Trabajo de Fin de Máster

Sistemas de Coordenadas en Espacios de Banach

escrito por

ORTIZ CASTRO JONATHAN ALEJANDRO

Tutor: Jorge Lopez-Abad

Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Trabajo presentado para la obtención del título de
Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.
Especialidad Análisis Matemático

OCTUBRE 2019

Abstract

Abstract en español: En este trabajo se presenta la generalización de la noción de sistemas coordenados a espacios de Banach de dimensión infinita. Esta extensión nos guía de forma natural a la definición de bases de Schauder y a estudiar sus principales propiedades. Se estudian dos tipos de base: shrinking y completamente acotada; cuyas propiedades permiten una caracterización de los espacios reflexivos. Después, se estudian las bases en las cuales el orden de sus elementos no altera su propiedad de ser una base (bases incondicionales). Se caracteriza a los espacios con estas bases en función de contener subespacios isomorfos a c_0 o l_1. Finalmente, se presenta el espacio de James; este espacio ejemplifica la existencia de espacios isométricos a su bidual que no son reflexivos. Los principales trabajos consultados fueron [1, 8, 12].

Abstract in English: This study presents the generalization of the concept of coordinate systems to infinite dimensional Banach spaces. This approach guides smoothly to the definition of Schauder bases and to study their principal properties. We study two types of base: shrinking and completely bounded; whose properties allow us to characterize the reflexive spaces. In addition, we study the bases whose elements ordering do not alter its property of being a base (inconditional bases). Spaces with these bases are characterized, then, based on them to contain subespaces isomorphic to c_0 or l_1. Finally, James space is presented; this space exemplifies the existence of spaces, isometric to their respective bidual, that are not reflexive. The principal references for this work were [1, 8, 12].

Keywords: Sistemas de Coordenadas, Espacios Banach, bases de Schauder, convergencia en norma, convergencia débil, series incondicionalmente convergentes, reflexividad.

Tabla de Contenidos

Página

Capítulo 1

Introducción

El presente documento es el correspondiente al Trabajo de Fin de Máster (TFM) del Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), correspondiente a la opción "Análisis Matemático".

Juliusz Pawel Schauder (1899-1943) fue un matemático polaco que en 1927 presentó la noción de lo que hoy conocemos como base de Schauder. Stefan Banach (1892-1945), también matemático polaco, desarrolló gran parte de la teoría de isomorfismos de espacios de Banach [1]. Otros matemáticos que aportaron enormemente a la teoría de las bases de Schauder son: Steinhaus, Mazur, Orlicz, Schauder, Ulam, Bessaga, Pelczynski, James, Enflo, entre otros. Lamentablemente, gran parte del material desarrollado se perdió (o los grupos de investigación se desintegraron) debido a la primera y la segunda guerra mundial [1].

El trabajo comienza, en el capítulo 2, con la definición de Bases de Schauder y la definición de sucesiones básicas. Se prueba que todo espacio de Banach con base de Schauder es separable, lo que muestra que l_∞ no tiene base de Schauder. Después, se define las *proyecciones canónicas* y se prueba su continuidad, para luego definir la constante básica asociada a una base de Schauder. Además, se demuestra un criterio que determina a las sucesiones básicas. Luego se presenta las bases de los espacios de Banach clásicos: c_0, c y; l_p y $L_p(0,1)$ con $1 \leq p < +\infty$. También se demuestra el Lema de Mazur que permite construir sucesiones básicas. Se definen bases equivalentes y se demuestra que una sucesión básica es estable por perturbaciones "pequeñas". Finalmente, se presentan la noción de bloques básicos y se demuestra el principio de Bessaga - Pelczynski que permite determinar si una sucesión contiene sucesiones básicas.

En el capítulo 3 se empieza definiendo los funcionales coordenados para luego estudiar las bases de Schauder en los espacios duales. Se clasifican dos tipos de bases: shrinking y completamente acotada junto con varias propiedades importantes de estas (por ejemplo: equivalencias, consecuencias y su relación entre ellas). Después se utilizan éstas propiedades para presentar una caracterización de los espacios reflexivos.

En el capítulo 4 se postulan algunas propiedades de las series incondicionalmente convergentes y luego se definen las bases incondicionalmente convergentes. Posteriormente, se demuestra que algunas de las bases dadas anteriormente son incondicionales y otras condicionales. Con este concepto y las bases shrinking y completamente acotada se caracterizan los espacios que contienen subespacios isomorfos a c_0 y l_1. Finalmente, se presenta la construcción y algunas propiedades del espacio de James.

En el capítulo 5 se presentan algunas conclusiones importantes de lo desarrollado en los capítulos 2, 3 y 4. Además, se sugieren posibles continuaciones de este trabajo.

CAPÍTULO 2

Definiciones y Propiedades

2.1. Bases de Schauder

Para empezar se va a definir una extensión del concepto de base, en espacios de dimensión finita, a espacios de Banach de dimensión infinita.

Observación 2.1. *Salvo que se especifique lo contrario, X será un espacio de Banach y su norma será representada por $\|\cdot\|$.*

Definición 2.1. Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X es una *base de Schauder* si para todo $x \in X$ existe una única sucesión, la cual se denota por $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \right\| = 0;$$

es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n u_n$$

en la topología de la norma. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base de Schauder de $\overline{\operatorname{span}(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$, se dice que es una *sucesión básica*. Una base de Schauder se dice *normalizada* si todos sus elementos son de norma 1.

De forma inmediata se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base de Schauder en X, entonces $\left(\dfrac{u_n}{\|u_n\|}\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base normalizada en X. En general, si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in l^\infty$ (con ningún término nulo), entonces $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ también es una base de Schauder de X.*

Observación 2.2. *La extensión de estas definiciones a espacios vectoriales complejos se hace de manera natural. En este trabajo solo se consideran espacios vectoriales reales pues los resultados en los espacios vectoriales complejos son extensiones inmediatas salvo algunos cálculos menores.*

Observación 2.3. *Existen otras bases para espacios infinito dimensionales como por ejemplo las bases de Hamel, pero estas no toman en cuenta la topología del espacio. En este trabajo escrito debe entenderse el término "base" como un sinónimo de "base de Schauder".*

Un estudio interesante de las relaciones entre bases de Schauder, bases de Hamel y sistemas orgonales en espacios normados se puede revisar en [10].

Es importante tener en cuenta que el orden de la base es esencial; en otras palabras, si se cambia este orden puede que la sucesión resultante deje de ser una base. Se analizará esto en detalle en la sección 4.

Un espacio de Banach X con base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, puede estudiarse como un espacio de sucesiones. En efecto, se tiene que para cada $x \in X$,

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots,$$

de donde a cada $x \in X$ se le puede asociar la sucesión real $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Se sigue que existe una identificación entre el espacio X y el espacio

$$\left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in l^\infty(\mathbb{R}) : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n \text{ converge en } X \right\}.$$

Proposición 2.2. *Todo espacio de Banach con una base es separable.*

Demostración. En efecto, si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es base en X, entonces el conjunto numerable

$$\left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} q_n u_n : q_n \in \mathbb{Q} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left\{ \sum_{k=1}^{n} q_k u_k : q_k \in \mathbb{Q} \text{ para todo } k \in \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

es denso en X. □

El recíproco de la proposición anterior es falso. Banach postuló en los años 30 que *"todo espacio de Banach separable posee una base"*.[1] En 1973 Per Enflo construyó un espacio de Banach separable sin bases de Schauder [2].

2.2. Proyecciones Canónicas

En esta sección se van a definir las proyecciones canónicas y se van a probar varias de sus propiedades. Luego se define la constante básica junto con base monótona. Finalmente, se presenta una caracterización de las sucesiones básicas.

[1]Esta proposición fue conocida como el *problema de la base.*

Definición 2.2. Sea X un espacio de Banach con base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Se definen $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ las *proyecciones canónicas* asociadas a $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ por

$$\begin{aligned} P_n : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \end{aligned}$$

para todo $n\in\mathbb{Z}^+$.

Proposición 2.3 ([1]). *Dada una base de Schauder $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X. Para cada $n\in\mathbb{Z}^+$, P_n es lineal, continua y $P_n\circ P_n = P_n$.*

Demostración. Dado $n\in\mathbb{Z}^+$, por cálculo directo, se tiene que P_n es lineal y que $P_n\circ P_n = P_n$.

Para probar que P_n es continua, dado que X es un espacio de Banach, se va a utilizar el Teorema del grafo cerrado. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ en X y $x,y\in X$ tales que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} P_n(x_k) = y.$$

Dado que $(P_n(x_k))_{k\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión convergente en el conjunto cerrado $\operatorname{span}\{u_k : 1\le k\le n\}$, se tiene que $y\in\operatorname{span}\{u_k : 1\le k\le n\}$. Se sigue que

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j.$$

Ahora bien, dado que $\{u_1,\dots,u_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y

$$P_n(x_k) = \sum_{j=1}^{n} x_{k,j} u_j \to \sum_{j=1}^{n} y_j u_j = y,$$

se tiene que $x_{k,j}\to y_j$ para todo $j=1,\dots,n$. Por todo esto, dado que la suma y el producto por escalar son funciones continuas y el desarrollo de x en la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es única, se tiene que $x_j = y_j$ para cada $j=1,\dots,n$. Por lo tanto,

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j = y.$$

Por lo tanto, P_n es continua para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. $\square$

Observación 2.4. *Por la proposición anterior, para cada $x\in X$,*

$$\sup\{\|P_n(x)\| : n\in\mathbb{Z}^+\} < +\infty.$$

Por el Principio de la Acotación Uniforme,

$$\sup\{\|P_n\| : n\in\mathbb{Z}^+\} < +\infty.$$

Este número es una característica importante de la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, lo que lleva a la siguiente definición:

Definición 2.3. Dada $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una base de Schauder en X. El número $K_u = \sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{Z}^+\}$ se llama *la constante básica* asociada a $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Si $K_u = 1$, se dice que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es *monótona*.

Observación 2.5. *Es claro que toda constante básica es mayor o igual a 1.*

La siguiente proposición justifica el término "monótona".

Proposición 2.4. *Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una base de Schauder monótona en X. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\|P_n(x)\| \leq \|P_{n+1}(x)\|$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea $x \in X$. Dado que

$$\|P_n\| \leq 1$$

y

$$P_n(x) = P_n(P_{n+1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k,$$

se sigue que

$$\|P_n(x)\| = \|P_n(P_{n+1}(x))\| \leq \|P_n\| \|P_{n+1}(x)\| \leq \|P_{n+1}(x)\|. \qquad \square$$

Otro resultado importante es que a todo espacio de Banach con una base se lo puede dotar de una nueva norma, equivalente a la anterior, tal que la base dada sea monótona.

Proposición 2.5 ([1]). *Sea X un espacio de Banach y sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una base en X. La norma definida por*

$$\begin{aligned} |||\cdot||| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \|P_n(x)\| \end{aligned}$$

es equivalente a $\|\cdot\|$. Además, $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Por las propiedades del supremo, se tiene que $|||\cdot|||$ es una norma; falta demostrar que toda sucesión de Cauchy, respecto a $|||\cdot|||$, converge en X.

Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de Cauchy en X respecto a la norma $|||\cdot|||$. Dado que $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$, la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ también es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|$. Por tanto, existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x^n\| = 0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se tiene que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$P_k(x^n) \to y^k \in \operatorname{span}\{u_j : 1 \leq j \leq k\}$$

y también se cumple que $x_j = y_j$ para cada $1 \leq j \leq k$.

Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left|\left|\left| x^n - x^N \right|\right|\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, existe $K \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $k \geq K$,

$$\left\| P_k\left(x^N\right) - x^N \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, si $k \geq K$,

$$\begin{aligned}
\|x - y^k\| &= \lim_{n\to+\infty} \|x^n - P_k(x^n)\| \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \left(\|x^n - x^N\| + \|x^N - P_k(x^N)\| + \|P_k(x^N) - P_k(x^n)\| \right) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

de donde $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x - y^k\| = 0$ y $P_k(x) = y^k$. Finalmente, como para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left| x^n - x \right|\right|\right| &= \sup\left\{ \|P_k(x^n) - P_k(x)\| : k \geq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left\| P_k(x^n) - P_k\left(\lim_{m\to+\infty} x^m \right) \right\| : k \geq 1 \right\} \\
&\leq \limsup_{m\to+\infty} \sup\left\{ \|P_k(x^n) - P_k(x^m)\| : k \geq 1 \right\},
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\left|\left| x^n - x \right|\right|\right| = 0$$

y por lo tanto, X es completo respecto a la norma $|||\cdot|||$.

Finalmente, se considera la aplicación lineal y biyectiva entre espacios de Banach

$$\begin{aligned}
f : (X, |||\cdot|||) &\longrightarrow (X, \|\cdot\|) \\
x &\longmapsto x.
\end{aligned}$$

Es claro que f es continua pues para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|f(x)\| = \|x\| \leq |||x|||.$$

Por el Teorema de la aplicación abierta, la inversa de f también es continua; es decir, existe $K > 0$ tal que

$$|||x||| \leq K\|x\|.$$

Esto prueba que $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son normas equivalentes. □

Observación 2.6. *La base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona en X respecto a la norma $|||\cdot|||$.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|||P_n(x)||| &= \sup_{k\geq 1} \|P_k(P_n(x))\| \\
&= \sup\{\|P_1(x)\|, \|P_2(x)\|, \ldots, \|P_n(x)\|\} \\
&= \sup\{\|P_k(x)\| : 1 \leq k \leq n\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
|||P_n||| &= \sup\{|||P_n(x)||| : |||x||| = 1\} \\
&= \sup\left\{\sup_{1\le k\le n} \|P_k(x)\| : \sup_{j\ge 1}\|P_j(x)\| = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sup_{1\le k\le n} \|P_k(x)\| : \|P_j(x)\| = 1 \text{ para cada } j \ge 1\right\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

El siguiente criterio se utiliza para determinar si una sucesión dada puede ser base de algún espacio de Banach.

Proposición 2.6 ([8]). *Sea X un espacio de Banach y sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión, de términos no nulos, en X. La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es básica ssi existe $K \ge 1$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$ con $n < m$, se cumple que*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right\| \le K \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k u_k\right\|$$

para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$. Además, $K_u \le K$.

Demostración. Vamos a demostrar cada implicación por separado:

1. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión básica y sea

$$K = K_u = \sup\{\|P_j\| : j \ge 1\} \ge 1.$$

   Sea $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$. Si $n < m$, entonces tomando

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^{m} a_j u_j;$$

   se tiene que $x = P_n(y)$. Por lo tanto,

$$\|x\| = \|P_n(y)\| \le \|P_n\|\,\|y\| \le K\|y\|.$$

   Se sigue que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\right\| \le K \left\|\sum_{j=1}^{m} a_j u_j\right\|.$$

2. Supongamos que existe $K \ge 1$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right\| \le K \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k u_k\right\|.$$

   Dado $x \in \overline{\operatorname{span}\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}$, existe $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\operatorname{span}\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $x^n \to x$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$x^n = \sum_{j=1}^{M_n} x_j^n u_j.$$

Primero notemos que la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es acotada; existe $M > 0$ tal que

$$\|x^n\| \le M$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la hipótesis, se tiene que

$$|x_1^n| = \frac{\|x_1^n u_1\|}{\|u_1\|} \le K \frac{\left\|\sum_{j=1}^{M_n} x_j^n u_j\right\|}{\|u_1\|} = K\frac{\|x^n\|}{\|u_1\|} \le \frac{KM}{\|u_1\|}$$

es acotado en $\mathbb{R}$. De forma similar,

$$\begin{aligned}
|x_2^n| &= \frac{\|x_2^n u_2\|}{\|u_2\|}\\
&\le \frac{\|x_1^n u_1 + x_2^n u_2\| + \|x_1^n u_1\|}{\|u_2\|}\\
&\le K\frac{\left\|\sum_{j=1}^{M_n} x_j^n u_j\right\|}{\|u_2\|} + \frac{\|x_1^n u_1\|}{\|u_2\|}\\
&\le K\frac{\|x^n\|}{\|u_2\|} + \frac{KM}{\|u_2\|}\\
&\le \frac{2KM}{\|u_2\|}
\end{aligned}$$

es acotado en $\mathbb{R}$. Es importante notar que la cota

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} x_j^n u_j\right\| \le K\|x^n\|,$$

se justifica pues si $M_n \le k$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^n u_j = x^n.$$

Con esto de forma inductiva, es fácil demostrar que $(x_j^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ para cada $j \in \mathbb{Z}^+$.

Ahora bien, para la sucesión $(x_1^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ acotada existe una función creciente $\rho_1\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tal que

$$x_1^{\rho_1(n)} \to x_1 \quad \text{y} \quad \left|x_1^{\rho_1(n)} - x_1\right| < \frac{1}{2\|u_1\|}2^{-n}$$

para todo $n \ge 1$. Para la sucesión $(x_2^{\rho_1(n)})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ acotada existe una función creciente $\rho_2\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tal que

$$x_2^{\rho_2\circ\rho_1(n)} \to x_2 \quad \text{y} \quad \left|x_2^{\rho_2\circ\rho_1(n)} - x_2\right| < \frac{1}{2^2\|u_2\|}2^{-n}$$

para todo $n \ge 1$. Procediendo de forma inductiva, para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, existe una función creciente $\rho_2\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tal que

$$x_j^{\rho_j\circ\cdots\circ\rho_1(n)} \to x_j \quad \text{y} \quad \left|x_j^{\rho_j\circ\cdots\circ\rho_1(n)} - x_2\right| < \frac{1}{2^j\|u_j\|}2^{-n}$$

para todo $n \geq 1$. Para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$y_n = x_1^{\rho_1(n)} u_1 + x_2^{\rho_2 \circ \rho_1(n)} u_2 + \cdots$$

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y_n - x^n\| &= \left\| \sum_{j=1}^{+\infty} (x_j^{\rho_j \cdots \rho_1(n)} - x_j) u_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| (x_j^{\rho_j \cdots \rho_1(n)} - x_j) u_j \right\| \\
&< \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} 2^{-n} \\
&= 2^{-n}.
\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j u_j.$$

Ahora, se demostrará que está representación es única. Es suficiente suponer que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} y_j u_j = 0$$

y probar que cada $y_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Se tiene que

$$\|y_1 u_1\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right\|$$

para todo $n > 1$, de donde, tomando el límite cuánto $n \to +\infty$,

$$\|y_1 u_1\| \leq 0,$$

así $y_1 = 0$. De forma similar,

$$\|y_2 u_2\| = \|y_1 u_1 + y_2 u_2\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right\|$$

para todo $n > 2$, de donde, tomando el límite cuánto $n \to +\infty$,

$$\|y_2 u_2\| \leq 0,$$

así $y_2 = 0$. De manera idéntica, se demuestra que $y_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Todo esto demuestra que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una base de $\overline{\text{span}\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}}$. □

Observación 2.7. *Es claro que si la sucesión además cumple que* $\overline{\text{span}(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}} = X$, *entonces* $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ *es una base para* X.

Observación 2.8. *Es útil tener en cuenta que si* $K = 1$ *en la proposición 2.6, entonces es suficiente verificar la condición solo cuando* $m = n + 1$.

2.3. Ejemplos en los Espacios de Banach Clásicos

Una vez que ya se tienen varios resultados potentes de las bases de Schauder, se introducen las bases, con la demostración de varias de ellas, de los espacios de Banach más utilizados en Análisis Funcional: c_0, c, $C([0,1])$, l^p y L_p con $1 \leq p < +\infty$.

Primero se va a definir la sucesión que generaliza las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.4. La *sucesión canónica* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ está definida por

$$e_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k; \end{cases}$$

para todo $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

Ahora, vamos a ver algunos ejemplos importantes de bases de Schauder.

Ejemplo 2.1. *La sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base de Schauder monótona para el espacio l^p para todo $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración. Sea $1 \leq p < +\infty$. Sea $x \in l^p$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = (x_1, x_2, \ldots).$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| &= \|(0,0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)\| \\ &= \sqrt[p]{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p} < +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p} = 0.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$P_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \quad \text{y} \quad P_{n+1}(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, 0, \ldots),$$

de donde

$$\|P_n(x)\| \leq \|P_{n+1}(x)\|,$$

de donde $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona para l^p. $\square$

Dado que todo espacio de Banach que tenga una base de Schauder es separable, l^∞ no tiene base de Schauder. Si se considera la sucesión canónica en este espacio, se tiene que

$$\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}} = c_0 \subseteq l^\infty.$$

Ejemplo 2.2. *La base canónica es una base monótona de c_0.*

Demostración. Sea $x \in c_0$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = (x_1, x_2, \ldots).$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| &= \|(0,0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)\| \\ &= \max\{|x_k| : k \geq n+1\}.\end{aligned}$$

Dado que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, se sigue que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \lim_{n\to+\infty} \max\{|x_k| : k \geq n+1\} = 0.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$P_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \quad \text{y} \quad P_{n+1}(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, 0, \ldots),$$

de donde

$$\|P_n(x)\| \leq \|P_{n+1}(x)\|,$$

luego $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona para c_0. □

Ejemplo 2.3. *El sistema trigonométrico* $(\exp(i\ nt))_{n\in\mathbb{Z}} = (1, e^{it}, e^{-it}, e^{2it}, e^{-2it}, \ldots)$ *es una base de Schauder de $L_p(0,1)$ para $1 < p < +\infty$. Este sistema no es una base en $L_1(0,1)$.*

Para un tratamiento profundo de este sistema se puede revisar [3].

Definición 2.5 ([8])**.** La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por

$$\begin{aligned} f_1 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$ y $l = 1, 2, \ldots, 2^k$, sea

$$\begin{aligned} f_{2^k+l} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{2l-2}{2^{k+1}} \leq t \leq \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}, \\ -1 & \text{si } \dfrac{2l-1}{2^{k+1}} < t \leq \dfrac{2l}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{caso contrario;} \end{cases} \end{aligned}$$

se denomina *Sistema de Haar*.

Para una mejor visualización de estas funciones, se presenta el gráfico de las 8 primeras funciones.

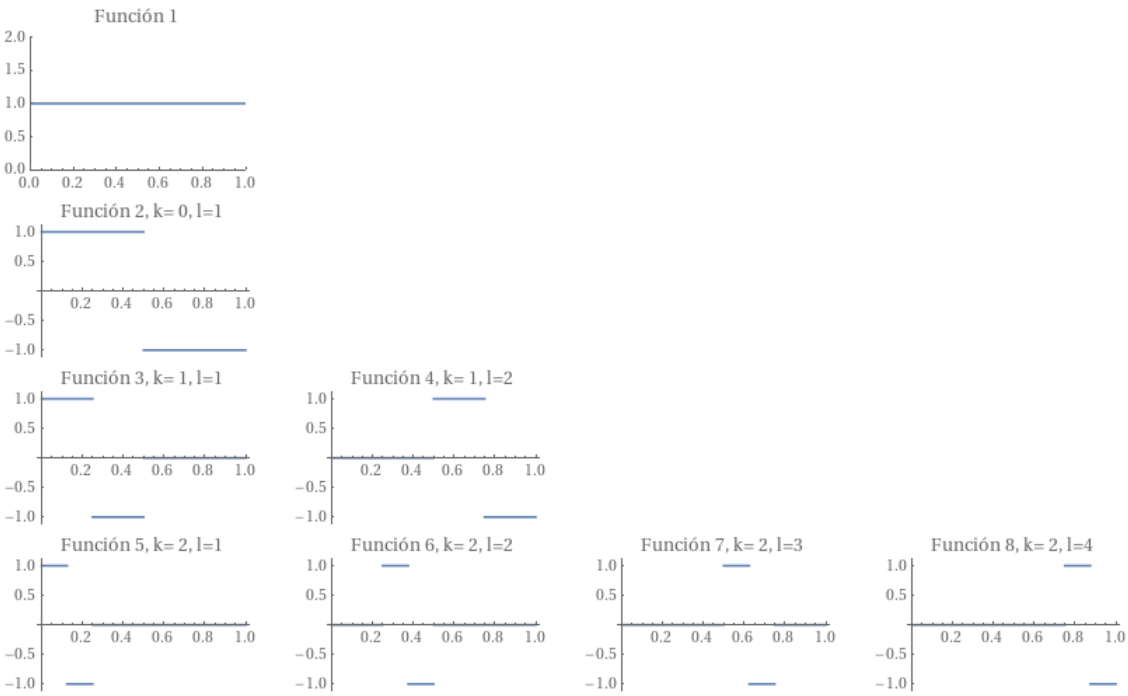

Figura 2.1: Sistema de Haar

Adicionalmente, se presenta un código, en Mathematica, para dibujar hasta cualquier función de este sistema.

```
In[1]:=  SetOptions[Plot,LabelStyle→{FontFamily→"Palatino Linotype"}];

In[2]:=  Funcuno:=Plot[1,{x,0,1},PlotRange→{{0,1},{-1,1}},
                          PlotLabel→HoldForm["Funcion 1"]]
         FuncHaar[k_,l_]:=Piecewise[{
           {1,(2l-2)/(2^(k+1))<x<(2l-1)/(2^(k+1))},
           {-1,(2l-1)/(2^(k+1))<x<(2l)/(2^(k+1))}}]
         DibujarHaar[k_,l_]:=Plot[FuncHaar[k,l],{x,0,1},
           PlotLabel→StringForm["Funcion ‘‘, k= ‘‘, l=‘‘",2^k+l,k,l]]
         FamiliaHaar[k_]:=Table[DibujarHaar[k,l],{j,1},{l,1,2^k}]//TableForm
         SHaar[n_]:={Funcuno,Table[FamiliaHaar[k],{k,0,n}]//TableForm}//TableForm
```

Por ejemplo para realizar la figura 2.1 se ejecutó el comando SHaar[2].

Ejemplo 2.4 ([8]). *El Sistema de Haar es una base monótona de* $L_p(0,1)$ *para todo* $1 \le p < +\infty$.

Demostración. Es claro que ninguna de las funciones el Sistema de Haar es nula. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean las funciones

$$\begin{array}{rcl} F:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(t) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} G:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n+1} a_j f_j(t); \end{array}$$

Vamos a probar que

$$\|F\| \leq \|G\|.$$

Notemos que por la definición del Sistema de Haar, existe un intervalo diádico I tal que F y G coinciden sobre $[0,1]\setminus I$. Ahora bien, en I, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $F = b$ es constante; además, $G = b - a_{n+1}$ en I_1 y $G = b + a_{n+1}$ en I_2 donde I_1 e I_2 son las dos mitades de I. Finalmente, es bien conocido que

$$|b - a_{n+1}|^p + |b + a_{n+1}|^p \geq 2|b|^p.$$

Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|F\|^p &= \int_0^1 |F(t)|^p dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus I} |F(t)|^p dt + \int_I |F(t)|^p dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus I} |G(t)|^p dt + |b|^p \lambda(I) \\
&\leq \int_{[0,1]\setminus I} |G(t)|^p dt + |b - a_{n+1}|^p \lambda(I_1) + |b + a_{n+1}|^p \lambda(I_2) \\
&\leq \int_{[0,1]\setminus I} |G(t)|^p dt + \int_I |G(t)|^p dt \\
&= \int_0^1 |G(t)|^p dt \\
&= \|G\|^p,
\end{aligned}$$

se sigue que $\|F\| \leq \|G\|$, de donde el Sistema de Haar es una sucesión básica monótona.

Finalmente, vamos a probar que

$$\overline{\text{span}(f_n)} = L_p.$$

Dado que las funciones simples son densas en L_p, es suficiente demostrar que para todo intervalo $J \subseteq [0,1]$ (con extremos $a < b$),

$$\chi_J \in \overline{\text{span}(f_n)}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, tomo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Con esto, sean

$$k_1 = \text{máx}\left\{k \in \{0,1,\ldots,2^n - 1\} : \frac{k}{2^n} \leq a\right\} \quad \text{y} \quad k_2 = \text{mín}\left\{k \in \{0,1,\ldots,2^n - 1\} : \frac{k+1}{2^n} \geq b\right\};$$

también sea

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=k_1}^{k_2} |f_{2^n+k}|. \end{aligned}$$

Es claro que $F \in \operatorname{span}(f_n)$; además, dado que $F = X_J$ en J, se tiene que

$$\begin{aligned} \|F - \chi_J\|^p &= \int_0^1 |F(t) - \chi_J(t)|^p dt \\ &= \int_{k_1/2^n}^{a} |F(t) - \chi_J(t)|^p dt + \int_a^b |F(t) - \chi_J(t)|^p dt + \int_b^{(k_2+1)/2^n} |F(t) - \chi_J(t)|^p dt \\ &= \int_{k_1/2^n}^{a} 1 dt + \int_a^b 0 dt + \int_b^{(k_2+1)/2^n} 1 dt \\ &= \left(a - \frac{k_2+1}{2^n}\right) + \left(\frac{k_2+1}{2^n} - b\right) \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que el Sistema de Haar es denso en L_p, de donde es una base monótona de Schauder. □

Definición 2.6 ([8]). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ el Sistema de Haar. La sucesión de funciones $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por: $g_1 = f_1$ y para cada $n > 1$,

$$\begin{aligned} g_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t f_{n-1}(u) du \end{aligned}$$

se denomina *Sistema de Schauder*.

Para una mejor visualización de estas funciones, se presenta el gráfico de las 8 primeras funciones.

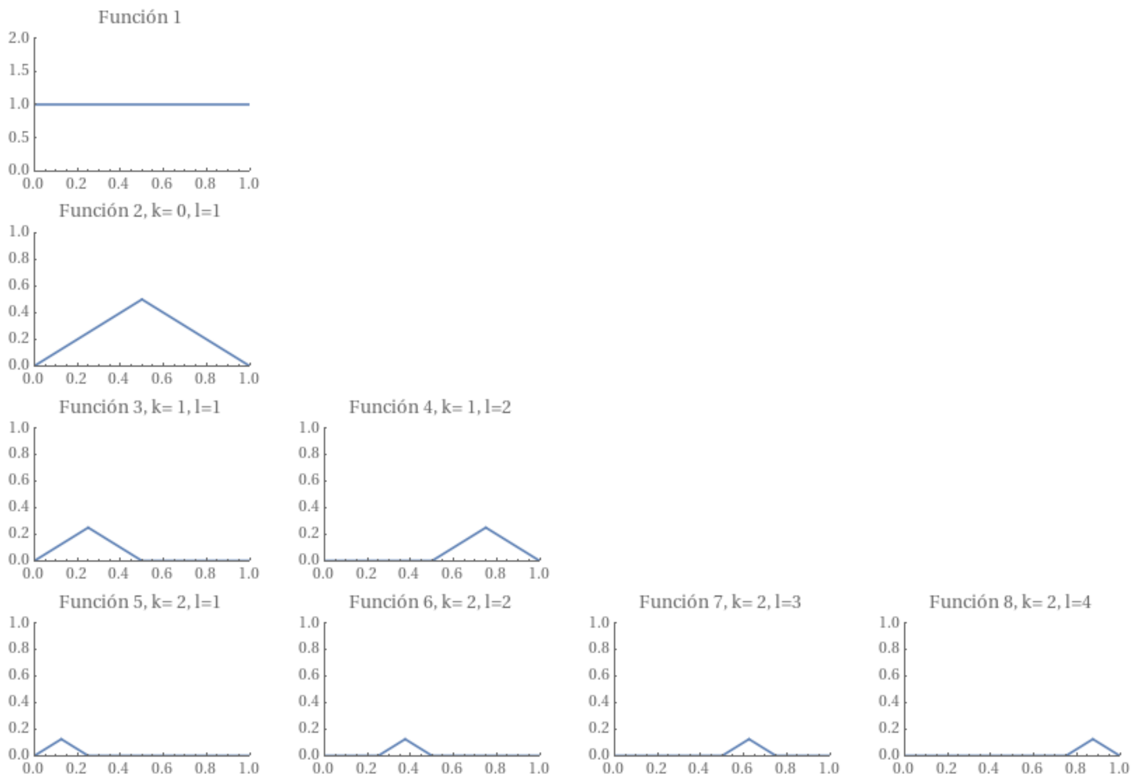

Figura 2.2: Sistema de Schauder

Adicionalmente, se presenta un código, en Mathematica, para dibujar hasta cualquier función de este sistema.

```
In[1]:=  SetOptions[Plot,LabelStyle→{FontFamily→"Palatino Linotype"}];

In[2]:=  Funcuno:=Plot[1,{x,0,1},PlotRange→{{0,1},{-1,1}},
                    PlotLabel→HoldForm["Funcion 1"]]
         FuncSchauder[k_,l_]:=Piecewise[{
           {x-(2l-2)/(2^(k+1)),(2l-2)/(2^(k+1))<x<(2l-1)/(2^(k+1))},
           {(2l/2^(k+1))-x,(2l-1)/(2^(k+1))<x<(2l)/(2^(k+1))}}]
         DibujarSchauder[k_,l_]:=Plot[FuncSchauder[k,l],{x,0,1},
           PlotLabel→StringForm["Funcion ‘‘, k= ‘‘, l=‘‘",2^k+l,k,l]]
         FamiliaSchauder[k_]:=Table[
               DibujarSchauder[k,l],{j,1},{l,1,2^k}]//TableForm
         SSchauder[n_]:={Funcuno,Table[
               FamiliaSchauder[k],{k,0,n}]//TableForm}//TableForm
```

Por ejemplo para realizar la figura 2.2 se ejecutó el comando SSchauder[2].

Ejemplo 2.5 ([8])**.** *El Sistema de Schauder es una base monótona de* $C([0,1])$.

Demostración. De igual manera, es claro que ninguna de las funciones el Sistema de Schauder es nula. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean las funciones

$$\begin{aligned} F:[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j g_j(t) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} G:[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sum_{j=1}^{n+1} a_j g_j(t); \end{aligned}$$

vamos a probar que

$$\|F\| \leq \|G\|.$$

Por la definición del Sistema de Schauder, F y G son funciones continuas y lineales a tramos; por lo tanto, sus extremos se alcanzarán en los puntos diádicos. Además, G tiene un nodo más que F (llamémosle a) y en los demás nodos coinciden. Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \|F\| &= \text{máx}\{|F(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= \text{máx}\left\{\left|F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| : k = 0,1,\ldots,2^n\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\left|G\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| : k = 0,1,\ldots,2^n\right\} \\ &\leq \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{\left|G\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| : k = 0,1,\ldots,2^n\right\}, |G(a)|\right\} \\ &= \text{máx}\{|G(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= \|G\|, \end{aligned}$$

de donde $\|F\| \leq \|G\|$, luego el Sistema de Schauder es una sucesión básica monótona.

Finalmente, vamos a probar que

$$\overline{\text{span}(g_n)} = C([0,1]).$$

Por la definición de Sistema de Schauder, se tiene que $\text{span}(g_n)$ contiene a las funciones lineales a tramos con nodos en los puntos diádicos.

Sea $f \in C([0,1])$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua y $\text{Dom}(f)$ es compacto, f es uniformemente continua. Existe $\delta > 0$ tal que para todo intervalo cerrado $I \subseteq [0,1]$, se verifica que

$$|I| < \delta \Longrightarrow \underset{I}{\text{máx}}\, f - \underset{I}{\text{mín}}\, f < \varepsilon.$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \delta$. Sea

$$P = \left\{\frac{k}{2^n} : k = 0,1,\ldots,2^n\right\}$$

claramente una partición de $[0,1]$ cuyo grosor es menor a δ. Ahora, sea $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función continua cuya gráfica son las rectas que unen los puntos

$$\{(a, f(a)) : a \in P\}.$$

Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f-\phi\| &= \text{máx}\{|f(t)-\phi(t)| : t\in[0,1]\} \\
&= \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{|f(t)-\phi(t)| : t\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right\} : k=0,1,\dots,2^n-1\right\} \\
&\leq \text{máx}\left\{\left\{\max_I f-\min_I f : I=\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right\} : k=0,1,\dots,2^n-1\right\} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que el Sistema de Schauder es denso en $C([0,1])$, de donde es una base monótona de Schauder. □

Ejemplo 2.6. *Toda base ortonormal en un espacio de Hilbert separable es una base de Schauder.*

Otras bases importantes interesantes son las siguientes:

Ejemplo 2.7. *Sea la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por*

$$u_{n,k}=\begin{cases} 0 & si\ k<n, \\ 1 & si\ k\geq n; \end{cases}$$

para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. Se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona y normalizada de c. A esta base se la denomina sumante.

Demostración. Para ver que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base, basta notar que para todo

$$x=(x_1,x_2,\dots)\in c,$$

si

$$a_1=x_1 \quad \text{y} \quad a_n=x_n-x_{n-1},$$

para $n\geq 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k u_n &= \left(a_1,a_1+a_2,\dots,\sum_{k=1}^n a_k,\sum_{k=1}^n a_k,\sum_{k=1}^n a_k,\dots\right) \\
&= (x_1,x_2,\dots,x_n,x_n,x_n,\dots),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^n a_k u_n\right\| &= \lim_{n\to+\infty}\|(0,0,\dots,0,x_{n+1}-x_n,x_{n+2}-x_n,\dots)\| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\text{máx}\{|x_{n+k}-x_n| : k\in\mathbb{Z}^+\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pues la sucesión x es convergente. Además, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n, x_n, \ldots) \quad \text{y} \quad P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+1}, \ldots),$$

luego $\|P_n(x)\| \leq \|P_{n+1}(x)\|$, de donde $\|P_n\| = 1$, luego $K_u = 1$ de donde $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona. □

Ejemplo 2.8. *Sea la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona en c_0.

Demostración. Para ver que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base, basta notar que para todo

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$$

si

$$a_n = x_n - x_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k u_k &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j, \sum_{j=2}^{n} a_j, \ldots, \sum_{j=n}^{n} a_j, 0, 0, \ldots\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j+1}), \sum_{j=2}^{n}(x_j - x_{j+1}), \ldots, \sum_{j=n}^{n}(x_j - x_{j+1}), 0, 0, \ldots\right) \\ &= (x_1 - x_{n+1}, x_2 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}, 0, \ldots),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\| &= \lim_{n\to+\infty} \|(x_{n+1}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)\| \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. □

Teorema 2.1 ([8])**.** *Todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene al menos una sucesión básica que genera un espacio de dimensión infinita.*

Lema 2.1 (de Mazur [8])**.** *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $B \subseteq X$ un subespacio de dimensión finita. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que*

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

para todo $y \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\varepsilon < 1$. Sea una sucesión $(y_i)_{i=1}^m$ de norma 1 tal que para todo $y \in B$, de norma 1, existe y_i tal que

$$\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, sea $(y_i^*)_{i=1}^m$ en X^*, de norma 1, tal que $y_i^*(y_i) = 1$ para todo $1 \le i \le m$ y sea $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $y_i^*(x) = 0$ para todo $1 \le i \le m$. Se va a probar que este x cumple con las condiciones pedidas.

Sea $y \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $y \neq 0$. Para $z = \frac{y}{\|y\|}$, sea y_i tal que $\|z - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\alpha = \frac{\lambda}{\|y\|}$, por la desigualdad triangular

$$\|z + \alpha x\| \ge \|y_i + \alpha x\| - \|z - y_i\| \ge \|y_i + \alpha x\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

y como

$$1 = y_i^*(y_i + \alpha x) \le \|y_i + \alpha x\|,$$

se deduce que

$$\|z + \alpha x\| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ge \frac{1}{1+\varepsilon},$$

donde la segunda desigualdad se cumple pues $0 < \varepsilon < 1$. Entonces

$$1 \le (1+\varepsilon)\|z + \alpha x\|$$

lo que equivale a

$$\|y\| \le (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|. \qquad \square$$

Proposición 2.7 ([8]). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión básica $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X tal que $K_u \le 1+\varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$\varepsilon_n = (1+\varepsilon)\exp\left(2^{-n-1}\right) - 1 > 0$$

para todo $n \ge 1$. Con esto se tiene que

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}^+} (1+\varepsilon_n) \le 1+\varepsilon.$$

Sea $u_1 \in X$ tal que $\|u_1\| = 1$. Para $B = [u_1]$ y ε_1, por el Lema de Mazur, existe $u_2 \in X$ de norma 1 tal que

$$\|y\| \le (1+\varepsilon_1)\|y + \lambda u_2\|$$

para todo $y \in [u_1]$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Inductivamente se construye $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ normalizada en X tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\|y\| \le (1+\varepsilon_n)\|y + \lambda u_{n+1}\|$$

para todo $y \in [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica en X. En efecto, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ y sean enteros positivos $n < m$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| &\leq (1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + a_{n+1}u_{n+1}\right\| \\
&\leq (1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i\right\| \\
&\leq (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n+1})\left\|\sum_{i=1}^{n+2} a_i u_i\right\| \\
&\leq (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n+1})\cdots(1+\varepsilon_{m-1})\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\right\| \\
&\leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\right\|.
\end{aligned}$$

Entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica en X y $K_u \leq 1+\varepsilon$. □

Observación 2.9 ([8]). *En el Lema de Mazur es suficiente tomar $x \in X$, de norma 1, tal que $|y_i^*(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Demostración. Sea $y \in B$ no nulo y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $z = \frac{y}{\|y\|}$ y $\alpha = \frac{\lambda}{\|y\|}$, existen dos casos:

- Si $|\alpha| \geq 2$, entonces

$$\|z + \alpha x\| \geq \|\alpha x\| - \|z\| = 1 = \|z\|,$$

  luego

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y\|.$$

- Si $|\alpha| < 2$, con el razonamiento de la demostración del lema, se tiene que

$$\|z + \alpha x\| \geq \|y_i + \alpha x\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - |\alpha|\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon = (1-\varepsilon)\|z\|,$$

  de donde

$$\|y + \lambda x\| \geq (1-\varepsilon)\|y\|.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\|y\| \leq \text{máx}\left\{1, \frac{1}{1-\varepsilon}\right\}\|y + \lambda x\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|.$$ □

A continuación, se presenta otra manera de hallar sucesiones básicas.

Proposición 2.8 ([8]). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión débilmente nula en X. Si*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\| > 0,$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ contiene una subsucesión básica con constante menor o igual a $1+\varepsilon$.

Demostración. Sea $v_1 = u_{n_1} \neq 0$ cualquiera. Sean $B_1 = [v_1]$ y $\varepsilon > 0$; y sea una sucesión $(y_i)_{i=1}^m$ de norma 1 tal que para todo $y \in B_1$, de norma 1, existe y_i tal que

$$\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, sea $(y_i^*)_{i=1}^m$ en X^*, de norma 1, tal que $y_i^*(y_i) = 1$ para todo $1 \leq i \leq m$. Como $y_i^*(u_n) \to 0$ para todo $1 \leq i \leq m$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq n \Longrightarrow |y_i^*(u_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $1 \leq i \leq m$. Como el límite inferior de la sucesión es positivo, existe $u_{n_2} \neq 0$ tal que $n_2 \geq \text{máx}\{n_1, N\}$. Sea $v_2 = u_n$. Procediendo de forma inductiva se construye $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Por la observación anterior y por la demostración de la proposición anterior, se tiene que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica y $K_v \leq 1 + \varepsilon$. $\square$

Definición 2.7. Dos bases $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X, se dicen *equivalentes* si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n v_n \text{ converge}$$

para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$.

Utilizando el Teorema de Grafo Cerrado, se tiene que

Proposición 2.9 ([8]). *Dos sucesiones básicas $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X y Y, respectivamente; son equivalentes ssi existe un isomorfismo*

$$T : \overline{\operatorname{span}(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}} \to \overline{\operatorname{span}(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$$

tal que $T(u_n) = v_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Con esta proposición, dado que T y T^{-1} son funciones continuas, se tiene el siguiente criterio sencillo para determinar si dos bases son congruentes:

Corolario 2.1. *Dadas $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ bases de los espacios de Banach X y Y, respectivamente. Las bases son equivalentes ssi existe $C > 0$ tal que para cualquier sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ con soporte compacto, se tiene que*

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k v_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k\right\| \leq C\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k v_k\right\|$$

Definición 2.8. Si la constante $C = 1$, se dice que las bases son *isométricamente equivalentes*.

La siguiente proposición muestra un resultado interesante respecto a las bases equivalentes.

Proposición 2.10 ([11]). *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder. La cantidad de bases que no son equivalentes no es numerable.*

La siguiente proposición muestra que las bases son estables por perturbaciones.

Proposición 2.11 ([8]). *Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una base normalizada en X.*

i. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión en X tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n - v_n\| < \frac{1}{2K_u},$$

entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base equivalente a $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

ii. Se supone que existe una proyección sobreyectiva

$$P : X \to \overline{\operatorname{span}(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}.$$

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión en X tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n - v_n\| < \frac{1}{8K_u\|P\|},$$

entonces $\overline{\operatorname{span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}$ es complementado en X.

Para la demostración de esta proposición, primero se recuerda que

Definición 2.9. Dado el espacio de Banach X. Se dice que el subespacio cerrado $Y \subseteq$ es *complementado* si existe un subespacio cerrado $Z \subseteq X$ tal que

$$X = Y \bigoplus Z.$$

Demostración. Notemos que si $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$x_n u_n = P_n(x) - P_{n-1}(x),$$

de donde

$$|x_n| \leq 2K\|x\| < +\infty.$$

Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T : \overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_n v_n. \end{aligned}$$

T está bien definida pues

$$\begin{aligned} \|x - T(x)\| &= \|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_n(u_n - v_n)\| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |x_n|\|u_n - v_n\| \\ &\leq \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{Z}^+\} \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \|u_n - v_n\| \\ &\leq 2K_u\|x\| \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \|u_n - v_n\| \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

i. Por la hipótesis y la desigualdad anterior, se tiene que $\|I-T\|<1$, de donde T es un automorfismo.

ii. Si $y=T(x)$, entonces, por la hipótesis y la desigualdad triangular, $|\|x\|-\|y\||\leq\|y-x\|<\frac{\|x\|}{4}$, de donde

$$\|x\|\leq\frac{3}{2}\|y\|<2\|y\| \quad \text{y} \quad \|y\|\leq\frac{5}{4}\|x\|.$$

Entonces $\|T\|\leq\frac{5}{4}<2$. Finalmente, como

$$T\circ P(y)-y=T(P(y))-T(x)=T(P(y)-x)=T(P(y)-P(x)),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T\circ P(y)-y\| &= \left\|T\circ P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}x_n(v_n-u_n)\right)\right\| \\
&\leq \|T\|\|P\|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}|x_n|\|v_n-u_n\| \\
&\leq 2K_u\|x\|\|T\|\|P\|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\|v_n-u_n\| \\
&< 8K_u\|y\|\|P\|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\|v_n-u_n\|
\end{aligned}$$

de donde

$$\|T\circ P-I\|\leq 8K_u\|P\|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\|v_n-u_n\|<1.$$

Entonces $S=T\circ P:\overline{\operatorname{span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}\to X$ es un operador inversible y

$$S^{-1}\circ T\circ P:\overline{\operatorname{span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}\to X$$

es una proyección. □

2.4. Bloques Básicos

En esta sección se definen los bloques básicos y se muestra como ellos son muy útiles en el estudio de los subespacios de dimensión infinita de una espacio de Banach que tenga base. Finalmente, se presenta el importante Teorema: *Principio de selección de Bessaga - Pelczynski*.

Dada una sucesión básica, se puede construir otra mediante la multiplicación por una sucesión acotada y luego segmento, la serie resultante, por bloques:

Definición 2.10. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión básica en X. A una sucesión de vectores no nulos $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X de la forma

$$v_j=\sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}}x_ku_k$$

con $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ y

$$p_1<p_2<\cdots$$

una sucesión creciente de enteros, se le llama *bloque básico* de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

Observación 2.10. *Es claro que la constante básica de todo bloque básico es menor o igual a la de la sucesión básica.*

Proposición 2.12 ([8]). *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y sea $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado de dimensión infinita. Entonces existe un subespacio $Z \subseteq Y$ con una base que es equivalente a un bloque básico de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.*

Demostración. Primero notemos que como Y es de dimensión infinita, para todo $p \in \mathbb{Z}$, existe $y \in Y$ de norma 1 tal que

$$P_p(y) = 0.$$

Sea $y_1 \in Y$ de norma 1. Sea $p_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|y_1 - P_{p_1}(y_1)\| < \frac{1}{4K_u},$$

sea

$$v_1 = P_{p_1}(y_1) = \sum_{n=1}^{p_1} y_{1,n} u_n.$$

Sea $y_2 \in Y$ de norma 1 tal que $P_{p_1}(y_2) = 0$. Sea $p_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|y_2 - P_{p_2}(y_2)\| < \frac{1}{4^2 K_u},$$

sea

$$v_2 = P_{p_2}(y_2) = \sum_{n=p_1+1}^{p_2} y_{2,n} u_n.$$

Sea $y_3 \in Y$ de norma 1 tal que $P_{p_2}(y_3) = 0$. Sea $p_3 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|y_3 - P_{p_3}(y_3)\| < \frac{1}{4^3 K_u},$$

sea

$$v_3 = P_{p_3}(y_3) = \sum_{n=p_2+1}^{p_3} y_{3,n} u_n.$$

Procediendo de manera inductiva, se tiene $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X. Es claro que $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es un bloque básico y como

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \|y_n - v_n\| &< \frac{1}{K_u} \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{K_u}\left(\frac{1}{1-1/4} - 1\right) \\
&= \frac{1}{3K_u} \\
&< \frac{1}{2K_u},
\end{aligned}$$

por la proposición 2.11, se tiene que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Es suficiente tomar

$$Z = \overline{\operatorname{span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}. \qquad \square$$

Observación 2.11. *De la demostración de proposición anterior se nota que no es esencial que Y sea un subespacio. Lo único que se necesita para la prueba es que la expansión (en la base) de los elementos de Y empiece arbitrariamente lejos; es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $p \in \mathbb{Z}^+$, exista $y \in Y$ tal que*

$$\|y\| \geq 1 \quad y \quad \|P_p(y)\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.2 (Principio de selección de Bessaga - Pelczynski [8]). *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión en X tal que*

$$\limsup_{k\to+\infty} \|y_k\| > 0$$

y $\lim_{k\to+\infty} y_{k,n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces existe una subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ equivalente a un bloque básico de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

Demostración. Como

$$r = \limsup_{k\to+\infty} \|y_k\| > 0,$$

se puede extraer una subsucesión $\left(y_{k_m}\right)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $\|y_{k_m}\| > \dfrac{r}{2} > 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Entonces se tiene que

$$\liminf_{m\to+\infty} \|y_{k_m}\| > 0$$

y además dado $x^* \in X$, se tiene que

$$x^*(y_{k_m}) = x^*\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{k_m,n} u_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_{k_m,n} x^*(u_n)$$

para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, por la hipótesis, se sigue que

$$\lim_{m\to+\infty} x^*(y_{k_m}) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} y_{k_m,n} x^*(u_n) = 0;$$

es decir, $(y_{k_m})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ es débilmente convergente. Por la Proposición 2.8, existe una subsucesión básica $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de $(y_{k_m})_{m\in\mathbb{Z}^+}$. Sea

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}$$

un subespacio cerrado de dimensión infinita de X. Finalmente, por la Proposición 2.12, existe un subespacio $Z \subseteq Y \subseteq X$ con una base $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ equivalente a un bloque básico de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Por la demostración de la Proposición 2.12, se puede suponer que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una subsucesión de $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ con lo que se obtiene el resultado deseado. □

Observación 2.12. *Las hipótesis del teorema anterior se satisfacen en particular si $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es débilmente nula y*

$$\lim_{k\to+\infty} v_k \neq 0.$$

Demostración. Esto es claro, pues en este caso se cumple que

$$\limsup_{k\to+\infty} \|v_k\| > 0. \qquad \square$$

Proposición 2.13 ([1]). *Todo espacio separable es isométrico a un subespacio de* $C([0,1])$.

A esta proposición se la conoce como el Teorema de Banach - Mazur.

CAPÍTULO 3

BASES EN EL ESPACIO DUAL

Una vez que ya se tiene un conocimiento suficiente de la propiedades fundamentales de las bases de Schauder en un espacio de Banach X, es natural analizar cuando y como se pueden extender estas nociones a su espacio dual X^*.

3.1. Funcionales Coordenados

Dado un espacio de Banach X con base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Se consideran los funcionales que a cada $x\in X$ y dado $n\in\mathbb{Z}^+$, le asocia el coeficiente de u_n.

Definición 3.1 ([8]). Dado un espacio de Banach X con base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. La sucesión $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X^*, definida por

$$\begin{aligned} u_n^*: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_n \end{aligned}$$

para cada $n\in\mathbb{Z}^+$ se llama *Funcionales biortogonales o los Funcionales coordenados* asociados a $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. De idéntica forma, se define

$$\begin{aligned} P_m^*: \overline{\operatorname{span}\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}^+}} &\longrightarrow X^* \\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k^* &\longmapsto \sum_{k=1}^{m} a_k u_k^* \end{aligned}$$

para cada $m\in\mathbb{Z}^+$.

Observación 3.1. *Es importante tener en cuenta de que en espacios de Banach de dimensión infinita existen funcionales lineales que no son continuos [3]. Por esto la afirmación: $u_n^*\in X^*$ para todo $n\in\mathbb{Z}^+$ no es trivial. Por la Proposición 2.3 y dado que*

$$u_1^* = P_1 \quad y \quad u_n^* = P_n - P_{n-1}$$

para todo $n \geq 2$, se sigue que u_k^* son funcionales lineales continuos para cada $k \in \mathbb{Z}^+$.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica en X^*.*

Demostración. Es claro que ninguna de las funciones de la sucesión es nula. Sea $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n < m$. Dado que

$$P_n^*\left(\sum_{k=1}^{m} a_k u_k^*\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k^*,$$

se tiene que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k^*\right\| \leq \|P_n^*\| \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k u_k^*\right\| \leq K_u \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k u_k^*\right\|.$$

□

Una propiedad inmediata es que

$$u_n^*(u_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m; \end{cases}$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

Observación 3.2. *Como para todo $x \in X$*

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n(x) - x\| = 0,$$

se tiene que

$$x^* = \sum_{n=1}^{+\infty} x^*(u_n) u_n^*$$

para todo $x^* \in X^*$ en la topología débil estrella.

Demostración. Sea $x^* \in X^*$ y sea $x \in X$. Vamos a verificar que

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^*(u_n) u_n^*(x)$$

lo que equivale a

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x^*(x) - \sum_{k=1}^{n} x^*(u_k) u_k^*(x) \right\| = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} \left\| x^*(x) - \sum_{k=1}^{n} x^*(u_k) u_k^*(x) \right\| &= \left\| x^*\left(x - \sum_{k=1}^{n} u_k u_k^*(x)\right) \right\| \\ &\leq \|x^*\| \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \right\| \\ &= \|x^*\| \, \|x - P_n(x)\| \end{aligned}$$

lo que implica el resultado deseado. □

3.2. Tipos de Bases

Para continuar con resultados más importantes, se debe clasificar las bases que cumplen ciertas propiedades especiales. En esta sección se tratará sobre las bases shrinking y completamente acotadas.

3.2.1. Base Shrinking

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base en X, no siempre los funcionales coordenados $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ forman una base en X^*. Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.2. Se dice que la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de X es *shrinking*[1] si $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base de X^*.

El siguiente criterio permite, de una manera simple, determinar si una base es shrinking.

Proposición 3.2 ([8]). *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. La base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking ssi para todo $x^*\in X^*$,*

$$\lim_{n\to+\infty} x^*\Big|_{[u_i]_{i=n}^{+\infty}} = 0.$$

Demostración. Se va a demostrar cada implicación por separado:

1. Supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base shrinking. Dado $x^*\in X^*$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^* - P_n^*(x^*)\| = 0.$$

Además, para cada $n\geq 2$,

$$P_{n-1}^*(x^*)\Big|_{[u_i]_{i=n}^{+\infty}} = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} x^*\Big|_{[u_i]_{i=n}^{+\infty}} = \lim_{n\to+\infty} P_{n-1}^*(x^*)\Big|_{[u_i]_{i=n}^{+\infty}} = 0.$$

2. Supongamos que para todo $x^*\in X^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} x^*\Big|_{[u_i]_{i=n}^{+\infty}} = 0.$$

Dado $x\in X$ tal que $\|x\|=1$, para cada $x^*\in X^*$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\left(x^* - P_n^*(x^*)\right)(x)\| &= \|x^*(I-P_n)(x)\| \\ &\leq \left\| x^*\Big|_{[u_i]_{i=n+1}^{+\infty}} \right\| \|I-P_n\| \|x\| \\ &\leq \left\| x^*\Big|_{[u_i]_{i=n+1}^{+\infty}} \right\| (1+K_u),\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^* - P_n^*(x^*)\| \leq (1+K_u) \lim_{n\to+\infty} \left\| x^*\Big|_{[u_i]_{i=n+1}^{+\infty}} \right\| = 0.$$

Dado que $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica; por lo anterior, también es una base de X^*. □

[1]La palabra “shrinking” es traducida, por algunos autores, como “retractiva’.

Observación 3.3. *Una condición necesaria para que un espacio de Banach tenga una base shrinking es que su dual sea separable. En efecto, por definición, el dual de todo espacio con base shrinking tiene una base. Esto prueba que en l_1 y $C([0,1])$ ninguna base es shrinking.*

Proposición 3.3 ([8]). *Sea X un espacio de Banach con una base shrinking $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces al espacio X^{**} se le puede identificar con el espacio de sucesiones reales $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\| < +\infty;$$

esta correspondencia es

$$x^{**} \longleftrightarrow \left(x^{**}(u_1^*), x^{**}(u_2^*), \ldots\right).$$

Si la base es monótona, se tiene que

$$\|x^{**}\|_{X^{**}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n} x^{**}(u_k^*)u_k\right\|.$$

Esta proposición será fundamental en el estudio del espacio de James en la siguiente sección.

3.2.2. Base Completamente Acotada

Definición 3.3. Se dice que la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de X es *completamente acotada* si para cualquier sucesión de reales $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tales que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\| < +\infty,$$

se tiene que la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k$$

converge en X.

A pesar que podría pensarse que todas las bases cumplen esta condición, esto no es cierto. El siguiente ejemplo sencillo muestra que incluso la sucesión canónica, en general, no cumple dicha condición.

Ejemplo 3.1 ([8]). *La base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en c_0 no es completamente acotada.*

Demostración. Se considera $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$a_n = 1$$

para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. Para cada $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_n e_k = \sum_{k=1}^{n} e_k = (1,1,\ldots,1,0,0,\ldots);$$

de donde

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| = 1 < +\infty.$$

Finalmente, es claro que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n = (1,1,\ldots) \notin c_0.$$ □

Ejemplo 3.2. *La base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en l_p es completamente acotada para todo $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| < +\infty.$$

Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| = \|(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como la sucesión es creciente y acotada, es convergente. Se tiene que

$$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p} \leq C,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n \in l_p.$$ □

La dos siguientes proposiciones muestran que las nociones de base shrinking y completamente acotada, en cierto sentido, son duales.

Proposición 3.4 ([1])**.** *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. La base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking ssi la base $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X^* es completamente acotada.*

Proposición 3.5 ([1])**.** *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. La base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es completamente acotada ssi la sucesión básica $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking en X^*.*

3.3. Espacios Reflexivos

En esta sección, se va a establecer una condición necesaria y suficiente, sobre las bases, para que un espacio de Banach sea reflexivo.

Una proposición que caracteriza a los espacios reflexivos es la siguiente:

Proposición 3.6 ([1])**.** *Sea X un espacio de Banach. El espacio X es reflexivo ssi toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión débilmente convergente.*

El siguiente teorema presenta una caracterización interesante de los espacios reflexivos.

Teorema 3.1 ([12] y [8])**.** *Sea X un espacio de Banach con base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

i. *X es reflexivo.*

ii. *La base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X es shrinking y completamente acotada al mismo tiempo.*

Demostración. Se va a demostrar cada implicación por separado.

- Sea X es reflexivo. Por lo visto anteriormente, se tiene que para cada $x^* \in X^*$,

$$x^* = \lim_{n\to+\infty} P_n^*(x^*)$$

converge en la topología débil* igual a la topología débil, pues X es reflexivo. Se sigue que

$$x^* \in \overline{\operatorname{span}\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}^+}}$$

con la clausura débil. Pero como $\operatorname{span}\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es un conjunto convexo, está clausura coincide con la clausura de la topología fuerte. Por lo tanto,

$$X^* = \overline{\operatorname{span}\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}^+}},$$

de donde $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base shrinking.

Por otro lado, como X^* también es reflexivo, $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base shrinking en X^*, luego $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base completamente acotada en X.

- Supongo que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking y completamente acotada. Se va a utilizar la caracterización 3.6. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión normalizada en X. Por el procedimiento de la diagonal, se puede extraer una subsucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$a_n = \lim_{k\to+\infty} u_n^*(z_k)$$

existe para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \lim_{k\to+\infty} P_n(z_k),$$

de donde

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\| \le K_u.$$

Como $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es completamente acotada, se tiene que

$$z = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i u_i \in X$$

y además $\lim_{k\to+\infty} u_n^*(z_k) = u_n^*(z)$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Finalmente, como $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking, lo último implica que

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = z$$

converge débilmente. Por lo tanto, X es reflexivo. $\square$

Observación 3.4. *Es importante tener en cuenta que el teorema anterior muestra que en un espacio reflexivo* todas *las bases son shrinking y completamente acotadas.*

Dos resultados similares al anterior son los siguientes.

Proposición 3.7 ([13])**.** *Sea X un espacio de Banach con base. Si toda base de X es shrinking, entonces X es reflexivo.*

Proposición 3.8 ([13])**.** *Sea X un espacio de Banach con base. Si toda base de X es completamente acotada, entonces X es reflexivo.*

Finalmente, se presenta una proposición interesante de los espacios de Banach cuando su dual tiene base.

Proposición 3.9 ([7])**.** *Sea X un espacio de Banach. Si X^* tiene base, entonces X tiene una base shrinking.*

CAPÍTULO 4

Bases Incondicionales

Se recuerda que el orden de los elementos de una base, de forma general, es esencial. Pero algunas sucesiones son bases sin importar el orden de sus elementos. Esto motiva a presentar las series incondicionalmente convergentes para luego definir las *bases incondicionales*.

4.1. Series Incondicionalmente Convergentes

En esta sección se definen las series incondicionalmente convergentes y se da criterios para verificar que una sucesión dada es o no es incondicionalmente convergente. Después se muestran, en los espacios de Banach clásicos, que algunas de las bases dadas en el Capítulo 2 también son incondicionales. En particular se muestra que el Sistema de Haar es una base incondicional de L_p para $1 < p < +\infty$.

Definición 4.1. Sea X un espacio de Banach. La serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_n$$

es *incondicionalmente convergente* si

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_{\pi(n)}$$

converge para cualquier permutación π.

Las siguientes proposiciones son algunas condiciones equivalentes útiles para verificar si una serie es incondicionalmente convergente.

Proposición 4.1 ([8])**.** *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión en X. Las siguientes premisas son equivalentes.*

i. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

ii. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} x_{\phi(n)}$ *converge para toda función* $\phi\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *estrictamente creciente.*

iii. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \theta_n x_n$ *converge para toda sucesión* $\theta \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}^+}$.

iv. Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{Z}^+$ *tal que para todo subconjunto finito* $\sigma \subseteq \mathbb{Z}^+$ *tal que* $\min(\sigma) > N$*, se verifica que*

$$\left\| \sum_{n\in\sigma} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Observación 4.1 ([8])**.** *En espacios de dimensión infinita existen series incondicionalmente convergente que no son absolutamente convergentes.*

Definición 4.2. Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Se dice que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es *incondicional* si para todo $x \in X$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n u_n$$

es incondicionalmente convergente. Una base que no cumpla con esta propiedad se denomina *condicional*.

Proposición 4.2 ([8])**.** *Sea* X *un espacio de Banach con una base* $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$*. La base* $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *es incondicional ssi se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

i. $\left(u_{\pi(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *es base de* X *para toda permutación* π.

ii. Para todo subconjunto $\sigma \subseteq \mathbb{Z}^+$*, se tiene que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} a_n u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\sigma} a_n u_n \text{ converge}$$

para toda sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

iii. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *dos sucesiones reales tales que*

$$|b_n| \le |a_n|$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$*. Entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} a_n u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} b_n u_n \text{ converge.}$$

Con esta proposición, se puede ver que dada una base incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en un espacio de Banach X, los operadores

$$\begin{aligned} T_\theta : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n u_n \end{aligned}$$

están bien definidos para cada $\theta \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$. Siguiendo las mismas ideas de la demostración de que las Proyecciones Canónicas son continuas, se puede probar que T_θ también lo son. Por el Principio de la Acotación Uniforme, se tiene que

$$K = \sup\left\{\|T_\theta\| : \theta \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{Z}^+}\right\} < +\infty.$$

Definición 4.3. Dada una base incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en un espacio de Banach X. Se dice que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una *base $K-$ incondicional en X* donde k es la constante anterior.

Las dos proposiciones siguientes son muy importantes:

Proposición 4.3 ([8])**.** *Sea X un espacio de Banach con una base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es incondicional, entonces $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica incondicional en X^*.*

Proposición 4.4 ([8])**.** *Sea X un espacio de Banach con una base K-incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n \text{ converge}$$

y todo $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en l^∞, se tiene que

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n u_n\right\| \leq K\|\lambda\|_\infty \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n\right\|.$$

4.1.1. Ejemplos

Ahora se pueden determinar si las bases presentadas en el capítulo 2 son incondicionales.

Ejemplo 4.1. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base incondicional de c_0 y l_p para $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$$

pertenece a c_0 o a l_p. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \leq |a_n|$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n = (b_1, b_2, \ldots),$$

dado que

$$\lim_{n\to+\infty} |b_n| \leq \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0,$$

se tiene que $y \in c_0$. Además, si $x \in l_p$, dado que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n\right\|^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p \\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

se sigue que $y \in l_p$. Por lo tanto, la base es incondicional. □

Ejemplo 4.2. *Sea la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona pero condicional en c_0.

Demostración. Sea la sucesión

$$a = \left(1, -1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^2}, \dots\right).$$

Es claro que

$$\left|\sum_{j=n}^{+\infty} a_j\right| \le \frac{4}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Por todo esto,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j, \sum_{j=2}^{+\infty} a_j, \dots, \sum_{j=n}^{+\infty} a_j, \dots\right)$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k \in c_0.$$

Finalmente, para la sucesión

$$b = \left(1, 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \dots\right),$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k u_k = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j, \sum_{j=2}^{+\infty} b_j, \dots, \sum_{j=n}^{+\infty} b_j, \dots\right)$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k u_k \notin c_0$$

Dado que

$$|a_n| = |b_n|$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es condicional. □

Ejemplo 4.3. *Sea la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definida por*

$$u_{n,k} = \begin{cases} 0 & si\ k < n, \\ 1 & si\ k \geq n; \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona, normalizada pero condicional en c.

Demostración. Sea la sucesión

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k = \left(a_1, a_1 + a_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_j, \ldots\right) = \left(1, 1 - \frac{1}{2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}, \ldots\right),$$

dado que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2),$$

se sigue que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k \in c.$$

Finalmente, para la sucesión

$$b_n = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k u_k = \left(b_1, b_1 + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_j, \ldots\right) = \left(1, 1 + \frac{1}{2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, \ldots\right),$$

dado que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

se sigue que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k u_k \notin c.$$

Dado que

$$|a_n| = |b_n|$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es condicional. □

Existen muchas formas de demostrar que el sistema de Haar es una base incondicional en L_p para $1 < p < +\infty$. Una forma simple es mediante la siguiente proposición:

Proposición 4.5 ([12]). *Dado $p > 2$, se definen las funciones*

$$\begin{array}{rcl} u\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ (x,y) & \longmapsto & |y|^p-(p-1)^p|x|^p \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} v\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ (x,y) & \longmapsto & \alpha_p(|x|+|y|)^{p-1}(|y|-(p-1)|x|) \end{array}$$

con $\alpha_p = p\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{p-1}$. *Entonces $v \geq u$ y además, para todo $x,y,a,b \in \mathbb{R}$ tales que $|a| \leq |b|$, se tiene que*

$$v(x+a,y+b)+v(x-a,y-b) \leq 2v(x,y).$$

Ejemplo 4.4. *El Sistema de Haar es una base incondicional en L_p para $1 < p < +\infty$.*

Esto lo establece el siguiente teorema:

Teorema 4.1 ([12]). *Para $1 < p < +\infty$, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ el Sistema de Haar en L_p. Para todo par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tales que $|a_n| \leq |b_n|$ para cada $n \in Z^+$, se tiene que*

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k\right\| \leq (p^*-1)\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} b_k f_k\right\|,$$

donde

$$p^* = \text{máx}\left\{p, \frac{p}{p-1}\right\}.$$

Demostración. Se va a estudiar 3 casos:

1. Si $p = 2$, entonces $L_2(0,1)$ es un espacio de Hilbert. Dados $n > m$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m\rangle &= \int_0^1 f_n(t)f_m(t)\,dt \\ &= \int_{\text{supp}(f_n)\cap\text{supp}(f_m)} f_n(t)f_m(t)\,dt. \end{aligned}$$

   Ahora existen dos posibilidades. Si $\text{supp}(f_n)\cap\text{supp}(f_m) = \emptyset$, entonces $\langle f_n, f_m\rangle = 0$. Si $\text{supp}(f_n)\cap\text{supp}(f_m) \neq \emptyset$, por la construcción del Sistema de Haar, $\text{supp}(f_n) \subseteq \text{supp}(f_m)$ y además, $f_m = \lambda \in \mathbb{R}$ es constante en $\text{supp}(f_n)$. Por esto, se tiene, en este caso,

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(f_n)\cap\text{supp}(f_m)} f_n(t)f_m(t)\,dt &= \int_{\text{supp}(f_n)} f_n(t)f_m(t)\,dt \\ &= \lambda\int_{\text{supp}(f_n)} f_n(t)\,dt \\ &= \lambda\int_0^1 f_n(t)\,dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces el Sistema de Haar es ortogonal. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k f_k, \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left\langle f_k, \sum_{j=1}^{n} a_j f_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \langle f_k, a_k f_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|f_k\|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \|f_k\|^2 \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k f_k \right\|^2,
\end{aligned}$$

