Universidad Nacional de Educación a Distancia

Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas

Problemas elípticos semilineales y casilineales con crecimiento natural en el gradiente

Trabajo de Investigación Tutelado

Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Madrid, Marzo 2013

Problemas elípticos semilineales y casilineales con crecimiento natural en el gradiente

Trabajo de investigación tutelado realizado bajo la dirección del Doctor D. Pedro J. Martínez Aparicio del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad Politécnica de Cartagena que presenta Juan Francisco Ruiz Hidalgo para su aprobación.

Fdo.: Juan Francisco Ruiz Hidalgo

V^{o}B^{o} del Director del trabajo

Fdo. Dr. D. Pedro J. Martínez Aparicio

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Existe una clase de problemas elípticos no lineales con crecimiento cuadrático en el gradiente que aparece de forma natural en el Cálculo de Variaciones clásico cuando se considera el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv,$$

que es una perturbación del funcional clásico de energía

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv,$$

donde a es una función suficientemente regular, elíptica y acotada y el dato f es una función que pertenece al espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a dicho funcional es

$$-\mathrm{div}(a(x,v)\nabla v) + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial v}(x,v)|\nabla v|^2 = f.$$

El estudio de los puntos críticos del funcional J se corresponde con el estudio de la existencia de solución para un problema casilineal con crecimiento cuadrático en el gradiente. En la ecuación anterior se observa que esta dependencia cuadrática del gradiente se presenta en el término de orden inferior $\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial v}(x,v)|\nabla v|^2$, al que se conoce en la literatura como *lower order term*.

Ajustando más el modelo, si se toma $a(x,s) = 1 + |s|^{1-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, tras realizar un cálculo puramente formal, el funcional J adquiere la forma

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1 + |v|^{1-\gamma})|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv,$$

y la ecuación de Euler,

$$-\mathrm{div}((1 + |v|^{1-\gamma})\nabla v) + \frac{1-\gamma}{2}\frac{v}{|v|^{1+\gamma}}|\nabla v|^2 = f.$$

Esta ecuación elíptica no lineal se caracteriza por el **crecimiento cuadrático en el gradiente** y por **tener una singularidad en** $u = 0$.

Uno de los casos de singularidad y que no admite estructura variacional es en el que $g(s) = \frac{1}{s^\gamma}$, $\gamma > 0$

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{P1}$$

Se consideran dos tipos de soluciones para este problema. El primero es la **solución distribucional** que consiste en una función $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ que verifica $u > 0$ p.c.t. $x \in \Omega$, tal que $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\phi = \int_\Omega f\phi,\ \forall 0 \leq \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Si además, la solución distribucional pertenece al espacio $H_0^1(\Omega)$, se dirá que es una **solución de energía finita**.

El problema (P1) se expresa en la literatura de forma más general, donde el operador laplaciano es sustituido por un operador divergencia de la forma $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ y el término de orden inferior se expresa como una sola función del tipo $g(x,u,\nabla u)$.

Con el fin de facilitar la notación y usar una lo más parecida posible a los problemas modelo anteriores, se establece como problema general

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u)\nabla u) + g(x,u)|\nabla u|^2 = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{P}$$

donde

Ω es un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$.

$M(x,s) = (m_{ij}(x,s))$, $i,j = 1,\ldots,N$ es una matriz elíptica y acotada, es decir, cumple

$$\left.\begin{array}{l} m_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ son funciones de Carathéodory} \\ \exists \alpha, \beta > 0 \text{ constantes tales que} \\ \qquad M(x,s)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \\ \qquad |M(x,s)| \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}. \end{array}\right\} \tag{HM}$$

$g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función que cumplirá diferentes propiedades a lo largo de la memoria y el dato $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función que pertenence al espacio de Lebesgue $L^m(\Omega)$ para un determinado m.

Siguiendo la terminología de Kazdan y Kramer ([35]), se dirá que el crecimiento cuadrático en ∇u del operador diferencial no lineal es natural. Varias razones (adicionales a la del Cálculo de Variaciones) se pueden dar para el uso de este término. En primer lugar, la clase de las ecuaciones con crecimiento cuadrático en el gradiente es invariante por cambios de variable no lineales $v = F(u)$, ($F \in C^1$). Esto está en claro contraste con lo que ocurre para las ecuaciones semilineales $-\Delta u = f(x,u)$ y hace pensar de nuevo que las ecuaciones con crecimiento cuadrático constituyen un marco adecuado tanto desde el punto de vista de las aplicaciones, como desde el puramente matemático. Por otro lado, Serrin demuestra (véase el Teorema 1 del Capítulo 3.16 en [46]) que no existe solución cuando el crecimiento en ∇u es más rápido que el cuadrático en el infinito. Concretamente, demostró que dado cualquier dominio suave existen datos suaves para los cuales el problema de Dirichlet no tiene solución.

Con respecto a la singularidad y sus aplicaciones, se pueden citar el estudio de patrones de crecimiento en clusters y de frentes de solidificación (véanse el trabajo [34] de Kardar, Parisi y Zhang (crecimiento de tumores), el realizado por Berestychi, Kamin y Sivashinsky [11] (frentes de llamas) y el trabajo de Barenblatt, Bertsch, Chertock y Protokishin [7] para el estudio del flujo de absorción de agua en una roca porosa).

La dificultad del problema (P) reside esencialmente en el término con crecimiento cuadrático en el gradiente. Por ello, se tratará de analizar la influencia que tiene g en la existencia de solución.

Cuando la función $g \equiv 0$ es idénticamente nula se tienen los casos lineal y semilineal

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u)\nabla u) = f), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

los cuales han sido exhaustivamente estudiados y que se resuelven usando Teoremas clásicos. Aunque el objetivo de la memoria es el estudio de los problemas casilineales elípticos con crecimiento natural, se presentan algunos resultados necesarios de los problemas lineales y casilineales. La parte interesante de este caso es el estudio de la influencia de la regularidad del dato $f \in L^m(\Omega)$ en la regularidad de las soluciones e, incluso, en la existencia de soluciones. Así, cuando $m \geq \frac{2N}{N+2}$, la existencia de solución está garantizada por los Teoremas de Lax-Milgram (el primer problema) y del punto fijo de Schauder (el segundo). Es al estudiar la regularidad de dichas soluciones y los casos en los que los Teoremas anteriores no pueden ser aplicados, es decir, cuando $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$ donde se requieren técnicas más elaboradas relacionadas con el método de Stampacchia (ver [47]). Una de las técnicas usadas es recurrir a problemas aproximados cuyas soluciones formen una sucesión que converja a la solución buscada. Esta técnica se convierte en recurrente en el tipo de problemas a los que se dedica esta memoria.

La consideración de la nolinealidad g no nula en (P) provoca la aparición de los llamados problemas casilineales, en los que los resultados clásicos de Lax-Milgram y Schauder no suelen aplicarse para la búsqueda de solución. Como ya se ha comentado, para salvar esta dificultad es recurrente en los artículos consultados la búsqueda de una sucesión de soluciones de problemas "parecidos" o aproximados la cual convergerá a la solución buscada. Estos problemas aproximados son, usualmente, problemas denominados de Leray-Lions cuya estructura es

$$\left.\begin{array}{ll}-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) = F(x,u,\nabla u), & x\in\Omega \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{array}\right\}$$

El origen de estos trabajos es un artículo de J. Leray y J.L. Lions [40]. La existencia de solución está basada en la sobreyectividad de un cierto operador A que ha de ser coercivo y pseudomonótono. El capítulo 3 está expresamente dedicado a presentar la demostración completa de existencia de solución del problema anterior y que es de mucha utilidad a la hora de resolver algunos de los problemas aproximados.

Una vez que se encuentra la sucesión de soluciones "aproximadas" a las del problema modelo (P), el siguiente paso es la búsqueda de solución cuando aparece el lower order term. La revisión de la literatura permite establecer una serie de pasos que parecen razonables y que, en definitiva,consisten en la imposición de determinadas hipótesis sobre la función $g \not\equiv 0$. Los problemas que sí incluyen crecimiento cuadrático en el gradiente se dividirán en esta memoria en dos tipos, en los que g no es singular y en los que g sí es singular en 0. Del primer caso, la bibliografía es muy extensa. A partir de los años 80 del siglo pasado, se comenzó a trabajar con estas hipótesis. Autores tan destacados como A. Bensoussan, L. Boccardo, T. Gallouët, D. Giachetti, F. Murat o J.P. Puel le dedicaron un gran número de artículos, muchos de ellos en colaboración. En ellos las condiciones sobre f y g son diferentes, lo que proporciona distintos grados de dificultad y, también, diferentes tipos de enfoques y demostraciones.

Por ejemplo, en el caso de que la función g es continua, aunque f sólo pertenezca al espacio de Lebesgue $L^1(\Omega)$, la continuidad ejerce un "efecto regularizante" en el problema que provoca que exista solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Este efecto es muy llamativo puesto que cuando el dato sólo pertenece a $L^1(\Omega)$ la solución se puede esperar, como mucho, en $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < \frac{N}{N-1}$. Estos resultados se pueden encontrar en artículos como [18], [8] o [15] donde, además, se introduce una de las hipótesis más importantes en este tipo de problemas, llamada *condición de signo*

$$g(x,s)s \geq 0, \text{ p.c.t. } x\in\Omega, \forall s\geq 0. \qquad \text{(“Condición de signo”)}$$

En general, la expresión del término de orden superior en estos artículos viene dada por una expresión más general el tipo $g(x, u, \nabla u)$ y, por tanto, las hipótesis son más generales. Pero traducidas a la expresión (P) se convierten en la condición de signo. Para superar la condición de signo hay que esperar hasta los primeros años del siglo XXI, en los que se sustituye dicha condición por condiciones asintóticas para g como en [21] o [44], o por condiciones sobre f referentes a su norma en $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ (ver [27] y [31]).

En el capítulo 4 se tratan estos problemas en los que no hay singularidad. Concretamente, se describen varios resultados de existencia en los que está presente la condición de signo. Se han clasificado por hacer uso de la regularidad de f [19], caso lineal, donde las matrices $M(x)$ no dependen de u [18], caso más general, donde $M \equiv M(x, s)$ [8].

El problema (P1) adquiere sentido cuando se consideran problemas (P) en los que g tiene singularidad en $s = 0$. La cuestión principal en (P1) es determinar el rango de valores de γ para los cuales existe solución. La idea para demostrar la existencia de solución es aproximar el término de orden inferior, y más concretamente la no linealidad $g(s) = \frac{1}{s^\gamma}$ por no linealidades g_n continuas en $\mathbb{R}$, de forma que los problemas obtenidos estén en condiciones de aplicar otros resultados que aseguren la existencia de soluciones u_n que converjan a la solución u de (P1). La dificultad de este método reside en que cuando $u_n(x)$ converge a cero, $g(u_n(x))$ diverge lo que impide mostrar la convergencia de ∇u_n en $L^2(\Omega)$ (y, por ello la convergencia de las soluciones aproximadas a la solución). La clave para evitar esta dificultad consiste en probar que las soluciones aproximadas son estrictamente positivas en cada abierto compactamente contenido en Ω. La exigencia de positividad estricta de las soluciones aproximadas requiere una hipótesis adicional y muy restrictiva sobre el dato f

$$\operatorname{essinf}\{f(x) : x \in \omega\} > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega. \tag{Hf}$$

Esta hipótesis se puede rebajar a positividad de la función f en algunos casos particulares. Concretamente, cuando se estudia el problema que depende de la constante de elipticidad

$$\left.\begin{array}{ll} -\alpha\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{array}\right\}$$

En este caso se obtiene existencia de soluciones positivas cuando la función dato es $0 \lneqq f \in L^m(\Omega)$, con $m > \frac{2N}{N+2}$. De esta manera, si la constante de elipticidad $\alpha > 0$, existe solución cuando $\gamma < 1$. Para optimizar más el rango de γ (caso $\gamma = 1$) hay que exigir que $\alpha > 2$ [12] (en [41] se prueba que basta con exigir $\alpha > 1$).

En [6] se demuestra la unicidad de solución para (P1) cuando $0 < \gamma < 1$ donde solo se requiere la positividad del dato. En [4] se demuestra la existencia de solución del problema (P1) para $\gamma < 2$ y la no existencia de solución cuando $\gamma \geq 2$, donde se requiere (Hf). Hay que destacar que para los casos $0 < \gamma < 1$ no es necesaria la hipótesis (Hf) para probar existencia de solución, pero si el parámetro $1 < \gamma < 2$ la hipótesis (Hf) es necesaria y el estudio de existencia de (P1) es un problema abierto eliminando dicha hipótesis. Estos son los resultados de existencia y no existencia que se consideran en el capítulo 5. En otro trabajo de las mismas características ([3]) se elimina, además, la condición de signo. También se pueden encontrar en la bibliografía resultados similares para problemas de tipo parabólico [42] en el que se extienden todos los resultados (existencia y no existencia, principio de comparación, unicidad y convergencia de solución del problema del caso parabólico a la solución del problema del elíptico).

Otro resultado que cabe destacar es [30], en el que los autores resuelven la ecuación diferencial

$$-\mathrm{div}(M(x,u)\nabla u) + \lambda u + \mu\frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\chi_{u>0} = f,$$

donde $\lambda, \gamma > 0$ y el dato $0 \leq f \in L^\infty(\Omega)$. La solución que se propone en este caso es una función positiva en $H_0^1(\Omega)$ dependiente de γ. Concretamente, cuando $\gamma < 1$, existe solución para todo $\mu \in \mathbb{R}$ y si $\gamma \geq 1$, se requiere que $\mu < 0$.

El propósito del trabajo es describir algunos resultados de existencia y no existencia de solución de (P) con el fin de proporcionar una visión global de la dificultad del problema y de las técnicas usadas para su resolución.

Para este fin se repasa la bibliografía relacionada con el problema y se seleccionan algunos de ellos, de los que se describen de forma detallada varias demostraciones.

A modo de resumen, la estructura de la memoria viene dada por la siguiente tabla elaborada según las características del problema (P):

Capítulo	g	Dependencia cuadrática gradiente	g singular en 0.
Capítulo 2	$g \equiv 0$	–	–
Capítulo 4	$g \not\equiv 0$	X	–
Capítulo 5	$g \not\equiv 0$	X	X

Para empezar la memoria, se presenta un capítulo dedidado a la notación y recogida de resultados previos que serán necesarios en el desarrollo de la misma.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este primer capítulo está dedicado a la exposición de definiciones, teoremas y notaciones que se usan a lo largo de la memoria.

1.1. Notación

Siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, se denotará por Ω como un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera será $\partial\Omega$.

