

Física

Juegos paradójicos

LA PARADOJA

Spongamos una moneda ligeramente trucada, de forma tal que la probabilidad de obtener «cara» al lanzarla al aire sea $p = 1/2 - \epsilon$, en donde ϵ es un número pequeño y positivo. Con ella, a la que denominaremos moneda A, le ofrezco jugar del siguiente modo: cada vez que salga cruz le doy un euro y cada vez que salga cara usted me da un euro a mí. Si usted dispone de un capital ilimitado, debería aceptar sin dudarle un momento: si $X(t)$ es lo que llevo ganado después de jugar t veces —lo llamaremos el «capital»— no le será difícil demostrar que el valor medio de esta ganancia, $\langle X(t) \rangle$, decrece al aumentar el número t de turnos.

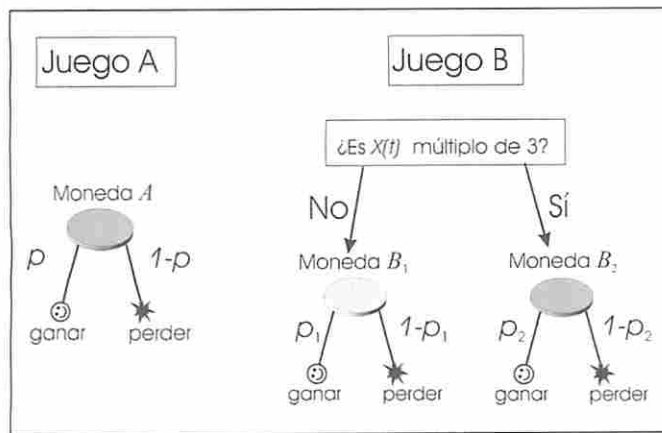


Figura 1. Reglas de los juegos A y B. El color más claro de la moneda B_1 indica que con ella la probabilidad de ganar es mayor que $1/2$ y, por lo tanto, se trata de una moneda favorable.

Ahora le propongo un segundo juego en el que se utilizan dos monedas, que llamaremos B_1 y B_2 . La moneda B_2 se lanza cuando lo que llevo ganado es múltiplo de tres y la moneda B_1 en el resto de los casos (recuerde que la ganancia puede ser negativa; por múltiplo de tres entendemos cualquier número entero que se pueda escribir como $3n$ con n entero). La probabilidad de que yo gane con la moneda B_1 es $p_1 = 3/4 - \epsilon$ y con la moneda B_2 , $p_2 = 1/10 - \epsilon$, tal y como se muestra en la Figura 1. El análisis de este segundo juego no es tan simple como en el caso anterior. Sin embargo, puede demostrarse (ver la sección siguiente y la Figura 2) que el juego es también favorable para usted, en el sentido de que el valor medio de mi ganancia o capital, $\langle X(t) \rangle$, es de nuevo una función estrictamente decreciente de t . Llamemos A al primero de los juegos que hemos descrito y B al segundo.

Una vez que está usted convencido de que yo pierdo en ambos juegos, le haré una tercera proposición: alter-

nemos los dos juegos siguiendo la secuencia AABBA-ABB... Si desconfía, puedo modificar ligeramente la propuesta para hacerla menos sospechosa: en cada turno, elijamos al azar cuál de los dos juegos jugamos.

Si acepta cualquiera de estas dos propuestas habrá confiado demasiado en su intuición, sin tener en cuenta que los sistemas aleatorios, aún tan simples como los que hemos descrito, pueden comportarse de manera sorprendente.

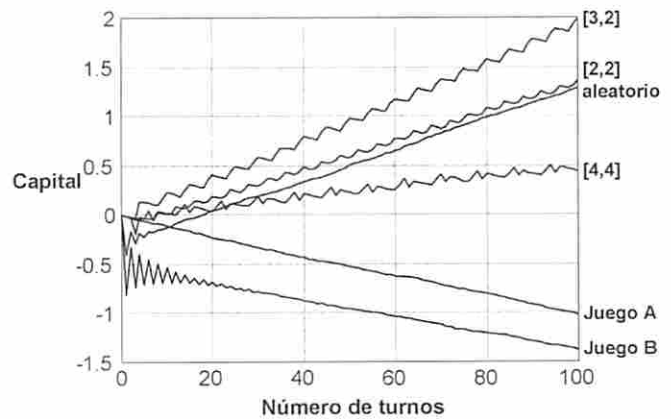


Figura 2. Ganancia media (sobre 5000 jugadores) en función del número de turnos, en cada uno de los juegos y en varias de sus combinaciones. En todos ellos $\epsilon = 0,005$ y se ha utilizado la notación $[a,b]$ para indicar que se juega a turnos al juego A seguidos de b turnos del juego B.

