U N E D

2013

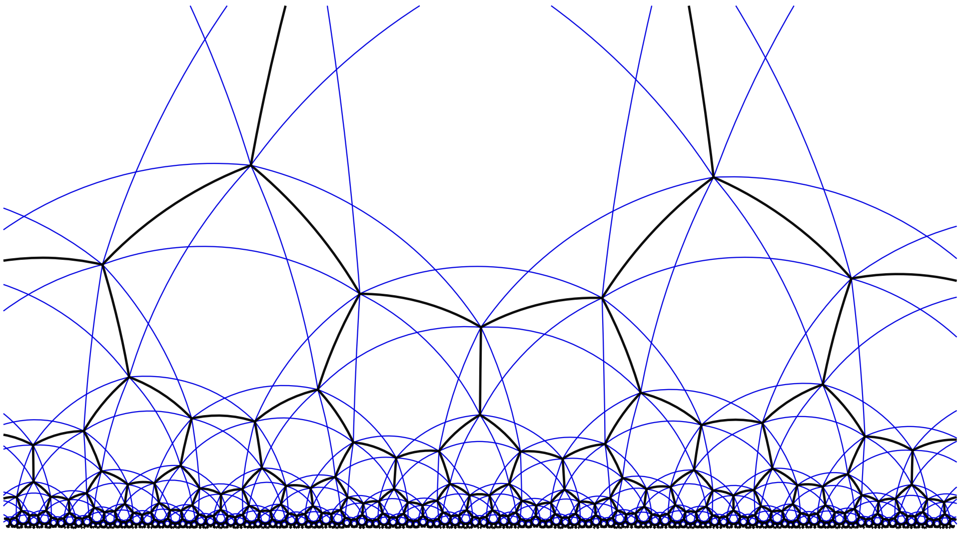
Jesús Rodríguez Martín de los Santos

Grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas

Trabajo Fin de Máster

Tutor: Prof. D. Emilio Bujalance García

Máster en Matemáticas Avanzadas



Contenido

Glosario de símbolos

$\mathbb{P}^1$	Recta proyectiva compleja, esfera de Riemann.
$\mathscr{U}$	Semiplano abierto superior en $\mathbb{C}$.
$\mathscr{D}$	Disco abierto unidad en $\mathbb{C}$.
$\approx$	Isomorfismo de grupos.
$\|G\|, \|g\|$	Orden de un grupo G, orden de un elemento $g \in G$.
$\exp G$	Exponente de un grupo G.
$\mathcal{T}(G)$	Conjunto de torsión de un grupo G.
$\mathcal{T}_p(G)$	Conjunto de p-torsión de un grupo G.
$Syl_p(G)$	p-subgrupo de Sylow de un grupo G.
G', $[G, G]$	Subgrupo conmutador o derivado de un grupo G.
G_{ab}	Abelianización de un grupo G.
$\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, C_n	Grupo cíclico de orden n (notación aditiva y multiplicativa).
D_N	Grupo diédrico de orden $2N$.
$PSL(n, \mathbb{R})$	Grupo lineal especial proyectivo con coeficientes en $\mathbb{R}$.
$\mathrm{Aut}\ X$	Grupo de automorfismos de una superficie de Riemann X.
$\Delta(l, m, n)$	Grupo triangular.
$(\gamma\,; m_1, \dots, m_r)$	Signatura de un grupo Fuchsiano cocompacto, con género de órbita γ y períodos $m_1, \dots, m_r$.
$(g\,; —)$	Signatura de un grupo Fuchsiano cocompacto de superficie.
$D_p(\Gamma)$	Región de Dirichlet centrada en p de un grupo Fuchsiano Γ.
$\mu(F)$	Área hiperbólica de una región fundamental F.

Introducción

Desde el comienzo de la teoría de grupos, habitualmente considerado a partir de los trabajos de Cauchy, Galois y Abel a mediados del siglo XIX, aunque siendo pionero el trabajo de Lagrange en 1771 (discutió casos especiales del teorema de Lagrange; la primera demostración completa la dio Gauss en 1801), los grupos de automorfismos han sido considerados de forma natural como objeto de estudio destacado. Estos primeros trabajos estaban enfocados al estudio de ecuaciones algebraicas. Se empezó, entonces, a investigar su relación con otros ámbitos tales como curvas algebraicas, ecuaciones diferenciales, grupos de simetría en geometría, teoría de números, etc.

En el origen de los temas que tratamos en el presente trabajo, ocupa un lugar relevante el teorema de *uniformización*. El problema de uniformización estuvo vinculado desde un principio con la obtención de parametrizaciones de curvas algebraicas en relación con el estudio de puntos singulares. Esta idea de uniformización entendida como parametrización o bien en el sentido de función univaluada, subyace también en las nociones de prolongación analítica de Weierstrass y función multiforme de Riemann, y está asimilada en la propia definición de superficie de Riemann, en la cual cada carta uniformiza o parametriza un entorno de la superficie.

En 1907, Henry Poincaré[1] y Paul Koebe[2] establecieron simultáneamente el teorema de uniformización, que aglutinó los resultados de diferentes contribuciones en las que estuvieron involucrados muchos de los grandes matemáticos del siglo XIX: Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass, Clebsch, Fuchs, Schwartz, Klein, Fricke, Hilbert, Osgood, etc. También, por supuesto, Riemann. El problema de uniformización fue uno de los hilos conductores de las matemáticas del siglo XIX, y evolucionó en paralelo al desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales y de la aparición de la geometría algebraica, el análisis funcional y la topología. La teoría de superficies recubridoras, en particular la noción de recubrimiento universal, fue desarrollada como herramienta para su estudio.

Anteriormente, el propio Poincaré[3] y Felix Klein[4] enuncian en general algo que ya se conocía para casos particulares: toda curva algebraica puede ser *uniformizada* (para-

[1] Poincaré, H., *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta Math. 31 (1907), 1–63.
[2] Koebe, P., *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (zweite Mitteilung)*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1907), 633–649.
[3] Poincaré, H., *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, Acta Math. 1 (1882), 193–294.
[4] Klein, F., *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Math. Annalen 21 (1883), 141–218.

metrizada) por una función del disco abierto unidad $\mathscr{D}$ sobre la curva. Dicho resultado fue el fruto de un apasionante intercambio epistolar que mantuvieron en los años 1880 a 1882 previos.[5] Klein ya había mostrado en 1878 que la cuártica $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ es uniformizada por una variable que recorre el semiplano complejo $\mathscr{U}$, mediante fórmulas que describen a $\mathscr{U}$ como recubridor universal de dicha curva.[6]

Klein, quizás el matemático más solicitado de su época y de los que mejor conocían los trabajos de Riemann, era seis años mayor que Poincaré. En 1872 ya había propuesto su *Erlanger Programm*. Poincaré es, en 1880, un joven profesor titular de 26 años. Defendió su tesis dos años antes y su investigación versaba sobre ecuaciones diferenciales, tema que se sitúa en el origen de casi todos sus descubrimientos posteriores. Con motivo del premio en matemáticas convocado por la Academia de Ciencias de París, comienza a trabajar sobre artículos de Fuchs en relación con puntos singulares de ecuaciones diferenciales lineales. Fuchs muestra en esos artículos que las soluciones pueden expresarse como funciones analíticas de una función ramificada, $z^{1/q}$ o $\log z$. Poincaré encuentra un análogo global, bajo la forma de recubrimiento universal de la esfera sin un conjunto finito de puntos que contiene a los puntos singulares de la ecuación diferencial. Es entonces cuando introduce también los grupos Fuchsianos, cuyas primeras notas datan de febrero de 1881.

Schwarz[7] mostró a finales del siglo XIX que es finito el grupo de automorfismos de cualquier superficie de Riemann compacta de género $g \geqslant 2$. Hurwitz[8] obtuvo entonces que el mayor orden posible para tales grupos es $84(g-1)$, y muestra que dicha cota es alcanzada por la cuártica de Klein. A tales superficies se las conoce como *superficies de Hurwitz.* En fechas cercanas Wiman estudió los grupos de automorfismos para superficies de género 2, 3, 4, 5 y 6, y mejoró a $2(2g+1)$ la cota para el orden en el caso de grupos cíclicos.[9]

Desde entonces hasta 1961 hubo pocas aportaciones sobre el tema. Fue, entonces, Alexander M. Macbeath[10] quien volvió a considerar el teorema de uniformización y sentó las bases para el estudio de superficies de Riemann y sus automorfismos desde el punto de vista de teoría de grupos combinatoria.[11] Demostró que existen infinitos valores de g para los que se alcanza la cota de Hurwitz, y también infinitos valores para los que no se alcanza la cota. Sólo otra superficie de Hurwitz, aparte de la cuártica de Klein, había sido encontrada hasta entonces, la superficie de género 7 descubierta por Fricke

[5] Esta correspondencia puede consultarse en [de Saint-Gervais, 2010].

[6] Klein, F., *Ueber die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, Math. Annalen 14 (1879), 428-471.

[7] Schwarz, A., *Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen...*, Jour. für reine und angew. Math. 87 (1879) 139–145

[8] Hurwitz, A., *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann. 41 (1892), 403-442.

[9] Wiman, A., *Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$ welche eindeutigen Transformationen in sich zulassen*, Bihang Till. Kongl. Svenska Veienskaps-Akademiens Hadlingar 21 (1895), 1-23.

[10] Macbeath, A.M., *On a theorem of Hurwitz*, Glasgow Math. J. 5 (1961), 90-96.

[11] Macbeath, A.M., *Hurwitz groups and surfaces*, en *The eightfold way*, pp. 103–113, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).

en 1899, conocida como curva de Fricke-Macbeath. En 1968, Accola[12] obtuvo $8(g+1)$ como cota inferior al mayor orden posible entre los grupos de automorfismos para un $g \geqslant 2$ dado. A partir de entonces, se han obtenido resultados sobre la cota al orden máximo de grupos de automorfismos para diferentes familias: William J. Harvey lo hizo en 1966 para grupos cíclicos [Harvey, 1966], y, posteriormente, se obtuvo para grupos abelianos, diédricos, nilpotentes[13], supersolubles, solubles, metacíclicos y metabelianos (de las últimas familias los resultados se obtuvieron para determinados tipos dentro de ellas).

En su artículo de 1966, Harvey demostró las condiciones necesarias y suficientes para que la signatura de un grupo Fuchsiano admita un epimorfismo con núcleo de superficie sobre un grupo cíclico. Tal caracterización ha sido lograda únicamente para grupos cíclicos [Harvey, 1966], abelianos finitos [Breuer, 2000], diédricos [Bujalance et al., 2003], K-metacíclicos[14] y casos particulares de grupos fraccionales lineales[15]. Dichas condiciones facilitan la resolución del *problema del orden máximo* comentado en el párrafo anterior, así como el llamado *problema del género mínimo*, que consiste en, dado un grupo finito, hallar el menor valor posible del género g de una superficie de Riemann compacta (siempre con $g \geqslant 2$) para la que el grupo finito es grupo de automorfismos. Actualmente es llamado *género simétrico fuerte*. Anteriormente ya fue considerado por Burnside[16] y Hurwitz[17].

El problema del género mínimo también fue resuelto para las anteriores y otras familias de grupos finitos con métodos diferentes a la utilización de las condiciones sobre la signatura para la existencia de epimorfismos suaves: abelianos finitos [Maclachlan, 1965], diédricos [Maclachlan, 1966], para ciertas clases de grupos metacíclicos [Adel, 1983] y para grupos alternados[18]. Un compendio de la situación actual referente a todos estos temas se encuentra en [Bujalance et al., 2010].

En los capítulos 1 y 2 se presentan, partiendo del teorema de uniformización, los principales conceptos y características de las superficies de Riemann desde el punto de vista geométrico, topológico y algebraico.

Los contenidos de los capítulos 3, 4 y 5 están dedicados a la exposición y demos-

[12] Accola, R.D.M., *On the number of automorphisms of a closed Riemann surface*, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 398-408.

[13] Zomorrodian, R., *Nilpotent automorphism groups of Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 288:1 (1985), 241–255.

[14] Chetiya, B. P., Patra, K., *K-metacyclic groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*, Far East J. Math. Sci. 2 (1994), no. 2, 127–136.

[15] Özaydin, M., Simmons, C., Taback, J., *Surface symmetries and $PSL2(p)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 5, 2243–2268.

[16] Burnside, W., *Theory of groups of finite order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1911.

[17] *op. cit.*

[18] Conder, Ma. D. E., *Generators for alternating and symmetric groups*, J. London Math. Soc. (2) 22 (1980), no. 1, 75–86.

Etayo Gordejuela, J. J., Martínez, E., *Alternating groups as automorphism groups of Riemann surfaces*, Internat. J. Algebra Comput. 16 (2006), no. 1, 91–98.

tración de los teoremas de existencia de epimorfismos suaves y del problema del género mínimo para grupos cíclicos, abelianos finitos y diédricos. La intención ha sido presentar estos resultados en detalle, en base a las referencias en las que originalmente fueron expuestos, ya mencionadas antes: [Harvey, 1966], [Maclachlan, 1965], [Breuer, 2000] y [Bujalance et al., 2003]. En particular, para grupos abelianos finitos, en el capítulo 4, se ha considerado necesario realizar una presentación más detallada de diferentes materias sobre teoría de grupos (teorema de estructura, factorización y existencia de epimorfismos, abelianización, etc.) para componer una argumentación suficientemente detallada y coherente de los resultados.

En §4.6 presentamos, además, el teorema de condiciones de existencia de epimorfismos suaves sobre grupos abelianos finitos enunciado únicamente sobre los invariantes que definen la estructura del grupo abeliano, a diferencia del teorema en [Breuer, 2000, pág. 29] en el que se postula de forma explícita la existencia de un epimorfismo sobre el grupo abeliano. Este nuevo enunciado permite resolver de forma directa el problema de género mínimo para grupos abelianos finitos, al igual que en [Harvey, 1966] y [Bujalance et al., 2003] para cíclicos y diédricos como hemos mencionado antes. Éste es el tema desarrollado en la última sección del capítulo 4.

Quisiera agradecer muy sinceramente al profesor Emilio Bujalance su labor en la tutorización de este trabajo. Desde un primer momento me ha ofrecido todo su apoyo y confianza. Su experiencia y conocimientos han sido una guía imprescindible para la elaboración de este trabajo. También quisiera agradecer su minucioso y esmerado trabajo a todos los profesores de las asignaturas que he cursado en el Máster. Me han ofrecido la oportunidad, que espero haber aprovechado, de iniciarme y profundizar en estas materias tan apasionantes.

Madrid, marzo - junio de 2013

1 Geometría de superficies de Riemann

Como se ha mencionado en la introducción, el teorema de uniformización ocupa un lugar preeminente en la materia que nos ocupa. Comenzamos, por tanto, por su enunciado.

De la teoría de espacios recubridores surge, entonces, una clasificación de las superficies de Riemann como espacios de órbitas de grupos discretos. La gran mayoría proviene del cociente del plano hiperbólico bajo la acción de un grupo Fuchsiano. Por el hecho de ser discreta, esta última permite cubrir todo el plano hiperbólico a partir de una región fundamental. Estudiaremos un tipo particular de ellas, las regiones de Dirichlet. Se establecen, entonces, correspondencias entre las características geométricas de la superficie y las características algebraicas del grupo Fuchsiano.

1.1 Uniformización y grupos de automorfismos. Una superficie de Riemann es una variedad de dimensión real 2 dotada de una estructura analítica. Entendemos por ello un espacio topológico Hausdorff X para el que existe un recubrimiento por abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y, para cada uno de ellos, un homeomorfismo $\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$, llamado *coordenada local*, sobre un abierto $U_\alpha \subset \mathbb{C}$ de forma que la *función de transición*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \; \to \; \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

es un isomorfismo holomorfo para cada dos abiertos V_α, V_β; decimos, entonces, que las *cartas* $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (V_β, φ_β) son *compatibles*, y el conjunto $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es llamado *atlas analítico*.

Dos atlas analíticos $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ se dicen *compatibles* si cada carta de $\mathcal{A}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{A}'$, o equivalentemente, si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es también un atlas analítico en X. La compatibilidad de atlas es una relación de equivalencia, a cuyas clases de equivalencia se las denomina *estructura analítica* en X.

Si existe un isomorfismo holomorfo $f : X \to Y$, entonces las dos superficies de Riemann X, Y se consideran indistinguibles. Decimos, en ese caso, que son *conformemente equivalentes*.

Para los casos simplemente conexos resulta que sólo existen tres superficies distinguibles, salvo equivalencia conforme:

Teorema 1.1.1 (Teorema de uniformización)**.** *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a*

(i) *la esfera de Riemann* $\mathbb{P}^1$*,*
(ii) *al plano complejo* $\mathbb{C}$
(iii) *o bien al semiplano superior* $\mathscr{U}$ *(o disco unidad abierto* $\mathscr{D}$*).*[1]

Así, toda superficie de Riemann simplemente conexa conlleva una geometría natural asociada, ya sea esférica (la esfera de Riemann), euclídea (el plano complejo) o hiperbólica (el disco unidad). En [Hubbard, 2006, cap. 1] encontramos el teorema de uniformización enunciado de forma algo más general:[2]

Teorema 1.1.2. *Si una superficie de Riemann es conexa y no compacta y su grupo de cohomología* $H^1(X, \mathbb{R})$ *es trivial, entonces es conformemente equivalente a* $\mathbb{C}$ *o a* $\mathscr{D}$*.*

Un *automorfismo* de una superficie de Riemann X es un isomorfismo holomorfo $X \to X$. El conjunto de automorfismos de X forma un grupo que denotamos por $\operatorname{Aut} X$. Un primer paso para clasificar las superficies de Riemann es entender los automorfismos de las tres superficies de Riemann simplemente conexas.

El grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^1$ está formado por las transformaciones de Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

que es el grupo lineal especial proyectivo $PSL(2, \mathbb{C})$. Para $\mathbb{C}$ y $\mathscr{U}$ se tiene:

Teorema 1.1.3.

(i) $\operatorname{Aut} \mathbb{P}^1 = PSL(2, \mathbb{C})$.
(ii) $\operatorname{Aut} \mathbb{C} = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.
(iii) $\operatorname{Aut} \mathscr{U} = PSL(2, \mathbb{R})$.

Para $\mathscr{U}$ y $\mathscr{D}$, dos de los modelos habituales de geometría hiperbólica plana, se definen las métricas hiperbólicas

$$\rho_{\mathscr{U}} = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}, \quad \rho_{\mathscr{D}} = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

La longitud hiperbólica de un camino $\alpha : I \to \mathscr{U}$ diferenciable a trozos,

$$h(\alpha) = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{dy},$$

[1] $\mathscr{U}$ y $\mathscr{D}$ son conformemente equivalentes; por ejemplo, mediante $\mathscr{U} \to \mathscr{D} : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.
[2] Para cualquier espacio tolpológico X se cumple $H^1(X, \mathbb{R}) \approx \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{R})$; si X es simplemente conexo, $H^1(X, \mathbb{R}) \approx \{0\}$, pero el recíproco es falso en general.

es invariante bajo la acción de elementos de $PSL(2,\mathbb{R})$. De hecho, $PSL(2,\mathbb{R})$ es el grupo de isometrías de $\mathscr{U}$ que conservan la orientación.

1.2 Recubridores universales de superficies de Riemann. Una forma sencilla de construir superficies de Riemann consiste en formar el espacio de órbitas respecto a la acción de un grupo apropiado:

- Si G es el grupo generado por la traslación $z \mapsto z+1$, entonces $\mathbb{C}/G$ es el plano sin un punto $\mathbb{C} - \{0\}$ y $\mathscr{U}/G$ es el disco sin un punto $\mathscr{D} - \{0\}$.
- Si G es el grupo generado por las traslaciones $z \mapsto z+1$ y $z \mapsto z+i$, entonces $\mathbb{C}/G$ es un toro.

Si G es un grupo discreto que actúa en $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1$ o $\mathscr{U}$ entonces el espacio de órbitas es una superficie de Riemann. El hecho es que ésta es la situación para cualquier superficie de Riemann conexa. Exponemos esto a continuación, de forma muy sucinta.

Dado un espacio recubridor $p : \widetilde{X} \to X$ de una superficie de Riemann X, existe una única estructura compleja en $\widetilde{X}$ tal que p es holomorfa, y el grupo $G(\widetilde{X})$ de transformaciones recubridoras es un subgrupo de $\operatorname{Aut} \widetilde{X}$ [Jones and Singerman, 1987, pág. 211].

Cuando X es conexa, tiene un espacio recubridor $p : \widetilde{X} \to X$ tal que $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, *el* recubridor universal de X, que resulta ser siempre un espacio recubridor regular.[3] Entonces, como $G(\widetilde{X})$ actúa transitivamente en cada fibra $p^{-1}(x)$, los puntos de $p^{-1}(x)$ pertenecen a la misma órbita, luego el espacio de órbitas $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ es precisamente X. La proyección canónica $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ permite construir el homeomorfismo $q : X \to \widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ definido por $q(x) = \pi(\tilde{x})$, siendo $p(\tilde{x}) = x$; además, mediante q podemos llevar a $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ la estructura compleja de X: definimos cartas $(q(W), \Phi \circ q^{-1})$, siendo (W, Φ) una carta de X; entonces, q es equivalencia conforme y la proyección $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ es holomorfa.

Así, $\widetilde{X}$ es (conformemente equivalente a) $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ o $\mathscr{U}$ y podemos identificar a X con $\widetilde{X}/G$ para algún subgrupo $G \leqslant \operatorname{Aut} \widetilde{X}$.

Siendo $\widetilde{X}$ conexo, la acción del grupo de transformaciones recubridoras $G(\widetilde{X})$ es propiamente discontinua[4] en $\widetilde{X}$ y ningún elemento distinto de la identidad puede tener puntos fijos [Jones and Singerman, 1987, 4.19.2]. En definitiva, el siguiente teorema describe una forma de clasificar las superficies de Riemann:

[3] Un espacio recubridor es *regular* cuando para todo $x \in X$ y todo par de levantamientos $\tilde{x}, \tilde{x}'$ de x existe una transformación recubridora que lleva $\tilde{x}$ a $\tilde{x}'$, es decir, si $G(\widetilde{X})$ actúa transitivamente en cada fibra $p^{-1}(x)$.

[4] La acción de un grupo G en un espacio Y es *propiamente discontinua* si todo $x \in X$ tiene un entorno U tal que $g(x) = x$ si $U \cap g(U) \neq \varnothing$; a veces se define de forma algo más general: se permite $U \cap g(U) \neq \varnothing$ sólo para una cantidad finita de elementos $g \in G$.

Teorema 1.2.1.

(i) *La esfera de Riemann* $\mathbb{P}^1$ *es recubridor universal sólo de sí misma.*
(ii) *El plano* $\mathbb{C}$ *es recubridor universal de sí mismo, de los planos sin un punto* $\mathbb{C} - \{a\}$ *y de todas las superficies de Riemann compactas homeomorfas a un toro.*
(iii) *El resto de superficies de Riemann tienen a* $\mathscr{U}$ *como recubridor universal.*

En los casos (ii) y (iii), cada una de las superficies de Riemann es conformemente equivalente a $\mathbb{C}/G$ *o* $\mathscr{U}/G$*, respectivamente, para algún subgrupo* G *de* $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$ *o* $\operatorname{Aut}\mathscr{U}$ *cuya acción es propiamente discontinua en* $\mathbb{C}$ *o* $\mathscr{U}$ *y sin puntos fijos.*

Decimos entonces que X es *uniformizada* por G.

Es conocido en teoría de espacios recubridores que el grupo de transformaciones recubridoras $G(\widetilde{X})$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X)$ cuando $\widetilde{X} \to X$ es el recubridor universal [Hatcher, 2002, 1.39, pág. 71]. Más adelante (pág. 5) veremos que un grupo de isometrías de $\mathscr{U}$ con acción propiamente discontinua, si es abeliano, entonces es necesariamente cíclico. Ahora bien, ningún subgrupo de $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$ actúa sin puntos fijos. Además, el grupo fundamental de un toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que es abeliano pero no cíclico, por lo que toda superficie de Riemann de género 1 es conformemente equivalente a $\mathbb{C}/\Omega$ para un retículo $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\} < \operatorname{Aut}\mathbb{C}$ (subgrupo discreto de isometrías del plano euclídeo), con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Una superficie de Riemann es llamada *hiperbólica* si su recubridor universal es isomorfo a $\mathscr{U}$. Hemos visto cómo, salvo en cuatro casos, toda superficie de Riemann conexa es hiperbólica. Tales superficies heredan, por proyección desde $\mathscr{U}$, su propia geometría hiperbólica [Hubbard, 2006, 3.3.1, pág. 69]: para $x \in X$, $\xi \in T_xX$ y un punto $z \in p^{-1}(x)$, la métrica riemanniana ρ_X en X definida por

$$\rho_X(\xi) = \rho_{\mathscr{D}}([Dp(z)]^{-1}(\xi))$$

es independiente de la elección de z y, también, de elegir a $\mathscr{D}$ como espacio recubridor universal.

1.3 Grupos Fuchsianos.

Un grupo *Fuchsiano* es un grupo discreto de isometrías del plano hiperbólico que conservan la orientación, esto es, un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Que un grupo de isometrías hiperbólicas sea discreto puede entenderse de diferentes formas equivalentes. Geométricamente, significa que las órbitas en $\mathscr{U}$ tengan puntos de acumulación, en su caso, sólo en la frontera de $\mathscr{U}$ (es suficiente que esto se verifique en una órbita, por el hecho de ser isometrías también lo cumplirán el resto de órbitas).

Además de grupo, $PSL(2, \mathbb{R})$ es un espacio topológico. Entonces, un grupo es Fuchsiano si es discreto como subespacio topológico, esto es, si todo punto es aislado. También un grupo es discreto si la identidad e es un elemento aislado del grupo, es decir, si $g_n = e$ para n suficientemente grande cuando $g_1, g_2, ...$ pertenecen al grupo y $g_n \to e$ en la topología del grupo.

Por otra parte, un grupo de isometrías de $\mathscr{U}$ es discreto (como grupo topológico) si y sólo si su acción es propiamente discontinua en $\mathscr{U}$. De esta forma, el apartado (iii) del teorema 1.2.1 afirma que toda superficie de Riemann no homeomorfa a $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - \{a\}$ o un toro es uniformizada por un grupo Fuchsiano que actúa sin puntos fijos (esto es, que no tiene elementos elípticos, como veremos enseguida).

Otra caracterización de un grupo Fuchsiano Γ surge del hecho de que, si $z \in \mathscr{U}$ es fijado por algún elemento de Γ, entonces existe un entorno U de z tal que ningún otro punto de U es fijado por ningún elemento de Γ dintinto de la identidad. Podemos deducir, entonces, que un subgrupo Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si Γz, la órbita de z, es un subconjunto discreto de $\mathscr{U}$. Así, el límite de una sucesión $g_1(z), g_2(z), \ldots$ para $z \in \mathscr{U}$, si existe, es un punto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

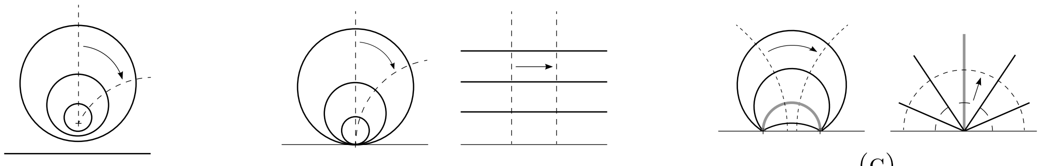
En $\mathbb{P}^1$, $PSL(2,\mathbb{C})$ es 3-transitivo[5] (pero no 4-transitivo). En el caso del plano hiperbólico, $PSL(2,\mathbb{R})$ es transitivo en $\mathscr{U}$ y 2-transitivo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Un elemento $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2,\mathbb{R})$ tiene puntos fijos dados por la ecuación $z = \frac{az+b}{cz+d}$. Como se trata de un polinomio con coeficientes reales, con discriminante $\Delta = (a+d)^2 - 4$ (utilizando que $ad - bc = 1$), las posibles soluciones son un único punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\Delta = 0$), dos puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\Delta > 0$), o bien dos puntos complejos conjugados (uno de ellos pertenece a $\mathscr{U}$; $\Delta < 0$). De ahí la siguiente clasificación de los elementos de $PSL(2,\mathbb{R})$:

- **Elementos parabólicos** ($|a+d| = 2$). Un único punto fijo situado en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Todo elemento parabólico es conjugado de $z \mapsto z+1$ (para la cual ∞ es punto fijo).
- **Elementos hiperbólicos** ($|a+d| > 2$). Dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tales elementos desplazan los puntos de $\mathscr{U}$ alejándolos de uno de los puntos fijos y acercándolos al otro punto fijo a lo largo de H-circunferencias. Todo elemento hiperbólico es conjugado de $z \mapsto \lambda z$ para un número real $\lambda > 1$.
- **Elementos elípticos** ($|a+d| < 2$). Un punto fijo en $\mathscr{U}$. Actúan como rotaciones centradas en el punto fijo. La clase de conjugación está determinada por el ángulo de rotación. Al igual que en $PSL(2,\mathbb{C})$, todo elemento de orden finito es elíptico.

Un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ (grupo aditivo) siempre es cíclico infinito. También, cualquier subgrupo discreto de S^1 (grupo multiplicativo) es cíclico finito. Es por esto que todo elemento elíptico de un grupo Fuchsiano tiene orden finito (luego la torsión es exactamente el conjunto de elementos elípticos), y el grupo es cíclico siempre que sus elementos no triviales compartan el conjunto de puntos fijos. Además, se tiene que cualesquiera dos elementos no triviales de $PSL(2,\mathbb{R})$ conmutan si y sólo si tienen el mismo conjunto de puntos fijos, por lo que todo grupo Fuchsiano abeliano es cíclico.

[5] Un grupo G actúa *k-transitivamente* en un conjunto X si existe $g \in G$ tal que $g(x_j) = y_j$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in X$ con $x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$ siempre que $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$.



(A) (B) (C)

FIGURA 1.1: (A) Una isometría elíptica rota circunferencias hiperbólicas en torno a un centro fijo. (B) Una isometría parabólica fija un punto en $\partial\mathscr{U}$ y deja invariantes a los horociclos. (C) Una isometría hiperbólica traslada entre dos puntos fijos en $\partial\mathscr{U}$. El *eje* (única geodésica fijada) se muestra en gris.[6]

Estas consideraciones pueden extenderse a la siguiente clasificación de los grupos Fuchsianos. Los casos 1-3 son llamados *elementales*:

1. Si un grupo Fuchsiano Γ es finito, entonces es cíclico generado por una rotación de ángulo $2\pi/n$ en torno a un punto, para algún entero positivo n.
2. Si Γ es infinito pero no contiene elementos hiperbólicos, entonces es cíclico infinito generado por un único elemento parabólico y no contiene elementos elípticos.
3. Si Γ contiene un elemento hiperbólico que genera un subgrupo de índice finito, entonces hay dos posibilidades:
   a) Γ es cíclico infinito, generado por el elemento hiperbólico.
   b) Γ tiene un subgrupo de índice 2 generado por el elemento hiperbólico.
4. En los demás casos, Γ contiene un subgrupo isomorfo al grupo libre de rango 2 y sólo contiene elementos hiperbólicos. En tal caso, Γ se dice que es *no elemental*.