Para cualquier $1 \leq p < \infty$, se denota por $L^p(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue considerado con la norma habitual,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible, } \int_\Omega |u|^p < \infty \right\}$$
$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible: } \exists C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega \}$$
$$\|u\|_\infty = \text{ínf}\{ C : |u(x)| \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega \}.$$

Dado un exponente $1 \leq p < \infty$ que se van a utilizar

$$\text{exponente crítico, } p^*, \text{ dado por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \text{ es decir } p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

$$\text{exponente conjugado, } p', \text{ dado por } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ es decir } p' = \frac{p}{p-1}.$$

Otros espacios que aparecen en la memoria son $C_0^\infty(\Omega)$ y los espacios de Sobolev usuales $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ tal y como se definen en [22]. Las normas se notarán $\|u\|_X$, donde X es alguno de estos espacios.

1.2. Definiciones

Definición 1.1 *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory si es medible en Ω y continua en $\mathbb{R}$ casi para todo $x \in \Omega$.*

Definición 1.2 *Sea V un espacio de Banach reflexivo. Un operador $A : V \to V'$ es pseudomonótono si satisface las siguientes condiciones:*

1. *A es acotado, es decir, transforma acotados de V en acotados de V'.*

2. *Si $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en V, y si $\limsup_{n\to+\infty} < A(u_n), u_n - u > \leq 0$, entonces $\liminf_{n\to+\infty} < A(u_n), u_n - v > \geq < A(u), u - v >$ para cualquier $v \in V$.*

Definición 1.3 *Sea V un espacio de Banach reflexivo. Un operador $A : V \to V'$ es monótono si satisface que $\forall u, v \in V < A(u) - A(v), u - v > \geq 0$.*

Definición 1.4 *Sea V un espacio de Banach reflexivo. Un operador $A : V \to V'$ es coercivo si satisface que*

$$\frac{< A(v), v >}{\|v\|} \to +\infty, \quad \text{cuando } \|v\| \to +\infty$$

.

Definición 1.5 *Dada una función u, se define la parte positiva $u^+ := \max\{u, 0\}$ y la parte negativa de u como $u^- := \min\{u, 0\}$.*

1.3. Teorema de Lax-Milgram

Dado un espacio de Hilbert H, se dice que una forma bilineal $g : H \times H \to \mathbb{R}$ es

a) continua si existe una constante C tal que

$$|g(u,v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H,$$

b) coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$g(v,v) \geq \alpha |v|^2, \quad \forall v \in H.$$

El siguiente resultado está contenido del libro de Análisis Funcional de Haim Brézis [22, p. 84].

Teorema 1.6 (Teorema de Lax-Milgram) *Si $g(u,v)$ es una forma bilineal, continua y coerciva, entonces para todo $\phi \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$g(u,v) =< \phi, v >, \quad \forall v \in H.$$

Además, si g es simétrica, entonces $u \in H$ se caracteriza por la propiedad

$$\frac{1}{2}g(u,u) - < \phi, u >= \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}g(v,v) - < \phi, v > \right\}.$$

1.4. Teoremas de punto fijo

Teorema 1.7 (de Brouwer) *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$, con D cerrado, acotado y convexo, y sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tales que $H(D) \subset D$. Entonces, T tiene, al menos un punto fijo, es decir,*

$$\exists x \in D : Tx = x.$$

Teorema 1.8 (de Schauder) *Sea X un espacio normado real, $K \subset X$ homeomorfo a $D \subset X$ cerrado, acotado, convexo y no vacío, y $T : K \to K$ compacta (continua y $T(K)$ relativamente compacto). Entonces, T tiene al menos un punto fijo, es decir,*

$$\exists x \in K : Tx = x.$$

1.5. Teoremas de composición de Nemitski

Se presentan dos resultados relacionados con la continuidad del operador

$$\begin{array}{rccc} \phi: & L^p(\Omega) & \to & L^q(\Omega) \\ & u(x) & \mapsto & f(x,u(x)) \end{array}$$

definido entre dos espacios de Lebesgue ($1 \leq p, q < \infty$) mediante la composición con una función f.

Teorema 1.9 *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Se supone que existen una función positiva $a \in L^q(\Omega)$ y una constante $\gamma > 0$ tales que*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + \gamma |t|^{\frac{p}{q}}.$$

Entonces, el operador ϕ es continuo.

Teorema 1.10 *Sean $q > 1$ y $p \geq 1$. Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory satisfaciendo*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + \gamma |t|^{\frac{p}{q}}.$$

Si $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $L^p(\Omega)$ y c.p.d. en Ω, entonces $f(x,u_n) \to f(x,u)$ débilmente en $L^q(\Omega)$.

Se pueden encontrar demostraciones de estos Teoremas en [13].

1.6. Desigualdades

La constante de Sobolev, $\mathcal{S}$, se define, como es usual de la forma

$$\mathcal{S} = \sup\{\|u\|_{L^{2^*}} : \|u\|_{H_0^1} = 1\}.$$

Proposición 1.11 (Desigualdad de Sobolev) *Dado un abierto acotado, para $1 \leq p < N$ se cumple*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \frac{1}{\mathcal{S}} \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Proposición 1.12 (Desigualdad de Hölder) *Si p y q son dos números reales mayores que 1 tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p(\Omega)$ y $g\in L^q(\Omega)$, entonces $fg\in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1}\leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Proposición 1.13 (Desigualdad de Poincaré) *Dado Ω un abierto acotado, entonces existe una constante $C=C(\Omega,p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p}\leq C\|\nabla u\|_{L^p},\quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)\quad (1\leq p<\infty).$$

1.7. Teoremas de convergencia

Teorema 1.14 (Teorema de Lebesgue) *Si $1\leq p<\infty$ y $\{u_n\}$ es una sucesión de de funciones pertenecientes al espacio $L^p(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ c.p.d. en Ω y $|u_n|\leq v_n$ con v_n convergente fuertemente en $L^p(\Omega)$. Entonces, $u\in L^p(\Omega)$ y u_n converge fuertemente a u en $L^p(\Omega)$.*

Teorema 1.15 (Teorema de Vitali) *Si $1\leq p<\infty$ y $\{u_n\}$ es una sucesión de de funciones pertenecientes al espacio $L^p(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ c.p.d. en Ω y $\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E |u_n|^p dx=0$. Entonces, $u\in L^p(\Omega)$ y u_n converge fuertemente a u en $L^p(\Omega)$.*

Teorema 1.16 (Lema de Fatou) *Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones integrables no negativas con $\liminf_n \int u_n<\infty$, entonces la función $\liminf_n u_n$ es integrable y*

$$\int \liminf_n u_n \leq \liminf_n \int u_n.$$

1.8. Otros teoremas

Teorema 1.17 ([47]) *Si G una función real G lipschitziana que se anula en cero, entonces para cada $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ se cumple que $G(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ y que $\nabla G(u)=G'(u)\nabla u$ p.c.t.en Ω.*

Teorema 1.18 (Teorema de Rellich-Kondrachov) *Se verifica las siguientes inclusiones, que son inyecciones compactas.*

Si $p < N$ *entonces,* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$*, para cualquier* $q \in [1, p^*)$*.*

Si $p = N$ *entonces,* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$*, para cualquier* $q \in [1, +\infty)$*.*

Si $p > N$ *entonces,* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*.*

1.9. Valores propios del operador laplaciano

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, se considera el problema

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = \lambda m(x) u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

Es conocido (ver [33] o [25]), que si m^+ no es idénticamente nula este problema tiene una sucesión de autovalores

$$0 < \sigma_1(m) < \sigma_2(m) \leq \ldots \leq \sigma_n(m) \leq \ldots \to +\infty,$$

donde $\sigma_1(m)$ es un valor propio simple caracterizado variacionalmente por:

$$\frac{1}{\sigma_1(m)} = \max_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega m\phi^2}{\int_\Omega |\nabla \phi|^2} > 0,$$

y su espacio propio asociado está generado por una función positiva $\psi_1(m)$.

Si además, m^- no es idénticamente cero el problema tiene otra sucesión de autovalores

$$-\infty \leftarrow \ldots \leq \sigma_{-n}(m) \leq \ldots \leq \sigma_{-2}(m) < \sigma_{-1}(m) < 0,$$

donde $\sigma_{-1}(m)$ es un valor propio simple (principal) caracterizado por

$$\frac{1}{\sigma_{-1}(m)} = \min_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega m\phi^2}{\int_\Omega |\nabla \phi|^2} < 0,$$

y su espacio propio asociado está generado por una función positiva $\psi_{-1}(m)$.

1.10. Funciones truncadas

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, y dado $k > 0$ un número real fijo, se define la función $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $T_k(s) = \text{mín}\{k, \text{máx}\{s, -k\}\}$

$$T_k(s) = \begin{cases} -k, & \text{si } s \leq -k \\ s, & \text{si } |s| \leq k \\ k, & \text{si } k \leq s \end{cases}$$

y $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G_k(s) = s - T_k(s), \forall s \in \mathbb{R}$.

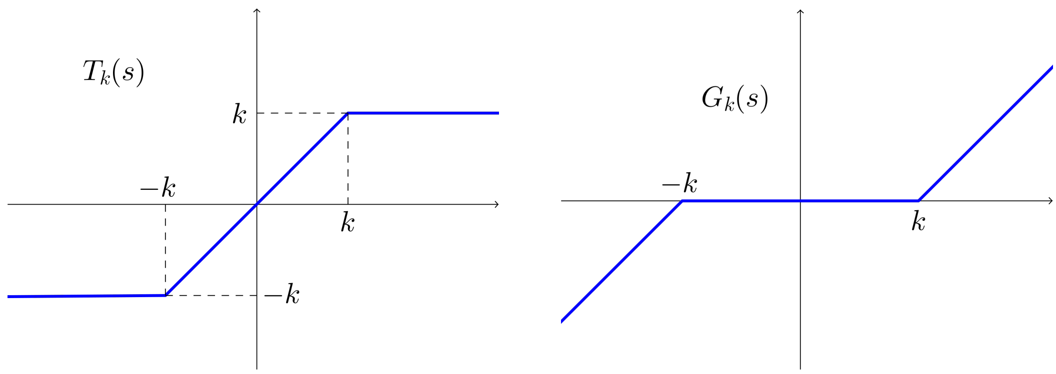

Figura 1.1: Funciones $T_k(s)$ y $G_k(s)$

A continuación, se prueban algunos resultados de utilidad en el texto.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Se denota

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(f)| \qquad y \qquad A_k = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}.$$

Lema 1.19 *Si la función $f \in L^1(\Omega)$, entonces $g(k)$ es derivable para casi todo $k \in \mathbb{R}$ y, además, $g'(k)$ es la medida del conjunto A_k, $\mu(A_k)$.*

Demostración.

La función g es una función real de variable real que se puede expresar de la forma:

$$g(k) = \int_{\{x\in\Omega: f(x)-k>0\}} (f-k) + \int_{\{x\in\Omega: -(f(x)-k)>0\}} -(f-k).$$

Se probará que la primera de las dos expresiones es derivable y la segunda se realiza de forma análoga. Para ello, se considera

$$\tilde{g}(k) = \int_{\{x\in\Omega : f(x)-k>0\}} (f-k),$$

y el conjunto

$$A_k^+ = \{x \in \Omega : f(x) - k > 0\}.$$

La función $\tilde{g}$ es monótona, luego es derivable para casi todo k. Para calular su derivada, se considera $h \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{g}(k+h)-\tilde{g}(k)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{A_{k+h}^+}(f-k-h) - \int_{A_k^+}(f-k)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{A_{k+h}^+}(-h) - \int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}}(f-k)\right) \\
&= -\int_\Omega \chi_{\{x\in\Omega:f(x)>k+h\}} - \frac{1}{h}\int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}}(f-k).
\end{aligned}$$

Puesto que

$$0 \leq \int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}}(f-k) \leq \int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}} h,$$

se obtiene que

$$0 \leq \frac{1}{h}\int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}}(f-k) \leq \int_\Omega \chi_{\{x\in\Omega:f(x)>k+h\}},$$

y, por tanto, $\frac{1}{h}\int_{\{x\in\Omega:k<f(x)\leq k+h\}}(f-k)$ converge a 0 cuando h converge a cero por la derecha. Se concluye que

$$\tilde{g}'(k) = \lim_{h\to 0}\frac{\tilde{g}(k+h)-\tilde{g}(k)}{h} = -\lim_{h\to 0}\int_\Omega \chi_{\{x\in\Omega:f(x)>k+h\}} = \mu(A_k^+).$$

□

Lema 1.20 *Sea $f \in L^1(\Omega)$. Si $g(k)$ verifica que $g(k) \leq C\mu(A_k)^\alpha$, para todo k, con $\alpha > 1$ y $C > 0$, entonces $f \in L^\infty(\Omega)$. Además, existe una constante $\gamma(\alpha, \Omega)$ tal que*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \cdot \gamma.$$

Demostración.

Según el Lema 1.19, $g'(k) = -\mu(A_k)$, lo que permite reescribir la hipótesis

$$g(k) \leq C\mu(A_k)^\alpha = C[-g'(k)]^\alpha,$$

es decir

$$g'(k)[g(k)]^{-\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{-1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Integrando cada uno de los términos de la desigualdad en el intervalo $(0, k)$, del término izquierdo se obtiene

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\left[g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - g(0)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\left[g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - \|f\|_{L^1}^{1-\frac{1}{\alpha}}\right],$$

y del derecho

$$\frac{-1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}k,$$

por lo que

$$g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - \|f\|_{L^1}^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{-k}{C^{\frac{1}{\alpha}}}$$

es decir,

$$g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq \|f\|_{L^1}^{1-\frac{1}{\alpha}} - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k}{C^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

En particular, tomando $k_0 = \dfrac{C^{\frac{1}{\alpha}}\|f\|_{L^1}^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}$ se cumple la desigualdad, lo que asegura que $g(k_0) = 0$ y, por tanto, usand Hölder

$$|f| \leq k_0 = \frac{C^{\frac{1}{\alpha}}\|f\|_{L^1}^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{C^{\frac{1}{\alpha}}\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{\alpha}}\mu(\Omega)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Así,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-\alpha}\mu(\Omega)^{\alpha-1}C.$$

□

CAPÍTULO 2

CASOS LINEAL Y SEMILINEAL

Los casos más simples del problema (P), foco de esta memoria, son los dados la ausencia de no linealidades ajenas al operador $-\text{div}$, es decir, los casos en los que la función $g \equiv 0$.

Estos casos, a su vez, se pueden dividir según la linealidad del operador. Es decir, se tratarán en este capítulo dos problemas: uno lineal y otro semilineal. Para cada uno de ellos se probarán resultados de existencia de solución.

$$\left.\begin{array}{ll} -\text{div}(M(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\text{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Además, para el segundo de los problemas se darán resultados de regularidad que relacionen la integrabilidad de las soluciones con la integrabilidad del dato $f \in L^m(\Omega)$, sin condiciones sobre el signo de f.

Las hipótesis generales sobre la matriz M se han descrito en la introducción son (HM) se refieren a su elipticidad y acotación y se pueden simplificar para el caso en que M sólo dependa de x, es decir, de la forma,

$$\left.\begin{array}{r}\exists\alpha,\beta>0 \text{ constantes tales que}\\ M(x)\xi\cdot\xi\geq\alpha|\xi|^2, \text{ para todo } \xi\in\mathbb{R}^N,\\ |M(x)|\leq\beta, \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.\end{array}\right\} \tag{HM1}$$

2.1. Caso lineal

Se considera el problema (2.1)

$$\left.\begin{array}{ll}-\mathrm{div}(M(x)\nabla u(x))=f(x), & x\in\Omega\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{array}\right\}$$

donde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y acotado, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ es una función en el espacio $L^m(\Omega)$, com $m\geq 1$ y $M(x)$ es una matriz elíptica y acotada.

Una función $u\in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (2.1) si

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla v=\int_\Omega fv, \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 2.1 *Si $f\in L^m(\Omega)$, con $m\geq\frac{2N}{N+2}$ y $M(x)$ una matriz verificando las hipótesis* (HM1), *entonces existe una única $u\in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema* (2.1).

Demostración.
Se define la forma bilineal $g:H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}^N$ dada por

$$g(u,v)=\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla v, \quad (u,v)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega).$$

Puesto que $M(x)$ es elíptica y acotada, g es continua y coerciva.
Por otro lado, $m\geq\frac{2N}{N+2}$, asegura que $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ y, por tanto, se obtienen las inclusiones $L^{(2^*)'}(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, donde $(2^*)'=\frac{2N}{N+2}$, lo que permite afirmar que la aplicación

$$v\mapsto\int_\Omega fv, \quad v\in H_0^1(\Omega),$$

es una forma lineal sobre $H_0^1(\Omega)$.
En estas circunstancias se aplica el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.6) y se concluye la demostración.

□

Comentario 2.2 *Utilizando la segunda parte del Teorema de Lax-Milgram tal como se enuncia en [22] y se reproduce en este texto (Teorema 1.6), si $M(x)$ es una matriz simétrica, entonces la solución u de* (2.1) *se puede caracterizar como mínimo del funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$, definido por:*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(x)\nabla v \cdot \nabla v - \int_\Omega fv, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

2.2. Caso semilineal

La primera generalización es la consideración de una matriz $M(x,s)$ que evite la linealidad del operador. Así, el nuevo problema a considerar es (2.2):

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

El primer resultado es la existencia de solución de (2.2). La diferencia con el caso anterior es la que se introduce con la dependencia de un parámetro s en la matriz. Esta diferencia provoca que se pierda la linealidad que permitía utilizar el Teorema de Lax-Milgram, por lo que se requiere una nueva herramienta para la demostración.

Teorema 2.3 *Dados Si $f \in L^m(\Omega)$, com $m \geq \frac{2N}{N+2}$ y $M(x,s)$ una matriz verificando las hipótesis* (HM), *entonces existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema* (2.2).

Demostración.
Es una aplicación del Teorema de Schauder 1.8.

□

2.3. Regularidad. El método de Stampacchia

Los resultados de regularidad de los problemas que aparecen en la sección anterior están relacionados con el método de regularidad de Stampacchia. Durante el tercer seminario Jean Leray, "Sur les Équations aux Dérivées Partielles" (ver [47]), Guido Stampacchia dictó un curso denominado "Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus" en el que se recogen resultados de regularidad mediante el uso de funciones truncadas.

Todos los resultados que se presentan en la siguiente sección están referidos al problema (2.2):

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

donde $M(x,s)$ es una matriz elíptica y acotada cumpliendo las hipótesis (HM) y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función del espacio $L^m(\Omega)$, con $m \geq 1$.

Teorema 2.4 *Se considera el problema* (2.2) *con* $f \in L^m(\Omega)$, *donde* $m > N/2$. *Entonces, cualquier solución débil* u *está acotada. Además, existe una constante* $C(N, \alpha, m)$ *para la que se cumple*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^m}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema (2.2) dada por el Teorema 2.3.

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tomando como función test $v = G_k(u)$,

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla G_k(u) = \int_\Omega f G_k(u),$$

y usando la elipticidad de la matriz M (HM) se obtiene

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 \leq \int_\Omega f G_k(u). \tag{2.3}$$

Por un lado, se utiliza la desigualdad de Sobolev para el primer término de la desigualdad (2.3),

$$\alpha\mathcal{S}\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 \leq \int_\Omega fG_k(u).$$

Tomando, a continuación el segundo término de (2.3) y aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes 2^* y $\frac{2N}{N+2}$ y considerando $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$

$$\int_\Omega fG_k(u) \leq \int_{A_k} fG_k(u) \leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}\left(\int_{A_k} |f|^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}}.$$

Volviendo a aplicar Hölder al último término con exponente $m = \frac{N+2}{2N}$

$$\int_\Omega fG_k(u) \leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^m}\,\mu(A_k)^{\left[1-\frac{2N}{m(N+2)}\right]\frac{N+2}{2N}}.$$

De esta manera se obtiene que

$$\alpha\mathcal{S}\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^m}\,\mu(A_k)^{\left[1-\frac{2N}{m(N+2)}\right]\frac{N+2}{2N}}.$$

Usando otra vez la desigualdad de Hölder con exponente 2^*

$$\int_\Omega |G_k(u)| \leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(A_k)^{\frac{N+2}{2N}}.$$

Finalmente,

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(u)| \leq \frac{1}{\alpha\mathcal{S}^2}\|f\|_{L^m}\,\mu(A_k)^{1+\frac{2}{N}-\frac{1}{m}}.$$

Basta aplicar el Lema 1.20 para concluir la prueba.

□

Comentario 2.5 *La clave de la acotación de la solución u dada por el Teorema anterior está en la desigualdad (2.3). Esta importancia puede apreciarse considerando el problema*

$$\left.\begin{array}{ll} -div(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u,\nabla u) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

donde $f \in L^m(\Omega)$ y $m > \frac{N}{2}$ y g cumple la condición de signo. Cualquier solución débil de este problema está acotada pues se comprueba que se cumple la desigualdad (2.3).

Teorema 2.6 *Se considera el problema (2.2) con $f \in L^m(\Omega)$, donde el parámetro m cumple que $\frac{2N}{N+2} \leq m < N/2$. Entonces, cualquier solución débil u pertenece a $L^{m^{**}}$. Además, existe una constante $C(N, \alpha, m)$ para la que se cumple*

$$\|u\|_{L^{m^{**}}} \leq C\|f\|_{L^m}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Para un valor $\lambda > 0$, y para una solución u de (2.2) dada por el Teorema (2.3), se toma como función test en la formulación débil del problema la función:

$$v = \frac{|T_k(u)|^{2\lambda}T_k(u)}{2\lambda + 1}.$$

Por un lado, el primer término, $\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla v$ se acota usando la elipticidad de la matriz M y la desigualdad de Sobolev

$$\frac{1}{2\lambda - 1}\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla(|T_k(u)|^{2\lambda}T_k(u)) \geq \alpha \mathcal{S}^2 \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Para el otro término, $\int_\Omega fv$, se usa la desigualdad de Hölder con exponente m.

$$\frac{1}{2\lambda+1}\int_\Omega f|T_k(u)|^{2\lambda}T_k(u) \leq \frac{1}{2\lambda+1}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\|f\|_{L^m}.$$

Uniendo las dos expresiones,

$$\alpha\mathcal{S}^2(2\lambda+1)\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\|f\|_{L^m}.$$

Para terminar se elige $\lambda = \frac{-mN+2N-2m}{4m-2N}$ a fin de que $(\lambda+1)2^* = m'(2\lambda+1)$.

Puesto que $\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} > 0$, se deduce que

$$\|T_k(u)\|_{L^{m^{**}}} \leq C\|f\|_{L^m},$$

y usando el Lema de Fatou cuando $k \to \infty$, se conclye la prueba.

□

2.4. Existencia de solución en sentido distribucional

Hasta ahora se ha probado la existencia de solución (Teorema 2.3) para el problema (2.2) para los casos en los que el dato $f \in L^m(\Omega)$ tiene una regularidad "alta", $m \geq \frac{2N}{N+2}$. Además, en dicha sección se presentan algunos resultados que relacionan dicha regularidad con la integrabilidad de la solución (Teoremas 2.4 y 2.6).

Esta sección está dedicada a los casos donde $1 \leq m < \dfrac{2N}{N+2}$. Se enunciarán dos Teoremas en los que se probará la existencia de solución y se relacionará la integrabilidad del dato con el de la solución. Para la existencia se hablará en sentido distribucional, es decir, se hará referencia a funciones $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla \phi = \int_\Omega f\phi, \; \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

La existencia está basada en la construcción de problemas aproximados en los que aparecen funciones f_n que converjan a f y que cumplen las condiciones para aplicarles los Teoremas 2.3 y 2.4.

Se considera el problema

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u_n(x))\nabla u_n(x)) = T_n(f)(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Puesto que las funciones $T_n(f) \in L^\infty(\Omega)$, el Teorema 2.3 asegura existencia de solución que, además, está acotada por el Teorema 2.6. Así, existe solución de (2.5), $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Comentario 2.7 *En lugar de considerar las funciones $T_n(f)$, bastaría con tomar cualquier sucesión de funciones $f_n \in H^{-1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\begin{array}{l} f_n \to f \text{ en } L^m(\Omega), \\ \|f_n\|_{L^m} \leq \|f\|_{L^m}, \\ |f_n(x)| \leq |f(x)| \text{ p.c.t. } x \in \Omega. \end{array}$$

El siguiente Teorema proporciona un resultado de regularidad de las soluciones de (2.5).

Teorema 2.8 *Se considera el problema (2.2) con $f \in L^m(\Omega)$, donde $m > 1$. Entonces,*

a) las soluciones u_n de (2.5) están uniformemente acotadas en $L^{m^{**}}(\Omega)$.

b) las soluciones u_n de (2.5) están uniformemente acotadas en $W_0^{1,m^*}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN.
a) Fijado $\varepsilon > 0$, se toma $v_n = [(\varepsilon + |u_n|)^{2\lambda-1} - \varepsilon^{2\lambda-1}]sgn(u_n)$ como función test en (2.5):

$$\int_\Omega M(x, u_n)\nabla u_n \nabla v_n = \int_\Omega f v_n.$$

Considerando el término derecho de la igualdad anterior,

$$\int_\Omega f v_n \leq \int_\Omega |f v_n| \leq \int_\Omega |f||(\varepsilon + |u_n|)^{2\lambda-1} - \varepsilon^{2\lambda-1}| \leq \int_\Omega |f|[(\varepsilon + |u_n|)^{2\lambda-1} + \varepsilon^{2\lambda-1}],$$

y usando la desigualdad de Hölder con exponente m,

$$\int_\Omega f v_n \leq \varepsilon^{2\lambda-1}\|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^m} \left(\int_\Omega (\varepsilon + |u_n|)^{(2\lambda-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

En la parte de la izquierda de la igualdad se usa la elipticidad de M y la desigualdad de Sobolev,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M(x, u_n)\nabla u_n \nabla v_n &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 (2\lambda - 1)(\varepsilon + |u_n|)^{2\lambda-2} \\
&= \alpha(2\lambda - 1) \int_\Omega \left| \frac{\nabla[(\varepsilon + |u_n|)^\lambda - \varepsilon^\lambda])}{\lambda} \right|^2 \\
&\geq \frac{\alpha(2\lambda - 1)\mathcal{S}^2}{\lambda^2} \left(\int_\Omega [(\varepsilon + |u_n|)^\lambda - \varepsilon^\lambda]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Uniendo ambas acotaciones,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{2\lambda-1}\|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^m} \left(\int_\Omega (\varepsilon + |u_n|)^{(2\lambda-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\
&\geq \frac{\alpha(2\lambda - 1)\mathcal{S}^2}{\lambda^2} \left(\int_\Omega [(\varepsilon + |u_n|)^\lambda - \varepsilon^\lambda]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y fijando λ tal que $\lambda 2^* = (2\lambda - 1)m'$ (es decir, $\lambda = \frac{m^{**}}{2^*} > \frac{1}{2}$),

$$\frac{\alpha(2\lambda-1)\mathcal{S}^2}{\lambda^2}\left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{2^* m^{**}}{2^*}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^*}\left(|u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Puesto que $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$,

$$\int_\Omega |u_n|^{m^{**}} \leq C,$$

donde la constante $C = C(\mathcal{S}, m, \alpha, \|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^m})$.

b) Las acotaciones anteriores implican que existe una cosntante c positiva tal que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(\varepsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)}} < c.$$

Si se toma $\lambda < 1$ y $1 \leq q < 2$ y se escribe

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(\varepsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{q}{2}}}(\varepsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{q}{2}},$$

se puede utilizar la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{2}{q}$ para llegar a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq \left(\frac{|\nabla u_n|^2}{(\varepsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{q}{2}}}\right)^{\frac{q}{2}}\left((\varepsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{2q}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

Si se toma $q = m^*$, entonces $\frac{(1-\lambda)2q}{2-q} = m^{**}$ y usando $\int_\Omega |u_n|^{m^{**}} \leq C$, se concluye que $\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*}$ está uniformemente acotado.

□

Comentario 2.9 *Para el caso $m = 1$, las soluciones del problema (2.5) están uniformemente acotadas en $W_0^{1,q}(\Omega)$ para cualquier valor de $q < \frac{N}{N-1}$ (se puede completar este resultado en [13]).*

Para terminar esta sección se presenta el resultado de existencia de solución distribucional del problema (2.2) para el caso en que el dato tiene baja regularidad $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$.

Teorema 2.10 *Se considera el problema (2.2) con* $f \in L^m(\Omega)$*, donde el parámetro* $m \in \left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$*. Entonces, existe una solución distribucional* $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$*. En el caso* $f \in L^1(\Omega)$*, la solución* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *para cualquier* $q < \frac{N}{N-1}$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Caso $m > 1$. La sucesión $\{u_n\}$ formada por las soluciones de (2.5) está acotada en $W_0^{1,m^*}(\Omega)$, lo que permite asegurar que existe una subsucesión $\{u_n\}$ débilmente convergente a $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$. En particular, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ en $L^{m^*}(\Omega)$. Puesto que la matriz M es acotada por β, para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se puede usar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue para afirmar que

$$M(x, u_n)\nabla\phi \to M(x, u)\nabla\phi, \text{ en } L^{(m^*)'}(\Omega).$$

Basta calcular los límites en la formulación débil para obtener el resultado.

El caso $m = 1$ es similar al anterior con las salvedades de los espacios donde se realizan los cálculos.

□

2.5. Resumen del capítulo

Como resumen general, en este capítulo se han propuesto soluciones y se ha relacionado la integrabilidad de las soluciones u de (2.2) y la integrabilidad del dato $f \in L^m(\Omega)$. Así, en esta tabla se resumen los resultados:

$f \in L^m(\Omega)$		u
$m > N/2$	entonces	$u \in L^\infty(\Omega)$
$\dfrac{2N}{N+2} \leq m < N/2$	entonces	$u \in L^{m^{**}}(\Omega)$
$1 < m < \dfrac{2N}{N+2}$	entonces	$u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$
$m = 1$	entonces	$u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < \frac{N}{N-1}$

CAPÍTULO 3

UN TEOREMA DE LERAY-LIONS

Una vez que se han determinado los casos lineal y semilineal asociados al problema (P)

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u(x))|\nabla u(x)|^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\},$$

el siguiente paso consiste en comenzar a considerar la función g que no sea necesariamente nula.

Para solucionar este tipo de problemas, los trabajos contenidos en la bibliografía requieren de los denominados operadores de tipo Leray-Lions, relacionados con una clase de problemas elípticos no lineales.

Una clase de concreta de problemas elípticos lineales está relacionada con los problemas del tipo Leray-Lions. En 1965 se publicó en el Boletín de la Sociedad Matemática Francesa un trabajo firmado por Jean Leray y Jacques-Louis Lions en el que daban solución a un tipo de ecuación elíptica no lineal que contenía a la ecuación de Euler del cálculo de variaciones (ver [40]). La solución se obtenía como consecuencia de un resultado de sobreyectividad del determinado operador, denominado usualmente operador de tipo Leray-Lions.

Concretamente, el tipo de operadores son

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) = F(x,u,\nabla u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

El Teorema que Leray y Lions demuestran es el siguiente:

Teorema 3.1 (Leray-Lions) *Sea $p \in (1,\infty)$. Sean $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ y $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dos funciones Carathéodory cumpliendo las siguientes propiedades:*

1. *existe $\beta > 0$ tal que $|a(x,s,\xi)| \leq \beta[|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}]$;*
2. *existe $\alpha > 0$ tal que $a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$;*
3. *$[a(x,s,\xi) - a(x,s,\nu)] \cdot [\xi - \nu] > 0$, si $\xi \neq \nu$;*
4. *existe $f \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $|F(x,s,\xi)| \leq f(x)$.*

Entonces, existe una solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1) en el sentido débil

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla u = \int_\Omega F(x,u,\nabla u) v, \quad \forall v \in W_0^{1,p'}(\Omega).$$

La demostración de este Teorema es larga y compleja, por lo que se dedicará por completo este capítulo a la demostración de la misma. Además de en el trabajo [40], la demostración se puede encontrar, con una notación más actual, en [13].

3.1. Un Teorema de sobreyectividad

La demostración se basa en un resultado abstracto de sobreyectividad para operadores definidos sobre espacios de Banach reflexivos en dualidad. Para enunciar dicho Teorema de sobreyectividad, se requieren los conceptos de operador pseudomonótono, monótono y coercivo definidos en el capítulo preliminar. Para completar la demostración también se requiere el siguiente lema:

Lema 3.2 *Si $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua y existe $\rho > 0$ tal que $P(\xi) \cdot \xi \geq 0$, para cualquier ξ con $|\xi| = \rho$. Entonces existe $\xi \in \mathbb{R}^m$ con $|\xi| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$.*

Demostración.
Se razona por reducción al absurdo. Se supone que $P(\xi) \neq 0$ en

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi| \leq \rho\}.$$

Se puede considerar la aplicación continua de K en $\mathbb{R}^m$ dada por

$$\xi \mapsto \frac{-P(\xi)\rho}{|P(\xi)|}.$$

Gracias al Teorema de Brouwer, existe un punto fijo ξ tal que $\xi = -\frac{P(\xi)\rho}{|P(\xi)|}$. De lo que se deduce que $|\xi| = \rho$ y también que $P(\xi) \cdot \xi = -\rho|P(\xi)| < 0$, lo cual contradice las hipótesis.

□

Teorema 3.3 *Se considera V un espacio de Banach reflexivo y separable y un operador pseudomonótono y coercivo $A : V \to V'$. Entonces A es sobreyectivo, es decir, para cada $f \in V'$ existe al menos un punto $u \in V$ tal que $A(u) = f$.*

Demostración.
Esta demostración se hace en dos pasos.
Paso I. Sea $\{w_1, \ldots, w_n, \ldots\}$ un conjunto denso y numerable de V. Se denota por $V_n = [w_1, \ldots, w_n]$ al subespacio de V generado por $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, se pretende encontrar un $u_n \in V_n$ que verifique

$$< A(u_n), w_j >=< f, w_j > \quad 1 \leq j \leq n.$$

Para ello se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccl} T: & V_n & \to & V_n \\ & v & \mapsto & < A(v) - f, v > v. \end{array}$$

Se trata de aplicar el Lema 3.2 a la aplicación T. Lo primero es comprobar que $(T(v)|v) \geq 0$, para cualquier v con $\|v\| = \rho$. Puesto que

$$< A(v), v > - < f, v > \geq < A(v), v > - \|f\|_{V'} \|v\| \geq 0,$$

para $\|v\| = \rho$, para un valor ρ suficientemente grande, gracias a la coercividad de A. El segundo requisito para aplicar el lema es probar que T es continuo, para lo cual basta probar que el funcional $v \mapsto < A(v), v >$ es continuo sobre V_n. Se supone que $w_n \to w$ y se demostrará que $A(w_n) \rightharpoonup A(w)$ débilmente en V', es decir se demostrará que $< A(w_n), w_n > \to < A(w), w >$ y, por tanto, la continuidad de T. Puesto que A es acotado, $\|A(w_n)\|$ es uniformemente acotada, lo que implica que

$$\lim_{m\to\infty} < A(w_n), w_m - w > = 0.$$

Pasando a una subsucesión $A(w_n) \rightharpoonup g$ débilmente en V'. Usando la pseudomonotonía

$$\liminf_{m_k\to\infty} < A(w_{m_k}), w_{m_k} - v > = < g, w - v > \geq < A(w), w - v >,$$

para cualquier $v \in V$. Luego $g = A(w)$. Por lo tanto, $A(w_{m_k}) \rightharpoonup A(w)$ débilmente en V'. Por reducción al absurdo, si $A(w_n)$ no convergiese débilmente a $A(w)$ en V', volviendo a realizar el mismo razonamiento se llegaría a un absurdo.
Paso II: Puesto que

$$< A(u_n), u_n > = < f, u_n > \leq \|f\| \|u_n\|,$$

se usa la coercividad de A para obtener que $\|u_n\|$ está uniformemente acotada. Por la acotación del operador A, $\|A(u_n)\|$ también está uniformemente acotada. Se puede extraer una subsucesión u_{n_k} tal que

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u & \text{débilmente en } V, \\ A(u_{n_k}) \rightharpoonup u & \text{débilmente en } V'. \end{cases}$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en $< A(u_n), w_j > = < f, w_j >, \quad 1 \leq j \leq n$, con j fijo se obtiene $< \chi, w_j > = < f, w_j >$ para cualquier j. Luego $\chi = f$. También

$< A(u_{n_k}), u_{n_k} >=< f, u_{n_k} >\to< f, u >$ y así $< A(u_{n_k}), u_{n_k} >\to< \chi, u >$. Como además, se tiene que $\limsup_{n_k\to\infty} A(u_{n_k}), u_{n_k} - u >\leq 0$ y por la pseudomonotonía

$$< A(u), u - v >\leq \liminf_{n_k\to\infty} < A(u_{n_k}), u_{n_k} - v >\leq< \chi, u - v >,$$

para cualquier $v \in V$. Se obtiene que $\chi = A(u)$, es decir, $f = A(u)$.

□

3.2. Demostración del Teorema de Leray-Lions

Como se advirtió anteriormente, la demostración del Teorema 3.1 está basada en el Teorema 3.3 de sobreyectividad. Para ello habrá que probar que el siguiente operador es pseudomonótono y coercivo:

$$\begin{array}{rlcl} A: & W_0^{1,p}(\Omega) & \to & W^{-1,p}(\Omega) \\ & v & \mapsto & -\mathrm{div}(a(x,v,\nabla v)) - F(x,v,\nabla v). \end{array}$$

Para probar la pseudomonotonía se usará el siguiente lema:

Lema 3.4 *Se supone que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y también que*

$$[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u) \to 0, \ \text{c.p.d. en } \Omega.$$

Entonces, $\nabla u_n \to \nabla u$ c.p.d. en Ω.

DEMOSTRACIÓN.
Puesto que

$$[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u) \to 0, \ \text{c.p.d. en } \Omega,$$

se tiene que existe una función $c(x)$ positiva tal que

$$|[a(x,u_{n_k},\nabla u_{n_k}) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_{n_k} - u)| \leq c(x).$$

Al menos, en un conjunto Z de medida nula se puede decir que la relación anterior es válida puntualmente. Se prueba a continuación que existe una función C tal que

$$|\nabla u_{n_k}(x)| \leq C(x).$$

Se puede seguir

$$\begin{aligned} c(x) &\geq |[a(x,u_{n_k},\nabla u_{n_k}) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_{n_k}-u)| \\ &\geq \alpha[|\nabla u_{n_k}|^p + |\nabla u|^p] - |\nabla u_{n_k}|[\beta|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}] \\ &\quad -|\nabla u|[\beta|u_{n_k}|^{p-1} + |\nabla u_{n_k}|^{p-1}]. \end{aligned}$$

Como u_n converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ a u, existe una subsucesión (denotada u_n), y existe una función $g \in L^1(\Omega)$ para las cuales

$$|u_n|^{p-1}|\nabla u| \leq g, \text{ y } u_n \to u \text{ c.p.d. en } \Omega.$$

Uniendo las anteriores desigualdades y considerando que hay un polinomio en $|\nabla u|$, se obtiene $|\nabla u_{n_k}(x)| \leq C(x)$.

A continuación se trata de probar que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ en $\Omega \setminus Z$. Se razonará por reducción al absurdo, suponiendo que existe $x_o \in \Omega \setminus Z$ tal que $\nabla u_n(x_0)$ no converge a $\nabla u(x_0)$. Usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, se puede obtener una subsucesión que cumpla $\nabla u_n(x_0) \to b \in \mathbb{R}^N$. Pasando al límite en

$$[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n-u),$$

se obtiene

$$[a(x_0,u_n(x_0),\nabla u_n(x_0)) - a(x_0,u(x_0),\nabla u(x_0))]\cdot\nabla(b-u(x_0)) = 0,$$

de donde, por la monotonía de a, $b = \nabla u(x_0)$.

□

Lema 3.5 *Se supone que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y también que*

$$\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n-u) \to 0,$$

entonces, $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ débilmente en $L^{p'}(\Omega)$.

Demostración.

Se probará primero que

$$[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n-u) \to 0 \text{ en } L^1(\Omega).$$

Denotando

$$\alpha_n := [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u),$$
$$\beta_n := [a(x, u_n, \nabla u) - a(x, u_n, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u).$$

la expresión previa se escribe

$$[a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u) = \alpha_n + \beta_n.$$

Puesto que

$$\int_\Omega |\beta_n| \leq \|a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)\|_{L^{p'}} \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p},$$

y $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p}$ está acotada y $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ en $L^{p'}(\Omega)$ por el Teorema de composición 1.9, ya que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Con esto se concluye que $\beta_n \to 0$ en $L^1(\Omega)$.

Puesto que $\int_\Omega \alpha_n + \beta_n \to 0$ y $\beta_n \to 0$ en $L^1(\Omega)$, se deduce que $\int_\Omega \alpha_n \to 0$. Como la monotonía de a asegura que $\alpha_n \geq 0$, se tiene que $\alpha_n + \beta_n \to 0$ en $L^1(\Omega)$, de donde

$$[a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u) \to 0 \text{ en } L^1(\Omega).$$

Al menos para una subsucesión $[a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u) \to 0$ c.p.d. en Ω. Usando el lema 3.4, $\nabla u_n \to \nabla u$ c.p.d. en Ω. Para terminar, se concluye usando el Teorema 1.10.

$\square$

3.2.1. Demostración del Teorema 3.1

$$\begin{array}{rlcl} A: & W_0^{1,p}(\Omega) & \to & W^{-1,p}(\Omega) \\ & v & \mapsto & -\mathrm{div}(a(x, v, \nabla v)) - F(x, v, \nabla v). \end{array}$$

Hay que comprobar la pseudomonotonía y la coercividad de A. La coercividad es consecuencia de las hipótesis 2 y 4:

$$< A(v), v > \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega |f||v| \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^p - \|f\|_{L^{p'}} \|v\|_{L^p}.$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré (Proposición 1.13) se concluye con la coercividad de A.

La acotación de A se obtiene gracias a las hipótesis 1 y 4, ya que:

$$\begin{aligned} < A(v), w > &= \int_\Omega a(x,v,\nabla v)\cdot\nabla w - \int_\Omega F(x,v,\nabla v)w \\ &\leq \beta\left[\int_\Omega |v|^{p-1}|\nabla w| + \int_\Omega |\nabla v|^{p-1}|\nabla w|\right] + \int_\Omega |f||w| \\ &\leq \beta\left[\|v\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla w\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{L^p}^{p-1}\|w\|_{L^p} + \|f\|_{L^{p'}}\|w\|_{L^p}\right]. \end{aligned}$$

Se supone ahora que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y que

$$\limsup_{n\to+\infty} < A(u_n), u_n - u > \leq 0,$$

lo que se quiere demostrar es que

$$\liminf_{n\to\infty} < A(u_n), u_n - w > \geq < A(u), u - u >, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Se toma la igualdad:

$$< A(u_n), u_n - w > = \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n - w) + \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)(u_n - w).$$

Cada uno de los términos de la desigualdad anterior se tomará por separado. Por un lado, del término de la izquierda, se pretende probar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u) \leq 0.$$

Observando que $\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)(u_n - u) \to 0$ ya que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y que $F(x,u_n,\nabla u_n)$ está uniformemente acotado en $L^{p'}(\Omega)$ (hipótesis sobre F), junto con la hipótesis de pseudomonotonía, implica que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u) \leq 0.$$

Además, gracias a las hipótesis sobre a,

$$\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u) \geq \int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u) - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n - u)$$

y que este último término converge a cero, ya que $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ por el Teorema de composición de Nemitski (Teorema 1.9). Se ha probado

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u) \leq 0.$$

Aplicando el Lema 3.5, y que $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ débilmente en $L^{p'}(\Omega)$ y así

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w \to \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla w.$$

Por otra parte, el Lema 3.4 y que $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ y que $\nabla u_n \to \nabla u$ en Ω y usando el Lema de Fatou se obtiene

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \geq \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u.$$

El otro lado de la desigualdad es $\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n)(u_n - w)$. Las convergencias $u_n \to u$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ c.p.d. en Ω y débilmente en $L^p(\Omega)$, permiten aplicar el Teorema de composición 1.10 para concluir que $F(x, u_n, \nabla u_n) \to F(x, u, \nabla u)$ débilmente en $L^{p'}(\Omega)$. De todo esto,

$$\int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n)(u_n - w) \to F(x, u, \nabla u)(u - w), \text{ cuando } u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Volviendo a la desigualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} < A(u_n), u_n, w > \quad &\geq \quad \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla u - \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla w \\ &\quad + \int_\Omega F(x, u, \nabla u)(u - w) \\ &= \quad < A(u), u - w > . \end{aligned}$$

con lo que el operador A es pseudomonótono.

$\square$

CAPÍTULO 4

CASO NO LINEAL SIN SINGULARIDAD

En este capítulo se repasan algunos de los resultados acerca del problema (P):

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u(x))|\nabla u(x)|^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

cuando la función g no tiene singularidades. De esta forma, en este capítulo se introduce por primera vez el crecimiento cuadrático lineal en el término de orden inferior, pero aún no la característica de singularidad.

La estructura común de muchos de los trabajos relacionados con este siguen un patrón similar: primero se proponen unos problemas aproximados de los cuales se asegura la existencia de solución por el Teorema de Leray-Lions. A continuación, se realizan unas estimas a priori que permiten estudiar la convergencia de la sucesión formada por las soluciones de los problemas aproximados. Finalmente, se prueba que el límite de esta sucesión es solución del problema.

Autores como Boccardo, Murat y Puel en 1984 ([18]), Benoussan, Boccardo y Murat en 1988 ([8]) o Boccardo y Gallouët en 1992 ([15]) lo han estudiado extensamente cuando el dato f pertenece a espacios de Lebesgue apropiados. Con anterioridad este tipo de problemas ya había sido estudiado y la evolución de las distintas soluciones tuvo que ver con la dificultad de las hipótesis: la regularidad del dato f y si la función g depende o no de ∇u. Cada uno de estas características requirieron diferentes enfoques del problema.

En este capítulo, se presentan las ideas más importantes de tres artículos diferentes. Estos artículos se han seleccionado porque resuelven dificultades diferentes del problema. Así, el primero considera f con regularidad suficiente y es especialmente curioso porque utiliza el método de sub y súper soluciones para demostrar la existencia de solución. Más cercanos en su estructura al problema (P) se encuentran los dos siguientes: el segundo se caracteriza por considerar el caso en que la matriz $M = M(x)$ (caso lineal), y el tercero, es más completo en el sentido de que ya considera operadores semilineales. Para terminar el capítulo, se hacen algunas apreciaciones acerca del problema en el caso de que el término de orden inferior no dependa del gradiente.

4.1. Solución con f "regular"

El trabajo que se comentará en este apartado está publicado por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel en 1984 en los anales de la Scuola Superiore de Pisa (ver [19]). No es el único centrado en la búsqueda de solución cuando el dato es regular. Así, por ejemplo, se pueden consultar también [1], [10], [9], [20] o [45]. Se ha seleccionado el anterior por disponibilidad y por el uso del método de sub y súper soluciones.

Se considera un problema

$$\left.\begin{array}{l} A(u) + F(u, \nabla u) = 0, \quad \text{en el sentido de las distribuciones} \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

donde A es del tipo de Leray-Lions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en su dual y F es una aplicación

$$F(u, \nabla u)(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)), \text{ p.c.t. } x \in \Omega,$$

con $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de Carathéodory satisfaciendo:

Existe una función creciente $r \mapsto C(r)$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ tal que se cumple

$$|f(x,\eta,\xi)| \leq C(|\eta|)(1+|\xi|^p), \text{ p.c.t. } x \in \Omega.$$

Se pretende demostrar la existencia de una subsolución φ y una supersolución ψ del problema (4.1), con las condiciones de que sean funciones lipschitzianas y que $\varphi \leq \psi$ c.p.d. en Ω. De esta manera, se asegura la existencia de solución u tal que $\varphi \leq u \leq \psi$ c.p.d. en Ω.

Los trabajos previos al de Boccardo-Murat-Puel y que tienen hipótesis similares, utilizan de forma esencial resultados de regularidad sobre el operador A (que requieren supuestos de regularidad en el abierto Ω, en los coeficientes y la dependencia de f con respecto a sus argumentos) o hipótesis sobre el crecimiento de F con respecto a ∇u es de orden estrictamente menor que p. En este trabajo, las hipótesis de regularidad se reducen al mínimo y el crecimiento de F con respecto a ∇u es de orden p.

El procedimiento que los autores usan en el artículo se divide en varias etapas:

1. Se modifican los operadores A y F mediante una truncadura apropiada, y reducen a un problema en el que la solución se obtiene automáticamente comprendida entre la subsolución y la supersolución.

2. Se define una ecuación aproximada en la que las soluciones están aún comprendidas entre φ y ψ y, por lo tanto, acotadas en $L^\infty(\Omega)$.

3. Se obtiene una estimación $W_0^{1,p}(\Omega)$ mediante la multiplicación por funciones test del tipo $\exp[tu]u$, siendo t una constante elegida convenientemente.

4. Multiplicando por funciones test $\exp[t(u-M)^2]\theta^p(u-M)$, donde $\theta \in \mathcal{D}^+(\Omega)$ y M es la media de u sobre una bola de radio R, se obtiene una estimación en $W^{1,q}(\omega)$, $q > p$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Este resultado de regularidad de tipo Meyers permite obtener la información de compacidad requerida para pasar al límite en la ecuación aproximada.

Comentario 4.1 *Hay que destacar que en este trabajo la estimación $L^\infty(\Omega)$ juega un papel fundamental.*

Las definiciones necesarias para abordar la búsqueda de solución son:

Definición 4.2 *Una función $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una subsolución para el problema (4.1) si*

$$\left.\begin{array}{ll} A(\varphi) + F(\varphi, \nabla\varphi) \leq 0, & \textit{en el sentido de las distribuciones} \\ \varphi_{|\partial\Omega} \leq 0. & \end{array}\right\}$$

Una función $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una supersolución para el problema (4.1) si

$$\left.\begin{array}{ll} A(\psi) + F(\psi, \nabla\psi) \geq 0, & \textit{en el sentido de las distribuciones} \\ \psi_{|\partial\Omega} \geq 0 & . \end{array}\right\}$$

Las hipótesis que se exigen son bastante técnicas y complejas, pero para el caso que ocupa esta memoria basta decir que, cuando A es del tipo $-\mathrm{div}(M(x,u)\nabla u)$ son equivalentes a (HM).

Teorema 4.3 *Bajo las hipótesis "adecuadas", si existen una subsolución φ y una supersolución ψ del problema* (4.1) *con $\varphi, \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, y $\varphi \leq \psi$ c.p.d. en Ω, entonces existe una solución u del problema (4.1) con $\varphi \leq u \leq \psi$ c.p.d. en Ω. Además, existe $q > p$ tal que $u \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$.*

La relación de este resultado con el problema (P) viene dado por un ejemplo que dan los autores y que se reproduce a continuación como corolario:

Corolario 4.4 *Se considera el problema*

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u)\nabla u) + a_0 u + g(x,u)|\nabla u|^2 = f, & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

con $M(x,s)$ y $g(x,s)$ funciones de Carathéodory verificando (HM) *y $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$ c.p.t. $x \in \Omega$. Si $h \in L^\infty(\Omega)$, se puede asegurar que las funciones*

$$\varphi = \frac{-\|h\|_{L^\infty}}{\alpha_0}, \qquad \psi = \frac{\|h\|_{L^\infty}}{\alpha_0},$$

son sub y súper solución del problema, lo que asegura que hay solución.

4.2. Solución cuando g sí depende de ∇u

En esta sección se describirán dos resultados que tienen que ver directamente con el problema (P). La diferencia entre ellos es que en el primero el operador es lineal y en el segundo es semilineal.

En el caso de que la función g depende de ∇u, trabajos destacados son [18], en el caso lineal, es decir, cuando $M(x,s) \equiv M(x)$, y [26] y [37] en el caso semilineal. Las demostraciones de todos estos artículos están basadas en la convergencia casi por doquier del gradiente, resultado original de J. Frehse [28] para el caso no lineal.

4.2.1. Caso lineal

Así, por ejemplo, Boccardo, Murat y Puel [18], resuelven un problema similar a

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + g(x,u,\nabla u) = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

donde la matriz M es coerciva y sus coeficientes son acotados, pero sobre f no se exige más condición que estar en $H^{-1}(\Omega)$.

Más concretamente, las hipótesis exigidas sobre la matriz M son (HM1) y las hipótesis sobre g simplificadas son:

$$\left.\begin{array}{l} g(x,s,\xi) \text{ es una función de Carathéodory,} \\ g(x,s,\xi) = \tilde{g}(s)|\xi|^2, \text{ donde } \tilde{g} \text{ es continua y} \\ s\tilde{g}(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}. \end{array}\right\} \tag{HG3}$$

Comentario 4.5 *Las hipótesis que imponen los autores sobre g son mucho más generales y en cada una de las variables se exigen diferentes condiciones: condiciones de crecimiento, de acotación, ...*

Teorema 4.6 *Dadas las hipótesis* (HM1) *y* (HG3) *y dada $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe una solución u tal que*

a) $u \in H_0^1(\Omega)$,

b) $g(u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$,

c) $ug(u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$,

d) $-div(M(x)\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = f$, *en el sentido de las distribuciones.*

A continuación se enuncian las etapas de la demostración que es muy extensa:

1. Aproximación. Se considera $g_n(x,s,\xi) = \dfrac{g(x,s,\xi)}{1+\frac{1}{n}|g(x,s,\xi)|}$ y, para cada n se encuentra una solución u_n del problema

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u_n) + g_n(x,u_n,\nabla u_n) = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{array}\right\}$$

   bien por el resultado de Leray-Lions (Teorema 3.1), bien porque estos problemas satisfacen las hipótesis del Teorema del punto fijo de Schauder.

2. Estimaciones a priori en $H_0^1(\Omega)$. En el problema aproximado se introduce como función test u_n y se obtiene que $g_n(u_n, \nabla u_n)$ está acotada en $L^1(\Omega)$.

3. Convergencia casi por doquier de los gradientes.

4. $g(u, \nabla u)$ y $ug(u, \nabla u)$ son funciones de $L^1(\Omega)$.

5. Paso al límite de u_n.

En general, se puede decir que la demostración se basa en dos puntos esenciales: por un lado la estimación $H_0^1(\Omega)$ y, por otro, la utilización del Lema de Fatou en el paso al límite.

4.2.2. Caso no lineal

Las ecuaciones que se estudian en los artículos [26], [37] y [8] relacionados con el caso en el que el operador es no lineal y, además, la no linealidad depende del gradiente, son del tipo

$$A(u) + g(x, u, \nabla u) = f,$$

donde A es un operador del tipo Leray-Lions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $W^{-1,p'}(\Omega)$, donde $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ y g es una nolinealidad con crecimiento de orden p con respecto a $|\nabla u|$ y que cumple la "condición de signo".

Para simplificar las notaciones, las hipótesis y la expresión de los resultados, se volverá a considerar el problema (P)

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u(x))|\nabla u(x)|^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

Las hipótesis que se usan son similares al resto de apartados sobre M las hipótesis (HM) y sobre g se impone la condición de signo.

El resultado probado en los tres artículos citados es la existencia de solución de (P). De las demostraciones, una de las más interesantes es la que aparece en [8]. El comienzo es similar a las anteriores demostraciones, en las que se busca un problema aproximado del que obtener soluciones que, convergiendo, permitan obtener la solución. La mayor dificultad es la no acotación de estas soluciones. En el artículo citado, de Bensoussan, Boccardo y Murat, los autores estudian la convergencia de las soluciones u_n obtenidas de los problemas aproximados mediante el estudio detallado de las convergencias de las partes positivas y las partes negativas de las soluciones aproximadas u_n. En concreto, prueban el siguiente resultado:

Teorema 4.7 *Bajo las hipótesis* (HM), *g Carathéodory con condición de signo y $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, existe una solución de* (P) *y además*

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega), \qquad ug(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega).$$

Comentario 4.8 *El Teorema original se prueba para un operador A más general y para una función $g(x,u,\nabla u)$ cuyo crecimiento en el gradiente es de orden p.*

Esquema de la demostración.
Se comienza definiendo las funciones $g_n(x,u,\xi) = \dfrac{g(x,u,\xi)}{1+\frac{1}{n}g(x,u,\xi)}$ y se usa el Teorema de Leray-Lions para probar la existencia de solución u_n de los problemas

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u_n)\nabla u_n)) + g_n(x,u,\nabla u) = f, & x \in \Omega \\ u_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Al usar u_n como función test en (4.3) y usando la condición de signo sobre g y las desigualdades de Hölder y Sobolev, se puede acotar u_n en $H_0^1(\Omega)$ por una constante c_1, es decir,

$$\|u_n\|_{H_0^1} \leq c_1.$$

Así, se extrae una subsucesión u_n que converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$. Además, $u_n \to u$ fuertemente en $L^1(\Omega)$ y c.p.d. en Ω. El siguiente paso es probar la convergencia fuerte. Para ello, se estudian la parte positiva y la parte negativa de u_n por separado.

• ¿$u_n^+ \to u^+$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$?

Para responder a esta pregunta, se define la función $z_n = u_n^+ - T_k(u^+)$, de forma que se pueda comparar aunque u sea "muy grande".

El primer paso es observar el comportamiento de z_n^+. Puesto que $z_n^+ \in H_0^1(\Omega)$ se usa como función test en (4.3) y se obtiene

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla z_n^+ + \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n) z_n^+ = \int_\Omega f z_n^+,$$

y usando nuevamente las hipótesis y la relación entre la positividad de z_n^+ y la de u_n, tras una larga computación se llega a

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega M(x,u_n)\left[\nabla u_n^+ - \nabla T_k(u^+)\right]\nabla z_n^+ \leq R_k,$$

donde R_k es un término que tiende a cero cuando k diverge.

El segundo paso es similar, consiste en observar el comportamiento de z_n^-. Sin embargo, en este caso los cálculos son más complejos y requieren el uso de una función test

$$\nu_n = \varphi_\lambda(z_n^-), \qquad \varphi_\lambda(s) = s e^{\lambda s^2}, \lambda > 0, \in \mathbb{R}.$$

Después de realizar el cálculo se llega a una expresión similar a la anterior

$$\limsup_{n\to\infty} -\int_\Omega M(x,u_n)\left[\nabla u_n^+ - \nabla T_k(u^+)\right]\nabla(u_n^+ - T_k(u^+))^- \leq 0.$$

De esas dos desigualdades se concluye que $u_n^+ \to u^+$ en $H_0^1(\Omega)$.

• ¿$u_n^- \to u^-$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$?

De forma similar a la anterior, se define una función $y_n = u_n^- - T_k(u^-)$ que se usa como función test y se razona de forma similar que para z_n.

Así se prueba la convergencia de $u_n^- \to u^-$ en $H_0^1(\Omega)$.

Para probar la convergencia de u_n se usan las convergencias de sus partes positiva y negativa y, al menos, para una subsucesión

$u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$ y c.p.d.

$\nabla u_n \to \nabla u$ c.p.d.

$g_n(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u)$ c.p.d.

$g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n \to g(x, u, \nabla u)u$ c.p.d. (por la continuidad de g).

Además, usando la acotación de la norma de u_n y las hipótesis, existe una constante positiva c_2 tal que

$$0 \leq \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n \leq c_2.$$

Definiendo, para cualquier $m > 0$, $X_m^n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \leq m\}$ e $Y_m^n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > m\}$, para cualquier conjunto medible $E \subset \Omega$, se tiene

$$\int_E |g_n(x, u_n, \nabla u_n)| = \int_{E \cap X_m^n} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)| + \int_{E \cap Y_m^n} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_E |g_n(x, u_n, \nabla u_n)| &\leq \int_{E \cap X_m^n} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)| + \frac{1}{m} \int_{E \cap Y_m^n} |g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n| \\ &\leq \text{un término dependiente de } m \text{ y el gradiente} + c_2 \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Ese término se puede conseguir por las hipótesis sobre g. La conclusión es que $g_n(x, u_n, \nabla u_n)$ es equiintegrable y, usando el Teorema de Vitali

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u), \text{ en } L^1(\Omega).$$

Pasando al límite en todos los términos se obtiene que

$$\int_\Omega M(x, u)\nabla u \nabla v + \int_\Omega g(x, u, \nabla u)v = \int_\Omega fv, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Además, se puede usar el Lema de Fatou para probar que $g(x, u, \nabla u)u \in L^1(\Omega)$.

□

4.3. Comentarios cuando g no depende de ∇u

Cuando g no depende de ∇u, algunos de los artículos relacionados con el problema son [32], [48], [23] o [17]. De éstos, [17] y [48] son muy similares, mientras que en primero, de L. Boccardo y D. Giachetti, trata el operador

$$A(u) + g(\cdot, u),$$

el segundo, firmado por J.R.L. Webb, resuelve la ecuación asociada del tipo

$$\left.\begin{array}{ll} A(u(x)) + g(u(x), \nabla u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

En esta ocasión, A es un operador elíptico no lineal de orden $2m$ dado en forma de divergencia:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \ldots, D^m u).$$

Las funciones $A_{\alpha}(x, \xi)$ tienen crecimiento polinómico en ξ, y la función cumple la “condición de signo” $g(x, s)s \geq 0$.

De los estudios anteriores nombrados por Webb resulta interesante destacar que muchos de ellos consideraban como espacios de trabajo los espacios de Orlicz-Sobolev. No es sino a partir de un trabajo de Browder [24], donde se muestra que la condición de signo permite trabajar en los espacios de Sobolev.

Cuando A es lineal, la ecuación se puede resolver sin añadir hipótesis adicionales sobre g. Cuando A no es lineal, es cuando se requieren hipótesis sobre g bien sean sobre su crecimiento o su acotación.

La dificultad de (4.4) radica en que al ser una ecuación de orden superior, los argumentos de truncamiento usuales no son válidos. Para ello, el autor recurre a un resultado de Hedberg [29]. Este resultado lo que asegura es que una función $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se puede aproximar por funciones de la forma $(1 - w)u$, donde $u, w \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ y $0 \leq w \leq 1$.

CAPÍTULO 5

CASO NO LINEAL CON SINGULARIDAD

Este capítulo se centra, como el anterior, en el problema (P)

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u(x))|\nabla u(x)|^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

En este caso, la dificultad está en que la función $g(x, s)$ tiene una singularidad en $s = 0$. Los trabajos relacionados con este problema han estado motivados por la búsqueda de soluciones positivas del problema (P1)

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

y, más concretamente, en determinar el valor de $\gamma > 0$ óptimo para asegurar la existencia de solución.

La siguiente sección está dedicada a esa resolución de (P) tal y como se hace en [41] y, más concretamente, en [4]. Lo destacable de este segundo trabajo es que proporciona resultados para funciones f poco regulares (basta con que estén en

$L^1(\Omega)$) e impone pocos requisitos sobre la no linealidad g. Otra faceta importante del artículo es que proporciona un resultado de no existencia de solución de (P1) para $\gamma \geq 2$. Así, queda condicionada la existencia de solución a que $\gamma < 2$.

Una de las características de los problemas del tipo (P1) es que la función dato f se toma estrictamente positiva dentro del dominio. Esto se debe a la necesidad de evitar que las soluciones tomen valores nulos en el interior del abierto Ω, lo que provocaría situaciones complejas a la hora de acotar las soluciones y, por tanto, cuando se tomasen problemas aproximados, sería difícil determinar la convergencia de dichas soluciones aproximadas.

El método que se describe a continuación comienza con la clásica aproximación de la nolinealidad con términos no singulares y usar resultados como el de Leray-Lions para probar la existencia de una sucesión de soluciones de estos problemas aproximados. Después se trata de pasar al límite esa sucesión para obtener la solución del problema. Ahí es donde se requiere acotar inferiormente las soluciones de los problemas aproximados. Se hace mediante la demostración de que estas soluciones están "lejos" de cero en cualquier compacto contenido en Ω. Así, se puede evitar la singularidad en cada uno de los subdominios y pasar al límite con garantías de éxito.

5.1. Existencia de solución

Se considera el problema (P)

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(M(x,u(x))\nabla u(x)) + g(x,u(x))|\nabla u(x)|^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

donde Ω es una abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. Se consideran las hipótesis

- Sobre M la hipótesis (HM):

$$\left.\begin{array}{r} M(x,s) \text{ es una función de Caratheódory} \\ \exists \alpha, \beta > 0 \text{ constantes tales que} \\ M(x,s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \\ |M(x,s)| \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}. \end{array}\right\}$$

- Sobre el dato $f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$ se impone la hipótesis (Hf).

- Sobre g se pueden considerar diferentes restricciones dependiendo del tipo de solución que se busque. Para los fines de este capítulo, se tomarán

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq g(x,s) \leq h(s) \text{ p.c.t. } x \in \Omega \\ g(s,x)s \geq 0, \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R} \\ h : \mathbb{R}^+ \to [0,+\infty) \text{ es continua y no negativa y cumple} \\ \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \sqrt{h(t)}dt < +\infty \\ h(s) \text{ es decreciente en un entorno de cero.} \end{array}\right\} \qquad \text{(HG4)}$$

Teorema 5.1 *Si* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *cumpliendo* (Hf) *y se cumplen* (HM) *y* (HG4), *entonces existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solución de* (P) *satisfaciendo:*

a) $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$

c) $\displaystyle\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla \psi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2 \psi = \int_\Omega f\psi, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$

Demostración.
Se consideran los problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{ll} -\text{div}(M(x,u_n)\nabla u_n) + g_n(x,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} = f_n, & x \in \Omega \\ u_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

donde $f_n = T_n(f)$ y g_n son las funciones dadas por:

$$g_n(x,s) = \begin{cases} g(x,s), & s \geq \frac{1}{n}, \\ nh(\frac{1}{n})\frac{s}{h(s)}g(x,s), & 0 < s \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & s \leq 0. \end{cases}$$

Puesto que h es no decreciente en un entorno de cero, se oberva que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que las funciones g_n satistacen, c.p.t. $x \in \Omega$, $\forall s > 0$, $g_n \geq 0$, $g_n \to g$ y $g_n \leq g$.

Usando los resultados de Leray-Lions y Stampacchia, el problema (5.1) tiene una solución $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

5.1.1. Paso I: $u_n \geq 0$

Se toma u_n como función test en (5.1) y se usan las desigualdades de Sobolev y de Hölder:

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n + \int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n = \int_\Omega f_n u_n.$$

Por un lado, usando la no negatividad de $g(x,u_n)u_n$ y la condición de elipticidad de M, se llega a

$$\int_\Omega \alpha|\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \leq \int_\Omega f_n u_n.$$

Usando la desigualdad de Hölder en el término derecho (con 2^* y $2N/(N+2)$),

$$\int_\Omega \alpha|\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \leq \int_\Omega f_n u_n. \leq \|f_n\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|u_n\|_{L^{2^*}},$$

y la desigualdad de Sobolev,

$$\int_\Omega \alpha|\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \leq \|f_n\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|u_n\|_{L^{2^*}} \leq \|f_n\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \frac{1}{\mathcal{S}}\|\nabla u_n\|_{L^2},$$

es decir,

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq \frac{\alpha}{\mathcal{S}}\|f_n\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}},$$

de donde, u_n está acotada en $H_0^1(\Omega)$. De hecho, existe una subsucesión $u_n \rightharpoonup u$ débilmente, para algún $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumple también, por el Teorema de Rellich, que $u_n \to u$ fuertemente en $L^2(\Omega)$ y c.p.d. en Ω.

Por otro lado, la norma en $L^1(\Omega)$ de $g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n$, se puede acotar por

$$\int_\Omega f_n u_n - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n,$$

que, de nuevo, por las desigualdades de Sobolev y Hölder,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n u_n - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n &\leq \|f_n\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u_n\|_{2^*} - \alpha\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{S}}\|\nabla u_n\|_{L^2} - \alpha\|\nabla u_n\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Así, $g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n$ está acotada en $L^1(\Omega)$.

Se toma ahora u_n^- como función test en (5.1)

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n^- + \int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n^- = \int_\Omega f_n u_n^-.$$

Puesto que $f_n \geq 0$, y usando la condición de elipticidad de M y la no negatividad de $g(x,s)s$,

$$\alpha\|\nabla u_n^-\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega f_n u_n^- \leq 0,$$

luego $u_n^- \equiv 0$ y, por tanto, $u_n \geq 0$.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$-\mathrm{div}(M(x,u_n)\nabla u_n) = f_n - g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \in L^\infty(\Omega).$$

Por tanto, u_n pertenece al espacio de las funciones Hölder continuas en Ω (ver [38, Teorema 1.1. del capítulo 4]).

Se ha probado, además, el lema:

Lema 5.2 *Se asume que* $0 \not\equiv f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *satisface* $f \geq 0$ *y que* $M(x,s)$ *verifica* (HM). *Si, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *la función* $u_n \in H_0^1(\Omega)$ *es una solución del problema* (5.1), *entonces:*

1. *La sucesión* $\{u_n\}$ *está acotada en* $H_0^1(\Omega)$ *y el término*

$$u_n g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \text{ está acotado en } L^1(\Omega).$$

2. *Las funciones* u_n *son continuas en* Ω *y* $u_n(x) > 0$ *para cada* $x \in \Omega$ *y cada* $n \in \mathbb{N}$.

5.1.2. Paso II: $u_n > 0$ en compactos contenidos en el dominio

Estima a priori, u_n es estrictamente positiva en compactos contenidos en Ω, es decir, u_n están uniformemente acotadas inferiormente. Este paso representa la gran diferencia entre los resultados del capítulo 4 y este.

Proposición 5.3 *Sea* $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ *cumpliendo* (Hf). *Si se cumplen las hipótesis* (HM) *y* (HG4), *entoces si* ω *es un compacto contenido en* Ω, *existe una constante* $c_\omega > 0$ *tal que cada supersolución* $0 < z \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\Omega)$ *de la ecuación*

$$-div(M(x,z)\nabla z) + h(z)|\nabla z|^2 = f, \text{ en } \Omega, \tag{5.2}$$

satisface $z \geq c_\omega$, *en* ω.

Demostración.
Sea z una supersolución de (5.2). Se va a considerar un cambio de variable apropiado. Se toma una función h integrable en el intervalo $(0,1)$ y tal que

$$\lim_{s\to 0^+} \int_s^1 h(t)dt = +\infty.$$

Esta condición permite operar con $h(s)$ en lugar de con $h(s) + \frac{\alpha}{s}$ Se toma

$$H(s) = \int_1^s h(t)dt,$$

y la función no decreciente

$$\psi(s) = \int_s^1 \mathrm{e}^{\frac{-H(t)}{\alpha}} dt.$$

Puesto que $\lim_{s\to 0^+} \psi(s) = +\infty$ y $\lim_{s\to +\infty} \psi(s) = \psi_\infty \in [-\infty, 0)$, se puede definir $\nu = \psi(z)$.

Ya que z es continua y estrictamente positiva en Ω, se puede tomar alejada de cero con una cota que depende de z en cada compacto contenido en Ω. Además, por la regla de la cadena,

$$\nabla\nu = -\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}} \nabla z \in L^2(\omega), \forall \omega \subset\subset \Omega,$$

y así $\nu \in H^1(\omega), \forall \omega \subset\subset \Omega$, es decir, $\nu \in H^1_{loc}(\Omega)$.

En [12] se describe cómo tomar esta función test en la ecuación (5.2) combinándola con una función $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se toma como función test $\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\phi$,

$$-\int_\Omega M(x,z)\nabla z \cdot \nabla z \frac{h(s)}{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\phi + \int_\Omega M(x,z)\nabla z \cdot \nabla\phi\, \mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\phi + \int_\Omega h(z)|\nabla z|^2\phi \geq \int_\Omega f\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\phi.$$

Usando la elipticidad de M junto con $\nabla\nu = -\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\nabla z$,

$$-\int_\Omega M(x,z)\nabla\psi(z)\cdot\nabla\phi \geq \int_\Omega f\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}}\phi \geq \int_\Omega \left[\mathrm{e}^{\frac{-H(z)}{\alpha}} - 1\right] f\phi.$$

Si se define $\tilde{M}(x,s) = M(x,\psi^{-1}(s))$ y $b(s) = \mathrm{e}^{\frac{-H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}} - 1$, $\forall s \in (\psi_\infty, +\infty)$, entonces ν es subsolución de

$$-\mathrm{div}(\tilde{M}(x,\nu)\nabla\nu) + f(x)b(\nu) = 0, \text{ en } \Omega.$$

Aplicando el resultado [39, Teorema 7], para cada $\omega \subset\subset \Omega$, existe $C_\omega > 0$ tal que

$$\nu \leq C_\omega, \text{ en } \omega.$$

Por lo tanto, deshaciendo el cambio, se concluye que

$$z \geq \psi^{-1}(C_\omega) = c_\omega > 0, \text{ en } \omega.$$

El resto de la demostración consiste en comprobar que $\tilde{M}$, $b(s)$ y $f(x)$ verifican las hipótesis del Teorema citado. En realidad, $\tilde{M}$ y $f(x)$ lo verifican por las condiciones sobre ellas. Para $b(s)$ hay que probar que $\frac{b(s)}{s}$ es no decreciente cuando $s > 0$ es grande. De hecho, esto es equivalente a probar que $\Upsilon(t) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{-H(t)}{\alpha}}-1}{\psi(t)}$ es no creciente en un entorno de $t = 0$. Para mostrar esto, sea $w_0 \in (0,1)$ tal que $h(t)$ es no-creciente en $(0, w_0]$, y,

$$\begin{aligned} -\mathrm{e}^{\frac{H(t)}{\alpha}}\psi^2(t)\Upsilon'(t) &= \frac{h(t)}{\alpha}\psi(t) - (\mathrm{e}^{-\frac{H(t)}{\alpha}} - 1) = \\ &= \int_t^1 \frac{[h(t)-h(s)]}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}ds \\ &\geq \int_{w_0}^1 \frac{[h(t)-h(s)]}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}ds = h(t)M_1 - M_2 \end{aligned}$$

donde
$$M_1 = \frac{1}{\alpha}\int_{w_0}^{1} \mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}ds \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{1}{\alpha}\int_{w_0}^{1} h(s)\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}ds.$$
De este modo, si t pertenece al intervalo $(0, h^{-1}(\min\{w_0, M_2/M_1\}))$ el término de la derecha de la desigualdad anterior es positivo, y por lo tanto $\Upsilon(t)$ es no-creciente en este intervalo.

Se supone que puesto que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{h(s)}ds < +\infty$ y h es no-creciente en un entorno de cero, entonces la función $b(s)$ satisface la condición conocida como Keller-Osserman[1] [36], es decir, existe $t_0 > 0$ tal que
$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t b(s)ds}} < +\infty.$$

Para concluir la prueba basta mostrar que existe $t_0 > 0$ tal que
$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}}ds}} < +\infty.$$
Usando el cambio $\tau = \psi^{-1}(s)$, se obtiene
$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}}ds}} = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(0)} \mathrm{e}^{-2\frac{H(\tau)}{\alpha}}d\tau}}.$$
Ahora se aplica el cambio $w = \psi^{-1}(t)$ para deducir que
$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}}ds}} \leq \int_0^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{2\int_w^{w_0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}d\tau}},$$
con $0 < w_0 = \psi^{-1}(t_0) < 1 = \psi^{-1}(0)$ ya que ψ es decreciente, y se escoge $t_0 >> 1$ tal que h sea decreciente en $(0, w_0]$.

Como h satisface (Hf), se concluye la prueba si se muestra que existe una constante positiva c_0 tal que
$$h(w)\int_w^{w_0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\, d\tau \geq c_0 > 0, \quad \forall w \in (0, w_0). \tag{5.3}$$

[1] La condición de Keller-Osserman fue introducida para el estudio del problema elítptico $-\Delta u = k(x)u^p, x \in \Omega$ $(p > 1)$, $\lim_{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty$ en los artículos [36] y [43].

De hecho, la única dificultad está cerca de cero. Para verlo, se usa que h (y, por tanto $h + \frac{\alpha}{s}$) es decreciente en $(0, w_0]$, para obtener

$$\begin{aligned} h(w)\int_w^{w_0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\,d\tau &\geq \int_w^{w_0} h(\tau)\mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\,d\tau \\ &= -\frac{\alpha \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{2}\int_w^{w_0} -\frac{2}{\alpha}h(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{2}{\alpha}H(\tau)}\,d\tau \\ &= -\frac{\alpha \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{2}{\alpha}H(\tau)}\right]_w^{w_0} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{\mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}H(w_0)}} + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de arriba y que $\lim_{u\to 0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}H(u)} = 0$, se puede elegir una función $\overline{w} \in (0, w_0)$ tal que

$$h(w)\int_w^{w_0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\,d\tau \geq \frac{\alpha}{4},$$

para $0 < w < \overline{w}$. De este modo obtenemos la existencia de c_0 tal que se verifica (5.3).

□

5.1.3. Demostración del Teorema de existencia 5.1

Se prueba que, pasando a una subsucesión, la sucesión $\{u_n\}$ de soluciones de energía finita de (5.1) converge a una solución de energía finita de (P).

Por 1. del Lema 5.2, se obtiene que existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\|u_n\|_{H_0^1} \leq C_1 \text{ y } \int_\Omega u_n g_n(x, u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq C_2. \tag{5.4}$$

De este modo, pasando a una subsucesión, se puede asumir que u_n converge a algún $u \in H_0^1(\Omega)$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y, por el Teorema de Rellich, fuertemente en $L^2(\Omega)$ y c.p.d. en Ω.

Escogiendo, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\phi \geq 0$, $\frac{1}{\varepsilon}T_\varepsilon(u_n)\phi$ como función test en (5.1) y teniendo en cuenta que $f_n \leq f$ en Ω se deduce que

$$\int_\Omega g_n(x, u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\frac{T_\varepsilon(u_n)}{\varepsilon}\phi \leq \int_\Omega f_n + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla \phi| \leq \int_\Omega f + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla \phi|\,.$$

Gracias a la Proposición 5.2 se puede tomar límite cuando ε tiende a cero (ya que g_n está acotada inferiormente en el $\operatorname{supp}\phi$ que está contenido compactamente en cualquier compacto de Ω), y usando que, por el Lema 5.2, $u_n > 0$ en Ω se obtiene

$$\int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_{\{u_n>0\}} g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi \le \int_\Omega f + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\phi|. \tag{5.5}$$

Se terminará la demostración probando los siguientes pasos:

Paso 1. Para cada $k > 0$, $G_k(u_n) \to G_k(u)$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.

Paso 2. u_n converge fuertemente en $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Paso 3. Paso al límite en (5.1).

Paso 1. Se toma $G_k(u_n)$ como función test en (5.1) . Usando las hipótesis, y las desigualdades de Hölder y Sobolev, se tiene que

$$(\alpha-\mu)\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 \le \frac{\mathcal{S}^2}{\alpha^2}\left(\int_{\{u_n\ge k\}} f^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{1+\frac{2}{N}}.$$

El último término de la desigualdad anterior es arbitrariamente pequeño si k es suficientemente grande. Por lo tanto, como $\alpha > \mu$, $|\nabla G_k(u_n)|^2$ es equiintegrable. Además, como

$$-\mathrm{div}(M(x,u_n)\nabla u_n) = f_n - g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2},$$

y el término de la derecha está acotado en $L^1_{loc}(\Omega)$ gracias al Lema 5.2-2, se aplica el Lema 1 de [14] para deducir que, pasando a subsucesiones, ∇u_n converge a ∇u c.p.d. en Ω. Así, usando el Teorema de Vitali

$$G_k(u_n) \to G_k(u) \qquad \text{en } H_0^1(\Omega).$$

Paso 2. Se prueba que la sucesión u_n converge fuertemente en $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Queda probar que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2\phi = 0, \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega) \text{ con } \phi\ge 0. \tag{5.6}$$

Sea u_n una solución de (5.1) con $n \ge n_0$. Por el Lema 5.2, $u_n > 0$ en Ω y es continua. En particular $h(u_n)|\nabla u_n|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. De este modo, de las desigualdades

$g_n(x,s) \le h(s)$ para cada $s > 0$ y $f_n \ge f_1$ se obtiene que u_n es supersolución para

$$-\mathrm{div}\,(M(x,z)\nabla z) + h(z)|\nabla z|^2 = f_1 \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto, por la Proposición 5.3 (con $f = f_1$ y $z = u_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (Lema 5.2-2)) para cualquier $\omega \subset\subset \Omega$ se tiene la existencia de una constante positiva c_ω tal que $u_n \ge c_\omega$ en ω. Tomando $k > 0$ y $m_0 > \text{máx}\{n_0, \frac{1}{c_\omega}\}$, se deduce, por la definición de g_n, que para todo $n \ge m_0$

$$|g_n(x,u_n(x))| = |g(x,u_n(x))| \le c_k(\omega) := \text{máx}\left\{\frac{\mu}{c_\omega}, \max_{s\in[c_\omega,k]} h(s)\right\}, \tag{5.7}$$

para cada $x \in \omega$ tal que $u_n(x) \le k$. Razonando como en [16], se considera la función $\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi$ como función test en (5.1), donde $\varphi_\lambda(s) = s\mathrm{e}^{\lambda s^2}$, con $\lambda > 0$. Se tiene que

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla(T_k(u_n) - T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n) - T_k(u))\phi$$

$$+ \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\, \varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))$$

$$+ \int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi = \int_\Omega f_n\, \varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi\,.$$

Puesto que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_n\, \varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\, \varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u)) = \varepsilon(n)$$

donde $\varepsilon(n)$ es una sucesión convergente a 0 cuando n diverge. Además, escogiendo $\omega_\phi \subset\subset \Omega$ con $\operatorname{supp}\phi \subset \omega_\phi$, se deduce, de la definición (5.7) y $\varphi_\lambda(k - T_k(u))$, que

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\\
&= \int_{\{u_n \ge k\}} g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi\\
&+ \int_{\{u_n \le k\}} g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))\phi\\
&\ge -c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))|\phi\\
&-\mu\int_{\{u_n \ge k\}} |\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(k - T_k(u))\phi.
\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi\\&\quad-c_k(\omega_\phi)\textstyle\int_\Omega|\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi\\&\quad\le\varepsilon(n)+\mu\textstyle\int_{\{u_n\ge k\}}|\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(k-T_k(u))\phi.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi\chi_{\{u_n\ge k\}}$$

$$=-\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla T_k(u)\varphi_\lambda'(k-T_k(u))\phi\chi_{\{u_n\ge k\}}=\varepsilon(n),$$

y añadiendo

$$-\int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u)\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi=\varepsilon(n)$$

a ambos lados de (5.8) y como

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi\\&\le2\int_\Omega|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi\\&\quad+2\int_\Omega|\nabla T_k(u)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi\\&=2\int_\Omega|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi+\varepsilon(n),\end{aligned}$$

se llega a, usando también las hipótesis sobre M (omitiendo el argumento de las funciones truncadas, $T_k(u_n)-T_k(u)$ para φ_λ y φ_λ'),

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2\Big[\alpha\varphi_\lambda'-2c_k(\omega_\phi)|\varphi_\lambda|\Big]\phi\\&\le\varepsilon(n)+\mu\int_{\{u_n\ge k\}}|\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(k-T_k(u))\phi\\&=\varepsilon(n)+\mu\int_{\{u\le k\}}|\nabla G_k(u_n)|^2\varphi_\lambda(k-u)\phi.\end{aligned}$$

Escogiendo λ tal que se verifica

$$a=\varphi_\lambda'(s)-n|\varphi_\lambda(s)|\ge\frac{a}{2},$$

con $a = \alpha$ y $b = 2c_k(\omega_\phi)$, y gracias a que esta última integral tiende a cero ($G_k(u_n) \to G_k(u)$ y además $G_k(u) = 0$ en $\{u \leq k\}$) se obtiene (5.6).

Combinando esta convergencia y el Paso 1 se deduce que

$$u_n \to u \qquad \text{en } H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Paso 3. Se observa que, aplicando el Lema de Fatou en (5.4) y (5.5), se deduce que

$$\int_\Omega ug(x,u)|\nabla u|^2 \leq C_2 \quad \text{y} \quad \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi \leq \int_\Omega f \ ,$$

respectivamente. Por lo tanto, para concluir la prueba falta probar que u es una solución distribucional del problema (P). Se comienza pasando al límite en n en la ecuación que satisface u_n, es decir, en

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi + \int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_\Omega f_n\phi\,,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

La convergencia débil de u_n a u y la convergencia débil-$*$ de $M(x,u_n)$ a $M(x,u)$ en $L^\infty(\Omega)$ implica que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\nabla\phi = \int_\Omega M(x,u)\nabla u\nabla\phi\ , \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.9}$$

Por otro lado, fijando $\omega \subset\subset \Omega$, entonces, por la definición (5.7),

$$|g_n(x,u_n(x))| \leq c_k(\omega) := \max\left\{\frac{\mu}{c_\omega},\ \max_{s\in[c_\omega,k]} h(s)\right\}$$

para cada $x \in \omega$ tal que $u_n(x) \leq k$.

Consecuentemente, si $E \subset\subset \omega$:

$$\int_E |g_n(x,u_n(x))|\frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2}$$

$$\leq \int_{E\cap\{u_n\leq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} + \int_{E\cap\{u_n\geq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}$$

$$\leq c_k(\omega)\int_{E\cap\{u_n\leq k\}} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{\{u_n\geq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\,. \tag{5.10}$$

Se fija $\varepsilon > 0$. Si, para $k > 1$, se usa $T_1(G_{k-1}(u_n))$ como función test en (5.1) y usando que algunos términos son positivos, se deduce que

$$\int_{\{u_n \geq k\}} |g_n(x,u_n)| \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq \int_{\{u_n \geq k-1\}} f_n \leq \int_{\{u_n \geq k-1\}} f\,.$$

De este modo, como el término de la derecha tiende a 0 uniformemente en n cuando k diverge, se obtiene la existencia de $k_0 > 1$ tal que

$$\int_{\{u_n \geq k\}} |g_n(x,u_n)| \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, como $T_k(u_n)$ converge fuertemente en $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, existe n_ε, δ_ε tal que para cada $E \subset\subset \Omega$ con $\operatorname{meas}(E) < \delta_\varepsilon$ se tiene

$$\int_{E\cap\{u_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_n)|^2 < \frac{\varepsilon}{2c_k(\omega)}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

En conclusión, por (5.10), tomando $k \geq k_0$ se ve que $\operatorname{meas}(E) < \delta_\varepsilon$ implica que

$$\int_E |g_n(x,u_n(x))| \frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

es decir, la sucesión $g_n(x,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}$ es equiintegrable. Esto, junto con su convergencia c.p.d. a $g(x,u)|\nabla u|^2$, implica, gracias al Teorema de Vitali, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto, usando el límite anterior, (5.9) y puesto que f_n tiende a f fuertemente en $L^1(\Omega)$ se concluye que

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla \phi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi = \int_\Omega f\phi\,, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

5.2. Un resultado de no existencia de solución

El resultado de no existencia para el problema (P1) se basa en un argumento sencillo consistente en elegir una función test adecuada y usar la caracterización del primer autovalor $\lambda_1(f)$ del problma de autovalores con peso f:

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda f(x)u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

Concretamente se puede enunciar el siguiente Teorema recogido en [4].

Teorema 5.4 *Dada una función $f \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{2}$, tal que cumple* (Hf)*. Si se cumplen las hipótesis* (HM) *y* (HG4) *donde la función h cumple además que*

$$\lim_{s\to 0^+} h(s) = +\infty, \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \sqrt{h(s)} = +\infty, \tag{5.12}$$

$$\lim_{s\to 0^+} \sqrt{h(s)} \mathrm{e}^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} = h_0 \geq 0. \tag{5.13}$$

Entonces, si $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{\alpha}$, el problema (P) *no tiene solución de energía finita.*

Demostración.
Si la función g satisface las hipótesis del enunciado, entoces h se puede cambiar por una función más pequeña $\overline{h}$ la cual, además de verificar las hipótesis, también satisface $\overline{h}(s) = 0$ para cada $s > 1$. De hecho, si s_0 es el punto donde h alcanza su mínimo valor en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces es suficiente definir

$$\overline{h}(s) = \begin{cases} (h(s) - h(s_0))^+ & \text{si } s \in (0, s_0], \\ 0 & \text{si } s > s_0. \end{cases}$$

Consecuentemente, sin pérdida de generalidad, se asume en lo sucesivo que las hipótesis se verifican con h satisfaciendo además

$$h(s) = 0, \quad \forall s \geq 1. \tag{5.14}$$

Se considera la función $G : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por

$$G(s) = \mathrm{e}^{\int_1^s \frac{h(t)}{\beta}dt} \quad \text{para cada } s > 0,$$

donde β está dada por (HM). Gracias a (5.12) y (5.13)

$$\lim_{s\to 0^+} h(s) = +\infty, \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \sqrt{h(s)} = +\infty,$$

la función G puede ser extendida continuamente a $[0, +\infty)$ con $G(0) = 0$. Además, se define la función $\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ con $\sigma(0) = 0$ y

$$\sigma(s) = \mathrm{e}^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} \qquad \text{para cada } s > 0.$$

Por las hipótesis se tiene que $\sigma \in C^1([0, +\infty))$, $\sigma'(0) = h_0$ y $\sigma(s) = 0$ si y sólo si $s = 0$. Como consecuencia de (5.14), $\sigma(s) = 1$ para cada $s > 1$ y $\sigma(s) \leq 1$ para cada $s \geq 0$.

Antes de continuar con la demostración se prueba el siguiente lema:

Lema 5.5 *Se asume* (5.12) *y* (5.13). *Entonces la función*

$$\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_0^s G(t)[\sigma'(t)]^2 dt}{G(s)} & \text{si } s > 0, \\ \\ 0 & \text{si } s = 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

es una función diferenciable con derivada continua en $[0, +\infty)$ *y que satisface la ecuación diferencial ordinaria*

$$\begin{cases} \varphi'(s) + \dfrac{h(s)}{\beta}\varphi(s) = [\sigma'(s)]^2, \quad \text{en } [0, +\infty), \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Además, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\varphi(s) \leq \beta[\sigma(s)]^2, \quad \forall s > 0. \tag{5.17}$$

Demostración.

La primera parte de la prueba es trivial a excepción de comprobar que φ es diferenciable en cero y φ' es continua en cero. Para probarlo, se observa primero que φ es continua en cero. De hecho, como G es no-decreciente y $[\sigma']^2$ es continua en $[0,+\infty)$:

$$0 \leq \lim_{s\to 0^+}\varphi(s) \quad = \quad \lim_{s\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_0^s G(t)[\sigma'(t)]^2 dt}{G(s)} \leq \lim_{s\to 0^+}\int_0^s [\sigma'(t)]^2 dt = 0.$$

Ahora se pude observar que, usando la regla de L'Hôpital, (5.12) y (5.13),

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= h_0^2 - \lim_{s\to 0^+}\frac{h(s)\displaystyle\int_0^s G(t)\,[\sigma'(t)]^2\,dt}{\beta G(s)}\\
&= h_0^2 - h_0^2 \lim_{s\to 0^+}\frac{G(s)[\sigma'(s)]^2}{2\beta\sigma(s)\sigma'(s)G(s) + h(s)[\sigma(s)]^2 G(s)}\\
&= h_0^2 - h_0^2 \lim_{s\to 0^+}\frac{1}{2\beta\frac{1}{\sqrt{h(s)}} + 1} = h_0^2 - h_0^2 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es diferenciable en cero y φ' es continua en cero.

Para probar la desigualdad (5.17), la igualdad $[\sigma'(s)]^2 = [\sigma(s)]^2\,h(s)$ implica que

$$\varphi(s) = \frac{\beta}{G(s)}\int_0^s G(t)\,\frac{h(t)}{\beta}\,[\sigma(t)]^2\,dt.$$

Como

$$G(t)\,\frac{h(t)}{\beta} = \frac{d}{dt}\,G(t),$$

se puede integrar por partes para llegar a que (se recuerda que $G(0) = \sigma(0) = 0$)

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \frac{\beta}{G(s)}\,\left[G(t)\,[\sigma(t)]^2\right]_{t=0}^{t=s} - \frac{2\beta}{G(s)}\int_0^s G(t)\,\sigma(t)\,\sigma'(t)\,dt\\
&= \beta\,[\sigma(s)]^2 - \frac{2\beta}{G(s)}\int_0^s G(t)\,[\sigma(t)]^2\sqrt{h(t)}\,dt\\
&\leq \beta\,[\sigma(s)]^2,
\end{aligned}$$

ya que todas las funciones de la última integral son no negativas.

□

Para terminar, se completa la demostración del Teorema 5.4

CONTINUACIÓN DEMOSTRACIÓN TEOREMA 5.4

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución positiva para (P) y sea $\varphi \in C^1([0,+\infty))$ la función dada por (5.15). Gracias al Teorema 1.17, $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, ya que $\varphi(0) = 0$ y además φ' está acotada, por (5.17) y puesto que $\sigma(s) \leq 1$, se tiene $\varphi(s) \leq \beta$. Por lo tanto, se puede tomar $v = \varphi(u)$ como función test en

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\psi = \int_\Omega f\psi, \forall\psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

para obtener, usando $g(x,s) \geq h(s)$, que

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u\, \varphi'(u) \ + \int_\Omega h(u)|\nabla u|^2\varphi(u) \ \leq \int_\Omega f\,\varphi(u) \ .$$

De este modo, añadiendo $\dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u\, h(u)\varphi(u)$, se deduce de (HM) y (5.16) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u[\sigma'(u)]^2 \quad &\leq \quad \int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u \left[\varphi'(u) + \frac{h(u)}{\beta}\varphi(u)\right] \\
&\quad + \int_\Omega \left[I - \frac{M\,(x,u)}{\beta}\right] \nabla u \cdot \nabla u\, h(u)\varphi(u) \\
&\leq \quad \int_\Omega f\,\varphi(u) \ .
\end{aligned}$$

Usando ahora (HM), (5.17) y que $f \geq 0$, se tiene

$$\alpha\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 \ = \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2[\sigma'(u)]^2 \ \leq \int_\Omega f\,\varphi(u) \ \leq \beta\int_\Omega f\,[\sigma(u)]^2 \ . \qquad (5.18)$$

Por lo tanto, ya que f pertenece a $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$, y $f^+ \not\equiv 0$, el primer autovalor positivo $\lambda_1(f)$ del problema de Dirichlet (5.11) verifica

$$\lambda_1(f) \int_\Omega f\,v^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

y así se deduce de (5.18)

$$\alpha\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 \ \leq \frac{\beta}{\lambda_1(f)}\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2.$$

La hipótesis $\dfrac{\beta}{\alpha} < \lambda_1(f)$, implica entonces que

$$\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 \ = 0,$$

con lo cual

$$\sigma(u) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Por lo tanto, como $\sigma(s) = 0$ si y sólo si $s = 0$, se deduce que $u \equiv 0$, contradiciendo $u > 0$ en Ω. Por consiguiente, no hay soluciones de (P).

$\square$

En concreto, como aplicación directa al (P1) se puede obtener el siguiente corolario:

Corolario 5.6 *Sea* $0 \leq f \in L^q(\Omega)$, *con* $q > \frac{N}{2}$ *y* $f \not\equiv 0$. *Se supone que se cumplen* (HM) *y que para ciertas constantes* $s_0, \Lambda > 0$ *y para* $\gamma \geq 2$ *se cumple*

$$\frac{\Lambda}{s^\gamma} \leq g(x,s), \qquad \text{p.c.t. } x \in \Omega \, \forall s \in (s, s_0].$$

Si además se verifica alguna de las siguientes condiciones

(i) $\gamma > 2$, *o*

(ii) $\gamma = 2$ *y* $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{\Lambda\alpha}$,

entonces (P) *no tiene solución de energía finita.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] H. Amman y M.G. Crandall, *On Some Existence Theorems for Semi Linear Elliptic Equations*, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978). 779-790.

[2] D. Arcoya, S. Barile and P.J. Martínez-Aparicio, *Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sign condition*. J. Math. Anal. Appl., 350 (2009), 401–408.

[3] D. Arcoya, J. Carmona and P.J. Martínez-Aparicio, *Elliptic obstacle problems with natural growth on the gradient and singular nonlinear terms*, Adv. Nonlinear Stud., 7 (2007), 299–317.

[4] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P.J. Martínez-Aparicio, L. Orsina and F. Petitta, *Existence and nonexistence of solutions for singular quadratic quasilinear equations*. J. Differential Equations 246 (2009), 4006–4042.

[5] D. Arcoya and P.J. Martínez-Aparicio, *Quasilinear equations with natural growth,* Rev. Mat. Iberoam., 24 (2008), 597–616.

[6] D. Arcoya and S. Segura de Leon, *Uniqueness of solutions for some elliptic equations with a quadratic gradient term*, ESAIM: Control, Optimization and the Calculus of Variations, 16 (2010). 327-336.

[7] G. I. Barenblatt, M. Bertsch, A.E. Chertock y V. M. Prostokishin, *Self-similar intermediate asymptotics for a degenerate parabolic filtration-absorption equation*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 97 (2000), no. 18. 9844-9848.

[8] A. Bensoussan, L. Boccardo y F. Murat. *On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*. Annales de l'Inst. Henri Poincaré, 5 (1988). 347-364.

[9] A. Bensoussan y J. Freshe, *Nonlinear Elliptic Systems in Stochastic Game Theory*, J. Reine Ang. Math., 350 (1984). 23-67.

[10] A. Bensoussan, J. Freshe y U. Mosco, *A Stochastic Impulse Control Problem with Quadratic Growth Hamiltonian and the Corresponding Quasi Variational Inequality*, J. Reine Ang. Math., 331 (1982). 124-145.

[11] H. Berestycki, S. Kamin y G. Sivashinsky, *Metastability in a flame front evolution equation*, Interfaces Free Bound. 3 (2001), no. 4. 361-392.

[12] L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 14 (2008), no. 3. 411-426.

[13] L. Boccardo y G. Croce. *Esistenza e regolarità di soluzione di alcuni problemi ellittici*. Pitagora, 2010.

[14] L. Boccardo y T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal., 87 (1989). 149-169.

[15] L. Boccardo y T. Gallouët, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data*, Nonlinear Anal. 19 (1992). 573-579.

[16] L. Boccardo, T. Gallouët y F. Murat, *A unified presentation of two existence results for problems with natural growth*, Progress in partial differential equations: the Metz surveys, 2 (1992), 127-137, Pitmann Res. Notes Math. Ser., 296, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[17] L. Boccardo y D. Giachetti, *Strongly Non Linear Unilateral Problems*, Appl. Mat. Opt., 9 (1983). 291-301.

[18] L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel, *Existence de Solutions non bornees pour certaines equations quasi-lineaires*. Portugaliae Mathematica, vol. 41 (1982). 507-534.

[19] L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel, *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasi-linéaires*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 11 (1984). 213-235.

[20] L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel, *Existence of Bounded Solutions for Non Linear Elliptic Unilateral Problems*, Annali di Mat. Pura Appl., 152 (1), (1988). 183-196.

[21] L. Boccardo, S. Segura de León y C. Trombetti, *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term*, J. Math. Pures Appl. 80 (2001), 919-940.

[22] H. Brézis. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Madrid. Alianza Editorial. 1984.

[23] H. Brézis y F. E. Browder, *Some Properties of Higher Order Sobolev Spaces*, J. Math. Pures Appl., 61 (1982). 245-259.

[24] F. E. Browder, *Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly nonlinear lower order terms*, Proceedings Symposia in Pure Mathematics 23 (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971). 269-286.

[25] D.G. De Figueiredo, POSITIVE SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS, Lecture notes in Mathematics, 957 (1982). Springer-Verlag.

[26] T. Del Vecchio, *Strongly Non Linear Problems with Gradient Dependent Lower Order Non Linearity*, Nonlinear Anal. T.M.A., 11 (1987). 5-15.

[27] V. Ferone y F. Murat, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: An existence result when the source terms are small.* Nonlinear Anal. 42 (2000). 1309-1326.

[28] J. Frehse, *A Refinement of Rellich's Theorem, Rendiconti di Matematica*, Rend. Mat. (7) 5, (1984). 229-242.

[29] L. I. Hedberg, *Two approximation problems in function spaces*, Ark. Mat., 16 (1978). 51-81.

[30] D. Giachetti, F. Murat, *An elliptic problem with a lower order term having singular behaviour*, Boll. Unione Mat. Ital., 2(2) (2009). 349-370.

[31] N. Grenon y C. Trombetti, *Existence results for a class of ninlinear elliptic problems with p-groth in the gradient.* Nonlinear Anal. 52 (2003). 931-942.

[32] P. Hess, *Variational Inequalities for Strongly Non Linear Elliptic Operators*, J. Math. Pures Appl., 52 (1973). 285-298.

[33] P. Hess y T. Kato, *On some Linear and Nonlinear Eigenvaule Problems with an Indefinite Weight Funtion*, Communications in Partial Differential Equations, 5 (10), (1980). 999-1030.

[34] M. Kardar, G. Parisi y Y.C. Zhang, *Dynamic Scaling of Growing Interfaces*, Phys. Rev. Lett. 56 (1986). 889-892.

[35] J.L. Kazdan y R.J. Kramer, *Invariant Criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 619-645.

[36] J.B. Keller, *On solutions of* $\nabla u = f(u)$. Comm. Pure Appl. Math 10 (1957). 503-510.

[37] R. Landes, *Solvability of Perturbated Elliptic Equations with Critical Growth Exponent for the Gradient*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 139 (1), (1989). 63-77.

[38] O. Ladyzenskaya, N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, translated by Scripta Technica, Academic Press, New York, 1968.

[39] F. Leoni, *Nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with "absorbing" zero terms*, Adv. Differential Equations 5 (2000). 681-722.

[40] J. Leray y J.L. Lions. *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Bulletin de la S.M.F. (1965) , tomo 93. 97-107.

[41] P. J. Martínez-Aparicio, *Singular Dirichlet problems with quadratic gradient*, Boll. Unione Mat. Ital. (9) 2 no. 3, 559–574.

[42] P.J. Martínez-Aparicio y F. Petitta, *Parabolic equations with nonlinear singularities*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 74 (1), (2011). 114-131

[43] R. Osserman, *On the inequality* $\nabla u \geq f(u)$, Pacific J. Math., 7 (1957), 1641-1647.

[44] A. Porretta y S. Segura de León, *Nonlinear elliptic equations having a gradient term with natural growth*, J. Math. Pures Appl. 85 (2006), 465-492.

[45] J. M. Rakotoson y R. Temam, *Relative Rearrangement in Quasilinear Variational Inequalities*, Indiana Univ. Math. J., 36 (1987). 757-810.

[46] J. Serrin, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*, Phil. Trans. Royal Soc. London 264 (1969). 413-496.

[47] G. Stampacchia. *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. En Séminaire Jean Leray, n. 3 (1963-64). Collège de France, Paris. 1-77.

[48] J. R. L. Webb, *Boundary Value Problems for Strongly Non Linear Elliptic Equations*, J. London Math. Soc., 21 (1980). 123-132.