En efecto, tanto si alternamos los juegos formando una secuencia fija, AABBAABB..., como si lo hacemos de forma aleatoria, el resultado es que mi ganancia media $\langle X(t) \rangle$ crece con el número de turnos. La Figura 2 muestra mi ganancia en distintas situaciones: juegos A y B por separado, varias combinaciones periódicas y la combinación aleatoria. La figura es el resultado de una simulación con 5000 jugadores y un valor del sesgo $\epsilon = 0,005$. Como pueden comprobar, la tendencia de los dos juegos se invierte cuando se combinan de distintas maneras.

ANÁLISIS DETALLADO DE LOS JUEGOS

El fenómeno descrito en la sección anterior se conoce como *Paradoja de Parrondo*, y en los últimos años ha recibido cierta atención en distintos campos, desde la dinámica de poblaciones hasta la economía, puesto que puede en principio ocurrir en cualquier situación en la que se combinen dos o más dinámicas aleatorias [1-3].

Antes de analizar los juegos en detalle, es instructivo discutir un argumento que, a pesar de ser erróneo, ayuda a comprender el mecanismo subyacente a la paradoja. El argumento concluye que el juego B no es justo sino ganador y

consiste en suponer que la moneda B_2 se lanza un tercio de las veces mientras que la moneda B_1 se lanza dos tercios de las veces. De ser así, la probabilidad de ganar sería:

$$P_{\text{ganar}} = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \varepsilon\right) = \frac{8}{15} - \varepsilon$$

que, para $\varepsilon = 0$, es ligeramente superior a $1/2$, indicando que B es un juego ganador. Esta conclusión es falsa porque lo es la suposición inicial: la moneda B_2 se lanza con una frecuencia mayor que $1/3$, debido a que el capital tiene una probabilidad alta de oscilar entre un múltiplo de 3, digamos $3n$, y su inmediato inferior, $3n-1$.

Es decir, son las propias reglas del juego B las que rompen la uniformidad de la distribución de probabilidad del capital ganado. Las verdaderas frecuencias con las que se lanza cada moneda pueden calcularse mediante la teoría de *cadena de Markov* [4]. El juego B, así como la combinación aleatoria de A y B, puede reducirse a una cadena de Markov de tres estados. Estos tres estados son: ganancia igual a un múltiplo de 3, a un múltiplo de 3 más 1, o a un múltiplo de 3 más 2. La variable que determina estos tres estados es:

$$Y(t) = X(t) \bmod 3$$

que puede tomar sólo tres valores: 0, 1 ó 2. No es muy difícil escribir una ecuación de evolución para las tres probabilidades correspondientes. Por ejemplo, si $\pi_i(t)$ es la probabilidad de que $Y(t)$ sea $i = 1, 2, \text{ ó } 3$, entonces:

$$\pi_0(t+1) = p_1\pi_2(t) + (1-p_1)\pi_1(t)$$

porque, para tener en el turno $t+1$ un capital múltiplo de 3, $Y(t+1) = 0$, o bien hemos ganado y en el turno anterior el capital era un múltiplo de 3 más 2, $Y(t) = 2$, o bien hemos perdido y en el turno anterior el capital era un múltiplo de 3 más 1, $Y(t) = 1$. Estas dos posibilidades son las que refleja cada uno de los sumandos en el miembro de la derecha de la ecuación anterior. De la misma forma se pueden deducir ecuaciones para las otras probabilidades:

$$\pi_1(t+1) = p_2\pi_0(t) + (1-p_1)\pi_2(t)$$

$$\pi_2(t+1) = p_1\pi_1(t) + (1-p_2)\pi_0(t)$$

Estas tres ecuaciones pueden resolverse utilizando matrices. Se puede comprobar que, a partir de unos cuantos turnos, las probabilidades se acercan a la llamada *solución estacionaria*, un trío de probabilidades que no varía con el tiempo, es decir, que verifica:

$$\pi_0^{est} = p_1\pi_2^{est} + (1-p_1)\pi_1^{est}$$

$$\pi_1^{est} = p_2\pi_0^{est} + (1-p_1)\pi_2^{est}$$

$$\pi_2^{est} = p_1\pi_1^{est} + (1-p_2)\pi_0^{est}$$

Éste es un simple sistema de ecuaciones lineales, que puede resolverse con facilidad. Imponiendo que la suma de las tres probabilidades sea igual a la unidad, se llega a la solución siguiente, para $\varepsilon = 0$:

$$\pi_0^{est} = \frac{5}{13}; \pi_1^{est} = \frac{2}{13}; \pi_2^{est} = \frac{6}{13}$$

Como vemos, las probabilidades están lejos de valer $1/3$. El capital pasa mucho más tiempo en números múltiplos de 3 y múltiplos de 3 más 2. La razón es que, cuando el capital es $3n$, jugamos con la moneda mala B_2 y lo más probable es perder. Nuestro capital entonces disminuye en una unidad y es ahora un múltiplo de 3 más 2. Por lo tanto jugamos con la moneda buena B_1 y lo más probable es que ganemos volviendo a tener un capital de $3n$ euros. Es decir, el capital tiene una gran probabilidad de oscilar entre $3n$ y $3n-1$, lo que hace que π_0^{est} y π_2^{est} , sean significativamente mayores que π_1^{est} .

En consecuencia, cuando se juega únicamente el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda mala B_2 , es decir π_0^{est} , no es $1/3$ sino ligeramente superior. Por esta razón el argumento que exponíamos al principio de la sección es incorrecto. La verdadera probabilidad de ganar sí se puede calcular utilizando dicho argumento, pero con la probabilidad correcta de utilizar cada moneda:

$$P_{\text{ganar}} = (\pi_1^{est} + \pi_2^{est})p_1 + \pi_0^{est}p_2 = \frac{8}{13} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{13} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

Es decir, el juego B, para $\varepsilon = 0$, es un juego justo. Para valores de ε positivos, el juego es perdedor.

¿Qué ocurre cuando combinamos aleatoriamente los juegos A y B? La combinación aleatoria puede tratarse de la misma forma que el juego B. Matemáticamente tiene la misma estructura. Las ecuaciones son similares a las anteriores sustituyendo p_1 y p_2 , por $(p+p_1)/2$ y $(p+p_2)/2$. La probabilidad de jugar con la moneda mala B_2 ahora es (de nuevo para $\varepsilon = 0$):

$$\pi_0^{est} = \frac{245}{709}$$

y es menor que la calculada para el juego B. Finalmente, la probabilidad de ganar en la combinación aleatoria de los dos juegos es:

$$P_{\text{ganar}} = \frac{727}{1418}$$

que es ligeramente superior a $1/2$. Por tanto, la combinación aleatoria es ganadora y sigue siéndolo a pesar de incluir un sesgo ε , siempre que éste sea pequeño.

Este análisis nos proporciona la siguiente explicación intuitiva de la paradoja. El juego B utiliza dos monedas:

una mala, la moneda B_2 , y otra buena o favorable, la moneda B_1 (en la Figura 1 las monedas desfavorables se muestran más oscuras). Cuando se juega sólo el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda mala es mayor de un tercio. El juego A, a pesar de consistir en una única moneda mala, redistribuye las frecuencias con las que se juegan las dos monedas del juego B haciendo que la moneda buena se utilice un mayor número de veces. Ésta es la esencia de la paradoja: en el juego B coexisten dos tendencias, una ganadora y otra perdedora, y, cuando se juega aisladamente, la tendencia perdedora es dominante; el papel del juego A es invertir esta dominancia. A pesar de que el juego A es perdedor, el efecto de potenciar la moneda buena del juego B es mayor que la propia tendencia perdedora de A y el resultado neto es que la combinación de A y B es ganadora.