1.4 Regiones fundamentales. Sea Γ un grupo que actúa en un espacio X y la proyección canónica $p : X \to X/\Gamma$. Un subconjunto cerrado $F \subset X$ es una *región fundamental* para la acción de Γ si la restricción $p|_{\mathring{F}} : \mathring{F} \to X/\Gamma$ es inyectiva y la restricción $p|_F : F \to X/\Gamma$ es sobreyectiva. Esto es equivalente a que se cumpla $\bigcup_{g\in\Gamma} g(F) = X$ y $\mathring{F} \cap g(\mathring{F}) = \varnothing$ para todo $g \in \Gamma$. Llamamos *tesela* al conjunto $g(F)$, para un $g \in \Gamma$, y *teselación* a la familia $\{g(F) \mid g \in \Gamma\}$.

Conocer una región fundamental significa tanto como entender el grupo, lo cual puede significar proporcionar generadores y relaciones, o puede significar entender la topología y la geometría de X/Γ, o ambas cosas. Si $F \subset X$ es una región fundamental, podemos entender el cociente X/Γ como F identificando los puntos de su borde que pertenecen a una misma órbita.

En general, un grupo Fuchsiano puede tener diferentes regiones fundamentales. Sin

[6] Ejemplo tomado de [Borthwick, 2007].

embargo, si dos regiones fundamentales F_1, F_2 tienen borde con área hiperbólica[7] nula y $\mu(F_1) < \infty$, entonces tienen igual área hiperbólica, $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

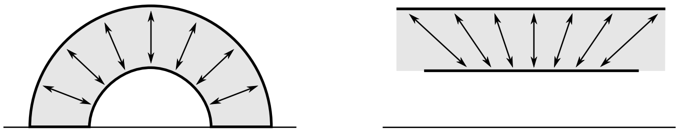


FIGURA 1.2: Regiones fundamentales para el grupo $\langle g \rangle \subset \mathrm{Aut}\, \mathscr{U}$ cíclico infinito, donde $g(z) = 2z$. El cociente $\mathscr{U} / \langle g \rangle$ es homeomorfo a un cilindro. IZQUIERDA: región $1 < |z| < 2$. DERECHA: región $1 < \mathrm{Im}\, z < 2$.[8]

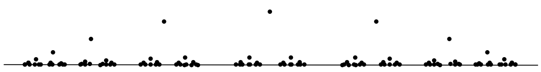


FIGURA 1.3: Órbita en $\mathscr{U}$ de un punto bajo la acción de un grupo Fuchsiano.

Si $\Lambda < \Gamma$ es un subgrupo de Γ, entonces es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, luego es un grupo Fuchsiano. Si tiene índice n y $\Gamma = g_1\Lambda \cup \cdots \cup g_n\Lambda$ es una descomposición en clases laterales, entonces $F' = g_1(F) \cup \cdots \cup g_n(F)$ es una región fundamental de Λ y $\mu(F') = n\mu(F)$ si $\mu(F) < \infty$.

1.5 Regiones de Dirichlet. La existencia de regiones fundamentales para un grupo Fuchsiano está garantizada por diferentes métodos conocidos que las construyen de forma explícita. Uno de ellos proporciona las llamadas *regiones* o *polígonos de Dirichlet*. Sea un punto $p \in \mathscr{U}$ no fijado por ningún elemento de $\Gamma - \{1_\Gamma\}$.[9] Definimos la *región de Dirichlet* de Γ *centrada en* p por

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathscr{U} \mid \rho(z, p) \leqslant \rho(g(z), p) \ \text{ para todo } \ g \in \Gamma\}$$

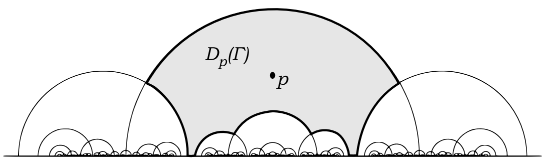


FIGURA 1.4: Una región de Dirichlet y su teselación.[10]

[7]En ocasiones, la definición de región fundamental incluye el hecho de que el borde ∂F tenga área hiperbólica nula, $\mu(\partial F) = 0$ [Beardon, 1983, pág. 204].
[8]Ejemplo tomado de [Hubbard, 2006].
[9]Existe algún punto con esa propiedad para todo grupo Fuchsiano [Katok, 1992, lema 2.2.5, pág. 31].
[10]Ejemplos tomados de [Borthwick, 2007].

Es claro que $p \in D_p(\Gamma)$. También, la mediatriz hiperbólica[11] del segmento de la H-línea que une p y $g(p)$ determina dos semiplanos hiperbólicos, uno de ellos contiene a p. Así, $D_p(\Gamma)$ es intersección de semiplanos hiperbólicos y, por tanto, es hiperbólicamente convexa, esto es, un *polígono* hiperbólico convexo.

En general, una región de Dirichlet puede ser muy compleja. Como hemos indicado, está limitada por H-líneas (geodésicas) y, posiblemente, también por tramos del eje real. Si dos de esas geodésicas se cortan en $\mathscr{U}$, al punto de corte se le llama *vértice*. Los vértices resultan ser aislados. El borde de la región de Dirichlet está formado por una cantidad (finita o infinita) segmentos de H-líneas y, posiblemente, por tramos del eje real. En cualquier caso, una región de Dirichlet es *localmente finita*, esto es, un compacto tiene intersección no trivial con, a lo sumo, una cantidad finita de trasladados de $D_p(\Gamma)$.[12]

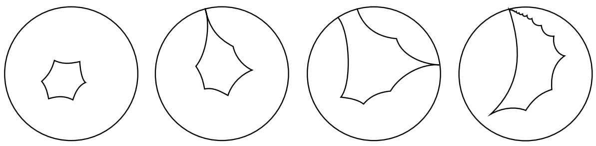


FIGURA 1.5: Posibles formas de una región de Dirichlet en $\mathscr{D}$.[13]

Las propiedades de convexidad y de que sea localmente finita dotan a $D_p(\Gamma)$ de las siguientes propiedades:

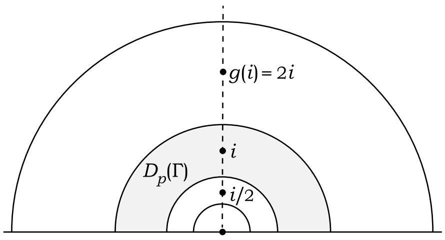
- Los conjuntos de vértices y lados son numerables.
- Cada vértice está exactamente en dos lados.
- Dos lados se cortan en, a lo sumo, un vértice.

Si $D_p(\Gamma)$ tiene área hiperbólica finita, $\mu(D_p(\Gamma)) < \infty$, entonces su borde posee una cantidad finita de lados. Hay otras hipótesis que garantizan que $D_p(\Gamma)$ sea un polígono con una cantidad finita de lados, probablemente la más simple es la de que tenga área hiperbólica finita. Un grupo Fuchsiano es *geométricamente finito* si admite una región fundamental que es un polígono convexo con un número finito de lados. En ese caso, toda

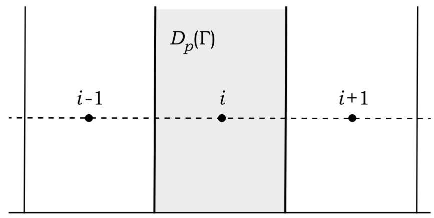
[11] En la definición axiomática del plano hiperbólico, las líneas las denominamos H-líneas. En el modelo $\mathscr{U}$ del plano hiperbólico, las H-líneas consisten en las rectas euclídeas perpendiculares al eje real y las semicircunferencias con centro en el eje real. En dicho modelo, estas H-líneas son las geodésicas respecto a la métrica hiperbólica $\rho_{\mathscr{U}}$. Un *segmento hiperbólico* $\overline{z_1 z_2}$ es el tramo entre los puntos z_1, z_2 de la (única) H-línea que los une. La *mediatriz hiperbólica* de un segmento $\overline{z_1 z_2}$ es la única H-línea perpendicular en el punto medio del segmento $\overline{z_1 z_2}$.

[12] Una región fundamental F de un grupo Fuchsiano Γ es *localmente finita* si todo $a \in F$ tiene un entorno V tal que $V \cap g(F) \neq \varnothing$ sólo para una cantidad finita de elementos $g \in \Gamma$.

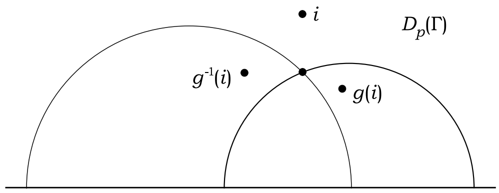
[13] Ejemplo tomado de [Katok, 1992].



(A) Isometría hiperbólica $g(z) = 2z$.



(B) Isometría parabólica $g(z) = z + 1$.



(C) Isometría elíptica.

FIGURA 1.6: Regiones de Dirichlet $D_i(\Gamma)$ centradas en i para $\Gamma = \langle g \rangle$.[14]

región de Dirichlet es una región fundamental con una cantidad finita de lados. Para un grupo Fuchsiano Γ las siguientes propiedades son equivalentes:

- Γ es geométricamente finito.
- La superficie $\mathscr{U}/\Gamma$ es topológicamente finita (es decir, su característica de Euler es finita, es homeomorfa a una superficie compacta de género g sin una cantidad finita p de puntos, $\chi = 2 - 2g - p$).
- Γ es finitamente generado.

Una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ depende del punto $p \in \mathscr{U}$ elegido. Diferentes puntos dan lugar a diferentes polígonos con propiedades distintas, tal como el número de lados.[15]

1.6 Congruencia de vértices y lados en una región de Dirichlet. Dados dos vértices u, v de una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ se dice que son *vértices congruentes* si existe $g \in \Gamma$ tal que $g(u) = v$. Se trata de una relación de equivalencia, a las clases de equivalencia se les llama *ciclos*. Los *lados* de $D_p(\Gamma)$ son los segmentos de H-línea que forman el borde de $D_p(\Gamma)$. Si $s' = g(s)$ para dos lados s, s' de $D_p(\Gamma)$ y $g \in \Gamma$, decimos que s, s' son *lados congruentes* y que g los empareja (no puede haber conjuntos de más de dos lados congruentes; un lado es congruente consigo mismo o bien con un lado distinto a lo sumo).

[14] Ejemplo tomado de [Dal'Bo, 2011].

[15] En [Beardon, 1983, 9.4.5,pág. 232] se describen las propiedades de $D_p(\Gamma)$ para un p típico.

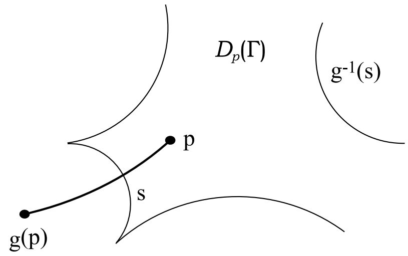


FIGURA 1.7: Un lado s es la mediatriz hiperbólica del segmento $\overline{pg(p)}$ para cierto $g \in \Gamma$. Entonces, $g^{-1}(s)$ es el lado de $D_p(\Gamma)$ congruente con s.

Si $u \in \mathscr{U}$ es fijado por un elemento elíptico h, entonces $v \in \mathscr{U}$ es fijado por el elemento elíptico ghg^{-1}. Por lo tanto, si un elemento de un ciclo es fijado también son fijados el resto de vértices del ciclo. A un ciclo tal se le llama *ciclo elíptico* y, a sus vértices, *vértices elípticos* (si u no es fijado por ningún elemento elíptico se habla de ciclos y vértices *accidentales*). El hecho de que $D_p(\Gamma)$ sea localmente finita implica que un ciclo pueda tener a lo sumo una cantidad finita de vértices.

En $\partial\mathscr{U}$ (o en $\partial\mathscr{D}$), $\partial D_p(\Gamma)$ puede tener una cantidad no numerable de componentes, pero sólo puede haber una cantidad numerable de ellas con longitud (euclídea) positiva. A tales componentes en $\partial\mathscr{U} \cap \partial D_p(\Gamma)$ se les llama *lados libres*, que son intervalos cerrados en $\partial\mathscr{U}$. Llamamos *vértice propio en el infinito* a un punto de $\partial\mathscr{U} \cap \partial D_p(\Gamma)$ que pertenece a dos lados de $D_p(\Gamma)$, y *vértice impropio* si pertenece a un lado y un lado libre. En ambos casos decimos que se trata de un *vértice en el infinito*. Por pertenecer a $\partial\mathscr{U}$, el elemento de Γ que fija un vértice propio tiene que ser parabólico.

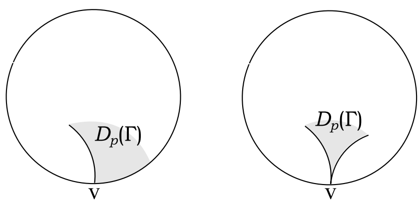


FIGURA 1.8: En $\mathscr{D}$: IZQUIERDA: vértice impropio. DERECHA: vértice propio.[16]

Un punto $w \in \mathscr{U}$ fijado por un elemento elíptico h' tiene que pertenecer al borde de $g(D_p(\Gamma))$ para algún $g \in \Gamma$. Así, $u = g^{-1}(w)$ está en el borde de $D_p(\Gamma)$ y es fijado por $h = g^{-1}h'g$. Por ser elemento elíptico, h tiene orden finito k. Entonces, u tiene que ser un vértice de $D_p(\Gamma)$, ya que h, como isometría, lleva H-líneas a H-líneas. El ángulo θ de u como vértice de $D_p(\Gamma)$ tiene que ser $\leqslant 2\pi/k$. Si $k = 2$, entonces u puede estar en el interior de un lado de $D_p(\Gamma)$, de forma que h intercambia los dos segmentos en los que el punto fijo u divide a ese lado.

[16]Ejemplo tomado de [Beardon, 1983].

Ya se indicó en §1.3 que un subgrupo de Γ es cíclico si sus elementos tienen el mismo conjunto de puntos fijos en $\mathscr{U}$. Así, el subgrupo estabilizador de un punto en $\mathscr{U}$ es cíclico finito (son elementos elípticos y, por tanto, de orden finito). Este subgrupo cíclico finito es maximal, en el sentido de que si estuviera contenido en un subgrupo cíclico finito mayor cualesquiera dos elementos g, h de éste conmutan, pues es abeliano; pero g y h tienen el mismo conjunto de puntos fijos si $gh = hg$ [Jones and Singerman, 1987, 5.2.3], y, por tanto, pertenecen al subgrupo cíclico finito que forma el estabilizador.

Dos vértices en un ciclo elíptico son congruentes, luego sus estabilizadores son subgrupos conjugados en Γ, por lo que tienen el mismo orden.

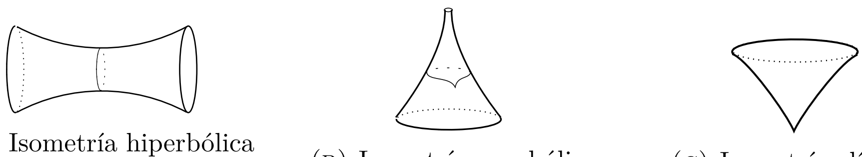
Existe, de esta forma, una correspondencia biunívoca entre los ciclos elípticos de $D_p(\Gamma)$ y las clases de conjugación de subgrupos cíclicos finitos maximales no triviales de Γ.

Se llama *período* al orden de un subgrupo finito maximal de Γ. Cada período se repite tantas veces como clases de conjugación haya de subgrupos finitos maximales de Γ de ese orden.

Si m es el orden del estabilizador de uno de los vértices en un ciclo elíptico y $\theta_1, \ldots, \theta_t$ son los ángulos internos de los vértices del ciclo, entonces $\theta_1 + \cdots + \theta_t = 2\pi/m$.

Sea $\{g_1, \ldots, g_n\}$ la familia de elementos de Γ que empareja los lados del borde de una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ y Λ el grupo generado por dichos elementos. Se puede ver cómo, adjuntando a $D_p(\Gamma)$ regiones vecinas obtenidas mediante sucesivas aplicaciones de elementos de Λ, se consigue una teselación de $\mathscr{U}$. Esto indica que $\Gamma = \Lambda$, esto es, $\{g_1, \ldots, g_n\}$ es un conjunto de generadores de Γ.

Mediante la identificación de lados congruentes en $D_p(\Gamma)$, el espacio cociente $D_p(\Gamma)/\Gamma$ es homeomorfo al espacio de órbitas $\mathscr{U}/\Gamma$. Esto implica, en particular, que es suficiente que una región de Dirichlet sea compacta en $\mathscr{U}$ para que también lo sean el resto de regiones de Dirichlet.



(A) Isometría hiperbólica $g(z) = 2z$.

(B) Isometría parabólica $g(z) = z + 1$.

(C) Isometría elíptica.

FIGURA 1.9: Espacios cociente $\mathscr{U}/\Gamma \simeq D_i(\Gamma)/\Gamma$ correspondientes a la figura 1.6. (A) y (B) son ambos homeomorfos a un cilindro, pero no son isomorfos analíticamente. (B) es un ejemplo de *cúspide* asociada a las isometrías parabólicas; una cúspide se asemeja a un "embudo" que escapa al infinito. Una isometría elíptica, como en (C), crea un *punto cónico* en el que la superficie no es suave. Ejemplo tomado de [Dal'Bo, 2011].

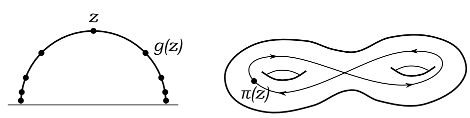
1.7 Características geométricas de los tipos de isometrías. Un aspecto interesante de las superficies hiperbólicas es el hecho de que pueden asociarse características geométricas distintas dependiendo de que se trate de una isometría hiperbólica, parabólica o elíptica. Tienen lugar las siguientes correspondencias:

$$\text{geodésicas cerradas en } \mathscr{U}/\Gamma \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{clases de conjugación de}\\ \text{elementos hiperbólicos de } \Gamma\end{array}$$

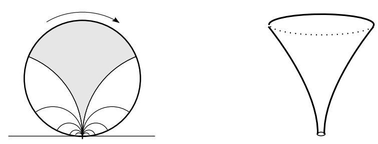
$$\text{cúspides} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{órbitas de puntos}\\ \text{fijos parabólicos de } \Gamma\end{array}$$

$$\text{puntos cónicos} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{órbitas de puntos}\\ \text{fijos elípticos de } \Gamma\end{array}$$

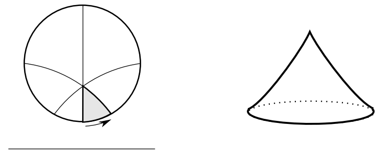
Si $g \in \Gamma$ es un elemento hiperbólico, existe una única geodésica, llamada *eje* de g (destacada en la figura 1.1), que conecta sus dos puntos fijos en $\partial\mathscr{U}$. En el cociente $\mathscr{U}/\Gamma$, el eje desciende a una geodésica cerrada. En la figura[17] se muestra el caso de una región fundamental compacta octogonal cuya identificación de lados da lugar a una superficie compacta de género 2.



Un elemento parabólico $g \in \Gamma$ fija un punto en $\partial\mathscr{U}$ y crea una cúspide. También fija el interior O de un *horociclo*, una circunferencia tangente a $\partial\mathscr{U}$ en el punto fijo, como en la figura. Una cúspide se define como un cociente de la forma $O/\langle g\rangle$; tiene longitud infinita, pero área finita. Como todo elemento parabólico es conjugado de la traslación $z \mapsto z+1$, todas las cúspides son isométricas en un entorno de ∞.



Un elemento elíptico fija un punto en $\mathscr{U}$ y da lugar a una singularidad cónica en $\mathscr{U}/\Gamma$.



Si una superficie hiperbólica geométricamente finita $\mathscr{U}/\Gamma$ no es compacta, entonces tiene terminaciones en el infinito. Las regiones fundamentales de Γ tienen puntos o intervalos en $\partial\mathscr{U}$. Un tipo incluye las cúspides asociadas a los puntos fijos en $\partial\mathscr{U}$ de isometrías parábolicas. Existe, esencialmente, otro tipo de terminación: cuando una región fundamental tiene un intervalo (o más) en $\partial\mathscr{U}$. Los extremos de tal lado son puntos fijos de una isometría hiperbólica g. El cociente $\mathscr{U}/\langle g\rangle$ es un cilindro hiperbólico, la mitad del cual es homeomorfa a la terminación correspondiente de $\mathscr{U}/\Gamma$, que se ensancha exponencialmente y tiene área infinita.

[17] Los ejemplos de esta sección están tomados de [Borthwick, 2007].

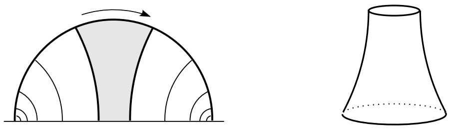
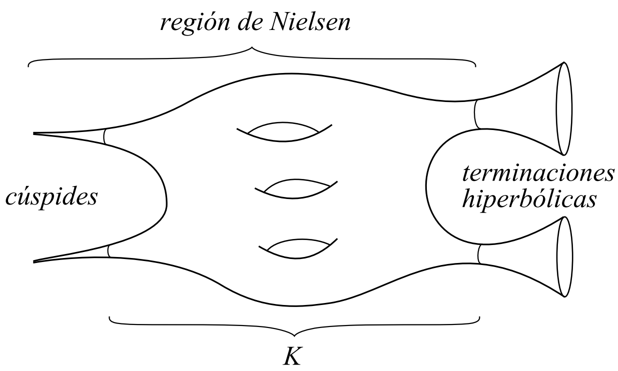


FIGURA 1.10: Terminación asociada a una isometría hiperbólica en una superficie hiperbólica $\mathscr{U}/\Gamma$ no compacta.

Toda superficie hiperbólica geométricamente finita admite una descomposición

$$\mathscr{U}/\Gamma \;=\; K \,\cup\, \text{Cúspides} \,\cup\, \text{Terminaciones hiperbólicas}$$

como unión de una superficie compacta K con borde y una cantidad finita de cúspides y terminaciones hiperbólicas.



2 Superficies de Riemann compactas de género $g>1$

Tras la exposición del primer capítulo, en éste centramos el discurso sobre los conceptos que utilizaremos en los capítulos posteriores. Se trata de crear el escenario que, como se comentó en la introducción, surgió del trabajo de Macbeath de 1961 y su enfoque combinatorio.

En primer lugar, ceñimos el estudio al tipo de superficies a las que hace referencia el título del trabajo, esto es, las compactas, sin cúspides ni terminaciones hiperbólicas y con finitos puntos cónicos. Definiremos la *signatura* de un grupo Fuchsiano; se trata de un conjunto finito de enteros que caracteriza al grupo y sobre el que se enunciarán los resultados posteriores.

Aparecen varios de los hechos fundamentales en superficies de Riemann y para los temas que después abordaremos: el teorema de Poincaré, de donde resulta, además, la presentación de los grupos Fuchsianos sobre la que se construye el estudio combinatorio mencionado; la fórmula de Riemann-Hurwitz; y el teorema sobre las condiciones para que un grupo finito actúe como grupo de automorfismos. Será operacionalmente importante la caracterización de los epimorfismos $\Gamma \to G$ cuyo núcleo no tiene torsión en función de si modifica, o no, los órdenes de los generadores de Γ. Finalmente, haremos algunas precisiones sobre la cota de Hurwitz y sobre el problema del género mínimo, con un resultado que será de utilidad en los capítulos posteriores.

2.1 Grupos Fuchsianos cocompactos. Signatura. Un grupo Fuchsiano Γ es *cocompacto* si $\mathscr{U}/\Gamma$ es compacto. En tal caso, se demuestra que Γ no puede contener elementos parabólicos. Como se indicó en §1.6, $\mathscr{U}/\Gamma$ es homeomorfo a $D_p(\Gamma)/\Gamma$ para cualquier región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$, lo que lleva a que Γ sea cocompacto si y sólo si toda región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ es compacta. También, Γ es cocompacto si y sólo si $\mu(\mathscr{U}/\Gamma) < \infty$ y no contiene elementos parabólicos.

Una región de Dirichlet compacta tiene un número finito de vértices y lados, es decir, Γ es geométricamente finito. Entonces, también tiene un número finito de ciclos elípticos y períodos $m_1, \ldots, m_r$, y el cociente $\mathscr{U}/\Gamma$ es una superficie orientable compacta de género g con exactamente r puntos cónicos (no tiene cúspides, pues Γ no contiene elementos parabólicos; tampoco tiene terminaciones hiperbólicas, ya que $D_p(\Gamma)$ no puede tener lados en $\partial\mathscr{U}$).

Llamamos a $(g; m_1, \dots, m_r)$ *signatura* del grupo Fuchsiano cocompacto Γ, a g su *género de órbita* y a los m_i *períodos*.

De aquí en adelante, entenderemos que Γ es cocompacto siempre que hagamos referencia a una signatura $(g; m_1, \dots, m_r)$.

Como vimos en §1.2, una superficie de Riemann compacta de género $g > 1$ tiene a $\mathscr{U}$ como espacio recubridor universal y el grupo de transformaciones recubridoras es un grupo Fuchsiano Γ. Como actúa sin puntos fijos en $\mathscr{U}$, no contiene elementos elípticos, luego tampoco períodos y su signatura es $(g; —)$. Como tampoco tiene elementos parabólicos, entonces sólo contiene elementos hiperbólicos.

Ya se indicó en §1.4 que tienen igual área hiperbólica las regiones fundamentales cuyo borde es de área hiperbólica nula. El borde de una región de Dirichlet es una unión numerable de segmentos de H-líneas y, por tanto, tiene área hiperbólica nula. Cuando Γ tiene signatura $(g; m_1, \dots, m_r)$ y F una región fundamental cuyo borde tiene área hiperbólica nula, entonces su área hiperbólica es

$$\mu(F) = 2\pi\left((2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right) \tag{2.1}$$

Que la expresión de la derecha sea positiva es condición necesaria para la existencia de un grupo Fuchsiano con la signatura dada. También es condición suficiente:

Teorema 2.1.1 (Poincaré)**.** *Existe un grupo Fuchsiano con signatura* $(g; m_1, \dots, m_r)$ *si y sólo si*

$$(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \ > \ 0,$$

La demostración[1] se realiza construyendo de forma explícita un polígono (en $\mathscr{D}$) con área hiperbólica dada por dicha expresión y emparejando lados de forma que las transformaciones correspondientes generan un grupo Γ que resulta ser propiamente discontinuo y tal que el polígono es región fundamental suya. La identificación de lados que se realiza resulta en una superficie cociente F/Γ con género g. Además, de dicha construcción resulta la siguiente presentación de Γ:

$$\Gamma \approx \langle\, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r \mid x_1^{m_1},\ \dots,\ x_r^{m_r},\ x_1 \cdots x_r \textstyle\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\,\rangle, \tag{2.2}$$

donde los x_i son elementos elípticos y los a_j, b_j son elementos hiperbólicos.

Cuando Γ es cocompacto, de la expresión (2.1) se deduce que $\mu(D_p(\Gamma)) \geqslant \pi/21$ para toda región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$. Si se da la igualdad, entonces Γ es un grupo triangular con signatura $(0;\ 2, 3, 7)$.[2]

[1] [Jones and Singerman, 1987, pág. 259]

[2] El *grupo triangular* $\Delta(l, m, n)$ es el subgrupo de índice 2 que conserva la orientación del grupo generado por las reflexiones de $\mathscr{U}$ en los lados de un triángulo hiperbólico de ángulos internos $\pi/l, \pi/m, \pi/n$, con $l, m, n \geqslant 2$ enteros que cumplen $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Son grupos Fuchsianos con signatura $(0;\ l, m, n)$, y tienen presentación $\Delta(l, m, n) = \left\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^l,\ x_2^m,\ x_3^n,\ x_1x_2x_3 \right\rangle$.

En el teorema 2.1.1 podemos considerar $r = 0$, de forma que el grupo Fuchsiano, en caso de que exista, no contenga ciclos elípticos y su signatura sea $(g; —)$. Como $2g - 2 > 0$ si y sólo si $g > 1$, el teorema garantiza que para todo entero $g > 1$ existe un grupo Fuchsiano Γ que actúa en $\mathscr{U}$ sin puntos fijos y $\mathscr{U}/\Gamma$ tiene género g.

2.2 Grupos de superficie. Como vimos en §1.2, una superficie de Riemann de género 1 es uniformizada por un retículo cuya región fundamental es un paralelogramo euclídeo, emparejando sus lados mediante generadores. Y, según se ha indicado en la sección anterior, la situación es similar cuando el género es $g \geqslant 2$, con la diferencia de que la región fundamental resulta ser un polígono hiperbólico con $4g$ lados.

Si un grupo Fuchsiano Γ sin puntos fijos en $\mathscr{U}$ es cocompacto, entonces, siguiendo la construcción indicada para la demostración del teorema 2.1.1, tiene una región fundamental F que consiste en un polígono hiperbólico de $4g$ lados $A_1', B_1', A_1, B_1, \ldots, A_g', B_g', A_g, B_g$ en este orden cíclico, con elementos hiperbólicos a_i, b_i que llevan A_i' a A_i y B_i' a B_i. En consecuencia, Γ tiene la presentación

$$\Gamma \approx \langle\, a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \textstyle\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \,\rangle,$$

por lo que es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X)$ de una superficie orientable compacta X de género g (en este caso, $\pi_1(X)$ puede calcularse como aplicación del teorema de van Kampen a complejos celulares[3]). En esta situación, decimos que Γ es un *grupo de superficie*. Su signatura es $(g; —)$. Según hemos indicado al final de la anterior sección, toda superficie orientable compacta de género $g > 1$ puede entenderse como el cociente $\mathscr{U}/\Gamma$ para un grupo de superficie Fuchsiano Γ. De la ecuación 2.1 se obtiene

$$\mu(F) = 4\pi(g-1)$$

2.3 Grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas. Sea una superficie de Riemann compacta X de género $g > 1$. Como se indica en la sección anterior, X es uniformizada por un grupo Fuchsiano de superficie Λ, con signatura $(g; —)$, igual al grupo $G(\widetilde{X})$ de transformaciones recubridoras del recubridor universal $p : \widetilde{X} \simeq \mathscr{U} \to X \simeq \mathscr{U}/\Lambda$ (§1.2), que es subgrupo de Aut $\mathscr{U} \approx PSL(2, \mathbb{R})$

Todo elemento de Aut X puede ser levantado a un elemento de Aut $\mathscr{U}$. El levantamiento de cualquier subgrupo de Aut X genera, junto con Λ, un subgrupo Γ de Aut $\mathscr{U}$ que normaliza a Λ en Aut $\mathscr{U}$. Esto nos permite parametrizar parejas formadas por superficies de Riemann compacta X y subgrupos G de Aut X mediante parejas de grupos de superficie Fuchsianos Λ y subgrupos Γ del normalizador

$$N(\Lambda) = \{g \in \text{Aut } \mathscr{U} \mid g^{-1}\Lambda g = \Lambda\}$$

[3] [Hatcher, 2002, pág. 51]

de Λ en Aut $\mathscr{U}$, de forma que $X = \mathscr{U}/\Lambda$ y $G \approx \Gamma/\Lambda$. Dichos grupos normalizadores Γ son siempre Fuchsianos.[4] Los automorfismos de $\mathscr{U}/\Lambda$ son inducidos por $N(\Lambda)$:

Teorema 2.3.1. *Si Λ es un grupo de superficie Fuchsiano, entonces Aut $\mathscr{U}/\Lambda \approx N(\Lambda)/\Lambda$.*

Denotamos por $\mu(\Gamma)$ al área hiperbólica de $\mathscr{U}/\Gamma$, que ya vimos que es igual al área de cualquiera de las regiones fundamentales de Γ. Según vimos al final de §1.4,

$$\mu(\Lambda) = [\Gamma : \Lambda]\, \mu(\Gamma), \tag{2.3}$$

que es la *fómula de Riemann-Hurwitz*. Teniendo en cuenta que $|G| = [\Gamma : \Lambda]$ y $\mathscr{U}/\Gamma \simeq X/G$, podemos escribirla de forma más explícita mediante la ecuación (2.1):

Teorema 2.3.2 (Fórmula de Riemann-Hurwitz)**.**

$$\frac{g(X)-1}{|G|} = g(X/G) - 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \tag{2.4}$$

La ecuación (2.3) implica que

$$|\text{Aut } X| = |N(\Lambda)/\Lambda| = \frac{\mu(\Lambda)}{\mu(N(\Lambda))}$$

es finito, pues $\mu(N(\Lambda))$, además de no nula, es finita por serlo $\mu(\Lambda)$ y estar Λ contenido en $N(\Lambda)$.

