Trabajo Fin de Master

GRUPOS DE LIE

escrito por

VICENTE RUBIO MARTI

Tutor:

JAVIER PEREZ ALVAREZ

Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Trabajo presentado por la obtención del título de Master Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED. Especialidad Geometría y Topología

OCTUBRE 2016

Abstract en castellano: En el presente proyecto definimos lo que es un grupo de Lie, así como su respectiva álgebra de Lie canónica como aproximación lineal a dicho grupo de Lie. El proceso de linealización, que es hallar el algebra de Lie de un grupo de Lie dado, tiene su inverso en el método de exponenciación, mediante el cual dada un algebra de Lie hallamos su correspondiente grupo de Lie asociado. Se completa la exposición presentando cuatro formas distintas de construir grupos de Lie, a saber: mediante el producto directo de grupos de Lie, mediante la obtención de subgrupos algebraicos cerrados de un grupo de Lie, mediantes espacios recubridores y como grupos homogéneos por acción de un grupo de Lie.

Abstract in english: In the present project we define what is a Lie group, as well as its respective canonical Lie algebra as a linear approximation to the already mentioned Lie group. The process of linearization, which is figuring out the Lie algebra of a Lie group given, has its inverse in the exponentialization method, whereby given a Lie algebra we figure out its pertinent associated Lie group. The explanation completes itself demonstrating four different forms of building Lie groups, which are: by the direct product of Lie groups, by getting closed algebraic subgroups of a Lie group, by covering spaces and finally, as homogeneous groups by the action of a Lie group.

Keywords: variedad diferenciable, homeomorfismo, difeomorfismo grupo de Lie algebra de Lie, forma diferencial,campo vectorial, campo invariante, gérmen, derivación, constantes de estructura, ecuaciones estructurales, corchete de Lie, conmutador, p-formas, subgrupo uniparamétrico, espacio tangente, covector espacio dual, submersión, inmersión, embebimiento, subvariedad regular, push-forward, pullback, normalizador, centralizador, subgrupos normales, grupo simple, gurpos nilpotentes, grupos solubles, representación lineal , representación adjunta, automorfiamo, automorfismo interno, acción de un grupo, órbita de una acción, grupo de isotropía, acción fiel, acción transitiva, grupos homogéneos, topología cociente, espacio conexo, espacio recubridor, aplicación recubridora, grupo discreto, transformación recubridora, espacio recubridor universal, espacio simplemente conexo.

CONTENIDOS

1

GRUPO DE LIE.

EJEMPLOS DE GRUPOS DE LIE.

Definición 1 Se llama *variedad topológica de dimensión n* a todo espacio topologico V que tenga la siguiente propiedad: cada punto a $\in$ V tiene un entorno abierto V homeomorfo a un abierto U de R^n. Tal propiedad se expresa diciendo que V es *localmente homeomorfo* a R^n.

Definición 2 Un atlas en la variedad V es una colección $\{V_\propto,\ \varphi_\propto\}_{\propto\in I}$ de parejas formadas por un abierto $V_\propto$ de V y un homeomorfismo $\varphi_\propto$ de $V_\propto$ con un abierto $U_\propto$ de R^n, y tal que $\bigcup_{\propto\in I} U_\propto$ = V. La familia I de índices puede ser finita o infinita, numerable o no. Cada abierto $V_\propto$ se llama un *abierto coordenado* del atlas y cada homeomorfismo $\varphi_\propto\colon V_\propto \to U_\propto$ se llama una *carta local*.

- Si $V_\propto$ y V_β son abiertos coordenados del atlas, la parte común $V_\propto \cap V_\beta$ está representada por el homeomorfismo $\varphi_\propto$ en una parte abierta $U_\propto$ y por el homeomorfismo φ_β en una parte abierta de U_β. Estas partes abiertas serán homeomorfas entre sí, según el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V_\propto \cap V_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi_\propto(V_\propto \cap V_\beta) \subset U_\propto \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}"'] & & \varphi_\beta(V_\propto \cap V_\beta) \subset U_\beta \end{tikzcd}$$

Definición 3 El homeomorfismo $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1} : \varphi_\propto(V_\propto \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(V_\propto \cap V_\beta)$ se llama *cambio de carta local* o *cambio de coordenandas locales* de $V_\propto$ a V_β. Si las coordenadas del espacio euclideo en el que está sumergido $U_\propto$ se les llama x_1,..., x_n y las del espacio euclideo en el que está sumergido U_β son y_1,...,y_n y si las ecuaciones de la aplicación

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}: \varphi_\propto(V_\propto \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(V_\propto \cap V_\beta)$$

escritas en coodenadas son

$$y_1 = f_1(x_1,\dots, x_n),\dots\dots, y_n = f_n(y_1,\dots,y_n)$$

Éstas, son llamadas *ecuaciones del cambio de coordenadas locales* de $V_\propto$ a V_β.

Definición 4 El atlas $\{V_\propto, \varphi_\propto\}_{\propto\in I}$ se dice que es de *clase* C^k cuando los cambios de cartas locales $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ son todas aplicaciones de clase C^k. Una aplicación es de clase C^k si posee todas sus derivadas hasta orden k y son continuas. Una variedad V con un atlas de clase C^k se llama *variedad de clase* C^k. Una variedad es de clase C^∞ si es de clase C^k ∀ k≥0.

Un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^∞ en una variedad V se dice maximal si no esta incluido en otro atlas C^∞ mayor, de forma que si $\mathcal{A}$ es maximal todas sus cartas son compatibles entre si.

Definición 5 Una *estructura* C^∞ *, suave o diferencial* sobre una variedad topológica V es un atlas C^∞ maximal. Una *variedad* C^∞ es un par (V, $\mathcal{A}$) donde V es variedad topológica y $\mathcal{A}$ es atlas C^∞ maximal.

- Una estructura C^∞ es una estructura añadida a una variedad topológica, asi distintas estructuras C^∞ sobre la misma variedad topológica dan lugar a distintas variedades C^∞.

Ejemplo: Sea V=$\mathbb{R}$ y sea la aplicación $id_{\mathbb{R}};\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x \mapsto x$

Sea V=$\mathbb{R}$ y sea la aplicación $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x \mapsto x^3$

Cada atlas $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \psi)$ determina una estructura C^∞ en $\mathbb{R}$ pero tales cartas no son C^∞ compatibles la una con la otra pues $id_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1} = y^{\frac{1}{3}}$ que no es C^∞ en el origen al contrario que $id_{\mathbb{R}}$ que si lo es. Por tanto las dos estructuras C^∞ son distintas en $\mathbb{R}$ y dan lugar a variedades C^∞ distintas.

Definición 6 Un grupo de Lie G es una variedad C^∞ que también es grupo en el sentido algebraico de forma que la aplicación multiplicación y la aplicación inversión entre los elementos de la variedad = grupo son ambas C^∞ .

- La aplicación multiplicación es : G x G → G con (a,b)↦ ab
  La aplicación inversión es : G → G con a↦ a^{-1}.
  Debido a que las aplicaciones C^∞ son continuas, un grupo de Lie es un grupo continuo o topologico y éste se define como aquella estructura de grupo en el que la ley de composición es continua y la aplicación que asocia a todo elemento del grupo con su inverso también es continua.

Asi, tenemos que un grupo de Lie es una estructura que abarca otras tres: es una variedad topológica que es variedad diferenciable o C^∞ y además es grupo topologico.

Lema: (Caracterización alternativa de la propiedad C^∞) Sea G una C^∞ $variedad$ con estructura de grupo de forma que la aplicación G x G → G con (g,h) ↦ gh^{-1} es C^∞ $\Longrightarrow$ G es grupo de Lie.

> **Demost:** Para g=1_G la aplicación hipótesis se convierte en la inversión y es C^∞ por hipótesis. Por otra parte al ser G grupo el elemento gh^{-1} ∈ G y h^2 ∈ G $\Longrightarrow$ $(gh^{-1},\ h^2) \mapsto$ gh es la aplicación multiplicación que es también C^∞ por hipótesis.

Proposición 1: Sean G,H grupos de Lie entonces el producto directo G x H es grupo de Lie.

> **Demost:** G x H como producto de variedades C^∞ posee una estructura de variedad C^∞ tal que las proyecciones en cada uno de sus factores: $p_1 : G\,x\,H \rightarrow G$ y $p_2 : G\,x\,H \rightarrow H$ son C^∞. Haciendo $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1.g_2,\ h_1.h_2)$ convertimos a G x H en grupo de Lie, llamado ***producto directo*** de grupos de Lie.

Ejemplos de Grupos de Lie:

1.- GL_n (ℝ) = { A∈ M_n(ℝ) : det(A) ≠0} siendo M_n(ℝ)= el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en ℝ. GL_n (ℝ) es un grupo bajo la multiplicación de matrices y es una subvariedad abierta de $M_n(\mathbb{R})$ pues det(A) $\neq$0 implica que GL_n ($\mathbb{R}$) es el complementario de un conjunto cerrado definido por una aplicación continua. Todo elemento A del grupo puede ser tomado como un punto del espacio euclideo $\mathbb{R}^{n^2}$ con coordenadas (a^i_j) los elementos matriciales de A. La multiplicacón es C^∞ pues las entradas de la matriz AB son polinomios de las entradas de las matrices A y B. La inversión es C^∞ pues la regla de Cramer expresa las entradas de A^{-1} como funciones racionales de las entradas de la matriz A.

2.- Sea V espacio vectorial sobre cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ continuo. Sea GL(V)= { L: V → V con L transformación lineal invertible} es grupo con la composición de aplicaciones. Si dimensión de V es = n finita $\Longrightarrow$ cualquier base de V determina un isomorfismo entre GL(V) y GL_n($\mathbb{K}$) de forma que GL(V) es un grupo de Lie.

3.- Sea $\mathbb{R}^*$= $\mathbb{R}$-{0}. Es un grupo de Lie de dimensión 1 bajo la multiplicación pues $\mathbb{R}^* = GL_1(\mathbb{R})$. Asi mismo, sea $\mathbb{R}^+$={ x∈ $\mathbb{R}$: x>0} ⊂ $\mathbb{R}^*$ es subgrupo abierto $\Longrightarrow$ es un grupo de Lie de dimensión 1.

4.- Sea $\mathbb{C}^*$= $\mathbb{C}$ - {0} grupo de Lie bajo la multiplicación de números complejos pues es = $GL_1(\mathbb{C})$. Asi mismo, sea S^1={ z∈ $\mathbb{C}$: $|z|$ = 1 } ⊂ $\mathbb{C}^*$ es variedad C^∞ y grupo bajo la multiplicación compleja. Usando adecuadas funciones angulares como coordenadas locales sobre abiertos de S^1 la multiplicación $(\theta_1,\theta_2)\longmapsto \theta_1+\theta_2$, y la inversión $\theta \longmapsto -\theta$ poseen expresiones coordenas $C^\infty \Longrightarrow S^1$ es grupo de Lie.

5.- $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son grupos de Lie bajo la suma pues las coordenadas de x-y son funciones C^∞ de las coordenadas de x e y. (aquí hemos aplicado el lema anterior).

2

TRASLACIONES A IZQDA. Y A DERECHA DE UN GRUPO DE LIE. SUBGRUPO DE LIE.

Definición 1 Sea G un grupo de Lie cualquiera. Todo g ∈ G define unas aplicaciones L_g y R_g tales que L_g: G → G con h ↦ gh llamada *traslación a izquierda por g*
R_g : G → G con h ↦ hg llamada *traslación a derecha por g*.

Proposicion 1 : L_g y R_g son aplicaciones C^∞ .

> **Demost**: veamos el caso L_g: ésta es composición de las aplicaciones C^∞ inclusión por g in_g: G → GxG con h ↦ (g,h) y la multiplicación del grupo m: GxG → G con (g,h) ↦ gh. Asi L_g= m ° in_g es C^∞.

Definición 2 : Sean G y H grupos de Lie. Un homomorfismo de grupos de Lie F: G → H es una aplicación C^∞ que también es homomorfismo de grupos, es decir, que conserva la ley de composición

F(g_1° g_2) = F(g_1) ° F(g_2

Definición 3 : Un *homeomorfismo* entre variedades es un homomorfismo F: M → N que es continua y posee inversa F^{-1}: N → M continua.
Un *difeomorfismo* es un homomorfismo C^∞ entre variedades cuya inversa F^{-1} es C^∞.

Proposición 2: L_g y R_g son difeomorfismos, pues $L_{g^{-1}}$ y $R_{g^{-1}}$ son inversas C^∞.

OBS: dados dos puntos a,b cualesquiera de un grupo de Lie G existe una única traslación a izqda. de G que lleva a hasta b y es la traslación a izqda. por ba^{-1} ó $L_{ba^{-1}}$.

La importancia de las traslaciones a izqda. en un grupo de Lie radica en que todo grupo de Lie es homogéneo en el sentido de que a nivel local todos los puntos son indistinguibles y el grupo aparenta el mismo alrededor de cualquier punto. Así, la traslación a izqda. por un elemento g del grupo es un difeomorfismo del grupo en si mismo que aplica la identidad del grupo en el elemento g. Para estudiar la estructura local de un grupo de Lie basta ver un entorno del elemento identidad.

SUBGRUPOS DE LIE :

Definición 4 : Un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G se puede definir como

a) Un subgrupo algebraico de G que verifica los axiomas de grupo de Lie.
b) Un subgrupo algebraico que es subvariedad inmersa via inclusión de forma que las operaciones de grupo en él son C^{∞}.
   m_H = $m_G|_H$ como la aplicación multiplicación del grupo restringida a H
   ι_H= $\iota_G|_H$ como la aplicación inversión del grupo restringida a H.

Si se define el subgrupo de Lie H como subvariedad inmersa entonces H no necesita tener la topología relativa pues siendo inmersión la inclusión in: H↪G es C^{∞} y la composición

$$m \circ (in,in) : H \times G \hookrightarrow G \times G \to G \qquad \text{es } C^{\infty}.$$

¿Pero qué es una inmersión y una subvariedad inmersa?

En una variedad C^{∞} no existe espacio euclideo ambiente entonces hemos de dar sentido a la noción de vector tangente en dicha variedad que nos permita construir aproximaciones lineales a ella. En una variedad C^{∞} lo que hay son funciones C^{∞}, aplicaciones C^{∞} y cartas coordenadas C^{∞} y el único significado que se puede obtener de un vector tangente es como derivada direccional de funciones. El proceso de tomar derivadas direccionales da una correspondencia 1-1 entre el cto. de vectores tangentes geométricos y el cto de funciones lineales f : $C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que verifican la regla de la derivación. Así un vector tangente a una variedad C^{∞} M es una derivación de C^{∞}(M).

Definición 5 : Una aplicación lineal X: $C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ se llama *derivación en el punto p* si cumple

X(fg) = f(p). Xg + g(p). Xf para todo f,g$\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

$T_p(\mathbb{R}^n)$ = { Todas las derivaciones de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ en p } es esp vectorial para la suma de derivaciones y el producto por un escalar.

Definición 6 : Sea M variedad C^{∞} y p$\in$ M. Una aplicación lineal X : C^{∞}(M) $\to \mathbb{R}$ se llama una *derivación en p* si cumple

X(fg) = f(p). Xg + g(p). Xf para todo f,g$\in C^{\infty}$(M).

Definición 7 : Sean M, N variedades C^{∞}. Sea una aplicación C^{∞} F : M $\to$ N. Para todo punto p $\in$ M definimos la aplicación lineal F_* : T_p(M) $\to$ $T_{F(p)}$(N) como la que envía un vector tangente en p de M a un vector tangente a F(p) en N y le llamaremos *push- forward* o acción directa del espacio tangente en el punto p de M en el espacio tangente en el punto F(p) de N
T_p(M) = { todas las derivaciones de C^{∞}(M) en p } se le llama *espacio tangente de M en el punto p.*

Definición 8 : Una *inmersión* es una aplicación C^{∞} F : M $\to$ N tal que F_* es inyectiva en todo punto de M. O equivalentemente si el rango de F = dimensión de M
Para una aplicación C^{∞} F : M $\to$ N el rango de F en p es el rango de la aplicación lineal F_* que es el rango de la matriz de derivadas parciales de F en cualquier carta.

Definición 9 : Una *subvariedad inmersa* de dimensión k de una variedad C^{∞}: M es un subconjunto N $\subset$ M dotado con una variedad topológica de dimensión k y una estructura C^{∞} de forma que la inclusión in : N $\hookrightarrow$ M es una inmersión C^{∞}.

Proposición 3 : Sea G grupo de Lie y H subgrupo abstracto de G de forma que H es una subvariedad regular de G $\Longrightarrow$ H es subgrupo de Lie de G.

Demost: Una subvariedad regular es la imagen de una incrustación $\Longrightarrow$ es una subvariedad inmersa. Sea m : G x G $\longrightarrow$ G la multiplicación en G
Como H es subvariedad inmersa de G $\Longrightarrow$ la inclusión in : H $\hookrightarrow$ G es C^{∞} $\Longrightarrow$ in x in : H x H $\hookrightarrow$ G x G es C^{∞} y m ° (in x in) : H x H $\hookrightarrow$ G es C^{∞}.
Por ser H subvariedad regular de G, m$|_H$: H x H $\hookrightarrow$ H es C^{∞}
e $\iota|_H$: H $\hookrightarrow$ H es C^{∞} por serlo ι :G$\to G$

Un subgrupo H como el de la proposición se llama subgrupo de Lie embebido porque la inclusión in : H $\hookrightarrow$ G de una subvariedad regular es un embebimiento.

Definición 10 : Un *embebimiento* o *incrustación* C^∞ es una inmersión inyectiva F con F : M $\rightarrow$ N que también es a la vez embebimiento topológico ó homeomorfismo sobre su imagen M $\cong$ F(M)$\subset$N.

Definición 11 : S$\subset$M, con M variedad de dimensión n, es una *subvariedad regular de dimensión k* si todo punto p $\in$ S tiene un entorno coordenado (U,φ)= (U, x^1,..,x^n) en el atlas maximal de M tal que U$\cap$S se define por la anulación de n-k funciones coordenadas.

Localmente, las subvariedades C^∞ siguen el modelo del embebimiento standard de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^n$ identificando $\mathbb{R}^k$ con el subesapacio { (x^1,…,x^k,0,…,0) $\in \mathbb{R}^n$}
Si N es una subvariedad embebida de $\mathbb{R}^n$ su espacio tangente T_p(N) en p$\in$N es una subespacio de $T_p(\mathbb{R}^n)$. De igual modo el espacio tangente de una subvariedad de una variedad C^∞ abstracta puede tomarse como un subespacio del espacio tangente de la variedad ambiente con las adecuadas identificaciones.
Si M es una variedad C^∞ y N es una subvariedad embebida de M, como la inclusión in : N$\hookrightarrow$M es una inmersión $\Longrightarrow$ en todo p de N hay una aplicación lineal inyectiva in_*: T_p(N) $\rightarrow$ T_p(M). Identifiquemos T_p(N) con $in_*(T_p$(N)) entonces T_p(N) es un cierto subespacio de T_p(M) y como tal viene dado

T_p(N) = { X $\in$ T_p(M) tal que Xf=0 siempre que f$\in C^\infty(M)$ y f$|_N$=0 }.

Las subvariedades inmersas normalmente aparecen así: dada inmersión inyectiva (embebimiento) F : N $\rightarrow$ M se le puede dar a F(N)$\subset$M una topología solo con declarar como conjunto abierto U $\subset$ F(N) $\Leftrightarrow$ F^{-1}(U) $\subset$ N es abierto. Con esta topología F(N) es una k-variedad topológica homeomorfa a N y existe una única estructura C^∞ en F(N) tal que F : N $\rightarrow$ F(N) es difeomorfismo. Con dicha topología y estructura C^∞ la inclusión in : F(N) $\hookrightarrow$ M es una inmersión C^∞ pues es una composición de un difeomorfismo seguida de una inmersión

$$F(N) \xrightarrow{F^{-1}} N \xrightarrow{F} M$$

Todo ello nos sirve para aproximar una variedad C^∞ que parametriza un determinado grupo de Lie mediante sus subgrupos de Lie que son subvariedades embebidas y que localmente puede embeberse en espacos euclideos.
¿Qué variedades C^∞ pueden ser suavemente embebidas en espacios euclideos? Todas

¿Qué clase de aplicaciones continuas entre variedades pueden aproximarse con aplicaciones C^{∞}?

- Toda aplicación continua de una variedad C^{∞} en $\mathbb{R}^n$ puede aproximarse uniformemente por una aplicación C^{∞}.
- Toda aplicación continua entre variedades es homotópica a una aplicación C^{∞}.

***Estrategia**:* Usar el análisis en $\mathbb{R}^n$ para construir una solución local en una carta coordenada fijada y usar las particiones de la unidad para reunir todas las soluciones locales en una solución global.

Ejemplos de subgrupos de Lie:

1. $GL_n^+(\mathbb{R})$ es subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ pues det(AB) = det(A).det(B). Es subconjunto abierto de $GL_n(\mathbb{R})$ por la continuidad de la función det luego es subgrupo embebido, por el convenio adoptado de que toda subvariedad abierta es una subvariedad embebida de codimensión 0.
2. S^1 es subgrupo de Lie de $\mathbb{C}^*$ pues es subgrupo y una subvariedad embebida, por ser compacto y la inclusión in : $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ inmersión inyectiva.
3. $O_n(\mathbb{R})$ es subgrupo embebido de $GL_n(\mathbb{R})$. Es compacto pues es cerrado y acotado de $M_n(\mathbb{R})$. Es cerrado por ser conjunto de nivel de la aplicación Φ(A) = A^TA continua y es acotado pues cada columna de la matriz A tiene norma = 1.
4. $SL_n(\mathbb{R})$ es subgrupo y subvariedad embebida de codimensión 1 de $GL_n(\mathbb{R})$.
   $SL_n(\mathbb{R})$ = { A ∈ $M_n(\mathbb{R})$: det(A)=1 }
   $SL_n(\mathbb{R})$ es sugrup de $GL_n(\mathbb{R})$ pues $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
   $\det: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una submersión $C^{\infty} \Longrightarrow SL_n(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$ es subvariedad embebida. Veamos que det es submersión:
   Sea A ∈ $GL_n(\mathbb{R})$ cualquiera $\Longrightarrow$ d(det)$_A$(B) = (det (A)) . tr(A^{-1}B) para todo B ∈ $T_A(GL_n(\mathbb{R})) \approx M_n(\mathbb{R})$.
   Eligiendo B=A $\Longrightarrow$ d(det)$_A$(A) = (det(A)) . tr(A^{-1}ª) = (det(A)) tr (I_n) = n det (A) $\neq$ 0. Asi det(A) nunca se anula en $GL_n(\mathbb{R})$ y det es una submersión.

Definición 12 : Una *submersión* es una aplicación C^{∞} F : M $\to$ N tal que F_* es sobre para todo punto p $\in$ M o equivalentemente rango F = dimensión de N.

Teorema 1 : Todo subgrupo de Lie es grupo de Lie

Demost: la aplicación

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu : & H \times H & \to & H & \quad \text{con} \quad & (x,y) & \to & xy^{-1} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & G \times G & \to & G & & (x,y) & \to & xy^{-1} \end{array}$$

es C^{∞}, pues (in, in) : H xH $\to$ G x G es C^{∞} y in : H $\to$ G es inmersión.

3

CAMPOS Y FORMAS INVARIANTES DE GRUPOS DE LIE.

Definición 1 : Un campo vectorial X sobre una variedad C^∞ M es la asignación de una vector tangente $X_p \in T_p$(M) a todo punto p de M.
Si F : M $\rightarrow$ N es una aplicación C^∞ entre variedades ya definíamos anteriormente su derivación en un punto p como F_* : T_p(M) $\rightarrow$ $T_{F(p)}$(N) y llamábamos a $F_*(X_p)$ el push-forward del vector $X_p \in T_p$(M).
En general la imagen por F_* de un campo vectorial en M no define un campo vectorial en N pues tal concepto referido a un vector no se extiende a campos vectoriales ya que …

- si F no es sobre no hay modo de decidir qué vector asignar a un punto q que ∈ N-F(M).
- si F no es inyectiva entonces puede darse el caso de p ≠ q con p,q ∈ M y F(p) = F(q) = z ∈ N pero $F_*(X_p) \neq F_*(X_q)$.
- Sólo cuando F es un difeomorfismo es cuando el push-forward F_*X de cualquier campo vectorial X en M es un campo vectorial en N pues F es inyectiva y no existe ambigüedad en la expresión $(F_*X)_{F(p)}$=$F_{*,p}(X_p)$ y al ser F_*X sobre está definida en todo N.

Definición 2 : Sea F : M $\rightarrow$ N es una aplicación C^∞ entre variedades. X campo vectorial en M está *F-relacionado* con $\tilde{X}$ campo vectorial en N si para todo p de M: $F_{*,p}(X_p)$= $\tilde{X}_{F(p)}$.

OBS: para un campo vectorial dado Y en M y una aplicación F puede ser que no exista ningún campo vectorial en N que esté F-relacionado con Y.

Si F es difeomorfismo, todo campo vectorial C^∞ Y de M tiene un único campo vetorial en N que está F-relacionado con Y. A este campo vectorial C^∞ único de N lo llamaremos F_*Y y diremos que él es el push-forward de Y por F. F_*Y está definido sólo cuando F es difeomorfismo.

Ж (M) ={ todos los campos vectoriales C^∞ de M } esp. vectorial con la suma de vectores y el producto por escalares. Los campos vectoriales C^∞ pueden multiplicarse por funciones C^∞

Si f∈ C^∞(M) e Y∈ Ж (M) ⟹ $(fY)_p$ = es el campo vectorial f(p). Y_p e fY ∈ Ж (M).

Sea X un campo vectorial de G grupo de Lie sin que se le suponga a priori C^∞. Debido a que la multiplicación a izqda. es un difeomorfismo : para cada g de G el push-forward $l_{g*}X$ es un campo vectorial bien definido en G.

Definición 3 : El campo vectorial X es *invariante a izqda*. si $l_{g*}X$ = X. $\forall g \in$ G.

- Significa que ∀h∈ G : $l_{g*}X_h = X_{gh}$
  O sea X es invariante por la izqda. ⟺ X está l_g-relacionado consigo mismo $\forall g \in$ G.
- X = campo invariante por la izqda. está totalmente determinado por su valor en 1_G : X_{1_G} ya que $X_g = l_{g*}X_{1_G}$.
- Inversamente: dado vector tangente A de T_{1_G}(G), podemos definir un campo vectorial $\tilde{A}$ en G por $(\tilde{A})_g = l_{g*}A \implies \tilde{A}$ es invariante por la izqda. ya que

$$l_{g*}(\tilde{A})_h = l_{g*}l_{h*}\,A = (l_g \circ l_h)_*\,A = (l_{gh})_*\,A = \tilde{A}_{gh}.$$

Definición 4 : Llamamos $\tilde{A}$ al *campo vectorial invariante a izqda. de G generado por A* ∈ T_{1_G}(G).

Llamamos L(G) = { todos los campos vectoriales de G invariantes a izqda. } = esp. vectorial.

- Existe una correspondencia 1-1 : T_{1_G}(G) ⟷ L(G) que es isomorfismo de esp. vectoriales. $X_{1_G} \longmapsto$ X
  A $\longmapsto \tilde{A}$

Proposición 1 : Todo campo vectorial invariante a izqda. X de un grupo de Lie G es C^∞.

Demost: Basta ver que para toda función f ∈ C^{∞}(G), la función Xf es C^{∞}. Elegimos curva C^{∞} c: $\mathbb{I} \longrightarrow$ G definida en un intervalo $\mathbb{I}$ que contenga el 0 de forma que c(0) = 1_G y c´(0) = X_{1_G}.

Si g ∈ G entonces g. c(t) es una curva que inicia en g con velocidad inicial X_g pues g. c(0) = g . 1_G = g y (g c)´(0) = l_{g*} c´(0) = $l_{g*}X_{1_G}$ = X_g.

(Xf)(g) = X_gf = $\frac{d}{dt}$ $|_{t=0}$(f$[g.c(t)]$) y f$[g.c(t)]$ es composición de funciones C^{∞}

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \mathbb{I} & \longrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (g,t) & & (g,c(t)) & & gc(t) & & f[g.c(t)] \end{array}$$

$\Longrightarrow$ es C^{∞}.

La derivada respecto de t la llamamos F(g,t) = $\frac{d}{dt}$f$[g.c(t)]$ $\Longrightarrow es\ C^{\infty}$.

(Xf)(g) es composición de funciones C^{∞}

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & & (g,0) & & F(g,0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}f[g.c(t)]. \end{array}$$

$\Longrightarrow$ (Xf)(g) es C^{∞} en G $\Longrightarrow$ X es campo vectorial C^{∞} en G.

Definición 5: Una p-forma w ∈ $\wedge^p T^*$(G) es invariante por la izqda. si $(l_g)^*$ w = w ∀ g ∈ G.

Proposición 3: Sea F: G → H homomorfismo de grupos de Lie. Se cumple:

1.- Sea w forma invariante sobre H. Llamemos F^* al pull-back de formas diferenciales asociado a F, entonces se verifica que F^*(w) es una 1-forma invariante sobre G.

2.- F^*: $L(H)^* \rightarrow L(G)^*$ es la aplicación lineal dual de F_*: L(G) → L(H).

Demost: Sea g ∈ G, entonces $l_g^*(F^*$w) = (F ∘ $l_g)^*$w = $(l_{F(g)}$ ∘ F$)^*$w = $F^* {l_{F(g)}}^*$w = F^*w.

2.- ¿ F^*w(D) = w(F_*D) ? Como ambos son funciones constantes, basta ver que coinciden en el neutro:

(F^*w) D(1_G) = (F^*w) D_{1_G} = w($F_*(D_{1_G})$) = w($F_*(D)_{1_G}$) = w($F_*(D)$) (1_G).

Proposición 2: 1.- Si w es una p-forma invariante

Si D^1,..., D^p son campos vect. Invariantes $\Longrightarrow$ w(D^1,..., D^p) es una función constante.

2.- Toda p-forma invariante w ∈ $\wedge^p T^*$(G) es C^{∞}.

