eternidad se identifican desde el punto de vista de la dinámica, de tal modo que un mundo regido por las leyes de ésta se reduce a una afirmación inmutable de su propia identidad, modelada por el rígido determinismo inherente a trayectorias mecánicas, intrínsecamente reversibles, que no permiten distinguir entre pasado y futuro. Por el contrario, la concepción termodinámica es la de un universo que se degrada hacia un estado de equilibrio definido por la uniformidad asociada con la desaparición de cualquier gradiente. ¿Cabría objetar que el segundo principio de la Termodinámica es un determinismo alternativo, tan inexorable como el de la dinámica, que en lugar de las ecuaciones de movimiento, se remite a procesos que anulan cualquier diferencia de presión, temperatura o composición química y conducen irreversiblemente a todo sistema aislado a un estado de equilibrio asociado con el valor máximo de la entropía?

No deja de ser un sarcasmo recordar solamente los estados inicial y final de un proceso tan netamente irreversible como una vida; más aun, tratándose de aquel a quien con toda justicia cabe atribuir la paternidad de la Termodinámica de no equilibrio. Para Ilya Prigogine el tiempo comenzó en Moscú el 25 de enero de 1917 y terminó en Bruselas el 28 de mayo de 2003, ¡qué difícil cuantificar el sentido de una vida!; sin embargo, me atrevo a formular un elogio para alguien que consagró su vida a la Ciencia:

"si entre el mundo y los sentidos
ha sembrado la riqueza
de preguntas, matices,
teorías, argumentos,
si con ello ha desplegado
libertad y belleza
y me ha hecho habitar
plenitudes y vértigos,
si me ha sido un lenguaje
para decir el infinito,
si me ha dicho sobriamente
leyes tan fructíferas,
si en parte tan profunda
de mí se ha convertido,
¿cómo puedo llamar frialdad
a la física?" [1]

Manuel Criado Sancho
Dpto. de Ciencias y Técnicas Fisicoquímicas

Matemáticas y Finanzas

INTRODUCCIÓN

¿Pueden los métodos matemáticos ayudar a la comprensión de las actividades financieras permitiendo desarrollar métodos de inversión y gestión eficientes? No hay duda de que así es, al menos en alguna medida. No es preciso recordar que la Aritmética se desarrolla impulsada por las actividades comerciales que se realizaban en las antiguas civilizaciones y que en los últimos siglos se han desarrollado unas Matemáticas Financieras que permiten realizar cálculos para la valoración de instrumentos financieros simples, tales como rentas o préstamos.

En todo caso, al contrario de lo que ocurría con la Ciencia y la Ingeniería, las Finanzas no necesitaban un alto grado de complejidad matemática. Esta situación parece haber cambiado radicalmente debido a que la llamada Economía Financiera ha sufrido espectaculares y profundas transformaciones en las últimas décadas desarrollando conceptos y métodos que tienen una amplia base matemática. Un análisis de la evolución de las Finanzas en las tres últimas décadas deja ver procedimientos financieros basados en Matemáticas más elaboradas. Así, de las simples progresiones aritméticas, las Finanzas actuales han pasado al Cálculo Estocástico, a los métodos de la Programación Dinámica y a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Sin duda, es uno de los ejemplos más brillantes de la eficacia de la interdisciplinaridad. Las Matemáticas suministran un lenguaje adecuado para representar teorías financieras y herramientas eficaces para probar su validez. Pero es preciso notar que como tal instrumento, las Matemáticas Financieras no entran en consideraciones económicas estructurales sobre las causas que motivan el precio de un activo financiero. Su metodología es más abstracta que la de la Economía Financiera.

Hay dos aspectos fundamentales de las finanzas actuales que marcan la necesidad de matemáticas de mayor complejidad: En primer lugar, una parte del interés de la Economía Financiera está en los instrumentos financieros que tienen precios regulados por mercados y que consecuentemente están sometidos a incertidumbre. La cuantificación del riesgo obliga a introducir modelos de probabilidad. En segundo lugar, si bien los fenómenos financieros tienen en general una estructura discreta, los modelos matemáticos que hoy se utilizan en Finanzas, tienen frecuentemente estructura continua. Por ejemplo, en una bolsa de valores no se realizan transacciones de modo continuo. No obstante, los sistemas informáticos de contratación realizan un flujo de operaciones con intervalos de tiempo muy reducidos. Las finanzas modernas han introducido modelos basados en tiempo continuo que han permitido usar la tecnología de las ecuaciones diferenciales estocásticas (véase [3]). De este modo se han podido construir y analizar modelos continuos del comportamiento de los precios de un activo financiero y de sus activos derivados asociados.

---

[1] D. Jou, *Las escrituras del universo*, El Ciervo, Barcelona (2003).

Para dar una idea más precisa de lo que supone el paso al tiempo continuo consideremos un ejemplo muy simple: Un depósito a plazo fijo de un año es un activo financiero sin riesgo (¡si la entidad depositaria es solvente, claro está!). Si el valor depositado es S_0 y la tasa de interés es r, a final del año, el valor del depósito es $S_0(1+r)$ y después de t años será $S_0(1+r)^t$. Pero si los intereses fuesen pagaderos en n periodos inferiores a un año, la evolución del valor sería la siguiente

$$S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = S_0\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{\frac{n}{r}rt}.$$

Para valores altos de n, el valor del depósito está próximo al que se obtiene pasando al límite en la expresión anterior, es decir, $S(t) = S_0e^{rt}$ y que corresponde a la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

con la condición inicial $S(0) = S_0$. Éste es un modelo continuo del comportamiento de un activo sin riesgo que podría ser modificado para incluir situaciones más realistas, como la de un interés variable en el tiempo o la presencia de una perturbación aleatoria en el segundo miembro.

Planteemos de nuevo la cuestión inicial pero separando ahora dos aspectos muy diferentes:

- ¿Pueden las Matemáticas ayudar a construir modelos eficientes que permitan predecir el comportamiento de un mercado financiero?
- ¿Pueden las Matemáticas ayudar a desarrollar métodos de inversión racionales que busquen minimizar el riesgo y maximizar el beneficio?

En las siguientes secciones trataremos de dar una respuesta a ambas cuestiones.

PREDICCIÓN EN MERCADOS FINANCIEROS

Hasta finales del siglo XIX los científicos mantienen en general un punto de vista muy optimista sobre las posibilidades de modelar los fenómenos naturales mediante ecuaciones diferenciales deterministas en el convencimiento de que el conocimiento preciso de las condiciones iniciales del fenómeno permitiría determinar su evolución con certeza. El desarrollo de la Mecánica Cuántica, que tiene una base esencialmente estadística, fue sin duda una prueba clara de la incapacidad de construir un modelo determinista completo de los fenómenos naturales.

En Mecánica de los Medios Continuos, las leyes de conservación básicas se completan con leyes de comportamiento o relaciones constitutivas para formar modelos que nos permiten representar determinados fenómenos físicos. Las relaciones constitutivas son fruto de la experimentación y la observación de datos. La validez de una ley de conservación en el ámbito macroscópico es innegable pero la validez de una relación constitutiva puede ser cuestionable. Así, las relaciones constitutivas que se utilizan para materiales elasto-visco-plásticos, tanto en su forma como en la precisión de los parámetros que involucran, pueden ser cuestionadas en su validez si en el fenómeno a modelar no concurren determinadas circunstancias. Es decir, aún en disciplinas muy bien fundamentadas se incurre en un cierto *riesgo de modelo*. ¿Cabe pensar en algo similar en los modelos financieros? En los fenómenos financieros generalmente se dispone de una elevada cantidad de datos históricos con los que los que se puede pensar en inferir leyes de comportamiento. Las técnicas de *data mining* permiten extraer relaciones válidas de grandes masas de datos. Sin embargo, cuando se manejan datos financieros la posibilidad de confundir lo esencial con lo espurio parece casi inevitable.

Como nota perversa, de la referencia [5] extraemos el siguiente *mal proceder:* Un asesor financiero selecciona en una base de datos a 6400 posibles clientes. Envía una predicción positiva sobre el comportamiento de un mercado bursátil en la próxima semana a la mitad de sus clientes y negativa a la otra mitad. Así lo hace en las siguientes semanas eliminando a los clientes a los que ha enviado una predicción equivocada. Al final de 8 semanas le quedan 100 clientes con los que ha tenido un pleno acierto y los que podrá pedir el pago de una suscripción ya que la observación de los resultados que tienen les puede llevar a inferir que el que predice lo hace con un método correcto. Éste es un ejemplo de lo que se conoce como *data snooping*. Este término se usa en el mismo sentido que *data mining* pero con connotaciones negativas.

Acción empresa automovilística española.

En los fenómenos de naturaleza financiera, como los que ocurren en un mercado de valores, el sistema es capaz de observarse y reaccionar de acuerdo a estas observaciones lo que no ocurre en muchos sistemas físicos. Esto aumenta aún más la complejidad del sistema y por ello, la necesidad de representar la evolución de determinadas magnitudes por variables aleatorias es algo bien conocido desde los albores de estas disciplinas. De hecho, en general, no parece factible el diseño de un modelo determinista que permita predecir eficientemente el comportamiento de un activo financiero en un mercado. En realidad, el argumento es muy sencillo: Si el precio de un activo que se regula en un mercado fuese predecible, todos los inversores racionales estarían dispuestos a sacar beneficio de ello comprando cuando el precio fuese bajo y vendiendo cuando subiese y pronto los inversores irracionales desaparecerían del mercado con sus bolsillos aligerados. Es pues necesario admitir que la incertidumbre está presente en el mercado y cualquier compraventa de un activo financiero supone el encuentro de dos pronósticos razonables contrapuestos sobre la evolución de los precios.

No obstante, en relación con los mercados financieros (en particular, los mercados bursátiles de acciones de empresas), existe una multitud de expertos financieros que realizan predicciones sobre la evolución de los activos que se cotizan en ellos. Las técnicas empleadas van desde la simple intuición basada en la experiencia y el conocimiento de la situación actual de la empresa, hasta métodos basados en el comportamiento geométrico de los gráficos de la cotización de la acción y de sus volúmenes de contratación. La formación de figuras geométricas en un gráfico o la detección de determinadas ondas son indicativos, según estas teorías, de su comportamiento futuro. No parece claro el soporte teórico de estas *teorías chartistas* que no son consideradas como teorías académicas. La validez de las estrategias para operar un mercado basadas en técnicas del llamado Análisis Técnico han recibido recientemente alguna atención de la comunidad científica (véase la referencia [4]) con valoraciones diferentes.

Además, en general, estas teorías hacen conjeturas más cualitativas que cuantitativas. Se han realizado pruebas empíricas para demostrar que los mercados son eficientes y aunque esporádicamente algunos trabajos muestran ineficiencias del mercado, se admite que estas desaparecen rápidamente. Se acepta que la capacidad de predicción en el corto plazo no está en absoluto justificada y estás predicciones no son racionales. En términos coloquiales, se podría aducir a los que defienden capacidades de predicción de los mercados financieros la expresión popular *Si tú eres tan inteligente por qué aún no eres rico* que no podría ser contestada sin incurrir en un alto grado de hipocresía.

Cualquier modelo que pretenda ser realista debe incluir algún término de ruido que de modo razonable represente las alteraciones de los mercados por la llegada de informaciones imprevisibles o por el momentáneo desajuste entre la oferta y la demanda..

Las teorías racionales más simples de los precios de las acciones consideran modelos que aun admitiendo que el comportamiento en media de los precios del mercado es predecible de acuerdo con los datos de la serie histórica, el proceso está perturbado por un ruido que se simula con ayuda de la volatilidad de la serie histórica y los incrementos de un proceso estocástico que se conoce como movimiento Browniano.

Estas teorías están actualmente aceptadas a pesar de que cuando un suceso financiero relevante ocurre, como la crisis de 1987, la crisis tecnológica o la crisis del 11 de septiembre, se cuestione su validez. Actualmente se dedica un considerable esfuerzo para desarrollar modelos realistas de activos financieros, basados en procesos más complejos que el Browniano y parámetros que son también procesos estocásticos.

LOS NUEVOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS

Es razonable que el inversionista financiero piense en disminuir el riesgo que supone invertir en un solo activo y esté interesado en otros modos de inversión que disminuyan este riesgo. La primera posibilidad que tiene en este sentido es la de diversificar su inversión, invirtiendo en varios activos. Éste es el consejo que habitualmente da el asesor financiero a un inversor. Pero, ¿puede realizarse esta diversificación de un modo racional de modo que el riesgo resulte controlado? En primer lugar, es necesario precisar que se entiende por riesgo. En principio, se puede aceptar que el riesgo de un activo financiero (por ejemplo, una acción de una empresa que cotice en un mercado de valores) se mide por su volatilidad que puede estimarse por la desviación típica de la serie histórica de los valores del activo.

Para precisar estas ideas consideremos una cartera formada por n valores cuyos rendimientos medios por unidad de tiempo son μ_i, su volatilidad σ_i y sus correlaciones son ρ_{ij}. Se considera una cartera formada con la proporción w_i de cada uno de los activos. En consecuencia, la media y la volatilidad del valor de la cartera de activos están dadas por:

$$\mu = \sum_i w_i \mu_i \qquad \sigma^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Si se admite que la media y covarianza de los activos permanezcan constantes, el inversor puede buscar las proporciones w_i tales que maximicen μ manteniendo σ en un determinado rango. Es decir, el inversor puede buscar maximizar su rendimiento manteniendo el riesgo controlado:

$$\max_{w_i} \mu \quad \text{con la restricción } \sigma \leq \sigma_0.$$

Éste es un ejemplo simple de como manejar una cartera de activos conocido como *optimización media-varianza*. Ha sido desarrollado por el Premio Nobel H.

Markowitz en los años cincuenta y constituye el punto de partida de los métodos de inversión racional modernos que están fundamentados en las teorías de la Optimización y el Cálculo Estocástico.

Una característica fundamental de este modo de inversión es que utiliza únicamente activos financieros básicos. Pero esta no es la única manera de disminuir el riesgo financiero. Ya desde muy pronto, junto a los activos financieros subyacentes han aparecidos otros activos, llamados derivados, que están relacionados con ellos y que se utilizan básicamente para disminuir el riesgo aunque impropiamente puedan también ser concebidos como apuestas sobre si un activo subyacente va a subir o a bajar.

En los mercados bursátiles se negocian acciones de determinadas empresas de modo que sus precios se establecen por equilibrio entre la oferta y la demanda. Paralelamente a estos mercados, en las últimas décadas han aparecido otros mercados que negocian contratos que se derivan de los primeros. Estos contratos regulan la obligación y/o el derecho a comprar una acción u otro activo en un plazo fijado de antemano. Se conocen como *derivados financieros*. Esencialmente, el comportamiento de estos activos no difiere de los activos subyacentes. Su precio es fijado por el equilibrio de oferta y demanda en un mercado organizado y en principio la construcción de modelos sobre estos productos está sometida a las mismas consideraciones que los activos subyacentes. Las dos cuestiones básicas que pueden plantearse son: ¿Podría establecerse racionalmente una relación entre los precios de derivados y subyacentes? ¿Cómo pueden utilizarse los derivados para disminuir el riesgo financiero? Sin duda, se ha realizado un esfuerzo considerable en el mundo académico por responder racionalmente a estas cuestiones dadas sus notables repercusiones económicas.

Existe una cantidad considerable de contratos de este tipo pero los básicos son los siguientes: Una *opción de compra* (Call) es un contrato entre dos partes de modo que el propietario de la opción tiene el derecho (pero no la obligación) de comprar la acción a la otra parte hasta ó en la fecha del vencimiento por una cantidad fijada llamada precio de ejercicio. Obviamente, en una *opción de venta* (Put) el derecho del propietario es a vender. Si tiene la capacidad para ejercitar la opción durante el plazo que va desde que se suscribe la opción hasta la fecha de vencimiento la opción se dice americana. Si la opción solamente se puede ejercitar en la fecha de vencimiento se dice europea.

En el momento en que se suscribe la opción, el propietario paga una prima a la otra parte. A su vez el propietario puede vender su opción (o comprar nuevas) en un mercado de estas opciones. Si el propietario del contrato tiene el derecho y obligación de comprar o vender el activo financiero (acción), el contrato se llama *futuro*. Mientras que el propietario de una opción de compra desea que el precio del activo aumente, el propietario de una opción de venta desea que disminuya. Se podría pensar que el valor de una

Bolsa de Nueva York (1850).

opción de compra debe coincidir con el valor de una opción de venta ya que sus efectos son opuestos. Esto no es así ya que el contrato de una opción da el derecho pero no la obligación y la diferencia de valor entre ambas opciones, como se justificará posteriormente, es justamente el valor de un contrato en el que ambas partes estén obligadas, es decir, un futuro. El efecto de estos derivados financieros es lo que los economistas llaman la intermediación financiera, es decir, la transferencia de riesgo financiero de unos individuos a otros. Actualmente, en España existe un mercado MBBV (Madrid, Barcelona, Bilbao, Valencia) en donde se negocian activos financieros tales como acciones de empresas y un mercado de derivados MEF (Madrid, Barcelona) donde se negocian derivados de estos activos financieros.

EL ANÁLISIS DE BLACK-SCHOLES-MERTON

Esencialmente, la teoría de valoración de opciones sobre acciones de Black, Scholes y Merton (1973) está basada en dos hipótesis:

1. La aceptación del modelo del movimiento de los precios de una acción como un Browniano geométrico, tal como se ha descrito anteriormente.
2. La ausencia de arbitrajes en el mercado. Es decir, las inversiones sin riesgo solamente merecen un rendimiento r similar al de los depósitos fijos en una institución sin riesgo. Si un inversor realiza una estrategia de inversión con diversos activos financieros (acciones, opciones y futuros) de modo que se elimina el riesgo, el rendimiento que racionalmente obtendrá será el de un activo sin riesgo r. Esta teoría, laureada con el premio Nobel en 1997, ha supuesto el punto de partida para el desarrollo de una intensa actividad de investigación en estas cuestiones. Además fórmulas y modelos que se derivan de ella son usadas diariamente por los agentes financieros en los mercados de derivados a pesar de que esta teoría incluye hipótesis muy simplificadoras tales como que las transacciones no tienen gastos. Aunque algunos economistas atribuyen la fiabilidad de la fórmula de Black-Scholes a un efecto de

profecía autosatisfecha, lo cierto es que la metodología usada tiene una profunda base racional y su uso se ha extendido incluso a la valoración de otros activos que no son de naturaleza financiera (opciones reales).

Scholes y Black.

En base a este análisis el precio de una opción sobre una acción cuyo precio está representado por S, está dado por una función V de dos variables (precio de la acción e instante de tiempo). De este modo, en cada instante de tiempo t, observando el valor S que tiene la acción en el mercado, el valor de la opción es estimado por $V(S,t)$. El análisis de Black-Scholes-Merton justifica que la función de dos variables reales V es solución de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

y verifica una condición final $V(S,T)=F(S)$, donde F es la llamada función de liquidación que determina las condiciones económicas en las que se resuelve el contrato en la fecha de vencimiento T. Éste es el modelo continuo de las opciones europeas (aquellas que pueden ejercitarse necesariamente en la fecha de vencimiento T). Se puede representar explícitamente la solución de esta ecuación en términos de funciones de distribución normal. De hecho, la solución se puede expresar como:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}E(F(\tilde{S}(T))$$

donde E representa la esperanza del modelo de probabilidad considerado en el modelo de precios de la acción y $\tilde{S}$ la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$d\tilde{S} = r\tilde{S} + \sigma\tilde{S}dW \ , \ \tilde{S}(t) = S \ .$$

Las representaciones probabilísticas permiten obtener una mejor comprensión del significado financiero del método de valoración y posiblemente están más cerca de los métodos de aproximación usados en las Finanzas Aplicadas. No obstante, la interpretación mediante ecuaciones en derivadas parciales abre otras posibilidades para resolver modelos más complejos y obtener mejoras notables en la precisión de los resultados.

Es muy importante señalar que las opciones que comúnmente se negocian en los mercados son de tipo americano. Es decir, el propietario puede ejercitar su derecho con anterioridad a la fecha de vencimiento. El modelo matemático anterior no es entonces válido. Para reflejar la capacidad de decidir el ejercicio de la opción en cualquier instante previo a la fecha de vencimiento, es necesario introducir desigualdades en las ecuaciones básicas. Bensoussan [1] y Karatzas [2] establecieron la conexión entre la formulación como inecuación variacional y los problemas de parada óptima. Las inecuaciones variacionales constituyen un instrumento matemático bien conocido que había sido utilizado muy provechosamente para analizar problemas que en Mecánica y Termodinámica se conocen como *problemas unilaterales*. Las relaciones matemáticas que sirven para modelar el comportamiento del precio de una acción americana tienen muchas similitudes con las que permiten modelar el comportamiento del desplazamiento de una membrana elástica en presencia de un obstáculo rígido, las tensiones en un material plástico o las velocidades en un fluido de Bingham.

El tipo de opciones cuya valoración requiere modelos matemáticos complejos no termina en las europeas y americanas. Las hay también asiáticas, rusas, parisinas, de Bermudas y otras más *exóticas*. En ellas se introduce más complejidad en los modelos. Pero esta también puede provenir del aumento de dimensión en las ecuaciones debido a que las opciones dependen de varios factores de riesgo como el tipo de interés, el cambio de divisa, una cesta de acciones, etcétera. El modelo geométrico Browniano también puede ser cuestionado como modelo de precios dando cabida a modelos donde el ruido aleatorio esté modelado por procesos estocásticos más complejos. Ésta es un área de gran actividad en investigación no sólo por el interés académico de los problemas que se motivan sino también por las enormes repercusiones prácticas en el mundo de las Finanzas Cuantitativas. Los libros de Wilmott [6] y [7] son un medio excelente para introducirse en este mundo.

REFERENCIAS

[1] Bensoussan, A. & Lions, J.L.: *Applications des inequations variationelles en controle stochastique*, Dunod, París,1978.

[2] Karatzas, I.: *On the pricing of american options*, Appl. Math Optimization **17**, 37-60, 1988.

[3] Merton, R.C.: *Continuous-time finance*, Blackwell, 1992.

[4] Sullivan, R., Timmermann, A. & White, H.: *Data snooping, technical trading rule performance and bootstrap*, The Journal of Finance, Vol. LIV, nº 5, 1999.

[5] White, H.: *A reality check for data snooping*, Econometrica, Vol. 68, nº 5, pág. 1097-1126, 2000.

[6] Wilmott, P.: *Derivatives: The theory and practice of financial engineering*, J. Wiley-Sons, 1998.

[7] Wilmott, P., Dewynne, J. & Howison, S.: *Option pricing: Mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, 1993.

Carlos Moreno González
Dpto. de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico