

Superficies de Riemann compactas y teorema de
Riemann Roch

UNED GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Análisis complejo, Geometría diferencial, Superficies de Riemann, Curvas algebraicas

Ismael Cortázar Múgica

Índice general

Introducción	7
Parte 1. Preliminares	11
Capítulo 1. Geometría Proyectiva	13
1.1. Espacios Proyectivos, Coordenadas Homogéneas	13
1.2. Transformaciones Proyectivas	16
1.3. Bases proyectivas	19
1.4. Los teoremas de Desargues y Pappus	19
1.5. Dualidad	20
1.6. La razón cruzada	22
1.7. La geometría proyectiva y el programa de Klein (Erlanger)	22
Capítulo 2. Complexificación de Espacios Vectoriales	25
2.1. Estructura compleja en un espacio real	25
2.2. Tensores alternados complexificados.	29
Capítulo 3. Espacios recubridores	31
3.1. Homotopía	31
3.2. El grupo fundamental	33
3.3. Levantamientos	36
3.4. Espacios Recubridores	39
3.5. Equivalencia de espacios recubridores	49
3.6. El espacio recubridor universal	52
3.7. Transformaciones recubridoras (“Deck Transformations”)	59
Capítulo 4. Haces	67
4.1. Prehaces y Haces	67
4.2. El tallo de un prehaz (“Stalk”)	70

4.3.	Homomorfismos de haces	76
4.4.	Secuencias exactas de Haces	81
4.5.	Cocadenas de Čech	83
4.6.	Cohomología respecto a un recubrimiento	86
4.7.	Los grupos de cohomología de Čech	89
4.8.	El homomorfismo de conexión	92
Parte 2. Superficies de Riemann		99
Capítulo 5. Superficies de Riemann		101
5.1.	Superficies de Riemann	101
5.2.	Funciones en Superficies de Riemann	104
5.3.	Aplicaciones entre Superficies de Riemann	109
5.4.	Fórmula de Hurwitz	124
Capítulo 6. Prolongación meromorfa		127
6.1.	Gérmenes de funciones holomorfas y meromorfas	127
6.2.	Prolongación meromorfa a lo largo de curvas, Monodromía	128
6.3.	Prolongación meromorfa general	130
6.4.	Extensiones de cuerpos de funciones meromorfas	134
6.5.	Funciones multiformes en la esfera de Riemann	142
6.6.	Recubrimientos de Galois y Extensiones de Galois	142
6.7.	Ejemplos	144
Capítulo 7. Formas diferenciales e Integración en Superficies de Riemann		151
7.1.	Formas holomorfas y meromorfas	151
7.2.	Operaciones con formas diferenciales	154
7.3.	El residuo	157
7.4.	Integración en superficies de Riemann	158
7.5.	El teorema del residuo	164
7.6.	Producto escalar de formas y formas armónicas	166
7.7.	n -diferenciales y Wronskiano	174
Capítulo 8. Existencia de funciones meromorfas		179

8.1.	El lema de Dolbeault	179
8.2.	Cálculo de algunos grupos de Cohomología	182
8.3.	El espacio de Hilbert de las funciones holomorfas	184
8.4.	Cocadenas de Čech integrables	186
8.5.	Homomorfismos con imagen Finitodimensional	191
8.6.	Existencia de funciones meromorfas	192
8.7.	Finale de Laurent	194
Capítulo 9. Divisores		197
9.1.	Divisores principales y canónicos	198
9.2.	Pullback de divisores	201
9.3.	Otros divisores	202
9.4.	Equivalencia lineal de Divisores	204
9.5.	Haces asociados a divisores	205
9.6.	Fibrados vectoriales y de línea holomorfos	211
Capítulo 10. Curvas algebraicas		221
10.1.	Curvas afines y Projectivas en \mathbb{C}^2 y $P^2(\mathbb{C})$	221
10.2.	Curvas en espacios proyectivos generales	232
10.3.	Aplicaciones holomorfas en espacios proyectivos	238
10.4.	Sistemas lineales y aplicaciones holomorfas	240
10.5.	Divisores hiperplano de una aplicación holomorfa.	246
Capítulo 11. Teorema de Riemann-Roch y dualidad de Serre (algebraico)		251
11.1.	Cuerpos de funciones meromorfas	251
11.2.	Problema de Mittag Leffler	258
11.3.	El Teorema de Riemann-Roch	267
11.4.	La dualidad de Serre	267
Capítulo 12. Teorema de Riemann-Roch y dualidad de Serre (Haces)		275
12.1.	Cálculo de algunos grupos de cohomología de Čech	275
12.2.	Homomorfismos entre haces en superficies de Riemann	278
12.3.	La cohomología de Dolbeault	279
12.4.	La cohomología de De Rham	280

12.5.	El teorema de Riemann-Roch	281
12.6.	La dualidad de Serre	284
12.7.	El problema de Mittag-Leffler	294
12.8.	Puntos de Weierstrass	297
Capítulo 13.	Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch	301
13.1.	Formas armónicas	301
13.2.	Criterio para que un divisor sea muy amplio	303
13.3.	Teorema de Clifford	305
13.4.	La aplicación canónica	306
13.5.	Haces generados globalmente	315
13.6.	Números de salto y Puntos de Weierstrass	315
Capítulo 14.	Teorema de Abel	323
14.1.	Periodos de 1-Formas y Jacobiano	323
14.2.	Matriz de periodos y relaciones de Riemann	325
14.3.	Trazas de funciones y 1-formas	329
14.4.	Teorema de Abel	332
14.5.	La variedad de Jacobi de una superficie de Riemann compacta	336
14.6.	Teorema de Jacobi	338
Bibliografía		341

Introducción

Este trabajo se enmarca en el Master de Matemáticas Avanzadas de la UNED y el objetivo ha sido adquirir y presentar los conocimientos previos necesarios para poder realizar labores de investigación matemática en Espacios Moduli y de Teichmüller asociados a superficies de Riemann.

Siendo la extensión del mismo quizás excesiva se han eliminado las partes que ya se pueden considerar constituyentes de dichas teorías: grupos kleinianos, aplicaciones quasiconformes, diferenciales de Beltrami, diferenciales cuadráticas, etc.

Tampoco se han tratado los aspectos de la geometría hiperbólica asociada a las superficies de Riemann cuyo recubridor universal es $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Imag}(z) > 0\}$ aun siendo muy importantes y presentando resultados (como la descomposición en “pants” y el teorema “collaring”) muy interesantes.

La primera parte trata, de forma un tanto deslabazada, varios conceptos preliminares. El criterio ha sido elegir aquellos que se han tratado poco o no se han tratado en los cursos de la UNED y en las asignaturas del Master. Por ello se suponen conocidas la homología singular, cohomología, el concepto de “manifold”, etc. Aunque se han tratado con detalle los levantamientos y espacios recubridores por necesitarse más de lo expuesto en la asignatura de topología algebraica.

Con respecto a la segunda parte se ha seguido un criterio semejante y no se ha tratado, a pesar de su fundamental importancia, la Uniformización, Transformaciones de Möbius, Grupos Fuchsianos, etc por ser estos aspectos los más tratados en la asignatura del Master (se podría decir que el excelente libro: *Farkas, Kra: Riemann Surfaces* se ha utilizado deliberadamente poco, por haber sido bastante utilizado en el desarrollo de dicha asignatura).

Por el contrario se ha tratado de utilizar los “haces” en todo aquello en que ha sido posible. Se ha incluido también un breve apartado dedicado a los fibrados de línea.

El teorema de Riemann Roch se analiza desde dos puntos de vista (“adeles” y cohomología de “haces”) excluyendo el análisis más clásico usando homología, aunque esta se usa para el Teorema de Abel. Se podría decir que el capítulo dedicado a dicho teorema cambia algo el enfoque de las notas (usar métodos algebraicos y de haces con preferencia a analíticos), el motivo es la necesidad de los haces algebraicos, la topología de Zariski y la cohomología de haces asociada, los teoremas GAGA (Serre), etc. que no he podido preparar lo suficiente.

Este enfoque no se debe, en absoluto, a un “desprecio” de los métodos analíticos. Simplemente es que mi formación en métodos algebraicos y de haces era paracticamente nula y he tratado de empezar a aliviar dicha carencia.

Con posterioridad al Master espero seguir ampliando estas notas y una de las cosas que pienso añadir, además de las importantes omisiones mencionadas, es una versión algebraica del teorema de Abel partiendo de la secuencia cortas exactas de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{inc} \mathcal{O} \xrightarrow{ex} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{inc} \mathcal{M}^* \xrightarrow{div} Div \longrightarrow 0$$

y considerando los homomorfismos de conexión correspondientes.

Por último indicar que sólo hay algunos retazos de resultados originales, como la construcción de funciones meromorfas que separan tangentes (teorema 8.6.2, corolario 8.6.2), que considero bastante más sencilla que cualquiera de las que he visto en el material consultado. Aunque si hay abundancia de desarrollos más detallados que los originales.

La bibliografía que se menciona no es sólo con el fin de citarla a lo largo del texto, sino que es el núcleo de la bibliografía usada para estas notas.

No quisiera desaprovechar la oportunidad de agradecer a todos los profesores de la UNED su habilidad, conocimientos y dedicación, que han hecho que tanto la

Licenciatura como el Master hayan constituido una experiencia maravillosa. Sólo he tenido profesores de dos clases: Buenos y Excelentes, la gran mayoría en este último grupo, y naturalmente tengo que destacar a Antonio Costa que me ha ayudado y guiado para que pudiera a empezar a entender los espacios Moduli.

Parte 1

Preliminares

Geometría Projectiva

1.1. Espacios Projectivos, Coordenadas Homogéneas

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre un cuerpo K (que será \mathbb{R} o \mathbb{C})

DEFINICIÓN 1.1.1. *Se define el espacio proyectivo $P(V)$ como el conjunto de los subespacios de dimensión 1 de V y se dice que $P(V)$ tiene dimensión n ¡aunque no tiene estructura de espacio vectorial!*

Un espacio proyectivo de dimensión 1 se llama recta proyectiva y uno de dimensión 2 plano proyectivo.

Como elegida una base de V tenemos definido un isomorfismo con K^{n+1} a cada punto de $P(V)$ le podemos asociar uno de $P^n(K) \equiv P(K^{n+1})$ conservándose todas las propiedades geométricas.

Un punto de K^{n+1} vendrá representado por la n -tupla x_i donde i varía de 0 a n

Dos puntos x, y distintos de cero pertenecen al mismo subespacio de dimensión 1 (recta que pasa por el origen) si $y_i = \lambda x_i, \lambda \neq 0$, esta propiedad define una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia, que denotaremos $[x]$, son los puntos del espacio proyectivo¹.

La n -tupla de un representante de clase se denomina *coordenadas homogéneas* del punto en el espacio proyectivo y naturalmente tendremos:

$$[\lambda x_0 \dots \lambda x_n] = [x_0 \dots x_n] \quad \lambda \neq 0$$

Las coordenadas homogéneas permiten definir una aplicación suprayectiva $\pi : K^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(K)$ tal que $\pi(x_0 \dots x_n) = [x_0 \dots x_n]$

¹Los puntos del espacio proyectivo se representarán como clases o en mayúsculas

1.1.1. K^n como parte de $P^n(K)$.

Sea $U \subset P^n(K)$ el subconjunto de puntos con coordenadas homogéneas $[x_0 \dots x_n]$ tales que $x_0 \neq 0$ (como si $x_0 \neq 0$, $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda x_0 \neq 0$ luego si lo cumple uno, lo cumplen todos los representantes). Cada punto se podrá representar como

$$[x_0 \dots x_n] = [1, \frac{x_1}{x_0} \dots \frac{x_n}{x_0}]$$

Esto permite definir una biyección entre K^n y U de forma que $x_0 \dots x_n \rightarrow [1, x^1 \dots x^n]$.

Si consideramos $P^n(K) \setminus U$ estará formado por los puntos de coordenadas homogéneas $[0, x_1 \dots x_n]$ y considerando la biyección de $P^n(K) \setminus U \rightarrow P^{n-1}(K)$ definida por $[0, x_1 \dots x_n] \rightarrow [x_1 \dots x_n]$ podemos escribir

$$P^n(K) = K^n \cup P^{n-1}(K)$$

Para el caso $n = 1$ y \mathbb{R} tenemos que una recta proyectiva está formada por una recta y un punto ∞ , para el caso $n = 1$ y \mathbb{C} la recta proyectiva $P^1(\mathbb{C})$ son los complejos y ∞ . Luego se puede considerar que es la *esfera de Riemann*, y veremos que también desde el punto de vista topológico, por lo que $P^1(K)$ es equivalente tanto para $K = \mathbb{R}$ como para $K = \mathbb{C}$ a la compactificación por un punto (Alexandroff) de espacios localmente compactos.

1.1.2. Topología del espacio proyectivo.

La relación de equivalencia y la aplicación π definida por las coordenadas homogéneas permite definir la *topología cociente* en el espacio proyectivo. De forma que $U \subset P^n(K)$ será abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $K^{n+1} \setminus \{0\}$ (dotado de la topología habitual). Es la topología más fina de K que hace que la aplicación π sea continua.

Esta topología cumple la siguiente propiedad universal: Una aplicación $f : P^n(K) \rightarrow E$ (E espacio topológico cualquiera) es continua si y sólo si $f \cdot \pi$ es continua de $K^{n+1} \rightarrow E$.

Si consideramos $S^n = \{(x_0 \dots x_n) \in K^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$ (esfera unidad) que es un conjunto compacto (completo + totalmente acotado) en K^{n+1} su imagen, por π ,

coincide con $P^n(K)$, Pues dado $[x_0 \dots x_n]$ sea $\nu = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces $(\frac{x_0}{\nu} \dots \frac{x_n}{\nu}) \in S^n$ y $[x_0 \dots x_n] = [\frac{x_0}{\nu} \dots \frac{x_n}{\nu}]$. Por tanto como la imagen de una aplicación continua de un compacto es compacta y la de un conexo conexa tenemos que

PROPOSICIÓN 1.1.1. *El espacio $P^n(K)$ es compacto, y conexo.*

Consideremos $U_i = \{[x_0 \dots x_n] : x_i \neq 0\}$ son una familia de abiertos disjuntos dados $x, y \in P^n(K)$ si están en distintos U_i estos constituyen entornos disjuntos de los mismos. Definiendo $\Phi_i : U_i \rightarrow K^n$ tal que $\Phi_i([x_0 \dots x_n]) = (\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{x_{i+1}}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i})$ son, como se comprueba fácilmente homeomorfismos y por tanto los puntos de U_i están separados luego

PROPOSICIÓN 1.1.2. *El espacio $P^n(K)$ es Hausdorff.*

1.1.3. Subespacios lineales.

DEFINICIÓN 1.1.2. *Un subespacio lineal de $P(V)$ es el conjunto de subespacios de dimensión 1 de un subespacio vectorial $U \subset V$.*

Por tanto es el espacio proyectivo $P(U)$

Si U tiene dimensión 2, $P(U)$ es una recta proyectiva.

PROPOSICIÓN 1.1.3. *Por dos puntos distintos de un espacio proyectivo $P(V)$ pasa una única recta proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $P_1, P_2 \in P(V)$ con vectores representativos $u, v \in V$. Son vectores linealmente independientes (pues si no representarían el mismo punto) sea $U \subset V$ el subespacio engendrado por u, v . $P(U)$ es una recta proyectiva que contiene a ambos puntos.

Supongamos que $P(U')$ sea otra recta proyectiva que contiene P_1, P_2 Entonces $u, v \in U'$ y también el subespacio que generan luego $U \subseteq U'$ pero como ambos son de dimensión 2 pues $U = U'$ □

PROPOSICIÓN 1.1.4. *En un plano proyectivo, dos rectas proyectivas distintas se cortan en un punto único*

DEMOSTRACIÓN. Sea el plano proyectivo $P(V)$ donde $\dim V = 3$. Dos rectas proyectivas estarán definidas por $P(U_1), P(U_2)$ de dimensión 2. Tendremos

$$\dim V \geq \dim(U_1 \cup U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

luego $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$. Por otra parte como son bidimensionales $\dim(U_1 \cap U_2) \leq 2$ con igualdad si y sólo si $U_1 = U_2$ en cuyo caso las rectas no serían distintas.

Así $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ y dicho subespacio unidimensional es el punto de intersección □

1.2. Transformaciones Proyectivas

Sean V, W espacios vectoriales de la misma dimensión $n + 1$ sea $T : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Si el núcleo de T es igual a $\{0\}$ será inyectiva (y suprayectiva al tener la misma dimensión) y la imagen de un subespacio de V dimensión k es un subespacio de W también de dimensión k

En este caso T induce una aplicación $\tau : P(V) \rightarrow P(W)$ definida por $\tau([u]) = [T(u)]$

DEFINICIÓN 1.2.1. *Una transformación proyectiva de $P(V)$ a $P(W)$ es una aplicación inducida por una transformación $T : V \rightarrow W$ lineal e invertible.*

Si $\lambda \neq 0$ entonces T y λT inducen la misma transformación proyectiva.

Si T y T' inducen la misma transformación considerando e_i base de T tendremos $\tau([e_i]) = [T(e_i)] = [T'(e_i)]$ por lo que existirá $\mu_i \neq 0$ tal que $T'(e_i) = \mu_i T(e_i)$.

Considerando ahora que $\tau([\sum e_i]) = [T(\sum e_i)] = [T'(\sum e_i)]$ tendremos $T'(\sum e_i) = \mu T(\sum e_i)$ pero $T'(\sum e_i) = \sum T'(e_i) = \sum \mu_i T(e_i) = \sum \mu T(e_i)$ luego $\sum (\mu - \mu_i) T(e_i) = 0$ y como por ser T invertible los $T(e_i)$ son linealmente independientes tenemos $\mu_i = \mu$. y por tanto $T' = \mu T$

EJEMPLO. Hemos visto que S^n es homeomorfo a $P^n(K)$ para el caso de $K = \mathbb{C}$ y $n = 1$. Tenemos el homeomorfismo entre el espacio proyectivo y la esfera de Riemann.

Denotemos las coordenadas homogéneas del espacio proyectivo por $[z_0, z_1]$. Una transformación lineal invertible de $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ viene dada por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con determinante distinto de 0

Tendremos una transformación proyectiva inducida $\tau([z_0, z_1]) = [T(z_0, z_1)] = [az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1]$

Pero $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ siendo $z_1 = 0$ para los representantes de ∞ . Para los demás puntos existen representantes del tipo $[z, 1]$ y tendremos $\tau([z, 1]) = [az + b, cz + d]$. Para los puntos tales que $cz + d \neq 0$ podremos poner

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

Que es la transformación de Möbius.

Los puntos correspondientes a ∞ no necesitan tratamiento especial así

$$\tau([1, 0]) = [az_0, cz_1] = \left[\frac{a}{c}, 1\right]$$

Si $c \neq 0$ o $\tau([1, 0]) = [1, 0]$ en caso contrario.

Por otra parte si z es tal que $cz + d = 0$ tendremos $\tau([z, 1]) = [az + b, 0] = [1, 0]$

1.2.1. Puntos en posición general.

DEFINICIÓN 1.2.2. Sea $P(V)$ un espacio proyectivo n -dimensional. Se dice que $n + 2$ puntos del espacio están en posición general si y sólo si cada subconjunto de $n + 1$ puntos tiene representantes en V linealmente independientes.

Es evidente que da igual los representantes que escogamos.

La definición es equivalente a exigir que los representantes formen un simplex $n + 1$ dimensional en el espacio afín asociado a V .

TEOREMA 1.2.1. *Si los puntos $X_1 \dots X_{n+2}$ están en posición general en $P(V)$ y los puntos $Y_1 \dots Y_{n+2}$ en posición general en $P(W)$ (V, W de dimensión $n + 1$) Existe una única transformación proyectiva $\tau : P(V) \rightarrow P(W)$ tal que $\tau(X_i) = Y_i$*

DEMOSTRACIÓN. Sean e_i representantes para los puntos X_i (o sea $X_i = [e_i]$). Como están en posición general $e_1 \dots e_{n+1}$ son linealmente independientes y forman por tanto una base. Podremos poner $e_{n+2} = \sum \lambda_i e_i$.

Ninguno de los λ_i puede ser cero, pues si $\lambda_i = 0$, los vectores $e_1 \dots e_{i-1} e_{i+1} \dots e_{n+2}$ no serían linealmente independientes.

Por lo tanto los vectores $v_i = \lambda_i e_i$ son también representantes de los X_i y podemos poner $e_{n+2} = \sum v_i$

Fijado el representante e_{n+2} los vectores son únicos porque $\sum \lambda_i e_i = \sum \mu_i e_i$ implica $\sum (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$ y los e_i son linealmente independientes.

Analogamente siendo g_i representantes de los puntos Y_i podemos encontrar vectores tales que $g_{n+2} = \sum w_i$ unívocamente determinados al fijar g_{n+2}

Como los v_i, w_i constituyen bases de V, W existe una transformación invertible $T : V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$. Cumpliéndose además $T(e_{n+2}) = T(\sum v_i) = \sum T(v_i) = \sum w_i = g_{n+2}$ la transformación τ inducida por T cumple los requisitos.

Para ver la unicidad consideremos que T' induce una transformación proyectiva τ' con la misma propiedad, tendremos que $T'(v_i) = \alpha_i w_i$ y $T'(e_{n+2}) = \alpha g_{n+2}$. Luego

$\alpha g_{n+2} = T'(e_{n+2}) = T'(\sum v_i) = \sum T'(v_i) = \sum \alpha_i w_i$ como $\alpha \neq 0$ $g_{n+2} = \sum \frac{\alpha_i}{\alpha} w_i$ y como la descomposición era única $\alpha_i = \alpha$, $T' = \alpha T$, y por tanto

$$\tau' = \tau$$

□

1.3. Bases proyectivas

El teorema anterior permite la siguiente construcción: Dado $n+1$ puntos $X_1 \dots X_{n+1}$ (simplex proyectivo de referencia) y Y (punto unidad) en el espacio proyectivo $P(V)$ en posición general existe una transformación proyectiva $I : P(V) \rightarrow P^n(K)$ tal que:

$$X_1 \rightarrow [1\dots,0] \dots X_{n+1} \rightarrow [0\dots,1] \quad Y \rightarrow [1\dots,1]$$

Es trivial comprobar que $[1\dots,0], \dots, [0\dots,1], [1\dots,1]$ son $n+2$ puntos en posición general.

DEFINICIÓN 1.3.1. *Un simplex proyectivo de referencia y un punto unidad ($n+2$ puntos en posición general) de $P(V)$ constituyen una base proyectiva. Las coordenadas homogéneas de $P^n(K)$ imagen de un punto $X \in P(V)$ por la aplicación I se denominan coordenadas de X respecto a la base.*

1.4. Los teoremas de Desargues y Pappus

Dos de los teoremas clásicos de la geometría proyectiva son:

TEOREMA 1.4.1. *(Desargues) Sean A, B, C, A', B', C' puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ tales que las rectas AA', BB', CC' son distintas y concurrentes. Entonces los puntos de intersección $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ son colineales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P el punto de intersección de AA', BB', CC' como P, A, A' son distintos están en posición general, además de estar en una recta proyectiva, existirán representantes tales que $p = a + a'$ estando p, a, a' en un subespacio de dimensión 2 $U \subset V$.

Análogamente $p = b + b'$ y $p = c + c'$ entonces $a + a' = b + b' = c + c'$ y tendremos $a - b = b' - a' = x, b - c = c' - b' = y, c - a = a' - c' = z$ luego

$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$ como x, y, z son linealmente dependientes los puntos X, Y, Z de los que son representantes son colineales.

Pero x está en el subespacio engendrado por a, b y en el engendrado por a', b' luego X está en la intersección de las rectas AB y $A'B'$ y análogamente los demás. \square

TEOREMA 1.4.2. (*Pappus*) Sean A, B, C y A', B', C' dos conjuntos de tres puntos distintos colineales en un plano proyectivo. Entonces los tres puntos $AB' \cap A'B$, $BC' \cap B'C$, $CA' \cap C'A$ también lo son

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que A, B, B', C' están en posición general pues si no lo estuvieran coincidirían un punto sin “prima” con uno con “prima” y la conclusión es trivial.

Consideremos la base proyectiva formada por el simplex A, B, C' y el punto unidad B' .

Como A, B, C son colineales las coordenadas de C serán combinación lineal de $[1, 0, 0]$ y $[0, 1, 0]$ o sea serán $[1, c, 0]$ siendo $c \neq 0$ (pues C distinto de A y B). Análogamente las de A' serán $[1, 1, a]$ con $a \neq 1$.

Los puntos de la recta BC' tienen coordenadas $[0, x, y]$ y las de $B'C$ combinaciones lineales de $[1, 1, 1]$ y $[1, c, 0]$. Por tanto el punto $BC' \cap B'C$ tendrá $\alpha[1, 1, 1] + \beta[1, c, 0]$ tales que coordenada cero sea nula. Es decir $[0, 1 - c, 1]$.

Análogamente $CA' \cap C'A$ tiene coordenadas $[1 - c, 0, -ca]$ y $AB' \cap A'B$ tiene $[1, a, a]$

Entonces $(c-1)(1, a, a) + (1-c, 0, -ca) + a(0, 1-c, 1) = 0$. Luego son colineales \square

1.5. Dualidad

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$ y $U \subset E$ un subespacio de dimensión k , Sea e_1, \dots, e_k una base de U que se extiende por medio de e_{k+1}, \dots, e_{n+1} a una base de E . Sea e^1, \dots, e^{n+1} la base dual.

El subespacio $U^0 \subset E^*$ engendrado por e^{k+1}, \dots, e^{n+1} se llama *aniquilador* de U y se cumple que si $\alpha \in U^0$, y, $x \in U$ entonces $\alpha(x) = 0$ (esto es una consecuencia trivial de $e^s(e_r) = \delta_r^s$). El recíproco también es cierto y si $\forall x \in U \beta(x) = 0$ entonces $\beta \in U^0$. Para verlo basta considerar que si $\beta \in E^*$ entonces $\beta = \sum y_i e^i$ y considerando los vectores $e_l \in U \ l = 1 \dots k$ tenemos $y_l = 0$

Se cumple por tanto $\dim(U) + \dim(U^0) = n + 1$

Si consideramos ahora $P(E)$ y $P(E^*)$ un punto $F \in P(E^*)$ será un subespacio de dimensión 1 de E^* que será el aniquilador de un subespacio $U \subset E$ de dimensión n . $P(U)$ será un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$.

DEFINICIÓN 1.5.1. *Un hiperplano de un espacio proyectivo $P(E)$ ($\dim(E) = n + 1$) es un espacio proyectivo $P(U)$ donde $U \subset E$ es un subespacio de dimensión n*

Por tanto las consideraciones anteriores se resumen en:

PROPOSICIÓN 1.5.1. *Los puntos de $P(E^*)$, que se denomina espacio dual de $P(E)$, están en correspondencia biyectiva con los hiperplanos de $P(E)$. Esto implica que los hiperplanos de $P(E)$ tienen una estructura de espacio proyectivo.*

o expresado de otra forma:

PROPOSICIÓN 1.5.2. *Un subespacio proyectivo $P(W) \subset P(E^*)$ de dimensión m consiste en los hiperplanos de $P(E)$ que contienen un subespacio $P(U) \subset P(E)$ de dimensión $n - m - 1$*

Basta considerar que $W = U^0$ para cierto U (engendrado por la extensión de una base dual de W). Entonces si $\alpha \in W$ $\alpha(U) = 0$ luego $U \subset \ker(\alpha)$ y el hiperplano definido por α contiene a $P(U)$.

La dualidad es especialmente clara para dimensión 2. En un plano proyectivo $P(V)$ un hiperplano es una recta proyectiva así $P(V^*)$ es el espacio de rectas de $P(V)$. Como dados dos puntos X, Y hay una única recta que las une, dadas dos rectas X^0, Y^0 debe haber un único punto en que se cruzan.

En general los resultados de la geometría de $P(V^*)$ pueden reinterpretarse en $P(V)$.

1.6. La razón cruzada

DEFINICIÓN 1.6.1. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 puntos distintos de la recta proyectiva $P(F)$ (F dimensión 2), con coordenadas homóneas $P_j = [x_1^j, x_2^j]$. Se define la razón cruzada como

$$(P_1P_2 : P_3P_4) = \frac{(x_1^1x_2^3 - x_1^3x_2^1)(x_1^2x_2^4 - x_1^4x_2^2)}{(x_1^1x_2^4 - x_1^4x_2^1)(x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2^2)}$$

Si multiplicamos (x_2^i, x_2^j) por λ_i introducimos $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ en numerador y denominador por lo que tenemos:

La razón cruzada es independiente de los representantes elegidos.

Si consideramos una transformación lineal dada por la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transfor-

ma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ y así las coordenadas homogéneas del punto Q_j

transformado del P_j serán $y_1^j = ax_1^j + bx_2^j$ y $y_2^j = cx_1^j + dx_2^j$ y tendremos

$$(Q_1Q_2 : Q_3Q_4) = \frac{(ad - bc)(x_1^1x_2^3 - x_1^3x_2^1)(x_1^2x_2^4 - x_1^4x_2^2)}{(ad - bc)(x_1^1x_2^4 - x_1^4x_2^1)(x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2^2)} = (P_1P_2 : P_3P_4)$$

PROPOSICIÓN 1.6.1. La razón cruzada de cuatro puntos es un invariante de las transformaciones proyectivas.

1.7. La geometría proyectiva y el programa de Klein (Erlanger)

La geometría según Klein se puede definir como [CostaGL]: Una geometría es un par (X, G) donde X es un conjunto y G es un grupo que actúa fielmente sobre X .

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre K . El conjunto X será el de los subespacios unidimensionales $P(V)$.

Consideremos el grupo $GL(V)$ (transformaciones lineales invertibles), definamos una relación de equivalencia $t, t' \in GL(V)$ son equivalentes si y sólo si $\exists \lambda \neq 0$ tal que $t' = \lambda t$. Al conjunto cociente $PGL(V) = \frac{GL(V)}{K}$ se le dota de estructura de grupo de forma trivial basándose en la de $GL(V)$.

La actuación se define por $[t] \in PGL(V)$ $[x] \in P(V)$ $[t]([x]) = [t(x)]$.

Así la geometría proyectiva se enmarca en el programa de Klein siendo la razón cruzada su invariante.

1.7.1. Jerarquía de geometrías.

1. La geometría euclídea se caracteriza por: *Movimientos rígidos*.
2. La geometría de semejanzas por: *Movimientos rígidos y escalado uniforme*.
3. La geometría afín por: *Transformaciones lineales arbitrarias y traslaciones*.
4. La geometría proyectiva por: *Transformaciones proyectivas*.

En cierto modo podemos poner: Euclídea \subset Semejanzas \subset Afín \subset Proyectiva

Consideremos los grupos de transformaciones asociados para el caso particular de $P^2(\mathbb{R})$ (otros casos son similares)

- El grupo proyectivo viene dado por las matrices invertibles (salvo un factor multiplicativo)

$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$ Existen por tanto 8 grados de libertad (9 – 1 por el factor multiplicativo)

- El grupo afín (vectorial) transforma $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ por tanto la matriz asociada será:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_x & a_{11} & a_{12} \\ t_y & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Existen por tanto 6 grados de libertad

- El grupo de semejanzas tendrá por matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_x & a \cos \varphi & a \sin \varphi \\ t_y & -a \sin \varphi & a \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ Existen por tanto 4 grados de libertad}$$

- El grupo euclídeo (afín) tendrá por matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_x & \cos \varphi & \sin \varphi \\ t_y & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ Existen por tanto 3 grados de libertad}$$

Complexificación de Espacios Vectoriales

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n el producto tensorial $E \otimes \mathbb{C}$ (considerando \mathbb{C} como espacio vectorial real) admite una estructura de espacio vectorial complejo.

Si \mathbf{e}_i es una base de E y $r = (1, 0), i = (0, 1)$ la base canónica de \mathbb{C} los vectores $\mathbf{e}_i \otimes r, \mathbf{e}_i \otimes i$ constituyen una base de $E \otimes \mathbb{C}$. Por tanto los vectores de $E \otimes \mathbb{C}$ se pueden poner como $\mathbf{v} \otimes r + \mathbf{w} \otimes i$ siendo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ denotándose tradicionalmente por

$$\mathbf{v} + i\mathbf{w}$$

Si definimos la operación $\mathbb{C} \times (E \otimes \mathbb{C}) \rightarrow E \otimes \mathbb{C}$ mediante $(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}) + i(a\mathbf{w} + b\mathbf{v})$ se comprueba fácilmente que tiene estructura de espacio vectorial complejo. A $E \otimes \mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial complejo se le denomina *complexificación de E*

Intuitivamente es quizás más adecuado considerar la complexificación del dual E^* pues $E^* \otimes \mathbb{C}$ es el espacio complejo de las aplicaciones lineales de $E \rightarrow \mathbb{C}$

Si E tiene una base \mathbf{e}_i , entonces $E \otimes \mathbb{C}$ (considerado como espacio vectorial complejo) también tiene a \mathbf{e}_i (estrictamente sería $\mathbf{e}_i \otimes r$) como base. Tiene por tanto la misma dimensión que E aunque E es real y $E \otimes \mathbb{C}$ complejo.

2.1. Estructura compleja en un espacio real

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n . Se dice que una aplicación lineal $J : E \rightarrow E$ es una estructura compleja si se verifica $J^2 = -id$

Sea V un espacio vectorial complejo, si lo consideramos como un espacio vectorial real y definimos $J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}$ vemos que J constituye una estructura compleja.

Recíprocamente si E tiene una estructura compleja J y definimos $i\mathbf{v} = J(\mathbf{v})$ podemos considerar E como un espacio vectorial complejo

Una estructura compleja en E induce una estructura compleja (que también denotaremos J) en su dual E^* definida por

$$\langle \mathbf{v}, J(\alpha) \rangle = \langle J(\mathbf{v}), \alpha \rangle$$

Sea \mathbf{e}_i una base de E tendremos que por ser J lineal existirá una matriz A tal que

$$J(\mathbf{e}_i) = \sum A_i^j \mathbf{e}_j$$

y por tanto $-\mathbf{e}_i = J(\sum A_i^j \mathbf{e}_j) = \sum \sum A_i^j A_j^k \mathbf{e}_k$ o matricialmente $\mathbf{e} = -\mathbf{e}A^2$ y por tanto $A^2 = -I$

A^2 tiene a -1 como único autovalor y por tanto A tiene como autovalores $+i$ y $-i$ apareciendo en pares puesto que el polinomio característico de A es real y por tanto *es necesario que $\dim(E)$ sea par para que exista una estructura compleja.*

Dado un vector $\mathbf{v} = \sum v^i \mathbf{e}_i$ tendremos $J(\mathbf{v}) = \sum \sum v^i A_i^j \mathbf{e}_j$

Para el caso de los covectores $\lambda = \lambda_i \mathbf{e}^i$ tendremos

$$(J(\lambda))_i = \langle \mathbf{e}_i, J(\lambda) \rangle = \langle J(\mathbf{e}_i), \lambda \rangle = \langle \sum A_i^j \mathbf{e}_j, \lambda \rangle = \sum A_i^j \lambda_j$$

luego $J(\lambda) = \sum \sum \lambda_j A_i^j \mathbf{e}^i$ (La matriz correspondiente será la traspuesta)

Consideremos el espacio $E^* \otimes \mathbb{C}$ la estructura compleja J se extiende a una aplicación lineal $J : E^* \otimes \mathbb{C} \rightarrow E^* \otimes \mathbb{C}$ por medio de

$$J(\alpha + i\beta) = J(\alpha) + iJ(\beta)$$

Cuya matriz representativa es la misma que la correspondiente de E^* . Como ahora estamos considerando un espacio vectorial complejo existirán autovectores correspondientes a los autovalores $+i$ y $-i$.

Al subespacio vectorial de $E^* \otimes \mathbb{C}$ de los autovectores correspondientes a $+i$ se le denota por $E_{\mathbb{C}}^*$ y se dice que sus vectores son del tipo $(1, 0)$.

Al subespacio vectorial de $E^* \otimes \mathbb{C}$ de los autovectores correspondientes a $-i$ se le denota por $\overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ y se dice que sus vectores son del tipo $(0, 1)$.

La conjugación compleja establece una biyección entre $E_{\mathbb{C}}^*$ y $\overline{E_{\mathbb{C}}^*}$. En efecto si $\lambda = \alpha + i\beta \in E_{\mathbb{C}}^*$ tendremos

$$J(\alpha + i\beta) = i(\alpha + i\beta) = i\alpha - \beta = J(\alpha) + iJ(\beta)$$

y por tanto $J(\alpha) = -\beta$ y $J(\beta) = \alpha$. Luego $J(\bar{\lambda}) = J(\alpha - i\beta) = -\beta - i\alpha = -i(\bar{\lambda})$ y por tanto $\bar{\lambda} \in \overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ y análogamente en la otra dirección.

Tendremos que $E_{\mathbb{C}}^* \cap \overline{E_{\mathbb{C}}^*} = \{0\}$ puesto que si $\lambda \in E_{\mathbb{C}}^* \cap \overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ deberá ser $J(\lambda) = i\lambda$ y $J(\lambda) = -i\lambda$ y por tanto $2i\lambda = 0$

Consideremos ahora cualquier $\mathbf{f} \in E^* \otimes \mathbb{C}$ definimos

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{f} - iJ(\mathbf{f})) \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{f} + iJ(\mathbf{f}))$$

es trivial comprobar que $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ y que $\mathbf{f}_1 \in E_{\mathbb{C}}^*$ y $\mathbf{f}_2 \in \overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ luego

$$E^* \otimes \mathbb{C} = E_{\mathbb{C}}^* \oplus \overline{E_{\mathbb{C}}^*}$$

Luego tanto $E_{\mathbb{C}}^*$ como $\overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ son espacios vectoriales de dimensión $m = \frac{n}{2}$

Sea λ^i $i = 1, \dots, m$ una base de $E_{\mathbb{C}}^*$, entonces $\bar{\lambda}^i$ será evidentemente una base de $\overline{E_{\mathbb{C}}^*}$ y $\{\lambda^i, \bar{\lambda}^i : i = 1, \dots, m\}$ una base de $E^* \otimes \mathbb{C}$.

Descomponiendo λ^i (que es un funcional) en parte real e imaginaria, podremos poner

$$\lambda^i = \mathbf{v}^i + i\mathbf{v}^{m+i}$$

siendo los vectores $\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^{m+i} \in E^*$

Como $J(\lambda^i) = i\lambda^i = J(\mathbf{v}^i) + iJ(\mathbf{v}^{m+i}) = i\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^{m+i}$ tendremos

$$J(\mathbf{v}^i) = -\mathbf{v}^{m+i} \quad J(\mathbf{v}^{m+i}) = \mathbf{v}^i$$

Por tanto los vectores $\{\mathbf{v}^i, J(\mathbf{v}^i)\}$ $i = 1..m$ constituyen una base tanto de E^* como de $E^* \otimes \mathbb{C}$.

Considerando los duales tendremos que si existe una estructura compleja en E existe una base $\{\mathbf{v}_i, J(\mathbf{v}_i)\}$ $i = 1..m = \frac{n}{2}$ en E

Además todas las bases de este tipo tendrán la misma orientación . En efecto tendremos

$$\mathbf{v}^i \wedge J(\mathbf{v}^i) = -\frac{i}{2} \lambda^i \wedge \bar{\lambda}^i$$

$$\text{y por tanto } \bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\mathbf{v}^i \wedge J(\mathbf{v}^i)) = \left(-\frac{i}{2}\right)^m \bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\lambda^i \wedge \bar{\lambda}^i)$$

Si tenemos otra base $\{\mathbf{e}^i, J(\mathbf{e}^i)\}$ $i = 1..m$ definiendo $\mu^i = \mathbf{e}^i + iJ(\mathbf{e}^i)$ seran de tipo $(1,0)$ en $E^* \otimes \mathbb{C}$ y existirá una matriz no degenerada G tal que

$$\mu = \lambda.G \quad \mu^1 \wedge \dots \wedge \mu^m = \det(G) \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^m$$

y por tanto

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\lambda^i \wedge \bar{\lambda}^i) = |\det(G)|^2 \bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\mu^i \wedge \bar{\mu}^i)$$

luego \mathbf{e} y \mathbf{v} tendrán la misma orientación y análogamente las bases duales.

Se cumple también el recíproco: Si E es un espacio vectorial real de dimensión par $n = 2m$ y existe una descomposición

$$E \otimes \mathbb{C} = E_{\mathbb{C}} \oplus \overline{E_{\mathbb{C}}}$$

tal que la conjugación compleja establece una biyección entre $E_{\mathbb{C}}$ y $\overline{E_{\mathbb{C}}}$. Entonces existe una estructura compleja J tal que los elementos de $E_{\mathbb{C}}$ son de tipo $(1,0)$ respecto a J

Si (E, J) es un espacio vectorial con una estructura compleja existe un isomorfismo entre $E_{\mathbb{C}}$ y E basta considerar

$$\phi : E \rightarrow E_{\mathbb{C}} \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - iJ(\mathbf{v})$$

Es facil ver que es biyectiva puesto que si $\mathbf{v} + i\mathbf{w} \in E_{\mathbb{C}}$ tendremos $J(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = i(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = i\mathbf{v} - \mathbf{w} = J(\mathbf{v}) + iJ(\mathbf{w})$ luego $J(\mathbf{v}) = -\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} + i\mathbf{w} = \mathbf{v} - iJ(\mathbf{v})$

Por tanto si (E, J) proviene de un espacio vectorial complejo $E \simeq E_{\mathbb{C}}$

2.2. Tensores alternados complexificados.

Podemos considerar ahora $\Lambda^r(E^* \otimes \mathbb{C})$ espacio de los r -tensores alternados de $E^* \otimes \mathbb{C}$ podremos expresarlo como suma directa

$$\Lambda^r(E^* \otimes \mathbb{C}) = \sum_{p+q=r} \Lambda^p(E_{\mathbb{C}}^*) \wedge \Lambda^q(\overline{E_{\mathbb{C}}^*})$$

cuyos términos son del tipo $\sum T_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \lambda^{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda^{i_p} \wedge \overline{\lambda^{j_1}} \wedge \dots \wedge \overline{\lambda^{j_q}}$ y se denominan (p, q) formas

Tendremos así

$$\alpha = \sum_{p+q=r} \alpha_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

Siendo $\alpha_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ la proyección de α en $\Lambda^p(E_{\mathbb{C}}^*) \wedge \Lambda^q(\overline{E_{\mathbb{C}}^*})$ que denotaremos $\Lambda^{p,q}(E^* \otimes \mathbb{C})$

Se tienen las siguientes propiedades

- Si $\alpha \in \Lambda^{p,q}(E^* \otimes \mathbb{C})$ entonces $\bar{\alpha} \in \Lambda^{q,p}(E^* \otimes \mathbb{C})$
- Si $\alpha \in \Lambda^{p,q}(E^* \otimes \mathbb{C})$ y $\beta \in \Lambda^{r,s}(E^* \otimes \mathbb{C})$ entonces $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+r,q+s}(E^* \otimes \mathbb{C})$

La operación de diferenciación exterior vendrá dada por

$$d : \Lambda^{p,q}(E^*) \rightarrow \Lambda^{p+q+1}(E^* \otimes \mathbb{C})$$

pudiendo definirse

$$\partial : \Lambda^{p,q}(E^* \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda^{p+1,q}(E^* \otimes \mathbb{C}) \quad \partial = \pi_{p+1,q} \circ d$$

$$\bar{\partial} : \Lambda^{p,q}(E^* \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda^{p,q+1}(E^* \otimes \mathbb{C}) \quad \bar{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d$$

Siendo $\pi_{r,s}$ las proyecciones canónicas. Se tendrá $d = \partial + \bar{\partial}$

Espacios recubridores

NOTA. En este capítulo supondremos que todos los espacios topológicos son Hausdorff.

3.1. Homotopía

DEFINICIÓN 3.1.1. Sean X, Y espacios topológicos dos aplicaciones continuas $f, f' : X \rightarrow Y$ se dicen homótopas si existe una aplicación continua (con la topología producto) $F : X \times I \rightarrow Y$, siendo $I = [0, 1]$ tal que:

$$F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = f'(x)$$

La aplicación F se denomina homotopía entre f y f' y se escribe: $f \approx f'$

si $f \approx c$ siendo c una aplicación constante $\forall x \ c(x) = a$. Se dice que f es homotópicamente nula.

Es muy sencillo comprobar que \approx define una relación de equivalencia en las aplicaciones continuas de $X \rightarrow Y$. Para la transitividad $f \approx f'$ por F y $f' \approx f''$ por F' basta considerar

$$G(x, s) = \begin{cases} F(x, 2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ F'(x, 2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.1.2. Dos espacios topológicos X, Y se dice que son homotópicamente equivalentes (o que tienen el mismo tipo de homotopía) cuando existen dos aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ es homotopa a la identidad en Y y $g \circ f$ es homotopa a la identidad en X .

3.1.1. Homotopía de caminos.

DEFINICIÓN 3.1.3. Una aplicación continua $f : I \rightarrow X$ tal que $f(0) = x_0$ $f(1) = x_1$ se denomina camino entre x_0 y x_1 . Dos caminos f, f' se denominan homótopos si tienen los mismos puntos iniciales y $\exists F : I \times I \rightarrow X$ continua tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = f'(x) \quad F(0, t) = x_0 \quad F(1, t) = x_1$$

Escribiremos $f \sim f'$ y es fácil comprobar que define una relación de equivalencia en los caminos de x_0 a x_1 .

DEFINICIÓN 3.1.4. Sea f un camino de x_0 a x_1 y g un camino de x_1 a x_2 definimos el producto o concatenación $h = f \star g$ como el camino de x_0 a x_2 definido por

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Si $f \sim f'(F)$ y $g \sim g'(G)$ considerando $H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$ vemos que $f \star g \sim f' \star g'$

Esto permite definir la operación entre *clases de equivalencia de caminos entre x_0 y x_2* : $[f] \star [g] = [f \star g]$

TEOREMA 3.1.1. La operación \star tiene las siguientes propiedades (siendo f entre x_0, x_1 g entre x_1, x_2 y h entre x_2, x_3)

1. Asociativa: $([f] \star [g]) \star [h] = [f] \star ([g] \star [h])$
2. Elemento neutro: Sean $e_i, e_d : I \rightarrow X$ tales que $e_i(t) = x_0, e_d(t) = x_1$. Entonces $[e_i] \star [f] = [f]$ y $[f] \star [e_d] = [f]$
3. Inverso: Sea f^- el camino de x_1 a x_0 definido por $f^-(s) = f(1-s)$. Entonces $[f] \star [f^-] = [e_i]$ y $[f^-] \star [f] = [e_d]$

La demostración es sencilla, aunque algo laboriosa, y se puede ver en [MunkT]

3.2. El grupo fundamental

La operación \star no se puede aplicar en general a un par de caminos arbitrarios. Se necesita que el final del primero sea el comienzo del segundo. Esto se cumple siempre si nos limitamos a caminos cerrados.

DEFINICIÓN 3.2.1. *Sea X un espacio topológico $x_0 \in X$. Un lazo basado en x_0 es un camino que comienza y acaba en x_0 . El conjunto de clases de homotopía de los lazos basados en x_0 con la operación \star constituye un grupo, que se denomina grupo fundamental de X relativo a x_0 y se denota $\pi_1(X, x_0)$*

Supongamos que γ es un camino de x_0 a x_1 y f un lazo basado en x_0 . Entonces $\gamma^- \star f \star \gamma$ es un lazo basado en x_1 .

DEFINICIÓN 3.2.2. *Sea γ un camino de x_0 a x_1 . Definimos la aplicación $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por la ecuación*

$$\hat{\gamma}([f]) = [\gamma^-] \star [f] \star [\gamma]$$

PROPOSICIÓN 3.2.1. *La aplicación $\hat{\gamma}$ es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. $\hat{\gamma}([f]) \star \hat{\gamma}([g]) = ([\gamma^-] \star [f] \star [\gamma]) \star ([\gamma^-] \star [g] \star [\gamma]) = [\gamma^-] \star [f] \star [g] \star [\gamma] = \hat{\gamma}([f] \star [g])$

$\hat{\gamma}^-([f]) = [\gamma] \star [f] \star [\gamma^-]$ luego $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}^-([f])) = [\gamma^-] \star ([\gamma] \star [f] \star [\gamma^-]) \star [\gamma] = [f]$ y análogamente para $\hat{\gamma}^-$ ($\hat{\gamma}([f])$) □

COROLARIO. *Si X es conexo por caminos y $x_0, x_1 \in X$ entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$*

Sin embargo no hay una forma canónica de establecer el isomorfismo. En el caso general habrá varios isomorfismos distintos entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ según el camino escogido para unir x_0 y x_1 .

PROPOSICIÓN 3.2.2. *El isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ es independiente del camino escogido para unir x_0 con x_1 , si y sólo si $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano,*

DEMOSTRACIÓN. Sean α, β caminos de x_0 a x_1 cualesquiera. $\alpha \star \beta^-$ es un lazo basado en x_0 que denotaremos g

Tendremos, para cualquier lazo f basado en x_0 , que $[g] \star [f] = [f] \star [g]$ (por ser $\pi_1(X, x_0)$ abeliano) pero $[g] \star [f] = [\alpha] \star [\beta^-] \star [f]$ y $[f] \star [g] = [f] \star [\alpha] \star [\beta^-]$

Como $\widehat{\alpha}([f]) = [\alpha^-] \star [f] \star [\alpha]$ operando (\star) por la derecha ambos miembros con $[\beta^-]$ tenemos

$\widehat{\alpha}([f]) \star [\beta^-] = [\alpha^-] \star [f] \star [\alpha] \star [\beta^-] = [\alpha^-] \star [\alpha] \star [\beta^-] \star [f] = [\beta^-] \star [f]$ y operando (\star) por la derecha ambos miembros con $[\beta]$ tendremos $\widehat{\alpha}([f]) = [\beta^-] \star [f] \star [\beta] = \widehat{\beta}([f])$.

Recíprocamente si $\widehat{\alpha}([f]) = \widehat{\beta}([f])$ para todo lazo basado en x_0 y todo par de caminos α, β entre x_0 y x_1 , considerando el lazo $h \star \alpha \star \alpha^- \star g$ (siendo h, g lazos cualesquiera basados en x_0) y el camino $h \star \alpha$ (como camino β) tendremos

$[\alpha^-] \star ([h] \star [\alpha] \star [\alpha^-] \star [g]) \star [\alpha] = [\alpha^-] \star [h^-] \star ([h] \star [\alpha] \star [\alpha^-] \star [g]) \star [h] \star [\alpha]$ luego $[\alpha^-] \star [h] \star [g] \star [\alpha] = [\alpha^-] \star [g] \star [h] \star [\alpha]$ y por tanto $[h] \star [g] = [g] \star [h]$. \square

DEFINICIÓN 3.2.3. *Un espacio topológico X se dice simplemente conexo cuando es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$, y por tanto $\forall x \in X$*

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Si X simplemente conexo, dos caminos cualesquiera entre x_0, x_1 son homótopos por caminos*

DEMOSTRACIÓN. Sean α, β dos caminos entre x_0, x_1 Entonces $\alpha \star \beta^-$ es un lazo basado en x_0 luego $[\alpha] \star [\beta^-] = [e_{x_0}]$ y $[\alpha] \star [\beta^-] \star [\beta] = [\beta]$ por tanto $[\alpha] = [\beta]$ \square

DEFINICIÓN 3.2.4. *Sea $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x_0) = y_0$ una aplicación continua. Definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ como*

$$h_*([f]) = [h.f]$$

a h_* se le denomina homomorfismo inducido por h respecto a x_0

Dado que si F es una homotopía entre f y g entonces $h.F$ lo es entre $h.f$ y $h.g$ el homomorfismo está bien definido.

PROPOSICIÓN 3.2.4. Sean $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x_0) = y_0$ y $g : Y \rightarrow Z$ tal que $g(y_0) = z_0$ continuas. Entonces $(g.h)_* = g_* \cdot h_*$. Además si $i : X \rightarrow X$ es la aplicación identidad, i_* es el homomorfismo identidad

DEMOSTRACIÓN. $(g.h)_*([f]) = [(g.h).f] = [g.h.f]$ y $(g_* \cdot h_*)([f]) = g_*(h_*([f])) = g_*([h.f]) = [g.h.f]$

$i_*([f]) = [i.f] = [f]$ □

COROLARIO 3.2.1. Sea $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x_0) = y_0$ un homeomorfismo entre X e Y entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

NOTA. Con la nomenclatura de la teoría de las categorías lo anterior se resume diciendo que el grupo fundamental es un functor covariante entre la categoría de los espacios topológicos punteados con las aplicaciones continuas y la de los grupos con los homomorfismos.

PROPOSICIÓN 3.2.5. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones homotopas mediante H y $x_0 \in X$. Denotamos como γ el camino definido por $\gamma(t) = H(x_0, t)$ entre $f(x_0)$ y $g(x_0)$. Entonces el diagrama siguiente conmuta siendo $\hat{\gamma}([\alpha]) = [\gamma^-] \star [\alpha] \star [\gamma]$

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) & \\
 f_* \nearrow & & \downarrow \hat{\gamma} \\
 \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, g(x_0)) \\
 g_* \searrow & &
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ entonces $f_*([\beta]) = [f.\beta]$ y tenemos que demostrar que $\gamma^- \star (f.\beta) \star \gamma$ es homótopo a $g.\beta$

Definimos los caminos $\gamma_s : I \rightarrow Y$ mediante $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ tendremos que γ_0 es camino constante en $f(x_0)$ y $\gamma_1 = \gamma$

Consideremos la aplicación $G : I \times I \rightarrow Y$ $G(t, s) = \gamma_s^- \star (H(\beta(t), 1 - s)) \star \gamma_s$ será continua y definirá una homotopía entre

$$e_{f(x_0)} \star H(t, 1) \star e_{f(x_0)} = H(\beta(t), 1) = (g \cdot \beta)(x) \quad y \quad \gamma^- \star H(\beta(t), 0) \star \gamma = \gamma^- \star (f \cdot \beta) \star \gamma$$

□

COROLARIO 3.2.2. *Si X, Y son homotópicamente equivalentes mediante $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ entonces son isomorfos*

$$\pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(Y, f(x_0))$$

DEMOSTRACIÓN. Como $g \cdot f$ es homotopa a la identidad en X tendremos por la proposición anterior $g_* \cdot f_* = (g \cdot f)_* = \hat{\gamma}$ (para un γ definido por la homotopía entre $g \cdot f$ y id_X) siendo $\hat{\gamma}$ un isomorfismo por la proposición 3.2.1 por tanto f_* ha de ser inyectivo y g_* suprayectivo. Considerando ahora $f \cdot g$ homotopa a la identidad en Y tendremos g_* inyectivo y f_* suprayectivo. □

3.3. Levantamientos

DEFINICIÓN 3.3.1. *Sean $p : Y \rightarrow X$ y $f : E \rightarrow X$, aplicaciones continuas. Un levantamiento de f es una aplicación continua $\hat{f} : E \rightarrow Y$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

DEFINICIÓN 3.3.2. *Una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ se dice que es un homeomorfismo local cuando $\forall y \in Y$ existe $V \subset Y$ entorno de y tal que $p|_V$ es un homeomorfismo*

PROPOSICIÓN 3.3.1. *Si $p : Y \rightarrow X$ es homeomorfismo local $\forall x \in X$ $p^{-1}(x)$ es un conjunto discreto*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$ si $p^{-1}(x) = \emptyset$ la proposición es trivial. En caso contrario sea $y \in p^{-1}(x)$ Existiera un entorno abierto V de y tal que $p|_V$ es homeomorfismo si existiera $y' \in p^{-1}(x) \cap (V - \{y\})$ $p|_V$ no sería biyectiva \square

TEOREMA 3.3.1. *Supongamos, con la notación anterior, que p es un homeomorfismo local y E conexo. Si \hat{f}_1, \hat{f}_2 son levantamientos de f tales que $\hat{f}_1(e) = \hat{f}_2(e)$ para algún $e \in E$ entonces $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ (conjunto diagonal) es un conjunto cerrado (recordemos que suponemos Y Hausdorff) $\Delta \subset Y \times Y$

Sea $T = \{e \in E : \hat{f}_1(e) = \hat{f}_2(e)\}$ definimos $G : E \rightarrow Y \times Y$ $G(e) = (\hat{f}_1(e), \hat{f}_2(e))$ tendremos $T = G^{-1}(\Delta)$ y como G es continua T es cerrado

Sea $e_0 \in E$ tal que $\hat{f}_1(e_0) = \hat{f}_2(e_0) = y_0$ como p es homeomorfismo local existe V entorno de y_0 tal que p aplica V homeomórficamente en $U \subset X$, entorno de $f(e_0)$

Como \hat{f}_1, \hat{f}_2 son continuas existe $W \subset E$ entorno de e_0 tal que $\hat{f}_1(W) \subset V$, $\hat{f}_2(W) \subset V$

Entonces como $f = p \cdot \hat{f}_1$ y p homeomorfismo en V (y por tanto en $\hat{f}_1(W)$) tendremos

$$\forall w \in W \quad \hat{f}_1(w) = (p|_V)^{-1}(f(w))$$

y análogamente para \hat{f}_2 . Luego coinciden en W y T es abierto. Si T no es vacío será un abierto cerrado de X conexo y coincidirá con él. \square

Un caso particular muy importantes es cuando $E = I = [0, 1]$ es decir cuando f es un camino en X y por tanto \hat{f} un camino en Y (levantamiento de caminos)

TEOREMA 3.3.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, $a, b \in X$ y $\alpha \in Y$ tal que $p(\alpha) = a$. Supongamos que existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $\forall t \in I : F(0, t) = a, F(1, t) = b$, denotamos $\gamma_t(s) = F(s, t)$. Si cada γ_t se puede levantar a un camino $\widehat{\gamma}_t$ en Y comenzando en α , entonces $\widehat{\gamma}_0(1) = \widehat{\gamma}_1(1)$ y $\widehat{\gamma}_0$ y $\widehat{\gamma}_1$ son homótopos.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos $\widehat{F} : I \times I \rightarrow Y$ por $\widehat{F}(s, t) = \widehat{\gamma}_t(s)$. Vamos a ver que $\exists \epsilon > 0$ tal que \widehat{F} es continua en $[0, \epsilon) \times I$. Existirá V entorno de α tal que $p|_V : V \rightarrow U$ será un homeomorfismo. Como $F(0 \times I) = \{a\}$ y F es continua, existirá $\epsilon > 0$ tal que $F([0, \epsilon) \times I) \subset U$ y podremos poner por la unicidad de levantamientos

$$\forall t \in I \quad \widehat{\gamma}_t|_{[0, \epsilon)} = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_t|_{[0, \epsilon)}$$

luego $\widehat{F} = (p|_V)^{-1} \cdot F$ en $[0, \epsilon) \times I$ y como composición de aplicaciones continuas \widehat{F} es continua en $[0, \epsilon) \times I$

Supongamos que existe un punto (s, t_0) en el que \widehat{F} no es continua. Manteniendo fijo t_0 existirá σ_0 inferior de los s tales que \widehat{F} no es continua en (s, t_0) . Por lo anterior $\sigma_0 \geq \epsilon$

Sea $x = F(\sigma_0, t_0)$ $y = \widehat{F}(\sigma_0, t_0) = \widehat{\gamma}_{t_0}(\sigma_0)$ Existen entornos U, V $y \in V, x \in U$ tales que $p|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Como F es continua existe $\delta > 0$ tal que $F((\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subset U$ y podemos definir una función continua $(p|_V)^{-1} \cdot F(s, t) = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_t(s)$ en $A = (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Si para algún $(t, s) \in A$ se cumple que $\widehat{\gamma}_t(s) = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_t(s)$ tendremos que

$$\forall s \in (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \quad \widehat{\gamma}_t(s) = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_t(s)$$

por la unidad de los levantamientos. Por tanto $\forall s \in (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \quad \widehat{\gamma}_{t_0}(s) = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_{t_0}$ puesto que coinciden en (σ_0, t_0)

Escogemos $\sigma_0 - \delta < \sigma_1 < \sigma_0$ entonces \widehat{F} será continua en (σ_1, t_0) por hipótesis y existirá $\varsigma > 0, \varsigma \leq \delta$ tal que

$$\widehat{F}(\sigma_1, t) = \widehat{\gamma}_t(\sigma_1) \in V \quad \forall t \in (\tau - \varsigma, \tau + \varsigma)$$

cumpléndose que $\widehat{F}(\sigma_1, t) = (p|_V)^{-1} \cdot \gamma_t(\sigma_1)$ pues ambos puntos están en V y su imagen por p , que es biyectiva entre V y U , es la misma $\gamma_t(\sigma_1)$.

Por tanto $\forall (s, t) \in (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \times (t_0 - \varsigma, t_0 + \varsigma)$ $\widehat{F}(s, t) = (p|_V)^{-1} \cdot F(s, t)$ que es continua, y así σ_0 no puede ser el inferior de los s tales que \widehat{F} no es continua en (s, t_0) .

Así tenemos que \widehat{F} es continua en $I \times I$

Como $F(I \times \{1\}) = \{b\}$ y $F = p \cdot \widehat{F}$ tenemos que $\widehat{F}(I \times \{1\}) \subset p^{-1}(b)$ como \widehat{F} continua $I \times \{1\}$ conexo pues $\widehat{F}(I \times \{1\})$ es conexo, como por la proposición 3.3.1 $p^{-1}(b)$ es discreto consiste en un sólo punto β y el teorema está demostrado. \square

Vamos ahora a analizar un tipo de aplicaciones entre espacios en los que los levantamientos de caminos son siempre posibles.

3.4. Espacios Recubridores

3.4.1. Aplicaciones recubridoras.

DEFINICIÓN 3.4.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva, un abierto $U \subset X$ se dice regularmente cubierto por p si y sólo si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ es de la forma $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$ siendo V_i una familia de abiertos disjuntos de Y tales que cada restricción $p|_{V_j}$ es un homeomorfismo entre V_j y U . Un entorno U de $x \in X$ se denomina entorno regular si está regularmente cubierto.

Obsérvese que si $W \subset U$ abierto y U está recubierto regularmente por p , entonces W también está regularmente cubierto por p .

DEFINICIÓN 3.4.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva tal que todo punto $x \in X$ tiene un entorno U regular. Entonces se dice que p es una aplicación recubridora o cubierta e Y un espacio recubridor (o recubrimiento) de X .

Dado que si γ es un lazo en Y , $p(\gamma)$ es un lazo en X , y una homotopía entre lazos en Y da lugar a una en X , es fácil comprobar que la aplicación p induce un homomorfismo $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, p(y_0))$

EJEMPLO 3.4.1. $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ es una cubierta.

PROPOSICIÓN 3.4.1. Si $p : Y \rightarrow X$ es una cubierta entonces es un homeomorfismo local (evidente de la definición).

Sin embargo el recíproco no es cierto $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ es homeomorfismo local pero no una cubierta pues cada bola alrededor de $(1, 0)$ tiene una parte de su preimagen del tipo $(0, \epsilon)$ con la que no es homeomorfa.

Este ejemplo muestra que la aplicación obtenida al restringir una aplicación recubridora puede no ser recubridora.

Sin embargo

LEMA 3.4.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, sea $B \subset X$ (considerado espacio topológico con la topología del subespacio) y $E = p^{-1}(B)$ entonces $p|_E$ es recubridora de B

DEMOSTRACIÓN. Dado $b \in B$ sea U abierto en X tal que $b \in U$ y U regularmente cubierto por p es decir $p^{-1}(U) = \bigcup V_i$. Entonces $U \cap B$ es un entorno de b en B y los conjuntos $V_i \cap E$ son abiertos disjuntos de E cuya unión es $p^{-1}(U \cap B)$ y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente en $U \cap B$ mediante p . \square

LEMA 3.4.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ recubridora, X localmente conexo y $A \subset X$ conexo, $O \subset Y$ componente conexa de $p^{-1}(A)$. Entonces $p|_O$ es recubridora

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A = X$

Sea $x_0 \in X$ tal que $p^{-1}(x_0) \cap O \neq \emptyset$ existirá un entorno conexo $x_0 \in U_0$ regularmente cubierto por p , es decir $p^{-1}(U_0) = \bigcup_K V_{0k}$ si $V_{0j} \cap O \neq \emptyset$ tendremos que $V_{0j} \subset O$ por ser los V_{0j} conexos (homeomorfos a U_0). Luego $(p|_O)^{-1}(U_0) = \bigcup_J V_{0j}$ y x_0 está regularmente cubierto por $p|_O$

Definimos $B = \{x \in X : x \text{ regularmente cubierto por } p|_O\}$ claramente $x_0 \in B$

Supongamos que $x_1 \in B$ existirá un entorno conexo $x_1 \in U_1$ regularmente cubierto por p y como antes $(p|_O)^{-1}(U_1) = \bigcup_J V_{1j}$ y $\forall x \in U_1$ tendremos que x está regularmente cubierto por $p|_O$ luego B es abierto.

Supongamos $x_2 \in \overline{B}$ (adherencia de B) existirá entorno conexo $x_2 \in U_2$ regularmente cubierto por p

$p^{-1}(U_2) = \bigcup_K V_{2k}$ como $U_2 \cap B \neq \emptyset$ tenemos que $p^{-1}(U_2) \cap O \neq \emptyset$ y como si $V_{2j} \cap O \neq \emptyset$ tendremos que $V_{2j} \subset O$ se concluye que $x_2 \in B$ y B es cerrado

Como B es abierto cerrado no vacío y X conexo $B = X$ □

PROPOSICIÓN 3.4.2. Sean $p : Y \rightarrow X$, $p' : Y' \rightarrow X'$ recubridoras, Entonces $p \times p' : Y \times Y' \rightarrow X \times X'$ es recubridora

DEMOSTRACIÓN. Dados $b \in X$, $b' \in X'$ sean U, U' entornos regularmente cubiertos $p^{-1}(U) = \cup V_i$ y $p'^{-1}(U') = \cup V'_i$ respectivamente. La imagen inversa $(p \times p')^{-1}(U \times U')$ es $\cup_{i,j} V_i \times V'_j$ estos conjuntos son abiertos disjuntos de $Y \times Y'$ y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente en $U \times U'$ mediante $p \times p'$ □

TEOREMA 3.4.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$ cualquier camino $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ tiene un único levantamiento a un camino $\hat{\gamma}$ que comienza en y_0

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathfrak{B} un recubrimiento de X por abiertos U regularmente cubiertos por p . $\forall U \in \mathfrak{B}$ $\gamma^{-1}(U)$ es un abierto de I luego $\gamma^{-1}(\mathfrak{B})$ es un recubrimiento de I que es compacto y existirá un recubrimiento finito $\gamma^{-1}(U_j) j \in J$.

Por el lema del número de Lebesgue existirá un $\epsilon > 0$ tal que los intervalos contenidos en I del tipo $[r, r + \epsilon]$ estarán contenidos en un $\gamma^{-1}(U_j)$. Así existirán $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ tales que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ está contenido en algún U_j

Vamos a construir $\hat{\gamma}$ por inducción. Definimos $\hat{\gamma}(0) = y_0$ y supongámosla definida para $0 \leq t \leq t_i$ bastará definirla en $[t_i, t_{i+1}]$

El conjunto $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ estará contenido en un U_k regularmente cubierto. Así $U_k = \cup V_\beta$ como $(p \cdot \hat{\gamma})(t_i) = \gamma(t_i)$ (pues $\hat{\gamma}(t_i)$ ya está construido) el punto $\hat{\gamma}(t_i)$ estará contenido en alguno de los V_β pongamos V_η además $p|_{V_\eta}$ será un homeomorfismo entre V_η y U_k cuyo inverso denotamos por $q : U_k \rightarrow V_\eta$ y podemos definir

$$\hat{\gamma}(t) = q(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Como q, γ son continuas también $\hat{\gamma}$.

La unicidad se deduce del teorema 3.3.1 □

PROPOSICIÓN 3.4.3. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Sea $F : I \times I \rightarrow X$ una aplicación continua con $F(0,0) = x_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua $\hat{F} : I \times I \rightarrow Y$ tal que $\hat{F}(0,0) = y_0$*

La demostración es totalmente análoga a la anterior.

PROPOSICIÓN 3.4.4. *Si en la situación anterior F es una homotopía de caminos también \hat{F}*

DEMOSTRACIÓN. Por ser homotopía de caminos $\forall t F(0,t) = x_0$. Como \hat{F} es levantamiento $\forall t \hat{F}(0,t) \in p^{-1}(x_0)$, sea U un entorno de x_0 regularmente cubierto $p^{-1}(U) = \cup V_\beta$. Ahora bien el conjunto $0 \times I$ es conexo y como \hat{F} continua su imagen ha de ser continua y por tanto estar contenida en un único V_η , luego es un único punto y tendremos $\forall t \hat{F}(0,t) = \hat{F}(0,0) = y_0$, análogamente para $(1,t)$. □

TEOREMA 3.4.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, siendo X conexo por caminos. Entonces $\forall x_1, x_2 \in X$ $p^{-1}(x_1)$ y $p^{-1}(x_2)$ tienen la misma cardinalidad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea γ un camino de x_1 a x_2 . Definimos la aplicación $\theta : p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_2)$ como $\theta(y_1) = \widehat{\gamma}_{y_1}(1)$ siendo $\widehat{\gamma}_{y_1}$ el levantamiento de γ comenzando en y_1 . θ es inyectiva pues si $\theta(y_1) = \theta(y'_1)$ entonces $\widehat{\gamma}_{y_1}(1) = \widehat{\gamma}_{y'_1}(1)$ y considerando el único levantamiento de γ^- comenzando en $y_2 = \widehat{\gamma}_{y_1}(1)$ tendremos $y_1 = \widehat{\gamma}_{y_2}^-(1) = y'_1$. Además considerando $\forall y_2 \in p^{-1}(x_2)$ $\widehat{\gamma}_{y_2}^-(1)$ se ve que es suprayectiva. \square

Este teorema permite hablar de un *espacio recubridor de n hojas* (pudiendo n ser finito o no).

TEOREMA 3.4.3. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Sean γ, σ dos caminos homótopos de x_0 a x_1 y $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\sigma}$ sus levantamientos comenzando en y_0 . Entonces $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\sigma}$ también son homótopos (y terminan en un mismo punto y_1)*

DEMOSTRACIÓN. Es una simple reformulación del teorema 3.3.2 para este caso en el que siempre existen levantamientos. \square

3.4.2. Aplicación de Monodromía.

Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Dado $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tenemos que si \widehat{g} es un levantamiento de $g \in [f]$ comenzando en $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ el punto $\widehat{g}(1)$ es independiente del representante g elegido.

Tenemos definida así una correspondencia $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ que se denomina *aplicación de monodromía*.

TEOREMA 3.4.4. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$.*

Tenemos

1. El homomorfismo $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo
2. Sea G el subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ imagen por p_* de $\pi_1(Y, y_0)$. La aplicación de monodromía induce una aplicación inyectiva entre el conjunto de clases por la derecha de G y $p^{-1}(x_0)$

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/G \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

3. La anterior correspondencia es biyectiva si Y es conexo por caminos.
4. Si f es un lazo basado en x_0 entonces $[f] \in G$ si y sólo si el levantamiento de f comenzando en y_0 , que denotamos \hat{f} es un lazo.

DEMOSTRACIÓN. 1) Vamos a demostrar que sólo el elemento neutro de $\pi_1(Y, y_0)$ se transforma por p_* en el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$.

Sea \hat{h} lazo basado en y_0 tal que $p_*(\hat{h}) = [e_{x_0}]$ y sea F la homotopía de caminos entre $p.\hat{h}$ y el lazo constante e_{x_0} . Sea \hat{F} el levantamiento de F tal que $\hat{F}(0, 0) = y_0$. Tenemos que \hat{F} es una homotopía de caminos entre \hat{h} y el levantamiento de e_{x_0} comenzando en y_0 que es e_{y_0} , luego $[\hat{h}] = [e_{y_0}]$

2) Sean f, g lazos basados en x_0 y \hat{f}, \hat{g} sus levantamientos comenzando en y_0 . De la definición de correspondencia del levantamiento $\phi([f]) = \hat{f}(1)$ y $\phi([g]) = \hat{g}(1)$. Hay que demostrar que $\phi([f]) = \phi([g])$ si y sólo si $\exists [h] \in G$ tal que $[f] = [h] \star [g]$ (o sea $[f] \in G \star [g]$)

Supongamos que $[f] \in G \star [g]$ entonces $[f] = [h \star g]$ para algún h tal que existe un lazo \hat{h} basado en y_0 tal que $h = p.\hat{h}$. Como \hat{h} termina en y_0 y \hat{g} comienza en y_0 el producto $\hat{h} \star \hat{g}$ está bien definido y es un levantamiento de $h \star g$ comenzando en y_0 como f y $h \star g$ son homótopos, también lo son sus levantamientos luego acabarán en el mismo punto, que será el de finalización de \hat{g} . Por tanto $\phi([f]) = \phi([g])$

Supongamos ahora que $\phi([f]) = \phi([g])$ entonces los levantamientos de f, g comenzando en y_0 \hat{f}, \hat{g} acaban en el mismo punto de Y . Entonces el producto $\hat{f} \star (\hat{g}^-)$ está

definido y es un lazo basado en y_0 que denotaremos \widehat{h} . Tendremos evidentemente que $[\widehat{h} \star \widehat{g}] = [\widehat{f}]$ y existirá una homotopía de caminos \widehat{F} entre ellos. Pero entonces $p.\widehat{F}$ es homotopía entre f y $p.(\widehat{h} \star \widehat{g}) = h \star g$ donde hemos denotado por h a $p.\widehat{h}$ con lo que evidentemente $[h] \in G$ y $[f] \in G \star [g]$

3) Si Y es conexo por caminos dado $z_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un camino \widehat{f} entre y_0 y z_0 de forma que $f = p.\widehat{f}$ es un lazo basado en x_0 tal que $\phi(f) = z_0$. Por tanto Φ es suprayectiva y como era inyectiva pues es biyectiva.

4) $[f] \in G$ quiere decir que existe un lazo $g \in [f]$ y un lazo \widehat{g} basado en y_0 tal que $g = p.\widehat{g}$. Sea F la homotopía entre g y f y \widehat{F} un levantamiento tal que $\widehat{F}(0, 0) = y_0$. Entonces \widehat{F} es una homotopía de caminos entre \widehat{g} y el levantamiento único de f comenzando en y_0 que denotaremos \widehat{f} . Por tanto $\widehat{f}(1) = \widehat{F}(1, 1) = \widehat{F}(1, 0) = \widehat{g}(1) = y_0$ □

COROLARIO 3.4.1. *Si Y es simplemente conexo la aplicación de monodromía es biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. En ese caso $\pi_1(Y, y_0)$ es el grupo trivial y por tanto también G que es su imagen por p_* además Y será conexo por caminos. □

COROLARIO 3.4.2. *Si Y es conexo por caminos el número de hojas de un recubrimiento viene dado el índice del subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$*

DEMOSTRACIÓN. El número de elementos de $p^{-1}(x_0)$ es el mismo que el del grupo $\pi(X, x_0)/G$ □

COROLARIO 3.4.3. *El grupo fundamental del círculo es isomorfo a \mathbb{Z} (considerado grupo abeliano)*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar la aplicación recubridora del ejemplo 3.4.1 y como \mathbb{R} es simplemente conexo y $p^{-1}((1, 0)) = \mathbb{Z}$ tenemos que la aplicación de monodromía es biyectiva, falta ver que es homomorfismo.

Sean $[f], [g] \in \pi_1(S^1, (1, 0))$ y \widehat{f}, \widehat{g} los levantamientos correspondientes comenzando en 0 , sean $n = \widehat{f}(1)$, $m = \widehat{g}(1)$

definimos $\widehat{h}(s) = n + \widehat{g}(s)$ que será un camino en \mathbb{R} desde n hasta $n + m$, como $\forall x \in \mathbb{R} \quad p(n + x) = p(x)$ tenemos que \widehat{h} es un levantamiento de g que comienza en n .

El producto $\widehat{f} \star \widehat{h}$ está bien definido y es un levantamiento de $f \star g$ que comienza en 0 y acaba en $n + m$ por tanto

$$\phi([\widehat{f} \star \widehat{h}]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g])$$

y la aplicación de monodromía es un homomorfismo. \square

3.4.3. La acción del grupo fundamental sobre la preimagen (fibra) del punto base.

DEFINICIÓN 3.4.3. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora y $x_0 \in X$ cualquiera consideramos la fibra $F = p^{-1}(x_0)$ y definimos una correspondencia $F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ de forma que si $y \in F$ y $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tenemos $y \cdot [\alpha] = \widehat{\alpha}(1)$ (punto final del levantamiento de α comenzando en y)

Que la correspondencia $F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ está bien definida es consecuencia directa del teorema 3.3.1

PROPOSICIÓN 3.4.5. Esta correspondencia es una acción por la derecha del grupo $\pi_1(X, x_0)$ sobre el conjunto $F = p^{-1}(x_0)$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que demostrar que dado $y \in p^{-1}(x_0)$ $y \cdot [e] = y$ y que $y \cdot ([\alpha] \star [\beta]) = (y \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$

Lo primero es evidente considerando el lazo constante y el teorema 3.4.3

Para demostrar la segunda parte demostraremos la siguiente proposición: Si $\gamma : I \rightarrow X$ y $\gamma' : J \rightarrow X$ son dos curvas en X siendo I, J intervalos cerrados y existiendo $h : J \rightarrow I$ homeomorfismo y $\gamma' = \gamma \cdot h$ entonces sus levantamientos en Y comenzando en el mismo punto cumplen $\widehat{\gamma}' = \widehat{\gamma} \cdot h$

Para verlo basta considerar que $\widehat{\gamma}.h$ y $\widehat{\gamma}'$ son dos levantamientos de γ' comenzando en el mismo punto luego coinciden.

Así considerando la restricción al intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ de $y.[\alpha\star\beta]$ vemos que su punto final será $y.[a]$ y considerando la restricción a $[\frac{1}{2}, 1]$ de $y.[\alpha\star\beta]$ su final será $(y.[a]).[\beta]$ \square

PROPOSICIÓN 3.4.6. *Si Y es conexo por caminos el grupo $\pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente en $F = p^{-1}(x_0)$*

DEMOSTRACIÓN. Sean $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ existirá un camino $\widehat{\gamma}$ que une y_1 con y_2 entonces $p.\widehat{\gamma}$ será un lazo cuyo levantamiento comenzando en y_1 termina en y_2 . \square

3.4.4. Levantamiento general.

Vamos ahora a considerar los levantamientos de aplicaciones más generales que los caminos.

TEOREMA 3.4.5. *(Teorema del levantamiento general) Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora tal que $p(y_0) = x_0$. Sea f una función continua $f : E \rightarrow X$ tal que $f(e_0) = x_0$ y siendo Y, X, E conexos por caminos y localmente conexos por caminos. La aplicación f se puede levantar a una \widehat{f} continua tal que $\widehat{f}(e_0) = y_0$ si y sólo si $f_*(\pi_1(E, e_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Además si existe tal levantamiento es único.*

DEMOSTRACIÓN. Si existe el levantamiento tendremos $f = p.\widehat{f}$ luego $f_* = (p.\widehat{f})_*$ es decir $f_* = p_*(\widehat{f}_*)$ y se tiene la condición necesaria.

Además supongamos que existe el levantamiento y consideremos un punto $e \in E$, como E es conexo por caminos, existirá un camino γ de e_0 a e en E . Este camino dará lugar a un camino $f.\gamma$ en X que tendrá un levantamiento comenzando en y_0 único en Y que coincidirá con $\widehat{f}.\gamma$. Por tanto $(\widehat{f}.\gamma)(1) = \widehat{f}(e)$ esta univocamente determinado y como e puede ser cualquier punto de E el levantamiento, si existe, es único.

Veamos ahora la condición suficiente, como E es conexo por caminos, dado $e \in E$ existe un camino γ entre e_0 y e . Este camino dará lugar a un camino $f.\gamma$ en X que terminará en $x = f(e)$ y que tendrá un levantamiento comenzando en y_0 único en Y

que denotaremos σ . Podríamos definir $\widehat{f}(e) = \sigma(1)$ y ya tendríamos el levantamiento si nos aseguramos que:

La función \widehat{f} está bien definida

La función \widehat{f} es continua

Supongamos otro camino ν entre e_0 y e , dará lugar a un camino $f.\nu$ en X que terminará en $x = f(e)$, por tanto $(f\nu)^-$ será un camino de e a e_0 y el producto $(f.\gamma) \star (f\nu)^-$ será un lazo basado en e_0 . Consideremos ahora los levantamientos únicos: σ de $(f.\gamma)$ comenzando en y_0 y δ de $(f\nu)^-$ comenzando en $\sigma(1)$. Si demostramos que $\delta(1) = y_0$ ya lo tenemos, pues entonces el levantamiento de $f.\nu$ comenzando en y_0 sería δ^- y como $\delta^-(1) = \sigma(1)$ el valor asignado a $\widehat{f}(e)$ sería independiente del camino entre e_0 y e . Ahora bien si $\delta(1) \neq y_0$ tendríamos un lazo $(f.\gamma) \star (f\nu)^-$ en X basado en x_0 cuyo levantamiento no sería un lazo en Y basado en y_0 y por tanto $f_*(\pi_1(E, e_0)) \not\subseteq p_*(\pi_1(Y, y_0))$ contrario a la hipótesis.