Demost: 1.- $\forall$ g $\in G$: w(D^1,..., D^p)(g) = w(D^1_g,..., D^p_g) = w((l_{g*}) $D^1_{1_G}$,..., (l_{g*}) $D^p_{1_G}$) = (l^*_gw)($D^1_{1_G}$,..., $D^p_{1_G}$) = w ($D^1_{1_G}$,..., $D^p_{1_G}$) = w(D^1,..., D^p)(1_G).

2.- Sean $D_1, \ldots, D_n$ base de campos invariantes y sea w_1,...,w_n su base dual. Llamando $\lambda_{i_{1,\ldots}i_p}$= w(D_{i_1},..., D_{i_p}) $\in \mathbb{R}$ podemos poner
w = $\sum_{i_1<\cdots<i_p} \lambda_{i_{1,\ldots}i_p} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_p}$ de donde se infiere el enunciado.

Definición 6: Sea $D_1, \ldots, D_n$ una base del algebra de Lie L(G) de un grupo de Lie G. Llamaremos constantes de estructura de dicha base a los números reales c^k_{ij} que verifican: $[D_i, D_j]$ = $\sum_k c^k_{ij} D_k$.

Proposición 3: Las constantes de estructura cumplen:
1.- $c^k_{ij} + c^k_{ji}$ = 0.
2.- $\sum_r(c^r_{ij} c^s_{kj}$ + $c^r_{ij} c^s_{rk}$ + $c^r_{jk} c^s_{ri}$) = 0

Demost: 1.- por la antisimetria del corchete de Lie.
2.- por La identidad de Jacobi que verifica el corchete de Lie.

Ejemplos :

1.- *Campos vectoriales a izqda. de $\mathbb{R}$:* ($\mathbb{R}$, +) es grupo de Lie y $1_{\mathbb{R}}$=0.
l_{g*} (x) = g +x
Calculemos $l_{g*}(\frac{d}{dx}|_0)$: como $l_{g*}(\frac{d}{dx}|_0)$ es un vector tangente en g es un escalar múltiplo de $\frac{d}{dx}|_g$, o sea $l_{g*}(\frac{d}{dx}|_0)$ = a.$\frac{d}{dx}|_g$. Hallemos el factor a:

a = a.$\frac{d}{dx}|_g$ f = $l_{g*}(\frac{d}{dx}|_0)$ f = $\frac{d}{dx}|_0$ f° l_g = $\frac{d}{dx}|_0$ (g +x) = 1 $\Longrightarrow$ $l_{g*}(\frac{d}{dx}|_0)$ = $\frac{d}{dx}|_g$
Asi, $\frac{d}{dx}$ es un campo vectorial invariante a izqda. de $\mathbb{R}$.
Los campos invariantes a izqda. de $\mathbb{R}$ son múltiplos constantes de $\frac{d}{dx}$.

2.- *Campos invariantes a izqda. de $GL_n(\mathbb{R})$* :

$GL_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$ $\Longrightarrow$ en todo punto g de $GL_n(\mathbb{R})$ existe una identificación canónica de $T_g(GL_n(\mathbb{R}))$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ bajo la cual a un vector tangente se le asocia una matriz cuadrada de orden n

$$\sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_g \quad \leftrightarrow \quad [a_{ij}]$$

Notación: usamos la misma letra A para denotar el vector tangente $\sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{I_n}$ y la matriz $[a_{ij}]$.

Sea B = $\sum b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{I_n}$ $\in$ $T_{I_n}(GL_n(\mathbb{R}))$ y sea $\tilde{B}$ = campo vestorial invariante a izqda. de $GL_n(\mathbb{R})$ generado por B $\Longrightarrow$ $\tilde{B}g$ = $(l_g)_*$B $\leftrightarrow$ gB bajo anterior identificación.

En términos de la base standard $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_g$: $\tilde{B}\ g$ = $\sum (gB)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_g$ = $\sum_{ij}\left[\sum_k g_{ik} b_{kj}\right]$ $\cdot\frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_g$

4

ALGEBRA DE LIE ABSTRACTA

Definición 1 : Un algebra lineal es un conjunto V = $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos llamados vectores junto con un conjunto F = $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos llamados escalares que es un cuerpo y con tres tipos de operaciones: +,·,■ que verifican:

- (V,+) es un grupo abeliano con elemento unidad v_0.
- (F x V, ·) cumple las propiedades de: Clausura
Asociatividad
Elemento unidad 1
Bilinealidad de · con +
- (V, ■) cumple las propiedades de : Clausura
Bilinealidad de ■ con +

Además: El algebra es asociativa si ■ es asociativa
El algebra es con identidad si existe $1_{■}$
El algebra es simétrica si ■ es conmutativa
El algebra es antisimétrica si ■ es anticonmutativa
El algebra es con derivación si ■ verifica la propiedad de Leibniz que se traduce en la identidad de Jacobi cuando ■ es el corchete de Lie: $[A, B] =$ AB-BA.

Supongamos X,Y campos vectoriales suaves en un abto U de una variedad M.
Tomemos X,Y como derivaciones en C^{∞}(U).
Sea f ∈ C^{∞}(U) entonces Yf y (XY)f pertenecen a C^{∞}(U).

XY es R-lineal por serlo tanto X como Y pero XY no cumple la propiedad de la derivación: esta propiedad dice que D(fg)= D(f).g + f.D(g). Y para XY se tiene: XY(fg)= X((Yf)g + f(Yg))= (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg) con lo que los dos sumandos centrales hacen que no sea una derivación. Tales términos son simétricos respecto de X e Y entonces: (XY)(fg) – (YX)(fg) = (XY – YX)(fg) si es una derivación de C^{∞}(U).

Definición 2 : Sean X,Y campos vectoriales suaves en un abierto U y sea p ∈ U. Definimos corchete de Lie en p como $[X,Y]_p$f= (X_pY - Y_pX)f. ∀ germen f C^{∞} en p.

OBS : 1.- Evaluados en p: $[X,Y]_p$ es una derivación de C_p^{∞} luego es un vector tangente en p.
2.- Al variar p en U, $[X,Y]_p$ se convierte en campo vectorial de U.

Proposición 1 : El corchete de Lie de dos campos C^{∞} de una variedad M es un campo C^{∞} en M.

Demost: Basta ver que si f∈C^{∞}(M) entonces $[X,Y]$f ∈ C^{∞}(M) :
$[X,Y]$f=(XY – YX)f que ∈ C^{∞}(M) pues X,Y lo son.

Proposición 2 : Si X e Y son campos vectoriales invariantes a izquierda de un grupo de Lie G $\Longrightarrow$ $[X,Y]$ también lo es.

- **Demost :** ∀ g ∈ G, X está l_g-relacionado consigo mismo e Y está l_g-relacionado consigo mismo $\Longrightarrow$ $[X,Y]$ está l_g-relacionado consigo mismo.

Definíamos con anterioridad Ж (M) ={ todos los campos vectoriales C^{∞} de M }.
El corchete de Lie provee de una operación producto en Ж(M) que es anticonmutativa pues $[X,Y]$ = - $[Y,X]$ y con identidad de Jacobi :

$$\sum_{ciclica}[X,[Y,Z]] = 0.$$

Definición 3 : Sea K cuerpo. *Un algebra de Lie* sobre un cuerpo K es un espacio vectorial V sobre K junto con una operación producto $[,]$: V x V → V llamado corchete que verifica:

- Bilinelaidad: $[aX + bY, Z]$= a$[X, Z]$ + b$[Y, Z]$

  $[Z, aX + bY]$= a$[Z, X]$ + b$[Z, Y]$

- Anticonmutatividad: $[X, Y]$ = - $[Y, X]$
- Identidad de Jacobi: $\sum_{ciclica}[X, [Y, Z]] = 0$.

Definido el corchete de Lie de esta manera entonces (Ж (M), $[,]$) cumple las condiciones de algebra de Lie arriba definidas.

Definición 4 : Una *derivación* de un algebra de Lie V sobre un cuerpo K es una aplicación k-lineal D: V → V que cumple: D$[Y, Z]$=$[DY, Z]$ + $[Y, DZ]$ ∀ Y,Z∈V.

Ejemplos de algebras de Lie:

1.- el espacio vectorial M_n (ℝ) es un algebra de Lie de dimensión n^2 con el corchete conmutador $[A, B] =$ AB-BA. Se le denota con $\mathrm{gI}_n(\mathbb{R})$.

2.- $\mathrm{gI}_n(\mathbb{C})$ es el algebra de Lie de dimensión 2n^2 obtenida en (M_n (ℂ), $[,]$)

3.- Ж (M) Es un algebra de Lie de dimensión ∞ bajo el corchete de Lie:

$$[V, W]_p : \quad C^\infty(\mathrm{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \qquad [V, W]_p f = V_p(\mathrm{Wf}) - W_p(\mathrm{Vf})$$

4.- Todo espacio vectorial V es un algebra de Lie si se definen todos los $[\cdot,\cdot]=0$. Tal algrebra se le llama *abeliana*.

5.- Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ algebras de Lie. Entonces $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es algebra de Lie con el corchete definido por

$$[(X,Y),(A,B)] = ([X,A],[Y,B])$$

Y se le llama *algebra de Lie producto.*

Sea G un grupo de Lie. Ж (G) es un algebra de Lie con el corchete de Lie [,].

Definición 5 : Sea $\mathfrak{g}$ algebra de Lie, Un subespacio lineal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se llama *subalgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ si es cerrado bajo corchete de Lie.

Definición 6 : Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ algebras de Lie, $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es una *homomorfismo de algebras de Lie* si preserva los corchetes, es decir: $f([(X,Y)] = [f(X),f(Y)]$

Cada elemento $g \in$ G define un difeomorfismo l_g: G $\to$ G tal que h $\mapsto gh$ llamado traslación a izquierda. Por ser difeomorfismo : l_{g*} está bien definido y l_{g*}(X) es campo vectorial de G para todo X campo vectorial de G.

Ser campo vectorial invariante a izquierda l_{g*}(X)=X significa $l_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'}$ $\forall\, g, g' \in G$.

Lema 1 : L(G) = { todos los campos vectoriales invariantes a izquierda de G } es una subalgebra de Lie de Ж (G).

> **Demost:** Como l_{g*} (aX+bY) = a. l_{g*}(X) + b. l_{g*}(Y) $\Longrightarrow$ L(G) es subespacio vectorial lineal de Ж (G). Por la propiedad de la naturalidad de los corchetes de Lie, si X,Y $\in \mathfrak{g}$: $l_{g*}[X,Y] = \left[l_{g*}(X), l_{g*}(Y)\right] = [X,Y]$. Así, $\mathfrak{g}$ es cerrado bajo corchete de Lie.

L(G) se le llama *algebra de Lie del grupo de Lie G* y se le denota con *Lie(G).*

Teorema 1 : La identificación φ : L(G) $\longleftrightarrow$ T_{1_G}(G) es isomorfismo de espacios vectoriales y por ello:

$$X \qquad X_{1_G}$$

Dimensión de Lie(G) es finita.
Dimensión de Lie (G) = dimensión de G.

Demost: Por construcción de una inversa de φ.
Para cada V $\in T_{1_G}$(G) definimos una sección $\tilde{V}$ del haz tangente T(G) mediante

$$\tilde{V}_g = l_{g*}(V)$$

Si existe un campo vectorial invariante a izqda en G cuyo valor en la identidad de G es V, entonces viene dado por esta fórmula.

1.- $\tilde{V} \in$ Ж (G): basta ver que $\tilde{V}$f es C^∞ siempre que f es C^∞(U) en cualquier abierto U de G: elegimos curva C^∞ $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow$ G con $\gamma(0) = 1_G$ y $\gamma'(0) = V$ entonces para $g \in$ U :

$$(\tilde{V}f)(g) = \tilde{V}_g . f = (l_{g*}(V)).f = V(f \circ l_g) = \gamma'(0).(f \circ l_g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ l_g \circ \gamma) =$$

$$= \frac{d}{dt}(f(g.\gamma(t))|_{t=0}$$

La expresión $\psi(g,t) = f(g.\gamma(t)$ depende suavemente de (g,t) por ser una composicón de la multiplicación del grupo, de f y de γ. Asi sus derivadas en t dependen suavemente de g y así $\tilde{V}_g$ es C^∞.

2.- $\tilde{V} \in$ L(G) : o sea $l_{h*}(\widetilde{V_g}) = \widetilde{V_{hg}}$ $\forall\, g, h \in G$. Ello se sigue de la definición de $\tilde{V}$ y del hecho de que $l_h \circ l_g = l_{hg}$:

$$l_{h*}(\tilde{V}_g) = l_{h*}(l_{g*}(V)) = l_{hg*}(V) = V_{hg} \qquad \text{y así, } \tilde{V} \in L(G).$$

3.- τ : T_{1_G}(G) $\rightarrow$ L(G) es una inversa de φ : L(G) $\longleftrightarrow$ T_{1_G}(G) pues por un

$$V \qquad \tilde{V} \qquad\qquad X \qquad X_{1_G}$$

lado dado un vector V de T_{1_G}(G) :

$$\varphi(\tau(V)) = (\tilde{V})_{1_G} = l_{1_G*}(V) = V$$

es decir, $\varphi \circ \tau = id_{\mathrm{L(G)}}$
y por otro lado, dado un campo vectorial X de L(G) :

$$\tau(\varphi(X))_g = \widetilde{X_{1_G}}|_g = l_{g*}(X_{1_G}) = X_g$$

Es decir, $\tau \circ \varphi = id_{T_{1_G}(\mathrm{G})}$.

El isomorfismo φ : L(G) $\leftrightarrow$ T_{1_G}(G) es beneficioso para ambos espacios vectoriales pues cada uno de ellos posee algo que el otro carece:

- L(G) posee una estructura natural de algebra de Lie dada por el corchete de Lie de campos vectoriales.
- T_{1_G}(G) posee un concepto natural de push forward dado por la diferencial de un homomorfismo de grupos de Lie.

φ permite definir un corchete de Lie en T_{1_G}(G) y transmitir los elementos de L(G) bajo un homomorfismo de grupos de Lie.

Dados A,B $\in$ T_{1_G}(G) les aplicamos via φ los campos vectoriales invariantes a izquierda l_{1_G}-relacionados con A y B : $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ de L(G), y operamos con el corchete de Lie sobre ellos $[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}$ y aplicamos $\tau = \varphi^{-1}$ para volver a T_{1_G}(G) .

La definicición de corchete de Lie en T_{1_G}(G) debería ser $[A, B] = [A, B]^{\sim}_{1_G}$

Proposición 3 : $[\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]^{\sim}$ $\forall$ A,B $\in$ T_{1_G}(G)

Demost: Aplicando la función (-)$^{\sim}$ a ambos lados de $[A, B] = [A, B]^{\sim}_{1_G}$ da $[A, B]^{\sim}$ = $([\tilde{A}, \tilde{B}]_{1_G})^{\sim}$ = $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ pues (-)$^{\sim}$ es inversa de $(\text{ - })_{1_G}$ y viceversa.

Definición 7 : Con este corchete de Lie, a T_{1_G}(G) se le asocia un algebra de Lie conocida como el algebra de Lie del grupo de Lie G.

Todo homomorfismo de grupos de Lie F induce una una aplicación lineal entre las correspondientes álgebras de Lie F_*: L(G) $\rightarrow$ L(H) asi: dado D $\in$ L(G), F_*(D) es el único campo vectorial invariante en L(H) cuyo valor en el neutro 1_H es $F_*(D_{1_G})$ donde esta última F_* es la aplicación lineal F_*: T_{1_G}(G) $\rightarrow$ T_{1_H}(H).

Proposición 4: 1.- Si D $\in$ L(G) y g $\in$ G entonces $F_*(D_g)$ = F_*(D)$_{F(g)}$.
2.- F_*: L(G) $\rightarrow$ L(H) es homomorfismo de algebras de Lie.

Demost: 1.- Sabemos se cumple F $\circ$ l_g = $l_{F(g)}$ $\circ$ F de modo que $F_*(D_g)$ = $F_* l_{g*}(D_{1_G})$ = (F $\circ$ $l_g)_* D_{1_G}$= ($l_{F(g)}$ $\circ$ F)$_*$ D_{1_G}= $l_{F(g)}$ $\circ$ $F_*(D_{1_G})$ = $l_{F(g)}((F_*$(D))$_{1_G}$) = F_*(D)$_{F(g)}$.

2.$-$ Dados D,D´ $\in$ L(G), $F_*([D,D'])$) es el único campo invariante sobre H cuyo valor en 1_H es $F_*([D,D']_{1_G})$. Como la aplicación tangente F_*: T_{1_G}(G) $\rightarrow$ T_{1_H}(H) conserva el corchete de Lie entonces $F_*([D,D']_{1_G})$ = $\left[F_* D_{1_G}, F_* D'_{1_G}\right]$ cuyo campo vect. invariante sobre H es $[F_* D, F_* D']$.

Ejemplos de algebras de Lie:

1.- $\mathbb{R}^n$: la traslación a izquierda por un elemento b de $\mathbb{R}^n$ está dada por l_b(x)= x+b cuyo push forward es l_{b*} representado por I_n en coordenadas standard. Ello implica que un campo vectorial $\sum_i v^i . \frac{\partial}{\partial x^i}$ es invariante a izquierda si y sólo si sus coeficiente v^i son constantes. Debido a que dos campos vectoriales a coeficientes constantes conmutan entonces Lie($\mathbb{R}^n$) $\approx$ $\mathbb{R}^n$.

2.- $\mathbb{S}^1$: Existe un único campo vectorial tangente unitario T en $\mathbb{S}^1$ que está positivamente orientado respecto de la orientación inducida por la normal de sentido exterior en cada punto de $\mathbb{S}^1$. Como las traslaciones a izquierda son rotaciones que preservan T entonces T es invariante a izquierda y T genera Lie($\mathbb{S}^1$).
Lie($\mathbb{S}^1$) es unidimensional y abeliana $\Longrightarrow$ Lie($\mathbb{S}^1$) $\approx$ $\mathbb{R}$.

3.- Sean G,H grupos de Lie $\Longrightarrow$ Lie(G x H) $\approx$ Lie(G) x Lie(H)
$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1$ x… n)….x $\mathbb{S}^1$ $\Longrightarrow$ Lie ($\mathbb{T}^n$) $\approx$ $\coprod_{i=1}^{n}$ Lie($\mathbb{S}^1$) $\approx \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$, abeliana.

5

LA FORMA DE MAURER-CARTAN

Para un grupo de Lie G, la forma de Maurer-Cartan es una 1-forma diferencial w distinguida de G que lleva la información infinitesimal básica de la estructura de G. Dicha forma está definida en todo G y toma valores en el álgebra de Lie asociada al grupo G: Lie(G) = L(G) $\approx$ T_{1_G}(G) .

$$\begin{array}{ll} w_g : & T_g(\mathrm{G}) \rightarrow T_{1_G}(\mathrm{G}) \\ & \quad v_g \qquad (\, l_{g^{-1}})_*(v_g) \end{array}$$

Definición 1 : Sea M una C^{∞}-variedad y sea p un punto de M. Un *campo covectorial, una 1-forma diferencial o bien una 1-forma de M* es una función lineal w que asigna a cada punto de M un covector w_p en p.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{w} : & \mathrm{M} \rightarrow T_p^*(M) \\ & \;\mathrm{p} \qquad w_p \end{array}$$

Un *covector* es un elemento del espacio cotangente de M: $T_p^*(M)$ espacio dual del espacio tangente T_p(M). w_p: T_p(M) $\rightarrow$ $\mathbb{R}$

- Es dual a un campo vectorial en el sentido de que este asigna a un punto un vector tangente en dicho punto y el campo covectorial asigna una función a dicho punto.
- A diferencia de los campos vectoriales, los covectoriales o 1-formas poseen push forward y pullback bajo una aplicación entre variedades, estando bien definidas.

G actúa sobre sí mismo por multiplicación m : G x G $\rightarrow$ G entonces ¿cómo podemos identificar un espacio homogéneo (h,g) hg principal de G? Un espacio homogéneo principal de G es una variedad P idéntica a G pero sin tener un elemento unidad distinguido en ella. Formalmente,

Definición 2 : Un *espacio homogéneo principal de G* es una variedad P abstracta caracterizada por tener una acción libre y transitiva de G en P. (Ver a partir del teorema 5 del capitulo 10. P es G_{1_G} expuesto allí).

- Acción libre: el único elemento de G que fija todo elemento de P es 1_G. gh = h $\Longrightarrow$ g = 1_G.
- Acción transitiva: si para cualesquiera dos puntos de P : p,q existe un elemento g en G tal que g p= q.

La forma de Maurer-Cartan provee de una adecuada caracterización infinitesimal del espacio homogéneo principal. Es una 1-forma definida sobre P cumpliendo una condición de integrabilidad: la ecuación de Maurer-Cartan. Esta condición se usará para definir una aplicación exponencial en el álgebra de Lie y así obtener, localmente, una acción de grupo en P.

Proposición 1: Dado G grupo de Lie, existe una <u>única</u> 1-forma w en G con valores en G tal que w(D) = D para todo campo invariante D $\in$ L(G). (invarianza de w).

> **Demost:** Sean $D_1, \ldots, D_n$ base de campos invariantes y sea $w_1,\ldots,w_n$ su base dual. Tomemos w = $w_1 \otimes D_1 + \ldots + w_n \otimes D_n$ $\Longrightarrow$ w(D_i) = D_i $1 \leq i \leq n$ de donde el resultado.

Proposición 2: Sean $D_1, \ldots, D_n$ base de campos invariantes y sea $w_1,\ldots,w_n$ su base dual. Entonces se verifica…..

$$dw_k = - \sum_{i<j} c_{ij}^k \, w_i \wedge w_j.$$

> **Demost:** $dw_k(D_i, D_j) = D_i(w_k(D_j)) - D_j(w_k(D_i)) - w_k([D_k, D_j] = - c_{ij}^k$

Teorema 1: Sea w la 1-forma canónica de un grupo de Lie G. Se cumple:
dw + $[w, w]$ = 0 siendo $[w, w]$ la 2-forma sobre G con valores en G definida como $[w, w](D_1, D_2) = [w(D_1), w(D_2)]$.

Demost: por la proposición 2, dw_k = - $\sum_{i<j} c_{ij}^k \, w_i \wedge w_j$. Entonces dw = $\sum_{k=1\ldots n} d\, w_k \otimes D_k$ = - $\sum_{k=1\ldots n} \sum_{i<j} c_{ij}^k \; w_i \wedge w_j \otimes D_k$. Asi,

dw + $\left\{\sum_{k=1\ldots n} \sum_{i<j} c_{ij}^k \; w_i \wedge w_j \otimes D_k\right\}$ = 0.

y como $[w,w](D_i,D_j)$ = $\left[w(D_i),w(D_j)\right]$ = $\left[D_i,D_j\right]$ = $\sum_k c_{ij}^k \, D_k$ se sigue que la 2-forma: $\sum_{k=1\ldots n} \sum_{i<j} c_{ij}^k \; w_i \wedge w_j \otimes D_k$ es $[w,w]$.

Por lo tanto la forma de Maurer w es aquella única 1-forma que verifica los tres últimos enunciados.

CONSTRUCCION INTRINSECA DE LA FORMA DE MAURER:
(es aquella en la que las constantes de estructura vienen definidas por las ecuaciones estructurales esté como esté definido el operador del algebra siendo las citadas ecuaciones la descomposición en los elementos de la base del algebra de las imágenes de los elementos de la base operados entre si dos a dos).

Sea G grupo de Lie. Todo g de G induce tres difeomorfismos standard: l_g, r_g y Ad_g todos ellos de G $\to$ G llamados

traslación a izquierda		h $\mapsto$ gh
traslación a derecha		h $\mapsto$ hg
transformación adjunta		h $\mapsto$ ghg

- $Ad_g = l_g{}^\circ \; r_g$
- $l_g{}^\circ \; r_h = r_h{}^\circ \; l_g$
- 1_G de G es un elemento standard característico:
  Sea $v_{1_G} \in T_{1_G}$(G) cualquiera entonces existe un campo vectorial global mediante l_g : si $v_g \in T_g$(G) $\Longrightarrow$ $v_g = l_{g*}(v_{1_G})$ siendo

  l_{g*}: T_{1_G}(G) $\to$ T_{1_G}(G) push forward de l_g difeomorfismo,

  Entonces dado cualquier vector v_{1_G}: $v_{hg} = l_{h*}(v_g)$ con $v_{hg} \in T_{hg}$(G) y $v_g \in T_g$(G) con lo que $l_{g*}\circ\ l_{h*}$ = l_{gh*} $\Longrightarrow$ los campos vectoriales invariantes a izqda. están bien definidos y determinados por un vector en cada punto.

- Sean u_{1_G} y $v_{1_G} \in T_{1_G}$(G).
  Sean $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ campos vect. Invariantea a izqda.. generados por u_{1_G} y v_{1_G}
  Se define corchete de Lie en T_{1_G}(G) : $\left[u_{1_G},\ v_{1_G}\right]$ al corchete de Lie en L(G) : $\left[\tilde{U},\ \tilde{V}\right]$.
  Como l_g es difeomorfismo : $l_{g*}(\left[u_{1_G},\ v_{1_G}\right])$ = $\left[l_{g*}(u_{1_G}),\ l_{g*}(v_{1_G})\right]$ para todo campo vectorial $\Longrightarrow$ Si X,Y ∈ L(G) : $[X, Y]$ ∈ L(G).
  El álgebra de Lie de un grupo de Lie G: Lie(G) = algebra de L(G) $\approx$ T_{1_G}(G) es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie Ж(G) con corchete definido del modo anterior.
  dim (Lie(G)) = dim (G).

- Como decíamos v_g = $l_{g*}(v_{1_G})$.
  Sean $f^i(g,\mathrm{h})$ funciones que definen la ley de composición de G en un entorno de 1_G $\Longrightarrow$ l_{g*} = $L_j^i(g)$ con $L_j^i(g)$ = $\frac{\partial f^i(g,\mathrm{h})}{\partial h^j}|_{h=1_G}$
  Así, v_g = $\sum_{ij} L_j^i(g)\, v^j\, \partial_i$
  Si tomamos la base natural de L(G) en cada punto e_{ig}= $\sum_k L_i^k(g)\, \partial_k$ $\Longrightarrow$ todo X ∈ L(G) es combinación lineal de los e_{ig} a coeficientes constantes v_g = $\sum_i v^i\, e_{ig}$.

- Sean las ecuaciones estructurales del álgebra $\left[\ e_{ig},\ e_{jg}\right]$ =$\sum_k c_{ij}^k . e_{kg}$ $\Longrightarrow$ el coeficiente c_{ij}^k que caracteriza la no holonomicidad de la base $\{e_{ig}\}$ es un tensor definido por las constantes de estructura.

- Para e_{ig} = $\frac{\partial}{\partial x^i}|_g$ campo de ref. natural, las ecuaciones de Maurer son (OBS: campo ref. natural es aquel tal que $\left[\ e_{ig},\ e_{jg}\right]$= δ_j^i)

$$L_i^s \partial_s L_j^k \ \text{-}\ L_j^s \partial_s L_i^k \ = \ c_{ij}^s . L_s^k$$

  y para g = 1_G, como $L_j^i(1_G)$ = δ_j^i $\Longrightarrow$ c_{ij}^k = $\left[\partial_i L_j^k - \partial_i L_i^k\right]|_{g=1_G}$
  (Cálculo de las c_{ij}^k a partir de las funciones que definen la ley del grupo)

- La forma de Maurer es una 1-forma que toma valores en Lie(G) definida en T_g(G) y de expresión:

$w_g : T_g(G) \rightarrow T_{1_G}(G)$

$v_g \qquad (l_{g^{-1}})_*(v_g)$

CONSTRUCCIÓN EXTRINSECA DE LA FORMA DE MAURER:
(es aquella en la que las constantes de estructura se obtienen haciendo uso del isomorfismo entre todo grupo de Lie y su respectiva representación matricial y de toda algebra de Lie y su homóloga algebra de Lie matricial (por teorema de ADO)).

Si G está embebido o incrustado en $GL_n(\mathbb{K})$ por una aplicación valuada matricialmente $\boldsymbol{g} = [g_{ij}]$ entonces podemos poner $w_g = \boldsymbol{g^{-1}dg}$. La forma de Maurer siempre es la derivada logarítmica de la id_G.
Todo espacio vectorial V de dimensión n posee una representación en $GL_n(\mathbb{K})$ pues dada una base en V se le puede poner en correspondencia 1-1 con una base de $GL_n(\mathbb{K})$. Así, como Lie(G) es un álgebra, en particular es un espacio vectorial, y posee una representación en $GL_n(\mathbb{K})$. Es más, posee dos representaciones canónicas:

a) La representación adjunta standard ad_v: Lie(G) $\rightarrow$ Lie(G) y

u $\qquad [v,u]$

b) Dado g ∈ G, $Ad_g : T_{1_G}(G) \rightarrow T_{1_G}(G)$

$[u,v] \qquad [Ad_{g*}u, Ad_{g*}v]$

Si extendemos u,v ∈ $T_{1_G}(G)$ a sus resp. campos invariantes a izquierda generados por ellos : $\widetilde{U}$ y $\tilde{V}$ en $1_G \implies$

Como $Ad_{g*} = l_{g*} \circ r_{g*}$, l_{g*} deja invariante todo campo de L(G)=Lie(G)

r_{g*} lleva campos de L(G) a campos de L(G)

y como Ad_g: G $\rightarrow$ G es un difeomorfismo, Ad_{g*} conserva los corchetes. Así pues Ad_{g*} es una aplicación lineal y es una representación.

En $GL_n(\mathbb{K})$ un desplazamiento a la iqda es l_AX = AX. Derivando (l_{A*})U = AU con U ∈ $M_n(\mathbb{K})$. Todo campo vectorial invariante a izqda. es de la forma U(A) = AU.

Para el campo U = E_α^β se obtiene una base de los campos invariantes a izqda. : E_α^β(A) = AE_α^β formada por las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_\beta^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\beta^n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el campo de referencias natural: E_α^β(A) = $a_\alpha^\sigma \frac{\partial}{\partial a_\beta^\sigma}$ para A = $\left[a_\alpha^\beta\right]$, matriz .

Si U(A) = AU.

y V(A) = AV. Son dos campos vectoriales invar. a izqda. entonces $[U(A), V(A)]$ = A(UV-VU) aplicando que $\frac{\partial a_\beta^\alpha}{\partial a_\tau^\sigma} = \delta_\sigma^\alpha \delta_\beta^\tau$. El algebra de Lie obtenida se le llama $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Si A = $I_n \Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ = $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ = $T_{I_n}(GL_n(\mathbb{K}))$ = $M_n(\mathbb{K})$ con corchete $[U, V]$ = UV – VU.

Hallemos (L($GL_n(\mathbb{K})$)))*= $\mathfrak{g}^*$ = { formas invariante por la izqda. de $\mathfrak{g}$}.

Sea { θ_β^α} base de $\mathfrak{g}^*$ entonces en la base natural de covectores { da_α^β} la primera tiene una descomposición de la forma $\theta_\beta^\alpha = V_{\beta\sigma}^{\alpha\tau} a_\tau^\sigma$.

Como $\theta_\beta^\alpha(E_\sigma^\tau) = \delta_\sigma^\alpha \delta_\beta^\tau$ entonces $\theta_\beta^\alpha = \widetilde{a_\sigma^\alpha}$.d$a_\beta^\sigma$ para $\widetilde{a_\sigma^\alpha}$ componentes de A^{-1}.

Así, los elementos de una base de $\mathfrak{g}^*$ son conmbinación lineal de los elementos de la matriz inversa de A con los elementos de la base natural de covectores de $\mathfrak{g}^*$.

De esta manera es como debe interpretarse la expresión w_g = $\boldsymbol{g}^{-1}d\boldsymbol{g}$ para $\boldsymbol{g}$ elemento de $GL_n(\mathbb{K})$. (para más detalles ver $[04]$ $capitulo\ 4$)

FORMA DE MAURER MEDIANTE DERIVACIÓN EXTERIOR:

También todo espacio vectorial posee un espacio vectorial dual, así Lie(G) posee un álgebra dual.

Definición 3 : θ forma diferencial exterior de grado q definida sobre los vectores de G es invariante a izquierda si $(l_g^*\theta)(v_1,\dots, v_q) = \theta(l_{g*}(v_1), \dots, l_{g*}(v_q)) = \theta(v_1,\dots, v_q)$ $\forall g \in G$.

Llamemos $L(G)^*$ = { Todas las 1-formas invariantes por la izquierda } = esp. vectorial y dim($L(G)^*$) = dim (G).

Sean $\{\theta^i\}_{i=1}^r$ una base de $L(G)^*$ dual de la base de L(G) : $\{e_{i-}\}_{i=1}^r \Longrightarrow \theta^i(e_{j-}) = \delta_j^i$

y las ecuaciones estructurales de Cartan son:

$$d\theta^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j \text{ duales de las de Maurer.}$$

En la base natural de covectores $\{dg^i\}_{i=1}^r$, para las 1-formas $\{\theta^i\}_{i=1}^r$ se obtiene que

$\theta^i = \sum_k V_k^i(g).\, dg^k$ donde

- La matriz $[V_k^i] = [L_k^i]^{-1}$
- $V_j^i(g) = \frac{\partial f^i(\mathrm{h},g)}{\partial g^j}|_{h=g^{-1}}$
- Las ecuaciones estructurales de Cartan son $\partial_j V_i^k - \partial_i V_j^k = c_{pq}^k . V_i^p V_j^q$
- Y para $g = 1_G$, como $V_j^i(1_G) = \delta_j^i$ entonces $c_{ij}^k = [\partial_j V_i^k - \partial_i V_j^k]|_{g=1_G}$

OBS: base natural de covectores es aquella en la que $dg^i(\frac{\partial}{\partial g^j}) = \delta_j^i$

Si X ∈ L(G) entonces w(X) es constante en G
Si X,Y ∈ L(G) entonces w($[X,Y]$) = $[w(X), w(Y)]$ con $[X,Y]$ $corchete\ en$ Ж(G)
y $[w(X), w(Y)]$ en L(G)
Si X,Y ∈ Ж(G) entonces por definición de derivada exterior:

dw(X,Y) = X(w(Y)) – Y(w(X)) – w($[X,Y]$) donde…

- w(Y) es función Lie(G)-valuada obtenida por dualidad desde el par w,Y
- X(w(Y)) es derivada de Lie de la función cte. w(Y) a lo largo de X
- Y(w(X)) es derivada de Lie de la función cte. w(X) a lo largo de Y

Si X,Y ∈ L(G) entonces X(w(Y)) = Y(w(X)) = 0 y queda dw(X,Y) + $[w(X), w(Y)]$ = 0 pero el miembro izquierdo de esta igualdad es una 2-forma luego la ecuación es independiente de que X,Y ∈ L(G) y se cumple para todo X,Y ∈ Ж(G).

Ecuaciones de Cartan para formas: dw + $\frac{1}{2}[w, w]$ = 0

Ejemplos :

1.- Sea el grupo afín bidimensional GA(1). La ley de multiplicación en él es…
$f^1(g,\mathrm{h})= g^1 + g^2h^1$
$f^2(g,\mathrm{h})= g^2h^2$

La base de los campos de L(GA(1)) es $e_1(g) = g^2\partial_1$ pues $\left[\frac{\partial f^i(g,\mathrm{h})}{\partial h^j}\right] = \begin{bmatrix} g^2 & 0 \\ 0 & g^2 \end{bmatrix}$

$e_2(g) = g^2\partial_2$

Asi que $\left[L^i_j\right] = \begin{bmatrix} g^2 & 0 \\ 0 & g^2 \end{bmatrix}$

y $\left[V^i_j\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g^2} \end{bmatrix}$ entonces la base de formas invariantes a izqda. es $\theta^1 = \frac{1}{g^2}\,dg^1$

$\theta^2 = \frac{1}{g^2}\,dg^2$

que cumplen las ecuaciones de Cartan: $\mathrm{d}\theta^1 = \theta^i \wedge \theta^j$

$\mathrm{d}\theta^2 = 0$

Las ecuaciones estructurales son $[\, e_1, e_1] = -\ e_1$

6

SUBGRUPOS UNIPARAMETRICOS DE UN GRUPO DE LIE

Definición 1 : Sea G un grupo de Lie. Un *subgrupo uniparametrico* de G es un homomorfismo de grupos de Lie F : $\mathbb{R} \longrightarrow G$. Otras acepciones son:

- Un elemento $\sigma \in$ Hom $(\mathbb{R}, G)$ = { homomorfismos de $\mathbb{R}$ en G }
- Un subgrupo { $g_t = \sigma(t) \in$ G$\}_{t \in \mathbb{R}}$ = { $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow G \}_{\sigma \in C^\infty}$ y cumple
  t $\quad g_t$

  $a)$ $g_0 = 1_G$

  b) $g_{t+r} = g_t \cdot g_r$.

y el cual define un morfismo de algebras σ_* : L($\mathbb{R}$) $\longrightarrow$ L(G) y un campo invariante X = $\sigma_*(\partial t)$ del que σ es su curva integral.

OBS: un subgrupo uniparamétrico no es un subgrupo de Lie de G, sino un homomorfismo en G. Sin embargo la imagen de un subgrupo uniparamétrico si que es un grupo de Lie.
Los subgrupos uniparametricos son las curvas integrales de campos vectoriales invariantes a izqda. que inician en la identidad.

Proposición 0 : Sea G grupo de Lie. A) $\quad \sigma \in$ Hom $(\mathbb{R}, G) \quad \Longleftrightarrow \quad X_{\sigma(t)} \in$ L(G)

$X_{\sigma(t)} = \sigma_*(\partial t) \qquad \sigma = \gamma_{1_G}$

(γ_{1_G}: $\mathbb{R} \rightarrow$ G es curva integral de X que pasa por 1_G)

B) Si γ_t : $\mathbb{R} \rightarrow$ G es el grupo uniparamétrico de X $\in$ L(G) y $g_t = \gamma_{1_G}(t)$ entonces $\gamma_t(x) = x g_t$, o sea, $\gamma_t = r_{g_t}$.
(Si $\gamma_t(x) = g_t x$, $\gamma_t = l_{g_t}$)

Demost: $\Longrightarrow$ de A) por el teorema de unicidad de la solución de una EDO pues $\gamma_{1_G}(0) = 1_G = \sigma(0)$ y $\gamma_{1_G*}(\partial t)_t = X_{\gamma(t,1_G)}$

$\sigma_*(\partial t)_t = X_{\sigma(t)}$

El resto sigue de

$$\gamma_x(t) = \gamma_t(x) = x\,\gamma_t(1_G) = x\gamma_{1_G}(t)$$

Definición 2 : Sea M una variedad C^∞.

Sea V campo vectorial C^∞ de M

Una *curva integral* de V es una curva C^∞ γ : J $\rightarrow$ M definida en un intervalo abierto J $\subset \mathbb{R}$ tal que γ'(t) = $V_{\gamma(t)}$ $\forall$ t $\in$ J.

Es decir, el vector tangente a γ en cada punto es el valor de V en dicho punto.

Si el 0 $\in$ J entonces a p = $\gamma(0)$ se le llama punto inicial de γ.

Si el 0 $\in$ J y γ es una curva integral de V que inicia en $\gamma(0)$ entonces $\forall$ a $\in$ J sea $\tilde{J}$ = { t$\in \mathbb{R}$: t+a $\in$ J } entonces la curva $\tilde{\gamma}$: $\tilde{J}$ $\rightarrow$ M con t $\longmapsto$ γ(t+a) es una curva integral de V que inicia en γ(a).

La curva integral determinada por un campo vectorial dado en una variedad y que pasa por cada punto es única.

Sea V campo vectorial en una variedad C^∞ M, de forma que V posee la propiedad de que $\forall$ p $\in$ M existe una única curva integral $\theta^{(p)}$: $\mathbb{R} \rightarrow$ M que inicia en p entonces $\forall$ t $\in \mathbb{R}$ podemos definir una familia de aplicaciones $\{\theta_t : M \rightarrow M\}_{t\in\mathbb{R}}$ de forma que θ_t (p) = $\theta^{(p)}$(t). P $\theta^{(p)}$(t)

Si hacemos q = $\theta^{(p)}$(s) entonces la curva integral que inicia en q cumple $\theta^{(q)}$(t) = = $\theta^{(p)}$(t+s).

Así, en términos de θ_t : $\theta_t \circ \theta_s\ (p) = \theta_{t+s}$ (p)

y θ_0 (p) = $\theta^{(p)}$(0) = p

entonces θ : $\mathbb{R}\ x\ M \rightarrow$ M es una acción de ($\mathbb{R}$, +) sobre M.

Definición 3 : Un *flujo global* (o bien *una acción de grupo uniparamétrico*) es una acción a izqda. C^∞ de $\mathbb{R}$ sobre M, es decir, es una aplicación θ : $\mathbb{R}\ x\ M \rightarrow$ M *que es* C^∞ *y cumple*

- θ(t,θ(s,p)) = θ(t+s,p)
- $\theta(0, p) = p$

Si θ es un flujo global dado en M entonces quedan definidas dos familias de aplicaciones:

- $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, { θ_t : M $\rightarrow$ M con p $\longmapsto \theta(t,p)$ } cuyas propiedades definentes son equivalentes a las leyes de grupo : $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$ y $\theta_0 = id_M$. Todo θ_t es un difeomorfismo por ser la acción de grupo C^∞ .
- $\forall$ p $\in M$, { $\theta^{(p)}$: $\mathbb{R} \rightarrow$ M con t $\longmapsto \theta(t,p)$} de curvas C^∞
  Im $(\theta^{(p)})$ = p.G es la órbita de p bajo la acción de grupo y como toda acción de grupo particiona el conjunto en órbitas disjuntas:
  $M = \coprod_{p\in M}($ Im $(\theta^{(p)})$.

Definición 4 : Un campo vectorial es *completo* si genera un flujo global ó si cada una de sus curvas integrales está definida $\forall$ t $\in \mathbb{R}$.

Lema 1 : Todo campo vectorial invariante a izqda. de un grupo de Lie es completo.

Demost: Sea Lie(G) el álgebra de Lie del grupo de Lie G. Sea X $\in$ Lie(G) y sea θ el flujo de X. Supongamos $\theta^{(g)}$ curva integral maximal definida en un intervalo $]a,b[\subset \mathbb{R}$ y supongamos b<∞. Usaremos la invarianza a izqda. para definir una curva integral en un intervalo ligeramente mayor.
La invarianza a izqda. de X significa que $l_g \circ \theta_t = \theta_t \circ l_g$ si el miembro izqdo. está definido. La curva integral $\theta^{(1_G)}$ que inici en la identidad está definida en al menos algún intervalo $]-\epsilon,\epsilon[$ para $\epsilon > 0$. Elijamos s $\in$ $]b-\epsilon,b[$ y definamos una nueva curva γ: $]a,s+\epsilon[$ $\rightarrow$ G mediante

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \theta^{(g)}(t) && \text{si } t \in\ ]a,b[\\ &= l_{\theta_{s(g)}}(\theta_{t-s}(1_G)) && \text{si } t \in\ ]s-\epsilon,s+\epsilon[\end{aligned}$$

Cuando s $\in$ $]a,b[$ y $|t-s| < \epsilon$: $l_{\theta_{s(g)}}(\theta_{t-s}(1_G)) = \theta_{t-s}(l_{\theta_{s(g)}}(1_G)) =$
$= \theta_{t-s}(\theta_s(g)) = \theta_t(g) = \theta^{(g)}(t)$.
De forma que las dos definiciones de γ coinciden donde ellas se solapan. γ es una curva integral de X en $]a,b[$ y para $t_0 \in]s-\epsilon,s+\epsilon[$ usamos la invarianza a izqda. de X para calcular<.

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \ l_{\theta_{s(g)}}(\theta_{t-s}(1_G)) = l_{\theta_{s(g)*}} \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\theta^{(1_G)}(\text{t-s}) = l_{\theta_{s(g)*}} X_{\theta^{(1_G)}(t_0-\text{s})} = X_{\ \gamma(t_0)}$$

Asi, γ es una curva integral de X definida para t $\in$ $]a,s+\epsilon[$ y como $s+\epsilon$ > b , esto contradice la maximalidad de $\theta^{(g)}$.

Proposición 1 : Sea G grupo de Lie y sea X ∈ Lie(G) entonces la curva integral de X que inicia en 1_G es un subgrupo uniparamétrico de G.

Demost: Sea θ el flujo de X de forma que $\theta^{(1_G)}$: $\mathbb{R} \rightarrow$ G sea la curva integral en cuestión. $\theta^{(1_G)}$ es C^∞ asi que sólo queda ver que es un homomorfismo de grupos, es decir, que
$\theta^{(1_G)}$(s+t) = $\theta^{(1_G)}(s) + \theta^{(1_G)}$ (t) $\forall\, s$, t ∈ $\mathbb{R}$
$Usando\ l_g \circ \theta_t = \theta_t \circ l_g$ de nuevo calculamos

$\theta^{(1_G)}(s)\, \theta^{(1_G)}$ (t) = $l_{\theta^{(1_G)}(s)}\theta_t\ (1_G)$ = $\theta_t\ (l_{\theta^{(1_G)}(s)}(1_G))$ = $\theta_t(\theta^{(1_G)}(s))$ = $\theta_t(\theta_s(1_G))$ = $\theta_{t+s}\ (1_G)$ = $\theta^{(1_G)}(t+s)$

Lo más importante de este capítulo es que todos los subgrupos uniparamétricos se obtienen de este modo.

Teorema 1 : Todo subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie es una curva integral de un campo vectorial invariante a izqda. Además, existen unas correspondencias 1 a 1 entre { subgrupos uniparamétricos de G} $\rightarrow Lie(G) \rightarrow$ T_{1_G}(G). En particular, un subgrupo uniparamétrico está unívocamente determinado por su vector tangente inicial en T_{1_G}(G).

Demost: Sea F : $\mathbb{R} \rightarrow$ G un subgrupo uniparamétrico y sea X = $F_*(\frac{d}{dt})$ ∈ Lie(G) donde tomamos $\frac{d}{dt}$ como un campo vectorial invariante a izqda. en $\mathbb{R}$. Basta ver que F es una curva integral de X . Recordemos que $F_*(\frac{d}{dt})$ está definido como el único campo vectorial invariante a izqda. que está F-relacionado con $\frac{d}{dt}$ por lo tanto para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$,

F´(t_0) = $F_* \frac{d}{dt}|_{t_0}$ = $X_{\mathrm{F}(t_0)}$ así, F es curva integral de X.

Definición 5 : Sea X ∈ Lie(G), *el subgrupo uniparamétrico generado por X* es el subgrupo uniparamétrico determinado de esta manera: F con F´(t_0) = $X_{\mathrm{F}(t_0)}$.

Proposición 2 : Sea H subgrupo de Lie de G grupo de Lie. Los subgrupos uniparamétricos de H son aquellos subgrupos uniparamétricos de G cuyos vectores tangentes iniciales están en T_{1_G}(H).

Demost: Sea F : $\mathbb{R} \rightarrow$ H un subgrupo uniparamétrico entonces la aplicación compuesta

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \hookrightarrow G$$

es un homomorfismo de grupos y por tnto un subgrupo uniparamétrico de G que cumple F´(0) $\in T_{1_G}$(H).

A la inversa, supongamos F : $\mathbb{R} \rightarrow$ G es subgrupo uniparamétrico cuyo vector tangente inicial está en T_{1_G}(H). Sea $\tilde{F}$: $\mathbb{R} \rightarrow$ H el subgrupo uniparamétrico de H con el mismo vector tangente inicial $\tilde{F}'(0)$ = F´(0) $\in$ T_{1_G}(G). Entonces por composición con la función inclusión podemos considerar a $\tilde{F}$ como un subgrupo uniparamétrico de G. Ya que $\tilde{F}$ y F son ambos subgrupos uníparamétricos de G y tienen el mismo vector tangente inicial, ellos deben coincidir.

Ejemplos:

1.- Los subgrupos uniparamétricos de $GL_n(\mathbb{R})$: Si B $\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = e^B$ y

- La serie converge a una matriz invertible $e^B \in GL_n(\mathbb{R})$
- El subgrupo uniparametrico de $GL_n(\mathbb{R})$ generado por B $\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ es F(t) = e^{tB}

a) La convergencia de la serie se comprueba porque $\forall$ A,B $\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$: $|AB| \leq |A||B|$ y por inducción $|B^k| \leq |B|^k$ y por el test-M de Weierstrass la serie converge uniformemente en cualquier subconjunto acotado de Lie(G). (Por comparación con la serie $\sum_k \frac{1}{k!} C^k = e^C$).

b) Sea B fija un elemento de Lie(G), el subgrupo uniparamétrico generado por B es una curva integral del campo vectorial invariante a izqda. $\tilde{B}$ y por tanto verifica la ecua. dif ordinaria con valor inicial F´(t) = $\tilde{B}_{F(t)}$, F(0) = I_n

Usando $\tilde{B}_A = \sum_{ijk} A_j^i B_k^j \frac{\partial}{\partial A_k^i}|_A$ para $\tilde{B}$, la condición de que F sea una curva integral puede escribirse como $(F_k^i)'$(t) = F_j^i(t) B_k^j y en notación matricial es F´(t) = F(t)B . Veamos que F(t) = e^{tB} verifica tal ecuación:

Como F(0) = I_n ello implica que F es la única curva integral de $\tilde{B}$ que inicia en la identidad y por lo tanto es el buscado subgrupo uniparamétrico.

F $\in C^\infty$: Si diferenciamos la serie dada término a término (permitido pues converge uniformemente en conjuntos compactos) se tiene que

$F'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\ t^{k-1}\ B^{k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\ t^{k-1}\ B^{k-1}\right)B = F(t).B$

El mismo argumento prueba que F´(t) = B.F(t)
Por la suavidad de las soluciones de las ecuaciones dif ordinarias, F = curva C^{∞}

F(t) es invertible $\forall t$, de modo que F toma sus valores en $GL_n(\mathbb{R})$:
Si hacemos σ(t) = F(t).F(-t) = $e^{tB}\ \ e^{-tB}$ entonces σ es una curva $C^{\infty}\ en\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ y usando la regla de la cadena,

σ'(t) = (F(t).B). F(-t) – F(t).(B.F(-t)) = 0 por lo tanto σ es la curva constante σ(t) ≡ σ(0) = I_n lo cual es decir que F(t).F(-t) = I_n

$sustituyendo$ –t por t se obtiene F(-t).F(t) = I_n que demuestra que F(t) es invertible y $F(t)^{-1}$ = F(-t).

2.- Los subgrupos uniparamétricos de un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$:
Sea H subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, la última proposición prueba que los subgrupos uniparamétricos de H son justamente las aplicaciones de la forma F(t) = e^{tB} para B ∈ $\mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ es la subálgebra correspondiente a Lie(H), del resultado:

Algebra de Lie de un subgrupo de Lie: si H es subgrupo de Lie del grupo de Lie G entonces el subconjunto $\widetilde{\mathfrak{h}}$ = { X ∈ Lie(G) : $X_{1_G} \in T_{1_G}$(H)} es una subálgebra de Lie de Lie(G) canónicamente isomorfa a Lie(H).

Tomando H = O(n) se ve que la exponencial de cualquier matriz antisimétrica es ortogonal.

7

LA APLICACIÓN EXPONENCIAL

Como veíamos en el apartado anterior un subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie G es un homomorfismo F : $\mathbb{R} \to$ G tal que F(s+t) = F(s).F(t) $\forall$ s,t $\in$ $\mathbb{R}$. Como en tal subgrupo uniparamétrico F(0) = F(0+0) = F(0).F(0) ello implica que F(0) = e. Así, desde F, podemos conseguir un único vector v = F´(0) = $(\mathrm{dF})_0(\frac{d}{dt})$ $\in T_{1_G}$(G). Inversamente, para cualquier v $\in T_{1_G}$(G) podemos encontrar un único campo vectorial invariante a izqda. X de G tal que X_{1_G}= v
Como todo campo vectorial invariante a izqda. es completo, entonces para cualquier g $\in$ G podemos encontrar una curva integral γ_g : $\mathbb{R} \to$ G de X tal que γ_g = g .

Lema 1 : La aplicación F $\equiv$ γ_{1_G} es un subgrupo uniparamétrico de G.

Demost: Sea s $\in \mathbb{R}$ cualquiera pero fijo y tomemos las curvas
γ_1 : $\mathbb{R} \to$ G con t $\mapsto$ $\gamma_{1_G}(s)\, \gamma_{1_G}$(t)
γ_2 : $\mathbb{R} \to$ G con t $\mapsto$ $\gamma_{1_G}(t+s)$
Afirmamos que ambas son curvas integrales del campo X con idénticas condición inicial γ_1(0) = γ_2(0) = $\gamma_{1_G}(s)$.
Para γ_1, usando la invarianza a izqda. de X se tiene:

$\dot{\gamma_1}$ (t) = $(\mathrm{d}l_{\gamma_{1_G}(s)})_{\gamma_{1_G}(t)}$. $\dot{\gamma_{1_G}}$ (t) = $(\mathrm{d}l_{\gamma_{1_G}(s)})_{\gamma_{1_G}(t)}.X_{\gamma_{1_G}(t)}$ = $X_{\gamma_{1_G}(s)\,\gamma_{1_G}(t)}$= $X_{\gamma_1(t)}$

Por lo tanto $\gamma_1 \equiv \gamma_2$.

Como consecuencia obtenemos una correspondencia 1 a1 entre los siguientes conjuntos:

- Los subgrupos uniparametricos de G

- Los campos vectoriales invariantes a izqda de G
- Los vectores tangentes en 1_G de G

Definición 1 : Para cualquier X ∈ Lie(G) = T_{1_G}(G) sea F_X el subgrupo uniparamétrico de G correspondiente a X. La *aplicación exponencial* de G es la aplicación

e : Lie(G) → G tal que X ↦ $F_X(1) = e^X$

Propiedades de la aplicación exponencial:

- e ∈ C^∞: Sea la aplicación φ : ℝ x G x Lie(G) → G x Lie(G)
  t g X ($g.e^{tX}$,X)

  se puede comprobar que φ es el flujo en G x Lie(G) correspondiente al campo vectorial invariante a izqda. (X,0) de G x Lie(G), por tanto es C^∞.
  Se sigue que e = $\pi_1 \circ \varphi \,|_{\{1\}\times\{1_G\}\times Lie(G)}$ es C^∞.

- ∀ X ∈ Lie(G), F_X(t) = e^{tX} es el subgrupo uniparamétrico generado por X pues $\tilde{F}$(s) = F_X(ts) es el subgrupo uniparamétrico correspondiente al campo tX ∈ Lie(G)

- ∀ X ∈ Lie(G), $e^{(s+t)X}$ = e^{sX} . e^{tX} $\forall t,s \in \mathbb{R}$ por ser F_X un homomorfismo de ℝ → G

- Bajo las identificaciones canónicas Lie(G) ≈ T_0(Lie(G)) y Lie(G) ≈ T_{1_G}(G) se tiene e_* = d e : T_0(Lie(G)) → T_{1_G}(G) es la aplicación identidad:
  por un lado, e^{tX} = F_X(t) y $\frac{d}{dt}|_{t=0}\, e^{tX}$ = X
  por otro lado, como $\frac{d}{dt}|_{t=0}$(e ∘ tX) = (d e)$_0$. $\frac{d(Xt)}{dt}$ = (d e)$_0$. X
  concluimos que (d e)$_0$ es la aplicación identidad.

- e es un difeomorfismo de un entorno del 0 en Lie(G) en un entorno de 1_G en G, como consecuencia de ser (d e)$_0$ biyectiva.

- El flujo θ de un campo X ∈ Lie(G) es θ_t = $r_{e^{tX}}$ el difeomorfismo multiplicación a derecha por e^{tX}:

Para cualquier g de G $r_{e^{tX}}(g) = g.\, e^{tX} = l_g(\, e^{tX}\,) = l_g(\theta_t(1_G)) = \theta_t(l_g(1_G))$ = $\theta_t(g)$

- Para cualquier homomorfismo de grupos de Lie F : $G \to$ H el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie}(G) & \xrightarrow{F_*} & \mathrm{Lie}(H) \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ G & \xrightarrow[F]{} & H \end{array}$$

Hemos de probar que $e^{F_* X}$ = F(e^X) $\forall$ X $\in$ Lie(G), y lo que probaremos es que $\forall$ t $\in \mathbb{R}$:

$$e^{tF_* X} = F(e^{tX})$$

El miembro de la izqda. es el subgrupo uniparamétrico generado por $F_* X$ y hacemos σ(t) = F(e^{tX}) entonces basta ver que σ es un homomorfismo de grupos que cumple que $\sigma'(0) = F_* X$. Calculemos

$$\sigma'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(e^{tX}) = F_* \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{tX} = F_* X \quad \text{y}$$

$$\sigma(s+t) = F(e^{(s+t)X}) = F(e^{sX} . e^{tX}) = F(e^{sX}) . F(e^{tX}) = \sigma(s) . \sigma(t)$$

Ejemplos:

1.- Para G = $\mathbb{R}^*$ = $\mathbb{R}$ -{0} e identificando T_{1_G}(G) = $\mathbb{R}$: para cualquier x de T_{1_G}(G) = $\mathbb{R}$ la aplicación F : $\mathbb{R} \to$ G con t $\mapsto$ e^{tX} es el subgrupo uniparamétrico de G con $\dot{F}$(0) = x entonces la función exponencial es e^x.

2.- Para G = S^1 e identificando $T_{1_G}(S^1)$ = i $\mathbb{R}$, el subgrupo uniparamétrico correspondiente a ix de $T_{1_G}(S^1)$ es F : $\mathbb{R} \to S^1$ con t $\mapsto$ e^{itx} y aquí la aplicación exponencial viene dada por e^{ix}.

3.- Para G = $\mathbb{R}$ e identificando $T_0(\mathbb{R})$ = $\mathbb{R}$ el subgrupo uniparamétrico para x $\in$ $\mathbb{R}$ es F : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con t $\mapsto$ tx y la aplicación exponencial es la identidad x.

4.- Para G = GL_n ($\mathbb{R}$) un campo vectorial invariante por la izqda. tiene la forma X_A = AX con A $\in$ GL_n ($\mathbb{R}$). El correspondiente subgrupo uniparamétrico A(t) es la solución de la ecuación matricial $\frac{dA}{dt}$ = AX con A(0) = I_n de condición inicial y su solución es

$$A(t) = e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k$$

La aplicación exponencial es e : $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tal que X $\mapsto$ e^X= A.

***Aplicaciones de la exponencial*:**

A.- TECNICA DE CALCULO DEL ALGEBRA DE LIE DE UN SUBGRUPO:

Lema 2 : Sea G grupo de Lie y H subgrupo de Lie de G, entonces la inclusión in : H $\hookrightarrow$ G induce un isomorfismo Lie(H) $\approx$ $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}$ subalgebra de Lie(G) dada por

$\mathfrak{h}$ = { X ∈ Lie(G) : e^{tX} ∈ H $\forall t \in \mathbb{R}$ }

Demost: Sea X ∈ Lie(G) cualquiera. Supongamos X ∈ $\mathfrak{h}$. Hagamos γ la curva γ(t) = e^{tX} entonces como tal curva yace en H $\forall t$ entonces X_{1_G}= γ'(0) ∈ T_{1_G}(H) lo que significa que X ∈ in (Lie(H)).
Inversamente, sea X ∈ in (Lie(H)) entonces $X_{1_G} \in T_{1_G}$(H) entonces e^{tX} ∈ H $\forall t \in \mathbb{R}$ y X∈ $\mathfrak{h}$.

Corolario 1 : Sea G subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$
Sea $\mathfrak{g}$ = { B ∈ $GL_n(\mathbb{R})$: e^{tB} ∈ G $\forall t \in \mathbb{R}$ } subconjunto de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$
Entonces $\mathfrak{g}$ es subalgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ canónicamente isomorfa a Lie(H).

Ejemplo: hallar algebra de Lie de $SL_n(\mathbb{R})$.

