Espacios Čech-completos

escrito por

Pedro Pablo Rivas Soriano

Tutor: Víctor Fernández Laguna

Facultad de Ciencias
Universidad de Educación a Distancia

Trabajo presentado para la obtención del título de
Master Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.
Especialidad Geometría y Topología

Septiembre 2015

Abstract

Resumen:

Se expone el concepto de espacio Čech-completo como una generalización topológica natural de la noción de completitud de los espacios métricos, que surge por abstracción de propiedades análogas de los espacios compactos y los espacios completamente metrizables. Se interpreta la completitud como una propiedad topológica absoluta respecto de varios tipos de espacios.

Abstract:

The idea of Čech-complete space is explained as a natural topological generalization of the notion of completeness in metric spaces, which arises by abstraction from similar properties of compact spaces and completely metrizable spaces. Completeness is interpreted as an absolute topological property with respect to several kinds of spaces.

Keywords: espacios Čech-completos, Čech-completitud

Tabla de Contenidos

Página

Capítulo 0

Introducción

Un espacio métrico es completo cuando toda sucesión de Cauchy es convergente. La completitud es una propiedad esencial en el análisis matemático, al asegurar la operación de paso al límite[1]. La completitud es una propiedad métrica, y es deseable generalizarla a una noción topológica. La completitud según Čech, o Čech-completitud, es una extensión de la completitud métrica a la clase de los espacios de Tychonoff. Un espacio de Tychonoff X se llama Čech-completo si es un conjunto G_δ en toda compactificación de X. En este trabajo mostraremos que esta definición aparentemente artificial se puede entender como una generalización natural de la noción de completitud de los espacios métricos. Veremos que la Čech-completitud es una abstracción de propiedades análogas en los espacios completamente metrizables y en los espacios topológicos compactos. En los primeros capítulos estudiaremos estas propiedades, para llegar en el capítulo 4 al concepto de espacio Čech-completo. En el último capítulo estudiaremos propiedades de los espacios Čech-completos y veremos que conservan muchas cualidades deseables de los espacios métricos completos y de los espacios completamente metrizables. Concluiremos que las tres versiones de completitud consideradas, la completitud métrica, la completa metrizabilidad, y la Čech-completitud, se pueden interpretar como la posesión de una determinada propiedad absoluta en el seno de cierta clase de espacios.

[1] De hecho, los números reales se construyen nada más que para extender el cuerpo de los números racionales a un cuerpo completo

Capítulo 1

Preliminares

Supondremos conocidos los conceptos y propiedades más elementales de los espacios topológicos y de los espacios métricos que se pueden encontrar en cualquier texto básico de topología general. No obstante, vamos a recordar algunos conceptos y teoremas que tienen especial relevancia para nuestros objetivos. Una gran parte de los resultados expuestos en este trabajo proceden del excelente manual de Topología General de Ryszard Engelking [En].

Comenzamos con unas aclaraciones sobre terminología debidas a la falta de consenso sobre algunas definiciones en la literatura topológica. [1] En general usaremos las definiciones más restringidas. Respecto a los axiomas de separación, para que un espacio topológico sea regular, completamente regular o normal exigiremos que sea T_1. Concretamente, damos las siguientes definiciones.

- Un espacio topológico es T_1 si todos sus puntos son subconjuntos cerrados.
- Un espacio topológico X es de Hausdorff, o T_2, si para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$, $y \in V$.
- Un espacio topológico X es regular, o T_3, si es T_1, y para cada cerrado $F \subset X$ y cada $x \in X$ tal que $x \notin F$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $F \subset U$ y $x \in V$.
- Un espacio topológico X es de Tychonoff, completamente regular, o $T_{3\frac{1}{2}}$, si es T_1, y para cada cerrado $F \subset X$ y cada $x \in X$ tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$.
- Un espacio topológico X es normal, o T_4, si es T_1, y para todo par de subconjuntos cerrados y disjuntos $A, B \subset X$ existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$.

[1] Pueden verse por ejemplo las notables diferencias en las definiciones de los mismos conceptos por Kelley [Ke] y Engelking [En], con definiciones más generales en el primer autor. Nosotros seguiremos el estilo de Engelking.

Asímismo, solo consideraremos espacios compactos de Hausdorff. Es decir, definimos un espacio compacto como un espacio topológico de Hausdorff en el que todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito. También exigiremos ser Hausdorff a los espacios localmente compactos.

Por entorno de un punto $x \in X$ entendemos siempre un entorno abierto, a menos que indiquemos otra cosa, es decir, un abierto $U \subset X$ tal que $x \in X$.

Llamaremos restricción de una aplicación $f : X \to Y$ a toda aplicación $g : A \to B$, con $A \subset X$, $B \subset Y$, que tiene los mismos valores que f en A. Entonces también diremos que f es una extensión de g. Frecuentemente denotaremos con la misma letra una aplicación y una restricción suya, si no hay riesgo de confusión. Así, por ejemplo, una aplicación $f : X \to Y$ tiene restricciones $f : A \to f(A)$ y $f : f^{-1}(B) \to B$, para $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Un *encaje* topológico es una aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$ que establece un homeomorfismo entre X y $f(X)$.

Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, el *producto cartesiano* $\prod_{i\in I} X_i$ es el producto cartesiano conjuntista con la topología inducida por todas las proyecciones canónicas $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$. La noción dual es la *suma directa*, que se denota $\bigoplus_{i\in I} X_i$, y es el conjunto unión disjunta de todos los X_i, con la topología inducida por todas las inclusiones $X_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} X_i$. Es decir, $U \subset \bigoplus_{i\in I} X_i$ es abierto si y solo si $U \cap X_i$ es abierto en X_i para todo $i \in I$.

Los dos teoremas siguientes se consideran los más importantes de la topología general.

Teorema 1.1 (lema de Urysohn)**.** *Para todo par de subconjuntos cerrados y disjuntos A, B de un espacio normal X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$.*

Teorema 1.2 (de Tychonoff)**.** *El producto cartesiano de espacios compactos es compacto.*

Sus pruebas se pueden consultar en cualquier manual de topología general. Hay muchas pruebas del teorema de Tychonoff, pero todas ellas hacen uso de un modo u otro del axioma de elección. Kelley ha demostrado que el teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección (véase [Ke]). En muchas pruebas del teorema de Tychonoff no se exige que los compactos sean de Hausdorff, pero el teorema 1.19 que aparece más adelante asegura que el teorema de Tychonoff también es verdadero cuando sí se exige.

A continuación recordamos algunos resultados que tienen pruebas sencillas, pero que nos serán de gran utilidad.

Teorema 1.3 (Transitividad de la densidad)**.** *Si X es un espacio topológico, $A \subset B \subset X$, A es denso en B y B es denso en X, entonces A es denso en X.*

Demostración. Las condiciones dadas son $\overline{B} = X$ y $\overline{A} \cap B = B$. De la última igualdad se deduce $B \subset \overline{A}$, luego $X = \overline{B} \subset \overline{A} \subset X$. Por tanto, $\overline{A} = X$. □

Teorema 1.4. *Si A es un subespacio denso de un espacio topológico X, entonces para cada abierto $U \subset X$ se tiene $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.*

Demostración. Obviamente $\overline{U \cap A} \subset \overline{U}$. Veamos la inclusión en el otro sentido. Sea $x \in \overline{U}$. Para cada entorno W de x se tiene que $U \cap W \neq \emptyset$. Por la densidad de A, $U \cap W \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{U \cap A}$. □

Teorema 1.5. *Los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$ son hereditarios, es decir, si un espacio topológico cumple uno de ellos, también lo cumplen todos sus subespacios.*

Demostración. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Si X es T_1, sus puntos son cerrados en X, luego todos los puntos de A son cerrados en A, por lo que A es T_1.

Supongamos que X es de Hausdorff, y sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. Existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$, $y \in V$. Entonces $U \cap A$ y $V \cap A$ son abiertos disjuntos de A que contienen a x y a y. Por tanto, A es de Hausdorff.

Sea $F \cap A$ un cerrado cualquiera de A, siendo F un cerrado de X, y sea $x \in A$ tal que $x \notin F \cap A$. Por tanto, $x \notin F$. Supongamos que X es regular, luego existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$, $F \subset V$. Entonces $U \cap A$ y $V \cap A$ son abiertos disjuntos de A que contienen a x y a $F \cap A$, luego, A es regular. Supongamos que X es de Tychonoff, luego existe una función continua $f : X \to [0,1]$ que separa F de x. Entonces, la restricción $f : A \to [0,1]$ separa $F \cap A$ de x, por tanto A es de Tychonoff. □

Teorema 1.6. *Si K es compacto, Y es un espacio de Hausdorff, y $f : K \to Y$ es continua y suprayectiva, entonces Y es compacto.*

Demostración. Basta observar que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de Y si y solo si $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K. □

Teorema 1.7. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea K compacto y $F \subset K$ cerrado. F es de Hausdorff por 1.5. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de F por abiertos de K. Entonces $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{K - F\}$ es un cubrimiento abierto de K, luego tiene un subcubrimiento finito $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, K - F\}$. Entonces $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ es un cubrimiento de F. □

Teorema 1.8. *En un espacio de Hausdorff X para cada par de subconjuntos compactos y disjuntos $A, B \subset X$ existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración. Sea $y \in B$. Para cada $x \in A$ existen abiertos U_x, V_x tales que $x \in U_x$, $y \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. La familia $\{U_x\}_{x \in A}$ cubre A, luego existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subset U_y = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Sea $V_y = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$. Claramente $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$.

Ahora, la familia $\{V_y\}_{y \in B}$ cubre B, luego existen $y_1, \ldots, y_m \in B$ tales que $B \subset V = \bigcup_{k=1}^{m} V_{y_k}$. Sea $U = \bigcap_{k=1}^{m} U_{y_k}$. Claramente $A \subset U$ y $U \cap V = \emptyset$. □

Corolario 1.9. *Todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.* □

Corolario 1.10. *Todo espacio compacto es normal.*

Demostración. Es consecuencia de 1.7 y 1.8. □

Teorema 1.11. *Para un espacio topológico X las condiciones siguientes son equivalentes*

(i) X es de Hausdorff.

(ii) Cada subconjunto compacto $K \subset X$ es la intersección de las clausuras de todos los abiertos que contienen a K.

(iii) Cada punto de X es la intersección de las clausuras de todos sus entornos.

Demostración. Supongamos que X es de Hausdorff y $K \subset X$ es compacto. Para cada $y \in X$ tal que $y \notin K$, existen por el teorema anterior abiertos U, V tales que $K \subset U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $\overline{U} \subset X - V$, luego $y \notin \overline{U}$, por tanto la intersección de las clausuras de todos los abiertos que contienen K no contiene más puntos que los pertenecientes a K. Esto demuestra $(i) \Rightarrow (ii)$. La implicación $(ii) \Rightarrow (iii)$ es trivial, vamos a ver que $(iii) \Rightarrow (i)$. Si cada $x \in X$ es la intersección de las clausuras de sus entornos, entonces para $y \in X$, $x \neq y$ existe un entorno U de x tal que $y \notin \overline{U}$, luego U y $X - \overline{U}$ son entornos disjuntos de x e y. □

Teorema 1.12. *Para todo espacio topológico X se tiene*

$$X \text{ es } T_4 \Rightarrow X \text{ es } T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X \text{ es } T_3 \Rightarrow X \text{ es } T_2 \Rightarrow X \text{ es } T_1.$$

Demostración. La primera implicación es consecuencia del lema de Urysohn. Si un espacio topológico X es completamente regular, dados un cerrado F de X, un punto $x \in X$, $x \notin F$, y una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in F$, entonces $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos disjuntos que contienen a x y a F respectivamente, luego X es regular. $T_3 \Rightarrow T_2$ por definición, y $T_2 \Rightarrow T_1$ por el teorema 1.11. □

Teorema 1.13. *Si X es un espacio topológico, Y es un espacio de Hausdorff, y f, g son dos aplicaciones continuas de X a Y, entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un cerrado de X.*

Demostración. Sea $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Probaremos que A es abierto. Sea $x \in A$. Existen abiertos U_1, U_2 de Y tales que $f(x) \in U_1$, $g(x) \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Entonces, el conjunto $f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$ es un entorno de x contenido en A. □

Corolario 1.14. *Si X es un espacio topológico, Y es un espacio de Hausdorff, y f, g son dos aplicaciones continuas de X a Y que coinciden sobre un subconjunto denso de X, entonces $f = g$.* □

Teorema 1.15. *Sea X un espacio topológico, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas, donde $f_i : X \to Y_i$. Si existe un $i \in I$ tal que f_i es un encaje topológico, entonces la aplicación $f : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ definida por $f(x) = \{f_i(x)\}_{i\in I}$ es un encaje topológico.*

Demostración. No perdemos generalidad al suponer $I = \{1,2\}$. Sean, pues, dos aplicaciones continuas $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$, siendo f_1 un encaje, y consideremos la aplicación continua $f : X \to Y_1 \times Y_2$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. f es inyectiva por serlo f_1. Para que f sea un encaje, queda por ver que la restricción $f : X \to f(X)$ es abierta. Sea $U \subset X$ abierto. Tenemos que $f(U) = (f_1(U) \times Y_2) \cap f(X)$. Puesto que $f_1(U) \times Y_2$ es abierto en $f_1(X) \times Y_2$, $f(U)$ es abierto en $f(X) \subset f_1(X) \times Y_2$. □

Teorema 1.16. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. El grafo $G(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ es un subespacio de $X \times Y$ homeomorfo a X. Si además Y es de Hausdorff, $G(f)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$.*

Demostración. Sea $F : X \to X \times Y$ la aplicación que asigna $x \mapsto (x, f(x))$. Por el teorema 1.15, F es un encaje, luego X es homeomorfo a $F(X) = G(f)$. Supongamos que Y es de Hausdorff. Sean p_X y p_Y las proyecciones canónicas de $X \times Y$ sobre X y sobre Y, respectivamente. $G(f)$ es el subconjunto de $X \times Y$ donde coinciden las aplicaciones $f \circ p_X$ y p_Y. Por 1.13, $G(f)$ es cerrado. □

Corolario 1.17. *Si X, Y son espacios topológicos, para cada $y_0 \in Y$, X es homeomorfo al subespacio $X_{y_0} \subset X \times Y$ definido por $X_{y_0} = \{(x,y) \in X \times Y : y = y_0\}$. Si además Y es de Hausdorff, X_{y_0} es un subespacio cerrado de $X \times Y$.*

Demostración. X_{y_0} es el grafo de la aplicación constante $f : X \to Y$ dada por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. □

Corolario 1.18. *Si X es un espacio topológico, y $\prod\limits_{i\in I} X$ es un producto arbitrario de espacios idénticos a X, entonces la diagonal $\Delta = \{\{x_i\}_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X : x_i = x_j \text{ para todos } i,j \in I\}$ es un subespacio de $\prod\limits_{i\in I} X$ homeomorfo a X. Si, además, X es de Hausdorff, Δ es un cerrado de $\prod\limits_{i\in I} X$.*

Demostración. Fijando un $j \in I$, Δ es el grafo de la aplicación continua $f : X \to \prod\limits_{i\in I, i\neq j} X$ que asigna a cada $x \in X$ el punto que tiene todas sus coordenadas iguales a x. □

Teorema 1.19. *El producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ es de Hausdorff si y solo si todos los espacios X_i son de Hausdorff.*

Demostración. La necesidad es consecuencia del corolario 1.17 y el teorema 1.5. Supongamos que todos los espacios X_i son de Hausdorff, y sean $x = \{x_i\}, y = \{y_i\} \in \prod_{i\in I} X_i$ tales que $x \neq y$. Existe $i \in I$ tal que $x_i \neq y_i$. Sean U y V entornos de x_i e y_i en X_i tales que $U \cap V = \emptyset$. Sea $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ la proyección canónica sobre X_i. Entonces, $p_i^{-1}(U)$ y $p_i^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de x e y. □

CAPÍTULO 2

Compactificaciones

En los espacios métricos la completitud está muy relacionado con la compacidad. Empezaremos estudiando algunas propiedades de la compactificación de espacios topológicos, que, como veremos, se trata de un proceso análogo al de la compleción de los espacios métricos. Esta analogía será fundamental para el objetivo del presente trabajo, que es llegar a una generalización topológica de la completitud métrica.

2.1. Compactificaciones de espacios de Tychonoff

Estaremos interesados en encajar espacios topológicos en compactos. Nuestro primer teorema asegura que todo espacio de Tychonoff se puede encajar en un compacto.

Se llama cubo de Tychonoff a un espacio topológico de la forma $I^A = \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$, donde A es cualquier conjunto de índices, e $I_\alpha = I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ para todo $\alpha \in A$. Todo cubo de Tychonoff es compacto por el teorema de Tychonoff.

Teorema 2.1. *Todo espacio de Tychonoff se puede encajar en el cubo de Tychonoff I^A, siendo A el conjunto de todas las funciones continuas de X a $I = [0,1]$.*

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y A el conjunto de todas las funciones continuas de X a I. Vamos a ver que la aplicación $h : X \to I^A$ definida por $h(x)(\alpha) = \alpha(x)$ para cada $x \in X$ y cada $\alpha \in A$ es un encaje de X en I^A.

h es continua ya que $p_\alpha \circ h = \alpha$ para cada una de las proyecciones canónicas $p_\alpha : I^A \to I_\alpha$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por ser X de Tychonoff, existe $\alpha \in A$ tal que $h(x)(\alpha) = \alpha(x) = 1 \neq 0 = \alpha(y) = h(y)(\alpha)$, luego $h(x) \neq h(y)$, y h es inyectiva. Por último, veamos que $h : X \to h(X)$ es abierta. Sea U un abierto de X, y $x \in U$. Sea $\alpha \in A$ tal que que $\alpha(x) = 0$ y α vale 1 en el cerrado $X - U$. Sea $V = h(X) \cap p_\alpha^{-1}([0,1))$. Entonces V es un entorno abierto de $h(x)$ contenido en $h(U)$. En efecto, para cada $y \in V$, existe $z \in X$ tal que $h(z) = y$, entonces $\alpha(z) = p_\alpha(h(z)) = p_\alpha(y) \neq 1$, por tanto $z \in U$, luego $y \in h(U)$. □

Dada una clase $\mathscr{C}$ de espacios topológicos, y una propiedad $\mathscr{P}$ de subconjuntos de espacios topológicos (por ejemplo, ser abierto o ser cerrado), decimos que $X \in \mathscr{C}$ tiene *absolutamente* la propiedad $\mathscr{P}$, o que X es un subespacio *absoluto* con la propiedad $\mathscr{P}$, si para todo $Y \in \mathscr{C}$ y todo encaje $X \hookrightarrow Y$, X tiene la propiedad $\mathscr{P}$ en Y. Esta definición y el teorema anterior nos da la siguiente caracterización de los espacios compactos.

Corolario 2.2. *Un espacio de Tychonoff es compacto si y solo si es un cerrado absoluto.*

Demostración. Si X es compacto, es cerrado como subconjunto de cualquier espacio de Tychonoff por el corolario 1.9. Supongamos que X es un espacio de Tychonoff que es un cerrado absoluto en los espacios de Tychonoff. En particular, X es cerrado en algún compacto en el que se puede encajar, luego X es compacto por 1.7. □

Una *compactificación* de un espacio topológico X es un espacio compacto Y junto con un encaje $c : X \to Y$ tal que $c(X)$ es denso en Y. Se suele denotar Y como cX, y decir simplemente que el espacio cX es una compactificación de X. Así, cX es una notación abreviada para decir que hay una aplicación continua $c : X \to cX$ tal que $c : X \to c(X)$ es un homeomorfismo, y $c(X)$ es denso en cX. A veces identificaremos X con $c(X)$, suponiendo que X es un subespacio de cX y que c es la inyección natural.

Si X es compacto, $c(X)$ es cerrado en cX, luego $cX = \overline{c(X)} = c(X)$ y, por tanto, c es un homeomorfismo. Es decir, un espacio compacto tiene una única compactificación, el mismo espacio.

Ejemplo 2.3. El intervalo $[0,1]$ y la circunferencia S^1 son compactificaciones del intervalo $(0,1)$, y por tanto de $\mathbb{R}$. En general, la esfera S^n y el cubo $[0,1]^n$ son compactificaciones de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4. Sea X un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado completo. Recordemos que el espacio dual X^* es el espacio de funcionales continuos $T : X \to K$ (K es el cuerpo base, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) con la norma definida por $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} |T(x)|$, que X^* es completo y que hay una isometría canónica de X en su doble dual $X \hookrightarrow X^{**}$ dada por $x(T) = T(x)$ para $x \in X$, $T \in X^*$. La topología débil en X es la mínima topología que hace que todos los funcionales de X^* sean continuos. La topología débil-* en X^* es la mínima topología que hace que todos los elementos $X \subset X^{**}$ sean funcionales continuos sobre X^* (sobre estos conceptos básicos del análisis funcional puede consultarse [VA]). Denotemos B_X a la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach X, es decir, $B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$. Nótese que $B_X \subset B_{X^{**}}$ mediante la identificación canónica de X con un subespacio de X^{**} Los siguientes son dos teoremas clásicos del análisis funcional.

Teorema de Goldstine. Para todo espacio de Banach X, B_X es densa en $B_{X^{**}}$ con la topología débil-*.

Teorema de Alaoglu Para todo espacio de Banach X, B_{X^*} es un espacio compacto con la topología débil-*.

La restricción de la topología débil-* de X^{**} sobre X coincide con la topología débil sobre X. En consecuencia, el espacio $B_{X^{**}}$ con la topología débil-* es una compactificación del espacio B_X con la topología débil.

Teorema 2.5. *Un espacio topológico X tiene una compactificación si y sólo si X es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Si un espacio topológico X tiene un encaje $c: X \to K$ en un espacio compacto K, $c(X)$, y por tanto X, es de Tychonoff por los teoremas 1.10, 1.12 y 1.5. Si X es un espacio de Tychonoff, por el teorema 2.1, existe un encaje $c: X \to K$, donde K es un espacio compacto. $c(X)$ es denso en el compacto $\overline{c(X)} \subset K$, luego $cX = \overline{c(X)}$ es una compactificación de X. □

Obsérvese que, en general, si existe un encaje $c: X \to K$ de un espacio en un compacto, $cX = \overline{c(X)}$ es una compactificación de X.

Se dice que dos compactificaciones c_1X y c_2X del espacio X son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $f: c_1X \to c_2X$ tal que $f \circ c_1 = c_2$. Es claro que la equivalencia de compactificaciones es una relación de equivalencia.

Más en general, dadas dos compactificaciones c_1X y c_2X de un espacio X, se dice que c_2X es *menor o igual que* c_1X, y se escribe $c_2X \leq c_1X$, si existe una aplicación continua $f: c_1X \to c_2X$ tal que $f \circ c_1 = c_2$. El siguiente teorema justifica esta terminología.

Teorema 2.6. *Sea X un espacio de Tychonoff. Se tiene:*

(i) Si $c_2X \leq c_1X$ para dos compactificaciones c_1X, c_2X de X, entonces la aplicación $f: c_1X \to c_2X$ tal que $f \circ c_1 = c_2$ es suprayectiva.

(ii) La relación $\leq$ entre clases de equivalencia de compactificaciones de X es una relación de orden.

Demostración. Si una aplicación continua $f: c_1X \to c_2X$ verifica $f \circ c_1 = c_2$, tenemos que $f(c_1X)$ es compacto, luego cerrado en c_2X, y contiene a $f(c_1(X)) = c_2(X)$, luego contiene a $\overline{c_2(X)} = c_2X$. Esto demuestra el primer punto.

Con respecto al segundo punto, las propiedades reflexiva y transitiva son obvias. Vamos a ver que la relación $\leq$ es antisimétrica. Supongamos que $c_1X \leq c_2X$ y $c_2X \leq c_1X$, y sean $f_1: c_1X \to c_2X$, $f_2: c_2X \to c_1X$ tales que $f_1 \circ c_1 = c_2$ y $f_2 \circ c_2 = c_1$. Entonces $f_2 \circ f_1 \circ c_1 = f_2 \circ c_2 = c_1$, por tanto $f_2 \circ f_1$ coincide con la identidad en el subconjunto denso $c_1(X) \subset c_1X$, y por el corolario 1.14, coinciden en todo c_1X. Mediante un razonamiento análogo, $f_1 \circ f_2$ es la identidad en c_2X. Por tanto, f_1 y f_2 son homeomorfismos y las compactificaciones c_1X y c_2X son equivalentes. □

En el siguiente lema denotamos como $|X|$ el cardinal de un conjunto X, y como $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de las partes de X.

Lema 2.7. *Si X es un subespacio denso de un espacio de Hausdorff Y, entonces $|Y| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))|$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, sea $\mathscr{U}_y$ la familia de todos los entornos de y. Por los teoremas 1.11 y 1.4, tenemos que $\{y\} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}_y} \overline{U} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}_y} \overline{X \cap U}$. Por tanto cada punto de Y se puede expresar como la intersección de un conjunto de subconjuntos de X, de donde $|Y| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))|$. □

Teorema 2.8. *Para cada espacio de Tychonoff X existe un cubo de Tychonoff en el que se pueden encajar todas las compactificaciones de X.*

Demostración. Por el teorema 2.1, cada compactificación cX de X se puede encajar en I^{A_c}, siendo $I = [0,1]$ y A_c el conjunto de las funciones continuas de cX a I. Por el lema anterior, $|cX|$ está acotado, luego $|A_c|$ está acotado. Escogiendo un conjunto A tal que $|A| \geq |A_c|$ para toda compactificación cX de X, tenemos un encaje $cX \hookrightarrow I^{A_c} \subset I^A$ para todas las compactificaciones de X. □

Corolario 2.9. *La familia de clases de equivalencia de compactificaciones de un espacio de Tychonoff es un conjunto bien definido.*[1] □

Lo expuesto hasta el momento nos permite identificar las compactificaciones equivalentes y considerar el conjunto de todas las compactificaciones de un espacio de Tychonoff. En este conjunto tenemos definida una relación de orden.

Teorema 2.10. *En el conjunto de compactificaciones de un espacio de Tychonoff existe una compactificación máxima.*

Demostración. Sea $\{c_j X\}_{j\in J}$ el conjunto de compactificaciones de un espacio de Tychonoff X. El producto $\prod_{j\in J} c_j X$ es compacto por el teorema de Tychonoff. La aplicación $\beta : X \to \prod_{j\in J} c_j X$ dada por $\beta(x) = \{c_j(x)\}_{j\in J}$ es un encaje por el teorema 1.15. Entonces $\beta X = \overline{\beta(X)}$ es una compactificación de X. Para cada $j \in J$, $p_j \circ \beta = c_j$, siendo p_j la proyección canónica $p_j : \prod_{j\in J} c_j X \to c_j X$. Considerando la restricción de p_j a βX, tenemos que $c_j X \leq \beta X$. □

Se llama *compactificación de Stone-Čech* de un espacio de Tychonoff X, y se la denota por βX, a la mayor de todas las compactificaciones de X. La compactificación de Stone-Čech tiene la siguiente propiedad universal.

Teorema 2.11. *Sea X un espacio de Tychonoff y K un espacio compacto. Se tiene:*

(i) Toda aplicación continua $f : X \to K$ tiene una extensión continua única $F : \beta X \to K$.

(ii) Si para una compactificación αX de X toda aplicación continua $f : X \to K$ tiene una extensión continua $F : \alpha X \to Y$, entonces αX es equivalente a βX.

[1] En cambio, la familia de todos los compactos en los que se puede encajar un espacio X no es un conjunto. Si lo fuera, su producto sería un compacto y tendría un cardinal, pero el teorema de Tychonoff nos permite encajar X en compactos de cardinal arbitrariamente grande (paradoja de Cantor).

Demostración. Por el teorema 1.15, la aplicación $c : X \to \beta X \times K$ definida por $c(x) = (\beta(x), f(x))$ es un encaje, así que $cX = \overline{c(X)}$ es una compactificación de X. Como βX es máxima, existe una aplicación continua $g : \beta X \to cX$ tal que $g \circ \beta = c$. Sea $p : cX \to K$ la restricción a cX de la proyección canónica $\beta X \times K \to K$, y sea $F = p \circ g : \beta X \to K$. Tenemos $F \circ \beta = p \circ g \circ \beta = p \circ c = f$, luego F es una extensión de f. La unicidad de F se deriva del teorema 1.13.

Para el segundo punto, si αX es una compactificación con la propiedad mencionada, entonces la aplicación $\beta : X \to \beta X$ tiene una extensión continua $B : \alpha X \to \beta X$, es decir, $\beta = B \circ \alpha$ y $\beta X \leq \alpha X$. Por la maximalidad de βX, αX y βX son equivalentes. □

Corolario 2.12. *Sean X, Y espacios de Tychonoff, y sea αY una compactificación de Y. Toda aplicación continua $f : X \to Y$ tiene una extensión continua única $F : \beta X \to \alpha Y$.* □

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior a la aplicación compuesta $\alpha \circ f : X \to \alpha Y$. La unicidad es consecuencia del teorema 1.13. □

Se llama residuo de una compactificación cX del espacio X al subespacio $cX - c(X)$, es decir, al conjunto de puntos en el que cX difiere de $c(X)$. Una importante propiedad de los residuos respecto de la relación de orden entre compactificaciones de un espacio X es que los residuos se transforman en residuos. Para demostrarlo usaremos el siguiente lema.

Lema 2.13. *Sean X un espacio de Hausdorff, Y un espacio topológico, A un subconjunto denso de X, y $f : X \to Y$ una aplicación continua tal que su restricción $f : A \to f(A)$ es un homeomorfismo. Entonces, $f(A) \cap f(X - A) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $f(A) \cap f(X - A) \neq \emptyset$. Sean $x \in X - A$, $y \in A$, tales que $f(x) = f(y)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X = A \cup \{x\}$ y $f(A) = Y$. Sean U y V entornos abiertos disjuntos de x e y, respectivamente, en X. El conjunto $A - V$ es un cerrado de A, que es homeomorfo con $Y = f(A)$, luego $f(A - V)$ es un cerrado de Y. Por tanto, $f^{-1}f(A - V) = A - V$ es un cerrado en X. Entonces, $X - (A - V) = V \cup \{x\}$ es abierto, luego $(V \cup \{x\}) \cap U = \{x\}$ es abierto, con lo que $x \notin \overline{A} = X$: contradicción. □

Teorema 2.14. *Sean c_1X, c_2X compactificaciones de un espacio X, y una aplicación continua $f : c_1X \to c_2X$ que satisface $f \circ c_1 = c_2$. Entonces, $f(c_1(X)) = c_2(X)$, y $f(c_1X - c_1(X)) = c_2X - c_2(X)$.*

Demostración. Puesto que $f \circ c_1 = c_2$, $f(c_1(X)) = c_2(X)$. Además, $c_2(X) = c_2 \circ c_1^{-1}(c_1(X))$, luego la restricción $f : c_1(X) \to c_2(X)$ coincide con $c_2 \circ c_1^{-1}$, por tanto es un homeomorfismo. Aplicando el lema anterior, $f(c_1X - c_1(X)) \subset c_2X - c_2(X)$, y esta inclusión tiene que ser una igualdad puesto que f es suprayectivo. □

La compactificación de Stone-Čech fue definida en 1937 independientemente por Čech en [Ce] y M. H Stone en [St], usando métodos completamente diferentes. En general, hay muchas formas de construir βX. En el citado trabajo de Čech, βX (la β como notación es suya) es la clausura de la imagen del encaje que hemos usado en la prueba del teorema 2.1. En el ejemplo siguiente vamos a comprobar que esta compactificación es la compactificación de Stone-Čech, mostrando que verifica la propiedad universal del teorema 2.11.

Ejemplo 2.15 (Construcción original de βX)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios de Tychonoff. En la prueba del teorema 2.1 se mostró que había encajes $h : X \to I^A$ y $j : Y \to I^B$, siendo $I = [0,1]$, y A, B los conjuntos de las funciones continuas de X a I y de Y a I. Consideremos las compactificaciones $cX = \overline{h(X)}$ y $cY = \overline{j(Y)}$. Vamos a ver que f extiende a una aplicación continua $F_c : cX \to cY$. En primer lugar, extendemos f a $F : I^A \to I^B$ definiendo $F(q)(\alpha) = q(\alpha \circ f)$, para cada $q \in I^A$ y cada $\alpha \in B$. F es continua, ya que para cada α, $p_\alpha \circ F = p_{\alpha\circ f}$. Nos queda comprobar que $j \circ f = F \circ h$. Para cada $x \in X$ y cada $\alpha \in B$ tenemos: $(j \circ f)(x)(\alpha) = j(f(x))(\alpha) = \alpha(f(x)) = (\alpha \circ f)(x)$, y por otro lado $(F \circ h)(x)(\alpha) = F(h(x))(\alpha) = h(x)(\alpha \circ f) = (\alpha \circ f)(x)$.

Así pues, $F(h(X)) \subset j(Y)$. Por la continuidad de F, $F(cX) = F(\overline{h(X)}) \subset \overline{F(h(X))} \subset \overline{j(Y)} = cY$. En consecuencia, F restringe a una aplicación $F_c : cX \to cY$ tal que $j \circ f = F_c \circ h$.

Supongamos ahora que Y es compacto. Entonces, $j : Y \to cY$ es un homeomorfismo, y la aplicación $\widehat{f} = j^{-1} \circ F_c : cX \to Y$ es una extensión continua de f. En efecto, $\widehat{f} \circ h = j^{-1} \circ F_c \circ h = j^{-1} \circ j \circ f = f$. Por el teorema 2.11, cX es equivalente a la compactificación de Stone-Čech de X.

2.2. Compactificaciones de espacios localmente compactos

Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff X es *localmente compacto* cuando todo punto x tienen un entorno compacto, es decir, existen un abierto U y un subespacio compacto K tales que $x \in U \subset K \subset X$. Más tarde veremos que los espacios Čech-completos generalizan a la vez a los espacios métricos completos y a los espacios topológicos localmente compactos. En esta sección vamos a mostrar algunas propiedades de los espacios localmente compactos y de sus compactificaciones.

Teorema 2.16. *Todo espacio localmente compacto es un espacio de Tychonoff.*[2]

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto, $x \in X$, y F un cerrado de X tal que $x \notin F$. Existen un entorno U de x y un subconjunto compacto K de X tales que $U \subset K$. Sea $F_0 = (K - U) \cup (K \cap F)$. Tenemos que F_0 es cerrado en X, $x \notin F_0$ y $F_0 \subset K$, luego F_0 también es cerrado en K. Como K es completamente regular, existe una función continua $f_1 : K \to [0,1]$ tal que $f_1(x) = 0$ y $f_1(y) = 1$ para $y \in F_0$. Definimos una función $f : X \to [0,1]$ del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{si } x \in X - U \end{cases}$$

El dominio de f es X ya que $K \cup (X - U) = X$. Puesto que $K \cap (X - U) = K - U \subset F_0$, f está bien definida. Por último, f es continua, ya que, si $C \subset [0,1]$ es cerrado, entonces $f^{-1}(C) = f_1^{-1}(C)$ si

[2] Para este teorema y los que le siguen es necesaria la condición de ser un espacio de Hausdorff.

$1 \notin C$, o bien $f^{-1}(C) = f_1^{-1}(C) \cup (X - U)$ si $1 \in C$. En ambos casos, $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X, puesto que $f_1^{-1}(C)$ es cerrado en K y K es cerrado en X. $\square$

El siguiente teorema da definiciones alternativas de un espacio localmente compacto.

Teorema 2.17. *Para un espacio de Hausdorff X las condiciones siguientes son equivalentes.*

(i) X es localmente compacto.

(ii) Cada $x \in X$ tiene un entorno U tal que $\overline{U}$ es compacto.

(iii) Para cada $x \in X$ y cada entorno V de x existe un entorno U de x tal que $\overline{U} \subset V$ y $\overline{U}$ es compacto.

Demostración. Para la implicación $(iii) \Rightarrow (ii)$ basta tomar $V = X$. $(ii) \Rightarrow (i)$ es trivial. Para demostrar $(i) \Rightarrow (iii)$, supongamos que V es un entorno de un punto $x \in X$. Existen un entorno W de x y un compacto K tales que $W \subset K \subset X$. Por el teorema 2.16, X es regular, luego existe un entorno U de x tal que $\overline{U} \subset V \cap W \subset V$. Como $\overline{U} \subset W \subset K$, $\overline{U}$ es compacto. $\square$

Los resultados siguientes establecen los subconjuntos que heredan la propiedad de ser localmente compactos.

Teorema 2.18. *Todo subconjunto abierto o cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto. Supongamos que $F \subset X$ es cerrado. Sea $x \in F$. Existen un entorno U de x y un compacto K tales que $U \subset K \subset X$. Entonces $U \cap F$ es un entorno de x en F contenido en $K \cap F$, que es un subconjunto compacto de F.

Supongamos ahora que $V \subset X$ es abierto, y sea $x \in V$. Por el teorema 2.17, existe U abierto en X tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$ y $\overline{U}$ es compacto. Por tanto, V es localmente compacto. $\square$

Teorema 2.19. *Todo subconjunto localmente compacto de un espacio de Hausdorff X es la intersección de un abierto en X y un cerrado en X.*

Demostración. Sea X de Hausdorff y $M \subset X$ localmente compacto. Es suficiente mostrar que $M = \overline{M} \cap V$ para algún abierto V de X, o, lo que es lo mismo, que M es abierto en $\overline{M}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\overline{M} = X$ y probar que M es un abierto de X.

Sea $x \in M$. Existe un abierto U en M tal que $x \in U$ y su clausura en M, $\overline{U} \cap M$, es un compacto, y por tanto un cerrado en X. Puesto que $U \subset \overline{U} \cap M$, tenemos $\overline{U} \subset \overline{U} \cap M \subset M$. Sea W un abierto de X tal que $U = W \cap M$. Por el teorema 1.4 tenemos

$$x \in W \subset \overline{W} = \overline{W \cap M} = \overline{U} \subset M.$$

Por lo tanto, M es un abierto de X. $\square$

Teorema 2.20. *Sea M un subespacio de un espacio localmente compacto X. M es localmente compacto si y solo si se puede representar en la forma $M = F \cap G$, siendo F un cerrado de X y G un abierto de X.*

Demostración. La condición dada es necesaria por el teorema 2.19. Recíprocamente, si F es un cerrado de X y G es un abierto de X, por el teorema 2.18, F es localmente compacto, y $F \cap G$, siendo un abierto de F, también es localmente compacto. □

Así como los compactos son cerrados absolutos, los espacios localmente compactos también se pueden caracterizar por una propiedad absoluta en el seno de los espacios de Tychonoff.

Teorema 2.21. *Un espacio de Tychonoff es localmente compacto si y solo si es absolutamente la intersección de un abierto y un cerrado.*

Demostración. Si X es localmente compacto, por el teorema 2.19 es la intersección de un abierto y un cerrado en cualquier espacio de Tychonoff.

Si X es un espacio de Tychonoff que es absolutamente la intersección de un abierto y un cerrado, en particular lo es en algún compacto $K \supset X$. Por 2.20, X es localmente compacto. □

El siguiente teorema da otra caracterización de los espacios localmente compactos, por relación a sus compactificaciones.

Teorema 2.22. *Para cada espacio de Tychonoff X son equivalentes las condiciones siguientes:*

(i) X es localmente compacto.

(ii) Para toda compactificación cX de X, $c(X)$ es abierto en cX.

(iii) $\beta(X)$ es abierto en βX.

(iv) Existe una compactificación cX de X tal que $c(X)$ es abierto en cX.

(v) Existe un encaje $f : X \to K$, siendo K compacto, tal que $f(X)$ es abierto en K.

Demostración. Si X es localmente compacto, por el teorema 2.19, $c(X) = F \cap G$, siendo F cerrado en cX y G abierto en cX. Tenemos que $cX = \overline{c(X)} \subset F$, luego $F = cX$ y $c(X) = G$. Así queda probado $(i) \Rightarrow (ii)$. Las implicaciones $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ y $(iv) \Rightarrow (v)$ son triviales. $(v) \Rightarrow (i)$ se sigue del teorema 2.18. □

Si X es un espacio localmente compacto, en el conjunto de compactificaciones de X hay una compactificación mínima. Si X es compacto, esto es evidente, puesto que solo hay una compactificación. El siguiente teorema lo prueba en el resto de casos.

Teorema 2.23 (de la compactificación de Alexandroff)**.** *Todo espacio X no compacto y localmente compacto tiene una compactificación ωX con residuo de un punto. ωX es la menor de todas las compactificaciones de X.*

Demostración. Sea Ω un punto no perteneciente a X, y sea ωX el conjunto $X \cup \{\Omega\}$. Definimos como abiertos de ωX todos los abiertos de X y los complementarios en ωX de todos los subconjuntos compactos de X. Es fácil comprobar que esta colección es una topología en ωX y que la topología de X coincide con su topología relativa como subconjunto de ωX. Como X no es compacto, todos los entornos de Ω cortan a X, luego X es denso en ωX. Por la compacidad local de X, para cada $x \in X$ existen un abierto U y un compacto K tales que $x \in U \subset K \subset X$, por tanto x está separado de Ω por los entornos disjuntos U y $\omega X - K$. En consecuencia, ωX es de Hausdorff. Para ver que ωX es compacto, consideremos un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de ωX. Existe $U \in \mathscr{U}$ que contiene a Ω. El complementario de U es un compacto, luego tiene un subcubrimiento finito en $\mathscr{U}$, que junto con U forma un subcubrimiento finito de ωX. En definitiva, ωX es una compactificación de X, siendo $w : X \to \omega X$ la inyección natural.

Para demostrar que ωX es una compactificación mínima, sea cX cualquier otra compactificación de X. Identificamos $c(X)$ con X, y consideremos la aplicación $f : cX \to \omega X$ que coincide con la identidad sobre X y transforma el residuo $cX - X$ en Ω. Obviamente, $f \circ c = \omega$, por lo que basta con ver que f es continua. Dado un abierto U de ωX, si $U \subset X$, $f^{-1}(U) = U$ es abierto en X, y por el teorema 2.22 es abierto en cX. En otro caso, $\Omega \in U$ con $X - U = K$ compacto, entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}(\omega X - K) = cX - K$ es un abierto en cX. $\square$

A la compactificación ωX se la llama *compactificación de Alexandroff*, compactificación de un punto o compactificación mínima.

Ejemplo 2.24. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ se construye añadiendo al plano complejo $\mathbb{C}$ el punto del infinito, y, como entornos suyos, los abiertos de $\mathbb{C}$ con complementario acotado. $\widehat{\mathbb{C}}$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$.

CAPÍTULO

3

COMPLETITUD MÉTRICA

3.1. Espacios métricos completos

Estudiaremos algunas propiedades de los espacios métricos completos que nos serán útiles para generalizar la completitud a espacios topológicos. En este sentido, serán de especial interés las relaciones de la completitud con la compacidad.

Si en un conjunto X tenemos definida una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, denotaremos como (X,d) al espacio métrico resultante, o simplemente como X si se sobreentiende d. Denotaremos como $B(x,r)$ a la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$.

Para un subconjunto A de un espacio métrico (X,d), se define el *diámetro* de A como $diam(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$. Obsérvese que $diam(A) = diam(\overline{A})$. En efecto, para $x, y \in \overline{A}$, existen $x_1, y_1 \in A$ cuya distancia respectiva a x e y es arbitrariamente pequeña. Puesto que $d(x,y) \leq d(x,x_1)+d(x_1,y_1)+d(y_1,y)$, se deduce $d(x,y) \leq diam(A)$ y $diam(\overline{A}) \leq diam(A)$.

Cantor probó en 1880 que una sucesión decreciente de intervalos cerrados de la recta real cuya longitud tiende a cero se cortan en un punto. En general tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (de la intersección de Cantor)**.** *Un espacio métrico (X,d) es completo si y sólo si para toda sucesión decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de subconjuntos cerrados no vacíos, tal que $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, verifica $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. En tal caso, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene exactamente un punto.*

Demostración. Supongamos que X es completo, y sea $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ una sucesión de cerrados no vacíos tal que $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$. Para cada $n = 1,2,\dots$, elegimos un punto $x_n \in F_n$. Como $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Para cada $n = 1,2,\dots$, la subsucesión $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ está en F_n y tiende a x. Como F_n es cerrado, $x \in F_n$, luego $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Recíprocamente, supongamos que X verifica la condición del teorema. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $n = 1,2,\dots$, sea F_n la clausura del conjunto $\{x_n, x_{n+1},\dots\}$. Los conjuntos F_n forman una sucesión decreciente de cerrados no vacíos tal que $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$. Por hipótesis, existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe un n tal que $diam(F_n) < \epsilon$. Entonces $\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset F_n \subset B(x,\epsilon)$, con lo cual $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Por tanto, X es completo.

Por último, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, para $y \in X$, $y \neq x$, existe un n tal que $diam(F_n) < d(x,y)$, luego $y \notin F_n$, así que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ solo contiene el punto x. $\square$

Un espacio topológico compacto se puede caracterizar porque toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Podemos mejorar el teorema de Cantor para obtener una caracterización análoga de los espacios métricos completos.

Teorema 3.2. *Un espacio métrico (X,d) es completo si y sólo si para toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y tal que para cada $\epsilon > 0$ tiene un miembro de diámetro menor que ϵ, tiene intersección no vacía. En tal caso, esa intersección tiene exactamente un punto.*

Demostración. La condición del teorema es suficiente por el teorema de Cantor. Veamos la necesidad. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados del espacio completo X con la propiedad de la intersección finita y que contiene elementos de diámetro arbitrariamente pequeño. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $i_n \in I$ tal que $diam(F_{i_n}) < \frac{1}{n}$. Sea $F_n = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Tenemos la sucesión $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, con $diam(F_n) < \frac{1}{n}$. Por el teorema de Cantor, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{i_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ para algún $x \in X$. Tomando un $i_0 \in I$ cualquiera, por el mismo razonamiento $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_{i_n}$ es un punto, y ese punto tiene que ser x, luego $x \in F_{i_0}$.Por tanto, $\bigcap_{i\in I} F_i = \{x\}$. $\square$

Corolario 3.3. *Todo espacio métrico compacto es completo.* $\square$

Estudiaremos ahora la conservación de la completitud en subespacios, sumas directas y productos cartesianos.

Teorema 3.4. *Si X es un espacio métrico completo y M es un subespacio cerrado de X, entonces M es completo.*

Si X es un espacio métrico y M es un subespacio completo de X, entonces M es cerrado en X.

Demostración. Sea X completo y M un cerrado de X. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en M. También es de Cauchy en X, luego tiene un límite $x \in X$, y como M es cerrado, $x \in M$.

Para la segunda parte, sea X un espacio métrico y M un subespacio completo de X. Sea $x \in \overline{M}$. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de M cuyo límite es x. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M, luego tiene un límite en M. Ese límite es x, así que $x \in M$ y M es cerrado. $\square$

Se dice que una métrica d en un espacio X está *acotada por* $r > 0$ si $d(x,y) \leq r$ para todos $x, y \in X$.

Si $\{(X_i,d_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios métricos con métricas acotadas por 1, en su suma directa $\bigoplus_{i\in I} X_i$ se puede definir la siguiente métrica.

$$d(x,y) = \begin{cases} d_i(x,y) & \text{si } x,y\in X_i \text{ para algún } i\in I \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.1}$$

Es fácil comprobar que d es una métrica. La topología inducida por d coincide con la topología de $\bigoplus_{i\in I} X_i$. En efecto, coinciden sobre cada subespacio X_i, y en la topología inducida por d cada X_i es abierto, luego $U\subset \bigoplus_{i\in I} X_i$ es abierto si y solo si $U\cap X_i$ es abierto en X_i para todo $i\in I$.

Teorema 3.5. *Sea $\{(X_i,d_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios métricos con métricas acotadas por 1. La suma directa $\bigoplus_{i\in I} X_i$ con la métrica definida en 3.1 es un espacio completo si y sólo si todos los espacios (X_i,d_i) son completos.*

Demostración. Supongamos que $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es completo. Cada X_i es un subespacio cerrado de $\bigoplus_{i\in I} X_i$, luego es completo por el teorema 3.4. Recíprocamente, supongamos que todos los X_i son completos, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\bigoplus_{i\in I} X_i$ con la métrica definida en 3.1. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n,m\geq n_0$, $d(x_n,x_m)<1$, luego existe un cierto $i\in I$ tal que $x_n\in X_i$ para $n\geq n_0$. Puesto que d coincide con d_i en el subespacio X_i, la sucesión $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es de Cauchy en (X_i,d_i), luego tiene un límite $x\in X_i$ con la métrica d_i, y por tanto con la métrica d en $\bigoplus_{i\in I} X_i$. □

Si $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\ldots,(X_n,d_n)$ son espacios métricos, se puede definir en el conjunto $X = X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ la métrica dada por $d(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)+\cdots+d_n(x_n,y_n)$, y es fácil ver que la topología que induce d en X coincide con la del producto cartesiano. Este resultado se puede generalizar a una familia numerable $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$, si las métricas d_n están acotadas por 1, definiendo en el producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ la métrica siguiente.

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n) \qquad \text{para } x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.2}$$

En esta fórmula, los factores $\frac{1}{2^n}$ se introducen, junto con la acotación de las métricas, con el único fin de asegurar la convergencia de la serie. Véase [En], 4.2.2 para más detalles. Con esto obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de espacios métricos no vacíos con métricas acotadas por 1. El producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ con la métrica definida en 3.2 es completo si y sólo si todos los espacios (X_n,d_n) son completos.*

Demostración. Supongamos que $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es completo con la métrica d definida en 3.2. Por el corolario 1.17, para cada $n\in\mathbb{N}$, X_n es homeomorfo a un subespacio cerrado $Y_n\subset X$ que se obtiene eligiendo puntos fijos en el resto de coordenadas. Por el teorema anterior, Y_n es completo. Dados $x_1,x_2\in X_n$, si los consideramos como elementos de Y_n, tenemos que $d(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}d_k(x_k,y_k)=\frac{1}{2^n}d_n(x_1,x_2)$. En consecuencia, las dos métricas definen las mismas sucesiones de Cauchy y los mismos límites, luego X_n es completo.

Supongamos ahora que todos los espacios (X_n, d_n) son completos, y sea $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \ldots$ una sucesión de Cauchy en $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ con la métrica d. Para cada $i, j, k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$d_k(x_k^i, y_k^j) \leq 2^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^i, y_n^j) = 2^k d(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}),$$

por tanto, la sucesión $x_k^1, x_k^2, \ldots$ es de Cauchy en X_k, y tiene que converger a un punto x_k. Vamos a ver que $\{x_n\}$ es el límite de la sucesión $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \ldots$, lo que probará que X es completo. Dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos que

$$d(\{x_n^i\}, \{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^i, x_n) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^i, x_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^i, x_n) \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^i, x_n) + \frac{\epsilon}{2}$$

La suma finita de la parte izquierda de la última expresión tiende a 0 cuando i tiende a ∞, así que para i suficientemente grande es menor que $\frac{\epsilon}{2}$, con lo que $d(\{x_n^i\}, \{x_n\}) < \epsilon$. □

3.2. Compleción de espacios métricos

Hemos visto con el teorema de Cantor la relación de la completitud con la compacidad, y que la completitud se hereda a los subconjuntos cerrados, igual que la compacidad. Es por ello natural que la compactificación de espacios topológicos tenga un análogo en los espacios métricos, el encaje de un espacio métrico en un espacio completo como subconjunto denso. Es lo que se llama *compleción* de un espacio métrico. En esta sección veremos que todo espacio métrico tiene una compleción, y (a diferencia de las compactificaciones) solo una compleción. Como hicimos al estudiar las compactificaciones, lo primero será probar que todo espacio métrico se puede encajar en un espacio métrico completo.

En el ámbito de los espacios métricos un encaje es una *isometría* $f : X \to Y$, es decir, una aplicación que conserva las distancias, lo que implica que f también es un encaje topológico, y dos espacios X, Y son *isométricos* cuando existe una isometría biyectiva $f : X \to Y$, lo que implica que X e Y son homeomorfos.

Si X es un espacio topológico e (Y, d) es un espacio métrico, una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es *acotada* si $diam(f(X)) < \infty$. En el conjunto de todas las aplicaciones continuas acotadas de X a Y se define la *métrica del supremo* por la fórmula

$$\hat{d}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Fijando un $x_0 \in X$, se tiene que $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \leq diam(f(X)) + d(f(x_0), g(x_0)) + diam(g(X))$, por tanto el supremo anterior es finito, y es fácil ver que verifica los axiomas para una métrica.

Teorema 3.7. *Para todo espacio topológico X y todo espacio métrico completo (Y, d) el espacio de las aplicaciones continuas y acotadas de X a Y con la métrica del supremo es completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio considerado. Para cada $x \in X$, $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \hat{d}(f_n, f_m)$, luego la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en Y y tiene un límite que denotamos $f(x)$. Tenemos así definida una función $f : X \to Y$. Vamos a ver que $\{f_n\}$ tiende a f uniformemente. Dado $\epsilon > 0$, por ser $\{f_n\}$ de Cauchy, tenemos que para n, m suficientemente grandes, $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Tomando límite en m, $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $x \in X$. De donde, por el teorema de la convergencia uniforme, f es continua y acotada, y, además, $\lim_{n\to\infty} \hat{d}(f_n, f) = 0$. □

Teorema 3.8. *Todo espacio métrico es isométrico a un subespacio de un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea (Y, δ) el espacio de funciones reales continuas y acotadas sobre X con la métrica del supremo. Por el teorema anterior, Y es completo. Sea $a \in X$ un punto fijo cualquiera. Para cada $x \in X$ definimos

$$f_x(z) = d(z, x) - d(z, a) \qquad \text{para } z \in X.$$

Por la desigualdad triangular, $|f_x(z)| \leq d(a, x)$, luego $f_x \in Y$ para todo $x \in X$. Tenemos así definida una aplicación $F : X \to Y$, $x \mapsto f_x$. Vamos a ver que F establece una isometría entre X y $F(X) \subset Y$ comprobando que

$$\delta(f_x, f_y) = d(x, y) \qquad \text{para todos } x, y \in X.$$

Por un lado, tenemos que

$$f_x(z) - f_y(z) = d(z, x) - d(z, a) - d(z, y) + d(z, a) = d(z, x) - d(z, y) \leq d(y, x),$$

una vez más, por la desigualdad triangular. Intercambiando los lugares de x e y, llegamos a $|f_x(z) - f_y(z)| \leq d(x, y)$, y tomando el supremo en $z \in X$, obtenemos

$$\delta(f_x, f_y) \leq d(x, y).$$

Por otro lado, tenemos

$$f_x(y) - f_y(y) = d(y, x) - d(y, a) - d(y, y) + d(y, a) = d(y, x),$$

luego

$$\delta(f_x, f_y) \geq d(x, y).$$

□

Tenemos una caracterización de la completitud métrica como propiedad topológica absoluta:

Teorema 3.9. *Un espacio métrico es completo si y solo si es un cerrado absoluto.*

Demostración. Si X es un espacio métrico completo, es cerrado como subconjunto de cualquier espacio métrico por la segunda parte del teorema 3.4. Supongamos que X es un espacio métrico que es un cerrado absoluto en los espacios métricos. En particular, y por el teorema anterior, X es cerrado en algún espacio métrico completo en el que se puede encajar, y por la primera parte del teorema 3.4, X es completo. □

Podemos concluir ahora, como hacíamos en el caso de las compactificaciones, que, puesto que todo espacio métrico X tiene un encaje $F : X \to Y$ en un espacio métrico completo Y, X se puede encajar como subespacio denso en el espacio completo $\widetilde{X} = \overline{F(X)} \subset Y$. Pero queremos probar también que $\widetilde{X}$ es único, en el sentido de que cualquier otro espacio completo en el que se puede encajar X como subespacio denso es isométrico a $\widetilde{X}$. Esto nos llevará un poco más de esfuerzo.

Recordemos que, dado un espacio métrico (X,d), para $x \in X$ y $A \subset X$ no vacío, se define $d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$. $x \in \overline{A}$ si y solo si x está arbitrariamente cerca de algún punto de A, por lo que $x \in \overline{A}$ si y solo si $d(x,A) = 0$. Es fácil comprobar que, fijado A, $d(x,A)$ es una función continua en X.

Se dice de un subconjunto de un espacio topológico que es un *conjunto G_δ* si se puede expresar como una intersección numerable de abiertos, y que es un *conjunto F_σ* si se puede expresar como una unión numerable de cerrados. Obviamente el complementario de un G_δ es un F_σ, y viceversa. Es evidente, pero lo usaremos con frecuencia, que si $A \subset B \subset X$ y A es un conjunto G_δ en X, también es un conjunto G_δ en B. En un espacio métrico (X,d) todo cerrado F es un conjunto G_δ, ya que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : d(x,A) < \frac{1}{n}\}$. Pronto veremos que los conjuntos G_δ proporcionan una importante caracterización topológica de la completitud.

Sea X un espacio topológico, Y un espacio métrico, A un subconjunto denso de X y $f : A \to Y$ una aplicación continua. Se dice que la *oscilación de f en el punto $x \in X$ es igual a cero* si para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno U de x tal que $diam(f(A \cap U)) < \epsilon$. Si $x \in A$, la oscilación de f en x es igual a cero por la continuidad de f en x. En efecto, basta tomar como U un entorno de x tal que $f(A \cap U) \subset B(f(x), \frac{\epsilon}{3})$. Por otro lado, el conjunto B de puntos de X en los cuales la oscilación de f es igual a cero es un conjunto G_δ, puesto que puede expresarse $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, siendo V_n el subconjunto de los puntos de X que tienen un entorno U tal que $diam(f(A \cap U)) < \frac{1}{n}$. Por su definición, es claro que los conjuntos V_n son abiertos.

Lema 3.10. *Sea X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico completo, A un subconjunto denso de X, $f : A \to Y$ una aplicación continua, y B el conjunto de puntos de X en los cuales la oscilación de f es igual a cero. Entonces f tiene una extensión continua $F : B \to Y$.*

Demostración. Dado $x \in B$, sea $\mathscr{F}$ la familia de todos los conjuntos $\overline{f(A \cap U)}$, donde U recorre todos los entornos de x. Por la densidad de A, los miembros de $\mathscr{F}$ son no vacíos. Además, tenemos que $\overline{f(A \cap U)} \cap \overline{f(A \cap V)} \supset \overline{f(A \cap U) \cap f(A \cap V)} \supset \overline{f(A \cap U \cap V)}$, luego $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por definición de B, para todo $\epsilon > 0$ $\mathscr{F}$ tiene conjuntos de diámetro menor que ϵ. Aplicando el teorema 3.2, la intersección de la familia $\mathscr{F}$ es un punto que designamos $F(x)$.

Queda así definida una aplicación $F : B \to Y$. Si $x \in A$, $f(x) \in \overline{f(A \cap U)}$ para todo entorno U de x, luego $F(x) = f(x)$, de manera que F es una extensión de f. Queda por ver que F es continua. Sea $x \in B$ y $\epsilon > 0$. Por definición de B, existe un entorno U de x tal que $diam(\overline{f(A \cap U)}) < \epsilon$. Tenemos que $F(x) \in \overline{f(A \cap U)}$. Para cada $x' \in B \cap U$, como U también es un entorno de x', $F(x') \in \overline{f(A \cap U)}$. Por tanto, $d(F(x),F(x')) \leq diam(\overline{f(A \cap U)}) < \epsilon$, luego F es continua en x. □

Teorema 3.11. *Sea X un espacio métrico, Y un espacio métrico completo, A un subconjunto denso de X y $f : A \to Y$ una aplicación uniformemente continua. Entonces f tiene una extensión uniformemente continua $F : X \to Y$.*

Demostración. Designaremos por d a la métrica tanto en X como en Y, puesto que no hay riesgo de confusión. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(a), f(b)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todos los $a, b \in A$ tales que $d(a, b) < \delta$. Haciendo $U = B(x, \frac{\delta}{2})$, tenemos que para $a, b \in A \cap U$, $d(f(a), f(b)) < \frac{\epsilon}{2}$, luego $diam(f(A \cap U)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. En consecuencia, la oscilación de f en todos los puntos de X es igual a cero. Por el lema anterior, f extiende a una aplicación continua $F : X \to Y$. Queda por ver que F es uniformemente continua.

Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para todos $a, b \in A$, $d(f(a), f(b)) < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $d(a, b) < \delta$. Sean $x, x' \in X$ y supongamos que $d(x, x') = l < \delta$. Haciendo $U = B(x, r) \cup B(x', r)$ con $r = \frac{\delta - l}{3}$, el conjunto U es abierto y $diam(U) \leq 2r + l < \delta$. Entonces, $diam(\overline{f(A \cap U)}) = diam(f(A \cap U)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Por otro lado, para todo entorno V de x, por la densidad de A, $U \cap V \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{A \cap U}$. Por el mismo razonamiento, $x' \in \overline{A \cap U}$. Entonces, por la continuidad de f, $F(x), F(x') \in f(\overline{A \cap U}) \subset \overline{f(A \cap U)}$, luego $d(F(x),F(x')) < \epsilon$. □

Teorema 3.12. *Sean X, Y espacios métricos completos, $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos densos, y $f : A \to B$ una isometría biyectiva. Entonces f tiene una extensión $F : X \to Y$ que es una isometría biyectiva.*

Demostración. Designaremos por d a la métrica tanto en X como en Y. Como f es una isometría, es uniformemente continua, y por el teorema anterior extiende a una aplicación continua $F : X \to B$. Consideremos F como aplicación de X a Y. La composición de las aplicaciones continuas $F \times F : X \times X \to Y \times Y$ y $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es continua y coincide con la aplicación continua $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sobre el subconjunto denso $A \times A \subset X \times X$, así que por el corolario 1.14 ambas aplicaciones coinciden sobre $X \times X$, es decir, $d(F(x),F(x')) = d(x,x')$ para todos $x, x' \in X$. Por tanto, $F : X \to Y$ es una isometría. Haciendo el mismo razonamiento con la isometría $f^{-1} : B \to A$ obtenemos una isometría $G : Y \to X$. De nuevo por 1.14, $G \circ F$ y $F \circ G$ coinciden con la identidad sobre los subconjuntos densos A y B, respectivamente, luego son la identidad. Por tanto, $G = F^{-1}$ y F es una isometría biyectiva. □

Teorema 3.13. *Para cada espacio métrico X existe un espacio métrico completo $\widetilde{X}$, tal que $\widetilde{X}$ contiene un subconjunto denso isométrico a X. Además, $\widetilde{X}$ es único, salvo isometrías.*

Demostración. Por el teorema 3.8, existen un espacio métrico completo Y, y una isometría $f: X \to Y$. Sea $\widetilde{X} = \overline{f(X)} \subset Y$. $\widetilde{X}$ es completo por el teorema 3.4, $f(X)$ es es denso en $\widetilde{X}$, e isométrico con X. Supongamos que existe otro espacio completo Z y una isometría $g: X \to Z$ tal que $\overline{g(X)} = Z$. Entonces, $g \circ f^{-1}: f(X) \to g(X)$ es una isometría biyectiva que por el teorema anterior extiende a una isometría biyectiva entre $\widetilde{X}$ y Z. □

Si X es un espacio métrico, al espacio $\widetilde{X}$ que satisface las condiciones del teorema anterior se le llama *compleción* de X.

El ejemplo por excelencia de compleción es el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales como compleción del espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Es posible hacer una demostración de la existencia y unicidad de la compleción de un espacio métrico alternativa a la que aquí hemos dado, mediante un proceso análogo a la construcción de Cantor de los números reales a partir de los racionales. Esquemáticamente, el proceso es el siguiente. Dado un espacio métrico X, se define $\widetilde{X}$ como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X, donde dos sucesiones son equivalentes cuando la diferencia de sus términos converge a 0. En $\widetilde{X}$ se define la métrica $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, siendo $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos representantes cualesquiera de las clase de equivalencia x, y. Finalmente, se encaja X en $\widetilde{X}$ identificando cada punto con una sucesión constante.

3.3. Espacios completamente metrizables

Se dice de un espacio topológico X que es *metrizable* si existe una métrica d en el conjunto X que induce la topología de X. En ese caso, también se dice que d es una métrica sobre el espacio topológico X, y que el espacio topológico X es metrizable por d. Si existe un homeomorfismo $f: X \to (Y,d)$ entre un espacio topológico X y un espacio métrico (Y,d) es claro que X es metrizable por la métrica definida como $d(x,y) = d(f(x), f(y))$ para $x, y \in X$. Así, podemos también decir que X es metrizable si es homeomorfo a un espacio métrico.

Se dice que un espacio topológico X es *completamente metrizable* si es metrizable por una métrica completa. Para un espacio métrico, es evidente que, si es completo, es completamente metrizable, pero el recíproco no es cierto, pues en un espacio métrico no completo puede haber otra métrica equivalente que sí sea completa, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. El intervalo $(0,1)$ con la métrica natural no es un espacio métrico completo, pero es un espacio topológico completamente metrizable ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Ser completo designa una propiedad de los espacios métricos, mientras que ser completamente metrizable se refiere a una propiedad de espacios topológicos. Por tanto, con la completa metrizabilidad tenemos ya una noción topológica de completitud. Sin embargo, queremos ir más allá y lograr un noción de completitud expresada en términos puramente topológicos. Antes de ello, en esta sección vamos a generalizar a los espacios completamente metrizables las propiedades de los espacios métricos completos de las secciones anteriores.

Lema 3.15. *Todo espacio completamente metrizable es metrizable por una métrica completa acotada por 1.*

Demostración. Sea X un espacio completamente metrizable, y d una métrica completa en X. Definimos

$$d_1(x,y) = min(1, d(x,y)) \qquad \text{para } x,y \in X$$

Es fácil comprobar que d_1 es una métrica en X. Obviamente, d_1 está acotada por 1. Las bolas de radio menor o igual que 1 coinciden en las dos métricas, luego definen la misma topología en X, y por tanto los mismos límites. Por la misma razón, definen las mismas sucesiones de Cauchy en X, luego d_1 es completa. □

Los dos teoremas siguientes son análogos a los teoremas 3.5 y 3.6.

Teorema 3.16. *La suma directa $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es completamente metrizable si y solo si todos los espacios X_i son completamente metrizables.*

Demostración. Dada una métrica completa en $\bigoplus_{i\in I} X_i$, puesto que cada subespacio X_i es cerrado, es completo por el teorema 3.4. Si cada X_i es completamente metrizable, por el lema 3.15 existe sobre cada X_i una métrica completa acotada por 1, y por el teorema 3.5, hay una métrica completa sobre el espacio $\bigoplus_{i\in I} X_i$. □

Teorema 3.17. *El producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es completamente metrizable si todos los espacios X_n son completamente metrizables.*

Demostración. Si cada X_n es completamente metrizable, por el lema 3.15 existe sobre cada X_n una métrica completa acotada por 1, y por el teorema 3.6, hay una métrica completa sobre el espacio $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. □

Tenemos también un análogo del teorema 3.4, pero vamos a ver que el papel que juegan los cerrados en los espacios métricos respecto a la completitud, lo juegan los conjuntos G_δ en los espacios metrizables.

Teorema 3.18. *Sea X un espacio topológico, Y un espacio completamente metrizable, A un subconjunto denso de X y $f : A \to Y$ una aplicación continua. Entonces f tiene una extensión continua $F : B \to Y$, siendo B un conjunto G_δ de X que contiene a A.*

Demostración. Sea d una métrica completa en Y. Por el lema 3.10, $f : A \to Y$ extiende a una aplicación $F : B \to Y$, siendo B el conjunto de los puntos de X en los que la oscilación de f es igual a cero, y B es un conjunto G_δ en X. □

Lema 3.19. *Todo conjunto G_δ de un espacio metrizable X es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto cartesiano $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea A un conjunto G_δ en X, y d una métrica sobre el espacio X. Sea $X - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde los subconjuntos F_n son cerrados. La aplicación $f : X \to \mathbb{R}^{\aleph_0}$ definida como $f(x) = (d(x,F_1), d(x,F_2), \dots)$ es continua ya que lo es en cada componente. La aplicación $g : X \to X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$ dada por $g(x) = (x, f(x))$ es un encaje por 1.15, y $g(X)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$ por 1.16. Tenemos las equivalencias siguientes:

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin F_n \text{ para todo } n \Leftrightarrow d(x,F_n) > 0 \text{ para todo } n \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}_+^{\aleph_0},$$

siendo $\mathbb{R}_+$ el conjunto de números reales positivos. Por lo tanto, $g(A) = g(X) \cap (X \times \mathbb{R}_+^{\aleph_0})$, luego $g(A)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}_+^{\aleph_0}$, que es homeomorfo a $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$. □

Teorema 3.20. *Si X es un espacio completamente metrizable y M es un conjunto G_δ en X, entonces M es completamente metrizable.*

Demostración. Sea X un espacio completamente metrizable y M un conjunto G_δ en X. Por el lema anterior, M es homeomorfo a un subconjunto P de $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$. Por el teorema 3.15, existen métricas completas y acotadas por 1 sobre X y sobre $\mathbb{R}$, que por el teorema 3.6 determinan una métrica completa sobre el producto $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$, respecto de la cual P es completo en virtud del teorema 3.4. □

Teorema 3.21. *Si X es un espacio metrizable y M es un subespacio completamente metrizable de X, entonces M es un conjunto G_δ en X.*

Demostración. Por el teorema 3.18, la identidad en M extiende a una aplicación continua $F : B \to M$, siendo B un conjunto G_δ en $\overline{M}$. La composición de F con la inclusión de M en B coincide con la identidad en B sobre el subconjunto denso M, así que, por 1.14, es la identidad en B, por tanto $B = M$. Así, M es un conjunto G_δ en $\overline{M}$, es decir, existe una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos en X tales que $M = \bigcap_{n=1}^{\infty}(U_n \cap \overline{M}) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap \overline{M}$. Puesto que $\overline{M}$ es un conjunto G_δ en X por ser un cerrado de un espacio metrizable, M también es un conjunto G_δ. □

De los teoremas 3.8 y 3.13 obtenemos inmediatamente los teoremas siguientes:

Teorema 3.22. *Todo espacio topológico metrizable se puede encajar en un espacio completamente metrizable.* □

Teorema 3.23. *Todo espacio topológico metrizable se puede encajar como subconjunto denso en un espacio completamente metrizable.* □

Respecto al último teorema, obsérvese que, para cada métrica d sobre un espacio topológico metrizable X, tenemos una compleción del espacio métrico (X,d). Llamaremos a todas ellas *compleciones* del espacio metrizable X. A diferencia de lo que ocurría con la compleción de un espacio métrico, puede haber distintas compleciones de un espacio metrizable. Volviendo al ejemplo 3.14, la compleción del espacio $(0,1)$ es $[0,1]$ con la métrica natural, pero es $(0,1)$ con la métrica del espacio homeomorfo $\mathbb{R}$.

Llegamos a una nueva caracterización de la completitud, análoga a la del teorema 3.9:

Teorema 3.24. *Un espacio topológico metrizable es completamente metrizable si y solo si es un conjunto G_δ absoluto.*

Demostración. Si X es un espacio completamente metrizable, es un G_δ como subconjunto de cualquier espacio metrizable por el teorema 3.21. Supongamos que X es un espacio metrizable que es un conjunto G_δ dentro de cualquier espacio metrizable. En particular, y por el teorema 3.22, X es un conjunto G_δ en un espacio completamente metrizable en el que se puede encajar. Por el teorema 3.20, X es completamente metrizable. $\square$

CAPÍTULO 4

ESPACIOS ČECH-COMPLETOS

4.1. Completitud como generalización de la condición G_δ en espacios metrizables

Con los resultados expuestos en los capítulos anteriores ya estamos preparados para proponer una generalización topológica de la completitud métrica. En la tabla siguiente se resumen una serie de analogías que hemos encontrado entre los espacios compactos, los espacios métricos completos y los espacios completamente metrizables.

Clase	**Subclase**	**Propiedad absoluta**	**Encaje denso**
de Tychonoff	compactos	cerrado	compactificaciones
métricos	completos	cerrado	compleción
metrizables	completamente metrizables	G_δ	compleciones

TABLA 1

Las analogías son las siguientes. Para cada clase $\mathscr{A}$ de espacios (de Tychonoff, métricos o metrizables) hay una subclase $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ (compactos, completos o completamente metrizables, respectivamente) y una propiedad topológica $\mathscr{P}$ de subconjuntos de espacios topológicos (ser cerrado, ser cerrado, o ser G_δ, respectivamente) con las siguientes características.

1. $\mathscr{A}$ es hereditaria, es decir, si $X \in \mathscr{A}$ y $M \subset X$, entonces $M \in \mathscr{A}$.

2. Para $X \subset Y \subset Z$, si X tiene la propiedad $\mathscr{P}$ en Z, también la tiene en Y.

3. Para todo $X \in \mathscr{A}$ existe $Y \in \mathscr{B}$ tal que $X \subset Y$ (teoremas 2.1, 3.8 y 3.22).

4. Si $X \in \mathscr{B}$ y $M \subset X$ tiene la propiedad $\mathscr{P}$ en X, entonces $M \in \mathscr{B}$ (teoremas 1.7, 3.4 y 3.20).

5. Si $X \in \mathscr{A}$, $M \subset X$ y $M \in \mathscr{B}$, entonces M tiene la propiedad $\mathscr{P}$ en X (corolario 1.9 y teoremas 3.4 y 3.21).

6. Como consecuencia de los 3 puntos anteriores, la clase $\mathscr{B}$ se puede caracterizar como la de aquellos miembros de $\mathscr{A}$ que tienen la propiedad $\mathscr{P}$ absolutamente. Es decir, dado $X \in \mathscr{A}$, entonces $X \in \mathscr{B}$ si y sólo si, para todo $Y \in \mathscr{A}$ con $X \subset Y$, X tiene la propiedad $\mathscr{P}$ en Y.

7. El punto 3 puede mejorarse: Para todo $X \in \mathscr{A}$ existe $Y \in \mathscr{B}$ tal que $X \subset Y$ y X es denso en Y (teoremas 2.5, 3.13 y 3.23).

8. Por tanto, la clase $\mathscr{B}$ se puede caracterizar como la de aquellos miembros de $\mathscr{A}$ que tienen la propiedad $\mathscr{P}$ en las extensiones del punto anterior (compactificaciones y compleciones).

Concretamente, el punto 8 dice:

- Un espacio de Tychonoff es compacto si y solo si es un cerrado en alguna de (o equivalentemente, en todas) sus compactificaciones.

- Un espacio métrico es completo si y sólo si es cerrado en su compleción.

- Un espacio topológico metrizable es completamente metrizable si y solo si es un conjunto G_δ en alguna de (o equivalentemente, en todas) sus compleciones.

La primera es una caracterización topológica, las otras dos son caracterizaciones métricas. Lo que desearíamos es una caracterización topológica de los espacios completamente metrizables. La idea de Čech fue sustituir las compleciones por compactificaciones. Observemos que, si X es un espacio metrizable, $\widetilde{X}$ es una de sus compleciones, y $c\widetilde{X}$ es una compactificación de $\widetilde{X}$, entonces X es denso en $c\widetilde{X}$, luego $c\widetilde{X}$ es una compactificación de X. Por ello, si X es un conjunto G_δ en todas las compactificaciones de X, también lo es en todas sus compleciones. Parece pues razonable proponer la siguiente definición:

Un espacio topológico de Tychonoff es Čech-completo si es un conjunto G_δ en todas sus compactificaciones.

La definición se hace aún más razonable si tenemos en cuenta que ser un conjunto G_δ en todas sus compactificaciones es equivalente a ser un conjunto G_δ en alguna de sus compactificaciones, lo que probamos a continuación.

Teorema 4.1. *Para cada espacio de Tychonoff X las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) Para toda compactificación cX de X, $c(X)$ es un conjunto G_δ en cX.

(ii) $\beta(X)$ es un conjunto G_δ en βX.

(iii) Existe una compactificación cX de X tal que $c(X)$ es un conjunto G_δ en cX.

(iv) Existe un encaje $f : X \to K$, siendo K compacto, tal que $f(X)$ es un conjunto G_δ en K

Demostración. Sea cX una compactificación cualquiera de X. Por la maximalidad de βX, existe una aplicación continua $f : \beta X \to cX$ tal que $f \circ \beta = c$. Por el teorema 2.14, $f(\beta X - \beta(X)) = cX - c(X)$ y $f^{-1}(cX - c(X)) = \beta X - \beta(X)$, lo que implica que el residuo de βX es un conjunto F_σ en βX si y solo si el residuo de cX es un conjunto F_σ en cX. En efecto, por un lado $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty F_n) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(F_n)$, y si F_n es cerrado en cX, entonces $f^{-1}(F_n)$ es cerrado en βX, y por otro lado $f(\bigcup_{n=1}^\infty F_n) = \bigcup_{n=1}^\infty f(F_n)$, y si F_n es cerrado en βX, es compacto, luego $f(F_n)$ es compacto, y por tanto cerrado en cX. En consecuencia, $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, y, por la maximalidad de βX, $(ii) \Leftrightarrow (i)$.

Por último, $(iii) \Rightarrow (iv)$ es trivial, y $(iv) \Rightarrow (iii)$ teniendo en cuenta que $\overline{f(X)} \subset K$ es una compactificación de X, y que si $f(X)$ es un conjunto G_δ en K, también lo es en $\overline{f(X)}$. □

La definición original de espacio Čech-completo fue dada en 1937 por Eduard Čech en [Ce], como un espacio de Tychonoff que es un conjunto G_δ en βX (también definida por primera vez en ese mismo trabajo). Čech llamó *espacio topológicamente completo* a lo que hoy llamamos en su honor espacio Čech-completo.

Como acabamos de ver, en los espacios metrizables, ser Čech-completo es condición suficiente para ser completamente metrizable. Para que sea una buena definición de completitud, queda por ver que también es una condición necesaria, lo que haremos enseguida, pero antes vamos a considerar otro enfoque para llegar a una definición topológica de completitud.

4.2. Completitud como generalización del teorema de la intersección de Cantor

Podemos parafrasear el teorema 3.2 como sigue.

Un espacio métrico (X,d) es completo si y sólo si para toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y tal que para cada $n = 1,2,\ldots$ tiene un miembro contenido en algún abierto de $\mathscr{U}_n$, tiene intersección no vacía, siendo $\mathscr{U}_n$ el cubrimiento abierto de X formado por todas las bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$.

Generalizando, podemos proponer que un espacio topológico X es completo si existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X con la propiedad de que toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y tal que para cada $n = 1,2,\ldots$ tiene un miembro contenido en algún abierto de $\mathscr{U}_n$, tiene intersección no vacía.

Resulta que esta condición es equivalente a la Čech-completitud en los espacios de Tychonoff, como vamos a ver en el siguiente teorema. Para simplificar las expresiones, introducimos el siguiente concepto. Dados un espacio topológico X, un cubrimiento $\mathscr{U}$ de X y una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X, diremos que $\mathscr{F}$ es *$\mathscr{U}$-pequeña* si existen $F \in \mathscr{F}$ y $U \in \mathscr{U}$ tales que $F \subset U$.

Teorema 4.2. *Un espacio de Tychonoff X es Čech-completo si y sólo si existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X con la propiedad de que toda familia de subconjuntos cerrados de*

X con la propiedad de la intersección finita y $\mathscr{U}_n$-pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene intersección no vacía.

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff. En toda la demostración, el operador de clausura se refiere siempre a βX.

Supongamos que existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X con la propiedad mencionada. Sea $\mathscr{U}_n = \{U_{n,i}\}_{i\in I_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que X es un G_δ en βX. Sea $V_{n,i}$ un abierto de βX tal que $U_{n,i} = X \cap V_{n,i}$ para $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$. Como $X \subset \bigcup_{i\in I_n} V_{n,i}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $X \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\in I_n} V_{n,i}$. Para que X sea un G_δ en βX es suficiente probar la inclusión inversa.

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\in I_n} V_{n,i}$. Sea $\mathscr{F}$ la familia de todos los conjuntos de la forma $X \cap \overline{V}$, donde V recorre todos los entornos de x en βX. Por la densidad de X en βX, $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in V_{n,i}$ para algún $i \in I_n$, y, puesto que βX es regular, existe un entorno V de x en βX tal que $\overline{V} \subset V_{n,i}$, por tanto $X \cap \overline{V} \subset U_{n,i}$, luego $\mathscr{F}$ es $\mathscr{U}_n$-pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F = X \cap \bigcap_{V\in\mathscr{B}} \overline{V} \neq \emptyset$, donde $\mathscr{B}$ es la familia de entornos de x en βX. Por el teorema 1.11, $\bigcap_{V\in\mathscr{B}} \overline{V} = \{x\}$, luego $x \in X$.

Para el recíproco, supongamos que X un espacio Čech-completo. X es un G_δ en βX, de manera que existe una sucesión G_n de abiertos de βX tales que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Por la regularidad de βX podemos elegir, para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, un entorno $V_{x,n}$ de x en βX tal que $\overline{V}_{x,n} \subset G_n$. Sea $\mathscr{U}_n = \{X \cap V_{x,n}\}_{x\in X}$. Vamos a ver que la sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X tiene la propiedad requerida.

Sea $\mathscr{F}$ una familia de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $F_n \in \mathscr{F}$ y $U_n \in \mathscr{U}_n$ tales que $F_n \subset U_n$. La familia $\{\overline{F}\}_{F\in\mathscr{F}}$ tiene la propiedad de la intersección finita, luego por la compacidad de βX, existe $x \in \bigcap_{F\in\mathscr{F}} \overline{F}$. Tenemos que $U_n = X \cap V_{x_n,n}$ para algún $x_n \in X$. Entonces, $x \in \overline{F}_n \subset \overline{X \cap V_{x_n,n}} \subset \overline{V_{x_n,n}} \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$. Por tanto, $x \in X \cap (\bigcap_{F\in\mathscr{F}} \overline{F}) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} (X \cap \overline{F}) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$, es decir, $\mathscr{F}$ tiene intersección no vacía. $\square$

Una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos de X con la propiedad establecida en el teorema anterior se llama una *sucesión completa de cubrimientos*. Con esta definición, el teorema anterior se puede expresar diciendo que un espacio de Tychonoff es es Čech-completo si y sólo si tiene una sucesión completa de cubrimientos abiertos.

La definición de Čech de los espacios Čech-completos es una definición externa, es decir, una definición en la que se asume la existencia de objetos externos a los espacios considerados, en este caso, sus compactificaciones. El teorema 4.2 proporciona una definición interna de los espacios Čech-completos, es decir, una definición que solo usa objetos internos a los espacios considerados. Esta caracterización interna de los espacios Čech-completos fue establecida independientemente por Z. Frolík en [Fr] (1960) y por A. Arhangel'skiĭ en [Ar] (1961).

Podemos dar una versión de este teorema más parecida aún al teorema de Cantor, recogiendo la intuición de que la sucesión de cubrimientos se hace progresivamente más fina. Recordemos que se dice de un cubrimiento $\mathscr{B}$ que es un *refinamiento* de otro cubrimiento $\mathscr{A}$ del mismo espacio si todo conjunto de $\mathscr{B}$ está contenido en algún conjunto de $\mathscr{A}$.

Teorema 4.3. *Un espacio de Tychonoff X es Čech-completo si y sólo si existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X, tal que $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y con la propiedad de que toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y $\mathscr{U}_n$-pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene intersección no vacía.*

Demostración. La condición dada es suficiente por el teorema 4.2. Veamos la necesidad. Sea X Čech-completo. Por el mismo teorema, existe una sucesión completa $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de X. Observemos que si $\mathscr{U}$ es un refinamiento de un cubrimiento $\mathscr{V}$ de X, toda familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X que es $\mathscr{U}$-pequeña también es $\mathscr{V}$-pequeña. Por tanto, si sustituimos cualquier $\mathscr{V}_n$ por un refinamiento suyo, la sucesión $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo completa. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_n = \{V_1 \cap \cdots \cap V_n : V_1 \in \mathscr{V}_1, \ldots, V_n \in \mathscr{V}_n\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_n$ es un cubrimiento abierto de X, y es un refinamiento de $\mathscr{V}_n$, luego $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión completa de cubrimientos abiertos de X. Además, $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

El teorema 4.2 generaliza la condición dada en el teorema 3.2, por tanto, todo espacio métrico completo es Čech-completo. Con ello queda resuelta la cuestión, que teníamos pendiente, de probar que, en los espacios metrizables, ser Čech-completo es condición necesaria para ser completamente metrizable. Queda así demostrado el siguiente teorema, que establece que la Čech-completitud es una generalización topológica de la completitud métrica.

Teorema 4.4 (de Čech)**.** *Sea X un espacio topológico metrizable. Entonces, X es completamente metrizable si y solo si es Čech-completo.* □

En este capítulo hemos dado una definición interna y una definición externa de los espacios Čech-completos. Más adelante, en los teoremas 5.10, 5.13 y 5.15, veremos otras caracterizaciones de los espacios Čech-completos.

4.3. Ejemplos

Un espacio compacto es Čech-completo ya que es su propia compactificación. Un espacio localmente compacto no compacto es Čech-completo porque tiene una compactificación con residuo de un punto. El teorema 4.1 da condiciones para la Čech-completitud análogas a las condiciones que da el teorema 2.22 para la compacidad local, pero más generales, lo que es otra forma de ver que todo espacio localmente compacto, y, en particular, todo espacio compacto, es Čech-completo.

Así pues, los espacios Čech-completos generalizan a la vez a los espacios completamente metrizables y a los espacios localmente compactos. Existen espacios Čech-completos que no son metrizables y espacios Čech-completos que no son localmente compactos, como muestran los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.5. Sea $\mathbb{J}$ el conjunto de los números irracionales con la métrica natural. $\mathbb{J}$ es denso en $\mathbb{R}$ y S^1 es una compactificación de $\mathbb{R}$, luego de $\mathbb{J}$. Su residuo es $\mathbb{Q}$ más el punto del infinito. Este residuo no es un cerrado de S^1, por tanto $\mathbb{J}$ no es localmente compacto, pero es un conjunto numerable de puntos (cerrados), luego es un conjunto F_σ en S^1 . Por tanto, $\mathbb{J}$ es Čech-completo. Como $\mathbb{J}$ es un espacio métrico, existe un métrica completa sobre $\mathbb{J}$. En el ejemplo 5.3 veremos que $\mathbb{Q}$ no es un espacio Čech-completo.

Ejemplo 4.6. Sea X un conjunto no numerable con la topología discreta. X es localmente compacto y no compacto, luego tiene una compactificación de Alexandroff $\omega X = X \cup \{\Omega\}$. ωX es Čech-completo por ser compacto, pero no es un espacio metrizable. En efecto, los entornos de Ω son los complementarios de los subconjuntos compactos de X, que son sus subconjuntos finitos. Supongamos que ωX es metrizable. Eligiendo una métrica, tenemos que $\{\Omega\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\Omega, \frac{1}{n})$. Tomando complementarios, X es una unión numerable de conjuntos finitos, luego numerable, lo que es una contradicción.

Ejemplo 4.7. El *plano de Niemytzki* (o *plano de Moore*) es un conocido contraejemplo que muestra que no todo espacio de Tychonoff es normal.

El plano de Niemytzki es el semiplano superior $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ con la topología definida por la siguiente base de entornos. Denotamos $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Entonces, si $x \in P$ se toma como base de entornos de x la familia de bolas abiertas de centro x y contenidas en P. Si $x \in L$ se toma como base de entornos de x la familia de conjuntos $\{T(x, r) : r \in \mathbb{R}, r > 0\}$, siendo $T(x, r)$ la unión de $\{x\}$ con la bola abierta de radio r tangente a L en x.

Observemos que la topología de P como subespacio de X es la topología natural o euclídea, y que el subconjunto numerable de los puntos de P de coordenadas racionales es denso en X, esto es, X es un *espacio separable*. Por otro lado, $L \subset X$ es un subespacio cerrado con la topología discreta. En [SS] se prueba que el plano de Niemytzki es de Tychonoff, no es normal, y no es localmente compacto, entre otras muchas propiedades. Aquí vamos a demostrar dos propiedades más, que el plano de Niemytzki no es metrizable y que es Čech-completo.

Supongamos que X es metrizable, y fijemos una métrica en X. Sea D el conjunto de puntos de P de coordenadas racionales. Sea U un abierto de X. Para cada $x \in U$ existe una bola abierta $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Por la densidad de D, existe $y \in D$ tal que $y \in B(x, \frac{1}{2n})$. Entonces, $B(y, \frac{1}{2n}) \subset B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Por tanto, U se puede expresar como unión de bolas de la familia $\mathcal{U} = \{B(y, \frac{1}{n}) : y \in D, n \in \mathbb{N}\}$, y esta familia es numerable.[1] Tenemos que $L \subset \bigcup_{x \in L} T(x, 1)$, donde cada entorno $T(x, 1)$ solo contiene un punto de L, el propio x. Ahora bien, $\bigcup_{x \in L} T(x, 1)$ puede expresarse como una unión de miembros de la familia numerable $\mathcal{U}$, por tanto L es numerable, y llegamos así a una contradicción.

[1]En general, hemos demostrado que un espacio métrico separable tiene una base numerable.

Ahora probaremos que X es Čech-completo. En primer lugar, P es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego es completamente metrizable, y por tanto Čech-completo. Por el teorema 4.3, existe una sucesión completa $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos abiertos de P, tales que $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathscr{V}_n = \mathscr{U}_n \cup \{T(x, \frac{1}{n})\}_{x\in L}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión completa en X. Sea $\mathscr{F}$ una familia de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y $\mathscr{V}_n$-pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $F_n \in \mathscr{F}$ y $V_n \in \mathscr{V}_n$ tales que $F_n \subset V_n$. Distinguimos dos casos:

1. Casi todos los V_n pertenecen a $\mathscr{U}_n$. Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, $F_n \subset V_n \in \mathscr{U}_n$. La familia $\{F_m \cap F\}_{F\in\mathscr{F}}$ es una familia de cerrados de P, con la propiedad de la intersección finita, y es $\mathscr{U}_n$-pequeña para $n \geq m$, y por tanto, también para $n < m$. En consecuencia, $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F = \bigcap_{F\in\mathscr{F}}(F_m \cap F) \neq \emptyset$.

2. Hay infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $V_n = T(x_n, \frac{1}{n})$ para algún $x_n \in L$. Tomemos dos de ellos, m y l, de modo que $F_m \subset V_m = T(x_m, \frac{1}{m})$, $F_l \subset V_l = T(x_l, \frac{1}{l})$, y supongamos que $x_m \neq x_l$. Tenemos que $\emptyset \neq F_m \cap F_l \subset V_m \cap V_l$. La distancia euclídea $r = d(V_m \cap V_l, L)$ es positiva. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{k_0} < r$. Existen $k \geq k_0$ y $x_k \in L$ tales que $F_k \subset V_k = T(x_k, \frac{1}{k})$. Como $diam(V_k) = \frac{2}{k} < r$, tenemos que $V_k \cap V_m \cap V_l = \emptyset$, luego $F_k \cap F_m \cap F_l = \emptyset$, lo que contradice que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto, todos los x_n tales que $V_n = T(x_n, \frac{1}{n})$ son iguales a un punto $x \in L$. Supongamos que existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $x \notin F$. Por ser cerrado, existe un entorno abierto $T(x, \frac{1}{n})$ que no corta a F. Como $T(x, \frac{1}{n})$ contiene miembros de la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, eso contradice que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto, $x \in \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$.

CAPÍTULO 5

Propiedades de los espacios Čech-completos

5.1. Čech-completitud y espacios de Baire

Čech demostró en su trabajo [Ce] de 1937 que los espacios Čech-completos cumplen el importante teorema de la categoría de Baire, conocido entonces para la clase más restringida de los espacios completamente metrizables. El teorema de la categoría de Baire es de gran utilidad en el análisis funcional, y se usa, entre otras cosas, para probar en los espacios de Banach el principio de la acotación uniforme, el teorema de Banach-Steinhaus y el teorema de la aplicación abierta (véase [VA]).

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *nunca denso* si $Int(\overline{A}) = \emptyset$, donde $Int(.)$ designa el operador interior. Una definición equivalente es que el abierto $X - \overline{A}$ es denso en X, puesto que $Int(B) = X - \overline{(X - B)}$ para todo $B \subset X$.

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *de primera categoría* si es la unión numerable de subconjuntos nunca densos. Si $A \subset X$ no es de primera categoría, se dice que es *de segunda categoría*.

Teorema 5.1 (de la categoría de Baire)**.** *Sea X un espacio Čech-completo. Si $A \subset X$ es de primera categoría, $X - A$ es denso en X.*

Demostración. Sea X un espacio Čech-completo, y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $X - \overline{A_n}$ denso para todo $n \in \mathbb{N}$. Para probar que $X - A$ es denso en X, vamos a ver que para todo abierto no vacío G de X, $G \cap (X - A) \neq \emptyset$. Sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión completa de cubrimientos abiertos. Como $X - \overline{A_1}$ es denso, corta a G en un punto x. Sea $U_1 \in \mathscr{U}_1$ tal que $x \in U_1$. Por la regularidad de X, existe un entorno G_1 de x tal que $\overline{G_1} \subset G \cap (X - \overline{A_1}) \cap U_1$. Haciendo un razonamiento análogo, existe un abierto no vacío G_2 y $U_2 \in \mathscr{U}_2$ tal que $\overline{G_2} \subset G_1 \cap (X - \overline{A_2}) \cap U_2$. Por inducción, obtenemos una sucesión $G_1, G_2, \ldots$ de abiertos no vacíos de X tales que $G \supset \overline{G_1} \supset \overline{G_2} \supset \ldots$, y $\overline{G_n} \subset U_n \in \mathscr{U}_n$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ completa, $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - \overline{A_n}) \subset G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - A_n) = G \cap (X - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = G \cap (X - A)$. □

Se dice que un espacio topológico es un *espacio de Baire* si cumple la condición del teorema anterior, es decir, si el complementario de todo conjunto de primera categoría es denso. Según esta definición, el teorema anterior dice que todo espacio Čech-completo es un espacio de Baire. Hay varias condiciones equivalentes que definen los espacios de Baire, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Para todo espacio topológico X las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siendo $A_n \subset X$ y $X - \overline{A_n}$ denso en X para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $X - A$ es denso en X. (El complementario de todo conjunto de primera categoría es denso).

(ii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siendo $A_n \subset X$ y $Int(\overline{A_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $Int(A) = \emptyset$. (Todo conjunto de primera categoría tiene interior vacío).

(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, siendo F_n cerrado en X y $Int(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $Int(A) = \emptyset$.

(iv) Si $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, siendo U_n abierto y denso en X para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces B es denso en X. (La intersección numerable de abiertos densos es densa).

(v) Si $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siendo U abierto en X, $A_n \subset X$ y $X - \overline{A_n}$ denso en X para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $U = \emptyset$. (Todo abierto no vacío es de segunda categoría).

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ puesto que $\overline{(X - B)} = X - Int(B)$ para todo $B \subset X$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ trivialmente. $(iii) \Rightarrow (ii)$ puesto que si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siendo los A_n nunca densos, haciendo $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, los $\overline{A_n}$ son nunca densos, luego $Int(A) \subset Int(B) = \emptyset$. $(i) \Rightarrow (v)$ haciendo $A = U$, y teniendo en cuenta que $U = Int(U)$. $(v) \Rightarrow (i)$ puesto que si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, siendo los A_n nunca densos, se tiene $Int(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap Int(A))$, siendo los conjuntos $A_n \cap Int(A)$ nunca densos, luego $Int(A) = \emptyset$. □

Ejemplo 5.3. El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la topología natural es un conjunto de primera categoría (en $\mathbb{Q}$), puesto que es la unión numerable de sus puntos, que son cerrados con interior vacío. Al ser $\mathbb{Q}$ abierto (en $\mathbb{Q}$), por la condición (v) del teorema anterior, $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire. Por tanto, $\mathbb{Q}$ no es Čech-completo.

5.2. Čech-completitud y compacidad

Ya hemos visto cómo hemos llegado a la definición de Čech-completitud explotando las relaciones entre compacidad y completitud métrica, y que los espacios Čech-completos generalizan a la vez los espacios localmente compactos y los espacios completamente metrizables. Así como los espacios Čech-completos son una clase intermedia entre los espacios completamente metrizables y los espacios de Tychonoff, vamos a ver que también son una clase intermedia entre los espacios localmente compactos y los espacios de tipo puntual numerable.

Recordemos que un espacio topológico cumple el *primer axioma de numerabilidad* cuando todo punto tiene una base de entornos numerable. Esta condición se puede generalizar como sigue. Si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, se llama *entorno de* A a cualquier abierto de X que contiene a A, y se llama *base de entornos para* A a toda familia $\mathscr{U}$ de entornos de A tal que para todo entorno V de A, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $U \subset V$. Se dice que un espacio topológico de Hausdorff X es *de tipo puntual numerable* si para todo $x \in X$ existe $K \subset X$ tal que $x \in K$, K es compacto y tiene una base de entornos numerable. Por ejemplo, todo espacio compacto y todo espacio de Hausdorff que cumple el primer axioma de numerabilidad son de tipo puntual numerable.

Obsérvese que, por el teorema 1.11, todo $K \subset X$ compacto es la intersección de cualquier base de entornos de K. En consecuencia, si K tiene una base de entornos numerable, entonces es un conjunto G_δ de X.

Los teoremas 2.22 y 4.1 daban condiciones para que un espacio de Tychonoff fuese localmente compacto o Čech-completo, respectivamente, por relación a sus compactificaciones. El siguiente teorema da condiciones análogas para que un espacio de Tychonoff sea de tipo puntual numerable.

Teorema 5.4. *Para cada espacio de Tychonoff X las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) X es de tipo puntual numerable.

(ii) Para toda compactificación cX de X, $c(X)$ es una unión de conjuntos G_δ en cX.

(iii) $\beta(X)$ es una unión de conjuntos G_δ en βX.

(iv) Existe una compactificación cX de X tal que $c(X)$ es una unión de conjuntos G_δ en cX.

(v) Existe un encaje $f : X \to K$, siendo K compacto, tal que $f(X)$ es una unión de conjuntos G_δ en K

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff de tipo puntual numerable, y cX cualquier compactificación de X. Identificaremos X con $c(X)$. Para cada $x \in X$, existe un compacto $K_x \subset X$ tal que $x \in K_x$, y una base de entornos de K_x en X, de la forma $\{U_n \cap X\}_{n\in\mathbb{N}}$, siendo cada U_n un abierto de cX. Vamos a comprobar que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de K_x en cX. Sea V un abierto de cX tal que $K_x \subset V$. Puesto que cX es normal, existe un abierto U de cX tal que $K_x \subset U \subset \overline{U} \subset V$. Como $K_x \subset U \cap X$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_x \subset U_n \cap X \subset U \cap X$. Teniendo en cuenta que X es denso en cX, y aplicando el teorema 1.4, tenemos que

$$K_x \subset U_n \subset \overline{U_n} = \overline{U_n \cap X} \subset \overline{U \cap X} = \overline{U} \subset V.$$

Por tanto, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de K_x en cX, y, en consecuencia, K_x es un conjunto G_δ de cX. Teniendo en cuenta que $X = \bigcup_{x\in X} K_x$, queda demostrado $(i) \Rightarrow (ii)$.

Las implicaciones $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ y $(iv) \Rightarrow (v)$ son triviales. Vamos a demostrar $(v) \Rightarrow (i)$. Supongamos que K es un compacto que contiene a X, tal que X es unión de conjuntos G_δ de K. Sea $x \in X$. Entonces $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset X$ para alguna sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos de K. Como K es regular, podemos construir una sucesión decreciente $U_0 = K, U_1, U_2, \ldots$ de entornos de x en K tal que $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap V_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. El conjunto $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$ es cerrado en K, luego compacto, y $x \in F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset X$. Probaremos que $\{U_n \cap X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de F en X.

Sea V un entorno de F en X, de manera que existe un abierto U de K tal que $F \subset V = U \cap X$. Tenemos que $K - F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K - \overline{U}_n)$, luego $\{K - \overline{U}_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{U\}$ es un cubrimiento abierto de K, que, por la compacidad de K, tiene un subcubrimiento finito. Por tanto, $K = (K - \overline{U}_n) \cup U$ para algún $n \in \mathbb{N}$, de donde $\overline{U}_n \subset U$. Luego, $F \subset U_n \cap X \subset U \cap X = V$. □

Corolario 5.5. *Todo espacio Čech-completo es de tipo puntual numerable.* □

En la tabla siguiente se resumen las diversas caracterizaciones que hemos ido encontrando de determinadas clases de espacios por sus compactificaciones y compleciones. Cada fila significa que un espacio de la clase $\mathscr{A}$ pertenece a la subclase $\mathscr{B}$ si y solo si tiene la propiedad $\mathscr{P}$ como subconjunto de alguna de sus compactificaciones o compleciones (según corresponda), si y solo si tiene la propiedad $\mathscr{P}$ como subconjunto de todas sus compactificaciones o compleciones. F indica la propiedad de ser cerrado, y G la de ser abierto.

Clase	**Subclase**	**Propiedad**	**Encaje denso**
métricos	completos	F	compleción
metrizables	completamente metrizables	G_δ	compleciones
de Tychonoff	compactos	F	compactificaciones
de Tychonoff	localmente compactos	G	compactificaciones
de Tychonoff	Čech-completos	G_δ	compactificaciones
de Tychonoff	de tipo puntual numerable	$\bigcup G_\delta$	compactificaciones

TABLA 2

Otra clase de espacios relacionados con la compacidad es la de los k-espacios. Un *k-espacio* es un espacio de Hausdorff X en el que para todo $A \subset X$, A es cerrado si y solo si $A \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$. En otras palabras, es un espacio de Hausdorff cuya topología está completamente determinada por sus compactos. Nótese que en la definición podemos decir equivalentemente que $A \cap K$ es compacto, o que es cerrado en K.

Observemos que todo espacio localmente compacto es un k-espacio. En efecto, sea A un subconjunto de un espacio localmente compacto X tal que $K \cap A$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$. Sea $x \in \overline{A}$ y U un entorno de x tal que $\overline{U}$ es compacto. Para todo entorno V de x, $U \cap V$ corta a $\overline{U} \cap A$, que es cerrado. Por tanto, $x \in \overline{U} \cap A \subset A$. Luego $A = \overline{A}$.

Tenemos un resultado mucho más fuerte:

Teorema 5.6. *Todo espacio de tipo puntual numerable es un k-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio de tipo puntual numerable. Sea $A \subset X$ tal que la intersección de A con cualquier subespacio compacto de X es compacto. Supongamos que A no es cerrado en X, de modo que existe $x \in \overline{A} - A$. Sea $K \subset X$ un compacto tal que $x \in K$ y con un base de entornos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos suponer, si pérdida de generalidad, que $U_n \supset U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (sustituyendo U_{n+1} por $U_n \cap U_{n+1}$ cuando sea necesario). Por hipótesis $A \cap K$ es compacto. Puesto que $x \notin A \cap K$, por el teorema 1.8 existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \cap A \cap K = \emptyset$. Como $x \in \overline{A}$, todos los entornos $V \cap U_n$ de x cortan A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A \cap V \cap U_n$. Sea $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Vamos a ver que $K \cup B$ es compacto. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de $K \cup B$ por abiertos de X. Por la compacidad de K, $K \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} = W$ para ciertos $i_1, \ldots, i_k \in I$. Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset W$, de donde $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset W$. Eligiendo $j_1, \ldots, j_{n-1} \in I$ tales que $x_1 \in V_{j_1}, \ldots, x_{n-1} \in V_{j_{n-1}}$, tenemos $K \cup B \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \cup V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_{n-1}}$.

De modo que $\overline{V} \cap (K \cup B)$ es compacto, y por hipótesis $A \cap (\overline{V} \cap (K \cup B))$ es compacto. Ahora bien, $A \cap (\overline{V} \cap (K \cup B)) = (A \cap \overline{V} \cap K) \cup (A \cap \overline{V} \cap B) = \emptyset \cup B = B$, puesto que $B \subset A \cap V$. Por tanto, B es cerrado. Además, $B \cap K = A \cap \overline{V} \cap B \cap K = \emptyset$, luego K está contenido en el abierto $X - B$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset X - B$, es decir, $U_n \cap B = \emptyset$. Esto es una contradicción, ya que $x_n \in U_n \cap B$. Por tanto, A tiene que ser cerrado en X, y X es un k-espacio. □

Corolario 5.7. *Todo espacio Čech-completo es un k-espacio.* □

5.3. Operaciones sobre espacios Čech-completos

En el capítulo 3 vimos que las sumas directas arbitrarias y los productos directos numerables conservan la completitud en los espacios métricos y metrizables, que los subconjuntos cerrados de espacios métricos completos son completos y que los conjuntos G_δ de espacios completamente metrizables son completamente metrizables. En esta sección se prueba que todas estas operaciones también conservan la Čech-completitud. Veremos también nuevas caracterizaciones de la Čech-completitud en términos de propiedades absolutas, subespacios, productos directos y límites de sucesiones inversas.

El siguiente teorema generaliza la condición dada en los teoremas 3.4 y 3.20 para la heredabilidad de la completitud en espacios métricos completos y en espacios completamente metrizables.

Teorema 5.8. *Todo subconjunto cerrado y todo subconjunto G_δ de un espacio Čech-completo es Čech-completo.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio Čech-completo.

Sea A un subconjunto cerrado de X, y $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión completa de cubrimientos abiertos de X, con $\mathscr{U}_n = \{U_{n,i}\}_{i\in I_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\mathscr{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, siendo $\mathscr{U}'_n = \{U_{n,i} \cap A\}_{i\in I_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión completa de cubrimientos abiertos de A. En efecto, dada una familia $\mathscr{F}$ de cerrados de A que es $\mathscr{U}'_n$-pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}$ también es una familia de cerrados de X, y es $\mathscr{U}_n$-pequeña, ya que si $F \subset (U_{n,i} \cap A) \in \mathscr{U}'_n$, entonces $F \subset U_{n,i} \in \mathscr{U}_n$. Por tanto, la intersección de los miembros de $\mathscr{F}$ es no vacía.

Sea $A \subset X$ un conjunto G_δ en X, de manera que existe una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ de abiertos de X tal que $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Por otro lado X es un conjunto G_δ en βX, por lo que existe una sucesión $\{V_m\}_{m=1}^\infty$ de abiertos de βX tal que $X = \bigcap_{m=1}^\infty V_m$. Haciendo, para cada n, $U_n = W_n \cap X$ con W_n abierto en βX, tenemos $A = (\bigcap_{n=1}^\infty W_n) \cap (\bigcap_{m=1}^\infty V_m)$, luego A es un conjunto G_δ en βX, y por lo tanto en $\overline{A} \subset \beta X$, que es una compactificación de A. Luego, A es Čech-completo. □

El teorema siguiente proporciona una caracterización de los subespacios que heredan la Čech-completitud, análoga a la dada en el teorema 2.20 para espacios localmente compactos.

Teorema 5.9. *Sea M un subespacio de un espacio Čech-completo X. M es Čech-completo si y solo si se puede representar en la forma $M = F \cap Z$, siendo F un cerrado de X y Z un conjunto G_δ en X.*

Demostración. En la primera parte del teorema 4.2 se demostró que si un espacio de Tychonoff X tiene una sucesión completa de cubrimientos abiertos, entonces X es un conjunto G_δ en βX. En esa demostración las únicas propiedades de βX que se utilizaron fueron que es un espacio regular y que contiene a X como subespacio denso. Por tanto, el mismo argumento sirve para probar que si X es Čech-completo, $X \subset Y$, Y es regular, y $\overline{X} = Y$, entonces X es un conjunto G_δ en Y. Ahora, sean M, X espacios Čech-completos con $M \subset X$. Por el teorema 5.8, $\overline{M}$ es Čech-completo, y por la observación que acabamos de hacer, M es un conjunto G_δ en $\overline{M}$. Por tanto existe una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ de abiertos de X tal que $M = \bigcap_{n=1}^\infty (U_n \cap \overline{M}) = \overline{M} \cap \bigcap_{n=1}^\infty (U_n)$, que es la intersección de un cerrado y de un conjunto G_δ en X.

Recíprocamente, sea $M = F \cap Z$, siendo F un cerrado y Z un conjunto G_δ de un espacio Čech-completo X. Por el teorema 5.8, Z es Čech-completo, y $M = F \cap Z$, siendo cerrado en Z, es Čech-completo. □

En el corolario 2.2 y los teoremas 2.21, 3.9 y 3.24 se dieron caracterizaciones de varias clases de espacios por propiedades absolutas. Ahora damos otra para los espacios Čech-completos.

Teorema 5.10. *Un espacio de Tychonoff es Čech-completo si y solo si es absolutamente la intersección de un conjunto G_δ y un cerrado.*

Demostración. Sea X Čech-completo e Y un espacio de Tychonoff tal que $X \subset Y$. Tenemos que $X \subset Y \subset \beta Y$. Por el teorema 5.9, $X = F \cap Z$, siendo F cerrado en βY y Z un conjunto G_δ en βY. Entonces, $X = X \cap Y = (F \cap Y) \cap (Z \cap Y)$, con $F \cap Y$ cerrado en Y y $Z \cap Y$ un conjunto G_δ en Y.

Si X es un espacio de Tychonoff que es absolutamente la intersección de un conjunto G_δ y un cerrado, en particular lo es en βX. Por el teorema 5.9, X es Čech-completo. □

En la tabla siguiente se muestran todas las caracterizaciones encontradas de clases de espacios por propiedades absolutas. Cada fila indica que un espacio de la clase $\mathscr{A}$ pertenece a la subclase $\mathscr{B}$ si y solo si tiene la propiedad $\mathscr{P}$ como subconjunto de cualquier espacio de la clase $\mathscr{A}$. F indica la propiedad de ser cerrado, y G la de ser abierto.

Clase	**Subclase**	**Propiedad absoluta**
métricos	completos	F
metrizables	completamente metrizables	G_δ
de Tychonoff	compactos	F
de Tychonoff	localmente compactos	$F \cap G$
de Tychonoff	Čech-completos	$F \cap G_\delta$

TABLA 3

A continuación se dan dos teoremas sobre la conservación de la Čech-completitud en sumas directas arbitrarias y productos cartesianos numerables, que son los análogos de los teoremas 3.16 y 3.17, referidos a espacios completamente metrizables, y de los teoremas 3.5 y 3.6 para los espacios métricos completos.

Teorema 5.11. *La suma directa $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es Čech-completa si y solo si todos los espacios X_i son Čech-completos.*

Demostración. Sea $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Supongamos que X es un espacio Čech-completo. Cada X_i es un subespacio cerrado de X, luego es Čech-completo por 5.8.

Supongamos ahora que todos los espacios X_i son Čech-completos. Para cada $i \in I$, sea $c_i X_i$ una compactificación de X_i. Por hipótesis, $c_i X_i - X_i = \bigcup_{n=1}^\infty F_{i,n}$, donde $F_{i,n}$ es un subconjunto cerrado de $c_i X_i$ para cada $i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $Y = \bigoplus_{i\in I} c_i X_i$. Cada punto de Y tiene un entorno abierto y compacto en Y, el subespacio $c_i X_i$ al que pertenece, por tanto Y es localmente compacto, y, en consecuencia, Čech-completo. Tenemos que $Y - X = \bigcup_{i\in I}(c_i X_i - X_i) = \bigcup_{i\in I}(\bigcup_{n=1}^\infty F_{i,n}) = \bigcup_{n=1}^\infty(\bigcup_{i\in I} F_{i,n})$, y los conjuntos $\bigcup_{i\in I} F_{i,n}$ son cerrados en Y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, X es un conjunto G_δ en Y, y, por el teorema 5.8, X es Čech-completo. □

Teorema 5.12. *El producto cartesiano $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es Čech-completo si todos los espacios X_n son Čech-completos.*

Demostración. Supongamos que todos los espacios X_n son Čech-completos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $c_n X_n$ una compactificación de X_n, de manera que $c_n X_n - X_n$ es un conjunto F_σ en $c_n X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$, $Y = \prod_{n=1}^\infty c_n X_n$. Por el teorema de Tychonoff, Y es compacto. Tenemos $\overline{X} = \overline{\prod_{n=1}^\infty X_n} = \prod_{n=1}^\infty \overline{X_n} = \prod_{n=1}^\infty c_n X_n = Y$, luego Y es una compactificación de X.

Sea $F_m = \prod_{n=1}^\infty Y_{m,n}$, siendo $Y_{m,m} = c_m X_m - X_m$, e $Y_{m,n} = c_n X_n$ para $n \neq m$. Por ser $Y_{m,m}$ un conjunto F_σ en $c_m X_m$, F_m es un conjunto F_σ en Y. Tenemos que $Y - X = \bigcup_{m=1}^\infty F_m$, luego $Y - X$ es un conjunto F_σ en Y, por tanto, X es Čech-completo. □

Damos a continuación otra caracterización de los espacios Čech-completos.

Teorema 5.13. *Un espacio topológico es Čech-completo si y solo si es homeomorfo a un subconjunto cerrado de un producto numerable de espacios localmente compactos.*

Demostración. Supongamos que X es un subespacio cerrado de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde cada X_n es localmente compacto, y por tanto Čech-completo. Por el teorema 5.12, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es Čech-completo, y por el teorema 5.8, X es Čech-completo.

Recíprocamente, sea X un espacio Čech-completo, y cX una compactificación de X. Identificaremos X con un subespacio de cX, de manera que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, siendo los U_n subconjuntos abiertos en cX, y por tanto, localmente compactos. La aplicación continua $f : X \to \prod_{n=1}^{\infty} U_n$, definida por $f(x) = (x, x, \dots)$, es un encaje por 1.15, así que bastará ver que $f(X)$ es un cerrado en $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$. En efecto, considerando $\prod_{n=1}^{\infty} U_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} cX$, tenemos que $f(X) = \Delta \cap \prod_{n=1}^{\infty} U_n$, siendo Δ la diagonal de $\prod_{n=1}^{\infty} cX$, que es un cerrado por 1.18. □

Recordemos el concepto de límite de una sucesión inversa. Una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios topológicos se llama una *sucesión inversa* si para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$, está dada una aplicación continua $\Pi_m^n : X_n \to X_m$, verificando que $\Pi_l^m \circ \Pi_m^n = \Pi_l^n$ para todos $l \le m \le n$, y que Π_n^n es la identidad en X_n para todo n. Se llaman *hilos* de dicha sucesión inversa a los elementos $\{x_n\} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tales que $\Pi_m^n(x_n) = x_m$ siempre que $m \le n$. Se llama *límite de la sucesión inversa* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se denota por $\varprojlim X_n$, al subespacio de todos los hilos de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Teorema 5.14. *El límite de una sucesión inversa de espacios Čech-completos es Čech-completo.*

Demostración. Por los teoremas 5.12 y 5.8, bastará ver que $\varprojlim X_n$ es un subespacio cerrado de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. En efecto, el conjunto de hilos es la intersección de todos los conjuntos $M_{ml} = \{\{x_n\} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \Pi_l^m(x_m) = x_l\}$, para $l \le m$, y cada M_{ml} es cerrado por el teorema 1.13, ya que M_{ml} es el conjunto de los puntos de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ donde coinciden las aplicaciones continuas $\Pi_l^m \circ p_m$ y p_l, siendo $p_n : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_n$ la proyección natural para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Terminamos la sección con otra caracterización de los espacios Čech-completos.

Teorema 5.15. *Un espacio topológico es Čech-completo si y solo si es el límite de una sucesión inversa de espacios localmente compactos.*

Demostración. Supongamos que $X = \varprojlim X_n$, donde los X_n son localmente compactos, y por tanto Čech-completos. Por el teorema 5.14, X es Čech-completo.

Recíprocamente, sea X un espacio Čech-completo, y cX una compactificación de X. Si identificamos X con $c(X)$, tenemos que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, siendo los V_n subconjuntos abiertos en cX. Sea $U_n = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, siendo $U_1 \supset U_2 \dots$ una sucesión descendente de subespacios abiertos de cX, y por tanto, localmente compactos. Esta sucesión es una sucesión inversa si hacemos $\Pi_m^n : U_n \to U_m$ igual a la inyección natural, para $m \le n$. Para concluir basta con observar que $\varprojlim U_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} U_n$ coincide con la imagen del encaje $f : X \to \prod_{n=1}^{\infty} U_n$, definido por $f(x) = (x, x, \dots)$. □

5.4. Čech-completitud y aplicaciones perfectas

En esta última sección estudiaremos la conservación de la Čech-completitud por ciertas clases de aplicaciones continuas.

Dada una clase $\mathscr{C}$ de espacios topológicos, se dice que una propiedad $\mathscr{P}$ de espacios topológicos es *invariante* en $\mathscr{C}$ por una clase $\mathscr{M}$ de aplicaciones continuas si para cualesquiera espacios X, Y de la clase $\mathscr{C}$ y para toda aplicación continua suprayectiva $f : X \to Y$ de la clase $\mathscr{M}$, si X tiene la propiedad $\mathscr{P}$, entonces Y tiene la propiedad $\mathscr{P}$. Por ejemplo, en la clase de los espacios de Hausdorff, la compacidad es invariante por las aplicaciones continuas, y en la clase de todos los espacios topológicos, ser T_1 es invariante por las aplicaciones cerradas.

Con la misma terminología, se dice que en la clase $\mathscr{C}$ la propiedad $\mathscr{P}$ es una *invariante inversa* por la clase $\mathscr{M}$, si para todos $X, Y \in \mathscr{C}$ y toda $f \in \mathscr{M}$, siendo $f : X \to Y$ suprayectiva, si Y tiene la propiedad $\mathscr{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathscr{P}$. Nótese que, si Y es un espacio de un solo punto, toda aplicación $f : X \to Y$ suprayectiva es continua, por ello las propiedades invariantes inversas por todas las aplicaciones continuas son pocas y poco interesantes, y se suelen estudiar las propiedades que son invariantes inversas por clases más restringidas de aplicaciones continuas, donde se impone alguna condición sobre las fibras de los puntos de Y. Una de estas clases es la de las aplicaciones perfectas.

Se dice de una aplicación continua $f : X \to Y$ que es *perfecta* si X es un espacio de Hausdorff, f es cerrada y todas las fibras $f^{-1}(y)$ son subespacios compactos de X.

Resulta que hay varias propiedades interesantes que son tanto invariantes como invariantes inversas por las aplicaciones perfectas en la clase de todos los espacios topológicos. Entre estas propiedades, que se llaman propiedades perfectas, están las de ser de Hausdorff, regular, compacto, localmente compacto y k-espacio (véase [En], 3.7). En esta sección vamos a ver que la Čech-completitud es una propiedad perfecta en la clase de los espacios de Tychonoff.

Teorema 5.16. *Toda aplicación continua de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff es perfecta.*

Demostración. Sea X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ continua. Si $A \subset X$ es cerrado, es compacto, luego $f(A)$ es compacto, y por tanto cerrado en Y. Para todo $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ es un cerrado de X, luego es compacto. □

Teorema 5.17. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación perfecta y $A \subset X$, entonces la restricción de f $f_A : f^{-1}(A) \to A$ es una aplicación perfecta.*

Demostración. $f^{-1}(A) \subset X$ es de Hausdorff si lo es X. Veamos que f_A es cerrada. Sea $f^{-1}(A) \cap F$ un cerrado de $f^{-1}(A)$, donde F es un cerrado en Y. Tenemos que $f_A(f^{-1}(A) \cap F) = f(f^{-1}(A) \cap F) =$

$A \cap f(F)$, que es un cerrado de A por ser f cerrada. Por último, las fibras son compactas ya que $f_A^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ para todo $y \in A$. □

Lema 5.18. *Una aplicación perfecta $f : X \to Y$ no se puede extender continuamente sobre un espacio de Hausdorff Z que contiene a X como subconjunto propio denso.*

Demostración. Supongamos que Z es un espacio de Hausdorff tal que $X \subset Z$, $X \neq Z$, $\overline{X} = Z$, y que $F : Z \to Y$ es una extensión continua de la aplicación perfecta $f : X \to Y$. Restringiendo F, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Z = X \cup \{x\}$, con $x \notin X$. La fibra $f^{-1}(F(x))$ es un conjunto compacto, y $x \notin f^{-1}(F(x))$. Por el teorema 1.8, existen abiertos disjuntos U, V en Z tales que $x \in U$ y $f^{-1}(F(x)) \subset V$. Como $V \subset X$, V es abierto en X, por tanto $f(X - V)$ es cerrado en Y, luego $F^{-1}(f(X - V))$ es cerrado en Z. Tenemos que $X - V \subset f^{-1}(f(X - V)) = F^{-1}(f(X - V))$, puesto que $F(x) \notin f(X - V)$. Por consiguiente, $\overline{X - V} \subset F^{-1}(f(X - V)) = f^{-1}(f(X - V)) \subset X$, siendo $\overline{X - V}$ la clausura en Z de $X - V$. Ahora bien, $x \in \overline{X - V}$, ya que, dado un entorno W de x en Z, $W \cap U$ corta a X, por la densidad de X, y no corta a V, luego W corta a $X - V$. Así, $x \in X$, lo que es una contradicción. □

Teorema 5.19. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios de Tychonoff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es perfecta.

(ii) Para cada compactificación αY de Y, la extensión $F : \beta X \to \alpha Y$ de f verifica $F(\beta X - X) \subset \alpha Y - Y$.

(iii) La extensión $F : \beta X \to \beta Y$ de f verifica $F(\beta X - X) \subset \beta Y - Y$.

(iv) Existe una compactificación αY de Y tal que la extensión $F : \beta X \to \alpha Y$ de f verifica $F(\beta X - X) \subset \alpha Y - Y$.

Demostración. Para probar $(i) \Rightarrow (ii)$, consideremos una aplicación perfecta $f : X \to Y$ entre espacios de Tychonoff, su extensión $F : \beta X \to \alpha Y$, y la restricción de la última $F_Y : F^{-1}(Y) \to Y$. F_Y es una extensión continua de f, y X es denso en $F^{-1}(Y)$, así que, por el lema anterior, $X = F^{-1}(Y)$. Entonces $F^{-1}(\alpha Y - Y) = F^{-1}(\alpha Y) - F^{-1}(Y) = \beta X - X$, de donde $F(\beta X - X) = F(F^{-1}(\alpha Y - Y)) \subset \alpha Y - Y$.

Las implicaciones $(ii) \Rightarrow (iii)$ y $(iii) \Rightarrow (iv)$ son triviales. Para demostrar $(iv) \Rightarrow (i)$, tengamos en cuenta que $F : \beta X \to \alpha Y$ es perfecta por el teorema 5.16, luego la restricción $F_Y : F^{-1}(Y) \to Y$ es perfecta por el teorema 5.17. Si $F(\beta X - X) \subset \alpha Y - Y$, entonces $F^{-1}(Y) = X$, luego $F_Y = f$. □

Ahora ya podemos demostrar que la Čech-completitud es una propiedad perfecta en la clase de los espacios de Tychonoff.

Teorema 5.20. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación perfecta y suprayectiva entre espacios de Tychonoff. Entonces X es Čech-completo si y solo si Y es Čech-completo.*

Demostración. Sean X, Y espacios de Tychonoff, y $f : X \to Y$ perfecta y suprayectiva. Consideremos su extensión $F : \beta X \to \beta Y$. Por el teorema 5.19, $F(\beta X - X) \subset \beta Y - Y$, y, puesto que $F(X) = f(X) = Y$, $F^{-1}(\beta Y - Y) = \beta X - X$. Por tanto, si $\beta Y - Y$ es un conjunto F_σ en βY, $\beta X - X$ es un conjunto F_σ en βX.

Por otro lado, $F(\beta X)$ es un compacto que contiene a $F(X) = Y$, luego es una compactificación de Y, por tanto coincide con βY. Es decir, F es suprayectiva, luego, $F(\beta X - X) = \beta Y - Y$. Además, F es cerrada por la compacidad de βX, por tanto, si $\beta X - X$ es un conjunto F_σ en βX, $\beta Y - Y$ es un conjunto F_σ en βY. □

Corolario 5.21. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación perfecta y suprayectiva entre espacios métricos. Entonces X es completamente metrizable si y solo si Y es completamente metrizable.* □

CONCLUSIONES

Čech definió los espacios Čech-completos como aquellos espacios de Tychonoff que se pueden encajar como conjuntos G_δ en algún compacto, generalizando así la propiedad de que los conjuntos G_δ de los espacios completamente metrizables, y solo ellos, heredan la completa metrizabilidad. Hemos comprobado que la Čech-completitud es una buena extensión de la completa metrizabilidad a la clase de los espacios de Tychonoff: coincide con ella en la clase de los espacios metrizables, y conserva muchas propiedades agradables de los espacios completamente metrizables.

Partiendo del concepto clásico de completitud como convergencia de sucesiones de Cauchy, hemos llegado a entender la completitud como una cierta propiedad topológica absoluta en el ámbito de cierta clase de espacios. Un espacio métrico es completo si es un cerrado absoluto, es decir, si es cerrado al encajarlo en cualquier espacio métrico. Un espacio metrizable es completamente metrizable si es un conjunto G_δ absoluto. Un espacio de Tychonoff es Čech-completo si es absolutamente la intersección de un conjunto G_δ y un cerrado.

Queremos terminar planteando la pregunta de si este enfoque permite generalizar la completitud a otras clases de espacios topológicos.[1] Así pues, dada una clase $\mathscr{C}$ de espacios topológicos que contiene a la clase $\mathscr{M}$ de los espacios metrizables, diríamos que un espacio $X \in \mathscr{C}$ es completo si tiene una propiedad $\mathscr{P}$ absoluta en la clase $\mathscr{C}$, que en la clase $\mathscr{M}$ es equivalente a la propiedad de ser un G_δ absoluto. Dejamos pendiente la posibilidad de encontrar esas propiedades en clases de espacios más generales que la de los espacios de Tychonoff.

[1]Hay generalizaciones de la completitud métrica que parten de otros enfoques, por ejemplo, la completitud en espacios uniformes.

Bibliografía

[AL] C.E. Aull and R. Lowen, eds., *Handbook of the History of General Topology, Volume 2*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998).

[AP] A.V. Arhangel'skiĭ, V.I. Ponomarev, *Fundamentals of general topology: problems and exercises* , Reidel Publishing Company, Dordrecht (1984).

[Ar] A. Arhangel'skiĭ, *On topological spaces which are complete in the sense of Čech*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. (1961), no. 2, 37-40. (Russian)

[Br] W. Brito, *Impacto de la Topología Débil en Espacios de Banach*, Mérida, Venezuela (1993).

[Ce] E. Čech, *On bicompact spaces*, Ann. Math. 38 (1937), 823-844.

[En] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[Fr] Z. Frolík, *Generalization of the G_δ-property of complete metric spaces*, Czech. Math. J. 10 (1960) , 359-379.

[HNV] K.P. Hart, J. Nagata and J.E. Vaughan, eds., *Encyclopedia Of General Topology* (2003).

[Ke] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York (1955).

[Lo] M. López de Luna, *Completitud en el Sentido de Čech y sus Generalizaciones*, México D.F. (2002).

[Mu] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall (2000).

[Na] J. Nagata, *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam (1985).

[SS] Steen, L. A. and Seebach, Jr., J. A., *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag, New York (1978).

[St] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[VA] A. Vera López y P. Alegría Ezquerra, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y Problemas*, AVL, Bilbao

[Wi] A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Ginn and Company, Waltham, Massachusetts (1970).

[www] *The Encyclopedia of Mathematics wiki*, http://www.encyclopediaofmath.org