Para probar la continuidad de \widehat{f} en e consideremos un entorno N de $\widehat{f}(e)$. Elegimos un entorno U de $f(e)$ conexo por caminos y recubierto regularmente por p . Es decir $p^{-1}(U) = \cup V_j$ disjuntos y homeomorfos a U . Sea V_0 el conjunto para el que $y = \widehat{f}(e) \in V_0$ podemos suponer que $V_0 \subset N$ (si no basta considerar $V_0 \cap N$ y su homeomorfo en U). Como f es continua podemos encontrar un entorno W conexo por caminos de e tal que $f(W) \subset U$ vamos a demostrar que $\widehat{f}(W) \subset V_0$ y estará demostrada la continuidad.

Dado $s \in W$ existe un camino β en W desde e hasta s y el producto de los caminos $\gamma \star \beta$ es un camino desde e_0 a s . El valor $\widehat{f}(s)$ se puede obtener mediante el levantamiento del camino $(f.\gamma) \star (f.\beta)$ comenzando en y_0 . Como el camino $f.\beta$ está en U consideremos $\chi = (p|_{V_0})^{-1}.f.\beta$ que es un levantamiento de $f.\beta$ comenzando en $y = \widehat{f}(e)$ como su imagen ha de ser conexa $\chi(1) \in V_0$

Pero $\sigma * \chi$ es un levantamiento de $(f.\gamma) \star (f.\beta)$ comenzando en y_0 luego $\widehat{f}(s) = \chi(1) \in V_0$ □

3.5. Equivalencia de espacios recubridores

NOTA. A menos que se especifique lo contrario en esta sección supondremos todos los espacios conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

DEFINICIÓN 3.5.1. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Se dice que son equivalentes cuando existe un homeomorfismo h (equivalencia de recubridores) que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

PROPOSICIÓN 3.5.1. Con la notación anterior si existen homeomorfismos h_1, h_2 tales que $h_1(y_0) = h_2(y_0)$ para algún $y_0 \in Y$ entonces $h_1 = h_2$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $A = \{y \in Y : h_1(y) = h_2(y)\}$ evidentemente $y_0 \in A$

Sea $y \in \bar{A}$ (clausura de A) y sea $x = q.h_1(y) = q.h_2(y)$ y supongamos $h_1(y) \neq h_2(y)$.

Sea U un entorno de x regularmente cubierto por q y V_1, V_2 las componentes conexas de $q^{-1}(U)$ que contienen a $h_1(y)$ y $h_2(y)$ respectivamente. Como h_1, h_2 son continuos existe un entorno $W \subset Y$ de y_0 tal que $h_1(W) \subset V_1$ y $h_2(W) \subset V_2$. Pero entonces $W \cap A = \emptyset$ ¡contradicción!

Por tanto A es cerrado

Sea ahora $y \in A$, $x = q.h_1(y) = q.h_2(y)$ Existirá un entorno U de x regularmente cubierto por q de tal modo que $h_1(y), h_2(y)$ estarán en la misma componente conexa V de $q^{-1}(U)$. Como antes existirá $W \subset Y$ tal que $h_1(W) \subset V, h_2(W) \subset V$ y siendo $\vartheta = (q|_V)^{-1}$ tenemos $\forall y' \in W \quad q.h_1(y') = q.h_2(y')$ y componiendo con ϑ concluimos $h_1(y') = h_2(y')$ y A es abierto

Como Y conexo y A abierto cerrado no vacío $A = Y$

□

TEOREMA 3.5.1. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras tales que $p(y_0) = q(z_0) = x_0$. Existe una equivalencia de espacios recubridores $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h(y_0) = z_0$ si y sólo si son iguales los grupos

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) = q_*(\pi_1(Z, z_0))$$

Si h existe es única.

DEMOSTRACIÓN. Si existe h al ser un homeomorfismo tenemos por corolario 3.2.1 que h_* es un isomorfismo y por tanto

$$h_*(\pi_1(Y, y_0)) = \pi_1(Z, z_0)$$

como $q.h = p$ tendremos $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = q_*(h_*(\pi_1(Y, y_0))) = q_*(\pi_1(Z, z_0))$ y tenemos la condición necesaria.

Para ver la condición suficiente supongamos que los grupos son iguales. consideremos

$$\begin{array}{ccc} Y & & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

Como q es recubridora y se cumple la condición del teorema 3.4.5 existirá una aplicación continua $h : Y \rightarrow Z$ tal que $p = q.h$. Análogamente existirá una aplicación continua g tal que $q = p.g$

Consideremos ahora

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g.h} & Y \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

Como $p.g.h = qh = p$ tenemos que $g.h$ es un levantamiento de p con $p(y_0) = y_0$ la identidad es otro de tales levantamientos y por la unicidad $g.h = i_d$. Análogamente se prueba que $h.g = i_d$ \square

Dada una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ y fijado $x_0 \in X$ nos interesa analizar como varía $p_*(\pi_1(Y, y))$ según los posibles valores que puede tomar $y \in p^{-1}(x_0)$.

PROPOSICIÓN 3.5.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ y sean $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ $H_1 = p_*(\pi_1(Y, y_1))$. Si γ es un camino de y_0 a y_1 entonces $\alpha = p.\gamma$ será un lazo en X basado en x_0 y se cumple*

$$[\alpha] \star H_1 \star [\alpha]^{-1} = H_0$$

Recíprocamente dado $H \subset \pi_1(X, x_0)$, conjugado de H_0 , existe $y \in p^{-1}(x_0)$ tal que $p_(\pi_1(Y, y)) = H$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $[h] \in H_1$ existe \tilde{h} lazo en Y basado en y_1 tal que $p.\tilde{h} = h$. Entonces $\tilde{\sigma} = (\gamma \star \tilde{h}) \star \gamma^{-1}$ es un lazo basado en y_0 y tendremos $p_*([\tilde{\sigma}]) = [(\alpha \star h) \star \alpha^{-1}] = [\alpha] \star [h] \star [\alpha]^{-1}$ luego $[\alpha] \star H_1 \star [\alpha]^{-1} \subset H_0$

Consideremos ahora que γ^{-1} es un camino de y_1 a y_0 y además $\alpha^{-1} = p.\gamma^{-1}$ intercambiando los papeles de H_0 y H_1 en el argumento anterior tenemos $[\alpha]^{-1} \star H_0 \star [\alpha] \subset H_1$ y multiplicando por la derecha por $[\alpha]$ y por la izquierda por $[\alpha]^{-1}$ tenemos

$$H_0 \subset [\alpha] \star H_1 \star [\alpha]^{-1} \text{ y por tanto } H_0 = [\alpha] \star H_1 \star [\alpha]^{-1}$$

Para probar el recíproco consideremos H conjugado de H_0 tendremos que $H_0 = [\alpha] \star H \star [\alpha]^{-1}$ para algún $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Sea γ el levantamiento de α partiendo de y_0 será un camino que terminará en $y = \gamma(1)$. Entonces la primera parte de la proposición implica que $H_0 = [\alpha] \star (p_*(\pi_1(Y, y))) \star [\alpha]^{-1}$ \square

TEOREMA 3.5.2. *Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Condición necesaria y suficiente para que exista una equivalencia entre espacios recubridores es que para cualesquiera $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $z_0 \in q^{-1}(x_0)$ los subgrupos (de $\pi_1(X, x_0)$) $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ y $q_*(\pi_1(Z, z_0))$ sean conjugados*

DEMOSTRACIÓN. Sea h una equivalencia entre Y y Z . Sea $z_1 = h(y_0)$ entonces por el teorema 3.5.1 $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = q_*(\pi_1(Z, z_1))$ y por la proposición 3.5.2 $q_*(\pi_1(Z, z_0))$ y $q_*(\pi_1(Z, z_1))$ son conjugados

Recíprocamente por la proposición 3.5.2 si $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ y $q_*(\pi_1(Z, z_0))$ son conjugados existirá $z_1 \in q^{-1}(x_0)$ tal que $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ y $q_*(\pi_1(Z, z_1))$ serán iguales y aplicando el teorema 3.5.1 lo tenemos probado \square

OBSERVACIÓN. Hemos demostrado que existe correspondencia biyectiva entre:

Clases de espacios recubridores equivalentes \leftrightarrow Clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$

3.6. El espacio recubridor universal

NOTA. A menos que se especifique lo contrario en esta sección supondremos todos los espacios conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

DEFINICIÓN 3.6.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora tal que $p(y_0) = x_0$. Si Y es simplemente conexo se denomina Espacio de Recubrimiento Universal de X .

Como $\pi_1(Y, y_0)$ es trivial, también lo es $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. El teorema 3.5.1 implica que todos los espacios de recubrimiento universales son equivalentes.

No todos los espacios tienen un espacio de recubrimiento universal, aunque éste existe en muchos casos. Para construirlo necesitaremos una propiedad extra.

DEFINICIÓN 3.6.2. Un espacio X se dice que es semilocalmente simplemente conexo cuando $\forall x \in X$ existe un entorno U tal que $inc_*(\pi_1(U, x))$ es el grupo trivial (siendo inc la inclusión de U en X)

TEOREMA 3.6.1. Sea X conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces tiene un espacio de recubrimiento universal.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos X con las propiedades mencionadas. Dado $x_0 \in X$ definimos $E = \{[\gamma] : \gamma : I \rightarrow X, \gamma(0) = x_0\}$ (clases de caminos comenzando en x_0) y definimos $p : E \rightarrow X$ mediante $p([\gamma]) = \gamma(1)$

Sea \mathcal{U} la familia de entornos conexos por caminos de los puntos de X tales que $U \in \mathcal{U}$ implica $inc_*(\pi_1(U, x)) = \{0\}$ (Como son conexos por caminos da igual el punto x), si V conexo por caminos y $V \subset U$ se tiene $V \in \mathcal{U}$. Por tanto tenemos una base de entornos de X

Definimos una base de entornos de E mediante $U_{[\gamma]} = \{[\gamma \star \eta] : \eta : I \rightarrow U, \eta(0) = \gamma(1)\}$

$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ es suprayectiva por ser U conexo por caminos. Es además inyectiva puesto que si η, η' son dos caminos tales que $\eta(0) = \eta'(0) = \gamma(1)$ y $\eta(1) = \eta'(1)$ entonces $\eta \sim \eta'$ en X por ser semilocalmente simplemente conexo y entonces $[\gamma \star \eta] = [\gamma \star \eta']$. Es decir $p|_{U_{[\gamma]}}$ es una biyección que hace $p(U_{[\gamma]}) = U$.

Se tiene además que si $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ entonces $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$ dado que entonces $\gamma' = \gamma \star \eta$ y por tanto $U_{[\gamma']} = \{[\gamma \star \eta \star \mu] : \mu : I \rightarrow U, \mu(0) = (\gamma \star \eta)(1)\}$ pero entonces cada $\eta \star \mu$ será un camino en U y $U_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ e intercambiando γ y γ' tenemos la igualdad

Sea $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} \neq \emptyset$ existirá $W \in \mathcal{U}$, $W \subset U \cap V$ y existirá $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ como $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$, $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma']}$ tendremos $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ y por tanto los $U_{[\gamma]}$ son, en efecto, base de entornos de E .

Una vez definida la topología en E tenemos que $p|_{U_{[\gamma]}}$ es un homeomorfismo, pues como $p(U_{[\gamma]}) = U$ es una aplicación abierta y si $A \subset X$ abierto $\forall x \in A$ y $\forall U$ entorno de x existe $V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ pues \mathcal{U} base de entornos de X , además existe γ camino de x_0 a x y entonces $p(V_{[\gamma]}) = V \subset U$ y p continua.

Además es aplicación recubridora puesto que si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \neq \emptyset$ entonces $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$

Consideremos $[x_0] \in E$ (clase camino cte), dado $[\gamma] \in E$ definimos $\mu_\tau(t) = \gamma(t\tau)$ entonces $[\mu_\tau] \in E$ y $\Lambda : I \rightarrow E$ tal que $\Lambda(t) = [\mu_t]$ es un camino de $[x_0]$ a $[\gamma]$ por tanto E es conexo por caminos

Sea $\widehat{\gamma}$ un lazo en E basado en $[x_0]$ entonces $p\widehat{\gamma}$ es un lazo en X basado en x_0 definimos $\mu_\tau(t) = p\gamma(t\tau)$ entonces $\widehat{\mu}(t) = [\mu_\tau]$ es un levantamiento de $p\widehat{\gamma}$ en E comenzando en $[x_0]$ y por la unicidad de los levantamientos $\widehat{\gamma}(t) = \widehat{\mu}(t) \forall t \in I$. Por tanto $H(s, t) = [\mu_\tau(s)]$ es una homotopía de $c_{[x_0]}$ a $\widehat{\gamma}$ y E es simplemente conexo.

Hemos construido por tanto el espacio de recubrimiento universal. \square

Dado que las variedades conexas, y por tanto las superficies de Riemann son localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas (luego también semilocalmente) se deduce que siempre tienen espacio de recubrimiento universal.

Para ver la propiedad fundamental del espacio de recubrimiento universal necesitaremos el siguiente lema cuya demostración puede verse en [MunkT]

LEMA 3.6.1. *Sean p, q, r aplicaciones continuas que hacen conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

Si p y q son aplicaciones recubridoras también lo es s

Si p y s son aplicaciones recubridoras también lo es q

Ahora pasemos a la propiedad fundamental de los espacios de recubrimiento universales

TEOREMA 3.6.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora siendo Y simplemente conexo. Sea $q : Z \rightarrow X$ una aplicación recubridora cualquiera. Existe una aplicación recubridora $s : Y \rightarrow Z$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$ escogemos y_0, z_0 tales que $p(y_0) = q(z_0) = x_0$. Como $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset q_*(\pi_1(Z, z_0))$ por ser el sugbrupo trivial, podemos aplicar el lema 3.4.5 y levantar p a una única aplicación continua $s : Y \rightarrow Z$, tal que $p = q.s$

Aplicando el lema anterior se obtiene que s es recubridora. \square

COROLARIO 3.6.1. *Con la notación anterior $s : Y \rightarrow Z$ es un espacio de recubrimiento universal de Z .*

El siguiente corolario explica que se hable del espacio de recubrimiento universal.

COROLARIO 3.6.2. *Si Y y Z son espacios de recubrimiento universal de X son equivalentes.*

COROLARIO 3.6.3. *Si X es simplemente conexo toda aplicación recubridora es un homeomorfismo $p : Y \rightarrow X$*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar que $id : X \rightarrow X$ es un recubrimiento universal. \square

3.6.1. La acción del grupo fundamental sobre un espacio de recubrimiento universal.

Hemos visto que dado un espacio de recubrimiento $p : Y \rightarrow X$ las imagenes por el homomorfismo p_* de los grupos $\pi_1(Y, y)$ siendo $y \in p^{-1}(x)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$.

Nos preguntamos por el recíproco: Dada una clase de equivalencia $[H]$ de subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$ ¿Existira un espacio de recubrimiento y una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ tal que p_* genere dichos subgrupos? Vamos a ver que si existe el espacio de recubrimiento universal la respuesta es afirmativa.

Supongamos que $q : E \rightarrow X$ es una aplicación recubridora universal y sean $x_0 \in X$ y $e_0 \in q^{-1}(x_0)$

Dado un punto cualquiera e existirá un camino $\widehat{\gamma}$ desde e_0 hasta e , denotaremos por $\gamma = q \cdot \widehat{\gamma}$, que será un camino de x_0 a $q(e)$. Como E es simplemente conexo todos los caminos $\widehat{\gamma}$ que unen e_0 con e son homótopos y por tanto también lo serán las proyecciones γ que unen x_0 con $q(e)$.

Si $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$ consideremos la acción por la derecha sobre $q^{-1}(x_0)$ (definida en la sección 3.4.3) que aplicará e_0 en un punto $e_1 \in q^{-1}(x_0)$. Existe un único levantamiento de γ comenzando en e_1 que denotaremos $\widetilde{\gamma}$ que terminará en un punto $e' = \widetilde{\gamma}(1) \in q^{-1}(q(e))$. Como todos los posibles γ son homótopos, el punto e' sólo depende de e y de la clase $[\delta]$. Hemos por tanto definido una aplicación $\Upsilon : E \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow E$ $(e, [\delta]) \rightarrow e \cdot [\delta] = e'$

PROPOSICIÓN 3.6.1. *La aplicación $\Upsilon : E \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow E$ es un acción de grupo por la derecha sobre el conjunto E*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de que $\pi_1(X, x_0)$ actúa por la derecha sobre $q^{-1}(x_0)$ □

Dado un subgrupo $G \subset \pi_1(X, x_0)$ podemos definir una relación de equivalencia en E del siguiente modo

$$e \sim e' \iff \exists g \in G : e \cdot g = e'$$

Se comprueba fácilmente que es una relación de equivalencia. Denotaremos por E/G al conjunto de clases de equivalencia (órbitas)

PROPOSICIÓN 3.6.2. *El subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ estabilizador de e es el subgrupo trivial $\forall e \in E$ y la acción es por tanto sin puntos fijos (libre).*

DEMOSTRACIÓN. El levantamiento de γ comenzando en $\widehat{\alpha}[1]$ (siendo $\widehat{\alpha}$ el levantamiento de α comenzando en e_0) termina en e . Entonces el levantamiento de γ^{-1} comenzando en e termina $\widehat{\alpha}[1]$ y por la unicidad del levantamiento tendremos $\widehat{\alpha}[1] = e_0$ y α será homotopo al lazo constante. □

TEOREMA 3.6.3. *$\forall G$ subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, el espacio $Y = E/G$ y $p : Y \rightarrow X$ $p(eG) = q(e)$ constituyen una aplicación recubridora cuyo número de hojas es*

el índice de G en $\pi_1(X, x_0)$ y tal que las imágenes por p_* de los grupos $\pi_1(Y, y_0)$ para los distintos $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ son las clases de conjugación de G .

DEMOSTRACIÓN. Como existe biyección $\{\text{órbita } e\} \longleftrightarrow G/Stab_G(e)$ (ver [BujalTG]) en este caso será $\{\text{órbita } e\} \longleftrightarrow G$. Si definimos $Y = E/G$ y consideramos la proyección $\pi : E \rightarrow E/G$ y la aplicación $p : Y \rightarrow X$ $p(eG) = q(e)$ tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & Y \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

y por el lema 3.6.1 p será una aplicación recubridora, y por la forma de construirla p_* tendrá las propiedades requeridas. \square

3.6.2. Representación por Monodromía.

Consideremos un espacio de recubrimiento $p : Y \rightarrow X$ de un número *finito* n de hojas, *no necesariamente conexo por caminos*. Entonces dado $x \in X$ tal que la cardinalidad del conjunto $p^{-1}(x)$ sea n podemos asignar un orden a las preimágenes que serán $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Cada lazo γ basado en x tiene un único levantamiento a un lazo $\widehat{\gamma}_i$ comenzando en y_i . Este lazo terminará en un punto y_j que será el mismo para todos los lazos homotopos. Es decir dado $[\gamma]$ cada índice i determina un y_i de comienzo del levantamiento al que le corresponde un determinado índice j definido por el punto final del levantamiento y_j . Así podemos definir una correspondencia

$$\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$$

Siendo S_n el conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Esta correspondencia es un homomorfismo de grupos como se comprueba fácilmente.

DEFINICIÓN 3.6.3. *Se denomina representación por monodromía de un espacio de recubrimiento (no necesariamente conexo por caminos) de n hojas $p : Y \rightarrow X$ al homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$*

PROPOSICIÓN 3.6.3. *Sea $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ la representación por monodromía de un espacio de recubrimiento de n hojas conexo por caminos $p : Y \rightarrow X$. La imagen de ρ es un subgrupo transitivo de S_n*

DEMOSTRACIÓN. Sean $y_i, y_j \in p^{-1}(x)$ como Y conexo por caminos existe $\hat{\gamma}$ que comienza en y_i y termina en y_j . Sea $\gamma = p.\hat{\gamma}$ será un lazo basado en x . Entonces $\rho([\gamma])$ es una permutación que transforma i en j □

PROPOSICIÓN 3.6.4. *Sea $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ un homomorfismo de grupos tal que su imagen $\rho(\pi_1(X, x))$ es un subgrupo transitivo. Si X tiene un recubrimiento universal existe un recubrimiento conexo por caminos $p : Y \rightarrow X$ cuya representación por monodromía es ρ*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H_{ij} = \{[\gamma] \in \pi_1(X, x) : \rho([\gamma])(i) = j\}$ (es decir aquellas clases de lazos para las que ρ lleva el índice i al j). Es trivial comprobar que los H_{ij} son subgrupos.

Dado $[\theta] \in H_{ij}$ (existe alguno por ser imagen transitiva) definimos: $\Theta : H_{ii} \rightarrow H_{ij}$ por $\Theta([\gamma]) = [\theta] \star [\gamma]$ como $\rho([\theta] \star [\gamma])(i) = \rho([\theta])(\rho([\gamma])(i)) = \rho([\theta])(i) = j$ la aplicación está bien definida.

Supongamos que $\Theta([\gamma]) = \Theta([\beta])$ entonces $[\theta] \star [\gamma] = [\theta] \star [\beta]$ y multiplicando por $[\theta^{-}]$ por la izquierda vemos que es inyectiva.

Dado $[\xi] \in H_{ij}$ entonces $[\theta^{-}] \star [\xi] \in H_{ii}$ luego también suprayectiva y por tanto biyectiva.

Como $\pi_1(X, x) = \bigcup_k H_{ik}$ tendremos que el índice $[\pi_1(X, x) : H_{ii}] = n$

Dado $[\xi] \in H_{ij}$ tenemos que $[\xi].H_{ii}.[\xi]^{-1} = H_{jj}$ luego los H_{ii} son subgrupos conjugados

Si escogemos $H = H_{11}$ (por ejemplo) existirá por el teorema 3.6.3 un espacio de recubrimiento $p : Y \rightarrow X$ y un $y \in p^{-1}(x)$ tal que $p_*(\pi_1(Y, y)) = H$. Este espacio tendrá n hojas y podremos asignar un número a cada una de las preimágenes de x

Por la forma de construir este espacio (ver demostración del teorema 3.6.3) a partir del espacio de recubrimiento universal mediante las órbitas en E de H tenemos que la representación por monodromía de $p : Y \rightarrow X$ es ρ \square

OBSERVACIÓN. *Si existe recubrimiento universal hemos demostrado que existe correspondencia biyectiva entre:*

Clases de espacios de recubrimiento conexos por caminos de n hojas equivalentes
 \rightarrow Clases de Homomorfismos de grupo entre $\pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ equivalentes por conjugación en S_n (por las distintas posibilidades de numeración de las preimágenes)

3.7. Transformaciones recubridoras (“Deck Transformations”)

NOTA. A menos que se especifique lo contrario en esta sección supondremos todos los espacios conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

PROPOSICIÓN 3.7.1. *Dada una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ las equivalencias de espacios de recubrimiento de Y consigo mismo forman un grupo con la operación de composición de aplicaciones. Que se denota $Deck_p(Y, X)$*

DEMOSTRACIÓN. Una equivalencia de espacios de recubrimiento h será un homeomorfismo que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \begin{array}{c} \xleftarrow{h} \\ \xrightarrow{h^{-1}} \end{array} & Y \\
 & \begin{array}{c} \searrow p \\ \swarrow p \end{array} & \\
 & & X
 \end{array}$$

y evidentemente el conjunto de estos homeomorfismos con la operación de composición de aplicaciones forman un grupo. \square

OBSERVACIÓN. *Notar que h aplica las fibras $F = p^{-1}(x) \quad \forall x \in X$ en si mismas.*

El grupo $Deck_p(Y, X)$ define una acción sobre el conjunto Y .

PROPOSICIÓN 3.7.2. *El grupo $Deck_p(Y, X)$ actúa sin puntos fijos (libre) en Y . Es decir si $h \in Deck_p(Y, X)$, $h \neq id$ entonces h no tiene puntos fijos*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la proposición 3.5.1 □

DEFINICIÓN 3.7.1. *Dada $p : Y \rightarrow X$ tal que $p(y_0) = x_0$. Se define una correspondencia*

$$\Psi : Deck_p(Y, X) \rightarrow F \quad \Psi(h) = h(y_0)$$

siendo F la fibra $F = p^{-1}(x_0)$

PROPOSICIÓN 3.7.3. *El homeomorfismo h queda determinado una vez que se conoce $\Psi(h)$ por tanto la correspondencia Ψ es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos considerar h como un levantamiento de p tal que $y_0 \rightarrow h(y_0)$ por la unicidad del levantamiento (teorema 3.3.1) tenemos la de h

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

□

Denotaremos $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Sea $F = p^{-1}(x_0)$ y sea $\Phi : \pi_1(X, x_0)/H_0 \rightarrow F$ la biyección definida en el teorema 3.4.4.

LEMA 3.7.1. *La imagen de la aplicación Ψ es igual a la imagen por Φ del subgrupo $N(H_0)/H_0 \subset \pi_1(X, x_0)/H_0$ (Siendo $N(H_0)$ el normalizador de H_0 o sea $N(H_0) = \{g : gH_0g^{-1} = H_0\}$ ver [BujalTG])*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, cualquier representante de clase α se puede levantar comenzando en y_0 a un camino γ que terminará en un punto $\Phi([\alpha]) =$

y independiente del representante elegido. Tenemos que demostrar que si y sólo si $[\alpha] \in N(H_0)$ existe una transformación recubridora tal que $h(y_0) = y$.

Para cualquier α cuyo levantamiento comience en y_0 y termine en y tendremos por la proposición 3.5.2 que

$$H_0 = [\alpha] \star p_*(\pi_1(Y, y)) \star [\alpha]^{-1}$$

Por otra parte que exista una equivalencia de recubrimientos h tal que $h(y_0) = y$ es lógicamente equivalente por el teorema 3.5.1 a que $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y))$ luego también es lógicamente equivalente a $H_0 = [\alpha] \star H_0 \star [\alpha]^{-1}$ es decir $[\alpha] \in N(H_0)$ \square

TEOREMA 3.7.1. *La aplicación $\Phi^{-1}.\Psi = Deck(Y, X) \rightarrow N(H_0)/H_0$ es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que Φ es una biyección, el lema anterior, y que Ψ es inyectiva es claro que $\Phi^{-1}.\Psi$ es biyectiva. Bastará probar que es un homomorfismo

Sean h, g transformaciones recubridoras tales que $h(y_0) = y_1 \in p^{-1}(x_0)$ $g(y_0) = y_2 \in p^{-1}(x_0)$. Tendremos $\Psi(h) = y_1$ y $\Psi(g) = y_2$. Sea γ un camino desde y_0 a y_1 y σ un camino desde y_0 a y_2 , y sean $\alpha = p.\gamma$ y $\beta = p.\sigma$ se cumplirá que $[\alpha]H_0 = \Phi^{-1}(y_1)$, y $[\beta]H_0 = \Phi^{-1}(y_2)$ es decir $[\alpha]H_0 = \Phi^{-1}.\Psi(h)$ y $[\beta]H_0 = \Phi^{-1}.\Psi(g)$

Sea $y_3 = h(g(y_0))$ entonces $\Psi(h.g) = y_3$.

Como σ va de y_0 a y_2 , $h.\sigma$ es un camino desde $h(y_0) = y_1$ hasta $h(y_2) = h(g(y_0)) = y_3$.

Como γ va de y_0 a y_1 el producto $\gamma \star (h.\sigma)$ está definido y va de y_0 a y_3 , además es un levantamiento de $\alpha \star \beta$ pues $\alpha = p.\gamma$ y como $p.h = p$ (por ser h transformación recubridora) y $\beta = p.\sigma$ podemos poner $\beta = p.(h.\sigma)$. Por tanto $\Phi([\alpha \star \beta]H_0) = y_3 = \Psi(h.g)$ luego $\Phi^{-1}.\Psi(h.g) = [\alpha \star \beta]H_0$ \square

COROLARIO 3.7.1. *El grupo $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ es un subgrupo normal de $\pi(X, x_0)$ si y sólo si para cada par de puntos $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ existe una transformación recubridora $h : Y \rightarrow Y$ tal que $h(y_1) = y_2$ (Es decir: $Deck_p(Y, X)$ actúa transitivamente en Y)*

DEMOSTRACIÓN. Si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ entonces $N(H_0) = \pi_1(X, x_0)$ y la imagen de Ψ coincide con la Φ siendo por tanto $F = p^{-1}(x_0)$. En este caso $\forall y \in F \exists h \in Deck_p(Y, X)$ tal que $h(y_0) = y$. Recíprocamente si se cumple lo anterior $N(H_0) = \pi_1(X, x_0)$ y H_0 es subgrupo normal. \square

DEFINICIÓN 3.7.2. Una aplicación recubridora (o un espacio de recubrimiento) $p : Y \rightarrow X$ se denomina de Galois (también se emplean los términos normal y regular) cuando $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$

Si una aplicación recubridora es Galois como H_0 es normal $p_*(\pi_1(Y, y)) = H_0 \quad \forall y \in p^{-1}(x_0)$

COROLARIO 3.7.2. Si $p : Y \rightarrow X$ es espacio de recubrimiento universal entonces es Galois.

DEMOSTRACIÓN. Como Y simplemente conexo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ es el subgrupo trivial que es normal. \square

COROLARIO 3.7.3. Si $p : Y \rightarrow X$ es espacio de recubrimiento universal $\Phi^{-1}.\Psi$ es un isomorfismo $Deck_p(Y, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar en teorema 3.7.1 que H_0 es subgrupo trivial y su normalizador $\pi_1(X, x_0)$ \square

EJEMPLO 3.7.1. Sea H el semiplano izquierdo de \mathbb{C} es decir $H = \{x + iy \in \mathbb{C} : x < 0\}$ y sea $D^* = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. La aplicación $e^z : H \rightarrow D^*$ es recubridora y como H es simplemente conexo tenemos que es el recubridor universal.

Sea $p = re^{i\theta}$ su preimagen esta constituida por los puntos $\ln(r) + i(2\pi n + \theta)$ las funciones $\vartheta : H \rightarrow H \quad \vartheta(z) = z + i2\pi n$ son transformaciones recubridoras y sus composiciones forman un grupo isomorfo a los enteros luego $\pi_1(D^*) = \mathbb{Z}$.

Se trata de un recubrimiento con ∞ hojas.

3.7.1. Grupos de homeomorfismos de un espacio de recubrimiento.

Vamos ahora a analizar otro método de construir espacios de recubrimiento que serán Galois.

Recordemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.7.3. *La acción de G sobre Y se dice que es libremente discontinua si $\forall y \in Y$ existe un entorno V tal que $\forall g \neq e \ V \cap g(V) = \emptyset$ (Si $g_1 \neq g_2$ entonces $g_1(V) \cap g_2(V) = \emptyset$ considerando que $g_1^{-1}g_2(V) \cap V = \emptyset$)*

TEOREMA 3.7.2. *Sea Y conexo por caminos y localmente conexo por caminos, G un grupo de homeomorfismos de Y en Y . La aplicación cociente $\pi : Y \rightarrow Y/G$ es recubridora si y sólo si la acción de G sobre Y es libremente discontinua. En ese caso la aplicación recubridora es Galois y G es el grupo $Deck_\pi(Y, Y/G)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un abierto de Y entonces $g(V)$ es abierto (g homeomorfismo) $\pi^{-1}\pi(V) = \{\bigcup g(V) : g \in G\}$ será abierto y por definición de topología cociente $\pi(V)$ abierto en Y/G así π es una aplicación abierta.

Supongamos que la acción de G es libremente discontinua. Dado $y \in Y$ sea V un entorno tal que $g_1(V)$ disjunto de $g_2(V)$ siempre que $g_1 \neq g_2$ entonces $\pi^{-1}\pi(V) = \{\bigcup g(V) : g \in G\}$ es unión de conjuntos abiertos (de Y) disjuntos uno para cada $g \in G$ como $g(V) = \pi|_V(V)$ es biyectiva continua y abierta es un homeomorfismo y π recubridora de $|G|$ hojas

Supongamos ahora que π es recubridora. Dado $y \in Y$ sea W el entorno de $\pi(y)$ regularmente cubierto por π . Entonces $\pi^{-1}(W) = \bigcup V_i$ (V_i disjuntos) existirá V_α tal que $y \in V_\alpha$ y dado $g \neq e \ g(V_\alpha)$ debe ser disjunto de V_α pues si no lo fuera $\pi|_{V_\alpha}$ no sería inyectiva y por hipótesis es homeomorfismo. Así la acción es libremente discontinua

Si π es recubridora dado $g \in G$ tenemos que $\pi.g = \pi$. Sea $h \in Deck_\pi(Y, Y/G)$ tal que $h(y_1) = h(y_2)$ como $\pi.h = \pi$ $[y_1] = [y_2]$ y existe $g \in G$ tal que $g(y_1) = y_2$ entonces por el teorema 3.5.1 (unicidad) $h = g$ luego $G = Deck_\pi(Y, Y/G)$

Dados dos puntos y_1, y_2 tales que $[y_1] = [y_2]$ existe $g \in G$ tal que $y_2 = g(y_1)$ y por el corolario 3.7.1 vemos que π es Galois \square

TEOREMA 3.7.3. *Si $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora Galois y $G = \text{Deck}_p(Y, X)$ existe un homeomorfismo h que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ Y/G & \xleftrightarrow{h} & X \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $g \in \text{Deck}_p(Y, X)$ entonces $p(g(x)) = p(x)$ por definición luego es constante en cada órbita e induce una aplicación continua h del espacio cociente Y/G en X

p es una aplicación cociente pues es continua suprayectiva y abierta como es Galois dos puntos cualesquiera de $p^{-1}(x_0)$ están en la misma órbita bajo la acción de G luego induce una aplicación continua de X en Y/G (inversa de h) \square

COROLARIO 3.7.4. *Sea E el espacio de recubrimiento universal de X entonces X es homeomorfo a $E/\text{Deck}_\pi(E, X)$.*

Esto será muy importante en la teoría de Superficies de Riemann una vez que se establezcan los espacios recubridores universales (Uniformización) los subgrupos de automorfismos que actuen de forma propia discontinua originarán Superficies de Riemann

3.7.2. Espacios con el mismo recubridor universal.

Vamos a considerar ahora dos espacios X_1, X_2 con el mismo recubridor universal E . Existirán dos grupos de transformaciones $G_1 \approx \pi_1(X_1)$ y $G_2 \approx \pi_1(X_2)$ tales que $X_1 \approx E/G_1$ y $X_2 \approx E/G_2$.

PROPOSICIÓN 3.7.4. *Una aplicación continua $f : X_1 \rightarrow X_2$ induce una aplicación continua (levantamiento) $\hat{f} : E \rightarrow E$ (no de forma única) tal que $p_2 \cdot \hat{f} = f \cdot p_1$ siendo $p_i : E \rightarrow E/G_i$ las proyecciones canónicas*

DEMOSTRACIÓN. Elegidos $x_0 \in X_1$ y $z_0 \in p_2^{-1}(f(x_0))$, podemos levantar (por el teorema 3.4.5) f a una aplicación \tilde{f} de forma que sea conmutativo el diagrama \square

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Definimos $\hat{f}(z) = (\tilde{f}(p_1(z)))$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ p_1 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

y tendremos $p_2 \cdot \hat{f} = p_2 \cdot \tilde{f} \cdot p_1 = f \cdot p_1$

PROPOSICIÓN 3.7.5. Cada levantamiento $\hat{f} : E \rightarrow E$ de $f : X_1 \rightarrow X_2$ induce un homomorfismo $F : G_1 \rightarrow G_2$ que se caracteriza porque $F(g) \cdot \hat{f} = \hat{f} \cdot g$

DEMOSTRACIÓN. Un levantamiento \hat{f} de la proposición anterior deberá cumplir que

$$\forall x \in E, \forall g \in G_1 \exists h \in G_2 \quad \hat{f}(gx) = h(\hat{f}(x))$$

Definimos $F(g) = h$.

Vamos a ver que h es independiente de x , consideremos otro punto $x' \in E$ existirá un camino $\hat{\gamma}$ de x a x' entonces $\hat{f} \cdot g \cdot \hat{\gamma}$ y $h \cdot \hat{f} \cdot \hat{\gamma}$ son dos caminos en E que comienzan en el mismo punto y tienen la misma proyección en un camino de X_2 dado por $\gamma = p_2 \cdot \hat{f} \cdot g \cdot \hat{\gamma} = f \cdot p_1 \cdot \hat{\gamma}$. Son por tanto dos levantamientos iguales y terminarán en el mismo punto luego $\hat{f}(gx') = h(\hat{f}(x'))$.

Como tendremos

$$F(g_2) \cdot F(g_1) \cdot \hat{f} = F(g_2) \cdot \hat{f} \cdot g_1 = \hat{f} \cdot g_2 \cdot g_1 = F(g_2 \cdot g_1) \cdot \hat{f}$$

se tiene que es un homomorfismo. \square

Sea \check{f} otro levantamiento de f existe $h \in G_2$ tal que $\check{f} = h.\hat{f}$ pues dado $x \in E$ ha de existir h tal que $\check{f}(x) = h(\hat{f}(x))$ y h es independiente de x por una demostración idéntica a la anterior

A $\check{f} = h.\hat{f}$ le corresponderá F' tal que

$$F'(g).\check{f} = F'(g).h.\hat{f} = \check{f}.g = h.\hat{f}.g = h.F(g).\hat{f} \text{ luego } F'(g).h = h.F(g) \text{ y } F'(g) = h.F(g).h^{-1}$$

Denominaremos a los homomorfismos que cumplen $F'(g) = h.F(g).h^{-1}$ equivalentes.

Si f es un homeomorfismo de la igualdad $f.p_1 = p_2.\hat{f}$ tendremos $p_1.(\hat{f})^{-1} = f^{-1}.p_2$ es decir $\widehat{(f^{-1})} = (\hat{f})^{-1}$ y por tanto llamando G al homomorfismo inducido por \hat{f}^{-1}

$$G(F(g)) = G(F(g)).(\hat{f})^{-1}.\hat{f} = (\hat{f})^{-1}.F(g).\hat{f} = (\hat{f})^{-1}.\hat{f}.g = g$$

y cada F es un isomorfismo.

PROPOSICIÓN 3.7.6. *Sean $f_0, f_1 : X_1 \rightarrow X_2$ homeomorfismos homotópicos, entonces inducen los mismos isomorfismos entre G_1, G_2*

DEMOSTRACIÓN. Sea h_t la homotopía entre f_0, f_1 que se levanta en E a una homotopía \hat{h}_t entre \hat{f}_0, \hat{f}_1 . Sea $x \in E$ y $g \in G_1$ y consideremos los caminos $t \in [0, 1]$

$$\gamma = (\hat{f}_0.g.\hat{f}_0^{-1}).\hat{h}_t(z) \quad \vartheta = \hat{h}_t(g(z))$$

Ambos comienzan en $\hat{f}_0(g(z))$ y se proyectan sobre X_2 en $h_t(p_1(z))$ luego coinciden en su punto final es decir

$$(\hat{f}_0.g.\hat{f}_0^{-1}).\hat{f}_1(z) = \hat{f}_1.g(z) \quad (\hat{f}_0.g.\hat{f}_0^{-1})(z) = (\hat{f}_1.g.\hat{f}_1^{-1})(z)$$

y se tiene la proposición. \square

Haces

4.1. Prehaces y Hace

Un Prehaz \mathcal{F} es un functor contravariante de la categoría de los conjuntos abiertos en un espacio topológico X con morfismos las inclusiones $V \subseteq U$ a la categoría de los grupos abelianos (también se pueden considerar los conjuntos, anillos, espacios vectoriales, etc) con los homomorfismos.

Más concretamente

DEFINICIÓN 4.1.1. *Un prehaz \mathcal{F} asigna a cada abierto $U \subset X$ (queremos significar $U \subseteq X$) un grupo $\mathcal{F}(U)$, y si $V \subset U$ existe un homomorfismo $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, que se denomina de restricción, que cumple las siguientes propiedades*

1. Si $U = \emptyset$ $\mathcal{F}(U) = 0$ (grupo trivial)
2. ρ_U^U es la identidad
3. Si $U \subset V \subset W$ entonces $\rho_U^W = \rho_U^V \cdot \rho_V^W$

NOTA. *Por simplicidad si $f \in \mathcal{F}(V)$, $U \subset V$ frecuentemente denotaremos como $f|_U$ a $\rho_U^V(f)$*

A los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se les denomina secciones de \mathcal{F} sobre U
 A los elementos de $\mathcal{F}(X)$ se les denomina secciones globales

EJEMPLO 4.1.1. *Veamos varios ejemplos de prehaces*

1. El conjunto $\mathcal{C}_X^\infty(U)$ el de funciones infinitamente diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con la restricción de dominio, es un prehaz de anillos
2. Sea X arbitrario y G un grupo abeliano $\forall U \subset X, U \neq \emptyset \mathcal{F}(U) = G$ con restricciones $\rho_U^V = id$ si $U \neq \emptyset$ y $\rho_U^V = 0$ si $U = \emptyset$ (prehaz constante)

3. Dada una variedad analítica X de dimensión compleja uno (superficie de Riemann) las funciones holomorfas en $U \subset X$, $\mathcal{O}(U)$, (ver capítulo 5) y meromorfas $\mathcal{M}(U)$

DEFINICIÓN 4.1.2. Sean \mathcal{F}, \mathcal{G} prehaces sobre un espacio topológico X tales que $\forall U \subset X$ $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$. El prehaz \mathcal{G} que asocia a cada U el grupo $\mathcal{G}(U)$, y tiene como homomorfismo restricción los inducidos por los homomorfismos restricción en \mathcal{F} considerados en los subgrupos correspondientes, se denomina subprehaz y se denota $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

Un haz es un prehaz en donde es posible agrupar elementos de $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(V)$ y obtener un elemento de $\mathcal{F}(U \cup V)$

DEFINICIÓN 4.1.3. Un haz \mathcal{F} es un prehaz tal que $\forall U \subset X$, abierto y para toda familia $U_i \subset U$ $i \in I$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ se cumple

1. Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $\forall i \in I$ $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ entonces $f = g$
2. Dada una familia $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ $i \in I$ tal que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\forall i \in I$ $f_i = f|_{U_i}$ (O con otra notación: Si $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$ existe f tal que $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$)

EJEMPLO 4.1.2. Es interesante notar que el caso 2 del ejemplo 4.1.1 no es un haz, salvo que todos los abiertos tengan intersección no vacía o G sea el grupo trivial. Pues si existe $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $f_1 \neq f_2 \in G$, considerando $U = U_1 \cup U_2$ tenemos que $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2} = 0$ y debería haber $f \in \mathcal{F}(U) = G$ $f = f_1 = f_2$ ¡contradicción!

Los otros casos del ejemplo son haces además de prehaces.

4.1.1. Haces localmente constantes.

DEFINICIÓN 4.1.4. Se dice que una función $f : U \rightarrow Y$ siendo $U \subset X$ abierto es localmente constante cuando $\forall x \in U$ $\exists U_x \subset U$ entorno de x tal que $\forall x' \in U_x$ $f(x') = f(x)$

PROPOSICIÓN 4.1.1. *Si U es conexo y $f : U \rightarrow Y$ localmente constante f es constante*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $x_0 \in U$ y sea $A = \{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$ como f es localmente constante no es vacío y abierto. Supongamos $x \in \overline{A}$ y sea V el entorno de x en el que $f|_V$ es constante como en ese entorno existen puntos de A tenemos que $f(x) = f(x_0)$ y por tanto A es cerrado. \square

Es trivial comprobar que el haz definido por $\mathcal{F}(U)$ funciones localmente constantes $U \rightarrow G$ forman un haz. Usualmente se denota el haz por \underline{G} siendo ejemplos $\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}$.

4.1.2. Haces rascacielos (“skyscraper sheaves”).

Supongamos que tenemos para cada punto p de X un grupo abeliano G_p . Entonces a cada abierto $U \subset X$ le podemos asignar el grupo producto directo de grupos

$$\mathcal{S}(U) = \prod_{p \in U} G_p$$

y como restricciones las proyecciones canónicas.

Se comprueba facilmente que esto produce un haz que se denomina *haz totalmente discontinuo*.

Si usamos el mismo grupo G en cada punto el haz que obtenemos es el de las funciones de $X \rightarrow G$ que se denota G^X

Otro ejemplo es asignar G al punto p y el grupo trivial al resto de puntos esto da lugar al haz rascacielos.

DEFINICIÓN 4.1.5. *Dado un grupo G se define el haz rascacielos G_p como*

$$G_p(U) = \begin{cases} G & p \in U \\ 0 & p \notin U \end{cases}$$

Así, por ejemplo, \mathbb{C}_p es el haz de números complejos en p y cero en el resto de puntos.

Dado un haz totalmente discontinuo \mathcal{S} y una sección $s \in \mathcal{S}(U)$ podemos asignar a cada punto p el valor de su correspondiente “coordenada” en s (que será un elemento del grupo G_p asociado a p) $s(p)$.

DEFINICIÓN 4.1.6. *Dado un haz totalmente discontinuo \mathcal{S} el soporte de una sección $s \in \mathcal{S}(U)$ es el conjunto de puntos $p \in U$ tales que $s(p) \neq 0$*

En el caso del haz rascacielos los soportes de las diferentes secciones sólo pueden ser $\{p\}$ y el conjunto vacío.

DEFINICIÓN 4.1.7. *Un haz totalmente discontinuo \mathcal{S} se dice que es un haz rascacielos generalizado sobre X cuando:*

- Cada $p \in X$ tiene asociado un grupo G_p
- A cada abierto $U \subset X$ se le asocia el sugbrupo $H \subset \prod_{p \in U} G_p$ consistente en las secciones con soporte discreto. Es decir en cada U _tupla $s = \{g_p \in G_p : p \in U\}$ de H el conjunto $\{p \in U : g_p \neq 0\}$ es discreto

Se comprueba fácilmente que es un haz, y que la definición es equivalente a exigir que sea un haz totalmente discontinuo que asigna el grupo trivial a cada punto de X excepto a los elementos de un subconjunto discreto.

Un ejemplo se obtiene asignando a cada punto de X el grupo \mathbb{Z} obteniéndose el haz de las funciones de $X \rightarrow \mathbb{Z}$ con soporte discreto. Veremos posteriormente que este es el caso de los divisores de una superficie de Riemann

4.2. El tallo de un prehaz (“Stalk”)

4.2.1. Límites directos.

DEFINICIÓN 4.2.1. *Un conjunto dirigido Λ es un conjunto en el que hay definido un preorden \leq (relación reflexiva y transitiva) tal que*

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda \exists \gamma : \alpha \leq \gamma \text{ y } \beta \leq \gamma$$

Denotaremos $\Lambda_1 = \{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda : \alpha \leq \beta\}$

Un sistema dirigido de conjuntos es una familia de conjuntos indexada por un conjunto dirigido $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y un conjunto de aplicaciones una por cada par $(\alpha, \beta) \in \Lambda_1$ $\rho_\beta^\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\beta$ que cumplen

1. $\forall \alpha \in \Lambda \quad \rho_\alpha^\alpha = id$
2. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ tales que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\rho_\beta^\alpha} & U_\beta \\ & \searrow \rho_\gamma^\alpha & \swarrow \rho_\gamma^\beta \\ & U_\gamma & \end{array}$$

DEFINICIÓN 4.2.2. Dado un sistema dirigido de conjuntos $\{U_\alpha\}_\Lambda$, una solución es un conjunto V y una colección de aplicaciones $\forall \alpha \in \Lambda \quad \sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow V$ tales que el siguiente diagrama conmuta $\forall \beta$ tal que $(\alpha, \beta) \in \Lambda_1$

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\rho_\beta^\alpha} & U_\beta \\ & \searrow \sigma_\alpha & \swarrow \sigma_\beta \\ & V & \end{array}$$

DEFINICIÓN 4.2.3. Un límite directo del sistema de conjuntos $\{U_\alpha\}_\Lambda$ es una solución (U, τ_α) que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada solución (V, σ_α) existe una única aplicación $f : U \rightarrow V$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\tau_\alpha} & U \\ & \searrow \sigma_\alpha & \swarrow f \\ & V & \end{array}$$

PROPOSICIÓN 4.2.1. Dos límites directos U, U' de un sistema $\{U_\alpha\}_\Lambda$ son isomorfos. Es decir existe una biyección entre ellos compatible con los τ_α

DEMOSTRACIÓN. Tendremos el siguiente diagrama

□

$$\begin{array}{ccc}
 & & U \\
 & \nearrow \tau_\alpha & \uparrow g \\
 U_\alpha & \xrightarrow{\tau'_\alpha} & U' \\
 & \searrow \tau_\alpha & \uparrow f \\
 & & U
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la propiedad universal a U y U' obtenemos f, g únicas tales que $\tau_\alpha = g \cdot f \cdot \tau_\alpha = id_U \cdot \tau_\alpha$ luego $g \cdot f = id_U$ análogamente $f \cdot g = id_{U'}$ \square

Esta proposición permite hablar del límite directo de un sistema que se denota $\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

Es interesante notar que $\forall u \in U \exists u_\alpha$ tal que $\tau_\alpha(u_\alpha) = u$ pues si no considerando $U' = \bigcup_{\alpha} \text{Imag}(\tau_\alpha)$ tendríamos que (U', τ_α) sería otro límite directo pero entre U' y U no podría haber una biyección.

TEOREMA 4.2.1. *Sea (U, τ_α) una solución del sistema $\{U_\alpha\}_\Lambda$. Será un límite directo si*

1. $\forall u \in U \exists \alpha \in \Lambda$ tal que $u \in \text{Imag}(\tau_\alpha)$
2. Sean $u_\alpha \in U_\alpha$ $u_\beta \in U_\beta$ entonces $\tau_\alpha(u_\alpha) = \tau_\beta(u_\beta)$ si y sólo si $\exists \gamma$ $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ tal que

$$\rho_\gamma^\alpha(u_\alpha) = \rho_\gamma^\beta(u_\beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la solución (U, τ_α) que cumple las hipótesis. Sea (V, σ_α) otra solución definimos $f : U \rightarrow V$ del siguiente modo: $\forall u \in U$ existirá $u_\alpha \in U_\alpha$ tal que $\tau_\alpha(u_\alpha) = u$ entonces $f(u) = \sigma_\alpha(u_\alpha)$.

Si esta aplicación está bien definida es claramente única y cumple la propiedad universal.

Para ver que está bien definida supongamos $u = \tau_\alpha(u_\alpha) = \tau_\beta(u_\beta)$ existirá γ tal que $\rho_\gamma^\alpha(u_\alpha) = \rho_\gamma^\beta(u_\beta)$ y tendremos

$$\sigma_\alpha(u_\alpha) = \sigma_\gamma(\rho_\gamma^\alpha(u_\alpha)) = \sigma_\gamma(\rho_\gamma^\beta(u_\beta)) = \sigma_\beta(u_\beta)$$

y la aplicación está bien definida. \square

Dado un sistema $\{U_\alpha\}_\Lambda$ podemos construir un límite directo. Sea $W = \coprod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ (unión disjunta) definimos la relación de equivalencia

$$u \sim v \begin{cases} u = v & u, v \in U_\alpha \\ \exists \gamma \rho_\gamma^\alpha(u) = \rho_\gamma^\beta(v) & u \in U_\alpha, v \in U_\beta, \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma \end{cases}$$

Entonces $U = W / \sim$ y τ es la composición de las aplicaciones canónicas $U_\alpha \rightarrow W \rightarrow W / \sim$

Para el caso de grupos abelianos el teorema anterior se puede particularizar y así tenemos

TEOREMA 4.2.2. *Sea (G, τ_α) una solución del sistema de grupos abelianos $\{G_\alpha\}_\Lambda$. Será un límite directo cuando*

1. $\forall g \in G \exists \alpha \in \Lambda$ tal que $g \in \text{Imag}(\tau_\alpha)$
2. Sea $g_\alpha \in U_\alpha$ entonces $\tau_\alpha(g_\alpha) = 0$ si y sólo si $\exists \gamma \alpha \leq \gamma$ tal que $\rho_\gamma^\alpha(g_\alpha) = 0$

Dado un sistema $\{G_\alpha\}_\Lambda$ de grupos abelianos sea $H = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ (suma directa) con $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ la inclusión canónica y H_1 el subgrupo de H generado por $i_\alpha(g_\alpha) - i_\beta(\rho_\beta^\alpha(g_\alpha))$ para $(\alpha, \beta) \in \Lambda_1$. Entonces $G = H/H_1$ es un límite directo con estructura de grupo abeliano siendo $\tau_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ la composición de las aplicaciones canónicas $G_\alpha \rightarrow H \rightarrow G$.

4.2.2. Tallo ("Stalk").

Dado un espacio topológico X y un punto $x \in X$ el conjunto de los abiertos U tales que $x \in U$ forman un sistema dirigido por la inclusión $U \leq V \iff V \subseteq U$

Si \mathcal{F} es un prehaz en X y p un punto entonces los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ cuando U recorre los abiertos tales que $p \in U$ forman un sistema dirigido con las aplicaciones de restricción del prehaz

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \quad U \supseteq V \ni p$$

DEFINICIÓN 4.2.4. El tallo \mathcal{F}_p del prehaz \mathcal{F} en el punto $p \in X$ es el límite directo $\varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$ con las correspondientes aplicaciones $\rho_p : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_p$ $\rho_p(f) = [f]_p$

Si \mathcal{F} es un prehaz de grupos abelianos \mathcal{F}_p es un grupo abeliano.

DEFINICIÓN 4.2.5. Se define el germen del elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ en p como el elemento del tallo $[f]_p = \rho_p(f)$

PROPOSICIÓN 4.2.2. Cada elemento de \mathcal{F}_p es imagen por ρ_p de un elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ para algún $U \ni p$. Además dos gérmenes $[f]_p$ ($f \in U$) y $[g]_p$ ($g \in V$) son iguales si y sólo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_W^U(f) = \rho_W^V(g)$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de las definiciones y proposiciones anteriores. □

PROPOSICIÓN 4.2.3. Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X . El elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ es cero si y sólo si los gérmenes $[f]_x = 0 \forall x \in U$

DEMOSTRACIÓN. Si $f = 0$ evidentemente $\forall W \subset U$ $f|_W = 0$ luego $[f]_x = 0$

Si se cumple $[f]_x = 0 \forall x \in U$ por 1 de la definición de haz 4.1.3 se tiene $f = 0$ □

4.2.3. Espacio topológico (étale) asociado al conjunto de gérmenes.

DEFINICIÓN 4.2.6. Se define el conjunto de gérmenes asociado a un haz \mathcal{F} como el conjunto $|\mathcal{F}| = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ (unión disjunta de tallos)

Tendremos definida una aplicación $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ tal que $\pi([f]_x) = x$

Vamos a dotar a $|\mathcal{F}|$ de una topología.

Para cada $U \subset X$ y cada $f \in \mathcal{F}(U)$ definimos $[U, f] = \{[f]_x : x \in U\} \subset |\mathcal{F}|$

TEOREMA 4.2.3. *La familia \mathfrak{B} de los conjuntos $[U, f]$ (siendo $U \subset X$ abierto, $f \in \mathcal{F}(U)$) es la base de una topología en $|\mathcal{F}|$ y la proyección $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un homeomorfismo local*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente cada elemento $[f]_x$ pertenece a uno de los conjuntos de \mathfrak{B}

Si $[f]_x \in |\mathcal{F}|$ es tal que $[f]_x \in [U, f] \cap [V, g]$ existe $[W, h]$ tal que $[f]_x \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$. En efecto sea $x = \pi([f]_x)$ entonces $[f]_x = \rho_x(f) = \rho_x(g)$ es decir existe $W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$ que denotaremos h

Así \mathfrak{B} es una base de la topología.

Para demostrar que π es un homeomorfismo local consideremos $[f]_x \in |\mathcal{F}|$ $\pi([f]_x) = x$ y un entorno abierto $[U, f]$ de $[f]_x$. U será un entorno abierto de x y la aplicación $\pi|_{[U, f]} : [U, f] \rightarrow U$ evidentemente biyectiva, continua, y abierta luego es un homeomorfismo local. \square

Dada $s \in \mathcal{F}(U)$ podemos definir una sección $\tilde{s} : U \rightarrow |\mathcal{F}|$ mediante $\tilde{s}(x) = [s]_x$

PROPOSICIÓN 4.2.4. *La sección \tilde{s} es continua*

DEMOSTRACIÓN. Bastará probar que $\tilde{s}^{-1}([V, f])$ es abierto para cada $V \subset X$ y cada $f \in \mathcal{F}(V)$ esto equivale a que el subconjunto $A \subset U \cap V$ en el que $[s]_x = [f]_x$ sea abierto

Entonces dado $x \in U \cap V$ si $[s]_x = [f]_x$ es que existe $W \subset U \cap V$ entorno abierto de x tal que $s|_W = f|_W$ luego $W \subset A$ \square

DEFINICIÓN 4.2.7. *Un prehaz \mathcal{F} definido en X se dice que cumple el principio de identidad cuando para cada abierto conexo $Y \subset X$ y cada $f, g \in \mathcal{F}(Y)$. Si existe $a \in Y$ tal que $\rho_a(f) = \rho_a(g)$ entonces $f = g$*

Por ejemplo las funciones meromorfas y holomorfas de una superficie de Riemann cumplen el principio de identidad.

TEOREMA 4.2.4. *Supongamos que X es Hausdorff localmente conexo y \mathcal{F} un prehaz que cumple el principio de identidad. Entonces el espacio topológico $|\mathcal{F}|$ de los gérmenes es Hausdorff*

DEMOSTRACIÓN. Sean $[f]_x, [g]_y \in |\mathcal{F}|$ $[f]_x \neq [g]_y$

Si $x \neq y$ Existirán entornos U_1, U_2 de x, y disjuntos. Entonces $\pi^{-1}(U_1)$ y $\pi^{-1}(U_2)$ son entornos disjuntos de $[f]_x, [g]_y$

Si $x = y$ sea $f \in \mathcal{F}(U_1)$ un representante del germen $[f]_x$ y $g \in \mathcal{F}(U_2)$ del $[g]_y$ (siendo U_1, U_2 entornos de x) Sea $U \subset U_1 \cap U_2$ un entorno conexo de x tenemos que $[U, f|_U]$ y $[U, g|_U]$ son entornos de $[f]_x, [g]_x$. Supongamos que no fueran disjuntos: Existiría $[h]_{x'} \in [U, f|_U] \cap [U, g|_U]$ tendríamos que $\rho_{x'}(f) = \rho_{x'}(g)$ y por el principio de identidad $f|_U = g|_U$ y $[f]_x = [g]_x$ ¡contradicción! \square

4.2.4. El haz de gérmenes.

Al espacio $|\mathcal{F}|$ de los gérmenes del prehaz \mathcal{F} se le puede dotar de estructura de haz que denotaremos $\tilde{\mathcal{F}}$.

Sea $U \subset X$ abierto, definimos $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ continuas} : \pi \circ s = id\}$ (siendo $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ la proyección) y como homomorfismos ρ_V^U la restricción de s a $V \subset U$

Es evidente que este procedimiento da lugar a un haz que se denomina *haz de gérmenes asociado al prehaz \mathcal{F}* .

4.3. Homomorfismos de haces

DEFINICIÓN 4.3.1. *Sean \mathcal{F}, \mathcal{G} haces sobre un espacio topológico X . Un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una colección de homomorfismos de grupos abelianos*

$$\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

tal que conmutan con las restricciones del haz. Es decir hacen conmutativo el diagrama ($V \subset U$)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Notar que ρ_V^U es en la flecha de la izquierda la restricción en \mathcal{F} y en la flecha de la derecha la restricción en \mathcal{G} .

4.3.1. El núcleo y la imagen de un homomorfismo de haces.

DEFINICIÓN 4.3.2. Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de haces sobre X . Se define un subprehaz $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ llamado haz núcleo de ϕ por (el núcleo de un homomorfismo es un subgrupo)

$$\mathcal{K}(U) = \text{Kern}(\phi_U)$$

LEMA 4.3.1. El haz núcleo de ϕ es un haz

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_i\}$ una colección de abiertos de X y $U = \bigcup U_i$ supongamos que tenemos $s_i \in \mathcal{K}(U_i)$ de forma que coinciden en las intersecciones

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$$

Como \mathcal{F} es un haz existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$.

Consideremos las secciones locales $t_i = \rho_{U_i}^U(\phi_U(s)) = \phi_{U_i}(s_i) = 0$ (dado que ρ y ϕ conmutan).

Por 1 de la definición 4.1.3 tendremos que existe una sección global $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(t) = t_i$ y que $t = 0$.

Además por la misma definición $\phi_U(s) = t$ y por tanto $s \in \mathcal{K}(U)$ □

DEFINICIÓN 4.3.3. Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de haces sobre X . Se define un subprehaz $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ llamado prehaz imagen de \mathcal{F} por ϕ (la imagen de un homomorfismo es un subgrupo)

NOTA 4.3.1. Al contrario que en el caso anterior el prehaz imagen no es siempre un haz. Consideremos los haces sobre el espacio $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ de las funciones holomorfas \mathcal{O} (con suma como operación de grupo) y de las funciones holomorfas con valores en \mathbb{C}^* (con producto como operación de grupo) \mathcal{O}^*

Un ejemplo de homomorfismo entre estos haces es

$$ex : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \quad g \rightarrow \exp(i2\pi g)$$

Sean $U_1 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^-$ y $U_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^+$ definimos $f_i(z) = z \quad i \in \{1, 2\}$ En cada U_i podemos definir una función logaritmo holomorfa (considerando, por ejemplo, fases en $(-\pi, \pi)$ en U_1 y en $(0, 2\pi)$ en U_2 y $\log(re^{i\varphi}) = \log(r) + i\varphi$) y por tanto

$$f_i \in \text{Imag}(ex_{U_i}) \quad i \in \{1, 2\}$$

Además se tiene evidentemente $f_1 = f_2$ en $U_1 \cap U_2$ pero no es posible encontrar una $f|_{U_i} = f_i$ pues no existe una función logaritmo holomorfa definida en todo \mathbb{C}^* .

4.3.2. Homomorfismos de haces inyectivos y suprayectivos.

DEFINICIÓN 4.3.4. Decimos que un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ (sobre X) es inyectivo (o monomorfismo) cuando $\forall p \in X \forall U$ entorno de p existe un abierto $V \subset U$ tal que $\phi_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ es inyectivo. análogamente para suprayectivo o (epimorfismo).

LEMA 4.3.2. Son equivalentes

1. ϕ es inyectivo
2. ϕ_U es inyectivo $\forall U \subset X$ abierto
3. El haz núcleo de ϕ es el haz idénticamente nulo

DEMOSTRACIÓN. Claramente 2 es equivalente a 3 y 2 implica 1. Tenemos que demostrar que 1 implica 2

Dado un abierto arbitrario U consideremos $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\phi_U(s) = 0$ para demostrar que ϕ_U es inyectivo tenemos que demostrar que $s = 0$, y para demostrar que $s = 0$ basta demostrar que dado un recubrimiento abierto $U \subset \bigcup V_i$ tenemos $\rho_{V_i}^U(s) = 0$

$\forall p \in U$ como ϕ es inyectivo existe un entorno abierto $V_p \subset U$ tal que ϕ_{V_p} es inyectivo. Sea $s_p = \rho_{V_p}^U(s)$ tendremos

$$\phi_{V_p}(s_p) = \phi_{V_p}(\rho_{V_p}^U(s)) = \rho_{V_p}^U(\phi_U(s)) = \rho_{V_p}^U(0) = 0$$

y como ϕ_{V_p} es inyectivo $s_p = 0$. Entonces como los V_p forman un recubrimiento abierto concluimos que $s = 0$ \square

Observación 4.3.1. No hay un equivalente del lema anterior para homomorfismos de haces suprayectivos. Consideremos el mismo ejemplo que en la nota 4.3.1. No hay una función holomorfa $\log(f)$ definida en \mathbb{C}^ y por tanto el homomorfismo en \mathbb{C}^* no es suprayectivo. Sin embargo si hay un función logaritmo holomorfa en un entorno de cada punto de \mathbb{C}^* y el homomorfismo de haces es suprayectivo.*

4.3.3. Isomorfismos de haces.

DEFINICIÓN 4.3.5. Decimos que un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ (sobre X) es un isomorfismo cuando es monomorfismo y epimorfismo.

DEFINICIÓN 4.3.6. Decimos que un homomorfismo de haces $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ es inverso del homomorfismo $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ cuando la composición de ambos en cualquier orden, definida como la composición de los homomorfismos de grupos que lo forman, es la identidad. Es decir $\psi \cdot \phi = Id_{\mathcal{F}}$ y $\phi \cdot \psi = Id_{\mathcal{G}}$

LEMA 4.3.3. Un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo si y sólo si tiene un homomorfismo de haces inverso

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que exista el inverso ψ . Entonces $\forall U \subset X$ abierto ψ_U es el homomorfismo de grupos inverso de ϕ_U entonces ϕ_U es un isomorfismo y es por tanto inyectivo y suprayectivo.

Supongamos que ϕ sea inyectivo y suprayectivo. Bastará demostrar que $\forall U \subset X$ abierto ϕ_U es un isomorfismo, pues entonces tendrá un inverso ψ_U y la colección de inversos definirá el homomorfismo inverso de haces

Como ϕ es inyectivo también lo será ϕ_U por el lema 4.3.2

Tenemos que demostrar que ϕ_U es suprayectivo. Consideremos $g \in \mathcal{G}(U)$ como ϕ es suprayectivo para cada $p \in U$ existe un entorno abierto $V_p \subset U$ tal que ϕ_{V_p} es suprayectivo. Es decir que para cada $g_p = \rho_{V_p}^U(g)$ existe $f_p \in V_p$ tal que $\phi_{V_p}(f_p) = g_p$

Vamos a demostrar que los f_p coinciden en las intersecciones. Sea $q \neq p$ y $W = V_p \cap V_q$ tenemos que demostrar

$$\rho_W^{V_p}(f_p) = \rho_W^{V_q}(f_q)$$

como ϕ es inyectivo también ϕ_W y bastará demostrar que $\phi_W(\rho_W^{V_p}(f_p)) = \phi_W(\rho_W^{V_q}(f_q))$

Pero se tiene que

$$\phi_W(\rho_W^{V_p}(f_p)) = \rho_W^{V_p}(\phi_{V_p}(f_p)) = \rho_W^{V_p}(g_p) = \rho_W^{V_p}(\rho_{V_p}^U(g)) = \rho_W^U(g)$$

y análogamente para $\phi_W(\rho_W^{V_q}(f_q))$

Dado que \mathcal{F} es un haz por 2 de la definición 4.1.3 existirá $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{V_p}^U(f) = f_p$ y tendremos

$$\rho_{V_p}^U(\phi_U(f)) = \phi_{V_p}(f_p) = g_p = \rho_{V_p}^U(g)$$

y como $\phi_U(f)$ y g coinciden en un recubrimiento abierto tendremos $\phi_U(f) = g$. \square

4.4. Secuencias exactas de Haces

Un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce, para cada $x \in X$ un homomorfismo ϕ_x en los tallos en x

$$\phi_x([f]_x) = [\phi_U(f)]_x$$

Siendo U un entorno de x . Es fácil comprobar que el homomorfismo está bien definido.

DEFINICIÓN 4.4.1. *Una secuencia de homomorfismos entre tres grupos abelianos (anillos, espacios vectoriales, etc.)*

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{H}$$

se denomina exacta cuando $\text{Kern}(\beta) = \text{Imag}(\alpha)$

Una secuencia de homomorfismos entre n grupos abelianos

$$\mathfrak{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathfrak{F}_n$$

se denomina exacta cuando cada una de las subsecuencias

$$\mathfrak{F}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathfrak{F}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathfrak{F}_{k+2} \text{ es exacta.}$$

Vamos a extender la definición a homomorfismos de haces por medio de los tallos

DEFINICIÓN 4.4.2. *Decimos que una secuencia de homomorfismos de haces*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

es exacta cuando lo es la secuencia inducida en los tallos (grupos abelianos) para cada $x \in X$

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

(Análogamente para secuencias con más elementos)

TEOREMA 4.4.1. *Supongamos que $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ es una secuencia exacta de homomorfismos de haces. Entonces para cada U abierto de X se cumple que $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ es una secuencia exacta de grupos abelianos*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{F}(U)$ $g = \alpha_U(f)$. Como para cada $x \in U$ la secuencia

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

es exacta, tenemos $\beta_x(\alpha_x([f]_x)) = 0$ luego existe un entorno $V_x \subset U$ tal que

$$0 = \beta_{V_x}(\alpha_{V_x}(\rho_{V_x}^U(f))) = \beta_{V_x}(\rho_{V_x}^U \alpha_U(f)) = \beta_{V_x}(\rho_{V_x}^U g) = \rho_{V_x}^U(\beta_U(g))$$

y entonces por 1 de la definición 4.1.3 $\beta_U(g) = 0$ y tenemos $\text{Imag}(\alpha_U) \subset \text{Kern}(\beta_U)$.

Sea ahora $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\beta_U(g) = 0$. Como $\forall x \in U$ $\text{Kern}(\beta_x) = \text{Imag}(\alpha_x)$ existe un recubrimiento abierto $\{V_i\}$ de U y elementos $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tales que $\alpha_{V_i}(f_i) = \rho_{V_i}^U(g)$ y por 2 de la definición 4.1.3 un elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha_U(f) = g$ y por tanto $\text{Kern}(\beta_U) \subset \text{Imag}(\alpha_U)$. \square

COROLARIO 4.4.1. *Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ una secuencia exacta de homomorfismos de haces. Entonces para cada U abierto de X se cumple que $0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ es una secuencia exacta de grupos abelianos*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata del teorema anterior y del lema 4.3.2 \square

DEFINICIÓN 4.4.3. *Una secuencia $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ de homomorfismos de haces se dice que es una secuencia corta exacta cuando es exacta*

PROPOSICIÓN 4.4.1. *Si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es suprayectiva la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{inc} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

(siendo \mathcal{K} el haz nucleo de ϕ e inc la inclusión canónica) es exacta

DEMOSTRACIÓN. Evidente a partir de las definiciones. \square

4.5. Cocadenas de Cech

Se presenta con frecuencia la situación siguiente: Es fácil resolver un problema de forma local, encontrando las secciones locales de cierto haz, pero puede ser difícil encontrar las secciones globales del haz.

El concepto de haz ayuda, al asegurar que si las secciones locales coinciden en los solapamientos existirá una sección global

La cohomología convierte la condición de coincidencia en los solapamientos en una condición algebraica por medio de un homomorfismo cuyo núcleo es el conjunto de secciones que coinciden en el solapamiento de sus dominios.

4.5.1. Cocadenas de Cech.

Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Dado un número $n \in \mathbb{N}$ para cada colección de índices (i_0, \dots, i_n) denotamos

$$U_{i_0 \dots i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \quad \text{y} \quad U_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k-1}} \cap U_{i_{k+1}} \cap \dots \cap U_{i_n}$$

Evidentemente $U_{i_0 \dots i_n} \subset U_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_n}$

DEFINICIÓN 4.5.1. Una n -cocadena de Cech (a partir de ahora n -cocadena) para un haz \mathcal{F} sobre un recubrimiento abierto \mathcal{U} es un elemento del conjunto

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0 \dots i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$$

es decir son una familia $(f_{i_0 \dots i_n})_{(i_0 \dots i_n) \in I^{n+1}}$ tal que $f_{i_0 \dots i_n} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$

Las n -cocadenas se denotaran por $(f_{i_0 \dots i_n})$ y evidentemente forman un grupo abeliano.

Notar que el orden es importante en los multiíndices, y así $f_{ij} \neq f_{ji}$ aunque $U_{ij} = U_{ji} = U_i \cap U_j$

Un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce un homomorfismo de grupos $\phi : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ por medio de $\phi((f_{i_0 \dots i_n})) = (\phi_{U_{i_0 \dots i_n}}(f_{i_0 \dots i_n}))$

4.5.2. Complejos de cocadenas.

DEFINICIÓN 4.5.2. Se define el operador cofrontera δ (“coboundary”) como el homomorfismo de grupos

$$\delta : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \delta((f_{i_0 \dots i_n})) = (g_{i_0 \dots i_{n+1}})$$

siendo

$$g_{i_0 \dots i_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \rho_{U_{i_0 \dots i_{n+1}}}^{U_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_{n+1}}} (f_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_{n+1}})$$

EJEMPLO. Para el caso de la 0 -cocadena (f_i) tenemos $g_{ij} = f_j - f_i$. Para el caso de la cocadena (f_{ij}) tenemos $g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$

NOTA. A partir de ahora eliminaremos los homomorfismo restricción de la notación (como en el ejemplo) salvo cuando sea necesario por claridad

PROPOSICIÓN 4.5.1. Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de haces. Inducirá homomorfismos $\phi_{\#} : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \phi_{\#} \downarrow & & \downarrow \phi_{\#} \\ C^n(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \end{array}$$

es conmutativo

DEMOSTRACIÓN. Simple comprobación teniendo en cuenta que $\phi_{\#}((f_{i_0 \dots i_n})) = (\phi(f_{i_0 \dots i_n}))$ □

DEFINICIÓN 4.5.3. Una n -cocadena $(f_{i_0 \dots i_n})$ tal que $\delta((f_{i_0 \dots i_n})) = 0$ se denomina n -cociclo

El subgrupo de los n -cociclos se denota $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

LEMA 4.5.1. Una 1 -cocadena (f_{ij}) es un 1 -cociclo si y solo si $f_{ik} = f_{jk} + f_{ij}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$. Esto implica que para un 1 -cociclo $f_{jj} = 0$ ($k=j$) y $f_{ij} = -f_{ji}$ ($k=i$)

DEMOSTRACIÓN. Evidente de las definiciones □

DEFINICIÓN 4.5.4. Una n -cocadena que pertenece a la imagen de δ se denomina n -cofrontera

El subgrupo de las n -cofronteras se denota $B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Como no hay -1 -cocadenas siempre tendremos $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

LEMA 4.5.2. $\delta \cdot \delta = 0$

DEMOSTRACIÓN. Sean $h = \delta(g)$ y $g = \delta(f)$ y consideremos un elemento cualquiera $f_{i_0 \dots i_n}$ de f . Este elemento aparecerá como sumando en los elementos del tipo $h_{i_0 \dots i_{k-1} r i_k \dots i_{l-2} s i_{l-1} \dots i_n}$ siendo r, s índices cualesquiera que ocupan en las posiciones k, l respectivamente.

En el elemento $h_{i_0 \dots i_{k-1} r i_k \dots i_{l-2} s i_{l-1} \dots i_n}$ son sumandos los elementos $(-1)^k g_{i_0 \dots i_{l-2} s i_{l-1} \dots i_n}$ (índice s ocupa posición $l-1$) y $(-1)^l g_{i_0 \dots i_{k-1} r i_k \dots i_n}$ (índice r ocupa posición k)

En el elemento $g_{i_0 \dots i_{l-2} s i_{l-1} \dots i_n}$ es sumando $(-1)^{l-1} f_{i_0 \dots i_n}$ y en el elemento $g_{i_0 \dots i_{k-1} r i_k \dots i_n}$ lo es $(-1)^k f_{i_0 \dots i_n}$

Así las contribuciones de $f_{i_0 \dots i_n}$ a $h_{i_0 \dots i_{k-1} r i_k \dots i_{l-2} s i_{l-1} \dots i_n}$ son

$$(-1)^k (-1)^{l-1} f_{i_0 \dots i_n} + (-1)^l (-1)^k f_{i_0 \dots i_n} = 0$$

y como $f_{i_0 \dots i_n}$ era arbitrario tenemos $h = 0$ □

EJEMPLO. $f_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = (f_k - f_j) - (f_k - f_i) + (f_j - f_i) = 0$

COROLARIO 4.5.1. $B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

DEFINICIÓN 4.5.5. Se define un complejo de cocadenas como una sucesión de homomorfismos

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

La composición de dos homomorfismos seguidos es cero.

4.6. Cohomología respecto a un recubrimiento

DEFINICIÓN 4.6.1. *El n -ésimo grupo de cohomología de \mathcal{F} con respecto a un recubrimiento abierto \mathcal{U} se define como*

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

NOTA. *Aunque H^n suele reservarse para la cohomología singular y ser más frecuente usar \check{H}^n para el concepto aquí expuesto no empleamos esta notación por la dificultad tipográfica. Además ambas cohomologías son isomorfas para los “CW complex”*

PROPOSICIÓN 4.6.1. *Para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{U} de X el grupo de cohomología $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es isomorfo al grupo de las secciones globales $\mathcal{F}(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Como $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ tenemos $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ el grupo de los 0-cociclos. Definimos un homomorfismo $\alpha : \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ $\alpha(f) = (\rho_{U_i}^X(f))$. Entonces $g_{ij} = \delta(\alpha(f)) = (f_j - f_i) = 0$ pues $f_i = f|_{U_i}$, $f_j = f|_{U_j}$ y toman el mismo valor $f|_{U_i \cap U_j}$ en $U_i \cap U_j$

Luego en realidad el homomorfismo es $\alpha : \mathcal{F}(X) \rightarrow Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Es inyectivo y suprayectivo porque \mathcal{F} es un haz y la definición 4.1.3 □

PROPOSICIÓN 4.6.2. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de haces. Inducirá homomorfismos $\phi_* : H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ entre los grupos de cohomología*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la proposición 4.5.1 dado que $\phi_\#$ lleva cociclos a cociclos y cofronteras a cofronteras. □

4.6.1. Refinamientos.

DEFINICIÓN 4.6.2. *Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X , un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ de X se dice que es un refinamiento de \mathcal{U} y se denota $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, cuando $\forall V_j \in \mathcal{V} \exists U_i \in \mathcal{U} \ V_j \subset U_i$. Es decir cuando existe una aplicación*

$\tau : J \rightarrow I$ tal que $\forall j \in J \quad V_j \subset U_{\tau(j)}$ dicha aplicación se denomina aplicación de refinamiento (y en general no será única)

LEMA 4.6.1. *Dados dos recubrimientos abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}, \mathcal{V} = \{V_j\}$ de X existe un refinamiento común*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar los abiertos $W_{ij} = U_i \cap V_j$, unas aplicaciones de refinamiento serán $\tau(ij) = i$ y $\rho(ij) = j$ respectivamente. \square

El concepto de refinamiento introduce una relación de preorden \preceq en los recubrimientos abiertos de X .

Supongamos que \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} . Una aplicación de refinamiento τ , induce un homomorfismo

$$\tilde{\tau} : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \quad \tilde{\tau}((f_{i_0 \dots i_n})) = (g_{j_0 \dots j_n}) \quad g_{j_0 \dots j_n} = \rho_{V_{j_0 \dots j_n}}^{U_{\tau(j_0) \dots \tau(j_n)}} f_{\tau(j_0) \dots \tau(j_n)}$$

La aplicación $\tilde{\tau}$ lleva cociclos a cociclos y cofronteras a cofronteras. Por tanto induce homomorfismos entre los grupos de homología para cada n

$$H(\tau) : H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

LEMA 4.6.2. *El homomorfismo τ_* es independiente de la aplicación de refinamiento τ y depende sólo de los recubrimientos \mathcal{U}, \mathcal{V}*

DEMOSTRACIÓN. Sean τ, τ' dos aplicaciones de refinamiento para el $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$. Tenemos que demostrar que $H(\tau) = H(\tau')$ para $n = 0$ es consecuencia de la proposición 4.6.1

Dada una clase de cohomología $h \in H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con un n -cociclo representante $(f_{i_0 \dots i_n})$ entonces $H(\tau)(h)$ está representado por el n -cociclo $(f_{\tau(j_0) \dots \tau(j_n)})$ y $H(\tau')(h)$ por $(f_{\tau'(j_0) \dots \tau'(j_n)})$

Tenemos que demostrar que la diferencia $(f_{\tau(j_0) \dots \tau(j_n)} - f_{\tau'(j_0) \dots \tau'(j_n)})$ es una cofrontera.

Basta considerar $h_{l_0 \dots l_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_{\tau(l_0) \dots \tau(l_k) \tau'(l_k) \dots \tau'(l_{n-1})}$ y se comprueba que

$$\delta((h_{l_0 \dots l_{n-1}})) = (f_{\tau(j_0) \dots \tau(j_n)} - f_{\tau'(j_0) \dots \tau'(j_n)})$$

□

Como consecuencia de este lema denotaremos por $H_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ a los homomorfismos entre $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ sin especificar la aplicación de refinamiento.

