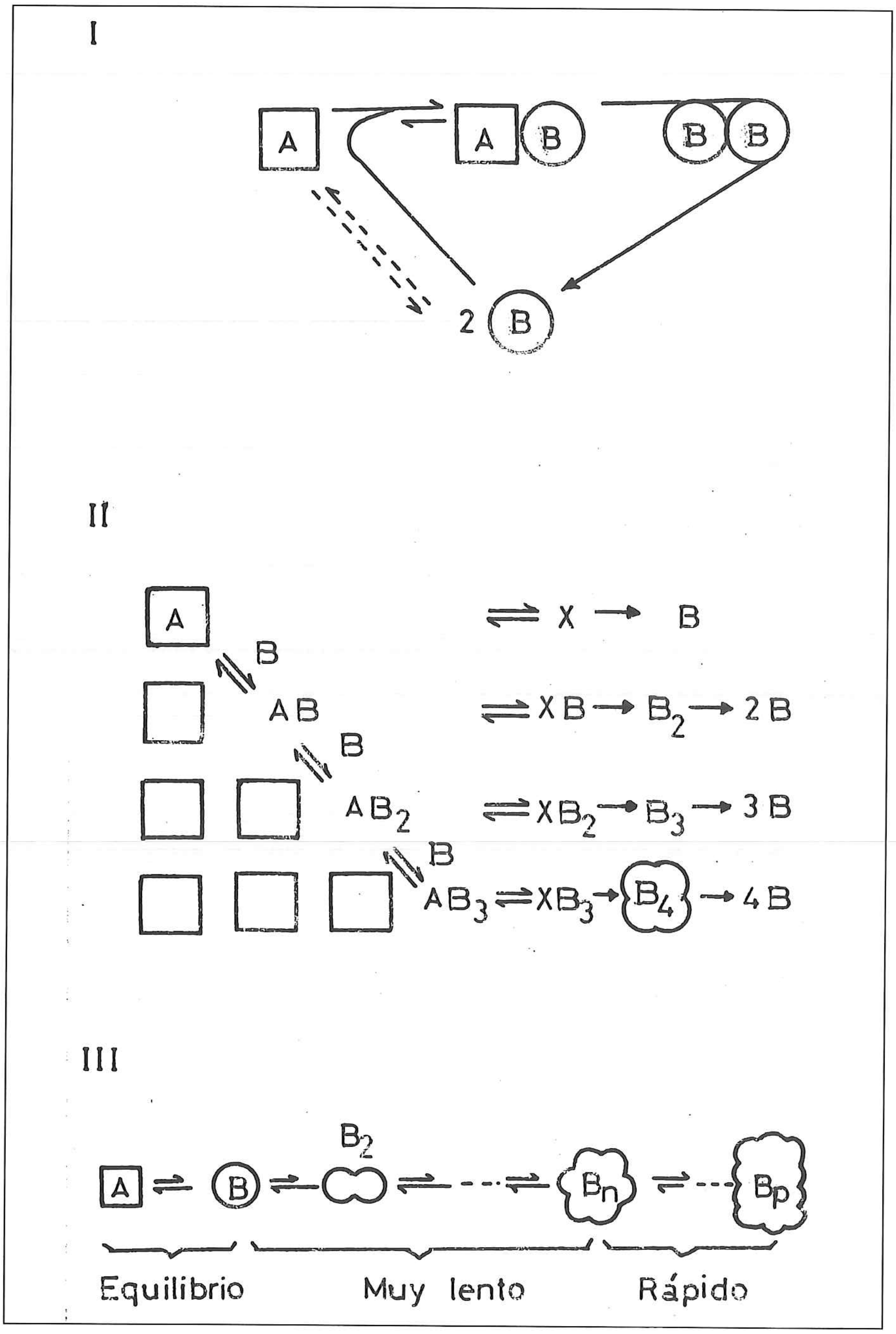


*Fig. 1.- Modelos de replicación de priones, en una versión simplificada de la presentación de Eigen (ref. 8): I, modelo de Prusiner; II, modelo cooperativo de Prusiner; III, modelo de Lansbury. Para mayor sencillez, se han omitido los parámetros cinéticos de las reacciones implicadas.*

moléculas. Nuestro sistema inmunitario nos protege, hasta cierto punto, de agentes patógenos habituales, pero sería muy imprudente llevar sus posibilidades al límite, exponiéndolo a la acción de otros agentes que hayan logrado traspasar las barreras naturales entre las especies. La presión por lograr unos beneficios económicos rápidos, particularmente en la industria de la alimentación, no debería hacernos olvidarlo.