Sea $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ = { B ∈ $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$: tr(B) = 0 } ⊂ $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Si B ∈ $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ entonces, usando un resultado del algebra lineal que dice que la matriz exponencial e^B verifica que el det(e^B) = $e^{tr(B)}$ siendo tr(B) la traza de la matriz B (la suma de los elementos de su diagonal principal), tenemos en nuestro caso que
det(e^{tB}) = $e^{tr(tB)}$ = 1 entonces $e^{tB} \in SL_n(\mathbb{R})$ $\forall t$.
Inversamente, si $e^{tB} \in SL_n(\mathbb{R})$ $\forall t$ entonces 1 = det(e^{tB}) = $e^{tr(tB)}$ lo que significa que tr(B) = 0. Así, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ es subalgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ y además $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \approx$ Lie($SL_n(\mathbb{R})$)

OBS: la matriz exponencial $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$

B.- CÓMO LA ESTRUCTURA DE UN GRUPO DE LIE ESTA REFLEJADA INFINITESIMALMENTE EN LA ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE SU ALGEBRA DE LIE:

Proposición 1 : Para cualesquiera X,Y ∈ Lie(G) hay una aplicación C^{∞} $\psi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow$ Lie (G) de modo que $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$

$$e^{tX}.\ e^{tY} = e^{t(X+Y)+\ t^2\psi(t)}$$

Demost: Como e es un difeomorfismo cerca de 0 en Lie(G), hay un ϵ>0 tal que la aplicación $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow$ Lie (G) con $t \mapsto e^{-1}(e^{tX}.\ e^{tY})$ es C^{∞}. Ahora bien podemos escribir φ como la composición

$$\mathbb{R} \xrightarrow{e_X \times e_Y} G\,x\,G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{e^{-1}} \mathbb{R}$$

donde μ es la multiplicación de grupo y e_X es el subgrupo uniparamétrico de X a través del homomorfismo e, es decir, e_X(t) = e^{tX}
Como $\mu_{1_{G}*}$(X,Y) = X + Y entonces

$$\varphi'(0) = (d\,e_0)^{-1}(\,e_X'(0) + e_Y'(0) = X + Y$$

Como $\varphi(0) = 0$ y $e^{tX}.\ e^{tY} = e^{\varphi(t)}$

por Taylor, $\varphi(t) = t(X + Y) + t^2\psi(t)$

para alguna función C^{∞} ψ.

Más generalmente, $\psi(t) = \frac{1}{2}[X, Y] + \vartheta(t^3)$ donde $\vartheta(t^k)$ es cualquier función de t valuada en Lie(G) que está acotada por un múltiplo constante de $|t|^k$ para $t \rightarrow 0$.

C.- CÓMO EL CORCHETE DE LIE EXPRESA EL TERMINO PRINCIPAL DEL DESARROLLO DE TAYLOR DE UN GRUPO CONMUTADOR.

Proposición 2 : Sea G grupo de Lie y sea Lie(G) su algebra de Lie.
Para cualesquiera X,Y ∈ Lie(G), la aplicación e verifica

$$e^{tX}.\ e^{tY}\ e^{-tX}.\ e^{-tY} = e^{t^2[X,Y]\ +\ \vartheta(t^3)} \qquad \text{siempre que } t \rightarrow 0.$$

Demost: se trata de aplicar la proposición anterior dos veces,

$$e^{tX} . e^{tY} e^{-tX} . e^{-tY} = e^{t(X+Y)+ t^2\psi(t)} \; e^{t(-X-Y)+ t^2\psi(t)} = e^{t^2[X,Y] + \vartheta(t^3)}$$

Donde $\psi(t) = \frac{1}{2} [X,Y] + \vartheta(t^3)$.

8

GRUPOS ABELIANOS
GRUPOS DE LIE ABELIANOS

GRUPOS ABELIANOS

Definición 1: Un grupo G es abelianos si la ley de composición interna del grupo es conmutativa, es decir: ab = ba $\forall$ a,b $\in$ G.

Definición 2: Un grupo G es cíclico si todo el grupo está generado por un solo elemento, es decir: G = < a >.

- Todo elemento de G es potencia de a.
- Como $a^i . a^j = a^j . a^i = a^{i+j}$, entonces todo grupo cíclico es abeliano.
- Salvo isomorfismo existe un único grupo cíclico de orden infinito y existe un único grupo cíclico de orden n finito $\forall$n $\in \mathbb{N}$.
- Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

Teorema 1:

- Todo subgrupo de un grupo cíclico infinito que no sea el trivial es grupo cíclico infinito de índice finito.
- Existe un único subgrupo infinito para cada índice finito.
- Todo subgrupo de un grupo cíclico finito de orden n es grupo cíclico de orden k tal que k divide a n y existe un único subgrupo para cada divisor de n de orden igual a ese mismo divisor.

Demost: (en [09] de la bibliografía).

TEOREMAS DE ESTRUCTURA DE GRUPOS ABELIANOS

Un grupo abeliano infinito puede tener una estructura complicada,por ejemplo: ($\mathbb{C}$ - {0}, .) grupo multiplicativo complejo posee elementos de todos los órdenes finitos y elementos de orden infinito.

Si a^n= 1 y b^m= 1 son elementos de un grupo G, entonces $(a^{-1})^n$= 1 y (ab)^{mn}= 1. Así, el conjunto { a ∈ G: a tiene orden finito} es unsubgrupo de G al que llamaremos F.
Todo endomorfismo α: G → G aplica un elemento de orden finito con un elemento de orden finito, es decir: a ↝ b ∀ a,b ∈ F entonces F es un subgrupo totalmente invariante de G.

Definición 3: H subgrupo de G es *totalmente invariante* si H es admisible ∀ α ∈ End(G).
H subgrupo de G es *admisible* respecto de ciertos α_i ∈ End(G) si α_i(H) ⊆ H ∀ α_i.

- H∩K y H∪K son subgrupos admisibles ∀ H,K subgrupos admisibles.

H subgrupo de G es *subgrupo característico* si H es admisible ∀ α ∈ Aut(G).

Definición 4: *Grupo periódico o de torsión:* grupo en el que todos sus elementos son de orden finito.
Grupo aperiódico o sin torsión: grupo en elque sólo 1_G es de orden finito.

Teorema 2: Sea G abeliano. Sea F subgrupo de G de todos los elementos de orden finito, entonces G/F es un grupo sin torsión.

> **Demost:** supongamos que no lo es. Supongamos que x ≠ $1_{G/F}$ es de orden finito m, entonces en el homomorfismo G → G/F sea u ↝ x entonces u^m ↝ x^m= $1_{G/F}$ entonces u^m ∈ F y u^m es de algún orden finito, sea tal orden n. Así, $(u^m)^n$= 1_G y u es de orden finito entonces u ∈ F y u ↝ $1_{G/F}$. Absurdo pues partíamos de x ≠ $1_{G/F}$.

Definición 5: Sea G = < { $a_i\}_{i=1}^{r}$ >. Entonces todo elemento de G es de la forma ${a_1}^{u_1}$...${a_r}^{u_r}$ con u_i ∈ $\mathbb{Z}$.

- { $a_i\}_{i=1}^{r}$ es una base de G si y solo si G = < a_1> x < a_2> x....x <a_r>.

- G = < $\{a_i\}_{i=1}^{r}$ > abeliano tiene una base de como mucho r elementos.

Lema 1: Si el orden de x es mn en cualquier grupo con (m,n) = 1 entonces x posee una representación única como x = y.z = z.y tal que y es de orden m, z es de orden n y tanto y como z son potencias de x.

Demost: (en [09] de la bibliografía).
Nota: (a,b) = 1 es m.c.d. entre a y b.

Lema 2: Sea x elemento de orden n = $n_1 \ldots\ldots n_r$ con (n_i, n_j) = 1 ∀ i≠J, entonces x posee una representación única como x = $x_1 \ldots\ldots x_r$ tal que $x_i x_j$ = $x_j x_i$, x_i es de orden n_i y todo x_i es potencia de x.

Demost: (en [09] de la bibliografía).
En particular: para n = $p_1{}^{u_1} \ldots p_r{}^{u_r}$ con p_i primos distintos se puede aplicar el lema para n_i = $p_i{}^{u_i}$.

Definición 6: Sea G abeliano periódico.
Sea P = { elementos de G cuyos ordenes son potencias de un primo fijo p}
1_G = p^0
Si x^{p^a}= 1 e y^{p^b}= 1 entonces (xy)$^{p^c}$= 1 y $(x^{-1})^{p^a}$= 1 para c = máx (a,b)
Así: P es subgrupo y se le llama *p-subgrupo de Sylow: Syl(p).*
P e un p-grupo abeliano.

Teorema 3: Un grupo abeliano periódico es el producto de sus subgrupos de Sylow

Demost: (en [09] de la bibliografía).

GRUPOS ABELIANOS FINITOS. INVARIANTES.

Todo grupo abeliano finito es: periódico y finitamente generado, por tanto……

Teorema 4: Un grupo abeliano G de orden n = ${p_1}^{u_1}$...${p_r}^{u_r}$ es el producto directo de sus subgrupos de Sylow: Syl(p_1), …. Syl(p_r).

- Syl(p_i) es de orden ${p_i}^{u_i}$ y es el producto directo de grupos cíclicos de órdenes ${p_i}^{u_{i1}}$,…, ${p_i}^{u_{is}}$ con u_{i1}+…. + u_{is} = u_i.
  Demost: (en [09] de la bibliografía).

Corolario 1: G grupo abeliano de orden n tiene un elemento de orden p = primo tal que p divide a n.

Sea G(p) un p- grupo abeliano finito.
G(p) puede escribirse de distintas formas como producto directo de grupos cíclicos. Ello es cierto para p-grupos abelianos finitos pero no es cierto para grupos abelianos finitos que no sean p-grupos.

Definición 7: Sea G p-grupo abeliano = producto directo de grupos cíclicos de órdenes p^{u_1},…, p^{u_r}, entonces tales numeros se les llama *invariantes de G.*

- Si tales invariantes son: p,…,p entonces G es un *grupo abeliano elemental.*
- Los invariantes de G determinan G salvo isomorfismo..

Teorema 5: Sea G grupo abeliano finito tal que G es producto directo de grupos cíclicos de dos formas distintas: G = G_1 x G_2 x … x G_r y G = H_1 x H_2 x … x H_s entonces r = s y existe cierta reordenación tal que el orden de G_i es igual que el orden de H_i.

Demost: (en [09] de la bibliografía).

Corolario 2: Si dos p- grupos abelianos finitos no tienen iguales invariantes entonces no son isomorfos.

Teorema 6: Sea G p- grupo abeliano con invariantes p^{u_1},…, p^{u_r} de modo que $u_1 \geq … \geq u_r$, entonces G posee subgrupo K con invariantes p^{k_1},…, p^{k_t} tales $k_1 \geq … \geq k_t$, si y solo si t ≤ r y $k_1 \leq u_1$,….., $k_t \leq u_t$.

Demost: (en [09] de la bibliografía).

Definición 8: Sea G grupo. *La representación regular a derecha de G* es: $\forall$ g,x $\in$ G r(g): G $\rightarrow$ G tal que x $\rightsquigarrow$ xg

- Sea $g \in$ G fijo. $\forall$ y $\in$ G yg^{-1} = (yg^{-1}) g = y entonces: r(g): G $\rightarrow$ G
  r(g) es 1-1 pues de $x_1 g$ = $x_2 g$ se concluye x_1= x_2.
  r(g) es una permutación (biyección) $\forall$ g
- r($g_1 g_2$) = r(g_1)r(g_2) y no invierte la multiplicación.
- En r(g_1): $1_G \rightsquigarrow g_1$
  En r(g_2): $1_G \rightsquigarrow g_2$ entonces si $g_1 \neq g_2$ se tiene r(g_1 $\neq$ r(g_2) y por tanto g $\rightsquigarrow$ r(g) es un isomorfismo.
- r(1_G) = id_G
  r(g^{-1})r(g) $= id_G$ entonces r(g^{-1}) = (r(g))$^{-1}$.

Definición 9: *La representación regular a izqda. de G* es: $\forall$ g,x $\in$ G l(g): G $\rightarrow$ G tal que x $\rightsquigarrow$ g x

- Las mismas propiedades que r(g) tiene l(g) pero a diferencia de r(g), l(g) es antisomorfica, es decir: invierte la multiplicación pues l($g_1 g_2$) = l(g_2)l(g_1) y por tanto es idónea para identificarse con la composición de funciones).

Llamaremos S_G = { f: G $\rightarrow$ G con f biyección } es un grupo con la composición.
Tanto r(G) como l(G) son subgrupos de S_G.
Aut(G) = { f: G $\rightarrow$ G con f isomorfismo }
Si $\alpha \in$ Aut(G) entonces x $\rightsquigarrow$ α(x) es un elemento de S_G tal que α fija 1_G.
Como $(g_1 x)g_2$ = $g_1(x g_2)$ entonces l(g_1)r(g_2) = r(g_2)l(g_1) entonces l(G) y r(G) permutan punto a punto.

Teorema 7: Cada l(G) y r(G) de G tiene a la otra como centralizador en S_G. Es decir: C_{S_G}(r(G)) = l(G) y C_{S_G}(l(G)) = r(G) .

Demost: (en [09] de la bibliografía).

Definición 10: Lamamos el holomorfo de G a N_{S_G}(r(G)).

Teorema 8: Sea H el holomorfo de G, H = $N_{S_{G}}$(r(G)), entonces Aut(G) es el subgrupo de H que fija 1_G.

Demost: (en [09] de la bibliografía).

Definición 11: G es grupo completo si Z(G) = $\{1_G\}$ y Aut(G) = Int(G).

Teorema 9: Si G es completo y G es normal en T entonces T = G x K para K = C_T(G)
Corolario 3: Si G es completo entonces el holomorfo de G es r(G) x l(G)
C_{S_G}(r(G)) = r(G) x l(G)

Demost: (en [09] de la bibliografía).

Definición 12: Sea $g \in$ G fijo. ∀ x ∈ G la aplicación A_g: G → G con x ↝ $g^{-1}xg$ se llama *automorfismo interior de G.*

- A_g es 1-1
- $A_g \in$ Aut(G)
- Como $A_g A_h$ = A_{gh} y $A_{g^{-1}}$= $(A_g)^{-1}$ entonces Int(G) ⊲ Aut(G)
- Int(G) = { f: G → G con f automorfismo interior }

Teorema 10: Int(G) ⊲ Aut(G) y
$\varphi \in$ Hom(G,Int(G)) con g ↝ A_g es tal que el centro de G es el ker φ

Demost: (en [09] de la bibliografía).

SERIES PRINCIPALES Y SERIES DE COMPOSICION

Sea G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n$ tal que $G_i \lhd G_{i-1}$ ∀i = 1…n.
Los G_i se les llama *grupos subinvariantes* de G.

Definición 13: Asociamos a tal cadena la sucesión de grupos factores G_{i-1}/G_i.

- Si todo G_i es normal en G entonces a la serie de arriba se le llama *serie normal, cadena normal ó serie invariante.*

- Que $G_i \lhd G_{i-1}$ no implica que $G_i \lhd$ G
- Si solo se cumple que $G_i \lhd G_{i-1}$ a la serie se le llama *serie subinvariante*
- Si la serie es normal y todo G_i es normal maximal de G_{i-1} entonces la serie se le llama *serie principal*.
- Si la serie es subinvariante y todo G_i es normal maximal de G_{i-1} entonces la serie se le llama *serie de composición.*

SERIES DE COMPOSICION

Sea G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n$ = H serie de composición de G a un subgrupo H.
Por definición: $G_i \lhd G_{i-1}$ normal maximal entonces G_{i-1}/G_i es grupo simple pues un subgrupo normal de G_{i-1}/G_i se correspondería con un subgrupo normal de G_{i-1} que contuviera a G_i entonces si G_{i-1}/G_i es abeliano: debe ser finito, no puede contener ningún subgrupo propio y debe ser de orden primo.

Teorema 11: (relación entre series principales y series de composición)
Sea H ⊲ G tal que existe una serie de composición de G a H. Entonces existe una serie principal de G a H: G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m$ = H tal que

a) Cada $G_{i-1}/G_i = \prod_{i=1}^{n<\infty} A_i$ con A_i grupo simple y $A_i \approx A_j$ ∀i,j =1…n
b) (←) Si tal serie existe con $G_{i-1}/G_i = \prod_{i=1}^{n<\infty} A_i$ entonces existe una serie de composición de G a H.

   Demost: (en [09] de la bibliografía).

Definición 14: H es *grupo de composición* de G si existe una serie de composición de G en la que esta H.

Teorema 12: Sea H, K subgrupos subinvariantes de G entonces H ∩ K es subgrupo subinvariante de G.
Dada serie de composición de G, la unión y la intersección de dos grupos de dicha serie están en dicha serie.

Lema 3: Sea C un grupo de una serie de composición de G
Sea A un grupo propio de una serie de composición de C. Entonces hay
Una serie de composición desde G hasta A tal que incluye a C.
La longitud de la serie G⇢C es menor que la de G⇢A

Ambas Demost: (en $[09]$ de la bibliografía).

GRUPOS SOLUBLES

Definición 15: Conmutador de x,y $\in$ G es el elemento que pertenece a G: $x^{-1}y^{-1}xy$ y lo denotamos como $[x, y]$.
Conmutador de orden mayor: $[x, y, z]$ = $\big[[x, y], z\big]$ y así recursivamente.
Complejo de conmutadores = { z$\in$ G: z = $[x, y]$, x,y $\in$ G }.

Por definición: $[x, y]$ = 1 $\Leftrightarrow$ xy = yx $\Longrightarrow$ $[x, y]$ = 1 $\Leftrightarrow$ G es abeliano.
$[-, -]$ mide lo mucho que un grupo G se aleja de ser abeliano.

Definición 16: Subgrupo conmutador o grupo derivado de G es
G´= < $\{x^{-1}y^{-1}xy\}_{x,y \in G}$> . También se le denota como $[G, G]$.

- G´$\lhd$ G totalmente invariante.

Teorema 13: G/G´ es abeliano
Si K $\lhd$ G de modo que G/K es abeliano $\Longrightarrow$ K $\supseteq$ G´.

Demost: (en $[09]$ de la bibliografía).

Definición 17: G es soluble si la serie G $\supseteq$ G´ $\supseteq$ G´´ $\supseteq$....$\supseteq$ $G^{(i)}$ $\supseteq$... acaba en $\{1_G\}$ en un número finito de pasos, siendo todo grupo $G^{(i)}$ el derivado de $G^{(i-1)}$.

Teoremas sobre grupos solubles:

1) Si G es soluble $\Longrightarrow$ Todos sus subgrupos y grupos factores son solubles.
2) Sea G de orden finito. G es soluble $\Leftrightarrow$ los grupos factores en una serie de composición desde G hasta $\{1_G\}$ son cíclicos de orden primo.
3) Sea G soluble y finito.
   Sea G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_s$ = $\{1_G\}$ serie principal $\Longrightarrow$ G_{i-1}/G_i son todos grupos abelianos.
4) G es soluble $\Leftrightarrow$ G posee serie normal finita G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_s$ = $\{1_G\}$ tal que G_{i-1}/G_i son todos grupos abelianos.

5) G es soluble $\Leftrightarrow$ G posee serie subinvariante finita G = $H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = \{1_G\}$ tal que H_{i-1}/H_i son todos grupos abelianos.

Corolario 4: G es soluble si existe H $\lhd$ G tal que H y G/H son solubles.

6) Si dos grupos factores consecutivos de grupos derivados G $\supseteq$ G´ $\supseteq$ G´´ $\supseteq$…. de un grupo G son cíclicos $\Longrightarrow$ el último de ellos es $\{1_G\}$

Demost: (en $[09]$ de la bibliografía).

GRUPOS SUPERSOLUBLES Y NILPOTENTES

(Todas las Demost: (en $[09]$ de la bibliografía)).

Definición 18: Un grupo G es *supersoluble* si tiene una serie normal finita G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_s = \{1_G\}$ con G_{i-1}/G_i todos cíclicos.
Un grupo G es *nilpotente* si tiene una serie normal finita G = $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_s = \{1_G\}$ con $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$ $\forall$ i.

Consecuencias:

- Como en ambos casos G_{i-1}/G_i es abeliano $\Longrightarrow$ G es soluble.
- Si G es supersoluble $\Longrightarrow$ $G_{i-1} = \{ b_{i-1}, G_i \}$ con $b_{i-1} \in G_{i-1}$ cualquiera aplicado sobre un generador del grupo cíclico G_{i-1}/G_i $\Longrightarrow$ G es finitamente generado.
- Como los grupos nilpotentes contienen todos los grupos abelianos $\Longrightarrow$ un grupo nilpotente no precisa ser finitamente generado.

Habiamos definido $x^{-1}y^{-1}xy = [x,y]$.
Para subgrupos de G: A,B $[A,B] = \{ [a,b]$: a $\in A$, b $\in$ B $\}$ subgrupo de G.
Conmutador simple: $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \big[[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n\big]$.
Para subgrupos: $[G_1, \ldots, G_{n-1}, G_n] = \big[[G_1, \ldots, G_{n-1}], G_n\big]$.
Sea la conjugación $x^{-1}g$x = g^x $\Longrightarrow$ $[y,x] = [x,y]^{-1}$ y todo elemento de G puede representarse como producto de conmutadores y conmutadores conjugados.
Definimos una serie de subgrupos de G así:

Γ_1(G) = G

....
Γ_k(G) = { $[x_1, \dots, x_k\,]$ } $x_i \in$ G cualesquiera.

- Como $[x_1, \dots, x_{k+1}\,] = \big[[x_1, x_2], x_3 \dots, x_{k+1}\,\big] \implies \Gamma_{k+1}$(G) ⊆ Γ_k(G) $\forall\, k$.
- Γ_k(G) es subgrupo de G totalmente invariante $\forall\, k$.

Definición 19: *Serie central inferior* de G es G = Γ_1(G) ⊇ Γ_2(G) ⊇ ⋯

Teorema 14: Γ_{k+1}(G) = $[\Gamma_k(\mathrm{G}), \mathrm{G}\,]$

Corolario 5: Γ_k(G) / Γ_{k+1}(G) ⊆ Z(G/ Γ_{k+1}(G))

Definición 20: *Serie central superior* de G es Z_0 = $\{1_G\}$ ⊆ Z_1(G) ⊆ Z_2(G) ⊆… de forma que Z_{i+1}(G) se define tal que Z_{i+1}(G) / Z_i(G) ⊆ Z(G/ Z_i(G)).

- Como Z(G) es subgrupo característico de G $\implies$ cada Z_i es subgrupo característico de G.

Definición 21: *Serie central* de G es G = $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{r+1}$ = $\{1_G\}$ tal que $G_{i-1}\,/G_i$ ⊆ Z(G/ G_i(G)).

Teorema 15: Sea G = $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{r+1}$ = $\{1_G\}$ serie central de G entonces:

1) $\mathrm{G}_i \supseteq \Gamma_i$(G) ∀i = 1…r
2) $\mathrm{G}_{r+1-j} \subseteq Z_j$(G) ∀j = 0, 1…r.

Corolario 6: Sea G nilpotente. En G las series centrales superiores e inferiores tienen longitud finita y ambas tienen igual longitud c.
A **c** se le llama *clase* del grupo nilpotente.
Un grupo nilpotente de clase 1 es un grupo abeliano.

Teorema 16: Sea G = < $\{x_i\}_{i=1}^{r}$> $\implies$
Γ_k(G) / Γ_{k+1}(G) = < { $[y_1, \dots, y_k\,]\, módulo\, \Gamma_{k+1}$(G) } > donde las y´s están escogidas de las $\{x_i\}_{i=1}^{r}$ y no son necesariamente distintas.

Corolario 7: Si G está generado pro r elementos $\implies$ Γ_k(G) / Γ_{k+1}(G) está generado por a lo sumo r^k elementos.

Teorema 16: G nilpotente finitamente generado es supersoluble.

Corolario 8: G nilpotente finitamente generado verifica la condición maximal $\Leftrightarrow$ G y todo subgrupo de G es finitamente generado.
(Condición maximal = No existe ninguna cadena ascendente de subgrupos).
OBS: Si G es nilpotente de clase c entonces todo $[g_1, \dots, g_{c+1}] = 1_G$ … y a la inversa: si todo $[g_1, \dots, g_{c+1}] = 1_G$ entonces G es nilpotente de clase a lo sumo c

- G tiene nil-c si $[g_1, \dots, g_{c+1}] = 1_G \ \ \forall\, g_i \in$ G.

Teorema 17: Si G tiene nil-c entonces todo subgrupo de G y todo grupo factor de G tienen nil-c.

Teorema 18: Sean H,K $\lhd$ G con nil-c para H y nil-d para K $\Longrightarrow$ H∪K = HK es de nil-(c+d).

Corolario 9: Para todo subgrupo propio H de G nilpotente: H es subgrupo propio de N_G(H).

Corolario 10: Si G es nilpotente y H es subgrupo propio de G tal que G = G´H $\Longrightarrow$ G = H.

Corolario 11: Todo H subgrupo maximal de G nilpotente es: normal, de índice primo y H ⊃ G´.

Teorema 19 : Los p-grupos finitos son nilpotentes .
G finito es nilpotente $\Leftrightarrow$ es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Corolario 12: G finito es nilpotente $\Leftrightarrow$ sus subgrupos normales son maximales.

Teorema 20: Sea G supersoluble $\Longrightarrow$ Todo subgrupo y todo grupo factor de G essupersoluble.

Corolario 13: Los grupos supersolubles cumplen la condición maximal.

Teorema 21: G supersoluble tiene una serie normal G = $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = \{1_G\}$ tal que todo grupo factor G_{i-1}/G_i es cíclico infinito ó cíclico de orden p primo y si G_{i-1}/G_i y G_i/G_{i+1} son de ordenes primos consecutivos p_i, p_{i+1} $\Longrightarrow$ $p_i \leq p_{i+1}$.

Corolario 14: Sea G finito supersoluble de orden $p_1 p_2 \dots p_r$ con $p_i \leq p_{i+1}$ primos $\Longrightarrow$ G posee una serie principal G = $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r = \{1_G\}$ tal que G_{i-1}/G_i es de orden p_i.

Teorema 22: Sea G supersoluble $\Longrightarrow$ G´ es nilpotente.

Teorema 23: Sea G finito supersoluble $\Longrightarrow$ Todas las cadenas maximales de subgrupos tienen igual longitud r para orden de G = $p_1 p_2 \ldots p_r$ con los p_i no necesariamente distintos.

Corolario 15: Todo H subgrupo maximal de G supersoluble es tal que $[G:H]$ = primo.

Teorema 24: Si G finito posee todos sus subgrupos maximales de índice primo $\Longrightarrow$ G es supersoluble.

Toda la teoría expuesta hasta aquí sobre grupos finitos es requerida para decidir la solubilidad de las ecuaciones polinómicas de grado finito. Culmina en un resultado de Galois que dice:

Teorema 25: Una ecuación polinómica sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es resoluble por radicales $\Longleftrightarrow$ su grupo de Galois G contiene una cadena de subgrupos G = $G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = \{1_G\}$ tales que $G_i \lhd G_{i+1}$ y todo factor G_i / G_{i+1} es conmutativo.

Por analogía, "grupos infinitos" (grupos que dependen continuamente de variables reales o continuas) podrían estar envueltas en el tratamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.
Los grupos de Lie vienen en dos variantes básicas: los simples y los resolubles.

- Los simples se generan ellos mismos por conmutación
- Los resolubles no lo hacen y contienen una cadena de subgrupos de modo que cada uno de ellos es normal en su subgrupo predecesor.

Los grupos simples y resolubles son los bloques de construcción de todos los otros grupos de Lie:

- Los grupos de Lie semisimples son productos directos de grupos de Lie simples.
- Los grupos de Lie no semisimples son productos semidirectos de grupos de Lie semisimples con subgrupos invariantes que son resolubles.

Al igual como en el caso de Galois en ecuciaones polinómicas, las EDO´s pueden resolverse o simplificarse si su grupo invariante es resoluble.

CLASIFICIACIÓN DE LOS GRUPOS DE LIE ABELIANOS

Teorema 26 : Sea G grupo de Lie y L(g) = Lie(G) su algebra de Lie. Entonces:

1.- L(G) es abeliana si y solo si para g_t y h_s subgrupos uniparamétricos de G se cumple $g_t . h_s = h_s . g_t$

2.- Si G es abeliano entonces L(G) es abeliana.

3.- Si L(G) es abeliana entonces G_{1_G} es un grupo de Lie abeliano.

G_{1_G}= componente conexa de G que contiene al elemento identidad 1_G

Demost:

1. Sean X_1, X_2 ∈ L(G) con subgrupos uniparamétricos asociados g_t y h_s $resp.$ entonces $[X_1,X_2]$ = 0 si y solo si para $\gamma_t = r_{g_t}$ y $\sigma_s = r_{h_s}$ grupos uniparamétricos de X_1, X_2 se tiene

$\gamma_t \circ \sigma_s = r_{h_s g_t} = r_{g_t h_s} = \sigma_s \circ \gamma_t$ si y solo si $g_t . h_s = h_s . g_t$

2. Obvio por 1.-

3. Sea la aplicación e : T_{1_G}(G) → G con $X_{1_G} \mapsto g_1$ para g_t subgrupo uniparamétrico asociado a X_{1_G} y e difeomorfismo local en 0 entonces existe un entorno U de 1_G con U ⊂ G de modo que ∀ punto de U es de la forma g_1. Si L(G) es abeliana y g,h son de U : gh = hg pues $g = g_1$ y h = h_1 y por 1.- $g_1 . h_1 = h_1 . g_1$ entonces G_{1_G} es abeliano.

Teorema 27 : Sea G grupo de Lie con algebra de Lie L(G) abeliana, entonces e : T_{1_G}(G) → G es homomorfismo de grupos de Lie y si G es conexo e es sobre .

Demost: Sean $X_{1,1_G}$, $X_{2,1_G}$ ∈ T_{1_G}(G) de modo que $e^{X_{1,1_G}} = g_1$ y $e^{X_{2,1_G}} = h_1$.
Sean g_t, h_s los subgrupos uniparamétricos asociados
Sean X_1, X_2 ∈ L(G) los resp campos invariantes de $X_{1,1_G}, X_{2,1_G}$
Como L(G) es abeliana: $g_t . h_s = h_s . g_t$ y σ(t) =$g_t . h_t$ es un subgrupo uniparamétrico asociado al campo invariante $X_1 + X_2$ entonces

$e^{X_{1,1_G} + X_{2,1_G}} = \sigma(t) = g_1 . h_1 = e^{X_{1,1_G}} . e^{X_{2,1_G}}$

Y que es sobre se sigue de que es homomorfismo de grupos, es difeomorfismo local en el 0 y de la siguiente proposición…

Proposición 1 : Sea G un grupo de Lie conexo y U un entorno de 1_G, entonces G = $\bigcup_n U^n$ siendo $U^n = \{ g_1 \dots g_n\}_{g_i \in U}$

Demost: Sea V ∩ $U^{-1} \subset U$ entorno abierto de 1_G tal qie V = V^{-1} y sea H = $\bigcup_n V^n \subset \bigcup_n U^n \subset$ G.
H es subgrupo pues si g,h ∈ H entonces gh^{-1} ∈ H
H es abierto pues l_g(V) = g V $\subset H$ es un entorno abierto de g ∈ H
H es cerrado pues si g pertenece al complementario de H, gH es un entorno abierto de g que está en el complementario de H pues por ser H subgrupo entonces gH ∩ H = ∅. Así por conectividad: H = G.

Sea G un grupo de Lie abeliano, entonces la aplicación e : T_{1_G} (G) → G es un homomorfismo de grupos de Lie y difeomorfismo local en 0 y por tanto lo es en cualquier punto. Así, el subgrupo cerrado

H = ker(e) = $e^{-1}(1_G) \subset T_{1_G}$ (G)

es un subgrupo discreto,
(Un conjunto D es discreto si todo subconjunto suyo es abierto, en particular los conjuntos unipuntuales son abiertos)
pues es un grupo de Lie de dimensión 0, debido al resultado:

Teorema 28 : Todo subrupo de Lie de un grupo de Lie es grupo de Lie. (Ya visto en el apartado de subgrupos de Lie).

Corolario 16 : Sea F : G → V C^∞ y de rango constante con G grupo de Lie.
Si para un y de V : $F^{-1}(y)$ es subgrupo entonces $F^{-1}(y)$ es grupo de Lie y la dim($F^{-1}(y)$) = dim (G) - rango(F)

Demost: $F^{-1}(y)$ cumple ser subvariedad y es de dicha dimensión por lo que es subgrupo de Lie y por tanto grupo de Lie.

Corolario 17 : Sea F : $G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupos de Lie, entonces

1.- El rango de F es constante.
2.- Ker (F) = $F^{-1}(1_{G_2})$ es subgrupo normal de G_1
y es grupo de Lie de dim($F^{-1}(1_{G_2})$) $=$ dim(G_1) - rango(F)
3.- F(G_1) es subgrupo de G_2

Demost: 1. Sea x ∈ G_1 y sea z = F(x^{-1}) entonces para cualquier y ∈ G_1:

F(y) = F($x^{-1}xy$) = z. F(xy) = l_z° F ° l_x(y)

por lo que el rango de F_* en 1_{G_1} es el mismo que el de F_* en x así que el rango es constante.
2. Por el corolario 16
3. Por ser F homomorfismo de grupos de Lie.

Lema 4 : Dado el difeomorfismo local y sobre $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}_n$

$$(x_1 \dots x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i n})$$

y H subgrupo cerrado y discreto de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{Z}^n \subset$ H, entonces: $\pi(H)$ es finito.

Demost: H = $\coprod_{z=(z_i)\in\mathbb{Z}^n} H \cap [z, z+1[$ = $\coprod_{z=(z_i)\in\mathbb{Z}^n} H \cap [0,1[$ +z para

$[z, z+1[$ = $\prod_{i=1}^{n}[z_i, z_i+1[$ siendo $\pi(H \cap [z, z+1[)$ = $\pi(H \cap [0,1[)$ por lo que basta probar que $\pi(H \cap [0,1[)$ es finito.
De no serlo tendriamos una sucesión de puntos distintos { x_n } de H en el compacto $[0,1]$ y con un punto limite x que estaría en H por ser cerrado pero todo entorno de x tendría puntos de la sucesión en contradicción con que H sea discreto.

Teorema 29 : Todo grupo H abeliano finitamente generado es de la forma

H $\approx \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_s$.

Es un teorema de caracterización de grupos abelianos muy conocido del álgebra.

Teorema 30 : Todo subgrupo cerrado y discreto H de T_{1_G}(G) es

H = $\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r$

con los $e_i \in T_{1_G}$(G) linealmente independientes en T_{1_G}(G).

Demost: Sea < H > = < v_1,..., v_n> con los v_i de H independientes y sea el isomorfismo φ : < H > $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ con $v_i \mapsto e_i$ y llamemos H a φ(< H >). Entonces por ser subgrupo y los e_i $\in$ H se tiene que $\mathbb{Z}^n \subset$ H y por el lema anterior tenemos que

$$\pi(H) = \{\pi(h_1), \ldots, \pi(h_m)\}$$

asi que $\forall$h $\in$ H existe un h_i tal que π(h) = $\pi(h_i)$, o sea h - $h_i \in \mathbb{Z}^n$ y H es un subgrupo abeliano generado por

$$h_1, \ldots, h_m, v_1, \ldots, v_n$$

Y por el teorema anterior será de la forma

$$\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$$

pero aquí los términos de la forma $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ no aparecen pues sus elementos serían unos z de H tales que $m_i z = 0$ que no existen, de modo que H es de la forma

$\mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_r$ y falta ver que los e_i son independientes:

Supongamos que no lo son, como generan < H > entonces podemos tomar una base de < H > entre ellos $e_1, \ldots, e_n$ y podemos tomar el difeomorfismo local

$$\pi : \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}_n$$

para el que π(H) = $\{\pi(h_1), \ldots, \pi(h_m)\}$ es finito, pero

$$H = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_n \oplus \mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_r$$

y π es inyectivo en $\mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_r$

lo que lleva a contradicción pues este espacio es infinito a menos que n = r.

CLASIFICACIÓN DE GRUPOS DE LIE ABELIANOS CONEXOS:

Teorema 31 : Todo grupo de Lie abeliano y conexo es isomorfo a $\mathbb{T}_k$ x $\mathbb{R}^{n-k}$

Demost: por el resultado anterior H = Ker (e) = $\mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_r$ con los e_i independientes que extendemos a una base $e_1, \ldots, e_n$ de T_{1_G}(G) . Considerando las coordenadas asociadas a esta base se tiene el diagrama

$$\begin{array}{cccc} & T_{1_G}(G) & \rightarrow & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\ & x & \approx & (x_1, x_2) \\ e & \downarrow & & \varphi \quad \downarrow \\ & G & \leftarrow & \mathbb{T}_{kr} \times \mathbb{R}^{n-r} \\ & e^x & \phi & (\pi(x_1), x_2) \end{array}$$

para $x_1 = (a_1, \ldots, a_r)$ y $x_2 = (a_{r+1}, \ldots, a_n)$ si $x = \sum a_i e_i$, define una única ϕ para la que el diagrama es conmutativo, pues

$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2) \iff x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}^n, \quad x_2 = y_2 \iff$ x-y $\in$ H $\iff$ $e^x = e^y$

que es isomorfismo de grupos y difeomorfismo pues cada flecha descendente es homomorfismo de grupos, es sobre (la aplicación e por ser G conexo) y difeomorfismo local.

CLASIFICACIÓN DE GRUPOS DE LIE ABELIANOS NO CONEXOS:

Sea G grupo de Lie abeliano no conexo y sea G_{1_G} su componente conexa que contiene el elemento identidad de G que es grupo de Lie debido al resultado…

Proposición 2 : Las traslaciones de un grupo de Lie G, lleva componentes conexas en componentes conexas y G_{1_G} es un subgrupo normal, abierto y cerrado y grupo de Lie.

> **Demost:** Las aplicaciones continuas llevan conexos en conexos, así que los homeomorfismos conservan las componentes conexas. Si g,h, ∈ G_{1_G} entonces $l_{g^{-1}}(G_{1_G}) = G_{1_G}$, así que $g^{-1}h \in G_{1_G}$ y la aplicación $(g,\text{h}) \mapsto g^{-1}h$ es diferenciable pues G_{1_G} es abierto.
> Es subgrupo normal pues $\forall\ g$ de G : $gG_{1_G}g^{-1}$ es una componente conexa que contiene a 1_G entonces es G_{1_G}.

y por la clasificación anterior es isomorfo a

$$G_{1_G} \approx \mathbb{T}_k \text{ x } \mathbb{R}^{n-k}.$$

Por ser subgrupo normal existe el subgrupo cociente H = G/G_{1_G} que es el grupo de las componentes conexas y es grupo de Lie con la topología discreta, siendo la estructura diferenciable: todas las funciones en todos los subconjuntos de H para las que la proyección natural

$$\pi : \text{G} \to \text{G}/G_{1_G}$$

es homomorfismos de grupos de Lie:

- π es continua, pues $\pi^{-1}(U)$ es unión de algunas componentes conexas que son abiertas, para todo U abierto de H.
- π es abierta, obvio.
- π es diferenciable, pues para toda función f en H, π^* f = constante en cada componente conexa y por tanto diferenciable.
- Obtenemos la sucesión exacata corta
$$0 \to G_{1_G} \xrightarrow{i_n} \text{G} \xrightarrow{\pi} \text{G}/G_{1_G} \to 0$$

con $G_{1_G} = \mathbb{T}_k$ x $\mathbb{R}^{n-k}$ un $\mathbb{Z}$ - módulo inyectivo.

Definición 22 : Un A-módulo M es *inyectivo* si dado cualquier homomorfismos inyectivo de A-módulos i : M´ → M´´ y un homomorfismo de A-módulos f : M´ → M existe otro homomorfismo h : M´´ → M que hace conmutativo el diagrama… i

$$\begin{array}{ccc} M' & \rightarrow & M'' \\ f \searrow & & \swarrow h \\ & M & \end{array}$$

OBS: Sea $\mathfrak{a}$ ideal del anillo A y sea x $\in$ M, entonces la aplicación f : $\mathfrak{a}$ $\rightarrow$ M con f(a) = ax es morfismo de A-módulos.
Además, si M es inyectivo también lo son todos pues para la inclusión in : $\mathfrak{a}$ $\rightarrow$ A y para todo homomorfismo de A-módulos f : $\mathfrak{a}$ $\rightarrow$ M existe un homomorfismo h : A $\rightarrow$ M que hace conmutativo el diagrama…

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{in} & A \\ f \searrow & & \swarrow h \\ & M & \end{array} \qquad \text{con } f(a) = h(a) = ah(1)$$

Esta condición necesaria también es suficiente para la inyectividad del módulo como dice el…

Criterio del ideal: Sea M un A-módulo tal que para cada homomorfismo de A-módulos f : $\mathfrak{a}$ $\rightarrow$ M existe x $\in$ M tal que f(a) = ax $\forall$ a $\in$ $\mathfrak{a}$, entonces M es inyectivo.

Corolario 18 : G_{1_G} es un $\mathbb{Z}$ - módulo inyectivo.

Demost: G_{1_G} = $\mathbb{T}_k$ x $\mathbb{R}^{n-k}$ es un *grupo divisible*, o sea, dado $g' \in G_{1_G}$ y m $\in$ $\mathbb{Z}$ - {0} existe g $\in G_{1_G}$ tal que g'= mg.
Por otro lado los grupos abelianos son módulos sobre $\mathbb{Z}$ y los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma m$\mathbb{Z}$ $\forall$m$\in$ $\mathbb{N}$.
Veamos que se cumple el criterio del ideal: sea f : m$\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ G_{1_G} homomofismo de módulos y sea g'= f(m) entonces como G_{1_G} es divisible existe g $\in G_{1_G}$ tal que g'= mg, luego…

f(zm) = zf(m) = zg' = z(mg) = (zm)g.

Teorema 32 : Todo grupo de Lie abeliano es de la forma $\mathbb{T}_k$ x $\mathbb{R}^{n-k}$ x H con H grupo de Lie discreto.

Demost: G_{1_G} es un $\mathbb{Z}$ - módulo inyectivo. Dada la identidad en G_{1_G} existe un homomorfismo de grupos h que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_{1_G} & \xrightarrow{i} & G \\ & {\scriptstyle id}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & G_{1_G} & \end{array}$$

o sea, que para $g \in G_{1_G}$: h(g) = g

Ello unido a que tenemos la sucesión exacta

$$0 \to G_{1_G} \overset{i_n}{\rightleftarrows} G \xrightarrow{\pi} G/G_{1_G} \to 0$$

nos permite definir la aplicación σ : $H \to$ G con $\sigma(\pi(g))$ = g – h(g) que es homomorfismo de grupos de Lie con $\pi \circ \sigma$ = id.

- Está definida en todo punto porque π es sobre
- Está bien definida pues si $\pi(g_1) = \pi(g_2)$ entonces para $g = g_1 - g_2$: π(g) = 1_G luego $g \in G_{1_G}$ y h(g) = g por tanto

  $\sigma(\pi(g_1))$ = g_1- h(g_1) = g_2- h(g_2) = $\sigma(\pi(g_2))$

- Es homomorfismo de grupos pues lleva el neutro al neutro y

  $\sigma(\pi(g_1) + \pi(g_2))$ = g_1- h(g_1) + g_2- h(g_2) = $\sigma(\pi(g_1) + \pi(g_2))$

- Es diferenciable porque H es discreto, pero entonces h(g) = g - $\sigma(\pi(g))$ también es diferenciable

Así, ahora podemos establecer el isomorfismo G $\approx$ G_{1_G} x H del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} G \xrightarrow{f} G_{1_G} \times H & \qquad G_{1_G} \times H \xrightarrow{k} G \\ g \quad (h(g), \pi(g)) & \qquad (g', a') \quad g' + \sigma(a') \end{array}$$

pues f ∘ k = id y k ∘ f = id

9

TEOREMA DEL SUBGRUPO CERRADO

El objetivo más importante del presente capítulo es la demostración del teorema del subgrupo cerrado por el cual la forma más sencilla de saber que un determinado objeto es un grupo de Lie es comprobando que puede ponerse como subgrupo cerrado abstracto de un grupo de Lie, generalmente uno de los clásicos ya conocidos y estudiados.
Con mayor exactitud, sirve para asumir que si H es subgrupo topológicamente cerrado de un grupo de Lie G y no ya un subgrupo de Lie cerrado entonces verifica las condiciones de los siguientes resultados:

- Sea G grupo de Lie y H subgrupo de Lie cerrado de G. La acción de H en G por traslación a derecha es C^∞, libre y propia $\Longrightarrow$ G/H es un espacio de cosets a izqda. (clases laterales a izqda.) que es una C^∞variedad y π : G $\to$ G/H es una submersión C^∞.
- Sea X un cto. y sea dada una acción transitiva de un grupo de Lie G sobre X de forma que el grupo de isotropía de cualquier punto G_p es subgrupo cerrado de Lie de G $\Longrightarrow$ X posee una única estructura de variedad topológica y C^∞ tal que dicha acción es C^∞.

Proposición 1 : Todo subgrupo abierto de un grupo de Lie es cerrado.

Demost: Sea A subgrupo abierto de G grupo de Lie y sea x ∈ $(G - A)$ entonces l_x(A) es abierto y es un entorno de x que no corta a A, es decir, l_x(A) ∩ A = ∅ entonces A es cerrado.

Teorema 1 : Sea S subgrupo abstracto de un grupo de Lie G. Si S es subvariedad entonces S es cerrado.

Demost: Si dimensión de S = dimensión de G = n $\Longrightarrow$ S es abierto $\Longrightarrow$ S es cerrado. (Por la proposición anterior).

Si dimensión de S es n-k < n : basta ver que si $\{x_n\} \in$ S es tal que $\lim_{n\to\infty} x_n$ = x ∈ G $\Longrightarrow$ x ∈ S :
Sea U_{1_G} un entorno coordenado de 1_G con coordenadas $\{u_i\}$ i=1…n de modo que S ∩ U_{1_G} = { $g \in U_{1_G}$: $u_1(g)$=…= $u_k(g)$ = 0 }.

Por la continuidad del producto existe otro entorno de 1_G: U tal que U⊂ U_{1_G} y si p,q ∈ U $\Longrightarrow$ p.q $\in U_{1_G}$.

Como $x_n^{-1}x \to 1_G$ y $x^{-1}x_n \to 1_G$ $\Longrightarrow$ Existe n ∈ ℕ : si n > N se tiene $x_n^{-1}x$ ∈ U y $x^{-1}x_n$ ∈ U $\Longrightarrow$

para todo n,m > N : ($x_n^{-1}x$) $(x^{-1}x_n)$ = $x_n^{-1}x_m$ ∈ S ∩ U_{1_G} $\Longrightarrow$ $u_i(x_n^{-1}x_m)$= 0 ∀ i=1 …k.

Si hacemos $m \to \infty$ $\Longrightarrow$ por continuidad $u_i(x_n^{-1}x)$= 0 ∀ i=1 …k. $\Longrightarrow$
como $x^{-1}x_n \to 1_G$ $\Longrightarrow$ $x_n^{-1}x$ ∈ S ∩ U_{1_G} $\Longrightarrow$ x ∈ S.

Lema 1 : Sea H subgrupo cerrado de un grupo de Lie G.
Sea $\gamma : \,]-r,r[\; \to T_{1_G}(G)$ curva C^∞ con $\gamma(0) = 0$ y $e^{\gamma(t)}$ ∈ H $\forall t \in\,]-r,r[\; \subset$ ℝ.
Entonces, $e^{t\gamma'(0)}$ ∈ H $\forall t \in$ ℝ.

Demost: Como $\gamma'(0) = \lim_{n\to\infty} n\gamma(\frac{1}{n})$ en cada t ∈ ℝ. $\Longrightarrow$ $\{m_n\} \in \mathbb{Z}$ tal que $m_n \le nt \le m_n$ +1 cumple que: t $\gamma'(0) = \lim_{n\to\infty} m_n\gamma(\frac{1}{n})$ pues…

$$\left|\mathrm{t}\,\gamma'(0) - m_n\gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \le \left|\mathrm{t}\,\gamma'(0) - nt\gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| + |\mathrm{nt} - m_n|\left|\gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \Longrightarrow$$

$e^{t\gamma'(0)} = \lim_{n\to\infty} e^{m_n\gamma\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{m_n}$ ∈ H pues $e^{\gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$ ∈ H y H es cerrado.

Lema 2 : Sea H subgrupo cerrado de G grupo de Lie $\Longrightarrow$ S = { v $\in$ $T_{1_G}(G)$: $e^{tv} \in$ H $\forall t \in \mathbb{R}$.} es subespacio vectorial.

Demost: Si v $\in$ S $\Longrightarrow$ tv $\in$ S
Sean $v_1, v_2 \in$ S $\Longrightarrow$ $\sigma_1(t) = e^{tv_1} = g_t \in$ H curva integral que pasa por 1_G del campo $D_1 \in$ L(G) que en 1_G define v_1.
Y $\sigma_2(t) = e^{tv_2} = h_t \in$ H curva integral que pasa por 1_G del campo $D_2 \in$ L(G) que en 1_G define v_2.
Sea $\sigma(t) = g_t h_t$ $\in$ H que cumple : $\sigma(0) = 1_G$

$$\sigma_*(\partial t)_0 = \sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})_0 = D_{1,1_G} + D_{2,1_G} = v_1 + v_2$$

Llamemos $\gamma(t) \in T_{1_G}(G)$ a una curva pasada por la aplicación $e^{(.)}$ en el entorno de 0 en el que es difeomorfismo local $\Longrightarrow$ $e^{\gamma(t)} = \sigma(t)$ $\in$ H $\Longrightarrow$ $\gamma'(0) = v_1 + v_2 \Longrightarrow e^{t(v_1+v_2)}$ $\in$ H $\forall t \in \mathbb{R}$ por el lema anterior.

Si G es un grupo de Lie $\Longrightarrow$ para cada S subespacio vectorial de $T_{1_G}(G)$ = Lie(G) queda definidia una aplicación C^∞ φ : $T_{1_G}(G) = L(G) \rightarrow$ G que es un difeomorfismo local de la siguiente manera:
Sea N $\subset T_{1_G}(G)$ el subespacio complementario de S, es decir, $T_{1_G}(G)$ = S $\oplus$ N
Si $\{v_i\}_{i=1}^k$ es base de S y $\{v_i\}_{i=1}^n$ es base de $T_{1_G}(G)$ $\Longrightarrow$ $\{v_i\}_{i=k+1}^n$ es base de N y N = < $\{v_i\}_{i=k+1}^n$ >.
$\forall$ v $\in$ $T_{1_G}(G)$ sea v = $v_S + v_N \in$ S $\oplus$ N $\Longrightarrow$ definimos φ(v) = $e^{(v_N)}e^{(v_S)}$.

Proposición 2 : φ : $T_{1_G}(G) \rightarrow$ G es difeomorfismo local en 0.

Demost: Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ sistema coordenadas asociado a la base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de $T_{1_G}(G)$. Basta ver que $\varphi_*(x_i)_0 = \varphi_*(\frac{\partial x_i}{\partial t})_0 = v_i$.
Como $(\partial_{x_i})_0 = \sigma_*(\partial t)_0$ para $\sigma(t)$ = tv_i.
Como $\varphi(\sigma(t))$ = e^{tv_i} es una curva integral del campo $D_i \in$ L(G) que en 1_G vale v_i $\Longrightarrow$ de aquí se sigue el resultado.

Teorema 2 : (Teorema del subgrupo cerrado ó teorema de Cartan)
Todo subgrupo cerrado H de un grupo de Lie G es subvariedad

Demost: Es el inverso del teorema 1 de este mismo capítulo.
Sea $(U_g;u_i)$ de modo que H ∩ U_g= { x ∈ U_g: u_{k+1}=…= u_n= 0 }.
Para ello basta verlo en 1_G pues por la traslación l_g lo tendremos para g ya que l_g(H) = H.
Sea el subespacio S = { v ∈ $T_{1_G}(G)$: e^{tv} ∈ H $\forall t \in \mathbb{R}$.}
Sea φ : $U_0 \subset T_{1_G}(G) \quad\rightarrow\quad U_{1_G} \subset$ G difeomorfismo $\Longrightarrow$ φ(S) ⊂ H por definición de S.
Basta ver que existe un entorno de 0 = U ⊂ U_0 tal que $\varphi(\text{S} \cap U)$ = H ∩ φ(U) :

- $\varphi(\text{S} \cap U) \subset$ H ∩ φ(U) se tiene siempre.
- Si H ∩ φ(U) no está incluido en $\varphi(\text{S} \cap U) \Longrightarrow$ existe una sucesión $\{v_n\} \in U_0$: $v_n \rightarrow 0$ $\Longrightarrow$
  $\varphi(v_n)$= $g_n \rightarrow 1_G$ en H
  $v_n \notin$ S $\forall$n
  $\Longrightarrow v_n$= x_n+ y_n ∈ S ⊕ N con : $y_n \rightarrow 0$ $\Longrightarrow$ $e^{(y_n)}$ ∈ H
  y_n ∈ N- {0}
  g_n= $\varphi(v_n)$= $e^{(y_n)}e^{(x_n)}$
  Ahora bien, $\{\frac{y_n}{\|y_n\|}\}$ está en un compacto y posee una subsucesión convergente que converge a un y ∈ N con $\|y\|$ = 1 que es un absurdo pues y ∈ S ya que ty = $\lim_{n\to\infty} \frac{ty_n}{\|y_n\|}$ y si $\{m_n\} \in \mathbb{Z}$: $m_n \leq \frac{t}{\|y_n\|} \leq m_n$ +1 $\Longrightarrow$ ty = $\lim_{n\to\infty} m_n y_n$ pues $\|ty - m_n y_n\| \leq \left\|ty - \frac{ty_n}{\|y_n\|}\right\| + \left\|m_n y_n - \frac{ty_n}{\|y_n\|}\right\| \Longrightarrow$

  $e^{(ty)}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{m_n y_n}$= $\lim_{n\to\infty} [e^{y_n}]^{m_n}$ ∈ H.

Por lo tanto, con los dos teoremas juntos podemos decir:

UN SUBGRUPO DE UN GRUPO DE LIE ES SUBVARIEDAD ⟺ ES CERRADO.

Ejemplos: 1.- S^1 es subgrupo de $\mathbb{T}$. Es cerrado y acotado pues es compacto. S^1 es grupo de Lie por sí mismo. $\mathbb{T}$ es grupo de Lie pues es producto de grupos de Lie ($\mathbb{T}$ = $S^1 \, x \, S^1$), por tanto S^1 es subgrupo de Lie de $\mathbb{T}$.

2.- $Gl_n(\mathbb{R})$ es subgrupo cerrado de $Gl_n(\mathbb{C})$ con alg de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
U(n) = { A ∈ $Gl_n(\mathbb{C})$: A^{-1}= $\bar{A}^t$} es el grupo unitario con alg de Lie $\mathfrak{u}$(n) = { A ∈ $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: $\bar{A}$ + $A^t = 0$} siendo A^t matriz traspuesta de A y $\bar{A}$ matriz compleja conjugada de A.

$\mathfrak{u}(n)$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Sea U entorno de 0 en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ difeomorfo bajo exp(.) con V = entorno de I_n en $Gl_n(\mathbb{C})$
Además, supongamos que si A $\in$ U entonces $A^t, \bar{A}$ y –A $\in$ U y $|Traza\ A| < 2\pi$.
Sea W entorno de 0 en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ lo bastante pequeño para que exp(.) sea difeomorfsmo y la condición de traza ($|Traza\ A| < 2\pi$) se cumpla.
Sea ahora U = W $\cap \overline{W} \cap W^t \cap$ (-W)
Supongamos que exp(U $\cap\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$) = $Gl_n(\mathbb{R})\ \cap$ V.
Si A $\in$ U $\cap\ \mathfrak{u}(n)$ entonces:

$$(\overline{e^A})^t = e^{\bar{A}^t} = e^{-A} \text{ entonces } (\overline{e^A})^t e^A = e^{-A}e^A = e^0 = I_n$$

y por tanto $e^A \in \mathfrak{u}(n)\ \cap$ V.
Inversamente, supongamos que A $\in$ U y $e^A \in \mathfrak{u}(n)\ \cap$ V entonces $e^{-A} = (e^A)^{-1} = (\overline{e^A})^t = e^{\bar{A}^t}$ entonces -A = $\bar{A}^t$ ya que –A y $\bar{A}^t \in$ U y exp(.) es 1 a 1 en U.

3.- Un argumento similar prueba que $O_n(\mathbb{C})$ = { A $\in Gl_n(\mathbb{C})$: $A^{-1} = A^t$} es subgrupo de Lie cerrado de $Gl_n(\mathbb{C})$ con alg. de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ = {A $\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: A + $A^t = 0$}.

4.- Si A $\in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: det(e^A) = 1 y entonces $e^A \in Sl_n(\mathbb{C})$ = { A $\in Gl_n(\mathbb{C})$: det (A) = 1} siendo $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ = {A $\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: traza (A) $= 0$}.
Inversamente, si det(e^A) = 1 entonces traza(A) = $[2\pi i]$.j para algún j $\in \mathbb{N}$ y si además A $\in$ U entonces traza(A) = 0. Así que $Sl_n(\mathbb{C})$ es subgrupo de Lie cerrado de $Gl_n(\mathbb{C})$ con alg. de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

5.- SU(n) = U(n) $\cap\ Sl_n(\mathbb{C})$ es subgrupo de Lie cerrado de $Gl_n(\mathbb{C})$ llamado grupo unitario especial con álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$ subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ como el conjunto de todas las matrices antihermíticas de traza nula, es decir la intersección de ambas álgebras.
También $Sl_n(\mathbb{R}) = Sl_n(\mathbb{C}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$ subg. de Lie cerrado de $Gl_n(\mathbb{R})$ y alg. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.
$O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{C}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$ subg. de Lie cerrado de $Gl_n(\mathbb{R})$ y alg. $\mathfrak{o}$(n).
S $O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{C}) \cap Sl_n(\mathbb{R})$.

10

SUBGRUPOS NORMALES.

Si X es cualquier conjunto, entonces S_X = { φ : X → X con φ biyección e invertible } es un grupo con la composición de funciones, conocido como *grupo de permutaciones de X* ó *grupo de simetría de X.*

Un resultado fundamental que utilizaremos al tratar los grupos cocientes es el…

Teorema 1 : (Teorema de Cayley)
Para todo grupo G existe un conjunto X y existe un homomorfismo inyectivo de grupos ψ : G → S_X .

> **Demost:** Haciendo X = G y tomando ψ como l(.) : G → S_G para …
> l(g) : G → G . g l(g)
> h gh

CLASES LATERALES:

Definición 1 : Sea G un grupo cualquiera y H un subgrupo de G. Llamaremos *clase lateral izqda. de H* o *coset* al conjunto {hx : h ∈ H } = Hx con x fijo elemento de G. Así mismo, llamaremos *clase lateral derecha de H o coset a derecha* al conjunto {xh : h ∈ H } = xH con x fijo elemento de G.

Teorema 2 : Dos clases laterales a izqda. de H en G o bien son disjuntas o bien son la misma. Además, el cardinal de xH es igual al cardinal de Hx.

Demost: Si Hx ∩ Hy = $\emptyset$ $\Longrightarrow$ ya está.
Supongamos existe un z tal que z ∈ Hx y z ∈ Hy $\Longrightarrow$ z = $h_1x = h_2y \Longrightarrow$ x = $h_1^{-1}h_2$y $\Longrightarrow$ hx = h$h_1^{-1}h_2$y = h´y $\Longrightarrow$ Hx ⊆ Hy.
De igual modo hy = h$h_2^{-1}h_1$x $\Longrightarrow$ Hy ⊆ Hx.
De h ⇄ hx y de h ⇄ xh con h ∈ H se prueba que Card(H) = Card(xH) = Card(Hx).