Si $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \preceq \mathcal{W}$ tenemos que $H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} = H_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \cdot H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$

LEMA 4.6.3. *Para $n = 1$, El homomorfismo $H_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ es inyectivo*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que el núcleo $K_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ del homomorfismo es el grupo trivial o sea que cada cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap K_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ es una cofrontera

Sea τ una aplicación de refinamiento $f_{\tau(i)\tau(j)} = g_i - g_j$ en $V_i \cap V_j$, tenemos que ver que el transformado pertenezca a $B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ imagen por δ de un (h_i) $h_i \in \mathcal{F}(V_i)$

En $U_k \cap V_j \cap V_i$ tenemos $g_i - g_j = f_{\tau(i)\tau(j)} = f_{\tau(i)k} + f_{k\tau(j)} = f_{k\tau(j)} - f_{k\tau(i)}$, puesto que (f_{ij}) es un 1_ cociclo y se aplica el lema 4.5.1, y por tanto $g_i + f_{k\tau(i)} = g_j + f_{k\tau(j)}$

Si definimos $h_{ki} = -(g_i + f_{k\tau(i)})$ en $U_k \cap V_i$ tenemos que h_{ki} y h_{kj} coinciden en $U_k \cap V_i \cap V_j$ y aplicando 2 de la definición 4.1.3 a la familia de abiertos $\{U_k \cap V_i\}_i$ recubrimiento de U_k vemos que existe $h_k \in \mathcal{F}(U_k)$ tal que $\rho_{U_k \cap V_i}^{U_k} h_k = h_{ki}$

Pero entonces en $U_i \cap U_j \cap V_k$

$$f_{ij} = f_{i\tau(k)} + f_{\tau(k)j} = f_{i\tau(k)} + g_k - f_{j\tau(k)} - g_k = h_j - h_i$$

Como esto es válido para todo k aplicando la definición 4.1.3 vemos que es válido en $U_i \cap U_j$ y (f_{ij}) es cofrontera con respecto a \mathcal{U} □

4.7. Los grupos de cohomología de Čech

Considerando los recubrimientos abiertos de X con los refinamientos \preceq constituyen un sistema dirigido.

DEFINICIÓN 4.7.1. *Se denomina q -ésimo grupo de homología de Čech del haz \mathcal{F} sobre un espacio topológico X al límite directo*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \lim_{\rightarrow \mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Es decir $H^q(X, \mathcal{F}) = \coprod_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \sim$ siendo \sim la relación de equivalencia en $\coprod_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ para todos los \mathcal{U} recubrimientos abiertos de X de forma que $\epsilon \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\nu \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ son equivalentes si existe $\mathcal{U} \preceq \mathcal{W}$ y $\mathcal{V} \preceq \mathcal{W}$ tal que $H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(\epsilon) = H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(\nu)$.

La suma en $H^q(X, \mathcal{F})$ se define del modo siguiente: Sean $x, y \in H^q(X, \mathcal{F})$ con representantes $\xi \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\nu \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ respectivamente. Sea \mathcal{W} un refinamiento común de \mathcal{U}, \mathcal{V} entonces $x + y$ es la clase de equivalencia de $H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(\xi) + H_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(\nu)$, fácilmente se comprueba que con esta operación $H^q(X, \mathcal{F})$ es un grupo abeliano.

PROPOSICIÓN 4.7.1. $H^0(X, \mathcal{F})$ es isomorfo al grupo $\mathcal{F}(X)$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de la definición y la proposición 4.6.1

□

PROPOSICIÓN 4.7.2. *Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X . El homomorfismo canónico*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

es inyectivo

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de la definición y del lema 4.6.3 □

COROLARIO 4.7.1. $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ si y sólo si $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{U} de X

NOTA. A veces representaremos los elementos de $H^1(X, \mathcal{F})$ por $[(f_{ij})]^{-\rightarrow}$ indicando que es el límite inductivo de los $[(f_{ij})]$ para recubrimientos \mathcal{U} de X

4.7.1. Recubrimientos de Leray.

La definición de los grupos de cohomología de Čech es bastante ineficaz con vistas a calcularlos. Afortunadamente existe un tipo especial de recubrimiento abierto que produce los mismos grupos.

Nos limitaremos a analizar el caso de $H^1(X, \mathcal{F})$ por ser el más interesante para nuestros propósitos

TEOREMA 4.7.1. (Leray) Sea \mathcal{F} un haz sobre un espacio topológico X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X tal que $\forall i \in I \ H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ entonces $H^1(X, \mathcal{F})$ es isomorfo a $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que para cualquier refinamiento $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \ \mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ el homomorfismo $H_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ es un isomorfismo.

Por el lema 4.6.3 es inyectivo.

Sea $\tau : J \rightarrow I$ una aplicación de refinamiento, para probar que es suprayectivo dado un cociclo $(g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ tenemos que encontrar un cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - g_{\alpha\beta} = h_{\beta} - h_{\alpha}$ siendo $h_{\alpha} \in \mathcal{F}(V_{\alpha})$ y $h_{\beta} \in \mathcal{F}(V_{\beta})$

La familia $\{U_i \cap V_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ es un recubrimiento abierto de U_i que denotaremos $U_i \cap \mathcal{V}$ por la hipótesis y el corolario 4.7.1 $H^1(U_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0$ y existe $l_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_{\alpha})$ tal que

$$g_{\alpha\beta} = l_{i\alpha} - l_{i\beta} \quad \text{en} \quad U_i \cap V_{\alpha} \cap V_{\beta}$$

y análogamente

$$g_{\alpha\beta} = l_{j\alpha} - l_{j\beta} \quad \text{en} \quad U_j \cap V_{\alpha} \cap V_{\beta}$$

En $U_i \cap U_j \cap V_{\alpha} \cap V_{\beta}$ tendremos $l_{i\alpha} - l_{i\beta} = l_{j\alpha} - l_{j\beta}$ y por tanto $l_{j\beta} - l_{i\beta} = l_{j\alpha} - l_{i\alpha}$ y por la definición 4.1.3 existirán $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tales que $f_{ij} = l_{j\alpha} - l_{i\alpha}$ en $U_i \cap U_j \cap V_{\alpha}$.

(f_{ij}) cumple el lema 4.5.1 luego $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Además como $h_\alpha = l_{\tau(\alpha),\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ (pues $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$) tendremos en $V_\alpha \cap V_\beta$

$$f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - g_{\alpha\beta} = (l_{\tau(\beta)\alpha} - l_{\tau(\alpha)\alpha}) - (l_{\tau(\beta)\alpha} - l_{\tau(\beta)\beta}) = l_{\tau(\beta)\beta} - l_{\tau(\alpha)\alpha} = h_\beta - h_\alpha$$

□

4.7.2. Homomorfismo entre grupos de cohomología.

Consideremos un espacio topológico X , un subconjunto abierto $Y \subset X$ y un haz \mathcal{F} de grupos abelianos en X . Dado un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ tenemos que $\mathcal{U} \cap Y = \{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de Y y los homomorfismos de restricción $\rho_{U_i \cap Y}^{U_i}$ dan lugar a una aplicación entre cociclos $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$ y entre cofronteras $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow B^q(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$ y por tanto induce un homomorfismo $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$

Considerando lo anterior para todos los recubrimientos \mathcal{U} tendremos un homomorfismo

$$\Lambda_Y^X = H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Y, \mathcal{F})$$

PROPOSICIÓN 4.7.3. *Con la notación anterior si tenemos abiertos Y, W tales que $Y \subset W \subset X$ tenemos*

$$\Lambda_Y^X = \Lambda_Y^W \cdot \Lambda_W^X$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de la propiedad equivalente de los homomorfismos ρ_V^U □

Vamos a ver ahora que un homomorfismo entre haces induce homomorfismos entre sus grupos de cohomología.

PROPOSICIÓN 4.7.4. *Un homomorfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de haces sobre un espacio topológico X induce homomorfismos $\alpha^n : H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G})$*

DEMOSTRACIÓN. Dado un recubrimiento abierto cualquiera \mathcal{U} de X podemos definir $\alpha^n : H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ por

$$\alpha^n((f_{i_1 \dots i_n})) = (\alpha_{U_1 \cap \dots \cap U_n}(f_{i_1 \dots i_n}))$$

Es trivial comprobar que el homomorfismo transforma cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras \square

NOTA. En el caso $inc : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ (inclusión de un subhaz) el homomorfismo inc^1 en general no es una inyección. Denotaremos como iH a dicho homomorfismo para evitar confusiones. Si $[(f_{ij})] \in H^1(X, \mathcal{F})$ tendremos $iH([(f_{ij})]) = [(f_{ij})]$ el mismo representante de clase pero la clase de equivalencia es, en general, distinta.

4.8. El homomorfismo de conexión

Supongamos que $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces en un espacio topológico X . Vamos a definir un homomorfismo denominado *homomorfismo de conexión*

$$\Delta : H^0(X, \mathcal{H}) \cong \mathcal{H}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

Para ello consideremos $h \in \mathcal{H}(X)$ como β es suprayectiva $\forall p \in X$ existen un abierto U_p y un elemento $g_p \in \mathcal{G}(U_p)$ tales que $h|_{U_p} = \beta(g_p)$.

La familia $\mathcal{U} = \{U_p\}_{p \in X}$ es un recubrimiento abierto de X . Definamos $l_{pq} = g_q - g_p \in \mathcal{G}(U_p \cap U_q)$ así (l_{pq}) es un cociclo de \mathcal{G} y $\beta(l_{pq}) = 0$ (es $h - h$). Debido a la exactitud y al corolario 4.4.1 existirán $f_{pq} \in \mathcal{F}(U_q \cap U_p)$ tales que $\alpha_{U_q \cap U_p}(f_{pq}) = l_{pq}$.

En $U_p \cap U_q \cap U_r$ se tiene $\alpha_{U_p \cap U_q \cap U_r}(f_{pq} + f_{qr} - f_{pr}) = g_q - g_p + g_r - g_q - g_r + g_p = 0$ y como $\alpha_{U_p \cap U_q \cap U_r}$ es inyectivo por el lema 4.3.2 tenemos que $(f_{pq}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (es un cociclo), que será por tanto el representante de un elemento de $H^1(X, \mathcal{F})$ que definiremos como $\Delta(h)$.

Por la forma de definirlo se ve que es un homomorfismo.

LEMA 4.8.1. *La construcción de $\Delta(h)$ es independiente de \mathcal{U} y de las preimágenes g_p*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos \mathcal{U} y vamos a demostrar la independencia de las preimágenes.

Supongamos que existan (para cada p) $g_p, g'_p \in \mathcal{G}(U_p)$ tales que $\beta(g_p) = \beta(g'_p) = h|_{U_p}$

Sean $l_{pq} = g_q - g_p$ y $l'_{pq} = g'_q - g'_p$ y los correspondientes $f_{pq}, f'_{pq} \in \mathcal{F}(U_p \cap U_q)$ definimos $k_p = g_p - g'_p \in \mathcal{G}(U_p)$ como $\beta(k_p) = 0$ existirá (debido al corolario 4.4.1) $j_p \in \mathcal{F}(U_p)$ tal que $\alpha_{U_p}(j_p) = k_p$

Tendremos que $\alpha_{U_p \cap U_q}(j_q - j_p) = k_q - k_p = l_{pq} - l'_{pq} = \alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq} - f'_{pq})$ y como es inyectiva tenemos

$$f_{pq} - f'_{pq} = j_q - j_p \quad (f_{pq}) = (f'_{pq}) + d((j_p))$$

y ambos representan el mismo elemento de $H^1(X, \mathcal{F})$

Para ver la independencia del recubrimiento podemos suponer que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ (si no se considera un refinamiento común) y sean $g_p \in \mathcal{G}(U_p)$ preimágenes de $h|_{U_p}$ y τ una aplicación de refinamiento.

En V_q definimos $g'_q = g_{\tau(q)}|_{V_q}$ y obtenemos preimágenes de h en los V_q . Acabamos de demostrar que podemos usar los g'_q para calcular $\Delta(h)$ a través de \mathcal{V} (como podríamos usar cualquier otro conjunto de preimágenes de h en \mathcal{V})

Como $\tilde{\tau}((g_p)) = (g'_p)$ tenemos que su imagen por el homomorfismo canónico en $H^1(X, \mathcal{F})$ será la misma □

PROPOSICIÓN 4.8.1. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un epimorfismo de haces existe un homomorfismo de conexión*

$$\Delta : H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K})$$

Siendo \mathcal{K} el núcleo de ϕ

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de lo anterior y de la proposición 4.4.1 □

Este homomorfismo de conexión da un criterio para saber cuando una sección global $g \in \mathcal{G}(X)$ es la imagen de una sección global de \mathcal{F} por ϕ

TEOREMA 4.8.1. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un epimorfismo de haces y $g \in \mathcal{G}(X)$ una sección global de \mathcal{G} . Existe una sección global $s \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(s) = g$ si y sólo si $\Delta g = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\phi(s) = g$. Entonces en la construcción del homomorfismo de conexión podemos escoger $\forall p \in X, U_p = X, f_p = s$ y tendríamos $\forall p, q, h_{pq} = 0$ que inducen el elemento cero en la cohomología.

Recíprocamente supongamos $\Delta(g) = 0$ entonces por el corolario 4.7.1 para el recubrimiento \mathcal{U} tenemos que (h_{pq}) es una cofrontera, es decir $h_{pq} = k_q - k_p$ para cierta (k_p) cocadena de \mathcal{K} . Sea $s_p = f_p - k_p$ (siendo f_p preimagen de g en U_p)

En $U_p \cap U_q$ tenemos

$$s_p - s_q = f_p - k_p - (f_q - k_q) = k_q - k_p - (f_q - f_p) = k_q - k_p - h_{pq} = 0$$

entonces por la definición 4.1.3 existe $s \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s|_{U_p} = s_p$ y como

$$g|_{U_p} = \phi(f_p) = \phi(s_p + k_p) = \phi(s_p) = \phi(s|_{U_p})$$

y otra vez por la definición 4.1.3 tenemos demostrado el teorema. □

COROLARIO 4.8.1. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sea un homomorfismo de haces suprayectivo cuyo núcleo es el haz \mathcal{K} . Si $H^1(X, \mathcal{K}) = 0$ la correspondencia entre secciones globales $\phi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ es suprayectiva.*

OBSERVACIÓN. *El teorema 4.8.1 puede expresarse diciendo que la sucesión*

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\phi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\Delta} H^1(X, \mathcal{K})$$

es exacta

4.8.1. La sucesión larga exacta de cohomología.

TEOREMA 4.8.2. Si $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces. Entonces la siguiente sucesión larga de grupos abelianos es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\beta_X} & \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\Delta} \cdot \\ & & & & & & \\ \cdot & \xrightarrow{\Delta} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^1} & H^1(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta^1} & H^1(X, \mathcal{H}) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. La exactitud del tramo $0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}$ es consecuencia directa del corolario 4.4.1.

Vamos a ver que $Imag(\beta_X) \subset Kern(\Delta)$ para ello supongamos $g \in \mathcal{G}(X)$ para definir $\Delta(\beta_X(g))$ se pueden escoger como g_p los elementos $g|_{U_p}$ pero entonces las preimágenes por α_X de $g_p - g_q$ serán nulas y por tanto $\Delta(\beta_X(g)) = 0$

Veamos ahora que $Kern(\Delta) \subset Imag(\beta_X)$. Sea $(f_{pq}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un cociclo representante de $\Delta(h)$ ($h \in \mathcal{H}(X)$) tal que $\Delta h = 0$ existirá $(t_p) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $f_{pq} = t_q - t_p$ en $U_p \cap U_q$. Consideremos los g_p utilizados para definir $\Delta(h)$ y definamos $\tilde{g}_p = g_p - \alpha_{U_p}(t_p)$. En $U_p \cap U_q$ se tendrá

$$\tilde{g}_p - \tilde{g}_q = g_p - \alpha_{U_p \cap U_q}(t_p) - g_q + \alpha_{U_p \cap U_q}(t_q) = g_p - g_q - \alpha_{U_p \cap U_q}(t_q - t_p) = g_p - g_q - \alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq}) = 0$$

Por la definición 4.1.3 existirá $\tilde{g} \in \mathcal{G}(X)$ tal que $\tilde{g}|_{U_p} = \tilde{g}_p$ y en cada U_p se tiene

$$\beta_X(\tilde{g})|_{U_p} = \beta_{U_p}(\tilde{g}_p) = \beta_{U_p}(g_p - \alpha_{U_p}(t_p)) = \beta_{U_p}(g_p) = h|_{U_p}$$

y otra vez por 4.1.3 tenemos $\beta_X(\tilde{g}) = h$.

Que $Imag(\Delta) \subset Kern(\alpha^1)$ se sigue de la construcción de (f_{pq}) en el homomorfismo de conexión pues $\alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq}) = g_q - g_p$ y al representante (f_{pq}) de cada $\Delta(h)$ se le hace corresponder por $\alpha_{U_p \cap U_q}$ un elemento de $B^1(X, \mathcal{G})$.

Vamos con $Kern(\alpha^1) \subset Imag(\Delta)$. Sea $(f_{pq}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un cociclo representante de un elemento $\xi \in Kern(\alpha^1)$. Como $\alpha^1(\xi) = 0$ existe $(g_p) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ tal que

$\alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq}) = g_q - g_p$ en $U_p \cap U_q$ tendremos

$$0 = \beta_{U_p \cap U_q}(\alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq})) = \beta_{U_q}(g_q) - \beta_{U_p}(g_p) \quad \text{en } U_p \cap U_q$$

y por la definición 4.1.3 existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h|_{U_p} = \beta_{U_p}(g_p)$ además tendremos por la construcción realizada que $\Delta(h) = \xi$

Para ver que $\text{Imag}(\alpha^1) \subset \text{Kern}(\beta^1)$ se considera que la sucesión

$$\mathcal{F}(U_p \cap U_q) \xrightarrow{\alpha_{U_p \cap U_q}} \mathcal{G}(U_p \cap U_q) \xrightarrow{\beta_{U_p \cap U_q}} \mathcal{H}(U_p \cap U_q)$$

es exacta por el corolario 4.4.1y dado cualquier cociclo (f_{pq}) representante de $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ tendremos que $\beta_{U_p \cap U_q}(\alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq})) = 0$ y por tanto $\alpha^1(\xi) \in \text{Kern}(\beta^1)$

Queda probar que $\text{Kern}(\beta^1) \subset \text{Imag}(\alpha^1)$

Sea ξ una clase en $\text{Kern}(\beta^1)$ representada por un cociclo (g_{pq}) respecto a un recubrimiento \mathcal{U} . Como $\beta^1(\xi) = 0$ tenemos que el cociclo $(\beta_{U_p \cap U_q}(g_{pq}))$ representa a cero en $H^1(X, \mathcal{H})$ es decir es una cofrontera y hay una cocadena (h_p) con respecto a \mathcal{U} tal que $\beta_{U_p \cap U_q}(g_{pq}) = h_q - h_p$

Refinando \mathcal{U} si fuera necesario como β es un epimorfismo de haces podemos suponer que existen t_p tales que $h_p = \beta_{U_p}(t_p)$ siendo $t_p \in \mathcal{G}(U_p)$

Sea $l_{pq} = g_{pq} - t_q + t_p \in \mathcal{G}(U_p \cap U_q)$ tendremos que (l_{pq}) también representa a ξ y que $\beta_{U_p \cap U_q}(l_{pq}) = h_q - h_p - h_q + h_p = 0$

Como la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_p \cap U_q) \xrightarrow{\alpha_{U_p \cap U_q}} \mathcal{G}(U_p \cap U_q) \xrightarrow{\beta_{U_p \cap U_q}} \mathcal{H}(U_p \cap U_q)$$

es exacta por el corolario 4.4.1 tendremos que existe (f_{pq}) siendo $f_{pq} \in \mathcal{F}(U_p \cap U_q)$ tal que $\alpha_{U_p \cap U_q}(f_{pq}) = l_{pq}$ y la clase $\eta \in H^1(X, \mathcal{F})$ a la que representa (f_{pq}) será tal que $\alpha^1(\eta) = \xi$ □

COROLARIO 4.8.2. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sea un homomorfismo de haces suprayectivo cuyo núcleo es el haz \mathcal{K} . La sucesión*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(X) & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\phi_X} & \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\Delta} \cdot \\ & & & & & & \\ \cdot & \xrightarrow{\Delta} & H^1(X, \mathcal{K}) & \xrightarrow{i_H} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\phi^1} & H^1(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

es exacta

DEMOSTRACIÓN. Es una simple aplicación del teorema anterior considerando la proposición 4.4.1. \square

TEOREMA 4.8.3. *Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de haces en un espacio topológico X tal que $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Entonces*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X) / \beta_X(\mathcal{G}(X))$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el corolario anterior a este caso

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\Delta} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

y por el primer teorema de isomorfía de grupos (ver [BujalTG]) tenemos el resultado. \square

Estos resultados se pueden generalizar para el caso que X sea paracompacto (las superficies de Riemann lo son) y obtenemos el siguiente teorema que no demostraremos

TEOREMA 4.8.4. *Sea X un espacio paracompacto, y $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de haces. $\forall n \geq 0$ existe un homomorfismo de conexión $\Delta : H^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F})$ tal que la siguiente sucesión de grupos de cohomología es exacta*

$$\longrightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{H})$$

Parte 2

Superficies de Riemann

Superficies de Riemann

5.1. Superficies de Riemann

DEFINICIÓN 5.1.1. *Una superficie de Riemann es una variedad analítica conexa de dimensión compleja uno.*

NOTA. *En la definición de variedad analítica suele exigirse que la variedad X tenga una base de abiertos numerable. La razón de esta exigencia es asegurar que X sea un espacio paracompacto. Sin embargo en la mayoría de los textos sobre superficies de Riemann no se considera esta exigencia dado que existe un teorema de Radó que asegura que una superficie de Riemann (definida sin exigir topología numerable) siempre tiene topología numerable (en el caso de compactas es evidente). La demostración de este teorema puede verse en [ForRS].*

Como las funciones de transición $\phi \cdot \psi^{-1}$ entre cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ han de ser analíticas sus derivadas deben cumplir las condiciones de Cauchy Riemann y por tanto su Jacobiano es mayor que cero, esto implica que las cartas compatibles definen de forma natural una orientación en la variedad (y sus conjugadas la otra). Por tanto todas las superficies de Riemann son *orientables*.

OBSERVACIÓN. *Aunque por la definición lo normal sería comenzar con un conjunto con una topología y definir una estructura compleja, en muchos casos no es ese el camino seguido para definir una superficie de Riemann. Una forma habitual es seguir los siguientes pasos:*

1. Se parte de un conjunto X
2. Se determina un recubrimiento numerable $\{U_\alpha\}$ de X

3. Se determina, para cada α , una biyección $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ siendo V_α un abierto de \mathbb{C}
4. Se comprueba que $\forall \alpha, \beta \quad \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un abierto de V_α
5. Se define una topología en X declarando:
 - $U \subset U_\alpha$ abierto si y sólo si $\phi(U)$ abierto en V_α
 - A abierto si y sólo si $\forall \alpha \quad A \cap U_\alpha$ abierto en U_α
6. Las funciones ϕ_α serán las cartas de la superficie. Se comprueba que son compatibles
7. Se comprueba que X con la topología definida es Hausdorff y conexo.

5.1.1. Ejemplos de Superficies de Riemann.

EJEMPLO 5.1.1. La esfera de Riemann

Consideremos la esfera $S = \{(\xi, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1\}$ La proyección estereográfica desde el polo norte $\pi : S \sim (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\pi(\xi, \mu, \nu) = \frac{\xi}{1-\nu} + i \frac{\mu}{1-\nu}$ es un homeomorfismo cuyo inverso viene dado por $\pi^{-1}(x+iy) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2})$ Análogamente la proyección estereográfica desde el polo sur $\sigma : S \sim (0, 0, -1) \rightarrow \mathbb{C}$ es $\sigma(\xi, \mu, \nu) = \frac{\xi}{1+\nu} - i \frac{\mu}{1+\nu}$ con inversa $\sigma^{-1}(x+iy) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2})$

¹

Para los puntos de $S \sim \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ tenemos que $\sigma \cdot \pi^{-1}(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ o de otra forma $\sigma \cdot \pi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Por tanto las cartas $(S \sim (0, 0, 1), \pi)$ y $(S \sim (0, 0, -1), \sigma)$ son compatibles un y forman un atlas.

También podemos considerar la compactificación de Alexandroff del espacio localmente compacto \mathbb{C} que denotaremos $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y establecer una correspondencia biyectiva $\pi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ extendiendo la proyección desde el polo norte mediante $\pi((0, 0, 1)) = \infty$. Se demuestra fácilmente que dicha aplicación es un homeomorfismo, pudiendo asignar las siguientes cartas a $\widehat{\mathbb{C}}$: $(\mathbb{C}, \phi(z) = z)$ y $(\widehat{\mathbb{C}} \sim \{0\}, \psi(z) = \frac{1}{z}, \psi(\infty) = 0)$ que son compatibles y forman un atlas. Esencialmente es la misma superficie que la anterior.

¹El cambio de signo de la y es para mantener la orientación del plano complejo cuando se "mira" desde el polo sur

EJEMPLO 5.1.2. *La recta proyectiva*

Consideremos el espacio proyectivo $P^1(\mathbb{C})$. Las coordenadas homogéneas serán $[v, w]$ podemos considerar los conjuntos $U_0 = \{[v, w] \in P^1(\mathbb{C}) : v \neq 0\}$ y $U_1 = \{[v, w] \in P^1(\mathbb{C}) : w \neq 0\}$ y las funciones $\varphi_0 = \frac{w}{v}$ y $\varphi_1 = \frac{v}{w}$. Claramente (U_0, φ_0) (U_1, φ_1) son cartas compatibles y forman un atlas. Se tiene $\varphi_0^{-1}(z) = [1, z]$ y $\varphi_1(\varphi_0^{-1}(z)) = \frac{1}{z}$

Como este atlas es idéntico al del caso anterior vemos que la línea proyectiva es idéntica, como superficie de Riemann, a la esfera de Riemann. Posteriormente formalizaremos este resultado.

EJEMPLO 5.1.3. *Toro complejo*

Sean ω_1, ω_2 números complejos tales que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ no sea un número real. Se define una red como:

$$L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

L es un subgrupo aditivo de \mathbb{C} (abeliano luego L normal) y podemos considerar $X = \mathbb{C}/L$. Si consideramos la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ podemos imponer a X la topología cociente, es decir la topología más fina de X que hace π continua (U es abierto en X si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C}). Como π continua y \mathbb{C} conexo tendremos que X conexo.

π es una aplicación abierta, pues dado $V \subset \mathbb{C}$ abierto

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in L} (V + \omega)$$

y como los trasladados de abiertos son abiertos el conjunto es unión de abiertos luego abierto.

Si consideramos $P_z = \{z + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda, \mu \in [0, 1]\}$ tenemos que cada punto de \mathbb{C} es congruente módulo L con un punto de P_z luego $\pi(P_z) = X$. Como P_z es compacto también lo es X .

Si $0 < \epsilon < ||\omega_1| - |\omega_2||$ entonces $\forall z \in \mathbb{C}$ el disco $D_z = D(z, \epsilon)$ contiene a lo sumo un elemento de L . La restricción $\pi|_{D_z} : D_z \rightarrow \pi(D_z)$ es un homeomorfismo de D_z en $\pi(D_z)$.

$\forall (z + L) \in X$ Definimos las cartas $(U_z = D_z, \phi_z = (\pi|_{D_z})^{-1})$, tenemos que comprobar que son compatibles: Dados z_1, z_2 sea $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$ si U es vacío no hay nada que demostrar, si no lo es tenemos que ver que $t : \phi_1(U) \rightarrow \phi_2(U)$ $t(z) = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(\pi(z))$ es holomorfa en $\phi_1(U)$. Como $\pi(t(z)) = \pi(\phi_2(\pi(z))) = \pi(z)$ tenemos que $\forall z \in \phi_1(U)$ $t(z) = z + \omega(z)$ $\omega(z) \in L$ como t es continua (composición de aplicaciones continuas) también $\omega(z)$ y como U es conexo también $\omega(U)$ pero L es un conjunto discreto así que $\omega(U)$ se reduce a un sólo punto de L luego $t(z) = z + \omega_0$ y por tanto es holomorfa.

Hemos demostrado que X es un tipo de superficie de Riemann compacta que se conoce como toro complejo.

5.2. Funciones en Superficies de Riemann

5.2.1. Funciones holomorfas y meromorfas.

Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un entorno W de p

DEFINICIÓN 5.2.1. Se dice que $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en p si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Cuando es holomorfa $\forall q \in W$ se dice holomorfa en W

PROPOSICIÓN 5.2.1. Con la notación anterior tenemos

- f es holomorfa en p si y sólo si para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en p
- f es holomorfa en W si y sólo si existe un conjunto de cartas $\{U_i, \phi_i\}$ $W \subset \cup U_i$ tales que $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en $\phi_i(W \cap U_i) \forall i$
- Si f es holomorfa en p lo es en un entorno de p

La demostración es inmediata partiendo de que $\phi_i \cdot \phi_j^{-1}$ es holomorfa en $\phi_j(U_i \cap U_j)$ y de la teoría de funciones de variable compleja.

Denotaremos por $\mathcal{O}(W)$ al conjunto de funciones holomorfas en W . Se comprueba fácilmente que es una \mathbb{C} algebra

DEFINICIÓN 5.2.2. *Sea f holomorfa en un abierto $W \sim \{p\}$ siendo $p \in W$. Se dice que f tiene una singularidad evitable en p si existe una carta (U, ϕ) tal que $f \cdot \phi^{-1}$ tiene una singularidad evitable en $\phi(p)$. Análogamente para polos y singularidades esenciales.*

Es equivalente exigir lo anterior para cualquier carta dado que $\phi_i \cdot \phi_j^{-1}$ tiene que ser holomorfa en $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

DEFINICIÓN 5.2.3. *Se dice que f es meromorfa en $p \in X$ cuando es holomorfa, o tiene una singularidad evitable, o tiene un polo en p , f es meromorfa en un abierto W cuando lo es $\forall q \in W$*

Denotaremos por $\mathcal{M}(W)$ al conjunto de funciones meromorfas en W .

Como dada cualquier carta (U, ϕ) $p \in U$ $f \cdot \phi^{-1}$ es meromorfa, tendrá un desarrollo en serie de Laurent en un disco punteado de p . Luego tendremos

$$f \cdot (\phi^{-1}(z)) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - \phi(p))^n$$

Aunque el valor de los coeficientes dependerá de la carta, *no así el valor k (índice del menor coeficiente distinto de cero) a este valor se le denomina orden de f en p y se denota $\text{ord}_p(f)$*

LEMA 5.2.1. *El valor k no depende de la carta elegida.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las cartas (U_1, ϕ_1) (U_2, ϕ_2) $p \in U_1 \cap U_2$, si denotamos $z = \phi_1(q)$ $w = \phi_2(q)$ en un entorno de p y $z_0 = \phi_1(p)$ $w_0 = \phi_2(p)$ La función $T = \phi_1 \cdot \phi_2^{-1}$ es holomorfa en un entorno de p y tendrá un desarrollo en serie de Taylor

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

Como T es invertible (transición entre cartas) Existirá S (inversa) tal que $S.T = id$ y derivando (son holomorfas) $S'(T(w))T'(w) = 1$ y así $T'(w)$ no puede ser cero y por tanto tendremos $a_1 \neq 0$

Para obtener el desarrollo en serie de Laurent de $f.\phi_2^{-1}$ a partir del de $f.\phi_1^{-1}$ componemos $(f.\phi_1^{-1}).(\phi_1.\phi_2^{-1})$. Obteniendo

$$\sum_{i=k}^{\infty} c_i(z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w-w_0)^n - z_0)^i = \sum_{i=k}^{\infty} c_i(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(w-w_0)^n)^i$$

Como $a_1 \neq 0$ es evidente que el índice del coeficiente de menor índice será k \square

De la definición de función compleja meromorfa se tiene

- f es holomorfa en p si y sólo si $ord_p(f) \geq 0$. Si $ord_p(f) = k > 0$ f tiene en p un cero de orden k
- f tiene en p un polo de orden k si y sólo si $ord_p(f) = -k$ $k > 0$
- Cuando f no es cero ni polo en p tenemos $ord_p(f) = 0$

PROPOSICIÓN 5.2.2. Sean f, g meromorfas en p se tiene

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
- $ord_p(f \pm g) = \min(ord_p(f), ord_p(g))$

La demostración es trivial.

Una función de variable compleja es \mathcal{C}^∞ en z_0 cuando considerada como función de $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $p \in U$ es infinitamente diferenciable

EJEMPLO. La función $f(z) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|z|-1}) & |z| > 1 \\ 0 & |z| \leq 1 \end{cases}$ es \mathcal{C}^∞ pero no analítica (holomorfa) en $z = 1$

DEFINICIÓN 5.2.4. Se dice que $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathcal{C}^∞ en p cuando existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ $p \in U$ tal que $f.\phi^{-1}$ es \mathcal{C}^∞ en $\phi(p)$.

Como en las ocasiones anteriores si se cumple para una carta se cumple para todas las compatibles.

5.2.2. Teoremas heredados.

Por la forma de definir las funciones holomorfas y meromorfas en superficies de Riemann hay una serie de propiedades que se deducen directamente de la teoría de funciones de variable compleja. Los resumimos:

TEOREMA 5.2.1. (Ceros y Polos discretos) *Sea f una función meromorfa definida en un abierto conexo $W \subset X$ (X superficie de Riemann). Si f no es idénticamente nula el conjunto de ceros y polos es discreto en W (cada polo o cero tiene un entorno en W en el que no hay otros ceros y/o polos)*

COROLARIO 5.2.1. *Sea f una función meromorfa definida en X superficie de Riemann compacta. Entonces f tiene un número finito de ceros y polos.*

TEOREMA 5.2.2. (Identidad) *Sean f, g dos funciones meromorfas definidas en un abierto conexo $W \subset X$. Si $f = g$ en un conjunto $S \subset W$ que tiene un punto límite en W , entonces $f = g$ en W*

TEOREMA 5.2.3. (Weirstrass) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $W \subset X$ abierto. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia una función f en cada compacto $K \subset W$ entonces f es holomorfa en W*

TEOREMA 5.2.4. (Módulo máximo) *Sea f holomorfa en un abierto conexo $W \subset X$. Si existe $p \in W$ tal que $\forall x \in W |f(p)| \geq |f(x)|$ entonces f es constante en W .*

COROLARIO 5.2.2. *Si f es holomorfa en una superficie de Riemann compacta X . Entonces f es constante en X*

DEMOSTRACIÓN. Como f continua y X compacta f ha de alcanzar un máximo en X □

TEOREMA 5.2.5. (*Módulo máximo para armónicas*) Sea f armónica en un abierto conexo $W \subset X$. Si existe $p \in W$ tal que $\forall x \in W |f(p)| \geq |f(x)|$ entonces f es constante en W (Si X compacta las funciones armónicas en X son constantes)

5.2.3. Ejemplos de funciones meromorfas.

5.2.3.1. Esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Sea f meromorfa en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como es compacta hay un número finito de polos y ceros. Sea $\{\vartheta_i\}$ el conjunto de polos y ceros en \mathbb{C} , denotamos $e_i = \text{ord}_{\vartheta_i}(f)$ y consideramos la función racional

$$r(z) = \sum_i (z - \vartheta_i)^{e_i}$$

con los mismos polos y ceros y los mismos órdenes que f en el plano finito. Entonces $g(z) = \frac{f(z)}{r(z)}$ es meromorfa y no tiene ni polos ni ceros en \mathbb{C} tendrá por tanto un desarrollo, válido en todo \mathbb{C} , de Mac Laurin $g(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$. Como g es meromorfa en $z = \infty$ y considerando la carta $w = \frac{1}{z}$ y aplicando lo anterior a un entorno punteado de ∞ tendremos $g(w) = \sum_0^{\infty} c_n w^{-n}$ que será el desarrollo de Laurent y no puede tener infinitos términos. Por tanto $g(z)$ es un polinomio.

Si $g(z)$ no es constante tiene un cero para $z = 0$ lo que es una contradicción. Así es constante y f es una función racional.

Hemos demostrado lo siguiente

PROPOSICIÓN 5.2.3. *Las funciones meromorfas en la esfera de Riemann son funciones racionales.*

Consideremos una función racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ siendo $p(z), q(z)$ polinomios descomponiéndolos en factores tendremos $f(z) = c \prod (z - \vartheta_i)^{e_i}$ donde $e_i \in \mathbb{Z}$ y ϑ_i son números complejos distintos.

Tendremos $ord_{\partial_i}(f) = e_i$ y además $ord_{\infty}(f) = grado(q) - grado(p) = -\sum e_i$ y por tanto

$$\sum_{x \in X} ord_x(f) = 0$$

5.2.3.2. Toro complejo.

Las funciones meromorfas en un toro complejo determinado por la red $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ coincidirán con las funciones meromórficas doblemente periódicas en \mathbb{C} . Es decir con las funciones elípticas

Dada L la función \mathcal{P} de Weierstrass asociada se define como

$$\mathcal{P}(z) = z^{-2} + \sum_{\omega \in L - \{0\}} ((z - \omega)^{-2} - \omega^{-2})$$

Se demuestra (ver [KirwCAC]) que es una función meromorfa con periodos ω_1, ω_2

Su derivada será $\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} (z - \omega)^{-3}$. Una propiedad muy importante es que

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3$$

Siendo $g_2 = 60 \sum_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-4}$ y $g_3 = 140 \sum_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-6}$

También se demuestra que la restricción de \mathcal{P} a $\mathbb{C} - L$ es holomorfa y suprayectiva

5.3. Aplicaciones entre Superficies de Riemann

NOTA. A partir de ahora cuando digamos que una función es holomorfa o meromorfa sin especificar el espacio destino supondremos que es \mathbb{C} . Usaremos letras minúsculas para estos casos y mayúsculas para aplicaciones generales entre superficies de Riemann

Sean X e Y superficies de Riemann

DEFINICIÓN 5.3.1. Una aplicación $F : X \rightarrow Y$ se denomina holomorfa en p cuando existen cartas (U, ϕ) $p \in U$ y (V, ψ) $F(p) \in V$ tales que la función $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ es holomorfa en $\phi(p)$. Si F está definida en el abierto $W \subset X$ y es

holomorfa $\forall p \in W$ entonces se dice holomorfa en W (Cuando sea holomorfa en X simplemente se dice que es holomorfa)

Como en casos anteriores es fácil comprobar que si esta propiedad se cumple para una carta se cumple para todas las cartas compatibles con ella.

También son sencillas de comprobar las siguientes propiedades

1. Si F es holomorfa es continua y C^∞
2. Si $F : X \rightarrow Y$ y $G : Y \rightarrow Z$ son holomorfas también lo es $G.F : X \rightarrow Z$
3. Si $F : X \rightarrow Y$ holomorfa y g definida en un abierto $W \subset Y$ holomorfa (meromorfa). Entonces $g.F : F^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa (meromorfa)

DEFINICIÓN 5.3.2. Se dice que una aplicación holomorfa $F : X \rightarrow Y$ es un biholomorfismo o isomorfismo cuando F es biyectiva y F^{-1} holomorfa. En ese caso se dice que X, Y son isomorfas.

En ejemplo 5.1.1 vimos que la Esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$, y la recta proyectiva $P^1(\mathbb{C})$ son isomorfas.

Consecuencia del teorema similar para funciones holomorfas es

TEOREMA 5.3.1. (Identidad) Sean F, G aplicaciones holomorfas $F, G : X \rightarrow Y$ si $F = G$ en un conjunto S con un punto límite en X entonces $F = G$ en X

Sea f una función meromorfa en X , le podemos asociar una aplicación $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \forall p \text{ no polo} \\ \infty & \text{Si } p \text{ polo} \end{cases}$$

Es fácil comprobar (considerando la carta en $\widehat{\mathbb{C}}$ $\omega = \frac{1}{z}$ y el desarrollo de Laurent) que F es holomorfa. Así tenemos una correspondencia biyectiva entre

Funciones meromorfas en $X \leftrightarrow$ Aplicaciones holomorfas $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

5.3.1. Estructura local de las aplicaciones entre superficies de Riemann.

TEOREMA 5.3.2. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa en $p \in X$ no constante (denotaremos $q = F(p)$). Existe un número k y cartas (U, ϕ) $p \in U$ y (V, ψ) $q \in V$ tales que:

1. $\phi(p) = 0$
2. $\psi(q) = 0$
3. $F(U) \subset V$
4. $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ viene dada por $\widehat{F}(z) = z^k$

Además el número k verifica lo siguiente: Existen $W \subset U$ entorno de p y $M \subset V$ entorno de q tales que $\forall \omega \in M$ $\omega \neq q$ el conjunto $F^{-1}(\omega) \cap W$ tiene exactamente k elementos, esto hace que k no dependa de las coordenadas locales elegidas.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las translaciones son funciones holomorfas siempre es posible encontrar cartas que cumplan 1 y 2

Además como F es continua en p reduciendo U , si fuera necesario, se cumple 3

Consideremos ahora cartas (U_1, ϕ_1) y (V, ψ) que cumplan las condiciones 1,2,3. Por definición, la función $t(z) = \psi \circ F \circ \phi_1^{-1}(z)$ será holomorfa en el origen su desarrollo de Taylor será

$$t(z) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i z^i \quad c_k \neq 0$$

Siendo $k > 0$ (pues $t(0) = 0$), podremos poner $t(z) = z^k s(z)$ siendo s holomorfa en el origen y además $s(0) \neq 0$. Como para cualquier punto distinto del origen existe un entorno con la raíz k -ésima definida y holomorfa existe $W_1 \subset \phi(U_1)$ tal que $s(z) = (r(z))^k$ en W_1 y r holomorfa. Entonces

$$t(z) = z^k r^k(z) = (zr(z))^k$$

La función $g(z) = zr(z)$ es holomorfa en W_1 y biholomorfa entre un disco abierto centrado en el origen $W \subset W_1$ y un entorno del origen contenido en $\psi(V)$.

Definimos

$$U = \phi_1^{-1}(W) \quad \phi = g \cdot \phi_1$$

Entonces llamando $w = g^{-1}(z)$ (luego $z = wr(w)$)

$$\widehat{F}(z) = \psi \cdot F \cdot \phi^{-1}(z) = \psi \cdot F \cdot \phi_1^{-1} \cdot g^{-1}(z) = t(w) = (wr(w))^k = z^k$$

Como considerando la función de variable compleja z^k en un disco punteado del origen cada punto tiene k preimágenes se tiene la última parte. \square

Este importante teorema tiene muchas consecuencias

TEOREMA 5.3.3. *Sean X, Y superficies de Riemann $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. Entonces es una aplicación abierta*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un entorno (no necesariamente abierto) de p . Entonces por $F(U)$ el teorema 5.3.2 es un entorno de $F(p)$ luego F es abierta. \square

COROLARIO 5.3.1. *Sean X, Y superficies de Riemann $F : X \rightarrow Y$ holomorfa e inyectiva. Entonces F es biholomorfa entre $X \rightarrow F(X)$*

TEOREMA 5.3.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta, $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. Entonces Y es compacta y F suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Como F es abierta $F(X)$ es abierto de Y como es continua $F(X)$ es compacto y al ser superficies de Riemann espacios de Hausdorff $F(X)$ ha de ser cerrado. Así $F(X)$ es abierto cerrado en Y que por ser superficie de Riemann ha de ser conexo, por tanto $F(X) = Y$. Ahora como $F(X)$ compacto Y también. \square

EJEMPLO. *Hemos visto que un toro complejo X es compacto y que las funciones elípticas se pueden considerar aplicaciones holomorfas de $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Por tanto cada función elíptica toma todos los valores de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

COROLARIO 5.3.2. *Las únicas funciones holomorfas en una superficie de Riemann compacta son las constantes.*

DEFINICIÓN 5.3.3. Se define la multiplicidad de $F : X \rightarrow Y$ en $p \in X$ y se denota $\text{mult}_p(F)$ como el entero k tal que existen coordenadas locales tales que \widehat{F} es de la forma $z \rightarrow z^k$ en un entorno de p .

Es interesante poder calcular la multiplicidad de una función dado cualquier sistema de coordenadas locales. Para ello tenemos lo siguiente

PROPOSICIÓN 5.3.1. Sean z, w coordenadas locales en las que F se representa por $w = f(z)$, tales que a p le corresponde la coordenadas z_0 y a $F(p)$ le corresponde w_0 . Entonces

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}\left(\frac{df}{dz}\right)$$

Es decir la multiplicidad es el menor índice i del desarrollo

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{i=k}^{\infty} c_i(z - z_0)^i \quad c_i \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos $z - z_0$ y $w - w_0 = f(z) - f(z_0)$ podrían ser los sistemas de coordenadas locales “iniciales” de la demostración del teorema 5.3.2, entonces segun esa demostración k es el menor índice del desarrollo $f(z) - f(z_0) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i(z - z_0)^i \quad c_i \neq 0$. Derivando tenemos $\frac{df}{dz} = \sum_{i=k}^{\infty} i c_i(z - z_0)^{i-1}$ y de la definición tenemos $\text{ord}_p\left(\frac{df}{dz}\right) = k - 1$. \square

PROPOSICIÓN 5.3.2. Sea f una función meromorfa definida en la superficie de Riemann X . Con holomorfa asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ Tenemos

- Si $p \in X$ es un cero de f entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$
- Si $p \in X$ es un polo de f entonces $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$
- Si $p \in X$ no es polo ni cero de f entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que p no es un polo de f . Sea $f(p) = w_0$ entonces existirá un desarrollo en coordenadas locales $(f - w_0)(z) = \sum_k^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ y tendremos por la proposición anterior $\text{ord}_p(f - w_0) = \text{mult}_p(F)$

Si p es un polo de f tal que $\text{ord}_p(f) = -k$ será un cero de $\frac{1}{f}$ tal que $\text{ord}_p\left(\frac{1}{f}\right) = k$ y si consideramos la carta $\zeta = \frac{1}{w}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ tendremos que $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p\left(\frac{1}{f}\right)$ \square

DEFINICIÓN 5.3.4. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Se dice que $p \in X$ es un punto de ramificación de F cuando $\text{mult}_p(F) > 1$. Al punto $F(p)$ imagen de uno de ramificación se le denomina valor crítico.

TEOREMA 5.3.5. Sean X, Y superficies de Riemann. $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. El conjunto de puntos de ramificación $A = \{p \in X : \text{mult}_p(F) > 1\}$ es cerrado y discreto en X .

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 5.3.2 cada punto de ramificación tiene un entorno en que es único. Así el conjunto es discreto y cerrado. \square

COROLARIO 5.3.3. Sea X una superficie de Riemann compacta $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. El conjunto de puntos de ramificación es finito.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 5.3.5 el conjunto de dichos puntos será cerrado y como X compacta será compacto. Además por ser discreto existe un recubrimiento de abiertos tal que cada uno sólo contiene un punto de ramificación. \square

TEOREMA 5.3.6. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Si $\text{mult}_p(F) = 1$ existen entornos U de p y V de $F(p)$ tales que $F|_U$ es biholomorfa de $U \rightarrow V$

DEMOSTRACIÓN. Existen coordenadas locales donde la aplicación es $z \rightarrow z$ en un entorno del punto p . \square

PROPOSICIÓN 5.3.3. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y g una función meromorfa en Y . Se tiene

$$\text{ord}_p(g.F) = \text{ord}_{F(p)}(g)\text{mult}_p(F)$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición 5.3.3 existe un sistema de coordenadas centrado en p en el que F es $z \rightarrow z^{\text{mult}_p(F)}$

Por otra parte existe un sistema de coordenadas centrado en $F(p)$ en el que g es

$w \rightarrow \sum_{k=ord_{F(p)}(g)} c_k w^k$ la composición producirá

$$z \rightarrow \sum_{k=ord_{F(p)}(g)} c_k (z^{mult_p(F)})^k = \sum_{k=ord_{F(p)}(g)} c_k z^{k \cdot mult_p(F)}$$

y tenemos la proposición □

5.3.2. Aplicaciones propias.

DEFINICIÓN 5.3.5. Una aplicación continua $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann se denomina propia si para cada conjunto compacto $K \subset Y$ se tiene que $F^{-1}(K)$ es compacto en X

OBSERVACIÓN. Si X, Y son superficies de Riemann compactas como Y es Hausdorff K será cerrado y lo mismo $F^{-1}(K)$ y como X compacto también $F^{-1}(K)$. Así entre superficies de Riemann compactas las aplicaciones continuas son propias.

TEOREMA 5.3.7. Sea F una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann X, Y se tiene

1. F es cerrada
2. F es suprayectiva
3. $\forall q \in Y$ $F^{-1}(q)$ es finito
4. $\forall q \in Y$ y cada entorno U de $F^{-1}(q)$ existe un entorno abierto V de q tal que $F^{-1}(V) \subset U$
5. Si F es un homeomorfismo local ($\forall p \in X$ existe U entorno de p tal que $F|_U$ es un homeomorfismo) $\forall q \in Y$ existe un entorno abierto V de q tal que

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Donde los U_i son abiertos no vacíos disjuntos dos a dos tales que las restricciones $F|_{U_i}$ son homeomorfismos. Es decir F es una aplicación recubridora.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $G \subset X$ cerrado y q un punto de adherencia de $F(G)$. Existirá una sucesión $\{q_i\}$ de $F(G)$ convergente a q . El conjunto

$$K = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{q\}$$

Es un compacto de Y (Dado un recubrimiento de abiertos de K basta tomar un abierto que contenga a q y ya tenemos todo recubierto salvo un número finito de puntos). Por ser F propia $F^{-1}(K)$ es un compacto de X

Si consideramos puntos $p_n \in G$ tales que $F(p_n) = q_n$ tendremos que $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F^{-1}(K)$ luego deberá existir una subsucesión convergente $\{p_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ a un punto $p \in G$ (G cerrado por hipótesis) Ahora por la continuidad de F tenemos que $q = \lim F(p_n) = F(\lim p_n) = F(p)$ luego $q \in F(G)$.

2) La aplicación F es también abierta por el teorema 5.3.3 luego $F(X)$ es abierto cerrado no vacío en conexo Y .

3) $F^{-1}(q)$ será un compacto de X , si fuera infinito tendría un punto límite ($F^{-1}(q)$ se recubre con un número finito de cartas una de las cuales deberá tener infinitos puntos y su dominio es homeomorfo a \mathbb{C} donde se cumple Heine Borel) Aplicando el principio de identidad sería igual a la función constante $\forall p \in X F(p) = q$ contrario a la hipótesis.

4) Sea U un entorno abierto de $F^{-1}(q)$ el complementario $X - U$ es cerrado y como F cerrada también $A = F(X - U)$ además $q \notin A$ llamando $V = Y - A$ tenemos $F^{-1}(V) = F^{-1}(Y - F(X - U)) = X - F^{-1}F(X - U)$ y como $X - U \subset F^{-1}F(X - U)$ tenemos que $F^{-1}(V) \subset U$.

5) Sea $q \in Y$ como $F^{-1}(q)$ es finito y no vacío podemos poner $F^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$

Como F es homeomorfismo local existen para cada i entornos abiertos W_i de p_i y V_i de q tales que $F|_{W_i} : W_i \rightarrow V_i$ son homeomorfismos. Además por ser X Hausdorff los W_i se pueden tomar disjuntos dos a dos

El conjunto $W = \bigcup_{i=1}^n W_i$ es un entorno de $F^{-1}(q)$ y existirá V entorno abierto de q tal que $F^{-1}(V) \subset W$

Reduciendo V , si fuera necesario, podemos suponer que $V \subset \bigcap_{i=1}^n V_j$ y considerando $U_i = F^{-1}(V) \cap W_i$ los conjuntos U_i son disjuntos dos a dos y los $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V_i$ son homeomorfismos. \square

COROLARIO 5.3.4. *El conjunto de valores críticos de una aplicación holomorfa propia $F : X \rightarrow Y$ no constante es discreto y cerrado en Y . Además si X, Y compactas dicho conjunto es finito*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 5.3.5 el conjunto de puntos de ramificación $A = \{p \in X : mult_p(F) > 1\}$ es discreto y cerrado al ser F abierta y cerrada también lo es $F(A)$. Si Y compacta también sera compacto $F(A)$ y compacto y discreto implica finito. \square

Observación 5.3.1. Sea B el conjunto de valores críticos de una aplicación holomorfa propia no constante $F : X \rightarrow Y$ Si consideramos $Y' = Y - B$ y $X' = X - F^{-1}(B)$ ($F^{-1}(B)$ será en general mayor que A) la aplicación $F|_{X'}$ es holomorfa propia no constante de $X' \rightarrow Y'$. Además por el teorema 5.3.6 F es homeomorfismo local de $X' \rightarrow Y'$ y será por tanto una aplicación recubridora.

Además, al ser recubridora, por el teorema 3.4.2 $F^{-1}(q)$ tendrá la misma cardinalidad $\forall q \in Y'$ y además por el teorema 5.3.7 está será finita $n = Card(F^{-1}(q))$

Este número n se denota por $dg(F)$.

DEFINICIÓN 5.3.6. Se denomina grado de una aplicación holomorfa propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann al número $dg(F)$.

TEOREMA 5.3.8. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann $\forall q \in Y$ se verifica

$$\forall q \in Y \quad dg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} mult_p(F)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $q \notin B$ entonces el resultado es obvio. Sea $b \in B$ tendremos por el teorema 5.3.7 que $F^{-1}(b)$ será finita sea $F^{-1}(b) = \{a_1, \dots, a_s\}$ y consideremos $n_i = mult_{a_i}(F)$

Del teorema 5.3.2 se deduce que existen entornos abiertos U_j disjuntos dos a dos de los a_j y entornos V_j de b tales que $\forall q \in V_j - \{b\}$ el conjunto $F^{-1}(q) \cap U_j$ tiene n_j elementos.

Por el teorema 5.3.7 se puede encontrar un entorno abierto V (que reduciéndolo si fuera necesario se puede suponer $V \subset \bigcap_{j=1}^s V_j$) tal que $F^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^s U_i = U$

Consideremos ahora un elemento $q \in Y' \cap V$ el conjunto $F^{-1}(V)$ contiene $n_1 + \dots + n_s$ elementos por lo que tendremos $dg(F) = n_1 + \dots + n_s = \sum_{p \in F^{-1}(b)} mult_p(F)$ \square

COROLARIO 5.3.5. *Una aplicación holomorfa propia no constante $F : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo entre superficies de Riemann, si y sólo si $dg(F) = 1$*

DEMOSTRACIÓN. $dg(F) = 1$ es lógicamente equivalente a ser inyectiva como además es suprayectiva es biyectiva y basta aplicar corolario 5.3.1. \square

COROLARIO 5.3.6. *Si X es una superficie de Riemann compacta que tiene definida una función meromorfa f con un sólo polo entonces X es isomorfa a la esfera de Riemann.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la holomorfa asociada $mult_\infty(F) = 1$ y por tanto $dg(F) = 1$ y aplicando corolario 5.3.5 tenemos el resultado. \square

Estamos ahora en disposición de generalizar el resultado del ejemplo 5.2.3.1

TEOREMA 5.3.9. *Sea f una función meromorfa definida en una superficie de Riemann compacta X*

$$\sum_{p \in X} ord_p(f) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la holomorfa asociada sea $\{p_i\}$ el conjunto de puntos tales que $F(p_i) = 0$ y $\{q_j\}$ el conjunto de puntos tales que $F(q_j) = \infty$ tendremos

$$dg(F) = \sum_i mult_{p_i}(F) = \sum_j mult_{q_j}(F)$$

Por la proposición 5.3.2 los únicos puntos donde f tiene $ord_p(f) \neq 0$ es en los ceros y los polos y por la proposición 5.3.2

$$mult_{p_i}(F) = ord_{p_i}(f) \quad mult_{q_j}(F) = -ord_{q_j}(f)$$

luego

$$\sum_{p \in X} ord_p(f) = \sum_i ord_{p_i}(f) + \sum_j ord_{q_j}(f) = \sum_i mult_{p_i}(F) - \sum_j mult_{q_j}(F) = dg(F) - dg(F) = 0$$

□

5.3.3. Recubridores ramificados (“Branched Coverings”).

Hemos visto que una aplicación holomorfa no constante propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann, da lugar a una aplicación recubridora $F : X - F^{-1}(B) \rightarrow Y - B$, siendo B el conjunto de los valores críticos de F (cerrado y discreto), esta aplicación recubridora tendrá un número finito n de hojas.

Por este motivo se tiene la siguiente

DEFINICIÓN 5.3.7. Una aplicación holomorfa no constante y propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann se denomina recubridor ramificado.

NOTA. Reservaremos el nombre de aplicación recubridora para el concepto topológico general usando el de recubridor (ramificado o no) para el concepto recién definido. Un recubridor no ramificado es por tanto una aplicación recubridora holomorfa con un número finito de hojas.

DEFINICIÓN 5.3.8. Vamos ahora a analizar la posibilidad de extender un recubridor no ramificado a uno ramificado.

Necesitaremos unos lemas previos

LEMA 5.3.1. Sea X una superficie de Riemann $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $D^* = D - \{0\}$, $F : X \rightarrow D^*$ una aplicación recubridora holomorfa

Si la aplicación recubridora tiene ∞ hojas existe una aplicación biholomorfa $\varphi : X \rightarrow H$ (siendo $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$) tal que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & \searrow F & \swarrow \exp \\ & & D^* \end{array}$$

Si la aplicación recubridora tiene n hojas existe una aplicación biholomorfa $\varphi : X \rightarrow D^*$ tal que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & D^* \\ & \searrow F & \swarrow p_k \equiv z^k \\ & & D^* \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = F_*(\pi_1(X, x))$ será un subgrupo de $\pi_1(D^*, z) = \mathbb{Z}$, siendo $z = F(x)$ (ver ejemplo 3.7.1) por tanto hay dos posibilidades

- G es es subgrupo trivial
- G es de la forma $\{kn : n \in \mathbb{Z}\}$

Como por el teorema 3.4.4 hay una biyección entre el número de hojas ($F^{-1}(z)$) y \mathbb{Z}/G en el caso de infinitas hojas H será de la primera forma y en el de k hojas de la segunda.

En el primer caso $G = \exp_*(\pi_1(H, z))$ (por ser H simplemente conexo $\pi_1(H, z)$ es trivial) y por teorema 3.5.1 serán equivalentes y existirá homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow H$ que será biholorfismo por ser holomorfos F y \exp

En el segundo consideremos que p_{k*} convertirá un lazo que de m vueltas al origen en D^* en un lazo que dará mk vueltas al origen en D^* y por tanto $p_{k*}(\pi_1(D^*, z)) = \{kn : n \in \mathbb{Z}\} = G$ y aplicando otra vez el teorema 3.5.1 tenemos el resultado. \square

LEMA 5.3.2. Sea X una superficie de Riemann $F : X \rightarrow D$ una aplicación holomorfa propia no constante que es no ramificada en $F^{-1}(D^*)$ Existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$

y una aplicación biholomorfa $\varphi : X \rightarrow D$ que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & D \\ & \searrow F & \swarrow p_k \equiv z^k \\ & & D \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X^* = F^{-1}(D^*)$ entonces $F|_{X^*}$ es no ramificado por el lema 5.3.1 tenemos que existe φ que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\varphi} & D^* \\ & \searrow F & \swarrow p_k \\ & & D^* \end{array}$$

Vamos a ver que $F^{-1}(0)$ consiste en un único punto $a \in X$. En efecto supongamos que $F^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_l\}$ existirán entornos disjuntos U_i de cada a_i cuya unión será un entorno de $F^{-1}(0)$ y existirá $r > 0$ tal que $D_r = \{z : |z| < r\}$ cumplirá

$$F^{-1}(D_r) \subset U_1 \cup \dots \cup U_l$$

(todo lo anterior por el teorema 5.3.7)

Como $F^{-1}(D_r^*)$ es homeomorfo a $p_k^{-1}(D_r^*)$ tenemos que es conexo, siéndolo también su clausura, luego $F^{-1}(D_r)$ sería conexo en contradicción con lo anterior.

Definiendo $\varphi(a) = 0$ habremos extendido φ a una aplicación biholomorfa que hace el diagrama conmutativo. \square

Pasemos ahora a analizar la extensión.

TEOREMA 5.3.10. *Sea Y una superficie de Riemann $B \subset Y$ un conjunto cerrado discreto, denotemos $Y' = Y - B$. Supongamos que X' es otra superficie de Riemann y que $\pi : X' \rightarrow Y'$ es un recubridor no ramificado (propio). Existe una superficie de Riemann X un recubridor ramificado $\Pi : X \rightarrow Y$ y un biholomorfismo $\varphi : X - \Pi^{-1}(B) \rightarrow X'$ que preserva las fibras es decir $\forall p \in X - \Pi^{-1}(B) \quad \Pi(p) = \pi(\varphi(p))$*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $b \in B$ podemos escoger una carta (V_b, z_b) con las siguientes propiedades

- $z_b(b) = 0$
- $z_b(V_b)$ es el disco unidad en \mathbb{C}
- Los V_b disjuntos dos a dos

Sea $V_b^* = V_b - \{b\} \subset Y'$. Las componentes conexas del conjunto $\pi^{-1}(V_b^*)$ son por el lema 3.4.2 espacios de recubrimiento y por ser π propia cada punto tiene un número finito de preimagenes así $\pi^{-1}(V_b^*)$ tiene un número finito de componentes conexas U_{bi} y tendremos

$$\pi^{-1}(V_b^*) = U_{b1}^* \cup \dots \cup U_{bn_b}^*$$

Además por el lema 3.4.2 $\forall U_{bi}^* \pi|_{U_{bi}^*}$ es un recubridor no ramificado que tendrá ν_{bi} hojas (cumpliéndose claro que $\sum_{i=1}^{n_b} \nu_{bi} = n$ siendo n el número de hojas de π). Entonces $z_b \cdot \pi|_{U_{bi}^*}$ es un recubridor no ramificado de D^*

Por el lema 5.3.1 existirán aplicaciones biholomorfas $\phi_{bk} : U_{bk}^* \rightarrow D^*$ que hacen conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{bk}^* & \xrightarrow{\phi_{bk}} & D^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_{\nu_{bk}} \\ V_b^* & \xrightarrow{z_b} & D^* \end{array}$$

Tomemos un conjunto (“puntos ideales a añadir” tantos como componentes conexas de los diferentes $\pi^{-1}(b)$) $\{p_{bk} : b \in B, k = 1 \dots n_b\}$ y sea $X = X' \cup \{p_{bk} : b \in B, k = 1, \dots, n_b\}$

Para definir una topología en X añadimos a los entornos de X' una base de entornos de los puntos p_{bk} a partir de una base de entornos W_{jb} $j \in J$ (conjunto de índices) de b por medio de

$$\{p_{bk}\} \cup (\pi^{-1}(W_{jb}) \cap U_{bk}^*) \quad j \in J$$

y tendremos en X una topología que es evidentemente Hausdorff y que hará X conexo.

Definimos

$$\Pi(p) = \begin{cases} \pi(p) & p \in X' \\ b & p \in \{p_{bk} : k = 1 \dots n_b\} \end{cases}$$

Π será propia por serlo π (en un conjunto compacto sólo puede haber un número finito de puntos de B). Vamos a ver que es un recubridor ramificado con puntos de ramificación $\{p_{bk} : b \in B, k = 1 \dots n_b\}$ cada uno de ellos con multiplicidad ν_{bk} .

Para que sea superficie de Riemann definimos $U_{bk} = U_{bk}^* \cup \{p_{bk}\}$ y definimos las cartas (U_{bk}, ψ_{bk}) donde

$$\psi_{bk}(p) = \begin{cases} \phi_{bk}(p) & p \in U_{bk}^* \\ 0 & p = p_{bk} \end{cases} \text{ que serán compatibles con las anteriores por el lema}$$

5.3.2

$\Pi : X \rightarrow Y$ será holomorfo por serlo π y haber escogido en los puntos p_{bk} el valor 0.

Por último escogiendo φ como la aplicación identidad en X' tenemos demostrado el teorema. \square

Vamos a ver que el recubridor construido es único salvo isomorfismos

TEOREMA 5.3.11. *Sean X, Y, Z superficies de Riemann $F : X \rightarrow Y$ y $G : Z \rightarrow Y$ recubridores ramificados. Sea $B \subset Y$ un conjunto cerrado discreto y $Y' = Y - B$, $X' = F^{-1}(Y')$, $Z' = G^{-1}(Y')$. Cada aplicación biholomorfa $\lambda : X' \rightarrow Z'$ que conserve las fibras, es decir $\forall p \in X' \quad F(p) = G(\lambda(p))$, se puede extender a una aplicación biholomorfa $\Lambda : X \rightarrow Z$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $b \in B$ escogemos una carta (V, z) tal que

- $z(b) = 0$

- $z(V) = D$ (disco unidad en \mathbb{C})

- V suficientemente pequeño para que siendo $V^* = V - \{b\}$ F y G sean no ramificados en $F^{-1}(V^*)$ y $G^{-1}(V^*)$ respectivamente (Se puede hacer porque los valores

críticos de F y G forman conjunto discreto, así si b no es valor crítico de F ni de G existe un entorno de b sin valores críticos y si lo es de alguno de ellos o de los dos existe un entorno en el que es el único)

$F^{-1}(V)$ tendrá como componentes conexas U_1, \dots, U_m y $G^{-1}(V)$ tendrá W_1, \dots, W_l como componentes conexas

Sean $U_i^* = U_i - F^{-1}(b)$ y $W_j^* = W_j - F^{-1}(b)$ que serán las componentes conexas de $F^{-1}(V^*)$ y $G^{-1}(V^*)$

Como $\lambda|_{F^{-1}(V^*)} : F^{-1}(V^*) \rightarrow G^{-1}(V^*)$ es biholomorfa F, G han de tener el mismo número de componentes conexas $m = l$ y podemos considerar (renumerando si es necesario) que $\lambda(U_i^*) = W_i^*$ como F, G son no ramificados en V^* tendremos por el lema 5.3.2 que $F^{-1}(b) \cap U_i$ consiste en un sólo punto a_i y análogamente $G^{-1}(b) \cap W_i$ consiste en un solo punto c_i .

Entonces $\lambda|_{F^{-1}(V^*)}$ se puede extender a una aplicación biyectiva propia holomorfa $\Lambda|_{F^{-1}(V)}$ asignando $\Lambda(a_i) = c_i$

Aplicando esto para cada $b \in B$ tenemos el resultado □

El teorema anterior justifica la siguiente definición

DEFINICIÓN 5.3.9. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ un recubridor ramificado. Sea $A \subset Y$ el conjunto de valores críticos de F y sean $Y' = Y - A$, $X' = F^{-1}(Y')$ el recubridor F se denomina de Galois si lo es $F|_{X'} : X' \rightarrow Y'$ (ver definición 3.7.2)

5.4. Fórmula de Hurwitz

NOTA. En esta sección supondremos que toda superficie de Riemann es triangulable. La demostración de este hecho puede verse en [AhlfSar].

Una fórmula importante en la teoría de superficies de Riemann compactas es la fórmula de Hurwitz, que relaciona la característica de Euler con el grado de una función meromorfa

Recordaremos un resultado básico de la Homología Simplicial

DEFINICIÓN 5.4.1. Sea S una variedad bidimensional. Dada una triangulación de la misma se define el número de Euler como $\chi(S) = t + v - a$ donde t es el número total de triángulos, v el número total de vértices, y a el número total de aristas

PROPOSICIÓN 5.4.1. El número de Euler es independiente de la triangulación utilizada y para variedades orientables y compactas está relacionada con el género (topológico) $g(S)$ de la variedad por $\chi(S) = 2 - 2g(S)$

TEOREMA 5.4.1. (Fórmula de Hurwitz) Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Se tiene

$$2g(X) - 2 = dg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1)$$

DEMOSTRACIÓN. Como el número de puntos de ramificación es finito (X compacta) y $mult_p(F) = 1$ en los demás puntos el sumatorio es finito.

Escojamos una triangulación de Y tal que cada valor crítico sea un vértice. Sean sus parámetros t_Y, v_Y, a_Y

Los levantamientos de los lados de los triángulos producen una triangulación en X de parámetros t_X, v_X, a_X . Salvo en los vértices (que pueden ser críticos) tendremos $dg(F)$ imágenes así $t_X = dg(F)t_Y$ y $a_X = dg(F)a_Y$

$F^{-1}(q)$ será un punto definido de X salvo para los valores críticos que son vértices. Para ellos tendremos

$$Card(F^{-1}(q)) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - mult_p(F)) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} mult_p(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - mult_p(F)) + dg(F)$$

El número de vértices en X será

$$v_X = \sum_{q \in Vert(Y)} \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - mult_p(F)) + dg(F) \right) = dg(F)v_Y - \sum_{q \in Vert(Y)} \sum_{p \in F^{-1}(q)} (mult_p(F) - 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= dg(F)v_Y - \sum_{p \in Vert(X)} (mult_p(F) - 1) \\
2g(X) - 2 = -v_X + a_X - t_X &= dg(F)(a_Y - t_Y - v_Y) + \sum_{p \in Vert(X)} (mult_p(F) - 1) = \\
&= dg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in Vert(X)} (mult_p(F) - 1)
\end{aligned}$$

Como todos los puntos de ramificación son vértices, aunque extendamos a todos los puntos el último sumatorio no se produce variación. \square

DEFINICIÓN 5.4.2. *Se denomina orden total de ramificación de la aplicación holomorfa no constante $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann compactas a $b = \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1)$*

La fórmula de Hurwitz se puede poner

$$b = 2[g(X) - dg(F)(g(Y) - 1) - 1]$$

y por tanto el orden total de ramificación es un número par.

DEFINICIÓN 5.4.3. *Una superficie de Riemann compacta X de genus $g(X) > 1$ se denomina hiperelíptica cuando admite un recubridor de 2 hojas de $\widehat{\mathbb{C}}$*

Si X es hiperelíptica $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el recubridor de dos hojas ($dg(\pi) = 2$) aplicando la fórmula de Hurwitz tendremos

$$b = 2(g(X) + 1) \quad g(X) = \frac{b}{2} - 1$$

Prolongación meromorfa

6.1. Gérmenes de funciones holomorfas y meromorfas

Consideremos una superficie de Riemann X , en cada abierto $U \subset X$ podemos considerar las funciones holomorfas y meromorfas definidas en U que forman un grupo (realmente una \mathbb{C} algebra), si dado $V \subset U$ consideramos las restricciones $f|_V$ como un homomorfismo entre los grupos correspondientes a U y a V vemos que forman unos haces que se denotan \mathcal{O} (holomorfas) y \mathcal{M} (meromorfas).

Por el teorema 5.2.2 se ve que ambos haces cumplen el principio de identidad 4.2.7.

Por tanto podemos definir los conjunto de gérmenes de funciones holomorfas $|\mathcal{O}|$ y meromorfas $|\mathcal{M}|$ en X que serán espacios topológicos

- Hausdorff
- Existen proyecciones $\pi : |\mathcal{O}| \rightarrow X$ y $\pi : |\mathcal{M}| \rightarrow X$ que son homeomorfismos locales
- Los conjuntos $[U, f] = \{[f]_x : x \in U\}$ forman una base de la topología.

Tal y como vimos en el subapartado 4.2.3

NOTA. Denotaremos por $[f]_x$ el germen que tiene por representante la función f definida en un abierto $U \ni x$ y diremos que el germen $[f]_x$ está soportado en (o tiene por soporte) x .

A los representantes de clase de $[f]_x$ que denotaremos (f, U) cuando U es un abierto convexo se les denomina *elementos de función* (meromorfa u holomorfa).

Además para el caso que estamos considerando se cumple

- $|\mathcal{M}|$ localmente compacto y localmente conexo por caminos (al serlo X y ser las proyecciones homeomorfismos locales). Por tanto las componentes conexas y las conexas por caminos coincidirán.
- Existe una aplicación $\Phi : |\mathcal{M}| \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida por $\Phi([f]_x) = f(x)$ (escribiremos a menudo $[f]_x(x)$ en lugar de $\Phi([f]_x)$)

(Análogamente para $|\mathcal{O}|$)

OBSERVACIÓN. Se tiene que $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$ ($\mathcal{O}_b = \pi^{-1}(b)$)

6.2. Prolongación meromorfa a lo largo de curvas, Monodromía

DEFINICIÓN 6.2.1. Sea X una superficie de Riemann y $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva en X con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Un germen de función meromorfa $\psi \in \mathcal{M}_b$ se dice que es una prolongación meromorfa del germen $\varphi \in \mathcal{M}_a$ a lo largo de γ cuando existe un levantamiento $\widehat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow |\mathcal{M}|$ de γ tal que $\widehat{\gamma}(0) = \varphi$ y $\widehat{\gamma}(1) = \psi$

La definición, quizás más habitual, se basa en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 6.2.1. Si $\psi \in \mathcal{M}_b$ es una prolongación meromorfa de $\varphi \in \mathcal{M}_a$ a lo largo de γ existe una familia de gérmenes $\varphi(t) \in \mathcal{M}_{\gamma(t)}$ $t \in [0, 1]$ tales que $\varphi(0) = \varphi$, $\varphi(1) = \psi$ y $\forall \tau \in [0, 1]$ existe un intervalo abierto $\tau \in J \subset [0, 1]$, un abierto $U \subset X$ con $\gamma(J) \subset U$ y una función $f \in \mathcal{M}(U)$ tal que $\forall t \in J$ $[f]_{\gamma(t)} = \varphi(t)$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que ψ es prolongación meromorfa de φ a lo largo de γ y sea $\widehat{\gamma}$ el levantamiento correspondiente definimos $\varphi(t) = \widehat{\gamma}(t)$ entonces $\varphi(t) \in \mathcal{M}_{\gamma(t)}$ y $\varphi(0) = \varphi$, $\varphi(1) = \psi$. Sea $\tau \in [0, 1]$ y $[U, f]$ un entorno abierto de $\varphi(\tau)$ como $\widehat{\gamma}$ continua existe un intervalo $J \subset [0, 1]$ tal que $\widehat{\gamma}(J) \subset [U, f]$ esto implica $\gamma(J) \subset U$ y $\forall s \in J$ $\varphi(s) = [f]_{\gamma(s)}$

Recíprocamente consideremos la familia de gérmenes $\varphi(t)$ de la definición de la topología de $|\mathcal{M}|$ se deduce que la aplicación $\widehat{\gamma} : t \rightarrow \varphi(t)$ es una aplicación continua de $[0, 1] \rightarrow |\mathcal{M}|$ y cumplirá $\pi \cdot \widehat{\gamma} = \gamma$ siendo por tanto un levantamiento. \square

TEOREMA 6.2.1. (Monodromía) *Sea X una superficie de Riemann y γ_0, γ_1 curvas homotópicas de a hasta b supongamos que F es la aplicación de homotopía ($F(s, 0) = \gamma_0(s), F(s, 1) = \gamma_1(s), F(0, t) = a, F(1, t) = b$) y que cada curva $\gamma_t(s) = F(s, t)$ $t \in [0, 1]$ admite un levantamiento en $|\mathcal{M}|$ comenzando en φ . Entonces $\forall t \in [0, 1]$ $F(1, t) = \psi$ (y por tanto $\widehat{\gamma}_0(1) = \widehat{\gamma}_1(1)$ son el mismo germe)*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce directamente del teorema 3.3.2 □

COROLARIO 6.2.1. *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa $a \in X$ y $\varphi \in \mathcal{M}_a$ un germe que admite prolongación meromorfa a lo largo de cualquier curva de X comenzando en a . Existe una función meromorfa global $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que*

$$\rho_a(f) = \varphi$$

DEMOSTRACIÓN. $\forall x \in X$ sea $\psi \in \mathcal{M}_x$ el germe prolongación de φ a lo largo de cualquier curva que una a con x (como X simplemente conexo ψ es independiente de la curva elegida). Definimos $f(x) = \Phi(\psi)$ que será una función meromorfa tal que $\rho_a(f) = \varphi$ □

PROPOSICIÓN 6.2.2. *Sea $Y \subset |\mathcal{M}|$ son equivalentes*

- 1) *Y es componente conexa de $|\mathcal{M}|$*
- 2) *Existe un germe $[f]_a$ tal que Y es el conjunto de todos los gérmenes que son prolongación meromorfa de $[f]_a$ a lo largo de una curva en X*

DEMOSTRACIÓN. Sea Y una componente conexa de $|\mathcal{M}|$ y $[f]_a$ un elemento de Y , y sea G el conjunto de todos los gérmenes que son prolongación meromorfa a lo largo de una curva. Como G es conexo por caminos $G \subset Y$.

Fijemos cualquier $[f]_a \in Y$ como Y es conexo por caminos si $[g]_b \in Y$ existe un camino $\widehat{\gamma}$ en Y que va de $[f]_a$ a $[g]_b$ γ entonces $[g]_b$ es prolongación meromorfa de $[f]_a$ a lo largo de $\gamma = \pi \cdot \widehat{\gamma}$, luego $Y \subset G$. □

Un resultado muy importante es que se puede dotar a las componentes conexas de $|\mathcal{M}|$ de una estructura de superficie de Riemann

En efecto, sea Y un abierto conexo de $|\mathcal{M}|$ se consideran los abiertos $[U, f]$ tales que $U \subset \pi(Y)$ es un abierto *convexo* dominio de una carta (U, z) de X y se definen aplicaciones

$$\phi : [U, f] \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi([f]_x) = z(x)$$

(Se exige U convexo, para que $[U, f] \cap [V, g]$ sea o bien vacío o bien $[U \cap V, f] = [U \cap V, g]$)

TEOREMA 6.2.2. *El conjunto de cartas $([U, f], \phi)$ constituye un atlas analítico de Y y las restricciones a Y de π y Φ son meromorfas (Y es por tanto una superficie de Riemann)*

DEMOSTRACIÓN. La compatibilidad de las cartas se deduce directamente de la compatibilidad de las cartas de X y de la definición de los dominios $[U, f]$ de las mismas

Veamos que Φ es meromorfa en Y . Sea $\alpha \in Y$ y sea $[U, f] \subset Y$ el dominio de una carta que contiene a α . Tendremos

$$\forall \xi \in U \quad \Phi \cdot \phi^{-1}(\xi) = \Phi \cdot z^{-1}(\xi) = f \cdot z^{-1}(\xi)$$

y como f es meromorfa tenemos el resultado

Analogamente para π (en este caso la restricción es holomorfa). □

6.3. Prolongación meromorfa general

DEFINICIÓN 6.3.1. *Supongamos que X, Y son superficies de Riemann, $\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y$ los haces de funciones meromorfas y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa sin puntos de ramificación. Como p es localmente biholomorfa induce para cada $y \in Y$ un isomorfismo p^* entre los gérmenes en $p(y) \in X$ y en $y \in Y$*

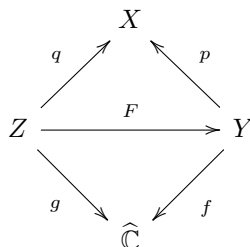
$$p^* : \mathcal{M}_{p(y)} \rightarrow \mathcal{M}_y \quad p^*([f]_{p(y)}) = [f \cdot p]_y$$

Denotamos el inverso como $p_* : \mathcal{M}_y \rightarrow \mathcal{M}_{p(y)}$ que será $p_*([f]_y) = [f \cdot (p|_V)^{-1}]_{p(y)}$, siendo V un entorno de y homeomorfo por p a un entorno U de $p(y)$

DEFINICIÓN 6.3.2. Sea X una superficie de Riemann $a \in X$ y $\varphi \in \mathcal{M}_a$. Una cuádrupla (Y, p, f, b) es una prolongación meromorfa de φ cuando

- Y es una superficie de Riemann
- $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación holomorfa sin puntos de ramificación
- f es una función meromorfa en Y
- $b \in Y$ y $p(b) = a$
- $p_*([f]_b) = \varphi$

DEFINICIÓN 6.3.3. Una prolongación meromorfa (Y, p, f, b) de $\varphi \in \mathcal{M}_a$ se dice maximal cuando para cualquier otra prolongación meromorfa (Z, q, g, c) de $\varphi \in \mathcal{M}_a$ existe una aplicación holomorfa $F : Z \rightarrow Y$ tal que $F(c) = b$ y hace conmutativo



O sea $q = p \cdot F$ y $g = f \cdot F$

De la definición se comprueba fácilmente que una prolongación maximal es única salvo isomorfismos.

Vamos a demostrar que todo germen da lugar a una prolongación meromorfa maximal. Para ello necesitaremos unos lemas previos

LEMA 6.3.1. Sea X una superficie de Riemann $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{M}_a$ y (Y, p, f, b) una prolongación meromorfa de φ . Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ es una curva $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = y$ entonces el germen $\psi = p_*([f]_y) \in \mathcal{M}_{p(y)}$ es una prolongación meromorfa de φ a lo largo de la curva $\zeta = p \cdot \gamma$

DEMOSTRACIÓN. Dado $t \in [0, 1]$ definimos $\varphi(t) = p_*([f]_{\gamma(t)}) \in \mathcal{M}_{p, \gamma(t)} = \mathcal{M}_{\zeta(t)}$

Tendremos $\varphi(0) = \varphi$ y $\varphi(1) = p_*([f]_y) = \psi$

Consideremos un $\tau \in [0, 1]$ como p es homeomorfismo local existen entornos $V \subset Y, U \subset X$ de $\gamma(\tau)$ y $\zeta(\tau)$ respectivamente tales que $p|_V : V \rightarrow U$ es biholomorfa.

Sea $q = p|_V^{-1}$ y $g = f \cdot q \in \mathcal{M}(U)$. Como (Y, p, f, b) es prolongación analítica $p_*([f]_w) = [g]_{p(w)} \forall w \in V$

Como γ es continua existe un intervalo $J \subset [0, 1]$ que contiene a τ tal que $\gamma(J) \subset V$, luego $\zeta(J) \subset U$, tal que

$$\forall t \in J \quad [g]_{\zeta(t)} = p_*([f]_{\gamma(t)}) = \varphi(t)$$

□

LEMA 6.3.2. *Sea X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Entonces existe una única estructura analítica en Y tal que p es holomorfa*

(Por el corolario 5.3.1 será localmente biholomorfa)

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, ϕ) una carta de X , existe un abierto $V \subset Y$ tal que $p|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Definimos una carta en Y como $(V, \phi \cdot p)$

Sea $\mathcal{V} = \{V_i\}$ el conjunto de cartas obtenidas de esta forma a partir de las de X . Fácilmente se ve que cubren a Y y son compatibles, además con esta construcción p es localmente biholomorfa.

Para ver la unicidad supongamos que \mathcal{V}' es otro atlas de Y tal que $p : Y \rightarrow X$ es holomorfa (localmente biholomorfa) con respecto al atlas \mathcal{V}' (representaremos esto por $p : (Y, \mathcal{V}') \rightarrow X$). La identidad $(Y, \mathcal{V}) \rightarrow (Y, \mathcal{V}')$ es localmente biholomorfa, por composición de biholomorfismos locales, luego biholomorfa, y $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ definen la misma estructura analítica. □

TEOREMA 6.3.1. *Sea X una superficie de Riemann $a \in X, \varphi \in \mathcal{M}_a$. Existe una prolongación meromorfa maximal (Y, p, f, b)*

DEMOSTRACIÓN. Sea Y la componente conexa de $|\mathcal{M}|$ que contiene a φ y sea $p = \pi|_Y$ la resticción de la proyección $\pi : |\mathcal{M}| \rightarrow X$ (que será homeomorfismo local)

Aplicando el lema 6.3.2 vemos que podemos dotar a Y de una estructura analítica con lo que será una superficie de Riemann y p será holomorfa.

Definimos ahora una función meromorfa $f : Y \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ del siguiente modo: Cada $\eta \in Y$ es un germen de función meromorfa $\eta = [g]_x$ definimos $f(\eta) = g(x)$.

Claramente f es meromorfa y $p_*(\varrho_\eta(f)) = [\varrho_\eta(f) \cdot p^{-1}]_{p(\eta)} = [g]_x = \eta \quad \forall \eta \in Y$

Si hacemos $b = \varphi$ ya tenemos la prolongación buscada

Tenemos que demostrar que es maximal

Sea (Z, q, g, c) otra prolongación meromorfa de φ . Para definir $F : Z \rightarrow Y$ sea $z \in Z, q(z) = x$ por el lema 6.3.1 tenemos que $q_*([g]_z)$ es la prolongación meromorfa de φ a lo largo de una curva γ que va desde a hasta x . Como Y , por la proposición 6.2.2, consiste en todos los germenos obtenidos a partir de φ por prolongación meromorfa a lo largo de curvas existe $\eta \in Y$ tal que $q_*([g]_z) = \eta$ definimos $F(z) = \eta$

Es fácil comprobar que F es holomorfa $f \circ F = g$ y $F(c) = \varphi$ □

OBSERVACIÓN. *Dada g meromorfa en X el lema 6.3.1 permite considerar a (Y, p, f, b) maximal como una prolongación meromorfa de g si lo es de $[g]_x$ para algún $x \in X$*

En algunos casos, como el de las funciones algebraicas que ahora veremos, todavía es posible “ampliar” la superficie de Riemann utilizando espacios de recubrimiento ramificados la clave es el teorema 5.3.10.

Si consideramos los distintos puntos $x \in X$ vemos que darán lugar a n funciones meromorfas $c_i \in \mathcal{M}(X)$ que se denominan *funciones simétricas elementales asociadas a f respecto a π*

Esto es posible debido a que la numeración asignada a las preimágenes no afecta a las funciones simétricas elementales (esto no se podría hacer si hubiera menos de n preimágenes, pues no sabríamos, si hay más de una, cual coger repetida)

NOTA. *Vamos por tanto a considerar el anillo de los polinomios $\mathcal{M}(X)[T]$. Como $\mathcal{M}(X)$ es un cuerpo $\mathcal{M}(X)[T]$ será un dominio euclídeo [GamboaACC].*

Al polinomio mónico $T^n + c_{n-1}(x)T^{n-1} + \dots + c_0(x) \in \mathcal{M}(X)[T]$ que tiene como coeficientes las funciones elementales simétricas asociadas a f lo denotamos p_f .

OBSERVACIÓN. *f será la extensión en $\mathcal{M}(Y)$ correspondiente al polinomio $p_f \in \mathcal{M}(X)[T]$*

Supongamos ahora que tenemos un cubrimiento ramificado $\pi : Y \rightarrow X$ el conjunto de valores críticos será un conjunto discreto y cerrado, y excepto en dichos valores la construcción anterior sigue siendo válida. Vamos a ver que la extensión de una función meromorfa equivale a la extensión de las funciones elementales simétricas asociadas

TEOREMA 6.4.1. *Sean X, Y superficies de Riemann $\pi : Y \rightarrow X$ un cubrimiento ramificado de n hojas. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado y discreto que contiene todos los valores críticos de π y $B = F^{-1}(A)$. Supongamos que f es una función meromorfa en $Y - B$ y c_1, \dots, c_n las funciones simétricas elementales asociadas a f respecto a $\pi|_{Y-B}$ ($c_i \in \mathcal{M}(X)$). Entonces f tiene una prolongación meromorfa a Y si y sólo si las c_j tienen una prolongación meromorfa a X*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in A$ y $\{b_1, \dots, b_m\} = \pi^{-1}(a)$. Consideremos un sistema de coordenadas (U, z) centrado en a ($z(a) = 0$) tal que U sea relativamente compacto y tal que $U \cap A = \{a\}$. Entonces $V = \pi^{-1}(U)$ es un entorno relativamente compacto de cada b_j

Supongamos que existe una prolongación meromorfa de f a todos los b_j la función $\varphi = z.\pi$ se anula en todos los b_j y existirá $s > 0$ tal que $\varphi^s f$ es una función analítica que puede prolongarse analíticamente a los b_j .

Las funciones simétricas elementales asociadas a $\varphi^s f$ estarán definidas en $U - \{a\}$ donde valdrán $c_j z^{sj}$ y estarán acotadas (puesto que se puede prolongar $\varphi^s f$) luego podrá evitarse la singularidad en a y las c_j serán prolongables meromorfamente a a .

Supongamos ahora que las c_j son prolongables meromórficamente a a existe $s > 0$ tal que las $c_j z^{sj}$ pueden prolongarse analíticamente a a . Esto implica que están acotadas en $U - \{a\}$ y como

$$(\varphi^s f^n)(y) + c_{n-1}(z)(\varphi^s f^{n-1})(y) + \dots + c_0(z) = 0 \quad y \in V - \{b_1, \dots, b_m\}$$

$\varphi^s f$ estará acotada en $V - \{b_1, \dots, b_m\}$ y podran evitarse las singularidades en b_1, \dots, b_m . Por tanto $\varphi^s f$ tiene prolongación analítica a V y f prolongación meromorfa. \square

OBSERVACIÓN. *No se ha empleado para nada que Y sea conexa. Por tanto el resultado se mantendría si definimos $Y = \bigcup_{i=1}^K Y_i$ siendo cada Y_i una superficie de*

Riemann $\pi_i : Y_i \rightarrow X$ un cubrimiento ramificado de n_i hojas ($\sum_{i=1}^K n_i = n$) f_i meromorfas en Y_i y las $c_j(p)$ las funciones simétricas elementales asociadas a los valores $f_1(\pi_1^{-1}(p)), \dots, f_K(\pi_K^{-1}(p))$ (n valores)

TEOREMA 6.4.2. *Sean X, Y superficies de Riemann $\pi : Y \rightarrow X$ un cubrimiento ramificado de n hojas. Si $f \in \mathcal{M}(Y)$ y $c_j \in \mathcal{M}(X)$ son las funciones simétricas elementales asociadas a f se cumple*

$$f^n(y) + f^{n-1}(y)((\pi^*(c_{n-1}))(y)) + f^{n-2}(y)((\pi^*(c_{n-2}))(y)) + \dots + \pi^*(c_0)(y) = 0$$

(Como f es obviamente prolongable a $\mathcal{M}(Y)$ (de hecho pertenece) las funciones elementales simétricas existen en todo X por el teorema anterior)

DEMOSTRACIÓN. Se deduce directamente de la definición de las funciones c_i

□

OBSERVACIÓN. La expresión anterior es justamente la evaluación del polinomio $p_f \in \mathcal{M}(X)[T]$ en $\mathcal{M}(Y)$ mediante $f \in \mathcal{M}(Y)$, indica por tanto que no hay ningún elemento en $\mathcal{M}(Y)$ que sea trascendente.

TEOREMA 6.4.3. Sean X, Y superficies de Riemann $\pi : Y \rightarrow X$ un cubrimiento ramificado de n hojas. El monomorfismo $\pi^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ es una extensión algebraica de cuerpos de grado n

NOTA. Para la demostración de este teorema supondremos que para la superficie de Riemann Y existe una función meromorfa f que toma n valores distintos en las n preimágenes de algún punto $x \in X$. Este resultado que está lejos de ser trivial se analiza en el capítulo 8 y concretamente en el teorema 8.6.3.

DEMOSTRACIÓN. Dada cualquier $f \in \mathcal{M}(y)$ por la proposición anterior hemos visto que no es trascendente, y que su polinomio mínimo tiene grado menor o igual que n

Sea $f_0 \in \mathcal{M}(Y)$ tal que su polinomio mínimo tenga grado máximo n_0 y consideremos cualquier extensión finita por dos elementos: f_0 y cualquier $f \in \mathcal{M}(Y)$ (es decir la extensión $\mathcal{M}(X)[f_0, f]$)

Por el teorema del elemento primitivo (toda extensión finita y separable está generada por un único elemento) existirá f_1 tal que

$$\mathcal{M}(X)[f_0, f] = \mathcal{M}(X)[f_1]$$

y por la forma de elegir f_0 el polinomio p_{f_1} tendrá grado $\leq n_0$.

Como $\dim_{\mathcal{M}(X)} \mathcal{M}(X)[f_0, f] \geq \dim_{\mathcal{M}(X)} \mathcal{M}(X)[f_0] = n_0$ y $\dim_{\mathcal{M}(X)} \mathcal{M}(X)[f_0, f] = \dim \mathcal{M}(X)[f_1] \leq n_0$ debe cumplirse $\forall f \in \mathcal{M}(Y) \quad \mathcal{M}(X)[f_0, f] = \mathcal{M}(X)[f_0]$ luego $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(X)[f_0]$.

Dado que n_o es el mayor grado de los p_f esto quiere decir que el conjunto $f(\pi^{-1}(x))$ tiene a lo sumo n_o elementos para cualquier x y cualquier f y como existe un f y un x para los que este valor es n tenemos $n_o = n$ \square

6.4.2. Funciones algebraicas.

Vamos a demostrar unos lemas previos sobre funciones holomorfas en discos de \mathbb{C}

LEMA 6.4.1. Sean $c_{n-1}(z), \dots, c_0(z)$ funciones holomorfas en $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ y supongamos que w_0 es un cero simple del polinomio mónico $T^n + c_{n-1}(0)T^{n-1} + \dots + c_0(0) \in \mathbb{C}[T]$. Entonces existe $0 < \varepsilon < r$ y una función holomorfa $h \in \mathcal{O}(D_\varepsilon)$ tal que

$$\forall z \in D_\varepsilon \quad h^n(z) + c_{n-1}(z)h^{n-1}(z) + \dots + c_0(z) = 0 \quad \text{y} \quad h(0) = w_0$$

DEMOSTRACIÓN. Dados $z \in D_r$ y $w \in \mathbb{C}$ sea $F(z, w) = w^n + c_{n-1}(z)w^{n-1} + \dots + c_0(z)$

$F(0, w)$ es una función holomorfa con un cero simple en w_0 . Existirá $\delta > 0$ tal que es el único cero en $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| \leq \delta\}$

Como F considerada función de dos variables es continua existirá una región $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \varepsilon, |w - w_0| = \delta\}$ en la que F no se anula y estará definida

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=\delta} \frac{\frac{\partial F}{\partial w}(z, w)}{F(z, w)} dw$$

que proporciona el número de ceros en el interior del recinto $|w - w_0| = \delta$ de $F(z, w)$ considerada como función de w (en general número de ceros - número de polos pero al ser holomorfa no tiene polos).

Como $n(0) = 1$ y $n(z)$ es una función continua de z (que sólo toma valores enteros) tenemos $\forall z \in D_\varepsilon \quad n(z) = 1$. Denotaremos como w_z el valor de dicho cero simple.

Consideremos ahora la función $w \frac{\partial F}{\partial w}(z, w) / F(z, w)$ (z fijo). Tendrá un polo en ω_z (al ser cero simple $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ en ω_z).

Por el teorema del residuo tendremos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=\delta} w \frac{\partial F}{\partial w} dw = \text{Res}_{w_z} \left(w \frac{\partial F}{\partial w} \right)$$

Como w_z es cero simple podremos poner $F(z, w) = (w-w_z)G(z, w)$ siendo $G(z, w) \neq 0$ y holomorfa en el recinto de interés. Entonces

$$\text{Res}_{w_z} \left(w \frac{\partial F}{\partial w} \right) = \lim_{w \rightarrow w_z} (w-w_z) w \frac{G(z, w) + (w-w_z) \frac{\partial G}{\partial w}(z, w)}{(w-w_z)G(z, w)} = w_z$$

Por tanto definiendo

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=\delta} w \frac{\partial F}{\partial w} dw$$

tendremos la función buscada. \square

LEMA 6.4.2. *Sea \mathcal{O}_x el anillo de los gérmenes de funciones holomorfas en $x \in X$ (X superficie de Riemann) y sea $p(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_0 \in \mathcal{O}_x[T]$ tal que el polinomio $T^n + c_{n-1}(x)T^{n-1} + \dots + c_0(x) \in \mathbb{C}[T]$ tenga n raíces distintas w_1, \dots, w_n . Existen gérmenes distintos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}_x$ tales que $\varphi_i(x) = w_i$ y $p(T) = \prod (T - \varphi_i)$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una carta (U, z) centrada en x y tal que $z(U)$ sea un disco y $c_i = [f_i]_x$ siendo las f_i holomorfas en U .

Definimos las funciones $d_i : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$ $d_i = f_i \cdot z^{-1}$, serán funciones holomorfas en $z(U)$ y tendremos por hipótesis

$$T^n + d_{n-1}(0)T^{n-1} + \dots + d_0(0) \quad \text{tiene raíces } w_1, \dots, w_n$$

Por el lema anterior existiran funciones h_i (una por cada cero w_i) $h_i(0) = w_i$ holomorfas en V , $z(x) \in V \subset z(U)$ tales que

$$p(h_i(z)) = 0 \text{ en } V$$

luego $P(T) = \prod (T - h_i)$ en V y considerando los gérmenes $\varphi_i = [h_i \cdot z]_x$ tenemos el resultado. \square

TEOREMA 6.4.4. *Sea X una superficie de Riemann y $p(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_0 \in \mathcal{M}(X)[T]$ un polinomio mónico irreducible de grado n . Existe una superficie de Riemann Y un cubrimiento ramificado de n hojas $\pi : Y \rightarrow X$ y una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ tal que*

$$(\pi^*p)(f) = 0 \quad \text{es decir} \quad f + (\pi^*(c_{n-1}))f^{n-1} + \dots + \pi^*(c_0) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Delta \in \mathcal{M}(X)$ el discriminante de $p(T)$ si fuera idénticamente nulo $p(T)$ sería reducible (ver [GamboaACC]). Por tanto siendo un polinomio sólo se anula en un número finito de puntos y existe un conjunto cerrado y discreto $A \subset X$ tal que fuera de él ($X - A$) las funciones c_i son holomorfas y $\Delta(x) \neq 0$

En $X - A$ (ver [GamboaACC]) $p(T)$ tiene n ceros distintos.

Consideremos el espacio topológico de gérmenes holomorfos $|\mathcal{O}|$ sea $Y' = \{\varphi \in |\mathcal{O}| : p(\varphi) = 0\}$ y sea π' la restricción de $\pi : |\mathcal{O}| \rightarrow X$ a Y'

Por el lema anterior $\forall x \in X'$ existe un entorno $U \subset X'$ y funciones holomorfas distintas $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ tales que

$$p(T) = \prod_{i=1}^n (T - f_i(x)) \quad \text{en } U$$

Tendremos que $\pi'^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n [U, f_i]$ siendo los abiertos $[U, f_i]$ disjuntos y $\pi'|_{[U, f_i]}$ un homeomorfismo por tanto $\pi' : Y' \rightarrow X'$ es un espacio recubridor

Las componentes conexas de Y' serán superficies de Riemann y la restricción de π' a las mismas será una aplicación recubridora (lema 3.4.2)

Definimos $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ $f([g]_x) = g(x)$ entonces f es holomorfa y por la forma de definir Y'

$$\forall \varphi \in Y' \quad f^n(\varphi) + c_{n-1}(\pi'(\varphi))f^{n-1}(\varphi) + \dots + c_0(\pi'(\varphi)) = 0$$

Por el teorema 5.3.10 podemos extender π' a un cubrimiento ramificado $\pi : Y \rightarrow X$

Como las funciones c_n están definidas en X (por tanto se pueden extender de X' a X) aplicando el teorema 6.4.1 vemos que f se puede extender a Y cumpliéndose

$$\forall \varphi \in Y \quad f^n(\varphi) + c_{n-1}(\pi(\varphi))f^{n-1}(\varphi) + \dots + c_0(\pi(\varphi)) = 0$$

En realidad Y tiene una sola componente conexa porque si tuviera varias Y_1, \dots, Y_k cada una de ellas daría lugar a una aplicación recubridora $\pi|_{Y_j}$ de n_j hojas ($\sum n_j = n$) y usando las funciones simétricas elementales asociadas a cada $f|_{Y_i}$ habría polinomios $p_j \in \mathcal{M}(X)[T]$ de grado n_j tales que $p(T) = p_1(T)\dots p_k(T)$ y $p(T)$ no sería irreducible. \square

TEOREMA 6.4.5. *El trío (Y, π, f) es único en el siguiente sentido, si existe otro (Z, ς, g) con las mismas características existe una aplicación biholomorfa $\sigma : Z \rightarrow Y$ que conserva las fibras $(\varsigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(\pi^{-1}(x)))$ y tal que $g = f \cdot \sigma$*

DEMOSTRACIÓN. Sean X', Y', A como en el teorema anterior y sea $B \subset Z$ la unión de los polos de g y los puntos de ramificación de ς denotamos

$$A' = \varsigma(B) \quad X'' = X' - A' \quad Y'' = \pi^{-1}(X'') \quad Z'' = \varsigma^{-1}(X'')$$

Definimos $\sigma'' : Z'' \rightarrow Y''$ del siguiente modo

Sea $z \in Z''$ $\varsigma(z) = x$ y $\varphi = \varsigma_*([g]_z) \in \mathcal{O}_x$ ver definición 6.3.1 entonces $p(\varphi) = 0$ y por tanto $\varphi \in Y'$. Hacemos $\sigma''(z) = \varphi$

Como π, ς son holomorfas y propias también lo será σ'' luego será suprayectiva (ver teorema 5.3.7)

Como π y ς tienen el mismo número de hojas σ'' es biholomorfa y se tiene $g|_{Z''} = f|_{Y''} \cdot \sigma$

Por el teorema 5.3.11 puede extenderse a $\sigma : Z \rightarrow Y$ de forma que $g = f \cdot \sigma$ \square

Al trío (Y, π, f) se le denomina función algebraica definida por $p(T)$

6.5. Funciones multiformes en la esfera de Riemann

La idea original de las superficies de Riemann fue tratar de convertir las funciones “multivaluadas” como $z^{\frac{1}{2}}$ en funciones univaluadas cambiando el dominio de definición del plano \mathbb{C} a otra superficie.

Aplicando los resultados anteriores al caso de las funciones meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$ y vamos a ver que toda superficie de Riemann compacta se puede considerar como la función algebraica asociada a un determinado polinomio.

En efecto sea X una superficie de Riemann compacta y consideremos dos funciones holomorfas no constantes $\pi, f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ (la existencia de dichas funciones se verá en el capítulo 8).

Al ser X compacta π es una aplicación propia y por tanto un recubridor, en general ramificado, de n hojas.

Si consideramos las funciones simétricas elementales $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ asociadas a f tendremos definido un polinomio mónico

$$p(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_0$$

Entonces (X, π, f) es una función algebraica definida por $p(T)$.

Como vemos esta construcción no será única pues depende de las funciones π, f

Este resultado es el recíproco del teorema 6.4.4 y de este modo si llamamos $A = \{(X, \pi, f)\}$ siendo X compacta π, f meromorfas y \sim la relación de equivalencia definida por el teorema 6.4.5 tenemos

$$A / \sim \equiv \{p \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})[T] : p \text{ mónico e irreducible}\}$$

6.6. Recubrimientos de Galois y Extensiones de Galois

Sean X, Y superficies de Riemann y $\pi : Y \rightarrow X$ un cubrimiento ramificado holomorfo. Para cada $\sigma \in Deck_\pi(Y, X)$ y cada $f \in \mathcal{M}(Y)$ tenemos que $f \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{M}(Y)$. La correspondencia $f \rightarrow f \circ \sigma^{-1}$ es evidentemente un automorfismo de $\mathcal{M}(Y)$.

Así se puede definir una aplicación

$$\Lambda : Deck_{\pi}(Y, X) \rightarrow Aut(\mathcal{M}(Y))$$

que es un homomorfismo de grupos

$$\Lambda(\sigma\tau)(f) = f.(\sigma\tau)^{-1} = f.\tau^{-1}.\sigma^{-1} = (\Lambda(\tau)(f)).\sigma^{-1} = \Lambda(\sigma)(\Lambda(\tau)(f))$$

Por ser σ una transformación recubridora el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

tenemos que si $g \in \pi^*(\mathcal{M}(X))$, es decir $g = f.\pi$, $f \in \mathcal{M}(X)$, $g.\sigma^{-1} = f.\pi.\sigma^{-1} = f.\pi = g$

Por tanto $\forall \sigma \in Deck_{\pi}(Y, X)$ $\Lambda(\sigma)$ deja invariante $\pi^*(\mathcal{M}(X)) \subset \mathcal{M}(Y)$ luego es un elemento del grupo de Galois

$$Aut(\mathcal{M}(Y))/\pi^*(\mathcal{M}(X))$$

TEOREMA 6.6.1. *Sea X una superficie de Riemann, $p(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ un polinomio mónico irreducible de grado n , y sea (Y, π, f) la función algebraica definida por $p(T)$. Entonces la extensión de cuerpos $\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)$ es de grado n y $\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(X)[T]/p(T)$. Cada transformación recubridora $\sigma \in Deck_{\pi}(Y, X)$ induce un automorfismo $\Lambda(\sigma) \in Aut(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$ (dejando fijo $\pi^*(\mathcal{M}(X))$). La aplicación así definida*

$$\Lambda : Deck_{\pi}(Y, X) \rightarrow Aut(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$$

es un isomorfismo de grupos. El cubrimiento ramificado $\pi : Y \rightarrow X$ es Galois si y sólo si la extensión $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$ es de Galois

DEMOSTRACIÓN. Que $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$ es de grado n se deduce directamente de los teoremas 6.4.3 y 6.4.4. Como $p(f) = 0$ existe un homomorfismo $\mathcal{M}(X)[T]/p(T) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ y como ambas extensiones son de grado n es un isomorfismo.

Como $f \cdot \sigma^{-1} \neq f$, salvo que $\sigma = id$, tenemos que el núcleo de Λ es la identidad, luego Λ es inyectiva.

Sea $\alpha \in Aut(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$ entonces $(Y, \pi, \alpha.f)$ es también una función algebraica definida por $p(t)$ y por el teorema 6.4.5 existe $\vartheta \in Deck_\pi(Y, X)$ tal que $\alpha.f = f \cdot \vartheta$ luego considerando $\Lambda(\vartheta^{-1})$ tendremos $\Lambda(\vartheta^{-1})(f) = f \cdot \vartheta = \alpha.f$ y por tanto Λ es suprayectiva.

Que la extensión sea de Galois equivale a que $Aut(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$ tenga n elementos y que π sea de Galois a que $Deck_\pi(Y, X)$ tenga n elementos, y acabamos de ver que son isomorfos. \square

6.7. Ejemplos

Al analizar los ejemplos es necesario tener en cuenta que la superficie de Riemann asociada a un polinomio se construye como una componente conexa del espacio de los gérmenes y con $k \leq grado(p)$ puntos “ideales” sobre cada punto de ramificación.

EJEMPLO 6.7.1. Sea $f(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n)$ polinomio de $\mathbb{C}[T]$ con n raíces distintas considerado como función meromorfa en la esfera de Riemann $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. El polinomio $T^2 - f(z)$ es mónico irreducible en $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})[T]$ y define una función algebraica que se denota como $\sqrt{f(z)}$ Su superficie de Riemann $\pi : Y \rightarrow X$ se puede describir como sigue:

$$\text{Sean } A = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{\infty\} \quad X' = \widehat{\mathbb{C}} - A \quad Y' = \pi^{-1}(X')$$

Para cada $x \in X'$ consideremos D_x el mayor disco abierto de centro x y contenido en X'

Existen dos únicas funciones h_{1x}, h_{2x} holomorfas en D_x tales que

$$h_{1x}^2(z) = h_{2x}^2(z) = f(z) \text{ en } D_x \quad \text{además } h_{1x}(z) = -h_{2x}(z)$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ consideremos un disco abierto D_j en \mathbb{C} con centro en a_j y tal que $a_k \notin D_j$ $j \neq k$. La función $g_j(z) = \prod_{k \neq j} (z - a_k)$ no tiene ceros en D_j (simplemente conexo) luego existe una función holomorfa h_j tal que $g_j(z) = h_j^2(z)$ en D_j y por tanto

$$f(z) = (z - a_j)h_j^2(z) \quad \text{en } D_j$$

Dado un elemento $a \in D_j$ $a \neq a_j$ en $D_a \cap D_j$ se tiene

$$h_{1a}^2(z) = (z - a_j)h_j^2(z) \quad h_{2a}^2(z) = (z - a_j)h_j^2(z) \quad \text{en } D_a \cap D_j$$

por tanto las funciones $l_1 = \frac{h_{1a}}{h_j}$ $l_2 = \frac{h_{2a}}{h_j}$ son las dos ramas analíticas de $\sqrt{z - a_j}$ en $D_a \cap D_j$. Como los gérmenes $[l_1]_a, [l_2]_a$ son prolongación analítica uno de otro a lo largo de una circunferencia de centro a_j y radio $|a - a_j|$ también los gérmenes $[h_{1a}]_a, [h_{2a}]_a$ son también prolongación uno de otro a lo largo de dicha circunferencia.

Sean $D_j^* = D_j - \{a\}$ y $V_j^* = \pi^{-1}(D_j^*)$ entonces $\pi|_{V_j^*}$ es una aplicación recubridora (sin ramificar) conexa de dos hojas y por lo que hemos visto en el teorema 5.3.10 la superficie Y tiene exactamente un punto ideal sobre a_j (que no corresponderá a ningún germen)

Consideremos ahora $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

$$\text{y } D_\infty^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

En D_∞^* podemos poner $f(z) = z^n g(z)$ siendo $g(z)$ holomorfa y sin ceros.

Si n es par existe en D_∞^* una función holomorfa h tal que $f(z) = zh^2(z)$ y estaremos en el mismo caso de antes, o sea $\pi|_{\pi^{-1}(D_\infty^*)}$ es una aplicación recubridora de dos hojas, por lo que Y tendrá exactamente un punto ideal sobre ∞ .

Si n es impar existe en D_∞^* una función holomorfa h tal que $f(z) = h^2(z)$ por lo que $\pi|_{\pi^{-1}(D_\infty^*)}$ será una aplicación recubridora de una hoja y la superficie Y tendrá dos puntos sobre ∞ .

Para ver una interpretación geométrica consideremos el caso concreto $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$

. Si cortamos la esfera de Riemann a lo largo de dos caminos disjuntos

$$\begin{cases} \gamma & \text{de } a \text{ hasta } b \\ \delta & \text{de } c \text{ hasta } \infty \end{cases}$$

Para cada punto de $\widehat{\mathbb{C}} - \gamma^* - \delta^*$ tendremos dos gérmenes por lo que la superficie de Riemann constará de dos esferas a las que a cada una le faltan dos caminos circulares (al "abrir" los bordes de γ^* y δ^*) pegando los bordes abiertos obtenemos un toro (esfera con 1 asa)

Analogamente para el caso $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ (ahora ∞ soportaría dos gérmenes y no sería crítico)

Para el caso $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e)}$ tendríamos (con ∞) dos esferas con tres cortes cada una que darían lugar al pegarlos a una esfera con dos asas. En general si $f(z)$ tiene grado n la superficie de Riemann de $\sqrt{f(z)}$ es una esfera con

$$\begin{cases} \frac{n+1}{2} - 1 & n \text{ impar} \\ \frac{n}{2} - 1 & n \text{ par} \end{cases}$$

asas.

Esto se puede ver también con la fórmula de Hurwitz

$$2g(\mathcal{R}) - 2 = -2dg(T) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(T) - 1) \quad g(\mathcal{R}) = 1 - 2 + \frac{1}{2}(1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n}{2} - 1 \quad n \text{ par}$$

$$2g(\mathcal{R}) - 2 = -2dg(T) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(T) - 1) \quad g(\mathcal{R}) = 1 - 2 + \frac{1}{2}(1(\infty) + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n+1}{2} \quad n \text{ impar}$$

EJEMPLO 6.7.2. Sea $p(z, T) = T^3 - 3T - z \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})[T]$ vamos a analizar la función algebraica asociada (con terminología clásica sería $w = w(z)$ multivaluada cumpliendo $p(z, w) = 0$)

El polinomio es irreducible pues si no lo fuera tendríamos

$$T^3 - 3T - z = (T + A)(T^2 + BT + C)$$

Siendo A, B, C funciones meromorfas que deben cumplir $A + B = 0$, $C + AB = 3$, $CA = -z$ y por tanto $B = -A$, $C = 3 - A^2$ y $-z = 3A - A^3$ luego A es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que

$$A^3(z) - 3A(z) - z = 0$$

A ha de ser holomorfa en \mathbb{C} y tener un polo en ∞ tal que el orden del polo de $A^3(z) - 3A(z)$ sea 1 (como el de z) pero si $A(z)$ tiene un polo de orden n en ∞ $A^3(z) - 3A(z)$ lo tiene de orden $3n$ y por tanto es imposible.

El conjunto de puntos a tales que $p(a, T)$ admite raíces múltiples se obtiene de resolver el sistema

$$\begin{cases} T^3 - 3T - a = 0 \\ 3T^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

por tanto $T = \pm 1$ y $a = \mp 2$

Así el conjunto de posibles puntos sobre los que no existirán 3 gérmenes es $E = \{-2, 2, \infty\}$ y la función $w(z)$ será estrictamente 3_valuada en $\widehat{\mathbb{C}} - E$.

Consideremos un disco abierto D en $\widehat{\mathbb{C}}$ centrado en ∞ (sin contener a -2 y 2) y un germen $[f]_a$ con soporte en $D^* = D - \{\infty\}$.

Si $[f]_a$ fuera arbitrariamente prolongable en D (si lo será en D^*) f sería una función meromorfa en D y tendríamos

$$\forall z \in D \quad f^3(z) - 3f(z) - z = 0$$

que ya hemos visto que es imposible. Por tanto no hay ningún germen sobre ∞ y es punto de ramificación de orden 2

Consideremos ahora un disco D en \mathbb{C} centrado en 2 (sin contener a -2) y un germen $[f]_a$ con soporte en D^*

Supongamos que es arbitrariamente prolongable. Habrá una función meromorfa en D tal que

$$\forall z \in D \quad f^3(z) - 3f(z) - z = 0 \quad f^3(2) - 3f(2) - 2 = 0$$

luego $f(2) = 2$ o $f(2) = -1$. Derivando

$$\forall z \in D \quad 3f'(z)f^2(z) - 3f'(z) - 1 = 0$$

y por tanto si $f(2) = 2, f'(2) \neq 0$ luego f será inyectiva en un entorno abierto $V \subset D$ de 2. La función inversa de f en V se obtiene considerando $z = f^{-1}(w)$ y tendremos $w^3 - 3w - z = 0$ luego $z = f^{-1}(w) = w^3 - 3w$

La función $h(w) = w^3 - 3w$ es holomorfa en D y $h(2) = 2, h'(2) = 9$ luego h admite inversa local y si g es la inversa de h cumplirá $g(z)^3 - 3g(z) - z = 0$ en un entorno abierto W de 2 contenido en D

Sin embargo si $f(2) = -1$ considerando la derivada tendríamos $-1 = 0$ imposible.

Así que tenemos un germen $[g]_2$ sobre 2 y se necesita un punto ideal sobre el mismo (necesitaría tener 3 gérmenes soportados en 2) por tanto -1 es de ramificación de orden 1.

Analogamente para el caso de -2

Si aplicamos la fórmula de Hurwitz tendríamos

$$2g(\mathcal{R}) - 2 = -2dg(T) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(T) - 1) \quad g(\mathcal{R}) = 1 - 3 + \frac{1}{2}(2 + 1 + 1) = 0$$

y vemos que sería homeomorfa a la esfera de Riemann

EJEMPLO 6.7.3. Sea $p(z, T) = T^4 - 2T^2 + 1 - z$ si fuera reducible $(T + A)(T^3 + BT^2 + CT + D)$ y A (meromorfa) debería cumplir

$$A^4 - 2A^2 + 1 - z = 0$$

Lo que es imposible por el comportamiento en el ∞

En el infinito el comportamiento es como $T^4 - z$ luego hay un punto de orden de ramificación 3

Para ver los otros puntos de ramificación consideramos la derivada $4T^3 - 4T = 0$ y tenemos $\{0, 1, -1\}$ que estarán sobre los puntos $\{1, 0, 0\}$

$z = 1$)

Si hubiera un germen arbitrariamente prolongable al entorno sin puntear existiría

$$f^4 - 2f^2 + 1 - z = 0 \quad f^4(1) - 2f^2(1) = 0$$

Esto implica $f(1) = 0$ o $f(1) = \pm 2$ Derivando $4f^3 f' - 4f f' - 1 = 0$ y si $f(1) = 0$ tendríamos $-1 = 0$ imposible.

Si $f(1) = 2$ tendremos $f'(1) = \frac{1}{24}$ y será inyectiva y por el mismo razonamiento que antes existe un germen. Caso análogo para $f(1) = -2$

$z = 0$)

Si hubiera un germen arbitrariamente prolongable en un entorno sin puntear existiría

$$f^4 - 2f^2 + 1 - z = 0 \quad f^4(0) - 2f^2(0) = -1$$

Esto implica $f(0) = \pm 1$ (dobles) Derivando $4f^3 f' - 4f f' - 1 = 0$ lo que es imposible y tenemos dos puntos de ramificación cada uno de orden 1

Aplicando la fórmula de Hurwitz tendremos

$$2g(\mathcal{R}) - 2 = -2dg(T) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(T) - 1) \quad g(\mathcal{R}) = 1 - 4 + \frac{1}{2}(3 + 1 + 1 + 1) = 0$$

y es homeomorfa a la esfera.

Formas diferenciales e Integración en Superficies de Riemann

7.1. Formas holomorfas y meromorfas

Una forma diferencial en una superficie de Riemann X es un campo de tensores alternados en el fibrado cotangente.

Tendremos por tanto 1_formas y 2_formas (dado que la dimensión del espacio es 2 y no hay tensores alternados de rango 3).

Dada una carta (U, z) una 1_forma ω será en U $\omega = f dz + g d\bar{z}$ y una 2_forma $\alpha = f dz \wedge d\bar{z}$.

Si tenemos cartas (U, z) y (V, w) y $\omega = f dz + g d\bar{z}$ tendremos en $U \cap V$, por la fórmula de cambio de coordenadas en una variedad y siendo $z = T(w)$ (como coordenadas, o $T = z.w^{-1}$ como funciones) se verifica

$\omega = f(\frac{\partial T}{\partial w} dw + \frac{\partial T}{\partial \bar{w}} d\bar{w}) + g(\frac{\partial \bar{T}}{\partial w} d\bar{w} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{w}} dw) = f \frac{\partial T}{\partial w} dw + g \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{w}} d\bar{w}$ pues $T = z.w^{-1}$ ha de ser holomorfa (transición de cartas).

La fórmula de cambio de coordenadas para 2_formas hace que $\alpha = f dz \wedge d\bar{z} = f ||T||^2 dw \wedge d\bar{w}$

7.1.1. Tipos de 1_formas.

Hemos visto que una 1_forma general será (en el dominio de una carta (U, z)) del tipo

$$\omega = f dz + g d\bar{z}$$

Si f y g son C^∞ en $z(U)$ (como funciones de dos variables, se denotara $f, g \in \mathcal{E}(U)$), se dice que la 1-forma es suave en U . Al conjunto de las 1-formas suaves en U se le denota por $\mathcal{E}^1(U)$.

Si $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ se expresa como $\omega = f dz$ se dice que es de tipo $(1, 0)$ y al subconjunto de dichas formas se le representa por $\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$ análogamente si $\omega = g d\bar{z}$ se dice que es de tipo $(0, 1)$ y al subconjunto correspondiente se la denota $\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$

Es trivial comprobar que el tipo de una 1-forma no depende de la carta elegida.

Dentro de las 1-formas pertenecientes a $\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$ tenemos el subconjunto de las 1-formas holomorfas que son aquellas $\omega = f dz$ tales que f es holomorfa (es decir que no depende de \bar{z}) este subconjunto se denota por $\Omega^1(U)$ (como antes es independiente de la carta). Análogamente en $\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$ se define el subconjunto de las 1-formas antiholomorfas que son aquellas $\omega = \bar{g} d\bar{z}$ tales que g es holomorfa este subconjunto se denota por $\bar{\Omega}^1(U)$

También se definen las 1-formas meromorfas que son aquellas $\omega = f dz$ donde f es una función meromorfa. Al conjunto de las mismas se le denota por $\mathcal{M}^1(U)$ y evidentemente $\Omega^1(U) \subset \mathcal{M}^1(U)$. Ampliaremos la definición de $\mathcal{E}^1(U)$ (permitiendo la no definición en un conjunto cerrado y discreto de puntos) de forma que $\mathcal{M}^1(U) \subset \mathcal{E}^{(1,0)}(U)$.

Dada una función f holomorfa en U podemos definir una 1-forma df como $df = \frac{d(f \cdot z^{-1})}{dz} dz$ en U . Evidentemente si tenemos otra carta (V, w) en $U \cap V$ se tiene

$$df = \frac{d(f \cdot z^{-1})}{dz} dz = \frac{d(f \cdot w^{-1} \cdot w \cdot z^{-1})}{dz} dz = \frac{d(f \cdot w^{-1})}{dw} \frac{d(w \cdot z^{-1})}{dz} dz$$

y aplicando la fórmula de cambio de coordenadas de las 1-formas

$$df = \frac{d(f \cdot w^{-1})}{dw} \frac{d(w \cdot z^{-1})}{dz} \frac{d(z \cdot w^{-1})}{dw} dw = \frac{d(f \cdot w^{-1})}{dw} dw$$

por el teorema de la función inversa. De esta forma vemos que df está bien definida en U y que produce una 1-forma holomorfa $df \in \Omega^1(U)$.

DEFINICIÓN 7.1.1. Si $f(z, \bar{z}) \in \mathcal{E}(U)$ definimos $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ y $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ es sencillo comprobar que las definiciones no dependen de las coordenadas elegidas y dan lugar a 1_formas pertenecientes a $\mathcal{E}^{(1,0)}$ y a $\mathcal{E}^{(0,1)}$ respectivamente.

Tenemos que $df = \partial f + \bar{\partial} f$ y si f holomorfa $\bar{\partial} f = 0$ (Cauchy Riemann)

NOTA. A partir de ahora por abuso de notación escribiremos $\frac{\partial f}{\partial z}$ en lugar de $\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial z}$ y pondremos $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$

DEFINICIÓN 7.1.2. Sea $\omega = \mathcal{M}^1(U)$, $\omega = f dz$. Se define $ord_p(\omega) = ord_p(f)$, y se definen los polos y ceros de ω como los de f . También se define $mult_p(\omega) = mult_p(f)$

Es inmediato comprobar que las definiciones no dependen de la carta elegida

7.1.2. 2_formas.

Una 2_forma tendrá una expresión (en (U, z)) $\alpha = f dz \wedge d\bar{z}$ Si $f \in \mathcal{E}$ se dice que la 2_forma es suave.

Al conjunto de las 2_formas suaves se le denota por \mathcal{E}^2

DEFINICIÓN 7.1.3. Se definen los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ para 1_formas de $\mathcal{E}^1(U)$ expresadas como $\omega = f dz + g d\bar{z}$ mediante

$$\partial \omega = \partial f \wedge dz + \partial g \wedge d\bar{z} = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} \quad \bar{\partial} \omega = \bar{\partial} f \wedge dz + \bar{\partial} g \wedge d\bar{z} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

Es trivial comprobar que $d\omega = \partial \omega + \bar{\partial} \omega$

7.1.3. Haces asociados a formas.

Si consideramos dado cualquier abierto $O \subset X$ todas las definiciones y resultados anteriores pueden aplicarse sin dificultad considerando un conjunto de cartas (U_i, ϕ_i) que cubran O

Es inmediato comprobar que dan lugar a haces definidos en X . Por tanto tenemos definidos

- \mathcal{E} haz de funciones C^∞
- \mathcal{O} haz de funciones holomorfas
- \mathcal{M} haz de funciones meromorfas
- Ω^1 haz de 1_formas holomorfas
- $\bar{\Omega}^1$ haz de 1_formas antiholomorfas
- \mathcal{M}^1 haz de 1_formas meromorfas
- \mathcal{E}^1 haz de 1_formas suaves $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}$
- \mathcal{E}^2 haz de 2_formas suaves

7.2. Operaciones con formas diferenciales

DEFINICIÓN 7.2.1. Sea $f \in \mathcal{E}(X)$ y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ se define el producto $f\omega$ como la 1-forma tal que si en U se tiene $\omega = g_1 dz + g_2 d\bar{z}$ entonces $f\omega = fg_1 dz + fg_2 d\bar{z}$. Análogamente se define el producto cuando $\alpha \in \mathcal{E}^2(X)$.

PROPOSICIÓN 7.2.1. El producto de funciones por 1_formas tiene las siguientes propiedades

- Si ω es de tipo $(1,0)$ también $f\omega$ (análogamente si es de tipo $(0,1)$)
- Si ω es holomorfa y f también es holomorfa entonces $f\omega$ es holomorfa
- Si ω es meromorfa y f también es holomorfa entonces $f\omega$ es meromorfa
- Si ω es meromorfa y f también es meromorfa entonces $ord_p(f\omega) = ord_p(f) + ord_p(\omega)$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de las definiciones □

PROPOSICIÓN 7.2.2. Si $f, g \in \mathcal{E}(X)$ se tiene

$$d(fg) = fdg + gdf \quad \partial(fg) = f\partial g + g\partial f \quad \bar{\partial}(fg) = f\bar{\partial}g + g\bar{\partial}f$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de las definiciones □

El producto exterior de dos 1_formas diferenciales ω, ν será la 2_forma $\omega \wedge \nu$

$$\omega = fdz + gd\bar{z} \quad \nu = hdz + kd\bar{z} \quad \omega \wedge \nu = (fk - gh)dz \wedge d\bar{z}$$

La diferenciación exterior de la 1-forma ω será

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \quad d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

Si ω es holomorfa tendremos evidentemente que $d\omega = 0$

PROPOSICIÓN 7.2.3. *Sea $f \in \mathcal{E}(X)$ y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ se tiene*

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega \quad \partial(f\omega) = \partial f \wedge \omega + f \partial\omega \quad \bar{\partial}(f\omega) = \bar{\partial}f \wedge \omega + f \bar{\partial}\omega$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = g_1 dz + g_2 d\bar{z}$ tendremos $f\omega = fg_1 dz + fg_2 d\bar{z}$ y $d(f\omega) = \left(\frac{\partial f g_2}{\partial z} - \frac{\partial f g_1}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$ por otra parte $df \wedge \omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} g_2 - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g_1 \right) dz \wedge d\bar{z}$ y $f d\omega = \left(f \frac{\partial g_2}{\partial z} - f \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$ y tenemos la proposición. Las otras son análogas. \square

PROPOSICIÓN 7.2.4. $ddf = \partial\partial f = \bar{\partial}\bar{\partial}f = 0$ y $\partial\bar{\partial}f = -\bar{\partial}\partial f$

DEMOSTRACIÓN. $ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0$ las otras son análogas. \square

DEFINICIÓN 7.2.2. *Una 1-forma diferencial $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ se denomina cerrada si $d\omega = 0$ y exacta si $\omega = df$ para algún $f \in \mathcal{E}(X)$*

Hemos visto que las formas holomorfas son cerradas también se tiene que

PROPOSICIÓN 7.2.5. *Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ y es cerrada entonces es holomorfa*

DEMOSTRACIÓN. $\omega = f dz$ y $d\omega = 0 = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$ por tanto $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ que son las condiciones de Cauchy Riemann \square

PROPOSICIÓN 7.2.6. *Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1$ entonces $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{M}$*

DEMOSTRACIÓN. En cada carta (U, z) tendremos $\omega_1 = f_1 dz$ y $\omega_2 = f_2 dz$ siendo f_1 y f_2 meromorfas entonces $f = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2}$ en esa carta. Si ahora consideramos otra carta (V, w) en $U \cap V$ tenemos $\omega_1 = f_1 dz = f_1(z(w)) \frac{dz}{dw} dw$ y análogamente para ω_2 por lo que $f(z) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1(z(w))}{f_2(z(w))} = f(z(w))$ se comporta como una función. \square

7.2.1. “Pullback” de formas diferenciales. El “pullback” de formas diferenciales entre superficies de Riemann es un caso particular del “pullback” entre variedades analíticas

Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann, consideremos cartas (U, z) en X y (V, w) en Y , tales que $F(U) \subset V$, con función de transición $w = \tilde{F}(z)$ (o sea $\tilde{F} = w.F.z^{-1}$).

Dada $\omega \in \mathcal{E}^1(V)$ $\omega = f(w, \bar{w})dw + g(w, \bar{w})d\bar{w}$ su “pullback” $F^*(\omega) \in \mathcal{E}^1(U)$ viene dado por

$$F^*(\omega) = f(\tilde{F}(z), \overline{\tilde{F}(z)})\tilde{F}'(z)dz + g(\tilde{F}(z), \overline{\tilde{F}(z)})\overline{\tilde{F}'(z)}d\bar{z}$$

Analogamente se tendrá que si $\alpha \in \mathcal{E}^2(V)$ $\alpha = f(w, \bar{w})dw \wedge d\bar{w}$ entonces $F^*(\alpha)$ será

$$F^*(\alpha) = f(\tilde{F}(z), \overline{\tilde{F}(z)})|\tilde{F}'(z)|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

Es fácil comprobar que $(GF)^*(\omega) = F^*(G^*(\omega))$

NOTA. Frecuentemente denotaremos por F a \tilde{F} (distinguiéndose por el contexto)

PROPOSICIÓN 7.2.7. Sea $F(U) \subset V$ se tiene

- Si ω es meromorfa (holomorfa) en V entonces $F^*(\omega)$ meromorfa (holomorfa) en U
- Si ω es de tipo $(1, 0)$ (respectivamente $(0, 1)$) también lo es $F^*(\omega)$

DEMOSTRACIÓN. Directa de las definiciones □

PROPOSICIÓN 7.2.8. El “pullback” conmuta con las diferenciales. Es decir

- $F^*(df) = d(f.F)$ $F^*(d\omega) = d(F^*(w))$
- $F^*(\partial f) = \partial(f.F)$ $F^*(\partial\omega) = \partial(F^*(w))$
- $F^*(\bar{\partial}f) = \bar{\partial}(f.F)$ $F^*(\bar{\partial}\omega) = \bar{\partial}(F^*(w))$

DEMOSTRACIÓN. $F^*(df) = \frac{\partial f}{\partial w}F'(z)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\overline{F'(z)}d\bar{z} = \frac{\partial(f.F)}{\partial z}dz + \frac{\partial(f.F)}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = d(f.F)$. Las otra análogas □

PROPOSICIÓN 7.2.9. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann. y $\omega \in \mathcal{M}^1(Y)$ (1-forma meromorfa). $\forall p \in X$ se tiene

$$\text{ord}_p(F^*(\omega)) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega))\text{mult}_p(F) - 1$$

DEMOSTRACIÓN. Sean z, w coordenadas locales alrededor de p y $F(p)$ respectivamente, tales que F es en esas coordenadas $w = z^n$ siendo $n = \text{mult}_p(F)$.

Con respecto a w la 1-forma ω es $(\sum_{i=k}^{\infty} c_i w^i)dw$ siendo $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$ entonces $F^*(\omega)$ es con respecto a la coordenada z de la forma $(\sum_{i=k}^{\infty} c_i z^{ni})(nz^{n-1})dz$ luego $\text{ord}_p(F^*(\omega)) = nk + n - 1 = \text{mult}_p(F)(1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) - 1$ \square

7.3. El residuo

En una superficie de Riemann no es posible definir el residuo de una función como se hace en el caso del plano \mathbb{C} . Sin embargo si es posible hacerlo para el caso de 1-forma diferencial meromorfa.

DEFINICIÓN 7.3.1. Sea (U, z) una carta centrada en $p \in X$, $\omega = f dz$ admitiendo f un desarrollo de Laurent alrededor de p de la forma $\sum_{i=N}^M c_i z^i$ (siendo $N \leq -1$) Se define el residuo de ω en p como $\text{Res}_p(\omega) = c_{-1}$

Hay que demostrar que no depende de la carta elegida. Necesitaremos dos lemas previos

LEMA 7.3.1. Sea g holomorfa en $U - \{p\}$ entonces el residuo de dg en p es cero.

DEMOSTRACIÓN. En efecto $g = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ y $dg = (\sum_{i=-\infty}^{\infty} i c_i z^{i-1})dz$ y el residuo sera el coeficiente correspondiente a $i = 0$ que es 0 (independientemente de la carta) \square

LEMA 7.3.2. Sea h holomorfa en U con un cero en p de primer orden entonces $\text{Res}_p(\frac{dh}{h}) = 1$

DEMOSTRACIÓN. Tendremos $h = zg$ con $g(0) \neq 0$ y $dh = gdz + zdg$ y $\frac{dh}{h} = \frac{gdz + zdg}{zg} = \frac{dz}{z} + \frac{dg}{g}$ como $\frac{1}{g}$ será holomorfa en p ($z = 0$) el residuo de $\frac{1}{g}dg$ valdrá 0 por el lema anterior y entonces el de $\frac{dh}{h}$ vale 1 \square

TEOREMA 7.3.1. *El residuo en p es independiente de la carta (U, z) centrada en p elegida para calcularlo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = fdz$ siendo $f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ consideremos

$$g = \sum_{i=-\infty}^{-2} \frac{c_i}{i+1} z^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} z^{i+1}$$

y tendremos $dg = (\sum_{i=-\infty}^{-2} c_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} c^i z^i) dz = fdz - c_{-1} z^{-1}$ luego $\omega = dg + c_{-1} z^{-1}$ como g holomorfa en $U - \{p\}$ el residuo de dg es cero y el de ω vale c_{-1} independientemente de la carta. \square

7.4. Integración en superficies de Riemann

La integración de 1_ forma diferencial a lo largo de un camino es un caso particular de la integración en variedades analíticas.

En esencia una 1_ forma es un campo tensorial covariante que actúa (multiplicación contracta) sobre el vector tangente a la curva γ en los puntos en que este exista. Podemos así definir:

DEFINICIÓN 7.4.1. *Dada una 1_ forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ definida en una superficie de Riemann X y un camino $\gamma : I \rightarrow X$ (I intervalo cerrado de \mathbb{R}) diferenciable casi por doquier en I , a cada $t \in I$ le podemos asociar el número complejo $\omega(t)\gamma'(t)$ (multiplicación contracta de vector covariante y contravariante), dando lugar a una función $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Se define la integral de la forma ω a lo largo del camino γ como $\int_{\gamma} \omega = \int_I f d\mu$ siendo μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .*

Si descomponemos el camino en tramos γ_i cada uno en el interior de una carta (U_i, z) en las que $\omega = f_i dz + g_i d\bar{z}$ tendremos

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f_i(z(t), \bar{z}(t))z'(t) + g_i(z(t), \bar{z}(t))\overline{z'(t)}] dt$$

donde a_{i-1} y a_i son los extremos del tramo contenido en U_i

Para definir la integración de 2-formas necesitamos un concepto previo.

DEFINICIÓN 7.4.2. Sea $\{U\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto arbitrario de X . Una partición de la unidad suave subordinada a \mathcal{U} es una familia $(\psi_i)_{i \in I}$, $\psi_i \in \mathcal{E}$ tal que

- $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$
- $0 \leq \psi_i \leq 1$
- $\forall x \in X \quad \sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$
- $\forall x \in X$ existe V entorno de x tal que $V \cap \text{supp}(\psi_i) = \emptyset$ excepto para un número finito de $i \in I$

PROPOSICIÓN 7.4.1. Sea X una superficie de Riemann y $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de X . Existe una partición de la unidad suave subordinada a $\{U_i\}$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se basa en que X es paracompacta y puede verse en [LeeSM]. □

DEFINICIÓN 7.4.3. Dada una 2-forma $\alpha \in \mathcal{E}^2(X)$ definida en una superficie de Riemann X , podemos considerar en cada punto $p \in X$ el tensor $\frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ de forma que su producto contracto por α producirá un escalar $f(p) = \alpha(p)(\frac{\partial}{\partial z}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p)$. Supongamos un subconjunto $D \subset X$ íntegramente contenido en el dominio de una carta (U, ν) , se define

$$\iint_D \alpha = \iint_{z(D)} f(z^{-1}(\xi)) d\xi$$

Siendo ξ la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 .

En el caso de que D no este contenido en una sola carta consideramos el atlas (U_i, z_i) y una partición de la unidad (ψ_i) subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$ y definimos

$$\iint_D \alpha = \sum_i \iint_{z(D \cap U_i)} (\psi_i f)(z^{-1}(\xi)) d\xi$$

En el caso de un atlas con infinitas cartas se exigirá que exista una cota para la suma de los módulos de las integrales correspondientes a cualquier conjunto finito de cartas.

TEOREMA 7.4.1. (Stokes) Se cumplirá

$$\iint_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

Siendo ∂D la frontera (con la orientación inducida) de D .

DEMOSTRACIÓN. Ver [LeeSM] □

De la definición se deducen las siguientes propiedades

- $\int_{\gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \int_{\gamma} \lambda_1 \omega_1 + \int_{\gamma} \lambda_2 \omega_2$
- $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad \gamma : [a, b] \rightarrow X$
- $\int_{\gamma^-} \omega = - \int_{\gamma} \omega$
- Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann.

Dado un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tenemos definido el camino $F_*\gamma : [a, b] \rightarrow$

Y $F_*\gamma(t) = F(\gamma(t))$. Se tiene

$$\int_{F_*\gamma} \omega = \int_{\gamma} F^*(\omega)$$

TEOREMA 7.4.2. *Sea X una superficie de Riemann $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ una forma diferencial con soporte compacto. Entonces*

$$\iint_X d\omega = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un atlas (U_i, z_i) y una partición de la unidad $\{\psi_i\}$ suave subordinada a $\{U_i\}$. Definimos $\omega_i = \psi_i\omega$ y como tiene soporte compacto $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$. Tendremos por el teorema de Stokes

$$\iint_{U_i} d\omega_i = \int_{\partial U_i} \omega_i = 0$$

Puesto que ω_i vale cero en la frontera de U_i . □

NOTA. *En el caso de superficies compactas tendremos $\int_{\partial D} \omega = 0$. Esto es consecuencia de que toda superficie de Riemann es triangulable (ver [AhlfSar]) y orientable y cada lado de cada triángulo se recorre una vez en cada sentido.*

7.4.1. El haz de primitivas locales.

Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ y $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy \in \mathcal{E}^1(U)$. Si ω es cerrada $d\omega = 0$ tendremos

$$d\omega = \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

Si definimos $\forall (x, y) \in U$

$$F(x, y) = \int_0^1 (f(tx, ty)x + g(tx, ty)y)dt$$

es claramente infinitamente diferenciable y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 (f(tx, ty) + \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x}tx + \frac{\partial g(tx, ty)}{\partial x}ty)dt$$

como $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tendremos

$$\frac{df(tx, ty)}{dt} = \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x}x + \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial y}y = \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x}x + \frac{\partial g(tx, ty)}{\partial x}y$$

luego

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 (f(tx, ty) + t \frac{df(tx, ty)}{dt}) dt = \int_0^1 \left(\frac{d(tf(tx, ty))}{dt} \right) dt = f(x, y)$$

Análogamente $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = g(x, y)$

Es decir en un disco U de \mathbb{C} cada forma $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ tiene una primitiva $F \in \mathcal{E}(U)$ de forma que $dF = \omega$

Vamos a extender este resultado a superficies de Riemann

DEFINICIÓN 7.4.4. Dada $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Denotaremos \mathcal{F} al haz de primitivas. De forma que dado un abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U) = \{f \in \mathcal{E}(U) : df = \omega|_U\}$

Es fácil comprobar que es un haz y que cumple el principio identidad (Si U es conexo y $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ difieren en una cte).

TEOREMA 7.4.3. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ una forma diferencial cerrada. Existe una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ siendo Y conexo y una función $F \in \mathcal{E}(Y)$ tal que $dF = p^*(\omega)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $|\mathcal{F}|$ el espacio de gérmenes asociado al haz \mathcal{F} que será Hausdorff pues \mathcal{F} cumple principio de identidad (ver teorema 4.2.4). Sea $x \in X$ y consideremos una carta (U, z) tal que $z(U)$ es un disco centrado en x . Acabamos de ver que existe una primitiva $f \in \mathcal{F}(U)$ de ω . Entonces $f + c$ son todas las primitivas en U por tanto

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{c \in \mathbb{C}} [U, f + c]$$

Los conjuntos $[U, f + c]$ son disjuntos y $p|_{[U, f + c]}$ es un homeomorfismo para cada c . Por tanto $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es una aplicación recubridora.

Sea $Y \subset |\mathcal{F}|$ una componente conexa, por el lema 3.4.2, $p|_Y : Y \rightarrow X$ será también recubridora. Si definimos $F([f]_x) = f(x)$ tendremos

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow p & \searrow F & \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

$$dF = d(p^*f) = p^*df = p^*\omega$$

□

COROLARIO 7.4.1. *Sea X una superficie de Riemann, $\pi : Z \rightarrow X$ su recubrimiento universal y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ una forma diferencial cerrada. Existe una primitiva $f \in \mathcal{E}(Z)$ de $\pi^*\omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F una primitiva de $p^*\omega$ en Y según el teorema anterior. Al ser Z recubrimiento universal tendremos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & Y \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

Entonces $f = s^*F$, o sea $f(z) = F(s(z))$, será una primitiva de $\pi^*\omega = (p \circ s)^*\omega = s^*(p^*(\omega))$ al ser s holomorfa y conservando las fibras. □

COROLARIO 7.4.2. *En una superficie de Riemann X simplemente conexa cada forma diferencial cerrada es exacta.*

DEMOSTRACIÓN. En este caso $id : X \rightarrow X$ es un recubrimiento universal. □

TEOREMA 7.4.4. *Sea X una superficie de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ su recubrimiento universal. Sea $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ una forma diferencial cerrada, y F una primitiva de $p^*\omega$. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino diferenciable a trozos y $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$ su levantamiento entonces*

$$\int_{\gamma} \omega = F(\hat{\gamma}(1)) - F(\hat{\gamma}(0))$$

DEMOSTRACIÓN. Tendremos

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{p^*\hat{\gamma}} \omega = \int_{\hat{\gamma}} p^*\omega = \int_{\hat{\gamma}} dF = F(\hat{\gamma}(1)) - F(\hat{\gamma}(0))$$

□

TEOREMA 7.4.5. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ una forma diferencial cerrada. Si $\vartheta, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ son dos curvas homótopas de a hasta b . Entonces*

$$\int_{\vartheta} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p : Y \rightarrow X$ un recubrimiento universal y consideremos levantamientos $\hat{\vartheta}$ y $\hat{\gamma}$ con el mismo punto inicial. Por el teorema 3.4.3 deben tener el mismo punto final y aplicando el teorema anterior tenemos el resultado. □

7.5. El teorema del residuo

PROPOSICIÓN 7.5.1. *Sea $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, (U, z) una carta centrada en $p \in X$ de forma que $\omega^1 \in \Omega(U - \{p\})$ y γ un camino homótopo a una circunferencia de centro 0 tal que $z^{-1}(\gamma) \subset U$. Tenemos*

$$\text{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la definición y del teorema del residuo en \mathbb{C} □

PROPOSICIÓN 7.5.2. *Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ entonces $\frac{df}{f} \in \mathcal{M}^1(X)$ y $\text{Res}_p(\frac{df}{f}) = \text{ord}_p(f)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, z) una carta centrada en p y $\text{ord}_p(f) = n$ entonces en un entorno de cero $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$, $\frac{1}{f} = c_n^{-1} z^{-n} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} d_k z^k$ ($\frac{1}{f}$ tiene orden $-n$ y el producto de los coeficientes ha de ser 1) también tenemos $df = nc_n z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} k c_k z^{k-1}$ y $\frac{df}{f} = nz^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ y $\text{Res}_p(\frac{df}{f}) = n$. □

TEOREMA 7.5.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ entonces*

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sean p_1, \dots, p_n los polos de ω (finitos al ser X compacta), (V_i, z_i) cartas centradas en cada p_i de forma que $\omega \in \Omega^1(U_i - \{p_i\})$ y γ_i curvas cerradas homótopas a una circunferencia $z_i^{-1}(\gamma_i) \subset V_i$ cuyo interior denotaremos por U_i tendremos

$$\text{Res}_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \omega$$

y por tanto

$$\sum_j \text{Res}_{p_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{\gamma_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum \gamma_j} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega$$

Siendo $D = X - \bigcup U_i$ (El signo - es porque la frontera de D tiene orientación inducida opuesta a la positiva de la curva γ_i)

Aplicando el teorema de Stokes,

$$\sum_j \text{Res}_{p_j}(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

Pues ω holomorfa en D y por tanto $d\omega = 0$ □

COROLARIO 7.5.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y f una función meromorfa no constante. Entonces*

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la proposición 7.5.2 y del teorema 7.5.1 aplicado a $\frac{df}{f}$ □

Este resultado se obtuvo también como teorema 5.3.9.

7.6. Producto escalar de formas y formas armónicas

En este apartado vamos a limitar bastantes definiciones a superficies de Riemann compactas, no es difícil la generalización, aunque no del todo satisfactoria, restringiéndose a formas diferenciales de soporte compacto (ver [FarkasKra]).

El hecho de que la generalización no sea totalmente satisfactoria, es la existencia, en este caso, de formas no constantes exactas y armónicas como $e^z dz$ en el disco unidad.

DEFINICIÓN 7.6.1. Dada una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ podemos definir la 1-forma $\bar{\omega} \in \mathcal{E}^1(X)$ del siguiente modo: Fijamos un atlas formado por las cartas $\{(U_i, z_i)\}$ de forma que en U_i podemos poner $\omega = f_i dz_i + g_i d\bar{z}_i$ siendo $f_i, g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ entonces tendremos $\bar{\omega} = \bar{g}_i dz_i + \bar{f}_i d\bar{z}_i$ en U_i .

Es sencillo comprobar que la definición no depende del atlas elegido. También se comprueba sin dificultad que para $f \in \mathcal{E}(X)$

$$\partial \bar{f} = \overline{(\partial f)} \quad \bar{\partial} \bar{f} = \overline{(\partial f)} \quad d\bar{f} = \overline{(df)}$$

y también que para $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$

$$\partial \bar{\omega} = \overline{(\partial \omega)} \quad \bar{\partial} \bar{\omega} = \overline{(\partial \omega)} \quad d\bar{\omega} = \overline{(d\omega)}$$

También se define $Re(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})$ y ω será real cuando $\omega = Re(\omega)$

De la definición se tiene que $\overline{\int_{\gamma} \omega} = \int_{\gamma} \bar{\omega}$ y por tanto $Re(\int_{\gamma} \omega) = \int_{\gamma} Re(\omega)$

DEFINICIÓN 7.6.2. Se dice que ω es antiholomorfa cuando $\bar{\omega}$ es holomorfa. Denotaremos por $\bar{\Omega}^1(X)$ el espacio de las 1-formas antiholomorfas en X

PROPOSICIÓN 7.6.1. $\bar{\Omega}^1(X)$ es isomorfo a $\Omega^1(X)$

DEMOSTRACIÓN. La conjugación es claramente un isomorfismo con ella misma como inverso. □

7.6.1. Operador * de Hodge .

DEFINICIÓN 7.6.3. Dada una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ podemos descomponerla de forma única como $\omega = \omega_1 + \omega_2$ de forma que $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}$. Definimos la 1-forma $*\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ como $*\omega = i(\omega_2 - \omega_1)$

Si $\omega = udx + vdy$ tendremos $\omega = \frac{1}{2}(u - iv)(dx + idy) + \frac{1}{2}(u + iv)(dx - idy)$ luego $\omega_1 = \frac{1}{2}(u - iv)dz$ y $\omega_2 = \frac{1}{2}(u + iv)d\bar{z}$ luego

$$*(udx + vdy) = \frac{i}{2}[(u + iv)(dx - idy) - (u - iv)(dx + idy)] = \frac{i}{2}(2i(vdx - udy)) = udy - vdx$$

NOTA. En algunos textos (por ejemplo [ForRS]) se define $*\omega = i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)$

PROPOSICIÓN 7.6.2. Se cumplen las siguientes propiedades

1. $**(\omega) = -\omega$
2. $*(\bar{\omega}) = *\bar{\omega}$
3. $d(*df) = 2i\partial\bar{\partial}f$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la definición. □

DEFINICIÓN 7.6.4. Se dice que la 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ es cocerrada si $*\omega$ es cerrada, y coexacta si $*\omega$ es exacta.

PROPOSICIÓN 7.6.3. Una forma diferencial ω es holomorfa si y sólo si es cerrada y $*\omega = -i\omega$

DEMOSTRACIÓN. Si ω es holomorfa es cerrada, y que $*\omega = -i\omega$ es consecuencia directa de la definición.

Recíprocamente sea $\omega = udz + vd\bar{z}$ entonces $*\omega = i(-udz + vd\bar{z})$ y si se cumple la hipótesis tendremos $\omega = udz$ y por ser cerrada $0 = d\omega = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz$ y luego $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ y ω es holomorfa. □

DEFINICIÓN 7.6.5. Sea X una superficie de Riemann compacta $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^1(X)$, se define el producto escalar (y la correspondiente norma $\|\omega\| = (\langle \omega, \omega \rangle)^{\frac{1}{2}}$) como

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \iint_X \omega_1 \wedge * \bar{\omega}_2$$

De la definición se tiene que $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \overline{\langle \omega_2, \omega_1 \rangle}$ y que $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle * \omega_1, * \omega_2 \rangle$

PROPOSICIÓN 7.6.4. El producto escalar es definido positivo

DEMOSTRACIÓN. Consideremos cualquier carta (U, z) tendremos $\omega = f dz + g \bar{d}z$, $*\bar{\omega} = i(\bar{f} d\bar{z} - \bar{g} dz)$ entonces

$$\omega \wedge * \bar{\omega} = i(|f|^2 + |g|^2) dz \wedge d\bar{z} = 2(|f|^2 + |g|^2) dx \wedge dy$$

Por tanto $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ y sólo si $\omega = 0$ tenemos $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ □

OBSERVACIÓN. Con el producto escalar definido anteriormente el espacio $\mathcal{E}^1(X)$ es preHilbert. Pero como no es completo no es un espacio de Hilbert. La complección de $\mathcal{E}^1(X)$ (por el método clásico de las sucesiones de Cauchy) que se denota $\mathbb{E}^1(X)$ la constituyen las formas

$$\omega = f(z) dz + g(z) d\bar{z}$$

donde f y g son funciones medibles de la coordenada local z

Denotaremos como $DE(X)$ la clausura en $\mathbb{E}^1(X)$ de $d(\mathcal{E}(X))$ y por $*DE(X) = \{\omega \in \mathbb{E}(X) : *\omega \in DE(X)\}$

PROPOSICIÓN 7.6.5. Sea X una superficie de Riemann compacta, $DE(X)$ y $*DE(X)$ son ortogonales

DEMOSTRACIÓN. Sean $\omega_1 \in DE(X)$, $\omega_2 \in *DE(X)$ existirán sucesiones $\{f_n\}, \{g_n\}$ en $\mathcal{E}(X)$ tales que

$$\lim(df_n) = \omega_1 \quad \lim(*dg_n) = \omega_2$$

tendremos $\langle df_n, *dg_n \rangle = -\iint_X df_n \wedge \overline{dg_n} = -\iint_X d(f_n \overline{dg_n}) = 0$ por Stokes. Tomando límites (X compacta y se aplica convergencia dominada) tenemos el resultado. \square

$DE(X) \oplus *DE(X)$ será un subespacio cerrado de $\mathbb{E}^1(X)$, definimos

$$\mathbb{H}(X) = (DE(X) \oplus *DE(X))^\perp = DE(X)^\perp \cap (*DE(X))^\perp$$

y tendremos $\mathbb{E}^1(X) = DE(X) \oplus *DE(X) \oplus \mathbb{H}(X)$

PROPOSICIÓN 7.6.6. *Sea X una superficie de Riemann compacta, una forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ es cerrada si y sólo si $\omega \in (*DE(X))^\perp$ y cocerrada si y sólo si $\omega \in DE(X)^\perp$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ $\forall f \in \mathcal{E}(X)$ tendremos

$$\langle \omega, *df \rangle = \iint d\bar{f} \wedge \omega = \iint (d(\bar{f}\omega) - \bar{f}d\omega) = -\iint \bar{f}d\omega$$

Si ω es cerrada $d\omega = 0$ y $\omega \in (d(\mathcal{E}(X)))^\perp$ y por densidad y continuidad $\omega \in (DE(X))^\perp$. Recíprocamente si $\langle \omega, *df \rangle = 0$ para toda función diferenciable f entonces $d\omega = 0$. El caso de cocerrada es análogo. \square

PROPOSICIÓN 7.6.7. *Sea X una superficie de Riemann compacta*

1. $\partial(\mathcal{E}(X)), \bar{\partial}(\mathcal{E}(X)), \Omega^1(X), \bar{\Omega}^1(X)$ son ortogonales dos a dos
2. $d(\mathcal{E}(X))$ y $*d(\mathcal{E}(X))$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{E}^1(X)$ y se cumple

$$d(\mathcal{E}(X)) \oplus *d(\mathcal{E}(X)) = \partial(\mathcal{E}(X)) \oplus \bar{\partial}(\mathcal{E}(X))$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$, $\sigma \in \mathcal{E}^{(0,1)}$ dada cualquier carta (U, z) en U tendremos $\omega = fdz$, $\sigma = g\bar{d}z$ y por tanto $*\bar{\sigma} = -i\bar{g}dz$ y así $\omega \wedge *\bar{\sigma} = 0$ y $\mathcal{E}^{(1,0)}(X) \perp \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. Como $\Omega^1(X), \partial(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\bar{\Omega}^1(X), \bar{\partial}(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ para demostrar 1 bastará ver que $\partial(\mathcal{E}(X)) \perp \Omega^1(X)$ y que $\bar{\partial}(\mathcal{E}(X)) \perp \bar{\Omega}^1(X)$.

Sea $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \Omega^1(X)$ tendremos

$$\omega \wedge *\bar{\partial}f = i\omega \wedge \bar{\partial}f = i\omega \wedge d(\bar{f}) = -id(\bar{f}\omega) \text{ luego } \langle \omega, \partial f \rangle = -i \iint_X d(\bar{f}\omega) = 0$$

por el teorema 7.4.2. Análogamente el otro caso.

Para demostrar 2 sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$

$$df \wedge *(\overline{dg}) = -df \wedge \overline{dg} = -d(f\overline{dg})$$

y por tanto $\langle df, *dg \rangle = -\iint_X d(f\overline{dg}) = 0$ por la misma razón que antes.

Por último sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$ tendremos

$$df + *dg = \partial f + \bar{\partial}f + *(\partial g + \bar{\partial}g) = \partial f + \bar{\partial}f + i\bar{\partial}g - i\partial g = \partial(f - ig) + \bar{\partial}(f + ig)$$

y como $f - ig, f + ig \in \mathcal{E}(X)$ tenemos $d(\mathcal{E}(X)) \oplus *d(\mathcal{E}(X)) \subset \partial(\mathcal{E}(X)) \oplus \bar{\partial}(\mathcal{E}(X))$

la otra dirección análoga. \square

7.6.2. Formas armónicas.

DEFINICIÓN 7.6.6. Una función $f \in \mathcal{E}(U)$ se denomina armónica cuando

$$\partial\bar{\partial}f = 0$$

(claramente se tiene también en este caso $\bar{\partial}\partial f = 0$)

Como

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}f &= \partial\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)((dx + idy) \wedge (dx - idy)) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(-2idx \wedge dy) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx \wedge dy \end{aligned}$$

tendremos $2i\partial\bar{\partial}f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx \wedge dy$ expresión que se denomina “laplaciano” de f y se denota Δf . Pudiendo ponerse la definición de función armónica como (ecuación de Laplace)

$$\Delta f = 2i\partial\bar{\partial}f = 0$$

DEFINICIÓN 7.6.7. Se dice que la 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ es armónica cuando $d\omega = 0$ y $d(*\omega) = 0$. Es decir si ω y $*\omega$ son cerradas (si $*\omega$ es cerrada se dice que ω es cocerrada y si $*\omega$ es exacta se dice que ω es coexacta)

TEOREMA 7.6.1. *Son equivalentes*

1) ω es armónica

2) $\forall p \in X$ existe U entorno abierto de p tal que $\omega = df$ para una función f armónica en U

3) $\omega = \alpha_1 + \alpha_2$ $\alpha_1 \in \Omega^1(X)$, $\alpha_2 \in \overline{\Omega^1}(X)$ de manera única

DEMOSTRACIÓN. Si ω es armónica, por ser cerrada, es localmente de la forma $\omega = df$ como además es cocerrada se ha de cumplir $d(*\omega) = 0$ es decir $d(*df) = 0$ y por tanto f es una función armónica.

Recíprocamente si localmente tenemos $\omega = df$ entonces ω es cerrada. Si f es función armónica ha de cumplir $d(*df) = 0$ luego $d(*\omega) = 0$ y ω es cocerrada. Esto pone de manifiesto la equivalencia de 1 y 2

Sea $\omega =udz + vd\bar{z}$ una 1-forma armónica se tendrá

$$d\omega = \left(-\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz \wedge d\bar{z} = 0 \quad d(*\omega) = i\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz \wedge d\bar{z} = 0$$

luego $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ y u es holomorfa también $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ y v antiholomorfa

Si se puede descomponer $\omega =udz + vd\bar{z}$ siendo u holomorfa y v antiholomorfa tendremos $d\omega = \left(-\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz \wedge d\bar{z} = 0$ y análogamente para $d*\omega$ y ω será armónica. \square

TEOREMA 7.6.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta, denotando por $Harm^1(X)$ el espacio de las 1-formas armónicas en X . Se tiene*

$$Harm^1(X) = \Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega^1}(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema anterior y de que $\Omega^1(X), \overline{\Omega^1}(X)$ son ortogonales. \square

PROPOSICIÓN 7.6.8. *Si ω es holomorfa ω y $\bar{\omega}$ son armónicas*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = f dz$ si es holomorfa $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ luego $d\omega = 0$ y es cerrada como $*\omega = -i\omega$ tenemos $d(*\omega) = 0$ y es cocerrada para $\bar{\omega}$ la demostración es análoga \square

PROPOSICIÓN 7.6.9. *Una forma diferencial ω es holomorfa si y sólo si es de la forma $\omega = \alpha + i*\alpha$ para una cierta diferencial armónica α*

DEMOSTRACIÓN. Si ω es holomorfa ella y su conjugada son armónicas por tanto también lo será $\alpha = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2}$ como $*\alpha = \frac{i(\bar{\omega} - \omega)}{2}$ se tiene $\omega = \alpha + i(*\alpha)$

Recíprocamente si $\omega = \alpha + i(*\alpha)$ para α armónica, como se puede poner $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in \Omega^1(X)$, $\alpha_2 \in \bar{\Omega}^1(X)$ entonces $*\alpha = i(\alpha_2 - \alpha_1)$ y tendremos $\omega = 2\alpha_1$ que será holomorfa \square

PROPOSICIÓN 7.6.10. *Si $\omega \in \text{Harm}^1(X)$ es una 1-forma armónica real, Existe una única 1-forma holomorfa $\sigma \in \Omega^1(X)$ tal que*

$$\omega = \text{Re}(\sigma)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = \omega_1 + \omega_2$ siendo $\omega_1 \in \Omega^1(X)$, $\omega_2 \in \bar{\Omega}^1(X)$ como ω es real $\omega = \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ y como la descomposición es única $\omega_1 = \bar{\omega}_2$ y haciendo $\sigma = 2\omega_1$ tenemos $\omega = \text{Re}(\sigma)$

Si existiera una σ' distinta tal que $\omega = \text{Re}(\sigma')$ la 1-forma $\xi = \sigma - \sigma'$ sería tal que $\text{Re}(\xi) = 0$ y $\xi \in \Omega^1(X)$. Localmente tendríamos $\xi = df$ siendo f holomorfa y tendría que tener parte real constante luego tendría que ser constante y $df = 0$ \square

PROPOSICIÓN 7.6.11. *En una superficie de Riemann compacta la única 1-forma diferencial exacta armónica es la idénticamente nula, y las únicas funciones armónicas son las constantes*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{E}(X)$ se tiene por la proposición 7.6.7 que df es ortogonal a $\text{Harm}^1(X) = \Omega^1(X) \oplus \bar{\Omega}^1(X)$ así si df es armónica, o lo que es lo mismo si f armónica, se tiene $df = 0$ y $f = cte$ \square

COROLARIO 7.6.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta, $\sigma \in \text{Harm}^1(X)$. Si para cada curva cerrada γ se tiene que $\int_{\gamma} \sigma = 0$ entonces $\sigma = 0$*

DEMOSTRACIÓN. En este caso σ es armónica y exacta y se aplica la proposición anterior. \square

TEOREMA 7.6.3. *En una superficie de Riemann compacta, el subespacio $\mathbb{H}(X)$ coincide con $\text{Harm}^1(X)$*

Para demostrarlo se necesita el siguiente lema que no demostraremos (ver [FarkasKra, Reyssat])

LEMMA. (Weyl) *Sea $\omega \in \mathbb{E}^1(X)$ tal que $\omega \in \mathbb{H}(X)$, existe $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ que coincide con ω salvo en un conjunto de puntos de medida de Lebesgue nula.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \text{Harm}^1(X)$ será cerrada y por la proposición 7.6.6 $\omega \in DE(X)^\perp$ también será cocerrada y por la misma proposición $\omega \in *DE(X)^\perp$ luego $\omega \in \mathbb{H}(X)$ y $\text{Harm}^1(X) \subset \mathbb{H}(X)$

Recíprocamente si $\omega \in \mathbb{H}$ será diferenciable (por lema de Weyl) y por la proposición 7.6.6 será armónica. \square

COROLARIO 7.6.2. *El cierre en $\mathbb{E}^1(X)$ de las 1-formas cerradas es*

$$DE(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$$

Análogamente el cierre de las cocerradas es

$$*DE(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 7.6.6 el cierre de las formas cerradas está en $(*DE(X))^\perp = DE(X) \oplus \mathbb{H}(X)$. Recíprocamente si $\omega \in DE(X) \oplus \mathbb{H}(X)$ entonces $\omega = \lim(\omega_n) + \alpha = \lim(\omega_n + \alpha)$ siendo $\omega_n \in d(\mathcal{E}(X))$ y $\alpha \in \text{Harm}^1(X)$ pero entonces $\omega_n + \alpha$ es cerrada y ω es el límite de una sucesión de formas cerradas. El otro caso es análogo. \square

Como aplicación del teorema de Riemann Roch veremos algunas otras propiedades de las formas armónicas (ver sección 13.1).

Las formas armónicas permitirían demostrar, con relativamente poco esfuerzo, la existencia de funciones meromorfas en superficies de Riemann, sin embargo no seguiremos ese camino que puede verse en [FarkasKra].

7.7. n -diferenciales y Wronskiano

Hemos visto que las formas diferenciales son campos de tensores covariantes alternados y que se empleaba como base dual de \mathbb{C} (considerado como \mathbb{R}^2) $\{dz, \bar{dz}\}$.

Ahora vamos a considerar \mathbb{C} como un espacio vectorial complejo unidimensional siendo dz su base dual.

Las diferenciales sucesivas (no las exteriores) dan lugar a campos tensoriales covariantes no alternados.

DEFINICIÓN 7.7.1. Una n -diferencial en una superficie de Riemann X es un campo tensorial covariante de orden n

Evidentemente una 1-forma y una 1-diferencial son lo mismo.

Si consideramos una carta (U, z) una n -diferencial será de la forma $\mu = f(z)dz \otimes \dots \otimes dz$. Si f es meromorfa se dirá que la n -diferencial es meromorfa.

El producto tensorial de n 1-formas produce una n -diferencial meromorfa. Así si $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{M}^1(X)$ se tiene que $\mu = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n$ es una n -diferencial meromorfa.

Denotaremos por $\mathcal{M}^n(X)$ al espacio de las n -diferenciales meromorfas.

PROPOSICIÓN 7.7.1. Sea μ una n -diferencial y $(U, z), (V, w)$ cartas que se solapan. Si $\mu = f(z)dz \otimes \dots \otimes dz$ en U y $z = T(w)$ en $U \cap V$ se tiene $\mu = f(T(w))(T'(w))^n dw \otimes \dots \otimes dw$ en $U \cap V$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar que $dz = T'(w)dw$ y por tanto $dz \otimes \dots \otimes dz = (T'(w))^n dw \otimes \dots \otimes dw$ □

DEFINICIÓN 7.7.2. Dada una n -diferencial μ y un punto p se considera una carta (U, z) centrada en p . En esa carta se tendrá $\mu = f(z)dz \otimes \dots \otimes dz$ y se define

$$\text{ord}_p(\mu) = \text{ord}_p(f)$$

Como si tenemos otra carta (V, w) centrada en p y $z = T(w)$ por la condición de compatibilidad $T'(0) \neq 0$ la definición anterior es independiente de la carta.

7.7.1. Wronskiano.

DEFINICIÓN 7.7.3. Dadas n funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ y una carta (U, z) se define el Wronskiano en los puntos de U como

$$W_z(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 \cdot z^{-1} & f_n \cdot z^{-1} \\ (f_1 \cdot z^{-1})' & (f_n \cdot z^{-1})' \\ \vdots & \vdots \\ (f_1 \cdot z^{-1})^{n-1} & (f_n \cdot z^{-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

Tal y como se define el Wronskiano depende de la carta elegida.

PROPOSICIÓN 7.7.2. Si se considera otra carta (V, w) tal que $z = T(w)$ en $U \cap V$ se cumple que

$$W_w(f_1, \dots, f_n) = (T')^{\frac{n}{2}(n-1)} W_z(f_1, \dots, f_n)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $g_i = f_i \cdot z^{-1}$ y $h_i = f_i \cdot w^{-1}$ se tendrá

$$W_z(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} g_1 & g_n \\ g_1' & g_n' \\ \vdots & \vdots \\ g_1^{n-1} & g_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad W_w(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} h_1 & h_n \\ h_1' & h_n' \\ \vdots & \vdots \\ h_1^{n-1} & h_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se tiene $h_i = f_i \cdot w^{-1} = f_i \cdot z^{-1} \cdot z \cdot w^{-1} = g_i \cdot T$ (o sea $h_i(w) = g_i(T(w))$) y así

$$h'_i(w) = g'_i(T(w))T'(w) \quad h''_i(w) = g''_i(T(w))(T'(w))^2 + g'_i(T(w))T''(w) \quad \dots$$

y en general

$$h_i^{(k)}(w) = g_i^{(k)}(T(w))(T'(w))^k + \sum_{l=0}^{k-1} g_i^{(l)}(T(w))\varphi_{kl}(w)$$

donde $\varphi_{kl}(w)$ son funciones holomorfas independientes de i y por tanto usando transformaciones de matrices que no afectan al determinante podemos poner

$$W_w(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} g_1 & g_n \\ T'g'_1 & T'g'_n \\ \vdots & \vdots \\ (T')^{n-1}h_1^{n-1} & (T')^{n-1}h_n^{n-1} \end{vmatrix} = (T')^{\frac{n}{2}(n-1)} W_z(f_1, \dots, f_n)$$

□

Asociada al Wronskiano tenemos la m_diferencial $m = \frac{n}{2}(n-1)$

$$W_z(f_1, \dots, f_n) dz \otimes \dots \otimes dz$$

que no depende de las cartas elegidas (ver proposición 7.7.1)

PROPOSICIÓN 7.7.3. *Si las funciones g_1, \dots, g_n son linealmente independientes en el abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces su Wronskiano no es idénticamente nulo*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que lo tenemos demostrado para $n-1$ y consideremos la ecuación

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_{n-1} & h \\ g'_1 & g'_{n-1} & h' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1^{n-1} & g_{n-1}^{n-1} & h^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando tenemos la ecuación diferencial $a_{n-1}h^{n-1} + \dots + a_0h = 0$ siendo $a_{n-1} = W(g_1, \dots, g_{n-1})$

Evidentemente g_1, \dots, g_{n-1} son soluciones de esta ecuación diferencial (darán lugar a columnas repetidas y determinante nulo) . Si $W(g_1, \dots, g_n)$ fuera idénticamente nulo entonces g_n sería otra solución y en los puntos donde $a_{n-1}(z) \neq 0$ se podría poner g_n como una combinación lineal de g_1, \dots, g_{n-1} (y por principio de identidad en todo U) \square

DEFINICIÓN 7.7.4. Dadas n formas diferenciales $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega^1(U)$, siendo (U, z) una carta $\omega_i = f_i dz$ en U se define

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_n) = W_z(f_1, \dots, f_n)$$

PROPOSICIÓN 7.7.4. Si se considera otra carta (V, w) tal que $z = T(w)$ en $U \cap W$ se cumple que

$$W_w(\omega_1, \dots, \omega_n) = (T')^{\frac{n}{2}(n+1)} W_z(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar que $\omega_i = f(z)dz = f(T(w))T'(w)dw$ y aplicar la proposición 7.7.2. \square

Existencia de funciones meromorfas

Aunque parezca evidente la existencia de funciones meromorfas en una superficie de Riemann arbitraria está lejos de ser un tema trivial.

Analizaremos en detalle el problema para superficies de Riemann *compactas*.

8.1. El lema de Dolbeault

Consideremos el haz \mathcal{E} de funciones suaves (infinitamente diferenciables) en \mathbb{C} considerándolas como funciones de dos variables reales.

LEMA 8.1.1. *Sea $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Existe una función $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

DEMOSTRACIÓN. Definimos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z}$$

Como presenta una singularidad en ξ vamos a ver que está bien definida. Pasamos a coordenadas polares $z = \xi + re^{i\varphi}$ como $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = idy \wedge dx - idx \wedge dy = -2idx \wedge dy = -2irdr \wedge d\varphi$ y tendremos

$$f(\xi) = \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{g(\xi + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} r dr = \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty g(\xi + re^{i\varphi}) e^{-i\varphi} dr$$

Con lo que la integral está definida pues g tiene soporte compacto

Si hacemos $z = \xi + w$ la integral se puede calcular como el límite de las integrales en los discos $B_\epsilon = \{w : \epsilon < w < \infty\}$

$$f_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_\epsilon} \frac{g(\xi + w)}{w} dw \wedge d\bar{w}$$

Al tener g soporte compacto y por tanto un valor máximo se podrá aplicar convergencia dominada de Lebesgue y derivar dentro del signo integral

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_\epsilon} \frac{\partial g(\xi + w)}{\partial \bar{\xi}} \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w}$$

Pero haciendo $\psi = \bar{w} + \bar{\xi}$ tendremos $\frac{\partial g(\bar{\psi})}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial g(\bar{\psi})}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial g(\bar{\psi})}{\partial \psi}$ y análogamente con $\frac{\partial g(\bar{\psi})}{\partial \bar{z}}$ por lo que podremos poner

$$\frac{\partial g(\xi + w)}{\partial \bar{\xi}} \frac{1}{w} = \frac{\partial g(\xi + w)}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{g(\xi + w)}{w} \right)$$

la última igualdad debido a que $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial \bar{w}} = 0$ (recordar que con la notación empleada w y \bar{w} son variables independientes)

En definitiva tendremos para $w \neq 0$

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{g(\xi + w)}{w} \right) dw \wedge d\bar{w}$$

y considerando la forma diferencial $\sigma(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{g(\xi + w)}{w} dw$ su diferenciación exterior produce

$$d\sigma(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{g(\xi + w)}{w} \right) d\bar{w} \wedge dw$$

y por tanto $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = \frac{-1}{2\pi i} \iint_{B_\epsilon} d\sigma$ y aplicando teorema de Stokes $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon} \sigma$

Como σ tiene soporte compacto (al tenerlo g) la frontera ∂B_ϵ se reduce, a efectos de integración, al círculo de centro cero y radio ϵ , recorrido en sentido negativo (puesto que B_ϵ es el exterior), que parametrizamos mediante $\epsilon e^{i\varphi}$ y tendremos

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(\xi + \epsilon e^{i\varphi})}{\epsilon e^{i\varphi}} i\epsilon e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi + \epsilon e^{i\varphi}) d\varphi$$

luego $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{\xi}} = g(\xi)$ y por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}(\xi) = g(\xi)$$

□

TEOREMA 8.1.1. *Sea $X_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ y $g \in \mathcal{E}(X_R)$. Entonces $\forall R : 0 \leq R \leq \infty$ existe una función $f \in \mathcal{E}(X_R)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots$ una sucesión creciente y $X_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}$. Existe una partición de la unidad $\{\psi_n\}$ subordinada a $\{X_n\}$ (ver definición 7.4.2)

Las funciones $g\psi_n$ cumplen las hipótesis del lema anterior y por tanto existen funciones $f_n \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ tales que

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = \psi_n g$$

Vamos a definir una sucesión \widetilde{f}_n por inducción que cumpla

$$\frac{\partial \widetilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g \text{ en } X_n$$

$$\|\widetilde{f}_{n+1} - \widetilde{f}_n\|_\infty \leq 2^{-n}$$

Ponemos $\widetilde{f}_1 = f_1$ y supuestas definidas $\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n$ tendremos que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_{n+1} - \widetilde{f}_n) = 0$ en X_n luego es holomorfa y se puede aproximar por un polinomio de Taylor P de forma que

$$\|f_{n+1} - \widetilde{f}_n - P\|_\infty \leq 2^{-n}$$

definiendo $\widetilde{f}_{n+1} = f_{n+1} - P$ tendremos

$$\frac{\partial \widetilde{f}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = g \text{ en } X_{n+1}$$

puesto que P es un polinomio (holomorfo) y $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0$

Como todo $z \in \mathbb{C}$ está contenido en todos los X_n a partir de uno determinado, existe (es sucesión de Cauchy y \mathbb{C} completo)

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{f}_n(z)$$

En un X_m cualquiera se puede poner

$$f(z) = \widetilde{f}_m(z) + \sum_{k=m}^{\infty} \widetilde{f}_{k+1}(z) - \widetilde{f}_k(z)$$

y $\forall k \geq m$ $\widetilde{f_{k+1}}(z) - \widetilde{f_k}(z)$ son holomorfas en X_m pues $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\widetilde{f_{k+1}}(z) - \widetilde{f_k}(z)) = 0$

Como la suma $S_m = \sum_{k=m}^{\infty} \widetilde{f_{k+1}}(z) - \widetilde{f_k}(z)$ es de funciones holomorfas y converge uniformemente en cada compacto dará lugar a una función holomorfa y $f = \widetilde{f_m} + S_m$ es infinitamente diferenciable en X_m y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$

Como X_m es arbitrario tenemos el teorema. \square

Naturalmente f no es única puesto que si h es holomorfa $f + h$ también cumple.

8.2. Cálculo de algunos grupos de Cohomología

TEOREMA 8.2.1. *Sea X una superficie de Riemann y \mathcal{E} el haz de funciones suaves en X . Se tiene $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto arbitrario de X . y ψ_i una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} (ver 7.4.2)

Vamos a demostrar que $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$ con lo que estará demostrado el teorema

Sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ y consideremos la función $f_{ij}\psi_j$ definida en $U_i \cap U_j$ podemos extenderla con ceros a todo U_i , y así podemos considerar $f_{ij}\psi_i \in \mathcal{E}(U_i)$.

Sea $g_i(x) = \sum_{j \in I} f_{ij}(x)\psi_j(x)$ (está bien definida pues cada punto tiene un entorno que solo intersecta a un número finito de soportes de las ψ_i) tendremos $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$.

Ahora en $U_i \cap U_j$

$$g_i - g_j = \sum_{k \in I} f_{ik}\psi_k - \sum_{k \in I} f_{jk}\psi_k = \sum_{k \in I} (f_{ik} - f_{jk})\psi_k$$

Como $f_{ik} - f_{jk} = f_{ij}$ (ver lema 4.5.1) tendremos $g_i - g_j = \sum_{k \in I} f_{ij}\psi_k = f_{ij}$ luego (f_{ij}) es cofrontera. \square

TEOREMA 8.2.2. $H^1(X, \mathcal{E}^1) = H^1(X, \mathcal{E}^2) = H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) = 0$

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la anterior \square

PROPOSICIÓN 8.2.1. *Sea $B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ siendo $0 < R \leq \infty$. Entonces $H^1(B_R, \mathcal{O}) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto de B_R y $(f_{ij}) \in Z^1(B_R, \mathcal{O})$ un cociclo. como $Z^1(B_R, \mathcal{O}) \subset Z^1(B_R, \mathcal{E})$ y como $H^1(B_R, \mathcal{E}) = 0$ (ver teorema 8.2.1) existe una cocadena $g_i \in \mathcal{E}(X)$ tal que $f_{ij} = g_j - g_i$ en $U_i \cap U_j$

Como $\bar{\partial}f_{ij} = 0$ (f_{ij} holomorfa) tenemos que $\bar{\partial}g_i = \bar{\partial}g_j$ en $U_i \cap U_j$ y existe una función global $h \in \mathcal{E}(B_R)$ tal que $\bar{\partial}g_i = h|_{U_i}$

Por el teorema 8.1.1 existe $g \in \mathcal{E}(X)$ tal que $\bar{\partial}g = h$. Si definimos

$$f_i = g_i - g \quad \text{en } U_i$$

tendremos $\bar{\partial}f_i = \bar{\partial}g_i - \bar{\partial}g = 0$ en U_i luego f_i es holomorfa. Ahora bien

$$f_j - f_i = g_j - g - (g_i - g) = g_j - g_i = f_{ij}$$

y por tanto $(f_{ij}) \in B^1(B_R, \mathcal{O})$. □

PROPOSICIÓN 8.2.2. $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$

DEMOSTRACIÓN. Sea $U_1 = \mathbb{C}$ y $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$, $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ es un recubrimiento abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$ y como $\frac{1}{z}$ es un biholomorfismo entre U_2 y \mathbb{C} aplicando el corolario anterior vemos que \mathcal{U} es un recubrimiento de Leray y $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

Consideremos un cociclo $f_{12} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ Admitirá un desarrollo en serie de Laurent

$$f_{12} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$$

definiendo $f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ y $f_2 = -\sum_{i=-\infty}^{-1} c_i z^i$, holomorfas en U_1 y U_2 respectivamente, tenemos $f_{12} = f_1 - f_2$. □

8.3. El espacio de Hilbert de las funciones holomorfas

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, dada una función $f \in \mathcal{O}(D)$ definimos la norma $L^2(D)$

$$\|f\|_{L^2(D)} = \left| \iint_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right|^{\frac{1}{2}}$$

Las funciones tales que $\|f\|_{L^2(D)} < \infty$ se denominan de cuadrado integrable y el conjunto de las mismas se denota por $L^2(D, \mathcal{O})$

Podemos definir un producto escalar en $L^2(D, \mathcal{O})$ mediante

$$\langle f, g \rangle = \iint_D f \bar{g} dx dy$$

la integral es finita puesto que $|f(z)\bar{g}(z)| \leq \frac{1}{2}(|f(z)|^2 + |g(z)|^2)$

Para el caso $D = B(a, r)$ consideremos los monomios $\psi_n = (z-a)^n$ tendremos

$$\|\psi_n\|_{L^2(B)}^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^{2n} \rho d\rho = \frac{2\pi r^{2n+2}}{2n+2} = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \quad \|\psi_n\|_{L^2(B)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} r^{n+1}$$

También se tiene que

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi \int_0^r \rho^{n+m} \rho d\rho = 0 \text{ si } n \neq m$$

por lo que forman un sistema ortogonal

Si $f \in L^2(B, \mathcal{O})$ existirá un desarrollo en serie de Taylor

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

y por tanto tendremos

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2i+2}}{i+1} |c_i|^2 = \pi r^2 |f(a)|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi r^{2i+2}}{i+1} |c_i|^2$$

LEMA 8.3.1. *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $D_r = \{z \in D : B(z, r) \subset D\}$. Para cada $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ se tiene*

$$\|f\|_{D_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_{L^2(D)}$$

Siendo $\|f\|_{D_r}$ la norma del supremo en D_r

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in D_r$ y $f(z) = \sum c_i(z-a)^i$ su desarrollo de Taylor en a . Acabamos de ver

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 = \pi r^2 |f(a)|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi r^{2i+2}}{i+1} |c_i|^2$$

luego $\|f\|_{L^2(B)}^2 \geq \pi r^2 |f(a)|^2$ y como $\|f\|_{L^2(D)}^2 \geq \|f\|_{L^2(B)}^2$ tenemos el lema. \square

COROLARIO 8.3.1. $L^2(D, \mathcal{O})$ es un espacio de Hilbert

DEMOSTRACIÓN. Basta comprobar que es completo. Sea (f_n) de Cauchy en $L^2(D, \mathcal{O})$ por el lema anterior converge uniformemente en cada compacto luego el límite es una función holomorfa. \square

LEMA 8.3.2. Sea E un conjunto abierto relativamente compacto tal que $\overline{E} \subset D$. Dado $\epsilon > 0$ existe un subespacio cerrado $F \subset L^2(D, \mathcal{O})$ de dimensión cofinita (complementario de dimensión finita) tal que

$$\forall f \in F \quad \|f\|_{L^2(E)} \leq \epsilon \|f\|_{L^2(D)}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\overline{E} \subset D$ y D abierto $\forall x \in \overline{E} \exists r_x B(x, r_x) \subset D$ tendremos $\overline{E} \subset \bigcup B(x, \frac{r_x}{2})$ como \overline{E} compacto existirá un recubrimiento finito. Es decir puntos $a_1 \dots a_n \in D$ tales que

$$B(a_j, r) \subset D$$

$$E \subset \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \frac{r}{2})$$

(r se escoge como el mínimo de los r_j de forma que $B(a_j, r) \subset D$ y se sustituyen las $B(a_j, \frac{r_j}{2})$ por varias con radio $r/2$ que la recubran y estén contenidas en $B(a_j, r_j)$)

Escogemos N suficientemente grande para que $2^{-(N+1)} n \leq \epsilon$

Sea F el conjunto de las funciones $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ que se anulan en cada uno de los a_j hasta orden N

Cualquier función $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ se puede desarrollar alrededor de a_j como

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} c_{ji}(z - a_j)^i + \sum_{i=N}^{\infty} c_{ji}(z - a_j)^i$$

y considerando $\tilde{f} = f - \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N-1} c_{ij}(z - a_j)^i$ es claro que $\tilde{f} \in F$.

Dado que el complementario de F está generado por los monomios $(z - a_j)^i$ la codimensión de F es menor o igual que Nn .

Sea $g \in F$ alrededor de a_j el desarrollo de Taylor es $g(z) = \sum_{k=N}^{\infty} c_k(z - a_j)^k$ y tendremos

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2 = \sum_{k=N}^{\infty} |c_k|^2 \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1}$$

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, \frac{r}{2}))}^2 = \sum_{k=N}^{\infty} |c_k|^2 \frac{\pi r^{2k+2} 2^{-2k-2}}{k+1} = 2^{-2N-2} \sum_{k=N}^{\infty} |c_k|^2 \frac{\pi r^{2k+2} 2^{-2(k-N)}}{k+1} \leq 2^{-2N-2} \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2$$

luego $\|f\|_{L^2(B(a_j, \frac{r}{2}))} \leq 2^{-N-1} \|f\|_{L^2(B(a_j, r))} \leq 2^{-N-1} \|f\|_{L^2(D)}$

y como por la linealidad de la integral con respecto al dominio

$$\|f\|_{L^2(E)} \leq \sum_{j=1}^n \|f\|_{L^2(B(a_j, \frac{r}{2}))}$$

tenemos

$$\|f\|_{L^2(E)} \leq n 2^{-N-1} \|f\|_{L^2(D)} \leq \epsilon \|f\|_{L^2(D)}$$

□

8.4. Cocadenas de Cech integrables

Sea X una superficie de Riemann y (D_i, z_i) una familia cualquiera *finita* $i = 1 \dots n$ de cartas (no estamos exigiendo que los U_i recubran X) tal que $z_i(D_i)$ es un disco de \mathbb{C} .

Sea U_i una familia de abiertos $U_i \subset D_i$ y sea $|\mathcal{U}| = U_1 \cup \dots \cup U_n$

Vamos a introducir una norma en $|\mathcal{U}|$ para las cocadenas correspondientes al haz de funciones holomorfas en $|\mathcal{U}|$ $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

- $\eta = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ definimos $\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = \sum_i \|f_i\|_{L^2(U_i)}^2$
- $\vartheta = (f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ definimos $\|\vartheta\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = \sum_i \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}^2$

Calculadas respecto a las cartas respectivas, es decir

$$\sum \|f_i\|_{L^2(U_i)}^2 = \sum_i \|f_i \cdot z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i))}^2$$

El conjunto de cocadenas con norma finita es un subespacio vectorial $C_{L^2}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ de $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y tienen estructura de espacio de Hilbert.

Los cociclos forman un subespacio cerrado (el operador cofrontera es continuo y son el núcleo) que se denota $Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Denotaremos $V \Subset U$ cuando

- V, U son abiertos V relativamente compacto
- $\bar{V} \subset U$

Si tenemos familias finitas $\mathcal{U} = \{U_i\}$ y $\mathcal{V} = \{V_i\}$ tales que $V_i \Subset U_i$ escribiremos $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$. Tendremos que para cualquier cocadena $\xi \in C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ $\|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} < \infty$ puesto que las funciones estarán acotadas en los \bar{V}_i (compactos) y por tanto en los V_i y hay un número finito de ellos.

PROPOSICIÓN 8.4.1. *Si $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ existe un subespacio cerrado $F \subset Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ de codimensión finita tal que*

$$\forall \xi \in F \quad \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} \leq \epsilon \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del lema 8.3.2 □

PROPOSICIÓN 8.4.2. *Sea X una superficie de Riemann y \mathcal{G} una colección finita $\{G_i\}$ de cartas en X . Supongamos que tenemos $\mathcal{W} \ll \mathcal{V} \ll \mathcal{U} \ll \mathcal{G}$ existe una*

constante $C > 0$ tal que $\forall \xi \in Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ existen elementos $\vartheta \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta \in C_{L^2}^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\vartheta = \xi + \delta(\eta) \quad \text{en } \mathcal{W}$$

$$\max(\|\vartheta\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathcal{W})}) \leq C\|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\xi = (f_{ij}) \in Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \subset Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ como vimos (teorema 8.2.1) $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{E}) = 0$ y existe una cocadena $(g_i) \in C_{L^2}^0(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tal que

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{en } V_i \cap V_j$$

Como $\bar{\partial}f_{ij} = 0$ (pues es holomorfa) $\bar{\partial}g_i = \bar{\partial}g_j$ en $V_i \cap V_j$ y por la definición 4.1.3 existirá $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(|\mathcal{V}|)$ tal que $\omega|_{V_i} = \bar{\partial}g_i$

Como $|\mathcal{W}| \Subset |\mathcal{V}|$ existe una función suave $\psi \in \mathcal{E}(X)$ tal que (ver [LeeSM])

$$\text{supp}(\psi) \subset |\mathcal{V}| \quad \forall x \in |\mathcal{W}| \quad \psi(x) = 1$$

$\psi\omega$ se puede considerar como un elemento de $\mathcal{E}(|\mathcal{G}|)$ y por el teorema 8.1.1 existirán funciones $h_i \in \mathcal{E}(G_i)$ tales que $\bar{\partial}h_i = \psi\omega$ en G_i y tendremos $\bar{\partial}h_i = \bar{\partial}h_j$ en $G_i \cap G_j$ y por tanto $l_{ij} = h_j - h_i \in \mathcal{O}(G_i \cap G_j)$

Sea $\vartheta = (l_{ij}|_{\mathcal{U}})$ tendremos que $\vartheta \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ pues como resulta de aplicar δ a (h_i) tendremos $\delta(\vartheta) = 0$ (No podemos decir que $\vartheta \in B_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ puesto que las h_i no tienen que ser holomorfas)

En W_i tendremos $\bar{\partial}h_i = \psi\omega = \omega = \bar{\partial}g_i$ y por tanto $h_i - g_i$ será holomorfa en W_i

Como $\overline{W_i}$ es compacto $h_i - g_i$ será acotada en $\overline{W_i}$ y por tanto en W_i y tendremos

$$\eta = (h_i - g_i)|_{\mathcal{W}} \in C_{L^2}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$$

Ahora $l_{ij} - f_{ij} = (h_j - h_i) - (g_j - g_i) = (h_j - g_j) - (h_i - g_i)$ en $W_i \cap W_j$ luego

$$\vartheta - \xi = \delta(\eta) \quad \text{en } \mathcal{W}$$

Vamos ahora con la acotación. Consideremos el producto directo de espacios de Hilbert

$$H = Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \times Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \times C_{L^2}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$$

con la norma $\|(\vartheta, \xi, \eta)\|_H = (\|\vartheta\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})}^2 + \|\eta\|_{L^2(\mathcal{W})}^2)^{\frac{1}{2}}$

y sea L el subespacio $L = \{(\vartheta, \xi, \eta) \in H : \vartheta = \xi + \delta(\eta) \text{ en } \mathcal{W}\}$ L será cerrado, y por tanto un espacio de Hilbert

Por la primera parte de la proposición la proyección (continua) $\pi : L \rightarrow Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ será suprayectiva y por el Teorema de la aplicación abierta entre espacios de Banach será abierta.

Sea $A = \{(\vartheta, \xi, \eta) \in L : \|(\vartheta, \xi, \eta)\|_H < 1\}$ como π es abierta existirá un entorno V de cero (en $Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$) tal que $V \subset \pi(A)$ es decir existirá $\epsilon > 0$ tal que $\{\xi : \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} < \epsilon\} \subset \pi(A)$

Sea $C = \frac{2}{\epsilon}$ dado $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ sea $K = \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})}$ entonces $\xi' = \frac{\xi}{KC} \in V$ y existe $(\vartheta', \xi', \eta') \in A$

haciendo $\vartheta = KC\vartheta', \eta = KC\eta'$ se tiene $\|(\vartheta, \xi, \eta)\|_H = KC\|(\vartheta', \xi', \eta')\| < KC = C\|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})}$

y tenemos demostrada la proposición. \square

PROPOSICIÓN 8.4.3. *Con las mismas suposiciones que en la proposición anterior, existe un subespacio de dimensión finita $S \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que*

$$\forall \xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \quad \exists \sigma \in S \exists \eta \in C^0(\mathcal{W}, \mathcal{O}) \quad \sigma = \xi + \delta(\eta) \text{ en } \mathcal{W}$$

OBSERVACIÓN. *La proposición dice que el homomorfismo de restricción $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tiene imagen de dimensión finita (ver sección 4.7.2)*

DEMOSTRACIÓN. Sea C la constante de la proposición anterior y $\epsilon = \frac{1}{2C}$. Por la proposición 8.4.1 existe un subespacio cerrado de codimensión finita $A \subset Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$\forall \xi \in A \quad \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} \leq \epsilon \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

Sea S el complemento ortogonal de A en $Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

Dado cualquier $\xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ como $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ tendremos $\|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} = M < \infty$

Por la proposición 8.4.2 existen $\vartheta_0 \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_0 \in C_{L^2}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\vartheta_0 = \xi + \delta(\eta_0) \quad \text{en } \mathcal{W} \quad \|\vartheta_0\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq CM \quad \|\eta_0\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq CM$$

Podremos descomponer $\vartheta_0 = \xi_0 + \sigma_0$ $\xi_0 \in A, \sigma_0 \in S$

Supongamos que hemos construido $\vartheta_k \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_k \in C_{L^2}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ tales que

$$-\vartheta_k = \xi_{k-1} + \delta(\eta_k) \quad \text{en } \mathcal{W}$$

$$-\vartheta_k = \xi_k + \sigma_k \quad \xi_k \in A, \sigma_k \in S$$

$$-\|\vartheta_k\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-k}CM$$

Como $\vartheta_k = \xi_k + \sigma_k$ es descomposición ortogonal $\|\xi_k\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \|\vartheta_k\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-k}CM$

y como $\xi_k \in A$ $\|\xi_k\|_{L^2(\mathcal{V})} \leq \epsilon \|\xi_k\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \|\vartheta_k\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-k}\epsilon CM \leq 2^{-k-1}M$

Por la proposición 8.4.2 existen elementos $\vartheta_{k+1} \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_{k+1} \in C_{L^2}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\vartheta_{k+1} = \xi_k + \delta(\eta_{k+1}) \quad \text{en } \mathcal{W} \quad \|\vartheta_{k+1}\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-k-1}CM \quad \|\eta_{k+1}\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-k-1}CM$$

y hemos completado el paso de inducción.

En \mathcal{W} podemos poner $\xi_k = \vartheta_k - \sigma_k = \xi_{k-1} + \delta(\eta_k) - \sigma_k$ y por recurrencia

$$\xi_k + \sum_{i=0}^k \sigma_i = \xi + \delta\left(\sum_{i=0}^k \eta_i\right) \quad \text{en } \mathcal{W}$$

además $\max(\|\xi_k\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\sigma_k\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta_k\|_{L^2(\mathcal{W})}) \leq 2^{-k}CM$

Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ y las series $\sum_{i=0}^k \sigma_i$ y $\sum_{i=0}^k \eta_i$ convergen siendo su suma

$\sigma = \sum_{i=0}^k \sigma_i \in S$ y $\eta = \sum_{i=0}^k \eta_i \in C_{L^2}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ obteniéndose así

$$\xi + \delta(\eta) = \sigma \quad \text{en } \mathcal{W}$$

□

8.5. Homomorfismos con imagen Finitodimensional

TEOREMA 8.5.1. *Sea X una superficie de Riemann Y_1, Y_2 subconjuntos abiertos tales que $Y_1 \Subset Y_2 \subset X$. Entonces el homomorfismo de restricción (ver sección 4.7.2)*

$$\Lambda_{Y_2}^{Y_1} : H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

tiene imagen finito dimensional

DEMOSTRACIÓN. Podemos encontrar una familia finita de cartas $\mathcal{G} = \{G_i, z_i\}$ de X y conjuntos abiertos relativamente compactos $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset G_i$ tales que

$$- Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^n W_i \Subset \bigcup_{i=1}^n U_i \subset Y_2$$

- $z_i(G_i), z_i(U_i), z_i(W_i)$ son discos abiertos de \mathbb{C}

$$\text{Definimos } Y' = \bigcup_{i=1}^n W_i, Y'' = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

Sean $\mathcal{U} = \{U_i\}, \mathcal{W} = \{W_i\}$ por la proposición 8.4.3 el homomorfismo de restricción $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tiene imagen de dimensión finita. Por la proposición 8.2.1 tenemos que $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$ y $H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$ (biholomorfos a discos) y por el teorema 4.7.1

$$H^1(Y'', \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \quad H^1(Y', \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$$

luego el homomorfismo $H^1(Y'', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{O})$ también tiene imagen finito dimensional.

Factorizando el homomorfismo $H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$ (ver proposición 4.7.3) como

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y'', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

tendremos el teorema □

COROLARIO 8.5.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$$

DEMOSTRACIÓN. Si X es compacta podemos hacer $Y_1 = Y_2 = X$ en el teorema anterior. \square

DEFINICIÓN 8.5.1. Sea X una superficie de Riemann compacta, se denomina *genus analítico* a $g_{an} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$

8.6. Existencia de funciones meromorfas

DEFINICIÓN 8.6.1. Sea S un conjunto de funciones meromorfas en una superficie de Riemann compacta X . Se dice que S separa puntos de X si $\forall p, q \in X$ distintos existe $f \in S$ tal que $f(p) \neq f(q)$. Se dice que S separa tangentes de X si $\forall p \in X$ existe $f \in S$ tal que $\text{mult}_p(F) = 1$ (siendo $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la holomorfa asociada).

TEOREMA 8.6.1. Sea X una superficie de Riemann y $Y \Subset X$ un subconjunto abierto relativamente compacto. $\forall a \in Y$ existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ que tiene un polo en a y es holomorfa en $Y - \{a\}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $k = \dim(\text{Imag}(H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}))) < \infty$ por el teorema 8.5.1

Escojamos una carta (U_1, z) centrada en a ($z(a) = 0$) y sea $U_2 = X - \{a\}$

$\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ es un recubrimiento abierto de X . Consideremos las funciones holomorfas $\xi^j = -z^{-j}$ en $U_1 \cap U_2$ son cociclos $\xi^j \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ (como sólo hay 2 conjuntos en \mathcal{U} tenemos que cualquier elemento de $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ lo es de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$). Consideremos dichos cociclos para $j \in \{1, \dots, k+1\}$.

Los cociclos $\xi^j|_Y \in Z^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{O})$ y sólo puede haber k linealmente independientes (módulo $B^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{O})$) así tendremos una relación

$$c_1 \xi^1 + \dots + c_{k+1} \xi^{k+1} = \delta((f_i)) \quad \text{respecto } \mathcal{U} \cap Y$$

con algún c_j no nulo.

Es decir

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{en } U_1 \cap U_2 \cap Y$$

Así la función $f_1 + \sum_1^{k+1} c_j z^{-j} \in \mathcal{M}(U_1 \cap Y)$ coincide con $f_2 \in \mathcal{O}(U_2 \cap Y)$ en $U_1 \cap U_2 \cap Y$ luego existe $f \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $f|_{U_1} = f_1 + \sum_1^{k+1} c_j z^{-j}$ y $f|_{U_2} = f_2$ que es la función buscada. \square

TEOREMA 8.6.2. *Sea X una superficie de Riemann y $Y \Subset X$ un subconjunto abierto relativamente compacto. $\forall a \in Y, \forall L \in \mathbb{Z} > 0$ existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ que tiene en a un polo de orden primo mayor que L y es holomorfa en $Y - \{a\}$*

DEMOSTRACIÓN. Modificamos la demostración anterior haciendo $\xi^j = -z^{-r_j}$ siendo $\{r_j\}$ un conjunto de $k+1$ números primos mayores que L , tendremos como antes

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-r_j} = f_2 - f_1 \quad \text{en } U_1 \cap U_2 \cap Y$$

$f|_{U_1} = f_1 + \sum_1^{k+1} c_j z^{-r_j}$ y $f|_{U_2} = f_2$ será la función buscada y tendrá un polo de orden r_k que será un número primo mayor que L \square

COROLARIO 8.6.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta, $\mathcal{M}(X)$ separa puntos de X*

DEMOSTRACIÓN. Dados p, q basta escoger $f \in \mathcal{M}(X)$ con un polo en p y holomorfa en q . \square

COROLARIO 8.6.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta, $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes de X .*

DEMOSTRACIÓN. Dado $p \in X$ existe por el teorema 8.6.1 $g \in \mathcal{M}(X)$ con un polo en p y holomorfa en el resto de X (Si el orden del polo es 1 ya tendríamos el teorema considerando).

Supongamos que es de orden K por el teorema 8.6.2 existe una función $h \in \mathcal{M}(X)$ que tiene un polo en p de orden primo M mayor que K . Tendremos $\text{mcd}(M, K) = 1$ y existirán números enteros α, β tales que $\alpha M + \beta K = 1$

Si consideramos la función $f = g^{-\beta}h^{-\alpha} \in \mathcal{M}(X)$ tendrá un cero de orden 1 en p . \square

TEOREMA 8.6.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta y sean a_1, \dots, a_n puntos distintos de X . Dados n números complejos c_1, \dots, c_n existe una función meromorfa f tal que $f(a_i) = c_i$*

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el teorema 8.6.2 (con $Y = X$) para buscar para cada p_j una función f_{ij} con un polo en a_i y holomorfa en el resto de X

Escojemos constantes v_{ij} tales que $\forall k \in \{1, \dots, n\} f_{ij}(a_k) \neq f_{ij}(a_j) + v_{ij}$ y definimos

$$g_{ij}(x) = \frac{f_{ij}(x) - f_{ij}(a_j)}{f_{ij}(x) - f_{ij}(a_j) + v_{ij}}$$

tendremos $g_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ además $g_{ij}(a_i) = 1$ y $g_{ij}(a_j) = 0$ y es holomorfa en todos los a_k . Considerando

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \left(\prod_{j \neq i} g_{ij} \right)$$

tenemos la función buscada. \square

8.7. Finales de Laurent

Denotaremos por $\mathcal{L}(z)$ a los polinomios de Laurent en z es decir del tipo $r(z) = \sum_{i=N}^M c_i z^i$ (Donde N, M pueden ser negativos).

DEFINICIÓN 8.7.1. *Un polinomio de Laurent $r(z) = \sum_{k=M}^S c_k z^k$ ($-\infty < M < S < \infty$) se dice que es un final de Laurent de una serie de Laurent $h(z)$ cuando la serie $h - r$ es de la forma $\sum_{S+1}^{\infty} a_k z^k$.*

PROPOSICIÓN 8.7.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta $p \in X$ y (U, z) una carta local centrada en p . Dado un polinomio de Laurent $r(z)$ existe $f \in \mathcal{Q}(X)$ cuyo desarrollo en serie de Laurent en p tiene a $r(z)$ como un final de Laurent*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r(z) = \sum_{i=n}^m c_i z^i$ con $c_n, c_m \neq 0$. $r(z)$ tiene $m + 1 - n$ términos. Vamos a emplear inducción en el número de términos t .

Si $t = 1$, $r(z) = cz^m$ y por la proposición 11.1.1 existe una función f de orden m en p .

Supongamoslo cierto para menos de t términos y sea $r(z) = \sum_{i=n}^m c_i z^i$ con $t + 1$ términos, siendo el término de menor exponente $c_n z^n$

Por la proposición 11.1.1 podemos encontrar una función $h \in \mathcal{Q}(X)$ tal que su serie de Laurent en p tiene un final de Laurent $c_n z^n$.

Sea $s(z)$ el polinomio de Laurent que es final de Laurent de la serie de la función $h - r$ hasta el exponente m . Este polinomio tiene t o menos términos y existe $g \in \mathcal{Q}(X)$ cuya serie de Laurent en p tiene a $s(z)$ como final de Laurent.

Considerando $f = h - g$ vemos que su desarrollo en serie de Laurent en p tiene a $r(z)$ como final. \square

TEOREMA 8.7.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $p_1, \dots, p_n \in X$ un número finito de puntos arbitrarios. Sean (U_i, z_i) cartas locales centradas en cada p_i y $r_i(z_i)$ polinomios de Laurent arbitrarios. Existe $f \in \mathcal{Q}(X)$ tal que su serie de Laurent en p_i tiene a r_i como final de Laurent*

DEMOSTRACIÓN. Sea $N \in \mathbb{Z}$ mayor que el mayor exponente de cada uno de los r_i . Añadiendo ceros podemos considerar cada r_i como un polinomio de Laurent con términos de grado menor que N .

Por la proposición 8.7.1 existen funciones $g_i \in \mathcal{Q}(X)$ tales que r_i es un final de Laurent en p_i . Sea M el mínimo de los $\text{ord}_{p_i}(g_i)$, por el corolario 11.1.2 existen funciones $h_i \in \mathcal{Q}(X)$ tales que $\text{ord}_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$ y $\text{ord}_{p_j}(h_i) \geq N - M$.

En cada p_i la función $h_i g_i$ tiene a r_i como un final de Laurent pues en un entorno de p_i se tiene $g_i(z) = r_i(z) + \sum_{\alpha=N} c_\alpha z^\alpha$, $h_i(z) = 1 + \sum_{\beta=N-M} c_\beta z^\beta$, y $r_i(z) = \sum_{\gamma=M}^{N-1} c_\gamma z^\gamma$

Además alrededor de cada p_j ($\neq p_i$) $h_i(z) = \sum_{\alpha=N-M} c_\alpha z^\alpha$ $g_i = \sum_{\beta=M} c_\beta z^\beta$ luego el desarrollo de $h_i g_i$ no tiene términos con exponente menor que N .

Por tanto considerando $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i \in \mathcal{Q}(X)$ tenemos la función buscada. \square

COROLARIO 8.7.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $p_1, \dots, p_n \in X$ un número finito de puntos arbitrarios. Sean (U_i, z_i) cartas locales centradas en cada p_i y $r_i(z_i)$ polinomios de Laurent arbitrarios. Existe $f \in \mathcal{Q}(X)$ tal que su serie de Laurent en p_i tiene a r_i como final de Laurent*

DEMOSTRACIÓN. Basta hacer en el teorema anterior $r_i(z_i) = z_i^{m_i}$ □

Divisores

DEFINICIÓN 9.0.2. Sea X una Superficie de Riemann, un divisor en X es una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ cuyo soporte (adherencia del conjunto de puntos en los que D es distinto de cero) es un conjunto discreto. Con la adición puntual es un grupo abeliano que se denota $Div(X)$

En el caso de que X sea compacta para cualquier divisor D el soporte ha de ser un conjunto finito.

La relación $D \leq D'$ cuando $\forall x \in X D(x) \leq D'(x)$ es una relación de orden parcial.

NOTA. Es útil emplear una notación de suma formal para los divisores

$$D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$$

donde $n_p = D(p)$

Cada divisor D se puede descomponer en dos divisores $D = P - N$ mayores que 0 de soporte disjunto

$$D = \sum_{p \in X, n_p > 0} n_p \cdot p - \sum_{p \in X, n_p < 0} (-n_p) \cdot p$$

P, N se denominan divisores positivo y negativo.

Los divisores son un haz rascacielo generalizado sobre la superficie de Riemann X como se comprueba aplicando la definición 4.1.7

DEFINICIÓN 9.0.3. Un divisor D se denomina efectivo cuando $\forall p \in X D(p) \geq 0$

DEFINICIÓN 9.0.4. Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X .

Se define el grado de un divisor $dg(D)$ como

$$D = \sum_{p \in X} D(p)$$

Como el soporte es finito la suma está bien definida.

El grado es una aplicación $dg : Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que se ve fácilmente que es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo se denota por $Div_0(X)$

9.1. Divisores principales y canónicos

9.1.1. Divisores principales.

Sea f una función meromorfa definida en X

DEFINICIÓN 9.1.1. El divisor de f es un divisor definido por

$$(div(f))(p) = ord_p(f) \quad div(f) = \sum_{p \in X} ord_p(f) \cdot p$$

Un divisor que es el divisor de una función meromorfa se denomina *Principal*.

El conjunto de divisores principales se denota $PDiv(X)$

Consecuencia directa de la proposición 5.2.2 es

PROPOSICIÓN 9.1.1. Sean f, g funciones meromorfas de X distintas de cero. Se tiene

- $div(fg) = div(f) + div(g)$
- $div(\frac{f}{g}) = div(f) - div(g)$ luego $div(\frac{1}{f}) = -div(f)$

Debido a esto los divisores principales forman un subgrupo de $Div(X)$

PROPOSICIÓN 9.1.2. Si X es una superficie de Riemann compacta y f es una función meromorfa en X entonces

$$dg(div(f)) = 0 \quad div(f) \in Div_0(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema 5.3.9 □

PROPOSICIÓN 9.1.3. *En la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ es condición necesaria y suficiente para que D sea un divisor principal que $dg(D) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. En la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ las funciones meromorfas son de la forma

$$f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$$

luego

$$div(f) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty$$

y $dg(div(f)) = \sum e_i - \sum e_i = 0$

Recíprocamente un divisor se puede poner como $D = \sum e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ si $dg(D) = 0$ ha de ser $e_\infty = -\sum e_i$ entonces considerando $f = \prod (z - \lambda_i)^{e_i}$ tenemos $div(f) = D$. □

9.1.2. Divisores canónicos.

DEFINICIÓN 9.1.2. *Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann X . Se define $div(\omega)$ como*

$$(div(\omega))(p) = ord_p(\omega) \quad div(\omega) = \sum_{p \in X} ord_p(\omega) \cdot p$$

Un divisor que es el divisor de una 1-forma meromorfa se denomina Canónico.

El conjunto de divisores canónicos se denota $KDiv(X)$

EJEMPLO. *Consideremos la 1-forma dz en $\widehat{\mathbb{C}}$ tendremos que para $p \neq \infty$ tenemos $ord_p(dz) = 0$. Para calcular en ∞ consideremos la carta $w = \frac{1}{z}$ la forma en estas coordenadas será $\omega = -\frac{1}{w^2} dw$ y tendremos $ord_\infty(dz) = -2$.*

En general una 1-forma meromorfa será

$$\omega = \left(\sum_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i} \right) dz$$

y tendremos

$$div(\omega) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - \left(2 + \sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty$$

Por tanto el grado de los divisores canónicos en $\widehat{\mathbb{C}}$ es -2

LEMA 9.1.1. Sean ω_1, ω_2 1-formas meromorfas en una superficie de Riemann X , no siendo ω_1 idénticamente nula. Existe una única función meromorfa f en X tal que $\omega_2 = f\omega_1$ y tendremos $\text{div}(\omega_2) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega_1)$

DEMOSTRACIÓN. Sea una carta (U, ϕ) de X . En $\phi(U)$ tendremos $\omega_1 = g_1 dz$ y $\omega_2 = g_2 dz$ siendo g_1, g_2 meromorfas, definimos la función meromorfa $h = \frac{g_2}{g_1}$

Ahora definimos en U la función meromorfa en $f = h \cdot \phi$

Es fácil comprobar que la función está bien definida y es independiente de las cartas empleadas. \square

COROLARIO 9.1.1. La diferencia entre dos divisores canónicos es uno principal

$$K\text{Div}(X) = \text{div}(\omega) + P\text{Div}(X)$$

para cualquier 1-forma meromorfa

9.1.3. El grado de un divisor canónico en una superficie de Riemann compacta.

La fórmula de Hurwitz en una superficie de Riemann X de genus g y una función f meromorfa (siendo F la holomorfa asociada tendremos en este caso $Y = \widehat{\mathbb{C}}$ de genus cero) es

PROPOSICIÓN 9.1.4. Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g , entonces existe un divisor canónico de X con grado $2g - 2$ (posteriormente veremos que todos los divisores canónicos tienen el mismo grado: ver proposición 9.4.1)

DEMOSTRACIÓN. Hemos visto que en dicha superficie existirá una función f meromorfa no constante (teorema 8.6.1) Sea F la holomorfa $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ asociada. Aplicando fórmula de Hurwitz (5.4.1)

$$2g - 2 + 2dg(F) = \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

Hemos visto que la 1-forma dz en $\widehat{\mathbb{C}}$ tiene un polo doble en ∞ y no tiene más polos ni ceros. Si consideramos el “pullback” de dz , $\eta = F^*(dz)$ tendremos

$$dg(\operatorname{div}(\eta)) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\eta) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(F^*(dz)) = \sum_{p \in X} [(1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(dz)) \operatorname{mult}_p(F) - 1]$$

debido a la proposición 7.2.9

$$dg(\operatorname{div}(\eta)) = \sum_{p \in X} (\operatorname{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p \in X} (\operatorname{ord}_{F(p)}(dz) \operatorname{mult}_p(F)) = \sum_{p \in X} (\operatorname{mult}_p(F) - 1) - \sum_{p=F^{-1}(\infty)} 2 \operatorname{mult}_p(F)$$

y por tanto

$$dg(\operatorname{div}(\eta)) = 2g - 2 + 2dg(F) - \sum_{p=F^{-1}(\infty)} 2 \operatorname{mult}_p(F) = 2g - 2 + 2dg(F) - 2dg(F) = 2g - 2$$

$$dg(\operatorname{div}(\eta)) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\eta) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(F^*(dz)) = \sum_{p \in X} [(1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(dz)) \operatorname{mult}_p(F) - 1]$$

□

9.2. Pullback de divisores

Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann

DEFINICIÓN 9.2.1. Para cada $q \in Y$ se define el divisor imagen inversa de q , que se denota $F^*(q)$, como

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \operatorname{mult}_p(F) \cdot p$$

Por el teorema 5.3.8 si X, Y son compactas $dg(F^*(q)) = dg(F)$

DEFINICIÓN 9.2.2. Sea $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ un divisor en Y . Se define el pullback del divisor por F al divisor de X

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q \cdot F^*(q) \quad (F^*(D))(p) = \operatorname{mult}_p(F) D(F(p))$$

PROPOSICIÓN 9.2.1. Con las notaciones anteriores

1) El pullback es un homomorfismo entre los grupos $F^*; \operatorname{Div}(Y) \rightarrow \operatorname{Div}(X)$

2) El pullback de un divisor principal es principal y se tiene $F^*(\text{div}(g)) = \text{div}(F^*(g)) = \text{div}(g.F)$

3) Si X, Y son compactas $dg(F^*(D)) = dg(F)dg(D)$

DEMOSTRACIÓN. 1) De la definición se deduce inmediatamente que es un homomorfismo.

2) Sea g meromorfa en Y y sea $p \in X$ tendremos

$$(F^* \text{div}(g))(p) = \text{mult}_p(F)(\text{div}(g)(F(p))) = \text{mult}_p(F) \text{ord}_{F(p)}(g)$$

y también por la proposición 5.3.3

$$\text{ord}_p(g.F) = \text{mult}_p(F) \cdot \text{ord}_{F(p)}(g)$$

3) Si el soporte de D es un sólo punto es evidente y por la linealidad se extiende al caso general. \square

9.3. Otros divisores

DEFINICIÓN 9.3.1. Dados los divisores $D_1 \dots D_n$ se define el divisor $\text{mín}(D_1, \dots, D_n)$ por medio de

$$\text{mín}(D_1, \dots, D_n)(p) = \text{mín}(D_1(p), \dots, D_n(p))$$

análogamente se define $\text{máx}(D_1, \dots, D_n)$

DEFINICIÓN 9.3.2. Se definen el divisor de ceros y el divisor de polos de una función meromorfa f en X como

$$\text{div}_0(f) = \sum_{p \text{ ord}_p(f) > 0} \text{ord}_p(f) \cdot p \quad \text{div}_\infty(f) = \sum_{p \text{ ord}_p(f) < 0} -\text{ord}_p(f) \cdot p$$

evidentemente $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$

Evidentemente son funciones no negativas

DEFINICIÓN 9.3.3. Dada una cadena de caminos en X $\gamma = \sum_i n_i \gamma_i$ el divisor

$$\partial\gamma = \sum n_i (\gamma_i(1) - \gamma_i(0))$$

es un divisor llamado divisor frontera que tiene grado cero

DEFINICIÓN 9.3.4. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Se define el divisor de ramificación en X como

$$R_F = \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1) \cdot p$$

Se define el divisor crítico en Y como

$$B_F = \sum_{q \in Y} \left[\sum_{p \in F^{-1}(q)} (mult_p(F) - 1) \right] \cdot q$$

Si X, Y son compactas ambos divisores tienen el mismo grado. Además por la fórmula de Hurwitz tenemos

$$2g(X) - 2 = dg(F)(2g(Y) - 2) + dg(R_F)$$

PROPOSICIÓN 9.3.1. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y ω una 1-forma meromorfa no idénticamente nula en Y . Se cumple

$$div(F^*(\omega)) = F^*(div(\omega)) + R_F$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$div(F^*(\omega)) = \sum_{p \in X} ord_p(F^*(\omega)) \cdot p = \sum_{p \in X} [(1 + ord_{F(p)}(\omega)) mult_p(F) - 1] \cdot p$$

por la proposición 7.2.9 luego

$$div(F^*(\omega)) = \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1] \cdot p + \sum_{p \in X} [ord_{F(p)}(\omega) mult_p(F)] \cdot p = R_F + \sum_{p \in X} [ord_{F(p)}(\omega) mult_p(F)] \cdot p$$

pero

$$F^*(\text{div}(\omega)) = \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F)(\text{div}(\omega)(F(p)))] \cdot p = \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) \cdot \text{ord}_{F(p)}(\omega)] \cdot p$$

□

9.4. Equivalencia lineal de Divisores

DEFINICIÓN 9.4.1. *Dos divisores D, D' se denominan linealmente equivalentes (se denota $D \sim D'$) cuando $D - D'$ es un divisor principal.*

Del corolario 9.1.1 se deduce que todos los divisores canónicos son linealmente equivalentes.

PROPOSICIÓN 9.4.1. *Sea X una superficie de Riemann*

- 1) \sim es una relación de equivalencia en $\text{Div}(X)$
- 2) $D \sim 0$ si y sólo si D es un divisor principal
- 3) Si X compacta, los divisores equivalentes tienen el mismo grado
- 4) Si X compacta y $f \in \mathcal{M}(X)$ se tiene $dg(\text{div}_0(f)) = dg(\text{div}_\infty(f))$
- 5) Si X compacta los divisores canónicos tienen grado $2g - 2$

DEMOSTRACIÓN. 1) Considerando una función constante distinta de cero es evidente que se cumple la propiedad reflexiva.

Si $\forall p \in X (D - D')(p) = \text{ord}_p(f)$ tendremos $(D' - D)(p) = -\text{ord}_p(f) = \text{ord}_p(\frac{1}{f})$ y se cumple la propiedad simétrica

Si $\forall p (D - D')(p) = \text{ord}_p(f)$ y $(D' - D'')(p) = \text{ord}_p(g)$ tendremos $(D - D'')(p) = \text{ord}_p(fg)$ y se cumplirá la transitiva

2) Evidente de la definición

3) Si $D = \text{div}(f) + D'$ como para X compacta por la proposición 9.1.2 los divisores principales tienen grado cero tenemos $dg(D) = dg(D')$

- 4) Consecuencia directa del teorema 5.3.9
- 5) Consecuencia directa de que los divisores canónicos son linealmente equivalentes y de la proposición 9.1.4 \square

PROPOSICIÓN 9.4.2. *Sea X una superficie de Riemann*

- 1) *Los divisores asociados a los diferentes puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son linealmente equivalentes (a p se le asocia $1.p$)*
- 2) *Si $F: X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa y D, D' linealmente equivalentes en Y . Entonces $F^*(D)$ y $F^*(D')$ son linealmente equivalentes en X*
- 3) *Si $F: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es holomorfa los divisores de imagen inversa son equivalentes*
- 4) *Si f meromorfa en X tenemos que $\text{div}_0(f)$ es linealmente equivalente a $\text{div}_\infty(f)$*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ los divisores asociados a los puntos son $1.\alpha_1$ y $1.\alpha_2$ si consideramos $f = \frac{z-\alpha_1}{z-\alpha_2}$ tendremos $\text{div}(f) = 1.\alpha_1 - 1.\alpha_2$. Si $\alpha_1 = \infty$ basta considerar $f(z) = z - \alpha_2$

2) Sea $D - D' = \text{div}(f)$ para una f meromorfa en Y por la proposición 9.2.1 tenemos

$$F^*(D) - F^*(D') = F^*(D - D') = \text{div}(f.F)$$

- 3) Los divisores imagen son los pullback de los asociados a puntos
- 4) Directamente de la definición 9.3.2

\square

9.5. Haces asociados a divisores

Sea D un divisor en una superficie de Riemann X

DEFINICIÓN 9.5.1. *Sea $U \subset X$ abierto, se define $\mathcal{O}_D(U)$ como el conjunto de las funciones meromorfas en U con polos acotados por D . Es decir $\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) : \text{div}(f) \geq -D\}$*

(Realmente las funciones no pueden tener un polo en p de orden superior al valor de D en p cuando $D(p) > 0$ y deben tener un cero en p de orden igual o superior a $-D(p)$ cuando $D(p) < 0$)

Con los homomorfismos de restricción habituales \mathcal{O}_D es un haz en X , que para el caso $D = 0$ coincide con el haz de las funciones holomorfas.

Es inmediato comprobar que en realidad es un *haz de espacios vectoriales*.

PROPOSICIÓN 9.5.1. Si $D_1 \leq D_2$ entonces $\mathcal{O}_{D_1}(U) \subset \mathcal{O}_{D_2}(U)$

DEMOSTRACIÓN. Evidente de la definición □

Como las únicas funciones holomorfas en una superficie de Riemann *compacta* son las constantes tenemos que si X es compacta

$$\mathcal{O}_0(X) \cong \mathbb{C}$$

PROPOSICIÓN 9.5.2. Sea X una superficie de Riemann compacta. Si D es un divisor en X tal que $dg(D) < 0$. Entonces $\mathcal{O}_D(X) = \{0\}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{O}_D(X)$ no idénticamente nulo, entonces $E = \text{div}(f) + D$ es un divisor positivo $deg(E) \geq 0$ pero por la proposición 9.1.2 $dg(\text{div}(f)) = 0$ luego $dg(E) = dg(D) < 0$ ¡contradicción! □

9.5.1. Sistemas lineales de divisores.

DEFINICIÓN 9.5.2. Dada una superficie de Riemann X se define el sistema lineal completo asociado al divisor D como

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \sim D, E \geq 0\}$$

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{O}_D(X) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) \geq -D\}$ y su espacio proyectivo asociado (sus puntos son los subespacios de dimensión 1) $P(\mathcal{O}_D(X))$

Podemos definir una aplicación

$$S : P(\mathcal{O}_D(X)) \rightarrow |D| \quad S(f) = \text{div}(f) + D$$

como $\text{div}(\lambda f) = \text{div}(f)$ la aplicación está bien definida.

PROPOSICIÓN 9.5.3. *Si X es una superficie de Riemann compacta. La aplicación S es una biyección*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E \in |D|$ como $E \sim D$ existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $E = D + \text{div}(f)$ como además $E \geq 0$ tenemos que $f \in \mathcal{O}_D(X)$ luego S es suprayectiva.

Supongamos que $S(f) = S(g)$ tendremos que $\text{div}(f) = \text{div}(g)$ luego $\text{div}(\frac{f}{g}) = 0$ y $\frac{f}{g}$ ha de ser holomorfa. Como X es compacta $\frac{f}{g}$ tiene que ser una constante luego $f = \lambda g$ (que son el mismo punto proyectivo). \square

Para las superficies de Riemann compactas los sistemas lineales completos asociados a los divisores tienen una estructura natural de espacio proyectivo.

DEFINICIÓN 9.5.3. *Se denomina sistema lineal de divisores de D a un subconjunto $Q \subset |D|$ tal que $S^{-1}(Q)$ es un subespacio proyectivo de $P(\mathcal{O}_D(X))$, definiéndose su dimensión como la de $S^{-1}(Q)$*

(Q vendrá por tanto definido por un subespacio $V \subset \mathcal{O}_D(X)$ de forma que $Q = \{D + \text{div}(f) : f \in V\}$ notar que $\dim(Q) = \dim(V) - 1$)

A un sistema lineal de divisores Q de grado d y dimensión r se le denomina g_d^r .

9.5.2. Isomorfismos y equivalencia.

PROPOSICIÓN 9.5.4. *Sean D_1, D_2 divisores linealmente equivalentes en una superficie de Riemann X . Entonces para cualquier abierto $U \subset X$ se tiene que $\mathcal{O}_{D_1}(U)$ y $\mathcal{O}_{D_2}(U)$ son espacios vectoriales isomorfos. por tanto también lo son los haces $\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}$*

DEMOSTRACIÓN. Como son equivalentes existirá h meromorfa tal que $D_1 = D_2 + \text{div}(h)$ y si $f \in \mathcal{O}_{D_1}(U)$ entonces $\text{div}(fh) = \text{div}(f) + \text{div}(h) \geq \text{div}(h) - D_1 = -D_2$ y $fh \in \mathcal{O}_{D_2}(U)$. Por tanto podemos definir el homomorfismo

$$\mu_h : \mathcal{O}_{D_1}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{D_2}(U) \quad \mu_h(f) = fh$$

Por simetría $\mu_{\frac{1}{h}}$ es el inverso, luego tenemos un isomorfismo. \square

EJEMPLO 9.5.1. $\mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})$

Sea $D \geq 0$ un divisor de $\widehat{\mathbb{C}}$ será de la forma $D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ cumpliéndose

$$\sum_i e_i + e_\infty \geq 0$$

definimos $f_D = \sum_i (z - \lambda_i)^{-e_i}$ y consideramos el espacio $V_D = \{g(z)f_D(z) : g(z) \text{ polinomio de grado } \leq dg(D)\}$

Sea $g(z)$ un polinomio de grado d se tiene $\text{div}(g) \geq -d \cdot \infty$ y por tanto

$$\text{div}(gf_D) = \sum_i -e_i \cdot \lambda_i + \left(\sum_i e_i\right) \cdot \infty \quad \text{div}(gf_D) + D \geq \left(\sum_i e_i + e_\infty - d\right) \cdot \infty = (dg(D) - d) \cdot \infty$$

y $gf_D \in \mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})$

Consideremos ahora $h \in \mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})$ y $g = \frac{h}{f_D}$ tendremos

$$\text{div}(g) = \text{div}(h) - \text{div}(f_D) \geq -D - \text{div}(f_D) = \left(-\sum_i e_i - e_\infty\right) \cdot \infty = (-dg(D)) \cdot \infty$$

Por tanto g será un polinomio que sólo puede tener un polo en ∞ de orden menor o igual que $dg(D)$. Así tenemos $V_D = \mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})$

La dimensión de $\mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})$ será

$$\dim(\mathcal{O}_D(\widehat{\mathbb{C}})) = \begin{cases} 0 & dg(D) < 0 \\ 1 + dg(D) & dg(D) \geq 0 \end{cases}$$

Pues $1, z, z^2, \dots, z^{dg(D)}$ es una base de los polinomios de grado menor que $dg(D)$

9.5.3. Finitud de la dimensión.

LEMA 9.5.1. *Sea X una superficie de Riemann, D un divisor en X y $p \in X$. Entonces $\mathcal{O}_{D-p}(X)$ o es igual a $\mathcal{O}_D(X)$ o tiene codimensión 1 en $\mathcal{O}_D(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{O}_D(X)$ y $n = -D(p)$ en un sistema coordenado centrado en p el desarrollo de Laurent de f es de la forma $\sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$ esto permite definir una aplicación lineal $\varphi : \mathcal{O}_D(X) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(f) = c_n$. El núcleo de dicha aplicación es $\mathcal{O}_{D-p}(X)$. y tendremos $\dim(\mathcal{O}_D(X)) = \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Imag}(\varphi))$ y como $\text{Imag}(\varphi) \subset \mathbb{C}$ su dimensión es a lo sumo 1 □

TEOREMA 9.5.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta, y D un divisor en X . Entonces $\mathcal{O}_D(X)$ tiene dimensión finita. Si ponemos $D = P - N$ (divisores positivo y negativo) entonces $\dim(\mathcal{O}_D(X)) \leq 1 + dg(P)$ (si $D \geq 0$ será $\dim(\mathcal{O}_D(X)) \leq 1 + dg(D)$)*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el grado de P .

Si $dg(P) = 0$ y $dg(N) > 0$ tenemos $dg(D) < 0$ y por la proposición 9.5.2 $\dim(\mathcal{O}_D(X)) = 0$. Si $dg(N) = 0$ entonces $D = 0$ y $\mathcal{O}_D(X) = \mathcal{O}(X)$ y como en una superficie de Riemann compacta las únicas funciones holomorfas son las constantes $\dim(\mathcal{O}_D(X)) = 1$

Supongámoslo cierto para $dg(P) \leq n$ y consideremos $D = P - N$ tal que $dg(P) = n + 1$ escojamos un punto $p \in \text{supp}(P)$ (soporte de P) y consideremos el divisor $D - p = (P - p) - N$, tendremos $dg(P - p) = n$ y por hipótesis de inducción $\dim(\mathcal{O}_{D-p}(X)) \leq 1 + dg(P - p) = 1 + n$ ahora aplicando el lema anterior tenemos $\dim(\mathcal{O}_D(X)) \leq 2 + n = 1 + dg(P)$ □

9.5.4. Haces asociados a formas.

DEFINICIÓN 9.5.4. *Sea $U \subset X$ abierto, se define $\Omega_D^1(U)$ como el conjunto de las 1-formas meromorfas en U con polos acotados por D . Es decir $\Omega_D^1(U) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(U) : \text{div}(\omega) \geq -D\}$*

Evidentemente Ω_D^1 es un haz y se tiene $\Omega_0^1 = \Omega^1$ (haz de 1-formas holomorfas)

PROPOSICIÓN 9.5.5. Sean D_1, D_2 divisores linealmente equivalentes en una superficie de Riemann X . Entonces para cualquier abierto $U \subset X$ se tiene que $\Omega_{D_1}^1(U)$ y $\Omega_{D_2}^1(U)$ son espacios vectoriales isomorfos luego lo son los haces $\Omega_{D_1}^1, \Omega_{D_2}^1$

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la de la proposición 9.5.4 □

Consideremos un divisor canónico $K = \text{div}(\omega)$ en la superficie de Riemann X y sea D un divisor cualquiera.

Si $f \in \mathcal{O}_{D+K}(U)$ tenemos $\text{div}(f) + D + K \geq 0$ y también $\text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega) = \text{div}(f) + K$ luego $\text{div}(f\omega) + D \geq 0$ y $f\omega \in \Omega_D^1(U)$. Podemos definir

$$\mu_\omega : \mathcal{O}_{D+K}(U) \rightarrow \Omega_D^1(U) \quad \mu_\omega(f) = f\omega$$

TEOREMA 9.5.2. Con la notación anterior μ_ω es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es decir el haz Ω_D^1 es isomorfo a \mathcal{O}_{D+K}

DEMOSTRACIÓN. Fácilmente se ve que la aplicación es lineal e inyectiva. Consideremos $\eta \in \Omega_D^1(U)$ por el lema 9.1.1 existe una función meromorfa f tal que $\eta = f\omega$ □

COROLARIO 9.5.1. Sea X una superficie de Riemann compacta, para cualquier divisor D en X se tiene que $\Omega_D^1(X)$ tiene dimensión finita

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema anterior y del teorema 9.5.1 □

9.5.5. Haces asociados a n-diferenciales.

DEFINICIÓN 9.5.5. Dada una n-diferencial μ definida en un abierto $U \subset X$ se define $\text{div}(\mu)(p) = \text{ord}_p(\mu)$

Esto va a permitir definir haces de n-diferenciales.

DEFINICIÓN 9.5.6. Dado un divisor D en una superficie de Riemann X , se define el haz Ω_D^n como el que asocia a cada abierto $U \subset X$ el grupo (espacio vectorial) de las n -diferenciales tales que $\text{div}(\mu) \geq -D$

Es sencillo comprobar que es efectivamente un haz y cumple el principio de identidad.

Dado $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ tendremos que $\omega^n = \omega \otimes \dots \otimes \omega$ es una n -diferencial y si se considera $f \in \mathcal{O}_{D+nK}(U)$ se cumplirá que $\text{div}(f) + D + nK \geq 0$ y también $\text{div}(f\omega^n) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega^n) = \text{div}(f) + nK$ luego $\text{div}(f\omega^n) + D \geq 0$ y $f\omega^n \in \Omega_D^n(U)$.

Podemos definir un homomorfismo

$$\mu_{\omega^n} : \mathcal{O}_{D+nK}(U) \rightarrow \Omega_D^n(U) \quad \mu_{\omega^n}(f) = f\omega^n$$

TEOREMA 9.5.3. Con la notación anterior μ_{ω^n} es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es decir el haz Ω_D^n es isomorfo a \mathcal{O}_{D+nK}

DEMOSTRACIÓN. Fácilmente se ve que la aplicación es lineal e inyectiva. Para ver que es suprayectiva consideremos $\mu = h(z)dz \otimes \dots \otimes dz \in \Omega_D^n(U)$ y $\omega = g(z)dz \in \mathcal{M}^1(U)$ entonces $f = \frac{h}{g^n}$ es una función meromorfa en U tal que $f \in \mathcal{O}_{D+nK}$ \square

9.6. Fibrados vectoriales y de línea holomorfos

Particularizaremos para superficies de Riemann algunas definiciones de geometría diferencial.

DEFINICIÓN 9.6.1. Un fibrado vectorial holomorfo de dimensión n sobre una superficie de Riemann X es un par (E, π) donde E es una variedad analítica y π una aplicación holomorfa $\pi : E \rightarrow X$, tal que existe un recubrimiento abierto \mathcal{U} de X , y para cada $U \in \mathcal{U}$ una aplicación biholomorfa h_U que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \subset E & \xrightarrow{h_U} & U \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_U \\ & U \subset X & \end{array}$$

siendo π_U la proyección canónica $\pi_U : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$

En el caso $n = 1$ un fibrado vectorial holomorfo se denomina fibrado de línea holomorfo

Los pares (U, h_U) se denominan *trivializaciones locales*.

Consideremos abiertos U_i, U_j de \mathcal{U} tendremos trivializaciones $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$. En $U_i \cap U_j$ la composición $h_i \cdot h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ es para cada punto $x \in U_i \cap U_j$ un isomorfismo entre espacios vectoriales. Así tenemos definidas unas aplicaciones (funciones de transición) $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ definidas por

$$(h_i \cdot h_j^{-1})(x, v_j) = (x, g_{ij}(x)(v_j))$$

que cumplen

- $g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = id$ en $U_i \cap U_j$
- $g_{ik}(x) = g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x)$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$ (las multiplicaciones son de matrices)

El conjunto de funciones de transición $\{g_{ij}\}$ se denomina *cociclo* y a las relaciones anteriores se les llama *relaciones de cociclo*

La forma mas empleada para construir fibrados vectoriales holomorfos sobre X usa los siguientes pasos

1. Se parte de un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X
2. Se define un conjunto de aplicaciones holomorfas $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{C}, n)$ que satisfagan las relaciones de cociclo
3. Se define $E = \coprod (U_i \times \mathbb{C}^n) / \sim$ donde \sim es la relación de equivalencia $(x, v)_{U_j} \sim (x, g_{ij}(x)(v))_{U_i}$ (la propiedad transitiva se deduce de las relaciones de cociclo) y dos puntos en el mismo $U_i \times \mathbb{C}^n$ están relacionados sólo cuando son el mismo punto.
4. La aplicación $\tilde{\pi} : \coprod (U_i \times \mathbb{C}^n) \rightarrow X$ $\tilde{\pi}((x, v)_{U_i}) = x$ induce una aplicación $\pi : E \rightarrow X$ y la proyección $\pi_{\sim} : \coprod (U_i \times \mathbb{C}^n) \rightarrow E$ induce una biyección $h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$

Se comprueba fácilmente que (E, π) es un fibrado vectorial holomorfo

DEFINICIÓN 9.6.2. Una aplicación entre fibrados holomorfos (E, π) y (E', π') sobre X es una aplicación holomorfa $\phi : E \rightarrow E'$ tal que

- $\pi = \pi' \cdot \phi$
- $\forall x \in X \quad \phi|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi'^{-1}(x)$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales (miembro de $GL(n, \mathbb{C})$)

Dos fibrados holomorfos se denominan isomorfos si ϕ es biholomorfa.

9.6.1. Secciones meromorfas.

DEFINICIÓN 9.6.3. Sea (E, π) un fibrado vectorial holomorfo sobre X , una sección holomorfa global de E sobre X es una aplicación holomorfa $s : X \rightarrow E$ tal que $\pi \cdot s = id_X$

Dado una trivialización $\{U_i, h_i\}$ la sección s puede identificarse con la familia de aplicaciones holomorfas $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \quad s_i = h_i \cdot s$

Tendremos en los dominios respectivos $s_i = h_i \cdot s$ y $s_j = h_j \cdot s$ luego $s = h_j^{-1} \cdot s_j$ y en $U_i \cap U_j \quad s_i = h_i \cdot h_j^{-1} \cdot s_j = g_{ij} \cdot s_j$

Una sección holomorfa de E sobre el abierto $U \subset X$ se define de forma análoga. (sección no global)

DEFINICIÓN 9.6.4. Sea (E, π) un fibrado vectorial holomorfo sobre X , y $S \subset X$ un conjunto discreto. Una sección holomorfa global $s : X - S \rightarrow E$ define una sección meromorfa global si $\forall a \in S$ existe una carta (U, z) centrada en a (con coordenada local z) tal que $U \cap S = \{a\}$ y existe $n \geq 0$ tal que el producto $z^n s$ es la restricción de una sección holomorfa de E sobre U .

Una sección s será meromorfa global si y sólo si para cada trivialización $\{U_i, h_i\}$ las funciones $s_i = h_i \cdot s$ son meromorfas en los U_i .

9.6.2. Fibrados de línea holomorfos.

Para el caso de fibrados de línea holomorfos hay que tener en cuenta que $GL(\mathbb{C}, 1) \cong \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ y el producto de grupo es el de números complejos.

Las funciones de transición serán $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$

Dada una trivialización $\{U_i, h_i\}$ s será una sección meromorfa global si y sólo si son meromorfas en cada U_i las $s_i = h_i \cdot s$

EJEMPLO. Sea $\{U_i, z_i\}$ un atlas en X si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ definimos $g_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial z_i}$. Esto da lugar al fibrado tangente holomorfo

(el fibrado cotangente holomorfo se obtendría con $h_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial z_j}$)

Supongamos que (L, π) y (L', π') sean fibrados de línea holomorfos isomorfos (mediante ϕ), y que tenemos trivializaciones $\{U_i, h_i\}$ y $\{U_i, l_i\}$ en L y L' tales que $\phi(\pi^{-1}(U_i)) = \pi'^{-1}(U_i)$ entonces

$$l_i \cdot \phi \cdot h_i^{-1}(x, z) = (x, w)$$

y esto nos definirá una función $\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ de forma que el producto $\lambda_i(x)z = (l_i \cdot \phi \cdot h_i^{-1})(x, z)$. Entonces

$$g'_{ij} = l_i \cdot l_j^{-1} = l_i \cdot \phi \cdot h_i^{-1} \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_j^{-1} \cdot \phi^{-1} \cdot l_j^{-1}$$

y por tanto $g'_{ij} = \lambda_i g_{ij} \lambda_j^{-1}$ en $U_i \cap U_j$ (producto no composición)

Recíprocamente si tenemos funciones de transición que cumplen las relaciones anteriores la aplicación

$$f : L = \coprod (U_i \times \mathbb{C}) / \sim \rightarrow \coprod (U_i \times \mathbb{C}) / \sim' = L' \quad f([x, v]) = [x, v]'$$

es un isomorfismo de fibrados de línea holomorfos

Es posible también realizar la siguiente construcción

PROPOSICIÓN 9.6.1. Si L, L' son fibrados de línea holomorfos las funciones de transición $h_{ij} = g_{ij} g'_{ij}$ dan lugar a un fibrado de línea holomorfo que denotaremos $L \odot L'$

DEMOSTRACIÓN. $h_{ik} = g_{ik}g'_{ik} = g_{ij}g_{jk}g'_{ij}g'_{jk} = h_{ij}h_{jk}$ y se cumple la relación de cociclo \square

PROPOSICIÓN 9.6.2. *Con la operación \odot los fibrados de línea holomorfos sobre X forman un grupo abeliano*

DEMOSTRACIÓN. La asociatividad y conmutatividad se deducen de esas propiedades del producto en \mathbb{C}^* , como elemento neutro basta considerar el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$ y el inverso se deduce de la existencia del inverso en \mathbb{C}^* \square

9.6.3. Interpretación de los fibrados de línea holomorfos.

Vamos a ver que un fibrado de línea holomorfo (L, π) da lugar a haces.

En efecto si consideramos las *secciones meromorfas (holomorfas)* de L sobre los abiertos $U \subset X$, con la operación de suma puntual, vemos constituyen un grupo abeliano, y definen por tanto un haz que denotaremos $\mathcal{M}_L (\mathcal{O}_L)$.

Por la proposición 4.7.1 los elementos de $H^0(X, \mathcal{M}_L)$ son las secciones globales meromorfas de L , que son los elementos de $s \in H^0(X, \mathcal{M})$ tales que $s|_{U_i} = g_{ij}s|_{U_j}$

PROPOSICIÓN 9.6.3. *Sea L un fibrado de línea holomorfo sobre X y s, t secciones meromorfas. Existe una única función meromorfa f en X tal que $s = ft$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup U_i$ y funciones de transición g_{ij} . Definimos en U_i $f_i = \frac{s_i}{t_i}$ en $U_j \cap U_i$ tendremos

$$f_j = \frac{s_j}{t_j} = \frac{g_{ji}s_i}{g_{ji}t_i} = \frac{s_i}{t_i} = f_i$$

y de la definición de haz 4.1.3 existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f|_i = f_i$ \square

Si consideramos \mathcal{O}^* el haz en X de las funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto, con el producto como operación de grupo, las relaciones de cociclo indican que se pueden reinterpretar las clases de equivalencia de los fibrados de línea holomorfos (con relación de equivalencia la isomorfía) como elementos de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$

Consideremos una trivialización $\{U_i, h_i\}$ con funciones de transición g_{ij} y denotamos $\mathcal{U} = \{U_I\}$. Entonces las (g_{ij}) son elementos de $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ y además

$$\delta((g_{ij})) = (h_{ijk}) \quad h_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} = 1 \text{ condición de cociclo en notación multiplicativa}$$

luego $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Recíprocamente cada elemento de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ puede interpretarse como un conjunto de funciones de transición.

Hemos visto que dos fibrados de línea isomorfos satisfacen

$$g_{ij} = g'_{ij}\lambda_i^{-1}\lambda_j$$

Si consideramos una 0_cocadena (λ_i) será $\delta((\lambda_i)) = (b_{ij}) \quad b_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ (con notación de producto), tenemos que dos fibrados de línea isomorfos difieren en un elemento de $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$

Así las clases de fibrados de línea holomorfos isomorfos se pueden identificar con los elementos de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$

Como considerando cualquier refinamiento de \mathcal{U} y las funciones de transición correspondientes nada de lo anterior varía tenemos

PROPOSICIÓN 9.6.4. *Las clases de fibrados de línea isomorfos se pueden identificar canónicamente con los elementos de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$*

Es sencillo comprobar que las clases de fibrados de línea holomorfos isomorfos forman un grupo.

9.6.4. Divisores y fibrados de línea.

DEFINICIÓN 9.6.5. *Dado un fibrado de línea holomorfo L y una sección meromorfa s se define $\text{div}(s)$ como el divisor*

$$\text{div}(s) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(s_i) \cdot p$$

siendo $s_i = h_i \cdot s$ en $U_i \ni p$

Sea $D = \sum_{\alpha \in A} n_\alpha \cdot p_\alpha$ un divisor de la superficie de Riemann X (con soporte A) y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto de X tal que cada U_i contiene a lo sumo un punto de A y es el dominio de una carta (U_i, z_i) centrada en el punto de A en caso de contener uno

En cada U_i podemos definir una función

$$f_i(z) = \begin{cases} z^{n_i} & p_i \in A \cap U_i \\ 1 & A \cap U_i = \emptyset \end{cases}$$

(Si nos restringimos a U_i tenemos que $D = \text{div}(f_i)$)

En $U_i \cap U_j$ se define $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ que será holomorfa y distinta de cero. Por tanto (g_{ij}) es un elemento de $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$

Tendremos $\frac{g_{ij} g_{jk}}{g_{ik}} = \frac{f_i f_j f_k}{f_j f_k f_i} = 1$ es decir $\delta((g_{ij})) = 0$ por lo que será un cociclo

Si consideramos otro sistema de coordenadas con los mismos requerimientos se tendrá que las funciones $\lambda_i = \frac{f'_i}{f_i}$ son holomorfas y distintas de cero en cada U_i y tendremos $g_{ij} = g'_{ij} \frac{f_i f'_j}{f'_i f_j} = g'_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ por tanto g_{ij} y g'_{ij} difieren en un elemento de $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

La construcción anterior da lugar, a una aplicación

$$\Theta : \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

Teniendo en cuenta la proposición 9.6.4 hemos asociado a cada divisor D una clase de fibrados de línea holomorfos isomorfos que denotaremos $L(D)$. Es decir $\Theta(D) = L(D)$.

PROPOSICIÓN 9.6.5. Θ es un homomorfismo

DEMOSTRACIÓN. Dados los divisores D, D' consideremos unas funciones f_i y f'_i de la construcción anterior. El divisor $D + D'$ dará lugar a las funciones $f_i f'_i$ luego

las funciones de transición serán $\frac{f_i f'_i}{f_j f'_j}$ que corresponden al fibrado líneal $L(D) \odot L(D')$ \square

PROPOSICIÓN 9.6.6. *El núcleo de Θ es $PDiv(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $div(f)$ para una función meromorfa. Dado un recubrimiento abierto conexo $\mathcal{U} = \{U_i\}$ definimos $f_i = f|_{U_i}$, las funciones de transición para $[div(f)]$ serán $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = 1$ en $U_i \cap U_j$ y tendremos el fibrado trivial (f coincide con la función construida para $div(f)$ en una bola alrededor de cada uno de los puntos del soporte de $div(f)$).

Recíprocamente supongamos que $L(D)$ sea el fibrado trivial existirán funciones $\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que

$$1 = \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_j f_j} \quad \lambda_i f_i = \lambda_j f_j \text{ en } U_i \cap U_j$$

y por la definición 4.1.3 existirá una función meromorfa global f tal que $div(f) = L(D)$ (pues las λ son holomorfas y distintas de cero y no introducen polos ni ceros) \square

NOTA. *Habitualmente se hablará del fibrado de línea $L(D)$ considerando uno cualquiera de los representantes de clase.*

Dado un divisor D vamos a considerar el haz \mathcal{O}_D y el fibrado $L(D)$. Denotaremos $\Gamma(U, L(D))$ al conjunto de secciones holomorfas ($div(s) \geq 0$) de $L(D)$ sobre U .

Considerando, en la construcción de $L(D)$, las funciones f_i , estas dan lugar a una sección holomorfa global en $L(D)$ que denotaremos s_D . Se tiene evidentemente que $div(s_D) = D$.

TEOREMA 9.6.1. *La aplicación $\theta : \mathcal{O}_D(U) \rightarrow \Gamma(U, L(D))$ $\theta(f) = f s_D$ es un isomorfismo*

DEMOSTRACIÓN. La condición para que $s = \theta(f)$ sea una sección holomorfa es $div(s) \geq 0$.

Si $f \in \mathcal{O}_D(U)$ $\text{div}(f) \geq -D$ y $\text{div}(fs_D) = \text{div}(f) + \text{div}(s_D) = \text{div}(f) + D \geq 0$ y por tanto es sección holomorfa y la aplicación está bien definida.

Como s_D se anula a lo sumo en conjunto discreto de puntos si $f_1 s_D = f_2 s_D$ entonces $f_1 = f_2$ y la aplicación es inyectiva

Si s es una sección holomorfa de $L(D)$ entonces por la proposición 9.6.3 existe una función meromorfa f tal que $s = s_D f$ y la aplicación es suprayectiva, además es evidentemente lineal. \square

TEOREMA 9.6.2. *Dos divisores D_1, D_2 son linealmente equivalentes si y sólo si $L(D_1)$ y $L(D_2)$ son isomorfos*

DEMOSTRACIÓN. Sean D_1 y D_2 linealmente equivalentes y sea f meromorfa tal que $\text{div}(f) = D_1 - D_2$ consideremos las secciones s_{D_1} y s_{D_2}

Podemos definir un isomorfismo $\phi : L(D_1) \rightarrow L(D_2)$ que lleve s_{D_1} a $f s_{D_2}$

Fuera de los soportes de D_1, D_2 se define

$$\phi(s_{D_1}(x)) \rightarrow f(x)s_{D_2}(x)$$

que se puede extender holomorficamente a X . En efecto si $D_1(p) = k, D_2(p) = l$ existe una carta centrada en p (U, z) tal que $s_{D_1} = \lambda_1(z)z_1^k, s_{D_2} = \lambda_2(z)z^l$ y Siendo λ_1, λ_2 holomorfas distintas de cero y $f(p) = \mu(z)z^{k-l}$ siendo μ holomorfa distinta de cero. En esa carta ϕ es de la forma $\frac{\mu\lambda_2}{\lambda_1}$ con singularidad evitable en p ($z = 0$)

Como por la proposición 9.6.3 $\forall s \in L(D_1)$ $s = g s_{D_1}$ definiendo $\phi(s) = g\phi(s_{D_1})$ se comprueba fácilmente que es un isomorfismo entre $L(D_1)$ y $L(D_2)$

Recíprocamente si $u : L(D_1) \rightarrow L(D_2)$ es un isomorfismo entonces $u.s_{D_1}$ es una sección meromorfa de $L(D_2)$ y sea f la función meromorfa que hace $u.s_{D_1} = f s_{D_2}$ tendremos $\forall p \text{ ord}_p(f) = D_1(p) - D_2(p)$ y por tanto $\text{div}(f) = D_1 - D_2$ y serán divisores linealmente equivalentes. \square

TEOREMA 9.6.3. *Dado un fibrado de línea holomorfo L sobre X existe un divisor D tal que $L = L(D)$ si y sólo si L admite una sección meromorfa global*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos una sección meromorfa global s sobre L . Consideremos un recubrimiento abierto lo suficientemente fino para que cada abierto contenga a lo sumo un polo o cero, y la construcción de $L(\text{div}(s))$

Las funciones f_i podrán ser iguales a la restricción de s para aquellos U_i que contengan un polo o cero y a 1 en caso contrario. dando lugar a unas funciones de transición $\frac{s_i}{s_j}$ para $L(\text{div}(s))$.

Por otra parte se cumple $s_i = g_{ij}s_j$ (siendo g_{ij} las funciones de transición del fibrado lineal L) y las funciones de transición de $L(\text{div}(s))$ son las mismas que las de L y se pueden identificar.

Recíprocamente dado $L(D)$ hemos visto que s_D es una sección meromorfa global \square

TEOREMA 9.6.4. *Cada fibrado de línea holomorfo sobre una superficie de Riemann admite una sección meromorfa global*

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede verse en [ForRS]. \square

COROLARIO 9.6.1. *El homomorfismo $\Theta : \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$ es suprayectivo (es decir para cada L existe D tal que $L \cong L(D)$)*

Curvas algebraicas

Comenzaremos estudiando las curvas algebraicas en espacios de dimensión pequeña

10.1. Curvas afines y Projectivas en \mathbb{C}^2 y $P^2(\mathbb{C})$

10.1.1. Curvas afines.

Sea $P(x, y)$ un polinomio en dos variables con coeficientes complejos, se dice que $P(x, y)$ no tiene factores repetidos si no es posible ponerlo de la forma $P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)$ (donde $Q(x, y)$ no es constante)

DEFINICIÓN 10.1.1. Sea $P(x, y)$ un polinomio con coeficientes complejos no constante y sin factores repetidos. La curva compleja afín en \mathbb{C}^2 definida por P la constituyen los puntos $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}$

Se cumple el siguiente teorema que no demostraremos

TEOREMA 10.1.1. (Hilbert: Nullstellensatz) Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios con coeficientes complejos entonces

$$\{(x, y) : P(x, y) = 0\} = \{(x, y) : Q(x, y) = 0\}$$

si y sólo si existen enteros positivos n, m tales que P divide a Q^m y Q divide a P^n . Es decir si P y Q tienen los mismos factores irreducibles (aunque quizás con distintas multiplicidades)

COROLARIO 10.1.1. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ que no tienen factores repetidos, definen la misma curva afín si y sólo si

$$P(x, y) = \lambda Q(x, y)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ distinto de cero

DEFINICIÓN 10.1.2. Una curva C definida por $P(x, y)$ se denomina irreducible si $P(x, y)$ es irreducible (no se puede poner $P(x, y) = Q(x, y)R(x, y)$ siendo Q, R de grado mayor o igual a 1). Si P tiene factores irreducibles P_1, \dots, P_k las curvas C_1, \dots, C_k definidas por dichos polinomios se denominan componentes de C

DEFINICIÓN 10.1.3. Sea $P(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij}x^i y^j$ se define el grado de la curva afín definida por P como

$$d = \text{máx}\{i + j : c_{ij} \neq 0\}$$

DEFINICIÓN 10.1.4. Sea C la curva afín definida por $P(x, y)$ un punto $(x_0, y_0) \in C$ se denomina singular cuando

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Al conjunto de puntos singulares de C se le denota por $\text{Sing}(C)$ y la curva se denomina no singular si dicho conjunto es vacío

Una curva definida por un polinomio lineal $ax + by + c$ (a, b no ambos cero) se denomina recta.

DEFINICIÓN 10.1.5. La multiplicidad de la curva C definida por $P(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es el entero n más pequeño tal que

$$\frac{\partial^n P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \neq 0$$

El polinomio $\sum_{i+j=n} \frac{\partial^n P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{i!j!}$ será homogéneo de grado n y podrá factorizarse en n polinomios lineales $a(x-x_0) + b(y-y_0)$ ($(a, b) \neq (0, 0)$)

Las rectas definidas por dichos polinomios lineales se denominan tangentes a C en (x_0, y_0)

El punto (x_0, y_0) es no singular si y sólo si su multiplicidad es 1. En ese caso existe una única tangente definida por

$$\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0$$

DEFINICIÓN 10.1.6. Un punto singular de la curva afin C definida por $P(x, y)$ se denomina ordinario si el polinomio $\sum_{i+j=n} \frac{\partial^n P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^i (y - y_0)^j}{i!j!}$ no tiene factores repetidos. En ese caso la curva C tiene en (x_0, y_0) n tangentes distintas.

Un punto ordinario doble (multiplicidad 2) se denomina *nodo*

10.1.2. Curvas proyectivas.

Un tipo especial de polinomios está constituido por los polinomios homogéneos que cumplen

$$\forall a \in \mathbb{C} \quad P(ax_1, \dots, ax_n) = a^d P(x_1, \dots, x_n)$$

LEMA 10.1.1. Si $P(x, y)$ es un polinomio homogéneo con coeficientes complejos de grado d se puede poner como

$$P(x, y) = \prod (a_i x + b_i y) \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}$$

DEMOSTRACIÓN. Se tendrá

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^d c_i x^i y^{d-i} = y^d \sum_{i=0}^d c_i \left(\frac{x}{y}\right)^i$$

Con algún c_i distinto de cero. Sea r el mayor valor tal que $c_r \neq 0$ entonces $\sum_{i=0}^r c_i \left(\frac{x}{y}\right)^i$ es un polinomio de grado r en una variable $\left(\frac{x}{y}\right)$ que se podrá factorizar como

$$\sum_{i=0}^r c_i \left(\frac{x}{y}\right)^i = \alpha_r \prod_{j=1}^r \left(\frac{x}{y} - \beta_j\right) \text{ Entonces}$$

$$P(x, y) = \alpha_r y^d \prod_{j=1}^r \left(\frac{x}{y} - \beta_j\right) = \alpha_r y^{d-r} \prod_{j=1}^r (x - \beta_j y)$$

□

DEFINICIÓN 10.1.7. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no constante con coeficientes complejos que no tiene factores repetidos. La curva proyectiva C definida por P es el conjunto de puntos de $P^2(\mathbb{C})$ de coordenadas homogéneas

$$C = \{[x, y, z] \in P^2(\mathbb{C}) : P(x, y, z) = 0\}$$

El grado de la curva proyectiva es el del polinomio P y la curva se llama irreducible si lo es el dicho polinomio, en caso contrario si P_1, \dots, P_k son las componentes irreducibles de P a las curvas que definen C_1, \dots, C_k se les denomina componentes de C

NOTA. Aunque el valor $P(x, y, z)$ para el punto $[x, y, z]$ no está bien definido en general (pues $[ax, ay, az] = [x, y, z]$ produciría $a^d P(x, y, z)$, si está bien definido en el caso de que el polinomio se anule)

DEFINICIÓN 10.1.8. Un punto $[x_0, y_0, z_0] \in C$ se denomina singular si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Al conjunto de puntos singulares se le denota por $Sing(C)$ y la curva se denomina suave si dicho conjunto es vacío

Una curva proyectiva definida por $ax + by + cz = 0$ se denomina recta proyectiva.

La tangente a la curva C en el punto no singular $[x_0, y_0, z_0]$ es la recta

$$\frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}x + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}y + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}z = 0$$

PROPOSICIÓN 10.1.1. Una curva proyectiva es compacta

DEMOSTRACIÓN. Dado que $C = P^{-1}(0)$ y los polinomios continuos, la curva será cerrada en $P^2(\mathbb{C})$ que es compacto. \square

10.1.3. Relación entre curvas afines y proyectivas.

Podemos identificar \mathbb{C}^2 con el subconjunto de $P^2(\mathbb{C})$ definido por $U = \{[x, y, z] \in P^2(\mathbb{C}) : z \neq 0\}$ mediante el homeomorfismo

$$\phi([x, y, z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \quad \phi^{-1}(x, y) = [x, y, 1]$$

$P^2(\mathbb{C}) - U$ es homeomorfo a $P^1(\mathbb{C})$ por el homeomorfismo

$$\psi([x, y, 0]) = [x, y]$$

Dada una curva proyectiva C definida por el polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ el conjunto $C \cap U$ definido por los ceros del polinomio $P(x, y, 1)$ constituye una curva afín que será del mismo grado si z no es un factor de $P(x, y, z)$, es decir si C no contiene la recta $z = 0$

Recíprocamente si $Q(x, y)$ es un polinomio de grado d de la forma $Q(x, y) = \sum_{i+j \leq d} c_{ij} x^i y^j$ entonces la curva afín C definida por Q es la intersección con U de la curva proyectiva \tilde{C} definida por $\sum_{i+j \leq d} c_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}$

La intersección de la curva \tilde{C} con la recta $z = 0$ (recta del infinito) es el conjunto de puntos

$$\{[x, y, 0] \in P^2(\mathbb{C}) : \sum_{i=0}^d c_{i(d-i)} x^i y^{d-i} = 0\}$$

que será un conjunto finito si P es irreducible.

10.1.4. Curvas proyectivas planas como Superficies de Riemann.

Salvo en las singularidades las curvas afines y proyectivas dan lugar a superficies de Riemann dado que por el teorema de la función implícita dada $P(x, y) = 0$ si $\frac{\partial P}{\partial y}|_p \neq 0$ entonces x es una coordenada local en un entorno de p (análogamente lo será y si $\frac{\partial P}{\partial x}|_p \neq 0$)

TEOREMA 10.1.2. *Una curva proyectiva plana C definida por un polinomio homogéneo irreducible P , es conexa, tiene a lo sumo un número finito de puntos singulares, y $C^* = C - \text{Sing}(C)$ también es conexa*

La demostración puede verse en [GriffIAG]

COROLARIO 10.1.2. C^* es una superficie de Riemann (no necesariamente compacta)

DEMOSTRACIÓN. Sea $q(x, y) = Q(x, y, 1)$, por el teorema de la función implícita dada $q(x, y) = 0$ si $\frac{\partial q}{\partial y}|_{(x,y)} \neq 0$ entonces x es una coordenada local en un entorno de p y análogamente y si $\frac{\partial q}{\partial x}|_{(x,y)} \neq 0$. Lo mismo se aplica a $Q(x, 1, z), Q(1, y, z)$. \square

10.1.5. Normalización de curvas proyectivas planas.

NOTA. Denotamos $C\{x\}$ al anillo de las funciones holomorfas en un entorno de $0 \in \mathbb{C}$, $C\{x, y\}$ al anillo de funciones holomorfas en un entorno de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, $C[x]$ al anillo de polinomios en indeterminada x con coeficientes complejos, y $C\{x\}[y]$ al anillo de polinomios en y con coeficientes en $C\{x\}$

DEFINICIÓN 10.1.9. Sea C una curva proyectiva plana irreducible y S el conjunto de sus puntos singulares. Si existe una superficie de Riemann compacta \tilde{C} y una aplicación holomorfa $\sigma : \tilde{C} \rightarrow P^2(\mathbb{C})$ tal que

- 1) $\sigma(\tilde{C}) = C$
- 2) $\sigma^{-1}(S)$ finito
- 3) $\sigma|_{\tilde{C} - \sigma^{-1}(S)}$ es biyectiva

Denominamos (\tilde{C}, σ) la normalización de C

Vamos a demostrar que existe una normalización para cada curva proyectiva plana irreducible, aceptaremos sin demostrar algunos resultados intermedios poniendo énfasis en las líneas generales de la demostración. Empezaremos por la unicidad

TEOREMA 10.1.3. La normalización es única salvo isomorfismos. Es decir si (\tilde{C}, σ) y (\tilde{C}', σ') son normalizaciones de C existe un isomorfismo $\tau : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$ que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{C} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{C}' \\
 \sigma \searrow & & \swarrow \sigma' \\
 & C &
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea S el conjunto de puntos singulares de C tendremos una aplicación biholomorfa $\sigma'^{-1} \cdot \sigma$

$$\tilde{C} - \sigma^{-1}(S) \xrightarrow{\sigma} C - S \xrightarrow{\sigma'^{-1}} \tilde{C}' - \sigma'^{-1}(S)$$

que se extiende a una aplicación continua que denotaremos τ de \tilde{C} en \tilde{C}' . Escogiendo coordenadas adecuadas τ se puede poner en un entorno de cada punto como z^k por el teorema 5.3.2 y como $\sigma^{-1}(C - S)$ es denso en \tilde{C} y τ inyectiva en él tendremos que $k = 1$ y τ biholomorfa. \square

10.1.5.1. Polinomios de Weierstrass.

DEFINICIÓN 10.1.10. $w \in C\{x, y\}$ se dice que es un polinomio de Weierstrass con respecto a y cuando

$$w = y^d + a_{n-1}(x)y^{d-1} + \dots + a_0(x) \quad a_i(x) \in C\{x\}, a_i(0) = 0$$

TEOREMA 10.1.4. Si $f \in C\{x, y\}$ es tal que $f(0, y)$ no es idénticamente nula, existe un entorno de $(0, 0)$ en el que f tiene una representación única

$$f(x, y) = u(x, y)w(x, y)$$

Donde w es un polinomio de Weierstrass y u es una unidad del anillo $C\{x, y\}$ es decir $u(0, 0) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede verse en [GriffIAG] \square

COROLARIO 10.1.3. $C\{x, y\}$ es un anillo de factorización única es decir cada $f \in C\{x, y\}$ puede ponerse (salvo unidades) de la forma $f = f_1^{m_1} \dots f_n^{m_n}$ donde los f_i son elementos irreducibles de $C\{x, y\}$ distintos. Además para $f \in C\{x\}[y]$ el lo mismo ser irreducible en $C\{x, y\}$ que serlo en $C\{x\}[y]$

DEMOSTRACIÓN. ver [GriffIAG] \square

Consideremos $f \in C[x][y]$ irreducible en $C[x][y]$, lo podemos considerar como $f \in C\{x\}[y]$ y podría ser irreducible en dicho anillo. Como ejemplo consideremos el polinomio $x^3 - x^2 + y^2$ si fuera reducible en $C[x][y]$ tendríamos que sería del tipo $(ay+b)(cy+d)$ siendo $a, b, c, d \in C[x]$ facilmente se ve que esto implica $\frac{d}{c} = x\sqrt{1-x}$ imposible. Sin embargo

$$x^3 - x^2 + y^2 = (x-1)\left(x^2 + \frac{1}{x-1}y^2\right)$$

y $\frac{1}{x-1}$ es holomorfa si $|z| < 1$ luego pertenece a $C\{x\}$.

LEMA 10.1.2. *Sea $f \in C[x][y]$ un polinomio de Weierstrass $f(x, y) = y^k + a_{k-1}(x)y^{k-1} + \dots + a_0(x)$ irreducible en $C[x][y]$. Existe un disco $B = \{x \in \mathbb{C} : |x| < \rho\}$ tal que para cada $x \neq 0$ en B se tiene que $f(x, y)$ considerado como polinomio en y tiene sólo raíces simples*

DEMOSTRACIÓN. Si f es irreducible el discriminante $D(f)(x)$ (ver [GamboaACC]) no es idénticamente nulo luego sus ceros son aislados como $f(0, y) = y^k$ tiene raíces múltiples $D(f)(0) = 0$ y existe un disco B tal que para cada $x \neq 0$ se tiene $D(f)(x) \neq 0$ y por tanto f sólo tiene en ella raíces simples. \square

Fijado $x \in B, x \neq 0$ podremos poner $f(x, y) = \prod_{i=1}^k (y - y_i(x))$ Donde $y_i(x)$ son las raíces de $f(x, y)$. Como $D(f)(x) \neq 0$ tendremos $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ y tenemos definido un germen $[y_i]_x$ por el teorema de la función implícita que será prolongable en $B^* = B - \{0\}$

Consideremos $B' = B - \{Re(x) = 0\}$ que es simplemente conexo y por prolongación analítica de los gérmenes obtendremos elementos de función (y_i, B') que satisfarán $f(x, y_i(x)) = 0$

Si prolongamos analíticamente el germen $[y_i]_x$ a través del eje real (con lo que rodearemos 0) obtendremos un germen $[y_i^*]_x$, y su correspondiente elemento de función, que debe satisfacer $f(x, y_i^*(x)) = 0$ siendo por tanto alguno de los elementos y_j . Esto define una permutación τ en $\{y_1, \dots, y_k\}$.

LEMA 10.1.3. *Para que un polinomio de Weierstrass $f \in C[x][y]$ irreducible en $C[x][y]$, sea irreducible en $C\{x\}[y]$ es condición necesaria y suficiente que la permutación τ genere un grupo cíclico transitivo (o equivalentemente de orden k)*

DEMOSTRACIÓN. Si τ genera un grupo cíclico transitivo se puede poner como un sólo ciclo. Supongamos que no

$$\tau \equiv (y_{11}, \dots, y_{1s_1}), \dots, (y_{r1}, \dots, y_{rs_r}) \text{ ciclos disjuntos}$$

definimos $f_i = \prod_{j=1}^{s_j} (y - y_{ij}) = y^{s_j} + c_{s_j-1}(x)y^{s_j-1} + \dots + c_0(x)$ donde los coeficientes son las funciones simétricas elementales, y por tanto f_i es invariante a las prolongaciones alrededor de cero y por tanto holomorfa en $B - \{0\}$ y se puede extender a una holomorfa en B . Como $f = f_1 \dots f_r$ si $r > 1$ no sería irreducible siéndolo si $r = 1$ □

10.1.5.2. Estructura local de las curvas proyectivas.

PROPOSICIÓN 10.1.2. *Sea C una curva proyectiva plana, $p \in C$ Existe un sistema de coordenadas tal que*

$$p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2 \subset P^2(\mathbb{C})$$

y tal que la ecuación afín de la curva $f(x, y) = F(x, y, 1)$ satisface $f(x, y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)$ siendo $a_i \in C[x]$ y $dg(a_i(x)) \leq n - i$

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos una translación de forma que $p = (0, 0)$ (si fuera necesario intercambiaríamos antes z por x o y en las coordenadas homogéneas (x, y, z)).

Sea la ecuación afín de la curva $g(x, y) = 0$ $dg(g) = n$ aplicamos la transformación de coordenadas

$$x = x' + ay \quad y = y'$$

Sea $b(a)$ el coeficiente de y'^n en $g(x' + ay', y')$ es un polinomio en a que sólo se anula en un número finito de valores y podemos elegir a tal que $b(a) \neq 0$. Definimos

$$f(x', y') = \frac{1}{b(a)}g(x' + ay', y')$$

y la ecuación afín de C será $f(x', y') = 0$

La condición $dg(a_i(x)) \leq n - i$ se deduce directamente de $g(x, y) = G(x, y, 1)$ y G homogéneo □

OBSERVACIÓN. *Sea C una curva proyectiva plana escogemos un sistema de coordenadas según la proposición anterior y la ecuación de C será*

$$f(x, y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)$$

Si C es irreducible f lo es en $C[x][y]$, pero se puede considerar como un elemento de $C\{x\}[y]$ y como hemos visto es posible que se pueda factorizar en este anillo $f = f_1 \dots f_r$. De todas maneras el discriminante $D(f) \neq 0$ pues es irreducible en $C[x][y]$ y el discriminante no depende del anillo considerado, así f no contiene factores múltiples en $C\{x\}[y]$.

DEFINICIÓN 10.1.11. *Sea $f \in C\{x, y\}$ tal que $f(0, 0) = 0$. Se denomina curva analítica local en un entorno (ρ, ϵ) de $p = (0, 0)$ a*

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \rho, |y| < \epsilon, f(x, y) = 0\}$$

Si f es irreducible en $C\{x, y\}$ entonces se denomina curva analítica local irreducible. Si f se factoriza en $C\{x, y\}$ de la forma $f = f_1^{m_1} \dots f_n^{m_n}$ entonces pondremos $V = m_1 V_1 + \dots + m_n V_n$ donde $V_j = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \rho, |y| < \epsilon, f_j(x, y) = 0\}$ se denomina componente analítica local irreducible de la curva V .

TEOREMA 10.1.5. *Para cada curva analítica irreducible $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \rho, |y| < \epsilon, f(x, y) = 0\}$ existe un disco $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$ y una aplicación holomorfa $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^2$ que es una biyección entre Δ y V*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 10.1.4 tenemos $f = uw$ y tendremos $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \rho, |y| < \epsilon, w(x, y) = 0\}$ así que supondremos que f es un polinomio de Weirstrass.

Consideremos $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^2$ $g(t) = (t^k, y_j(t^k))$ donde $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho^{\frac{1}{k}}\}$ siendo ρ el radio del disco definida en el lema 10.1.2 e y_j una cualquiera de las funciones que definen localmente los ceros $f(x, y)$. Como cuando t da una vuelta alrededor del origen t^k da k vueltas por el lema 10.1.3 tenemos que $y_j(t^k)$ no varía. Por tanto $y_j(t^k)$ define una función holomorfa en $0 < |t| < \rho^{\frac{1}{k}}$ que se puede extender (construcción análoga a la del teorema 6.4.1) a todo Δ . Por tanto g es una aplicación holomorfa.

Si se tiene $g(t') = g(t)$ se ha de cumplir $t' = t \exp(\frac{2\pi il}{k})$ $y_j(t^k \exp(2\pi il)) = y_j(t^k)$ y por el lema 10.1.3 ha de ser $l = km$ (un germen debe dar un múltiplo de k vueltas para no variar) y $t' = t \exp(2\pi im) = t$ y g es inyectiva.

Cuando t varía en Δ tenemos que $y_j(t^k)$ va tomando todos los posibles valores de $y_1(x), \dots, y_k(x)$ (otra vez por el lema 10.1.3) y así g aplica Δ sobre V y tenemos demostrado el teorema □

Hemos encontrado además que $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho^{\frac{1}{k}}\}$ y $g(t) = (t^k, y_j(t^k))$

Por los comentarios que suceden al lema 10.1.2 y el teorema de la función implícita $V - \{(0, 0)\}$ puede considerarse una superficie de Riemann con coordenada x y la aplicación g será holomorfa por ser su representación local $x = t^k$ y por tanto

$$g : \Delta - \{0\} \rightarrow V - \{(0, 0)\}$$

es biholomorfa.

10.1.5.3. Normalización.

Tenemos ahora todos los elementos para construir la normalización. Dada C hemos visto que $C^* = C - \text{Sing}(C)$ es una superficie de Riemann (no necesariamente compacta) aunque quizás C no lo sea. Vamos a separar en cada punto singular C en varias curvas analíticas locales y vamos a resolver la singularidad en cada una de ellas.

Supongamos que q sea un punto singular de C y que hay m curvas analíticas locales irreducibles en un entorno de q tenemos m discos Δ_j y m aplicaciones biholomorfas $g_j : \Delta_j - \{0\} \rightarrow C^*$

Consideremos la unión disjunta $C^* \coprod \Delta_1$ y la relación de equivalencia $p \sim g_1(p)$ (y claro cada punto relacionado con si mismo) al espacio $C^* \coprod \Delta_1 / \sim$ que denotaremos $C^* \coprod_{g_1} \Delta_1$ se le puede dotar de estructura de superficie de Riemann pues $g_1 : \Delta_1 - \{0\} \rightarrow C^*$ es biholomorfa y g_1 induce por tanto una carta compatible con las inducidas por las cartas de C^* . Aplicando sucesivamente este procedimiento obtenemos $\tilde{C} = C^* \coprod_{g_1} \Delta_1 \dots \coprod_{g_m} \Delta_m$ (Hemos añadido a C^* m puntos “ideales” correspondientes a cada punto cero de las Δ_j).

Si $Sing(C) = \{q_1, \dots, q_r\}$ aplicamos el procedimiento a cada punto y obtenemos

$$\tilde{C} = C^* \coprod_{g_{11}} \Delta_{11} \dots \coprod_{g_{1m_1}} \Delta_{1m_1} \dots \coprod_{g_{rm_r}} \Delta_{rm_r}$$

La aplicación $\sigma : \tilde{C} \rightarrow P^2(\mathbb{C})$ es

$$\sigma(p) = \begin{cases} p & p \in C^* \\ g_{ij}(p) & p \in \Delta_{ij} \end{cases}$$

10.2. Curvas en espacios proyectivos generales

Para poder dotar de estructura de superficie de Riemann a curvas en espacios proyectivos $P^n(\mathbb{C})$ necesitamos una condición análoga a la no singularidad

DEFINICIÓN 10.2.1. Sean $F_1 \dots F_{n-1}$ polinomios homogéneos en indeterminadas x_0, \dots, x_n . Sea X el lugar geométrico de sus ceros comunes en $P^n(\mathbb{C})$. Decimos que X es una curva suave de intersección completa si la matriz $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ tiene rango $n-1$ en cada punto de X

Por el teorema de la función implícita en ese caso X tiene estructura de superficie de Riemann siendo las cartas del tipo $\frac{x_i}{x_j}$

Sin embargo esta exigencia es excesiva y hay curvas que admiten estructura de superficie de Riemann que no son de este tipo, Por ejemplo en $P^3(\mathbb{C})$ la curva definida por los ceros comunes de los tres polinomios homogéneos

$$x_0x_3 - x_1x_2 \quad x_1^2 - x_0x_2 \quad x_2^2 - x_1x_3$$

Para ver que es superficie de Riemann basta ver que en un entorno de $(0, 0, 0, 1)$ la curva se comporta como el lugar geométrico $x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \quad x_1x_3 - x_2^2 = 0$ (pues $x_1^2 - x_0x_2 = 0$ se obtiene de éstas despejando $x_3 = \frac{x_1x_2}{x_0}$) y para otros puntos análogo. El problema es que no hay dos polinomios que sirvan en todos los puntos.

DEFINICIÓN 10.2.2. *Una curva suave local de intersección completa $X \subset P^n(\mathbb{C})$ es la definida por un conjunto de polinomios $\{F_\alpha\}$ tal que en un entorno de cada punto $p \in X$ es el lugar geométrico de los ceros comunes de $n - 1$ polinomios*

$$F_{\alpha_1} = 0, F_{\alpha_2} = 0, \dots, F_{\alpha_{n-1}} = 0$$

además la matriz $\frac{\partial F_{\alpha_i}}{\partial x_j}$ tiene rango $n - 1$ en cada punto de dicho entorno.

Por la misma razón que antes a una curva suave local de intersección completa se le puede dotar de una estructura de superficie de Riemann

10.2.1. Curvas proyectivas suaves.

DEFINICIÓN 10.2.3. *Sea X una superficie de Riemann que se pueda considerar también como un subconjunto de $P^n(\mathbb{C})$. Se dice que X está incrustada de forma holomorfa cuando $\forall p \in X$ existe una coordenada homogénea z_j tal que*

- 1) $z_j(p) \neq 0$
- 2) $\forall k \frac{z_k}{z_j}$ es una función holomorfa en un entorno U de p en X
- 3) Existe z_i tal que $\frac{z_i}{z_j}$ es una coordenada local en U

Una superficie de Riemann incrustada de forma holomorfa en $P^n(\mathbb{C})$ se denomina *curva proyectiva suave*.

Una curva proyectiva suave de $P^n(\mathbb{C})$ se denomina no degenerada si no está contenida en ningún subespacio de $P^n(\mathbb{C})$

PROPOSICIÓN 10.2.1. *Sea X una curva proyectiva suave en $P^n(\mathbb{C})$ el cociente de dos polinomios homogéneos $\frac{G(z_0, \dots, z_n)}{H(z_0, \dots, z_n)}$ del mismo grado tales que H no se anula idénticamente en X , es una función meromorfa en X*

DEMOSTRACIÓN. Si X es una curva proyectiva suave $\frac{z_l}{z_k} = \frac{\frac{z_l}{z_j}}{\frac{z_k}{z_j}}$ es meromorfa en X al ser cociente de holomorfas (siempre que z_k no sea idénticamente nula en X) y lo mismo cualquier función racional de dichos cocientes que siempre se podrá poner como cociente de polinomios homogéneos y viceversa. \square

PROPOSICIÓN 10.2.2. *Una curva suave local de intersección completa es una curva proyectiva suave.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X una curva suave local de intersección completa, $p \in X$ por el teorema de la función implícita en un entorno de p los puntos de X tienen coordenadas homogéneas (tras reordenación si fuera necesario)

$$[1, z, g_2(z), \dots, g_n(z)]$$

Entonces $z_0 = 1$ no se anula en p y $\frac{z_i}{z_0} = z$ es una coordenada local en un entorno de p y como las g_i son holomorfas y $g_i(z) = \frac{z_i}{z_0}$ en un entorno de p tenemos el resultado. \square

OBSERVACIÓN. *Que una superficie de Riemann X esté incrustada de forma holomorfa es equivalente a que en un entorno de cada punto las coordenadas homogéneas de los puntos de X sean $[1, z, g_2(z), \dots, g_n(z)]$ siendo las g_i holomorfas.*

10.2.2. El grado de una curva proyectiva suave.

Sea X una curva proyectiva suave de $P^n(\mathbb{C})$ (coordenadas homogéneas $[x_0 \dots x_n]$) y consideremos un polinomio homogéneo $G(x_0 \dots x_n)$ de grado d no idénticamente nulo en X .

Sea $p \in X$ un punto tal que $G(p) = 0$ y sea H un polinomio homogéneo del mismo grado que G tal que $H(p) \neq 0$ (basta escoger $H = x_i^d$ siendo x_i una coordenada que no se anula en p)

$\frac{G}{H}$ es una función meromorfa en X que se anula en p

DEFINICIÓN 10.2.4. Definimos el divisor de intersección de G en X del siguiente modo: Para cada $p \in X$ tal que $G(p) = 0$ elegimos un polinomio homogéneo H de grado igual a G tal que $H(p) \neq 0$ hacemos $\text{div}(G)(p) = \text{ord}_p(\frac{G}{H})$ (será un número > 0), en los demás puntos (en los que $G(q) \neq 0$) hacemos $\text{div}(G)(q) = 0$.

Intuitivamente el divisor de intersección determina el número de puntos en que la hipersuperficie definida por G intersecta a X contando multiplicidades.

LEMA 10.2.1. El valor $\text{ord}_p(\frac{G}{H})$ no depende del polinomio H escogido

DEMOSTRACIÓN. Dado p , sea H' otro polinomio del mismo grado que G que no se anula en p

$$\frac{G}{H} = \frac{G}{H'} \frac{H'}{H} \text{ y como } \frac{H'}{H} \text{ no se anula ni tiene polo en } p \text{ tenemos } \text{ord}_p(\frac{G}{H}) = \text{ord}_p(\frac{G}{H'})$$

□

Se tendrá que $\text{div}(G_1 G_2) = \text{div}(G_1) + \text{div}(G_2)$

Cuando el grado de G es igual a uno el divisor de intersección se denomina *divisor hiperplano* en X .

PROPOSICIÓN 10.2.3. Sean G_1, G_2 polinomios homogéneos del mismo grado d . Si consideramos la función meromorfa $f = \frac{G_1}{G_2}$ se tiene

$$\text{div}(f) = \text{div}(G_1) - \text{div}(G_2)$$

Es decir los divisores de intersección de polinomios del mismo grado son equivalentes, así todos los divisores hiperplano son equivalentes

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$ escogemos un polinomio homogéneo H de grado d tal que $H(p) \neq 0$ tendremos

$$\text{ord}_p(f) = \text{ord}_p\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = \text{ord}_p\left(\frac{G_1}{H}\right) - \text{ord}_p\left(\frac{G_2}{H}\right)$$

□

DEFINICIÓN 10.2.5. *Sea X una curva proyectiva suave se define su grado $dg(X)$ como el grado de cualquier divisor hiperplano en X .*

Dado que los divisores hiperplanos son linealmente equivalentes (proposición 10.2.3) tienen el mismo grado (proposición 9.4.1) y la definición es coherente.

Para el caso de curvas proyectivas planas, esta definición coincide con la de grado de la curva igual al grado del polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$ que la define.

Sea G un polinomio de grado 1 para calcular $dg(\text{div}(G))$ podemos suponer (cambiando las coordenadas si fuese necesario) que $G(x, y, z) = x$ y que $[0, 0, 1] \notin X$. Entonces en X no se anulan simultáneamente los polinomios homogéneos $G = x, Q = y$ y podemos usar la función meromorfa $h = x/y$ para el cálculo pues $\text{div}(G) = \text{div}_0(h)$.

Pero $\text{div}_0(h) = H^*(0)$ (divisor de imagen inversa (ver 9.2.1) de H holomorfa de $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ asociada a h) y por la proposición 9.2.1 $dg(\text{div}(H^*(0))) = dg(H)dg(0) = dg(H)$.

Sea $a \in \mathbb{C}$ para que $p \in X$ $H(p) = a$ tenemos que tener $p = [ay, y, z]$ y $F(ay, y, z) = 0$ e y no puede ser cero pues $[0, 0, 1]$ no pertenece a X así los puntos posibles son del tipo $[a, 1, w]$ con $F[a, 1, w] = 0$, fijado a , se tiene que $F[a, 1, w]$ es un polinomio en w de grado igual al de F (pues $[0, 0, 1] \notin X$) y tendrá $dg(F)$ soluciones que en general (salvo en ramificaciones) serán distintas. Por tanto $dg(\text{div}(G)) = dg(H) = dg(F)$ y ambas definiciones coinciden.

TEOREMA 10.2.1. *(Bezout) Sea X una curva proyectiva suave de grado d y G un polinomio homogéneo de grado e tal que no se anula idénticamente en X . El grado del divisor de intersección $\text{div}(G)$ es*

$$dg(\text{div}(G)) = dg(X)dg(G) = de$$

DEMOSTRACIÓN. Sea H un polinomio homogéneo de grado 1 que define un divisor hiperplano en X . Entonces H^e tiene grado e al igual que G . Entonces por

la proposición 10.2.3 $\text{div}(H^e)$ y $\text{div}(G)$ son linealmente equivalentes y como X es compacta por la proposición 9.4.1 tienen el mismo grado.

como $\text{div}(H^e) = e \text{div}(H)$ tenemos $dg(\text{div}(G)) = e dg(\text{div}(H)) = e dg(X) = e d \quad \square$

10.2.3. Fórmula de Plücker.

Comenzaremos con un lema

LEMA 10.2.2. *Sea X una curva proyectiva suave definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$ y sea $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = P^1(\mathbb{C})$ definida por $\pi([x, y, z]) = [x, z]$ el divisor de intersección de $\frac{\partial F}{\partial y}$ (que es un polinomio homogéneo) en X es el divisor de ramificación de π (ver definición 9.3.4)*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el subconjunto abierto de X definido por $z \neq 0$ que es isomorfo a la curva afín $f(x, y) = F(x, y, 1) = 0$ aquí tenemos $\pi(x, y) = x$. Supongamos que $p = (x_0, y_0)$ sea de ramificación de π esto es equivalente a que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (pues si no por el teorema de la función implícita x sería una coordenada local de X), como X es suave $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ e y es una coordenada local de X en un entorno de (x_0, y_0) en el que tendremos $x = g(y)$ siendo g holomorfa.

Entonces $f(g(y), y)$ será idénticamente nula en un entorno de y_0 y por tanto también su derivada

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{luego} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Pero $g(y)$ es la fórmula de π en dicho entorno y el orden de $g(y)$ en (x_0, y_0) será la multiplicidad de π . Como $\text{ord}_{y_0}(g) = \text{ord}_{y_0}(g') + 1$ tendremos

$$\text{mult}_p(\pi) - 1 = \text{ord}_{y_0}(g'(y)) = \text{ord}_{y_0}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} g'(y)\right) = \text{ord}_{y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ y tenemos el resultado directamente de la definición de divisor de ramificación.

La demostración para el abierto de X definido por $x \neq 0$ es totalmente análoga \square

TEOREMA 10.2.2. (fórmula de Plücker) *Una curva proyectiva suave de grado d tiene genus $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea X una curva proyectiva suave definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$ de grado d y sea $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = P^1$ definida por $\pi([x, y, z]) = [x, z]$ esta aplicación tiene grado d (en general y podrá tomar d valores en X para cada par de valores de x, z) y por el lema anterior el divisor de ramificación coincide con el de intersección del polinomio homogéneo $\frac{\partial F}{\partial y}$ de grado $d - 1$. Por el teorema 10.2.1 este divisor tiene grado $d(d - 1)$.

Aplicando la formula de Hurwitz (teorema 5.4.1) tenemos

$$2g - 2 = -2d + d(d - 1) \quad g = \frac{1}{2}(2 + d^2 - 3d)$$

La fórmula de Plücker puede extenderse al caso de una curva con n nodos obteniéndose en este caso $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n$ (ver [KirwCAC]) \square

10.3. Aplicaciones holomorfas en espacios proyectivos

Una forma de obtener curvas proyectivas suaves es mediante aplicaciones en el espacio proyectivo.

DEFINICIÓN 10.3.1. *Sea X una superficie de Riemann. Una aplicación $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ se denomina holomorfa en $p \in X$ si existen funciones holomorfas $g_0, \dots, g_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, siendo $U \subset X$ un entorno abierto de p , no todas nulas en p tales que*

$$\forall x \in U \quad \phi(x) = [g_0(x) \dots g_n(x)]$$

Es decir las $g_i(x)$ proporcionan las coordenadas homogéneas de $\phi(x)$.

Decimos que ϕ es una aplicación holomorfa si lo es $\forall p \in X$.

En una superficie de Riemann compacta (cuyas únicas funciones holomorfas son las constantes) no podemos esperar usar un único conjunto de funciones g_i para caracterizar una aplicación holomorfa.

Supongamos que tenemos funciones $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ definimos $\phi_f(x) = [f_0(x) \dots f_n(x)]$

PROPOSICIÓN 10.3.1. *Un conjunto de funciones $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ no idénticamente nulas definen una aplicación $\phi_f : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ que es holomorfa en todos los puntos $p \in X$ excepto en aquellos que son un cero de todas ellas o un polo de alguna de ellas.*

Sin embargo vamos a ver que incluso en los ceros y los polos definen una aplicación holomorfa.

LEMA 10.3.1. *Un conjunto de funciones $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ no idénticamente nulas definen una aplicación $\phi_f : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ que se puede extender a una aplicación holomorfa en todo X*

DEMOSTRACIÓN. Sea $o(x) = \min_i(\text{ord}_x(f_i))$ para los puntos $x \in X$ tales que $o(x) = 0$ (ni polo de alguna ni cero de todas) hemos visto que existe un entorno en el que las f_i definen una aplicación holomorfa ϕ_f .

Supongamos $o(p) \neq 0$ podemos elegir un entorno U de p en el que las f_i sean holomorfas y no todas nulas y sin polos excepto quizás en p (pues los ceros y los polos de las funciones meromorfas son aislados). Sea (U, z) una carta centrada en p tendremos

$$\phi_f(z) = [f_0(z) \dots f_n(z)] = [z^{-o(p)} f_0(z) \dots z^{-o(p)} f_n(z)] \quad z \in z(U - \{p\}) \quad (z \neq 0)$$

puesto que podemos multiplicar las coordenadas homogéneas por cualquier constante no nula.

Pero las funciones $g_i(z) = z^{-o(p)} f_i(z)$ son holomorfas en $z = 0$ y no todas nulas luego el valor de $\phi_f(0)$ está bien definido. \square

PROPOSICIÓN 10.3.2. *Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ una aplicación holomorfa. Entonces existe un conjunto $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ tales que $\phi = \phi_f$. Si $\phi = \phi_f = \phi_g$ existe una función $h \in \mathcal{M}(X)$ tal que $g_i = h f_i$ para cada i*

DEMOSTRACIÓN. Sean $[x_0 \dots x_n]$ las coordenadas homogéneas en P^n supongamos sin pérdida de generalidad (reordenando si es necesario) que x_0 no es idénticamente nula en $\phi(X)$. Definimos $f_i = \frac{x_i}{x_0} \cdot \phi$ (composición de funciones: $\frac{x_i}{x_0}$ función de las coordenadas) ($f_0 = 1$)

$f_i \in \mathcal{M}(X)$ en efecto sea $p \in X$ existirá un entorno abierto U de p y una carta (U, z) centrada en p tal que en U $\phi(z) = [h_0(z) \dots h_n(z)]$ siendo las h_i holomorfas. La función $f_i(z) = \frac{h_i(z)}{h_0(z)}$ es meromorfa al ser cociente de funciones holomorfas.

Supongamos ahora que $\phi_f = \phi_g$. Si para algún i las funciones f_i y g_i son idénticamente nulas podemos considerar el subespacio de $P^n(\mathbb{C})$ correspondiente a dicha coordenada homogénea nula. De esta forma supondremos que ninguna es idénticamente nula.

Para los puntos que no sean ni ceros ni polos de las f_i, g_i se tendrá $[f_0(p) \dots f_n(p)] = [g_0(p) \dots g_n(p)]$ luego $g_i(p) = \lambda_p f_i(p)$ Si definimos $h(p) = \lambda_p = \frac{f_i(p)}{g_i(p)}$ tendremos que es holomorfa en dichos puntos (cociente de holomorfas no nulas)

En el resto de puntos $h(p)$ será meromorfa (cociente de meromorfas) □

Hemos establecido una biyección

$$P((\mathcal{M}(X))^{n+1}) \rightarrow (X \rightarrow P^n(\mathbb{C})) \text{ holomorfas}$$

10.4. Sistemas lineales y aplicaciones holomorfas

Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ tendremos que $\phi = [f_0 \dots f_n]$ siendo $f_i \in \mathcal{M}(X)$ definimos el divisor $D = -\min_i(\text{div}(f_i))$ (por tanto $-D(p) \leq \text{ord}_p(f_i)$ para cada i).

Tendremos $\text{div}(f_i) \geq -D$ luego $f_i \in \mathcal{O}_D(X)$ para cada i

Vamos a denotar $V_f \subset \mathcal{M}(X)$ al subespacio de las combinaciones lineales de las f_i (considerando $\mathcal{M}(X)$ un espacio vectorial complejo)

DEFINICIÓN 10.4.1. Se define $|\phi|$, sistema lineal asociado a la aplicación holomorfa ϕ , como el conjunto de divisores

$$|\phi| = \{D + \text{div}(g) : g \in V_f\}$$

siendo $D = -\min_i(\operatorname{div}(f_i))$ y $V_f \subset \mathcal{M}(X)$ el subespacio generado por las f_i .

Evidentemente $|\phi| \subset |D|$ es un sistema lineal de divisores de D (ver definición 9.5.3)

PROPOSICIÓN 10.4.1. *El sistema $|\phi|$ es independiente de las funciones f_i utilizadas para definirlo*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que también podemos poner $\phi = [g_0 \dots g_n]$ entonces por la proposición 10.3.2 existe una función meromorfa h tal que $g_i = hf_i$. Se tendrá $\operatorname{div}(g_i) = \operatorname{div}(f_i) + \operatorname{div}(h)$ y $\min_i(\operatorname{div}(g_i)) = \min_i(\operatorname{div}(f_i)) + \operatorname{div}(h)$

Denotando $D_1 = -\min_i(\operatorname{div}(f_i))$ y $D_2 = -\min_i(\operatorname{div}(g_i))$ tendremos que si $E \in |\phi_g|$ entonces

$$E = \operatorname{div}\left(\sum a_i g_i\right) + D_2 = \operatorname{div}\left(\sum a_i h f_i\right) + D_2 = \operatorname{div}\left(\sum a_i f_i\right) + \operatorname{div}(h) + D_2 = \operatorname{div}\left(\sum a_i f_i\right) + D_1$$

luego $E \in |\phi_f|$. Intercambiando los papeles obtenemos $|\phi_f| = |\phi_g|$ □

Consecuencia directa de la estructura proyectiva de los sistemas lineales de divisores es la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 10.4.2. *Si la imagen de ϕ es no degenerada. Es decir si las f_i son linealmente independientes. La dimensión del sistema lineal $|\phi| \subset |D|$ es n (notar que hay $n + 1$ funciones f_i)*

10.4.1. La aplicación holomorfa asociada a un sistema lineal.

De forma natural se plantea la cuestión de en que condiciones un sistema lineal de divisores, de dimensión n puede considerarse como el asociado a una aplicación holomorfa $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$

Vamos a establecer una condición necesaria.

PROPOSICIÓN 10.4.3. *Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ una aplicación holomorfa. Para cada $p \in X$ existe $E \in |\phi|$ tal que $E(p) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi = [f_0 \dots f_n]$ $f_i \in \mathcal{M}(X)$ y $D = -\min_i(\text{div}(f_i))$ dado $p \in X$ tendremos que $-D(p) = \min_i(\text{ord}_p(f_i)) = \text{ord}_p(f_k) = r$

Consideremos $E = D + \text{div}(f_k)$ y tendremos $E(p) = D(p) + \text{ord}_p(f_k) = -r + r = 0$ □

Vamos a ver que esta condición es también suficiente.

DEFINICIÓN 10.4.2. Sea Q un sistema lineal de divisores en una superficie de Riemann X . Se dice que $p \in X$ es un punto base de Q si $\forall E \in Q$ se tiene $E(p) > 0$. Un sistema lineal de divisores se denomina libre si no tiene puntos base.

PROPOSICIÓN 10.4.4. Un punto $p \in X$ es un punto base de un sistema lineal $Q \subset |D|$ definido por $V \subset \mathcal{O}_D(X)$ si y sólo si $V \subset \mathcal{O}_{D-p}(X)$. En particular p será un punto base de $|D|$ si y sólo si $\mathcal{O}_{D-p}(X) = \mathcal{O}_D(X)$

DEMOSTRACIÓN. $\forall f \in V \subset \mathcal{O}_D(X)$ y $\forall p \in X$ tenemos $D(p) + \text{ord}_p(f) \geq 0$ por tanto p será un punto base si y sólo si $D(p) + \text{ord}_p(f) \geq 1$ que es equivalente a $\forall f \in V \quad V \in \mathcal{O}_{D-p}(X)$ □

Otra forma de expresarlo es decir que no existe $f \in V$ tal que $\text{ord}_p(f) = -D(p)$

PROPOSICIÓN 10.4.5. Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . El punto $p \in X$ es un punto base del sistema lineal completo $|D|$ si y sólo si $\dim(\mathcal{O}_{D-p}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 1$. Por tanto $|D|$ es libre si y sólo si

$$\forall p \in X \quad \dim(\mathcal{O}_{D-p}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 1$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de la proposición anterior y del lema 9.5.1. □

TEOREMA 10.4.1. Sea $Q \subset |D|$ un sistema lineal libre de divisores de dimensión (proyectiva) n en una superficie de Riemann compacta X . Existe una aplicación holomorfa $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ tal que $Q = |\phi|$ y ϕ es única una vez escogidas las coordenadas en $P^n(\mathbb{C})$

DEMOSTRACIÓN. El sistema Q corresponderá a un subespacio $V \subset \mathcal{O}_D(X)$ tal que los divisores de Q serán de la forma $div(f) + D \quad f \in V$

Sea $\{f_0 \dots f_n\}$ una base de V , para cada $p \in X$ al ser Q libre existirá una combinación lineal $\sum a_i f_i$ tal que $ord_p(\sum a_i f_i) = -D(p)$ y por tanto $\min_i(ord_p(f_i)) \leq -D(p)$.

Por otra parte como $V \subset \mathcal{O}_D(X)$ se tiene $\min_i(ord_p(f_i)) \geq -D(p)$ luego $\min_i(ord_p(f_i)) = -D(p)$ y la aplicación $\phi = [f_0 \dots f_n]$ es tal que $Q = |\phi|$

Supongamos ahora que también $Q = |\phi'|$ siendo $\phi' = [g_0 \dots g_n]$ los divisores de $|\phi'|$ serán de la forma $div(g) + D'$ donde D' es el opuesto del mínimo de los divisores de las g_i y g una combinación lineal de las g_i . Como $|\phi| = |\phi'|$ cambiando las coordenadas en ϕ' podemos suponer $div(f_i) + D = div(g_i) + D'$ y haciendo $h_i = \frac{f_i}{g_i}$ tenemos que $div(h_i) = D' - D$ es independiente de i y por tanto los cocientes son independientes de i salvo un factor constante (el cociente de h_i/h_j es holomorfo y no idénticamente nulo). Entonces multiplicando las g_i por un factor adecuado podemos considerar que existe una función h holomorfa en X tal que $h = \frac{f_i}{g_i}$ y por tanto $\phi = \phi'$ □

Tenemos así una correspondencia biyectiva (salvo el cambio de coordenadas realizado en $P^n(\mathbb{C})$)

Sistemas lineales *libres* de dimensión n en $X \leftrightarrow$ Aplicaciones holomorfas $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ con imagen no degenerada

En el caso de un sistema completo, existirán en general puntos base pero se puede construir a partir suyo una aplicación holomorfa.

Supongamos que el sistema lineal completo $|D|$ tiene puntos base. Sea $F = \min\{E : E \in |D|\}$ el mínimo de todos los divisores. Entonces $|D - F|$ es un sistema lineal completo sin puntos base (obviamente existe para cada p una función f tal que $ord_p(f) = -(D - F)(p)$) y además $|D| = F + |D - F|$

Al divisor F se le denomina parte fija del sistema lineal $|D|$ y al *sistema lineal completo* $|D - F|$ parte móvil

LEMA 10.4.1. *Si F es el divisor fijo del sistema lineal completo $|D|$ entonces $\mathcal{O}_{D-F}(X) = \mathcal{O}_D(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Como $F \geq 0$ se tiene $D - F \leq D$ y por tanto $\mathcal{O}_{D-F}(X) \subset \mathcal{O}_D(X)$. Sea ahora $f \in \mathcal{O}_D(X)$ tal que $\text{div}(f) + D \geq 0$ entonces $\text{div}(f) + D \in |D|$ y por tanto $\text{div}(f) + D = F + E$ para algún divisor no negativo E luego $\text{div}(f) + D - F \geq 0$ y $f \in \mathcal{O}_{D-F}(X)$ \square

Por tanto podemos suponer que los sistemas lineales completos son libres (reduciéndolos si fuera necesario)

10.4.2. Criterio para Incrustaciones.

Sea D un divisor tal que el sistema lineal completo $|D|$ no tiene puntos base denotamos por ϕ_D la aplicación holomorfa asociada a $|D|$ queremos analizar cuando estará la imagen $\phi(X)$ incrustada de forma holomorfa en $P^n(\mathbb{C})$. Una condición necesaria evidente es que ha de ser inyectiva.

LEMA 10.4.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X tal que $|D|$ es libre. Sea $p \in X$ existe una base f_0, \dots, f_n para $\mathcal{O}_D(X)$ tal que $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$ y $\forall i > 0 \quad \text{ord}_p(f_i) > -D(p)$*

DEMOSTRACIÓN. El subespacio $\mathcal{O}_{D-p}(X)$ será de codimensión 1 así que existirá una base suya f_1, \dots, f_n tal que. Extendemos la base a $\mathcal{O}_D(X)$ añadiendo una función $f_0 \in \mathcal{O}_D(X) - \mathcal{O}_{D-p}(X)$ tendremos la base buscada. \square

PROPOSICIÓN 10.4.6. *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X tal que $|D|$ es libre. Sean $p, q \in X$ distintos entonces $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ si y sólo si $\mathcal{O}_{D-p-q}(X) = \mathcal{O}_{D-p}(X) = \mathcal{O}_{D-q}(X)$. Por tanto ϕ será inyectiva si y sólo si $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 2$ para cada p, q distintos*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos la base del lema anterior y tendremos que $\phi_D(p) = [1, 0, \dots, 0]$ y para que también sea $\phi_D(q) = [1, 0, \dots, 0]$ ha de cumplirse $\text{ord}_q(f_0) < \text{ord}_q(f_i)$ (en cuyo caso lo obtenemos al multiplicar por $z^{-\text{ord}_q(f_0)}$)

Como q no es un punto base lo anterior ocurre si y sólo si $\text{ord}_q(f_0) = -D(q)$ y $\text{ord}_q(f_i) > -D(q)$ en ese caso f_1, \dots, f_n es una base de $\mathcal{O}_{D-q}(X)$ pero por la forma de construirla (lema anterior) también de $\mathcal{O}_{D-p}(X)$.

Entonces para todo $f \in \mathcal{O}_D(X)$ tal que $\text{ord}_p(f) > -D(p)$ se cumple que $\text{ord}_q(f) > -D(q)$ y se tiene que $\mathcal{O}_{D-p}(X) \subset \mathcal{O}_{D-p-q}(X)$, como la inclusión contraria es evidente tenemos el primer resultado.

Como $|D|$ es libre se tiene $\dim(\mathcal{O}_{D-p}(X)) = \dim(\mathcal{O}_{D-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 1$ por tanto o bien $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 2$ o bien $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 1$ por el lema 9.5.1

Por la primera parte ϕ será inyectiva si y sólo si $\mathcal{O}_{D-p-q}(X)$ es un subespacio propio de $\mathcal{O}_{D-p}(X)$ es decir $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 2$ \square

Que ϕ_D sea inyectiva no es condición suficiente para que su imagen este incrustada en $P^n(\mathbb{C})$ de forma holomorfa.

Consideremos la base utilizada anteriormente f_0, \dots, f_n tal que $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$ es mínimo en p . Entonces tras escalar por $z^{-D(p)}$ las coordenadas homogéneas, la coordenada cero no será nula en la imagen de p y si lo serán el resto.

Pero si no existe una f_i tal que $\frac{f_i}{f_0}$ tenga un cero simple en la imagen de p ninguna de las $\frac{z_i}{z_0}$ será una coordenada local (ver definición 10.2.3)

Por tanto si ϕ_D es inyectiva la imagen será una curva proyectiva suave si y sólo si existe una función en $\mathcal{O}_{D-p}(X)$ que no está en $\mathcal{O}_{D-2p}(X)$.

Esta condición es la misma que la proposición 10.4.6 si consideramos $p = q$ y así tenemos

TEOREMA 10.4.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X tal que $|D|$ es libre. Entonces ϕ_D es una aplicación holomorfa inyectiva y un isomorfismo en su imagen (superficie de Riemann holomorficamente incrustada en P^n si y sólo si $\forall p, q \in X$ (incluyendo los casos $p = q$) se tiene $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 2$*

DEFINICIÓN 10.4.3. *Un divisor D tal que $|D|$ no tiene puntos base y ϕ_D es un incrustamiento se denomina muy amplio.*

Para el caso de la esfera de Riemann se tiene que cualquier divisor $D > 0$ es muy amplio (ver ejemplo 9.5.1)

10.5. Divisores hiperplano de una aplicación holomorfa.

Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ holomorfa. Vamos a ver otra interpretación del sistema lineal de divisores asociado.

Sea $H \subset P^n(\mathbb{C})$ un hiperplano definido por un polinomio homogéneo de grado uno, y supongamos que $\phi(X)$ no está íntegramente contenido en H .

H constará de los puntos en los que se anule un polinomio homogéneo de grado uno es decir tendrá una ecuación lineal homogénea $L = 0$.

Dado $p \in X$ consideremos una ecuación lineal homogénea M que no se anule en $\phi(p)$, tendremos que la función h

$$h(q) = \left(\frac{L}{M}\right) \cdot \phi(q)$$

es holomorfa en un entorno de p . Pues existirá una carta (U, z) centrada en p en la que ϕ será de la forma $[g_0(z) \dots g_n(z)]$ siendo las g_i holomorfas y M no se anulará en $[g_0(0) \dots g_n(0)]$.

DEFINICIÓN 10.5.1. *Dado un hiperplano $H \subset P^n(\mathbb{C})$, se define el divisor hiperplano $\phi^*(H)$ asociado a la aplicación holomorfa $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ como*

$$\phi^*(H)(p) = \text{ord}_p(h)$$

Se tiene que $\phi^*(H)$ no depende de la ecuación lineal homogénea M utilizada para definir el divisor por un argumento análogo al de la demostración del lema 10.2.1. Tampoco depende de la ecuación L utilizada para definir H pues multiplicar L por una constante no altera el orden.

PROPOSICIÓN 10.5.1. $\phi^*(H)(p) \geq 0$ y $\phi^*(H)(p) > 0$ si y sólo si $\phi(p) \in H$

DEMOSTRACIÓN. Como h es holomorfa en un entorno de p tenemos que $\phi^*(H)(p) \geq 0$. Si $\phi(p) \in H$ tendremos que $h(p) = 0$ y $\phi^*(H)(p) = \text{ord}_p(h) > 0$. Si $\phi(p) \notin H$ claramente se tiene $\phi^*(H)(p) = 0$. \square

PROPOSICIÓN 10.5.2. Sea H un hiperplano de $P^n(\mathbb{C})$ (con coordenadas homogéneas $[x_0 \dots x_n]$) definido por la ecuación lineal homogénea $L \equiv \sum a_i x_i = 0$. Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ una aplicación holomorfa definida por $[f_0 \dots f_n]$ tal que $\phi(X)$ no está contenido en H y sea $D = -\min_i(\text{div}(f_i))$ entonces

$$\phi^*(H) = \text{div}\left(\sum a_i f_i\right) + D$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$ existirá j tal que $\text{ord}_p(f_j)$ será mínimo es decir $\text{ord}_p(f_j) = -D(p)$. La coordenada x_j no se anulará en $\phi(p)$.

Tomemos $M = x_j$ para definir $\phi^*(H)$ y tendremos $h = \frac{\sum a_i f_i}{f_j}$

$$\text{ord}_p(h) = \text{ord}_p\left(\sum a_i f_i\right) - \text{ord}_p(f_j) = \text{ord}_p\left(\sum a_i f_i\right) + D(p)$$

\square

COROLARIO 10.5.1. Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ una aplicación holomorfa. El conjunto de divisores hiperplano $\{\phi^*(H)\}$ forma el sistema lineal $|\phi|$ de la aplicación

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema anterior y de la definición 10.4.1 \square

10.5.1. Grados de una aplicación holomorfa.

Consideremos una aplicación $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ holomorfa y supongamos que $Y = \phi(X)$ es una curva proyectiva suave. Tenemos varios conceptos de “grado”

1. El grado de $\phi : X \rightarrow Y$ como aplicación entre superficies de Riemann compactas (número de preimágenes de cada punto)
2. El grado de un divisor (intersección) hiperplano en Y (grado de Y)
3. El grado de los divisores hiperplanos de la aplicación ϕ

Estos conceptos están relacionados por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 10.5.3. *Sea $\phi : X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ holomorfa tal que $Y = \phi(X)$ es una curva proyectiva suave. Sea H un hiperplano de $P^n(\mathbb{C})$. Entonces*

$$dg(\phi^*(H)) = dg(\phi)dg(Y)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$ y H definido por el polinomio homogéneo L . Aplicando la proposición 5.3.3 a $g = L/M, F = \phi$ tenemos

$$\phi^*(H)(p) = ord_{\phi(p)}(L/M) mult_p(\phi) = mult_p(\phi) div(L)(\phi(p))$$

Entonces

$$\begin{aligned} dg(\phi^*(H)) &= \sum_{p \in X} mult_p(\phi) div(L)(\phi(p)) = \sum_{q \in Y} \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} mult_p(\phi) div(L)(q) = \\ &= \sum_{q \in Y} div(L)(q) \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} mult_p(\phi) = \sum_{q \in Y} div(L)(q) dg(\phi) = dg(\phi)dg(div(L)) = dg(\phi)dg(Y) \end{aligned}$$

□

COROLARIO 10.5.2. *Si X compacta y D es un divisor muy amplio ($\phi_D(X)$ es un incrustamiento holomorfo) tenemos*

$$dg(\phi_D(X)) = dg(D)$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser un incrustamiento (inyectivo) $dg(\phi_D) = 1$ y de la proposición 10.5.2 tenemos $dg(\phi_D^*(H)) = dg(D)$ pues como X compacta $dg(div(\sum a_i f_i)) = 0$.

□

10.5.2. Aplicaciones de Veronese.

Consideremos la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ y el divisor $E = n \cdot \infty$ siendo $n \geq 1$ tenemos que es un divisor muy amplio pues por el ejemplo 9.5.1 $\dim(\mathcal{O}_E(\widehat{\mathbb{C}})) = n + 1$, $\dim(\mathcal{O}_{E-p-q}(\widehat{\mathbb{C}})) = n - 1$ y basta aplicar el teorema 10.4.2 .

La aplicación ϕ_E incrusta la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en el espacio proyectivo $P^n(\mathbb{C})$ y la imagen se denomina *curva normal racional*.

Si z es la coordenada canónica de $\widehat{\mathbb{C}}$ ($w = \frac{1}{z}$ en un entorno de ∞). Una base de \mathcal{O}_E es $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ y $\phi_E : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ es tal que $\phi_E(z) = [1, z, \dots, z^n]$ y $\phi_E(\infty) = [0, 0, \dots, 1]$. Cuando $n = 2$ tenemos un isomorfismo entre la esfera de Riemann y la curva proyectiva plana $xz = y^2$.

Estas aplicaciones se denominan aplicaciones de Veronese.

Teorema de Riemann-Roch y dualidad de Serre (algebraico)

Vamos a obtener una versión del teorema de Riemann-Roch por procedimientos básicamente algebraicos veremos más adelante este mismo teorema utilizando otros procedimientos lo que permitirá obtener distintos puntos de vista de su significado.

Antes necesitamos unos resultados sobre los cuerpos de funciones meromorfas.

11.1. Cuerpos de funciones meromorfas

Vamos a considerar subcuerpos de $\mathcal{M}(X)$, siendo X una superficie de Riemann compacta, tales que:

- Contengan las funciones constantes
- Separen puntos de X
- Separen tangentes de X

Denotaremos por $\mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ a uno cualquiera de tales cuerpos. Sabemos que existe al menos uno: El propio $\mathcal{M}(X)$.

PROPOSICIÓN 11.1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta para cada $p \in X$ y para cada entero N existe una función $f \in \mathcal{Q}(X)$ con $\text{ord}_p(f) = N$*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{F}(X)$ separa tangentes de X existe una función $g \in \mathcal{Q}(X)$ tal que $\text{ord}_p(g - g(p)) = 1$ y considerando $f = (g - g(p))^N$ tenemos el resultado. □

PROPOSICIÓN 11.1.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta para cada par de puntos distintos $p, q \in X$ existe una función $f \in \mathcal{Q}(X)$ con un polo en p y un cero en q*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{Q}(X)$ separa puntos de X existe $g \in \mathcal{Q}(X)$ tal que $g(p) \neq g(q)$

Podemos suponer que q no es un polo de g (basta considerar $\frac{1}{g}$ si lo fuera). Entonces $g' = g - g(q)$ tiene un cero en q , y $g'(p) \neq 0$.

Si g' tiene un polo en p basta hacer $f = g'$ en caso contrario hacemos $f = \frac{g'}{g' - g'(p)}$ □

COROLARIO 11.1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Para cada conjunto finito de puntos distintos p_1, \dots, p_n, q existe una función $f \in \mathcal{Q}(X)$ con un polo en cada p_i y un cero en q*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción. La proposición implica la validez para $n = 1$, supongámoslo cierto para $n - 1$ y sea h tal que tiene polos en p_1, \dots, p_{n-1} y un cero en q , sea M el máximo de los ordenes de los polos de h en p_1, \dots, p_{n-1} .

Existe, por la proposición anterior, una función g con un polo en p_n y un cero en q . Entonces $f = h + g^{M+1}$ cumple los requisitos (pues si g tiene un polo en alguno de los p_1, \dots, p_n el orden del polo de g^{M+1} es mayor que el de h y no se pueden compensar) □

COROLARIO 11.1.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Para cada conjunto finito de puntos distintos p_1, \dots, p_n, q y cada $N \geq 1$ existe una función $f \in \mathcal{Q}(X)$ con $\text{ord}_{p_i}(f) \geq N$ y $\text{ord}_q(f - 1) \geq N$ para cada i*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in \mathcal{Q}(X)$ con un cero en q y polos en los p_i . Considerando $f = \frac{1}{1+g^N}$ tendremos la función buscada □

11.1.1. Extensiones de cuerpos. Existe un homomorfismo natural $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{Q}(X)$ que es inyectivo.

Por tanto podemos considerar $\mathcal{Q}(X)$ como una extensión del cuerpo \mathbb{C} .

Denotaremos $\mathbb{C}(f)$ a la extensión simple de \mathbb{C} por el elemento $f \in \mathcal{Q}(X)$. Este cuerpo es isomorfo al cuerpo de funciones racionales en una indeterminada $\mathbb{C}(T)$.

Tendremos $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(f) \subset \mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}(X)$.

PROPOSICIÓN 11.1.3. *La extensión $\mathbb{C}(f)$ no es algebraica para ningún $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante*

DEMOSTRACIÓN. Si lo fuera existiría un polinomio $q(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_0$ tal que $q(f) = 0$ como existen a lo sumo n números complejos que satisfagan $q(T) = 0$ resulta que la imagen de f sólo podría contener n elementos lo que es incompatible con el teorema 5.3.3. \square

Queremos demostrar que $\mathcal{M}(X)$ es finitamente generada y de grado de trascendencia uno.

TEOREMA 11.1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta $\mathcal{M}(X)$ es una extensión de \mathbb{C} de grado de trascendencia uno*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existieran $f, g \in \mathcal{M}(X)$ algebraicamente independientes. Sea $D = \max(\text{div}_\infty(f), \text{div}_\infty(g))$ tendremos que $f, g \in \mathcal{O}_D(X)$

Si $i + j \leq n$ tendremos que $f^i g^j \in \mathcal{O}_{nD}(X)$. Estos monomios son linealmente independientes (puesto que f, g lo son algebraicamente) Su número se calcula del siguiente modo: Fijado i podemos elegir j de $n - i + 1$ formas (desde 0 hasta $n - i$) luego tendremos $\sum_{i=0}^n (n - i + 1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

Por tanto $\dim(\mathcal{O}_{nD}(X)) \geq \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

Pero según el teorema 9.5.1 $\dim(\mathcal{O}_{nD}(X)) \leq 1 + dg(nD) = 1 + n(dg(D))$

Lo cual es imposible para un n suficientemente grande. \square

Para demostrar que es finitamente generado bastará escoger una $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante cualquiera y demostrar que $\mathcal{M}(X)$ es una extensión algebraica finita de $\mathbb{C}(f)$.

Necesitaremos unos lemas previos

LEMA 11.1.1. *Sea A un divisor cualquiera en una superficie de Riemann compacta X y $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante. Existe un entero $m > 0$ y una función $g \in \mathcal{M}(X)$, que es un polinomio en f (o sea $g = r(f), r \in \mathbb{C}[T]$) tal que $A - \text{div}(g) \leq m(\text{div}_\infty(f))$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto finito $\{p_1, \dots, p_k\}$ de puntos del soporte de A tales que $A(p_i) > 0$ y que no son polos de f .

La función $f - f(p_i)$ tendrá un cero en p_i y los mismos polos que f , la función $(f - f(p_i))^{A(p_i)}$ tendrá los mismos polos que f y un cero en p_i de orden mayor o igual que $A(p_i)$.

$g = \prod_{i=1}^k (f - f(p_i))^{A(p_i)}$ es una función meromorfa que tiene los mismos polos que f y ceros en cada p_i de orden al menos A_i . Por tanto $A - \text{div}(g)$ sólo puede ser positiva en los polos de f .

Como el número de polos de f es finito habrá un entero m que hace $A - \text{div}(g) \leq m(\text{div}_\infty(f))$. Además por la forma de construirlo g es un polinomio en f . \square

LEMA 11.1.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $f, h \in \mathcal{M}(X)$ no constantes. Existe un polinomio $r(T) \in \mathbb{C}[T]$ tal que la función $r(f)h$ no tiene polos fuera del conjunto de polos de f y existe un entero $m > 0$ tal que $r(f)h \in \mathcal{O}_{mD}(X)$ donde $D = \text{div}_\infty(f)$*

DEMOSTRACIÓN. Si en el lema anterior hacemos $A = -\text{div}(h)$ tenemos $-\text{div}(h) - \text{div}(g) \leq m(\text{div}_\infty(f))$ luego $-(\text{div}(gh)) \leq mD$ y $\text{div}(gh) \geq -mD$. \square

Vamos a denotar $\mathcal{O}_D^{\mathcal{Q}}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{O}_D(X)$ que claramente se ve que es un espacio vectorial.

LEMA 11.1.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta, $f \in \mathcal{Q}(X)$, y $D = \text{div}_\infty(f)$. Supongamos que $[\mathcal{Q}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$. Entonces existe una constante m_0 tal que $\forall m \geq m_0$*

$$\dim(\mathcal{O}_{mD}^{\mathcal{Q}}(X)) \geq (m - m_0 + 1)k$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{Q}(X)$ linealmente independientes sobre $\mathbb{C}(f)$. Por el lema anterior existe, para cada i , un polinomio $r_i(T)$ (notar que $r_i(f) \in \mathcal{Q}(X)$) tal que los polos de $h_i = r_i(f)g_i$ están en el conjunto de polos de f y existirá un entero m_i tal que $h_i \in \mathcal{O}_{m_i D}^{\mathcal{Q}}(X)$ y haciendo m_0 igual al máximo de los m_i tendremos $h_i \in \mathcal{O}_{m_0 D}^{\mathcal{Q}}(X)$

Las funciones h_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}(f)$ al serlo las g_i .

Para cada $\alpha \leq m - m_0$ las funciones $f^\alpha h_i$ pertenecen a $\mathcal{O}_{mD}^{\mathcal{Q}}(X)$ y son claramente independientes sobre \mathbb{C}

como existen $(m - m_0 + 1)k$ de estas funciones tenemos el resultado □

TEOREMA 11.1.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta. $\mathcal{M}(X)$ es una extensión finitamente generada de \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = \text{div}_\infty(f)$ y supongamos que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq (1 + dg(D))$, por el lema anterior existe un entero m_0 tal que

$$\dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) \geq (m - m_0 + 1)(1 + dg(D))$$

pero por el teorema 9.5.1

$$\dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) \leq 1 + m dg(D)$$

debiendo cumplirse por tanto $m \leq m_0(1 + dg(D)) - dg(D)$ lo que es absurdo al ser m arbitrario.

Así pues $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq dg(D)$ y al ser la extensión finita, $\mathcal{M}(X)$ es finitamente generado □

TEOREMA 11.1.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $f \in \mathcal{Q}(X)$ no constante. Se tiene*

$$[\mathcal{Q}(X) : \mathbb{C}(f)] = dg(\text{div}_\infty(f))$$

DEMOSTRACIÓN. Acabamos de ver que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq dg(D)$ (siendo $D = \text{div}_\infty(f)$).

Sea $D = \sum_i n_i \cdot p_i$ y consideremos funciones $g_{ij} \in \mathcal{Q}(X)$ con un polo en p_i de orden j y ni ceros ni polos en el resto de los p_k (La existencia de dichas funciones viene asegurada por el corolario 8.7.1 al separar $\mathcal{Q}(X)$ puntos y tangentes).

Si las funciones $\{g_{ij} : 1 \leq j \leq n_i\}$ son linealmente independientes $[\mathcal{Q}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq dg(D)$ y ya tenemos el resultado (pues $\mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}(X)$).

Supongamos que existiera una relación

$$\sum c_{ij}(f)g_{ij} = 0 \quad (A)$$

(siendo $c_{ij}(f)$ funciones racionales de f)

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las c_{ij} podemos suponer que son polinomios. Por tanto los únicos polos de $c_{ij}(f)$ son los puntos p_k polos de f . Además si c_{ij} tiene grado d el polo en p_k será de orden $d n_k$.

Escojamos i_0, j_0 de modo que el grado del polinomio $c_{i_0 j_0}$ sea máximo y *en caso de igualdad se escoge el de mayor j* . Dividimos la expresión (A) por $c_{i_0 j_0}$ obteniendo

$$d_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i_0 j_0}} \quad \sum d_{ij}(f)g_{ij} = 0 \quad (B)$$

Por tanto $d_{i_0 j_0} = 1$ y las otras funciones racionales con denominadores de mayor o igual grado que los numeradores. Todas estas funciones tienen orden no negativo en los puntos p_k y estos órdenes son múltiplos de n_k . Es decir $\text{ord}_{p_k}(d_{ij}(f)) = \alpha_{ij} n_k$ $0 \leq \alpha_{ij} \in \mathbb{N}$

Consideremos el punto p_{i_0}

Para $i \neq i_0$ tenemos que $\text{ord}_{p_{i_0}}(g_{ij}) = 0$ y $\text{ord}_{p_{i_0}}(d_{ij}(f)) \geq 0$ luego el producto $d_{ij}(f)g_{ij}$ tiene orden no negativo.

También tenemos que $\text{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0 j}(f)) = \alpha_{i_0 j} n_{i_0 i_0}$ ($0 \leq \alpha_{i_0 j} \in \mathbb{N}$) y $\text{ord}_{p_{i_0}}(g_{i_0 j}) = -j$ (j varía entre 1 y n_{i_0}) así si $\alpha_{i_0 j} \neq 0$ el producto $d_{ij}(f)g_{ij}$ tiene orden no

negativo en p_{i_0} (esto no se cumplirá al menos para i_0j_0 pues al ser $d_{i_0j_0} = 1$ se tiene $ord_{p_{i_0}}(1) = 0$).

Como $d_{i_0j_0}(f)g_{i_0j_0} = g_{i_0j_0}$ tendremos $ord_{p_{i_0}}(d_{i_0j_0}(f)g_{i_0j_0}) = -j_0$.

Podría haber otros $j \neq j_0$ tales que $\alpha_{i_0j} = 0$ pero por la forma de elegirlo j_0 sería mayor que estos j

Así el polo de $d_{i_0j_0}(f)g_{i_0j_0}$ en p_{i_0} no puede ser compensado y (B) no puede ser cierta (y por tanto tampoco (A)). \square

Hasta ahora habíamos distinguido $\mathcal{M}(X)$ de $\mathcal{Q}(X)$ pero resulta que tenemos para cualquier $f \in \mathcal{Q}(X)$ no constante

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}(X) \\ [\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = [\mathcal{Q}(X) : \mathbb{C}(f)] = dg(\text{div}_\infty(f)) \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{M}(X)$.

Resumimos los resultados en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 11.1.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta $\mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ un cuerpo cualquiera de funciones meromorfas tal que contenga las constantes y separe puntos y tangentes de X . Entonces $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{M}(X)$. Por tanto si S es un conjunto de funciones meromorfas en X que separa puntos y tangentes entonces S genera $\mathcal{M}(X)$ como una extensión de \mathbb{C}*

COROLARIO 11.1.3. *Se tienen los casos siguientes:*

- En la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ el cuerpo de funciones viene generado por la coordenada z
- Si X es una curva proyectiva suave incrustada en $P^n(\mathbb{C})$ con coordenadas $[x_0, \dots, x_n]$ las cocientes $\frac{x_i}{x_j}$ generan $\mathcal{M}(X)$

Vamos a obtener una versión el teorema de Riemann Roch por procedimientos básicamente algebraicos veremos más adelante este mismo teorema utilizando otros procedimientos lo que permitirá obtener distintos puntos de vista de su significado.

11.2. Problema de Mittag Leffler

En la sección 8.7 hemos visto la definición de polinomio de Laurent y la posibilidad de construir funciones meromorfas con un polo de Laurent dado en un número finito de puntos.

Sin embargo esto no implica ningún tipo de control sobre el comportamiento en el resto de puntos. Si exigimos que la función sea holomorfa en el resto nos enfrentamos al llamado “*Problema de Mittag Leffler*”.

Para analizar este problema en una superficie de Riemann compacta X vamos a necesitar una herramienta auxiliar

DEFINICIÓN 11.2.1. Sea X una Superficie de Riemann, un divisor de Laurent en X es una aplicación $T : X \rightarrow \mathcal{L}(z)$ (ver sección 8.7) cuyo soporte (adherencia del conjunto de puntos en los que T es distinto de cero.) es un conjunto discreto. Con la adición puntual de polinomios forman un grupo abeliano que se denota $\mathcal{T}(X)$.

En el caso de que X sea compacta para cualquier divisor de Laurent T el soporte ha de ser un conjunto finito.

Considerando los distintos $\mathcal{T}(U)$ para cada abierto $U \subset X$ vemos que forman un haz que denotaremos \mathcal{T}

NOTA. Emplearemos una notación de suma formal

$$T = \sum_{p \in X} r_p(z) \cdot p$$

donde $r_p(z) = T(p)$

DEFINICIÓN 11.2.2. Definimos el operador de truncado J^M en un polinomio o serie de Taylor/Laurent ($S = \infty$) de forma que $J^M \left(\sum_{i=R}^S c_i z^i \right) = \sum_{i=R}^{M-1} c_i z^i$

11.2.1. Divisores de Laurent y divisores.

Sea X una superficie de Riemann. Para cada punto $p \in X$ vamos a definir una carta $\{(U_p, z_p)\}$ centrada en p , de forma que cuando nos referamos al desarrollo de Laurent de una función meromorfa f en un punto p nos estaremos refiriendo al desarrollo de Laurent de la función $f \cdot z_p^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ alrededor de 0 . Denotaremos a dicha serie $s_p(f)$.

Un divisor D genera un subgrupo en $\mathcal{T}(X)$ que denotaremos $\mathcal{T}[D](X)$ de la siguiente forma

$$\mathcal{T}[D](X) = \{T = \sum r_p \cdot p : \forall p \in \text{supp}(T) \text{ grado máximo } (r_p) < -D(p)\}$$

Es trivial comprobar que es un subgrupo y que $\mathcal{T}[D]$ es un haz sobre X

Por ejemplo para el caso de $D = 0$ tenemos que $\mathcal{T}[0](X)$ consiste en los divisores de Laurent cuyos polinomios solo tienen términos de grados negativos.

La operación de “truncado” en polinomios de Laurent origina un homomorfismo

$$J_D : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}[D](X) \quad J_D\left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p\right) = \sum_{p \in X} J^{-D(p)}(r_p) \cdot p$$

NOTA. Es evidente que J_D se puede considerar un homomorfismo de haces $J_D : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}[D]$

Análogamente si $D_1 \leq D_2$ tenemos

$$J_{D_2}^{D_1} : \mathcal{T}[D_1](X) \rightarrow \mathcal{T}[D_2](X) \quad J_{D_2}^{D_1}\left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p\right) = \sum_{p \in X} J^{-D_2(p)}(r_p) \cdot p$$

que claramente se ve que es un homomorfismo suprayectivo

DEFINICIÓN 11.2.3. Para cada divisor D existe una aplicación

$$\alpha_D : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{T}[D](X) \quad \alpha_D(f) = \sum_{p \in X} J^{-D(p)}(s_p(f)) \cdot p$$

que es un homomorfismo de grupos.

NOTA. α_D se puede considerar como un homomorfismo de haces $\alpha_D : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}[D]$

α_D es intercambiable con el operador de truncado de forma que si $D_1 \leq D_2$

$$\alpha_{D_2}(f) = J_{D_2}^{D_1}(\alpha_{D_1}(f))$$

como se comprueba directamente de la definición.

DEFINICIÓN 11.2.4. Sea X una superficie de Riemann $f \in \mathcal{M}(X)$ y D un divisor en X se define un homomorfismo (multiplicación de f por T truncada)

$$\mu_f^D : \mathcal{T}[D](X) \rightarrow \mathcal{T}[D - \text{div}(f)](X) \quad \mu_f^D\left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p\right) = \sum_{p \in X} J^{-(D - \text{div}(f))}(s_p(f)r_p) \cdot p$$

Si consideramos $\mu_{\frac{1}{f}}^{D - \text{div}(f)}$ tendremos

$$\begin{aligned} \mu_{\frac{1}{f}}^{D - \text{div}(f)}\left(\mu_f^D\left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p\right)\right) &= \mu_{\frac{1}{f}}^{D - \text{div}(f)}\left(\sum_{p \in X} J^{-(D - \text{div}(f))}(s_p(f)r_p) \cdot p\right) = \\ &= \sum_{p \in X} J^{-D}\left(s_p\left(\frac{1}{f}\right)J^{-(D - \text{div}(f))}(s_p(f)r_p)\right) \cdot p = \sum_{p \in X} r_p \cdot p \end{aligned}$$

luego μ_f^D es un isomorfismo con inverso $\mu_{\frac{1}{f}}^{D - \text{div}(f)}$.

NOTA. μ_f^D se puede considerar como un homomorfismo de haces $\mu_f^D : \mathcal{T}[D] \rightarrow \mathcal{T}[D - \text{div}(f)]$

LEMA 11.2.1. Fácilmente se comprueba que

$$\alpha_{D - \text{div}(f)}(fg) = \mu_f^D(\alpha_D(g))$$

Los divisores de Laurent, permiten una caracterización de $\mathcal{O}_D(X)$. Puesto que si $f \in \mathcal{O}_D(X)$ su orden en p es mayor o igual que $-D(p)$ por tanto si aplicamos α_D a f obtendremos el polinomio nulo por tanto

$$\text{kern}(\alpha_D) = \mathcal{O}_D(X)$$

11.2.2. Divisores de final de Laurent y el problema generalizado de Mittag-Leffler.

Vamos a ver que una generalización del problema de Mittag Leffler en una superficie de Riemann compacta X se puede expresar en términos de divisores de Laurent.

En efecto sea $T \in \mathcal{T}[D](X)$. Si existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_D(f) = T$ tendremos

- f deberá ser holomorfa en aquellos puntos $p \in X$ donde $T(p) = D(p) = 0$ (todos excepto un número finito)
- $J^{-D(p)}(s_p(f)) = T(p)$ es decir la serie de Laurent de f en p deberá coincidir hasta el término de grado $-D(p)$ con el polinomio $T(p)$ en los demás puntos

Hay que notar que esta exigencia es mucho más fuerte que la del teorema 8.7.1

Por tanto el problema generalizado de Mittag-Leffler se puede expresar en términos de la existencia de la preimagen por α_D de un divisor de Laurent T

11.2.3. El espacio de obstrucción.

Algebraicamente la imposibilidad de resolver el problema generalizado de Mittag-Leffler vendrá medida por el “conúcleo” (espacio cociente)

$$H^{ob}(D) = \mathcal{T}[D](X)/\text{Imag}(\alpha_D)$$

En el sentido de que si $H^{ob}(D)$, *espacio de obstrucción*, es $\{[0]\}$ todo elemento de $\mathcal{T}[D](X)$ es la imagen de una $f \in \mathcal{M}(X)$ por α_D y por tanto el problema tiene solución.

PROPOSICIÓN 11.2.1. *La sucesión corta de grupos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_D(X) \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}[D](X) \xrightarrow{p} H^{ob}(D) \longrightarrow 0$$

(donde p es la proyección canónica) es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de las definiciones. □

Si $D_1 \leq D_2$ tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_1}(X) & \xrightarrow{\alpha_{D_1}} & \mathcal{T}[D_1](X) & \xrightarrow{p_1} & H^{ob}(D_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p_{D_1 D_2} & & \downarrow J_{D_2}^{D_1} & & \downarrow p_{H_1 H_2} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_2}(X) & \xrightarrow{\alpha_{D_2}} & \mathcal{T}[D_2](X) & \xrightarrow{p_2} & H^{ob}(D_2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Donde $p_{D_1 D_2}, p_{H_1 H_2}$ son proyecciones canónicas (suprayectivas).

PROPOSICIÓN 11.2.2. *Con la notación anterior, se tiene que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \text{kern}(p_{D_1 D_2}) \xrightarrow{\alpha} \text{kern}(J_{D_2}^{D_1}) \xrightarrow{p} \text{kern}(p_{H_1 H_2}) \longrightarrow 0$$

es exacta

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos un diagrama conmutativo de homomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\
 \downarrow d & & \downarrow D \\
 X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2
 \end{array}$$

Tenemos que f define un homomorfismo entre $\text{kern}(d)$ y $\text{kern}(D)$ puesto que se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{f} & y \\
 \downarrow d & & \downarrow D \\
 0 & \xrightarrow{g} & 0
 \end{array}$$

y por tanto las aplicaciones están bien definidas.

Se tiene que α es inyectiva por ser una restricción a $\text{kern}(P_{D_1 D_2})$ de α_{D_1} que es inyectiva.

Sea $[f] \in \text{kern}(P_{D_1 D_2})$ por ser exacta la sucesión superior $\alpha([f]) = \alpha_{D_1}([f]) \in \text{kern}(p_1)$ y por tanto a $\text{kern}(p)$ luego $\text{Imag}(\alpha) \subset \text{kern}(p)$.

Sea $T \in \text{kern}(J_{D_2}^{D_1})$ tal que $p_1(T) = 0$ como la sucesión superior es exacta existirá $[f] \in \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_1}(X)$ tal que $\alpha_{D_1}(f) = T$. Debido a que α_{D_2} es inyectiva y al diagrama

$$\begin{array}{ccc} [f] & \xrightarrow{\alpha_{D_1}} & T \\ \downarrow p_{D_1 D_2} & & \downarrow J_{D_2}^{D_1} \\ [g] & \xrightarrow{\alpha_{D_2}} & 0 \end{array}$$

tenemos que $[g] = [0]$ y así $[f] \in \text{kern}(p_{D_1 D_2})$. Hemos demostrado $\text{kern}(p) \subset \text{Imag}(\alpha)$.

Sea $[T] \in \text{kern}(p_{H_1 H_2})$ por ser p_1 suprayectiva existirá T tal que $p_1(T) = [T]$ sea $Q = p_{D_1 D_2}(T)$ por la conmutatividad del cuadrado de la derecha tendremos $p_2(Q) = 0$ y existirá $[g] \in \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_2}(X)$ tal que $\alpha_{D_2}([g]) = Q$ y $[h] \in \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_1}(X)$ tal que $p_{D_1 D_2}([h]) = [g]$. Si consideramos $T' = T - \alpha_{D_1}([h])$ tendremos que $p_1(T') = [T]$ y $p_{D_1 D_2}(T') = 0$ luego $T' \in \text{kern}(p_{D_1 D_2})$ y p es suprayectiva. □

Tenemos así la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 11.2.3. $\dim(\text{kern}(p_{D_1 D_2})) = \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) - \dim(\mathcal{O}_{D_1}(X))$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación $p_{D_1 D_2} : \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_1}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)/\mathcal{O}_{D_2}(X)$ su núcleo serán aquellas $[f]$ tales que los términos del desarrollo de Laurent de f en cada p sólo contenga términos de exponente superior a $-D_2(p)$ es decir $\mathcal{O}_{D_2}(X) - \mathcal{O}_{D_1}(X)$, y como por el teorema 9.5.1 $\mathcal{O}_D(X)$ es de dimensión finita tenemos la proposición. □

PROPOSICIÓN 11.2.4. $\dim(\text{kern}(J_{D_2}^{D_1})) = \sum_{p \in X} (D_2(p) - D_1(p)) = dg(D_2) - dg(D_1)$

DEMOSTRACIÓN. El núcleo de $J_{D_2}^{D_1}$ estará constituido por aquellos divisores finales de Laurent $\sum_N^M r_p \cdot p$ tales que $M < -D_1(p)$ y $N \geq -D_2(p)$ para cada p . Cumpliendo estas condiciones existen $D_2(p) - D_1(p)$ monomios que constituirán una base de los polinomios del núcleo en el punto p , y sumando para todo p perteneciente a X tenemos el resultado. □

y por último tenemos

PROPOSICIÓN 11.2.5. $\dim(\ker(p_{H_1H_2})) = dg(D_2) - \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) - dg(D_1) + \dim(\mathcal{O}_{D_1}(X))$

DEMOSTRACIÓN. Considerando la aplicación lineal suprayectiva

$$\ker(J_{D_2}^{D_1}) \xrightarrow{p} \ker(p_{H_1H_2})$$

Tendremos $\dim(\ker(J_{D_2}^{D_1})) = \dim(\ker(p)) + \dim(\text{Imag}(p))$ por el primer teorema de isomorfía de grupos (ver [BujalTG]) aplicado a espacios vectoriales. Como $\text{Imag}(p) = \ker(p_{H_1H_2})$, $\ker(p) = \text{Imag}(\alpha)$ y $\dim(\text{Imag}(\alpha)) = \dim(\ker(p_{D_1D_2}))$ puesto que α es inyectiva, tenemos el resultado. \square

11.2.3.1. *La dimensión del espacio de obstrucción.*

Vamos a demostrar que $H^{ob}(D)$ es de dimensión finita para cada divisor D en X . Necesitaremos algunos lemas

LEMA 11.2.2. Sean $D_1 \leq D_2$ divisores en una superficie de Riemann compacta X . Se tiene que si $H^{ob}(D_2)$ es de dimensión finita también lo es $H^{ob}(D_1)$ y se cumple $\dim(H^{ob}(D_1)) = \dim(\ker(p_{H_1H_2})) + \dim(H^{ob}(D_2))$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de que

$$H^{ob}(D_1) \xrightarrow{p_{H_1H_2}} H^{ob}(D_2)$$

es suprayectiva, de la finitud de $\dim(\ker(p_{H_1H_2}))$ y del primer teorema de isomorfía. \square

LEMA 11.2.3. Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante, siendo X una superficie de Riemann compacta, y sea $D = \text{div}_\infty(f)$. Existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall m > N_0$ se tiene que $\dim(\ker(p_{H_0H_{mD}}))$ es constante, por tanto existe M tal que $\forall m \dim(\ker(p_{H_0H_{mD}})) \leq M$

DEMOSTRACIÓN. Tendremos por la proposición 11.2.5

$$\dim(\ker(p_{H_0H_{mD}})) = mdg(D) - \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) + 1$$

dato que $\dim(\mathcal{O}(X)) = 1$ (sólo las funciones constantes son holomorfas)

También $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = dg(D)$ por el teorema 11.1.3 y por tanto aplicando el lema 11.1.3 tenemos

$$\forall m \geq m_0 \quad \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) \geq (m - m_0 + 1)dg(D)$$

$\dim(\text{kern}(p_{H_0H_{mD}})) \leq mdg(D) - (m - m_0 + 1)dg(D) + 1 = 1 + (m_0 - 1)dg(D) = K$ no depende de m

Como si $0 < m_1 < m_2$ tenemos $0 < m_1D < m_2D$ y considerando que el homomorfismo

$$H^{ob}(0) \xrightarrow{p_{H_0H_{m_2D}}} H^{ob}(m_2D)$$

es composición de $H^{ob}(0) \xrightarrow{p_{H_0H_{m_1D}}} H^{ob}(m_1D)$ y $H^{ob}(m_1D) \xrightarrow{p_{H_{m_1D}H_{m_2D}}} H^{ob}(m_2D)$

tendremos $\text{kern}(p_{H_0H_{m_1D}}) \subset \text{kern}(p_{H_0H_{m_2D}})$ y por tanto $\dim(\text{kern}(p_{H_0H_{mD}}))$ no decrece cuando m crece.

Tenemos así una sucesión de *enteros* no decreciente limitada por K y ha de existir un valor N_0 a partir del cual se haga constante. \square

LEMA 11.2.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta existe un entero M tal que para todo divisor A*

$$dg(A) - \dim(\mathcal{O}_A(X)) \leq M$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = \text{div}_\infty(f)$ por la proposición 11.2.5 siendo $D_2 = mD, D_1 = 0$ y el lema anterior tenemos

$$dg(mD) - \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) = \dim(\text{kern}(p_{H_0H_{mD}})) - 1 \leq M$$

Sea A un divisor cualquiera en X por el lema 11.1.1 existe $g \in \mathcal{M}(X)$ y un entero m tal que $B = A - \text{div}(g) \leq mD$ tendremos $dg(B) = dg(A) - dg(\text{div}(g)) = dg(A)$ por la proposición 9.1.2 y como A, B son equivalentes, por la proposición 9.5.4 tenemos $\dim(\mathcal{O}_A(X)) = \dim(\mathcal{O}_B(X))$ y

$$dg(A) - \dim(\mathcal{O}_A(X)) = dg(B) - \dim(\mathcal{O}_B(X))$$

y por la proposición 11.2.5

$$\dim(\ker(p_{H_B H_{mD}})) = dg(mD) - \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) - dg(B) + \dim(\mathcal{O}_B(X))$$

$$dg(A) - \dim(\mathcal{O}_A(X)) = dg(mD) - \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) - \dim(\ker(p_{H_B H_{mD}}))$$

$$dg(A) - \dim(\mathcal{O}_A(X)) \leq dg(mD) - \dim(\mathcal{O}_{mD}(X)) \leq M$$

□

LEMA 11.2.5. *Existe un divisor A_0 en X tal que $H^{ob}(A_0) = \{[0]\}$*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que existe un divisor A_0 tal que $dg(A_0) - \dim(\mathcal{O}_{A_0}(X))$ es máximo. Supongamos lo contrario entonces podríamos buscar una sucesión de enteros $dg(D) - \dim(\mathcal{O}_D(X))$ creciente que no estaría acotada en contradicción con el lema anterior.

Supongamos ahora $H^{ob}(A_0) \neq \{[0]\}$ existiría $T \in \mathcal{T}[A_0](X)$ tal que $\forall f \in \mathcal{M}(X) \quad T \neq \alpha_{A_0}(f)$. Existirá un divisor $B > A_0$ tal que $J_B^{A_0}(T) = 0$ y por tanto $[T] \in \ker(p_{H_{A_0} H_B})$ que tendrá por tanto dimensión ≥ 1 . y por la proposición 11.2.5

$$1 \leq \dim(\ker(p_{H_{A_0} H_B})) = dg(B) - \dim(\mathcal{O}_B(X)) - (dg(A_0) - \dim(\mathcal{O}_{A_0}(X)))$$

en contradicción con que $dg(A_0) - \dim(\mathcal{O}_{A_0}(X))$ es máximo. □

TEOREMA 11.2.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X . Entonces $H^{ob}(D)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = D - A_0$, siendo A_0 el divisor obtenido en el lema anterior, Descomponemos $B = P - N$ siendo $P, N \geq 0$ y tendremos $D \leq A_0 + P$.

El homomorfismo $H^{ob}(A_0) \rightarrow H^{ob}(A_0 + P)$ es suprayectivo luego $H^{ob}(A_0 + P) = \{[0]\}$ y por el lema 11.2.2 tenemos el resultado. □

11.3. El Teorema de Riemann-Roch

DEFINICIÓN 11.3.1. *Dada una superficie de Riemann compacta X , se denomina genus aritmético a $g_{ar} = \dim(H^{ob}(0))$*

TEOREMA 11.3.1. *(Riemann-Roch: versión 1) Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . Entonces*

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - \dim(H^{ob}(D)) = dg(D) + 1 - g_{ar}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $D_1 \leq D_2$ tendremos por el lema 11.2.2 y por el teorema 11.2.1

$$\dim(\text{kern}(p_{H_1 H_2})) = \dim(H^{ob}(D_1)) - \dim(H^{ob}(D_2))$$

y por la proposición 11.2.5

$$\dim(\mathcal{O}_{D_1}(X)) - dg(D_1) - \dim(H^{ob}(D_1)) = \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) - dg(D_2) - \dim(H^{ob}(D_2))$$

Como para D_1, D_2 cualquiera $D_1, D_2 \leq \text{máx}(D_1, D_2)$ tendremos

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - dg(D) - \dim(H^{ob}(D)) = \text{Constante}$$

Para el caso de $D = 0$ tenemos $\dim(\mathcal{O}(X)) = 1$ (las constantes) $dg(0) = 0$ y $\dim(H^{ob}(0)) = g_{ar}$

y por tanto $\dim(\mathcal{O}_D(X)) - dg(D) - \dim(H^{ob}(D)) = 1 - g_{ar}$ □

NOTA. *Hay que resaltar que en estos momentos la situación esta lejos de ser satisfactoria, ni siquiera hemos asegurado la independencia de g_{ar} y H^{ob} de las cartas elegidas para definir α_D .*

11.4. La dualidad de Serre

Sea X una superficie de Riemann y D un divisor en X . Si ω es una 1-forma diferencial meromorfa tal que $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ tendremos, por definición, $\text{div}(\omega) \geq D$

es decir $\forall p \text{ } ord_p(\omega) \geq D(p)$ y en la carta centrada en p que estamos considerando

$$\omega = \left(\sum_{i=D(p)}^{\infty} c_i z_p^i \right) dz_p$$

Si tenemos un polinomio de Laurent $r_p = \sum a_i z^i$ el residuo de $r_p \omega$ en p será $\sum_{i=D(p)}^{\infty} c_i a_{-i-1}$. Dado $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ podemos por tanto definir una aplicación:

$$Res_{\omega} : \mathcal{T}[D](X) \rightarrow \mathbb{C} \text{ haciendo } Res_{\omega}(\sum r_p \cdot p) = \sum Res_p(r_p \omega)$$

Si consideramos $f \in \mathcal{M}(X)$ tendremos que $f\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ es una 1-forma y si f tiene alrededor de p un desarrollo de Laurent $\sum a_i z_p^i$ tendremos $Res_p(f\omega) = \sum_{i=D(p)}^{\infty} c_i a_{-i-1}$ y por tanto

$$Res_{\omega}(\alpha_D(f)) = \sum_p Res_p(f\omega)$$

Pero hemos visto (teorema 7.5.1) que $\sum_p Res_p(f\omega) = 0$ y por tanto Res_{ω} se anula en la imagen de α_D y podemos definir una aplicación (que llamaremos igual)

$$Res_{\omega} : H^{ob}(D) \rightarrow \mathbb{C} \text{ } Res_{\omega}([T]) = Res_{\omega}(T)$$

Se comprueba facilmente que Res_{ω} es una forma lineal es decir $Res_{\omega} \in H^{ob}(D)^*$ (dual de $H^{ob}(D)$)

DEFINICIÓN 11.4.1. *Se denomina aplicación de residuo a la aplicación*

$$Res : \Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^{ob}(D)^* \text{ } Res(\omega) \rightarrow Res_{\omega}$$

Facilmente se comprueba que es un homomorfismo de espacios vectoriales complejos

TEOREMA 11.4.1. *(Serre) Para cualquier divisor D en una superficie de Riemann compacta X , se tiene que la aplicación Res es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos. Para cada divisor canónico K se tiene*

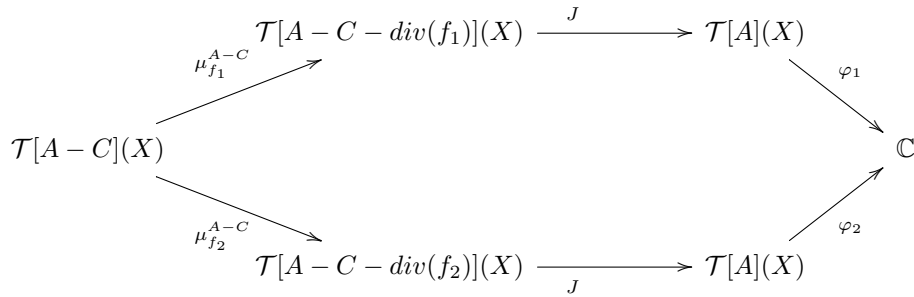
$$\dim(H^{ob}(D)) = \dim(H^{ob}(D)^*) = \dim(\Omega_{-D}^1(X)) = \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X))$$

Para la demostración necesitaremos unos lemas previos

LEMA 11.4.1. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in H^{ob}(A)^*$ para un divisor cualquiera A en X . Existe un divisor positivo C y funciones meromorfas $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_C(X)$ no nulas tales que

$$\varphi_1 \cdot J_A^{A-C-div(f_1)} \cdot \mu_{f_1}^{A-C} = \varphi_2 \cdot J_A^{A-C-div(f_2)} \cdot \mu_{f_2}^{A-C}$$

(consideradas como aplicaciones lineales $H^{ob}(A-C) \rightarrow \mathbb{C}$) Es decir el siguiente diagrama conmuta



DEMOSTRACIÓN. Primero vamos a ver que se pueden considerar elementos de $H^{ob}(A-C)^*$. Tendremos que comprobar que

$$\forall f \in \mathcal{M}(X) \quad \varphi_1 \cdot J_A^{A-C-div(f_1)} \cdot \mu_{f_1}^{A-C} (\alpha_{(A-C)} f) = 0$$

Consideremos lo siguiente si $h \in \mathcal{M}(X)$ entonces

$$\alpha_{A-C}(h) \in \mathcal{T}[A-C](X) \quad \text{y} \quad \alpha_{A-C-div(f_1)}(f_1 h) = \alpha_A(J_A^{A-C-div(f_1)}(f_1 h))$$

como vimos en la sección 11.2.1 y por tanto

$$\varphi_1(J_A^{A-C-div(f_1)}(\mu_{f_1}^{A-C}(\alpha_{A-C}(h)))) = \varphi_1(\alpha_A(J_A^{A-C-div(f_1)}(f_1 h)))$$

pero como $\varphi_1 \in H^{ob}(A)^*$ tenemos que $\varphi_1(\alpha_A(g)) = 0$ para cualquier $g \in \mathcal{M}(X)$ y por tanto

$$\varphi_1(J_A^{A-C-div(f_1)}(\mu_{f_1}^{A-C}(\alpha_{A-C}(h)))) = 0$$

y análogamente para φ_2 .

Supongamos que no existen C, f_1, f_2 con las características pedidas. Entonces para cada divisor C la aplicación lineal

$$\Theta : \mathcal{O}_C(X) \times \mathcal{O}_C(X) \rightarrow H^{ob}(A-C)^* \quad \Theta(f_1, f_2) = \varphi_1 \cdot J_A^{A-C-div(f_1)} \cdot \mu_{f_1}^{A-C} - \varphi_2 \cdot J_A^{A-C-div(f_2)} \cdot \mu_{f_2}^{A-C}$$

sería inyectiva (su núcleo sería $(0, 0)$) y por tanto

$$\dim(H^{ob}(A-C)^*) = \dim(H^{ob}(A-C)) \geq 2\dim\mathcal{O}_C(X)$$

Aplicando el teorema de Riemann-Roch al divisor C

$$\dim(\mathcal{O}_C(X)) = dg(C) + 1 - g_{ar}(X) + \dim(H^{ob}(C)) \geq dg(C) + 1 - g_{ar}(X)$$

y aplicándolo al divisor $A-C$

$$\dim(H^{ob}(A-C)) = \dim(\mathcal{O}_{A-C}(X)) - dg(A-C) - 1 + g_{ar}(X)$$

y para C positivo $\dim(\mathcal{O}_{A-C}(X)) \leq \dim(\mathcal{O}_A(X))$ y

$$\dim(H^{ob}(A-C)) \leq \dim(\mathcal{O}_A(X)) - dg(A) + dg(C) - 1 + g_{ar}(X)$$

y por tanto

$$\dim(\mathcal{O}_A(X)) - dg(A) + dg(C) - 1 + g_{ar}(X) \geq 2(dg(C) + 1 - g_{ar}(X))$$

$$\dim(\mathcal{O}_A(X)) - dg(A) + 3g_{ar}(X) - 3 \geq dg(C)$$

Lo que es absurdo puesto que $dg(C)$ puede ser tan grande como se quiera. \square

LEMA 11.4.2. *Sea D_1 un divisor en una superficie de Riemann compacta X y $\omega \in \Omega_{-D_1}^1(X)$ de forma que $Res_\omega : \mathcal{T}[D_1](X) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida. Sea $D_2 \geq D_1$ tal que Res_ω se anula en el núcleo de $J_{D_2}^{D_1}$. Entonces $\omega \in \Omega_{-D_2}^1(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que sea falso, existirá un punto p tal que $D_1(p) \leq ord_p(\omega) < D_2(p)$. Consideremos el divisor final de Laurent $T = z_p^{-ord_p(\omega)-1} \cdot p$ evidentemente $T \in \mathcal{T}[D_1](X)$ y $J_{D_2}^{D_1}(T) = 0$

Sin embargo en un entorno de p tenemos $\omega = \left(\sum_{k=ord_p(\omega)}^{\infty} c_k z_p^k \right) dz_p$ y por tanto $Res_\omega(T) = c_{ord_p(\omega)} \neq 0$ ¡contradicción! \square

LEMA 11.4.3. *Supongamos que $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ y $f \in \mathcal{M}(X)$ entonces $f\omega \in \Omega_{-D-\text{div}(f)}^1(X)$ y $\text{Res}_\omega \cdot \mu_f = \text{Res}_{f\omega}$*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa de las definiciones. \square

Ahora podemos pasar a demostrar el teorema de la dualidad de Serre

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que $\text{Res} : \Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^{ob}(D)^*$ es inyectiva

Sea $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ distinta de cero y tal que $\text{Res}(\omega)$ es la aplicación nula en $H^{ob}(D)$ tendremos

$$\forall \left(\sum_p r_p \cdot p \right) \in \mathcal{T}[D](X) \quad \sum_p \text{Res}_p(\omega r_p) = 0$$

como $\text{ord}_p(\omega) \geq D(p)$ se tendrá $-1 - \text{ord}_p(\omega) < -D(p)$ y el divisor de final de Laurent $T = z_p^{-\text{ord}_p(\omega)-1} \cdot p \in \mathcal{T}[D](X)$

En un entorno de p se podrá poner $\omega = \left(\sum_{i=\text{ord}_p(\omega)}^{\infty} c_i z_p^i \right) dz_p$ (siendo $c_{\text{ord}_p(\omega)} \neq 0$) y tendremos $\text{Res}_p(\omega T) = c_{\text{ord}_p(\omega)}$ ¡contradicción!

Vamos a ver ahora la suprayectividad

Dados un divisor D y $\varphi \in H^{ob}(D)^*$ (lo consideraremos como $\varphi : \mathcal{T}[D](X) \rightarrow \mathbb{C}$, cumpliéndose $\varphi(\alpha_D(\mathcal{M}(X))) = 0$).

Sea $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ no nula, $K = \text{div}(\omega)$ y $A = \text{mín}(D, K)$ evidentemente $\omega \in \Omega_{-A}^1$ por lo que Res_ω está bien definida en $\mathcal{T}[A](X)$.

Llamamos $\varphi_A = \varphi \cdot J_D^A$ por el lema 11.4.1 existe un divisor positivo C y $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_C(X)$ tales que

$$\varphi_A \cdot J_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \cdot \mu_{f_1}^{A-C} = \text{Res}_\omega \cdot J_A^{A-C-\text{div}(f_2)} \cdot \mu_{f_2}^{A-C}$$

como aplicaciones lineales $\mathcal{T}[A-C](X) \rightarrow \mathbb{C}$

Pero $\text{Res}_\omega \cdot J_A^{A-C-\text{div}(f_2)} \cdot \mu_{f_2}^{A-C} = \text{Res}_{f_2\omega}$ debido al lema 11.4.3 por tanto

$$\varphi_A \cdot J_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \cdot \mu_{f_1}^{A-C} = \text{Res}_{f_2\omega}$$

como aplicaciones lineales $\mathcal{T}[A-C](X) \rightarrow \mathbb{C}$

Componiendo con $\mu_{\frac{1}{f_1}}^{A-C-div(f_1)}$ tenemos

$$\varphi_A \cdot J_A^{A-C-div(f_1)} = Res_{f_2\omega} \cdot \mu_{\frac{1}{f_1}}^{A-C-div(f_1)} = Res_{\frac{f_2}{f_1}\omega}$$

como aplicaciones de $\mathcal{T}[A - C - div(f_1)](X) \rightarrow \mathbb{C}$

Tenemos por tanto que $\frac{f_2}{f_1}\omega \in \Omega_{-A+C+div(\frac{f_2}{f_1})}^1(X)$ y que $Res_{\frac{f_2}{f_1}\omega}$ se anula en el núcleo de $J_A^{A-C-div(f_1)}$ entonces por el lema 11.4.2 tenemos que $\frac{f_2}{f_1}\omega \in \Omega_{-A}^1$ y por tanto $\varphi_A = Res_{\frac{f_2}{f_1}\omega}$

Puesto que $\varphi_A = \varphi \cdot J_D^A$ se anula en el núcleo de J_D^A también $Res_{\frac{f_2}{f_1}\omega}$ luego $\frac{f_2}{f_1}\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ y $\varphi = Res_{\frac{f_2}{f_1}\omega}$

Una vez demostrado que es un isomorfismo, considerando $K = div(\omega)$ para algún $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ por el teorema 9.5.2 tenemos que

$$\dim(\Omega_{-D}^1(X)) = \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X)) = \dim(H^{ob}(D)^*) = \dim(H^{ob}(D))$$

□

TEOREMA 11.4.2. *El genus aritmético g_{ar} de una superficie de Riemann compacta X es igual a su genus topológico g , además $g = g_{ar} = \dim(\Omega^1(X))$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K = div(\omega)$, $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, según la proposición 9.1.4 $dg(K) = 2g - 2$. Por otra parte aplicando la dualidad de Serre $\dim(H^{ob}(K)) = \dim(\mathcal{O}_{K-K}(X)) = \dim(\mathcal{O}(X)) = 1$ (las constantes), también $g_{ar} = \dim(H^{ob}(0)) = \dim(\mathcal{O}_K(X)) = \dim(\Omega^1(X))$ por 9.5.2 y $\dim(H^{ob}(D)) = \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X))$

Aplicando el teorema de Riemann-Roch

$$\dim(\mathcal{O}_K(X)) - 1 = g_{ar} - 1 = 1 + dg(K) - g_{ar} = 2g - g_{ar} - 1$$

y por tanto $g_{ar} = g$

□

Empleando la dualidad de Serre el teorema de Riemann-Roch queda

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X)) = dg(D) + 1 - g$$

NOTA. Antiguamente se denominaba a $\dim(H^{ob}(D)) = \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X))$ índice de especialidad $i(D)$.

TEOREMA 11.4.3. Si D es un divisor tal que $dg(D) \geq 2g - 1$, se tiene

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) = dg(D) + 1 - g$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ no nula y $K = \text{div}(\omega)$ por la proposición 9.1.4 $dg(K) = 2g - 2$ entonces $dg(K - D) < 0$ y por la proposición 9.5.2 $\dim(\mathcal{O}_{K-D}(X)) = 0$ y aplicando Riemann-Roch tenemos el resultado \square

NOTA. Gracias a la dualidad de Serre el teorema de Riemann-Roch es completamente satisfactorio. Se han interpretado todos los términos que aparecen en él de forma que son independientes de las cartas empleadas en la construcción de las α_D . También se ha demostrado la igualdad de los genus aritmético y topológico y se ha obtenido una interpretación "sorprendente": ¡ El genus coincide con la dimensión del espacio vectorial complejo de las 1-formas holomorfas !

Teorema de Riemann-Roch y dualidad de Serre (Haces)

12.1. Cálculo de algunos grupos de cohomología de Čech

Vamos a calcular mas grupos de cohomología, recordemos que en la sección 8.2 vimos:

- $H^1(X, \mathcal{E}^1) = 0$ (X Superficie de Riemann)
- $H^1(X, \mathcal{E}^1) = H^1(X, \mathcal{E}^2) = H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) = 0$ (X Superficie de Riemann)
- $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$

TEOREMA 12.1.1. *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces $H^1(X, \mathbb{C}) = 0, H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ (Haces de funciones localmente constantes con valores en \mathbb{C} y \mathbb{Z} respectivamente)*

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto cualquiera de X y $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ como $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ y $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$ tenemos funciones $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ tales que $f_{ij} = g_j - g_i$ en $U_i \cap U_j$

Como $df_{ij} = 0$ (por ser localmente constante) tendremos $dg_i = dg_j$ en $U_i \cap U_j$ y por la definición 4.1.3 existe $\nu \in \mathcal{E}^1(X)$ tal que $\nu|_{U_i} = dg_i$

Como $d(dg_i) = 0$ tendremos que ν es cerrada y al ser X simplemente conexo es exacta (ver corolario 7.4.2). Por tanto existirá $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que $\nu = df$. Sea $h_i = g_i - f|_{U_i}$ en U_i tendremos

$$dh_i = dg_i - df|_{U_i} = dg_i - \nu|_{U_i} = 0 \quad \text{en } U_i$$

y por tanto h_i será localmente constante. También

$$h_j - h_i = g_j - f - g_i + f = g_j - g_i = f_{ij} \quad \text{en } U_i \cap U_j$$

y tenemos demostrado que $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$

Supongamos ahora $f_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ como $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ tendremos que existirán $g_i \in \mathbb{C}(U_i)$ tales que $f_{ij} = g_j - g_i$ en $U_i \cap U_j$

Como $\exp(i2\pi f_{ij}) = 1$ tenemos $\exp(i2\pi g_i) = \exp(i2\pi g_j)$ en $U_i \cap U_j$ como X es conexo existirá una constante $c \in \mathbb{C}^*$ (independiente de U_i) tal que

$$c = \exp(i2\pi g_i) \quad \text{en } U_i$$

Escogemos una constante $b \in \mathbb{C}$ (un logaritmo) tal que $\exp(i2\pi b) = c$ y hacemos

$$h_i = g_i - b$$

tendremos $\exp(i2\pi h_i) = \exp(i2\pi g_i) \exp(-i2\pi b) = 1$ luego $h_i \in \mathbb{Z}$ y $h_j - h_i = g_j - g_i = f_{ij}$ \square

PROPOSICIÓN 12.1.1. $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $U_1 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}_-$ y $U_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}_+$ tenemos que $U = (U_1, U_2)$ es un recubrimiento abierto de \mathbb{C}^* y además U_1, U_2 son simplemente conexos luego por el teorema anterior $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$ y por el teorema 4.7.1 tendremos $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$

Dado $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ tendremos $f_{11} = f_{22} = 0$ y $f_{12} = -f_{21}$ (por lema 4.5.1) por lo que $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = Z^1(U_1 \cap U_2, \mathbb{Z})$ pero $U_1 \cap U_2$ tiene dos componentes conexas y por tanto $Z^1(U_1 \cap U_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ también tendremos que $\mathbb{Z}(U_1) = \mathbb{Z}(U_2) \cong \mathbb{Z}$ (al ser conexos) y por tanto $C^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y tendremos $\delta((a_1, a_2)) = (a_2 - a_1, a_2 - a_1)$ y así $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \{(a, a)\} \cong \mathbb{Z}$ y $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ \square

PROPOSICIÓN 12.1.2. $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la anterior. \square

12.1.1. Un haz rascacielos generalizado. Sea X una superficie de Riemann y $\{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto de n puntos de X y $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$.

Vamos a considerar un haz asociado $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$, definido como $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(U) = G_1(U) \times \dots \times G_n(U)$: producto directo de los grupos

$$G_i(U) = \begin{cases} \mathbb{C}^{k_i} & p_i \in U \\ 0 & p_i \notin U \end{cases}$$

NOTA. Aunque para este caso particular podríamos usar las particiones de la unidad suaves, vamos a usar unas discontinuas que permitirán generalizar el siguiente resultado a cualquier haz rascacielos generalizado.

LEMA 12.1.1. Dado $\mathcal{U} = \{U_i\}$ recubrimiento abierto de un espacio topológico X . Existe una colección de funciones con $\psi_i : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tales que

- $\{x : \psi_i(x) \neq 0\} \subset U_i$
- $\sum \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in X$
- Cada $x \in X$ está en el soporte de un número finito de ψ_i

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que definimos un *buen orden* \prec en $\{U_i\}$ (la existencia del mismo es lógicamente equivalente al axioma de elección). Definimos $s(x)$ como el menor con respecto a \prec del conjunto no vacío $\{U_i : p \in U_i\}$ ahora hacemos

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & i = s(x) \\ 0 & i \neq s(x) \end{cases}$$

Evidentemente cumple lo requerido □

PROPOSICIÓN 12.1.3. Sea X una superficie de Riemann $H^1(X, \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}) = 0$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto de X y $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad como la considerada en el lema anterior. Sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}})$ consideremos $\psi_j f_{ij}$, será una sección de $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(U_i \cap U_j)$ que podemos extender (mediante ceros) a una sección de $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(U_i)$.

$g_i = -\sum_j \psi_j f_{ij}$ será también una sección de $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(U_i)$ y tendremos

$$g_j - g_i = \sum_k f_{ik} \psi_k - \sum_k f_{jk} \psi_k = \sum_k \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_k \psi_k f_{ij} = f_{ij}$$

puesto que (f_{ij}) es un cociclo y la relación del lema 4.5.1

Por tanto $f_{ij} \in B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}})$ y $H^1(X, \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}) = 0$ □

12.2. Homomorfismos entre haces en superficies de Riemann

Vamos ahora a considerar algunos homomorfismos de haces específicos

- $d: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^1, \quad d: \mathcal{O} \rightarrow \Omega^1, \quad d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2, \quad d: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^1$
- $\partial: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(1,0)}$
- $\bar{\partial}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}$
- $\partial\bar{\partial}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^2$

PROPOSICIÓN 12.2.1. *Tenemos*

1. $\mathcal{O} = \text{Kern}(\bar{\partial}) \quad \bar{\partial}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}$
2. $\Omega^1 = \text{Kern}(d|_{\mathcal{E}^{(1,0)}}) \quad d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$
3. $\mathbb{Z} = \text{Kern}(ex) \quad ex: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \quad ex(f) = \exp(i2\pi f)$

DEMOSTRACIÓN. Directa de las definiciones y de la proposición 7.2.5. □

PROPOSICIÓN 12.2.2. *Tenemos que las siguientes sucesiones cortas son exactas*

1. $0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{inc} \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \longrightarrow 0$
2. $0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{inc} \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \longrightarrow 0$ Siendo $\mathcal{Z} = \text{Kern}(d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2)$
3. $0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{inc} \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \longrightarrow 0$
4. $0 \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{inc} \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$
5. $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{inc} \mathcal{O} \xrightarrow{ex} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$

DEMOSTRACIÓN. Son consecuencia directa de la proposición anterior excepto la 4 para la que queda probar que $d : \mathcal{E}^{(1,0)} \rightarrow \mathcal{E}^2$ es suprayectiva. Tomemos una carta cualquiera (U, z) . Una forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ es en esa carta de la forma $f dz$ y tendremos

$$d(f dz) = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

$\forall V \subset U$ tal que $z(V)$ sea un disco de \mathbb{C} tenemos por el teorema 8.1.1 que $d : \mathcal{E}^{(1,0)}(V) \rightarrow \mathcal{E}^2(V)$ es suprayectiva y por tanto cada punto p tiene un entorno en que d es suprayectiva. \square

12.3. La cohomología de Dolbeault

La cohomología de Dolbeault va a proporcionar un resultado sorprendente. Definida en base a las formas diferenciales va a generar grupos isomorfos a los obtenidos por la cohomología de Čech

DEFINICIÓN 12.3.1. *Dada una superficie de Riemann X se define el grupo (p, q) de cohomología de Dolbeault como*

$$H_D^{p,q}(X) = \frac{\text{Kern}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{(p,q)}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q+1)}(X))}{\text{Imag}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{(p,q-1)}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q)}(X))}$$

Siendo $\mathcal{E}^{(0,0)}(X) = \mathcal{E}(X)$ y $\mathcal{E}^{(1,1)}(X) = \mathcal{E}^2(X)$

PROPOSICIÓN 12.3.1. *Se tendrá:*

- $H_D^{0,0}(X) = \mathcal{O}(X)$
- $H_D^{1,0}(X) = \Omega^1(X)$
- $H_D^{0,1}(X) = \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\text{Imag}(\bar{\partial} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}(X))}$
- $H_D^{1,1}(X) = \frac{\mathcal{E}^{(1,1)}(X)}{\text{Imag}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X))}$

DEMOSTRACIÓN. Directamente de las definiciones \square

TEOREMA 12.3.1. $H^1(X, \mathcal{O}) \cong H_D^{0,1}(X)$ y $H^1(X, \Omega^1) \cong H_D^{1,1}(X)$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema 4.8.3 a las sucesión exactas de la proposición 12.2.2

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{inc} \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{inc} \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$$

tenemos el resultado □

NOTA. Recordar que $\dim(H^1(X, \mathcal{O}))$ era el denominado *genus analítico*.

Intuitivamente los isomorfismos son la diferenciación exterior antiholomorfa y la diferenciación exterior.

12.4. La cohomología de De Rham

La cohomología de De Rham va a generar, como en el caso de la de Dolbeault, grupos isomorfos a los de la cohomología de Cech.

DEFINICIÓN 12.4.1. Sea X una superficie de Riemann. Se define el grupo 1 de cohomología de De Rham como

$$H_{DR}^1(X) = \frac{\text{Kern}(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X))}{\text{Imag}(d : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}^1(X))}$$

TEOREMA 12.4.1. $H_{DR}^1(X) = H^1(X, \mathbb{C})$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema 4.8.3 a las sucesión exacta de la proposición 12.2.2

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{inc} \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{tenemos el resultado.} \quad \square$$

12.5. El teorema de Riemann-Roch

Sea D un divisor arbitrario de X consideremos el divisor $P = \sum_{i=1}^n k_i \cdot p_i$ ($k_i > 0$) existe una inclusión canónica entre haces $inc : \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D+P}$.

También podemos definir un homomorfismo de haces (ver sección 12.1.1)

$$\phi : \mathcal{O}_{D+P} \rightarrow \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$$

Para ello consideremos un conjunto de n cartas (U_i, z_i) centradas en cada p_i . Cada función $f \in \mathcal{O}_{D+P}$ admitirá un desarrollo en serie de Laurent en un entorno abierto $W_i \subset z_i(U_i)$ del tipo

$$f_{w_i} = \sum_{j=-D(p_i)-k_i}^{\infty} c_i(j) z_i^j$$

NOTA. Aunque no es habitual, empleamos notación funcional para los coeficientes

Si $V \subset X$ es un abierto cualquiera definimos $\phi_V(f) = (a_1, \dots, a_n)$ donde

$$a_i = \begin{cases} 0 & p_i \notin V \\ (c_i(-D(p_i) - k_i), \dots, c_i(-D(p_i) - 1)) & p_i \in V \end{cases}$$

Es evidente que ϕ es un epimorfismo de haces.

NOTA. Que ϕ sea un epimorfismo de haces no implica que exista una función meromorfa con los desarrollos de Laurent del tipo requerido en los puntos p_1, \dots, p_n y holomorfa en el resto de X (problema de Mittag Leffler). Solamente es necesario que para cada punto $p \in X$ exista un entorno en el que exista o bien una función holomorfa o bien una con un desarrollo de Laurent del tipo requerido (por eso es evidente que ϕ es un epimorfismo, basta considerar la definida por el desarrollo en serie con los coeficientes requeridos). Ver nota 4.3.1

Como ϕ es un epimorfismo tenemos que la siguiente sucesión corta de haces es exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \xrightarrow{inc} \mathcal{O}_{D+P} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}} \longrightarrow 0$$

y existirá un homomorfismo de conexión (ver sección 4.8) $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}} \xrightarrow{\Delta} H^1(X, \mathcal{O}_D)$

Intuitivamente aplicar Δ es igual a aplicar δ a cadenas (g_i) definidas en un recubrimiento suficientemente fino de X con desarrollos en serie de Laurent que se ajusten a los valores de las secciones de $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$.

PROPOSICIÓN 12.5.1. *La sucesión*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(X) &\xrightarrow{\text{inc}} \mathcal{O}_{D+P}(X) \xrightarrow{\phi_X} \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X) \xrightarrow{\Delta} \cdot \\ \cdot &\xrightarrow{\Delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{iH} H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema 4.8.2 y la proposición 12.1.3. □

COROLARIO 12.5.1. *Sean $D \leq D'$ divisores en una superficie de Riemann compacta X . La inclusión entre haces $\text{inc} : \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D+P}$ induce un epimorfismo*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{iH} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0$$

DEMOSTRACIÓN. Siendo X compacta cada divisor tiene soporte finito y $D' - D = \sum k_i \cdot p_i$ aplicándose la proposición anterior. □

TEOREMA 12.5.1. *(Riemann-Roch) Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta de genus analítico g_{an} . Entonces $\mathcal{O}_D(X)$ y $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ son espacios vectoriales complejos de dimensión finita y se tiene*

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - \dim(H^1(X, \mathcal{O}_D)) = 1 + dg(D) - g_{an}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos divisores $D \leq D'$ y sea $D' - D = \sum_{i=1}^n k_i \cdot p_i$.

La sucesión

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(X) &\xrightarrow{\text{inc}} \mathcal{O}_{D'}(X) \xrightarrow{\phi_X} \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X) \xrightarrow{\Delta} \cdot \\ \cdot &\xrightarrow{\Delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{iH} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

será exacta por la proposición 12.5.1

Llamando $E_1 = \phi_X(\mathcal{O}_{D'}(X)) \subset \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X)$ y $E_2 = \Delta(\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X))$ la sucesión exacta se puede dividir en las sucesiones cortas exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(X) \xrightarrow{inc} \mathcal{O}_{D'}(X) \xrightarrow{\phi_X} E_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{inc} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{iH} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0$$

y además $E_2 \cong \mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X)/E_1$.

Pero $\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X) \cong \mathbb{C}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{k_n}$ es de dimensión finita

$$\dim(\mathbb{C}_{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}(X)) = \sum k_i = dg(D' - D) = dg(D') - dg(D)$$

por tanto también lo serán E_1, E_2 cumpliéndose $\dim(E_1) + \dim(E_2) = dg(D') - dg(D)$

Supongamos que $\mathcal{O}_D(X)$ es de dimensión finita también lo será $\mathcal{O}_{D'}(X)$ (y viceversa), y se tendrá

$$\dim(\mathcal{O}_{D'}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) + \dim(E_1)$$

y si suponemos que $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ es de dimensión finita también lo será $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ (y viceversa) cumpliéndose

$$\dim(H^1(X, \mathcal{O}_D)) = \dim(H^1(X, \mathcal{O}_{D'})) + \dim(E_2)$$

por tanto

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - \dim(H^1(X, \mathcal{O}_D)) - dg(D) = \dim(\mathcal{O}_{D'}(X)) - \dim(H^1(X, \mathcal{O}_{D'})) - dg(D')$$

Dados dos divisores cualesquiera D, D' considerando los pares $D \leq \max(D, D')$ y $D' \leq \max(D, D')$ vemos que la anterior igualdad se cumple sin exigir $D \leq D'$

Si consideramos $D = 0$ tenemos $\dim(\mathcal{O}(X)) = 1$ (las constantes) y $\dim(H^1(X, \mathcal{O})) = g_{an}$ finito (ver corolario 8.5.1) y tenemos

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) - \dim(H^1(X, \mathcal{O}_D)) = 1 - g_{an} + dg(D)$$

□

COROLARIO 12.5.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Existe una constante $M_0 \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\dim(\Omega_D^1(X)) \geq dg(D) + M_0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea K un divisor canónico de X por el teorema 9.5.2 $\Omega_D^1(X)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{D+K}(X)$ y tendremos aplicando Riemann-Roch

$$\dim(\Omega_D^1(X)) = \dim(\mathcal{O}_{D+K}(X)) \geq 1 - g_{an} + dg(D+K) = dg(D) + (1 - g_{an} + dg(K))$$

y haciendo $M_0 = 1 - g_{an} + dg(K)$ tenemos el resultado. □

12.6. La dualidad de Serre

La dualidad de Serre va a establecer un isomorfismo entre $H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ y $\Omega_D^{-1}(X)$ para ello vamos a necesitar varios pasos

12.6.1. La aplicación en el espacio dual i_D .

Hemos visto que $H^1(X, \Omega^1) \cong H_D^{1,1}(X)$. Entonces dado $\xi \in H^1(X, \Omega^1)$ existirá $\vartheta \in \mathcal{E}^2(X)$ representante de clase del elemento de $H_D^{1,1}(X)$ asociado (que esencialmente se obtendrá por diferenciación exterior).

DEFINICIÓN 12.6.1. *Se define la aplicación lineal $ResH : H^1(X, \Omega^1) \rightarrow \mathbb{C}$ como*

$$ResH(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \vartheta$$

Si ψ es otro representante de la clase de ϑ tendremos $\psi = \vartheta + d\alpha$ siendo $\alpha \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ y como $\iint_X d\alpha = 0$ (teorema 7.4.2) la definición es independiente del representante elegido.

DEFINICIÓN 12.6.2. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto. Una cocadena $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ se denomina distribución de Mittag Leffler si las diferencias $\omega_j - \omega_i$ son holomorfas en cada $U_i \cap U_j$. Es decir $\delta((\omega_i)) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$

DEFINICIÓN 12.6.3. Sea $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ una distribución de Mittag Leffler se define $Res_p((\omega_i))$ como $Res_p(\omega_j)$ siendo j un índice cualquiera tal que $p \in U_j \subset \mathcal{M}^1$.

Si $U_k \subset \mathcal{U}$ es otro abierto tal que $p \in U_k$ como $\omega_j - \omega_k$ es holomorfa en $U_j \cap U_k$ tenemos $Res_p(\omega_j) = Res_p(\omega_k)$ y Res_p está bien definido.

DEFINICIÓN 12.6.4. Sea X una superficie de Riemann compacta, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto y (ω_i) una distribución de Mittag Leffler. Se define la aplicación lineal $Res : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1) \rightarrow \mathbb{C}$

$$Res((\omega_i)) = \sum_{p \in X} Res_p((\omega_i))$$

Al ser X compacta $Res_p((\omega_i))$ sólo es distinto de cero en un número finito de puntos y el sumatorio está definido.

TEOREMA 12.6.1. Sea X una superficie de Riemann compacta, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto y (ω_i) una distribución de Mittag Leffler (tendremos que $\delta((\omega_i)) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$, $[\delta((\omega_i))] \in H^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$, $[\delta((\omega_i))]^\rightarrow \in H^1(X, \Omega^1)$). Entonces

$$Res((\omega_i)) = ResH([\delta((\omega_i))]^\rightarrow)$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a calcular $ResH([\delta((\omega_\alpha))]^\rightarrow)$

Como $\delta((\omega_\alpha)) = (\omega_\beta - \omega_\alpha) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{(1,0)})$ y como por el teorema 8.2.2 $H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0$ existirá $(\sigma_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{(1,0)})$ tal que

$$\omega_\beta - \omega_\alpha = \sigma_\beta - \sigma_\alpha \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta$$

Como $d(\omega_\beta - \omega_\alpha) = 0$ (holomorfas) tendremos $d\sigma_\beta = d\sigma_\alpha$ en $U_\alpha \cap U_\beta$ y existirá $\tau \in \mathcal{E}^2(X)$ tal que $\tau|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha$ y será un representante de clase de $[d((\omega_\alpha))]^\rightarrow$ por tanto

$$\text{Res}H([d((\omega_\alpha))]^\rightarrow) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau$$

Sean $a_1, \dots, a_n \in X$ los polos de (ω_α) y sea $X' = X - \{a_1, \dots, a_n\}$ En $X' \cap U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene $\sigma_\alpha - \omega_\alpha = \sigma_\beta - \omega_\beta$ y existe $\varsigma \in \mathcal{E}^1(X)$ tal que $\varsigma|_{X' \cap U_\alpha} = \sigma_\alpha - \omega_\alpha$ y $\tau = d\varsigma$ en X' (puesto que $d\omega_\alpha = 0$ en X' pues es holomorfa allí).

Para cada a_k existe $U_{\alpha(k)} \in \mathcal{U}$ tal que $a_k \in U_{\alpha(k)}$, tomamos cartas (V_k, z_k) centradas en a_k y tales que $V_k \cap V_j = \emptyset$, $V_k \subset U_{\alpha(k)}$ y $z_k(V_k)$ es un disco. Existen (ver [LeeSM]) entornos abiertos W_k de a_k tales que $\overline{W_k} \subset V_k$ y funciones ψ_k con soporte $\text{supp}(\psi_k) \subset V_k$ tales que $\forall x \in W_k \quad \psi_k(x) = 1$. Sea $g = 1 - (\psi_1 + \dots + \psi_n)$ entonces $g\varsigma$ puede prolongarse analíticamente (mediante ceros) a todo X , y tendremos por el teorema 7.4.2

$$\iint_X d(g\varsigma) = 0$$

En $W_k - \{a_k\}$ se tiene $d(\psi_k\varsigma) = d(\sigma_{\alpha(k)} - \omega_{\alpha(k)}) = d\sigma_{\alpha(k)}$ y por tanto $d(\psi_k\varsigma)$ puede prolongarse analíticamente a todo W_k y como $\psi_k\varsigma$ se anula fuera de V_k podemos considerar a $d(\psi_k\varsigma) \in \mathcal{E}^2(X)$

Tendremos que en $X - \bigcup_{j=1}^n V_j$ se cumple $g\varsigma = \varsigma$ y $\psi_k\varsigma = 0$. En V_k se tiene (puesto que solo es distinto de cero ψ_k)

$$g\varsigma + \psi_k\varsigma = (1 - (\psi_1 + \dots + \psi_n) + \psi_k)\varsigma = \varsigma$$

luego

$$\tau = d(g\varsigma + \sum_{j=1}^n \psi_j\varsigma) = d(g\varsigma) + \sum_{j=1}^n d(\psi_j\varsigma)$$

y podemos poner

$$\iint_X \tau = \sum_{j=1}^n \iint_X d(\psi_j\varsigma) = \sum_{j=1}^n \iint_{V_j} d(\psi_j(\sigma_j - \omega_j)) = \sum_{j=1}^n \iint_{V_j} d(\psi_j\omega_j)$$

Puesto que por teorema 7.4.2 $\iint_{V_j} d(\psi_j\omega_j) = 0$

Considerando un dominio $D_j \subset W_j$ siendo $z_j(D_j)$ un círculo centrado en el origen ($z_j(a_j) = 0$)

$$\iint_{V_j} d(\psi_j \omega_j) = \iint_{D_j} d(\psi_j \omega_j) = \iint_{D_j} d\omega_j = \int_{\partial D_j} \omega_j = 2\pi i \operatorname{Res}_{a_j}(\omega_j)$$

y por tanto

$$\operatorname{Res}H([\delta((\omega_i))]^{\rightarrow}) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{a_j}(\omega_j) = \operatorname{Res}((\omega_i))$$

□

PROPOSICIÓN 12.6.1. *Sea X una superficie de Riemann, $U \subset X$ un abierto y $D \in \operatorname{Div}(X)$. La aplicación (producto)*

$$\Lambda : \Omega_{-D}^1(U) \times \mathcal{O}_D(U) \rightarrow \Omega^1(U) \quad \Lambda(\omega, f) = f\omega$$

induce una aplicación

$$\tilde{\Lambda} : \Omega_{-D}^1(X) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \Omega^1) \quad \tilde{\Lambda}(\omega, [(f_{ij})]^{\rightarrow}) = [(\omega f_{ij})]^{\rightarrow}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ y $[(f_{ij})] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ siendo \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X . Si $[(g_{ij})] = [(f_{ij})]$ tendremos que $g_{ij} = f_{ij} + \eta_j - \eta_i$ en $U_i \cap U_j$ siendo $\eta_i \in \mathcal{O}_D(U_i)$. Entonces $\omega g_{ij} = \omega f_{ij} + \omega \eta_j - \omega \eta_i$ siendo $\omega \eta_i \in \Omega^1(U_i)$ y por tanto $[(\omega f_{ij})] = [(\omega g_{ij})]$ y como \mathcal{U} es arbitrario tenemos el resultado □

Si X es una superficie de Riemann compacta la composición de aplicaciones $\operatorname{Res}H \cdot \tilde{\Lambda}$ origina una aplicación bilineal

$$\langle ; \rangle : \Omega_{-D}^1(X) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C} \quad \langle \omega, \xi \rangle = \operatorname{Res}H(\tilde{\Lambda}(\omega, \xi))$$

que inducirá un homomorfismo

$$i_D : \Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \quad (i_D(\omega))(\xi) = \langle \omega, \xi \rangle$$

Ahora podemos enunciar ahora la dualidad de Serre

TEOREMA 12.6.2. (*dualidad de Serre*) Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . Entonces la aplicación

$$i_D : \Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

es un isomorfismo.

La demostración la dividiremos en dos teoremas

TEOREMA 12.6.3. i_D es inyectivo

DEMOSTRACIÓN. Sean $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ $\omega \neq 0$ y $a \in X$ tal que $D(a) = 0$ existirá una carta (U, z) centrada en a tal que $D|_U = 0$

En U será $\omega = f dz$ siendo $f \in \mathcal{O}(U)$ y, reduciendo U si fuera necesario, podemos suponer que f no tiene ceros en $U - \{a\}$.

Sea $V = X - \{a\}$ entonces $\mathcal{U} = \{U, V\}$ es un recubrimiento de X . Consideremos $\sigma = (z^{-1}f^{-1}, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ tendremos que $\omega\sigma = (\frac{dz}{z}, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ es una distribución de Mittag Leffer y

$$Res(\omega\sigma) = 1$$

$\delta(\sigma) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ y $[\omega\delta(\sigma)] = [\delta(\omega\sigma)]$ Entonces

$$\langle \omega, [\delta(\sigma)]^\rightarrow \rangle = ResH([\delta(\omega\sigma)]^\rightarrow) = Res(\omega\sigma) = 1$$

y por tanto $i_D(\omega)([\delta(\sigma)]^\rightarrow) = 1 \neq 0$. □

Para demostrar que i_D es suprayectivo necesitaremos varios conceptos previos

12.6.2. La aplicación entre los duales de los grupos de cohomología inducida por la inclusión.

Sean $D, D' \in Div(X)$, $D \leq D'$ en una superficie de Riemann compacta X la inclusión $inc : \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'}$ induce un epimorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{i^H} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0$$

(ver corolario 12.5.1). Entonces

DEFINICIÓN 12.6.5. *El epimorfismo anterior induce un homomorfismo*

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \xrightarrow{iH^*} H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

por medio de $(iH^*(\alpha))(\xi) = \alpha(iH(\xi))$ siendo $\alpha \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*$ y $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$.

PROPOSICIÓN 12.6.2. *iH^* es un monomorfismo*

DEMOSTRACIÓN. Si $iH^*(\alpha) = iH^*(\beta)$ tendremos $\forall \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ $\alpha(iH(\xi)) = \beta(iH(\xi))$ y al ser iH un epimorfismo $\forall \varrho \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ $\alpha(\varrho) = \beta(\varrho)$ luego $\alpha = \beta$. \square

LEMA 12.6.1. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* & \xrightarrow{iH^*} & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \\ & & \uparrow i_{D'} & & \uparrow i_D \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_{-D'}^1(X) & \xrightarrow{inc} & \Omega_{-D}^1(X) \end{array}$$

conmuta.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\omega \in \Omega_{-D'}^1(X)$, $[(f_{ij})]^{-1} \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ tendremos

$$iH^*(i_{D'}(\omega))([(f_{ij})]^{-1}) = i_{D'}(\omega)(iH([(f_{ij})]^{-1})) = \langle \omega, iH([(f_{ij})]^{-1}) \rangle = \langle inc(\omega), [(f_{ij})]^{-1} \rangle$$

$$\langle inc(\omega), [(f_{ij})]^{-1} \rangle = i_D(inc(\omega))([(f_{ij})]^{-1})$$

\square

LEMA 12.6.2. *Si $\alpha \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*$, $\omega \in \Omega_{-D}^1(X)$ son tales que $iH^*(\alpha) = i_D(\omega)$. Entonces $\omega \in \Omega_{-D'}^1(X)$ y $\alpha = i_{D'}(\omega)$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\omega \notin \Omega_{-D'}^1(X)$ existiría $p \in X$ tal que $ord_p(\omega) < D'(p)$ Sea (U, z) una carta centrada en p tal que $\omega = fdz$, $f \in \mathcal{M}(U)$ y U lo suficientemente pequeño para que D, D' sean cero en $U - \{p\}$ y f no tenga ni polos ni ceros en $U - \{p\}$

Sea $V = X - \{p\}$, $\mathcal{U} = \{U, V\}$ recubrimiento de X y $\eta = ((fz)^{-1}, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Como $-\text{ord}_p(fz) \geq -D'(p)$ tenemos que $\eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'})$ y $\delta(\eta) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ por la forma de escoger U .

$[\delta(\eta)]^\rightarrow$ será la clase de cohomología que denotaremos ξ en $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ y la clase que denotaremos $\xi' = 0$ en $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ (pues es $\delta(\eta), \eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'})$) tendremos por hipótesis

$$\langle \omega, \xi \rangle = i_D(\omega)(\xi) = iH^*(\alpha)(\xi) = \alpha(iH(\xi)) = \alpha(\xi') = 0$$

Pero por otra parte

$$\langle \omega, \xi \rangle = \text{Res}H(\tilde{\Lambda}(\omega, \xi)) = \text{Res}H([\omega\delta(\eta)]^\rightarrow) = \text{Res}(\omega\eta) = \text{Res}_p(z^{-1}) = 1$$

¡Contradicción! por tanto $\omega \in \Omega_{-D'}^1(X)$

Por el lema anterior y la hipótesis tenemos $iH^*(\alpha) = i_D(\omega) = iH^*(i_{D'}(\omega))$ y como iH^* es un monomorfismo tenemos el resultado. \square

12.6.3. La aplicación entre los duales de los grupos de cohomología inducida por el producto.

DEFINICIÓN 12.6.6. Sean D, E divisores en una superficie de Riemann compacta X . Dado $\psi \in \mathcal{O}_E(X)$ se definen unos homomorfismos de haces

$$\bar{\psi} : \mathcal{O}_{D-E} \rightarrow \mathcal{O}_D \quad \bar{\psi}(f) \rightarrow f\psi \quad \hat{\psi} : \Omega_{D-E}^1 \rightarrow \Omega_D^1 \quad \hat{\psi}(\omega) = \omega\psi$$

y también un aplicación lineal

$$\tilde{\psi} : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-E})^* \quad \tilde{\psi}(\alpha)(\xi) = \alpha(\psi\xi)$$

Siendo $f \in \mathcal{O}_{D-E}(U)$, $\omega \in \Omega_{D-E}^1(U)$, $\alpha \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$, y $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-E})$

LEMA 12.6.3. *Con la notación anterior el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-E})^* \\ i_D \uparrow & & i_{D-E} \uparrow \\ \Omega_{-D}^1(X) & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \Omega_{-D+E}^1(X) \end{array}$$

conmuta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vartheta \in \Omega_{-D}^1(X)$ entonces $\hat{\psi}(\vartheta) = \psi\vartheta$ y $i_{D-E}(\psi\vartheta)(\xi) = \langle \psi\vartheta, \xi \rangle$. Tendremos también que $\tilde{\psi}(i_D(\vartheta))(\xi) = i_{D-E}(\vartheta)(\tilde{\psi}(\xi)) = \langle \vartheta, \tilde{\psi}(\xi) \rangle = \langle \psi\vartheta, \xi \rangle$ \square

LEMA 12.6.4. $\forall \psi \in \mathcal{O}_E(X)$ *no idénticamente nulo. La aplicación*

$$\tilde{\psi} : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-E})^*$$

es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \text{div}(\psi) \geq -E$ el momomorfismo de haces $\bar{\psi} : \mathcal{O}_{D-E} \rightarrow \mathcal{O}_D$ se puede poner como composición

$$\mathcal{O}_{D-E} \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\bar{\psi}_2} \mathcal{O}_D$$

Por la proposición 9.5.4 $\bar{\psi}_2$ es un isomorfismo, por otra parte $\bar{\psi}_1$ es una inclusión que induce (ver comienzo del apartado) un epimorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-E}) \xrightarrow{i^H} H^1(X, \mathcal{O}_{D+A}) \longrightarrow 0$$

Por tanto también lo será la composición

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-E}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow 0$$

Y en los duales originará un monomorfismo. \square

12.6.4. El homomorfismo i_D es suprayectivo.

Completamos ahora la demostración de la dualidad de Serre

TEOREMA 12.6.4. *El homomorfismo $i_D : \Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ es suprayectivo*

DEMOSTRACIÓN. Dado $\alpha \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ $\alpha \neq 0$ consideremos un divisor E tal que $dg(E) = 1$ y los divisores $D_n = D - nE$ para $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ el subespacio vectorial de las formas $\tilde{\psi}(\alpha)$ siendo $\psi \in \mathcal{O}_{nE}(X)$.

Tendremos que $\dim(\Lambda) = \dim(\mathcal{O}_{nE}(X))$ pues si $\alpha \neq 0$ se tiene $\tilde{\psi}_1(\alpha) \neq \tilde{\psi}_2(\alpha)$ por el lema 12.6.4.

Aplicando el teorema de Riemann-Roch tendremos

$$\dim(\Lambda) = \dim(\mathcal{O}_{nE}(X)) = \dim(H^1(X, \mathcal{O}_{nE})) + 1 + n - g_{an} \geq 1 + n - g_{an}$$

Por el corolario 12.5.2 y ser i_{D_n} inyectivo

$$\dim(\text{Imag}(i_{D_n})) = \dim(\Omega_{-D_n}(X)) \geq dg(-D_n) + M_0 = n - dg(D) + M_0$$

Para $n > dg(D)$ se tendrá que $dg(D_n) < 0$ y por la proposición 9.5.2 $\mathcal{O}_{D_n}(X) = 0$ y aplicando Riemann-Roch

$$\dim(H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})) = g_{an} - 1 - dg(D) + n$$

y tendremos

$$\dim(\text{Imag}(i_{D_n})) + \dim(\Lambda) \geq 1 + 2n - g_{an} + M_0 - dg(D)$$

que para n suficientemente grande será mayor que

$$\dim(H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})) = \dim(H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*) = n + g_{an} - 1 - dg(D)$$

Como $\text{Imag}(i_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ y $\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ su intersección no puede ser 0 y existen $\psi \in \mathcal{O}_{nE}(X)$ y $\omega \in \Omega_{-D_n}^1(X)$ tal que $\tilde{\psi}(\alpha) = i_{D_n}(\omega)$

Sea $A = \text{div}(\psi)$ entonces $\frac{1}{\psi} \in \mathcal{O}_A(X)$ y sea $D' = D_n - A$ considerando el monomorfismo

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{iH^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D_n - A})^*$$

tendremos $iH^*(\alpha) = \frac{1}{\psi}(\tilde{\psi}(\alpha)) = (\frac{1}{\psi})(i_{D_n}(\omega)) = i_{D'}(\frac{1}{\psi}\omega)$ y por el lema 12.6.2 $\frac{1}{\psi}\omega \in \Omega_{-D}(X)$ y $\alpha = i_D(\frac{1}{\psi}\omega)$ \square

Ahora comparando con lo obtenido en el capítulo anterior:

TEOREMA 12.6.5. $H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^{ob}(D)$ y por tanto $g_{an} = g_{ar} = g$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 11.4.1 $\Omega_{-D}^1(X) \rightarrow H^{ob}(D)^*$ y por el teorema 12.6.2 $\Omega_{-D}^1(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ \square

Hemos obtenido un resultado sorprendente los espacios $H^{ob}(D)$ y $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ se construyeron de formas muy distintas (problema de Mittag-Leffler y cohomología de Čech) pero son isomorfos para las superficies de Riemann compactas.

COROLARIO 12.6.1. Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . Entonces

$$\mathcal{O}_{-D}(X) \cong H^1(X, \Omega_D^1)^*$$

DEMOSTRACIÓN. Sea K un divisor canónico en X por el teorema 9.5.2 tendremos $\Omega_D^1 \cong \mathcal{O}_{D+K}$ y $\Omega_{-D-K}^1 \cong \mathcal{O}_{-D}$. Por la dualidad de Serre $\Omega_{-D-K}^1(X) \approx H^1(X, \mathcal{O}_{D+K})$ y tenemos el resultado. \square

COROLARIO 12.6.2. La aplicación $\text{Res}H : H^1(X, \Omega^1) \rightarrow \mathbb{C}$ es un isomorfismo

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el corolario anterior para $D = 0$ tenemos $H^1(X, \Omega^1) \cong \mathcal{O}(X)$ que son las aplicaciones constantes luego $\dim H^1(X, \Omega^1) = 1$. \square

COROLARIO 12.6.3. Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g . Si D es un divisor en X tal que $dg(D) > 2g - 2$ entonces

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea K un divisor canónico de X por el teorema 9.5.2 $\Omega_{-D}^1(X) \cong \mathcal{O}_{-D+K}(X)$ y por la dualidad de Serre $\Omega_{-D}^1(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ por tanto $\mathcal{O}_{-D+K}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$

Si $dg(D) > 2g - 2$ entonces por la proposición 9.1.4 $dg(K - D) < 0$ y por la proposición 9.5.2 $\mathcal{O}_{-D+K}(X) = 0$ \square

COROLARIO 12.6.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta . Entonces*

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X y $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Refinando \mathcal{U} , si fuera necesario, podemos conseguir que el número total de polos de todos los f_{ij} sea finito y existe un divisor D con $dg(D) > 2g - 2$ tal que $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ por el corolario anterior es cohomologo a cero respecto al haz \mathcal{O}_D y como $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) \subset B^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ también lo será respecto al haz \mathcal{M} . \square

12.7. El problema de Mittag-Leffler

Sea X una superficie de Riemann \mathcal{U} un recubrimiento abierto y $\mu = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ se define una distribución de Mittag-Leffler, como aquella en que las $f_i - f_j$ son holomorfos en $U_i \cap U_j$ (comparar con 12.6.2, la diferencia es que allí eran formas)

DEFINICIÓN 12.7.1. *Con la notación anterior se denomina solución de $\mu = (f_i)$ a una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ para cada i*

NOTA. *Determinar una solución es encontrar una función meromorfa global con unos polos dados y con una parte principal del desarrollo de Laurent en dichos polos dada.*

Si f_1, f_2 son soluciones de μ entonces $f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(X)$ y si X es compacta la solución es única salvo una constante aditiva.

TEOREMA 12.7.1. *Una distribución de Mittag-Leffler μ tiene solución si y sólo si $[\delta(\mu)]^\rightarrow = 0$ ($[\delta(\mu)]^\rightarrow \in H^1(X, \mathcal{O})$)*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mu = (f_i)$ tiene una solución $f \in \mathcal{M}(X)$.
Sea $g_i = f_i - f \in \mathcal{O}(U_i)$ en $U_i \cap U_j$ se tiene

$$f_j - f_i = g_j - g_i$$

Por tanto $\delta(\mu) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y por tanto $[\delta(\mu)] = 0$ y $[\delta(\mu)]^\rightarrow = 0$

Supongamos que $[\delta(\mu)]^\rightarrow = 0$ tendremos por la proposición 4.7.2 $[\delta(\mu)] = 0$ y por tanto $\delta(\mu) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y existe $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$f_j - f_i = g_j - g_i \quad \text{en } U_i \cap U_j \quad \text{luego} \quad f_i - g_i = f_j - g_j \quad \text{en } U_i \cap U_j$$

Entonces existirá $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f|_{U_i} = f_i - g_i$ es decir $f|_{U_i} - f_i = -g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ □

COROLARIO 12.7.1. *En la esfera de Riemann el problema de Mittag-Leffler tiene siempre solución*

Como $g = H^1(X, \mathcal{O})$ en la esfera de Riemann (genus 0) $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ y por el teorema anterior tenemos el resultado.

COROLARIO 12.7.2. *En una superficie de Riemann compacta de genus $g > 0$ hay problemas de Mittag-Leffler sin solución*

DEMOSTRACIÓN. Dado $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}), \xi \neq 0$ como por el corolario 12.6.4 $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ tendremos que existe $\mu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ (para un determinado recubrimiento \mathcal{U}) tal que $\xi = [\delta(\mu)]^\rightarrow$. Entonces el problema de Mittag-Leffler correspondiente a la distribución μ no tiene solución. □

TEOREMA 12.7.2. *Sea $\mu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ una distribución de Mittag-Leffler en una superficie de Riemann compacta X . Se tiene que μ tiene solución si y sólo si*

$$\forall \omega \in \Omega^1(X) \quad \text{Res}(\omega\mu) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Al ser $H^1(X, \mathcal{O})$ de dimensión finita $[\delta(\mu)]^\rightarrow = 0$ si y sólo si $\forall \alpha \in H^1(X, \mathcal{O})^*$ se tiene $\alpha([\delta(\mu)]^\rightarrow) = 0$. Por el teorema 12.6.2 esto es equivalente a $\langle \omega, [\delta(\mu)]^\rightarrow \rangle = \text{Res}(\omega\mu) = 0$ y el resultado se sigue del teorema 12.7.1. \square

NOTA. Como las bases están formadas por g 1-formas linealmente independientes en X (sea ω_k una base) basta comprobar

$$\text{Res}(\omega_k\mu) = 0 \quad k = 1, \dots, g$$

EJEMPLO. Consideremos el toro complejo $X = \mathbb{C}/L$ definido por la red

$$L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Y consideremos en los puntos $a_1, \dots, a_n \in X$ las partes principales $\sum_{k=-r_j}^{-1} c_k^j (z - a_j)^k$

La condición para que exista $f \in \mathcal{M}(X)$ con polos en a_1, \dots, a_n y las partes principales consideradas es

$$\sum_{j=1}^n c_{-1}^j = 0$$

(basta considerar la 1-forma inducida por dz que es una base de $\Omega^1(X)$)

Por tanto no puede haber funciones elípticas con un único polo de orden uno.

12.7.1. Formas diferenciales con partes principales predefinidas.

DEFINICIÓN 12.7.2. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto. y $\sigma = (\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ una distribución de Mittag Leffler (ver definición 12.6.2). Se dice que $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ es una solución de (ω_i) si cumple

$$\forall i \in I \quad \omega|_{U_i} - \omega_i \in \Omega^1(U_i)$$

Es decir las partes principales de ω y ω_i coinciden en U_i para cada i .

(Comparar con la definición 12.7.1)

TEOREMA 12.7.3. Una distribución de Mittag-Leffler σ tiene solución si y sólo si $[\delta(\sigma)]^\rightarrow = 0$ (siendo $[\delta(\sigma)]^\rightarrow \in H^1(X, \Omega^1)$)

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\sigma = (\omega_i)$ tiene una solución $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$.
Sea $\alpha_i = \omega_i - \omega \in \Omega^1(U_i)$ en $U_i \cap U_j$ se tiene

$$\omega_j - \omega_i = \alpha_j - \alpha_i$$

Por tanto $\delta(\sigma) \in B^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$ y por tanto $[\delta(\sigma)] = 0$ y $[\delta(\sigma)]^\rightarrow = 0$

Supongamos que $[\delta(\sigma)]^\rightarrow = 0$ tendremos por la proposición 4.7.2 $[\delta(\sigma)] = 0$ y por tanto $\delta(\sigma) \in B^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$ y existe $(\alpha_i) \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^1)$ tal que

$$\omega_j - \omega_i = \alpha_j - \alpha_i \quad \text{en } U_i \cap U_j \quad \text{luego} \quad \omega_i - \alpha_i = \omega_j - \alpha_j \quad \text{en } U_i \cap U_j$$

Entonces existirá $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ tal que $\omega|_{U_i} = \omega_i - \alpha_i$ es decir $\omega|_{U_i} - \omega_i = -\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ □

TEOREMA 12.7.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta, una distribución de Mittag Leffler $\sigma = (\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^1)$ tiene solución si y sólo si $\text{Res}(\sigma) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos por el teorema 12.6.1

$$\text{Res}((\omega_i)) = \text{Res}H([\delta((\omega_i))]^\rightarrow)$$

y por el corolario 12.6.2 $\text{Res}H$ es un isomorfismo así $\text{Res}(\sigma) = 0$ es equivalente $[\delta(\sigma)]^\rightarrow = 0$. □

COROLARIO 12.7.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta*

- $\forall p \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}, n > 1$ existe una 1_ forma meromorfa con un único polo en p de orden n (Diferencial de segunda clase)
- $\forall p, q \in X$ existe una 1_ forma meromorfa con polos únicamente en p y q ambos simples y con residuos $1, -1$ respectivamente (Diferencial de tercera clase)

12.8. Puntos de Weierstrass

DEFINICIÓN 12.8.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g \geq 1$. Se dice que $p \in X$ es un punto de Weierstrass cuando para una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de*

$\Omega^1(X)$ (recordar que $\dim(\Omega^1(X)) = g$) y una carta (U, z) centrada en p se tiene que $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)$ (ver definición 7.7.3) tiene un cero en p . Al orden del cero se le denomina peso del punto de Weierstrass.

Una superficie de Riemann compacta de genus cero ($\widehat{\mathbb{C}}$) no tiene, por definición, puntos de Weierstrass.

La definición no depende de la carta elegida debido a la fórmula de cambio de base del Wronskiano (proposición 7.7.4) y ser $T'(0) \neq 0$.

TEOREMA 12.8.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g \geq 1$ y $p \in X$. Si y sólo si p es un punto de Weierstrass existe una función meromorfa no constante $f \in \mathcal{M}(X)$ con un polo de orden $\leq g$ en p y holomorfa en $X - \{p\}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$ y (U, z) una carta centrada en p con U suficientemente pequeño podremos poner el desarrollo

$$\omega_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} z^i dz \quad \text{en } U$$

El Wronskiano $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)$ en p vendrá dado por

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)(p) = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{g0} \\ a_{11} & a_{21} & a_{g1} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{g2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g-1)!a_{1g-1} & & (g-1)!a_{gg-1} \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{g0} \\ a_{11} & a_{21} & a_{g1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{g2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1g-1} & & a_{gg-1} \end{vmatrix}$$

La función $f \in \mathcal{M}(X)$ que estamos buscando tiene en p un desarrollo de Laurent con parte principal

$$h = \sum_{i=-g}^{-1} c_i z^i$$

con algun $c_i \neq 0$. Es decir es una solución para la distribución de Mittag-Leffler $\mu = (h, 0)$ definida en el recubrimiento $\mathcal{U} = (U, X - \{p\})$. Por el teorema 12.7.2 existirá una solución si y sólo si

$$Res(\omega_k \mu) = 0 \quad k = 1, \dots, g$$

Pero $Res(\omega_k \mu) = Res_p(\omega_k h) = \sum_{l=0}^{g-1} a_{kl} c_{l-1}$ y la condición para que exista solución distinta de la trivial para este sistema de ecuaciones equivale a $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)(p) = 0$. \square

TEOREMA 12.8.2. *En una superficie de Riemann compacta X de genus g existen $g(g-1)(g+1)$ puntos de Weirstrass contado cada uno tantas veces como su peso.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(U_i, z_i)\}$ un atlas en X t en $U_i \cap U_j$ $\varphi_{ij} = \frac{dz_i}{dz_j} \neq 0$, y es holomorfa.

Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$, entonces

$$W_i = W_{z_i}(\omega_1, \dots, \omega_g) \in \mathcal{O}(U_i)$$

Al ser determinante de funciones holomorfas. Por el teorema 7.7.4 tenemos

$$W_j = (\varphi_{ij})^{g \frac{g+1}{2}} W_i$$

y podemos definir un divisor $D(p) = ord_p(W_i)$ siendo $p \in U_i$ puesto que va a ser independiente de que U_i escojamos entre aquellos a los que pertenece p .

Tendremos que $dg(D)$ será el número de puntos de Weirstrass contados tantas veces como su peso.

Tenemos por la proposición 9.1.4 que $dg(div(\omega_1)) = 2g - 2$ también que $\omega_1 = f_{1i}(z_i) dz_i$ en U_i es decir $\forall x \in U_i$ $div(\omega_1)(x) = ord_x(f_{1i})$ además $f_{1j} = \varphi_{ij} f_{1i}$ en $U_i \cap U_j$ y por tanto

$$W_i f_{1i}^{-g \frac{g+1}{2}} = W_j f_{1j}^{-g \frac{g+1}{2}} \quad \text{en } U_i \cap U_j$$

Así existe una función meromorfa global $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f|_{U_i} = W_i f_{1i}^{-g \frac{g+1}{2}}$.

Tendremos

$$div(f) = D - g \frac{g+1}{2} div(\omega_1)$$

y como $div(f) = 0$ por la proposición 9.1.2

$$dg(D) = g \frac{g+1}{2} (2g-2) = g(g-1)(g+1)$$

□

COROLARIO 12.8.1. *Una superficie de Riemann compacta de genus $g > 1$ admite un recubrimiento holomorfo de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ con un máximo de g hojas. Por tanto toda superficie de Riemann de genus $g = 2$ es hiperelíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando las funciones meromorfas como aplicaciones holomorfas de $X \rightarrow \mathbb{C}$ y aplicando el teorema anterior vemos que sobre ∞ habrá a lo sumo g puntos. Además si $g \neq 0$ no puede existir un recubrimiento de 1 hoja (X sería isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$) por lo que si $g = 2$ ha de ser hiperelíptica (ver 5.4.3). □

Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch

13.1. Formas armónicas

TEOREMA 13.1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\dim(\text{Harm}^1(X)) = 2g$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema 11.4.2 del teorema 7.6.2 y de la proposición 7.6.1 □

TEOREMA 13.1.2. *En una superficie de Riemann compacta X se tiene la descomposición ortogonal*

$$\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = \bar{\partial}\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\Omega}^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 12.3.1 tendremos $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/\bar{\partial}(\mathcal{E}(X))$ y por tanto $g = \dim(\mathcal{E}^{(0,1)}(X)/\bar{\partial}(\mathcal{E}(X)))$.

$\bar{\Omega}^1(X), \bar{\partial}(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. Por el teorema 11.4.2 y la proposición 7.6.1 $\dim(\bar{\Omega}^1(X)) = g$, además $\bar{\Omega}^1(X) \perp \bar{\partial}\mathcal{E}(X)$ por la proposición 7.6.7 y tenemos el resultado. □

COROLARIO 13.1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\mathcal{E}^{(1,0)}(X) = \partial\mathcal{E}(X) \oplus \Omega^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta conjugar. □

COROLARIO 13.1.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\mathcal{E}^1(X) = \partial\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\partial}\mathcal{E}(X) \oplus \Omega^1(X) \oplus \bar{\Omega}^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del corolario anterior el teorema 13.1.2 y la proposición 7.6.7. \square

COROLARIO 13.1.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\mathcal{E}^1(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus (*d\mathcal{E}(X)) \oplus Harm^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Con secuencia directa del corolario anterior y el teorema 7.6.2. \square

COROLARIO 13.1.4. *Las formas diferenciales cerradas son el conjunto $d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X)$ y las cocerradas $(*d\mathcal{E}(X)) \oplus Harm^1(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la proposición 7.6.6 las formas cerradas son $(*d\mathcal{E}(X))^\perp$ y el resultado se deduce del corolario anterior. Análogamente para las cocerradas. \square

TEOREMA 13.1.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Se tiene*

$$\ker(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X)) = d(\mathcal{E}(X)) \oplus Harm^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $d(d(\mathcal{E}(X))) = 0$ y por proposición 7.6.7 y el teorema 7.6.2 $Harm^1(X) \perp d(\mathcal{E}^1(X))$ luego

$$d(\mathcal{E}(X)) \oplus Harm^1(X) \subset \ker(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X))$$

Sea $\omega \in \ker(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X))$ y $f \in \mathcal{E}(X)$ tendremos $\omega \wedge \overline{*(df)} = -\omega \wedge d\bar{f} = d(\bar{f}\omega)$, pues $d\omega = 0$ y por tanto

$$\langle \omega, *df \rangle = \iint_X d(f\omega) = 0$$

y tenemos $\ker(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X)) \perp *(d(\mathcal{E}(X)))$.

Entonces por el corolario 13.1.3 $\ker(d : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X)) \subset d(\mathcal{E}(X)) \oplus Harm^1(X)$ y tenemos el resultado. \square

TEOREMA 13.1.4. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Se tiene*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong H_{DR}^1(X) \cong \text{Harm}^1(X)$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia directa del teorema 12.4.1 y del teorema 13.1.3.

□

Otro resultado sorprendente, para una superficie de Riemann compacta el grupo de cohomología H^1 de Čech (en realidad espacio vectorial) correspondiente al haz de las funciones *localmente constantes* es isomorfo al espacio de las 1-formas armónicas (luego tendrá dimensión $2g$)

13.2. Criterio para que un divisor sea muy amplio

PROPOSICIÓN 13.2.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g , cualquier divisor D con $dg(D) \geq 2g + 1$ es muy amplio.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 10.4.2 basta demostrar que $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}) = \dim(\mathcal{O}_D) - 2$ pero, por hipótesis, ambos divisores tienen grados $\geq 2g - 1$ y por el teorema 11.4.3 tendremos $\dim(\mathcal{O}_D) = dg(D) + 1 - g$, $\dim(\mathcal{O}_{D-p-q}) = dg(D) - 2 + 1 - g$

□

PROPOSICIÓN 13.2.2. *Cada superficie de Riemann X compacta se puede incrustar en un espacio proyectivo $P^n(\mathbb{C})$*

DEMOSTRACIÓN. Basta construir un divisor muy amplio, y para ello, por la proposición anterior, basta escoger cualquier punto $p \in X$ y usar $D = (2g + 1).p$ (siendo g el genus de X)

□

PROPOSICIÓN 13.2.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta $p \in X$. Entonces $X - \{p\}$ se puede incrustar en un espacio afín \mathbb{C}^n*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el divisor $D = (2g+1).p$ como $D > 0$ aplicando el corolario 10.5.1 tenemos que existe un hiperplano H tal que $\phi_D^*(H) = (2g+1).p$ y por la proposición 10.5.1 la imagen inversa de H por ϕ_D es exclusivamente el punto p entonces $X - \{p\}$ es incrustado por ϕ_D en $P^n(\mathbb{C}) - H$ que es isomorfo a \mathbb{C}^n (ver apartado 1.1.1) \square

Este resultado hace que podamos identificar las curvas algebraicas y las superficies de Riemann compactas. Empleándose los indistintamente los términos curva algebraica y superficie de Riemann compacta.

LEMA 13.2.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta, Si para un punto $\mathcal{O}_p(X)$ tiene dimensión mayor que 1 es isomorfa a la esfera de Riemann*

DEMOSTRACIÓN. Entonces existe una función meromorfa f no constante con un único polo simple en p y $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tiene grado 1 y es un isomorfismo \square

PROPOSICIÓN 13.2.4. *Cada superficie de Riemann compacta de genus $g = 0$ es isomorfa a la esfera de Riemann*

DEMOSTRACIÓN. Sea p un punto cualquiera de X , el divisor canónico K tendrá grado (ver la proposición 9.1.4) $dg(K) = 2g - 2 = -2$ entonces $K - p$ tiene grado -3 y por tanto $dim(\mathcal{O}_{K-p}(X)) = 0$ y aplicando Riemann Roch

$$dim(\mathcal{O}_p(X)) = dg(p) + 1 - g = 2$$

y aplicando el lema anterior se tiene el resultado. \square

PROPOSICIÓN 13.2.5. *Cada superficie de Riemann compacta de genus $g = 1$ es isomorfa a una curva proyectiva plana suave.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 13.2.1 cualquier divisor D de grado 3 es muy amplio, entonces ϕ_D es un incrustamiento holomorfo en $P^2(\mathbb{C})$ \square

PROPOSICIÓN 13.2.6. *Cada superficie de Riemann compacta de genus $g = 2$ es hiperelíptica.*

(este resultado ya se demostró en 12.8.1)

DEMOSTRACIÓN. El divisor canónico K tendrá grado $2g - 2 = 2$ y aplicando Riemann Roch

$$\dim(\mathcal{O}_K(X)) - \dim(\mathcal{O}_{K-K}(X)) = 2 + 1 - 2 = 1$$

Como $\dim(\mathcal{O}_0(X)) = 1$ (las constantes) tenemos $\dim(\mathcal{O}_K(X)) = 2$ luego $\dim(|K|) = 1$ y existe $E \in |K|, E > 0$ y por tanto una función meromorfa no constante f tal que la aplicación asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tiene grado 2 (2 polos) y por tanto X es hiperelíptica (ver definición 5.4.3) \square

LEMA 13.2.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g y K un divisor canónico $\dim(\mathcal{O}_K(X)) = g$*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando Riemann Roch

$$\dim(\mathcal{O}_K(X)) - \dim(\mathcal{O}_{K-K}(X)) = (2g - 2) + 1 - g \quad \dim(\mathcal{O}_K(X)) = g$$

\square

13.3. Teorema de Clifford

Vamos a considerar divisores tales que $\dim(\mathcal{O}_D(X)) > 0$ y $H^1(X, \mathcal{O}_D) \neq 0$ que se denominan divisores especiales. Vamos a ver que en estos casos podemos obtener una desigualdad útil.

LEMA 13.3.1. *Sean D_1, D_2 divisores efectivos (ver definición 9.0.3) en una superficie de Riemann compacta X se tiene*

$$\dim(\mathcal{O}_{D_1}(X)) + \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) - 1 \leq \dim(\mathcal{O}_{D_1+D_2}(X))$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación

$$\varphi : |D_1| \oplus |D_2| \rightarrow |D_1 + D_2| \quad \varphi((E_1, E_2)) = E_1 + E_2$$

Las fibras son finitas. En efecto consideremos $E \in |D_1 + D_2| = p_1 + \dots + p_n$ siendo $n = dg(E)$ y $p_i \in X$ (posiblemente repetidos) hay $2^{dg(E)}$ formas de obtener el divisor como suma de efectivos (cada punto se puede asignar a uno o a otro).

Por tanto tenemos $\dim(\text{imag}(\varphi)) = \dim(|D_1| \oplus |D_2|) = \dim(|D_1|) + \dim(|D_2|) \leq \dim(|D_1 + D_2|)$

Ahora como $\dim(|D|) = \dim(\mathcal{O}_D(X)) - 1$ tenemos el resultado. \square

TEOREMA 13.3.1. (*Clifford*) Sea D un divisor especial una superficie de Riemann compacta X entonces

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) \leq \frac{1}{2}dg(D) + 1$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\dim(\mathcal{O}_D(X)) \geq 1$ se tiene que $|D|$ no es vacío y existe $D_1 \geq 0$ equivalente a D . Análogamente existe $D_2 \geq 0$ equivalente a $K - D$.

Aplicando el lema anterior

$$\dim(\mathcal{O}_{D_1}(X)) + \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) - 1 \leq \dim(\mathcal{O}_{D_1+D_2}(X))$$

Pero por la proposición 9.5.4 y el lema 13.2.2

$$\dim(\mathcal{O}_{D_1}(X)) = \dim(\mathcal{O}_D(X)), \dim(\mathcal{O}_{D_2}(X)) = \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X)), \dim(\mathcal{O}_{D_1+D_2}(X)) = \dim(\mathcal{O}_K(X)) = g$$

y por tanto $\dim(\mathcal{O}_D(X)) + \dim(\mathcal{O}_{K-D}(X)) \leq g + 1$ y sumando Riemann Roch

$$2\dim(\mathcal{O}_D(X)) \leq (dg(D) + 1 - g) + (g + 1) = dg(D) + 2$$

\square

13.4. La aplicación canónica

LEMA 13.4.1. En una superficie de Riemann compacta X de genus $g \geq 1$ el sistema lineal canónico $|K|$ es libre

DEMOSTRACIÓN. $\dim(\mathcal{O}_p(X)) = 1$ las constantes, porque si no X tendría $g = 0$ por el lema 13.2.1. Aplicando Riemann Roch y el lema anterior

$$1 - \dim(\mathcal{O}_{K-p}(X)) = dg(p) + 1 - g \quad \dim(\mathcal{O}_{K-p}(X)) = g - 1$$

y considerando la proposición 10.4.5 tenemos el resultado □

DEFINICIÓN 13.4.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta, por el lema anterior $|K|$ es libre, y por tanto define una aplicación holomorfa*

$$\phi_K : X \rightarrow P^{g-1}(\mathbb{C})$$

que se denomina aplicación canónica, y a su imagen curva canónica.

OBSERVACIÓN. *La aplicación canónica puede considerarse del siguiente modo. Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$ (de genus g). dado $p \in X$ consideremos una carta (U, z) centrada en p en ella se tendrá $\omega_i = f_i(z)dz$ entonces las coordenadas homogéneas de $\phi_K(p)$ son $[f_1(z(p)), \dots, f_g(z(p))]$ frecuentemente se denota $\phi_K(p) = [\omega_1(p), \dots, \omega_g(p)]$*

Para que sea un incrustamiento holomorfo debe ser $g > 2$.

PROPOSICIÓN 13.4.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g > 2$. La aplicación canónica es un incrustamiento holomorfo en $P^{g-1}(\mathbb{C})$, si y sólo si X no es hiperelíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 10.4.2 si ϕ_K no es un incrustamiento holomorfo existen puntos p, q (posiblemente iguales) tales que

$$\dim(\mathcal{O}_K(X)) \neq \dim(\mathcal{O}_{K-p-q}(X)) + 2$$

Como $|K|$ es libre por la proposición 10.4.5 $\dim(\mathcal{O}_{K-p}(X)) = \dim(\mathcal{O}_K(X)) - 1$ y por tanto lo anterior sólo es posible si

$$\dim(\mathcal{O}_{K-p-q}(X)) = \dim(\mathcal{O}_K(X)) - 1 = g - 1$$

Aplicando Riemann Roch

$$\dim(\mathcal{O}_{p+q}(X)) - (g - 1) = 2 + 1 - g \quad \dim(\mathcal{O}_{p+q}(X)) = 2$$

Entonces existe f meromorfa no constante con dos polos que tiene asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa $dg(F) = 2$ y por tanto X es hiperelíptica.

Recíprocamente si π es la aplicación de grado 2 en la esfera de Riemann $\pi^{-1}(\infty)$ son dos puntos (posiblemente iguales) y $\dim(\mathcal{O}_{p+q}(X)) = 2$ \square

COROLARIO 13.4.1. *Si X ($g > 2$) no es hiperelíptica ϕ_K es un incrustamiento holomorfo en $P^{g-1}(\mathbb{C})$ como una curva algebraica suave de grado $2g - 2$,*

DEMOSTRACIÓN. Si la superficie no es hiperelíptica K es muy amplio y por el corolario 10.5.2 $dg(\phi_K(X)) = dg(K) = 2g - 2$ por la proposición 9.1.4 \square

13.4.1. La aplicación polinomios/meromorfas y la clasificación de curvas.

Supongamos que D sea un divisor muy amplio de una superficie de Riemann compacta X que induce un incrustamiento $X \rightarrow P^n(\mathbb{C})$.

Sea H un polinomio de grado 1 que define un hiperplano en $P^n(\mathbb{C})$, como $\phi_D(X)$ es no degenerada, no está contenida en H y existe el divisor hiperplano correspondiente que estará contenido en $|D|$ por el corolario 10.5.1. Sea $F_0 = H^k$ y consideremos el divisor de intersección correspondiente tendremos que $\text{div}(F_0) \sim kD$.

Sea F cualquier polinomio de grado k tendremos que $\frac{F}{F_0}$ es una función meromorfa en X cuyos polos están acotados por los ceros de F_0 o sea que pertenece a $\mathcal{O}_{kD}(X)$.

Denotando $Ph(n, k)$ a los polinomios homogéneos en n variables de grado k hemos obtenido una aplicación

$$r_k : Ph(n, k) \rightarrow \mathcal{O}_{kD}(X)$$

El núcleo de dicha aplicación serán los polinomios que se anulen idénticamente en X y definirán hipersuperficies que contienen a $\phi_D(X)$.

PROPOSICIÓN 13.4.2. *Sea D un divisor muy amplio en una superficie de Riemann compacta de genus g tal que $dg(\phi_D(X)) \geq g$. Entonces para cada $k \geq 2$*

$$\dim(\ker(r_k)) \geq \binom{n+k}{k} - kdg(D) - 1 + g$$

DEMOSTRACIÓN. La dimensión del espacio vectorial $Ph(n, k)$ son las combinaciones con repetición de $n+1$ elementos x_0, \dots, x_n tomados de k en k es decir $\binom{n+k}{k}$

La dimensión del núcleo es mayor o igual que $\dim(Ph(n, k)) - \mathcal{O}_{kD}(X)$ pero si $dg(D) \geq g$ tendremos $dg(kD) \geq kg > 2g - 1$ si $k \geq 2$ y por el teorema 11.4.3 $H^1(kD) = 0$ y aplicando Riemann Roch

$$\dim(\ker(r_k)) \geq \binom{n+k}{k} - (kdg(D) + 1 - g)$$

□

13.4.2. Clasificación de las curvas de genus 3.

Consideremos una curva de genus 3 no hiperelíptica, la aplicación canónica ϕ_K la incrusta en $P(\mathbb{C}^2)$ como una curva de grado 4 por la proposición 13.4.2 $\dim(\ker(r_4)) \geq 15 - 16 - 1 + 3 = 1$ y existe un polinomio de grado 4 que se anula en X y será irreducible puesto que en $P(\mathbb{C}^2)$ el grado de la curva coincide con la del polinomio homogéneo que la define y una curva de grado 4 no puede estar contenida en polinomios de menor grado.

No puede haber 2 polinomios independientes grado 4 que se anulen en X pues su intersección sería un número finito de puntos. Así $\dim(\ker(r_4)) = 1$ y esta generado por un polinomio F de grado 4 que se anula en X .

Si F se anula en X también GF siendo G un polinomio homogéneo esto produce un subespacio de $\ker(r_k)$, $k > 4$ de dimensión $\dim(Ph(2, k)) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$ que coincide con el mínimo $\dim(\ker(r_k)) \geq \frac{(k+2)(k+1)}{2} - 4k + 1 - 3$.

Por otra parte si H se anula en X y no es múltiplo de F o ambos tienen un factor común (imposible pues F irreducible) o intersectan en número finito de puntos también imposible, y así cualquier polinomio que se anula en X es múltiplo de F

Sea X una curva algebraica de genus $g = 3$ puede ocurrir una de las dos opciones siguientes

1. Hiperelíptica definida por $y^2 = h(x)$ con h de grado 7 u 8 (ver proposición 13.4.3)
2. La aplicación canónica ϕ_K la incrusta en $P(\mathbb{C}^2)$ como una curva proyectiva suave de grado 4 definida por los nulos de un polinomio de cuarto grado

13.4.3. Clasificación de las curvas de genus 4.

Consideremos una curva de genus 4 no hiperelíptica, la aplicación canónica ϕ_K la incrusta en $P(\mathbb{C}^3)$ como una curva de grado 6 por la proposición 13.4.2

$$\dim(\ker(r_2)) \geq 10 - 12 - 1 + 4 = 1$$

$$\dim(\ker(r_3)) \geq 20 - 18 - 1 + 4 = 5$$

y existe un polinomio F de grado 2 que se anula en X .

Considerando un hiperplano general $H \approx P(\mathbb{C}^2)$ tendrá 6 puntos de intersección con X . Si existieran F, F' polinomios de grado 2 independientes que se anulaban en X su restricción a H intersectaría por Bezout en 4 puntos y ambos no podrían contener a X .

Considerando coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3, x_4) los polinomios $x_i F$ se anulan en X y dan lugar a un subespacio de dimensión 4 de $\ker(r_3)$. Existe por tanto un polinomio cúbico G que se anula en X .

Considerando un hiperplano general cualquiera H tendremos que F, G intersecan por **Bezout** en 6 puntos (igual que X) y así tenemos

Sea X una curva algebraica de genus $g = 4$ puede ocurrir una de las dos opciones siguientes

1. Hiperelíptica definida por $y^2 = h(x)$ con h de grado 9, 10 ver proposición 13.4.3
2. La aplicación canónica ϕ_K la incrusta en $P(\mathbb{C}^2)$ como una curva proyectiva suave de grado 6 definida por los nulos comunes de un polinomio de grado 3 y otro de grado 2

13.4.4. La aplicación canónica para superficies hiperelípticas.

Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g > 1$ hiperelíptica hemos visto que ϕ_K no es un incrustamiento en un espacio proyectivo. Vamos a analizar este caso

PROPOSICIÓN 13.4.3. *Cada superficie de Riemann compacta hiperelíptica de genus g puede representarse como la normalización de una curva proyectiva plana de grado $2g + 2$ si la preimagen de ∞ por el recubrimiento de grado 2 no es de ramificación (caso A) y de grado $2g + 1$ si lo es*

DEMOSTRACIÓN. Nos centraremos en el caso A siendo el B muy similar

Como X es hiperelíptica existe un recubrimiento ramificado $x : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado 2. Aplicando la fórmula de Hurwitz y siendo R el divisor de ramificación

$$dg(R) = 2(2 + g - 1) = 2g + 2$$

y como x es de segundo grado $R(p)$ vale a lo sumo 1 es decir $R = p_1 + \dots + p_{2g+2}$ siendo estos puntos distintos de X denotaremos $a_i = x(p_i)$ (también distintos) y $\{p, q\} = x^{-1}(\infty)$.

Se define una involución $j : X \rightarrow X$ tal que hace corresponder a p el otro punto de $x^{-1}(x(p))$ (o el mismo si es de ramificación) evidentemente $j \in \text{Aut}(X)$, $j^2 = 1$

El "pull back" de la involución es $j^* : \Omega^1(X) \rightarrow \Omega^1(X)$ $j^*(\omega) = -\omega$ pues como $(j^*)^2(\omega) = \omega$ si hubiera ω_0 tal que $j(\omega_0) = \omega_0$ induciría una forma diferencial no nula en $\widehat{\mathbb{C}}$ y no existen.

Sea el divisor $D = (g+1).p + (g+1).q$ tendremos $\forall \omega \in \Omega^1(x) \quad dg(\text{div}(\omega)) = 2g - 2 < dg(D)$ por la proposición 9.1.4 y por tanto $\mathcal{O}_{K-D}(X)$ tiene dimensión cero.

Aplicando Riemann Roch

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) = 2g + 2 - g + 1 = g + 3$$

j induce una transformación $f.j$ en $\mathcal{O}_D(X)$ descomponiéndolo en $\mathcal{O}_D(X) = \mathcal{O}_D^+(X) \oplus \mathcal{O}_D^-(X)$ según sea $f.j = f$ o $f.j = -f$

Las funciones de $\mathcal{O}_D^+(X)$ se pueden considerar como composición de x y una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ con polos únicamente en ∞ de orden menor o igual a $g+1$ de forma que podrán ponerse como combinación lineal de $1, x, \dots, x^{g+1}$. Por tanto $\dim(\mathcal{O}_D^+(X)) = g+2$, y existe y meromorfa $y \in \mathcal{O}_D^-(X)$.

Vamos a ver que $y^2 = ch(x) \quad h(x) = (x - a_1) \dots (x - a_{2g+2})$ para ello vamos a comparar divisores

Como $y.j = -y$ y $j(p_i) = p_i$ por ser de ramificación tendremos $y(p_i) = 0$ y $dg(\text{div}_0(y)) \geq dg(\sum p_i) = 2g+2$ y por ser y meromorfa $dg(\text{div}_0(y)) = dg(\text{div}_\infty(y)) \leq dg(D) = 2g+2$ luego $dg(\text{div}_0(y)) = 2g+2$ y $\text{div}_0(y) = \sum p_i, \text{div}_\infty(y) = D$

Por otra parte tenemos $\text{div}_\infty(x) = p + q$ y por tanto $\text{div}_\infty(h(x)) = (2g+2).p + (2g+2).q = 2D$

Sea z_i una coordenada local centrada en p_i tendremos que x se representa como $a_i + z_i^2 g_i(z_i)$ siendo $g_i(z_i)$ holomorfa $g_i(0) \neq 0$. Entonces $\text{div}_0(h(x)) = \sum_{i=1}^{2g+2} 2.p_i$

Por tanto $2\text{div}(y) = \text{div}(y^2) = \text{div}(h)$ y $\frac{y^2}{h}$ ha de ser holomorfa y como X compacta constante. Sustituyendo y por $\frac{y}{\sqrt{c}}$ obtenemos $y^2 = h(x)$

Definimos $f : X \rightarrow P(\mathbb{C}^2) \quad t \rightarrow [1, x(t), y(t)] \quad p, q \rightarrow [0, 0, 1]$ y sea $X' = \{y^2 - h(x) = 0\} \cup [0, 0, 1]$ tenemos $f(X) \subset X'$ y X' es una curva proyectiva plana de grado $2g+2$.

Además f es inyectiva en $X - \{p, q\}$. Sea $r_1 \neq r_2$ $f(r_1) = f(r_2)$ tendremos $x(r_1) = x(r_2)$ luego $j(r_1) = r_2$ y como $r_1 \neq r_2$ no pueden ser ninguno de los p_i pues $j(p_i) = p_i$, tendremos además que $y(r_1) = y(r_2) = y(j(r_1)) = -y(r_1)$ luego $y(r_1) = 0$ (o ∞) lo que es imposible pues no puede ser ninguno de los p_i y hemos excluido p, q

La curva X' es singular en $[0,0,1]$ y suave en el resto por lo que su normalización será compacta.

La aplicación $[1, x, y] \rightarrow x$ es el recubrimiento de 2 hojas. \square

PROPOSICIÓN 13.4.4. *Con las notaciones de la proposición anterior, sea X la curva proyectiva plana hiperelíptica definida por $y^2 = h(x)$ donde h es un polinomio de grado $2g + 1$ o $2g + 2$ sin raíces múltiples. Una base de $\Omega^1(X)$ viene dada por $\omega_i = x^{i-1} \frac{dx}{y}$ $i = 1, \dots, g$*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que las 1-formas son linealmente independientes. Hay que comprobar que son holomorfas, utilizaremos divisores.

Consideremos el caso $h = \prod_{j=1}^{2g+2} (x - a_j)$, tendremos

$$\operatorname{div}(\omega_i) = \operatorname{div}(x^{i-1}) + \operatorname{div}(dx) - \operatorname{div}(y)$$

Sea $x^{-1}(\infty) = \{p, q\}$, $x^{-1}(0) = \{r, s\}$ (pudiendo ser $r = s$) definimos los divisores $E = p + q$, $E' = r + s$, tendremos

$$\operatorname{div}_0(x^{i-1}) = (i-1)E' \quad \operatorname{div}_\infty(x^{i-1}) = (i-1)E$$

luego $\operatorname{div}(x^{i-1}) = (i-1)(E' - E)$.

Para calcular $\operatorname{div}(dx)$ consideramos como en la demostración de la proposición anterior una carta local alrededor de cada p_i en la que x tendrá la forma $a_i + z_i^2 g_i(z_i)$ y dx será $2z_i g_i(z_i) + z_i^2 g_i'(z_i)$ y tiene un cero en cada p_i

Consideremos una carta centrada en p y la clásica carta $u = \frac{1}{z}$ alrededor de ∞ en $\widehat{\mathbb{C}}$ tendremos que en ellas x será $\frac{1}{zg(z)}$ siendo g holomorfa $g(0) \neq 0$ entonces dx será

$-\frac{g(z)+z'g(z)}{z^2g^2(z)}$ y tendrá un polo de orden 2 análogamente para q

$$\operatorname{div}(dx) = \sum_{i=1}^{2g+2} p_i - 2E$$

El cálculo de $\operatorname{div}(y)$ es el mismo que en la demostración de la proposición anterior luego $\operatorname{div}(y) = \sum p_i - (g+1)E$, y tenemos

$$\operatorname{div}(\omega_i) = (i-1)(E' - E) + \sum p_i - 2E - \sum p_i + (g+1)E = (i-1)E' + (g-i)E$$

y como $1 \leq i \leq g$ vemos que $\operatorname{div}(\omega_i) \geq 0$ y es holomorfa \square

TEOREMA 13.4.1. *Para una superficie de Riemann X hiperelíptica de genus g la aplicación canónica ϕ_K es la composición de la aplicación recubridora de dos hojas de $\widehat{\mathbb{C}}$ y aplicación de Veronese. La imagen de ϕ_K es por tanto una curva racional normal de grado $g-1$ en $P^{g-1}(\mathbb{C})$ y la aplicación ϕ_K tiene grado 2*

DEMOSTRACIÓN. Con respecto a la base de $\Omega^1(X)$ de la proposición anterior se tiene

$$\phi_K(t) = [1, x(t), \dots, x^{g-1}(t)]$$

y por tanto el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{\mathbb{C}} \\ & \nearrow x & \downarrow r \\ X & & P^{g-1}(\mathbb{C}) \\ & \searrow \phi_K & \end{array}$$

siendo $r : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow P^{g-1}(\mathbb{C}) \quad x \rightarrow [1, x, \dots, x^{g-1}]$, y el resultado es consecuencia de las definiciones (ver sección 10.5.2) \square

13.5. Haces generados globalmente

DEFINICIÓN 13.5.1. Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . Se dice que el haz \mathcal{O}_D está globalmente generado cuando

$$\forall x \in X \exists f \in \mathcal{O}_D(X) \forall \varphi \in \mathcal{O}_{D_x}, \quad \varphi = \psi f \quad \psi \in \mathcal{O}_x$$

O sea si para cada $x \in X$ existe una función meromorfa global tal que los germines del tallo en x son el producto de un germin holomorfo por dicha función.

Consecuencia directa de la definición es la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 13.5.1. \mathcal{O}_D está generado globalmente si y sólo si $\forall x \in X \exists f \in \mathcal{O}_D(X)$ tal que

$$\text{ord}_x(f) = -D(x)$$

TEOREMA 13.5.1. Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g , y D un divisor en X tal que $dg(D) \geq 2g$. Entonces \mathcal{O}_D está generado globalmente

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$ definimos el divisor

$$E = \begin{cases} D(y) & y \neq x \\ D(x) - 1 & y = x \end{cases}$$

Tendremos $dg(E) = dg(D) - 1 \geq 2g - 1$ y por el corolario 12.6.3 tenemos $H^1(X, \mathcal{O}_D) = H^1(X, \mathcal{O}_E) = 0$. Aplicando Riemann Roch

$$\dim(\mathcal{O}_D(X)) = 1 - g + dg(D) > 1 - g + dg(E) = \dim(\mathcal{O}_E(X))$$

Y existe un elemento $f \in \mathcal{O}_D(X) - \mathcal{O}_E(X)$ que cumplirá $\text{ord}_x(f) = -D(x)$ \square

13.6. Números de salto y Puntos de Weierstrass

Sea X una superficie de Riemann compacta incrustada mediante un sistema completo de divisores $|D|$ en un espacio proyectivo. Sabemos que $|D|$ se corresponde con los divisores hiperplano (ver corolario 10.5.1)

Los hiperplanos que pasan por un punto p se corresponderán con el subespacio $\mathcal{O}_{D-p}(X)$, los tangentes a p con el subespacio $\mathcal{O}_{D-2p}(X)$ y los flexados con $\mathcal{O}_{D-3p}(X)$.

Sea $Q \subset |D|$ un sistema lineal de divisores de grado d y dimensión r (es decir un g_d^r) le corresponderá un subespacio $V \subset \mathcal{O}_D(X)$ y podemos definir

$$V(-np) = \mathcal{O}_{D-np}(X) \cap V$$

Tendremos una sucesión de subespacios $V(-np) \subset V(-(n-1)p)$ con sistemas lineales asociados que denotaremos $Q(-np)$

DEFINICIÓN 13.6.1. *Se definen los números de salto de Q en p como el conjunto $G_p(Q)$ de números enteros tales que*

$$\dim(V(-np)) = \dim(V(-(n-1)p)) - 1$$

PROPOSICIÓN 13.6.1. *Sea Q un g_d^r en una curva algebraica (superficie de Riemann compacta) X y $p \in X$, se tiene*

1. $G_p(Q)$ es finito con cardinalidad $1+r$
2. $G_p(Q) \subset \{1, \dots, d+1\}$
3. p es un punto base si y sólo si $1 \notin G_p(Q)$
4. $d+1 \in G_p(Q)$ si y sólo si $d.p \in Q$
5. $G_p(|0|) = 1$

DEMOSTRACIÓN. 1) Por definición $\dim(V) = r+1$, como $\dim(V(-(d+1)p)) = 0$ y la dimensión se reducen de uno en uno tenemos el resultado.

2) Para cualquier $k \geq d+1$ se tiene $\dim(V(-kp)) = 0$.

3) Consecuencia directa de la definición de punto base.

4) Si $d+1 \in G_p(Q)$ tenemos $\dim(V(-dp)) = 1$ que equivale a $d.p \in Q$

5) $\mathcal{O}_{-p}(X)$ contiene únicamente la función idénticamente nula ($\dim = 0$) en una superficie de Riemann compacta, $\dim(\mathcal{O}(X)) = 1$ (las constantes). \square

DEFINICIÓN 13.6.2. Se dice que p es un punto de inflexión de la curva algebraica X para el sistema lineal Q cuando $G_p(Q) \neq \{1, 2, 3, \dots, r+1\}$.

Si escribimos los $r+1$ enteros de $G_p(Q)$ en orden creciente $G_p(Q) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_{r+1}\}$ podemos escoger un conjunto de funciones $f_i \in V(-(n_i-1)p) - V(-n_i p)$ (por tanto $\text{ord}_p(f_i) = n_i - 1 - D(p)$) estas funciones constituyen una base de V que se conoce como base de inflexión de V respecto a p

Si consideramos una coordenada local z centrada en p y definimos $g_i = z^{D(p)} f_i$ (holomorfas en p) entonces ϕ_Q está definido por coordenadas homogéneas de la forma

$$[z^{n_1-1} + \dots, z^{n_2-1} + \dots, \dots, z^{n_{r+1}-1} + \dots]$$

Si p no es un punto base $n_1 = 1$.

Queremos determinar un criterio para saber si p es un punto de inflexión para Q . Para ello consideremos una coordenada local z centrada en p y una base cualquiera de Q definida por las funciones meromorfas $\{h_k\}$.

Sea $g_k = z^{D(p)} h_k$ las g_k definen ϕ_Q en un entorno de p y son holomorfas en p , si p no es de inflexión será posible encontrar una combinación lineal $\sum c_j g_j$ tal que tenga orden $i-1$ en p para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$. Como g_k es holomorfa en p

$$g_k = g_k(0) + g'_k(0)z + g''_k(0)z^2 + \dots$$

y la condición para que no sea de inflexión es de

$$\det \begin{pmatrix} g_1(0) & g'_1(0) & g_1^{(r)}(0) \\ g_2(0) & & g_2^{(r)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r+1}(0) & & g_{r+1}^{(r)}(0) \end{pmatrix} \neq 0$$

O sea $W_z(g_1, \dots, g_{r+1})(0) \neq 0$ (ver sección 7.7.1)

Como las g_i constituyen una base de V y son linealmente independientes se tiene que $W_z(g_1, \dots, g_{r+1})$ no puede ser idénticamente nulo.

PROPOSICIÓN 13.6.2. *Para un sistema lineal Q en una curva algebraica X sólo hay un número finito de puntos de inflexión*

DEMOSTRACIÓN. Sea p de inflexión en un entorno suyo $W_z(g_1, \dots, g_{r+1})$ es holomorfa y los ceros son aislados así existe un entorno U de p en que p es el único cero. Como X es compacta tenemos el resultado. \square

Hemos visto (sección 7.7.1) que $W_z(f_1, \dots, f_n)dz \otimes \dots \otimes dz$ es una $\frac{n(n-1)}{2}$ diferencial. Si cada f_i tiene polos acotados por D la diferencial los tendrá acotados por nD es decir $W_z(f_1, \dots, f_n)dz \otimes \dots \otimes dz \in \Omega_{nD}^{\frac{n(n-1)}{2}}(X)$

Denotaremos $W(Q)$ a la forma diferencial asociada al wronskiano de un sistema lineal Q

PROPOSICIÓN 13.6.3. *Sea X una curva algebraica de genus g , $Q \subset |D|$ un g_d^r en X , se tiene*

$$dg(\text{div}(W(Q))) = \sum_p \text{ord}_p(W(Q)) = r(r+1)(g-1)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = \frac{(r+1)r}{2}$ como $W_z(Q) \in \Omega_{(r+1)D}^s(X)$ por el teorema 9.5.3 $W(Q) = f\omega^s$ siendo $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ y $f \in \mathcal{O}_{D+sK}$ tenemos

$$\sum_p \text{ord}_p(W(Q)) = \sum_p \text{ord}_p(f\omega^s) = \sum_p (\text{ord}_p(f) + s \text{ord}_p(\omega)) = s \sum_p \text{ord}_p(\omega) = s dg(\omega) = s(2g-2)$$

Pues al ser X compacta $dg(f) = 0$ y por la proposición 9.4.1 $dg(\omega) = 2g - 2$ \square

PROPOSICIÓN 13.6.4. *Sea $G_p(Q) = \{n_1, \dots, n_{r+1}\}$ ordenados de forma creciente y $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ una base del subespacio V asociado al sistema lineal $Q \subset |D|$*

$$\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, \dots, z^{D(p)}f_{r+1})) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)$$

DEMOSTRACIÓN. Como podemos escoger cualquier base sin cambiar el orden por la proposición 7.7.4 vamos a suponer que f_i es de inflexión haciendo $g_i = z^{D(p)} f_i$ tendremos

$$W_z(g_1, \dots, g_{r+1}) = W_z(z^{n_1-1} + \dots, z^{n_2-1} + \dots, \dots, z^{n_{r+1}-1} + \dots)$$

El término menor de la serie de Taylor del Wronskiano será

$$M(z) = W(z^{n_1-1}, z^{n_2-1}, \dots, z^{n_{r+1}-1})$$

expandiendo el determinante

$$M(z) = \begin{pmatrix} z^{n_1-1} & & & z^{n_{r+1}-1} \\ (n_1-1)z^{n_1-2} & & & z^{n_{r+1}-2} \\ & & & \\ & & & \\ (n_1-1)\dots z^{n_1-(r+1)} & & & (n_{r+1}-1)\dots z^{n_{r+1}-(r+1)} \end{pmatrix}$$

tenemos que cada término será del tipo $Az^{n_1+n_2+\dots+n_{r+1}-(1+2+\dots+r+1)}$ y el orden será $\sum_{i=1}^{r+1} n_i - \sum_{i=1}^{r+1} i = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)$ \square

DEFINICIÓN 13.6.3. Se define el peso de inflexión de un punto p respecto a Q como

$$w_p(Q) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)$$

Observar que si p no es de inflexión el peso es cero

TEOREMA 13.6.1. Sea X una curva algebraica de genus g y $Q \in |D|$ un g_d^r en X , entonces

$$\sum_{p \in X} w_p(Q) = (r+1)(d+rg-r)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea f_1, \dots, f_{r+1} una base de V asociado a Q tendremos por la proposición 13.6.4

$$\begin{aligned} \sum_p w_p(Q) &= \sum_p \text{ord}_p(W_z(z^{D(p)} f_1, \dots, z^{D(p)} f_{r+1})) = \sum_p \text{ord}_p(z^{(r+1)D(p)} W_z(f_1, \dots, f_{r+1})) = \\ &= \sum_p [(r+1)D(p) + \text{ord}(W(Q))] = (r+1)d + r(r+1)(g-1) \end{aligned}$$

por la proposición 13.6.3 □

13.6.1. Puntos de inflexión de las curvas planas suaves.

Sea X una curva proyectiva plana suave de grado d . Una recta (hiperplano) H en $P(\mathbb{C}^2)$ intersecta a X con orden k si $\text{div}(H)(p) = k$, se dice que H es tangente a X si $k > 1$.

Diremos que p es de inflexión si hay una recta que intersecta a X en p con orden mayor o igual que 3 (si intersecta con orden j diremos que es de inflexión con multiplicidad $j - 3$).

Sea Q el sistema lineal de los divisores hiperplano será un g_d^2 (2 rectas independientes en $P(\mathbb{C}^2)$).

Como el sistema no tiene puntos bases $n_1 = 1$, además como la recta general que pasa por p no es tangente a X tenemos $n_2 = 2$.

Si p es de inflexión y una recta tangente H intersecta con orden k se tiene $\text{div}(H) \in Q(-kp)$, $\text{div}(H) \notin Q(-(k+1)p)$ luego $n_3 = k + 1$ y $w_p(Q) = k - 2$

TEOREMA 13.6.2. *Una curva proyectiva plana suave X de grado d tiene, contando multiplicidades, $3d(d - 2)$ puntos de inflexión*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de Plücker 10.2.2 $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ y por el teorema 13.6.1 tendremos que ese número será $(2 + 1)(d + 2g - 2) = 3(d + (d - 1)(d - 2) - 2) = 3d(d - 2)$ □

13.6.2. Puntos de Weierstrass.

Si consideramos el sistema lineal $|K|$ de los divisores canónicos de una superficie de Riemann compacta de genus g , una base del subespacio V asociado viene dada por $\{f_i\}$ siendo $\omega_i = f_i dz$ en una carta local y $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$ obtenemos que los puntos de inflexión para $|K|$ son los puntos de Weierstrass (ver sección 12.8). Tenemos así una interpretación alternativa de los mismos.

EJEMPLO. Vamos a calcular los puntos de Weierstrass de la curva proyectiva plana suave $X^3 - XZ^2 + ZY^2 = 0$. Como es de grado 3 habra $3d(d-2) = 9$ puntos (como no puede haber intersecciones de orden 4 entre una curva cúbica y una recta son todos de peso 1)

Como son puntos de inflexión serán aquellos en que se anule el Hessiano

$$\det \begin{pmatrix} 6X & 0 & -2Z \\ 0 & 2Z & 2Y \\ -2Z & 2Y & -2X \end{pmatrix} = 0$$

Es decir seran aquellos en que se anulen

$$\begin{cases} 24X^2Z + 8Z^3 + 24XY^2 = 0 \\ X^3 - XZ^2 + ZY^2 = 0 \end{cases}$$

Dividimos el espacio proyectivo en los conjuntos $[1, Y, Z]$, $[X, Y, 1]$, $[0, 1, 0]$

El punto $[0, 1, 0]$ es de Weierstrass.

En $[1, Y, Z]$ las condiciones son

$$\begin{cases} 24Z + 8 + 24Y^2 = 0 \\ 1 - Z^2 + ZY^2 = 0 \end{cases}$$

que dan lugar a $Z^4 + 6Z^2 - 3 = 0$ con soluciones $Z = \{2,5425i, -2,5425i, 0,6813, -0,6813\}$ a cada uno le corresponden 2 valores de Y obteniéndose $Y = \{\pm 1,2116(1+i), \pm 1,2116(1-i), \pm 0,8869i, \pm 0,8869\}$

Es decir 8 puntos que con $[0, 1, 0]$ son los 9 de la curva.

Los mismos puntos (proyectivos) se obtiene considerando $[X, Y, 1]$ y las ecuaciones

$$\begin{cases} 24X^2 + 8 + 24XY^2 = 0 \\ X^3 - X + Y^2 = 0 \end{cases}$$

que dan lugar a $3X^4 - 6X^2 - 1 = 0$

Lo mismo se obtiene aplicando el Wronskiano. Para $[1, Y, Z]$ la curva es $1 - Z^2 + ZY^2 = 0$ luego $Y = (Z - \frac{1}{Z})^{\frac{1}{2}}$ y el Wronskiano será

$$\det \begin{pmatrix} 1 & (Z - \frac{1}{Z})^{\frac{1}{2}} & Z \\ 0 & \frac{1}{2}(Z - \frac{1}{Z})^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{Z^2}) & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4}(Z - \frac{1}{Z})^{-\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{Z^2})^2 - \frac{1}{2}(Z - \frac{1}{Z})^{-\frac{1}{2}}\frac{2}{Z^3} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

luego $(1 + \frac{1}{Z^2})^2 + 4(Z - \frac{1}{Z})\frac{1}{Z^3} = 0$ y por tanto $Z^4 + 6Z^2 - 3 = 0$

Teorema de Abel

Hemos visto que dado un divisor D en una superficie de Riemann compacta X , es posible que no exista una función meromorfa f tal que $\text{div}(f) = D$.

Como en una superficie de Riemann compacta $dg(\text{div}(f)) = 0$ para cualquier función meromorfa, una condición necesaria evidente es que $dg(D) = 0$. En la proposición 9.1.3 vimos que para la esfera de Riemann ésta era también condición suficiente.

El teorema de Abel analiza que más condiciones ha de cumplir D para que tal función exista para superficies compactas de genus $g \geq 1$.

14.1. Periodos de 1-Formas y Jacobiano

Sea ω una 1-forma cerrada de X y Δ un subconjunto triangulado de X , aplicando el teorema de Stokes

$$\int_{\partial\Delta} \omega = \iint_{\Delta} d\omega = \iint_{\Delta} 0 = 0$$

Por tanto la integral de ω alrededor de cada cadena frontera es nula y la integral alrededor de una cadena cerrada sólo depende de la clase de homología (simplicial) $H_1(X)$ de la cadena.

Como las formas holomorfas son cerradas, las integrales de las mismas respecto a los elementos de $H_1(X)$ están bien definidos y para cada $[\gamma] \in H_1(X)$ así tenemos una aplicación lineal (perteneciente al espacio dual de $\Omega^1(X)$)

$$\Omega^1(X) \rightarrow \mathbb{C} \quad \omega \rightarrow \int_{[\gamma]} \omega$$

DEFINICIÓN 14.1.1. Una aplicación lineal $\lambda \in (\Omega^1(X))^*$ se denomina periodo cuando $\lambda(\omega) = \int_{[\gamma]} \omega$ para algún $[\gamma] \in H_1(X)$. Es evidente que los periodos forman un subgrupo de $(\Omega^1(X))^*$ que denotaremos Λ

DEFINICIÓN 14.1.2. Se denomina Jacobiano (de una superficie de Riemann compacta X) al grupo cociente (abeliano)

$$Jac(X) = \frac{(\Omega^1(X))^*}{\Lambda}$$

Si X tiene genus g la dimensión de $\Omega^1(X)$ también será g . Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$, los elementos del espacio dual se pueden identificar con los de \mathbb{C}^g por medio de $\lambda \rightarrow (\lambda(\omega_1), \dots, \lambda(\omega_g))$ y los elementos de Λ serán aquellos del tipo $(\int_{[\gamma]} \omega_1, \dots, \int_{[\gamma]} \omega_g)$ que formarán un subgrupo de \mathbb{C}^g

Dado $p_0 \in X$ vamos a definir una aplicación (Abel-Jacobi)

$$A : X \rightarrow Jac(X)$$

Para ello dado $p \in X$ elegimos un camino σ_p desde p_0 a p y definimos $A(p)(\omega) = \int_{\sigma_p} \omega$

Por supuesto la integral depende del camino σ_p y no serviría para definir un elemento de $(\Omega^1(X))^*$, pero si consideramos otro camino σ'_p tenemos que $\gamma = \sigma'_p \star \sigma_p^-$ es un camino cerrado y por tanto

$$\int_{\sigma'_p} - \int_{\sigma_p} = \int_{\gamma} \in \Lambda$$

y así la aplicación está bien definida EN $Jac(X)$.

Si consideramos una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $\Omega^1(X)$ la aplicación puede ponerse

$$A(p) = \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g \right) \text{ mod } \Lambda$$

Esta aplicación puede extenderse linealmente a $Div(X)$

DEFINICIÓN 14.1.3. Con la notación anterior, se denominan aplicaciones de Abel-Jacobi a

$$A : X \rightarrow \text{Jac}(X) \quad A(p)(\omega) = \int_{\sigma_P} \omega$$

$$A : \text{Div}(X) \rightarrow \text{Jac}(X) \quad A\left(\sum n_i \cdot p_i\right) = \sum n_i A(p_i)$$

esta última será un homomorfismo de grupos. La restricción de dicho homomorfismo a los divisores de grado cero se denota A_0 .

PROPOSICIÓN 14.1.1. El homomorfismo A_0 , definido para los divisores de grado cero, es independiente del punto base p_0

DEMOSTRACIÓN. Escojamos otro punto base p'_0 y un camino c de p_0 a p'_0 las expresiones de $A(p)$ con respecto a los dos puntos base son (módulo Λ)

$$\left(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g \right) \quad \left(\int_{p'_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p'_0}^p \omega_g \right)$$

que se diferencian (módulo Λ) en

$$\left(\int_c \omega_1, \dots, \int_c \omega_g \right)$$

Las expresiones de $A_0(\sum n_i \cdot p_i)$ se diferencian (módulo Λ) en $(\sum n_i) \left(\int_c \omega_1, \dots, \int_c \omega_g \right) = 0$ por ser $\sum n_i = 0$ □

14.2. Matriz de periodos y relaciones de Riemann

Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g . Topológicamente (ver [RotTop]) se puede considerar como un polígono \mathfrak{p} de $4g$ lados $\{a_i b_i, a'_i b'_i\}_1^g$ “pegando” a_i, a'_i y b_i, b'_i .

Para cada 1-forma σ_i definimos $A_i(\sigma) = \int_{a_i} \sigma$, $B_i(\sigma) = \int_{b_i} \sigma$ (notar que en X son caminos cerrados)

Los números A_i se denominan *a-periodos* y los B_i *b-periodos*

DEFINICIÓN 14.2.1. Dada una superficie de Riemann compacta de genus g y una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $\Omega^1(X)$ se definen las matrices de periodos como

$$\mathbf{A} = A_i(\omega_j) \quad \mathbf{B} = B_i(\omega_j)$$

serán matrices de dimensión $g \times g$

Sea σ una 1-forma cerrada en X , se puede considerar como una 1-forma en \mathfrak{p} . Sea p_0 un punto del interior de \mathfrak{p} para cada $p \in \mathfrak{p}$ se define

$$f_\sigma(p) = \int_{p_0}^p \sigma$$

Por un camino en el interior de \mathfrak{p} . La función está bien definida por ser σ cerrada y \mathfrak{p} simplemente conexo. Claramente se tiene $df_\sigma = \sigma$ y si σ es holomorfa también lo será f_σ .

PROPOSICIÓN 14.2.1. Sean σ, τ 1-formas cerradas C^∞ en X se tiene

$$\int_{\partial \mathfrak{p}} f_\sigma \tau = \sum_{i=1}^g (A_i(\sigma) B_i(\tau) - A_i(\tau) B_i(\sigma))$$

siendo $\partial \mathfrak{p}$ la cadena $\sum_{i=1}^g (a_i + b_i - a'_i - b'_i)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in a_i$ y $p' \in a'_i$ el punto con el que se identificará para formar X , sea α_p un camino en el interior de \mathfrak{p} de p a p' tendremos

$$f_\sigma(p) - f_\sigma(p') = \int_{p_0}^p \sigma - \int_{p_0}^{p'} \sigma = - \int_{\alpha_p} \sigma$$

Pues la integral de σ en el camino cerrado $p_0 p \star \alpha_p \star (p' p_0)^-$ es cero

En X tenemos que α_p es un camino cerrado homótopo a b_i y por tanto

$$f_\sigma(p) - f_\sigma(p') = -B_i(\sigma)$$

Un análisis similar para puntos $q \in b_i, q' \in b'_i$ produce

$$f_\sigma(q) - f_\sigma(q') = A_i(\sigma)$$

Como τ es una 1-forma en X toma los mismos valores en a_i, a'_i y en b_i, b'_i

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathfrak{p}} f_\sigma \tau &= \sum_{i=1}^g \left(\int_{a_i} f_\sigma \tau - \int_{a'_i} f_\sigma \tau + \int_{b_i} f_\sigma \tau - \int_{b'_i} f_\sigma \tau \right) = \\ &= \sum_{i=1}^g \left[\int_{p \in a_i} (f_\sigma(p) - f_\sigma(p')) \tau(p) + \int_{q \in b_i} (f_\sigma(q) - f_\sigma(q')) \tau(q) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^g \left[\int_{p \in a_i} -B_i(\sigma) \tau(p) + \int_{q \in b_i} A_i(\sigma) \tau(q) \right] = \sum_{i=1}^g [-B_i(\sigma) A_i(\tau) + A_i(\sigma) B_i(\tau)] \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN. Notar que el resultado es válido aunque τ sea meromorfa siempre que no tenga polos en los a_i, b_i

PROPOSICIÓN 14.2.2. Sea $\omega \in \Omega^1(X)$ no nula, se tiene

$$Im\left(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}\right) < 0$$

DEMOSTRACIÓN. Localmente se tendrá $\omega = f(z)dz$ (f holomorfa) $\bar{\omega} = \overline{f(z)}d\bar{z}$ y $\omega \wedge \bar{\omega} = -2i|f|^2 dx \wedge dy$ por tanto

$$Im\left(\iint_X \omega \wedge \bar{\omega}\right) < 0$$

Aplicando el teorema de Stokes que $df_\omega = \omega$ y que $d\bar{\omega} = 0$ (ω holomorfa) tenemos

$$\int_{\partial \mathfrak{p}} f_\omega \bar{\omega} = \iint_{\mathfrak{p}} d(f_\omega \bar{\omega}) = \iint_{\mathfrak{p}} (df_\omega \wedge \bar{\omega} + f_\omega d\bar{\omega}) = \iint_{\mathfrak{p}} \omega \wedge \bar{\omega} = \iint_X \omega \wedge \bar{\omega}$$

pero por la proposición anterior con $\sigma = \omega, \tau = \bar{\omega}$

$$\begin{aligned} 0 > Im\left(\sum_{i=1}^g [A_i(\omega) B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega}) B_i(\omega)]\right) &= \\ &= Im\left(\sum_{i=1}^g [A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)} - \overline{A_i(\omega)} B_i(\omega)]\right) = \\ &= Im\left(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)} - \overline{\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}}\right) = Im(2i Im\left(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}\right)) = \\ &= 2Im\left(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}\right) \end{aligned}$$

y tenemos el resultado □

COROLARIO 14.2.1. *Sea $\omega \in \Omega_1(X)$ tal que $\forall i \in \{1, g\} A_i(\omega) = 0$ entonces $\omega = 0$. Se tiene un resultado análogo para la B_i*

DEMOSTRACIÓN. Si $\forall i A_i(\omega) = 0$ se tiene $\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)} = 0$ y por la proposición anterior $\omega = 0$ análogamente para B_i □

COROLARIO 14.2.2. *Sea $\omega \in \Omega_1(X)$, si todos los A -periodos y B -periodos son reales $\omega = 0$*

PROPOSICIÓN 14.2.3. *Las matrices de periodos \mathbf{A}, \mathbf{B} son no singulares*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathbf{A} es singular y $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_g \end{pmatrix}$ un vector no nulo tal que $\mathbf{A}c = 0$. Definimos $\omega = \sum c_j \omega_j$ y tendremos $A_i(\omega) = \sum c_j A_i(\omega_j) = 0$ para cada i y por el corolario 14.2.1 $\omega = 0$ y $c_j = 0$ pues las ω_i son linealmente independientes. Análogamente para \mathbf{B} . □

OBSERVACIÓN. *Como \mathbf{A} es una matriz no singular podemos elegir una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ en la que $\mathbf{A} = I$. Cuando se usa esa base se dice que \mathbf{B} está normalizada.*

PROPOSICIÓN 14.2.4. *Las matrices de periodos satisfacen $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}$*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la proposición 14.2.1 con $\sigma = \omega_j, \tau = \omega_k$

$$\sum_{i=1}^g (A_i(\omega_j) B_i(\omega_k) - A_i(\omega_k) B_i(\omega_j)) = \int_{\partial \mathbf{p}} f_{\omega_j} \omega_k$$

pero

$$\int_{\partial \mathbf{p}} f_{\omega_j} \omega_k = \iint_{\mathbf{p}} d(f_{\omega_j} \omega_k) = \iint_{\mathbf{p}} \omega_j \wedge \omega_k + f_{\omega_j} d\omega_k = 0$$

Pues ω_j y ω_k son holomorfas. □

PROPOSICIÓN 14.2.5. *Sea \mathbf{B} una matriz de periodos normalizada entonces es simétrica y su parte imaginaria definida positiva*

DEMOSTRACIÓN. Para \mathbf{B} normalizada ($\mathbf{A} = I$) la proposición anterior es $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ luego es simétrica.

Consideremos un vector real $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_g \end{pmatrix}$ y $\omega = \sum r_j \omega_j$ por la proposición 14.2.2

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}\right) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g r_i r_j \operatorname{Im}(\overline{B_i(\omega_j)}) < 0$$

Es decir $r^T \cdot \operatorname{Im}(\overline{\mathbf{B}}) \cdot r < 0$ y claro $r^T \cdot \operatorname{Im}(\mathbf{B}) \cdot r > 0$ □

PROPOSICIÓN 14.2.6. *La matriz (\mathbf{A}, \mathbf{B}) de dimensiones $g \times 2g$ tiene las columnas linealmente independientes en \mathbb{R}*

DEMOSTRACIÓN. Podemos realizar un cambio de base para normalizar y obtenemos (I, \mathbf{B}) si para dos vectores reales r_1, r_2 se tiene que $(I, \mathbf{B}) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$ es decir $r_1 + \mathbf{B}r_2 = 0$ tomando partes imaginarias obtenemos $(\operatorname{Im}(\mathbf{B})r_2 = 0$ y por la proposición anterior $r_2 = 0$ y entonces $r_1 = 0$ por lo que las columnas son linealmente independientes.

Terminaremos la sección con un teorema muy importante que no demostraremos (ver [GriffPAG])

TEOREMA 14.2.1. *Torelli: Una condición necesaria y suficiente para que dos superficies de Riemann compactas sean isomorfas (es decir que exista entre ambas una aplicación biholomorfa) es que tengan la misma matriz normalizada $\begin{pmatrix} I & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ de periodos*

□

14.3. Trazas de funciones y 1-formas

Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa de grado $m = dg(F)$ entre superficies de Riemann compactas (que será un recubrimiento ramificado) dado $q \in Y$, cuya

imagen no contenga un punto de ramificación es decir que q tiene exactamente m preimágenes p_1, \dots, p_m , existe U entorno de q y V_1, \dots, V_m entornos de p_1, \dots, p_m tales que $F|_{V_i}$ son biholomorfismos. Denotaremos $\phi_i = (F|_{V_i})^{-1}$.

DEFINICIÓN 14.3.1. *En las condiciones anteriores, dada h función meromorfa en X se define $Tr(h)$ (traza de h) en $U \subset Y$ como*

$$Tr(h) = \sum_{i=1}^{m=dg(F)} h \cdot \phi_i \quad Tr(h)(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} h(q)$$

La traza define una función meromorfa en cada punto de Y cuya preimagen no contenga un punto de ramificación.

En los puntos q con $r < m$ preimágenes la función no está definida por lo que serán singularidades aisladas de $Tr(h)$.

Supongamos q con una sola preimagen p , F será en un entorno de p de la forma $w = z^m$ (ver teorema 5.3.2).

Existirá un desarrollo de Laurent de h válido en un entorno agujereado de p del tipo $\sum_n c_n z^n$ los valores de $Tr(h)$ en los puntos de un entorno agujereado de q serán (denotando $\xi = e^{\frac{2\pi i}{m}}$)

$$Tr(h)(w) = \sum_{j=0}^{m-1} h(\xi^j z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_n c_n (\xi^j z)^n = \sum_n c_n z^n \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} \right)$$

$$\text{Pero } \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \begin{cases} m & n = km \\ 0 & n \neq km \end{cases} \text{ y tendremos } Tr(h)(w) = \sum_k m c_{km} z^{km} = \sum_k m c_{km} w^k$$

y si h es holomorfa (meromorfa) en p tendremos que $Tr(h)$ es holomorfa (meromorfa) en q

En el caso general de ramificación (q con $r < m$ preimágenes) el análisis anterior será válido sumando los valores correspondientes a cada preimagen, ahora usaremos m_j en vez de m correspondientes a los valores locales $w = z_j^{m_j}$ en cada preimagen como $\sum m_j = m$ la conclusión es la misma.

Análogamente

DEFINICIÓN 14.3.2. En las condiciones anteriores, dada α 1-forma meromorfa en X se define $Tr(\alpha)$ en $U \subset Y$ como

$$Tr(\alpha) = \sum_{i=1}^{m=dg(F)} \phi_i^*(\alpha)$$

Supongamos q con una sola preimagen p , F será en un entorno de p de la forma $w = z^m$, además localmente será $\alpha = h(z)dz$ con h meromorfa y con desarrollo de Laurent del tipo $\sum_n c_n z^n$. Como $dw = mz^{m-1}dz$ tendremos

$$Tr(\alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} h(\xi^j z) \frac{dw}{m(\xi^j z)^{m-1}} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_n c_n (\xi^j z)^{n-m+1} dw = \frac{1}{m} \sum_n c_n \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{j(n-m+1)} \right) z^{n-m+1} dw$$

$$\text{Pero } \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{j(n-m+1)} = \begin{cases} m & n - m + 1 = k'm \text{ o sea } n = km - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \text{ y así tendremos}$$

$$Tr(\alpha) = \sum_k c_{km-1} w^{k-1} dw$$

y como antes $Tr(\alpha)$ será holomorfa (meromorfa) si lo es α

PROPOSICIÓN 14.3.1. Para cada punto q se cumple

$$Res_q(Tr(\alpha)) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} Res_p(\alpha)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta la fórmula $Tr(\alpha) = \sum c_{km-1} w^{k-1} dw$ y se ve que los coeficientes -1 ($k = 0$) del desarrollo de Laurent de las dos expresiones coinciden. \square

Consideremos un camino γ en Y y una 1-forma meromorfa ω en X sin polos en las preimágenes de γ . La integral

$$\int_{\gamma} Tr(\omega)$$

estará bien definida.

Cada punto de γ tiene, excepto en las imágenes de los puntos de ramificación, m preimágenes distintas dando lugar a m caminos distintos γ_i en X , definidos en $[0, 1]$

salvo un número finito de puntos pudiendo extenderse por continuidad a caminos que intersectarán en los puntos de ramificación.

DEFINICIÓN 14.3.3. Se define el “pullback” de un camino γ en Y , como la cadena en X

$$F^*\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$$

La definición se generaliza de forma evidente para γ cadena en Y

Evidentemente estará definida $\int_{F^*\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \dots + \int_{\gamma_m} \omega$

PROPOSICIÓN 14.3.2. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Si ω es una 1-forma holomorfa en X y γ una cadena en Y , se tiene

$$\int_{F^*\gamma} \omega = \int_{\gamma} Tr(\omega)$$

DEMOSTRACIÓN. Tendremos

$$\int_{F^*\gamma} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \sum_i \int_0^1 \omega \gamma'_i dt = \int_0^1 \sum_i (F|_{\gamma_i}^{-1})^*(\omega) \gamma'_i dt = \int_0^1 Tr(\omega) \gamma'_i dt = \int_{\gamma} Tr(\omega)$$

□

14.4. Teorema de Abel

Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g con matrices de periodos \mathbf{A}, \mathbf{B} definimos las aplicaciones

$$\Phi : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^{2g} \quad \Phi(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{c}$$

$$\Psi : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C} \quad \Psi(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \mathbf{e}$$

LEMA 14.4.1. La sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{C}^g \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^{2g} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^g \longrightarrow 0$ es exacta

DEMOSTRACIÓN. $\Psi \cdot \Phi = 0$ es consecuencia directa de la proposición 14.2.4 luego $Imag(\Phi) \subset Kern(\Psi)$ además como \mathbf{A}, \mathbf{B} son no singulares (ver proposición 14.2.3) tenemos que Φ, Ψ son de rango máximo es decir: $dim(Imag(\Phi)) = g$, $dim(Imag(\Psi)) = g$ y por razones dimensionales $Imag(\Phi) = kern(\Psi)$ por el mismo motivo Φ es inyectiva y Ψ suprayectiva. \square

LEMA 14.4.2. *Sea D un divisor de grado cero en una superficie de Riemann compacta X tal que $A_0(D) = 0$. Existe una 1-forma meromorfa ω tal que:*

- ω tiene polos simples en cada uno de los puntos del soporte de D
- $Res_p(\omega) = D(p)$
- Los a-periodos y los b-periodos de ω son múltiplos enteros de $2\pi i$

DEMOSTRACIÓN. Tendremos que $\sum Res_p(\omega) = dg(D) = 0$ y basta aplicar el teorema 12.7.4 para ver que existe ω cumpliendo las dos primeras condiciones.

Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$ definimos

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g (A_i(\omega_k)B_i(\omega) - A_i(\omega)B_i(\omega_k))$$

Por la proposición 14.2.1

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f_{\omega_k} \omega = \sum_{p \in \mathfrak{P}} Res(f_{\omega_k} \omega) = \sum_{p \in X} Res(f_{\omega_k} \omega)$$

Como ω_k es holomorfa también f_{ω_k} y por tanto $Res_p(f_{\omega_k} \omega) = f_{\omega_k}(p)Res_p(\omega) = f_{\omega_k}(p)D(P)$ luego

$$\rho_k = \sum_p D(p)f_{\omega_k}(p) = \sum_p D(p) \int_{p_0}^p \omega_k$$

Es decir ρ_k es la k-esima componente de la aplicación de Abel-Jacobi aplicada a D .

Por hipótesis $A_0(D) = 0$ (en $Jac(X)$) y por tanto $(\rho_1, \dots, \rho_g) \in \Lambda$ y se podrá poner como una combinación lineal de las matrices de periodos

$$\rho_k = \sum_i (m_i A_i(\omega_k) - n_i B_i(\omega_k))$$

Iguando ambas expresiones de ρ_k

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g (A_i(\omega_k)B_i(\omega) - A_i(\omega)B_i(\omega_k)) = \sum_i (m_i A_i(\omega_k) - n_i B_i(\omega_k))$$

$$\sum_{i=1}^g (B_i(\omega) - 2\pi i m_i) A_i(\omega_k) = \sum_{i=1}^g (A_i(\omega) - 2\pi i n_i) B_i(\omega_k)$$

denotando \mathbf{a} al vector de componentes $A_i(\omega) - 2\pi i n_i$ y \mathbf{b} al de componentes $B_i(\omega) - 2\pi i m_i$ matricialmente tenemos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{B}^T \mathbf{a}$$

y por tanto $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ pertenece al kernel de Ψ y por el lema anterior existirá \mathbf{c} tal que $\Phi(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ es decir

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{a} \quad \mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

Sean c_i las componentes de \mathbf{c} definimos

$$\tau = \omega - \sum_{i=1}^g c_i \omega_i$$

Evidentemente τ cumple (como ω) las dos primeras condiciones y tenemos

$$A_j(\tau) = A_j(\omega) - \sum_{i=1}^g c_i A_j(\omega_i) = A_j(\omega) - (A_j(\omega) - 2\pi i n_i) = 2\pi i n_i$$

$$B_j(\tau) = B_j(\omega) - \sum_{i=1}^g c_i B_j(\omega_i) = B_j(\omega) - (B_j(\omega) - 2\pi i m_i) = 2\pi i m_i$$

y τ es la 1-forma buscada. \square

TEOREMA 14.4.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g > 0$ y D un divisor en ella de grado cero. La condición necesaria y suficiente para que D sea un divisor principal es $A_0(D) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = \text{div}(f)$ siendo f meromorfa y consideremos un camino γ en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ que una 0 con ∞ sin pasar por ningún punto cuya preimagen sea de ramificación (salvo quizás $0, \infty$)

La función holomorfa asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ levantará este camino a $m = dg(F) = dg(\text{div}_0(f))$ caminos γ_i en X comenzando cada uno en un cero y acabando en un polo (posiblemente repetidos). Denotaremos $p_i = \gamma_i(0)$ y $q_i = \gamma_i(1)$ claramente tendremos

$$D = \text{div}(f) = \sum_{i=1}^m (p_i - q_i)$$

Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de $\Omega^1(X)$ y escojamos un punto cualquiera $x_0 \in X$ tendremos

$$A_0(D) = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\alpha_i} \omega_1 - \int_{\beta_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i} \omega_g - \int_{\beta_i} \omega_g \right) \pmod{\Lambda}$$

Siendo α_i un camino que une x_0 con p_i y β_i uno que une x_0 con q_i . Evidentemente $\alpha_i \star \gamma_i \star \beta_i^-$ es un camino cerrado que comienza y acaba en x_0 y por tanto

$$\int_{\alpha_i} \omega_j + \int_{\gamma_i} \omega_j - \int_{\beta_i} \omega_j = 0 \pmod{\Lambda}$$

luego

$$A_0(D) = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_i} \omega_g \right) = \left(\int_{F^*\gamma} \omega_1, \dots, \int_{F^*\gamma} \omega_g \right) \pmod{\Lambda}$$

Entonces por la proposición 14.3.2

$$A_0(D) = \left(\int_{\gamma} \text{Tr}(\omega_1), \dots, \int_{\gamma} \text{Tr}(\omega_g) \right) \pmod{\Lambda}$$

Pero al ser ω_j holomorfa $\text{Tr}(\omega_j)$ ha de ser holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ y como en la esfera de Riemann solo la forma idénticamente nula es holomorfa concluimos $A_0(D) = 0$ y tenemos la condición necesaria.

Supongamos ahora que D sea un divisor de grado cero en X con $A_0(D) = 0$ y consideremos una 1-forma ω que cumpla las condiciones del lema anterior.

Fijado $x_0 \in X$ fuera del soporte de D definimos

$$f(p) = \exp\left(\int_{x_0}^p \omega\right)$$

La función está bien definida, fuera del soporte de D , porque los periodos de ω son múltiplos de $2\pi i$ y los residuos enteros, así que dará igual que camino elijamos para unir x_0 con p . Además será holomorfa fuera del soporte de D

Para ver que f es meromorfa supongamos $p \in X$ tal que $D(p) = n$ en un entorno del mismo habrá una carta (U, z) en la que $\omega = \left(\frac{n}{z} + h(z)\right)dz$ siendo h holomorfa, si $p_1 \neq p$ es un punto cualquiera de U de coordenada z_1 tendremos

$$f(z) = \exp\left(\int_{x_0}^{p_1} \omega + \int_{z_1}^z h(z)dz + \int_{z_1}^z \frac{n}{z} dz\right) = \exp\left(\int_{x_0}^{p_1} \omega\right) \exp\left(\int_{z_1}^z h(z)dz\right) \exp\left(\int_{z_1}^z \frac{n}{z} dz\right) = l(z) z^n$$

siendo $l(z)$ holomorfa distinta de cero por tanto f es meromorfa y $\text{div}(f) = D$ \square

EJEMPLO. Supongamos el toro T definido por el grupo de translaciones generado por $z \rightarrow z + 1, z \rightarrow z + \tau$ ($\text{Im}(\tau) > 0$) actuando en el plano \mathbb{C} .

Dada cualquier carta $z + (n_i + m_i\tau)$ la forma dz constituye una base de $\Omega^1(T)$ y escogiendo $p_0 = 0$

$$\int_0^z dz = z \pmod{n_i + m_i\tau}$$

Entonces dado $D = \sum z_i - \sum p_j$ siendo z_i ceros p_j polos (quizás repetidos) de grado cero la condición para que exista f tal que $\text{div}(f) = D$ es

$$\sum z_i - \sum p_j = 0 \pmod{n_i + m_i\tau}$$

Propiedad bien conocida de las funciones elípticas.

14.5. La variedad de Jacobi de una superficie de Riemann compacta

Podemos interpretar Λ como el conjunto de puntos de \mathbb{C}^g de la forma $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

donde m, n son vectores enteros de dimensión g . Por analogía con el caso del toro, que está generado por el grupo de translaciones $L = \{m\tau_1 + n\tau_2\}$, llamaremos

$L(X)$ a este conjunto (La analogía es completa pues en un toro τ_1, τ_2 han de ser independientes sobre \mathbb{R} como lo son las columnas de \mathbf{A}, \mathbf{B})

Tendremos entonces que $Jac(X) = \frac{(\Omega^1(X))^*}{\Lambda} \approx \frac{\mathbb{C}^g}{L(X)}$ es una variedad compleja g dimensional *compacta* (concretamente un grupo de Lie) que se conoce como toro complejo g dimensional (homeomorfo a $(S^1)^{2g}$). Un dominio fundamental viene dado por el politopo

$$\{x \in \mathbb{C}^g : x_k = \sum_{i=1}^g (r_j A_{jk} + s_j B_{jk}) r_j, s_j \in \mathbb{R}, 0 \leq r_j, s_j < 1\}$$

La aplicación de Abel-Jacobi es claramente holomorfa cuando se considera $Jac(X)$ como el toro complejo g dimensional.

PROPOSICIÓN 14.5.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta de genus $g > 0$. La aplicación $A : X \rightarrow Jac(X)$ es inyectiva. Es decir es un incrustamiento holomorfo de X en $Jac(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p, q \in X$ tales que $A(p) = A(q)$ por el teorema de Abel existe f meromorfa $div(f) = p - q$ es decir p tiene un solo cero en p y un solo polo en q por tanto tiene asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado uno es decir un homeomorfismo. Entonces se tendría $g = 0$, contradicción. \square

PROPOSICIÓN 14.5.2. *Toda superficie de Riemann compacta de genus $g = 1$ es isomorfa a un toro complejo. Es más dado $p_0 \in X$ existe un isomorfismo $A : X \rightarrow Jac(X)$ tal que $A(p_0) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación de Abel-Jacobi $A(p)(\omega) = \int_{p_0}^p \omega$ será holomorfa entre X y $Jac(X) = \frac{\mathbb{C}}{L}$ que es un toro complejo por la proposición anterior será inyectiva y entonces por el corolario 5.3.1 será biholomorfa, además claramente $A(p_0) = 0$. \square

14.6. Teorema de Jacobi

DEFINICIÓN 14.6.1. Sea X una superficie de Riemann compacta, se denomina grupo de Picard al grupo

$$\text{Pic}(X) = \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}$$

y grupo de Picard cero al subgrupo del anterior

$$\text{Pic}^0(X) = \frac{\text{Div}_0(X)}{\text{PDiv}(X)}$$

Consideremos la aplicación de Abel-Jacobi $A_0 : \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ como por el teorema de Abel $A_0(\text{div}(f)) = 0$ tenemos que induce una aplicación inyectiva $j : \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$

Vamos a demostrar que j es suprayectiva este resultado produce una generalización del teorema de Abel que se expresa

La sucesión

$$\mathcal{M}(X) - \{0\} \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por tanto $\text{Pic}^0(X) \approx \text{Jac}(X)$

Consideremos una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $\Omega^1(X)$ dados puntos $p_j \in X$ y carta (U_j, z_j) centradas en p_j se tendrá que $\omega_i = f_{ij}(z_j)dz_j$ en cada U_j

LEMA 14.6.1. Sea X una superficie de Riemann compacta de genus g , existen g puntos p_1, \dots, p_g tales que la matriz $f_{ij}(p_j)$ es no degenerada.

DEMOSTRACIÓN. Como ω_1 no es idénticamente nula existirá p_1 tal que $f_{11}(p_1) \neq 0$. Consideremos ahora $\omega'_i = \omega_i - \frac{f_{i1}(p_1)}{f_{11}(p_1)}\omega_1$ ($i = 2, \dots, g$) tendremos $f'_{i1}(p_1) = 0$ además podemos encontrar p_2 tal que $f'_{22}(p_2) \neq 0$ y considerar $\omega''_i = \omega'_i - \frac{f'_{i2}(p_2)}{f'_{22}(p_2)}\omega'_2$ ($i =$

$3, \dots, g)$ y así sucesivamente. La matriz en la base $\omega_1, \omega'_2, \dots, \omega_g^{g-1}$ será

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & a_{gg} \end{pmatrix}$$

□

TEOREMA 14.6.1. *j es suprayectiva*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos g puntos p_i que cumplan el lema anterior y cartas tales que los U_i sean simplemente conexos. Podemos definir una aplicación $\phi : U_1 \times \dots \times U_g \rightarrow \mathbb{C}^g$ $\phi(q_1, \dots, q_g) = (\int_{\gamma_1} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_g} \omega_g)$ donde γ_i es un camino de p_i a q_i (como ω_i es cerrada y U_i simplemente conexo ϕ está bien definida).

Consideremos la cadena $c = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ tendremos que $D = \partial c$ (considerada como divisor) tiene grado cero y define un punto en $Pic(X)$ parametrizado por las coordenadas locales z_1, \dots, z_g en $U_1 \times \dots \times U_g \subset X^g$.

Se tiene

$$\phi(p_1, \dots, p_g) = 0 \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial z_j} \Big|_{p_j} = f_{ij}(p_j)$$

y el Jacobiano de la transformación es distinto de cero en p_1, \dots, p_g por el lema anterior y la imagen contendrá un entorno W del origen de \mathbb{C}^g y por tanto también la de j . Pero como j es un homomorfismo contendrá kW para todo k y j es suprayectiva □

Bibliografía

- [LeeSM] John M. Lee: Introduction to smooth Manifolds
- [LeeTP] John M, Lee: Introduction to topological Manifolds
- [Chern] S.S Chern: Lectures on differential Geometry.
- [CostaGL] Antonio F. Costa: Geometrías lineales y Grupos de Transformaciones (uned)
- [BujalTG] E. Bujalance: Teoría elemental de grupos (uned)
- [GamboaACC] J. Manuel Gamboa Mutuberría: Anillos y cuerpos conmutativos (uned)
- [BeaDiscGr] Alan F Beardon: The Geometry of Discrete Groups
- [RotTop] J J Rotman: An introduction to Algebraic Topology
- [MunkT] James R. Munkres: Topology
- [dujun] Dugundji: Topology
- [MunkAT] James R. Munkres: Elements of Algebraic Topology
- [CDG] Fangyang Zheng: Complex Differential Geometry
- [KirwCAC] Frances Kirwan: Complex Algebraic Curves
- [GriffPAG] Griffiths & Harris: Principles of Algebraic Geometry
- [GriffIAG] Griffiths: Introduction to Algebraic curves
- [JonSingCF] Jones & Singerman: Complex Functions
- [LinesA4] Enrique Linés: Análisis Matemático IV (Uned)
- [ForRS] Otto Forster: Lectures on Riemann Surfaces
- [FarkasKra] Farkas & Kra: Riemann Surfaces
- [Reyssat] Reyssat: Quelques aspects des surfaces de Riemann
- [AhlfSar] Ahlfors & Sario: Riemann Surfaces
- [Gunn] Gunning R.C.: Lectures on Riemann Surfaces
- [Spring] George Springer: Introduction to Riemann Surfaces
- [Miranda] Rick Miranda: Algebraic Curves & Riemann Surfaces