Que el juego A disminuya la frecuencia con que se juega la moneda B_2 no debe extrañarnos. Esa frecuencia es mayor que un tercio cuando se juega sólo B. Por otra parte, el juego A es un simple camino aleatorio cuyo efecto es «aleatorizar» el capital, es decir, hacer que su distribución de probabilidad sea más parecida a la distribución uniforme en la que las tres probabilidades valen $1/3$.

La combinación periódica puede tratarse también analíticamente, pero hay que utilizar cálculo matricial y la solución es un poco más complicada. El lector interesado puede consultar [5], en donde se dan algunos detalles del cálculo.

JUEGOS PARADÓJICOS Y MOTORES BROWNIANOS

Otra explicación intuitiva de la inversión de la tendencia de los juegos nos la proporcionan los llamados *motores brownianos*, que son sistemas físicos que, de hecho, inspiraron originalmente el diseño de la paradoja.

Estos «motores» están basados en el llamado movimiento browniano, el movimiento errático que cualquier partícula suficientemente ligera experimenta cuando está inmersa en un fluido. Este movimiento se debe a las colisiones de la partícula con las moléculas del fluido, y permitió a Einstein en su tesis doctoral calcular el número de Avogadro utilizando las propiedades estadísticas de las trayectorias.

Las fluctuaciones que sufren las partículas brownianas son por supuesto simétricas. No hay ninguna dirección privilegiada y, de hecho, el conjunto de trayectorias brownianas constituye un fenómeno irreversible muy usual: la difusión. Sin embargo, a principios de los años 90, Ajdari y Prost concibieron un dispositivo muy sencillo y capaz de rectificar estas fluctuaciones induciendo un movimiento sistemático de las partículas en una determinada dirección [6].

La idea de Ajdari y Prost consiste en someter a estas partículas a un campo de fuerzas. Suponiendo que las partículas se mueven en una dimensión, en la Figura 3

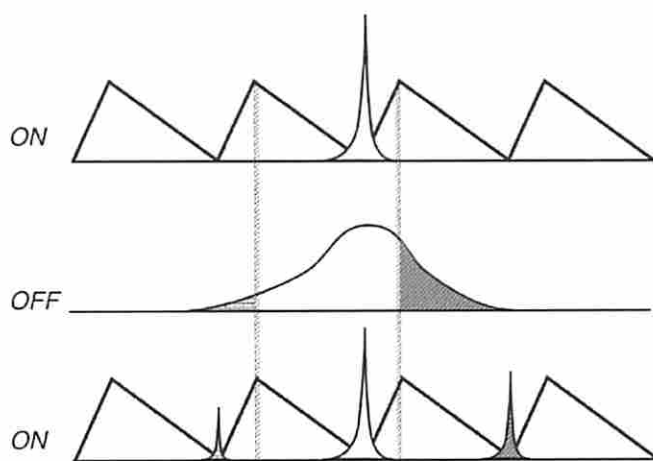


Figura 3. La flashing ratchet de Ajdari y Prost.

se puede ver la energía potencial de la cual deriva dicho campo y que tiene forma de dientes de sierra asimétricos. Como es sabido, las partículas sometidas a un potencial como el de la Figura 3 tienden a las posiciones de equilibrio que no son más que los puntos mínimos del potencial. Así lo hacen también las partículas brownianas que, no obstante, y debido a su pequeño tamaño, pueden fluctuar ligeramente alrededor de dicho punto de equilibrio. En la parte superior de la Figura 3, podemos ver superpuesto al potencial el perfil de densidad de estas partículas, concentradas en torno a uno de los mínimos del potencial. Supongamos ahora que desconectamos momentáneamente el campo de fuerzas. Las partículas brownianas, ahora libres del campo, difundirán de modo simétrico y su perfil será, aproximadamente, el de una campana de Gauss que se dilata con el tiempo.