**REFERENCIAS**


[1] *"El Manual Merck"*, Mosby/Doyma Libros, Barcelona, 9.ª ed. española (1994).

[2] P. P. LIBERSKI, *"The enigma of slow viruses. Facts and artefacts"*, Springer, Berlin (1993).

[3] S. B. PRUSINER, Science, 216, 136 (1982).

[4] S. B. PRUSINER, ed., *"Current Topics in Microbiology and Immunology. Vol. 207. Prions, prions, prions"*, Springer, Berlin (1996).

[5] NOBELFÖRSAMLINGEN KAROLINSKA INSTITUTET, *"Press release: The 1997 Nobel Prize in Physiology or Medicine"*, 6 de octubre de 1997. (Internet: http://www.nobel.se/laureates/medicine-1997-press.html)

[6] D. RIESNER, Biophys. Chem., 66, 259 (1997).

[7] M. P. MC KINLEY, D. C. BOLTON y S. B. PRUSINER, Cell, 35, 57 (1983).

[8] M. EIGEN, Biophys. Chem., 63, A1 (1996).

[9] J. H. CORNE, P. E. FRASER y P. T. LANSBURY, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 90, 5959 (1993).



**Fernando Peral Fernández**
Depto. de Ciencias y Técnicas Fisicoquímicas


# Un teorema sobre extensión de funciones reales

## 1. INTRODUCCIÓN

Pensando en diferentes maneras de demostrar varios teoremas bien conocidos sobre la existencia y unicidad de soluciones para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, surgió una antigua cuestión, cuyo enunciado es muy simple: Dada una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), estudiar condiciones necesarias y suficientes para que sea posible extender f a una función *continua* definida en el intervalo cerrado [a,b].

Es bien sabido que una tal extensión no siempre es posible; pensemos, por ejemplo, en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, definida en el intervalo abierto (0,1); función que no es acotada. Es bien sabido también que la acotación de la función f es una condición necesaria pero no suficiente, como prueba el contraejemplo dado por la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ en el intervalo (0,1); función acotada cuya extensión continua al intervalo cerrado [0,1] tampoco es posible; nótese que la derivada f' de f no está acotada. Sin embargo, la acotación de la derivada es una condición suficiente (como se prueba usando el Teorema del Valor Medio); pero no es necesaria, como muestra la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en el mismo intervalo (0,1); función cuya derivada f' no está acotada en (0,1), pero que puede extenderse de forma continua al conjunto cerrado [0,1].

Como es bien conocido, una condición necesaria y suficiente, para la existencia de una extensión continua de la función f al intervalo cerrado [a,b], es la continuidad uniforme de f en (a,b); esta condición no exige la derivabilidad de f. (Es obvio que la condición es necesaria; para probar que es suficiente, obsérvese que, si por ejemplo no existiera $\lim_{x\to a^+} f(x)$, entonces existiría $\varepsilon > 0$ verificando que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existiría $y_n \in \left(a, a+\frac{1}{n}\right)$ tal que $\varepsilon < \left|f(y_n)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right|$; y por lo tanto la función f no sería uniformemente continua).

Nuestro propósito es presentar aquí otra condición necesaria y suficiente, nueva en nuestro conocimiento, para la existencia de una extensión continua de f. En la práctica, esta condición puede ser, en muchos casos, de más fácil comprobación que la continuidad uniforme. Además, esta condición también permite dar versiones algo diferentes de la demostración de algunos resultados clásicos y bien conocidos; por ejemplo, sobre la existencia y unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

## 2. TEOREMA

Sean $a,b \in R$ $(a < b)$, y $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable.

Existe una (obviamente única) función continua $\hat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ que extiende f (es decir, $\hat{f}_{|_{(a,b)}} \equiv f$) si y sólo si existe una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que:

1) Para todo $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le g(x)$.

2) Para todo $r > 0$, existe $M > 0$ verificando que, para todo $x \in (a,b)$ tal que $|f(x)| \le g(x) - r$, $|f'(x)| \le M$.

### Demostración

$\Rightarrow$) Es obvio que la condición es necesaria. En efecto, si la extensión $\hat{f}$ existe, entonces la propia función $g = |\hat{f}|$ satisface 1) y 2).

$\Leftarrow$) Veamos que la condición es suficiente.

Supongamos ahora que existe una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ verificando 1) y 2). Probaremos que la función f debe ser uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que la función g es continua en el conjunto compacto [a,b], existe $\delta > 0$ tal que, si $|x-y| < \delta$ $(x,y \in [a,b])$, entonces

$$|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{16}.$$

Por otra parte, de la hipótesis 2) resulta que existe $M > 0$ tal que, si $|f(x)| \le g(x)-\frac{\varepsilon}{16}$ $(x \in (a,b))$, entonces $|f'(x)| \le M$.

Sean $x,y \in (a,b)$, con $x \le y$, tales que $|x-y| < \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{8M}\right)$. Demostraremos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pueden presentarse varios casos, en relación con los valores de g(x), f(x), g(y), y f(y):

**I)** $g(x)-\frac{\varepsilon}{16} \le |f(x)|$, $g(y)-\frac{\varepsilon}{16} \le |f(y)|$.

En este caso, distinguimos dos posibilidades:

**I.1)** f(x) y f(y) tienen el mismo signo $(f(x) \cdot f(y) \ge 0)$ (y, por lo tanto, $|f(y) - f(x)| = ||f(y)| - |f(x)||$).

De la hipótesis 1) resulta entonces, teniendo en cuenta las desigualdades anteriores (I), que

$$|f(y)-f(x)| = ||f(y)|-|f(x)|| = \text{máx}\,(|f(y)|-|f(x)|, |f(x)|-|f(y)|) \le$$
$$\le \text{máx}\,(g(y)-|f(x)|, g(x)-|f(y)|) \le$$
$$\le \text{máx}\left(g(y)-g(x)+\frac{\varepsilon}{16}, g(x)-g(y)+\frac{\varepsilon}{16}\right) =$$
$$= |g(y)-g(x)|+\frac{\varepsilon}{16} < \frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon.$$

**I.2)** $f(x) - f(y) < 0$ (f(x) y f(y) tienen distinto signo) (y, por lo tanto, $x \ne y$).

**a)** Supongamos en primer lugar que $f(x) < 0$, $f(y) > 0$. Por tanto, $|f(x)| = -f(x)$, $|f(y)| = f(y)$. Teniendo en cuenta la hipótesis 1) y las desigualdades anteriores (I), tenemos que

$$f(x) \le -g(x)+\frac{\varepsilon}{16},\ -f(x) \le g(x),\ \text{y}\ g(y)-\frac{\varepsilon}{16} \le f(y) \le g(y).$$

Pueden presentarse dos situaciones:

**a.1)** Si $g(x) \le \frac{\varepsilon}{16}$ o $g(y) \le \frac{\varepsilon}{16}$, entonces, puesto que $f(x) < 0$ y $f(y) > 0$, se verifica que

$$|f(x) - f(y)| = -f(x) + f(y) \le g(x) + g(y) =$$
$$= 2\,\text{mín}\,(g(x),g(y)) + |g(x) - g(y)| <$$
$$< 2\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16} = 3\frac{\varepsilon}{16} < \varepsilon.$$

**a.2)** Si $\text{mín}(g(x),g(y)) > \frac{\varepsilon}{16}$, entonces consideramos el conjunto $L = \left\{t \in [x,y] / f(t) \le -g(t)+\frac{\varepsilon}{16}\right\}$.

Obviamente, $x \in L$.

Además, $y \notin L$. (Si $y \in L$, entonces $g(y)-\frac{\varepsilon}{16} \le f(y) \le -g(y)+\frac{\varepsilon}{16}$; por lo tanto, $g(y) \le \frac{\varepsilon}{16}$, y suponemos lo contrario $\left(g(y) > \frac{\varepsilon}{16}\right)$).

Sea $c = \sup L$. De la continuidad de las funciones f y g, resulta que $f(c) = -g(c)+\frac{\varepsilon}{16}$.

Consideramos ahora el conjunto

$$D=\left\{t\in[c,y]/f(t)\geq g(t)-\frac{\varepsilon}{16}\right\}.$$

Tenemos que $D\neq\varnothing$ (ya que $y\in D$). Ponemos $d=\inf D$.

Obviamente, $f(d)\geq g(d)-\frac{\varepsilon}{16}$, y $c\leq d$.

Si $c<d$, entonces resulta, del Teorema del Valor Medio, que existe $e\in(c,d)$ tal que $f(d)-f(c)=f'(e)(d-c)$.

Ya que $\sup L=c<e$, tenemos que $e\notin L$; y por tanto,

$$f(e)>-g(e)+\frac{\varepsilon}{16}.$$

Por otra parte, $e<d=\inf D$, luego $e\notin D$; y ya que $e\in[c,y]$, debe ser $f(e)<g(e)-\frac{\varepsilon}{16}$.

Tenemos así que $|f(e)|=\text{máx}(f(e),-f(e))<g(e)-\frac{\varepsilon}{16}$.

De la hipótesis 2, resulta que $|f'(e)|\leq M$. Por lo tanto,

$$|f(d)-f(c)|\leq M(d-c)\leq M(y-x)<\frac{\varepsilon}{8}.$$

Y si $c=d$, entonces $|f(d)-f(c)|=0<\frac{\varepsilon}{8}$.

Además, ya que $|c-x|<\delta$ y $|d-y|<\delta$ (pues $c,d\in[x,y]$, $|y-x|<\delta$), tenemos que

$$-f(x)+f(c)=-f(x)-g(c)+\frac{\varepsilon}{16}\leq g(x)-g(c)+\frac{\varepsilon}{16}\leq$$

$$\leq|g(x)-g(c)|+\frac{\varepsilon}{16}<\frac{\varepsilon}{8};\text{ y } f(y)-f(d)\leq g(y)-g(d)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{16}\leq|g(y)-g(d)|+\frac{\varepsilon}{16}<\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}=\frac{\varepsilon}{8}.$$

Por lo tanto,

$$|f(y)-f(x)|=f(y)-f(x)=f(y)-f(d)+f(d)-f(c)+f(c)-$$

$$-f(x)<3\frac{\varepsilon}{8}.$$

**b)** Supongamos ahora que $f(x)>0$ y $f(y)<0$. Haciendo el mismo razonamiento anterior para $-f$ en lugar de $f$, tenemos que

$$|f(y)-f(x)|=|(-f)(y)-(-f)(x)|<3\frac{\varepsilon}{8}.$$

**II)** $|f(x)|<g(x)-\frac{\varepsilon}{16}$, $g(y)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(y)|$.

Sea $d=\text{ínf}\,\{t\in[x,y]/g(t)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(t)|\}$.

Tenemos que $d$ existe, y $x<d\leq y$. Además, $g(d)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(d)|$.

Así, $d$ e $y$ están en el caso I); y por lo tanto, $|f(d)-f(y)|<3\frac{\varepsilon}{8}$.

Por otra parte, del Teorema del Valor Medio resulta que existe $e\in(x,d)$ tal que $f(d)-f(x)=f'(e)(d-x)$. Ya que $x<e<d$, tenemos, teniendo en cuenta la definición de $d$, que $|f(e)|<g(e)-\frac{\varepsilon}{16}$. Por tanto, $|f'(e)|\leq M$, y $|f(d)-f(x)|\leq M(d-x)\leq M|y-x|<\frac{\varepsilon}{8}$.

Tenemos así que

$$|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-f(d)|+|f(d)-f(x)|<3\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

**III)** $g(x)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(x)|$, $|f(y)|<g(y)-\frac{\varepsilon}{16}$.

Ponemos $c=\sup\{t\in[x,y]/g(t)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(t)|\}$.

Obviamente, $c$ existe, $x\leq c<y$, y $g(c)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(c)|$.

$x$ y $c$ están así en el caso I); y por lo tanto, $|f(x)-f(c)|<3\frac{\varepsilon}{8}$.

Además, existe $e\in(c,y)$ tal que $f(y)-f(c)=f'(e)(y-c)$. Ya que $e\in(c,y)$, tenemos, razonando como antes, que $|f(e)|<g(e)-\frac{\varepsilon}{12}$; por tanto, $|f'(e)|\leq M$, y

$$|f(y)-f(c)|\leq M|y-c|\leq M|y-x|<\frac{\varepsilon}{8}.$$

Así, tenemos que

$$|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-f(c)|+|f(c)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{8}+3\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

**IV)** $|f(x)|<g(x)-\frac{\varepsilon}{16}$, $|f(y)|<g(y)-\frac{\varepsilon}{16}$.

En este caso, distinguimos tres posibilidades:

**IV.1)** $x=y$. Obviamente, entonces $|f(x)-f(y)|=0<\varepsilon$.

**IV.2)** $x<y$, y existe $c\in(x,y)$ tal que $g(c)-\frac{\varepsilon}{16}\leq|f(c)|$.

Entonces, $x$, $c$ están en el caso II); $c$, $y$ están en el caso III); y por lo tanto,

$$|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-f(c)|+|f(c)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

**IV.3)** $x<y$; y para todo $c\in(x,y)$, $|f(c)|<g(c)-\frac{\varepsilon}{16}$.

Se sigue del Teorema del Valor Medio que existe $d\in(x,y)$ verificando que $f(y)-f(x)=f'(d)(y-x)$. Ya que, en este caso, $|f(d)|\leq g(d)-\frac{\varepsilon}{16}$, tenemos que $|f'(d)|\leq M$.

Por lo tanto, $|f(y)-f(x)|\leq M|y-x|<M\frac{\varepsilon}{8M}<\varepsilon$.

C.Q.D.

Veamos ahora que, en la condición 1 del Teorema, podemos escribir "<" en lugar de "≤" si la derivada f' de la función f es continua.

### 3. COROLARIO

Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función derivable cuya derivada $f'$ es continua; es decir, $f\in C^1(a,b)$.

La función f puede extenderse a una función continua $\hat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ si y sólo si existe una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que:

1) Para todo $x \in (a,b)$, $|f(x)| < g(x)$.

2) Para todo $r > 0$, existe $M > 0$ verificando que, para todo $x \in (a,b)$ tal que $|f(x)| \leq g(x) - r$, $|f'(x)| \leq M$.

Del Teorema anterior, se sigue que la condición es suficiente.

Probaremos que la condición es también necesaria. Supongamos que la extensión $\hat{f}$ de f existe.

Consideramos la función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |\hat{f}(x)| + (b - x)(x - a)$.

Obviamente, $|f(x)| < g(x)$, para todo $x \in (a,b)$.

Sea $r > 0$. Ya que $\hat{f}(a) = g(a)$, $\hat{f}(b) = g(b)$, tenemos que el conjunto $A_r = \{x \in (a,b) \,/\, |f(x)| \leq g(x) - r\}$ coincide con $\{x \in [a,b] \,/\, |\hat{f}(x)| \leq g(x) - r\}$; y ya que las funciones $\hat{f}$ y g (definidas en [a,b]) son continuas, el conjunto $A_r$ es compacto. (Nótese que $A_r \subseteq \left[a + \frac{r}{b-a}, b - \frac{r}{b-a}\right]$, según resulta de las definiciones de g(x) y de $A_r$; por tanto, $A_r = \varnothing$ si $r > \frac{(b-a)^2}{2}$). Ya que estamos suponiendo que la función derivada f' es continua, la restricción de f' a $A_r$ debe estar acotada.

## 4. ALGUNAS APLICACIONES

**4.1.** Sean $c,d \in \overline{\mathbb{R}}$, $c < d$; $g : (c,d) \to \mathbb{R}^+$ una función continua; $\Omega = \{(x,y) \in (c,d) \times R \,/\, |y| < g(x)\}$; y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua.

Consideramos la ecuación diferencial clásica $y' = F(x,y)$. Una solución de esta ecuación es un par (I,f), donde $I \subseteq (c,d)$ es un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que:

1) $(x,f(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$ (es decir, $|f(x)| < g(x)$ para todo $x \in I$).

2) Para todo $x \in I$, $f'(x) = F(x,f(x))$. (Por lo tanto, f' es continua).

Supongamos que (I,f) es una solución de la ecuación dada, con $I = (a,b) \subseteq [a,b] \subseteq (c,d)$ $(a < b)$. Entonces, para todo $r > 0$, tenemos que el conjunto $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in [a,b], |y| \leq g(x) - r\} \subseteq \Omega$ es compacto (es acotado y cerrado, ya que la función g es continua). Puesto que la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es también continua, existe $M > 0$ tal que $|F|_{|B_r} \leq M$. Si $x \in (a,b)$ y $|f(x)| \leq g(x) - r$, entonces $(x,f(x)) \in B_r$ y $|f'(x)| = |F(x,f(x))| \leq M$. Por tanto, las condiciones 1) y 2) se verifican.

Del Teorema anterior resulta que la función f puede extenderse a una función continua definida en [a,b].

Supongamos ahora, por ejemplo, que la función F verifica localmente la condición de Lipschitz (para todo $(x_0,y_0) \in \Omega$, existen un conjunto abierto $U \subseteq \Omega$, con $(x_0,y_0) \in U$, y $k > 0$, tales que $|F(x,y) - F(x,z)| \leq k\,|y - z|$ para todo $(x,y), (x,z) \in U$).

Teniendo en cuenta el bien conocido Teorema de Picard sobre la existencia y la unicidad local de la solución de la ecuación dada, con $y(x_0) = y_0$ (siendo $(x_0,y_0) \in \Omega$), es fácil probar ahora que cualquier solución (local) ((a,b), f) puede extenderse a una solución global ((c,d), $\hat{f}$) (donde $\hat{f}_{|(a,b)} \equiv f$); y obtenemos así una demostración algo diferente de este resultado clásico sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.

**4.2.** Por otra parte, cuando queremos estudiar la posible extensión continua de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, la condición del Teorema presentado aquí puede ser, en muchos casos (como por ejemplo, el considerado antes), de más fácil comprobación que la continuidad uniforme de la función f.

Veamos otro ejemplo sencillo. Consideremos, en el intervalo abierto (0,1), la función derivable $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$; función cuya derivada es continua pero no está acotada, aunque obviamente existe $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x)$. Es inmediato comprobar que, si ponemos $g(x) = x$, se verifican las condiciones del Teorema anterior (nótese que, dado $r > 0$, el conjunto $A_r = \{x \in (0,1) \,/\, |f(x)| \leq x - r\}$ está contenido en el compacto [r,1] –obviamente, $A_r$ es vacío si $r \geq 1$–; luego la derivada f'(x) está acotada en $A_r$). Por tanto, f(x) admite una extensión continua al intervalo cerrado [0,1], como también se comprueba directamente.

La misma técnica puede aplicarse para estudiar la existencia de límites laterales de distintos tipos. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)}}$, definida en el intervalo abierto $I = \left(0, \frac{\pi}{16}\right)$. En este intervalo, $\operatorname{sen}(4x) \geq x$; para comprobarlo, nótese que, si $h(x) = \operatorname{sen}(4x) - x$, se tiene que $h(0) = 0$ y $h'(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Un argumento similar muestra que, si $x \in I$, entonces $\frac{x}{\operatorname{sen}(4x)} \leq \frac{1}{4} + x < \frac{1}{4} + x + \sqrt{x} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x}\right)^2$.

Por tanto, para todo $x \in I$,

$$|f(x)| \leq \sqrt{x} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x}\right)\cos x < 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cos x.$$

Si ponemos $g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cos x \ (x \geq 0)$,

se verifica que, dado $r > 0$, si $x \in I$ y

$$g(x) - r \geq f(x) \geq \frac{x + \sqrt{x}\cos x}{2\sqrt{x}},$$

entonces debe ser $x \geq \frac{4}{9}r^2$; luego la derivada f'(x) está acotada en $A_r = \{x \in I \,/\, |f(x)| \leq g(x) - r\}$. El Teorema anterior nos proporciona así otra demostración de la existencia del $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, distinta de los procedimientos habituales.

**Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo**
Departamento de Matemáticas
Fundamentales