

- Rosner, D.E.: "Side-wall Gas "Creep" and "Thermal Stress Convection" in Microgravity Experiments on Film Growth by Vapor Transport", *Phys. Fluids A - Fluid Mechanics* **1** (11), 1761-1763 (1989).
- Rosner, D.E. & Park, H.M.: "Thermophoretically Augmented Mass, Momentum- and Energy Transfer Rates in High Particle Mass-Loaded Laminar Forced Convection Systems", *Chemical Engineering Sci.* **43**, (10) 2689-2704 (1988).
- Rosner, D.E. & Kim, S.S.: "Optical Experiments on Thermophoretically Augmented Submicron Particle Deposition from "Dusty" High Temperature Gas Flows", *Chemical Engineering J* (Elsevier) **29** (3) 147-157 (1984).
- Rosner, D.E. & Allendorf, H.D.: "High Temperature Kinetics of the Oxidation and Nitridation of Pyrolytic Silicon Carbide in Dissociated Gases", *J. Phys. Chem.* **74**, 1829-1839 (1970a).
- Rosner, D.E. & Allendorf, H.D.: "Nitrogen as an Ablative Reactant in Dissociated Air Kinetics of the Attack of Silicon Carbide by Atomic Nitrogen/Atomic Oxygen Mixtures Above 1800K", *AIAA J.* **8**, 166-168 (1970b).
- Stark, W.J.: Tesis Doctoral, PhD Dissertation on *Flame Synthesis of Pigment and Catalyst Particles*, ETH-Zurich, Switzerland, Inst. Process Engineering (2002).
- Tandon & Rosner, D.E.: "Translational Brownian Diffusion Coefficient of Large (Multi-particle) Suspended Aggregates", *Industrial/Engineering Chemistry (ACS)* **34** (10) 3625-3277 (1995).
- Wigner, E.: "On the Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", Ch.17 in *Symmetry and Reflections-Scientific Essays*, Indiana Univ. Press 1967).
- Xing, Y.; Koylu, U.O. & Rosner, D.E.: "Synthesis and Restructuring of Inorganic Nano-particles in Counterflow Diffusion Flames", *Combustion and Flame* **107**, 85-102 (1996); See, also: *AICHE J.* **43** (11A) 2641-2649 (1997) y *AICHE J.* **48** (3) 476-491 (2002).

Daniel E. Rosner
Dpto. de Ingeniería Química
Universidad de Yale

El número de oro

A través de los tiempos los pueblos han aspirado a rodearse de cosas bellas. Pero ¿qué es la belleza? Los griegos fundaron la Estética como un medio de analizar la belleza, y suponían que en la base de ésta estaba la Armonía. Según los griegos Belleza y Verdad estaban estrechamente relacionadas y el artista busca la Verdad mediante la Belleza y el científico busca la Belleza mediante la Verdad.

Si encontrásemos un método para medir y comparar la belleza de una escultura, un nocturno, un templo, o un progreso de la ciencia, seríamos capaces de cuantificar qué es más bello y qué lo es menos. La búsqueda de esta piedra filosofal ha llevado a muchos creadores a seguir unas reglas y en otros casos a romperlas. Los siglos XIX y XX han sido muchas veces testigos de cánones nuevos y no obstante sigue habiendo una belleza soterrada que es difícil de encasillar en fórmulas y un concepto de armonía al que no podemos sustraernos cuando oímos una fuga de Bach, admiramos la Mona Lisa de Leonardo o vemos un templo griego.

En Ciencia se ha asociado la Belleza con la Simplicidad, que quizás sea la forma suprema de la Armonía, formulaciones como las leyes de Newton, de Kepler, o la conocida

$$E = m c^2$$

han sido celebradas por explicar de una forma sencilla hechos inicialmente complicados pero que, gracias a inteligencias preclaras, se simplificaron y se hicieron transparentes. Los bellos estudios de Newton sobre la composición de la luz, la explicación de Einstein sobre el extraño movimiento browniano o el fenómeno fotoeléctrico, las leyes de Maxwell o el Teorema de Gödel sobre la incompletitud de la Lógica, sobrecogen a los científicos y admiran a los profanos que leen libros de

divulgación científica como "La nueva mente del emperador" o "La historia del tiempo".

El arquitecto Leone Batista Alberti dice a propósito de la belleza: "*Hay algo más grande, compuesto de una combinación y una conexión de tres cosas (número, limitación y orden), algo que saca a la luz la cara de la belleza. Y lo llamamos Armonía, y que es, sin duda, la fuente del encanto y de la belleza. Hay una intención y búsqueda de la Armonía cuando se ordenan partes diferentes en su naturaleza mediante una razón perfecta que conjuntamente crean Belleza... Ella acompaña la vida humana y penetra a través de la naturaleza de las cosas. También todo lo que la Naturaleza hace está medido por las leyes de la Armonía... sin ésta se desintegra la unidad de las partes*".

Hay figuras geométricas de extraordinaria belleza como el círculo, el cuadrado, el triángulo isósceles, las esferas, las pirámides, el cono, y muchas otras que entran por los sentidos, sabiendo que estamos contemplando figuras que tienen una belleza y que posiblemente no podamos explicar. Un conocimiento de las Matemáticas Elementales nos dice que detrás de ellas se esconden números como π , $\sqrt{2}$.

Los pitagóricos decían "Los números determinan todo", conclusión a la que habían llegado mediante un estudio de la filosofía, la ciencia y la teodicea. A lo largo de la historia ha habido una proporción denominada Razón Divina, Razón Áurea, Número Áureo, y que se encuentra en muchas manifestaciones del arte.

Johannes Kepler dijo: "*La Geometría tiene dos tesoros: El Teorema de Pitágoras y la Razón Áurea. El primero puede ser comparado con una medida de oro, el segundo con un diamante*".

CONSTRUCCIÓN DE LA SECCIÓN ÁUREA: ϕ Y Φ

Si tenemos un segmento AC , buscamos un punto B del segmento tal que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB} = \phi =$$

$$= 0,618033... = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

podemos construirlo sólo con regla y compás.

