5. Su título es *Untersuchungen überquadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener formen, welche ein gegebenes Genus enthält*.

lo que al conocer esta convocatoria decide presentarlo después de introducir algunas modificaciones.

Sin conocer los trabajos realizados por Smith, Minkowski también se presenta al premio con una teoría completa de las formas cuadráticas de n variables con coeficientes enteros inspirada en los planteamientos de Eisenstein.

Cuando la Academia de Ciencias analizó la documentación enviada por Smith y la de Minkowski, fue incapaz de inclinarse por uno de los dos trabajos presentados. Ambos fueron considerados excelentes y deciden que el premio fuera compartido por los dos matemáticos. Minkowski tenía 18 años y parecía, ser una manera inmejorable para comenzar su carrera como matemático⁶ y tiene continuidad con el tema abordado en su tesis doctoral antes apuntado. Por el contrario, para Smith llegó el premio al final de su carrera pues poco después falleció⁷.

Después de permanecer algún tiempo en Königsberg, hasta que en 1887, conoce la existencia de una plaza vacante de *professorship* en la Universidad de Bonn y no duda en presentarse. Entonces era costumbres que el aspirante realizase la correspondiente "habilitación" o presentación oral que tituló "Spatial visualization and minima of positive definite quadratic forms", cuya publicación se demoró hasta 1891.

Su actividad en Bonn se inicia en 1887 y se prolonga hasta 1892 cuando es promovido a *assistant professor*, regresa a Königsberg donde pasa dos años hasta trasladarse a Instituto Politécnico de Zurich. En este prestigioso Instituto estudia Albert Einstein (1879-1955), al que considera un alumno genial aunque irregular en su asistencia a las clases programadas.

En alguna ocasión Einstein⁸ se lamenta de no haber adquirido una pro-



David Hilbert.

6. Este trabajo fue la primera publicación de Minkowski bajo el título "Memoire sur la théorie des formes quadratiques á coefficients entiers", *Mém. Acad. Sci. (Paris)*, 29, nº2, (1884).

7. La convocatoria fue hecha pública, para este Gran Premio, en 1881 pero fue concedido en 1883.

8. Einstein, A.: *Notas autobiográficas*, Alianza, Madrid, 1983.

fundada formación matemática y lo justifica por pasar la mayor parte del tiempo trabajando en el laboratorio de Física, fascinado por el contacto directo con la experiencia. Confiesa su interés por el estudio de la naturaleza era más fuerte; y en mi época de estudiante no comprendía aún que el acceso a los acontecimientos fundamentales y más profundos de la Física iba ligado a los métodos matemáticos más sutiles.



Max Born.

Es evidente que sus limitados conocimientos matemáticos no fueron inconveniente para sus primeros trabajos científicos. Einstein recuerda a Adolf Hurwitz y a Hermann Minkowski como dos excelentes profesores de matemáticas durante su paso por el Instituto de Zurich⁹.

Minkowski se casó con Auguste Adler en Estrasburgo en 1897. De esta unión nacieron dos hijas, Lily en 1892 y Ruth en 1902. Es precisamente en este año cuando la familia abandona Zurich camino a la Universidad de Gotinga donde desempeña una cátedra, que había sido creada gracias a las gestiones de su amigo Hilbert y, en esa universidad, permaneció hasta su fallecimiento cuando tenía 44 años, a consecuencia de las complicaciones surgidas tras una operación de apendicitis.

La prestigiosa Universidad de Gotinga adquiere una especial notoriedad en la época que nos ocupa. Congrega a importantes científicos de diferentes disciplinas y se llevan a cabo reformas institucionales para facilitar los estudios interdisciplinarios así como el interés por las "aplicaciones técnicas", impulsadas por el matemático F.C. Klein (1849-1925). Su mérito fue convencer a las autoridades alemanas de la necesidad de las reformas y ser capaz de obtener recursos económicos de las empresas industriales para financiar proyectos.

Max Born (1882-1970) recoge con acierto el ambiente científico en Gotinga. Born comenzó sus estudios matemáticos en su ciudad natal Breslau (hoy Wroclaw, Polonia), se traslada a Gotinga, ciudad considerada como *la meca de las Matemáticas teutonas*¹⁰. Cuando se refiere a Hilbert y Minkowski señala que *congeniaron no sólo en las matemáticas, sino también en muchos aspectos humanos, sobre todo en la ausencia de todo prejuicio, en la rectitud y honradez y en su jovialidad y franqueza*

9. En Zurich, Minkowski coincide con Hurwitz.

10. Born, M. & Born, H.: *Ciencia y conciencia en la era atómica*. Alianza Editorial, Madrid, 1971.

ante la vida. En otro momento recuerda haber asistido a un seminario dirigido conjuntamente por ambos con el título de *Electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, en definitiva, se ocupaban de problemas que hoy se incluiría bajo el epígrafe de relatividad, esto ocurría en el año 1905, el mismo año en el que apareció el famoso trabajo de Einstein, pero entonces en Gotinga todavía no era conocido su nombre.

En 1905 Einstein publica su trabajo titulado *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*¹¹ que, en esencia, incluye la teoría especial de la relatividad (TER). Es la obra de un desconocido, de un empleado en una oficina de patentes suiza, no vinculado a ningún circuito investigación.

La nueva teoría de Einstein aportó argumentos para resolver la crisis en que se encontraba la física en los inicios del siglo XX. Pronto adquirió prestigio científico y reconocimiento social no habitual en los asuntos científicos, reducido a ambientes restringidos. En este aspecto, es necesario considerar la aportación de Minkowski cuando en 1908 establece una formulación cuatridimensional de la TER que, en principio, no parecía entusiasmar a su autor pues la consideró como una *erudición superflua*. Hacia 1912, Einstein acabó por aceptarla y, más tarde, honestamente reconoció el papel de Minkowski en el establecimiento de la teoría general de la relatividad. No obstante, es discutible que el nuevo tratamiento facilitara la mejor comprensión pues el marco geométrico nuevo recurría a un espacio de cuatro dimensiones, sin duda, más complicado de visualizar que las experiencias en tres dimensiones.

Como es sabido Minkowski era un matemático con una especial intuición geométrica (lo puso de manifiesto a los 18 años cuando recibió un premio de la Academia francesa de Ciencias, como hemos señalado). Utiliza su visión geométrica para investigar cuestiones relacionadas con la Física y se esfuerza en mantener cierta armonía entre las matemáticas y los fenómenos físicos, aunque no siempre parece conseguirlo atribuyendo demasiado protagonismo a la geometría.

Las ideas sobre el *espacio-tiempo* las presentó Minkowski en diferentes publicaciones ya señaladas pero, tal vez, su principal trabajo sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento sea una publicación que apareció en 1908 titulada "Las ecuaciones fundamentales para los fenómenos electromagné-

ticos en cuerpos en movimiento" en el que incluye junto con los resultados físicos el formalismo matemático (cálculo tensorial).

Minkowski aborda estas cuestiones con una visión electromagnética, convencido de que Einstein había perfeccionado las teorías de Lorentz (1857-1928) y Poincaré (1854-1912). Consideraba que las transformaciones de Lorentz aportaban una explicación definitiva de los fenómenos físicos, planteamiento que no parecía muy acertado pues para Einstein estas transformaciones se relacionaban con las medidas realizadas del espacio y del tiempo. Concluye situando al *espacio-tiempo* (o *mundo absoluto*) en un lugar privilegiado, de esta manera, la geometría del *espacio-tiempo* adquiere una realidad donde se inscribe la física que constituye un *mundo absoluto*.

Esta idea de *espacio-tiempo* tiene un claro referente en Poincaré pues fue el primero en introducir un espacio cuatridimensional (x, y, z, ict) para explicar los invariantes de Lorentz. Para Minkowski los invariantes se pueden explicar como distancias y las transformaciones de Lorentz como rotaciones en el espacio (x, y, z, ict). Poincaré no consideró la necesidad de un espacio no-euclideo pero fue capaz de intuir una teoría de la gravitación a partir de la TRE.

Como hemos apuntado, estaba convencido de la armonía entre las matemáticas y la física, creía que recurriendo a ellas se podía descubrir la verdad física. Por tanto, era partidario de abordar, en primer lugar, los elementos matemáticos de los fenómenos o teoría física para luego conformar la realidad física.

Como hemos dicho, Minkowski consideraba válidas las ideas de Einstein pero estimaba inadecuado el formalismo matemático utilizado. En su opinión el *tiempo* se debía considerar como una cuarta dimensión (para Einstein el tiempo perdía su carácter absoluto) y se esfuerza en lograr una expresión geométrica en un espacio de cuatro dimensiones ajustado a una métrica *pseudoeuclídea*.

En la geometría euclídea la longitud de un vector tridimensional es la distancia euclídea entre dos puntos ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) y se mantiene invariante para las transformaciones ortogonales (físicamente, corresponden con las transformaciones de Galileo). En la geometría de Minkowski, la expresión cuadrática toma la forma:

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2$$

En donde, los valores de μ y ν toman los valores de 0 a 3 y el

11. *Annalen der Physik*, **17**, 891-921 (1905). Versiones en español: Stachel, J.: *Einstein 1905: un año milagroso*. Crítica, Barcelona, 2001 y Ruiz de Elvira, A. (ed): *Cien años de relatividad*. Nivola, Madrid, 2003.

tensor métrico $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ es definido por $g_{\nu\mu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1$. Además, para las transformaciones de Lorentz permanece invariante y se pueden interpretar como las transformaciones ortogonales en un espacio de métrica (3,1).

Por otra parte, las magnitudes físicas como la fuerza, la velocidad y la aceleración deben ser sustituidas por sus expresiones cuatridimensionales y las ecuaciones de Maxwell toman una forma más sencilla al introducir un cuadri-potencial electromagnético, A^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Insistimos, a modo de conclusión, en el hecho de plantear las leyes de la física en una métrica *pseudo-euclídea* de cuatro de dimensiones.

Es posible que el formalismo minkowskiano fue imprescindible para que algunos científicos conocieran o se acercaran a la nueva TRE y es frecuente considerarla como paradigma de cómo las matemáticas ayudan a comprender una teoría física al margen de otras complicaciones. Minkowski parecía convencido de la bondad de su nueva formulación, así lo indica en alguno de sus manuscritos cuando lo considera *poderosamente revolucionario*, calificativo que no se incluyó en la publicación definitiva.

Joaquín Summers Gámez

Dpto. de Física de los Materiales