Nótese que en este caso $p^* = 2$. Se sigue que

$$\left\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k f_k \right\|.$$

2. Sea $p > 2$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$\begin{aligned} A_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} B_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t). \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.5, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|A_n\|^p - (p-1)^p \|B_n\|^p &= \int_0^1 |A_n(t)|^p - (p-1)^p |B_n(t)|^p \, dt \\
&= \int_0^1 u(B_n(t), A_n(t)) \, dt \\
&\leq \int_0^1 v(B_n(t), A_n(t)) \, dt.
\end{aligned}$$

Ahora, bien sean

$$\Omega_n = \operatorname{supp}(f_n), \qquad \Omega_n^+ = \{t \in [0,1] : f_n(t) > 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_n^+ = \{t \in [0,1] : f_n(t) < 0\};$$

es claro que $\Omega_n = \Omega_n^+ \cup \Omega_n^-$. Por la construcción de las funciones f_n, como se puede apreciar en la figura 2.1, se tiene que f_j (para $j = 1, \ldots, n-1$) es constante en Ω_n. Por esto, se sigue que A_{n-1} y B_{n-1} son constantes en Ω_n. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v(B_n(t),A_n(t))\,dt &= \int_{[0,1]\setminus\Omega_n} v(B_n(t),A_n(t))\,dt + \int_{\Omega_n^+} v(B_n(t),A_n(t))\,dt + \int_{\Omega_n^-} v(B_n(t),A_n(t))\,dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus\Omega_n} v(B_{n-1}(t),A_{n-1}(t))\,dt \\
&+ \int_{\Omega_n^+} v(B_{n-1}(t)+b_n,A_{n-1}(t)+a_n)\,dt \\
&+ \int_{\Omega_n^-} v(B_{n-1}(t)-b_n,A_{n-1}(t)-a_n)\,dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus\Omega_n} v(B_{n-1}(t),A_{n-1}(t))\,dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_n} v(B_{n-1}(t)+b_n,A_{n-1}(t)+a_n)+v(B_{n-1}(t)-b_n,A_{n-1}(t)-a_n)\,dt \\
&\leq \int_{[0,1]\setminus\Omega_n} v(B_{n-1}(t),A_{n-1}(t))\,dt + \int_{\Omega_n} v(B_{n-1}(t),A_{n-1}(t))\,dt \\
&= \int_{[0,1]} v(B_{n-1}(t),A_{n-1}(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Realizando este proceso n veces, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v(B_n(t),A_n(t))\,dt &\leq \int_0^1 v(B_1(t),A_1(t))\,dt \\
&= \int_0^1 v(b_1f_1(t),a_1f_1(t))\,dt \\
&= \int_0^1 v(b_1,a_1)\,dt \\
&= v(b_1,a_1) \\
&= \alpha_p(|b_1|+a_1||)^{p-1}(|a_1|-(p-1)|b_1|) \\
&\leq \alpha_p(|b_1|+a_1||)^{p-1}(|b_1|-(p-1)|b_1|) \\
&= \alpha_p(|b_1|+a_1||)^{p-1}(2-p)|b_1|) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|A_n\|^p \leq (p-1)^p\|B_n\|^p = (p^*-1)^p\|B_n\|^p,$$

pues en este caso $p^* = p$.

3. Sea $1 < p < 2$. Por cálculo directo, se tiene que si q es el conjugado de p; es decir, si

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

entonces $q^* = p^*$. Por el literal anterior, se tiene que el Sistema de Haar es un base incondicional para $L_q(0,1)$ con constante menor o igual a $q^*-1 = p^*-1$. Por la Proposición 4.3, se tiene que el sistema de Haar es una sucesión básica incondicional en $L_q^*(0,1) = L_p(0,1)$.

Pero como se probó previamente, el Sistema de Haar es un base en $L_p(0,1)$; se sigue que el sistema de Haar es una base incondicional para $L_p(0,1)$ con constante menor o igual a p^*-1. □

Ejemplo 4.5. *El Sistema de Schauder es condicional en* $C[(0,1)]$.

Ejemplo 4.6. *La base de Haar es condicional en* $L_1(0,1)$.

Observación 4.2. *Más aún en los espacios* $C[(0,1)]$ *y* $L_1(0,1)$ *todas las bases son condicionales [8].*

Finalmente, se tienen las siguiente observaciones interesantes.

Observación 4.3 ([9])**.** *Existen espacios de Banach en los cuales todas las sucesiones básicas son condicionales.*

Observación 4.4 ([9])**.** *Todo espacio de Banach, con base, tiene al menos una base condicional.*

4.2. Espacios c_0 y l_1

Una vez que se conocen las principales propiedades de las bases shrinking, completamente acotada e incondicionales, se puede utilizar estos conceptos para estudiar algunas propiedades importantes en los espacios de Banach.

Teorema 4.2 ([8])**.** *Sea X un espacio de Banach con una base incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking ssi X no contiene subespacios isomorfos a l_1.*

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una base K-incondicional en X.

- Supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking. Si existiera $Y \subseteq X$ tal que $Y \approx l_1$, X^* no podría ser separable. Pero X^* es separable pues $\left(u_n^*\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ no es shrinking, existe $x^* \in X^*$, una sucesión bloque normalizada $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $x^*(v_n) > \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $Y = \overline{\operatorname{span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}} \subseteq X$, entonces $Y \approx l_1$. En efecto, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$. Sea $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\{-1,0,1\}$ tal que $\theta_n = \operatorname{sgn}(a_n)$ para cada

$n \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right\| &\geq \frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} \theta_i a_i v_i\right\| \\
&= \frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} |a_i| v_i\right\| \\
&\geq \frac{1}{K}\left|x^*\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| v_i\right)\right| \\
&\geq \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{m} |a_i| x^*(v_i) \\
&> \frac{\varepsilon}{K}\sum_{i=1}^{m} |a_i| \\
&= \frac{\varepsilon}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\|_{l_1}
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right\| &\leq \sum_{i=1}^{m} \|a_i v_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |a_i| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\|_{l_1}
\end{aligned}$$

de donde $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ son bases equivalentes. □

Se van a utilizar los dos lemas siguientes.

Lema 4.1. *El espacio c_0 no es débilmente secuencialmente completo.*

Demostración. Sea la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Si $x^* \in c_0^* = l_1$, entonces $x^* = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dado que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que

$$x^*(y_n) = \sum_{k=1}^{n} x^*(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

de donde $\lim_{n\to+\infty} x^*(y_n)$ existe. Finalmente, es claro que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = (1,1,1,\ldots) \notin c_0.$$ □

Lema 4.2. *Sea X un espacio de Banach con una base K-incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión acotada en X tal que*

$$\lim_{i\to+\infty} x^*(y_i)$$

existe para todo $x^* \in X^*$ y tal que

$$\lim_{i\to+\infty} u_n^*(y_i) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\lim_{i\to+\infty} x^*(y_i) = 0$$

existe para todo $x^* \in X^*$.

Proposición 4.6 ([8]). *Sea X un espacio de Banach con una base incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces la base $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es completamente acotada ssi X no contiene subespacios isomorfos a c_0.*

Demostración. Vamos a realizar cada implicación por separado:

- Sea X tal que no contiene subespacios isomorfos a c_0 y supongo que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ no es completamente acotada. Se sigue que existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k\right\| \le 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k u_k \text{ no converge.}$$

  Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ y $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < p_3 < \cdots$ tal que si

$$u_j = \sum_{i=p_j}^{q_j} a_i x_i,$$

  entonces $\|u_j\| \ge \varepsilon$. Se sigue que para cualquier sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de escalares, se tiene que

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j\right\| \le \sup_{1\le j\le m}|\lambda_j|\left\|\sum_{j=1}^{m}u_j\right\| \le \sup_{1\le j\le m}|\lambda_j|.$$

  Además, se tiene que

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j\right\| \ge \sup_{1\le j\le m}|\lambda_j|\left\|\sum_{j=1}^{m}u_j\right\| \ge \varepsilon \sup_{1\le j\le m}|\lambda_j|$$

  Por lo tanto, se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es equivalente a la base de c_0.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base completamente acotada y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en X tal que $\lim_{n\to+\infty} x^*(y_n)$ existe para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$a_n = \lim_{n\to+\infty} u_n^*(y_n).$$

  Se sigue que para cada $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}a_k u_k\right\| \le \lim_{i\to+\infty}\|P_m(y_i)\| \le \sup_{i\in\mathbb{Z}^+}\|y_i\|.$$

Por lo tanto,

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k.$$

Por el lema anterior a $(y - y_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ se tiene que y_i converge débilmente a y. Por lo tanto, X es débilmente secuencialmente completo. Así X no contiene subespacios isomorfos a c_0. □

Por los teoremas 3.1, 4.6 y 4,2, inmediatamente se sigue que:

Teorema 4.3 ([8]). *Sea X un espacio de Banach con una base incondicional $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Si X no contiene subespacios isomorfos a c_0 ni a l_1, entonces X es reflexivo.*

Con todo lo estudiado en esta sección se puede deducir el siguiente resultado:

Proposición 4.7 ([12]). *Dado un espacio de Banach X con una base incondicional. El espacio X contiene una copia de c_0, contiene una copia de l_1 o es reflexivo.*

Observación 4.5. *El término "copia" hace referencia a un espacio isomorfo.*

4.3. Espacio de James

En 1951, el matemático Robert C. James publica el espacio que hoy se conoce como espacio de James [5]. Este espacio cumple algunas propiedades importantes que muestran relaciones entre conceptos importantes de los espacios de Banach. El espacio de James tiene las siguientes propiedades [4]:

1. J no es reflexivo pero es isométrico a su bidual.

2. J no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 y l_1.

3. J tiene codimensión 1 en su bidual J^{**}, bajo la inyección canónica.

De los puntos 1. y 2., por el Teorema 4.3, se sigue que J no contiene ninguna base incondicional.

Ahora se va a definir el espacio de James y probar algunas de las propiedades que cumple:

Definición 4.4 (James). Es el subespacio $J \subseteq c_0$ tal que para todo $x \in J$,

$$\sup\left\{(x_{p_1}-x_{p_2})^2+(x_{p_2}-x_{p_3})^2+\cdots+(x_{p_{m-1}}-x_{p_m})^2+(x_{p_m}-x_{p_1})^2 : p_1<p_2<\cdots<p_m\right\}<+\infty.$$

Al espacio J se le dota de las dos normas equivalentes [1]:

$$\|x\|_J = \sqrt{\sup\left\{(x_{p_1}-x_{p_2})^2+(x_{p_2}-x_{p_3})^2+\cdots+(x_{p_{m-1}}-x_{p_m})^2 : p_1<p_2<\cdots<p_m\right\}}$$

y

$$\|x\|_{\text{iso}} = \sqrt{\sup\frac{1}{2}\left\{(x_{p_1}-x_{p_2})^2+(x_{p_2}-x_{p_3})^2+\cdots+(x_{p_{m-1}}-x_{p_m})^2+(x_{p_m}-x_{p_1})^2 : p_1<p_2<\cdots<p_m\right\}}.$$

Ambas normas son equivalentes ya que es claro que $\|\cdot\|_J \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_{\text{iso}}$. Además, si $x \in J$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\text{iso}}^2 &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{m-1}(x_{p_k} - x_{p_{k+1}})^2 + (x_{p_m} - x_{p_1})^2 : p_1 < \cdots < p_m\right\} \\
&\leq \|x\|_J^2 + \|x\|_J^2 \\
&\leq 2\|x\|_J^2,
\end{aligned}$$

luego $\|x\|_{\text{iso}} \leq \sqrt{2}\|x\|_J$.