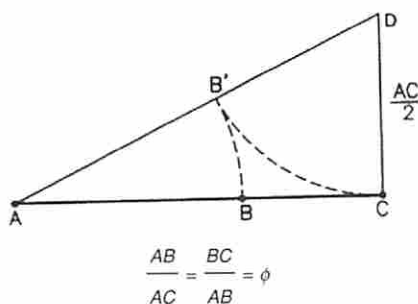


Figura 1. Construcción de la sección áurea ϕ .

Ahora vamos a encontrar un punto exterior C al segmento AB (ver Figura 2) tal que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \Phi =$$

$$= 1,618033... = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

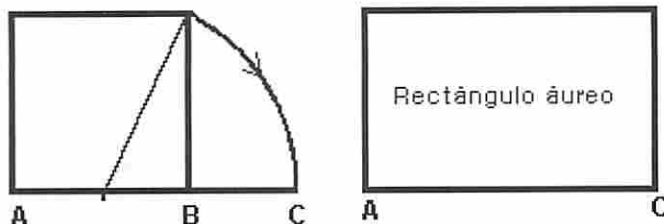


Figura 2. Construcción de la sección áurea Φ .

¿Cómo surgen matemáticamente estos dos números? El elemento más sencillo en geometría, arquitectura, o mecánica es el segmento que une dos puntos.

“Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que exista entre ellas un vínculo que las una. No hay mejor vínculo que el que hace de sí mismo y de las cosas que une un todo único e idéntico. Ahora bien, tal es la naturaleza de la proporción....”

PLATÓN, “Timeo”

Dados dos puntos A y B , el segmento que los une AB y un tercer punto C entre ambos, si llamamos a, b, c a las distancias de AC, CB, AB , respectivamente, las posibles proporciones son:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, (c = a + b)$$

Por tanto, si igualamos dos a dos estas razones, nos salen $C_2^6 = 15$ posibilidades. Eliminando las que hacen $a = 0$ y $b = 0$ y las que producen la imposibilidad de que c no esté entre a y b , nos resultan cuatro a considerar:

1.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \text{ y } \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

que conducen al resultado $a = b$, con lo que sale la partición simétrica.

2.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{a+b}{a}$$

Al ser mayor que 1 la última proporción, entonces a es mayor que b , luego C estará más cerca de B que de A .

3.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{b}{a+b}$$

En este caso b es mayor que a , luego C estará más cerca de A que de B . Pero observemos que si cambiamos a por b y b por a , la proporción es la misma. Trabajaremos por tanto con la igualdad de 2.

Denotemos $a/b = x$, entonces tenemos

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

o sea

$$x^2 = x + 1$$

ecuación de segundo grado con soluciones:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ y } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como podemos observar una raíz es positiva y la otra negativa. A la primera la denotamos:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La segunda está íntimamente relacionada con Φ :

$$\frac{1}{\Phi} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como era de esperar la particular ecuación que nos dan las soluciones nos permiten obtener interesantes relaciones:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Rightarrow \Phi(\Phi - 1) = 1 \Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

de forma aproximada:

$$\Phi = 1,61803398875... \text{ y } \phi = \frac{1}{\Phi} = 0,61803398875...$$

y aún:

$$\Phi^2 = 2,61803398875...$$

En la serie: 1, Φ , Φ^2 ,..., Φ^n ,... se tiene la igualdad siguiente:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$$

pudiendo obtener un término por la suma de los dos anteriores. Este tipo de recurrencia será fundamental en las aplicaciones del número Φ que denominamos **RAZÓN ÁUREA** o **NÚMERO ÁUREO**.

Veamos más propiedades de Φ :

Si partimos de que $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ sustituyendo sucesivamente tenemos:

$$\Phi = \lim_n \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

y de la ecuación $\Phi = 1 + 1/\Phi$ surge, por el mismo procedimiento:

$$\Phi = 1 + \lim_n \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

o bien

$$\phi = \Phi - 1 = \lim_n \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Como sabemos, los números reales pueden ser racionales o irracionales, dependiendo de que puedan ser escritos como fracción de dos naturales o no. En Fibonacci Quarterly, volumen 13, pág. 32, aparece el artículo: “ Φ es irracional” (Shallit-Ross); la demostración es sencilla y la vamos a desarrollar:

Supongamos que $\Phi = p/q$, donde el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1, entonces:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} = 1$$

Como q no es cero, podemos multiplicar por q^2 resultando:

$$p^2 - qp = q^2$$

Factorizando $p(p - q) = q^2$, entonces p es factor de q^2 y, por lo tanto, de q . Como q y p no tienen factores comunes, entonces p es 1. También reordenando la ecuación anterior:

$$p^2 = qp + q^2$$

y factorizando $p^2 = q(p + q)$, lo que implica que q es factor de p^2 y por lo tanto de p , entonces q es 1.

Aquí aparece la contradicción, pues si p/q fuese 1 entonces no satisface la ecuación $x^2 = x + 1$.

RECTÁNGULO ÁUREO

Un rectángulo áureo es aquel que tiene los lados en proporción 1 : Φ (ver Figura 3).

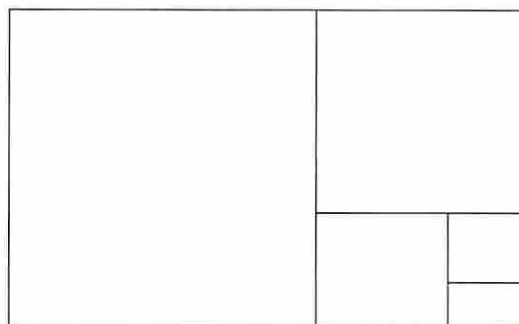


Figura 3. Rectángulo áureo.

TRIÁNGULO BÁSICO

Veamos el triángulo isósceles ACD : $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$. Si biseccionamos el ángulo ABC , la bisectriz divide el lado AC en dos trozos AD y DC (ver Figura 4).

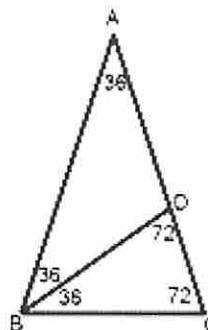


Figura 4. Triángulo de dimensiones áureas.