Así, Aut X es un grupo finito. El siguiente teorema da respuesta a la cuestión de cuándo se puede dar un grupo finito determinado como grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta.

Teorema 2.3.3. *Un grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta de género $g > 1$ si y sólo si $G \approx \Gamma/\Lambda$, siendo Γ un grupo Fuchsiano cocompacto y $\Lambda \trianglelefteq \Gamma$ un grupo de superficie Fuchsiano con género de órbita g.*

De esta forma, podemos tomar un grupo Fuchsiano Γ con signatura que verifique la condición en el teorema 2.1.1, especificar un subgrupo normal Λ sin torsión de índice finito, y entonces interpretar el cociente Γ/Λ como el grupo de automorfismos de la superficie de Riemann $\mathscr{U}/\Lambda$, esto es, la superficie de Riemann uniformizada por la imagen de Λ bajo una inclusión apropiada de Γ en Aut $\mathscr{U}$.

Sea G un grupo finito generado por los elementos $\{g_1, \dots, g_s\}$ y Γ un grupo Fuchsiano de signatura $(s; \text{—})$. Definamos el epimorfismo $\phi : \Gamma \to G$ mediante $\phi(a_i) = g_i$ y $\phi(b_i) = 1_G$. Este epimorfismo tiene núcleo sin torsión, ya que Γ no la tiene. En definitiva,

Teorema 2.3.4. *Todo grupo finito es isomorfo a un grupo de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta de género $g > 1$.*

[4] [Jones and Singerman, 1987, th. 5.7.5, pág. 240]

2.4 Epimorfismos con núcleo de superficie. Hemos visto que establecer la existencia de ciertas superficies de Riemann es más o menos equivalente a disponer de un epimorfismo $\Gamma \to G$ adecuado de un grupo Fuchsiano Γ sobre un grupo finito G; en particular, su núcleo no debe contener elementos elípticos, es decir, no debe tener torsión. A tales epimorfismos $\Gamma \to G$ cuyo núcleo no tiene torsión se les denomina *epimorfismos con núcleo de superficie* o *epimorfismos suaves*.

Si un epimorfismo $\phi : \Gamma \to G$ de un grupo Fuchsiano Γ sobre un grupo finito G tiene núcleo sin torsión, el orden $|\phi(x)|$ debe dividir a $|x|$ para cualquier elemento $x \in \Gamma$ elíptico. Si fuera $|\phi(x)| = n < |x| = m$ con $n|m$, entonces $x^n \neq 1_\Gamma$ pertenecería al núcleo de ϕ, y éste tendría torsión, pues $|x^n| = m/n$. Luego tiene que ser $|\phi(x)| = |x|$.

Recíprocamente, si ϕ mantiene los órdenes de los generadores elípticos de Γ entonces su núcleo no tiene torsión. Esto es así porque todo elemento elíptico $x \in \Gamma$ es conjugado de una potencia de un generador elíptico x_i de orden m_i,[5] esto es, $x = y^{-1}x_i^k y$ con $k < m_i$. Entonces, $\phi(x) = \phi(y)^{-1}\phi(x_i^k)\phi(y)$, luego

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \phi(y)^{-1}\phi(x_i^k)\phi(y) = 1 \Leftrightarrow \phi(x_i^k) = 1$$

Así, si fuese $\phi(x) = 1$, sería $x_i^k \in \ker\phi$ y $\phi(x_i)^k = 1$, luego $\phi(x_i)$ tendría orden menor que m_i, contrariamente a la premisa. Luego un elemento x de orden finito no puede pertenecer a $\ker\phi$.

Hemos establecido así el siguiente

Teorema 2.4.1. *Un epimorfismo $\phi : \Gamma \to G$ de un grupo Fuchsiano Γ sobre un grupo finito G tiene núcleo de superficie si y sólo si mantiene los períodos de Γ, es decir, $|\phi(x_i)| = |x_i| = m_i$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.*

2.5 Cota de Hurwitz. En §2.3 vimos que el grupo de automorfismos Aut X es siempre finito para una superficie de Riemann compacta X de género $g \geqslant 2$, a diferencia de lo que ocurre para la esfera de Riemann y las superficies de género 1.

En §2.1 se observó que $\mu(D_p(\Gamma)) \geqslant \pi/21$ si $\mathscr{U}/\Gamma$ es compacta. Ahora, como $|\text{Aut } X| = \mu(\Lambda)/\mu(N(\Lambda))$, $\mu(\Lambda) = 4\pi(g-1)$ y $\mu(N(\Lambda)) \geqslant \pi/21$, se obtiene la siguiente cota superior si $g \geqslant 2$, establecida por Hurwitz:

$$|\text{Aut } X| \leqslant 84(g-1)$$

Las superficies de Riemann que alcanzan la igualdad se conocen como *superficies de Hurwitz*, y *grupos de Hurwitz* a sus grupos de automorfismos.

[5] [Hoare et al., 1972]

Teorema 2.5.1. *Si G es finito, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *G es un grupo de Hurwitz.*
- *G es un cociente no trivial de $\Delta(2,3,7)$.*
- *G tiene generadores x_1, x_2, x_3 de órdenes 2, 3, 7 con $x_1x_2x_3 = 1_G$.*

Macbeath inició el estudio de grupos de Hurwitz finitos simples mostrando que los grupos simples $PSL(2,q)$ son grupos de Hurwitz cuando $q = 7$, q es primo con $q \equiv \pm 1 \pmod 7$, o $q = p^3$ con p primo y $p \not\equiv 1 \pmod 7$. Higman mostró que el grupo alternado A_n es un grupo de Hurwitz para n suficientemente grande, y Conder [6] determinó cuáles de los grupos alternados de orden pequeño lo son. Wilson utilizó cálculo computacional para mostrar que el grupo simple monstruo es un grupo de Hurwitz.[7]

La cota de Hurwitz no es alcanzada si $g = 2$, pero sí se alcanza si $g = 3$. Se puede ver que se alcanza para una cantidad infinita de valores de g, y que no lo es también para infinitos valores de g. No se conoce para qué valores de g precisos se alcanza la cota de Hurwitz; los primeros son $g = 3, 7, 14, 17$.

Es posible precisar más una cota superior para $|\mathrm{Aut}\ X|$. Siendo $G \approx \Gamma/\Lambda$, Γ con signatura $(\gamma;\ m_1, \dots, m_r)$ y Λ con signatura $(g;\ —)$, con $g \geqslant 2$, [8]

- $|G| \leqslant 4(g-1)$ si $\gamma > 0$ o $r \geqslant 5$.
- $|G| \leqslant 12(g-1)$ si $r = 4$.
- Si $|G| \geqslant 24(g-1)$, entonces $\gamma = 0$, $r = 3$ y se da uno de los siguientes casos:

$(\gamma;\ m_1, \dots, m_r)$	$\lvert G \rvert$
$(0;\ 2,3,7)$	$84(g-1)$
$(0;\ 2,3,8)$	$48(g-1)$
$(0;\ 2,4,5)$	$40(g-1)$
$(0;\ 2,3,9)$	$36(g-1)$
$(0;\ 2,3,10)$	$30(g-1)$
$(0;\ 2,3,11)$	$(132/5)(g-1)$
$(0;\ 2,3,12)$	$24(g-1)$
$(0;\ 2,4,6)$	$24(g-1)$
$(0;\ 3,3,4)$	$24(g-1)$

[6] Conder, M.D.E., *Generators for alternating and symmetric groups*, J. London Math. Soc. 22 (1980), 75-86.
[7] Wilson, R.A., *The Monster is a Hurwitz group*, J. Group Theory 4 (2001), no. 4, 367–374.
[8] [Breuer, 2000, lema 3.18, pág. 16]

2.6 Género mínimo de superficies con un mismo grupo de automorfismos. Consideremos un grupo finito G y la familia $\mathcal{F}$ de grupos Fuchsianos Γ para los que existe algún epimorfismo $\phi : \Gamma \to G$ con núcleo de supeficie. En §2.3 se describió cómo el cociente $X = \mathscr{U} / \ker \phi$ es una superficie de Riemann compacta de género $g > 1$ establecido por la fórmula de Riemann-Hurwitz (2.4)

$$\frac{2(g-1)}{|G|} = 2(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right),$$

siendo $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ la signatura de Γ.

Entre los grupos Fuchsianos de $\mathcal{F}$ habrá algunos para los que el género g de las superficies X correspondientes alcance un valor g^* mínimo. Tal es el llamado *problema del género mínimo* para un grupo finito G. Se trata, en consecuencia, de encontrar un grupo Fuchsiano Γ entre los pertenecientes a $\mathcal{F}$ que minimice el miembro derecho de la fórmula de Riemann-Hurwitz, que es el área hiperbólica $\mu(\Gamma)/2\pi = 2(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{r} (1 - 1/m_i)$ de una región fundamental de Γ.

En los siguientes capítulos estudiaremos el problema del género mínimo cuando el grupo de automorfismos es cíclico finito, abeliano finito o diédrico. Establecemos aquí un resultado que aplicaremos en dichos casos.

Dada una signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, siendo $m_i = p_1^{\mu_{i1}} \cdots p_s^{\mu_{is}}$ para $i = 1, \dots, r$ y $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ el conjunto de primos que dividen a algún m_i (luego para un j fijado es $\mu_{ij} \neq 0$ para un i al menos), llamaremos *conjunto de factores primarios* de la signatura al conjunto

$$\Omega(m_1, \dots, m_r) = \left\{p_j^{\mu_{ij}},\ i = 1, \dots, r,\ j = 1, \dots, s\right\}$$

de las mayores potencias de primos que aparecen en cada m_i, teniendo en cuenta las repeticiones de una misma potencia. Podemos representar dicho conjunto mediante una matriz:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p_1^{\mu_{11}} & \cdots & p_s^{\mu_{1s}} \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^{\mu_{r1}} & \cdots & p_s^{\mu_{rs}} \end{pmatrix}$$

Dicha matriz no puede tener ninguna columna cuyas entradas sean todas iguales a 1, pues hemos definido $\mathcal{P}$ de forma que todos sus elementos dividan a algún m_i.

La situación que ahora nos interesa es cuando $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ y $(\gamma; \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_{\hat{r}})$, dos signaturas con igual γ y siendo $\hat{m}_1 \mid \hat{m}_2 \mid \cdots \mid \hat{m}_{\hat{r}}$, comparten el mismo conjunto de factores primarios, $\Omega(m_1, \dots, m_r) = \Omega(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_{\hat{r}})$, por lo cual es necesario que sea $r \geqslant \hat{r}$. Si $r > \hat{r}$, no crea ambigüedad reconsiderar los valores del subíndice en $\hat{m}_i$ y añadir $r - \hat{r}$ “períodos” iguales a 1:

$$\mathbf{1} \rightsquigarrow \hat{m}_1\ , \quad \dots\ , \ \mathbf{1} \rightsquigarrow \hat{m}_{r-\hat{r}-1}\ , \ \mathbf{1} \rightsquigarrow \hat{m}_{r-\hat{r}}\ ,$$

$$\hat{m}_1 \rightsquigarrow \hat{m}_{r-\hat{r}+1}\ , \quad \dots\ , \ \hat{m}_{\hat{r}-1} \rightsquigarrow \hat{m}_{r-1}\ , \ \ \hat{m}_{\hat{r}} \rightsquigarrow \hat{m}_r$$

En tal caso, las matrices

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p_1^{\mu_{11}} & \cdots & p_s^{\mu_{1s}} \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^{\mu_{r1}} & \cdots & p_s^{\mu_{rs}} \end{pmatrix} \qquad \widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} p_1^{\hat{\mu}_{11}} & \cdots & p_s^{\hat{\mu}_{1s}} \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^{\hat{\mu}_{r1}} & \cdots & p_s^{\hat{\mu}_{rs}} \end{pmatrix}$$

tienen las mismas entradas con diferentes posiciones: la columna j de $\widehat{\mathcal{M}}$ se obtiene de la columna j de $\mathcal{M}$ mediante una permutación τ_j de sus elementos: $\hat{\mu}_{ij} = \mu_{\tau_j(i)j}$. Como $\hat{m}_1 \,|\, \hat{m}_2 \,|\cdots|\, \hat{m}_r$, en cada columna de la matriz $\widehat{\mathcal{M}}$ los elementos aumentan hacia abajo, $\hat{\mu}_{1j} \leqslant \hat{\mu}_{2j} \leqslant \cdots \leqslant \hat{\mu}_{rj}$, y algunas de sus primeras filas pueden tener todas sus entradas iguales a 1.

El hecho es que, en tal caso y si las signaturas definen grupos Fuchsianos, entonces $\mu(\hat{\Gamma}) \leqslant \mu(\Gamma)$. Así lo garantiza el siguiente

Lema 2.6.1. *Sea una signatura $(\gamma;\, \hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_{\hat{r}})$ tal que $\hat{m}_1 | \hat{m}_2 | \cdots | \hat{m}_{\hat{r}}$. Para toda signatura $(\gamma;\, m_1, \ldots, m_r)$ con el mismo conjunto de factores primarios, $\Omega_\Gamma = \Omega_{\hat{\Gamma}}$, se cumple*

$$\sum_{i=1}^{\hat{r}} \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

Demostración. En primer lugar, observamos que el término $\sum_{i=1}^{\hat{r}} (1 - 1/\hat{m}_i)$ es igual a $\sum_{i=1}^{r} (1 - 1/\hat{m}_i)$ con los $\hat{m}_i$ redefinidos como indicamos antes (pues $1 - 1/1 = 0$ y los $\hat{m}_i = 1$ no influyen en el sumatorio), de forma que podemos trabajar con las matrices $\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{M}}$.

La matriz $\widehat{\mathcal{M}}$ puede obtenerse de $\mathcal{M}$ mediante una número finito de intercambios sucesivos de elementos de dos filas adyacentes: en el primer paso intercambiamos $(1,j)$ por $(2,j)$ si $(2,j) < (1,j)$ (con (i,j) denotamos aquí el elemento en la fila i y columna j en $\mathcal{M}$), para cada $j = 1, \ldots, s$. Con la matriz resultante hacemos lo mismo para las filas 2 y 3, y así sucesivamente para el resto de filas. Puede ser necesario repetir este proceso varias veces. Finalmente se obtiene se obtiene la matriz $\widehat{\mathcal{M}}$ (no importa aquí que el algoritmo sea más o menos eficiente).

Vamos a ver que de cada intercambio de filas resultan unos nuevos valores $m'_1, \ldots, m'_r$, siendo m'_i el producto de las entradas de la fila i de la matriz resultante, para los que $\sum_{i=1}^{r} (1 - 1/m'_i)$ produce un valor menor o igual que para los m_i precedentes. En efecto, en uno de dichos intercambios las dos filas que reordenamos son, digamos,

$$\begin{pmatrix} p_1^{a_1} & \cdots & p_{j_1}^{b_{j_1}} & \cdots & p_{j_q}^{b_{j_q}} & \cdots & p_s^{a_s} \\ p_1^{b_1} & \cdots & p_{j_1}^{a_{j_1}} & \cdots & p_{j_q}^{a_{j_q}} & \cdots & p_s^{b_s} \end{pmatrix}$$

siendo aquí $a_j, b_j \geqslant 0$ enteros con $a_j \leqslant b_j$ para $j = 1, \ldots, s$, de forma que las columnas desordenadas son $j_1, \ldots, j_q$ (hemos supuesto que estas columnas son consecutivas, pero vale para columnas no consecutivas, lo hacemos así para simplificar la notación). Sean

$$\begin{aligned} m_1 &= p_1^{a_1} \cdots p_{j_1}^{b_{j_1}} \cdots p_{j_q}^{b_{j_q}} \cdots p_s^{a_s} \qquad & m_1' &= p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} \\ m_2 &= p_1^{b_1} \cdots p_{j_1}^{a_{j_1}} \cdots p_{j_q}^{a_{j_q}} \cdots p_s^{b_s} \qquad & m_2' &= p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s} \end{aligned}$$

Entonces, $m_1 m_2 = m_1' m_2' > 0$, luego $m_1'/m_1 = m_2/m_2'$ y

$$\frac{m_1 + m_2 - (m_1' + m_2')}{m_2'} = \left(\frac{m_1}{m_2'} - 1\right)\left(1 - \frac{m_1'}{m_1}\right)$$

Como $m_1' \leqslant m_1 \leqslant m_2'$, tenemos que $m_1 + m_2 - (m_1' + m_2') \leqslant 0$. Por otra parte, como $m_1 m_2 = m_1' m_2' > 0$, tenemos la identidad

$$\frac{m_1 + m_2 - (m_1' + m_2')}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'}\right),$$

por lo cual es

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leqslant \frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \quad \Longrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{m_1'}\right) + \left(1 - \frac{1}{m_2'}\right) \tag{2.5}$$

Así, en cada intercambio de filas resulta un término $\sum_{i=1}^{r}(1 - 1/m_i')$ menor. En definitiva, con los sucesivos intercambios de filas obtenemos $\widehat{\mathcal{M}}$, lo que permite concluir el enunciado del teorema. ■

Observación 2.6.2. En la demostración, el argumento en el intercambio de las dos filas se mantiene sin cambios si dejamos sin ordenar los elementos de alguna de las columnas, siempre que quede $m_1 \leqslant m_2'$, lo cual está garantizado si $m_1 \leqslant m_2$ ya que $m_2 \leqslant m_2'$ en cualquier caso. La desigualdad en (2.5) sigue cumpliéndose. ■

3 Grupos de automorfismos cíclicos finitos

Abordamos ya la primera familia de grupos finitos para los que se establecieron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un epimorfismo con núcleo de superficie de un grupo Fuchsiano sobre un grupo finito. Esto, como vimos en §2.3 y §2.4, es equivalente a la existencia de determinada superficie.

El estudio en general de tal cuestión es muy complejo, y son pocas las familias para las que ha sido establecido. El primer caso, que inició el camino para el estudio de otras familias, es el de los grupos cíclicos finitos. Cabe señalar cómo un resultado aritmético conocido hace más de 1500 años, el teorema chino del resto, resulta ser una de las piezas clave en la demostración.

Veremos, asimismo, cómo las condiciones de existencia de epimorfismos con núcleo de superficie facilitan el tratamiento del problema de género mínimo.

No hemos incluido hasta este momento ninguna demostración, salvo al final del capítulo anterior, por tratarse de un discurso general para presentar conceptos básicos e históricamente muy importantes en el tema que nos ocupa, y porque su desarrollo requeriría muchas más páginas. A partir de aquí, pretendemos reconstruir en detalle y argumentar de forma adecuada los resultados, por lo que desarrollaremos las demostraciones en cierto detalle.

3.1 Condiciones de existencia de epimorfismos suaves. Como se comentó en la introducción, Harvey, en su artículo [Harvey, 1966], consiguió establecer condiciones para la existencia de epimorfismos suaves sobre un grupo cíclico dado, y lo hizo de forma explícita sobre la signatura del grupo Fuchsiano y el invariante que caracteriza la estructura del grupo cíclico, su orden.

La demostración se apoya fundamentalmente en algunos aspectos básicos sobre homomorfismos y sobre la estructura del grupo cíclico, en la fórmula de Riemann-Hurwitz, en el teorema 2.4.1, y en el teorema chino del resto, según su enunciado en forma de isomorfismo de un grupo cíclico con el producto directo de grupos cíclicos con órdenes los factores primos en la factorización del orden del primer grupo.

El enunciado es el siguiente:

Teorema 3.1.1. *Sean Γ un grupo Fuchsiano con signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, C_N un grupo cíclico de orden N finito y $M = \operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r)$. Existe un epimorfismo suave $\phi : \Gamma \to C_N$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_r) = M$ *para todo* i.
(ii) $M|N$*; si* $\gamma = 0$, $M = N$.
(iii) $r \neq 1$*; si* $\gamma = 0$, $r \geqslant 3$.
(iv) *Si M es par, entonces es par el número de períodos m_i divisibles por la máxima potencia de 2 que divide a M.*

Demostración. (Necesidad) Sea $\phi : \Gamma \to C_N$ el epimorfismo con núcleo de superficie.

(i) C_N es abeliano y, por la relación $x_1 \cdots x_r \prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]$ de la presentación de Γ, se cumple $\prod_{i=1}^{r} \phi(x_i) = 1$, luego $\prod_{i \neq j} \phi(x_i) = \phi(x_j)^{-1}$. Como ϕ tiene núcleo de superficie, $|\phi(x_i)| = m_i$ por el teorema 2.4.1. Entonces, definiendo $M_j = \operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_r)$, se tiene $\phi(x_i)^{M_j} = 1$, y $1 = \prod_{i \neq j} \phi(x_i)^{M_j} = \phi(x_j)^{-M_j}$, por lo que $|\phi(x_j)| = m_j$ tiene que dividir a M_j. Por la definición de M_j, es claro que $m_i|M_j$ también si $i \neq j$, y $M_j \leqslant M$, por lo que tiene que ser $M_j = M$, por definición de mínimo común múltiplo de M.

(ii) Sea B el subgrupo de C_N generado por los elementos $\{\phi(x_i) \mid i = 1, \dots, r\}$. Entoces, $\exp B \mid \exp C_N$. Cualquier elemento $x \in B$ cumple

$$x^M = (\phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_r)^{\alpha_r})^M = \phi(x_1)^{M\alpha_1} \cdots \phi(x_r)^{M\alpha_r} = 1$$

luego $\exp B \mid M$. Pero, si $M = p_1^{\mu_1} \cdots p_s^{\mu_s}$, para cualquier p_j, con $j \in \{1, \dots, s\}$, hay un $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\phi(x_i)^{M/p_j} \neq 1$, pues M es el mínimo común múltiplo de $\{m_1, \dots, m_r\}$, por lo que tiene que ser $\exp B = M$, luego $M \mid \exp C_N$. Si $\gamma = 0$, no existen generadores hiperbólicos en Γ y, por ser ϕ sobreyectivo, C_N tiene que estar generado por $\{\phi(x_i) \mid i = 1, \dots, r\}$, luego $\exp C_N = \exp B = M$.

Finalmente, en todo grupo cíclico $\exp C_N = |C_N|$, esto es, $N = \exp C_N$, y se concluye el enunciado.

(iii) Por la relación $x_1 \cdots x_r \prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]$ de la presentación de Γ, se cumple $\prod_{i=1}^{r} \phi(x_i) = 1$. Si fuese $r = 1$ se tendría $\phi(x_1) = 1$, luego $|\phi(x_1)| = 1$, lo cual no puede ocurrir, pues tiene que ser $|\phi(x_1)| = m_1 \neq 1$ (por ser ϕ epimorfismo con núcleo de superficie, tiene que conservar los órdenes de los generadores elípticos x_i).

Si $\gamma = 0$ y $r = 2$, entonces

$$(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} (1 - 1/m_i) \;=\; -\frac{1}{2}(1/m_1 + 1/m_2) \;<\; 0$$

El área de una región fundamental sería negativa en tal caso, lo cual impide que Γ sea Fuchsiano.

(iv) Definimos el homomorfismo $\phi' : \Gamma \to C_N$ mediante $\phi'(x_i) = \phi(x_i)$ y $\phi'(a_i) = \phi'(b_i) = 1$. La imagen $\phi'(\Gamma)$ es un subgrupo C_M de C_N de orden M, ya que $\phi'(x)^M = 1$

para todo $x \in \Gamma$ y, si existiera $M' < M$ con esa misma propiedad, M' sería múltiplo común de los m_i, lo cual contradiría al hecho de que M es su mínimo común múltiplo.

Sea el grupo Fuchsiano Γ' con signatura $(0; m_1, \dots, m_r)$, que resulta de eliminar los generadores hiperbólicos de Γ. Entonces, podemos considerar a ϕ' como un epimorfismo $\phi' : \Gamma' \to C_M$. Como $\phi'(x_i) = \phi(x_i)$, $|\phi'(x_i)| = |\phi(x_i)| = |x_i|$ y $\phi' : \Gamma' \to C_M$ es epimorfismo con núcleo de superficie. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, debe cumplirse

$$g - 1 = -M + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(M - M/m_i)$$

Sea $M = 2^k t$, con $k \geqslant 1$ y t impar. Si $2^k | m_i$, esto es, $m_i = 2^k l$ con l impar que divide a t, entonces $M - M/m_i$ es impar. Si es $2^k \not| m_i$, entonces $M - M/m_i$ es par. Así, el término $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(M - M/m_i)$ es entero si hay un número par elementos x_i con $2^k | m_i$, y es racional no entero si dicho número es impar. Como $g - 1$ es un entero, tiene que haber un número par elementos x_i con $2^k | m_i$.

(Suficiencia) La demostración se realiza construyendo un epimorfismo suave $\phi : \Gamma \to C_N$. Siendo la factorización en primos distintos $M = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdots p_s^{\mu_s}$, del isomorfismo

$$C_M \approx C_{p_1^{\mu_1}} \times \cdots \times C_{p_s^{\mu_s}}, \tag{3.1}$$

dado por el teorema chino del resto obtendremos un epimorfismo $\phi : \Gamma \to C_N$ que mantiene los órdenes de los generadores elípticos x_i de Γ, es decir, $|\phi(x_i)| = |x_i| = m_i$. Por el teorema 2.4.1, se tratará, entonces, de un epimorfismo suave.

Empezamos observando que, dada la factorización de $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, la condición (ii) implica

$$M = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdots p_s^{\mu_s}, \quad \text{con } 0 \leqslant \mu_j \leqslant \alpha_j, \ \ j \in \{1, \dots, s\}.$$

También se ha de cumplir que

$$m_i = p_1^{\mu_{i1}} \cdot p_2^{\mu_{i2}} \cdots p_s^{\mu_{is}}, \quad \text{con } 0 \leqslant \mu_{ij} \leqslant \mu_j, \ \ i \in \{1, \dots, r\}, \ \ j \in \{1, \dots, s\},$$

con lo que $\mu_j = \max(\mu_{1j}, \dots, \mu_{rj})$, de modo que $p_j^{\mu_j} = \mathrm{mcm}(p_j^{\mu_{1j}} \cdots p_j^{\mu_{rj}})$. Para un j fijado, tendremos que $\mu_{ij} = \mu_j$ para cierta cantidad t_j de exponentes μ_{ij}. Obviamente, $t_j > 0$. Además, la condición (i) del teorema implica que cada potencia $p_j^{\mu_j}$ debe aparecer en, al menos, dos períodos m_i distintos, por lo que tiene que ser $t_j \geqslant 2 \ \forall j \in \{1, \dots, s\}$.

Consideremos los grupos cíclicos $C_j = \langle a_j \rangle$ de orden $p_j^{\mu_j}$. Fijado un valor de j, supongamos, para simplificar la notación, que los t_j casos para los que $\mu_{ij} = \mu_j$ son para $i = r - t_j + 1, \dots, r$. Definimos, entonces, $\xi_{ij} = a^{p_j^{\mu_j - \mu_{ij}}}$ para $i = 1, \dots, r-2$. Sus órdenes son $|\xi_{ij}| = p_j^{\mu_{ij}}$. Los $t_j - 2$ casos para los que $\mu_{ij} = \mu_j$ son de la forma $\xi_{ij} = a_j$ y su orden es $p_j^{\mu_j}$.

Para $i = r-1, r$, definimos $\xi_{r-1,j} = a^{\epsilon_{1j}}$ y $\xi_{rj} = a^{\epsilon_{2j}}$, siendo $\epsilon_{1j}, \epsilon_{2j}$ ciertos números enteros, que establecemos a continuación, a los que imponemos que cumplan

$$\operatorname{mcd}(p_j^{\mu_j}, \epsilon_{1j}) = 1, \quad \operatorname{mcd}(p_j^{\mu_j}, \epsilon_{2j}) = 1 \tag{3.2}$$

Esto garantiza que $|\xi_{r-1,j}| = |\xi_{rj}| = p_j^{\mu_j}$.

Los valores $\epsilon_{1j}, \epsilon_{2j}$ quedan determinados si requerimos que se cumpla

$$\xi_{1j} \cdot \xi_{2j} \cdots \xi_{r-1,j} \cdot \xi_{rj} = 1 \tag{3.3}$$

Entonces,

$$\xi_{r-1,j} \cdot \xi_{rj} = a_j^{-\sum_{i=1}^{r-2} p_j^{\mu_j - \mu_{ij}}} = a_j^{-\sum_{i=1}^{r-t_j} p_j^{\mu_j - \mu_{ij}} - t_j + 2} = a_j^{-t_j + 2 - Rp_j},$$

donde $R = (1/p_j) \cdot \sum_{i=1}^{r-t_j} p_j^{\mu_j - \mu_{ij}} \in \mathbb{Z}$ (observar que $\mu_{ij} < \mu_j$ para $i = 1, \dots, r-t_j$, por lo que tenemos, al menos, un factor común p_j en el sumatorio).

Así, podemos tomar

$$\xi_{r-1,j} = a_j, \quad \xi_{rj} = a_j^{1-t_j-Rp_j},$$

esto es, $\epsilon_{1j} = 1$ y $\epsilon_{2j} = 1 - t_j - Rp_j$, siempre que $t_j \not\equiv 1 \pmod{p_j}$, pues entonces

$$1 - t_j \not\equiv 0 \pmod{p_j} \;\Rightarrow\; 1 - t_j - Rp_j \not\equiv 0 \pmod{p_j} \;\Rightarrow\; p_j \nmid 1 - t - Rp_j$$
$$\Rightarrow\; \operatorname{mcd}(p_j^{\mu_j}, 1 - t_j - Rp_j) = 1$$

(para el último paso, recordar que p_j es primo), luego se verifica (3.2) y $|\xi_{r-1,j}| = |\xi_{rj}| = p_j^{\mu_j}$.

Si $t_j \equiv 1 \pmod{p_j}$ entonces $p_j \mid 1 - t - Rp_j$ y el valor ϵ_{2j} anterior implica que ξ_{rj} tenga orden menor que $p_j^{\mu_j}$. En este caso tomamos $\epsilon_{1j} = -1$, $\epsilon_{2j} = 2 - Rp_j$, con lo cual se verifica (3.2), salvo si $p_j = 2$.

Pero, esta última situación, $p_j = 2$ y t_j impar ($t_j \equiv 1 \pmod{2}$), no puede tener lugar, ya que la condición (iv) del teorema indica que t_j tiene que ser par si $p_j = 2$.