Como x = 1x = x1 $\Longrightarrow$ x ∈ Hx y x ∈ xH y se le llama *representante* de la clase lateral. Cualquier elemento u de la clase lateral puede tomarse como representante, pues Hu = Hx.

H = 1_GH = H1_G es su propia clase lateral de representante 1_G.

Ponemos G = H + Hx_2+ Hx_3+…+ Hx_r para indicar que las clases H, { Hx_i } i=2,…,r son disjuntas unas con otras y agotan G.

Como (Hx)$^{-1}$= { (hx)$^{-1}$: h ∈ H, x fijo } = { $(x^{-1}h)$: h ∈ H, x fijo } = $x^{-1}H$ y (yH)$^{-1}$= Hy^{-1} $\Longrightarrow$ existe una biyección entre las clases laterales izqdas y derechas de H y…
G = H + x_2^{-1}H + x_3^{-1}H +…+ x_r^{-1}H.

A r = Card(H) = Card(xH) se le llama *índice* de H en G y se le denota con $[G{:}H]$.
El orden de un grupo G es el Card(G) y se le denota con $|G|$.
Obs: $|G|$ = $[G{:}1_G]$.
$\{1_G\}$ es subgrupo de G y r=1.

Del algebra se tiene:

Teorema 3 : (Teorema de Lagrange): $|G|$ = $|H|.[G{:}H]$ ∀ H subgrupo de G.

Teorema 4 : Si K es subgrupo de H y H es subgrupo de G $\Longrightarrow$ $[G{:}K]$ = $[G{:}H].[H{:}K]$.

CONJUGACIÓN:

Definición 2 : Sea G grupo y S cualquier subconjunto de G. A S´= { $x^{-1}sx$: s ∈ S, x fijo elemento de G} se le llama *transformado de S* y se le denota con $x^{-1}Sx$ ó S^x.

Lema 1 : Card(S) = Card(S^x).

Definición 3 : Sean S y S´ subconjuntos de G.

Sea H subgrupo de G. Supongamos existe x ∈ H : S´= $x^{-1}Sx$ = S^{x}.
Decimos que S y S´ son *conjugados respecto de H.*
Clase de conjugados de S es el cto. {S´: S´es conjugado de S resp de H}.

La condición "ser conjugados" es una RBE (relación binaria de equivalencia) pues es… reflexiva: S = ${1_G}^{-1}S1_G$.
simétrica: Si S´= $x^{-1}Sx$ $\Longrightarrow$ S = $(x^{-1})^{-1}S'x^{-1}$.
Transitiva: Si S´´ = $y^{-1}S'y$ con S´= $x^{-1}Sx$ $\Longrightarrow$ S´´ = $y^{-1}x^{-1}Sxy$ = $(xy)^{-1}S\,xy$

Lema 2 : Si H es subgrupo de G ⟹ Todo cto. conjugado de H es subgrupo de G.

Definición 4 : Sea S = $x^{-1}Sx$ $\Longrightarrow$ S = xSx^{-1} y S = $(xy)^{-1}S\,xy$
Sea S = $y^{-1}Sy$
Llamaremos *normalizador de S en H* al cto. { x ∈ H : S = $x^{-1}Sx$} = {elementos de H que autoconjugan S} = subgrupo de H. Se le denota con $N_H(S)$.

Llamaremos *centralizador de S en H* al cto. { x ∈ H : s = $x^{-1}sx$, s ∈ S} = {elementos de H que conmutan a todos los elementos de S} = subgrupo de H. Denotado $C_H(S)$.

- Si S = {s} cto unielemental $\Longrightarrow$ $N_H(S)$ = $C_H(S)$.
- Siempre se tiene $C_H(S) \subseteq N_H(S)$.
- Se llama *centro de G* : Z(G) = $C_G(G) =$ { x ∈ G : g = $x^{-1}gx$, g ∈ G} = {elementos de G que conmutan a todos los elementos de G}.

SUBGRUPOS NORMALES:

Definición 5 : H subgrupo de un grupo G es subgrupo normal si $x^{-1}Hx$ = H ∀x∈G, es decir, si todos los elementos de G autoconjugan el subgrupo H. Otra definición es: H es subgrupo normal de G si $N_G(H)$ = G.

Lema 3 : H subgrupo de G es normal si y solo si toda clase lateral izqda. Hx es también clase lateral derecha xH, o sea, xH = Hx ∀x∈G.

Corolario 1 : Si H es subgrupo de G de índice 2 $\Longrightarrow$ H es normal en G.

Demost: debido a que si G = H + xH y por otro lado G = H + Hx necesariamente debe ser xH = Hx.

Definicion 6 : Un grupo G se le llama *simple* si no tiene subgrupos normales propios, o sea, que los únicos subgrupos normales que tiene son los triviales.

Definición 7 : Sea f : G → H homomorfismo. Sea T = { g ∈ G : f(g) = 1_H}. A T se la llama *núcleo del homomorfismo f* y se le denota con ker(f).

- ker(f) es subgrupo de G.
- ker(f) es subgrupo normal de G.

Sin demostración recordamos del álgebra:

A.- Primer Teorema de Homomorfía: Para todo homomorfismo f, ker(f) es subgrupo normal de G y f(g) = f(h) ⟺ g y h pertenecen a la misma clase de equivalencia módulo ker(f).

B.- Segundo Teorema de Homomorfia: Dado un subgrupo normal T de un grupo G, existe un único homomorfismo f : G → G/T tal que ker(f) = T.

Definición 8 : A G/T se la llama grupo cociente ó grupo factor de G por T.

- Sea H subgrupo de G. No todo conjunto cociente G/H hereda la condición de grupo. Para que el conjunto G/H sea grupo H ha de ser normal en G pues ello garantiza la clausura de la operación de grupo en G/H.
- Sea C_L={ cosets a izqda. de G/H} = { 1_G, x_2,..., x_r} que involucran una única descomposición de G de modo que todo g ∈ G es g = $x_k h_l$ con $x_k \in C_L$ y h_l ∈ H. Así, tenemos que dicho g = $h_t x_k h_l$ para cierto $h_t \in C_L$, pues los elementos de C_L son de la forma Hx_i.
- De igual modo con C_R= { cosets a derecha de G/H}.
- Si H es subgrupo cerrado entonces C_R y C_L son variedades de dimensión = dim(G) – dim(H).
- Si H es subgrupo normal (llamado también invariante) entonces los elementos del coset $\{x_i\}$ pueden elegirse de modo que sean cerrados bajo la multiplicación del grupo formando un cto. : G/H tal que es un grupo.

C.- Tercer Teorema de Homomorfía: Sea f : G → K homomorfismo con T = ker(f) ⟹ K ≈ G/T
Si f(x) = x^* ⟹ x^* ⇄ Tx es un isomorfismo entre K y G/T.

Definición 9 : Un espacio topológico es *conexo* si cualesquiera dos de sus puntos pueden ser unidos mediante una línea y todos los puntos de la línea están en el espacio. *Componente conexa del punto p* = {puntos conexos con p }.

- Una componente conexa de un grupo continuo o de un grupo de Lie conocida como hoja, lámina no puede ser ella misma un grupo continuo o un grupo de Lie si no contiene al elemento unidad.
- Además, todas las otras hojas del grupo de Lie son isomorfas como variedades, cada una a la otra y a la componente conexa G_{1_G}.
  Una nueva estructura de grupo puede ser definida en cada hoja de modo que la convierta en isomorfa con la componente conexa.
- Los representantes de cada coset, x_i , son un elemento de cada hoja. Una buena elección de los representantes de cosets para el grupo factor G/G_{1_G} debería ser el elemento de cada hoja en el que se convierte la identidad 1_G bajo la aplicación que convierte a la hoja en un grupo isomorfo con G_{1_G}.
  Un grupo de Lie G polilaminado (de varias hojas) puede ponerse como suma de elementos de grupo de la forma $d_i G_{1_G}$ de modo que G = $\cup_{i=0} d_i G_{1_G}$ con $d_i \in$ D.
  Cada hoja es topológicamente equivalente a una variedad.
  Solo G_{1_G}= $d_0 G_{1_G}$ tiene estructura de grupo
  La hoja G_i = $d_i G_{1_G}$ puede hacerse isomorfa con el grupo G_{1_G} por la acción del difeomorfismo d_i^{-1} a la izqda.

Teorema 6 : El grupo factor G/G_{1_G} de un grupo de Lie por su componente conexa G_{1_G} es un grupo discreto D de dimensión 0.

> **Demost**: G_{1_G} es subgrupo normal de G por tanto existe un único homomorfismo π : G $\rightarrow$ G/G_{1_G} de modo que ker(π) = G_{1_G}.
> Como dim (G) = dim(ker(π)) + dim(Im (π))
> Como G es variedad entonces es unión disjunta de sus componentes conexas y estas son todas variedades difeomorfas con G_{1_G} luego comparten la misma dimensión que G_{1_G}. Así, dim(Im(π)) = dim(G) – dim(G_{1_G}) = 0.

Si son conocidas: a) la estructura $de\ G_{1_G}$ de de un grupo de Lie G

b) la estructura del grupo factor discreto D = G/G_{1_G}
c) la estructura de la aplicación : D $G_{1_G} D^{-1} \to G_{1_G}$

entonces la estructura del grupo de Lie G puede construirse asi:

- Sea g ∈G $\rightsquigarrow d_i\alpha$ con d_i, d_j ∈ D ⊂ G y $\alpha, \beta \in G_{1_G} \Longrightarrow$
  h∈G $\rightsquigarrow d_j\beta$

  h ° g = $d_i\alpha$ ° $d_j\beta$ = $d_i d_j(d_j^{-1}\alpha d_j)\, \beta$ = $d_k\, \alpha'\, \beta$ con d_k= $d_i d_j$
  y α'=$d_j^{-1}\alpha d_j$

  Como D es grupo entonces d_k= $d_i d_j$ ∈ D
  Como G_{1_G} es invariante α'=$d_j^{-1}\alpha d_j \in G_{1_G}$
  Entonces las multiplicaciones en D y en G_{1_G} junto con la aplicación $\alpha \to \alpha'$ determinan unívocamente la multiplicación de grupo en G.

Todo grupo de Lie da lugar a un grupo discreto (grupo de Lie en el que todos sus subconjuntos son abiertos incluso sus puntos) que es el conjunto de clases laterales G/G_{1_G}. Los elementos de G/G_{1_G} se identifican entonces con las componentes conexas de G. Tales componentes conexas resultan topológicamente indistinguibles entre ellas y de G_{1_G}. Multiplicar los elementos de G_{1_G} por un elemento fijo en una componente conexa distinta de G_{1_G} produce una correspondencia biyectiva y continua (homeomorfismo) entre dichas componentes, así que basta con determinar la topología y la estructura diferenciable de G_{1_G}.

En este capitulo hemos visto que el cociente de un grupo de Lie por un subgrupo suyo invariante o normal genera otra forma de construir nuevos grupos de Lie.

Ejemplos : 1.- El grupo ortogonal clásico del plano real $O_2(\mathbb{R})$ = { A ∈ $GL_2(\mathbb{R})$: A^tA = I_2} consta de dos círculos desconectados entre si: {$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$} ∪ { $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$} . La componente conexa que contiene el elemento idéntico del grupo está formada por las matrices con determinante igual a 1, es decir, G_{1_G}= S$O_2(\mathbb{R})$ = { $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$: a^2+ b^2 = 1 } subgrupo de rotaciones del plano y $O_2(\mathbb{R})$/ S$O_2(\mathbb{R})$ es grupo de Lie.

2.- El grupo de Lorentz en el plano $O_{1,1}$= { $\begin{bmatrix} a & \pm b \\ b & \pm a \end{bmatrix}$: a^2- b^2 = 1 } consta de dos hipérbolas desconectadas entre si, cada una con dos ramas. La componente conexa que contiene la identidad del grupo es la rama

S$O_{1,1}{}^+$ = { $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$: a^2- b^2 = 1 y a>0 } así que $O_{1,1}$/ $SO_{1,1}{}^+$ es grupo de Lie.

3.- Sea $GL_n(\mathbb{R})$ grupo de Lie con dos componentes conexas. La componente que posee la identidad es $GL_n{}^+(\mathbb{R})$ de modo que el grupo factor $GL_n(\mathbb{R})$/ $GL_n{}^+(\mathbb{R})$ es un grupo Lie.
Así pues: $GL_n(\mathbb{R})$/ $GL_n{}^+(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

4.- Para el homomorfismo det(·) : $GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}-\{0\}$ se tiene que ker(det) = $SL_n(\mathbb{K})$. Como $SL_n(\mathbb{K})$ es subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{K})$ entonces: $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{K}-\{0\}$.
Así pues: $GL_n(\mathbb{R})$/ $SL_n(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}-\{0\}$.
$GL_n(\mathbb{C})$/ $SL_n(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}-\{0\}$.

11

CORRESPONDENCIA FUNDAMENTAL ENTRE SUBGRUPOS Y SUBALGEBRAS DE LIE.

Un subgrupo de Lie de un grupo de Lie origina una subálgebra de Lie de su álgebra de Lie. La inversa también es cierta: Toda subálgebra de Lie corresponde a algún subgrupo de Lie.

Definición 1: Sea F : X → Y continua con X,Y esp. topológicos. F es un *revestimiento* si todo $y \in Y$ posee un entorno V_y de modo que $F^{-1}(V_y)$ es homeomorfo a V_y x D con D conjunto discreto de tal forma que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(V_y) \arrow[rr] \arrow[dr, "F"'] & & V_y \times D \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V_y & \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección sobre la primera componente del producto V_y x D.

Un conjunto D es discreto si todo subconjunto suyo es abierto.
Se llama *revestimiento conexo* si X es conexo.

Definición 2: Un espacio top. X es *simplemente conexo* si todo revestimiento conexo de X es homeomorfismo.

Lema 1: Sea G_2 conexo. Sea F : $G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupos de Lie y difeomorfismo local entonces F es un revestimiento.

Demost: F es sobre pues F(G_1) es subgrupo abierto y por tanto cerrado.

Sea y ∈ G_2 entonces F^{-1}(y) es subvariedad discreta, pues si x ∈ F^{-1}(y) y dados U_x y V_y entornos de x y de y resp. para los que F es difeomorfismo se tiene que F(F^{-1}(y) ∩ U_x) = y asi que F^{-1}(y) ∩ U_x = {x}.
Sea D = $F^{-1}(1_{G_2})$. Veamos que $F^{-1}(V_y)$ es homeomorfo a V_y x D de modo que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V_y) & \to & V_y \times D \\ F \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & V_y & \end{array}$$

Para ello basta definir las funciones mutuamente inversas: G(a,d) = σ(a)d y H(z) = (F(z), $[\sigma F(z)]^{-1}$.z) siendo $\sigma = F^{-1}$: $V_y \to U_x$
y H : $F^{-1}(V_y) \to V_y$ x D.

Lema 2: Sea G grupo de Lie y sea 𝔥 ⊂ L(G) subalgebra entonces Δ_x = { D_x ∈ 𝔥} es una distribución involutiva e invariante por traslaciones a izqda.

Demost: Sea $D_1,\dots,D_r$ una base de 𝔥 entonces para todo x ∈ G: Δ_x= $< D_{1x},\dots, D_{rx} >$ $\Longrightarrow$ Δ = < $D_1,\dots,D_r$> y la distribución es involutiva pues $[D_i, D_j]$ ∈ 𝔥 $\Longrightarrow$ $[D_i, D_j] = \sum c_{ij}^k D_k$ $\Longrightarrow$ $[D_i, D_j]$ ∈ Δ .
Es invariante por traslaciones a izqda. pues para x,p ∈ G: $l_{x*}\Delta_p = \Delta_{xp}$

Definición 3: Una *distribución* en una variedad X es una aplicación Δ: X → $T_x(X)$ donde Δ_x es un subespacio de $T_x(X)$ que cumple:
para cada p ∈ X existe un abierto U_p ⊂ X y existe campos $D_1,\dots,D_r$ tangentes en U_p tales que para todo x ∈ U_p: $D_{1x},\dots, D_{rx}$ son base de Δ_x.

- Sea V abierto de X. Dado Δ_x $distribucion$, se define Δ(V) = { D ∈ $\mathcal{D}$(V) : $D_x \in \Delta_x \ \forall x \in V\}$
  $\mathcal{D}$(V) = { derivaciones D: C^∞(V) → C^∞(V) } = C^∞-módulo y álgebra con el corchete de Lie.
- Se suele llamar *distribución* a Δ(X) = Δ
- Δ es *involutiva* si es cerrada para el corchete de Lie, es decir, si para todo D_i, D_j ∈ Δ: $[D_i, D_j]$ ∈ Δ.
- Se llama *variedad integral* de una distribución Δ de X a toda subvariedad inmersa conexa H ⊂ X .
- Se llama *variedad tangente* si H no es conexa.

- Se llama variedad integral máxima de una distribución Δ pasando por un punto x a una variedad integral (conexa) K $\subset$ X de modo que si H $\subset$ X es otra variedad integral con x $\in$ H entonces H $\subset$ K
  Si Δ es involutiva entonces por cada punto de X pasa un única variedad integral máxima.

Lema 3: Sea G grupo de Lie con L(G) su algebra de Lie. Si $\mathfrak{h} \subset$ L(G) es subalgebra entonces existe un único subgrupo de Lie inmerso y conexo H de G tal que $\mathfrak{h} =$ L(H).

Demost: Por el lema 2, $\mathfrak{h}$ define una distribución que es involutiva e invariante por traslaciones a izqda. es decir, que para x,p $\in$ G: $l_{x*}\Delta_p = \Delta_{xp}$ por tanto si S es una subvariedad integral (inmersa y conexa) también lo es l_x(S).
Sea en G_{1_G}(componente conexa de G que contiene a la identidad de G) la subvariedad integral máxima H (toda otra subvariedad integral de G_{1_G} está incluida en H), entonces par cada h $\in$ H : $l_{h^{-1}}$(H) es una variedad integral que contiene a la identidad pues $l_{h^{-1}}$(h) = 1_G y $l_{h^{-1}}$(H) $\subset$ H es subgrupo ya que si h, g $\in$ H entonces $h^{-1}g \in$ H.
El producto en H y la operación de paso al inverso en H son diferenciables se sigue de la hipótesis y de ser la inclusión in: H $\hookrightarrow$ G inmersión local.
L(H) = $\mathfrak{h}$ pues del diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{1_G}(H) & \xrightarrow{in_*} & T_{1_G}(G) \supset \Delta_{1_G} \\ \approx\downarrow & & \downarrow\approx \\ \mathrm{L(H)} & \xrightarrow[in_*]{} & \mathrm{L(G)} \supset \mathfrak{h} \end{array}$$

siendo $in_*(T_{1_G}(H)) = \Delta_{1_G}$.
Unicidad: supongamos que hay otro subgrupo de Lie inmerso conexo $\mathcal{F} \subset$ G tal que L($\mathcal{F}$) = $\mathfrak{h}$ entonces $\mathcal{F}$ es una subvariedad integral conexa de Δ y como contiene a la identidad entonces $\mathcal{F} \subset$ H. Ahora bien, la composición de inclusiones $\mathcal{F} \hookrightarrow$ H $\hookrightarrow$ G y H $\hookrightarrow$ G son inmersiones locales así que $\mathcal{F} \hookrightarrow$ H es diferenciable e inmersión local entre grupos de igual dimensión por lo que es un difeomorfismo local y $\mathcal{F}$ es subgrupo abierto de H, por tanto cerrado y por conexión son iguales e isomorfos como grupos de Lie.

Teorema 1: Sean G_1, G_2 grupos de Lie de modo que G_1 es simplemente conexo
Sea φ : L(G_1) $\to$ L(G_2) homomorfismo de algebras de Lie.

Entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie F : $G_1 \to G_2$ que cumple: $F_*= \varphi$.

Demost: Existencia: Sea G = $G_1 x\, G_2$ grupo de Lie.

Sea in : L(G_1) → L(G) homomorfismo inyectivo de modo que $\pi_{1_*}\widetilde{D}$ = D

D $\quad\widetilde{D}$ $\qquad$ y $\pi_{2_*}\widetilde{D}$ = 0

Sea in : L(G_2) → L(G) homomorfismo inyectivo de modo que $\pi_{1_*}\tilde{E}$ = 0

E $\quad\tilde{E}$ $\qquad$ y $\pi_{2_*}\tilde{E}$ = E

Para $\widetilde{D}$: $l_{(x,y)_*}\widetilde{D} = \widetilde{D}$ ya que $\pi_{1_*} l_{(x,y)_*}\widetilde{D} = l_{x_*}\pi_{1_*}\widetilde{D}$ = D

$\pi_{2_*} l_{(x,y)_*}\widetilde{D} = l_{y_*}\pi_{2_*}\widetilde{D}$ = 0

Entonces tomamos subalgebra $\mathfrak{h} \subset$ L(G) de forma que la dim($\mathfrak{h}$) = dim(L(G_1)) y $\mathfrak{h} = \{\widetilde{D} + \varphi(\widetilde{D})\}_{D\in L(G_1)}$ pues para $D_1, D_2 \in$ L(G_1) se tiene que $[\widetilde{D_1} + \varphi(\widetilde{D_1}), \widetilde{D_2} + \varphi(\widetilde{D_2})] = [\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2}] + [\varphi(\widetilde{D_1}), \varphi(\widetilde{D_{12}})] = [\widetilde{D_1, D_2}] + \varphi([\widetilde{D_1, D_2}]) \in \mathfrak{h}$ aplicando π_{i_*}

Así pues, existe un único subgrupo de Lie inmerso conexo H ⊂ G tal que $\mathfrak{h}$ = L(H) y que π_1 : H ⊂ G → G_1 son homomorfismos de grupos de Lie,

π_2 : H ⊂ G → G_2

de donde tomaríamos F = $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. Basta ver que π_1 es isomorfismo: se ve que $\pi_{1_*}(\widetilde{D} + \varphi(\widetilde{D})_{(x,y)} = D_x$ y si D_x= 0 entonces D = 0. Así, π_{1_*}es in yectiva y π_1 es isomorfismo pues ambos esp. vectoriales son de la misma dimensión. Por tanto π_1 es difeomorfismo local, es revestimiento (por lema 1) y es difeomorfismo global por ser G_1 simplemente conexo entonces π_1 es homeomorfismo y

F_*(D) = $\pi_{2_*}(\pi_{1_*}{}^{-1}$(D)) = $\pi_{2_*}(\widetilde{D} + \varphi(\widetilde{D}))$ = φ (D).

Corolario 2: Si H,G son grupos de Lie simplemente conexos: L(G) ≈ L(H) implica G≈ H.

Demost: Consecuencia del teorema 1.

Corolario 3: (sin demostración) Si G es simplemente conexo entonces Hom(G,H) = Hom(L(G), L(H)).

Definición 4: Sean G,H grupos de Lie. G y H son *localmente isomorfos* si existe U = entorno de $1_G \, en \, G$ y existe V entorno de 1_H en H y existe F : U → V difeomorfismo tal que F($g_1 g_2$) = F(g_1).F(g_2) ∀ $g_1, g_2, g_1 g_2$ ∈ U.

Teorema 2: (Teorema fundamental de Sofus Lie) G es localmente isomorfo a H si y sólo si tienen algebras de Lie isomorfas.

> **Demost:** (⟸) Si L(G) ≈ L(H) entonces G ≈ $\tilde{G}/D_1$ y H ≈ $\tilde{G}/D_2$ con $\tilde{G}$ grupo recubridor universal para el álgebra de Lie que comparten ambos y D_i ciertos subgrupos normales discretos de $\tilde{G}$.
> Como G ≈ $\tilde{G}$ localmente y H ≈ $\tilde{G}$ localmente, entonces G ≈ H localmente.

Teorema 3: Sea $\mathfrak{g}$ algebra de Lie de dimensión finita. Esiste G grupo de Lie tal que su algebra de Lie L(G) = $\mathfrak{g}$ y G es único si es simplemente conexo.

¿En qué medida es la correspondencia entre grupos y álgebras de Lie 1 a1?

- Grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas.
- La inversa es falsa: **contraejemplo**: tanto $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{T}^n$ tienen algebras de Lie abelianas n-dimensionales obviamente isomorfas pero ellos como grupos de Lie no son isomorfos.
- Si ambos grupos son simplemente conexos entonces si existe la correspondencia 1 a1.

Definición 4: Sean X,Y esp. top. y sea π : X → Y aplicación continua y sobre. π es aplicación recubridora si para cada y ∈ Y hay un V = entorno de y tal que π^{-1}(V) = $\coprod_\alpha U_\alpha$ (unión disjunta) con U_α abierto de X tal que U_α es homeomorfo a V $\forall\alpha$.

Definición 5: Llamaremos *homomorfismo recubridor* a un homomorfismo de grupos de Lie que también es aplicación recubridora.Si F : G → H es homomorfismo recubridor decimos que G es *grupo recubridor* de H.

Proposición 1: Sean G,H grupos de Lie y sea F : G → H un homomorfismo recubridor entonces F_* : L(G) → L(H) es un isomorfismo.

> **Demost:** Debido a que una aplicación recubridora C^∞ es un difeomorfismo local, el push-forward desde T_{1_G}(G) a T_{1_H}(H) es un

isomorfismo y por tanto el homomorfismo de algebras inducido es un isomorfismo.

Teorema 4: (Correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie)
Existe la biyección

$$\{[\varphi]:\ \varphi: L(G) \to L(H) isomorf.\} \leftrightarrow \{[\psi]:\ \psi:\ G \to H\ isomorf.\}$$

L(G) ↭ G

Siempre que dim(L(G)) sea finita
dim(L(H)) sea finita
G,H simplemente conexos

Demost: Como resultado del teorema 1, del corolario 2 y del teorema 3.

Definición 6: Sea $\mathfrak{g}$ álgebra deLie. Una *representación* de $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie ρ : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ para algún n.

- Si ρ es inyectiva, la representación se llama fiel.
- Si ρ es fiel entonces $\mathfrak{g} \approx \rho(\mathfrak{g})$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Terorema 5: (ADO) Toda álgebra de Lie tiene una representación fiel. (Sin demost)
2ª versión: Toda álgebra de Lie es subálgebra de una $M_n(\mathbb{K})$ para algún n.

¿Qué sucede cuando permitimos grupos de Lie no simplemente conexos?
Como todo grupo de Lie posee un recubridor simplemente conexo:

Teorema 6: Sea $\mathfrak{g}$ algebra de Lie de dimensión finita.
Los grupos de Lie conexos G cuyas álgebras de Lie L(G) son isomorfas a $\mathfrak{g}$ son aquellos de la forma $\tilde{G}/\Gamma$ donde $\tilde{G}$ es grupo de Lie simplemente conexo recubridor de G con L(G) $\approx \mathfrak{g}$ y Γ es subgrupo normal discreto de G.

Demost: Dada $\mathfrak{g}$, sea G un grupo de Lie simplemente conexo con L(G) $\approx \mathfrak{g}$
Supongamos que H es otro grupo de Lie con L(H) $\approx \mathfrak{g}$.
Sea φ : L(G) $\to$ L(H) el isomorfismo de algebras de Lie entre L(G) Y L(H)
Por teorema 1 existe un homomorfismo de grupos de Lie Φ : G $\to$ H tal

que $\Phi_* = \varphi$ y como φ es isomorfismo entonces Φ es difeomorfismo local y $\Gamma = \ker \Phi$ es subgrupo normal discreto de G.
Como Φ es homomorfismo de Lie sobre con $\ker \Phi = \Gamma$ entonces $H \approx G/\Gamma$

Proposición 2: Dos grupos de Lie conexos son localmente isomorfos si y sólo si poseen grupos recubridores universales isomorfos.

Demost: Por el teorema fundamental de Sofus Lie dos grupos son localmente isomorfos si y sólo si tienen algebras de Lie isomorfas, pero éstas álgebras de Lie son compartidas por sus respectivos grupos universales recubridores y por tanto éstos son localmente isomorfos.

ESPACIOS RECUBRIDORES:

Sea $\mathfrak{g}$ algebra de Lie abstracta de dimensión finita = n. Entonces existe un grupo de Lie G simplemente conexo de dimensión n tal que $L(G) \approx \mathfrak{g}$.
G es único salvo isomorfismo local, o sea, no existe correspondencia 1 a 1 entre grupos de Lie y álgebras de Lie, pero existe un único grupo de Lie con dicha álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que es simplemente conexo : $\tilde{G}$ grupo recubridor universal.
Todos los grupos con igual álgebra de Lie se pueden obtener de $\tilde{G}$:

- Sea D subgrupo normal discreto de $\tilde{G}$ tal que $g d_i g^{-1} = d_j$ con $d_i, d_j \in D$ y $g \in \tilde{G}$ entonces $G = \tilde{G}/D$ es grupo de Lie con $L(G) \approx L(\tilde{G})$
- G es múltiplemente conexo si D contiene más de un elemento.
- Todos los grupos de Lie que comparten una misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ son los cocientes de $\tilde{G}$ por todos los posibles subgrupos normales discretos $D_i \subset \tilde{G}$ tales que $L(\tilde{G}) \approx \mathfrak{g}$.
- Como $\tilde{G}$ es conexo y D es discreto entonces podemos deformar continuamente un elemento g hasta 1_G en $g d_i g^{-1} = d_j$ de modo que $1_G d_i 1_G{}^{-1} = d_j \Leftrightarrow d_i = d_j$ entonces $g d_j = d_j g \quad \forall\, g \in \tilde{G} \Leftrightarrow d_j \in Z(\tilde{G})$ entonces $D \subset Z(\tilde{G})$.
  Todo subgrupo de $Z(\tilde{G})$ es normal y discreto de $\tilde{G}$.

Todos los subgrupos normales y discretos de $\tilde{G}$ son subgrupos de Z($\tilde{G}$).

- Sea $\{D_i\}_{i=1\ldots r}$ conjunto completo de subgrupos normales discretos de $\tilde{G}$, entonces el conjunto completo de grupos de Lie tales que su algebra de lie L(.) = $\mathfrak{g}$ es $\{\tilde{G}/D_i\}_{i=1\ldots r}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{G} & & \\
\swarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
\tilde{G}/D_1 & \tilde{G}/D_2 & \ldots \;|\; \ldots. & \tilde{G}/D_r & \\
 & & | & & \\
\searrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \mathfrak{g} & &
\end{array}
$$

Existe una única correspondencia 1 a 1 entre $\mathfrak{g} \rightleftharpoons \tilde{G}$.

EL PROBLEMA RECUBRIDOR: ¿ES exp(.) SOBRE?, ES DECIR ¿ES Im(exp(.) = G? NO.

- No siempre puede aplicarse un álgebra de Lie sobre todo G con una sola exp(.). Ello se debe a los generadores compactos de L(G) que recorren circunferencias y siempre son un subgrupo de G.
  Los generadores no compactos progresan indefinidamente y no son subgrupo de G.
- Si G es compacto entonces con una sola exp(.) se obtiene todo G.
  Si G no es compacto entonces G es obtenido por una sucesión de exp(.)´s debido a que los grupos de Lie matriciales están definidos por restricciones algebraicas y asi también sus subgrupos y grupos cocientes. O sea, la variedad subyacente de todo grupo de Lie matricial es una variedad algebraica entonces puede expresarse como producto de variedades algebraicas de modo que cada una de ellas parametriza un subgrupo o bien un coset.
  La var. alg. que parametriza la exp(grupo no compacto) es $\mathbb{R}^m$ con m el número de generadores no compactos.
  La var. alg. que parametriza la exp(grupo compacto) es compacta.
  Supongamos $\mathfrak{g}^*$ es algebra de Lie no compacta asociada al grupo no compacto G^*. El esp. vectorial de estas álgebras se descompone de forma natural en dos subespacios vectoriales $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^*$ con
  $\mathfrak{k}$ = subesp. Vect. formado por todos los generadores compactos de $\mathfrak{g}^*$
  $\mathfrak{p}^*$ = el resto de generadores, todos no compactos.
  $\mathfrak{k}$ es cerrado bajo conmutación. Es una subalgebra compacta que genera los subgrupos compactos maximales de G^*.

$\mathfrak{p}^*$ no es cerrado bajo conmutación y no forma una subálgebra. Los elementos Exp($\mathfrak{p}^*$) son elementos de G^*pero ellos no forman un subgrupo.
Tal descomposición tiene una contrapartida en G^*: la descomposición del coset. Sea K subgrupo compacto maximal de G^* : G^*= P^*K es la descomposición a izqda. y G^*= KP^* es la descomposición a derecha.

Aquí, G^*= Exp($\mathfrak{g}^*$), K = Exp($\mathfrak{k}$) y P^*= Exp($\mathfrak{p}^*$).

Esta es única: todo elemento de G^* está unívocamente determinado como el producto de un elemento del subgrupo con un elemento del coset. P^* es no compacto (las geodésicas que cruzan por 1_G son no recurrentes)
Como veremos en el apartado de la forma de Killing: X ∈ $\mathfrak{g}$ es generador compacto si $\mathcal{K}$(X,X) = traza(ad(X).ad(X)) es definida negativa. Y es generador no compacto si es definida positiva.

Teorema 7: (De Cartan) G ≈ H para L(G) ≈ L(H) si sus subgrupos compactos maximales son isomorfos entre si.

Debido a que las partes no compactas de L(G) y de L(H) se aplican a elementos del grupo con la topología de un espacio euclideo (no compacto).

- Si $\tilde{G}$ es compacto es útil hallar el subgrupo D_{MAX} = subgrupo maximal compacto de $\tilde{G}$ pues todos los grupos de Lie compactos con igual álgebra de Lie son de la forma $\tilde{G}/D_k$ para D_k subgrupo de D_{MAX}.
- Si $\tilde{G}$ es simple el calculo de D es sencillo: d_i ∈ Z($\tilde{G}$) y por el lema de Schur $d_i = \lambda I_n$.
- Si $\tilde{G}$ es compacto y es grupo universal recubridor tanto de un grupo de Lie G como de otro grupo de Lie H entonces G es ≈ $\tilde{G}/D_{MAX}$ localmente y H es ≈ $\tilde{G}/D_{MAX}$ localmente por lo que existen D_1, D_2 subgrupos normales discretos de $\tilde{G}$ de modo que:

$$G \approx \tilde{G}/D_1 \approx \tilde{G}/D_{MAX} \approx \tilde{G}/D_1 \approx H$$

12

REPRESENTACION ADJUNTA

Sea φ : G $\rightarrow$ H un homomorfismo de grupos de Lie, entonces φ induce un homomorfismo de álgebras de Lie φ_* : L(G) $\rightarrow$ L(H)

$[u, v]$ $[\varphi_*(u), \varphi_*(v)]$

Donde para φ se tiene: $\varphi(1_G) = 1_H$

$\varphi(a^{-1}) = \varphi(\mathrm{a})^{-1}$

Ker(φ) = { a∈G: φ(a) = 1_H } subgrupo normal de G cerrado luego es subgrupo de Lie de G.

φ(G) = Im(φ) es subgrupo de Lie de H.

Por otro lado, para φ_* : Ker(φ_*) = ideal de L(G).

Ker(φ_*) = L(Ker(φ)) álg. de Lie del subg. de Lie Ker(φ).

φ_* (L(G)) = L($\varphi(G)$).

De modo que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\exp"'] & L(H) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

Así que: $\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi_*$

Definicion 1: Sea G grupo de Lie.
Llamamos *automorfismo* a un isomorfismo de G en sí mismo φ : G $\rightarrow$ G.
Llamamos *endomorfismo* a un homomorfismo de G en sí mismo.

- Llamamos Aut(G) = { φ : G $\rightarrow$ G con φ isomorfismo} = grupo de Lie.
- Llamamos End(G) = { φ : G $\rightarrow$ G con φ homomorfismo} = grupo de Lie.
- Llamamos Aut(L(G)) = { φ_*: L(G) $\rightarrow$ L(G) con φ_* isomorf. y φ_* operador lineal}.

- Llamamos Int(G) = { φ_a : G $\rightarrow$ G isomorf. a ∈ G } = subgrupo normal de
  x axa^{-1} Aut(G)

  Se les conoce como *automorfismos internos* de G.
  x y axa^{-1} son elementos conjugados de G.
  Si φ_a ∈ Int(G) entonces φ_{*a} es operador lineal y φ_{*a}= Ad(a), a ∈ G para Ad : G $\rightarrow$ Aut(L(G)).
  Llamamos Ad(G) = { Ad(a)}$_{\mathrm{a\,\in\,G}}$ subgrupo de Lie de Aut(L(G)) llamado *grupo adjunto de G*.
- Z(G) ⊂ Ker(Ad) siempre.
- Si G es conexo: Z(G) = Ker(Ad) y Aut(G) = Aut(L(G))
- Los elementos de Z(G) generan $id_{Ad(G)}$.
- $\mathfrak{h}$ subalgebra de $\mathfrak{g}$ es ideal si y sólo si $\mathfrak{h}$ es invariante respecto de Ad(G), o sea, si Ad(a) $\mathfrak{h}$ ⊂ $\mathfrak{h}$ ∀ a ∈ G.
- Llamaremos *algebra adjunta* de G al algebra de Lie de Ad(G): L(Ad(G)).
  L(Ad(G)) = { ad(u) operador lineal } = ad(L(G)).

PRELIMINARES:
Sea V $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea G grupo.
Sea ψ : G $\rightarrow$ S_V homomorfismo de G en el grupo simétrico de V $\Longrightarrow$
ψ : G $\rightarrow$ $GL(V)$ para GL(V) = { g : V $\rightarrow$ V con g isomorfismo }
Sea End($\mathbb{R}^n$) = { T : $\mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ con T transformación lineal } $\Longrightarrow$ la elección de una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ en $\mathbb{R}^n$ induce biyección

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) & \leftrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{T} & & [T_{ij}] \end{array}$$

Con $[T_{ij}]$ matriz nxn con entradas T_{ij} tales que T(e_j) = $\sum_i T_{ij}\, e_i$.
Entonces ψ son transformaciones de semejanza, o sea, ψ : G $\rightarrow$ M_n ($\mathbb{R}$) con T
g $g\mathrm{T}g^{-1}$
que pertenece a M_n ($\mathbb{R}$). T y $g\mathrm{T}g^{-1}$ son las matrices de cambio de base en $\mathbb{R}^n$ asociadas a la misma transformación lineal T respecto de bases distintas.

Sea $\mathcal{F}(V)$ = { B: B es base de V).
Sea GL(V) = { g : V $\rightarrow$ V con g isomorfismo }.
Sea $GL_n(\mathbb{K})$ = { A ∈ M_n ($\mathbb{K}$) : A es no singular }
La elección de una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V induce las biyecciones:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(V) & \leftrightarrow & \mathrm{GL(V)} & \leftrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ \{e_i\}_{i=1}^n & & g & & [g_{ij}] \end{array}$$

Definición 2: Sea G grupo. Una *representación lineal* de G es un homomorfismo ρ : G $\rightarrow GL(V)$, es decir, una función tal que $\rho(g).\rho(h) = \rho(gh)$, o bien una acción de G en V mediante transformaciones lineales.

- ρ es la acción de G en el espacio vectorial V. Sea dim(V) = n finita.
- $Si \ker(\rho)$ = $\{1_G\}$ entonces ρ la representación de G es *fiel, exacta ó efectiva.*
- Elegida base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ de V entonces ρ : G $\rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ es una representación matricial de G.
- Dos representaciones lineales de un mismo grupo ρ_1 : G $\rightarrow GL(V_1)$ y ρ_2 : G $\rightarrow GL(V_2)$ son equivalentes, $\rho_1 \equiv \rho_2$, si existe L : $V_1 \rightarrow V_2$ isomorfismo de manera que L ° ρ_1(a) = ρ_2(a) ° L $\forall$ a $\in$ G.

La aplicación Φ : Aut(G) $\rightarrow$ Aut(L(G)) que a todo automorfsmo de grupos de Lie le

$$\varphi \qquad \varphi_*$$

asocia el correspondiente automorfismo inducido de algebras de Lie es una representación lineal del grupo de automorfismos de G en el algebra de Lie L(G)

- Si G es conexo entonces Φ es fiel.
- Int (G) es subgrupo normal de Aut(G) $\Longrightarrow$ $\Phi|_{Int(G)}$: Int (G) $\rightarrow$ Int(G)

  $$a \qquad ax a^{-1}$$

  Pasando al diferencial se obtiene Ad : G $\rightarrow$ Aut(L(G))

  $$a \qquad Int_*(a)$$

  Al igual que todos los automorfismos de L(G), los operadores Ad(a) conservan el conmutador: Ad(a) $[u, v]$ = $[Ad(a)u, Ad(a)v]$ $\forall$ a $\in$ G.

Definición 3: La aplicación Ad : G $\rightarrow$ Aut(L(G)) es un homomorfismo analítico tal que Ad(a) ° Ad(b) = Ad(ab) al que se le conoce como *representación adjunta* del grupo G en L(G).

Mediante la linealización pasamos de Ad(.) a su diferencial, Ad_*= ad obteniendo la representación adjunta del álgebra L(G) en el álgebra de derivaciones internas D(L(G)) que son de tipo especial ad : L(G) $\rightarrow$ D(L(G))

$$u \qquad ad(u) : L(G) \rightarrow L(G)$$

$$v \qquad [u, v]$$

- Como Ker(ad) = Z(L(G)) $\Longrightarrow$ ad(L(G)) = L(G)/Z(L(G))

- ad(L(G)) ⊂ D(L(G)) y se le llama algebra adjunta.
- El paso de ad(L(G)) a grupo adjunto Ad(G) se realiza mediante la aplicación exp(.) : Ad(a) = $e^{ad(u)}$ para a = e^{u}.

Así pues nos encontramos con dos representaciones canónicas de L(G):

1.- La estándar: ad(u) : L(G) → L(G)
v $[u,v]$

2.- Sea A ∈ G de modo que Ad_{A*}: T_{1_G}(G) → T_{1_G}(G) es lineal entonces Ad_{A*} es una representación pues Ad_A= l_A° r_A con l_A= traslación a izqda. por A y r_A= traslación a derecha por A.
l_{A*} deja invariante todo campo vect. Invariante a izqda. y r_{A*}= lleva campos invariante a izqda. a campos invariantes a izqda..
Como Ad_A : G → G es difeomorfismo entonces
Ad_{A*}: L(G) → L(G)
$[u,v]$ $[Ad_{A*}u, Ad_{A*}v]$
y Ad_{A*} es homomorfismo de alg. de Lie pues conserva el corchete de Lie.

Teorema de ADO: Para toda g $alg\ de\ Lie$ existe V esp. vect. y existe ρ homomorf. inyectivo de alg. de Lie de modo que ρ : g → gI(V).

Para toda L(G) existe una representación natural ad : L(G) → gI(V).
X ad(X) : L(G) → L(G)
Y $[X,Y]$
OBS: Para todo V = 𝕂-espacio vectorial de dimensión n : gI(V) ≈ gI_n(𝕂)
OBS: L(G) = T_{1_G}(G) = g.

Ejemplo : Analicemos GL_n (𝕂) y gI_n(𝕂).
Las transformaciones Int$_a$(x) = axa^{-1} son automorfismos internos del grupo.
Los elementos fijos son el centro Z(GL_n (𝕂) formado por matrices escalares ⟹ Int(GL_n (𝕂))≈ SL_n(𝕂).
Sea X(t) curva que inicia ne la identidad, X(0) = I_n. Mediante automorfismos internos obtenemos nueva curva X´(t) = aX(t)a^{-1} con X´(0) = I_n´
Diferenciando resp de t y tomando t = 0 obtenemos automorfismo interno de gI_n(𝕂) : Ad(a).v = ava^{-1}. Estas transformaciones forman el grupo adjunto Ad(GL_n (𝕂)) ≈ SL_n(𝕂).
Veamos un grupo uniparamétrico de automorf. internos: Ad_t(a)v = a(t)v$a^{-1}(t)$

Diferenciando resp de t: $\frac{d}{dt}Ad_t$(a)v = $\frac{da}{dt}$v$a^{-1}(t)$ - a(t)v$a^{-1}(t)\frac{da}{dt}\,a^{-1}(t)$

Tomando t = 0 y llamando u = $\frac{da}{dt}|_{t=0}$ se obtienen los operadores del alogebra adjunta de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$: ad(u) v = uv – vu.

Los subespacios invariantes respecto de la acción del grupo adjunto y por tanto de los operadores del álgebra adjunta son ideales del álgebra. Los únicos ideales no triviales del algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ son el subespacio unidimensional de las matrices escalares $\approx$ $\mathbb{K}$ y el subespacio de dimensión n^2-1 de las matrices de traza nula: $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, ambos primos entre si de modo que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ = $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$

LA FORMA DE CARTAN-KILLING:

ad es una representación lineal pues ad($[X,Y]$) = ad(X) ∘ ad(Y) –ad(Y) ∘ ad(X) y ad retiene toda la información para distinguir las algebras de Lie. Usando ad se define una forma bilineal y simétrica $\mathcal{K}$ así :

$$\begin{array}{lccc} \mathcal{K}: & L(G) \times L(G) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & X \quad\quad Y & & \text{traza(ad(X).ad(Y))} \end{array}$$

- En general es una forma indefinida. Es muy usada en teoría de clasificación de algebras de Lie. El esp. vect. L(G)= $\mathfrak{g}$ puede descomponerse en tres subespacios con ayuda de esta forma.
  $\mathfrak{g}$ = V_+ + V_- + V_0 con:

  $\boldsymbol{V_+}$ = subespacio en el que $\mathcal{K}$ es definido positivo. No es subalgebra de $\mathfrak{g}$. Consta de operadores no compactos. Exp(V_+) es el subconjunto de G que está parametrizado por una variedad no compacta de G.

  $\boldsymbol{V_-}$ = subespacio en el que $\mathcal{K}$ es definido negativo. Es subalgebra de $\mathfrak{g}$. Consta de operadores compactos. Exp(V_-) es el subconjunto de G parametrizado por una variedad compacta. Esta subálgebra no es invariante.

  $\boldsymbol{V_0}$ = subespacio en el que $\mathcal{K}$ es 0. Es subalgebra de $\mathfrak{g}$. Es la mayor subálgebra de G invariante nilpotente de $\mathfrak{g}$. Exp(V_0) es el máximo subgrupo invariante y nilpotente de G.

- $\mathcal{K}$ es invariante para todo elemento de Aut(L(G)) = { $\varphi \in$ GL(L(G)) tales que $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$} = grupo entonces: $\mathcal{K}(\varphi(X), \varphi(Y)) = \mathcal{K}$(X,Y) $\forall \varphi \in$ Aut(L(G)).
  Por tanto, Aut(L(G)) $\subset G_{\mathcal{K}}$ = { ψ : L(G) $\rightarrow$ L(G) tales que $\mathcal{K}(\psi(X), \psi(Y)) = \mathcal{K}$(X,Y) } .

  En particular, $Ad_A \in$ Aut(L(GL(V))) = Aut(gI(V)) $\forall$ A $\in$ GL(V) $\Longrightarrow$ para $\mathcal{K}$ en gI(V) : $\mathcal{K}$ $(Ad_A X, Ad_A Y) = \mathcal{K}$(X,Y).

  También se cumple $\forall$ g $\in G_B$ siendo G_B={ $g \in$ GL(V) : B(gu,gv) = B(u,v) $\forall$ u,v $\in$ V y B forma bilineal definida en V que no degenera}.
  G_B es el subgrupo de isotropía y describe las distintas matrices que generan los grupos clásicos.
  Dada forma B en V, $\mathfrak{g}_B$= { X $\in$ gI(V) : B(Xu,v) + B(u,Xv) = 0 es subespacio real del esp. vect. gI(V) = End(V). Y es subalgebra de Lie de gI(V) pues $\mathfrak{g}_B$ es cerrado bajo el corchete de Lie.

- $G_{\mathcal{K}}$ = { ψ : L(G) $\rightarrow$ L(G) tales que $\mathcal{K}(\psi(X), \psi(Y)) = \mathcal{K}$(X,Y) } es el grupo de isotropía de la forma $\mathcal{K}$.
  Se tiene: Ad(G_B) $\subset$ Aut($\mathfrak{g}_B$) $\subset G_{\mathcal{K}}$

- $\mathcal{K}$ para L(GL(V)) = gI(V)
  es $\mathcal{K}$(X,Y) = 2traza(X ° Y) = dim(V).traza(X).traza(Y)

Propiedades de $\mathcal{K}$:

- Es simétrica: $\mathcal{K}$(X,Y) = $\mathcal{K}$(Y,X) $\forall$ X,Y $\in \mathfrak{g}$ pues $\forall$ f,g : V $\rightarrow$ V endomorfismos se tiene traza(fg) = traza(gf).
- Es invariante por la acción adjunta: $\mathcal{K}([X,Y]$,Z) = $\mathcal{K}(X,[Y,Z])$ $\forall$ X,Y,Z $\in \mathfrak{g}$. Calculando ambas y haciendo uso de la propiedad cíclica del corchete de Lie se ve que son iguales.
- Es invariante por isomorfismos de algebra de Lie, es decir,
  Si θ: $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un isomorfismo de algebras de Lie entonces $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$(X,Y) = $\mathcal{K}_{\mathfrak{h}}$ $(\theta(X), \theta(Y))$.
  Sea B = { $X_i\}_{i=1}^n$ base de $\mathfrak{g}$ y sea $\theta(B)$ ={$\theta(X_i)\}_{i=1}^n$ base de $\mathfrak{h}$. Calculando $[X_i, X_j] = \sum_k a_{ij}^k X_k$, por ser θ homomorfismo de Lie

$\theta([X_i, X_j])$ = $[\theta(X_i), \theta(X_j)]$ y $[\theta(X_i), \theta(X_j)]$ = $\sum_k a_{ij}^k \, \theta(X_k)$.
Las constantes de estructura son idénticas (por esa elección de las bases) luego la matriz de ad_X en la base B coincide con la matriz de $ad_{\theta(X)}$ en la base $\theta(B)$ $\forall$ X,Y $\in$ $\mathfrak{g}$ entonces traza($ad_X \circ ad_Y$) = traza($ad_{\theta(X)} \circ ad_{\theta(Y)}$) pues son trazas del producto de dos matrices iguales.

Ejemplos: 1.- Sea $\mathfrak{g}$ = { $\begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: t,a,b $\in \mathbb{R}$}. Lamemos Z = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

X = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Y = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces B = {X,Y,Z} es una base de $\mathfrak{g}$. Los corchetes están determinados por $[Z, X]$= X, $[Z, Y]$= Y, $[X, Y]$= 0.

En la base B, la transformación lineal ad_Z = $[Z,\cdot\,]$ tiene matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

La tranformación lineal ad_X = $[X,\cdot\,]$ tiene $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

y ad_Y= $[Y,\cdot\,]$ a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De aquí se sigue que $\mathcal{K}$(Z,Z) = 2 y…
0 = $\mathcal{K}$(Z,X) = $\mathcal{K}$(X,Z) = $\mathcal{K}$(Z,Y) = $\mathcal{K}$(Y,Z) = $\mathcal{K}$(X,X) = $\mathcal{K}$(X,Y) = $\mathcal{K}$(Y,X) = $\mathcal{K}$(Y,Y).

2.- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es el algebra de Lie real con generadores X = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Y = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y H = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Los corchetes son $[H, X]$= 2X, $[H, Y]$= -2Y y $[X, Y]$= H.
Las matrices en la base {X,Y,H} de ad_X, ad_Y, ad_H son:

ad_X = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ad_H = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ad_Y = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

La tabla para la forma de Killing es:

$\mathcal{K}$(H,H) = 8 $\mathcal{K}$(X,X) = 0 $\mathcal{K}$(Y,Y) = 0 y la matriz de $\mathcal{K}$ es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{K}$(H,X) = 0 $\mathcal{K}$(H,Y) = 0 $\mathcal{K}$(X,Y) = 4

13

ACCIONES DE GRUPOS DE LIE SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Objetivo: Ver las condiciones bajo las cuales el cociente de una variedad C^{∞} por la acción de un grupo es una variedad C^{∞}.

Existen dos clases de acciones: 1.- acciones por grupos discretos que dan lugar a espacios recubridores.
2.- acciones transitivas que dan lugar a espacios homogéneos

ACCIONES DE GRUPO EN VARIEDADES:

La importancia de los grupos de Lie radica principalmente en sus acciones en variedades.

Definición 1: Sea G un grupo de Lie
Sea M variedad C^{∞}

Una *acción a izqda.. de G en M* es una aplicación θ : G x M → M que cumple
g , p g.p

a) g_1.(g_2.p) = ($g_1 g_2$).p
b) $1_G.p$ = p

Una *acción a derecha de G en M* es una aplicación Ψ : M x G → M que cumple
p , g p.g

a) (p. g_1). g_2= p.(g_1. g_2)
b) p. 1_G. = p

OBS:

- Una variedad M dotada con alguna G-acción se llama G-espacio.
- Dada una acción θ, sobre cada elemento de G: g se puede tomar la aplicación θ_g: M → M
  p g.p y en tales términos las condiciones de la definición quedan:
  a) $\theta_{g_1}.\theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$
  b) $\theta_{1_G} = id_M$
- Una acción a derecha siempre se puede convertir en una acción a izqda. mediante la definición de g.p como p.g^{-1}.
  $\Psi(g$,p) = θ(p.g^{-1}).

- A diferencia de las acciones a derecha, las acciones a izqda. poseen la propiedad de que las condiciones a) y b) hacen que la multiplicación de los elementos del grupo se les asocie con la composición de funciones.

Definiciones 2: Sea θ : G x M → M acción a izqda. de un grupo de Lie G en M variedad C^∞.

- La acción es C^∞ si θ es C^∞., es decir, *si* $\theta_g(p)$ depende suavemente de g y de p. De ser así θ_g es difeomorfismo con inversa $\theta_{g^{-1}}$.
- ∀ p ∈ M la órbita de p bajo la acción de θ es el conjunto G.p = { g.p $\}_{g\in G}$ = { Im($\theta_g(p)$)$\}_{p\ fijo, g\in G}$
  θ descompone a M en unión disjunta de órbitas: M = $\coprod_{\mathrm{p}\in \mathrm{M}} G.p$
  θ origina una RBE en M: p ∼ q si y solo si ambos están en la misma órbita.
  Espacio de órbitas es M/G = { G.p $\}_{\mathrm{p}\in\mathrm{M}}$
  Existe π : M → M/G *proyección natural*.
  Una *sección* de π es una aplicación σ: M/G → M tal que $\sigma \circ \pi = 1_M$.

- La acción es *transitiva* si para cualesquiera dos puntos p y q de M existe un g en G tal que g.p = q.
  Ello implica que G.p = M, es decir M es toda la órbita de p, ∀ p ∈ M.
- Dado p ∈ M, el *grupo de isotropía de p*; G_p= { $g \in G$: g.p = p } es el conjunto de elementos de G que fijan p.

- La acción el *libre* si el único elemento de G que fija a todo elemento de M es 1_G. Así, g.p = p implica que g = 1_G.
  θ es libre si y solo si G_p = $\{1_G\}$ ∀ p ∈ M.
- la acción es *propia (ó propiamente discontinua)* si la aplicación
  ϑ: G x M → M x M es aplicación propia ($\vartheta^{-1}(K)$ es compacto de
  g , p (g.p, p) G x M para todo compacto K de M x M).

  Ojo: Ello no significa que se exija que θ sea propia.

  Lema 1: Caracterización de acciones propias.
  Sea θ : G x M → M una acción C^∞. θ es propia si y solo si ∀ compacto K ⊂ M: el conjunto G_K= { $g \in G$: (g.K) ∩ K ≠ ∅ } es compacto.

  Demost: Sea ϑ: G x M → M x M y supongamos que es propia, entonces para cualquier compacto K ⊂ M es fácil comprobar que el conjunto G_K= { $g \in G$: existe p ∈ K tal que g .p ∈ K } = { $g \in G$: existe p ∈ M tal que ϑ(g,p) ∈ K x K } = π_G(ϑ^{-1}(K x K)) donde π_G: G x M → G es la proyección, por tanto G_K es compacto.
  Inversamente, supongamos que G_K es compacto para tod K compacto ⊂ M. Si L ⊂ M x M es compacto, sea K = π_1(L) ∪ π_2(L) ⊂ M donde π_1, π_2: M x M → M son las proyecciones sobre la primera y la segunda componentes resp. entonces:

  ϑ^{-1}(L) ⊂ ϑ^{-1}(K x K) ⊂ { (g,p) : g.p ∈ K y p ∈ K } ⊂ G_K x K.

  Como ϑ^{-1}(L) es cerrado por continuidad, es subcto. cerrado de G_K x K y por tanto es compacto.

  Corolario 1: Toda acción por un grupo de Lie compacto en una C^∞-variedad es propia.

  Demost: Sea G grupo de Lie compacto actuando suavemente sobre M. Para cualquier cto. compacto K ⊂ M, el cto. G_K es cerrado en G por continuidad y por tanto es compacto.

ISOTROPIA:

Ya hemos definido en el apartado anterior lo que era el grupo de isotropía de un elemento de la variedad M. Para cada p ∈ M, la acción θ define una aplicación sobreyectiva θ_p: G $\rightarrow$ G.p con g $\rightsquigarrow \theta(g$,p) y θ_p define una RBE en G: $g_1 \sim g_2$ si y solo si $\theta(g_1$,p) = $\theta(g_2$,p) si y solo si $g_1{}^{-1}g_2 \in G_p$.

- G/$\sim$ = { clases de equivalencia de $\sim$ } = G/G_p y se les llama clases laterales por la derecha módulo G_p.
- En general: Dado cualquier H subgrupo de G se define la RBE: $g_1 \sim g_2$ si y solo si $g_1{}^{-1}g_2 \in$ H.
- Para la acción por la derecha τ : G x H $\rightarrow$ G con g,h $\rightsquigarrow g$h, τ define una RBE que es la misma que $\sim$.

Existe una biyección G/G_p $\leftrightarrow$ G . p

- Si G actúa trivialmente en M entonces $\theta(g$,p) = p $\forall\, g \in G$, $\forall$ p $\in$ M. Existen tantas órbitas como elementos de M.
- Si G actúa transitivamente en M entonces $\forall$ p , $q \in$ M existe $g \in G$ tal que $\theta(g$,p) = q.
  Aquí solo existe una sola clase de equivalencia u órbita y aunque M/G no es interesante, la biyección reduce el estudio de la θ original de G en M al estudio de la acción χ de G en G/G_p.
  La acción inducida χ : G x G/G_p $\rightarrow$ G/G_p es natural y χ = $\theta|_{G\,.p}$
  g , $[g_0]$ $[g.g_0]$
  $[g_0]$ = { $g_0 h$ }$_{h \in G_p}$ $\in$ G/G_p.

Dada θ : G x M $\rightarrow$ M sean p,q equivalentes (están en la misma órbita) entonces G_p es conjugado de G_q en G, es decir, existe $g \in G$: gG_pg^{-1}= G_q.

Ejemplos: 1.- Acción natural θ : GL_n ($\mathbb{R}$) x $\mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$
A x Ax
Es acción porque la multiplicación de matrices es asociativa.
Es C^∞ porque las entradas de Ax dependen polinomialmente de las entradas de A y de x.
Hay dos únicas órbitas $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$- $\{0\}$ pues todo punto de $\mathbb{R}^n$ puede llevarse a todo otro mediante transformación lineal.

2.- Acción natural de O(n, $\mathbb{R}$) en $\mathbb{R}^n$: O(n, $\mathbb{R}$) x $\mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$.
Define acción C^∞.

Las órbitras son $\{0\}$ y las esferas n-dimesionales S^n centradas en el origen de coordenadas pues toda transformación ortogonal conserva la norma, entonces O(n, $\mathbb{R}$) lleva la esfera de radio R a sí misma.

3.- Acción natural de O(n, $\mathbb{R}$) en S^{n-1}: O(n, $\mathbb{R}$) x $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$
Se obtiene acción transitiva de O(n, $\mathbb{R}$) $\rightarrow S^{n-1}$.
Es C^∞ porque S^{n-1} es subvariedad incrustada de $\mathbb{R}^n$.

4.- El grupo simétrico de una variedad M S_M = { φ : M → M con φ invertible} = GL(M) actúa sobre M mediante la acción θ: S_M x M → M
φ , p φ(p)
Definir una acción de un grupo G en M es definir un homomorfismo de grupos de G → S_M .

5.- Sea V un $\mathbb{K}$-esp vect. De dimensión finita. Entonces (V,+) es grupo.
Sea W subespacio de V, entonces (W,+) es grupo y W actúa sobre V por traslaciones θ: V x W → V
v , w v+w
Las órbitas de tal acción son los subctos. de V resultantes de trasladar W a los distintos puntos de V: v + W = { v+w $\}_{w \in W}$ es la órbita de v en V.
V/W = { v+W $\}_{v \in V}$ = $\coprod_{v \in V} V_v$ para V_v = v +W el trasladado de W.
Sea π: V → V/W
v v+W Si U ⊂ V es subespacio complementario de W en V entonces se define una sección σ: V/W → V
v+W U Por ser U complementeario de W: V = U ⊕ W
entonces ∀ v ∈ V existe un único u ∈ U tal que v = u + w con $w \in W$ entonces
u ∈ v+W y σ_U(u+W) = u.

V/W cto. de órbitas es esp vectorial.

Existe una biyección

$$\{\sigma\colon \ \mathrm{V/W} \ \rightarrow \ \mathrm{V}\} \quad \leftrightarrow \quad \{\mathrm{U} \subset \mathrm{V} : \mathrm{U \ es \ subespacio \ complem. \ de \ W}\}$$

6.- Acción de GL($\mathbb{R}^2$) en $\mathbb{R}^2$ por transformaciones lineales.
Sea V un $\mathbb{K}$-esp vect.
Sea θ: G x V → V acción de G en V por tansformaciones lineales, es decir, el homomorfismo θ: G → S_V es θ: G → GL(V).
GL(V) = { φ : M → M con φ lineal e invertible}.

Aquí V = $\mathbb{R}^2$, GL($\mathbb{R}^2$) = $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$.
Esta acción solo tiene 2 órbitas: $\{(0,0)\}$ y $\mathbb{R}^2$- $\{(0,0)\}$.

Existe ϕ : GL($\mathbb{R}^2$) x End($\mathbb{R}^2$) $\rightarrow$ End($\mathbb{R}^2$) para End($\mathbb{R}^2$) = $\{T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$

g , T $\quad$ $g \circ T \circ g^{-1}$ $\quad$ T = transf. Lineal

La elección de una base en $\mathbb{R}^2$ permite una biyección

End($\mathbb{R}^2$) $\leftrightarrow$ $M_2(\mathbb{R})$

$[T_{ij}]$ = matriz de entradas T_{ij} $\quad$ T $\quad$ $[T_{ij}]$

$\{ e_i \}_i$ = base de $\mathbb{R}^2$.

ϕ son transformaciones de semejanza: GL($\mathbb{R}^2$) x $M_2(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ $M_2(\mathbb{R})$

g , T $\quad$ $g \circ T \circ g^{-1}$

Tales transf. De semejanza son cambios de base en $\mathbb{R}^2$ y deben interpretarse tanto T como $g \circ T \circ g^{-1}$ en $M_2(\mathbb{R})$ como las matrices asociadas a la misma transf. Lineal T resp. de bases distintas.

Así, toda representación de un grupo de Lie G sobre un esp vect V de dimensión finita es una acción C^∞ de G en V.

7.- Todo grupo de Lie G actua sobre sí mismo de modo C^∞, libre y transitivamente mediante traslación a izqda. o derecha.
Más general: Si H es subgrupo de Lie de G grupo de Lie, entonces H x G $\rightarrow$ G define una acción a izqda. C^∞, libre (aunque no transitiva) de H en G.

COCIENTES DE VARIEDADES POR ACCIONES DE GRUPO:

Objetivo: hallar las condiciones bajo las cuales un espacio de órbitas es C^∞-variedad.

Teorema 1: (De la variedad cociente)
Sea G grupo de Lie y sea M C^∞-variedad.
Sea θ: G x M $\rightarrow$ M una G-acción C^∞, libre y propia. Entonces…

a) M/G es variedad topológica y dim(M/G) = dim(M) – dim(G)
b) M/G posee una única estruct. C^∞ tal que π : M $\rightarrow$ M/G es submersión C^∞.
Demost: (Introduction to smooth manifolds. John M. Lee pag. 153)

OBS: Condición suficiente para que M/G sea variedad es que la acción de G sobre M reuna esos tres requisitos: ser C^{∞}, libre y propia.

Definición 3: M/G = { G . p }$_{\mathrm{p} \in \mathrm{M.}}$ dotado de la topología cociente se le llama *espacio de órbitas de la acción* θ.

Definicion 4: *Topología cociente* en M/G es aquella en la que A ⊂ M/G es abierto si π^{-1}(A) es abierto de M, para π: M → M/G *proyección canónica*.

- Si el espacio cociente existe entonces…
  a) π es constante en las clases de equivalencia
  b) π es sobre
  c) M/G es único salvo homeomorfismos.

M/G = espacio orbital de la acción θ con la topología cociente y M/G es el espacio cociente de M por la RBE: p ∼ q si y solo si existe $g \in G$ tal que g.p = q, si y solo si ambos pertenecen a la misma órbita: G . p = G . q

Proposición 1: Si la acción θ es una acción conjuntista tal que toda θ_g es continua entonces la proyección canónica π: M → M/G es aplicación abierta.

> **Demost:** Si toda θ_g es continua entonces toda θ_g es homeomorfismo y para todo U = abierto de M se tiene que π(U) es abierto pues
> $\pi^{-1}(\pi(\mathrm{U})) = \cup_{\mathrm{p} \in \mathrm{U}} G \,.\, p = \{ g \,.\, \mathrm{p} \}_{\mathrm{p} \in \mathrm{U}, g \in \mathrm{G}} = \cup_{g \in \mathrm{G}} \theta_g(U)$.

OBS: M/G no es de Hausdorff en general. Pues de serlo, las órbitas G .p serían cerrados por ser π continua y $\pi^{-1}([p])$ = p cerrado.

Lema 1: Sea $\mathcal{R}$ = { (p,q) ∈ M x M tales que π(p) = π(q) }.
a) Si M/G es de Hausdorff con la top. cociente entonces $\mathcal{R}$ es un cerrado de M x M.
b) Si π: M → M/G es abierta entonces ∀ $\mathcal{R}$ cerrado de M x M : (M/G, top. cociente) es de Hausdorff.

> **Demost:** Sea $\Phi = \pi \ x \ \pi$, entonces M/ $\mathcal{R}$ es de Hausdorff si y solo si Δ = { ($[p]$,$[p]$) ∈ (M/ $\mathcal{R}$ x M/ $\mathcal{R}$)} es cerrado, entonces $\Phi^{-1}(\Delta)$ es cerrado y si π es abierta también lo es Φ que además es continua y sobre, así que Δ es cerrado y M/ $\mathcal{R}$ es de Hausdorff, pues $\mathcal{R}$ = $\Phi^{-1}(\Delta)$ que es cerrado.

Sea G grupo de Lie y H subgrupo abstracto de G. Sea θ: G x H $\rightarrow$ G acción por la derecha conjuntista de H sobre G. g , h g h

Tomemos el espacio de órbitas de θ: G/H = { gH }$_{g \in G}$.

Una órbita bajo la acción de θ es igual a un coset a izqda. de H.

G/H es espacio de orbitas y espacio de cosets a izqda.

Proposición 2: La proyección π: G $\rightarrow$ G/H es abierta y equivales…

a) G/H es de Hausdorff.
b) Los puntos de G/H son cerrado.
c) H es cerrado.
d) H es subgrupo de Lie.

Demost: π es abierta pues $\theta_h = r_h$, con r_h traslado a derecha por h.

a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c): Si G/H es de Hausdorff $\Longrightarrow$ sus puntos son cerrados y es cerrado $\pi^{-1}(1_G)$ = H.

c) $\Longrightarrow$ d): es la parte ($\leftarrow$) del teorema del grupo cerrado.

d) $\Longrightarrow$ c): es la parte ($\rightarrow$) del teorema del grupo cerrado.

a) $\Longrightarrow$ c): aplicando el último lema pues π es abierta y $\mathcal{R}$ cerrado, pues para F : G x G $\rightarrow$ G, si H es cerrado también lo es $\mathcal{R}$

p , q $q^{-1}p$

siendo

$\mathcal{R}$ = { (p,q) $\in$ G x G tales pH = qH } = F^{-1}(H).

OBS: La aplicación λ : G x G/H G/H es una acción continua, pues π es

p , qH pqH

continua, abierta y sobre así que es conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ \pi \downarrow & L & \downarrow \pi \\ G \times G/H & \underset{\lambda}{\rightarrow} & G/H \end{array}$$

con (p,q) $\rightsquigarrow$ pq

(p,qH) $\rightsquigarrow$ pqH que cumple…

$\pi \circ L_p = \lambda_p \circ \pi$ y λ es transitiva pues $\forall$ p,q $\in$ G : $\lambda_{pq^{-1}}$(qH) = pH.

Así, λ es la multiplicación por la izqda. en G x G/H.

Proposición 3: θ: G x M $\rightarrow$ M una acción conjuntista transitiva y sea p $\in$ M entonces existe una única Φ : G/G_p $\rightarrow$ M que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/G_p \\ & \theta_p \searrow \quad \swarrow \Phi & \\ & M & \end{array}$$

Además: Φ es biyectiva
continua si θ_p es continua
homeomorfismo si θ es C^∞

Demost: Existencia y unicidad de Φ por la propiedad universal del conjunto cociente, pues si $g \sim g'$ entonces $g \in g'.\, G_p$ entonces $\theta_p(g)$ = $\theta_p(g')$.
Φ es inyectiva y sobre por ser θ transitiva.
Φ es continua porque θ_p lo es.
Φ es abierta: Sea A $\subset$ G/G_p abierto, entonces también lo es
Φ(A) = Φ (π(π^{-1}(A))) = $\theta_p(\pi^{-1}$(A)) por ser θ_p abierta.

Aplicación del teorema de la variedad cociente al estudio de cocientes de grupos de Lie por subgrupos de Lie:

Teorema 2: Sea G grupo de Lie y sea H subgrupo de Lie de G cerrado.
La acción de H sobre G por traslación a derecha es C^∞, libre y propia, por lo tanto G/H = espacio de cosets a izqda. es una variedad C^∞ y π: G $\rightarrow$ G/H es submersión C^∞.

Demost: H actúa suavemente y libremente en G. La acción es propia pues sea Θ : G x H $\rightarrow$ G x G y sea L $\subset$ G x G compacto
g , h $\quad$ gh, g
Si {(g_i,h_i)} es una sucesión de Θ^{-1}(L) entonces tomando una subsucesion si es necesario podemos asumir que las sucesiones $\{g_i, h_i\}$ y $\{g_i\}$ convergen. Por continuidad: h_i= ${g_i}^{-1}(g_i h_i)$ converge a un punto en G y como H es cerrado en G se sigue que {(g_i,h_i)} converge en G x H.

Corolario 1: Sea G grupo de Lie y sea Γ subgrupo discreto de G. Entonces..
La aplicación cociente π : G $\rightarrow$ G/ Γ es aplicación recubridora C^∞.

Definición 5: Una *transformación recubridora* de π : $\widetilde{M}$ → M aplicación recubridora es un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ tal que $\pi \circ \varphi = \pi$.
Llamaremos *grupo recubridor* de π a $C_\pi(\widetilde{M})$ = { $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ con φ homeomorf.}
Es grupo bajo la composición de funciones y actua sobre $\widetilde{M}$ por la izqda.
$C_\pi(\widetilde{M})$ es la clave para construir variedades C^∞ recubierta por $\widetilde{M}$.
Si π es aplicación recubridora C^∞ $\Longrightarrow$ la acción de $C_\pi(\widetilde{M})$ sobre $\widetilde{M}$ por la izqda. es una acción C^∞, libre y propia : $C_\pi(\widetilde{M})$ x $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$.

Definión 6: Una acción de un grupo continuo discreto Γ sobre una variedad topológica $\widetilde{M}$ se dice que es *propia* si verifica:

a) ∀ p,p´ ∈ $\widetilde{M}$ existe U = entorno de p y existe U´= entorno de p´ tales que el conjunto { $g \in \Gamma$: (g.U) ∩ U´ ≠ ∅ } es finito.
b) O bien, cumple a la vez:
1.- ∀ p ∈ $\widetilde{M}$ existe U = entorno de p tal que (g.U) ∩ U = ∅ ∀ $g \in \Gamma$ pero en una cantidad finita.
2.- Si p,p´ ∈ $\widetilde{M}$ no están en la misma Γ-órbita existen U, U´ entornos de p, p´resp. tales que (g.U) ∩ U´ = ∅ ∀ $g \in \Gamma$.

Proposición 4: Sea π aplicación recubridora C^∞ entonces con la topologia discreta $C_\pi(\widetilde{M})$ es un grupo de Lie de dim = 0 actuando sobre $\widetilde{M}$ de un modo C^∞, libre y propio.

Demost: para probar que es grupo de Lie solo hemos de probar que es numerable. Sea $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ cualquiera y sea p = $\pi(\tilde{p})$. Debido a que la fibra π^{-1}(p) es un subcto. Discreto de la variedad $\widetilde{M}$, es numerable.Como todo elemento de $C_\pi(\widetilde{M})$ está unívocamente determinado por lo que le hace a $\tilde{p}$, la aplicación $\varphi \rightsquigarrow \varphi(\tilde{p})$ es una inyección de Γ en π^{-1}(p), por tanto Γ es numerable.
La acción es C^∞ porque cualquier transformación recubridora φ puede escribirse localmente como $\varphi = \sigma \circ \pi$ para una adecuada sección local C^∞.
La acción es libre porque la única transform. Recubridora que fija a cualquier punto es la identidad.
La acción es propia porque cumple la condición b) de la definición:
Sea p ∈ $\widetilde{M}$, sea U un entorno eventualmente recubierto de π(p) y sea $\widetilde{U}$ la componente de π^{-1}(U) que contiene a p. Debido a que cada elemento del grupo recubridor permuta las componentes de π^{-1}(U) se concluye que $\widetilde{U}$ verifica 1.- de b).

Sea p, p´ ∈ $\widetilde{M}$ puntos de órbitas separadas. Si π(p) $\neq$ π(p´) entonces existen abiertos U conteniendo a π(p) y U´ conteniendo a π(p´) de modo que π(U) y π(U´) son abiertos disjuntos que cumplen la condición 2.- de b). Si π(p) = π(p´), sea U un entorno eventualmente recubierto de π(p) y sean $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}'$ las componentes de π^{-1}(U) conteniendo a p, p´ resp. Si φ es una transformación recubridora tal que $\varphi(\widetilde{U}) \cap \widetilde{U}' \neq \emptyset$ entonces $\varphi(\widetilde{U}) = \widetilde{U}'$ debido a que las transformaciones recubridoras permutan las componentes de π^{-1}(U), por tanto cada componente continene exactamente un punto de π^{-1}(p). Se sigue que φ(p) = p´. Absurdo pues p y p´ estaban en órbitas diferentes. Así, $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}'$ cumplen 2.- de b).

Teorema 3: Sea $\widetilde{M}$ una C^∞-variedad conexa.
Sea Γ un grupo de Lie discreto actuando sobre $\widetilde{M}$ de un modo C^∞, libre y propio
Entonces: a) $\widetilde{M}/\Gamma$ es variedad topológica y
b) $\widetilde{M}/\Gamma$ posee una única estructura C^∞ tal que π: $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ es aplicación recubridora C^∞.

Demost: Por el teorema de la variedad cociente $\widetilde{M}/\Gamma$ posee una única estructura de variedad C^∞ tal que π es una submersión C^∞.
Debido a que dim($\widetilde{M}/\Gamma$) = dim($\widetilde{M}$) – dim(Γ) = dim($\widetilde{M}$) ello implica que π es un difeomorfismo local. Por otro lado, por la teoría de espacios recubridores π es aplicación recubridora topológica, por tanto es aplicación recubridora C^∞.
La unicidad de la estructura C^∞ se sigue de la unicidad asegurada en el teorema de la variedad cociente debido a que una aplicación recubridora C^∞ es en particular una submersión.

Definición 7: Un *subgrupo discreto* de un grupo de Lie es un subgrupo que es un conjunto discreto en la topología de subespacio (así, es un subgrupo de Lie incrustado de dimensión = 0).

Ejemplos: 1.- El grupo de Lie discreto $\mathbb{Z}^n$ actúa de modo C^∞ y libre sobre $\mathbb{R}^n$ por traslación . La acción es propia pues cumple la condición a) de la definición para bolas alrededor de p, p´ lo suficientemente pequeñas. La variedad cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es homeomorfica al n-toro $\mathbb{T}^n$ y el último teorema dice que hay una única estructura C^∞ en $\mathbb{T}^n$ que convierte a la aplicación cociente en aplicación recubridora C^∞. Para ver que esta estructura es la misma que la definida previamente para $\mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n$= variedad producto de n veces S^1) comprobamos que la aplicación recubridora π: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$

$(x_1, .., x_n) \quad (e^{2\pi i x_1},..., e^{2\pi i x_n})$ es un difeomorfismo local con respecto de la estructura C^∞ del producto en $\mathbb{T}^n$.

2.- El grupo de dos elementos { +1,-1} actçua sobre S^n por multiplicación.
La acción es C^∞ , libre y es propia pues el grupo es compacto. Define una estructura C^∞ en $S^n/\{\pm 1\}$.
Este cociente es difeomorfico a $\mathbb{R}P^n$ con la estructura C^∞ definida por:
Si π': $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tal que $\pi' = \pi_0 \circ$ in para

$$S^n \xrightarrow{in} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{R}P^n$$

con π_0 aplicación que define $\mathbb{R}P^n$.
Entonces π' es aplicación recubridora C^∞ y realiza la misma identificación que π.

ESPACIOS Y VARIEDADES HOMOGENEAS:

Definición 8: *Variedad, G-espacio ó espacio homogéneo* es una variedad C^∞ dotada con una acción C^∞ transitiva realizada por un grupo de Lie G.

El término homogéneo proviene de que suelen preservar alguna propiedad de la variedad y la transitividad hace que la variedad parezca la misma desde el aspecto de dicha propiedad.

Otra definición 9: *Variedades homogéneas* son variedades de la forma G/H con…
G = grupo de Lie.
H = subgrupo cerrado de G.
La estructura de variedad de G/H es la única que cumple:

1) π : G $\rightarrow$ G/H proyección natural es C^∞.
2) Existen secciones locales C^∞ de G/H en G, es decir:
   Si $\sigma \in$ G/H $\Longrightarrow$ existe W =entorno de σH
   existe τ : W $\rightarrow$ G $\in$ C^∞ tal que $\pi \circ \tau = id_W$

Proposición 5: f es C^∞ en G/H si y solo si $f \circ \pi$ es C^∞ en G.

Demost: ($\rightarrow$) Si f es C^∞ en G/H entonces $f \circ \pi$ es C^∞.
($\rightarrow$) Si $f \circ \pi$ es C^∞ entonces f, que es localmente composición de una sección suave de G/H en G con $f \circ \pi$, es también C^∞.

Definición 10: Sea θ: G x M $\rightarrow$ M una acción a izqda. sobre esp. M.
La acción se llama fiel o efectiva si 1_G es el único elemento de G tal que $\theta(1_G$, p) = p , $\forall$ p $\in$ M.

Sea p $\in$ M. Sea G_p grupo de isotropía de p. Entonces…

a) G_p es subgrupo cerrado de G.
b) $\theta|_{G_p}$ es acción de G_p en M con un punto fijo p. entonces existe una representación α: $G_p \rightarrow$ Aut(T_p(M)) con $\sigma \rightsquigarrow$ d$\theta_\sigma|_{T_p(\mathrm{M})}$.
c) $\alpha(G_p)$ es el grupo de transformaciones lineales de T_p(M) llamado grupo de isotropía lineal en p.

Teorema 4: Sea θ: G x M $\rightarrow$ M una acción a izqda. transitiva. Sea p $\in$ M. Sea G_p grupo de isotropía de p. Definimos β: G/G_p $\rightarrow$ M con $\sigma G_p \rightsquigarrow \theta_\sigma$(p).
Entonces β es difeomorfismo.

Demost: β está bien definida pues $\theta_{\sigma h}$(p) = $\theta_\sigma(\theta_h$(p)) = θ_σ(p) $\forall$ h $\in G_p$.
β es sobre pues G actua transitivamente.
β es inyectiva pues si $\beta(\sigma G_p)$ = $\beta(\tau G_p)$ entonces $\theta_{\tau^{-1}\sigma}$(p) = p, lo que implica que $\tau^{-1}\sigma \in G_p$, es decir: σG_p = τG_p.
Basta probar que β es C^∞ y que d β es no singular en cada punto:
De acuerdo con la última proposición β es C^∞ si y solo si $\beta \circ \pi$ es C^∞ siendo π la proyección natural de G en G/G_p, pero $\beta \circ \pi$ = $\theta \circ i_p$ para i_p : G $\rightarrow$ G x M con $i_p(\sigma)$ = (σ,p), por tanto β es C^∞.
Sea $\tilde{\beta}$ = $\beta \circ \pi$
Como el ker(d$\pi|_{G_\sigma}$) es $(\sigma G_p)_\sigma \subset G_\sigma$, para probar que d $\beta|_{(\mathrm{G}/G_p)_{\sigma G_p}}$ es no singular basta probar que el ker(d$\tilde{\beta}|_{G_\sigma}$) es también $(\sigma G_p)_\sigma$:
Como para cada σ $\in$ G: $\tilde{\beta}$ = $\theta_\sigma \circ \tilde{\beta} \circ l_{\sigma^{-1}}$ entonces basta probar que el ker(d$\tilde{\beta}|_{T_{1_G}(\mathrm{G})}$) es $T_{1_G}(G_p)$: ciertamente $T_{1_G}(G_p) \subset$ ker(d$\tilde{\beta}|_{T_{1_G}(\mathrm{G})}$).
Sea x $\in$ ker(d$\tilde{\beta}|_{T_{1_G}(\mathrm{G})}$), para ver que x $\in$ $T_{1_G}(G_p)$ necesitamos solo ver que exp(tX) $\in G_p$ $\forall$ t $\in \mathbb{R}$ donde X es el campo vectoria invariante a izqda. de G determinado por x. Para ello basta ver que el vector tangente a la curva t $\mapsto$ $\tilde{\beta}$(exp(tX)) en M es idénticamente 0, pues entonces $\tilde{\beta}$(exp(tX)) = p lo que implica que exp(tX) $\in G_p$ $\forall$ t.
El vector tangente a esta curva en t es

d$\tilde{\beta}$($X_{\exp(\mathrm{tX})}$) = d($\theta_{\exp(\mathrm{tX})} \circ \tilde{\beta} \circ l_{\exp(-\mathrm{tX})}$)($X_{\exp(\mathrm{tX})}$) =
= d$\theta_{\exp(\mathrm{tX})}$ $\circ$ d$\tilde{\beta}$(X(1_G)) = d$\theta_{\exp(\mathrm{tX})}$ $\circ$ d$\tilde{\beta}$(x) = 0

Por lo tanto dβ es no singular en todas partes.

OBS: Si G es grupo de Lie y H es subgrupo cerrado de G entonces existe una acción natural $\tilde{l}$: G x G/H → G/H con $(\sigma, \tau H) \rightsquigarrow \sigma\tau H$ de modo que se cumple:

- $\tilde{l}$ es C^∞ y es acción a la izqda.
- $\tilde{l}$ es transitiva.
- ∀ σ ∈ G: $\tilde{l}_\sigma$ es difeomorfismo en G/H.
- ∀ $\tau H, \gamma H$ ∈ G/H existe un difeomorfismo $\tilde{l}_{\tau\gamma^{-1}}$ que lleva γH a τH.

OBS: Si existe una acción θ: G x M → M transitiva para G grupo de Lie y existe estructura C^∞ en M de modo que θ es C^∞ entonces tal estruct. C^∞ es única.

OBS: Si G_p es cerrado para algún p ∈ M, entonces la estruct. C^∞ de M es G/G_p.

Ello permite construir variedades C^∞.

Las variedades de la forma G/H se llaman homogéneas es porque ellas poseen este grupo transitivo de difeomorfismos.
Inversamente, el teorema último muestra que si M posee un grupo transitivo de difeomorfismos en el sentido de la acción θ, entonces M es difeomorfo con una variedad homogénea G/H.

Por el teorema expuesto podemos dar otra caracterización de la estructura de variedad en G/H:
El conjunto G/H tiene una única estructura de variedad tal que la aplicación natural $\tilde{l}$ de la observación anterior es C^∞.

Teorema 5: Sea G grupo de Lie y sea H subgrupo normal cerrado de G. Entonces la variedad homogénea G/H con su estructura natural de grupo es un grupo de Lie.

Demost: Solo hay que ver que la aplicación $(\sigma H, \tau H) \rightsquigarrow \sigma\tau^{-1}$H es C^∞.
Sean α_σ: W_σ → G y α_τ: W_τ → G secciones locales de G/H en G de entornos W_σ de σH, y W_τ de τH respec. Entonces localmente, la aplicación desde G/H x G/H → G/H puede expresarse como la composición de las aplicaciones C^∞: $\pi \circ \varphi \circ (\alpha_\sigma \; x \; \alpha_\tau)$ para

φ: G x G $\rightarrow$ G con $(\sigma,\tau) \rightsquigarrow \sigma\tau^{-1}$.

El teorema muestra que el estudio de espacios homogéneos puede reducirse a la comprensión de los subgrupos de Lie cerrados de los grupos de Lie.

La segunda aplicación del teorema 4 de caracterización de espacios homogéneos es identificar las componentes conexas de muchos grupos de Lie familiares:

Teorema 6: Sea G grupo de Lie y H subgrupo cerrado de G. Si H y G/H son conexos: G es conexo.

> **Demost:** Supongamos que G = U ∪ V siendo ambos subtos. no vacios de G, entoces G/H = $\pi(U)$ ∪ π(V) donde ambos son subctos. no vacios de G/H. Como G/H es conexo debe haber un punto σH de G/H tal que σH ∈ $\pi(U)$ ∩ π(V) entonces por la descomposición de G:
> σH = (σH ∩ U) ∪ (σH ∩ V) siendo ambos subctos. abiertos de σH (ya que H tiene la topología relativa). Amos son no vacios y como σH es homeomorfo a H, σH es conexo y (σH ∩ U) ∩ (σH ∩ V) ≠ ∅ lo cual implica que U ∩ V ≠ ∅ , es decir, G es conexo.

Teorema 7: Sea G grupo de Lie que actua de modo C^∞, libre y propio sobre una variedad M. Si G y M/G son conexos: M es conexo.

> **Demost:** Supongamos que M no es conexo. Ello significa que hay ctos. abiertos disjuntos y no vacios U y V ⊂ M cuya unión es M.
> Como la aplicación cociente π: M $\rightarrow$ M/G es abierta $\pi(U)$, π(V) son subctos. abiertos no vacios de M/G. Si $\pi(U)$ ∩ π(V) ≠ ∅ hay una G-órbita que contiene puntos tanto de U como de V. Sin embargo, cada órbita es una subvariead incrustada difeomorfa a G, el cual es conexo, de modo que cada órbita está íntegramente en uno de los conjuntos U ó V. Por tanto, { $\pi(U)$, π(V)} debería ser una separación de M/G: absurdo pues éste es conexo.

OBS: La componente conexa que contiene a la identidad en un grupo de Lie G: G_{1_G} es grupo de Lie y es conexa, por lo tanto si la variedad G/G_{1_G}es conexa entonces el grupo de Lie G es conexo. (Aquí G_{1_G} no designa el grupo de isotropía del elemento identidad).

EJEMPLOS DE ESPACIOS HOMOGENEOS:

1.- La acción natural de O(n,$\mathbb{R}$) sobre S^{n-1} es transitiva, entonces es la acción natural de SO(n, $\mathbb{R}$) sobre S^{n-1} para n $\geq$ 2. Así, para n $\geq$ 2: S^{n-1} es un espacio homogéneo o bien a O(n,$\mathbb{R}$), o bien a SO(n, $\mathbb{R}$).

2.- El grupo $SL_2(\mathbb{R})$ actua de modo C^∞ y transitivo sobre $\mathbb{H}$ = { z ∈ $\mathbb{C}$: Im z > 0} mediante la fórmula $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.z = $\frac{az+b}{cz+d}$. Las transformaciones analíticas resultantes se les llama transformaciones de Moebius.

3.- Sea G grupo de Lie y sea H subgrupo cerrado de Lie de G. Entonces G/H grupo de cosets a izqda. de G `por H es una variedad C^∞.
Definimos acción a izqda. θ: G x G/H → G/H con $(g_1, g_2H) \rightsquigarrow (g_1g_2)H$.
Entonces θ es transitiva y es C^∞.
Todo espacio homogéneo es equivalente a uno de este tipo.

4.- $\mathbb{R}^n$- $\{0\}$ es espacio homogéneo de $GL_n(\mathbb{R})$

BIBLIOGRAFIA

[01] Frank W. Warner. Froundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Company.

[02] John M. Lee. Introduction to smooth manifolds. Springer.

[03] Loring Tu. An introduction to manifolds. Universitext.

[04] B.N. Shapukov. Grupos y algebras de Lie en ejercicios y problemas. URSS.

[05] Robert Gilmore. Lie groups, Lie algebras and some of their applications. Dover.

[06] Robert Gilmore. Lie groups, Physics and Geometry. Cambridge.

[07] Dep. Mat. Univ. Extremadura. Apuntes de Grupos de Lie.

[08] Ricardo Berlanga Zubiaga. Luis Hernandez Lamoneda. Adolfo Sanchez Valenzuela. Introduccion a la geometría de los grupos de Lie.

[09] Marshall Hall, Jr. Teoria de los grupos. Editorial Trillas.