Supongamos que $DC = 1$, entonces $AD = r$. Por la similaridad de los triángulos ABC y DBC , que son isósceles, tenemos que $AD = DB = BC = r$, y tenemos que:

$$\frac{r}{1} = \frac{1+r}{r}$$

y, por lo tanto, la razón $AB/AD = r$, donde $r = \Phi$ es la razón áurea.

PENTÁGONO REGULAR

Vayamos pues al pentágono regular $ABCDE$. Si unimos todos los vértices entre sí, las intersecciones de los segmentos los denominamos $FGHIJ$, que a su vez forman un pentágono regular, y si observamos los triángulos isósceles $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$, vemos que la razón áurea es la que controla la duplicación del pentágono. Lo mismo ocurriría si partimos de $FGHIJ$ para obtener $ABCDE$ (véanse las Figuras 5, 6 y 7).

El triángulo isósceles de ángulos $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$ es la base del pentágono regular estrellado. Obsérvese que las

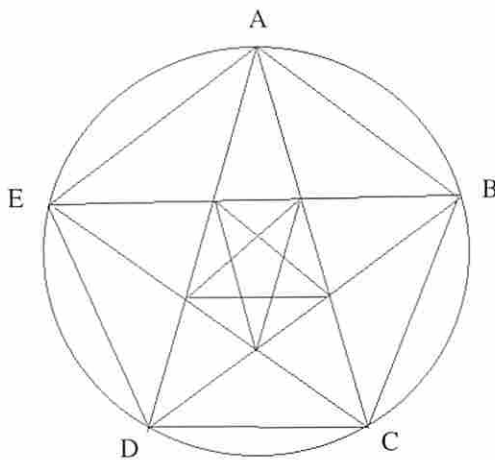


Figura 5. Pentágono convexo y no convexo regular.

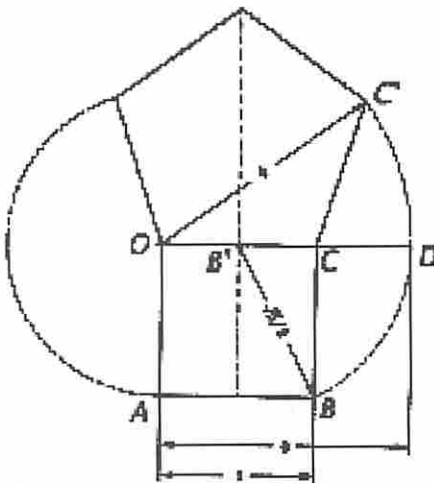
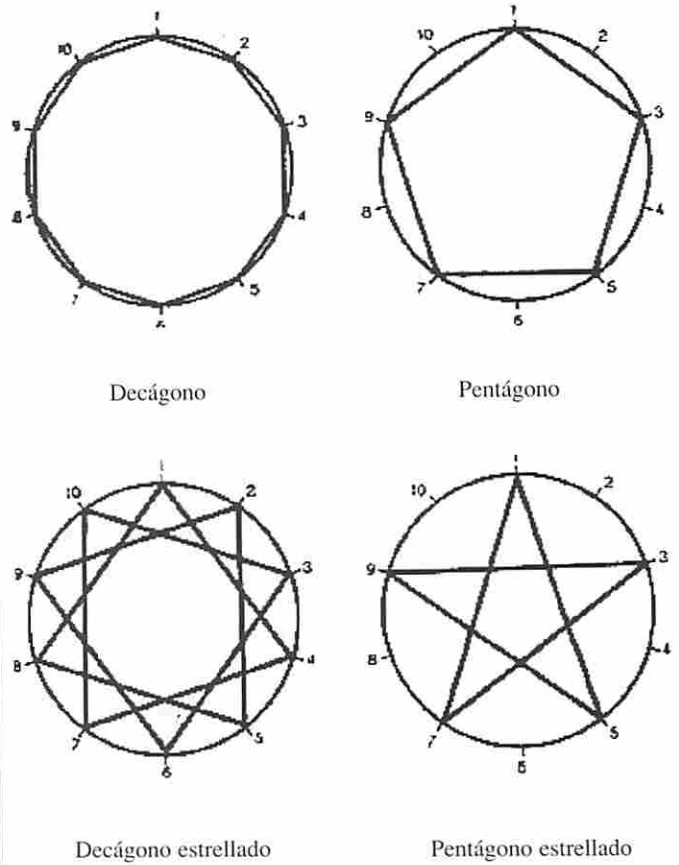


Figura 6. Construcción del pentágono regular.



Decágono

Pentágono

Decágono estrellado

Pentágono estrellado

Figura 7. Tipos de pentágonos y decágonos.

diagonales y el lado están en la proporción del número de oro.

El triángulo isósceles de ángulos: $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$ nos servirá también para obtener el lado del decágono regular. Obsérvese que el decágono podemos descomponerlo en 10 triángulos isósceles de esas características, y fácilmente se ve que el lado del decágono es justamente la parte áurea del radio (Figuras 7 y 8).

Llevando ese valor sobre la circunferencia marcamos los 10 puntos. Al unirlos de dos en dos, dibujamos el pentágono regular, al unirlos de tres en tres, el decágono regular estrellado, y al unirlos de cuatro en cuatro el pentágono regular estrellado. Obsérvese en los polígonos estrellados cómo se forma interiormente el polígono convexo correspondiente.

El número está muy ligado al pentágono regular, tanto el convexo como el estrellado. El pentágono regular era el distintivo de los pitagóricos. Los pitagóricos se sentían fascinados por las propiedades de los números, e hicieron importantes descubrimientos en música al comprobar cómo al hacer vibrar una cuerda, cuya longitud fuera proporcional a ciertos números enteros, se producían unos sonidos melódicos, es decir, existían ciertas longitudes expresadas en forma de números asociados a la armonía de los sonidos y, por lo tanto, al deleite del espíritu. Esa escuela filosófica, más bien una secta religiosa, fascinados por las propiedades del número de oro y su representación gráfica en el pentágono regular, hicieron suyo ese símbolo que siempre ha poseído unas

connotaciones esotéricas. Para las invocaciones a los espíritus, al diablo, se valen de una escenografía donde siempre aparece el pentágono regular, como elemento intermedio, como puerta de acceso entre la realidad y la irracionalidad.

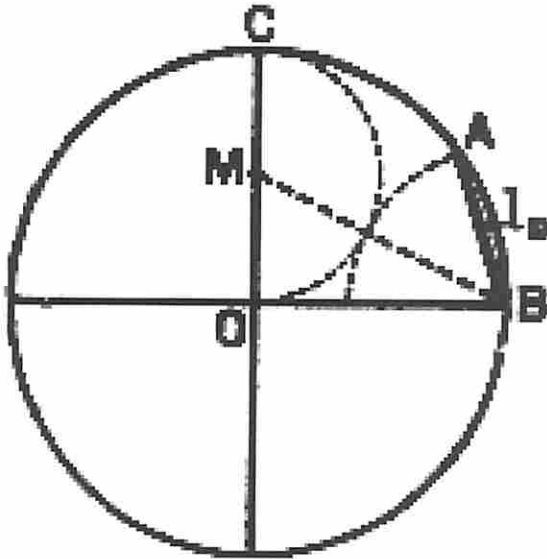


Figura 8. Construcción del decágono regular.

Vamos a ver un triángulo isósceles muy relacionado, el triángulo $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ ABC$, si descomponemos en los triángulos $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ ABD$, y en el triángulo $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ ADC$, entonces si $AB = AC = 1$, la base $BC = \Phi$.

El importante físico-matemático Roger Penrose en su libro "La nueva mente del Emperador" comenta como su mayor hallazgo la teselación de Penrose, lo que no deja de ser sorprendente en uno de los científicos, junto con Hawking, que más ha aportado a la física matemática en las últimas décadas (ver Figuras 9 y 10).

La teselación de Penrose está formada por dos rombos con los ángulos 36° y 72° que aparecen en la figura, llamados rombos áureos. Se forma una estructura pentagonal pero con la propiedad de que no es periódica, es decir

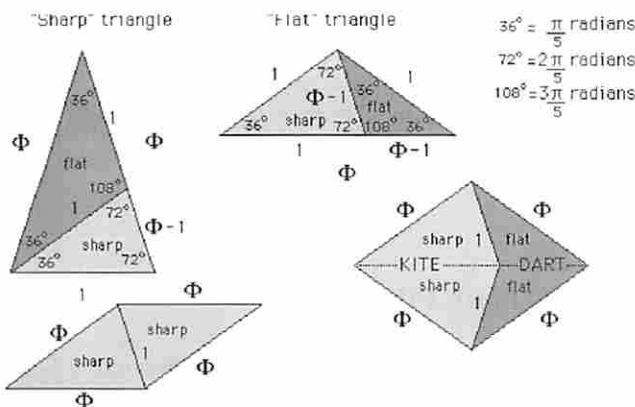


Figura 9. Piezas de Penrose.

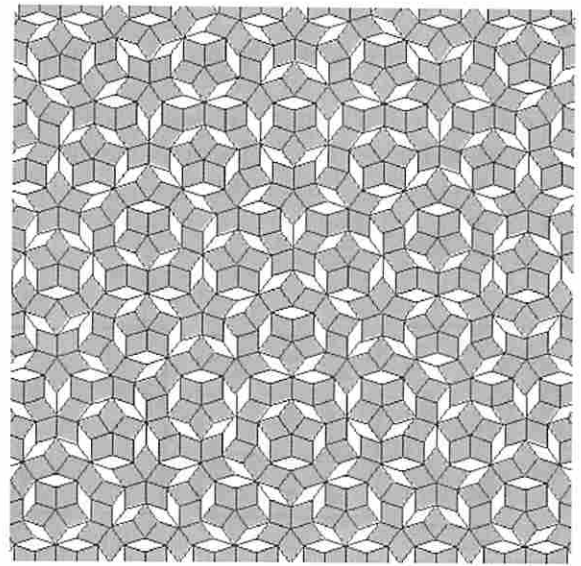


Figura 10. Teselación de Penrose.

no existe ningún paralelogramo que repita el mismo núcleo de la teselación. Esto resuelve un problema que en 1884 el famoso geómetra Felix Klein anticipó en su libro "Lectures on the Icosaedron...". Cien años justos después el físico israelí Dan Sechtman descubrió los cuasi-cristales, uno de los mayores avances de la Física Moderna.

Según la Principal Ley de la Cristalografía, sólo se admiten simetrías de ejes hasta de sexto orden en los cristales, y rechazaba las de quinto orden en los retículos cristalográficos. Shechtman vió que una mezcla de aluminio y manganeso en condiciones especiales producían una simetría del tipo del dodecaedro de quinto orden. Entonces lo relacionó con la Teselación de Penrose de 1972, entendiendo que, de forma análoga, una compactificación del espacio mediante icosaedros haría el mismo efecto en tres dimensiones.

El físico francés Gratia en el artículo "Quasi-crystals" (1988) dice: "El concepto de cuasi-cristal es de interés fundamental pues extiende y completa la definición de cristal. La teoría basada en este concepto reemplaza la idea tradicional de 'unidad estructural repetida en el espacio de modo estrictamente periódica' por el concepto de orden".

En este descubrimiento la simetría pentagonal pasa a ser una de las claves de la moderna cristalografía y del mundo natural. ...Y detrás de la simetría del dodecaedro y del icosaedro está el número áureo.

HECHOS GEOMÉTRICOS SOBRE ALGUNOS SÓLIDOS Y LA SECCIÓN ÁUREA

Los cinco sólidos regulares, esto es, aquellos en los que las caras, las aristas y los ángulos son iguales, denominados sólidos platónicos, son:

- El tetraedro con 4 vértices, 6 aristas y 4 caras. Las coordenadas de los vértices si las aristas tienen longitud $\sqrt{8}$, son $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ y $(-1,-1,1)$.

- El cubo con 8 vértices, 12 aristas y 6 caras. Las coordenadas de los vértices si las aristas tienen longitud 2 son $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
- El octaedro con 6 vértices, 12 aristas y 8 caras. Las coordenadas de los vértices si las aristas tienen longitud $\sqrt{2}$ son $(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1)$ y $(0,0,-1)$ (ver Figura 11).

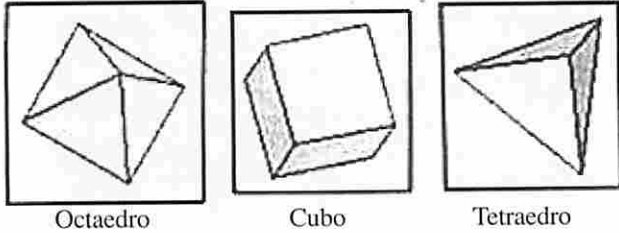


Figura 11. Figuras tridimensionales.

- El dodecaedro con 20 vértices, 30 aristas y 12 caras. Las coordenadas de los vértices si las aristas tienen longitud $2/\Phi$, son $(0, \pm \phi, \pm \Phi), (\pm \Phi, 0, \pm \phi), (\pm \phi, \pm \Phi, 0), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (ver Figura 12).

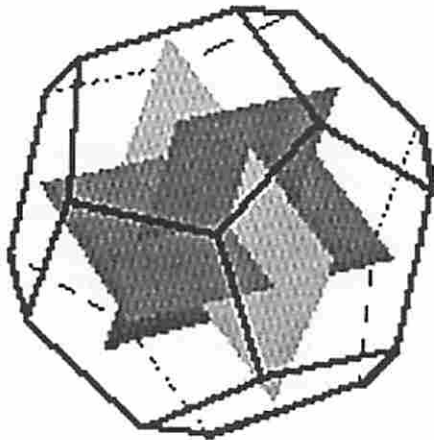


Figura 12. Dodecaedro y planos áureos.

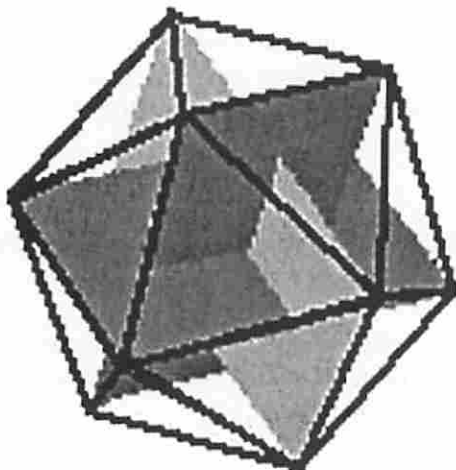


Figura 13. Icosaedro y planos áureos.

- El icosaedro con 12 vértices, 30 aristas y 20 caras. Las coordenadas de los vértices si las aristas tienen longitud 2 son $(0, \pm 1, \pm \Phi), (\pm \Phi, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm \Phi, 0)$ (ver Figura 13).
- El dodecaedro y el icosaedro son sólidos duales, pues si unimos los centros de las caras de un dodecaedro obtenemos un icosaedro y viceversa.

Lo mismo ocurre con el cubo y el octaedro. Y el tetraedro es dual de sí mismo. Si unimos los centros de las caras del dodecaedro obtenemos tres rectángulos áureos, y por lo tanto lo mismo ocurre para con los vértices del icosaedro. Una vez más vemos aparecer la Razón Áurea en los objetos en tres dimensiones que son considerados formas estéticamente perfectas.

LA ESPIRAL DE ORO, MODELO DE CRECIMIENTO ARMÓNICO

Matemáticamente una espiral áurea es una espiral encajada en un rectángulo áureo de la siguiente forma: Sea el rectángulo $ABDF$ con la proporción $1:\Phi$. Obtengamos el cuadrado $1:1$ $ABCH$. En el rectángulo $CDFH$ aparece la proporción $\phi:1$ (que es la misma $1:\Phi$), obtenemos el cuadrado $CDEI$ y el rectángulo siguiente es de nuevo áureo (ver Figura 14).

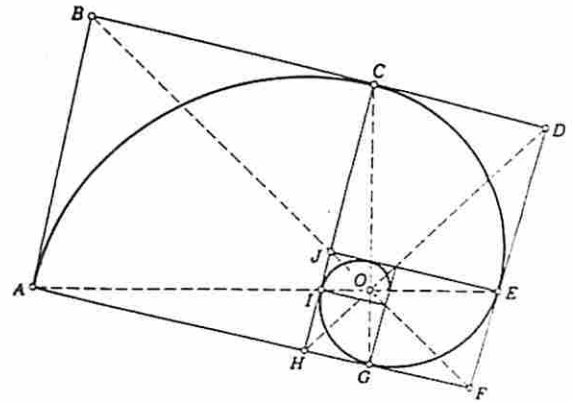


Figura 14. Aproximación a la espiral áurea.

En los cuadrados interiores se traza un arco cuarto de circunferencia como muestra la figura. Para buscar la ecuación de la espiral de oro ponemos el centro O de la espiral en $(0,0)$, por eje X tomamos OE y por eje Y tomamos OC . En cada rotación de 90° multiplicamos la longitud por ϕ y de esta forma vemos que la ecuación en coordenadas polares de la espiral es:

$$r = \Phi^{2\theta/\pi}$$

NÚMEROS DE FIBONACCI

Diremos que f_n ($n > 2$) es el *enésimo número de Fibonacci* si:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{donde} \quad f_1 = f_2 = 1$$

Así pues los primeros números de Fibonacci son:

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1	1	2	3	5	8
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	
13	21	34	55	89	
f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	
144	233	377	610	987	
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}		
1597	2584	4181	6765		
f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}		
10946	17711	28657	46368		

Los números de Fibonacci están llenos de propiedades matemáticas, pero la siguiente propiedad nos interesa especialmente:

TEOREMA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

Este hecho era intuido desde la antigüedad y nos dice que las proporciones:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}; \frac{89}{55}; \dots$$

$$\frac{1}{1} = 1,0; \frac{2}{1} = 2,0; \frac{3}{2} = 1,5; \frac{8}{5} = 1,6;$$

$$\frac{55}{34} = 1,6176; \frac{89}{55} = 1,6182; \dots$$

se aproximan a la razón áurea. Los pintores, escultores y arquitectos usaban unas veces el número Φ y otras, una aproximación como 55/34.

LOS EXPERIMENTOS DE FECHNER

El psicólogo Fechner hizo unas pruebas para averiguar la tendencia hacia la armonía en 347 personas (228 hombres y 119 mujeres, presentándoles unos rectángulos entre los cuales estaba el 21:34 de proporciones áureas, pidiendo que se eligiera el más armonioso. El rectángulo 21:34 fue el más elegido (ver Figura 15).

En 1958 científicos ingleses repitieron el experimento de Fechner comprobándose el mismo resultado y los rectángulos que también se eligieron fueron los 2:3 y los 13:23 que eran semejantes al rectángulo áureo.

Esto explica porqué muchas formas cotidianas tienen la razón áurea, porque resultan más atractivas a la vista y son un buen reclamo para su utilización. Las tarjetas de crédito, el DNI, espacios en grandes superficies, tienen la proporción 1: Φ , con el propósito de hacer más atractivo su uso.

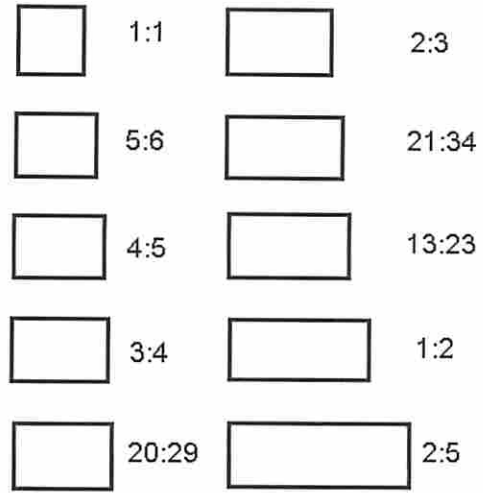


Figura 15. Test de Fechner.

LA RAZÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA Y EN EL HOMBRE

Las espirales áureas aparecen en el mundo animal. Los cuernos de los animales crecen como espirales equiangulares, y normalmente en gacelas, cabras y antílopes crecen según espirales áureas. Las ramas trepadoras tienen forma de hélice que también sigue una ley áurea.

Las conchas de los moluscos marinos tienen una forma de espiral, que por dentro están formadas por células vacías con superficies lisas, por dentro y por fuera rugosas, pero su crecimiento evidentemente es análogo al de los números de Fibonacci. La diferente textura se debe a una optimización de la resistencia a los choques.

Otros tienen una distribución puramente Fibonacci, así los foraminíferos tienen trece células cónicas, el nautilus tiene 34 y el tridacne gigante 5 células. Los moluscos prefieren los números de Fibonacci (ver Figura 16).

Muchos seres vivos tienen simetría pentagonal como las flores que se muestran en la Figura 17.

Hay estrellas de mar y erizos que tienen 8, 13, 33 e incluso 55 brazos (ver Figura 18).

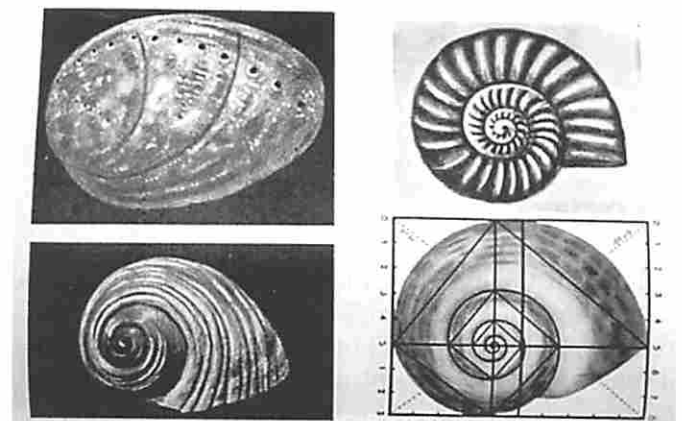


Figura 16. Las conchas y la espiral de oro.

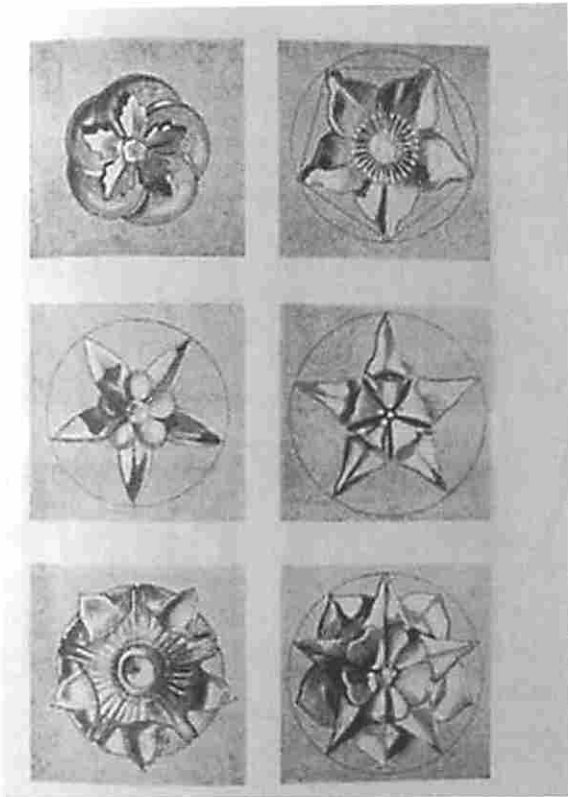


Figura 17. Números de Fibonacci en la Flora.

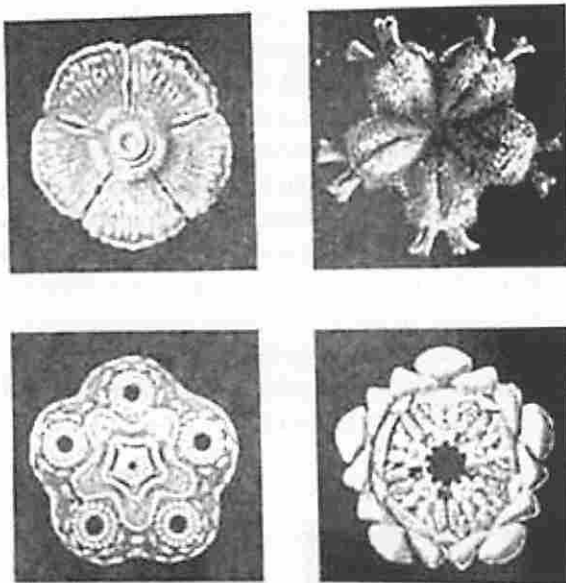


Figura 18. Números de Fibonacci en la Naturaleza marina.

FILOTAXIA

En la naturaleza hay fuertes leyes matemáticas de desarrollo como, por ejemplo, el crecimiento de las plantas, cuyo estudio es la Filotaxia. La ordenación de los distintos niveles en una planta, normalmente en espiral, las ramas en los árboles, los pétalos en las flores, los zarcillos de las ramas, se realizan mediante un eje de giro de una hélice en la dirección del crecimiento.

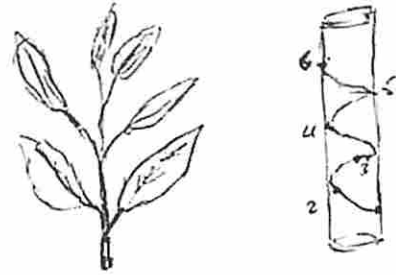


Figura 19. Simetría pentagonal en hojas.

En la Figura 19 vemos como las hojas se colocan consecutivamente en la rama según un giro de aproximadamente $144^\circ = 72^\circ + 72^\circ$ en la proporción 2:5, siendo $144 = 360/5$, de aquí la simetría pentagonal.

Pero hay otras simetrías. La ley fundamental de la Filotaxia dice que las fracciones que describen el eje de giro de las plantas sigue las proporciones de los números de Fibonacci:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}; \frac{89}{55}; \dots$$

¿Cuál es la causa de esta ordenación? La respuesta es la optimización de la exposición a los rayos del Sol. Esto explica que las estructuras densas en Botánica intenten buscar la máxima cantidad de radiación solar y siguen una ley de Fibonacci. Piñas, cactus, coliflores, girasoles colocan sus elementos con espirales de los números de Fibonacci (ver Figura 20).

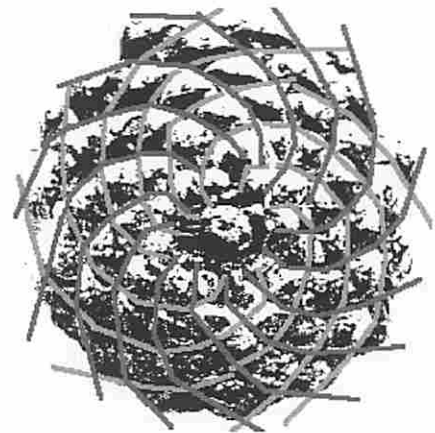


Figura 20. Los números de Fibonacci en Botánica.

LA RAZÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA, EN LA PINTURA Y EN LA ESCULTURA

La tumba de Khesi-Ra

A comienzos del siglo xx, los arqueólogos encontraron en Egipto la tumba del arquitecto Khesi-Ra, que estaba forrada con 11 paneles de los cuales sólo cinco se conservaban en buen estado. Las figuras de los paneles

tenían un carácter simbólico pero no eran capaces de analizar la estructura. En los años sesenta el arquitecto ruso Shevelev se fijó en que la proporción de los paneles era de $1:\sqrt{5}$ y de ahí sacó una teoría sobre las proporciones que expuso en su libro: *“Phenomenon of Ancient Egypt”*. Shevelev dice: *“Pero ahora, después de un análisis completo y discutido mediante el método de las proporciones, tenemos causas suficientes para afirmar que los paneles de Khesi-Ra son reglas de armonía codificadas mediante lenguaje geométrico... Por tanto, en nuestras manos tenemos una evidencia material que nos muestra el alto nivel de pensamiento de los intelectuales del antiguo Egipto”*.

¿Quién era Khesi-Ra? Por los antiguos textos tenemos que era Jefe de doctores, escriba del faraón, sacerdote del dios de la armonía y principal arquitecto del faraón (ver Figura 21).

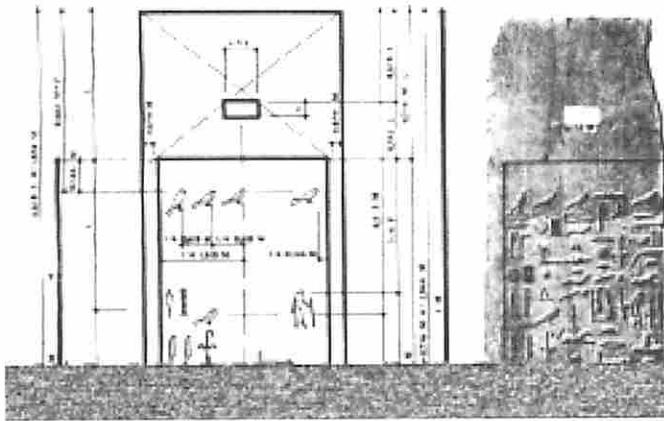


Figura 21. La tumba del arquitecto egipcio Khesi-Ra.

Las pirámides de Egipto

Las pirámides aparecen en el desierto como unos monumentos al poder de los faraones, como su tumba y su hogar en el más allá. Cada elemento que en ellas aparece demuestra el alto nivel de conocimiento de sus creadores.

Está claro que las pirámides tenían un desarrollo científico muy importante en sus formas, tamaños y orientación. Cada parte de su estructura es una muestra del alto nivel de conocimientos de sus creadores, y fueron construidas hasta el final de los tiempos. Un proverbio árabe dice: *“Todo en el mundo teme al Tiempo. Y el Tiempo teme a las Pirámides”*.

Pero en algunas teorías el número áureo estaba debajo de sus proporciones. Si consideramos que $h = 148.208$ es la altura de la gran pirámide, $a/2$ la mitad del lado de la pirámide y $c = 188.454$ la altura de un triángulo de la cara de la pirámide, entonces:

$$\frac{c}{h} = \frac{h}{a} = 1,272 = \sqrt{\Phi}$$



Figura 22. Pirámide egipcia.

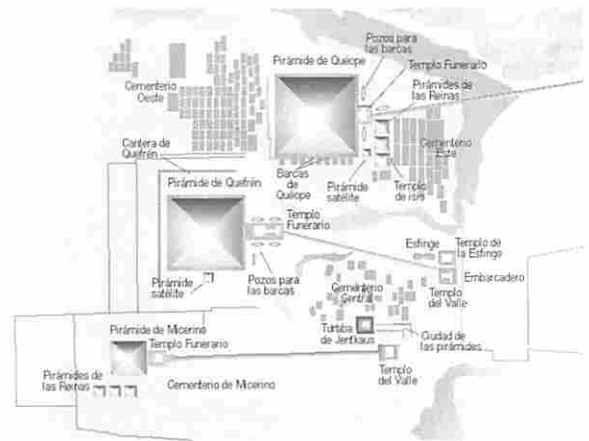


Figura 23. Ciudad de las pirámides.

La sección áurea en la Antigua Grecia y en el Renacimiento

Los griegos con una cultura depurada, de la cual nos han llegado exponentes tan importantes como Platón y Aristóteles, eran plenamente conscientes de las propiedades aritméticas, geométricas y armónicas y de la estrecha relación que las ligaban. Como ya hemos dicho, el descubrimiento de la Razón áurea se atribuye al mismísimo Pitágoras. De sus conjugaciones podemos poner ejemplos, pero quizás el más representativo sea el Partenón, templo dedicado a la diosa Atenea que se encontraba en la Acrópolis ateniense.

Durante los 15 años del gobierno de Pericles se construyeron templos, altares y estatuas de incommensurable belleza. Fidias fue el maestro escultor que diseñaba las obras de arte. Los modernos estudiosos del arte han visto que las proporciones de los templos de la Colina Sagrada estaban en proporción áurea con la superficie total de la colina lo que da al emplazamiento un carácter armonioso y bello. En concreto, el Partenón es un modelo de las proporciones áureas en todo su conjunto (ver Figura 24).

En la escultura los griegos también usaron la sección áurea (ver Figura 25). La pintura también fue influenciada por los cánones clásicos, especialmente en el Renacimiento (ver Figura 26).



Figura 24. Partenón, modelo de proporciones áureas en la arquitectura.



Figura 26. La última cena, modelo de proporciones áureas en la pintura.

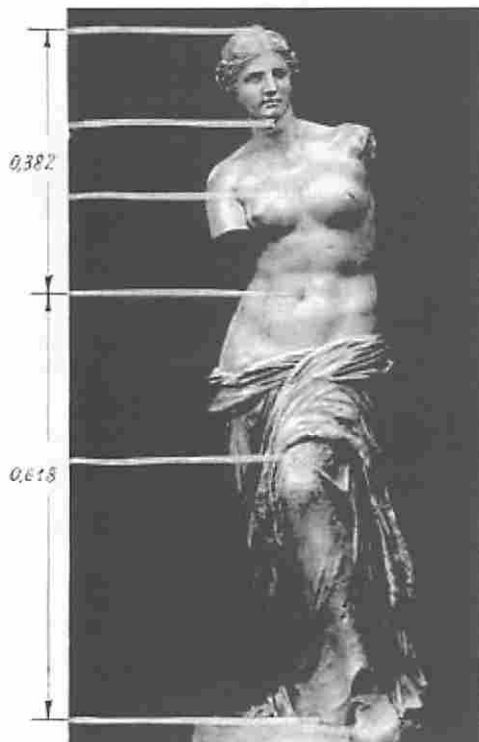


Figura 25. Venus, modelo de proporciones áureas en la escultura.

BIBLIOGRAFÍA

- Ghyka, M.: *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Ed. Poseidon (1983).
- Ghyka, M.: *El número de oro*. Ed. Poseidon (1968).
- Coxeter, H.: *Fundamentos de la Geometría*. Ed. Limusa (1971).
- Penrose, R.: *La nueva mente del emperador*. Ed. Biblioteca Mondadori (1991).
- Hawking, S.: *La historia del tiempo*. Ed. Círculo de Lectores (1988).
- Spivak: *Calculus*. Ed. Reverté (1970).
- Alonso, A. y Bermúdez, T.: "De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci". *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5, n.º 1, págs. 175-196 (2002).
- Pérez, R.: "Gaudí y la proporción". *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5, n.º 3, págs. 540-558 (2002).
- <http://www.fenkefeng.org/essaysm18004.html>, *Museum of Harmony and Golden Section*.
- <http://goldennumber.net/goldsect.htm>, *Golden Section*.
- <http://goldennumber.net/index.html>, *Phi: Golden number*.
- <http://rt000z8y.eresmas.net/EN%20numero%20de%20oro.htm#1>, *Tres números con nombre*.
- <http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329/aureo.htm>, *Rectángulo áureo*.
- Vídeo: *Donald en el país de las Matemáticas*.
- <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>, *Números de Fibonacci*.

Ignacio Garijo y José Leandro de María
Dpto. de Matemáticas Fundamentales

El carbón: ¿un material noble o innoble?¹

Una de las imágenes que conservo de mi primer encuentro con el carbón es la de un camión del que unos hombres completamente tiznados de negro extraían serones, que luego transportaban hacia el sótano del edificio en donde mis padres vivían. La operación duraba casi

todo el día y la acera conservaba durante algún tiempo recuerdos de la descarga. Por supuesto, la prohibición de aproximarnos siquiera a aquellas piedras negras era absoluta.

Más asequible era el acceso a unos trozos de carbón de menor tamaño, que por alguna razón ancestral recibían el nombre de "cisco", destinados al brasero, con respecto a los cuales la prohibición revestía menos importancia, probablemente porque era más fácil de violar.

Algún tiempo –poco tiempo– después, en el colegio, en una asignatura que recibía el pomposo nombre de Formación del Espíritu Nacional, se nos habló por primera vez de la minería del carbón. No me cabe la menor duda de que para aquel profesor los mineros debían oler a azufre del averno, porque la imagen que recibíamos era terriblemente triste y con ciertas connotaciones malévolas.

Estas imágenes del carbón como algo deleznable, de lo que convenía mantenerse lejos, se conservaron durante largo tiempo en mi mente. Ni siquiera los primeros atisbos de

¹ Extracto de la conferencia pronunciada en el acto académico celebrado con motivo de la festividad de San Alberto Magno, 14 de noviembre de 2002.