En definitiva, hemos obtenido elementos $\xi_{ij} \in C_j$ cuyos órdenes son $|\xi_{ij}| = p_j^{\mu_{ij}}$. Fijado un $j \in \{1, \dots, s\}$, $\langle \xi_{1j}, \dots, \xi_{rj} \rangle = C_j$.

Si fijamos un valor $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces $\xi_{i1} \in C_1, \dots, \xi_{ir} \in C_r$, esto es, tenemos un elemento $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ir})$ de $C_1 \times \cdots \times C_r$. El orden de $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ir})$ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de sus componentes, $|(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ir})| = p_1^{i1} \cdots p_r^{ir} = m_i$. Luego, por el isomorfismo $C_M \approx C_1 \times \cdots \times C_r$ existe un único elemento $\xi_i \in C_M$ correspondiente a dicho elemento $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ir})$, y el orden de ξ_i es m_i.

Así, $\langle \xi_1, \dots, \xi_r \rangle = C_M$ es subgrupo de C_N. Además,

$$\xi_1 \cdots \xi_r = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1r}) \cdots (\xi_{r1}, \dots, \xi_{rr}) = (\xi_{11} \cdots \xi_{r1}, \dots, \xi_{1r} \cdots \xi_{rr}) = (1, \dots, 1).$$

Luego ϕ mantiene los órdenes de los elementos elípticos de Γ, y también la otra relación de la presentación de Γ, $\phi(x_1)\cdots\phi(x_r)=1$, si es definido como sigue: $\phi(x_i)=\xi_i$ y, para los elementos hiperbólicos $a_j, b_j \in \Gamma$, $j=1,\dots,\gamma$, hacemos que $\phi(a_j), \phi(b_j)$ sean un elemento de orden N de C_N. Esto último garantiza que ϕ sea sobreyectivo si $\gamma>0$. Si $\gamma=0$, entonces $M=N$ por la condición (ii) del enunciado, por lo que $C_N=C_M=\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle$ y ϕ también será sobreyectivo.

Como hemos visto, ϕ es un epimorfismo que mantiene los órdenes de los elementos elípticos de Γ. Por tanto, como se comentó al inicio, es epimorfismo con núcleo de superficie. ■

3.2 Problema del género mínimo.

Como consecuencia del teorema 3.1.1 y de la fórmula de Riemann-Hurwitz (2.4) se obtiene la solución al problema del género mínimo para grupos de automorfismos cíclicos finitos. Dicha solución fue propuesta inicialmente en [Harvey, 1966]. Aquí recogemos su enunciado y detallamos la demostración como corolario del teorema 3.1.1 introducido asimismo en dicho artículo.

Corolario 3.2.1. *El género mínimo $g^*\geqslant 2$ de una superficie de Riemann compacta que admite un grupo de automorfismos cíclico de orden N es*

$$g^*=\begin{cases} 2 & \text{si } N=2,3,4,6 \qquad (A)\\ \dfrac{1}{2}(p_1-1)\dfrac{N}{p_1} & \text{si } \alpha_1>1 \text{ y } N\neq 4, \text{ o si } N>3 \text{ es primo}, \qquad (B)\\ \dfrac{1}{2}(p_1-1)\left(\dfrac{N}{p_1}-1\right) & \text{si } \alpha_1=1 \text{ y } N\neq 6 \text{ no es primo}, \qquad (C)\end{cases}$$

siendo $N=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ la descomposición de N en factores primos, con $p_i<p_{i+1}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de grupos Fuchsianos Γ para los que existe algún epimorfismo $\phi:\Gamma\to C_N$ con núcleo de supeficie. Como hemos visto, dichos grupos Fuchsianos están caracterizados por las condiciones del teorema 3.1.1.

El mínimo del género g^* indicado en el enunciado se alcanza mediante las signaturas de la tabla 3.1, dependiendo de la descomposición en factores primos de N.

Todas estas signaturas definen grupos Fuchsianos que verifican las condiciones del teorema 3.1.1 y, por tanto, existen epimorfismos suaves $\Gamma\to C_N$. En los casos (A), cualquier otra signatura que defina un grupo Fuchsiano da lugar a $g\geqslant g^*=2$, ya que, por el teorema 2.1.1 de Poincaré, la signatura define un grupo Fuchsiano si y sólo si $\mu(\Gamma)>0$, lo cual es equivalente a que sea $g\geqslant 2$. Tenemos que comprobar, entonces, que el valor de g que proporciona la fórmula de Riemann-Hurwitz para el resto de grupos Fuchsianos $\Gamma\in\mathcal{F}$ es mayor o igual que las g^* indicadas en los casos (B) y (C). La expresión de g^* desarrollada en estos casos es

$$(B)\ \ g_B^*=\frac{1}{2}\left(N-\frac{N}{p_1}\right)\qquad (C)\ \ g_C^*=\frac{1}{2}\left(1+N-\frac{N}{p_1}-p_1\right)$$

TABLA 3.1: Signaturas para el género mínimo.

(A)

$N = 2$	$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
$N = 3$	$(0; 3, 3, 3, 3)$
$N = 4$	$(0; 2, 2, 4, 4)$
$N = 6$	$(0; 3, 6, 6)$

(B)

$N > 3$ primo	$(0; p_1, p_1, p_1)$
$\alpha_1 > 1$ y $N \neq 4$	$(0; p_1, N, N)$

(C)

$\alpha_1 = 1$ y $N \neq 6$ no primo	$(0; p_1, \frac{N}{p_1}, N)$

Desde ahora utilizamos genéricamente g^* para referirnos a estas dos expresiones para (B) y (C) si no se indica de forma explícita uno de los dos casos. No obstante, observamos que $g_C^* < g_B^*$, ya que $p_1 > 1$.

Cuando $\gamma > 1$, la fórmula de Riemann-Hurwitz para la signatura $(\gamma; —)$ da el valor $g = 1 + N(\gamma - 1)$, con $\gamma - 1 \geqslant 1$, luego siempre es $g \geqslant 1 + N > 1 + N - N/p_1 > g_B^* \geqslant g^*$. Si la signatura tiene períodos $m_i > 1$ entonces el valor de g es aún mayor, pues añaden sumandos $N(1 - 1/m_i)/2 > 0$ en la expresión de g. Así pues, desestimamos los casos con $\gamma > 1$.

Para la signatura $(1; —)$ resulta $g = 1$, luego no define un grupo Fuchsiano. Una signatura con $\gamma = 1$ puede tener dos o más períodos elípticos $m_i > 1$. Supongamos que tiene dos, $(1; m_1, m_2)$; entonces, la condición 3.1.1.(i) obliga a que sea $m_1 = m_2 = M$. El menor valor para g lo proporciona el menor valor $m_1 = m_2 > 1$ posible; dicho valor es $m_1 = m_2 = p_1$, por 3.1.1.(ii). Entonces, $g = 1 + N - N/p_1 > g_B^*$, luego $g > g^*$ en cualquier caso. Para un número de períodos mayor, $r > 2$, la signatura compatible con las condiciones del teorema 3.1.1 más favorable a un menor valor de g es $(1; p_1, p_1, \dots, p_1)$, luego $g = 1 + (N - N/p_1)r/2 > g_B^*$ y también es $g > g^*$.

Nos falta estudiar qué ocurre si $\gamma = 0$. Sea, pues, un grupo Fuchsiano $\Gamma \in \mathcal{F}$ con signatura $(0; m_1, \dots, m_r)$, $r \geqslant 3$. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$g = 1 - N + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

A partir de dicha signatura construimos la signatura $(0; \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_{\hat{r}})$ de forma que sea exactamente igual el conjunto de potencias de primos (pueden estar repetidas) que aparecen en las factorizaciones de los períodos respectivos. Entonces, tiene $\hat{r} \leqslant r$ períodos $\hat{m}_i > 1$. En cualquier caso se tiene $\hat{m}_{r-1} = \hat{m}_r = M = N$ por 3.1.1.(i) y (ii), luego $\hat{r} \geqslant 2$. En esa situación, vimos en §2.6 que, por el lema 2.6.1,

$$\sum_{i=1}^{\hat{r}} \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

Aunque la signatura $(0; \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_{\hat{r}})$ pudiera no dar lugar a un grupo Fuchsiano, definamos

$$\hat{g} = 1 - N + \sum_{i=1}^{\hat{r}} \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right)$$

Así, $\hat{g} \leqslant g$. Si $\hat{r} = 3$, el menor valor de $\hat{g}$ se alcanza cuando $\hat{m}_1 = p_1, \hat{m}_2 = \hat{m}_3 = N$, y entonces resulta $\hat{g} = g_B^*$. Si $\hat{r} > 3$ siempre se obtienen valores mayores para $\hat{g}$, pues los términos $1 - 1/\hat{m}_i$ son mayores que cero. Por tanto, $g \geqslant \hat{g} = g_B^*$ si $\hat{r} \geqslant 3$.

Pero puede ser $\hat{r} = 2$. Esto sólo puede ocurrir si $r \leqslant s + 1$, pues si $r \geqslant s + 2$ entonces tiene que haber tres o más períodos $\hat{m}_i$ (por 3.1.1.(i) y (ii), cada potencia $p_j^{\alpha_j}$ de N aparece en dos o más períodos m_i y, si $r \geqslant s + 2$, algún primo p_j aparece en tres o más períodos m_i y $\hat{r} \geqslant 3$ entonces); observamos, entonces, que $\hat{r} \geqslant 3$ si $N = p_1$ es primo, pues $r \geqslant 3$ por ser $\gamma = 0$. Veamos que también $g \geqslant g^*$ si $\hat{r} = 2$. En este caso no podemos trabajar con $\hat{g}$, ya que es $\hat{g} = 1 - N + \frac{N}{2}(1 - 1/N + 1 - 1/N) = 0$.

Así, para $\hat{r} = 2$, consideremos $r = 3$ y $m_1 = p_1^{\alpha_1}$, $m_2 = p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $m_3 = p_1 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} = N$. En ese caso,

$$\begin{aligned} g &= 1 - N + \frac{3N}{2} - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{1}{p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}} + \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + N - \frac{N}{p_1^{\alpha_1}} - p_1^{\alpha_1}\right) \end{aligned}$$

Una vez que probemos que $g = g_B^*$ o bien $g = g_C^*$, si mantenemos el conjunto de potencias $p_j^{\alpha_j}$ y las distribuimos de forma diferente entre m_1, m_2, m_3, de forma que los tres sean > 1 y sigan cumpliendo las condiciones del teorema 3.1.1, entonces el valor de g resultante es mayor o igual (el argumento es el de la demostración del lema 2.6.1, teniendo en cuenta la observación 2.6.2). También resulta un valor g mayor o igual si añadimos más potencias de algún p_j a los períodos (entonces $\hat{r} \geqslant 3$, luego, como vimos, $g \geqslant g_B^*$) o si aumentamos el número r de períodos m_i (tanto si se mantiene $\hat{r} = 2$ como si llega a ser $\hat{r} \geqslant 3$).

Diferenciamos dos casos para $\hat{r} = 2$ (como $p_1 < p_2$ son primos, no puede ser $p_1^{\alpha_1} = p_2^{\alpha_2}$):

a) $\alpha_1 = 1$. Corresponde a casos de (C).

Como $\hat{r} = 2$, N no puede ser primo, como acabamos de indicar, luego es $\alpha_2 \geqslant 1$. En ese caso,

$$g = \frac{1}{2}\left(1 + N - \frac{N}{p_1} - p_1\right) = g_C^*$$

b) $\alpha_1 > 1$. Corresponde a casos de (B). Entonces:

$$\begin{aligned} g - g_B^* &= \frac{1}{2}\left(1 + N - \frac{N}{p_1^{\alpha_1}} - p_1^{\alpha_1} - N + \frac{N}{p_1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{p_1^{\alpha_1}} - p_1^{\alpha_1} + \frac{N}{p_1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} - p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} - p_1^{\alpha_1}\right) \end{aligned}$$

Aquí diferenciamos dos casos:

1) $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Como también es $p_1^{\alpha_1 - 1} - 1 \geqslant 1$, entonces

$$g - g_B^* = \frac{1}{2}\Big(1 + (p_1^{\alpha_1-1} - 1) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} - p_1^{\alpha_1}\Big) > 0$$

2) $p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} < p_1^{\alpha_1}$. Tenemos

$$\begin{aligned} g - g_B^* &= \frac{1}{2}\Big(1 + p_1^{\alpha_1-1}\left(p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} - p_1\right) - p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + p_1^{\alpha_1}\left(\frac{p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}}{p_1} - 1\right) - p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}\right) \end{aligned}$$

Así, $g - g_B^* > 0$ si $\frac{p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}}{p_1} \geqslant 2$, esto es, si $p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \geqslant 2p_1$. Esto siempre está garantizado si $\alpha_2 \geqslant 2$ o $s \geqslant 3$. Si no es éste el caso, entonces $N = p_1^{\alpha_1}$ o $N = p_1^{\alpha_1} p_2$. Si $N = p_1^{\alpha_1}$, entonces $\hat{r} \geqslant 3$ y, como vimos, $g \geqslant g_B^*$.

Sea, entonces, $N = p_1^{\alpha_1} p_2$ con $\alpha_1 > 1$, $p_2 < p_1^{\alpha_1}$ y

$$g - g_B^* = \frac{1}{2}\Big(1 + p_1^{\alpha_1-1} p_2 - p_1^{\alpha_1} - p_2\Big)$$

Si $p_2 < p_1^{\alpha_1-1}$, como también es $p_2 - p_1 \geqslant 1$,

$$g - g_B^* = \frac{1}{2}\Big(1 + p_1^{\alpha_1-1}(p_2 - 1) - p_2\Big) > \frac{1}{2}\left(1 + p_2(p_2 - 1) - p_2\right) > 0.$$

Si $p_1^{\alpha_1-1} < p_2 < p_1^{\alpha_1}$, entonces $\frac{1}{p_1^{\alpha_1-1}} > \frac{1}{p_2}$ y

$$\frac{p_1^{\alpha_1-1} - 1}{p_1^{\alpha_1-1}} > \frac{p_1^{\alpha_1-1} - 1}{p_2} > \frac{p_1}{p_2}$$

si $\alpha_1 > 2$. Si $\alpha_1 = 2$ y $p_1 \neq 2$, entonces $g - g_B^* = \frac{1}{2}(1 + p_1 p_2 - p_1^2 - p_2) > 0$, pues

$$\begin{aligned} p_2 > p_1 + 1 &\Rightarrow (p_1 - 1)p_2 > (p_1 - 1)(p_1 + 1) = p_1^2 - 1 \\ &\Rightarrow 1 + (p_1 - 1)p_2 > p_1^2 \Rightarrow 1 + p_1 p_2 - p_1^2 - p_2 > 0 \end{aligned}$$

Finalmente, si $p_1 = 2$, esto es, $N = 2^2 \cdot 3 = 12$, entonces

$$g - g_B^* = \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot 3 - 2^2 - 3) = 0.$$

■

Observación. Según hemos indicado en la demostración, para $N \geqslant 5$ el género mínimo g^* se alcanza para grupos triangulares $\Delta(3,6,6)$, $\Delta(p_1, p_1, p_1)$, $\Delta(p_1, N, N)$ o $\Delta(p_1, N/p_1, N)$. ■

4 Grupos de automorfismos abelianos finitos

El teorema de estructura de grupos abelianos finitos permite expresar cualquiera de tales grupos como suma directa de grupos cíclicos finitos. Es natural, por tanto, preguntarse por la extensión a grupos abelianos de los resultados del capítulo anterior para grupos cíclicos. Así, el problema del género mínimo fue resuelto en [Maclachlan, 1965].

El teorema de condiciones de existencia de epimorfismos suaves sobre grupos abelianos finitos fue establecido en [Breuer, 2000, th. 9.1, pág. 29]. Dicho enunciado tiene la particularidad de que, a diferencia del de grupos cíclicos, no todas las condiciones quedan expresadas de forma explícita sobre la signatura del grupo Fuchsiano y los invariantes de la estructura del grupo abeliano, ya que una de las condiciones que se postulan requiere la existencia de un epimorfismo, y entonces el resto de condiciones garantizan la existencia de un epimorfismo con núcleo de superficie.

En este trabajo presentamos en §4.6 una variante del teorema con condiciones expresadas de forma explícita únicamente sobre la signatura y los invariantes del grupo abeliano. Además, este nuevo enunciado permite resolver el problema del género mínimo de forma independiente a la utilizada por Maclachlan. Indicamos tal demostración en §4.7.

La base teórica necesaria para desarrollar estos resultados es más amplia que para el caso de grupos cíclicos. Comenzamos el capítulo, por tanto, con una descripción del teorema de estructura de grupos abelianos finitos basada en la llamada *forma normal de Smith*. A continuación, se demuestran condiciones necesarias y suficientes para la existencia de epimorfismos entre grupos abelianos finitamente generados (indicadas en [Breuer, 2000, pág. 176]). La abelianización de un grupo Fuchsiano [Breuer, 2000, pág. 177], que desarrollamos en §4.3 y para la que también es importante la forma normal de Smith, nos permitirá factorizar epimorfismos sobre un grupo abeliano. Con esto ya podremos demostrar el teorema de existencia de epimorfismos suaves. Veremos entonces que necesitaremos descomponer un epimorfismo sobre el grupo abeliano en epimorfismos sobre cada uno de sus subgrupos de Sylow. Por supuesto, el caso abeliano incluye como corolario el resultado de Harvey para cíclicos.

Finalmente, demostramos el nuevo enunciado de condiciones para epimorfismos suaves y la solución al problema del género mínimo que éste proporciona.

4.1 Forma normal de Smith. Diagonalización de matrices enteras. En esta sección estudiamos la simplificación de una matriz $m \times n$ con entradas enteras, $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, mediante transformaciones elementales. Este procedimiento se aplica para clasificar los grupos abelianos finitamente generados. El desarrollo se presenta generalizado a un dominio de ideales principales (DIP). Más adelante, en §4.3, utilizaremos estos resultados para obtener la estructura de la abelianización de un grupo Fuchsiano.

Consideramos un dominio de ideales principales R y el conjunto $M_{m\times n}(R)$ de matrices $m \times n$ sobre R. Escribiremos $M_n(R)$ en vez de $M_{n\times n}(R)$.

Decimos que dos matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m\times n}(R)$ son *equivalentes* si existen matrices invertibles $\mathbf{P} \in M_m(R)$, $\mathbf{Q} \in M_n(R)$ tales que $\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}$. Este concepto generaliza el de matrices $n \times n$ semejantes. Se trata de una relación de equivalencia, por lo que $M_{m\times n}(R)$ queda dividido en clases de equivalencia. Nuestro propósito es escoger en cada clase de equivalencia un representante con una forma simplificada particular.

En el anillo $M_n(R)$ introducimos las llamadas *matrices elementales*:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{T}_{ij}(\alpha) & = & \mathbf{E} + \alpha\mathbf{e}_{ij} \\ \mathbf{D}_i(\gamma) & = & \mathbf{E} - \mathbf{e}_{ii} + \gamma\mathbf{e}_{ii} \\ \mathbf{P}_{ij} & = & \mathbf{E} - \mathbf{e}_{ii} - \mathbf{e}_{jj} + \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{e}_{ji} \end{array}$$

donde $i \neq j$, $\mathbf{e}_{ij}$ son las (matrices) unidades del anillo $M_n(R)$, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_{11} + \cdots + \mathbf{e}_{nn}$, $\alpha \in R$ y γ es una unidad de R. Estas matrices elementales son todas invertibles.

De la multiplicación por la izquierda de una matriz $\mathbf{A}$ por las matrices elementales $\mathbf{T}_{ij}(\alpha), \mathbf{D}_i(\gamma), \mathbf{P}_{ij}$ de $M_m(R)$ resultan, respectivamente, las siguientes transformaciones elementales en las filas de $\mathbf{A}$:

1. Multiplicar la fila j por α y añadir el resultado a la fila i.
2. Multiplicar la fila i por $\gamma \in R^*$.
3. Intercambiar las filas i, j.

La multiplicación por la derecha por matrices elementales de $M_n(R)$ dan transformaciones elementales análogas en las columnas de $\mathbf{A}$.

La transformación de $\mathbf{A}$ mediante la aplicación sucesiva de un número finito de estas transformaciones elementales en las filas y columnas de $\mathbf{A}$ da lugar a una matriz equivalente a $\mathbf{A}$.

El siguiente teorema indica cómo es la forma más simple de las matrices dentro de una misma clase de equivalencia.

Teorema 4.1.1. *Toda matriz $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(R)$ con entradas en un dominio de ideales principales R es equivalente a una matriz diagonal $\boldsymbol{B} = diag(c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}, 0, \ldots, 0)$ con $k \leqslant \min\{m, n\}$, $c_{ii} \neq 0$ y $c_{11} \mid c_{22} \mid \ldots \mid c_{kk}$.* ■

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Hazewinkel et al., 2004, pág. 180]. La matriz diagonal **B** que garantiza el teorema se denomina *forma normal de Smith*. A los elementos no nulos $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{kk}$ se les llama *factores invariantes*. Se puede demostrar que los factores invariantes son únicos salvo multiplicación por unidades de R, y que dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen los mismos factores invariantes.

El teorema 4.1.1 comprende el teorema de estructura de R-módulos finitamente generados. De forma muy sucinta, un R-módulo M finitamente generado es isomorfo, $M \approx R^n/K$, al cociente de un módulo libre R^n por un submódulo $K \approx R^m, m \leqslant n$,[1] y se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

de forma que $M \approx R^n/\mathrm{Im}\ \varphi = R^n/\mathrm{Ker}\ \phi$. A tal isomorfismo se le llama *presentación* del módulo M, generalizando el concepto de presentación de un grupo. A un conjunto Y de generadores de Ker ϕ se le llama conjunto de *relaciones* de la presentación. Escogiendo una base en R^n, cada elemento de Y tendrá una expresión como combinación lineal con coeficientes en R. Dicho conjunto de coeficientes para los distintos elementos de Y conforma la llamada *matriz de relaciones* de la presentación.

Escogiendo bases en R^m y R^n, el homomorfismo φ equivale a cierta matriz $m \times n$ con entradas en R, que tiene su correspondiente matriz diagonal equivalente dada por su forma de Smith. De este argumento se sigue[2]

Teorema 4.1.2. *Todo R-módulo M finitamente generado sobre un dominio de ideales principales R es isomorfo a una suma directa de submódulos cíclicos:*

$$M \approx R/c_1R \oplus \cdots \oplus R/c_tR \oplus R^{n-t}$$

donde $t \leqslant n$ los c_i son elementos de R no unidades ni nulos tales que $c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_t$. ■

Al número entero $r = n - t$ se le denomina *rango libre* de M y a los elementos $c_1, \dots, c_t \in R$ (únicos salvo multiplicación por unidades de R) se les denomina *factores invariantes* de M.

Ahora, cada c_i factoriza de forma única en R como producto $p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ de potencias de primos en R, y, por el teorema chino del resto,[3] cada submódulo R/c_iR es isomorfo a una suma directa de submódulos de la forma $R/p_i^{n_i}R$:

$$R/c_iR \approx \bigoplus_{i=1}^{s} R/p_i^{n_i}R$$

Esta expresión no se puede descomponer más, es única salvo orden de los factores, e implica el siguiente

[1] Ver prop. 1.5.2, pág. 27, y lema 7.8.1, pág. 182, en [Hazewinkel et al., 2004].
[2] [Hazewinkel et al., 2004, th. 7.8.2, pág. 182].
[3] [Hazewinkel et al., 2004, th. 7.6.1, pág. 177].

Teorema 4.1.3. *Todo R-módulo M finitamente generado sobre un dominio de ideales principales R es isomorfo a una suma directa finita de módulos cíclicos*

$$M \approx R^r \oplus R/p_1^{n_1}R \oplus \cdots \oplus R/p_k^{n_k}R$$

donde $r \geqslant 0$ y los $p_i^{n_i}$ son potencias positivas de primos en R (no necesariamente distintos). ■

A las potencias $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k} \in R$ se les llama *divisores elementales* de M. Cuando M es finito ($r = 0$) a la expresión $R/p_1^{n_1}R \oplus \cdots \oplus R/p_k^{n_k}R$ de M dada por el teorema se denomina *descomposición primaria* de M.

Los grupos abelianos pueden ser considerados, de forma natural, como $\mathbb{Z}$-módulos. Los teoremas 4.1.2 y 4.1.3 anteriores son, entonces, los teoremas habituales de estructura de grupos abelianos finitamente generados.

4.2 Epimofismos entre grupos abelianos finitamente generados.

Una característica elemental de cualquier homomorfismo de grupos $\phi : G \to A$ es que, si $x \in G$ es de orden finito, entonces el orden de $\phi(x)$ necesariamente tiene que dividir al de x.[4] Partiendo de este hecho, en los lemas 4.2.2 y 4.2.3 establecemos condiciones necesarias y suficientes[5] sobre los divisores elementales de dos grupos abelianos finitamente generados para la existencia de un epimorfismo entre ellos. Haremos uso recurrente de estos lemas en las secciones siguientes. También mostramos una forma sencilla de representar en una gráficas dichas condiciones sobre los divisores elementales.

Señalamos en primer lugar algunas nociones sobre las que se basa el desarrollo. Un grupo abeliano es *elemental* si todo elemento no trivial tiene el mismo orden finito. Es fácil ver que, en tal caso, dicho orden tiene que ser primo, de modo que todo grupo abeliano elemental es un p-grupo para un p primo.

Siendo p primo, todo p-grupo abeliano elemental puede ser considerado como un espacio vectorial sobre el cuerpo finito de orden p, y es, por tanto, isomorfo a la suma directa de κ copias del grupo cíclico de orden p, para cierto cardinal κ. Recíprocamente, cualquier suma directa tal es un p-grupo abeliano elemental. Así, en particular, para cada cardinal finito o infinito κ existe un único (salvo isomorfismo) p-grupo abeliano elemental de orden κ. Al cardinal κ se le llama *rango* del p-grupo abeliano elemental. Nosotros trabajaremos con rango κ finito, de forma que un p-grupo abeliano elemental, con p primo, es isomorfo a un producto finito $\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$. Todo grupo abeliano finito de exponente p primo es p-grupo abeliano elemental.

Llamamos *p-componente primaria* de un grupo abeliano finito G, siendo p primo, al subgrupo

$$G_p = \{x \in G \mid p^n x = 0 \text{ para algún } n \geqslant 0\}.$$

[4][Bujalance et al., 2007, 2.4.10, pág. 79].

[5]Estos resultados aparecen en el apéndice A, pág. 176, de [Breuer, 2000]

Todo grupo abeliano finito es suma directa finita de p-componentes primarias:[6]

$$G \approx \bigoplus_{p \text{ primo}} G_p.$$

Para todo grupo abeliano finito G, su p-componente primaria es igual a su p-subgrupo de Sylow: $G_p \approx Syl_p(G)$.

Si G es abeliano y $m > 0$, definimos $mG = \{mx \,|\, x \in G\}$. mG es subgrupo de G: $a, b \in mG \Rightarrow a = mx, b = my \Rightarrow a - b = m(x - y) \in mG$.

Cuando $G \approx \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico de orden n, sabemos que sus subgrupos son cíclicos (para cualquier grupo G y cualquier homomorfismo ϕ, la imagen $\phi(G)$ está generada por las imágenes de los generadores g de G; en particular, un cociente de un grupo cíclico es cíclico) y que para cada divisor d de n existe un único subgrupo de G de orden n/d, siendo estos sus únicos subgrupos. Denotando $\overline{x} = x + n\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle$ y el subgrupo de orden d es $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \langle \frac{n}{d}\,\overline{1} \rangle \approx \frac{n}{d}\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si bien son elementales, los hechos siguientes sobre grupos cíclicos nos serán útiles en la demostración del lema (4.2.2):

Lema 4.2.1. *Sean p primo, $i, r \in \mathbb{N}$. Entonces:*

(a) $p^{i+r}(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}) \approx \{0\}$.

(b) $p^i(\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.

(c) $(\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.

Demostración. (a) Si $x \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, el orden de x divide a p^i, luego $p^{i+r}x = 0 + p^i\mathbb{Z}$.

(b) $p^i(\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z})$ es subgrupo de $\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z}$. Su orden es $p^{i+r}/p^i = p^r$, y, como es cíclico (por ser subgrupo de un grupo cíclico), tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z}$ de índice $|\mathbb{Z}/p^{i+r}\mathbb{Z}|/|\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}| = p^{i+r}/p^i = p^r$ (teorema de Lagrange), que es, por definición, el orden del grupo cociente. Éste, por tanto, es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.

■

Los dos lemas siguientes establecen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de epimorfismos entre dos grupos abelianos finitamente generados. El primero lo enuncia cuando ambos grupos tienen como subgrupos de torsión una única p-componente primaria, para cierto primo p (el mismo para ambos grupos), es decir, los subgrupos de torsión son sus p-subgrupos de Sylow. El segundo lema generaliza las condiciones para cualesquiera grupos abelianos finitamente generados.

[6] [Rotman, 1995, pág. 126, pág. 311], [Kurzweil and Stellmacher, 2004, th 2.1.6, pág. 46].

Lema 4.2.2. *Sean p primo, $G \approx \mathbb{Z}^R \oplus Syl_p(\mathcal{T}(G))$ y $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus Syl_p(\mathcal{T}(A))$, donde*

$$Syl_p(\mathcal{T}(G)) \approx \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})^{N_i} \qquad Syl_p(\mathcal{T}(A)) \approx \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})^{n_i}$$

son sus p-componentes primarias. Entonces, existe un epimorfismo $G \to A$ si y sólo si

$$R \geqslant r \quad y \quad R + \sum_{i=j}^{s} N_i \geqslant r + \sum_{i=j}^{s} n_i \quad para\ j = 1, \dots, s \tag{4.1}$$

Demostración. (Suficiencia) Tomemos los generadores de ambos grupos ordenados de mayor a menor orden, empezando por los de orden infinito. Las condiciones (4.1) de forma explícita son:

$$\begin{gathered} R \geqslant r \\ R + N_s \geqslant r + n_s \\ R + N_s + N_{s-1} \geqslant r + n_s + n_{s-1} \\ \vdots \\ R + N_s + N_{s-1} + \cdots + N_1 \geqslant r + n_s + n_{s-1} + \cdots + n_1 \end{gathered}$$

Si se cumplen, como $R \geqslant r$, podemos aplicar los primeros r generadores de orden infinito de G sobre los r generadores de orden infinito de A. Como $R - r + N_s \geqslant n_s$, los siguientes n_s generadores de G los aplicamos sobre los n_s generadores de orden p^s de A, y así sucesivamente (observamos que estas asignaciones cumplen el requisito de todo homomorfismo ϕ de que, si x es de orden finito, $|\phi(x)|$ tiene que dividir a $|x|$). A los generadores de G restantes les hacemos corresponder el elemento neutro de A (existen otras asignaciones posibles para estos generadores de G restantes).

(Necesidad) Recíprocamente, definamos $p^iG = \{p^ig | g \in G\}$ para cualquier grupo abeliano G. Como vimos antes en esta sección, p^iG es subgrupo. Además, $p^{i+1}G \leqslant p^iG$: si $x \in p^{i+1}G \Rightarrow x = p^{i+1}g \Rightarrow x = p(p^ig) \in p^iG$. Como G es abeliano, p^iG y $p^{i+1}G$ son subgrupos normales, y $p^{i+1}G$ es subgrupo normal de p^iG (todo subgrupo de un grupo abeliano es normal) y el cociente $p^iG/p^{i+1}G$ es un grupo.