Cuando volvemos a conectar el potencial las partículas vuelven a los mínimos, pero no lo hacen de forma simétrica. Debido a la forma del potencial, es más fácil que una partícula haya recorrido la distancia entre el mínimo y el máximo de potencial *hacia la derecha* que hacia la izquierda. En consecuencia, más partículas saltarán al pozo de potencial de la derecha que al de la izquierda, como se muestra en los perfiles de densidad de partículas superpuestos al potencial en la figura inferior. Por lo tanto, la intermitencia del potencial asimétrico induce una corriente sistemática de partículas hacia la derecha. El sistema se conoce en la literatura como *flashing ratchet* (rectificador intermitente) y el movimiento resultante se mantiene incluso ante fuerzas pequeñas, convirtiendo a las partículas en un *motor* capaz de realizar trabajo. Este modelo y otros más sofisticados [7, 8] se han propuesto como mecanismos utilizados por motores moleculares biológicos, que son proteínas y complejos moleculares capaces de convertir energía química en movimiento o trabajo y que realizan un sinnúmero de funciones en el interior de la célula: transporte de material, movimiento de cilios, lectura del ADN, empaquetamiento de ADN en los virus, etc.

¿Qué tiene que ver este motor browniano con nuestros juegos? En realidad, los juegos nos son más que una versión discreta de la *ratchet*. En efecto, si representamos el capital del jugador en una línea, el juego A con $\epsilon = 0$ es equivalente a un movimiento browniano libre, puesto que el capital salta con probabilidad 1/2 hacia la izquierda (perder) o hacia la derecha (ganar). Por otro lado, el juego B es una simplificación del movimiento browniano en el potencial de diente de sierra de la Figura 3. Pueden comprobar esta similitud en la Figura 4. En el potencial *ratchet* hay un tramo largo con fuerza positiva y débil y un tramo corto con fuerza negativa y relativamente intensa, de modo que la fuerza media en todo un periodo del potencial es nula o, lo que es lo mismo, el potencial es periódico. En el juego B la moneda mala actúa sólo sobre un sitio mientras que la moneda buena actúa sobre un «intervalo más largo», formado por dos casillas.

La alternancia de los dos juegos es equivalente a la alternancia de los dos potenciales, el potencial *ratchet* y el potencial plano. En cualquiera de estos dos potenciales no hay movimiento sistemático en ninguna dirección, al igual que los dos juegos con $\epsilon = 0$ son juegos justos. Pero si los dos potenciales se alternan, aparece un movimiento sistemático hacia la derecha, al igual que la alternancia de los dos juegos produce una ganancia media positiva. La explicación de la paradoja es por tanto idéntica a la explicación de la rectificación en la *flashing ratchet*: el juego B rectifica las fluctuaciones simétricas del juego A. Suponga, por ejemplo, que jugamos B varias veces y el capital está oscilando entre 2 y 3 euros. Jugamos entonces A un par de turnos y volvemos a B. En los dos turnos de A, es fácil que el capital salte a 4 euros pero es bastante menos probable que descienda a 0 euros. Por lo tanto, al volver a B, es más fácil que el capital salte hacia 5 y 6 euros, que descienda hasta el par 0, -1. Esto es exactamente lo que le ocurre a la partícula browniana en la *flashing ratchet*, le es más fácil cubrir la distancia que le permite saltar la barrera de la derecha que la de la izquierda.

ALGUNAS VARIANTES DE LA PARADOJA

Juegos independientes del capital

El juego B, descrito en las secciones anteriores, es un juego de azar un tanto artificial debido a que las reglas

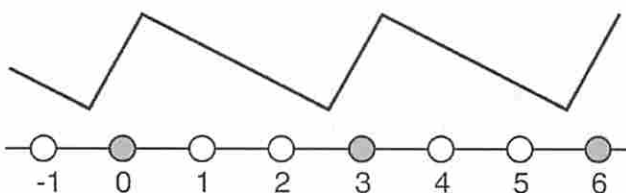


Figura 4. Relación entre el potencial ratchet y el juego B de la paradoja.

de B dependen del capital ganado. ¿Es posible encontrar juegos paradójicos con reglas independientes del capital? La respuesta es sí: es posible eliminar la dependencia de las reglas en el capital pero únicamente si admitimos que éstas dependan de la *historia* del juego, es decir, de los últimos resultados del mismo [9].

Consideremos el juego B', que se juega con cuatro monedas, B'_1, \dots, B'_4 , dependiendo del resultado del juego en las dos anteriores jugadas. Las reglas vienen dadas por la siguiente tabla.

Penúltimo turno	Último turno	Moneda	Probabilidad de ganar	Probabilidad de perder
Perder	Perder	B'_1	$9/10 - \epsilon$	$1/10 + \epsilon$
Perder	Ganar	B'_2	$1/4 - \epsilon$	$3/4 + \epsilon$
Ganar	Perder	B'_3	$1/4 - \epsilon$	$3/4 + \epsilon$
Ganar	Ganar	B'_4	$7/10 - \epsilon$	$3/10 + \epsilon$

Como en los juegos originales, es posible (aunque tedioso) demostrar que B' es justo si $\epsilon = 0$. Vemos también que hay dos monedas malas, la B'_2 y la B'_3 . Estas monedas, cuando se juega sólo a B', se utilizan menos de 1/4 de las veces. Por ello, la combinación de B' con el juego A de las secciones anteriores conduce de nuevo a la paradoja, ya que A hace que todas las monedas se jueguen con frecuencias más cercanas a 1/4.

Una simulación de estos juegos se representa en la Figura 5 y muestra cómo el capital medio decrece para cada uno de los juegos A y B', mientras que crece para las combinaciones periódica y aleatoria. Estos juegos pueden también resolverse analíticamente. Pueden ver algunos detalles de esta solución en [3, 5, 9].

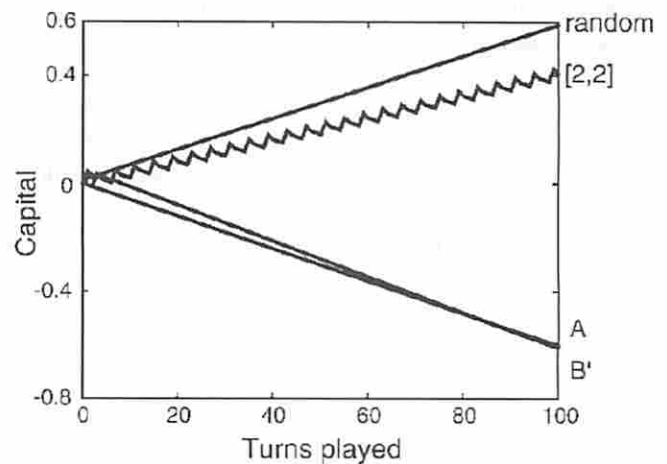


Figura 5. Evolución del capital medio en función del número de turnos con los juegos independientes del capital. Las dos curvas inferiores corresponden a los juegos A y B' jugados individualmente. Como en la Figura 2, [2,2] denota la combinación AABBA... La curva superior corresponde a la combinación aleatoria entre A y B'. En estas simulaciones $\epsilon = 0,003$ y se ha promediado sobre 500 000 jugadores.

Juegos colectivos

Raúl Toral, de la Universidad de las Islas Baleares, introdujo en 2002 una interesante variante de los juegos en donde participan varios jugadores y el juego A es reemplazado por una redistribución de la riqueza [10]. Esta redistribución tiene el mismo efecto que el juego A original: «aleatoriza» la distribución de probabilidad del capital haciendo que la moneda mala en el juego B se utilice con menos frecuencia. En consecuencia, los jugadores pierden si juegan sólo a B y ganan si, entre turno y turno de B, reparten sus ganancias. El efecto se puede observar para distintas reglas de distribución: aleatorias (un jugador da a otro un euro con una probabilidad dada) o «igualitarias» (los jugadores más ricos ceden parte de su capital a los más pobres). En la Figura 6 se puede observar el resultado de la alternancia entre el juego B y una redistribución R aleatoria. En ella, el jugador i le da un euro al $i+1$ con una probabilidad $1/2$, o recibe un euro de él con una probabilidad $1/2$. Un turno de juego R consiste en realizar estos intercambios para todos los jugadores i desde el 1 hasta el $N-1$ (el jugador N sólo intercambia capital con el $N-1$). Como se aprecia en la figura, el juego B es perdedor (las simulaciones se han hecho con $\epsilon = 0,005$). En el juego R, obviamente el capital total no varía, puesto que sólo cambia de manos. Sin embargo, al alternar redistribución y juego B, todos salen ganando, ya que el capital total aumenta. De hecho, el capital de cada uno de los 100 jugadores también tiende a aumentar. La distribución de capitales es aproximadamente una gaussiana centrada en el valor medio y con dispersión proporcional a la raíz cuadrada del número de turnos.

El efecto *ratchet* nos proporciona aquí también una explicación intuitiva de por qué la redistribución da lugar a ganancias sistemáticas. La redistribución ayuda a que los individuos «salten» la barrera de los múltiplos de 3. Podríamos pensar en la moneda mala del juego B como una especie de «mala racha» para algunos jugadores (los que en

un turno concreto tienen capital múltiplo de 3). La redistribución, que puede ser positiva o negativa para un jugador, ayuda a superar esta mala racha, ya que reduce la probabilidad de que un jugador tenga capital múltiplo de 3.

Decisiones colectivas

Otra variante de los juegos que da lugar a fenómenos inesperados consiste en permitir a los jugadores que elijan el juego en cada turno. Para un jugador, esta elección es trivial: elegirá A si su capital es múltiplo de 3 y B en otro caso. De este modo se evita la utilización de la moneda B_2 , sustituyéndola por la A, que no es tan desfavorable, y es fácil probar que se consiguen ganancias sistemáticas mayores que con cualquier otra combinación de los dos juegos. Esta elección es por tanto la óptima para un jugador.

Pero, ¿cuál es la elección óptima si es un colectivo de jugadores el que juega contra un casino y todos ellos tienen que jugar en cada turno al mismo juego? Los que tienen capital múltiplo de 3 prefieren jugar A mientras que el resto prefieren jugar B. Se plantea por tanto un problema de decisión colectiva que da lugar a algunas sorpresas. Por ejemplo, una decisión democrática [11], en donde se acata la voluntad de la mayoría, conduce a pérdidas sistemáticas, mientras que una elección al azar es ganadora. La razón es que, tanto si se juega A como B, la fracción de jugadores con capital múltiplo de 3 tiende a valores menores que $1/2$ (si se juega a A, la fracción tiende a $1/3$, mientras que si se juega a B, la fracción tiende a $5/13$). Por lo tanto, la decisión democrática tiene a elegir siempre a B, que es perdedor. Es necesario que la mayoría de los jugadores sacrifiquen sus ganancias a corto plazo para que todo el colectivo se beneficie.

Otras reglas de decisión, como la maximización de las ganancias totales *en un turno*, resultan ser perjudiciales para el colectivo de jugadores [12]. Este último ejemplo ha inspirado estudios similares en la *flashing ratchet* [13], en donde también se puede contemplar la posibilidad (realizable experimentalmente) de utilizar la posición de las partículas brownianas para conectar y desconectar el potencial de la Figura 3 de forma óptima. Finalmente, en [14] hemos estudiado otros protocolos de decisión, como el «dictador», en donde el colectivo sigue las preferencias de un individuo, la «oligarquía», etc. A través de estos trabajos se observa que los juegos son un ejemplo sencillo pero con una rica fenomenología, en donde aplicar técnicas de optimización estocástica o de toma de decisiones colectivas.

CONCLUSIONES

La *Paradoja de Parrondo* muestra de forma sencilla cómo la alternancia de dos dinámicas puede dar lugar a un comportamiento muy diferente del de cada una de las dinámicas por separado. Autores de cam-

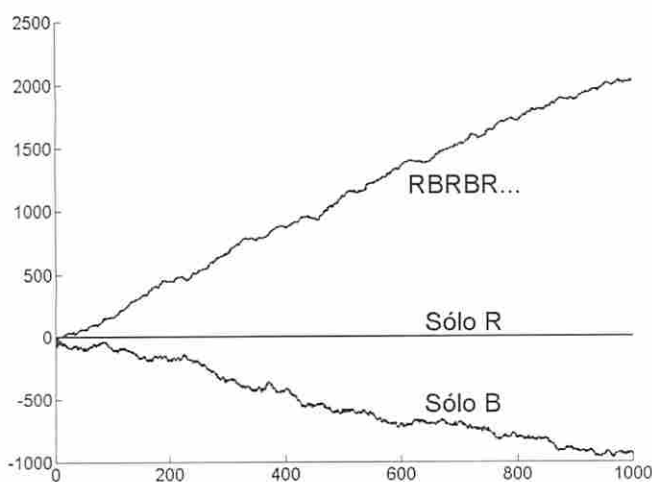


Figura 6. Capital total de 100 jugadores en función del número de turnos para distintas combinaciones del juego B y la redistribución R.

pos muy diferentes han estudiado este tipo de efectos: la alternancia de dinámicas puede suprimir el caos [15], puede dar lugar a patrones espaciales [16], o retardar la decoherencia de sistemas cuánticos [17]; la alternancia de subespecies de bacterias puede también aumentar las probabilidades de supervivencia [18].

También ha mostrado que los procesos estocásticos con probabilidades que dependen del capital o de la historia, dan lugar a muchos fenómenos interesantes, como los que hemos descrito en el caso de juegos colectivos.

Éstas son algunas de las aplicaciones de la *Paradoja* que han aparecido en los últimos años, pero aún invita a investigadores de muy diversas áreas a explorar los efectos de la combinación o alternancia de dinámicas, ya que los juegos nos están indicando que alguno de estos efectos puede ser sorprendentes y desafiar nuestra intuición. Cualquiera puede pensar ejemplos de combinaciones de este tipo: alternancia de estrategias económicas, alternancia de temperatura o luminosidad en reacciones químicas, o alternancia de presión ambiental en dinámica de poblaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G.P. Harmer y D. Abbott: *Parrondo's paradox*. Statistical Science, **14**, 206 (1999).
- [2] G.P. Harmer y D. Abbott: *Game theory - Losing strategies can win by Parrondo's paradox*. Nature, **402**, 864 (1999).
- [3] J.M.R. Parrondo y L. Dinis: *Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games*. Contemporary Physics, **45**, 147 (2004).
- [4] S. Karlin y H.M. Taylor: *A first course in stochastic processes*. 2nd ed. 1975, New York: Academic Press.
- [5] J.M.R. Parrondo: *Juegos de azar paradójicos*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, **4**, 355 (2001).
- [6] A. Ajdari y J. Prost: *Drift Induced by a Spatially Periodic Potential of Low Symmetry - Pulsed Dielectrophoresis*. Comptes Rendus De L'Academie Des Sciences, Serie II, **315**, 1635 (1992).
- [7] P. Reimann: *Brownian motors: noisy transport far from equilibrium*. Physics Reports, **361**, 57 (2002).
- [8] R.D. Astumian y M. Bier: *Fluctuation Driven Ratchets - Molecular Motors*. Physical Review Letters, **72**, 1766 (1994).
- [9] J.M.R. Parrondo, G.P. Harmer y D. Abbott: *New paradoxical games based on Brownian ratchets*. Physical Review Letters, **85**, 5226 (2000).
- [10] R. Toral: *Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox*. Fluctuation and Noise Letters, **2**, L305 (2002).
- [11] L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Inefficiency of voting in Parrondo games*. Physica A, **343**, 701 (2004).
- [12] L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Optimal strategies in collective Parrondo games*. Europhysics Letters, **63**, 319 (2003).
- [13] F.J. Cao, L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Feedback control in a collective flashing ratchet*. Physical Review Letters, **93**, (2004).
- [14] J.M.R. Parrondo *et al.*: *Collective decision making and paradoxical games*. European Physical Journal-Special Topics, **143**, 39 (2007).
- [15] J. Almeida, D. Peralta-Salas y M. Romera: *Can two chaotic systems give rise to order?* Physica D, **200**, 124 (2005).
- [16] J. Buceta, K. Lindenberg y J.M.R. Parrondo: *Stationary and Oscillatory Spatial Patterns Induced by Global Periodic Switching*. Physical Review Letters, **88**, 024103 (2001).
- [17] C.F. Lee *et al.*: *Quantum coherence, correlated noise and Parrondo games*. Fluctuation and Noise Letters, **2**, L293 (2002).
- [18] D.M. Wolf, V.V. Vazirani y A.P. Arkin: *Diversity in times of adversity: probabilistic strategies in microbial survival games*. Journal of Theoretical Biology, **234**, 227 (2005).

Juan M.R. Parrondo

Dpto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear y GISC
Universidad Complutense de Madrid

Matemáticas

La conjetura de Poincaré: protagonista del ICM 2006

La conjetura de Poincaré con todo lo que ha girado en torno al anuncio de su solución por parte del matemático ruso Grisha Perelman y la otorgación a éste de la medalla Fields han sido los protagonistas del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en agosto del año 2006.



Logo del ICM 2006.