Observación 4.6. *La importancia de la norma $\|\cdot\|_{iso}$ es que con ella los espacios J y J^{**} son isométricos mientras que con la norma $\|\cdot\|_J$ los espacios solo son isomorfos.*

Proposición 4.8 ([1, 4])**.** *El espacio J es de Banach y $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una base monótona respecto a ambas normas.*

Demostración. Por las propiedades del supremo se tiene que J es un espacio normado. Para ver que J es un espacio de Banach, con ambas normas, se va a demostrar que: toda serie absolutamente convergente, es convergente, respecto a la norma $\|\cdot\|_J$. Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en J tal que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x^k\|_J < +\infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$|x_k^n| \leq \lim_{j\to+\infty} |x_k^n - x_j^n| \leq \|x^n\|_J$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^+$; de donde $\|x^n\|_{c_0} \leq \|x^n\|_J$ y

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x^k\|_{c_0} < +\infty.$$

Dado que c_0 es un espacio de Banach, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = y \in c_0.$$

Ahora bien, dados $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}(y_{p_j} - y_{p_{j+1}})^2 &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(x_{p_j}^k - x_{p_{j+1}}^k\right)\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(x_{p_j}^k - x_{p_{j+1}}^k\right)^2}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\|x^k\|_J\right)^2,
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\|y\|_J \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|x^k\|_J < +\infty.$$

Por lo tanto, J es completo pues $y \in J$.

Además, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$, para ambas normas, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| &= \|(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0)\| \\
&\leq \|(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, 0, 0)\| \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \right\|,
\end{aligned}$$

de donde $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión básica y monótona en J. Finalmente, se prueba que esta base es densa en J respecto a ambas normas. Es suficiente probar la densidad para la norma $\|\cdot\|_J$. Dado $x \in J$ y para $\varepsilon > 0$, existen $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ tales que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{p_k} - x_{p_{k+1}}\right)^2} \geq \|x\|_J - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Ahora bien, sea

$$y = x - \sum_{k=1}^{p_m} x_k e_k = (0, 0, \ldots, x_{p_m+1}, x_{p_m+2}, \ldots).$$

Si $N > p_m$, para cada $N \leq q_1 \cdots < q_n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x\|_J^2 &\geq \sum_{k=1}^{m} \left(x_{p_k} - x_{p_{k+1}}\right)^2 + (x_{p_m} - x_{q_1})^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(x_{q_k} - x_{q_{k+1}}\right)^2 \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} \left(x_{p_k} - x_{p_{k+1}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(x_{q_k} - x_{q_{k+1}}\right)^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_{q_k} - x_{q_{k+1}}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

y tomando el supremo sobre los q_k, se tiene que $\|y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ si $N > p_m$. □

Proposición 4.9 ([8]). *El espacio J no es reflexivo.*

Demostración. Sea sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en J definida por

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Es claro que, para ambas normas,

$$\|x_n\| = \|(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)\| = 1$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Con esto se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \|x_n\| = 1 < +\infty.$$

Pero $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ no converge en J para ninguna de las dos normas, pues si $m > n$, se tiene que

$$\|x_m - x_n\| = \|(0,0,\ldots,1,1,\ldots,1,0,0,\ldots)\| \geq 1.$$

Por lo tanto, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ no es completamente acotada. Por el Teorema 3.1, se sigue que J no es reflexivo. □

Proposición 4.10 ([8]). *La base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es shrinking en J.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongo que existe $\varepsilon > 0$ y un bloque básico normalizado $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$x^*(u_n) \geq \varepsilon$$

para cada $x^* \in X^*$. Sea $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la Proposición 3.4.3 de [1], se tiene que

$$\begin{aligned}\|v_n\|_J &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \right\|_J \\ &\leq \sqrt{5}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \\ &< \sqrt{\frac{5}{6}}\pi,\end{aligned}$$

de donde $v = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k} \in J$. Por otro lado,

$$x^*(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^*(u_k)}{k} \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

no converge en J. Esta contradicción muestra que la base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es *shrinking*. □

De esto y por la Proposición 3.3 se tiene que el bidual J^{**} está identificado con el espacio de sucesiones reales

$$Z = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} : \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| < +\infty \right\}$$

para las dos normas en J. Con esto, se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 4.11 ([1]). *La función*

$$\begin{aligned} U : J^{**} &\longrightarrow J \\ x^{**} &\longmapsto \left(-\lambda, x^{**}(e_1^*) - \lambda, x^{**}(e_2^*) - \lambda, \ldots\right), \end{aligned}$$

con $\lambda = \lim_{n\to+\infty} x^{**}(e_n^*)$, es una isometría respecto a la norma $\|\cdot\|_{iso}$.

Demostración. Primero se va a demostrar que U es lineal. Sean $x^{**}, y^{**} \in X^{**}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean

$$\lambda_x = \lim_{n\to+\infty} x^{**}(e_n^*) \quad \text{y} \quad \lambda_y = \lim_{n\to+\infty} y^{**}(e_n^*).$$

Entonces

$$\begin{aligned} U(\alpha x^{**} + \beta y^{**}) &= (-(\alpha\lambda_x + \beta\lambda_y), (\alpha x^{**} + \beta y^{**})(e_1^*) - (\alpha\lambda_x + \beta\lambda_y), \dots) \\ &= \alpha(-\lambda_x, x^{**}(e_1^*) - \lambda_x, \dots) + \beta(-\lambda_y, y^{**}(e_1^*) - \lambda_y, \dots) \\ &= \alpha U(x^{**}) + \beta U(y^{**}). \end{aligned}$$

Además, U es inyectiva. En efecto, Si $U(x^{**}) = 0$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x^{**}(e_n^*) = 0,$$

de donde $x^{**}(e_k^*) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que $x^{**} = 0$. Ahora se prueba que U es sobreyectiva. Para $x \in J$, se tiene que $U(x^{**}) = x$ es equivalente a que

$$\lim_{n\to+\infty} x^{**}(e_n) = -x_1, \quad x^{**}(e_1^*) = x_2 + x_1, \quad x^{**}(e_2^*) = x_3 + x_1.$$

Por lo tanto, se define $x^{**}(e_i^*) = x_{i+1} + x_1$ para cada $i \geq 1$. Finalmente, para probar que U es una isometría se nota que si $x^{**} \in X^{**}$, se tiene que

$$\|U(x^{**})\|_{\text{iso}} = \left\| \left(-\lambda, x^{**}(e_1^*) - \lambda, x^{**}(e_2^*) - \lambda, \dots\right) \right\|_{\text{iso}}.$$

Ahora bien, existen dos casos: si el supremo ocurre al considerar el primer término $-\lambda$ o no. Entonces el valor de $\|U(x^{**})\|_{\text{iso}}$, es el máximo entre los valores

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{m}(x^{**}(e_{p_k}^*) - x^{**}(e_{p_{k+1}}^*))^2 + (e_{p_1}^*)^2 + (e_{p_m}^*)^2\right\} \quad \text{y} \quad \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}(x^{**}(e_{p_k}^*) - x^{**}(e_{p_{k+1}}^*))^2 + (e_{p_1}^* - e_{p_m}^*)^2\right\},$$

donde los supremos se toman sobre todas las sucesiones crecientes de enteros $p_1 < \cdots < p_m$. Esta expresión es la misma que la norma en $\|\cdot\|_{\text{iso}}$ en Z donde los dos casos se explican de si el supremo se alcanza tal que el último o primer término sean 0. $\square$

Observación 4.7. *Como se puede ver, el uso de la norma $\|\cdot\|_{iso}$ es esencial para que U sea una isometría. Si se utiliza la norma $\|\cdot\|_J$, U solo es un isomorfismo.*

Finalmente, la siguiente demostración indica que J es casi "reflexivo". Intuitivamente, a $i(J)$ le falta un elemento para completar J^{**} con $i : J \to J^{**}$ la inyección canónica.

De nuevo, por la Proposición 3.3, se tiene que a J^{**} se le puede identificar con el espacio de las sucesiones tales que

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}\|_J < +\infty.$$

Dado que esto implica que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge, se tiene que se puede modelar este problema identificando a J^{**} con el espacio c y a J con el espacio c_0.

Proposición 4.12. *La co-dimensión de c_0 en c es 1.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la sucesión tal que

$$x_n = 1$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Es claro que $x \in c \setminus c_0$. Se va a demostrar que

$$\{[u]\} = \{u + c_0\}$$

es una base para el espacio cociente c/c_0. Es suficiente demostrar que

$$\mathrm{span}([u]) = c/c_0,$$

pues este conjunto ya es linealmente independiente. Sea $[u] \in c/c_0$ con $u \in c$. Por definición, tomo $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$[u] = \alpha[x] = [\alpha u].$$

En efecto, esto se cumple pues $u - \alpha x \in c_0$, de donde

$$[u - \alpha x] = [0].$$

Por lo tanto, la $\dim(c/c_0) = |\{[x]\}| = 1$. □

Con estas ideas básicas, se puede establecer el resultado final de esta sección:

Proposición 4.13 ([1])**.** *Sea $x_0^{**} : J^* \to \mathbb{R}$ tal que*

$$x_0^{**}(e_n^*) = 1$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces J^{**} es la imagen canónica de J y x_0^{**}. Por lo tanto, la codimensión de la imagen canónica de J en J^{**} es 1.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El estudio de las bases de Schauder permiten estudiar varias propiedades de los espacios de Banach y de sus subespacios de dimensión infinita. Además, su uso adecuado permite la conclusión de resultados que no tienen nada que ver con las bases. Por ejemplo, en [8], se encuentra el teorema

Teorema 5.1. *Sea X un espacio de Banach.*

- *Si X^* es separable y dado $Y \subseteq X^*$ de dimensión infinita tal que Y^* es separable, entonces Y tiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.*
- *Supongase que X tiene dimensión infinita y X^{**} es separable. Entonces todo subespacio, de dimensión infinita, de X o de X^* tiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.*

que es una conclusión simple de proposiciones demostradas con las bases shrinking y completamente acotadas.

Otro aspecto en el que se utilizan las bases es en la demostraciones de teoremas clásicos de una forma más sencilla y directa. Un ejemplo de esto es el Teorema de Eberlein-Šmulian [1], en el cuál se utilizan las sucesiones básicas.

Para la continuación de este trabajo se sugieren las siguientes ideas

1. Dado que en la definición de base se utiliza la convergencia en la norma; se puede estudiar que proposiciones siguen siendo válidas si solo se exige que la convergencia sea débil. [3]
2. Debido a que en un espacio de Banach se tienen los Teoremas del Grafo Cerrado, Aplicación abierta, Acotación Uniforme, etc; todos utilizados para estudiar las propiedades que se pueden dotar a estas bases. Un estudio interesante sería el extender el concepto de bases a espacios normados. [12]

3. Otro forma de avanzar en este tema es explotar las propiedades que cumplen los espacios complementados; y cuál es su relación con las bases.

Finalmente, se puede revisar otras técnicas para el estudio de los espacios de Banach con base en [2, 6, 9].

BIBLIOGRAFÍA

[1] F. ALBIAC AND N. KALTON, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer International Publishing, 2016.

[2] P. ENFLO, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math., 130 (1973), pp. 309–317.

[3] C. HEIL, *A Basis Theory Primer: Expanded Edition*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, 2011.

[4] R. HINES, *James' space: a (counter-)example in Banach spaces*, 2014.

[5] R. C. JAMES, *A non-reflexive banach space isometric with its second conjugate space*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 37 (1951), p. 174.

[6] T. C. JAMES, *Basis and Reflexivity of Banach Spaces*, Annals of Mathematics, 1940.

[7] R. H. P. Z. M. JOHNSON, W. B., *On bases, finite-dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. 9, 1971.

[8] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces I*, Classical Banach Spaces, Springer-Verlag, 1977.

[9] B. C. W. MCARTHUR, *Development in Schauder Basis Theory*, Bulletin of the American Mathematica Society, 1972.

[10] M. MIRANDA NAVARRO, *Comparative study of several bases in functional analysis*, 2018.

[11] S. I. PELCZYNSKI, A., *On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia Math. 26, 1964.

[12] T. SCHLUMPRECHT, *Course Notes for Functional Analysis I*, 2017.

[13] M. ZIPPIN, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Israel J. Math. g, 1968.