Para cualquier homomorfismo ϕ con dominio G, $\phi(p^ix) = p^i\phi(x) \ \ \forall x \in G$, luego $\phi(p^iG) = p^i\phi(G)$.

Ahora, sean G, A y el epimorfismo $\phi : G \to A$ como en el enunciado. ϕ induce el siguiente homomorfismo:

$$\overline{\phi} \ : \ p^iG/p^{i+1}G \ \to \ p^iA/p^{i+1}A \ : \ \overline{x} = p^ix + p^{i+1}G \ \mapsto \ \overline{\phi}(\overline{x}) = p^i\phi(x) + p^{i+1}A$$

Como ϕ es sobreyectivo, $\phi(G) = A$, tenemos que $\phi(p^iG) = p^i\phi(G) = p^iA$, y para todo $y \in p^iA$ existe un $x \in p^iG$ tal que $\phi(x) = y$, luego para todo $\overline{y} = y + p^{i+1}A \in p^iA/p^{i+1}A$ existe $\overline{x} = x + p^{i+1}G \in p^iG/p^{i+1}G$ tal que $\overline{y} = \overline{\phi}(\overline{x})$, es decir, $\overline{\phi}$ también es sobreyectivo.

Por otra parte, $p^iG/p^{i+1}G$ y $p^iA/p^{i+1}A$ son p-grupos abelianos elementales:

$$\overline{x} \in p^iG/p^{i+1}G \Rightarrow \exists x \in G \text{ t.q. } \overline{x} = p^ix + p^{i+1}G \Rightarrow p\overline{x} = p^{i+1}x + p^{i+1}G = p^{i+1}G = \overline{0}$$

Análogamente para $p^iA/p^{i+1}A$. Luego $p^iG/p^{i+1}G \approx (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$ y $p^iA/p^{i+1}A \approx (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{N}$. Esto también se puede ver utilizando el lema 4.2.1 y las expresiones explícitas

$$\begin{aligned} p^iG \approx (p^i\mathbb{Z})^R &\oplus p^i\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \oplus \overset{N_{i+1}}{\cdots} \oplus p^i\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \\ &\oplus p^i\mathbb{Z}/p^{i+2}\mathbb{Z} \oplus \overset{N_{i+2}}{\cdots} \oplus p^i\mathbb{Z}/p^{i+2}\mathbb{Z} \\ &\cdots \\ &\oplus p^i\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \oplus \overset{N_s}{\cdots} \oplus p^i\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{i+1}G \approx (p^{i+1}\mathbb{Z})^R &\oplus p^{i+1}\mathbb{Z}/p^{i+2}\mathbb{Z} \oplus \overset{N_{i+2}}{\cdots} \oplus p^{i+1}\mathbb{Z}/p^{i+2}\mathbb{Z} \\ &\cdots \\ &\oplus p^{i+1}\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \oplus \overset{N_s}{\cdots} \oplus p^{i+1}\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aplicando el lema 4.2.1,

$$\begin{aligned} p^iG/p^{i+1}G \approx (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^R &\oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \overset{N_{i+1}}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ &\oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \overset{N_{i+2}}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ &\cdots \\ &\oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \overset{N_s}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{aligned}$$

y de forma análoga para $p^iA/p^{i+1}A$. Así, el rango (como p-grupo abeliano elemental, ver pág. 36) de $p^iG/p^{i+1}G$ es $R + \sum_{j=i+1}^s N_j$ si $i = 0, \dots, s-1$ y R si $i \leqslant s$; el de $p^iA/p^{i+1}A$ es $r + \sum_{j=i+1}^s n_j$ si $i = 0, \dots, s-1$ y r si $i \leqslant s$.

Por ser $\overline{\phi}$ epimorfismo el rango de $p^iG/p^{i+1}G$ tiene que ser mayor o igual que el de $p^iA/p^{i+1}A$, es decir, tiene que ser

$$R \geqslant r \quad \text{si} \;\; i \geqslant s$$

$$R + \sum_{j=i+1}^{s} N_j \geqslant r + \sum_{j=i+1}^{s} n_j \quad \text{si} \;\; i = 0, \dots, s-1,$$

que son las expresiones (4.1). ■

En las siguientes secciones utilizaremos con frecuencia las desigualdades (4.1). Puede resultar útil representarlas gráficamente en una cuadrícula de forma que sea fácil comprobar a primera vista si se cumplen. En definitiva, expresan cómo deben distribuirse los divisores elementales de G y A para que sea posible un epimorfismo. La primera desigualdad sólo afecta a los rangos libres de G y A. Entonces, se van añadiendo factores cíclicos empezando por los órdenes mayores.

Fijémonos, en primer lugar, en el miembro izquierdo de las desigualdades de (4.1). Corresponden al grupo

$$G \approx \mathbb{Z}^R \oplus (\mathbb{Z}/p^1\mathbb{Z})^{N_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^{N_s}.$$

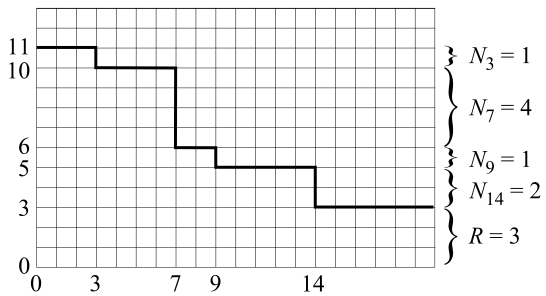
Así, el término $R+\sum_{i=j}^{s} N_i$ de (4.1) representa, para cada j, el número de factores cíclicos de G de orden $\geqslant p^j$.

En una cuadrícula representaremos el índice $j = 0, 1, ...$ en el eje de abcisas y la suma $R+\sum_{i=j}^{s} N_i$ correspondiente en el eje de ordenadas. La suma $R+\sum_{i=j}^{s} N_i$ va acumulando sumandos N_i a medida que j se hace menor. La gráfica resulta escalonada, aumentando hacia la izquierda.

Por ejemplo, para el grupo

$$G \;\approx\; \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{p^3} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^7} \oplus \mathbb{Z}_{p^7} \oplus \mathbb{Z}_{p^7} \oplus \mathbb{Z}_{p^7} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^9} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^{14}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{14}}$$

se tiene $R = 3$, $N_3 = 1$, $N_7 = 4$, $N_9 = 1$, $N_{14} = 2$, y $N_i = 0$ para el resto. En total tiene 11 factores cíclicos, 8 de orden finito y uno infinito de rango 3. Lo representamos como en la siguiente figura:

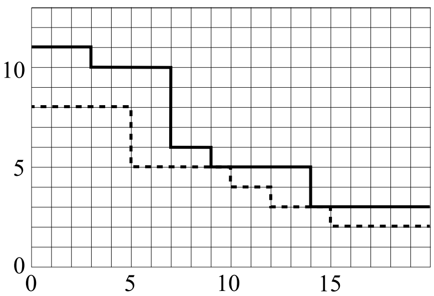


Las condiciones (4.1) son equivalentes a superponer dichas gráficas para los grupos G y A y que la de A siempre esté situada por debajo de la de G o a la misma altura, a lo sumo.

Con el anterior ejemplo para G, si representamos con línea discontinua al grupo

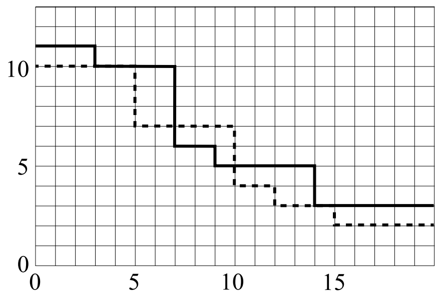
$$A \;\approx\; \mathbb{Z}^2 \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^5} \oplus \mathbb{Z}_{p^5} \oplus \mathbb{Z}_{p^5} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^{10}} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^{12}} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{p^{15}}$$

observamos en la figura de la derecha que se cumplen las condiciones (4.1).



Sin embargo, no se cumplen para

$$A \approx \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{p^5} \oplus \mathbb{Z}_{p^5} \oplus \mathbb{Z}_{p^5} \oplus \mathbb{Z}_{p^{10}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{10}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{10}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{12}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{15}}$$



pues la gráfica de A queda por encima de la de G para $j = 8, 9, 10$, es decir, las desigualdades en (4.1) no se cumplen para $j = 8, 9, 10$.

El lema 4.2.2 lo podemos aplicar a grupos abelianos finitamente generados en general. La condición es que se verifiquen los requisitos cuando restringimos por separado a cada una de las p-componentes primarias (p-subgrupos de Sylow de sus subgrupos de torsión) de ambos grupos:

Lema 4.2.3. *Sean $G \approx \mathbb{Z}^R \oplus \mathcal{T}(G)$ y $A \approx Z^r \oplus \mathcal{T}(A)$ grupos abelianos (aditivos), siendo $\mathcal{T}(G)$ y $\mathcal{T}(A)$ los subgrupos de torsión de G y A. Entonces, existe un epimorfismo $\phi : G \to A$ si y sólo si existe un epimorfismo $\phi_p : \mathbb{Z}^R \oplus Syl_p(\mathcal{T}(G)) \to \mathbb{Z}^r \oplus Syl_p(\mathcal{T}(A))$ para todo primo p que divida a $|\mathcal{T}(A)|$.*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que existe un epimorfismo $\phi : G \to A$. Como para cualquier homomorfismo, se cumple que $|\phi(x)|$ divide a $|x|$ para todo $x \in G$ de orden finito. Por lo tanto, $\phi(\mathcal{T}(G)) \subset \mathcal{T}(A)$: si $x \in \mathcal{T}(G)$, i.e., x tiene orden finito, entonces $\phi(x)$ también tiene orden finito, luego $\phi(x) \in \mathcal{T}(A)$. Por ello, y por ser ϕ sobreyectivo, tiene que ser $\mathbb{Z}^r \subset \phi(\mathbb{Z}^R)$.

Definimos Q de forma que $Q \oplus Syl_p(\mathcal{T}(G)) = \mathcal{T}(G)$. Así, Q es suma directa de subgrupos $Syl_{q_i}(\mathcal{T}(G))$ para ciertos primos $q_i \neq p$ (son los primos distintos de p que dividen a $|\mathcal{T}(G)|$) y un elemento $x \in Q$ tiene orden que factoriza en potencias de dichos q_i, luego p no puede dividir a $|x|$ y tampoco a $|\phi(x)|$. Por tanto, $\phi(Q)$ no puede contener elementos de $Syl_p(\mathcal{T}(A))$ (el orden de sus elementos es potencia de p) y, por ser ϕ sobreyectivo, $\mathbb{Z}^r \oplus Syl_p(\mathcal{T}(A))$ tiene que estar contenido en la imagen de $\mathbb{Z}^R \oplus Syl_p(\mathcal{T}(G))$.

Componiendo la restricción de ϕ a $\mathbb{Z}^R \oplus Syl_p(\mathcal{T}(G))$ con el homomorfismo proyección $\mathbb{Z}^r \oplus T_B \to \mathbb{Z}^r \oplus Syl_p(\mathcal{T}(A))$ resulta un homomorfismo que es sobreyectivo, y así obtenemos el epimorfismo requerido.

(Suficiencia) Recíprocamente, supongamos que existe el epimorfismo ϕ_p para cada primo p que divide a $|\mathcal{T}(A)|$, de forma que se verifican las expresiones (4.1) para cada p que divide a $|\mathcal{T}(A)|$. Podemos (re)definir cada ϕ_p como se hace en la demostración de suficiencia del lema (4.2.2). Definimos el epimorfismo ϕ, entonces, llevando los primeros r generadores de orden infinito de G a los r generadores de orden infinito de A. El resto de generadores de orden infinito de G los llevamos a la suma de sus imágenes por los ϕ_p. Y definimos la imagen por ϕ de cada p-componente primaria de G como la imagen por el correspondiente ϕ_p (puede ocurrir que $Syl_p(\mathcal{T}(G)) \not\approx \{0\}$ pero $Syl_p(\mathcal{T}(A)) \approx \{0\}$, es decir, p no divide a $|\mathcal{T}(A)|$, en cuyo caso hacemos $\phi(Syl_p(\mathcal{T}(G))) \approx \{0\}$). ■

4.3 Abelianización de un grupo Fuchsiano. El *subgrupo conmutador* o *derivado* de un grupo G, denotado habitualmente por G' (o bien $[G,G]$), consiste en el subgrupo generado por todos los conmutadores $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ de elementos de G. Se trata de un subgrupo normal de G, por lo que el cociente G/G' tiene estructura de grupo y es denominado *abelianización* o grupo *abelianizado* de G, denotado por G_{ab}.

Algunos hechos generales son los siguientes. Para un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$, G/N es abeliano si y sólo si $G' \leqslant N$. En particular, G' es el menor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano. Un grupo G es abeliano si y sólo si $G' = \{e\}$, es decir, $G = G_{ab}$. En el otro extremo, un grupo G se dice que es *perfecto* si $G = G'$, es decir, $G_{ab} = \{e\}$.

Un grupo Fuchsiano Γ con signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ viene definido, como se indicó en (2.2), por la presentación

$$\Gamma = \langle\, a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma, x_1, \dots, x_r \mid x_1^{m_1},\ \dots,\ x_r^{m_r},\ x_1 \cdots x_r \textstyle\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i] \,\rangle.$$

La presentación del cociente Γ/Γ' es la de G con relaciones añadidas: todo conmutador de elementos de Γ pasa a ser una relación,[7]

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab} = \langle\, a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma, x_1, \dots, x_r \mid x_1^{m_1},\ \dots,\ x_r^{m_r},\ x_1 \cdots x_r,& \\ [a,b],[a,x],[b,x],[a,a],[b,b],[x,x] \,\rangle,&\end{aligned}$$

donde $[a,b]$ simboliza el conjunto de conmutadores de cualquiera de los generadores a_i con cualquiera de los b_i, y análogamente para $[a,x],[b,x],[a,a],[b,b],[x,x]$.

Γ_{ab} es abeliano finitamente generado y su estructura es una suma directa (finita) de grupos cíclicos. Como veremos a continuación, dicha estructura está determinada por la signatura del grupo Fuchsiano.

En primer lugar, observamos que el conjunto de relaciones de Γ_{ab} consta de dos partes disjuntas. Una es la formada por las relaciones de conmutación $[a,x],[b,x]$ entre uno de los generadores hiperbólicos a_i o b_i y uno de los generadores elípticos x_i. El resto de relaciones únicamente incluyen o bien elementos a_i, b_i, o bien elementos x_i, ninguna de ellas mezcla elementos a_i, b_i con los x_i. Esto significa[8] que Γ_{ab} es isomorfo al producto directo de dos grupos cuyas presentaciones constan de uno de los subconjuntos de generadores y sus relaciones correspondientes, esto es, en nuestro caso,

$$\Gamma_{ab} \approx T \times L,$$

teniendo T y L las presentaciones

$$T = \langle\, x_1, \dots, x_r \mid x_1^{m_1},\ \dots,\ x_r^{m_r},\ x_1 \cdots x_r,\ [x,x] \,\rangle$$

$$L = \langle\, a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma \mid [a,b],[a,a],[b,b] \,\rangle.$$

[7][Johnson, 1997, prop. 1, pág. 75].
[8][Johnson, 1997, prop. 4, pág. 45].

Así, L es un grupo abelano libre de rango 2γ, mientras que las relaciones $x_1^{m_1}, \dots, x_r^{m_r}$ implican que todo elemento de T es de torsión, T es el subgrupo de torsión $\mathcal{T}(\Gamma_{ab})$ de Γ_{ab}.

Tratándose de grupos abelianos finitamente generados, consideraremos a partir de aquí a los grupos cíclicos como grupos aditivos $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de orden infinito o finito, utilizando sumas directas en vez de productos directos. En las presentaciones omitiremos las relaciones dadas por los conmutadores de los generadores.

Con el isomorfismo que hace corresponder cada uno de los 2γ generadores hiperbólicos a_i, b_i de Γ con un generador diferente de una base del grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^{2\gamma}$ de rango 2γ resulta $L \approx \mathbb{Z}^{2\gamma}$.

Para hallar la estructura de T, extendemos a un isomorfismo la correspondencia $x_i \mapsto e_i$, $i = 1, \dots, r$, entre los generadores elípticos x_i de Γ y los elementos $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\underbrace{1}}, 0, \dots, 0)$ que forman la base canónica de $\mathbb{Z}^r = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$. Siendo R el subgrupo de $\mathbb{Z}^r$ que generan los elementos imagen por $x_i \mapsto e_i$ del conjunto de relaciones de T,

$$R = \langle m_1 e_1, \dots, m_r e_r, \ e_1 + \cdots + e_r \rangle,$$

obtenemos

$$\Gamma_{ab} \approx T \oplus L$$

$$T \approx (\mathbb{Z} \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus \mathbb{Z})/R \qquad L \approx \mathbb{Z} \oplus \overset{2\gamma}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$$

Falta, pues, encontrar la descomposición de T en grupos cíclicos, garantizada por el teorema de estructura de grupos abelianos finitos.

Como grupo abeliano finito, T puede expresarse como la suma directa de sus p-componentes primarias,[9] con p primo que divide al orden $|T|$ de T, que denotamos por T_p, y que no son sino los p-subgrupos de Sylow de T:

$$T \approx \bigoplus_{p \,\mid\, |T|} T_p$$

Sea $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ el conjunto de números primos que dividen a algún período m_i, de forma que $m_i = p_1^{\mu_i(p_1)} \cdots p_s^{\mu_i(p_s)}$ para ciertos enteros $\mu_i(p_j) \geqslant 0$. Definamos también $M = \mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r)$.

Tenemos que $T_q \approx \{0\}$ si q es un número primo que no pertenece a $\mathcal{P}$. En efecto, si $x \in T$ tiene orden q^d, entonces $q^d x = 0$. Por pertenecer a T, $x = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r$ con $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{Z}$. Pero las relaciones de la presentación de T implican $Mx = 0$, que obliga a que q sea divisor de $M = \mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r)$, lo cual no es posible, pues $q \notin \mathcal{P}$ implica $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$ (p, q son números primos distintos) y los factores primos

[9] [Kurzweil and Stellmacher, 2004, th. 2.1.6, pág. 46].

de M son los elementos de $\mathcal{P}$. Así, las p-componentes primarias no triviales de T tienen valores p que están en $\mathcal{P}$:

$$T \approx \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} T_p$$

Los grupos cíclicos $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$, son p-grupos. Las relaciones $m_1 e_1$, ..., $m_r e_r$ de la presentación de T sugieren que, para cada $p \in \mathcal{P}$, T_p sea isomorfo a $\mathbb{Z}/p^{\mu_1(p)}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{\mu_r(p)}\mathbb{Z}$. Sin embargo, veamos que no es exactamente así, debido a la otra relación de T, $e_1 + \cdots + e_r$.

Consideremos la proyección canónica $\pi : \mathbb{Z}^r \to T : e_i \mapsto \overline{e}_i = e_i + R$, que es un epimorfismo cuyo núcleo es $\ker(\pi) = R$, y el cociente

$$G_p = \mathbb{Z}^r/R_p = \langle e_1, ..., e_r \mid p^{\mu_1(p)}e_1, ..., \, p^{\mu_r(p)}e_r, \; e_1 + \cdots + e_r \rangle,$$

con $R_p = \langle p^{\mu_1(p)}e_1, \, ..., \, p^{\mu_r(p)}e_r, \; e_1 + \cdots + e_r \rangle$, cuya proyección canónica es

$$\varphi_p : \mathbb{Z}^r \to G_p : e_i \mapsto \tilde{e}_i = e_i + R_p,$$

epimorfismo con núcleo $\ker(\varphi_p) = R_p$. Veamos que $T_p \approx G_p$.

Como $m_i e_i = (m_i p^{-\mu_i(p)})\, p^{\mu_i(p)} e_i$, entonces $R \leqslant R_p$, es decir, R es subgrupo (normal) de R_p. Luego, por el segundo teorema de isomorfía de grupos,[10] $\psi : T \to G_p : x + R \mapsto x + R_p$ es epimorfismo con núcleo $\ker \psi = R_p/R$, y $T/(R_p/R) \approx G_p$.

Además, ψ es el único homomorfismo $T \to G_p$ tal que $\psi \circ \pi = \varphi_p$,[11] y está definido por $\psi(x + R) = \varphi_p(x)$. Esto queda reflejado en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^r \arrow[rr, "\varphi_p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G_p = \mathbb{Z}^r/R_p \\
& T = \mathbb{Z}^r/R \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, con el epimorfismo $\psi : T \to G_p$ para $p \in \mathcal{P}$, el lema 4.2.3 garantiza que existe un epimorfismo $Syl_p(T) \to Syl_p(G_p)$, esto es, un epimorfismo $T_p \to G_p$. Además, vimos en la demostración de dicho lema cómo tal epimorfismo nos lo proporciona la restricción $\psi|_{T_p} : T_p \to G_p$ de ψ a la p-componente primaria T_p de T.

Veamos ahora que $\psi|_{T_p}$ es inyectivo.

Lema 4.3.1. *$x \in R_p \Rightarrow \overline{x} \notin T_p$ o $\overline{x} = \overline{0}$.*

Demostración. Si $m_i \neq p^{\mu_i(p)}$ (i.e., $m_i = a p^{\mu_i(p)}$ con $\mathrm{mcd}(a, p) = 1$ y $a \neq 1$) para todo i, entonces $m_i \nmid p^n p^{\mu_i(p)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i$, luego $p^n p^{\mu_i(p)} e_i \notin R$ $\forall n, i$, luego $p^n p^{\mu_i(p)} \overline{e}_i \neq \overline{0}$ $\forall n, i$. Por

[10] Ver, por ejemplo, [Kurzweil and Stellmacher, 2004, pág. 14], [Bujalance et al., 2007, pág. 98].
[11] [Artin, 1991, prop. 8.4, pág. 221].

tanto, si $x \in R_p$, como es $x = a_1 p^{\mu_1(p)} e_1 + \cdots + a_r p^{\mu_r(p)} e_r$ para ciertos enteros $a_1, \dots, a_r$, entonces $p^n \overline{x} \neq \overline{0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ o bien $\overline{x} = \overline{0}$ (i.e., $a_1 = \dots = a_r = 0$), luego $\overline{x} \notin T_p$ (no es p-elemento en T, i.e., no es elemento de p-torsión de T) o bien $\overline{x} = \overline{0}$.

Si $m_i = p^{\mu_i(p)}$ para $i \in \mathcal{I} \subset \{1, \dots, r\}$, entonces $x \in R$ si $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i$, i.e., $\overline{x} = \overline{0}$. Y si $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j$, con $\mathcal{J} = \{1, \dots, r\} - \mathcal{I}$ y algún $a_j \neq 0$, entonces $p^n \overline{x} \neq \overline{0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\overline{x} \notin T_p$. ∎

Corolario 4.3.2. *$\overline{x} \in T_p$ y $\psi(\overline{x}) = \tilde{0}$ (i.e., $x \in R_p$) $\implies$ $\overline{x} = \overline{0}$.* ∎

Por tanto, $\psi|_{T_p} : T_p \to G_p$ es inyectivo y, como antes vimos que también es sobreyectivo,

Corolario 4.3.3. *$\psi|_{T_p} : T_p \to G_p$ es un isomorfismo de grupos.* ∎

Así, $T \approx \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} G_p$. El cálculo de G_p como suma directa de grupos cíclicos se realiza mediante el procedimiento descrito en §4.1 para hallar la forma normal de Smith de la matriz

$$\mathbf{G}_p = \begin{pmatrix} p^{\mu_1(p)} & & & \\ & p^{\mu_2(p)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{\mu_r(p)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

de relaciones de G_p mediante trasformaciones elementales. Utilizamos a continuación la notación $(\gamma; \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_r)$ definida en §2.6 a partir de $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$. Recordemos que $\hat{\mu}_i(p) = \mu_{\tau(i)}(p)$, para una permutación τ, de forma que $\hat{\mu}_1(p) \leqslant \hat{\mu}_2(p) \leqslant \cdots \leqslant \hat{\mu}_r(p)$ y $\hat{m}_1 \,|\, \hat{m}_2 \,|\, \cdots \,|\, \hat{m}_r$. Así, efectuando varios intercambios de filas y columnas,

$$\mathbf{G}_p = \begin{pmatrix} p^{\hat{\mu}_{\tau^{-1}(1)}(p)} & & & \\ & p^{\hat{\mu}_{\tau^{-1}(2)}(p)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{\hat{\mu}_{\tau^{-1}(r)}(p)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p^{\hat{\mu}_1(p)} & & & \\ & p^{\hat{\mu}_2(p)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{\hat{\mu}_r(p)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si restamos la última columna a las demás,

$$\mathbf{G}_p \longrightarrow \begin{pmatrix} p^{\hat{\mu}_1(p)} & & & & \\ & p^{\hat{\mu}_2(p)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p^{\hat{\mu}_{r-1}(p)} & \\ -p^{\hat{\mu}_r(p)} & -p^{\hat{\mu}_r(p)} & \cdots & -p^{\hat{\mu}_r(p)} & p^{\hat{\mu}_r(p)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, restamos $p^{\hat{\mu}_r(p)}$ veces la última fila a la penúltima:

$$\mathbf{G}_p \longrightarrow \begin{pmatrix} p^{\hat{\mu}_1(p)} & & & & \\ & p^{\hat{\mu}_2(p)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p^{\hat{\mu}_{r-1}(p)} & \\ -p^{\hat{\mu}_r(p)} & -p^{\hat{\mu}_r(p)} & \cdots & -p^{\hat{\mu}_r(p)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, sumamos, para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, $p^{\hat{\mu}_r(p)-\hat{\mu}_i(p)}$ veces la fila i a la penúltima fila:

$$\mathbf{G}_p \longrightarrow \begin{pmatrix} p^{\hat{\mu}_1(p)} & & & & \\ & p^{\hat{\mu}_2(p)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p^{\hat{\mu}_{r-1}(p)} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando intercambios de filas y columnas de forma simétrica (i.e., si intercambiamos las filas i, j también intercambiamos, a continuación, las columnas i, j) podemos reordenar la diagonal principal de $\mathbf{G}_p$ para que las entradas iguales a 1 estén al principio, las nulas al final y el resto de forma que cada una divida a la siguiente. Obtenemos la forma normal de Smith de $\mathbf{G}_p$:

$$\mathbf{G}_p \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & p^{\hat{\mu}_1(p)} & & & \\ & & p^{\hat{\mu}_2(p)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p^{\hat{\mu}_{r-1}(p)} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $G_p \approx (\mathbb{Z}/p^{\hat{\mu}_1(p)}\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^{\hat{\mu}_2(p)}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p^{\hat{\mu}_{r-1}(p)}\mathbb{Z})$.

En definitiva, como resultado de lo desarrollado en esta sección, tenemos:

Corolario 4.3.4. *Si Γ es el grupo Fuchsiano con signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, entonces*

$$\Gamma_{ab} \approx \mathbb{Z}^{2\gamma} \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}/p^{\mu_i(p)}\mathbb{Z},$$

siendo $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ el conjunto de números primos que dividen a algún período m_i y entendiendo que $\mu_r(p) = \text{máx}\{\mu_i(p)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ para cada $p \in \mathcal{P}$. ■

En el enunciado se ha considerado que $\mu_r(p) = \text{máx}\{\mu_i(p)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$; esto no es una condición, sólo indica que en la suma directa prescindimos de un factor $\mathbb{Z}/p^{\mu_{max}(p)}\mathbb{Z}$ con orden máximo para cada $p \in \mathcal{P}$.

Así, con la notación $(\gamma;\, \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_r)$ definida en §2.6,

$$\Gamma_{ab} \approx \hat{\Gamma}_{ab} \approx \mathbb{Z}^{2\gamma} \oplus \mathbb{Z}/\hat{m}_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\hat{m}_{r-1}\mathbb{Z}$$

Por ejemplo, para el grupo triangular $\Gamma = \Delta(3,3,4)$ se tiene, con la notación de §2.6,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

luego $\hat{m}_1 = 1 \mid \hat{m}_2 = 3 \mid \hat{m}_3 = 12$ y $\Gamma_{ab} \approx \mathbb{Z}_3$.

4.4 Factorización de epimorfismos.

Sean dos grupos G, A y un homomorfismo $\phi : G \to A$. Decimos que ϕ *factoriza* por un homomorfismo $\psi : G \to B$, o que *factoriza* por B, si existe un homomorfismo $\overline{\phi} : B \to A$ tal que $\overline{\phi}\psi = \phi$, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & A \\ & B \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

El primer teorema de isomorfía de grupos admite la siguiente generalización.[12] Sea un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ y su proyección canónica $\pi : G \to G/N : a \mapsto \overline{a} = aN$. Si $N \leqslant \ker\phi$, entonces ϕ factoriza de manera *única* a través de G/N (i.e., existe un *único* homomorfismo $\overline{\phi} : G/N \to A$ tal que $\overline{\phi}\pi = \phi$).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A \\ & G/N \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si ϕ es sobreyectivo, también lo es $\overline{\phi}$, pues la proyección canónica siempre es homomorfismo sobreyectivo.

Cuando N es el subgrupo derivado $G' = [G, G]$ de G y A un grupo abeliano, si $g \in G'$ entonces, por ser ϕ homomorfismo y A abeliano, $g \in \ker\phi$, i.e., $G' \leqslant \ker\phi$, luego ϕ factoriza de manera única por la abelianización $G_{ab} = G/G'$ de G, existe un único homomorfismo $\overline{\phi} : G_{ab} \to A$ tal que $\overline{\phi}\pi = \phi$.

Si particularizamos al caso en el que G es un grupo Fuchsiano Γ con signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ y A es abeliano **finito** con p-componentes primarias

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\phi_p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A_p \\ & \Gamma_{ab} \arrow[ur, "\overline{\phi}_p"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \approx A_{q_1} \oplus \cdots \oplus A_{q_\lambda}$$

[12] [Artin, 1991, pág. 221].

entonces, siendo $\pi_p : A \to A_p$ el homomorfismo proyección para $p \in \mathcal{Q} = \{q_1, \dots, q_\lambda\}$, un epimorfismo $\phi : \Gamma \to A$ da lugar a epimorfismos $\phi_p = \pi_p \circ \phi$ y, cada uno de estos, a un epimorfismo único $\overline{\phi}_p : \Gamma_{ab} \to A_p$ tal que $\overline{\phi}_p \pi = \phi_p$. Por el corolario 4.3.4 sabemos que, si Γ tiene signatura $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, entonces

$$\Gamma_{ab} \approx \mathbb{Z}^{2\gamma} \oplus G_{p_1} \oplus \cdots \oplus G_{p_s},$$

siendo $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ el conjunto de números primos que dividen a algún período $m_i = p_1^{\mu_i(p_1)} \cdot p_2^{\mu_i(p_2)} \cdots p_s^{\mu_i(p_s)}$ de Γ y

$$G_p \;\approx\; \mathbb{Z}/p^{\mu_1(p)}\mathbb{Z} \;\oplus\; \cdots \;\oplus\; \mathbb{Z}/p^{\mu_{r-1}(p)}\mathbb{Z}$$

las p-componentes primarias del subgrupo de torsión $\mathcal{T}(\Gamma_{ab})$ (entendiendo que $\mu_r(p) = \max\{\mu_i(p)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$). Para un $p \in \mathcal{P}$ dado, sea $\mu_i = \mu_i(p)$, para $i = 1, \dots, r$, y supongamos que están ordenados, $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_r$. La descomposición primaria de A_p es de la forma

$$A_p \;\approx\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \overset{n_1}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;\oplus\; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \overset{n_2}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \;\oplus \cdots \oplus\; \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \oplus \overset{n_\alpha}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$$

con enteros $n_i \geqslant 0$ (distintos, en general, para cada $p \in \mathcal{Q}$, al igual que α). Sea $n = n_1 + \cdots + n_\alpha$ el número de grupos cíclicos no triviales de esta descomposición primaria. Por el lema 4.2.3, existe un epimorfismo $\mathbb{Z}^{2\gamma} \oplus G_p \to A_p$ para cada $p \in \mathcal{Q}$. Entonces, el lema 4.2.2 exige que se verifiquen las condiciones (4.1) que, en nuestro caso son:

$$\begin{aligned}
2\gamma &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{r-1}+1} \\
2\gamma + 1 &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{r-2}+1} \\
2\gamma + 2 &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{r-3}+1} \\
&\;\vdots \\
2\gamma + i &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{r-i-1}+1} \\
2\gamma + i + 1 &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{r-i-2}+1} \\
&\;\vdots \\
2\gamma + r - (k+2) &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\mu_{k+1}+1} \\
2\gamma + r - (k+1) &\geqslant n_\alpha + n_{\alpha-1} + \cdots + n_1 = n
\end{aligned} \tag{4.2}$$

cuando son nulos los k primeros μ_i, es decir, $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$, $\mu_{k+1} \neq 0$. Aquí hemos supuesto que $\alpha \geqslant \mu_i$ para $i = 1, \dots, r$; ésta será la situación que encontraremos más adelante en §4.5. Si es $\mu_{r-i-1} = \mu_{r-i-2}$, es decir, dos divisores primarios de G_p son iguales, entonces la desigualdad $2\gamma + i \geqslant \dots$ la eliminamos de la relación anterior (análogamente si hay más de dos divisores primarios iguales).

Si $p \notin \mathcal{P}$, entonces $G_p \approx \{0\}$ y dicho epimorfismo es $\mathbb{Z}^{2\gamma} \to A_p$. Las desigualdades anteriores se reducen a una: $2\gamma \geqslant n$ (A_p sólo puede ser generado por las imágenes de los generadores hiperbólicos de Γ).

4.5 Condiciones de existencia de epimorfismos suaves. Después de las nociones y resultados de las secciones anteriores, podemos abordar el estudio de las condiciones bajo las que un grupo abeliano finito actúa como grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta. El teorema 4.5.5 recoge el resultado establecido en [Breuer, 2000, th. 9.1, pág. 29]. Como preparación para la demostración, introducimos primero el siguiente lema, relacionado con el teorema 2.4.1. Utilizamos notación indicada en la sección anterior.

Lema 4.5.1. *Si $p \in \mathcal{P}$ y $\phi_p : \Gamma \to A_p$ es un epimorfismo tal que $|\phi_p(x_i)| = p^{\mu_i(p)}$ para $i = 1, \dots, r$, entonces* $\ker \phi_p$ *no tiene p-torsión.*

Demostración. En efecto, todo $x \in \Gamma$ de orden finito es conjugado de una potencia de uno de los generadores periódicos, $x = y^{-1}x_i^k y$ con $y \in \Gamma$. Si $x \in \ker \phi_p$ entonces

$$0 = \phi_p(x) = \phi_p(y^{-1}) + \phi_p(x_i^k) + \phi_p(y) = -\phi_p(y) + \phi_p(x_i^k) + \phi_p(y) = \phi_p(x_i)^k,$$

por lo que el orden de $\phi_p(x_i)$ tiene que dividir a k, i.e., $p^{\mu_i(p)}|k$, luego $k = sp^{\mu_i(p)}$ con $s \in \mathbb{N}$. Definiendo $\overline{m}_i = m_i/p^{\mu_i(p)}$, tenemos que $\operatorname{mcd}(\overline{m}_i, p) = 1$ y

$$x^{\overline{m}_i} = y^{-1}x_i^{k\overline{m}_i}y = y^{-1}x_i^{m_i s}y = y^{-1}y = 1_\Gamma,$$

luego $|x| \,|\, \overline{m}_i$. Como $\operatorname{mcd}(\overline{m}_i, p) = 1$, también $\operatorname{mcd}(|x|, p) = 1$. Entonces, $x^{p^n} \neq 1_\Gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (en caso contrario, $|x|$ dividiría a p^n y sería $\operatorname{mcd}(|x|, p) = p$) y ningún elemento de $\ker \phi_p$ puede tener como orden una potencia de p, i.e., $\ker \phi_p$ no puede tener p-torsión. ■

Nos dedicamos a continuación a estudiar cómo, en estas condiciones, podemos obtener un epimorfismo $\psi : \Gamma \to A$ **cuyo núcleo no tiene torsión**, esto es, un epimorfismo con núcleo de superficie (epimorfismo suave), construyéndolo como producto directo de epimorfismos ϕ_p que no tienen p-torsión. Esto será importante en la demostración del teorema 4.5.5: la existencia de un epimorfismo $\phi : \Gamma \to A$ y las condiciones que se imponen permiten construir epimorfismos ϕ_p que satisfacen las condiciones del lema 4.5.1 y, por tanto, obtener un epimorfismo suave $\Gamma \to A$.

Veamos, entonces, que el epimorfismo $\psi : \Gamma \to A$, definido como el producto directo $\psi = (\phi_{q_1}, \dots, \phi_{q_\lambda}) : g \mapsto (\phi_{q_1}(g), \dots, \phi_{q_\lambda}(g))$, tiene núcleo sin torsión, partiendo del supuesto de que ϕ_p no tenga p-torsión para cada $p \in \mathcal{P}$, es decir, $\mathcal{T}_p(\ker \phi_p) = \{1_\Gamma\}$ (puede existir, aún así, un $g \in \ker \phi_p$ de orden mp^n con $m > 1$ y $\operatorname{mcd}(m, p) = 1$, es decir, podría ser $\mathcal{T}(\ker \phi_p) \neq \{1_\Gamma\}$). Tenemos, en primer lugar, el siguiente

Lema 4.5.2. $g \neq 1_\Gamma$, $g \in \ker \psi \;\Rightarrow\; g^{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}} \neq 1_\Gamma \;\; \forall r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$.

Demostración. $g \in \ker \psi \implies g \in \ker \phi_p \;\forall p \in \mathcal{P} \implies g^{p_i^{r_i}} \in \ker \phi_{p_i}$ y $g^{p_i^{r_i}} \neq 1_\Gamma$, pues, en caso contrario, sería $\mathcal{T}_{p_i}(\ker \phi_{p_i}) \neq \{1_\Gamma\}$. Como también $g^{p_i^{r_i}} \in \ker \phi_{p_j}$ para $j \neq i$, por el mismo razonamiento se cumple $g^{p_i^{r_i} p_j^{r_j}} \neq 1_\Gamma$. Repitiendo este argumento para el resto de potencias, $g^{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}} \neq 1_\Gamma$. ■

Corolario 4.5.3. $g^{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}} = 1_\Gamma$*,* $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; g = 1_\Gamma$ *o* $g \notin \ker \psi$*.* ■

Con esto podemos probar que $\ker \psi$ no tiene torsión:

Lema 4.5.4. $\mathcal{T}_p(\ker \phi_p) = \{1_\Gamma\} \;\; \forall p \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mathcal{T}(\ker \psi) = \{1_\Gamma\}$.

Demostración. Sea $g \in \Gamma$ tal que $g^n = 1_\Gamma, n \in \mathbb{N}, n > 1$. Podemos escribir $n = mp_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, con $m \in \mathbb{N}$, $r_i \geqslant 0$ y $\mathrm{mcd}(m, p_i) = 1$. Definiendo $h = g^{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}}$ entonces $g^n = 1_\Gamma \Rightarrow h^m = 1_\Gamma$, por lo que $\phi_{p_i}(h)^m = \phi_{p_i}(h^m) = 1_{A_{p_i}}$, utilizando notación multiplicativa para grupos abelianos.

Pero $\phi_{p_i}(h)$ pertenece al p_i-grupo A_{p_i}, luego el orden de $\phi_{p_i}(h)$ en A_{p_i} es igual a $p_i^{\alpha_i}$ para cierto $\alpha_i \in \mathbb{N}$ y tiene que ser $p_i^{\alpha_i} | m$. Como $\mathrm{mcd}(m, p_i) = 1$, entonces $\alpha_i = 0$ y $\phi_{p_i}(h) = 1_{A_{p_i}}$, es decir, $h \in \ker \phi_{p_i}$. Como $\mathcal{T}_{p_i}(\ker \phi_{p_i}) = \{1_\Gamma\}$, entonces $h = 1_\Gamma$.

Ahora, por el corolario 4.5.3, $g = 1_\Gamma$ o bien $g \notin \ker \psi$. ■

Exponemos, a continuación, el enunciado sobre condiciones necesarias y suficientes para la existencia de epimorfismos con núcleo de superficie de un grupo Fuchsiano sobre un grupo abeliano finito. Lo descrito hasta aquí en esta sección será utilizado en la demostración de la suficiencia de las condiciones.

Teorema 4.5.5. *Sean* Γ *un grupo Fuchsiano con signatura* $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$*,* A *un grupo abeliano finito y* $M = \mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r)$*. Existe un epimorfismo con núcleo de superficie* $\psi : \Gamma \to A$ *si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(o) *Existe un epimorfismo* $\Gamma \to A$*.*
(i) $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_r) = M$ *para todo* i*.*
(ii) $M | \exp A$*; si* $\gamma = 0$*,* $M = \exp A$*.*
(iii) $r \neq 1$*; si* $\gamma = 0$*,* $r \geqslant 3$*.*
(iv) *Si* M *es par y sólo uno de los divisores elementales de* A *es divisible por la máxima potencia de 2 que divide a* M*, entonces es par el número de períodos* m_i *divisibles por la máxima potencia de 2 que divide a* M*.*

Observación. A diferencia del caso de grupos cíclicos anterior, para un grupo abeliano finito A cualquiera las condiciones (i)-(iv) no garantizan la existencia de un epimorfismo $\Gamma \to A$. La condición (o) se agrega para garantizar la existencia de un epimorfismo, siendo, entonces, suficientes las condiciones (i)-(iv) para que exista un epimorfismo suave. En la sección §4.6 proponemos una nueva condición para sustituir a la condición (o), de forma que las condiciones de existencia de un epimorfismo suave son enunciadas todas haciendo referencia explícita a los datos definitorios de Γ y A. ■

Demostración. ***(Necesidad)*** Sea $\psi : \Gamma \to A$ el epimorfismo con núcleo de superficie.

(o) Trivial, el propio ψ es epimorfismo.

(i), (ii), (iii) La demostración se realiza exactamente igual que en el teorema 3.1.1, cambiando C_N por A y ϕ por ψ (en la demostración de (ii), excluimos el último párrafo).

(iv) Sea $M = 2^k t$, con $k \geqslant 1$ y t impar. Definimos el homomorfismo $\psi' : \Gamma \to A$ mediante $\psi'(x_i) = \psi(x_i)$ y $\psi'(a_i) = \psi'(b_i) = 1$. La imagen $\psi'(\Gamma)$ es un subgrupo de A con exponente M, ya que $\psi'(x)^M = 1$ para todo $x \in \Gamma$ y, si existiera $M' < M$ con esa misma propiedad, M' sería múltiplo común de los m_i, lo cual contradiría al hecho de que M es su mínimo común múltiplo.

Sea también el homomorfismo $\phi : \Gamma \to A$ definido por $\phi(x) = \psi'(x)^{M/2}$. Tenemos que $\phi(x_i) \neq 1$ si y sólo si 2^k es factor de m_i. En efecto, si $\phi(x_i) = 1$, entonces $1 = \psi'(x_i)^{M/2} = \psi(x_i)^{M/2}$, luego $|\psi(x_i)|$ divide a $M/2 = 2^{k-1}t$. Como ψ es epimorfismo con núcleo de superficie, $|\psi(x_i)| = |x_i| = m_i$. Por lo tanto, $m_i \mid 2^{k-1}t$, luego 2^k no puede ser factor de m_i. Y viceversa, si 2^k no es factor de m_i, entonces $|\psi(x_i)| = |x_i| = m_i$ divide a $M/2 = 2^{k-1}t$ y se cumple $\phi(x_i) = \psi'(x_i)^{M/2} = \psi(x_i)^{M/2} = 1$. Es decir, $\phi(x_i) = 1$ si y sólo si 2^k no es factor de m_i.

Por ser ψ epimorfismo con núcleo de superficie, tiene que ser $|\psi'(x_i)| = m_i$. Entonces, para un x_i tal que $2^k | m_i$, $\psi'(x_i)$ debe tener componentes no triviales en factores $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ de la descomposición primaria de A. Por tener A un único divisor primario 2^k, es decir, un único factor $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ en su descomposición primaria, $\psi'(x_i)$ tiene componente no trivial en dicho factor, y $\phi(x_i) = \psi'(x_i)^{M/2} = \psi(x_i)^{M/2} \neq 1$ tiene componentes no triviales sólo en un subgrupo de $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$. Como $\phi(x)^2 = \psi'(x)^M = 1$ para todo $x \in \Gamma$, la imagen $\phi(\Gamma)$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ cíclico de orden 2, digamos, $\phi(\Gamma) = \langle a \mid a^2 \rangle$. Observamos que $\phi(\Gamma)$ no sería necesariamente cíclico si A tuviese más de un divisor primario 2^k, pues, por ejemplo, los elementos $(0, 2^{k-1}), (2^{k-1}, 0), (2^{k-1}, 2^{k-1}) \in \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ generan un subgrupo que no es cíclico, de hecho es un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La relación $x_1 \cdots x_r \prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]$ de la presentación del grupo Fuchsiano Γ implica

$$1 = \psi'(1) = \psi'(x_1 \cdots x_r \textstyle\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]) = \psi'(x_1 \cdots x_r)\, \psi'(\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]) = \psi'(x_1 \cdots x_r),$$

luego $\phi(x_1 \cdots x_r) = \psi'(x_1 \cdots x_r)^{M/2} = 1$. Si hubiera un número impar $2n + 1$ de índices $i \in \{1, \dots, r\}$ con $\phi(x_i) \neq 1$, entonces sería $\phi(x_1 \cdots x_r) = \phi(x_1) \cdots \phi(x_r) = a^{2n+1} = a$. Por lo tanto, tiene que haber un número par de índices $i \in \{1, \dots, r\}$ con $\phi(x_i) \neq 1$.

En consecuencia, tiene que ser par el número de períodos m_i en los que 2^k aparece como factor.

(Suficiencia) La demostración la realizamos construyendo un epimorfismo con núcleo de superficie $\psi : \Gamma \to A$ siguiendo los resultados expuestos antes en esta sección. Para cada p-componente primaria A_p de A obtendremos, a continuación, un epimorfismo $\phi_p : \Gamma \to A_p$ cuyo núcleo no tendrá p-torsión, $\mathcal{T}_p(\ker \phi_p) = \{1_\Gamma\}$.

En tal situación, el lema 4.5.4 garantiza que el epimorfismo

$$\psi \ : \ \Gamma \to G \ : \ x \mapsto \psi(x) = (\phi_{q_1}(x), \dots, \phi_{q_\lambda}(x))$$

tiene núcleo sin torsión. En cualquier grupo Fuchsiano todo elemento elíptico tiene orden finito, y su conjunto constituye el subconjunto de torsión de dicho grupo. Por tanto, en nuestro caso $\ker \psi$ no posee elementos elípticos, esto es, ψ es un epimorfismo suave.

Por la condición (o), existe un epimorfismo $\phi : \Gamma \to A$.

Si $p \notin \mathcal{P}$, entonces p no divide al orden de ningún generador elíptico x_i de Γ ni, por lo tanto, al orden de ningún elemento de orden finito de Γ, luego ningún elemento de Γ puede tener como orden una potencia de p, esto es, Γ no tiene p-torsión, $\mathcal{T}_p(\Gamma) = \{1_\Gamma\}$. Así, si $p \notin \mathcal{P}$, el núcleo de un homomorfismo $\Gamma \to A$ no puede tener p-torsión. En este caso, definimos $\phi_p = \pi_p \circ \phi$, siendo $\pi_p : A \to A_p$ el homomorfismo proyección.

Si Γ no tiene generadores hiperbólicos ($\gamma = 0$), la condición (ii) del teorema requiere que $\exp A = M$, esto es, que A sólo tenga p-componentes primarias no triviales para primos p que aparecen en las factorizaciones de los períodos m_i de Γ, tiene que ser $p \in \mathcal{P}$.

Así pues, consideremos un primo $p \in \mathcal{P}$, y sea $\mu_i = \mu_i(p)$ para $i = 1, \dots, r$. Podemos suponer que $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_r$. Si no fuera así, tendríamos que trabajar con la notación $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i(p) = \mu_{\tau(i)}(p)$ para $i = 1, \dots, r$ y cierta permutación τ como en §2.6, y entonces cambiar el índice i por $\tau^{-1}(i)$ en algunas de las expresiones que siguen. La argumentación no sufriría más alteraciones, así que, para que la notación sea más legible, suponemos que $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_r$.

La descomposición primaria de A_p es de la forma

$$A_p \ \approx \ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \overset{n_1}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ \oplus \ \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \overset{n_2}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ \oplus \cdots \oplus \ \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \oplus \overset{n_\alpha}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$$

con enteros $n_i \geqslant 0$. Sea $n = n_1 + \cdots + n_\alpha$ el número de grupos cíclicos no triviales de esta descomposición primaria.

La condición (ii) asegura que el mayor divisor elemental p^α de A_p es múltiplo de los p^{μ_i}, es decir, $\alpha \geqslant \mu$ ($\alpha = \mu$ si $\gamma = 0$). Consideremos en A_p el subgrupo cíclico $\langle a \rangle \approx \{0\} \oplus \overset{n-1}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z}$, siendo a uno de sus generadores. Así, $|a^{p^{\mu-\mu_i}}| = p^\mu / p^{\mu-\mu_i} = p^{\mu_i}$. Buscaremos después exponentes ξ_i tales que a^{ξ_i} tenga orden p^{μ_i}, para $i = 1, \dots, r$. Veremos más adelante que no puede ser $\xi_i = p^{\mu-\mu_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, y encontraremos la manera de definirlos. Supongámoslos definidos para ver primero cómo construir el epimorfismo ϕ_p de forma que $|\phi_p(x_i)| = p^{\mu_i}$; con esto, de los lemas 4.5.1 y 4.5.4 resulta la suficiencia de las condiciones del enunciado.

Dado el epimorfismo $\phi : \Gamma \to A$ garantizado por la condición (o), $\pi_p \circ \phi : \Gamma \to A_p$ también es epimorfismo. Como vimos en §4.4, existe un (único) epimorfismo $\Gamma_{ab} \to A_p$

que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\pi_p \circ \phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A_p \\ & \Gamma_{ab} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

y, por el lema 4.2.3, existe un epimorfismo $\mathbb{Z}^{2\gamma} \oplus G_p \to A_p$. Entonces, el lema 4.2.2 exige que se verifiquen las condiciones (4.2) las cuales, a su vez, nos permiten construir un epimorfismo $\varphi_p : \Gamma_{ab} \to A_p$ como en la demostración de suficiencia del lema 4.2.2: en primer lugar, hacemos que φ_p lleve un generador de orden infinito de $\mathbb{Z}^{2\gamma}$ a un generador de $\{0\} \oplus \overset{n-1}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ (que contiene a $\langle a \rangle$) y los demás generadores se aplican a generadores de subgrupos de A_p con intersección trivial con $\langle a \rangle$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & A_p \\ & \Gamma_{ab} \arrow[ur, "\varphi_p"'] & \end{tikzcd}$$

Por ser π y φ_p sobreyectivos, también $\varphi_p \circ \pi : \Gamma \to A_p$ lo es. Por la forma en que es construido, para cualquier generador elíptico $x_i \in \Gamma$ el subgrupo $\langle \varphi_p \circ \pi(x_i) \rangle$ que genera su imagen en A_p tiene intersección trivial con $\langle a \rangle$.

Denotando $\hat{x}_i = \varphi_p \circ \pi(x_i)$, se cumple $|\hat{x}_i| \,\big|\, p^{\mu_i}$, ya que $|\hat{x}_i|$ es potencia de p por pertenecer $\hat{x}_i$ a A_p y $|\hat{x}_i|$ tiene que dividir a $|x_i|$. Si definimos $\phi_p(x_i) = \hat{x}_i \cdot a^{\xi_i}$ tendremos que

$$|\phi_p(x_i)| \;\big|\; \mathrm{mcm}(|\hat{x}_i|, |a^{\xi_i}|) = p^{\mu_i}$$

Pero $\langle a \rangle \cap \langle \hat{x}_i \rangle = \{0\}$ si $\gamma > 0$, luego [13]

$$|\phi_p(x_i)| = p^{\mu_i}$$

Si Γ no tiene generadores hiperbólicos ($\gamma = 0$), entonces $\langle a \rangle \cap \langle \hat{x}_{r-1} \rangle \neq \{0\}$, pues $\pi(x_{r-1})$ es generador del subgrupo $\{0\} \oplus \overset{r-2}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z}$ de la p-componente primaria G_p de Γ_{ab}, y φ_p es construido haciendo, en primer lugar, $\varphi_p \circ \pi(x_{r-1})$ igual a un generador del subgrupo $\{0\} \oplus \overset{n-1}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z}$ de A_p. En este caso, como tenemos libertad para elegir el generador para definir a, tomamos $a = \hat{x}_{r-1} = \varphi_p \circ \pi(x_{r-1})$ si $\xi_{r-1} = 1$ o bien $a = \hat{x}_{r-1}^{-1}$ si $\xi_{r-1} = -1$ (después se verá cuando es $\xi_{r-1} = 1$ o $\xi_{r-1} = -1$). Entonces,

[13] Dados dos elementos a, b en un grupo, en general se cumple $|ab| \,\big|\, \mathrm{mcm}(|a|, |b|)$. En grupos abelianos finitos es posible precisar más: [Jungnickel, 1996, lema 2] dado un grupo abeliano finito A y $a, b \in A$, entonces

$$\frac{\mathrm{mcm}(|a|, |b|)}{|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle|} \;\Big|\; |ab| \;\Big|\; \mathrm{mcm}(|a|, |b|)$$

$|a| = p^\mu$ y, siempre que sea $p \neq 2$, el orden de $\phi_p(x_{r-1}) = \hat{x}_{r-1} \cdot a^{\xi_{r-1}} = \hat{x}_{r-1}^2$ es p^μ, ya que $\operatorname{mcd}(p^\mu, 2) = 1$.

Si $\gamma = 0$ y $p = 2$, $\operatorname{mcd}(p^\mu, 2) \neq 1$ y $\hat{x}_{r-1}^2$ no tiene orden p^μ. En ese caso, como $t \geqslant 2$ la descomposición primaria de A_p contiene un subgrupo $\{0\} \oplus \overset{n-2}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z} \approx \langle b \rangle \oplus \langle a \rangle$, siendo b de orden p^μ. Definimos

$$\phi_p(x_{r-1}) = \hat{x}_{r-1} \cdot b^{-1} \cdot a^{\xi_{r-1}} \qquad \phi_p(x_r) = \hat{x}_r \cdot b \cdot a^{\xi_r}$$

con $\xi_{r-1} = 1$, $\xi_r = 1 - t - Rp$ si t es par, y con $\xi_{r-1} = -1$, $\xi_r = 2 - Rp$ si t es impar (después comentamos esta elección), con lo que $\phi_p(x_{r-1})$ tiene orden p^μ, y también $\phi_p(x_r)$ (ya que $\langle a \rangle \cap \langle \hat{x}_r \rangle = \langle b \rangle \cap \langle \hat{x}_r \rangle = \{0\}$).

El homomorfismo ϕ_p así construido resulta ser sobreyectivo, pues A_p es generado por el conjunto de elementos $\{\hat{x}_i = \varphi_p \circ \pi(x_i), i = 1, \dots, r\}$ junto con las imágenes $\varphi_p \circ \pi(a_i), \varphi_p \circ \pi(b_i)$ de los generadores hiperbólicos, y también es generado por estos últimos junto con el conjunto $\{\phi_p(x_i), i = 1, \dots, r\}$, ya que $\hat{x}_i = \phi_p(x_i) \cdot a^{-\xi_i}$ y a también se expresa mediante un elemento tipo $\varphi_p \circ \pi(a_i), \varphi_p \circ \pi(b_i)$ o mediante $\phi_p(x_{r-1})$ (si $\gamma = 0$, $\phi_p(x_{r-1})$ es generador de $\{0\} \oplus \overset{n-1}{\cdots} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z}$).

Veamos ahora cómo definir los ξ_i. La relación $x_1 \cdots x_r \prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]$ de la presentación de Γ obliga a que se verifique $\phi_p(x_1) \cdots \phi_p(x_r) = 1$, pues, en caso contrario, ϕ_p no sería homomorfismo. Como $\varphi_p \circ \pi(x_1) \cdots \varphi_p \circ \pi(x_r) = 1$ (pues $\varphi_p \circ \pi$ es homomorfismo), esto equivale a $a^{\xi_1} \cdots a^{\xi_r} = 1$, es decir,

$$\xi_1 + \cdots + \xi_r \equiv 0 \pmod{p^\mu}. \tag{4.3}$$

Definiendo $\xi_i = p^{\mu - \mu_i}$, para $i = 1, \dots, r-2$, y $R = (1/p) \cdot \sum_{i=1}^{r-t} p^{\mu - \mu_i} \in \mathbb{Z}$ (observar que $\mu_i < \mu$ para $i = 1, \dots, r-t$, por lo que tenemos, al menos, un factor común p en el sumatorio) la ecuación (4.3) implica

$$\xi_{r-1} + \xi_r \ \equiv\ 2 - t - Rp \pmod{p^\mu}. \tag{4.4}$$

Así, podemos tomar

$$\xi_{r-1} = 1, \quad \xi_r = 1 - t - Rp,$$

siempre que $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, pues entonces

$$\begin{aligned} 1 - t \not\equiv 0 \pmod{p} &\implies 1 - t - Rp \not\equiv 0 \pmod{p} \\ &\implies p \nmid 1 - t - Rp \\ &\implies \operatorname{mcd}(p^\mu,\ 1 - t - Rp) = 1 \end{aligned}$$

(para el último paso, observar que p es primo), luego se verifica

$$\operatorname{mcd}(p^\mu, \xi_{r-1}) = 1, \quad \operatorname{mcd}(p^\mu, \xi_r) = 1 \tag{4.5}$$

lo que garantiza que sea $|a^{\xi_{r-1}}| = |a^{\xi_r}| = p^\mu$.

Si $t \equiv 1 \pmod{p}$ entonces $p \mid 1 - t - Rp$ y el valor ξ_r anterior implica que a^{ξ_r} tenga orden menor que p^μ. En este caso tomamos $\xi_{r-1} = -1$, $\xi_r = 2 - Rp$, con lo cual se verifica (4.5), excepto si $p = 2$.

En esta última situación con $p = 2$ y t impar ($t \equiv 1 \pmod{2}$), se cumple $\operatorname{mcd}(p^\mu, \xi_{r-1}) = 1$, luego $|a^{\xi_{r-1}}| = p^\mu$, pero $\operatorname{mcd}(2^\mu, \xi_r) \neq 1$ y el orden de a^{ξ_r} no es 2^μ. Pero, si $p = 2$ y t es impar, la condición *(iv)* del teorema implica que A_p tiene, al menos, dos divisores elementales iguales a p^μ, es decir, la descomposición primaria de A_p contiene un subgrupo $\mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z} \approx \langle b \rangle \oplus \langle a \rangle$, siendo b de orden p^μ. Definimos

$$\phi_p(x_{r-1}) = \hat{x}_{r-1} \cdot b^{-1} \cdot a^{\xi_{r-1}} \qquad \phi_p(x_r) = \hat{x}_r \cdot b \cdot a^{\xi_r}$$

con $\xi_{r-1} = -1$, $\xi_r = 2 - Rp$, de forma que se sigue verificando $\phi_p(x_1) \cdots \phi_p(x_r) = 1$, y $\phi_p(x_{r-1})$ y $\phi_p(x_r)$ tienen orden p^μ. ■

El teorema 3.1.1 de Harvey para grupos cíclicos es consecuencia del teorema 4.5.5. En efecto, supongamos que $A \approx \mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z}$ es cíclico, con $c_1 = q_1^{\alpha_1} \cdots q_\lambda^{\alpha_\lambda}$. Entonces, $\exp A = c_1$ y la condición (ii) del teorema 4.5.5 es: *$M|c_1$, y $M = c_1$ si $\gamma = 0$*. Por el teorema chino del resto, las p-componentes primarias A_p de A son grupos cíclicos $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Si M es par, entonces $2|c_1$ y una p-componente primaria es $A_2 \approx \mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$, siendo $p \neq 2$ para el resto de p-componentes primarias A_p. Por esto, la condición (iv) pasa a ser: *si M es par, entonces es par el número de períodos m_i divisibles por la máxima potencia de 2 que divide a M.* Además, las desigualdades (4.2) en este caso son:

- $2\gamma + i \geqslant 0$ ó 1 para $i = 0, \dots, r-1$, si $\gamma > 0$
- $0 \geqslant 0$ y $i \geqslant 0$ ó 1 para $i = 1, \dots, r-1$, si $\gamma = 0$,

pues $M|c_1$ y $M = c_1$ si $\gamma = 0$. Por tanto, las desigualdades (4.2) se cumplen para cualquier $\gamma \geqslant 0$, lo que es equivalente a que exista un epimorfismo $\Gamma_{ab} \to A_p$ para cada $p \in \{q_1, \dots, q_\lambda\}$ y un epimorfismo $\Gamma_{ab} \to A$, por los lemas 4.2.2 y 4.2.3, y esto garantiza un epimorfismo $\Gamma \to A$.

Por tanto, las condiciones (i)-(iv) implican la condición (o) de existencia de un epimorfismo $\Gamma \to A$ cuando A es cíclico. Así, la condición (o) es redundante y recuperamos el teorema 3.1.1 de Harvey.

4.6 Enunciado alternativo de existencia de epimorfismos suaves.

Un grupo abeliano finito A queda definido, como dice el teorema de estructura 4.1.2, por sus factores invariantes. En esta sección veremos que, siendo $A \approx \mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/c_t\mathbb{Z}$ con $c_1|c_2|\cdots|c_t$ (luego $\exp A = c_t$), la condición (o) del teorema 4.5.5 resulta ser consecuencia de las otras condiciones, salvo si $t > 2\gamma$. En ese caso debemos añadir una condición que garantice la existencia de un epimorfismo $\Gamma \to A$. Dicha condición adicional, por otra parte, es también condición necesaria. Así, podemos enunciar el teorema de existencia de epimorfismos con núcleo de superficie como sigue, prescindiendo de la condición (o) y basando todas las condiciones explícitamente en las características que definen a Γ y A.

Teorema 4.6.1. *Sean Γ un grupo Fuchsiano con signatura $(\gamma; m_1, \ldots, m_r)$, $M = \mathrm{mcm}(m_1, \ldots, m_r)$ y enteros $t \geqslant 1$ y $c_1, c_2, \ldots, c_t > 1$ con $c_1|c_2|\cdots|c_t$. Existe un epimorfismo con núcleo de superficie $\Gamma \to \mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/c_t\mathbb{Z}$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\mathrm{mcm}(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_r) = M$ *para todo i.*
(ii) $M|c_t$; *si $\gamma = 0$, $M = c_t$.*
(iii) $r \neq 1$; *si $\gamma = 0$, $r \geqslant 3$.*
(iv) *Si M es par y sólo uno de los divisores elementales de $\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/c_t\mathbb{Z}$ es divisible por la máxima potencia de 2 que divide a M, entonces es par el número de períodos m_i divisibles por la máxima potencia de 2 que divide a M.*
(v) *Si $t > 2\gamma$, entonces $r \geqslant t - 2\gamma + 1$ y todo divisor elemental de $\mathbb{Z}/c_k\mathbb{Z}$ divide, al menos, a $t - 2\gamma - k + 2$ períodos m_i para $k = 1, \ldots, t - 2\gamma$.*

Observación. Si $t < 2\gamma$ siempre es $r \geqslant t - 2\gamma + 1$. Si $t = 2\gamma$ puede no cumplirse $r \geqslant t - 2\gamma + 1 = 1$, ya que puede ser $r = 0$. Si $t > 2\gamma$, la condición $r \geqslant t - 2\gamma + 1$ en (v) incluye a la condición (iii) salvo cuando $t = 1$ (luego A es cíclico) y $\gamma = 0$, en cuyo caso la condición en (v) es $r \geqslant 2$. Recordemos que la condición en (iii) proviene de cosideraciones geométricas sobre la positividad del área hiperbólica, mientras que en (v) proviene de consideraciones algebraicas en relación con la sobreyectividad del epimorfismo. ■

Demostración. Tenemos que ver que la condición (v) es necesaria y que las condiciones (i)-(v) garantizan la existencia de un epimorfismo $\Gamma \to A$. Con esto, este teorema es consecuencia del 4.5.5.

Para un primo p que divida a c_t tenemos las factorizaciones

$$c_1 = \cdots p^{\alpha_1} \cdots \quad , \ldots , \quad c_t = \cdots p^{\alpha_t} \cdots$$

$$m_1 = \cdots p^{\mu_1} \cdots \quad , \ldots , \quad m_r = \cdots p^{\mu_r} \cdots$$

con enteros $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_t \neq 0$, pues $c_1|c_2|\cdots|c_t$. La p-componente primaria de A es $A_p = \mathbb{Z}/p^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{\alpha_t}\mathbb{Z}$, luego su número n de factores cíclicos no triviales verifica $1 \leqslant n \leqslant t$, pues $\alpha_t \neq 0$ y puede ser $\alpha_j = 0$ si $j = 1, \ldots, t-1$.

Si existe un epimorfismo con núcleo de superficie $\Gamma \to A$, ya sabemos, por el teorema 4.5.5, que se cumplen las condiciones (i)-(iv). La condición (ii) implica que todo primo que divida a algún período m_i debe dividir a c_t.

Además, existe un epimorfismo $\Gamma \to A$, y, por los lemas 4.2.2 y 4.2.3, esto ocurre si y sólo si se cumplen las desigualdades (4.2) correspondientes a cada primo p que divide a c_t. Como vimos en §4.2, estas desigualdades pueden ser representadas en una cuadrícula.

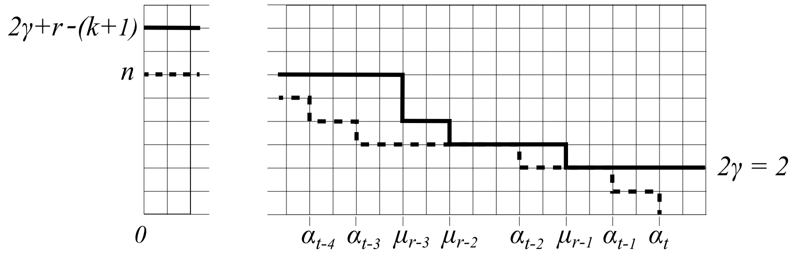


FIGURA 4.1: Ejemplo de representación gráfica de condiciones para existencia de un epimorfismo $\Gamma \to A$ cuando $2\gamma = 2$.

Como $c_1 \neq 1$, existe algún primo p que divide a c_t para el que $0 < \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_t \neq 0$ y $n = t$. Luego la última de las desigualdades (4.2) implica que tiene que ser $2\gamma+r-(k+1) \geqslant t$, siendo k el número de exponentes μ_i nulos. Como $k \geqslant 0$, $2\gamma+r-1 \geqslant t$, es decir, $r \geqslant t - 2\gamma + 1$, que es la primera parte de (v).

Si $t \leqslant 2\gamma$, las desigualdades siempre se cumplen. Sin embargo, no tiene por qué ser así si $t > 2\gamma$. Analizándolas, se concluye que las desigualdades se cumplen si y sólo si

$$\alpha_k \leqslant \mu_{r-1+2\gamma-t+k} \text{ para } k = 1, \dots, t - 2\gamma. \tag{4.6}$$

En efecto, los últimos 2γ valores $\alpha_{t-2\gamma+1}, \dots, \alpha_t$ tienen libertad para ser menores (salvo α_t, por la condición (ii)), iguales o mayores que μ_{r-1}. En cualquier caso, tiene que ser $\alpha_{t-2\gamma} \leqslant \mu_{r-1}$: en caso contrario, al menos los últimos $2\gamma + 1$ valores $\alpha_{t-2\gamma}, \dots, \alpha_t$ serían mayores que μ_{r-1}, lo que significa que no se cumplirían todas las desigualdades y no existiría ningún epimorfismo (en el ejemplo de la figura 4.1 para $2\gamma = 2$, tiene que ser $\alpha_{t-2} \leqslant \mu_{r-1}$ para que la gráfica discontinua no supere a la continua).

De la misma forma, el valor $\alpha_{t-2\gamma-1}$ inmediatamente inferior (o igual) a $\alpha_{t-2\gamma}$ tiene que cumplir $\alpha_{t-2\gamma-1} \leqslant \mu_{r-2}$; en caso contrario, no se cumpliría alguna de las desigualdades. Y también debe ser $\alpha_{t-2\gamma-2} \leqslant \mu_{r-3}$, $\alpha_{t-2\gamma-3} \leqslant \mu_{r-4}$, y así sucesivamente (en la figura 4.1, tiene que ser $\alpha_{t-3} \leqslant \mu_{r-2}$, $\alpha_{t-4} \leqslant \mu_{r-3}$, etc.).

En definitiva, si $t > 2\gamma$, entonces las desigualdades se cumplen (esto es, existe un epimorfismo $\Gamma \to A$, por los lemas 4.2.2 y 4.2.3) si y sólo si

$$\begin{aligned} \alpha_{t-2\gamma} &\leqslant \mu_{r-1} \\ \alpha_{t-2\gamma-1} &\leqslant \mu_{r-2} \\ &\vdots \\ \alpha_1 &\leqslant \mu_{r+2\gamma-t} \end{aligned}$$

para cada primo p que divida a c_t, que son las ecuaciones (4.6). Recordando que ordenamos $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_r$, el hecho de que sea $\alpha_k \leqslant \mu_{r-1+2\gamma-t+k}$ para un $k \in \{1, \dots, t - 2\gamma\}$ equivale a que p^{α_k} divida a las $t-2\gamma-k+2$ potencias p^{μ_i} para $i = r-1+2\gamma-t+k, \dots, r$, esto es, que p^{α_k} divida a los $t-2\gamma-k+2$ períodos m_i para $i=r-1+2\gamma-t+k,\dots,r$. Esto es el enunciado de la condición (v).

Reciprocamente, si se cumplen las condiciones (i)-(v), por la argumentación que acabamos de ver existe un epimorfismo $\Gamma\to A_p$ para cada primo p que divida a c_t, tanto si $2\gamma\geqslant t$ como si $t>2\gamma$, luego existe un epimorfismo $\Gamma\to A$. ■

4.7 Problema del género mínimo. Consideremos un grupo abeliano finito

$$A \approx \mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/c_t\mathbb{Z}$$

con $c_1|c_2|\cdots|c_t$ y la familia $\mathcal{F}$ de grupos Fuchsianos Γ para los que existe algún epimorfismo $\phi:\Gamma\to A$ con núcleo de supeficie. Como hemos visto, dichos grupos Fuchsianos están caracterizados por las condiciones de los teoremas 4.5.5 ó 4.6.1. En esta sección estudiamos el problema del género mínimo g^* para un grupo abeliano finito A no cíclico ($t>1$). El resultado fue establecido en [Maclachlan, 1965, th. 4, pág. 711].

Las condiciones del teorema 4.6.1 determinan el género mínimo g^*. En particular, la condición 4.6.1.(v) permite utilizar los factores invariantes $c_1,\dots,c_{t-2\gamma}$ como períodos de un grupo Fuchsiano candidato para minimizar $\mu(\Gamma)$: el hecho de que los factores primarios de c_k (divisores elementales de $\mathbb{Z}/c_k\mathbb{Z}$) siempre dividen a determinados períodos m_i de cualquier grupo Fuchsiano $\Gamma\in\mathcal{F}$ sugiere que $\mu(\Gamma)$ es minimizada por una signatura con $c_1,\dots,c_{t-2\gamma}$ como períodos. En efecto,

Corolario 4.7.1. *Sea $A\approx\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/c_t\mathbb{Z}$, con $t>1$, un grupo abeliano finito de orden mayor que 9 con factores invariantes $c_1,c_2,\dots,c_t>1$ tales que $c_1|c_2|\cdots|c_t$. El género mínimo g^* de una superficie de Riemann compacta para la que A es un grupo de automorfismos verifica*

$$\frac{2(g^*-1)}{|A|}=\min_{0\leqslant 2\gamma<t^*}\left\{2(\gamma-1)+\sum_{i=1}^{t-2\gamma}\left(1-\frac{1}{c_i}\right)+\left(1-\frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right)\right\}$$

siendo $t^*=t$ si $t=2$ o impar, o bien, $t^*=t+1$ si t es par mayor que 2 (interpretamos $c_0=1$).

Observaciones. El requisito $t>1$ proviene, como se verá en la demostración lema 4.7.2, de la condición necesaria 4.6.1.(iii) para que exista un epimorfismo con núcleo de superficie $\widetilde{\Gamma}\to A$.

Si $t=2$, $|A|=c_1c_2$ y la expresión para g^* de forma explícita queda

$$g^*=\frac{1}{2}(c_1c_2-c_2)-c_1+1.$$

■

Demostración. En primer lugar, consideremos $\gamma \geqslant 0$ tal que $2\gamma < t$ y la signatura

$$(\gamma\,;\, c_1\,,\, c_2\,,\, \dots\,,\, c_{t-2\gamma-1}\,,\, c_{t-2\gamma}\,,\, c_{t-2\gamma}) \tag{4.7}$$

Observamos que posee $t - 2\gamma + 1$ períodos. Por el teorema 2.1.1 de Poincaré, define un grupo Fuchsiano, que llamamos $\widetilde{\Gamma}$, si y sólo si

$$\mu(\widetilde{\Gamma})/2\pi \;=\; 2(\gamma-1) + \sum_{i=1}^{t-2\gamma}\left(1-\frac{1}{c_i}\right) + \left(1-\frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) \;>\; 0$$

Cuando $2\gamma < t$ y $\mu(\widetilde{\Gamma}) > 0$, el teorema 4.6.1 garantiza que siempre existe un epimorfismo suave $\widetilde{\Gamma} \to A$, es decir, $\widetilde{\Gamma} \in \mathcal{F}$ (ver el lema 4.7.2 más adelante).

El miembro de la izquierda puede ser nulo o negativo sólo cuando $2(\gamma-1)$ sea negativo, i.e., cuando $\gamma = 0$, pues es $1 - 1/c_i > 0$. Resulta que sólo es $\mu(\widetilde{\Gamma}) \leqslant 0$ para cuatro grupos abelianos finitos no cíclicos ($t > 1$), los cuatro con orden 9 o menor: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Comprobaremos esta afirmación y estudiaremos el género mínimo para estos cuatro grupos tras esta demostración.

Así, cuando $|A| > 9$, entonces siempre es $\mu(\widetilde{\Gamma}) > 0$ para cualquier γ tal que $0 \leqslant 2\gamma < t$. El corolario quedará demostrado si constatamos las dos afirmaciones siguientes:

a) Para γ con $0 \leqslant 2\gamma < t$, $\mu(\widetilde{\Gamma})$ es menor o igual que $\mu(\Gamma)$ para cualquier $\Gamma \in \mathcal{F}$ con tal γ en su signatura.

b) Si $2\gamma \geqslant t$, para cualquier $\Gamma \in \mathcal{F}$ con tal γ en su signatura, o bien existe un $\gamma' \geqslant 0$ con $2\gamma' < t$ cuyo $\widetilde{\Gamma}$ correspondiente cumple $\mu(\widetilde{\Gamma}) \leqslant \mu(\Gamma)$, o bien, si no existe tal γ', entonces $\mu(\Gamma) \geqslant t - 2$ (pues veremos que este caso se puede dar cuando $t \neq 2$ es par, y entonces el término de la derecha de la expresión del enunciado contempla el valor $2(t/2-1) + \sum_{i=1}^{t-t=0} \ldots = t-2$).

Probamos estos puntos a continuación.

a) Con γ tal que $0 \leqslant 2\gamma < t$, sea $\Gamma \in \mathcal{F}$ con signatura $(\gamma;\, m_1, \ldots, m_r)$. Como vimos en §4.3, y con la notación $(\gamma;\, \hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_r)$ definida en §2.6, su abelianización es

$$\Gamma_{ab} \;\approx\; \hat{\Gamma}_{ab} \;\approx\; \mathbb{Z}^{2\gamma} \,\oplus\, \mathbb{Z}/\hat{m}_1\mathbb{Z} \,\oplus \cdots \oplus\, \mathbb{Z}/\hat{m}_{r-1}\mathbb{Z}.$$

(Puede que algunos de los primeros $\hat{m}_i$ resulten ser iguales a 1, pero esto no afecta a la siguiente argumentación).

Que sea $\hat{\Gamma}_{ab} \approx \Gamma_{ab}$ es equivalente a que los divisores elementales $p_j^{\mu_{ij}}$ sean los mismos para ambas signaturas, y esta es precisamente la situación que estudiamos en §2.6 en la que es $\Omega(m_1, \ldots, m_r) = \Omega(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_r)$. Por lo tanto, del lema 2.6.1 concluimos que $\hat{\Gamma}$ minimiza el término $2(\gamma-1) + \sum_{i=1}^{r}(1 - 1/m_i)$ entre los grupos Fuchsianos con la misma abelianización.

Ahora, en el lema 4.7.3 se demuestra que, si $\mu(\widetilde{\Gamma}) > 0$ para un γ dado, tanto $(\gamma;\, c_1, c_2, \ldots, c_{t-2\gamma}, c_{t-2\gamma})$ como $(\gamma;\, \hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_r)$ son signaturas que definen grupos Fuchsianos por el teorema 2.1.1 de Poincaré, de forma que $\mu(\widetilde{\Gamma}) \leqslant \mu(\hat{\Gamma})$ por el lema 4.7.3.

Por lo tanto, $\hat{\Gamma}$ minimiza el término $\mu(\Gamma)$ entre los grupos Fuchsianos con la misma abelianización, y $\widetilde{\Gamma}$ entre los que tienen signatura con igual γ, siendo $2\gamma < t$.

b) Cuando γ es tal que $2\gamma \geqslant t$, la signatura $(\gamma; —)$ corresponde a un grupo Fuchsiano $\Gamma \in \mathcal{F}$ (cumple las condiciones del teorema 4.6.1) que tiene área hiperbólica $\mu(\Gamma)/2\pi = 2(\gamma - 1) > 0$ menor que cualquier otro con igual γ y períodos $m_i > 1$, pues $1 - 1/m_i > 0$. Así, el menor γ posible proporciona el menor valor de $\mu(\Gamma)$. Siendo $2\gamma \geqslant t$, el menor γ posible es

a) $\gamma = 2$, si $t = 2$ ($\gamma = 1$ implica $\mu(\Gamma) = 0$ y Γ no sería Fuchsiano).
b) $\gamma = t/2$, si t es par $\neq 2$.
c) $\gamma = (t+1)/2$, si t es impar.

y los valores de $\mu(\Gamma)$ correspondientes son

a) $\mu(\Gamma)/2\pi = 2$, si $t = 2$.
b) $\mu(\Gamma)/2\pi = t - 2$, si t es par $\neq 2$.
c) $\mu(\Gamma)/2\pi = t - 1$, si t es impar.

Ahora, sea $\gamma' \geqslant 0$ tal que $t > 2\gamma'$ y su $\widetilde{\Gamma}$ correspondiente. Entonces,

$$\mu(\widetilde{\Gamma})/2\pi = t - 1 - \left(\frac{1}{c_1} + \cdots + \frac{1}{c_{t-2\gamma'-1}} + \frac{2}{c_{t-2\gamma'}}\right)$$

Si $t = 2$, entonces $\mu(\widetilde{\Gamma})/2\pi < 2 = \mu(\Gamma)/2\pi$ para $\gamma' = 0$ (recordemos que estamos suponiendo $|A| > 9$, y es $\mu(\widetilde{\Gamma}) > 0$). De la misma forma, $\mu(\widetilde{\Gamma})/2\pi < t - 1 = \mu(\Gamma)/2\pi$ para $\gamma' = 0$ si t es impar. Sin embargo, si $t > 2$ es par, podría ser $\mu(\widetilde{\Gamma}) > \mu(\Gamma)$ para todos los valores γ'. Contemplamos esta situación definiendo

$$t^* = \begin{cases} t & \text{si } t = 2 \text{ o } t \text{ impar} \\ t+1 & \text{si } t \text{ par } \neq 2 \end{cases},$$

de forma que, si $t \neq 2$ es par, la expresión $0 \leqslant 2\gamma < t^*$ también incluye el caso $2\gamma = t$ para el cual la expresión

$$2(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{t-2\gamma}\left(1 - \frac{1}{c_i}\right) + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) = t - 2$$

es igual a $\mu(\Gamma)/2\pi$. ■

En definitiva, hemos visto que, bien el grupo Fuchsiano $\Lambda \in \mathcal{F}$ de signatura $(t/2; —)$, o bien alguno de los grupos Fuchsianos $\widetilde{\Gamma}$ con signatura $(\gamma;\, c_1, c_2, \ldots, c_{t-2\gamma}, c_{t-2\gamma})$, siendo $0 \leqslant 2\gamma < t$, minimiza $\mu(\Gamma)$ y, por tanto, el género g, en $\mathcal{F}$. La cota inferior de 9 en el orden de A proviene de los casos para los que la signatura anterior no define un grupo Fuchsiano; están determinados por la condición de que, para alguno de esos γ, sea

$$2(\gamma-1)+\sum_{i=1}^{t-2\gamma}\left(1-\frac{1}{c_i}\right)+\left(1-\frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) \leqslant 0$$

Como hemos indicado antes, el término izquierdo es positivo si $\gamma > 0$, luego su valor puede ser negativo sólo si $\gamma = 0$ y queda la condición

$$-2+\sum_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{c_i}\right)+1-\frac{1}{c_t} \leqslant 0 \tag{4.8}$$

Sólo puede darse si $t = 2$ o $t = 3$, quedando, respectivamente, $c_1c_2 - 2c_1 - c_2 \leqslant 0$ y $2c_1c_2c_3 - 2c_1c_2 - c_1c_3 - c_2c_3 \leqslant 0$. Las soluciones son:

$$\begin{aligned}
&c_1 = 2, \quad c_2 = 2\\
&c_1 = 2, \quad c_2 = 4\\
&c_1 = 3, \quad c_2 = 3\\
&c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2
\end{aligned}$$

Para obtener los grupos Fuchsianos correspondientes que minimizan $\mu(\Gamma)$ basta realizar unas pocas observaciones sobre el valor adecuado de γ y los posibles períodos que permite el teorema 4.6.1 en cada caso.

Por ejemplo, en el primer caso $c_1 = c_2 = 2$ los períodos únicamente pueden ser iguales a 2. Para $\gamma = 0$, la primera signatura para la cual $\mu(\Gamma)$ es positiva es $(0;\, 2,2,2,2,2)$, con lo cual $\mu(\Gamma)/2\pi = 1/2$ y $g^* = 2$. Para $\gamma = 1$, el mínimo posible es $\mu(\Gamma)/2\pi = 1$ para $(1;\, 2,2)$. Y siempre es $\mu(\Gamma)/2\pi > 1/2$ si $\gamma > 1$.

En los otros casos es similar. Los grupos A y Γ y los géneros mínimos resultantes son

$$\begin{array}{lll}
A \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (0;\, 2,2,2,2,2) & g^* = 2\\
A \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (0;\, 2,2,2,2,4,4) & g^* = 3\\
A \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (0;\, 3,3,3,3) & g^* = 4\\
A \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (0;\, 2,2,2,2,2) & g^* = 3
\end{array}$$

Estos grupos comprenden todos los casos posibles de grupos abelianos no cíclicos ($t > 1$) de órden menor que diez, de ahí la cota en el enunciado del corolario para el orden de A.

Establecemos, finalmente, los dos lemas utilizados en la demostración del corolario. Son asimismo consecuencia del teorema 4.6.1.

Lema 4.7.2. *Si* $t > \text{máx}\{1, 2\gamma\}$ *y* $\mu(\widetilde{\Gamma}) > 0$*, entonces existe un epimorfismo* $\widetilde{\Gamma} \to A$ *con núcleo de superficie, esto es,* $\widetilde{\Gamma} \in \mathcal{F}$*.*

Demostración. Las condiciones 4.6.1.(i) y (ii) son obvias, ya que siempre tenemos, al menos, los dos últimos períodos $c_{t-2\gamma}, c_{t-2\gamma}$ y $c_1|c_2|\cdots|c_t$.

La condición 4.6.1.(iii) también se cumple si $\gamma \neq 0$, y requiere que sea $t > 1$ si $\gamma = 0$ (la signatura (4.7) tiene $t+1$ períodos si $\gamma = 0$, y, por 4.6.1.(iii), tiene que ser $t+1 \geqslant 3$), lo cual está garantizado por la condición $t > \text{máx}\{1, 2\gamma\}$ del enunciado. Así pues, en cualquier caso tiene que ser $t > 1$, tanto si $\gamma = 0$ como si $\gamma > 0$ (para este último caso $t > 2\gamma \geqslant 2$).

La condición 4.6.1.(iv) sólo puede tener lugar si $\gamma = 0$: si $\gamma > 0$ y $M = \text{mcm}(c_1, \dots, c_{t-2\gamma}) = c_{t-2\gamma}$ es par, entonces la potencia de 2 en $c_{t-2\gamma}$ divide a más de un divisor elemental de A. Y, si $\gamma = 0$, entonces $t - 2\gamma = t$ y, si sólo c_t es divisible por su potencia de 2, tenemos los dos últimos períodos $c_{t-2\gamma}, c_{t-2\gamma}$ de forma que se cumple 4.6.1.(iv).

Finalmente, 4.6.1.(v) también es trivial según hemos definido la signatura de $\widetilde{\Gamma}$. ■

Lema 4.7.3. *Si $t > 2\gamma$ y con las definiciones anteriores,*

$$\sum_{i=1}^{t-2\gamma} \left(1 - \frac{1}{c_i}\right) + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right)$$

Demostración. La expresión desarrollada es

$$\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_r}\right).$$

$\Gamma \in \mathcal{F}$, es decir, Γ cumple las condiciones del teorema 4.6.1. Los factores $p_j^{\hat{\mu}_{ij}}$ de los $\hat{m}_i$ son una reordenación de los factores $p_j^{\mu_{ij}}$ de los m_i, pero son los mismos en todo caso. Luego, por las condiciones 4.6.1.(i) y (v),

$$\begin{array}{lll} c_{t-2\gamma} & \text{divide a} & \hat{m}_r \text{ y } \hat{m}_{r-1}, \\ c_{t-2\gamma-1} & \text{divide a} & \hat{m}_{r-2}, \\ & \vdots & \\ c_1 & \text{divide a} & \hat{m}_{r-t+2\gamma}. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{c_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) + \left(1 - \frac{1}{c_{t-2\gamma}}\right) \\ \leqslant \; & \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_{r-t+2\gamma}}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_{r-1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_r}\right) \\ \leqslant \; & \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_r}\right) \end{aligned}$$

■

5 Grupos de automorfismos diédricos

Nos dedicamos en este capítulo al estudio de los resultados sobre grupos diédricos incluidos en [Bujalance et al., 2003] en relación con la existencia de epimorfismos con núcleo de superficie y el problema de género mínimo asociado.

Al igual ocurría para grupos cíclicos y abelianos finitos, veremos cómo las características del grupo diédrico, en este caso su orden, determinan las signaturas posibles de los grupos Fuchsianos para los que existen tales epimorfismos.

Ya mencionamos en la introducción que el problema del género mínimo para grupos diédricos fue resuelto inicialmente en [Maclachlan, 1966], y después como caso particular en [Adel, 1983]. El teorema de existencia de epimorfismos con núcleo de superficie en [Bujalance et al., 2003] proporciona, al igual que hemos visto para grupos cíclicos y abelianos finitos, una solución independiente al problema del género mínimo. Desarrollamos aquí la demostración.

5.1 Condiciones de existencia de epimorfismos suaves. Para el estudio del caso de grupos diédricos veremos que será importante cuántos períodos en la signatura de Γ son iguales a 2. Denotamos por t a tal número de períodos iguales a 2, de forma que la signatura de Γ es $(\gamma; m_1, \dots, m_r, 2, \overset{t}{\dots}, 2)$ con $m_i \geqslant 3$ para $i \in \{1, \dots, r\}$ y $m_i = 2$ para $i \in \{r+1, \dots, r+t\}$. Su presentación es

$$\Gamma = \langle\, a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma, x_1, \dots, x_{r+t} \mid x_1^{m_1},\ \dots,\ x_r^{m_{r+t}},\ x_1 \cdots x_{r+t} \textstyle\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]\,\rangle.$$

El grupo diédrico de orden $2N$

$$D_N = \{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{N-1}, \sigma, \tau\sigma, \tau^2\sigma, \dots, \tau^{N-1}\sigma\}$$

tiene la presentación

$$D_N = \left\langle \tau, \sigma \mid \tau^N, \sigma^2, \sigma\tau\sigma^{-1}\tau \right\rangle$$

Los elementos $\sigma, \tau\sigma, \tau^2\sigma, \dots, \tau^{N-1}\sigma$ tienen todos orden 2, pues $\tau^k\sigma = \sigma\tau^{-k}$ y $(\tau^k\sigma)^2 = \tau^k\sigma\tau^k\sigma = \tau^k\tau^{-k}\sigma\sigma = \sigma^2 = 1$. Un elemento τ^k pertenece al subgrupo cíclico $C_N \approx \langle\tau\rangle$ y tiene orden $N/\operatorname{mcd}(k, N)$. Todo elemento de $C_N \approx \langle\tau\rangle$ de orden d es de la forma $\tau^{N\epsilon/d}$ con d y ϵ coprimos.

Enunciamos las condiciones de existencia de epimorfismos con núcleo de superficie de forma separada en función de que γ sea nulo o positivo y N sea par o impar. Utilizaremos las siguientes definiciones:

$$
\begin{aligned}
a &= \mathrm{card}(A), \quad \text{con } A = \{i \in \{1, \dots, r+t\} \mid N/m_i \text{ es impar}\},\\
b &= \mathrm{card}(B), \quad \text{con } B = \{i \in \{1, \dots, r+t\} \mid N/m_i = 2d \text{ con } d \text{ impar}\}.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.1.1. *Existe un epimorfismo con núcleo de superficie $\phi : \Gamma \to D_N$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $m_i|N$ *para todo* $i \in \{1, \dots, r\}$.

(ii) *Cuando* $\gamma > 0$ *y* N *es par:*

a) *Si* $t \leqslant 1$*, entonces* a *es par.*
b) *Si* $\gamma = 1$ *y* $t \leqslant 1$ *entonces* $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r, 2^t) = N$ *o* $N/2$*. En el segundo caso, si* $N \in 4\mathbb{Z}$ *entonces* b *es impar.*

(iii) *Cuando* N *es impar:*

a) t *es par.*
b) *Si* $\gamma = 1$ *y* $t = 0$*, entonces* $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$.

(iv) *Cuando* $\gamma = 0$*:*

a) $t \geqslant 2$.
b) *Si* $t = 2$ *entonces* $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$.
c) *Si* $t = 3$ *entonces* $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_r, 2) = N$.

Demostración. (Necesidad) Sea $\phi : \Gamma \to D_N$ un epimorfismo con núcleo de superficie.

(i) Por ser ϕ epimorfismo con núcleo de superficie se cumple $|\phi(x_i)| = m_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Como $m_i \geqslant 3$, tiene que ser $\phi(x_i) \in C_N$, pues todos los elementos de $D_N - C_N$ tienen orden 2, luego $|\phi(x_i)|$ divide a $|C_N|$, es decir, $m_i|N$.

(ii.a) Los elementos $\phi(x_i) \in C_N \approx \langle\tau\rangle$ son de la forma $\phi(x_i) = \tau^{N\epsilon_i/m_i}$ con m_i y ϵ_i coprimos. El subgrupo conmutador de D_N es $D'_N = \langle\tau^2\rangle$, por lo que $\phi([a_j, b_j])$ es una potencia par de τ. Si $t = 1$, la relación $x_1 \cdots x_{r+t} \prod_{j=1}^{\gamma}[a_j, b_j]$ de la presentación de Γ implica

$$1 = \textstyle\prod_{i=1}^{r} \phi(x_i) \cdot \phi(x_{r+1}) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \phi([a_j, b_j]) = \tau^{2\alpha + \sum_{i=1}^{r} N\epsilon_i/m_i} \cdot \phi(x_{r+1})$$

para cierto entero α. Así, $\phi(x_{r+1}) = \tau^{-2\alpha - \sum N\epsilon_i/m_i} \in C_N$ y su orden es 2, luego $\phi(x_{r+1}) = \tau^{N/2}$. Con esto, tanto si $t = 1$ como si $t = 0$, podemos escribir

$$\phi(x_i) = \tau^{N\epsilon_i/m_i} \text{ para } i \in \{1, \dots, r+t\} \text{ y } \tau^{2\alpha + \sum_{i=1}^{r+t} N\epsilon_i/m_i} = 1,$$

por lo que $2\alpha + \sum_{i=1}^{r+t} N\epsilon_i/m_i$ tiene que ser múltiplo de $|\tau| = N$, digamos,

$$2\alpha + \sum_{i=1}^{r+t} N\epsilon_i/m_i = kN, \text{ luego } \sum_{i=1}^{r+t} N\epsilon_i/m_i = kN - 2\alpha$$

Como N es par, $kN - 2\alpha$ es par y $\sum_{i=1}^{r+t} N\epsilon_i/m_i$ también tiene que serlo. Para ello, el número de sumandos $N\epsilon_i/m_i$ impares tiene que ser par.

Ahora, como N es par y $\operatorname{mcd}(m_i, \epsilon_i) = 1$, $N\epsilon_i/m_i$ es impar $\Leftrightarrow$ N/m_i es impar. En efecto, si $N\epsilon_i/m_i$ es impar, entonces N/m_i y ϵ_i son impares. Y, si $N\epsilon_i/m_i$ es par, entonces N/m_i o ϵ_i (o ambos) tiene que ser par; pero si ϵ_i es par, m_i tiene que ser impar (pues $\operatorname{mcd}(m_i, \epsilon_i) = 1$), luego N/m_i es par (pues N es par).

En definitiva, a tiene que ser par si $t \leqslant 1$.

(ii.b) Como hemos visto en (ii.a), si $t = 1$ entonces $\phi(x_{r+1}) \in C_N$. Para el resto de generadores elípticos también $\phi(x_i) \in C_N$, ya que $|\phi(x_i)| = m_i \geqslant 3$. Siendo, además, $\gamma = 1$, tiene que ser $\phi(a_1) = \sigma$ o bien $\phi(b_1) = \sigma$, en caso contrario ϕ no sería sobreyectivo. Ocurre igual si $t = 0$, pues no puede ser $\phi(x_i) = \sigma$ con $m_i \geqslant 3$. Tomemos, entonces, $\phi(a_1) = \sigma$ y $\phi(b_1) = \tau^\alpha \sigma^\delta$ con $\delta \in \{0, 1\}$ y $0 \leqslant \alpha \leqslant N - 1$ (en principio, $\phi(b_1)$ puede ser cualquier elemento de D_N, sólo se tiene que garantizar que ϕ sea sobreyectivo). El subgrupo cíclico C_N tiene que estar generado por los elementos τ^α y $\tau^{N\epsilon_i/m_i} = \phi(x_i)$ para $i = 1, \dots, r + t$ (por la expresión general $\tau^k\sigma = \sigma\tau^{-k}$, cualquier producto finito de potencias de $\phi(a_1)$ y $\phi(b_1)$ queda reducido a un elemento del tipo $(\tau^\alpha)^s$ o bien $(\tau^\alpha)^s\sigma$, con $s \in \mathbb{Z}$). Además,

$$\phi([a_1, b_1]) = \phi(a_1)^{-1}\phi(b_1)^{-1}\phi(a_1)\phi(b_1) = \tau^{2\beta},$$

con $\beta = \alpha$ o $\beta = -\alpha$, dependiendo de si es $\delta = 0$ o $\delta = 1$, respectivamente. Por la relación $x_1 \cdots x_r \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j]$ se tiene

$$2\beta + \sum_{i=1}^{r+t} \frac{N}{m_i} \cdot \epsilon_i \ \in \ N\mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

por lo que

$$\tau^{2\beta} = \tau^{-\sum N\epsilon_i/m_i} = \tau^{N\epsilon_1/m_1} \cdots \tau^{N\epsilon_{r+t}/m_{r+t}}.$$

Así, $\tau^{2\beta} \in G_N = \left\langle \tau^{N\epsilon_i/m_i} : i = 1, \dots, r + t \right\rangle$. Si $\tau^\beta \in G_N$, entonces $G_N = C_N$ y $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = \exp G_N = |G_N| = |C_N| = N$. Como es $t = 0$ o $t = 1$, en ambos casos resulta

$$\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r, 2^t) = N.$$

Si $\tau^\beta \notin G_N$, entonces G_N es un subgrupo de C_N de índice 2, pues $\tau^{2\beta}$ sí que pertenece a G_N, de forma que hay dos clases laterales, G_N y $\tau^\beta G_N$ ($C_N/G_N \approx C_2$). En ese caso,

$$\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r, 2^t) = |G_N| = |C_N|/[C_N : G_N] = N/2.$$

Ahora, por esta última igualdad $m_i|N/2$ para $i = 1, \dots, r+t$, luego $N = 2k_i m_i$ con $k_i \in \mathbb{Z}$, esto es, $N/m_i = 2k_i$ es par (y $a = 0$). Entonces, los elementos $\tau^{N\epsilon_i/m_i}$ son potencias pares de τ. Como los elementos τ^α y $\tau^{N\epsilon_i/m_i}$ para $i = 1, \dots, r+t$ tienen que generar C_N, $\alpha = \pm\beta$ tiene que ser impar para poder generar las potencias impares de τ en C_N. Podemos escribir, entonces, $\beta = 2p+1$, la ecuación (5.1) implica

$$(2p+1) + \sum_{i=1}^{r+t} \frac{N/2}{m_i} \cdot \epsilon_i \;\in\; \frac{N}{2}\mathbb{Z}.$$

Vimos en (ii.a) que, por ser N par y $\operatorname{mcd}(m_i, \epsilon_i) = 1$, $N\epsilon_i/m_i$ es impar $\Leftrightarrow$ N/m_i es impar. De la misma forma se demuestra que, si $N \in 4\mathbb{Z}$ y $\operatorname{mcd}(m_i, \epsilon_i) = 1$, entonces $N\epsilon_i/2m_i$ es impar $\Leftrightarrow$ $N/2m_i$ es impar. Así, como $N/2$ es par si $N \in 4\mathbb{Z}$, en ese caso $\frac{N}{2}\mathbb{Z}$ está formado por enteros pares, luego $(2p+1) + \sum_{i=1}^{r+t} \frac{N/2}{m_i} \cdot \epsilon_i$ tiene que ser par, por lo que $\sum_{i=1}^{r+t} \frac{N/2}{m_i} \cdot \epsilon_i$ tiene que tener una cantidad impar de sumandos impares, esto es, b tiene que ser impar.

(iii.a) Si N es impar, los elementos $\phi(x_{r+i})$ para $i = 1, \dots, t$ no pueden pertenecer a C_N, pues tienen orden 2, así que tienen que ser de la forma $\phi(x_{r+i}) = \tau^{\alpha_i}\sigma$. Para $i = 1, \dots, r$, $\phi(x_i) \in \langle \tau \rangle$, pues dichos x_i tienen orden mayor que 2. Además, como vimos en la demostración de (ii.a), el subgrupo conmutador D'_N es $\langle \tau^2 \rangle$, luego $\phi([a_j, b_j]) = \tau^{2\beta_j} \in \langle \tau \rangle = C_N$ para $j = 1, \dots, \gamma$. Entonces, de la relación $x_1 \cdots x_{r+t} \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j]$ de Γ se tiene que

$$\phi(x_{r+1}) \cdots \phi(x_{r+t}) = (\phi(x_1) \cdots \phi(x_r))^{-1} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\gamma} \phi([a_j, b_j]) \right)^{-1} \;\in\; \langle \tau \rangle\,,$$

luego $\prod_{i=1}^{t} \tau^{\alpha_i}\sigma \in \langle \tau \rangle$, lo cual puede ser sólo si σ queda con exponente par, es decir, sólo si t es par.

(iii.b) Como vimos en la demostración de (ii.b), para $t = 0$ y $\gamma = 1$ podemos tomar $\phi(a_1) = \sigma$ y $\phi(b_1) = \tau^\alpha \sigma^\delta$ con $\delta \in \{0, 1\}$ y $0 \leqslant \alpha \leqslant N-1$. También se tiene que $\phi(x_i) \in C_N$, pues $|x_i| \geqslant 3$, luego $\phi(x_i) = \tau^{N\epsilon_i/m_i}$ con $\operatorname{mcd}(m_i, \epsilon_i) = 1$. Por la relación $x_1 \cdots x_{r+t} \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j]$ de Γ, se tiene

$$1 = \phi(x_1) \cdots \phi(x_r) \cdot \phi([a_1, b_1]) = \tau^{N\epsilon_1/m_1} \cdots \tau^{N\epsilon_r/m_r} \cdot \tau^{\pm 2\alpha},$$

por lo cual $\tau^{2\alpha}$ pertenece a $\left\langle \tau^{N\epsilon_i/m_i} \;:\; i = 1, \dots, r \right\rangle$. Por ser $|\tau| = N$ impar, digamos, $|\tau| = N = 2k+1$, se tiene $1 = (\tau^\alpha)^N = (\tau^\alpha)^{2k+1} = (\tau^\alpha)^{2k} \cdot \tau^\alpha = (\tau^{2\alpha})^k \cdot \tau^\alpha$, luego $\tau^\alpha = (\tau^{2\alpha})^{-k}$, es decir, $\tau^\alpha \in \langle \tau^{2\alpha} \rangle$. Por lo tanto, $C_N = \left\langle \tau^{N\epsilon_i/m_i} \;:\; i = 1, \dots, r \right\rangle$, pues C_N está generado por τ^α y los $\tau^{N\epsilon_i/m_i}$, como se indica en la demostración de (ii.b). Por lo tanto, $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = \exp C_N = |C_N| = N$.

(iv.a) Como vimos en la demostración de (ii.a), si $t = 1$, $\phi(x_i) \in C_N$ para $i = 1, \dots, r+t$, luego el elemento $\sigma \in D_N$ no puede pertenecer a la imagen de ϕ. Tampoco si $t = 0$. Por lo tanto, tiene que ser $t \geqslant 2$.

(iv.b) Si $t = 2$, tiene que ser $\phi(x_{r+1}) = \sigma$ o bien $\phi(x_{r+2}) = \sigma$; supongamos $\phi(x_{r+1}) = \sigma$. Por la relación $x_1 \cdots x_{r+t} \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j]$ de Γ resulta

$$\phi(x_{r+2}) \;=\; (\phi(x_1) \cdots \phi(x_r) \cdot \phi(x_{r+1}))^{-1} \;=\; \phi(x_1) \cdots \phi(x_r) \cdot \phi(x_{r+1})^{-1},$$

pues $\phi(x_i) \in C_N$ para $i = 1, \dots, r$ y $\tau^k\sigma = \sigma\tau^{-k}$. Por lo tanto, $\phi(x_{r+2}) = \tau^\alpha\sigma \notin C_N$ para cierto entero α y C_N tiene que ser generado por $\{\phi(x_i), \dots, \phi(x_r)\}$, luego $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$.

(iv.c) Con $t = 3$, tomemos $\phi(x_{r+1}) = \sigma$. Entonces

$$\phi(x_{r+2}) \cdot \phi(x_{r+3}) \;=\; \phi(x_1) \cdots \phi(x_r) \cdot \phi(x_{r+1})^{-1} \;=\; \tau^\nu\sigma,$$

para cierto $\nu \in \mathbb{Z}$. Por ello uno de los elementos $\phi(x_{r+2}), \phi(x_{r+3})$ tiene que ser de la forma τ^α y el otro $\tau^\beta\sigma$, si fuesen ambos del mismo tipo su producto no sería de la forma $\tau^\nu\sigma$. Supongamos que es $\phi(x_{r+2}) = \tau^\alpha$. Así, C_N tiene que ser generado por $\{\phi(x_i), \dots, \phi(x_r), \phi(x_{r+2})\}$, y, por tanto, $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r, 2) = N$.

(Suficiencia) En las tablas que siguen se define el epimorfismo ϕ sobre los generadores de Γ que, en cada caso, demuestra la suficiencia de las condiciones. Tenemos que comprobar, en cada uno de los casos indicados, que $\phi(x_i)^{m_i} = 1, i = 1, \dots, r + t$, y $\prod_{i=1}^{r+t} \phi(x_i) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \phi([a_j, b_j]) = 1$ (estas condiciones provienen de las relaciones de la presentación de Γ; si no se cumplieran ϕ no sería homomorfismo), que es sobreyectivo y que mantiene el orden de los elementos elípticos, $|\phi(x_i)| = |x_i|$ (esto garantiza, además, que $\phi(x_i)^{m_i} = 1$). De esta forma, ϕ es un epimorfismo con núcleo de superficie por el teorema 2.4.1.

Es inmediato comprobar que $\prod_{i=1}^{r+t} \phi(x_i) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \phi([a_j, b_j]) = 1$ en cada caso, teniendo en cuenta las definiciones de α o β, que $\sigma\tau^k = \tau^{-k}\sigma$ para cualquier entero k y que, como se indicó al pricipio de la sección, los elementos $\tau^k\sigma$ son siempre de orden 2. Los elementos τ^{N/m_i} tienen orden m_i, pues $m_i | N$ en todos los casos en los que se define $\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$ (en C_N, si $N = dk$ e $y = \tau^k$, entonces $|y| = d$). Por tanto, es claro que las definiciones en las tablas hacen que ϕ mantenga el orden de los elementos elípticos x_i.

Para comprobar que es sobreyectivo, observamos, en primer lugar, que $\phi(g) = \sigma$ para un generador g de Γ en todos los casos. Además, en algunos casos se define $\phi(g') = \tau\sigma$ para otro generador g'; en esos casos $\phi(g')\phi(g) = \tau\sigma\sigma = \tau$, luego $\phi(g)$ y $\phi(g')\phi(g)$ generan D_N y ϕ es sobreyectivo.

Del resto de casos, para los señalados con (*) en las tablas ϕ las condiciones del teorema incluyen que se cumpla $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N$ o bien $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$, por lo que ϕ es también es sobreyectivo en estos casos (cuando $\gamma = 0$ esto sólo incluye a $t = 2$ y $t = 3$; para $t \geqslant 4$ la situación es la del párrafo anterior). En efecto, hemos visto que $|\phi(x_i)| = m_i$. Consideremos $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$ (el argumento es igual para $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N$). Sea $H = \langle \phi(x_1), \dots, \phi(x_r) \rangle$, subgrupo (cíclico) de C_N. Entonces, $\exp H = \operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r)$. Para todo grupo cíclico su orden es igual a su exponente; en nuestro caso, $|H| = \operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = N$, luego $H = C_N$.

En los casos (†) y (‡), $\operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N/2$ implica que $H = \langle \phi(x_1), \dots, \phi(x_{r+t}) \rangle$ es subgrupo de C_N de orden $N/2$ e índice $[C_N : H] = |C_N|/|H| = 2$. Sus elementos son las potencias pares de τ. Veamos primero que $N/2 + \beta$ (†) y α (‡) son impares. En (‡), como N es par pero $4 \nmid N$ entonces $N/2$ es impar y α es impar eligiendo $\delta = 1$ ó 2.

Respecto a (†), $\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N/2$ implica que $2|N/m_i$, i.e., los cocientes N/m_i son todos pares. Además, en (†) se tiene que $4|N$, y b es impar por (ii.b), luego N/m_i es múltiplo de 4 si $i \notin B$ y

$$\sum_{i=1}^{r+t} \frac{N}{m_i} = \sum_{i \notin B} \frac{N}{m_i} + \sum_{i \in B} \frac{N}{m_i} = 4\lambda + \sum_{i \in B} 2(2\lambda_i + 1) = 4\left(\lambda + \sum_{i \in B} \lambda_i\right) + 2b = 2\beta,$$

siendo λ, λ_i enteros. Como b es impar, β tiene que ser impar, luego también $N/2 + \beta$, pues $N/2$ es par.

Así, como $N/2 + \beta$ y α, respectivamente, son impares, $\tau^{N/2+\beta} \notin H$ en (†) y $\tau^{\alpha} \notin H$ en (‡). Por ser H de índice 2, en (†) cualquier elemento $g \in C_N$ que no pertenezca a H puede expresarse como $g = h\tau^{N/2+\beta}$ para algún $h \in H$, luego $\left\langle \tau^{N/2+\beta}, \phi(x_1), \dots, \phi(x_{r+t}) \right\rangle = C_N$ y ϕ es sobreyectivo. Y análogamente en (‡) con τ^{α}.

<table>
<tr><th colspan="3">$\gamma > 0$, N par</th></tr>
<tr><td>$t > 1$</td><td>$\phi(a_j) = \tau\sigma$
$\phi(b_j) = \sigma$
$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$, $i = 1, \dots, r$
$\phi(x_{r+i}) = \tau^{N/2}$, $i = 1, \dots, t-2$
$\phi(x_{r+t-1}) = \tau^{-\alpha}\sigma$
$\phi(x_{r+t}) = \sigma$</td><td>$\alpha = 2\gamma + \sum_{i=1}^{r} N/m_i + (t-2)N/2$</td></tr>
<tr><td>$t \leqslant 1$
$\gamma \geqslant 2$</td><td>$\phi(a_j) = \tau\sigma$
$\phi(b_1) = \sigma$
$\phi(b_2) = \tau^{\alpha}\sigma$
$\phi(b_j) = \tau\sigma$, $j = 3, \dots, \gamma$
$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$, $i = 1, \dots, r+t$</td><td>$\sum_{i=1}^{r+t} N/m_i - N + 4 = 2\alpha$,
con $\alpha \in \mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$t \leqslant 1$
$\gamma = 1$</td><td colspan="2">$\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N$</td></tr>
<tr><td>(*) $\phi(a_1) = \sigma$
$\phi(b_1) = \tau^{\alpha}\sigma$
$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$, $i = 1, \dots, r+t$</td><td>$\sum_{i=1}^{r+t} N/m_i - N = 2\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N/2, \quad 4|N$</td></tr>
<tr><td>(†) $\phi(a_1) = \sigma$
$\phi(b_1) = \tau^{N/2+\beta}\sigma$
$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$, $i = 1, \dots, r+t$</td><td>$\sum_{i=1}^{r+t} N/m_i = 2\beta$, con β impar</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{mcm}(m_1, \dots, m_{r+t}) = N/2, \quad 4 \nmid N$</td></tr>
<tr><td>(‡) $\phi(a_1) = \sigma$
$\phi(b_1) = \tau^{\alpha}\sigma$
$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i}$, $i = 1, \dots, r+t$</td><td>$\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+t} N/m_i - \delta N/2$
impar con $\delta = 1$ ó 2</td></tr>
</table>

$\boldsymbol{\gamma > 0}$**, $\boldsymbol{N}$ impar** $(\Rightarrow t$ par$)$		
$t > 1$	$\phi(a_j) = \tau\sigma$ $\phi(b_j) = \sigma$ $\phi(x_i) = \tau^{N/m_i},\ i = 1, \ldots, r$ $\phi(x_{r+i}) = \sigma,\ i = 1, \ldots, t-2, t$ $\phi(x_{r+t-1}) = \sigma\tau^{\alpha}$	$\alpha = 2\gamma + \sum_{i=1}^{r} N/m_i - N$
$t = 0$ $\gamma > 1$	$\phi(a_j) = \sigma$ $\phi(b_j) = \tau\sigma,\ j = 1, 3, \ldots, \gamma$ $\phi(b_2) = \tau^{\alpha}\sigma$ $\phi(x_i) = \tau^{N/m_i},\ i = 1, \ldots, r$	$2\alpha = 2(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{r} N/m_i - \delta N$ par con $\delta = 0$ ó 1
$t = 0$ $\gamma = 1$	(*) $\phi(a_1) = \sigma$ $\phi(b_1) = \tau^{\alpha}\sigma$ $\phi(x_i) = \tau^{N/m_i},\ i = 1, \ldots, r$	

$\boldsymbol{\gamma = 0}$ $(\Rightarrow t \geqslant 2)$		
t impar $(\Rightarrow N$ par$)$	$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i},\ i = 1, \ldots, r$ $\phi(x_{r+i}) = \tau\sigma,\ i = 1, \ldots, t-3$ (*) $\phi(x_{r+t-2}) = \tau^{N/2}$ $\phi(x_{r+t-1}) = \tau^{-\alpha}\sigma$ $\phi(x_{r+t}) = \sigma$	$\alpha = \sum_{i=1}^{r} N/m_i + N/2$
t par	$\phi(x_i) = \tau^{N/m_i},\ i = 1, \ldots, r$ $\phi(x_{r+i}) = \tau\sigma,\ i = 1, \ldots, t-2$ (*) $\phi(x_{r+t-1}) = \tau^{-\alpha}\sigma$ $\phi(x_{r+t}) = \sigma$	$\alpha = \sum_{i=1}^{r} N/m_i - N$

■

5.2 Problema del género mínimo. Como consecuencia del teorema 5.1.1 y de la fórmula de Riemann-Hurwitz (2.4) se obtiene la solución al problema del género mínimo para grupos de automorfismos diédricos. Dicha solución fue propuesta inicialmente en [Maclachlan, 1966]; en [Adel, 1983] se deduce como caso particular de grupo metacíclico. Aquí recogemos de [Bujalance et al., 2003] su enunciado y detallamos la demostración como corolario del teorema 5.1.1 introducido asimismo en dicho artículo.

Corolario 5.2.1. *El género mínimo $g^* \geqslant 2$ de una superficie de Riemann compacta que admite un grupo de automorfismos diédrico de orden $2N$ es*

$$g^* = \begin{cases} 2 & \text{si } N = 2, \qquad (A) \\ (p_1 - 1)\dfrac{N}{p_1} & \text{si } \alpha_1 > 1 \text{ o } N \neq 2 \text{ es primo}, \qquad (B) \\ (p_1 - 1)\left(\dfrac{N}{p_1} - 1\right) & \text{si } \alpha_1 = 1 \text{ y } N \text{ no es primo}, \qquad (C) \end{cases}$$

siendo $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ la descomposición de N en factores primos, con $p_i < p_{i+1}$.

TABLA 5.1: Signaturas para el género mínimo.

(A)

a)	$\alpha_1 = 1,\ p_1 = 2,\ s = 1\ (N = 2)$	$(0;\ 2, 2, 2, 2, 2)$

(B)

b)	$\alpha_1 = 1,\ p_1 > 2,\ s = 1\ (N = p_1$ primo impar$)$	$(0;\ p_1, p_1, 2, 2)$
c)	$\alpha_1 > 1,\ p_1 = 2,\ s \geqslant 1\ (N$ par no primo$)$	$(0;\ N, 2, 2, 2)$
d)	$\alpha_1 > 1,\ p_1 > 2,\ s \geqslant 1\ (N$ impar no primo$)$	$(0;\ p_1, N, 2, 2)$

(C)

e)	$\alpha_1 = 1,\ p_1 = 2,\ s > 1\ (N$ par no primo$)$	$(0;\ \frac{N}{2}, 2, 2, 2)$
f)	$\alpha_1 = 1,\ p_1 > 2,\ s > 1\ (N$ impar no primo$)$	$(0;\ p_1, \frac{N}{p_1}, 2, 2)$

Demostración. En la tabla 5.1 indicamos signaturas con las que resultan los valores de g del enunciado mediante la fórmula de Riemann-Hurwitz. Como las condiciones a aplicar son diferentes dependiendo de si N es par o impar, es necesario estudiar por separado $p_1 = 2$ y $p_1 \neq 2$ en los casos (B) y (C).

Dichas signaturas definen grupos Fuchsianos, por el teorema 2.1.1 de Poincaré, y cumplen las condiciones del teorema 5.1.1. En todos los casos el mínimo se alcanza para $\gamma = 0$. Observamos que las signaturas de e) y f) no pueden ser utilizadas en los casos c) y d), respectivamente, pues no se cumpliría 5.1.1.(iv.b) o (iv.c).

El género obtenido de la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$g = 1 + 2N(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{r} \left(N - \frac{N}{m_i} \right) + \frac{tN}{2},$$

indica que valores menores de γ, r y t dan valores menores de g. Para demostrar que las signaturas de la tabla dan valores de g menores o iguales que cualquier otra signatura admisible, comenzamos eligiendo los valores menores de γ, r, t. Las condiciones del teorema 5.1.1 y la necesidad de que el área hiperbólica $\mu(\Gamma)$ sea mayor que 0 (por la fórmula de Riemann-Hurwitz esto equivale a que sea $g > 1$) nos permite desechar signaturas o bien obtener valores de g iguales o mayores.

Las diferentes condiciones en 5.1.1, en su caso, sobre el mínimo común múltiplo de los $m_1, \ldots, m_r$ impiden poder elegir valores demasiado pequeños para dichos períodos, precisamente cuando γ, t toman los menores valores posibles.

Así, en seguida se ve que más de uno o dos períodos mayores que 2, o valores de

γ mayores que uno o dos, proporcionan valores de g mayores que las signaturas de la tabla. Esto podemos afirmarlo por el lema 2.6.1: para valores γ, t, r dados buscamos los períodos $\hat{m}_i$ como en dicho lema con los menores factores primarios permitidos por 5.1.1, y se encuentran valores g mayores o iguales que los g^* de la tabla; para otros m_i con otra distribución de esos factores primarios, el lema 2.6.1 asegura que g no será menor, y tampoco si tomamos los m_i factores primarios añadidos, pues los terminos $N - N/m_i$ resultan entonces mayores.

En los casos b), d) y f), una distribución diferente de las mismas potencias de primos en m_1 y m_2 dan valores mayores de g. Para b) es trivial: por 5.1.1.(iv) todos estos períodos son iguales a p_1 en ese caso. Para d) y f) esto lo garantiza el lema 2.6.1, teniendo en cuenta la observación 2.6.2 para f).

Estudiamos a continuación por qué g^* es mínimo en cada caso.

a) El caso $N = 2$ no necesita más comprobaciones, ya que tiene que ser $g \geqslant 2$ en cualquier caso.

b) Si $N = p_1 \geqslant 3$, entonces N es impar, y t tiene que ser par, $m_1 = ... = m_r = p_1$, por 5.1.1.(i), y $g = 1 + 2\gamma p_1 - 2p_1 + r(p_1 - 1) + p_1 t/2$. Si tomamos $\gamma = 0$, tiene que ser $t \geqslant 2$. Tomemos $t = 2$, luego tiene que ser $r \geqslant 1$ por 5.1.1.(iv.b); pero $r = 1$ da lugar a $\mu(\Gamma)/2\pi = -1 < 0$ y la signatura no define un grupo Fuchsiano. Y, si $r = 3$, entonces $g = 3p_1 - 2 > p_1 - 1 = (p_1 - 1)N/p_1$. Para $r > 3$ ocurre igual. Si $t = 4$, $g = 1 + r(p_1 - 1)$; puede ser $r = 0$, pero entonces $g = 1$, que no es admisible; con $r = 1$, $g = p_1 > p_1 - 1$, y lo mismo para valores mayores de r. Así, obtenemos el mínimo g para $r = 2$ si $\gamma = 0$. Para valores mayores de γ resulta g mayor que $p_1 - 1$. Por ejemplo, si $\gamma = 1$ y $t = 0$ tiene que ser $r \geqslant 1$ por 5.1.1.(iii.b); para $r = 1$, $g = 3p_1 > p_1 - 1$, y así sucesivamente.

c) N es par, y $g^* = N/2$ en la tabla. Para $\gamma = 0$, tiene que ser $t \geqslant 2$; si $t = 2$, es $r \geqslant 1$ por 5.1.1.(iv.b); si $r = 1$, tiene que ser $m_1 = N$, luego $g = 0$, no admisible; si $r = 2$, con $m_1 = 2$ y $m_2 = N/2$, $g = N/2 - 1 > g^*$; si $t = 3$ y $r = 1$, 5.1.1.(iv.c) obliga a $m_1 = N$; si $t = 4$ puede ser $r = 0$, pero entonces $g = 1$ no es admisible; si $t = 4$ y $r = 1$ entonces $g = N - N/m_1 + 1 > N - N/p_1 = g^*$. Con $\gamma = 0$ valores mayores de t y r aportan valores de g mayores aún. Para $\gamma = 1$, si $t = 0$ y $r = 1$, entonces $m_1 = N/2$ (por 5.1.1.(ii.a) no puede ser $m_1 = N$) y $g = N - 1 > g^* = N/2$; si $t = 1$, en cualquier caso $g \geqslant 1 + N/2 > g^* = N/2$ para cualquier $r \geqslant 0$. Valores de γ, t y r mayores dan valores para g mayores o iguales que $g^* = N/2$.

d) N es impar, luego t es par. Para $\gamma = 0$, ocurre igual que en c), con t par, pero en este caso $g = g^* = N - N/p_1$ para $t = r = 2$, $m_1 = p_1$ y $m_2 = N$. Para $\gamma = 1$ y $t = 0$, 5.1.1.(iii.b) implica $r \geqslant 1$; si $r = 1$, entonces $m_1 = N$ y $g = N > g^* = N - N/p_1$. Si $\gamma = 1$, $t = 2$ y $r = 0$, entonces $g = N + 1 > g^* = N - N/p_1$. Valores de γ, t y r mayores dan valores para g mayores o iguales que g^*.

e) N es par y $g^* = N/2 - 1$. La situación es similar a c), sólo que aquí, si $\gamma = 0$, $t = 3$ y $r = 1$, por 5.1.1.(iv.c) puede ser $m_1 = N$ o $m_1 = N/2$.

f) N es impar, luego t es par, y $g^* = 1+N-N/p_1-p_1$. Ocurre como en d), pero en este caso, como $\alpha_1 = 1$, 5.1.1.(iv.b) permite tomar $m_1 = p_1$, $m_2 = N/p_1$ si $\gamma = 0, t = 2, r = 2$.

■

Bibliografía

[Adel, 1983] Adel, G. A. (1983). *Some results on groups related to compact Riemann surfaces*. PhD thesis, University of Minnesota.

[Artin, 1991] Artin, M. (1991). *Algebra*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.

[Beardon, 1983] Beardon, A. F. (1983). *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

[Borthwick, 2007] Borthwick, D. (2007). *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, volume 256 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

[Breuer, 2000] Breuer, T. (2000). *Characters and automorphism groups of compact Riemann surfaces*, volume 280 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Bujalance et al., 2003] Bujalance, E., Cirre, F. J., Gamboa, J. M., and Gromadzki, G. (2003). On compact Riemann surfaces with dihedral groups of automorphisms. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 134(3):465–477.

[Bujalance et al., 2010] Bujalance, E., Cirre, F.-J., and Gromadzki, G. (2010). A survey of research inspired by Harvey's theorem on cyclic groups of automorphisms. In *Geometry of Riemann surfaces*, volume 368 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 15–37. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[Bujalance et al., 2007] Bujalance, E., Etayo, J. J., and Gamboa, J. M. (2007). *Teoría elemental de grupos*. Cuadernos de la UNED, Madrid, 3a ed., 2a reimp. edition.

[Dal'Bo, 2011] Dal'Bo, F. (2011). *Geodesic and horocyclic trajectories*. Universitext. Springer-Verlag London Ltd., London. Translated from the 2007 French original.

[de Saint-Gervais, 2010] de Saint-Gervais, H. P. (2010). *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*. ENS Éditions, Lyon. El nombre de *Henri Paul de Saint-Gervais* se refiere a un grupo compuesto por 15 matemáticos : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévennec, and Jean-Claude Sikorav.

[Harvey, 1966] Harvey, W. J. (1966). Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 17:86–97.

[Hatcher, 2002] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Hazewinkel et al., 2004] Hazewinkel, M., Gubareni, N., and Kirichenko, V. V. (2004). *Algebras, rings and modules. Vol. 1*, volume 575 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[Hoare et al., 1972] Hoare, A. H. M., Karrass, A., and Solitar, D. (1972). Subgroups of infinite index in Fuchsian groups. *Math. Z.*, 125:59–69.

[Hubbard, 2006] Hubbard, J. H. (2006). *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY.

[Johnson, 1997] Johnson, D. L. (1997). *Presentations of groups*, volume 15 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition.

[Jones and Singerman, 1987] Jones, G. A. and Singerman, D. (1987). *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge. An algebraic and geometric viewpoint.

[Jungnickel, 1996] Jungnickel, D. (1996). On the order of a product in a finite abelian group. *Math. Mag.*, 69(1):53–57.

[Katok, 1992] Katok, S. (1992). *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL.

[Kurzweil and Stellmacher, 2004] Kurzweil, H. and Stellmacher, B. (2004). *The theory of finite groups*. Universitext. Springer-Verlag, New York. An introduction, Translated from the 1998 German original.

[Maclachlan, 1965] Maclachlan, C. (1965). Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 15:699–712.

[Maclachlan, 1966] Maclachlan, C. (1966). *Groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*. PhD thesis, University of Birmingham.

[Rotman, 1995] Rotman, J. J. (1995). *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition.