

---

---

# Grupos Cristalográficos no Euclídeos

## *y superficies de Klein*

---

---

escrito por

**IÑAKI ANASAGASTI ECHEITA**

Tutor: **Francisco Javier Cirre Torres**



Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Trabajo presentado para la obtención del título de  
Master Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.

Especialidad: **Geometría y topología**

**OCTUBRE 2019**



## ABSTRACT

### **Abstract en español:**

El presente Trabajo de Fin de Master es una introducción a los grupos cristalográficos no euclídeos (abreviados como grupos NEC), que son grupos discretos cocompactos de isometrías del plano hiperbólico. Estos grupos dan lugar a espacios de órbitas compactos con estructura de superficie de Klein. Se discuten las propiedades de sus elementos y se estudia la estructura del grupo por métodos geométricos en base a sus regiones fundamentales, a partir de las cuales se deduce una presentación. Se discute la relación entre un grupo NEC de superficie (sin períodos), su normalizador y el grupo de automorfismos del cociente. En el capítulo final se estudian los subgrupos propios del grupo de automorfismos del cociente que tengan un orden superior a cierta cota.

### **Abstract in English:**

This Master Thesis is an introduction to non-Euclidean crystallographic groups (NEC groups, for short), which are cocompact discrete groups of isometries of the hyperbolic plane. These groups yield compact orbit spaces which can be endowed with a Klein surface structure. Properties of their elements are discussed, and the group structure itself is studied by geometric methods, through their fundamental regions, from which a presentation can be obtained. The relation between a surface NEC group (i.e. without periods), its normalizer and the automorphism group of the quotient is discussed. The final chapter is devoted to the proper subgroups of the automorphism group of the quotient, such that their order reaches certain lower bound.

**Palabras clave:** NEC groups; NEC signatures; Klein surfaces



## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiera sido posible sin el esfuerzo y la dedicación de todas las personas a las que he tenido la suerte de tener como profesores de matemáticas a lo largo de los años, desde el bachillerato hasta la universidad. Mención aparte merecen los profesores y tutores de la UNED, para quienes no tengo más que buenas palabras. En especial para mi tutor Javier, a quien agradezco que me haya propuesto este tema tan fascinante y me haya guiado en cada paso.

## TABLA DE CONTENIDOS

	Página
<b>Lista de tablas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Funciones dianalíticas . . . . .	1
1.1.1 Definición . . . . .	1
1.1.2 Propiedades . . . . .	2
1.2 Superficies de Klein . . . . .	3
1.2.1 Definición . . . . .	3
1.2.2 Orientabilidad . . . . .	4
1.2.3 Bordes . . . . .	5
1.3 Morfismos entre superficies de Klein . . . . .	5
1.3.1 Propiedades de los morfismos . . . . .	6
1.3.2 Forma local normal . . . . .	7
1.3.3 Grado de un morfismo . . . . .	8
1.4 Acciones de grupos de automorfismos . . . . .	8
1.4.1 Espacios de órbitas . . . . .	8
1.4.2 Acciones discontinuas . . . . .	9
1.4.3 Estructura dianalítica del espacio de órbitas . . . . .	12
1.5 Coberturas dobles . . . . .	13
1.5.1 Construcción de la cobertura doble de Riemann . . . . .	13
1.5.2 Levantamiento de morfismos . . . . .	15
1.5.3 Morfismos inducidos . . . . .	17
1.5.4 Morfismos entre recubridores arbitrarios . . . . .	18
1.6 Clasificación de superficies de Klein compactas . . . . .	19
1.6.1 Uniformización de sus coberturas dobles . . . . .	19
1.6.2 Superficies compactas de género algebraico $p < 2$ . . . . .	19

<b>2</b>	<b>El semiplano superior como superficie de Klein</b>	<b>21</b>
2.1	Automorfismos de $\mathbb{H}$	21
2.1.1	Bijecciones dianalíticas del semiplano superior	21
2.1.2	Representación matricial	22
2.1.3	Automorfismos del semiplano superior	23
2.1.4	Relación con la métrica hiperbólica	23
2.2	Clasificación de los automorfismos	24
2.2.1	Puntos fijos	24
2.2.2	Clases de conjugación	25
2.2.3	Elementos elípticos	27
2.2.4	Formas canónicas	29
2.2.5	Geodésicas invariantes	29
2.2.6	Interpretación geométrica	30
<b>3</b>	<b>Grupos NEC</b>	<b>33</b>
3.1	La topología de $Aut(\mathbb{H})$	33
3.1.1	Subgrupos discretos de $Aut(\mathbb{H})$	34
3.1.2	La acción de un subgrupo discreto	36
3.1.3	El subgrupo Fuchsiano canónico	36
3.1.4	La métrica inducida	37
3.2	Regiones fundamentales	39
3.2.1	Regiones de Dirichlet	39
3.2.2	Regiones acotadas	40
3.2.3	Aristas congruentes	41
3.2.4	Palabra de superficie de una región fundamental compacta	42
3.2.5	Operaciones con palabras	42
3.2.6	Palabras en forma canónica	43
3.3	Generadores y relaciones del grupo	44
3.3.1	$F$ -teselaciones	45
3.3.2	Regiones adyacentes	46
3.3.3	Generadores para $\Gamma$	48
3.3.4	Relaciones como ciclos	49
3.3.5	Relaciones canónicas	49
3.3.6	Operaciones con ciclos	50
3.4	Presentación a partir de la palabra canónica	52
3.4.1	Generadores	52
3.4.2	Transformaciones elípticas	52
3.4.3	Reflexiones	52
3.4.4	El vértice restante	53

TABLA DE CONTENIDOS

---

3.4.5	Área del polígono fundamental . . . . .	54
3.4.6	Reducción a la presentación canónica . . . . .	56
3.5	Signaturas NEC . . . . .	57
3.5.1	Signaturas equivalentes . . . . .	58
3.5.2	Relación entre signaturas y palabras de superficie . . . . .	58
3.5.3	Generadores y relaciones . . . . .	59
3.5.4	Área de una signatura NEC . . . . .	60
3.6	Grupos NEC de superficie . . . . .	60
3.6.1	Propiedades de los grupos de superficie . . . . .	61
3.6.2	Espacios recubridores de superficies de Riemann . . . . .	62
3.6.3	Levantamientos de isomorfismos al semiplano superior . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Grupos de automorfismos de orden <math>\geq 4(p - 1)</math></b>	<b>67</b>
4.1	Fórmula de Riemann-Hurwitz . . . . .	67
4.1.1	Morfismos entre superficies de Klein estrictas y compactas . . . . .	68
4.1.2	Fórmula de Hurwitz para la proyección canónica . . . . .	68
4.1.3	Valores del género algebraico $q$ positivos . . . . .	69
4.1.4	El caso $q = 0$ . . . . .	70
4.1.5	Resumen de resultados . . . . .	72
4.2	Signaturas con las que puede actuar el grupo $G$ . . . . .	72
4.2.1	Signaturas $\sigma$ con área $\leq \pi/2$ . . . . .	73
4.3	Subgrupos propios de $Aut(S)$ . . . . .	74
4.3.1	Consideraciones sobre el orden e índice de $G$ en $Aut(S)$ . . . . .	74
4.3.2	Parejas de signaturas compatibles . . . . .	75
4.3.3	El grupo completo $Aut(S) = G^*$ . . . . .	76
4.3.4	Signaturas posibles para subgrupos propios de $Aut(S)$ . . . . .	78
4.3.5	Conclusiones . . . . .	85
4.4	Signaturas con las que puede actuar $Aut(S)$ . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice A</b>	<b>91</b>
A.1	Código en GAP . . . . .	91
A.2	Resultados . . . . .	93
	<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

## LISTA DE TABLAS

TABLA	Página
1.1 Composición de funciones analíticas y antianalíticas . . . . .	2
1.2 Clasificación de superficies de Klein no isomorfas a ningún $\mathbb{H}/\Gamma$ . . . . .	20
2.1 Tipos de isometrías y sus puntos fijos. . . . .	25
2.2 Clases de conjugación en $Aut(\mathbb{H})$ y sus formas de Jordan reales. . . . .	29
3.1 Generadores asociados a una palabra en forma canónica. . . . .	52
3.2 Presentación canónica asociada a una palabra. . . . .	57
3.3 Presentación asociada a una signatura NEC según [13, §5]. . . . .	59
3.4 Presentación asociada a una signatura NEC de superficie. . . . .	61
4.1 Posibilidades de ramificación en $X/G$ para $ G  \geq 4(p-1)$ . . . . .	72
4.2 Signaturas con las que puede actuar $G$ , si $4(p-1) \leq  G  \leq 6(p-1)$ , atendiendo solamente al orden de los grupos. . . . .	76
4.3 Signaturas con las que puede actuar $G \subsetneq Aut(S)$ , si $4(p-1) \leq  G  \leq 6(p-1)$ . . . . .	86

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA</b>	<b>Página</b>
1.1 Valores del parámetro $\gamma$ en mallas sobre el toro. . . . .	20
2.1 Posibles relaciones entre rectas hiperbólicas. . . . .	31
3.1 Operaciones con palabras tipo I. . . . .	43
3.2 Operaciones con palabras tipo II. . . . .	43
3.3 Operaciones con palabras tipo III. . . . .	43
3.4 Operaciones con palabras tipo IV. . . . .	43
3.5 Ejemplo de palabra de superficie: Toro con un disco eliminado. . . . .	44
3.6 Secuencias de aristas de principio y final de ciclo. . . . .	53
3.7 Secuencias de aristas congruentes de forma orientable.. . . .	54
3.8 Secuencias de aristas congruentes de forma no orientable.. . . .	54

## INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Fin de Master tiene por objeto el estudio de las superficies de Klein y de los grupos N.E.C., abreviatura del inglés *non-euclidean crystallographic groups*, o *grupos cristalográficos no euclideos*. Ciertas superficies de Klein se obtienen a partir de la acción de un grupo N.E.C., de modo muy similar a como ciertas superficies de Riemann se obtienen a partir de la acción de un grupo fuchsiano. Los grupos N.E.C. son una extensión de los fuchsianos, de igual modo que las superficies de Klein son una extensión de las de Riemann. Las superficies de Klein fueron estudiadas por primera vez desde un punto de vista abstracto por Alling y Greenleaf en [2]. Los grupos N.E.C., por su parte fueron definidos y sus propiedades estudiadas en [18] y en [13].

El primer capítulo está dedicado al concepto abstracto de superficie de Klein. Se define como aquella variedad compleja de dimensión uno cuyas funciones de transición son dianalíticas. Se estudian a continuación las funciones entre superficies de Klein que preservan esta estructura dianalítica, es decir, los morfismos en la categoría de superficies de Klein.

Un concepto central respecto a las superficies de Klein, que lo relaciona con las superficies de Riemann, es el de cobertura doble. En la sección 1.5.1 se expone la manera de construir la cobertura doble de una superficie de Klein estricta y se analizan sus propiedades. Por medio de esta cobertura doble es posible trasladar algunos resultados de la teoría de las superficies de Riemann a las de Klein. Entre otros resultados, se obtiene una caracterización del grupo de automorfismos de la superficie recubierta como un subgrupo del grupo de automorfismos de la superficie recubridora (Teorema 1.5.3.3).

Una de las principales maneras de obtener unas superficies de Klein a partir de otras es mediante cocientes por acciones de grupos de automorfismos. Se exponen las condiciones que deben cumplir dichas acciones, que conducen al teorema 1.4.3.1. Este teorema permite clasificar las superficies de Klein compactas a partir de la clasificación de su cobertura doble, que siendo una superficie de Riemann compacta, queda topológicamente determinada por su género. A este género se le denomina *género algebraico* de la superficie de Klein.

Como es bien sabido, las superficies de Riemann compactas de género mayor de 1 se obtienen como el cociente del semiplano superior  $\mathbb{H}$  bajo la acción de un grupo fuchsiano (puede encontrarse una exposición muy completa en [11]). En la sección 1.6.1 se extiende este resultado a las superficies de Klein cuya cobertura doble sea de aquella clase: son el cociente del semiplano superior  $\mathbb{H}$  bajo la acción de un grupo de automorfismos de una clase que extiende la de los grupos

fuchsianos, y que se denominan grupos N.E.C.

El segundo capítulo se dedica al estudio de los automorfismos del semiplano superior. Este grupo coincide con el de las isometrías de dicho espacio, bajo la métrica hiperbólica. Contiene no solo las transformaciones que conservan la orientación sino también las que la invierten. Las primeras resultan ser funciones analíticas —transformaciones de Möbius, de hecho—, mientras que las segundas son antianalíticas. El grupo de automorfismos del semiplano superior resulta ser un grupo matricial isomorfo a  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Se clasifican estos automorfismos y se discuten sus clases de conjugación.

En el tercer capítulo se estudian los grupos N.E.C., es decir, los grupos bajo cuya acción se obtiene una superficie de Klein a partir del semiplano superior. Las dos propiedades que caracterizan estos grupos es que son discretos (proposición 3.1.2.1) y que carecen de elementos parabólicos (proposición 3.2.2.1). Los subgrupos de un grupo N.E.C. son a su vez grupos N.E.C., y de entre ellos es especialmente importante el subgrupo fuchsiano canónico, que está íntimamente relacionado con la cobertura doble (proposición 3.1.3.3).

Para cada grupo N.E.C. podemos definir un subconjunto cerrado del semiplano superior que denominamos *región fundamental*. Si esta región es un polígono compacto entonces el conjunto de todas sus imágenes por elementos del grupo recubre  $\mathbb{H}$  formando una *teselación*, y cada elemento del grupo queda identificado con cada uno de dichos polígonos. Usando *camino*s —secuencias de polígonos adyacentes por una arista— se obtienen conjuntos definitorios de generadores y relaciones (sección 3.3). Los primeros son transformaciones que llevan la región fundamental en un polígono adyacente con aquel por una arista (teorema 3.3.3.1), mientras que las relaciones se obtienen a partir de caminos con inicio y final en un mismo polígono (es decir, *ciclos*).

La información relevante para construir esta presentación se condensa en una *signatura N.E.C.*: una expresión de la forma

$$\sigma = (g ; \pm ; [m_1, \dots, m_r] ; \{ (n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k}) \} ).$$

Una *signatura* contiene además la información topológica de la superficie de Klein resultante: su género  $g$ , su orientabilidad (el *signo* de  $\sigma$ ) y el número de *óvalos*, que son las  $k$  componentes conexas de su borde. La *signatura* también permite obtener el área del grupo N.E.C.: aunque la *región fundamental* no sea única, su área es un invariante del grupo.

De entre los grupos N.E.C. son especialmente simples los grupos *de superficie*: aquellos sin períodos  $m_i$  y  $n_{i,j}$  en su *signatura*. Estos grupos se dice que *normalizan* las superficies de Klein de género algebraico mayor de 1 (teorema 3.6.2.2). No solo eso, sino que los grupos de automorfismos de una de tales superficies son isomorfos a cocientes de grupos N.E.C. que contienen al grupo de superficie como subgrupo normal (teorema 3.6.3.5), y el grupo completo se identifica con el cociente del normalizador de aquel grupo (teorema 3.6.3.4).

El cuarto capítulo se destina a aplicar los resultados anteriores a un problema concreto: encontrar subgrupos propios de automorfismos de superficies de Klein con borde y género algebraico  $p$  mayor de 1, que satisfagan la condición  $o(G) \geq 4(p - 1)$ . En [14], May demostró que el grupo

---

completo tiene orden como máximo  $12(p - 1)$ . La relación entre los órdenes de los grupos es inversa a la relación entre sus áreas; de ello se obtiene la condición necesaria que deben satisfacer las firmas con las que puede actuar  $G$ . La existencia o no de dichos grupos se determina caso por caso, encontrando explícitamente epimorfismos de grupos N.E.C. con la firma deseada cuyo kernel sea un grupo de superficie.



## PRELIMINARES

## 1.1 Funciones dianalíticas

## 1.1.1 Definición

Una función continua  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un abierto  $A$  del plano complejo, se dice que es *analítica* si su derivada parcial con respecto de  $\bar{z}$  existe y es nula en todo punto de  $A$ . Análogamente decimos que es *antianalítica* si su derivada parcial con respecto de  $z$  existe y es nula en todo punto de  $A$ . Una función que sea simultáneamente analítica y antianalítica es constante. Si es o bien analítica o bien antianalítica en cada componente conexa de  $A$  decimos que es *dianalítica*.

Si expresamos la función  $f$  como

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.1.1)$$

teniendo en cuenta que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1.1.2)$$

las anteriores condiciones tienen las siguientes expresiones equivalentes:

$$\text{analítica: } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y)) = 0 \iff u_x = v_y, u_y = -v_x \quad (1.1.3)$$

$$\text{antianalítica: } \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \iff \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) = 0 \iff u_x = -v_y, u_y = v_x \quad (1.1.4)$$

las primeras de las cuales son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y las segundas su versión antianalítica.

### 1.1.2 Propiedades

A partir de las bien conocidas propiedades de las funciones analíticas se pueden extrapolar algunas de éstas a las funciones antianalíticas y dianalíticas. Para ello necesitamos el siguiente resultado [2, Lema 1.1.1]:

**Proposición 1.1.2.1.** *Sea una función  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ : son equivalentes*

1.  $f(z)$  es antianalítica.
2.  $\overline{f(z)}$  es analítica.
3.  $f(\bar{z})$  es analítica.

Por lo tanto, toda función antianalítica es composición de la función  $\varkappa : z \mapsto \bar{z}$  con una función analítica. Es decir, una función  $f$  es antianalítica si y solo si la podemos expresar como

$$f = g \circ \varkappa = \varkappa \circ h \tag{1.1.5}$$

donde tanto  $g$  como  $h$  son analíticas. En consecuencia, si  $f$  es una función antianalítica se puede expandir como una serie de potencias de  $\bar{z}$  alrededor de cualquier punto de su dominio. También el principio del máximo es cierto para estas funciones.

Además, como consecuencia de la versión antianalítica de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las partes real e imaginaria de una función antianalítica son funciones armónicas, al igual que en el caso analítico. Por tanto, la propiedad del valor medio y el principio de reflexión de Schwarz se cumplen también para las funciones antianalíticas [1, cap. 4.6].

La aplicación  $\varkappa$ , que lleva cada número complejo en su conjugado, es una reflexión del plano y por tanto preserva los ángulos, aunque invierte la orientación. De ahí que se diga que las funciones antianalíticas son *indirectamente conformes* o *anticonformes*.

Puesto que la restricción a cada componente conexa es bien analítica o bien antianalítica, basta estudiar los cuatro casos que pueden darse en la composición de las funciones dianalíticas  $f_1 \circ f_2$ :

Tabla 1.1: Composición de funciones analíticas y antianalíticas

$f_1$	$f_2$	$f_1 \circ f_2 =$
analítica	analítica	$f_1 \circ f_2$
analítica	antianalítica	$(f_1 \circ g_2) \circ \varkappa$
antianalítica	analítica	$\varkappa \circ (h_1 \circ f_2)$
antianalítica	antianalítica	$h_1 \circ \varkappa \circ \varkappa \circ g_2$

Aquí hemos considerado las descomposiciones de  $f_1$  y  $f_2$  de la forma descrita más arriba. Considerando que  $\varkappa^2 = id$ , se sigue que la composición de funciones dianalíticas es dianalítica.

Para la exposición que sigue, consideraremos funciones definidas sobre un dominio con borde en lugar de un dominio abierto. Diremos que una función continua  $f : A \subset \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  definida en un abierto  $A$  del semiplano superior cerrado  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  (aunque no necesariamente abierto en  $\mathbb{C}$ ) es *analítica* (respectivamente *antianalítica*) si es la restricción de una función  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica (respectivamente antianalítica) a un abierto  $U$  del plano.

## 1.2 Superficies de Klein

A continuación consideraremos variedades de dimensión 2 (o de dimensión compleja 1) con una estructura dianalítica. Estos objetos, llamados superficies de Klein, son una extensión de las superficies de Riemann, las cuales tienen una estructura puramente analítica.

### 1.2.1 Definición

Una superficie con borde  $S$  es un espacio de Hausdorff conexo junto con un conjunto —un atlas—  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  formado por pares —llamados cartas— donde los abiertos  $U_\alpha$  recubren  $S$  y cada aplicación  $\varphi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $U_\alpha$  en su imagen  $A_\alpha$ , que es un abierto en  $\mathbb{C}$  o en  $\mathbb{C}^+$  (el semiplano superior cerrado). Consideraremos solo superficies conexas para evitar trivialidades, aunque no sea una propiedad esencial.

Para cada pareja de subíndices  $\alpha, \beta \in I$  la composición

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.2.1)$$

se denomina función de transición de coordenadas, supuesto que los dominios de ambas cartas tengan intersección no vacía. Decimos que  $\mathcal{A}$  es un atlas dianalítico (respectivamente analítico) sobre  $S$  si todas las funciones de transición son dianalíticas (respectivamente analíticas).

Dos atlas dianalíticos sobre  $S$  se dicen compatibles si su unión es a su vez un atlas dianalítico. La compatibilidad entre los atlas es una relación de equivalencia, y cada clase de equivalencia se denomina *estructura dianalítica*. Podemos caracterizar cada estructura dianalítica mediante su atlas maximal, que es el formado por la unión de todos los atlas de la clase. Por otro lado, puesto que toda carta  $(U, \varphi)$  se puede restringir a un abierto  $(V \subset U, \varphi|_V)$  manteniendo la compatibilidad, y dado que la superficie  $S$  es Hausdorff, toda estructura dianalítica tiene un atlas formado por cartas tan pequeñas como se desee.

Una *superficie de Klein* es una superficie  $S$  dotada de una estructura dianalítica sobre  $S$ . En ocasiones, sobre una misma superficie es posible definir distintas estructuras dianalíticas, y uno de los problemas que se presentan es el de describir las distintas estructuras que se pueden definir sobre una superficie determinada. Por otro lado, una vez esta estructura ha sido determinada, nos interesarán aquellas propiedades que no dependen del atlas elegido, y que son invariantes por las funciones de transición dianalíticas.

El conjunto de los puntos de  $S$  cuya imagen por alguna carta  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^+$  yace en  $\mathbb{R}$  se denomina *borde* de la superficie  $S$ , y se denota  $\partial S$ . En particular, los números reales forman el borde del semiplano cerrado  $\mathbb{C}^+$ . Puesto que las funciones de transición son homeomorfismos, se sigue que si la imagen de un punto  $x \in S$  por una carta  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^+$  está en  $\mathbb{R}$ , entonces para cualquier otra carta  $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^+$  cuyo dominio contenga a  $x$  se tendrá que  $\varphi_\beta(x) \in \mathbb{R}$ . Y si  $\varphi_\gamma : U_\gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces  $x \notin U_\gamma$ , pues  $x$  no es interior a  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ , considerado como subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Es decir, que un punto esté o no en el borde de  $S$  no depende de la carta elegida.

Las superficies de Riemann son un caso particular de las superficies de Klein, pues las funciones de transición analíticas son dianalíticas por definición. Cuando una superficie de Klein no sea de Riemann, diremos que es una superficie de Klein *estricta* o *propia*.

Por citar algunos ejemplos, son superficies de Klein:

- el plano complejo  $\mathbb{C}$ , con atlas  $\{(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}})\}$ .
- cualquier abierto  $U$  del plano complejo, con atlas  $\{(U, id|_U)\}$ . Entre ellos merecen citarse el semiplano abierto superior  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  y el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .
- la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , cuyo atlas requiere al menos dos cartas: de manera estándar  $\{(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}}), (\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, z \mapsto z^{-1})\}$ .
- el semiplano cerrado superior  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$ , con atlas  $\{(\mathbb{C}^+, id_{\mathbb{C}^+})\}$ . Esta superficie no es de Riemann, pues tiene borde  $\delta(\mathbb{C}^+) = \mathbb{R}$ .

## 1.2.2 Orientabilidad

Las funciones de transición pueden considerarse como funciones del plano euclídeo bajo la identificación  $z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . En este sentido, una función compleja  $f(x + iy) = u + iv$  puede interpretarse como un mapa  $(x, y) \mapsto (u, v)$ . Para una función  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define el Jacobiano de  $f$  como el determinante de la matriz de derivadas parciales

$$J(f) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x. \quad (1.2.2)$$

Diremos que un atlas dianalítico es *orientable* si todas las funciones de transición tienen Jacobiano positivo. Si el atlas es analítico, las ecuaciones de Cauchy-Riemann garantizan que

$$J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \geq 0.$$

Como además las funciones de transición son biyectivas, su derivada no se anula en ningún punto y por tanto  $J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ . Por tanto, una superficie de Riemann es siempre orientable, mientras que no toda superficie de Klein lo es. En particular, para una función de transición antianalítica

$$J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = u_x v_y - u_y v_x = -u_x^2 - u_y^2 < 0$$

donde la desigualdad es estricta por la misma razón de antes.

En adelante definiremos una función  $\alpha : S \rightarrow \{1, 2\}$  que tomará valor 2 si  $S$  es orientable, o valor 1 en caso contrario. Al valor  $\alpha(S)$  lo denotaremos simplemente como  $\alpha$  cuando no haya lugar a confusión.

### 1.2.3 Bordes

Aunque es posible eliminar un disco abierto de una superficie de Riemann para formar una superficie de Riemann con borde, en general asumiremos que una superficie de Riemann  $S$  carece de borde, esto es, todo punto  $s \in S$  es interior. Sin embargo, la cuestión de los bordes es central en la teoría de las superficies de Klein, debido a su conexión con las curvas algebraicas sobre los reales. Por ello se admiten cartas con codominio en  $\mathbb{C}^+$ . Asumiremos por tanto que si  $S$  es una superficie de Riemann, entonces  $\delta S = \emptyset$ .

En general, una superficie de Klein puede tener borde no vacío. Si es compacta, el borde estará formado por una colección finita de curvas de Jordan. En este caso, denotaremos al número de componentes conexas del borde  $\delta S$  por  $k(S)$  o por  $k$  si no hay ambigüedad. A cada una de estas curvas cerradas la denominaremos *óvalo*.

## 1.3 Morfismos entre superficies de Klein

Trataremos ahora de las funciones entre superficies de Klein que preservan la estructura dianalítica, es decir, los morfismos en la categoría de las superficies de Klein. Para ello es preciso definir la *función de plegado*

$$\Upsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^+ : x + iy \mapsto x + i|y|. \quad (1.3.1)$$

Esta función es continua, abierta, sobreyectiva, y cada fibra tiene a lo más 2 elementos.

Un morfismo  $f : S \rightarrow S'$  entre superficies de Klein es una función continua tal que

1.  $f(\delta S) \subseteq \delta S'$
2. Para todo  $s \in S$  existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $S$  y  $(V, \psi)$  de  $S'$ , centradas en  $s$  y  $f(s)$  respectivamente, y una función analítica  $F : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{F} \mathbb{C} \xrightarrow{\Upsilon} & \mathbb{C}^+ \end{array} \quad (1.3.2)$$

Si tanto  $S$  como  $S'$  son superficies de Riemann, por medio de traslaciones (y restringiendo los dominios de las cartas si es preciso) podemos obtener una función  $F$  analítica cuya imagen se encuentre en el semiplano superior, de modo que la función de plegado pueda eliminarse del

diagrama. En tal caso, esta definición concuerda con la de morfismo entre superficies de Riemann, puesto que equivale a que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  sea analítica. La primera condición es superflua en ese caso puesto que, como hemos comentado, las superficies de Riemann carecen de borde ( $\delta S = \delta S' = \emptyset$ ).

Si además  $f$  es biyectiva y su inversa es un morfismo, decimos que es un *isomorfismo* entre superficies de Klein. Si las superficies de partida y llegada de un isomorfismo son la misma, decimos que es un *automorfismo*. Los automorfismos de una superficie de Klein  $S$  forman un grupo bajo la composición de funciones, que denotamos como  $Aut(S)$ .

Un caso particular que utilizaremos en este trabajo es el isomorfismo entre el semiplano superior  $\mathbb{H}$  y el disco unidad  $\mathbb{D}$ . Resulta que la función  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por

$$J(z) = \frac{z-i}{z+i} = z' \tag{1.3.3}$$

es una transformación de Möbius (por tanto una biyección analítica) que lleva los reales extendidos en la circunferencia unidad. Es evidente que el punto  $i$  es llevado en el cero, y por tanto aplica el semiplano superior en la región interior, el disco  $\mathbb{D}$ . Usando las cartas dadas por las respectivas inclusiones, se tiene que esta transformación es un isomorfismo entre superficies de Riemann, y por tanto también lo es en la categoría de las superficies de Klein. En ocasiones necesitaremos usar su inversa que es

$$J^{-1}(z') = \frac{z'+1}{iz'-i} = z. \tag{1.3.4}$$

### 1.3.1 Propiedades de los morfismos

Enumeramos aquí sin demostración tres proposiciones relativas a los morfismos entre superficies de Klein ([7]).

**Proposición 1.3.1.1.** Sean  $f : S \rightarrow S'$  y  $g : S' \rightarrow S''$  dos aplicaciones continuas no constantes entre superficies de Klein, tales que  $f(\partial S) \subset S'$  y  $g(\partial S') \subset S''$ . Consideremos las afirmaciones

1.  $f$  es un morfismo.
2.  $g$  es un morfismo.
3.  $g \circ f$  es un morfismo.

entonces

1. (1) y (2) implican (3).
2. si  $f$  es sobreyectiva, (1) y (3) implican (2).
3. si  $f$  es abierta, (2) y (3) implican (1).

**Proposición 1.3.1.2.** Si un morfismo entre superficies de Klein  $f : S \rightarrow S'$  es un homeomorfismo, entonces es un isomorfismo en la categoría de superficies de Klein.

**Proposición 1.3.1.3.** Sea  $f : S \rightarrow S'$  una aplicación continua entre espacios topológicos:

1. Si  $S'$  es superficie de Klein, a lo más existe una estructura dianalítica para  $S$  que hace que  $f$  sea un morfismo.
2. Si  $S$  es superficie de Klein y  $f$  es sobreyectiva, a lo más existe una estructura dianalítica para  $S'$  que hace que  $f$  sea un morfismo.

### 1.3.2 Forma local normal

Sea  $g : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante entre superficies de Klein y sea  $x$  un punto de  $X$ . Según [2, Cap. 1 §5], existen cartas dianalíticas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  centradas en  $x$  y  $g(x)$  respectivamente (es decir,  $\varphi(x) = \psi(g(x)) = 0$ ) y tales que  $g(U) \subset V$ , respecto de las cuales  $g|_U$  es de la forma

$$g|_U = \begin{cases} \psi^{-1} \circ \gamma \circ G \circ \varphi & \text{si } g(x) \in \partial Y \\ \psi^{-1} \circ G \circ \varphi & \text{si } g(x) \in \overset{\circ}{Y} \end{cases}$$

donde  $G$  es una función analítica que verifica  $G(0) = 0$ . En consecuencia, en un entorno del cero existe una serie absolutamente convergente  $\sum_{j=e}^{\infty} a_j z^j = G(z)$ , donde  $e > 0$  es un número entero. Usando el mismo argumento empleado para morfismos entre superficies de Riemann (véase [16, p. 44]), se puede encontrar una carta  $(V, \psi')$  para la cual la función analítica  $G$  es una potencia:  $G(z) = (\pm z)^e$ . Más aun, los coeficientes  $a_j$  son todos reales y el signo  $\pm$  en la expresión para  $G$  depende del signo del primer coeficiente no nulo  $a_e$ .

En consecuencia, todo morfismo entre superficies de Klein es localmente una potencia, seguida tal vez de un plegado. Al número  $e$  se le denomina *índice de ramificación* de  $g$  en  $x$ , y se denota  $e_g(x)$ . Decimos que  $g$  es *ramificada* en  $x$  si  $e_g(x) > 1$ . En cuanto al plegado, definimos

$$n_x = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \overset{\circ}{X} \\ 1 & \text{si } x \in \partial X \end{cases} \quad (1.3.5)$$

El pliegue se dará si  $x \in \overset{\circ}{X}$  pero  $g(x) \in \partial Y$ . A tal fin definimos el *grado relativo* de  $x$  sobre  $g(x)$  como

$$dg(x) = \frac{n_x}{n_{g(x)}}$$

que precisamente toma el valor

$$dg(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \overset{\circ}{X}, g(x) \in \partial Y \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir,  $dg(x)$  toma valor 2 cuando  $x$  es un punto interior de  $X$  a lo largo de la línea de plegado de  $g$ .

### 1.3.3 Grado de un morfismo

**Proposición 1.3.3.1** (igualdad fundamental [2, p. 102]). *Para todo punto  $y \in g(X)$  el entero*

$$n = \sum_{x \in g^{-1}(y)} e_g(x) \cdot d_g(x)$$

*es constante e independiente de  $y$ .*

En consecuencia todo morfismo no constante es una cobertura plegada y ramificada de  $n$  hojas, para algún entero positivo  $n$ , que denominaremos *grado* del morfismo  $g$ . Vulgarmente, diremos que un morfismo de grado  $n$  toma cada valor  $n$  veces, contando multiplicidades. Como consecuencia inmediata, un isomorfismo entre superficies de Klein tiene grado unidad.

El grado de la composición de morfismos tiene la siguiente propiedad:

**Proposición 1.3.3.2** ([14]). *Dados dos morfismos  $g : X \rightarrow Y$  y  $f : Y \rightarrow Z$  no constantes entre superficies de Klein, de grado  $n$  y  $m$  respectivamente, el grado de  $f \circ g$  es  $n \cdot m$ .*

## 1.4 Acciones de grupos de automorfismos

Vamos a estudiar ahora la manera de obtener superficies de Klein a partir de otras, por medio de cocientes por la acción de un grupo. Análogamente, estudiaremos las superficies de Klein recubridoras de otra dada, y veremos qué relación existe entre sus grupos de automorfismos. Finalmente, expondremos el teorema de uniformización, que justifica el estudio de los automorfismos del semiplano  $\mathbb{H}$ , puesto que todas las superficies de Klein salvo unas pocas excepciones se obtienen como un cociente de  $\mathbb{H}$  por la acción de un grupo.

### 1.4.1 Espacios de órbitas

Consideremos ahora un subgrupo arbitrario  $G \in \text{Aut}(S)$  de automorfismos de una superficie de Klein. Definimos la relación  $s \sim s'$  si  $s' = g(s)$  para algún  $g \in G$ , que claramente es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, pues todo subgrupo contiene la identidad, los inversos y es cerrado bajo la operación del grupo.

A la clase de equivalencia de un punto  $s$  la denominaremos *órbita* de  $s$  y la denotaremos por  $O_s$ . Cabe mencionar que como  $O_s = O_{g(s)}$  para todo automorfismo  $g \in G$ , el grupo  $G$  deja invariante cada órbita en  $S$ , es decir,  $g(O_s) = O_s$  para cada  $s \in S$  y  $g \in G$ .

Denominaremos *espacio de órbitas* al cociente  $S/G = \{O_s \mid s \in S\}$  —que es un espacio topológico con la topología cociente— y *proyección canónica* a la aplicación  $\pi : S \rightarrow S/G : s \mapsto O_s$ .

**Proposición 1.4.1.1.** *La aplicación cociente  $\pi : S \rightarrow S/G$  es continua, sobreyectiva y abierta.*

*Demostración.* Las dos primeras propiedades son triviales, así que demostraremos que si un grupo  $G$  actúa sobre el espacio  $S$  mediante homeomorfismos, entonces la aplicación cociente es abierta [12, Lema 21.1]. Como todo elemento de  $G$  es un automorfismo de  $S$  y en particular un homeomorfismo, esto demostrará la proposición.

Sea entonces  $U$  un abierto de  $S$  y  $\pi(U)$  su imagen en el cociente. Llamamos

$$W = \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U).$$

Puesto que todo automorfismo es un homeomorfismo, cada imagen  $g(U)$  es abierta, y la unión de todas ellas también lo es. Pero como la topología en  $S/G$  es la topología cociente,  $\pi(W) = \pi(U)$  es abierto en  $S/G$ , con lo cual  $\pi$  es abierta. ■

El objetivo será determinar bajo qué condiciones este cociente es a su vez una superficie de Klein. Puesto que hemos supuesto que toda superficie de Klein es conexa, su cociente será también conexo. Además necesitamos dotarle de un atlas dianalítico, siempre y cuando se satisfaga la condición topológica de que sea un espacio de Hausdorff. Para ello necesitaremos que la acción cumpla las condiciones que exponemos en la siguiente sección.

### 1.4.2 Acciones discontinuas

Dados dos conjuntos  $U, V \subset S$  y un subgrupo  $G \subset \text{Aut}(S)$  definimos el conjunto

$$G(U, V) = \{g \in G \mid U \cap g(V) \neq \emptyset\} = \{g \in G \mid g^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset\}. \quad (1.4.1)$$

En particular, denotamos  $G_U = G(U, U)$  y  $G_s = G_{\{s\}}$ , que coincide con la definición usual del estabilizador de  $s$  en  $G$ .

Decimos que la acción de  $G$  es *propriadamente discontinua* si se cumplen las tres condiciones siguientes:

**(D1):** todo punto  $s \in S$  tiene un entorno  $U$  para el cual  $G_U$  es finito.

**(D2)** para todo par de puntos  $s, s' \in S$  pertenecientes a órbitas distintas existen entornos  $U$  y  $U'$ , centrados en  $s$  y  $s'$  respectivamente, tales que  $G(U, U') = \emptyset$ .

**(D3):** Dado un punto  $s \in S$  arbitrario, si una función  $f \neq id$  de su estabilizador  $G_s$  es analítica (o sea, es analítica  $\varphi f \varphi^{-1}$  para cualquier carta  $\varphi$ ), entonces  $s$  es un punto fijo aislado de  $f$ .

Si la condición (D1) es cierta, entonces todo punto tiene un entorno particularmente útil:

**Proposición 1.4.2.1** ([7, Proposición 1.1.1]). *Son equivalentes:*

1. La acción satisface la condición (D1).
2.  $G_s$  es finito para todo  $s \in S$ . Además, para cada entorno  $M$  de  $s$  existe un entorno conexo  $U \subset M$  tal que  $G_U = G_s$ , y  $f(U) = U$  para todo  $f \in G_U$ .

*Demostración.* Supongamos que se verifica la condición (D1). Dado  $s \in S$  podemos encontrar un entorno  $V$  tal que  $G_V \subset G$  sea finito. Siendo  $G_s \subset G_V$ , podemos formar el conjunto finito

$$H = G_V \setminus G_s = \{f_1, f_2, \dots, f_k\} \subset G$$

formado por funciones que verifican  $f_j(s) \neq s$ . Como  $S$  es Hausdorff, existen entornos  $V_j$  centrados en  $s$  que verifican  $V_j \cap f_j(V_j) = \emptyset$  para cada  $j = 1, \dots, k$ . Construimos entonces por intersección finita el abierto

$$W = V \cap \left( \bigcap_{j=1}^k V_j \right)$$

para el cual  $G_W = G_s$ . Como el grupo  $G_s$  también es finito, la intersección

$$U = \bigcap_{f \in G_s} f(W)$$

es un abierto contenido en  $W$  (ya que  $id \in G_s$ ) con lo que  $G_s \subset G_U \subset G_W = G_s$ . Además si  $f_1 \in G_s$  entonces  $f_1(U) = \bigcap_{f \in G_s} \{f_1 \circ f(W)\} = \bigcap_{f \in G_s} f(W) = U$ . Si  $U$  no fuera conexo, tomaríamos la componente  $U^s$  que contiene a  $s$ , y como cada  $f \in G_s$  es un homeomorfismo que fija  $s$ , se tendría que  $f(U^s) = U^s$ . ■

Como consecuencia de la condición (D1), todo punto  $s \in S$  tiene un entorno  $U$  tal que  $g(U) = U$  para un número finito de funciones  $g \in G_s$ , y  $g(U) \cap U = \emptyset$  para cada  $g \notin G_s$ . En cuanto a la condición (D2), su importancia radica en la siguiente

**Proposición 1.4.2.2.** *El cociente  $S/G$  es Hausdorff si y solo si la acción de  $G$  sobre  $S$  cumple la condición (D2).*

*Demostración.* Si la acción de  $G$  en  $S$  cumple (D2), entonces dados  $O_x, O_y \in S/G$  distintos ( $x \notin O_y$ ) existen entornos  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$  respectivamente, tales que  $G(U, V) = \emptyset$ . Al ser  $\pi : S \rightarrow S/G$  una aplicación abierta, las proyecciones  $\pi(U)$  y  $\pi(V)$  son entornos abiertos de  $O_x$  y  $O_y$  respectivamente. Ahora bien, si estos entornos no fueran disjuntos, existiría un  $O_z \in \pi(U) \cap \pi(V)$  con preimágenes  $z_1 \in U$  y  $z_2 = g(z_1) \in V$ , para cierto automorfismo  $g \in G(U, V)$ , lo cual es falso. Ello prueba que  $O_x$  y  $O_y$  tienen entornos disjuntos y que  $S/G$  es Hausdorff.

Recíprocamente, si  $S/G$  es Hausdorff, dados dos puntos  $x, y \in S$  de órbitas distintas,  $\pi(x)$  y  $\pi(y)$  tienen entornos respectivos  $U$  y  $V$  disjuntos, con lo cual  $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$ . Como  $g(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$  para todo  $g \in G$ , se tiene que  $G(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)) = \emptyset$ . Por tanto, la acción de  $G$  cumple (D2). ■

Nos interesa estudiar que relación hay entre estas tres condiciones, especialmente para el caso en que los automorfismos sean isometrías, que nos será de utilidad más adelante.

**Proposición 1.4.2.3.** *Si la acción por un grupo de automorfismos  $G$  verifica la condición (D1), y está formado por isometrías, entonces verifica también la condición (D2).*

*Demostración.* Supongamos que no existen entornos  $U$  y  $V$  de dos puntos interiores  $x$  e  $y \notin O_x$  tales que  $G(U, V) = \emptyset$ . Entonces, dados entornos cualesquiera  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$ ,  $U$  interseca a infinitas imágenes de  $V$  por elementos de  $G$ . De lo contrario, si solo intersecase a un número finito de imágenes  $V_1, \dots, V_k$  (imágenes por  $f_1, \dots, f_k$  respectivamente), usando que  $S$  es Hausdorff, podríamos tomar pares de entornos disjuntos  $U_i, V_i$  centrados en  $x$  y en  $f_i(y)$ , y construir las intersecciones finitas

$$\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^k U_i, \quad \tilde{V} = \bigcap_{i=1}^k f^{-1}(V_i)$$

que son entornos abiertos de  $x$  e  $y$  respectivamente, de tal modo que  $G(U \cap \tilde{U}, V \cap \tilde{V}) = \emptyset$ .

Sea entonces un punto  $z_i \in U \cap V_i$  (donde  $i$  recorre todos los entornos  $V_i$  con intersección no vacía con  $U$ ). Los puntos  $z_i$  forman una sucesión infinita contenida en el entorno  $U$ . Como  $S$  es localmente compacto existe un entorno compacto  $K$  de  $x$ , de modo que podemos elegir como entorno  $U$  el interior de  $K$ .

Ahora bien, supuesto que  $S$  es un espacio métrico —se entiende que con la topología inducida por la métrica—, sin pérdida de generalidad podemos tomar como entorno  $V$  una bola  $B(y, \epsilon)$  para cierto  $\epsilon > 0$ . La sucesión  $\{z_i\} \subset K$  tiene una subsucesión convergente, y por tanto de Cauchy. Ello implica que existen infinitos puntos de la sucesión tan próximos entre sí como se desee. En consecuencia es falso que  $G(V, V)$  sea finito pues cada imagen  $f(V)$  por una isometría  $f$  es una bola de radio  $\epsilon$ . Como esto es cierto para todo entorno de  $y$  (pues todo entorno contiene una bola  $B(y, \epsilon)$  para cierto  $\epsilon > 0$ ) entonces ningún entorno  $V$  de  $y$  verifica la condición de que  $G_V$  es finito. ■

**Proposición 1.4.2.4.** *Toda acción de un grupo de automorfismos satisface la condición D3.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo de automorfismos de  $S$  y sea un punto  $s \in S$ . Consideramos un automorfismo  $f$  de su estabilizador  $G_s$  tal que  $F = \varphi f \varphi^{-1}$  sea analítica para alguna carta  $(U, \varphi)$  centrada en  $s$ . Como las funciones de transición son dianalíticas, y la inversa de una función analítica (resp. antianalítica) es analítica (resp. antianalítica) ello implica que  $\psi f \psi^{-1}$  es analítica para cualquier otra carta  $(U, \psi)$ , una vez restringidos apropiadamente los dominios.

Como  $s$  es un punto fijo, podemos encontrar un entorno  $\tilde{U} \subset U$  tal que  $f(\tilde{U}) \subset U$ . Sea entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \varphi(\tilde{U}) & \xrightarrow{F} & \varphi(U) \end{array} \quad (1.4.2)$$

Como  $f(s) = s$  se sigue que  $F(\varphi(s)) = \varphi(s)$ , es decir,  $\varphi(s)$  es un punto fijo de  $s$ . recíprocamente, si  $w$  es un punto fijo de  $F$  entonces  $\varphi^{-1}(w)$  es un punto fijo de  $f$ .

Consideremos ahora la función  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto F(z) - z$ . Como  $F$  es analítica  $h$  también lo es. Además  $w$  es un punto fijo de  $F$  si y solo si es un cero de  $h$ . Como los ceros de una función analítica no constante son puntos aislados se tiene que

- o bien  $h = 0$ , en cuyo caso  $F(z) = z$  y  $f$  es la identidad,
- o  $\varphi(s)$  es un cero aislado de  $h$  y un punto fijo aislado de  $F$ , con lo cual  $s$  es un punto fijo aislado de  $f$ , al ser cada  $\varphi$  un homeomorfismo.

■

### 1.4.3 Estructura dianalítica del espacio de órbitas

Al cociente  $S/G = \{O_s \mid s \in S\}$  —el *espacio de órbitas*— se le puede dotar de una estructura dianalítica a condición de que el grupo  $G$  actúe en  $S$  de forma propiamente discontinua. Además, esta estructura es única si imponemos la condición de que la proyección canónica  $\pi : S \rightarrow S/G : s \mapsto O_s$  sea un morfismo. Exponemos aquí un esbozo de la construcción de un atlas dianalítico para  $S/G$  según [7, Teorema 1.1.10].

Supongamos primero que el punto  $s \in S$  tiene estabilizador trivial. Por continuidad, podemos encontrar un entorno  $U$  alrededor de  $s$  en el que todos los puntos tengan esta misma propiedad, y podemos suponer que es disjunto con cualquiera de sus imágenes  $g(U)$ . Entonces, dada una carta cualquiera  $(U, \varphi : U \rightarrow A)$ , la aplicación cociente  $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow A : O_s \mapsto \varphi(s)$ , definida sobre  $\tilde{U} = \{O_s \in S/G \mid s \in U\}$  es un homeomorfismo considerando la topología cociente. Así mismo, para cualquier otra carta  $(g(U), \psi : g(U) \rightarrow B)$ , cada función de transición

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{U}) \tag{1.4.3}$$

es dianalítica, pues  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \equiv \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ .

Este argumento falla sin embargo si  $G_s$  no es trivial para algún  $s$ , pues en tal caso todo entorno  $U$  de  $s$  interseca alguna de sus imágenes. Es entonces cuando hacemos uso de la hipótesis de que la acción es discontinua, pues entonces, existe un entorno  $U^s$  para el cual  $g(U^s) \cap U^s \neq \emptyset$  para un conjunto finito de funciones  $\{g_1, \dots, g_k\} \subset G_s$ , y para estas  $g_i(U^s) = U^s$ . Para cualquier otra  $g \notin G_s$ ,  $U$  es disjunto con  $g(U)$ .

Para los puntos con  $G_s$  no trivial, tomamos una carta  $(U^s, \varphi : U^s \rightarrow A)$ . Lo natural entonces es definir localmente el cociente intermedio  $\pi' : U^s \rightarrow U^s/G_s = V^s$ . Se tiene entonces

$$U^s \xrightarrow{\pi'} U^s/G_s \xrightarrow{\pi''} U^s/G. \tag{1.4.4}$$

La composición  $\pi'' \circ \pi'$  lleva cada punto  $z \in U^s$  a su órbita por  $G$  pasando por su órbita por el estabilizador, que es finita. Más aún, la proyección  $\pi''$  es inyectiva además de sobreyectiva. Siendo continua y abierta, es un homeomorfismo.

La construcción de la carta dianalítica  $\psi_s : V^s \rightarrow \mathcal{C}$  se puede llevar a cabo haciendo uso de la condición (D3). Si esa condición es cierta, podemos definir un conjunto  $H_s \subset G_s$  con ciertas propiedades. Examinando los cuatro casos posibles que pueden darse, se define para cada uno de ellos una función  $\psi_s$  apropiada. En resumen

**Teorema 1.4.3.1.** *Sea  $S$  una superficie de Klein y sea  $G \subset \text{Aut}(S)$  un grupo de automorfismos que actúa propia y discontinuamente sobre  $S$ . Entonces existe una estructura dianalítica sobre el cociente  $S/G$  que hace que sea una superficie de Klein, y además es la única para la cual la proyección  $\pi : S \rightarrow S/G$  es un morfismo.*

Si  $G$  es un grupo finito de automorfismos, se obtiene

**Teorema 1.4.3.2.** *Si  $X$  es una superficie de Klein compacta y  $G \subset \text{Aut}(X)$  es finito, la proyección canónica  $\pi : X \rightarrow X/G$  es una cobertura ramificada de  $|G|$  hojas.*

## 1.5 Coberturas dobles

Vamos a recubrir una superficie de Klein arbitraria  $S$  con un espacio recubridor  $S_c$  de dos hojas, es decir, tal que existe un morfismo sobreyectivo  $f : S_c \rightarrow S$  de grado 2. Una cobertura de esta clase recibe el nombre de cobertura doble. En concreto, vamos a construir una cobertura que es una superficie orientable y sin borde, con lo cual es de Riemann. Expondremos aquí la construcción tal como se describe en [7], siguiendo a [2].

### 1.5.1 Construcción de la cobertura doble de Riemann

Sea  $\Sigma = \{V_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  un atlas dianalítico de una superficie de Klein estricta  $S$ . Para cada abierto  $V_i$  vamos a definir dos conjuntos que representan cada una de sus orientaciones posibles (recordemos que  $V_i$  es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^2$ , que es una superficie orientable):

$$\forall i : \begin{cases} V'_i = V_i \times \{i\} \times \{1\} \\ V''_i = V_i \times \{i\} \times \{-1\} \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Formamos después el conjunto  $\tilde{S} = \bigcup_{i \in I} (V'_i \cup V''_i)$ . En este espacio, un conjunto  $V$  será abierto si para todo  $i$ , los conjuntos  $q(V \cap V'_i)$  y  $q(V \cap V''_i)$  son abiertos en  $S$ , donde  $q : (s, i, \delta) \mapsto s$ . Como es previsible que las cartas se solapen unas con otras, vamos a identificar puntos en este conjunto siguiendo dos reglas:

1. Llamando  $D_i = \partial S \cap V_i$  (la porción del borde de  $S$  en  $V_i$ ) identificamos

$$D_i \times \{i\} \times \{1\} \simeq D_i \times \{i\} \times \{-1\}. \quad (1.5.2)$$

2. Si la intersección de dos cartas  $W = V_i \cap V_j$  es no vacía y conexa, para cada  $\delta = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} W \times \{i\} \times \{\delta\} &\simeq W \times \{j\} \times \{\delta\} && \text{si } \varphi_i \varphi_j^{-1} \text{ es analítica.} \\ W \times \{i\} \times \{\delta\} &\simeq W \times \{j\} \times \{-\delta\} && \text{si } \varphi_i \varphi_j^{-1} \text{ es antianalítica.} \end{aligned}$$

La primera de ellas tiene por objetivo eliminar el borde, mientras que la segunda resuelve la no orientabilidad de  $S$ .

Como resultado obtenemos un espacio cociente  $S_c$  y una proyección  $p : \tilde{S} \rightarrow S_c$ . Con la topología cociente, esta es una aplicación abierta y sobreyectiva, por lo que las imágenes  $\tilde{V}_i = p(V'_i \cup V''_i)$  forman un recubrimiento abierto de  $S_c$ . Análogamente, las cartas

$$\tilde{\varphi}_i : \tilde{V}_i \rightarrow \mathbb{C} : p(v) \mapsto \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } v = (x, i, 1) \in V' \\ \overline{\varphi_i(x)} & \text{si } v = (x, i, -1) \in V'' \end{cases}$$

son homeomorfismos de cada  $\tilde{V}_i$  en su imagen. Nótese que los puntos para los cuales  $(x, i, 1) \sim (x, i, -1)$  tienen su imagen por  $\tilde{\varphi}$  en  $\mathbb{R}$ , con lo que cada  $\tilde{\varphi}_i$  está bien definida, y el principio de reflexión de Schwarz garantiza que es analítica. La colección  $\Sigma_c = \{\tilde{V}_i, \tilde{\varphi}_i\}$  es un atlas analítico en  $S_c$ , que es una superficie de Riemann. En particular es orientable y sin borde (no en vano se ha definido con este objetivo en mente).

Ahora, la aplicación

$$f : S_c \rightarrow S : p(v, i, \delta) \mapsto v \in V_i \tag{1.5.3}$$

es un morfismo entre superficies de Klein. Denominamos *cobertura doble de Riemann* de  $S$  a la terna  $(S_c, f, \sigma)$ , donde  $\sigma$  es la involución antianalítica

$$\sigma : S_c \rightarrow S_c : v \mapsto \begin{cases} v & \text{si } |f^{-1}(f(v))| = 1 \\ f^{-1}(f(v)) \setminus \{v\} & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

que verifica  $f\sigma = f$  y  $\sigma^2 = id$ . Lo que hace esta función es permutar las preimágenes de todo punto  $x$  interior de  $S$  (que hemos convenido que representan las dos orientaciones posibles de un entorno de  $x$ ), dejando invariantes los puntos que corresponden a  $\partial S$ .

**Proposición 1.5.1.1.**  *$S$  es isomorfo al espacio de órbitas de la cobertura doble  $S_c$  bajo la acción del grupo generado por la involución  $\sigma$ , es decir*

$$S \simeq S_c / \langle \sigma \rangle. \tag{1.5.5}$$

*Demostración.* La involución  $\sigma : S_c \rightarrow S_c$  es un automorfismo de orden 2, y por tanto el grupo generado por ella es finito:  $\langle \sigma \rangle = \{id, \sigma\}$ . Puesto que es finito, la acción de  $\langle \sigma \rangle$  sobre  $S_c$  es propiamente discontinua, con lo cual el espacio de órbitas  $S_c / \langle \sigma \rangle$  es una superficie de Klein. Si  $\pi$  es la proyección sobre este cociente y  $f : S_c \rightarrow S$  es el morfismo descrito en 1.5.3 que satisface

$f\sigma = f$ , se tiene que  $g : S_c/\langle\sigma\rangle \rightarrow S : O_x \mapsto f(x)$  es una biyección bien definida, que  $f = g \circ \pi$  y que  $g(\partial(S_c/\langle\sigma\rangle)) = \partial S$ .

Ahora bien, tanto  $f$  como  $\pi$  son morfismos, y esta última es sobreyectiva. En consecuencia,  $g$  es un morfismo. Aplicando el mismo razonamiento a la igualdad  $g^{-1} \circ f = \pi$  se deduce que  $g$  es un isomorfismo entre  $S$  y  $S_c/\langle\sigma\rangle$ . ■

Esta no es la única involución antianalítica que puede definirse en una superficie de Riemann. De hecho, toda involución antianalítica  $\sigma'$  genera un subgrupo de orden 2 en  $Aut(S_c)$ , de modo que este grupo actúa discontinuamente y el cociente  $S_c/\langle\sigma'\rangle$  es una superficie de Klein.

Como toda superficie es triangulable, definida una triangulación en  $S$  es posible levantarla a  $S_c$ , con lo que resulta que la característica de Euler de esta última es doble:  $\chi(S_c) = 2\chi(S)$ . Considerando que la característica de Euler de una superficie  $S$  es

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) - k(S) & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g(S) - k(S) & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases} \quad (1.5.6)$$

y que  $S_c$  es orientable y sin borde, resulta que el género de  $S_c$  satisface

$$g(S_c) = 1 - \chi(S) = \alpha g(S) + k(S) - 1. \quad (1.5.7)$$

Denominamos a  $g(S_c)$  *género algebraico* de  $S$ .

Existen dos coberturas dobles estrechamente relacionadas con la de Riemann. La primera es la cobertura doble orientable, que se obtiene como la de Riemann, pero realizando solo las identificaciones del segundo tipo. El espacio recubridor es una superficie orientable pero con borde (Si  $S$  es de Klein estricta). El otro espacio recubridor del que hablamos es la cobertura doble de Schottky, que se obtiene realizando solo las identificaciones del primer tipo. El resultado es una superficie sin borde, que tendrá el mismo carácter de orientabilidad que  $S$  [2, pp. 40-44].

### 1.5.2 Levantamiento de morfismos

Todo morfismo no constante de una superficie de Riemann en  $S$  factoriza de forma única, mediante una aplicación analítica, a través de su cobertura doble. Es decir:

**Proposición 1.5.2.1** ([2, Prop. 1.6.2.]). Sean  $\tilde{S}$  una superficie de Riemann,  $S$  una superficie de Klein estricta y  $f : S_c \rightarrow S$  su cobertura doble de Riemann. Si  $g : \tilde{S} \rightarrow S$  es un morfismo no constante, entonces existe un única aplicación analítica  $\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow S_c$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & S_c \\ g \searrow & & \downarrow f \\ & & S \end{array} \quad (1.5.8)$$

Nótese que como  $f\sigma = f$ , entonces  $\sigma\tilde{g}$  también es un morfismo (en la categoría de superficies de Klein) y tiene las mismas propiedades salvo que no es analítico. La importancia de dicha aplicación analítica es que permite levantar morfismos (entre superficies de Klein) a aplicaciones analíticas entre las respectivas superficies recubridoras de Riemann:

**Teorema 1.5.2.2.** *Todo morfismo no constante entre superficies de Klein levanta de forma única a un morfismo analítico entre sus coberturas dobles de Riemann.*

*Demostración.* Sea  $g : S \rightarrow S'$  un morfismo no constante entre superficies de Klein estrictas, y sean  $S_c$  y  $S'_c$  sus coberturas dobles de Riemann. La composición de morfismos

$$S_c \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} S'$$

es un morfismo de una superficie de Riemann en  $S'$ , y por lo tanto factoriza de forma única, mediante una aplicación analítica  $\tilde{g}$ , a través de la cobertura  $S'_c$  dando lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_c & \xrightarrow{\tilde{g}} & S'_c \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{g} & S' \end{array} \quad (1.5.9)$$

donde  $\tilde{g}$  es el morfismo (analítico) entre superficies de Riemann buscado. La unicidad es consecuencia de la proposición anterior. ■

**Corolario 1.5.2.3.** *Todo isomorfismo  $g : S \rightarrow S'$  entre superficies de Klein levanta de forma única a una equivalencia conforme  $\tilde{g}$  entre sus coberturas dobles de Riemann  $(S_c, f, \sigma)$  y  $(S'_c, f', \sigma')$ , que además verifica*

$$\tilde{g}\sigma = \sigma'\tilde{g}.$$

*Demostración.* La existencia de la equivalencia conforme  $\tilde{g}$  es consecuencia inmediata de la proposición anterior, contando grados y considerando el levantamiento del mapa inverso  $g^{-1}$ . Además, siguiendo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_c & \xrightarrow{\tilde{g}} & S'_c \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{g} & S' \end{array} \quad (1.5.10)$$

se deduce que

$$f'\tilde{g} = gf = gf\sigma = f'\tilde{g}\sigma = f'\sigma'\tilde{g}\sigma$$

con lo cual o bien  $\tilde{g}(x) = \sigma'\tilde{g}\sigma(x)$  o bien  $\tilde{g}(x) = \sigma'\sigma'\tilde{g}\sigma(x) = \tilde{g}\sigma(x)$ . Como  $\tilde{g}$  es biyectivo, esto último no sucede a menos que  $x = \sigma(x)$ , en cuyo caso  $(gf)^{-1}(gf(x))$  tiene un solo elemento, lo cual implica que  $\sigma'(\tilde{g}(x)) = \tilde{g}(x)$ . Es decir, también en este caso se verifica  $\tilde{g}(x) = \sigma'\tilde{g}\sigma(x)$ . ■

Cabe mencionar que la condición que satisface  $\tilde{g}$  es equivalente a

$$f(x) = f(y) \iff f'(\tilde{g}(x)) = f'(\tilde{g}(y)).$$

### 1.5.3 Morfismos inducidos

Ahora realizaremos la operación contraria de la que acabamos de definir. Sean dos superficies de Klein  $S$  y  $S'$ , con coberturas dobles  $(S_c, f, \sigma)$  y  $(S'_c, f', \sigma')$  respectivamente. Supongamos que existe un morfismo  $g : S_c \rightarrow S'_c$  con la propiedad de que

$$g\sigma = \sigma'g$$

o equivalentemente

$$f(x) = f(y) \iff f'(g(x)) = f'(g(y)).$$

En tal caso el morfismo  $g$  induce una aplicación  $g^* : S \rightarrow S'$  bien definida, dada por  $f(x) \mapsto f'(g(x))$ , que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_c & \xrightarrow{g} & S'_c \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{g^*} & S' \end{array} \quad (1.5.11)$$

Dicha aplicación  $g^*$  es continua [17, Teorema 22.2]. Además si  $f(x) \in \partial S$  entonces  $g\sigma(x) = g(x)$ , con lo cual  $\sigma'(g(x)) = g(x)$ , de donde  $f'(g(x)) \in \partial S'$ , y en consecuencia  $g^*(\partial S) \subset \partial S'$ . Sumado a que el morfismo  $f$  es sobreyectivo, la proposición 1.3.1.1 nos asegura que  $g^*$  es un morfismo. Nótese que  $g$  es precisamente el levantamiento de  $g^*$  a las coberturas dobles de Riemann respectivas. En particular

**Corolario 1.5.3.1.** *Dos superficies de Klein  $X$  y  $X'$  son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo  $\gamma : X_c \rightarrow X'_c$  tal que  $\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1} = \sigma'$ .*

Aplicado al caso de que las superficies de partida y de llegada coinciden:

**Teorema 1.5.3.2.** *Sea  $g$  un automorfismo de la cobertura doble de Riemann  $(S_c, f, \sigma)$  de la superficie de Klein  $S$ . Si  $\sigma g = g\sigma$ , entonces  $g$  induce un automorfismo  $g^* : S \rightarrow S$ . Además,  $g$  es el levantamiento de  $g^*$ .*

*Demostración.* La condición  $\sigma g = g\sigma$  se cumple para  $g$  y para su inversa. Ambas inducen morfismos de  $S$  en si mismo, por la proposición anterior, y siguiendo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S_c & \xrightarrow{g} & S'_c & \xrightarrow{g^{-1}} & S \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow{g^*} & S' & \xrightarrow{g^{-1*}} & S \end{array} \quad (1.5.12)$$

vemos que dichos morfismos son inversos uno del otro:  $(g^{-1})^* = (g^*)^{-1}$ . Que  $g$  es el levantamiento de  $g^*$  se sigue prácticamente por definición. ■

Consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente teorema [2, Teorema 1.11.1]:

**Teorema 1.5.3.3.** *Sea  $(S_c, f, \sigma)$  la cobertura doble de Riemann de la superficie de Klein  $S_c$ . Entonces*

$$\text{Aut}(S) \simeq \text{Aut}^+(S_c)^\sigma = \{\tau \in \text{Aut}^+(S_c) \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}. \quad (1.5.13)$$

Es decir, podemos identificar  $\text{Aut}(S)$  con el subgrupo de automorfismos de  $\text{Aut}^+(S_c)$  que conmutan con la involución  $\sigma$ . En particular, si el grupo de automorfismos de  $S_c$  es finito, entonces

$$|\text{Aut}(S)| \leq |\text{Aut}^+(S_c)| \quad (1.5.14)$$

lo cual es cierto siempre que el género de  $S_c$  sea mayor que 1.

#### 1.5.4 Morfismos entre recubridores arbitrarios

Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos de automorfismos de una superficie de Klein  $S$ , actuando discontinuamente, y sean  $X = S/G$  y  $X' = S/G'$  sus espacios de órbitas, bajo las proyecciones  $\pi$  y  $\pi'$  respectivamente.

**Proposición 1.5.4.1** ([2, Prop. 1.3.1]). *Si  $G$  y  $G'$  son conjugados en  $\text{Aut}(S)$  entonces los cocientes  $X$  y  $X'$  son isomorfos.*

*Demostración.* Sea  $\tau \in \text{Aut}(S)$  tal que  $\tau G = G'\tau$ . En tal caso, la aplicación  $\pi'\tau$  está bien definida y es constante en cada órbita por  $G$ . Como antes, induce una aplicación continua  $\tau^* : \pi(x) \mapsto \pi'(\tau(x))$ . Se deduce de [2, Teorema 1.8.4] que un punto  $\pi(x)$  pertenece al borde de  $X$  si  $x \in \partial S$  (en cuyo caso  $\tau(x) \in \partial S$  por ser  $\tau$  morfismo) o bien  $x$  queda fijo por una involución antianalítica  $\sigma \in G$  (en cuyo caso  $\tau(x)$  queda fijo por la involución antianalítica  $\tau\sigma\tau^{-1} \in G'$ ): en ambos casos  $\pi'(\tau(x)) \in \partial X'$ , con lo cual  $\tau^*(\partial X) \subset \partial X'$ . La composición de morfismos  $(\pi'\tau) = \tau^* \circ \pi$ , junto con el hecho de que  $\pi$  es sobreyectiva, garantiza que  $\tau^*$  es un morfismo. Contando grados resulta inyectivo, y razonando sobre la inversa de  $\tau$  se llega a la conclusión de que  $\tau^*$  es isomorfismo. ■

La proposición anterior sugiere que no es posible levantar de forma única un isomorfismo  $\tau : S/G \rightarrow S/G'$  entre los cocientes a un automorfismo de la superficie de partida  $S$ . Si existe un automorfismo  $\tilde{\tau}$  en  $S$  que satisface la condición  $\pi'\tilde{\tau} = \tau\pi$ , entonces para todo  $g \in G$  y  $g' \in G'$  se verifica

$$\pi'(g'\tilde{\tau}g) = \pi'\tilde{\tau}g = \tau\pi g = \tau\pi$$

con lo cual todo automorfismo de la forma  $g'\tilde{\tau}g$  satisface la misma condición. Más aun, aunque los cocientes sean isomorfos, dicha función  $\tilde{\tau}$  puede no existir [11, p. 252]. Para poder obtener resultados en este sentido serán necesarias hipótesis adicionales, como veremos más adelante.

## 1.6 Clasificación de superficies de Klein compactas

La proyección  $f : S_c \rightarrow S$  definida en (1.5.3) es una aplicación continua y abierta. En consecuencia,  $S_c$  es compacta si y solo si  $S$  lo es. El objetivo de esta sección es clasificar las superficies de Klein compactas a partir de sus coberturas dobles de Riemann, que como superficies compactas, orientables y sin borde, quedan determinadas en función de su género.

### 1.6.1 Uniformización de sus coberturas dobles

Por el teorema de uniformización ([11, Tma. 4.19.8]), toda superficie de Riemann compacta  $S_c$  se puede obtener, en función de su género  $p$ , a partir de una de estas tres superficies simplemente conexas —no equivalentes entre sí— como un cociente bajo la acción un subgrupo discreto de automorfismos actuando discontinuamente:

- $p = 0$  (esfera):  $S_c$  es isomorfo a la esfera de Riemann.
- $p = 1$  (toro):  $S_c$  es cociente del plano complejo.
- $p \geq 2$  (toro de  $p$  asas):  $S_c$  es cociente del semiplano superior  $\mathbb{H}$  (o del disco abierto unidad).

Como resultado de ello, aplicando la igualdad (1.5.7) que relaciona los géneros, si una superficie de Klein compacta  $S$  satisface la condición

$$\alpha g + k \geq 3 \tag{1.6.1}$$

donde  $\alpha$  toma el consabido valor de 2 o 1 dependiendo de si  $S$  es orientable o no, se tiene que  $S_c$  es el cociente del semiplano superior  $\mathbb{H}$  bajo la acción de un grupo Fuchsiano  $\Gamma^+$ , es decir, un grupo discreto de automorfismos de  $\mathbb{H}$  que preservan la orientación.

En consecuencia, si se verifica la anterior condición,  $S$  es el cociente del semiplano  $\mathbb{H}$  bajo la acción de un grupo de automorfismos  $\Gamma$  tal que  $\Gamma^+ \subset \Gamma$  y  $[\Gamma : \Gamma^+] = 2$ . Pueden consultarse los detalles en [7, Teorema 1.2.3]), pero de forma intuitiva

$$S \simeq \frac{\mathbb{H}/\Gamma^+}{\langle \sigma \rangle} \simeq \frac{\mathbb{H}/\Gamma^+}{\Gamma/\Gamma^+} \simeq \mathbb{H}/\Gamma.$$

### 1.6.2 Superficies compactas de género algebraico $p < 2$

Puesto que los valores  $g$  y  $k$  representan respectivamente el género y el número de óvalos de  $S$ , son enteros no negativos. Así pues, existe un número finito de combinaciones que no cumplen la condición (1.6.1). Como estos valores, junto con el carácter de orientabilidad de la superficie, determinan salvo homeomorfismo una superficie compacta, podemos obtener una lista completa, salvo homeomorfismo, de aquellas superficies de Klein compactas que tienen a  $\mathbb{H}$  como recubridor universal:

Tabla 1.2: Clasificación de superficies de Klein no isomorfas a ningún  $\mathbb{H}/\Gamma$ .

Tipo	$g$	$k$	Superficie	Cobertura doble
Orientables sin borde (sup. de Riemann)	0		Esfera	Dos esferas
	1		Toro	Dos toros
Orientables con borde	0	1	Disco cerrado	Esfera
	0	2	Anillo	Toro
No orientables	1	0	Plano proyectivo	Esfera
	2	0	Botella de Klein	Toro
	1	1	Banda de Möbius	Toro

La esfera de Riemann tiene una única estructura analítica [11, Teorema 4.17.2], y solo dos clases distintas de conjugación de involuciones antianalíticas: toda involución es conjugada de  $\sigma_1 : z \rightarrow \bar{z}$  o de  $\sigma_2 : z \rightarrow -1/\bar{z}$  [2, Teorema 1.9.4]. En consecuencia el disco ( $\hat{\mathbb{C}}/\langle\sigma_1\rangle$ ) y el plano proyectivo ( $\hat{\mathbb{C}}/\langle\sigma_2\rangle$ ) tienen una única estructura dianalítica cada una.

El caso de las superficies obtenidas del toro no es tan simple, ya que existen infinitas estructuras analíticas en el toro, tantas como retículos no equivalentes en  $\mathbb{C}$ . Podemos caracterizar cada clase de equivalencia de estos retículos mediante un representante  $\Lambda$ , expresado como una par de generadores de la forma  $\{1, \gamma\}$ , donde  $\gamma$  es un número complejo contenido en la región del plano complejo que satisface las desigualdades

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\gamma) \leq \frac{1}{2} \quad y \quad \begin{cases} |\gamma| \geq 1 & \text{si } \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0 \\ |\gamma| > 1 & \text{si } \operatorname{Re}(\gamma) < 0 \end{cases}$$

En particular, este subconjunto de  $\mathbb{C}$  es una región fundamental del grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  actuando en el semiplano superior.

No obstante, no todas estas estructuras analíticas admiten una involución antianalítica. Estudiando las condiciones necesarias para que dicha involución exista, resulta que  $\gamma$  debe encontrarse en la frontera de la porción de esta región contenida en el semiplano  $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$ . Estudiando los cinco casos posibles, es posible elaborar una lista completa de 13 familias de involuciones, que representan otras tanta estructuras dianalíticas en el anillo (3), la botella de Klein (3) y la banda de Möbius (7) [2, Teorema 1.9.8].

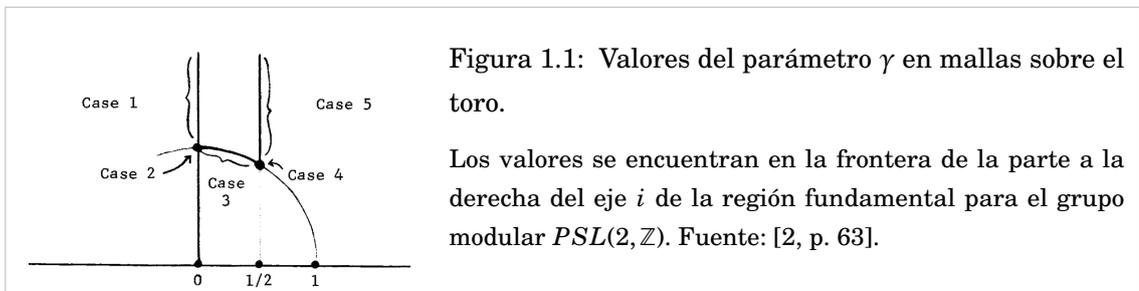


Figura 1.1: Valores del parámetro  $\gamma$  en mallas sobre el toro.

Los valores se encuentran en la frontera de la parte a la derecha del eje  $i$  de la región fundamental para el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Fuente: [2, p. 63].

## EL SEMIPLANO SUPERIOR COMO SUPERFICIE DE KLEIN

Como ya hemos comentado, se puede dotar a cualquier abierto en  $U \subset \mathbb{C}$  de una estructura dianalítica mediante la carta trivial  $(U, id|_U)$ . Nuestro objetivo será determinar el grupo de automorfismos del semiplano superior  $\mathbb{H}$  como superficie de Klein sin borde, y no solo aquellos que preservan su estructura analítica como superficie de Riemann (que también lo es pues es orientable).

### 2.1 Automorfismos de $\mathbb{H}$

#### 2.1.1 Biyecciones dianalíticas del semiplano superior

Vamos a definir un conjunto  $\Omega$  de transformaciones de la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . Para ello consideramos las matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.1.1)$$

tales que el valor absoluto de su determinante es la unidad. A cada una de estas matrices le asignamos una función biyectiva  $f_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  según la regla siguiente

$$i) z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{si } \det A = 1 \quad (2.1.2)$$

$$ii) z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{si } \det A = -1 \quad (2.1.3)$$

donde las imágenes y preimágenes del punto del infinito se definen a la manera usual.

Las matrices que hemos descrito forman el grupo  $PGL(2, \mathbb{R})$ , cociente del grupo general lineal  $GL(2, \mathbb{R})$  por su centro, formado por todas las matrices escalares  $\lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Las del tipo  $i$  forman

un subgrupo normal de índice 2, denotado  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Resulta obvio que matrices diferentes determinan funciones diferentes. El conjunto  $\Omega$  se define como

$$\Omega = \{ f_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid A \in PGL(2, \mathbb{R}) \} \quad (2.1.4)$$

siendo  $f_A$  del modo descrito anteriormente según el valor del determinante de  $A$ .

Las transformaciones del tipo  $i$  son analíticas, mientras que las del tipo  $ii$  son antianalíticas. Por tanto, todas las funciones de  $\Omega$  son dianalíticas. Ambos tipos de funciones llevan biyectivamente el semiplano superior en el semiplano superior, y los reales extendidos  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  en los reales extendidos. En adelante solo consideraremos la restricción al semiplano superior  $\mathbb{H}$ , pero nos tomaremos la libertad de utilizar su extensión natural a la esfera de Riemann cuando sea conveniente.

Toda transformación del tipo  $ii$  es combinación de una transformación de Möbius (analítica) con la reflexión  $\varkappa : z \mapsto \bar{z}$ . Además, estas dos funciones conmutan, debido a que los coeficientes son todos reales:

$$f = \tilde{f} \circ \varkappa = \varkappa \circ \tilde{f}. \quad (2.1.5)$$

Nos referiremos a esta  $\tilde{f}$  como la función analítica asociada a  $f$ . Nótese que no es una biyección del semiplano superior, pues lo lleva en el inferior, pero sigue siendo una transformación de Möbius que preserva el conjunto de los reales extendidos —que denotaremos por  $\hat{\mathbb{R}}$ —, al igual que hace  $\varkappa$ .

### 2.1.2 Representación matricial

A la hora de probar algunas propiedades de estas funciones, resulta útil representarlas en forma de coordenadas homogéneas [1, p.77]. Si  $f$  es analítica, llamando  $z = z_1/z_2$ , y  $f(z) = w = w_1/w_2$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Se sigue inmediatamente que la composición de dos funciones analíticas es  $f_A \circ f_B = f_{AB}$ . En el caso de que alguno de los factores sea una función antianalítica, digamos  $f_B$ , entonces

$$f_A \circ f_B = f_A \circ \tilde{f}_B \circ \varkappa = \tilde{f}_{AB} \circ \varkappa = f_{AB}. \quad (2.1.7)$$

Por cada función antianalítica en la composición habrá un determinante de valor  $-1$  y una función  $\varkappa$ , por lo que al final y puesto que  $\varkappa^2 = id$ , se tendrá una expresión con  $\varkappa$  si y solo si el determinante de la matriz producto es negativo, lo que garantiza la consistencia.

Nótese que la matriz de una función es única salvo producto por una constante real no nula. Sin embargo, de entre todas las matrices equivalentes en este sentido, solo dos —opuesta la una de la otra— tienen determinante de valor absoluto la unidad. Estas dos matrices tienen trazas de

igual valor absoluto y signo opuesto. En adelante nos tomaremos la libertad de escribir  $\det f$  y  $\operatorname{tr} f$  para referirnos al determinante y al valor absoluto de la traza de cualquiera de estas dos matrices de coeficientes de  $f$ .

En ocasiones emplearemos matrices con  $|\det A| \neq 1$ , en cuyo caso estaremos haciendo referencia implícitamente a la matriz

$$\frac{1}{\sqrt{|ad-bc|}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.1.8)$$

convenientemente normalizada. En tal caso, se verifica que

$$\frac{(\operatorname{tr} A)^2}{\det A} = \frac{(\operatorname{tr} f)^2}{\det f}.$$

### 2.1.3 Automorfismos del semiplano superior

Las funciones que hemos descrito son biyecciones de  $\mathbb{H}$  en sí mismo, y forman un subgrupo de  $\operatorname{Biy}(\mathbb{H})$ , pues no resulta difícil comprobar que  $\Omega$  es cerrado bajo la composición de funciones y la inversión. Además, si asignamos el signo  $+$  a las del tipo  $i$  y  $-$  a las del tipo  $ii$ , la composición de funciones verifica la regla de signos del producto. Ello nos lleva a clasificar las primeras como *pares* y a las segundas como *impares*. En particular, las funciones del tipo  $i$  forman un subgrupo normal de índice 2 que denotaremos por  $\Omega^+$ .

Todas estas funciones son morfismos de la superficie de Klein  $\mathbb{H}$  en sí misma: resulta obvio que los del tipo  $i$  cumplen la condición trivialmente, pues cada  $f \in \Omega^+$  es la propia función analítica  $F$  que hace conmutativo el diagrama 1.3.2. Las del tipo  $ii$  son antianalíticas, y por tanto se descomponen como  $f = \varkappa \circ \bar{f}$ , con  $\bar{f} : \mathbb{H} \rightarrow \bar{\mathbb{H}} \subset \mathbb{C}$  analítica. No obstante, la función  $\varkappa$  restringida al semiplano inferior es idéntica a la función de plegado, por lo que en este caso es esta  $\bar{f}$  la función analítica deseada.

El recíproco también es cierto: el conjunto  $\Omega$  contiene todos los automorfismos de  $\mathbb{H}$  [7, p. 9]. En consecuencia:

**Teorema 2.1.3.1.**  $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \operatorname{PGL}(2, \mathbb{R})$ .

### 2.1.4 Relación con la métrica hiperbólica

La distancia hiperbólica  $\rho$  en  $\mathbb{H}$ , respecto de la carta estándar  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene definida por la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (2.1.9)$$

Respecto de esta métrica, las transformaciones de  $\Omega$  son isometrías, pues preservan las distancias entre puntos. Es decir, dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ , y dado  $f \in \Omega$ :

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(f(z_1), f(z_2)). \quad (2.1.10)$$

De hecho, el conjunto  $\Omega$  contiene todas las isometrías de  $\mathbb{H}$  (véase [3, Teorema 7.4.1]), es decir

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H}). \quad (2.1.11)$$

Respecto de esta métrica, las geodésicas son semicircunferencias con centro en el eje real, o semirectas perpendiculares a él, en su versión degenerada. Por analogía con el plano euclídeo nos referimos a ellas como rectas hiperbólicas o  $\mathbb{H}$ -rectas.

Las transformaciones de  $\Omega$  transforman  $\mathbb{H}$ -rectas en  $\mathbb{H}$ -rectas, pues la reflexión  $\varkappa$  y las transformaciones de Möbius preservan el conjunto de circunferencias y rectas ([1, Cap.3, Teorema 14]). No solo eso, sino que el conjunto  $\Omega^+$  —y por tanto  $\Omega$ — actúa transitivamente en dicho conjunto [11, Teorema 5.3.4].

Por otro lado, el lugar geométrico de los puntos equidistantes (por la métrica hiperbólica) de uno dado resulta ser una circunferencia euclídea. Como resultado, el conjunto de discos hiperbólicos abiertos en la topología inducida por la métrica hiperbólica, y el de los discos abiertos en la topología inducida por la métrica euclídea, coinciden. En consecuencia [11, Teorema 5.4.5]

**Teorema 2.1.4.1.** *La topología inducida por la métrica hiperbólica coincide con la topología usual.*

## 2.2 Clasificación de los automorfismos

### 2.2.1 Puntos fijos

En adelante clasificaremos todos los automorfismos distintos de la identidad en función de sus puntos fijos, considerados como biyecciones de la esfera de Riemann en sí misma. El número de puntos fijos de una transformación  $f_A$ , en la que los coeficientes vienen dados en forma de una matriz  $A$ , dependen del signo del determinante y del valor absoluto de la traza de esta matriz  $A$ .

En primer lugar,  $f_A(\infty) = a/c$ . Por tanto,  $f_A$  deja fijo el punto del infinito si y solo si  $c = 0$ .

Supongamos que  $f_A$  es del tipo  $i$  ( $\det A = +1$ ), entonces:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Si  $c \neq 0$ , los puntos fijos satisfacen una ecuación de segundo grado, y por tanto su número depende del discriminante

$$(d - a)^2 + 4bc = d^2 - 2ad + a^2 + 4ad - 4 = (a + d)^2 - 4. \quad (2.2.1)$$

En consecuencia, existirán dos puntos fijos —complejos conjugados—, uno real o dos reales distintos, según sea  $(\text{tr } A)^2$  menor, igual o mayor que cuatro. A estas clases de transformaciones se las denomina *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas* respectivamente.

Si por el contrario  $c = 0$ , entonces  $a \neq 0$ , por lo que podemos multiplicar el numerador y el denominador por  $a$  para obtener que  $f_A(z) = a^2z + ab$ , con lo cual  $z$  es un punto fijo si  $z = ab/(1 - a^2)$ . Entonces caben tres posibilidades:

- Si  $a \neq \pm 1$  entonces hay un segundo punto fijo real, y  $f_A$  es hiperbólica.
- Si  $b = 0$  y  $|a| = 1$  entonces  $f_A$  es la identidad.
- Si  $b \neq 0$  y  $|a| = 1$  entonces  $\infty$  es el único punto fijo y  $f_A$  es parabólica.

Si  $f_A$  es del tipo *ii* ( $\det A = -1$ ), entonces los puntos fijos verifican

$$z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \implies c(x^2 + y^2) + d(x + iy) - a(x - iy) - b = 0$$

con lo cual

$$c(x^2 + y^2) + (d - a)x - b = 0, \quad (d + a)y = 0. \quad (2.2.2)$$

La primera de las dos ecuaciones representa una circunferencia  $\mathcal{C}$  con centro en el eje real (o una recta perpendicular a él, si  $c = 0$ ). Si la traza de  $A$  es nula, todos los puntos de  $\mathcal{C}$  son fijos. De lo contrario, debe ser  $y = 0$ , y como la ecuación resultante para  $x$  tiene siempre discriminante positivo existen dos soluciones distintas, que son los puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  con el eje real.

A las de la primera clase las llamaremos *reflexiones*. En cuanto a las de la segunda, si componemos una función  $f$  de esta última clase con una reflexión  $\rho$  respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}$ , obtenemos una función analítica  $h$  con dos puntos fijos en  $\hat{\mathbb{R}}$ , y por tanto hiperbólica. En consecuencia, dicha función  $f$  es composición de  $\rho \circ h$ , para cierta reflexión  $\rho$ . Recíprocamente, si  $f$  es composición de una hiperbólica con una reflexión respecto de la  $\mathbb{H}$ -recta que une sus puntos fijos, obtenemos una transformación impar con dos puntos fijos, que denominaremos *reflexión con deslizamiento*.

Resumimos todo lo que hemos discutido hasta ahora en la siguiente clasificación:

Tabla 2.1: Tipos de isometrías y sus puntos fijos.

Tipo	$\det f$	$\text{tr}^2 f$	Puntos fijos
Elíptico	+1	< 4	$\{\omega, \bar{\omega}   \omega \notin \mathbb{R}\}$
Parabólico	+1	= 4	$r \in \hat{\mathbb{R}}$
Hiperbólico	+1	> 4	$r_1, r_2 \in \hat{\mathbb{R}}$
Reflexión con deslizamiento	-1	$\neq 0$	$r_1, r_2 \in \hat{\mathbb{R}}$
Reflexión	-1	= 0	$\mathbb{H}$ -recta

Los conjuntos de puntos fijos de las reflexiones son circunferencias completas con centro en el eje real (incluyendo los puntos de coordenada imaginaria no positiva) o rectas perpendiculares al eje real, no solo la  $\mathbb{H}$ -recta contenida en el semiplano superior, aunque será solo esta parte la que nos interese en adelante.

### 2.2.2 Clases de conjugación

La representación matricial nos proporciona fácilmente un resultado acerca de los elementos conjugados de un automorfismo  $f$ .

**Proposición 2.2.2.1.** Sean dos transformaciones  $f_1, f_2 \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ . Si son conjugadas, entonces  $\det f_1 = \det f_2$  y  $\text{tr}^2 f_1 = \text{tr}^2 f_2$ .

*Demostración.* Puesto que  $f_1$  es conjugada de  $f_2$ , existe un elemento  $g$  en  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  tal que  $f_1 = g^{-1} \circ f_2 \circ g$ . Entonces

$$\begin{aligned} \det f_1 &= \det (g^{-1} \circ f_2 \circ g) = \det g^{-1} \cdot \det f_2 \cdot \det g = \det f_2 \\ \text{tr}^2 f_1 &= \text{tr}^2 (g^{-1} \circ f_2 \circ g) = \text{tr}^2 (f_2 \circ g^{-1} \circ g) = \text{tr}^2 f_2. \end{aligned}$$

La segunda de las relaciones se debe a que si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas, entonces  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  [15, p.256]. ■

Se sigue que si dos elementos son conjugados entonces son del mismo tipo, pues este depende únicamente del determinante y del cuadrado de la traza.

Para estudiar las transformaciones que preservan la orientación, partiremos de las clases de conjugación en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , tratadas por ejemplo en [11, secc. 5.2]. Sin embargo, son necesarios ciertos ajustes desde el momento en que se permite la conjugación por elementos que invierten la orientación. Por tanto, ciertas clases que allí son distintas aquí serán la misma:

- Las transformaciones parabólicas son conjugadas de  $z \mapsto z + 1$  o bien de  $z \mapsto z - 1$  en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Sin embargo una es conjugada de otra por  $z \mapsto -\bar{z}$ , por lo que la clase de conjugación en  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  de los elementos parabólicos es única.
- Las transformaciones hiperbólicas son conjugadas de  $U_\lambda : z \mapsto \lambda z$  para algún  $\lambda > 1$ . El único modo de que  $U_\lambda$  sea conjugada de  $U_\mu$  es que  $\mu = \lambda$  o bien  $\mu = 1/\lambda < 1$ , al igual que en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Merece la pena recordar que en estos dos casos, y solo en estos dos,  $\text{tr} U_\lambda = \text{tr} U_\mu$ .
- Una transformación elíptica  $T$  es conjugada en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  de otra  $W$ , con punto fijo  $i$ , que verifica

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i} \quad (2.2.3)$$

para cierto  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Es decir, en el disco unidad (bajo la equivalencia conforme  $z' = \frac{z-i}{z+i}$ ) representa una rotación de ángulo  $\theta$ . En este caso, sin embargo, una rotación de ángulo  $\theta$  y otra de ángulo  $-\theta$  son conjugadas por una reflexión, y por tanto, hay una clase de conjugación por cada  $\theta \in (0, \pi]$ , como veremos más adelante.

Para el caso de las transformaciones que invierten la orientación:

- Si  $f$  es una reflexión, queda determinada por una  $\mathbb{H}$ -recta  $r$ , con extremos  $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$ . Puesto que  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es doblemente transitivo en  $\hat{\mathbb{R}}$ ,  $f$  es conjugado de la reflexión  $\rho_0$  respecto del eje imaginario. Por tanto existe una sola clase de conjugación de reflexiones.

- Si  $f$  es una reflexión con deslizamiento entonces es composición  $f = \rho \circ h$ , con  $\rho$  reflexión respecto de la recta que une sus puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $h$  es hiperbólica con estos mismos puntos fijos. Entonces

$$f' = g \circ f \circ g^{-1} = g \circ \rho \circ g^{-1} \circ g \circ h \circ g^{-1} = \rho_0 \circ U_\lambda \quad (2.2.4)$$

para la reflexión elemental  $\rho_0 : z \mapsto -\bar{z}$  y cierto  $\lambda > 1$ , siendo  $g$  la transformación que lleva 0 en  $\alpha$  e  $\infty$  en  $\beta$ . Por tanto  $f$  es conjugada de  $\bar{U}_\lambda : z \mapsto -\lambda\bar{z}$ , para algún  $\lambda > 1$ . La misma consideración sobre la traza que hicimos para el caso hiperbólico es aplicable aquí.

### 2.2.3 Elementos elípticos

Veamos ahora más en detalle cómo podemos obtener una forma simplificada para los elementos elípticos.

Sea  $T \in PGL(2, \mathbb{R})$  un elemento elíptico, con punto fijo  $\omega \in \mathbb{H}$ . Considerado como una transformación de Möbius de la esfera de Riemann, existe otro punto fijo conjugado de este,  $\bar{\omega}$ . Como  $PSL(2, \mathbb{R})$  es transitivo en  $\mathbb{H}$ , existe una transformación  $S$  que lleva  $\omega$  en  $i$ . Como además sus coeficientes son reales,  $S(-i) = S(\bar{i}) = \overline{S(i)} = \bar{\omega}$ .

La transformación  $W = STS^{-1}$  es conjugada de  $S$  (y por tanto elíptica) y tiene puntos fijos  $\{i, -i\}$ . Recordemos que la equivalencia conforme  $J(z) = \frac{z-i}{z+i}$  entre el semiplano superior y la bola abierta unidad lleva  $i$  en 0 y  $-i$  en  $\infty$ . La composición  $JWJ^{-1}$  es una aplicación hiperbólica con puntos fijos  $\{0, \infty\}$ , luego es de la forma  $z \mapsto \lambda z$ , para cierto  $\lambda$  complejo. Por tanto

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = \lambda \frac{z - i}{z + i}$$

y como  $W$  deja invariante  $\hat{\mathbb{R}}$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple  $W(\alpha) \in \mathbb{R}$ . En consecuencia, por simetría

$$\left| \frac{W(\alpha) - i}{W(\alpha) + i} \right| = \left| \frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right| = 1$$

con lo cual  $\lambda = e^{i\theta}$  para cierto  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Se tiene entonces  $JWJ^{-1} = U_{e^{i\theta}}$ , es decir,  $W = J^{-1}U_{e^{i\theta}}J$ .

La matriz para  $W$  es entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -ie^{i\theta} \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\theta} & i - ie^{i\theta} \\ ie^{i\theta} - i & 1 + e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta + i - i \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta - i + i \cos\theta & 1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que esta matriz es equivalente a otra con coeficientes reales, por lo que existe un factor no nulo  $\alpha$  que multiplicado por cada entrada nos da valores reales. Este factor resulta ser

$$\alpha = \cos(\theta/2) - i \operatorname{sen}(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}. \quad (2.2.5)$$

Teniendo en cuenta que

$$1 + \cos\theta = (\sqrt{1 + \cos\theta})^2 = 2\cos^2(\theta/2)$$

$$1 - \cos\theta = (\sqrt{1 - \cos\theta})^2 = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}{2} &= (\cos(\theta/2) - i \operatorname{sen}(\theta/2)) (\cos^2(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)) \\ &= \cos^3(\theta/2) + \operatorname{sen}^2(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ &= \cos(\theta/2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\operatorname{sen}\theta + i - i \cos\theta}{2} &= (\cos(\theta/2) - i \operatorname{sen}(\theta/2)) (\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}^2(\theta/2)) \\ &= \operatorname{sen}(\theta/2)\cos^2(\theta/2) + \operatorname{sen}^3(\theta/2) \\ &= \operatorname{sen}(\theta/2). \end{aligned}$$

con lo cual la matriz de  $W$  con coeficientes reales es

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \operatorname{sen}(\theta/2) \\ -\operatorname{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Recordemos ahora que en el disco unidad, una rotación de ángulo  $-\theta$  es conjugada de la rotación de ángulo  $\theta$ , por una reflexión respecto del eje imaginario. Trasladando por  $J$  estas transformaciones al semiplano superior, vemos que en efecto

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{-\theta}{2} & \operatorname{sen} \frac{-\theta}{2} \\ -\operatorname{sen} \frac{-\theta}{2} & \cos \frac{-\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

También podemos observar que una rotación de ángulo  $2\pi + \theta$  en el disco unidad (equivalente allí a una rotación por  $\theta$ ) se traslada en una transformación en  $\mathbb{H}$  con matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi + \theta}{2} & \operatorname{sen} \frac{2\pi + \theta}{2} \\ -\operatorname{sen} \frac{2\pi + \theta}{2} & \cos \frac{2\pi + \theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

que es la matriz para  $\theta$  multiplicada por un factor  $-1$ , y por tanto representa la misma transformación, como cabía esperar.

### 2.2.4 Formas canónicas

En la tabla siguiente indicamos las formas de Jordan reales de las expresiones matriciales del representante canónico de cada distinta clase de conjugación, junto con la identidad:

Tabla 2.2: Clases de conjugación en  $Aut(\mathbb{H})$  y sus formas de Jordan reales.

$f$	Forma de Jordan	Parámetro	$\det f$	$\text{tr}^2 f$	tipo
$z \mapsto z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	—	+1	4	Identidad
$z \mapsto -\bar{z}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	—	-1	0	Reflexión
$z \mapsto \lambda^2 z$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$	$\lambda > 1$	+1	$(\lambda + \frac{1}{\lambda})^2 > 4$	Hiperbólica
$z \mapsto -\lambda^2 \bar{z}$	$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$	$\lambda > 1$	-1	$(-\lambda + \frac{1}{\lambda})^2 \neq 0$	Reflexión con desl.
$z \mapsto z + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	—	+1	4	Parabólica
$z' \mapsto e^{\theta i} z'$	$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$	$\theta \in (0, \pi)$	+1	$4\cos^2 \frac{\theta}{2} < 4$	Elíptica

Observando la tabla, comprobamos que los valores  $\det f$  y  $\text{tr}^2 f$  determinan la clase de conjugación de una transformación  $f$ . En consecuencia, dadas dos transformaciones  $f_1$  y  $f_2$ , si  $\det f_1 = \det f_2$  y  $\text{tr}^2 f_1 = \text{tr}^2 f_2$  entonces  $f_1$  y  $f_2$  son conjugadas. Por tanto, el recíproco de la Proposición 2.2.2.1 también es cierto:

**Teorema 2.2.4.1.** *Dos transformaciones  $f_1$  y  $f_2$  son conjugadas en  $Aut(\mathbb{H})$  si y solo si*

$$\det f_1 = \det f_2 \quad \text{y} \quad \text{tr}^2 f_1 = \text{tr}^2 f_2.$$

También se observa que hay una analogía con las transformaciones conformes del plano euclídeo, donde las parabólicas tienen forma de traslaciones, las elípticas de rotaciones y las hiperbólicas de homotecias. Las reflexiones con deslizamiento son aquí composición de una reflexión con una hiperbólica, pero lo que sí se mantiene es que la  $\mathbb{H}$ -recta que une los puntos fijos de esta última es a su vez el eje de la reflexión. Diremos que esta  $\mathbb{H}$ -recta es la *directriz* de la transformación hiperbólica.

### 2.2.5 Geodésicas invariantes

Además de la discusión sobre los puntos fijos de cada tipo de transformación, es interesante determinar qué geodésicas dejan invariantes. Puesto que cada  $\mathbb{H}$ -recta está completamente determinada por sus dos puntos extremos en  $\hat{\mathbb{R}}$ , se tiene que las transformaciones hiperbólicas y las reflexiones con deslizamiento dejan invariante la  $\mathbb{H}$ -recta que une sus dos puntos fijos. Las

reflexiones además de dejar invariante su eje, dejan fijos todos sus puntos, lo cual no ocurre con los otros dos tipos anteriores.

Por otra parte, toda transformación que deja invariante una  $\mathbb{H}$ -recta, o bien deja fijos sus extremos o bien los permuta. En el disco unidad, si una rotación deja fijos dos puntos de la frontera del disco entonces es la identidad. Por otro lado, una rotación  $f$  permuta dos puntos de la frontera si y solo si es de ángulo  $\pi$  (es decir, de orden 2). En tal caso  $f$  permuta todas las parejas de puntos diametralmente opuestos. En consecuencia, los elementos elípticos de orden 2 dejan invariantes todas las  $\mathbb{H}$ -recta que pasan por su punto fijo. Cualquier otro elemento elíptico no deja invariante ninguna  $\mathbb{H}$ -recta.

Finalmente, todo elemento parabólico  $g$  es conjugado de  $\tau_0 : z \mapsto z + 1$ , que no permuta ninguna pareja de puntos en  $\hat{\mathbb{R}}$ . Entonces ninguna transformación parabólica deja invariante ninguna  $\mathbb{H}$ -recta  $\mathcal{R}$ , pues de lo contrario  $\tau_0$  dejaría invariante  $f^{-1}(\mathcal{R})$  para cierta  $f$  tal que  $f \circ \tau_0 \circ f^{-1} = g$ .

### 2.2.6 Interpretación geométrica

Demostraremos ahora el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.6.1.** *Toda transformación  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  se puede expresar como composición de a lo sumo tres reflexiones.*

*Demostración.* Que el producto de dos reflexiones distintas es un elemento elíptico, parabólico o hiperbólico es obvio por simple observación de la paridad. Demostraremos entonces que todo elemento de tipo par es producto de dos reflexiones. Para ello basta demostrarlo para un representante de cada clase de conjugación, pues si  $g \in [f]$ , entonces  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ , con lo cual si  $f = \rho_2 \circ \rho_1$ , entonces

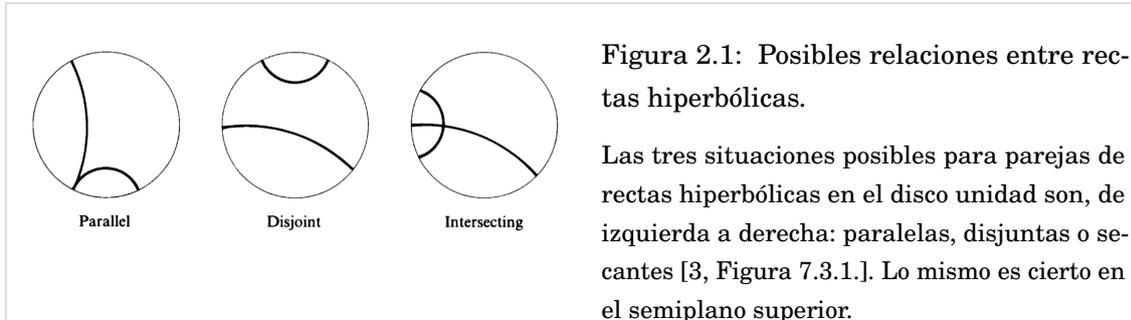
$$g = h^{-1} \circ \rho_2 \circ h \circ h^{-1} \circ \rho_1 \circ h = \rho'_2 \circ \rho'_1.$$

Consideraremos entonces los representantes canónicos de las diferentes clases de conjugación:

- $z \mapsto z + 1$  es una traslación euclídea, y por tanto composición de dos reflexiones de ejes verticales separados entre sí por un valor —que no una distancia—  $\alpha = 1/2$ .
- $z' \mapsto e^{2\theta i} z'$  (en el disco unidad) es una rotación euclídea, y por tanto composición de dos reflexiones que tienen como ejes dos diámetros que forman un ángulo  $\theta$ .
- $z \mapsto \lambda z$  es composición de dos reflexiones por circunferencias con centro en el origen y radios  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \sqrt{\lambda}$  (en particular, son perpendiculares a la directriz de la transformación hiperbólica).

En el primer caso las dos  $\mathbb{H}$ -rectas son *paralelas* (un punto común en  $\hat{\mathbb{R}}$ ), en el segundo son *secantes*, y en el tercero son *disjuntas*. Lo mismo es también cierto para cualquier transformación

conjugada de estas. Adoptamos aquí la terminología de Beardon [3], donde se dan los detalles para obtener cada tipo de transformación a partir de *lápices de transformaciones*.



Finalmente, el representante canónico de las reflexiones con deslizamiento es producto de tres reflexiones: dos de ellas provienen de su componente hiperbólica, y por tanto los ejes de reflexión de éstas son perpendiculares a su directriz, que es el eje de la tercera reflexión. ■



## GRUPOS NEC

A continuación estudiaremos los grupos de automorfismos del plano superior cuyo espacio de órbitas es una superficie de Klein compacta. Estos grupos, que son discretos, se denominan grupos N.E.C., abreviatura en inglés de *non-Euclidean crystallographic groups*, o grupos cristalográficos no euclidianos.

### 3.1 La topología de $Aut(\mathbb{H})$

El grupo  $Aut(\mathbb{H})$  es un grupo topológico, cuya topología proviene de los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  de la matriz asociada a cada automorfismo. Si realizamos la identificación

$$GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \quad (3.1.1)$$

podemos inducir la topología usual de  $\mathbb{R}^4$  en  $GL(2, \mathbb{R})$ , y de ahí mediante el cociente

$$q : GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2, \mathbb{R}) / \{\lambda I \mid \lambda \neq 0\} = PGL(2, \mathbb{R}) \simeq Aut(\mathbb{H}) \quad (3.1.2)$$

trasladarla a nuestro grupo de automorfismos. Puesto que este cociente es igual a  $GL(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ , el cociente de  $GL(2, \mathbb{R})$  bajo la acción de multiplicación por la izquierda con el grupo multiplicativo de los reales —que inducen homeomorfismos  $r : A \mapsto r \cdot A$ —, la aplicación  $q$  es abierta (véase la proposición 1.4.1.1).

Se deduce que  $Aut(\mathbb{H})$  tiene dos componentes conexas, pues  $A \mapsto \det A$  es continua y

$$Aut(\mathbb{H}) = \det^{-1}(\{1\}) \cup \det^{-1}(\{-1\})$$

con lo que  $Aut^+(\mathbb{H}) = \det^{-1}(\{1\})$  y  $Aut^-(\mathbb{H}) = \det^{-1}(\{-1\})$  son ambos cerrados y abiertos.

Si  $\{f_n\} \subset \text{Aut}(\mathbb{H})$  es una sucesión de automorfismos distintos que converge a  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , entonces  $\lim_n \{f_n(z)\} = f(z)$  para todo  $z$ . Ello es consecuencia ([7, Teorema 0.1.15]) de la continuidad de la aplicación evaluación

$$e_V : \text{Aut}(\mathbb{H}) \times \mathbb{H} : (g, z) \mapsto g(z). \quad (3.1.3)$$

Diremos que un subgrupo  $G \subset \text{Aut}(\mathbb{H})$  es *discreto* si su topología como subespacio es discreta. En tal caso, todo subconjunto de  $G$  es a la vez abierto y cerrado en  $G$ , y compacto es sinónimo de finito.

### 3.1.1 Subgrupos discretos de $\text{Aut}(\mathbb{H})$

Nuestro objetivo es probar que la acción de un grupo discreto de  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  es propiamente discontinua en  $\mathbb{H}$ . Para ello necesitaremos varios resultados que adaptaremos de [11, §5.6].

**Proposición 3.1.1.1.** *Sean  $z$  un punto y  $K$  un compacto de  $\mathbb{H}$ . Entonces es compacto*

$$E = \{g \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid g(z) \in K\}.$$

*Demostración.* Probaremos que

$$E' = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid f_{q(A)}(z) \in K\}$$

es cerrado, siendo  $q$  la proyección de  $GL(2, \mathbb{R})$  en el cerrado  $PGL(2, \mathbb{R})$  definida en 3.1.2. La composición de esta con la evaluación en  $z$

$$\beta = e_V(z) \circ q : GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H} : A \mapsto q(A)(z)$$

es composición de aplicaciones continuas, y por tanto  $E' = \beta^{-1}(K)$  es cerrado. Como la proyección  $q$  es una aplicación abierta, ello implica que  $E = q(E')$  es cerrado en  $PGL(2, \mathbb{R})$ , luego también lo es en  $GL(2, \mathbb{R})$ .

En segundo lugar,  $K$  es compacto, por lo que existen reales  $M, N > 0$  tales que para toda  $A \in E$

$$N < \text{Im}(f_A(z)) = \left| \text{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) \right| = \frac{\text{Im}(z)}{(cz + d)^2}$$

$$M > |f_A(z)| = \left| \frac{az + b}{cz + d} \right|$$

con lo cual

$$|cz + d| < \sqrt{\frac{\text{Im}(z)}{N}}, \quad |az + b| < M \sqrt{\frac{\text{Im}(z)}{N}}$$

de donde se deduce que los números  $a, b, c, d$  están acotados y por tanto  $E$  también. Considerando  $E$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , es cerrado y acotado, y por tanto compacto. ■

**Corolario 3.1.1.2.** *Con la misma notación de antes, si  $G \in Aut(\mathbb{H})$  es discreto, entonces  $\{g \in G \mid g(z) \in K\}$  es finito.*

**Corolario 3.1.1.3.** *Si  $G \in Aut(\mathbb{H})$  es discreto, entonces el estabilizador  $G_z = \{g \in G \mid g(z) = z\}$  es finito para todo  $z \in \mathbb{H}$ .*

En particular, una transformación elíptica  $f$  tiene un punto fijo  $z$  en  $\mathbb{H}$ . Se deduce que el subgrupo generado por  $f$  es un subgrupo del estabilizador de  $z$ . En consecuencia:

**Corolario 3.1.1.4.** *Si  $G$  es discreto y  $f \in G$  es elíptico, el orden de  $f$  es finito.*

Dado que todo elíptico es conformalmente equivalente a una rotación en el disco unidad de ángulo  $\theta$ , se deduce que el parámetro  $\theta$  es igual a  $2\pi/n$  para cierto entero  $n \geq 2$ .

**Proposición 3.1.1.5.** *Si  $G$  es discreto, ninguna órbita  $O_z$  tiene puntos de acumulación en  $\mathbb{H}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $O_z$  tiene un punto límite  $y \in \mathbb{H}$ . Entonces, toda bola abierta  $U = B(y, \epsilon)$  contiene infinitos puntos de  $O_z$ . Sin embargo, su clausura  $K = \bar{U}$  es compacta, con lo cual

$$\{g \in G \mid g(z) \in K = \bar{U}\}$$

es finito, lo cual es una contradicción. ■

**Proposición 3.1.1.6.**  *$G$  es discreto si y solo si la órbita  $O_z$  es discreta para todo  $z \in \mathbb{H}$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo discreto y sea  $z \in \mathbb{H}$  un punto arbitrario. Dado un radio  $\epsilon > 0$ , la bola cerrada  $K = B(z, \epsilon)$  es compacta, y  $G$  es discreto, de lo cual se deduce que

$$\{g \in G \mid g(z) \in K\}$$

es finito. Por lo tanto  $K$  contiene a lo más un número finito de puntos de la órbita de  $z$ , sean  $\{z_1, \dots, z_k\}$ . Si  $\delta = \min_{i=1, \dots, k} \{\rho(z, z_i)\}$ , se tiene que la bola abierta  $B(z, \delta/2)$  es un abierto que no contiene ningún otro punto de la órbita de  $z$ . En consecuencia, para todo  $z \in \mathbb{H}$ ,  $\{z\}$  es abierto en  $O_z$ .

Recíprocamente, si  $G$  no es discreto, existe una sucesión infinita de transformaciones distintas (y analíticas)  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset G$  que convergen a la identidad. Siendo analíticas, tienen a lo más un punto fijo cada una, de modo que el conjunto de puntos fijos por alguna de ellas es numerable. Entonces es posible encontrar un punto  $z \in \mathbb{H}$  que no queda fijo por ninguna de ellas. En consecuencia  $\{g_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$  es una sucesión de puntos distintos que converge a  $z$ , con lo que  $O_z$  tiene un punto de acumulación, y por tanto no es discreta. ■

### 3.1.2 La acción de un subgrupo discreto

El grupo  $Aut(\mathbb{H})$  está formado por isometrías. Por tanto, en virtud de la proposición 1.4.2.3, la acción de un grupo  $G$  de automorfismos del semiplano superior será propiamente discontinua si y solo si verifica la condición (D1), es decir, que todo punto tiene un entorno  $U$  tal que  $G_U$  es finito. Esta condición se satisface precisamente para los subgrupos discretos que hemos discutido en la sección anterior:

**Proposición 3.1.2.1.** *La acción de un subgrupo  $G \in Aut(\mathbb{H})$  en  $\mathbb{H}$  es propiamente discontinua si y solo si  $G$  es discreto.*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es discreto. Sea un punto  $z \in \mathbb{H}$  y sea una bola abierta  $U_\delta$  de radio  $\delta$  centrada en  $z$ . El conjunto  $G_\delta = G(U_\delta, U_\delta)$  nunca es vacío pues  $G_z \subset G_\delta$  para todo  $\delta > 0$ . Si  $g \in G_\delta$  entonces existe un punto  $w \in U_\delta$  tal que  $g(w) \in U_\delta$ . Ahora bien, como ambos puntos están contenidos en una bola de radio  $\delta$

$$\rho(z, g(z)) \leq \rho(z, g(w)) + \rho(g(w), g(z)) = \rho(z, g(w)) + \rho(w, z) < 2\delta.$$

Según vamos haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$ , se tiene que si  $g \in G_\delta$  entonces  $\rho(z_0, g(z_0)) \rightarrow 0$ . Sin embargo, al ser una órbita discreta, existe una bola abierta  $U_\epsilon$  centrada en  $z_0$  de radio  $\epsilon > 0$  que no contiene ningún otro punto de  $O_{z_0}$  distinto del propio  $z_0$ . En consecuencia, para  $\delta < \epsilon/2$  se tiene que

$$g \in G_{\epsilon/2} \implies g(z) = z \implies g \in G_z$$

y por tanto existe un entorno  $U_{\epsilon/2}$  de  $z$  tal que  $G_{U_{\epsilon/2}} = G_z$ , que es finito cuando  $G$  es discreto, con lo cual se cumple la condición (D1). Siendo  $Aut(\mathbb{H})$  un grupo de isometrías, ello implica la condición (D2). Siendo automorfismos, se cumple siempre la condición (D3) (véase la Proposición 1.4.2.4). En consecuencia, la acción es propiamente discontinua.

Supongamos ahora que  $G$  no es discreto. En tal caso existe un  $z \in \mathbb{H}$  para el cual la órbita  $O_z$  no es discreta. Entonces para algún punto  $z'$  de esta órbita todo entorno  $U$  contiene infinitos puntos de  $O_{z'}$ , con lo cual  $G_U$  no puede ser finito. En consecuencia no se cumple la condición (D1) y la acción no es propiamente discontinua. ■

**Corolario 3.1.2.2.** *Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $Aut(\mathbb{H})$ , entonces el cociente  $\mathbb{H}/G$  es una superficie de Klein, con la estructura dianalítica única que hace que la proyección  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/G$  sea un morfismo.*

### 3.1.3 El subgrupo Fuchsiano canónico

Vamos a considerar el subconjunto  $G^+$  de un grupo discreto  $G \subset Aut(\mathbb{H})$ , formado por las transformaciones que preservan la orientación. Dicho conjunto nunca es vacío pues la identidad preserva

la orientación. De hecho es fácil demostrar que  $G^+$  es un subgrupo de  $G$ , y de hecho es Fuchsiano, pues el subgrupo de un grupo discreto es a su vez discreto.

El conjunto  $G^- = G \setminus G^+$  está formado, por eliminación, por los elementos que invierten la orientación. Cabe la posibilidad de que  $G^-$  sea vacío, en cuyo caso el propio  $G$  es Fuchsiano. Supongamos que no es así y que existe en  $G$  un elemento  $g$  que invierte la orientación. Entonces

**Proposición 3.1.3.1.** *Sea  $G \subset Aut(\mathbb{H})$  un grupo discreto. Entonces  $G = G^+$  o  $G = G^+ \cup gG^+$ , para cierto  $g$  que invierte la orientación.*

*Demostración.* Si  $G \setminus G^+ = \emptyset$  entonces  $G = G^+$ . De lo contrario existe un elemento  $g \in G^-$ , que por tanto invierte la orientación, al igual que su inverso  $g^{-1}$ . La clase lateral  $gG^+$  está obviamente contenida en  $G^-$ , pues todos sus elementos invierten la orientación, al ser producto de una transformación par con otra impar. Sea pues  $g' \in G^-$  cualquier otro elemento que invierte la orientación. La composición  $g^{-1}g'$  está en  $G^+$ , por la regla del producto de signos, así que  $g^{-1}g' = h \in G^+$ , para cierto  $h$  que preserva la orientación. Entonces  $g' = gh \in gG^+$ , con lo cual  $G^- \subset gG^+$ . De la igualdad de conjuntos  $G^- = gG^+$  se deduce que  $G = G^+ \cup gG^+$ . ■

En consecuencia, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 3.1.3.2.** *El conjunto de transformaciones de un grupo discreto  $G \subset Aut(\mathbb{H})$  que preservan la orientación es un grupo Fuchsiano de índice 1 o 2 en  $G$ .*

Este subgrupo recibe el nombre de subgrupo Fuchsiano canónico y se denota por  $G^+$ . En particular es siempre un subgrupo normal. Este subgrupo está estrechamente relacionado con la cobertura doble [7, p. 33]:

**Proposición 3.1.3.3.** *Sea  $G \subset Aut(\mathbb{H})$  un grupo discreto y sea  $G^+$  su subgrupo Fuchsiano canónico. Si  $\mathbb{H}/G$  es una superficie de Klein estricta entonces  $\mathbb{H}/G^+$  es isomorfo a su cobertura doble de Riemann.*

### 3.1.4 La métrica inducida

Veamos ahora cómo la distancia en  $\mathbb{H}$  induce una distancia en el cociente  $\mathbb{H}/G$  por un grupo  $G$  discreto. Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{H}$  y sus respectivas órbitas  $O_x, O_y \in \mathbb{H}/G$  se define la distancia

$$d(O_x, O_y) = \rho(x, O_y) = \min_{g \in G} \{ \rho(x, g(y)) \} \quad (3.1.4)$$

donde  $\rho$  es la distancia hiperbólica definida en  $\mathbb{H}$ . Es decir, la distancia entre las órbitas de  $x$  e  $y$  se define como la mínima distancia de  $x$  a cualquier punto de la órbita de  $y$ .

Debemos asegurarnos de que esta distancia está bien definida. Para ello primero probaremos que el mínimo siempre existe: tomamos una bola cerrada  $K$  de radio  $r > 0$  centrada en  $x$ ,

suficientemente grande como para contener puntos de la órbita de  $y$  (en particular siempre podemos tomar una bola de radio  $r = \rho(x, y)$ , pues esta bola contiene al propio  $y$ ). Todo punto de la órbita de  $y$  no contenido en  $K$  está más alejado de  $x$  que cualquiera de los puntos de  $K$ . Esta bola es compacta y por tanto el conjunto

$$E = \{g \in G \mid g(y) \in K\}$$

es finito (si  $G$  es discreto). Entonces la función real  $g \mapsto \rho(x, g(y))$  definida en  $E$  tiene dominio compacto, luego el mínimo se alcanza para algún  $g \in E$ .

Por otro lado, la definición no puede depender del representante  $x$  elegido (que no depende de  $y$  es obvio por la propia definición). Sea otro punto  $x' \neq x \in O_x$ . Entonces  $x' = \gamma x$  para cierto  $\gamma \in G$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \rho(x', O_y) &= \min_{g \in G} \{\rho(x', g(y))\} \\ &= \min_{g \in G} \{\rho(\gamma x, g(y))\} \\ &= \min_{g \in G} \{\rho(\gamma x, \gamma g(y))\} \\ &= \min_{g \in G} \{\rho(x, g(y))\} \\ &= \rho(x, O_y) \end{aligned}$$

donde utilizamos que  $\gamma G = G$ , pues la multiplicación por la izquierda simplemente permuta los elementos del grupo.

Ahora comprobaremos que la función que hemos definido es en efecto una distancia:

- $d(O_x, O_y) = \rho(x', y')$  para ciertos  $x' \in O_x$ ,  $y' \in O_y$ , y por tanto es no negativa. Además  $\rho(x, O_y) = 0 \iff x \in O_y \iff O_x = O_y$ .
- Supongamos que el mínimo  $d(O_x, O_y)$  se alcanza para  $y' = \gamma y$ . Entonces

$$d(O_x, O_y) = \rho(x, y') = \rho(x, \gamma y) = \rho(y, \gamma^{-1}x) \geq d(O_y, O_x).$$

Invirtiendo los roles de  $x$  e  $y$  se obtiene la desigualdad contraria, con lo cual

$$d(O_x, O_y) = d(O_y, O_x).$$

- Para la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(O_x, O_z) &= \min_{g \in G} \{\rho(x, g(z))\} \\ &\leq \min_{g, \gamma \in G} \{\rho(x, \gamma y) + \rho(\gamma y, g(z))\} \\ &\leq \min_{\gamma \in G} \{\rho(x, \gamma y)\} + \min_{g, \gamma \in G} \{\rho(y, \gamma^{-1}g(z))\} \\ &\leq d(O_x, O_y) + d(O_y, O_z). \end{aligned}$$

## 3.2 Regiones fundamentales

Una *región fundamental* para un grupo discreto  $G \subset \text{Aut}(\mathbb{H})$  es un cerrado  $F \subset \mathbb{H}$  que satisface tres condiciones:

1.  $F$  es un  $G$ -recubrimiento:  $\cup_{g \in G} \{gF\} = \mathbb{H}$ .
2.  $F$  es un  $G$ -empaquetado:  $\mathring{F} \cap g\mathring{F} = \emptyset, \forall g \neq 1$ .
3. El área hiperbólica de  $F \setminus \mathring{F}$  es nula.

La primera condición exige que  $F$  contenga al menos un elemento de cada órbita, y la segunda que el interior  $\mathring{F}$  contenga a lo más uno, con lo que el estabilizador de un punto interior es siempre trivial.

El objetivo de definir una región fundamental, es el de simplificar la construcción del cociente  $\mathbb{H}/G$ . Esta región contiene puntos de todas las órbitas, y además uno solo de cada una en su interior. Por tanto, para completar el cociente, basta con identificar apropiadamente los puntos de la frontera que pertenecen a una misma órbita. El espacio resultante será homeomorfo a  $\mathbb{H}/G$ .

### 3.2.1 Regiones de Dirichlet

Para probar que para todo subgrupo discreto existe una región fundamental construiremos expresamente una, llamada *región de Dirichlet* para  $G$  basada en  $p \in \mathbb{H}$ . Únicamente se requiere que el estabilizador de  $p$  sea trivial, pero tal punto siempre existe [7, §0.2.3.]. Definimos

$$F_p = \{z \in \mathbb{H} : \rho(z, p) \leq \rho(g(z), p), \forall g \in G\} \quad (3.2.1)$$

que consiste en la región del plano hiperbólico constituida por los puntos que están más próximos a  $p$  que a cualquier otra de sus imágenes por  $G$ .

**Proposición 3.2.1.1.** *La región de Dirichlet basada en  $p$  es una región fundamental para  $G$ .*

*Demostración.* La frontera de  $F_p$  yace en la unión de las  $\mathbb{H}$ -rectas

$$\{z \in \mathbb{H} : \rho(z, p) = \rho(g(z), p), g \in G\}$$

que son mediatrices de pares de puntos en la órbita de  $p$ . Por tanto  $\partial F_p$  está formado por vértices y aristas que son segmentos de  $\mathbb{H}$ -rectas. En consecuencia el área hiperbólica  $\mu(\partial F_p)$  es nula. Por otro lado,  $F_p$  es intersección de semiespacios cerrados, y por tanto es cerrado y convexo.

Si para un par de puntos  $q_1 \neq q_2 \in F_p$  resulta que  $q_2 = g(q_1)$  para algún  $g \in G$  entonces  $\rho(p, q_1) = \rho(g(p), q_2) \geq \rho(p, q_2)$ . Intercambiando los roles de  $q_1$  y de  $q_2$  se obtiene la desigualdad  $\rho(p, q_2) = \rho(g^{-1}(p), q_1) \geq \rho(p, q_1)$ . Se siguen entonces que

$$\rho(g^{-1}(p), q_1) = \rho(p, q_1) = \rho(p, q_2) = \rho(g(p), q_2)$$

con lo cual  $q_1$  y  $q_2$  están en la frontera de  $F_p$  (y son equidistantes de  $p$ ). En consecuencia, el interior de  $F_p$  contiene a lo más un punto de cada órbita:  $F_p$  es un  $G$ -empaquetado.

Por otro lado, dada una órbita  $O_z$  distinta de  $O_p$ , la distancia  $\rho(p, O_z)$  se alcanza para algún  $z' \in O_z$ . Por tanto tal  $z'$  (que no es necesariamente único) pertenece a  $F_p$ , de donde  $F$  siempre contiene al menos un elemento de cada órbita:  $F_p$  es un  $G$ -recubrimiento. ■

Nótese que todo punto  $q$  de la frontera  $\partial F$  es equidistante de dos o más puntos de la órbita de  $p$ . Entonces solo pueden darse dos casos:

- $q$  equidista de más de dos puntos de  $O_p$ : entonces  $q$  es un vértice de  $F_p$  y de todas las imágenes de  $F_p$  por  $G$  con las que  $\{q\}$  no es disjunto.
- $q$  equidista de exactamente dos puntos de  $O_p$ : entonces  $q$  yace en el interior de la arista común de las regiones de Dirichlet basadas en estos dos puntos.

En cuanto al punto  $p$ , su órbita  $O_p$  es discreta, por lo que toda imagen de  $p$  por  $G$  se encuentra a una distancia mayor que cierto  $\epsilon > 0$ . En consecuencia, existe una bola de centro  $p$  y radio  $\epsilon/2$  enteramente contenida en  $F_p$ , con la consecuencia de que  $p$  es siempre un punto interior a  $F_p$ .

Una región fundamental como la descrita anteriormente, junto con sus imágenes por  $G$ , genera una teselación del plano hiperbólico. Como  $p$  tiene estabilizador trivial, se sigue que para cada  $g \in G$  existe una única región en la teselación que verifica  $F_{g(p)} = g(F_p)$ . Por tanto, podemos identificar cada región de la teselación unívocamente por un elemento del grupo. A la propia región  $F_p$  le corresponde el elemento identidad.

### 3.2.2 Regiones acotadas

Supongamos ahora que la región de Dirichlet  $F_p$  para  $G$  basada en  $p$  es acotada. Puesto que es cerrada por definición, es compacta. Si  $F_p$  es compacto, se tienen las siguientes propiedades adicionales:

1.  $F_p$  tiene intersección no vacía con a lo más un número finito de sus imágenes por  $G$ , que son a su vez compactas.
2.  $F_p$  es un polígono hiperbólico convexo con un número finito de vértices y aristas. En consecuencia,  $F_p$  es homeomorfo a un disco cerrado y  $\partial F_p$  es una curva de Jordan poligonal cerrada.

Nuestro objetivo será ahora etiquetar cada arista de este polígono convexo, identificando aquellas que son congruentes por las transformaciones del grupo. Como veremos, cada etiqueta aparecerá a lo más dos veces. Si identificamos topológicamente aristas con la misma etiqueta obtenemos una superficie compacta con borde. Puede demostrarse que de este modo se obtiene una superficie homeomorfa a una suma conexa de toros o de planos proyectivos, en la que se han eliminado una cantidad finita de discos abiertos [10, §22].

En adelante consideraremos solo grupos discretos de transformaciones cuyas regiones fundamentales sean acotadas. Tales grupos se denominan *grupos cristalográficos no euclídeos* o *grupos NEC*. Denotaremos en general los grupos de este tipo con la letra  $\Gamma$ . Estos grupos tienen la siguiente particularidad:

**Proposición 3.2.2.1.** *Ningún elemento de un grupo NEC es parabólico.*

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  un grupo NEC y  $\Gamma_c$  su subgrupo Fuchsiano canónico. Si  $\Gamma = \Gamma_c$  entonces la región fundamental para  $\Gamma_c$  coincide con la región fundamental  $F$  para  $\Gamma$ , y por tanto es compacta. En otro caso existe un elemento  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_c$  tal que  $F \cup \gamma F$  es una región fundamental para  $\Gamma_c$ , la cual es también compacta. Ello implica que  $\Gamma_c$  no contiene elementos parabólicos [11, Tma. 5.9.9]. Como todo parabólico preserva la orientación, si pertenece a  $\Gamma$  está en  $\Gamma_c$ , lo cual no es posible cuando el espacio de órbitas de  $\Gamma$  es compacto. ■

### 3.2.3 Aristas congruentes

Por definición, la intersección de una región de Dirichlet  $F_p$  para  $\Gamma$  con cualquiera de sus imágenes  $gF_p$  puede contener únicamente puntos de la frontera  $\partial F_p$ . Si  $F_p$  es compacta entonces  $\partial F_p$  está compuesta por una unión finita de segmentos hiperbólicos.

Si un punto  $x \in \partial F_p$  no es un vértice, entonces se encuentra en una arista de  $F_p$ . En tal caso, podemos encontrar un entorno  $U$  de  $x$  que interseca solamente a  $F_p$  y a su región adyacente por dicha arista  $\gamma'F_p$ , para cierto  $\gamma' \in \Gamma$ . En consecuencia, si  $\gamma(x) \in \partial F_p$  se tiene que, o bien  $\gamma$  es la identidad, o bien  $\gamma\gamma'F_p = F_p$ . En este último caso se tiene que  $\gamma^{-1} = \gamma'$ , que es la única transformación de  $\Gamma$ , distinta de la identidad, que lleva  $x$  en  $\partial F_p$ .

En consecuencia, si para cierto  $\gamma \in \Gamma$  resulta que  $F_p \cap \gamma F_p$  es una arista de  $F_p$ , entonces  $\gamma^{-1}F_p \cap F_p$  es también una arista de  $F_p$ , y es la única congruente con aquella. Distinguiremos los siguientes casos:

- Si  $\gamma^2 = id$  entonces  $\gamma^{-1} = \gamma$  y ambas aristas coinciden. Entonces hay dos posibilidades, pues solo los elementos elípticos y las reflexiones tienen orden finito:
  - $\gamma$  es elíptico de orden 2, permuta los extremos de dicha arista y fija solo su punto medio. Consideraremos entonces este punto medio como un vértice más y dividiremos la arista en dos aristas congruentes la una con la otra.
  - $\gamma$  es una reflexión respecto de la  $\mathbb{H}$ -recta que la contiene y fija todos sus puntos. Entonces esta arista es congruente consigo misma y con ninguna otra. En el proceso de pegado esta arista no se pegará con ninguna otra y formará parte de una componente conexa del borde.

- En otro caso, si el orden de  $\gamma$  es un entero mayor que 2 o no es finito,  $\gamma$  transforma una arista  $r$  de  $F_p$  en otra arista distinta de  $F_p$ . Estas dos aristas no son congruentes con ninguna otra de  $F_p$ .

### 3.2.4 Palabra de superficie de una región fundamental compacta

Una vez que hemos construido la región de Dirichlet e introducido los vértices adicionales correspondientes a elementos elípticos de orden 2, quedan tres tipos de aristas:

- Tipo 1: Aristas congruentes consigo mismas (por reflexiones).
- Tipo 2: Parejas de aristas congruentes por una transformación que preserva la orientación.
- Tipo 3: Parejas de aristas congruentes por una transformación que invierte la orientación.

Entonces asignamos una etiqueta diferente a cada pareja de aristas congruentes, teniendo en cuenta que para las parejas:

- si son del tipo 1 su etiqueta no coincidirá con la de ninguna otra arista.
- si son del tipo 2 etiquetamos una como  $p$  y la otra como  $p'$ .
- si son del tipo 3 etiquetamos una como  $p$  y la otra como  $p^*$ .

Las etiquetas del polígono fundamental, leído en el sentido de las agujas del reloj, forman la *palabra de superficie* de  $F_p$ . Esta palabra no es única, pues depende de la asignación arbitraria de etiquetas y de la elección de la etiqueta inicial. Así mismo, las etiquetas dentro de una misma pareja son intercambiables.

### 3.2.5 Operaciones con palabras

Una región fundamental puede transformarse en otra por medio de operaciones elementales, que a su vez se traducen en operaciones sobre sus respectivas palabras de superficie. La región resultante de aplicar una o varias de estas transformaciones ya no será en general una región de Dirichlet, sin embargo seguirá siendo una región fundamental. Además, los polígonos son transformados en polígonos del mismo número de vértices, y si no son disjuntos con una de sus imágenes, entonces la intersección es una arista común o un vértice.

En adelante utilizaremos letras minúsculas para representar etiquetas individuales y letras mayúsculas para representar secuencias de etiquetas. Además usaremos la barra superior  $\bar{A}$  para referirnos a la secuencia de las etiquetas de  $A$  en orden inverso, en las que previamente hemos sustituido cada símbolo  $p'$  por  $p^*$  y  $q^*$  por  $q'$  para todas aquellas etiquetas  $p'$  y  $q^*$  cuyas parejas  $p$  y  $q$  no estén en  $A$  (suponemos sin pérdida de generalidad que la etiqueta que está en  $A$  es la que lleva la “prima” o el “asterisco”). Por ejemplo, para la secuencia  $A = a^*bb'cde'd^*$ , se obtiene  $\bar{A} = d^*e^*dcb'ba'$ , suponiendo que  $c$  sea una etiqueta desparejada.

Las cuatro operaciones que vamos a considerar se recogen en las figuras siguientes. Las secuencias de aristas se representan como arcos punteados, y las aristas como segmentos rectos (aunque las rectas hiperbólicas no sean rectas euclídeas).

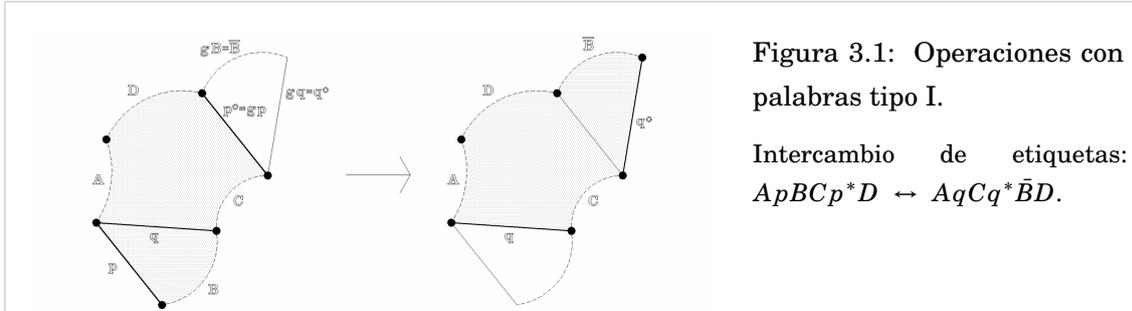


Figura 3.1: Operaciones con palabras tipo I.

Intercambio de etiquetas:  
 $A_pBCp^*D \leftrightarrow AqCq^*BD.$

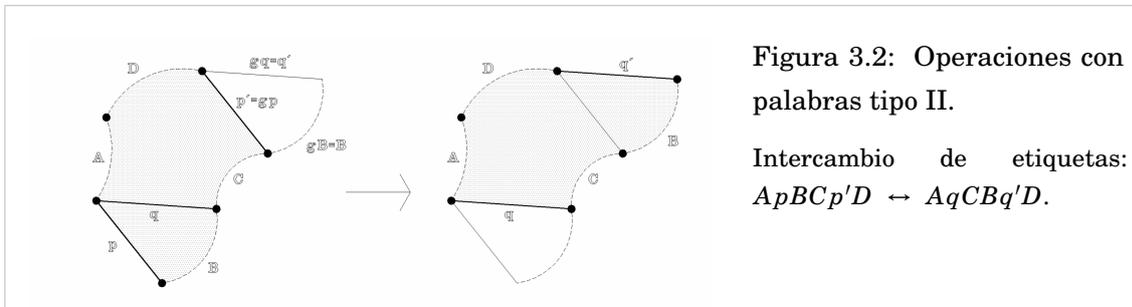


Figura 3.2: Operaciones con palabras tipo II.

Intercambio de etiquetas:  
 $A_pBCp'D \leftrightarrow AqCBq'D.$

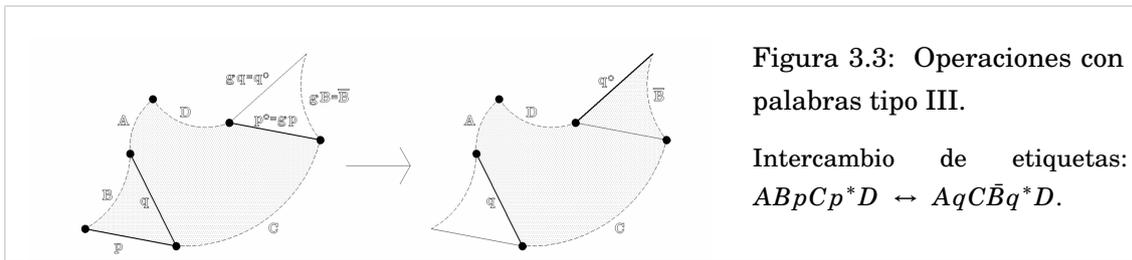


Figura 3.3: Operaciones con palabras tipo III.

Intercambio de etiquetas:  
 $ABpCp^*D \leftrightarrow AqCq^*D.$

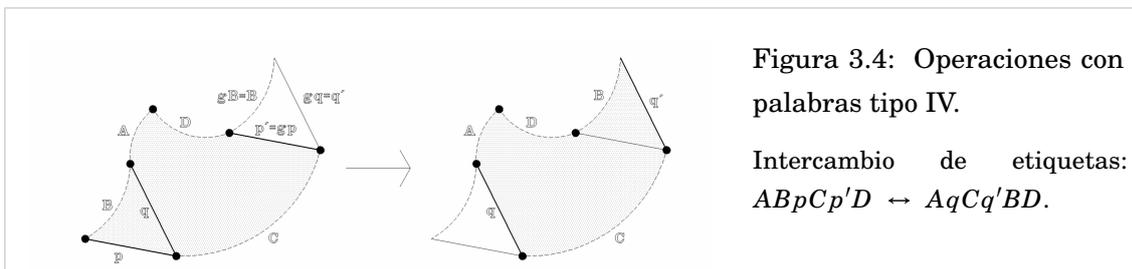


Figura 3.4: Operaciones con palabras tipo IV.

Intercambio de etiquetas:  
 $ABpCp'D \leftrightarrow AqCq'BD.$

### 3.2.6 Palabras en forma canónica

Realizando estas cuatro operaciones repetidas veces se puede llegar a reducir cualquier palabra a una de las dos formas canónicas siguientes [13, §4]:

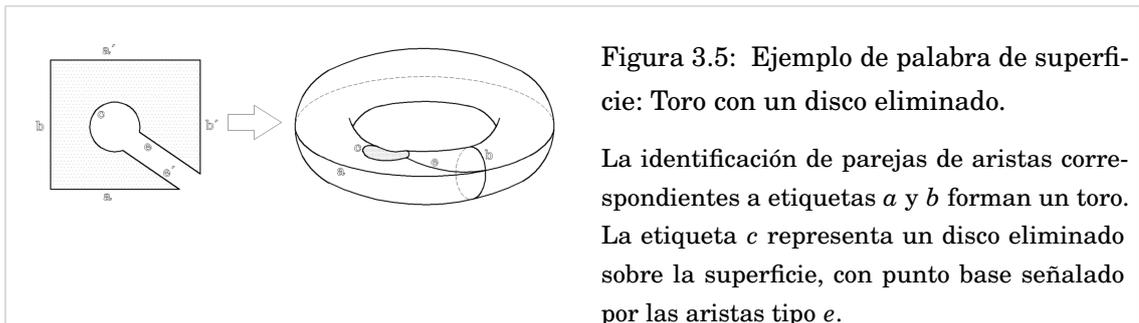
- Tipo  $P^+$ :  $MXC_1 \dots C_k$

- Tipo  $P^-$ :  $NXC_1 \dots C_k$

donde

- $M$  es de la forma  $a_1 b'_1 a'_1 b_1 \dots a_g b'_g a'_g b_g$  para cierto entero  $g \geq 0$ . Identificando convenientemente sus aristas, un polígono formado solo por esta secuencia se convierte en una esfera con  $g$  asas, y por tanto en una superficie orientable de género  $g$ .
- $N$  es de la forma  $a_1 a_1^* \dots a_g a_g^*$  para cierto entero  $g \geq 0$ . Identificando convenientemente sus aristas, un polígono formado solo por esta secuencia se convierte en una suma conexa de  $g$  planos proyectivos, y por tanto en una superficie no orientable de género  $g$ .
- $X$  es de la forma  $x_1 x'_1 x_2 x'_2 \dots x_r x'_r$  para un entero  $r \geq 0$ . Topológicamente, estas etiquetas colapsan por parejas y no contribuyen en nada a la superficie resultante, salvo porque señalan un punto de su interior correspondiente al vértice común entre ambas.
- para cierto entero  $k \geq 0$ , hay  $k$  secuencias  $C_i$  de la forma  $e_i c_{i0} c_{i1} \dots c_{is_i} e'_i$  para ciertos enteros positivos  $s_1, \dots, s_k$ . Cada etiqueta  $c_{ij}$  aparece una sola vez en la palabra y por tanto forma parte del borde de la superficie. Cada secuencia  $c_{i0} \dots c_{is_i}$  es una componente de dicho borde. Tras la identificación, esta componente es homeomorfa a una circunferencia, independientemente del número de etiquetas en la secuencia. Sin embargo, como con los anteriores, los vértices intermedios señalan  $s_i$  puntos cíclicamente dispuestos a lo largo de cada componente del borde (que es una curva cerrada). En la última secuencia  $C_k$ , las aristas de conexión  $e_k$  y  $e'_k$  pueden no estar presentes (véase [18, §6]).

A modo de ejemplo, en la figura siguiente se muestra el resultado de pegar aristas en el polígono etiquetado con la palabra  $aba'b'ece'$ . Nótese que salvo los puntos interiores y los puntos cíclicos de los bordes, todos los demás vértices del polígono son congruentes entre sí.



### 3.3 Generadores y relaciones del grupo

Hasta ahora hemos partido de un grupo NEC  $\Gamma$  para obtener una región fundamental. En particular hemos demostrado que siempre existe una región fundamental que es un polígono hiperbólico. Ahora nos serviremos de este polígono para construir una presentación para  $\Gamma$ . El

objetivo es demostrar que las transformaciones que llevan un polígono en sus adyacentes por una arista son generadores del grupo. Además completaremos la presentación mediante relaciones entre estas transformaciones, obtenidas principalmente de los vértices. Las secciones siguientes se basan en [18, §8].

### 3.3.1 $F$ -teselaciones

Consideremos un polígono fundamental  $F$  para un grupo NEC  $\Gamma$ , y sea  $p$  un punto interior arbitrario. Como  $p$  tiene estabilizador trivial, se sigue que ninguna transformación  $\gamma$  distinta de la identidad lleva  $F$  en sí misma (ni ninguna de sus imágenes en sí misma). Por tanto, dado otro polígono de la teselación  $F'$ , existe una única  $\gamma$  tal que  $F' = \gamma F$ . En consecuencia, si dos transformaciones llevan  $F$  en un mismo polígono, entonces son idénticas.

Puesto que  $F$  es una región fundamental, la unión de todas las imágenes de  $F$  forman una teselación  $\mathcal{T}$  del plano hiperbólico. En virtud de lo anterior, ello significa que existe una biyección entre los elementos del grupo  $\Gamma$  y las regiones de la teselación  $\mathcal{T}$ . Dicha biyección queda completamente determinada si asignamos a la región  $F$  el elemento identidad del grupo.

Cada imagen de  $F$  por un elemento  $\gamma \in \Gamma$  es a su vez una región  $\gamma F$  congruente con  $F$ , lo que significa en particular que coinciden sus áreas hiperbólicas, su número de vértices y aristas, las longitudes de aristas congruentes, y los ángulos en vértices congruentes. Con frecuencia consideraremos un punto interior  $p \in F$  al que llamaremos punto base. Entonces, cada región  $F'$  de la teselación  $\mathcal{T}$  contiene un punto  $p' \in F'$  en la órbita de  $p$ .

Llamaremos *camino* en  $\mathcal{T}$  a una sucesión finita de regiones

$$\mathcal{C} = \gamma_0 F, \gamma_1 F, \dots, \gamma_n F$$

en la cual cada polígono de la sucesión es adyacente por una arista con el polígono siguiente. Llamamos longitud de  $\mathcal{C}$  al entero no negativo  $n$ . Diremos que  $\gamma_0 F$  es el polígono inicial y  $\gamma_n F$  el polígono final de  $\mathcal{C}$ . Cuando los polígonos inicial y final coinciden, es decir, si  $\gamma_0 = \gamma_n$  diremos que el camino  $\mathcal{C}$  es un ciclo.

Toda transformación lleva el interior de una región en el interior de otra, aristas en aristas y vértices en vértices. Por lo tanto el esqueleto de la teselación (el conjunto unión de todas las aristas y vértices) es invariante por  $\Gamma$ . En consecuencia, todo camino es transformado por cualquier elemento de  $\Gamma$  en otro camino congruente: tienen polígonos congruentes dos a dos, y la arista común de un polígono y el siguiente es congruente con la arista común entre sus imágenes.

**Proposición 3.3.1.1.** *Dados dos polígonos  $\gamma F$  y  $\gamma' F$ , existe un camino  $\mathcal{C}$  con polígono inicial en  $\gamma F$  y final en  $\gamma' F$ .*

*Demostración.* Puesto que los polígonos son compactos y están a una distancia determinada uno del otro, es posible construir una bola abierta  $B(p, d)$  centrada en el punto base de  $\gamma F$  y que contenga a  $\gamma' F$ , para cierto radio finito  $d$ .

En cada vértice de  $\gamma F$  existen  $N$  regiones adyacentes con este vértice en común. Se pueden numerar estas en el sentido antihorario, de forma que cada una es adyacente por una arista con la siguiente. La última de la secuencia tendrá una arista común con  $\gamma F$  y también un segundo vértice común, por lo que será el primer polígono de la secuencia del siguiente vértice. Concatenando estas secuencias de vértices sucesivos, y puesto que  $\partial(\gamma F)$  es un polígono cerrado con un número finito de lados, se obtiene un ciclo formado por los polígonos adyacentes a  $\gamma F$ .

Repitiendo este proceso con los polígonos adyacentes al último ciclo obtenido, se obtienen ciclos sucesivos. Cada polígono de un ciclo está conectado con los demás del mismo ciclo por un camino, y al menos un polígono es adyacente por una arista con un polígono del ciclo anterior. Numeraremos estos ciclos concéntricos como  $K_i$ , siendo  $K_0$  el polígono  $F$ .

El borde de cada uno de estos ciclos está formado por dos componentes, las cuales son ambas fronteras de polígonos hiperbólicos. Siendo compactas, la distancia mínima entre ambas curvas se alcanza para dos puntos no necesariamente únicos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que uno de ellos es un vértice de una de las dos, y que el otro punto yace en una arista opuesta del mismo polígono fundamental.

Ahora bien, consideremos el polígono  $F$  y un vértice  $V$ . Puesto que  $F$  es un polígono hiperbólico, existe una distancia positiva desde  $V$  a cada uno de las aristas de  $F$  que no inciden en  $V$ . Como el número de aristas de  $F$  es finito, el mínimo se alcanza para cierto valor  $\delta_V > 0$ . Igualmente, el número de vértices es finito, y por tanto existe un valor  $\delta = \min\{\delta_V \mid V \text{ es un vértice de } F\} > 0$ .

En consecuencia, la distancia entre los contornos interior y exterior de cada ciclo es mayor o igual que dicho  $\epsilon$  (podemos decir que la corona formada por cada ciclo tiene un espesor superior a un valor dado). Por consiguiente, si existe una bola de radio  $h$  enteramente contenida en la unión de los ciclos  $\cup_j = 0^n K_j$ , existe una bola de radio  $h + \delta$  enteramente contenida en la unión de los ciclos  $\cup_j = 0^{n+1} K_j$ . Por tanto, en un número finito de pasos se puede recubrir con la unión de un número finito de ciclos cualquier bola de radio arbitrario. En particular podemos recubrir la bola  $B(p, d)$ , con lo cual la región  $\gamma' F$  formará parte de alguno de esos ciclos. En consecuencia, existe un camino que la une con  $F$ . ■

Supongamos ahora que partimos de  $\gamma F = idF$ . Los ciclos que hemos descrito se disponen concéntricamente alrededor esta, y como se generan secuencialmente, podemos numerarlos correlativamente empezando por asignar el cero a la propia región  $F$ . Denominaremos *altura* al entero asignado a cada ciclo. Lo que implica la anterior demostración es que estos ciclos determinan una partición del conjunto de regiones, y por tanto toda región de la teselación tiene una altura finita.

### 3.3.2 Regiones adyacentes

En esta sección y las siguientes seguiremos a [18, §7]. Como ya se ha comentado, un polígono fundamental tiene un número finito de aristas, y por tanto un número finito de imágenes por  $\Gamma$  adyacentes por dichas aristas. Podemos entonces enumerar cada una de esas regiones por medio

del elemento  $g_i \in \Gamma$  que lleva  $F$  en  $g_i(F) = F_{g_i(p)}$ , para  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , ordenadas en sentido antihorario. En un abuso de notación denotaremos  $F_i = g_i(F)$ . A la arista común entre ambas, la denotaremos  $[i] = F \cap F_i$ .

Dada una pareja de aristas congruentes  $[i]$  y  $[j]$  del polígono fundamental, resulta obvio que  $g_i[j] = [i]$  y  $g_j[i] = [j]$ , luego  $g_i = g_j^{-1}$ .

Denotaremos por  $E'$  al conjunto de elementos de  $\Gamma$  que transforman el polígono  $F$  en alguno de sus adyacentes por aristas, es decir, con la terminología anterior

$$E' = \{g \in \Gamma \mid g(F) \cap F \text{ es una arista}\} = \{g_i \in \Gamma \mid g_i(F) = F_i, i \in I\}. \quad (3.3.1)$$

Supongamos que

$$\gamma_0 F = F_0, \gamma_1 F = F_1, \dots, \gamma_k F = F_k$$

es un camino  $\mathcal{C}$  en la teselación. La arista del polígono  $F_{i-1}$  adyacente a  $F_i$  es congruente con otra arista de  $F$  que denotaremos  $[n_i]$ . Entonces

$$\gamma_{i-1}^{-1}(\gamma_i F) = \gamma_{i-1}^{-1}(F_i) = F_{n_i} = g_{n_i}(F) \implies \gamma_i = \gamma_{i-1} \circ g_{n_i}$$

siendo  $g_{n_i} \in E'$ . Entonces, se obtiene sucesivamente

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 \circ g_{n_1} \\ \gamma_2 &= \gamma_1 \circ g_{n_2} = \gamma_0 \circ g_{n_1} \circ g_{n_2} \\ &\vdots \\ \gamma_k &= \gamma_0 \circ g_{n_1} \circ \dots \circ g_{n_k} \end{aligned}$$

Diremos que

$$\gamma_0^{-1} \gamma_k = g_{n_1} \circ \dots \circ g_{n_k} = w_{\mathcal{C}} \quad (3.3.2)$$

es la *palabra* asociada al camino  $\mathcal{C}$ . En particular, cada elemento  $g_{n_i}$  depende sólo de los polígonos  $F_{i-1}$  y  $F_i$  pero no del resto de polígonos de la secuencia. Por lo tanto, caminos congruentes tienen asociadas palabras idénticas. Es decir, dado un polígono arbitrario  $\gamma_0 F$  como base, una expresión en esta forma representa caminos con origen en  $\gamma_0 F$  y final en el polígono identificado por el producto  $\gamma_0 \cdot w_{\mathcal{C}}$ , todos ellos caminos congruentes entre sí. Dado que la igualdad de palabra es una relación de equivalencia entre caminos, consideraremos que el camino representante canónico de cada clase de equivalencia es aquel con base en el polígono fundamental  $F$ . Acordaremos en llamar camino trivial a un camino con palabra vacía equivalente a  $F, F$ .

Ahora no resulta difícil probar los siguientes resultados

**Lema 3.3.2.1.** *Toda transformación que lleva una región fundamental en otra adyacente por una arista es conjugada de un elemento de  $E'$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma \in \Gamma$  lleva la región  $F_r = \gamma_r(F_0)$  en su adyacente  $F_s = \gamma_s(F_0)$ , entonces  $\gamma = \gamma_s \gamma_r^{-1}$ . Sin embargo, como hemos visto antes,  $\gamma_s = \gamma_r \circ g_j$  para cierta  $g_j \in E$ . Entonces  $\gamma = \gamma_r \circ g_j \circ \gamma_r^{-1}$ . ■

**Lema 3.3.2.2.** *Si  $w$  es la palabra asociada al camino  $\mathcal{C}$ , entonces  $w^{-1}$  es la palabra asociada al camino  $\mathcal{C}$  recorrido en sentido inverso.*

*Demostración.* Sea  $w = \gamma_0^{-1} \cdot \gamma_k = g_{n_1} \cdot \dots \cdot g_{n_k}$  la palabra asociada a  $\mathcal{C}$ . Decíamos antes que la arista del polígono  $F_{i-1}$  adyacente a  $F_i$  es congruente con otra arista de  $F$  que denotábamos  $[n_i]$ . En consecuencia, la arista de  $F_i$  adyacente a  $F_{i-1}$  es congruente con una arista  $[n_j]$  de  $F$  que es a su vez congruente con  $[n_i]$ . Por lo tanto  $g_{n_j} = g_{n_i}^{-1}$ . Entonces al recorrer el camino en sentido inverso

$$\gamma_i^{-1}(\gamma_{i-1}F) = \gamma_i^{-1}(F_j) = F_{n_j} = g_{n_j}F = g_{n_i}^{-1}F \implies \gamma_{i-1} = \gamma_i \circ g_{n_i}^{-1}$$

que es la misma relación que antes para cada paso, expresada de otro modo. El resultado final es

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_1 \circ g_{n_1}^{-1} \\ &= \gamma_2 \circ g_{n_2}^{-1} \circ g_{n_1}^{-1} \\ &\quad \vdots \\ &= \gamma_k \circ g_{n_k}^{-1} \circ \dots \circ g_{n_1}^{-1} \end{aligned}$$

(al recorrer el camino en sentido inverso el polígono siguiente es el etiquetado como precedente) y en consecuencia

$$\gamma_k^{-1} \cdot \gamma_0 = g_{n_k}^{-1} \circ \dots \circ g_{n_1}^{-1} = w^{-1}. \quad \blacksquare$$

Por otra parte, dados un camino  $\mathcal{C}_1$  de  $F_0$  a  $F_k$ , con palabra  $w_1$ , y otro camino  $\mathcal{C}_2$ , de  $F_k$  a  $F_j$ , con palabra  $w_2$ , su concatenación tiene palabra  $w_1 \cdot w_2$ . Es decir, se puede operar con palabras de forma intuitiva:

$$\gamma_0^{-1} \cdot \gamma_j = \gamma_0^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \gamma_k^{-1} \cdot \gamma_j = w_1 \cdot w_2$$

ya sea para concatenar caminos o para trocearlos en caminos parciales, realizando la operación inversa.

### 3.3.3 Generadores para $\Gamma$

**Teorema 3.3.3.1.**  *$E'$  es un conjunto de generadores para  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Sea  $\gamma \in \Gamma$  y sea  $\gamma F$  su polígono asociado de la teselación. Por la proposición anterior, existe un  $F$ -camino entre  $F$  y  $\gamma F$ , sea

$$F = idF = F_0, \gamma_1 F = F_1, \dots, \gamma_k F = F_k = \gamma F$$

Entonces, la palabra asociada a este camino es

$$w = g_{n_1} \circ \dots \circ g_{n_k} = \gamma_0^{-1} \gamma_k = \gamma$$

de este modo hemos obtenido una expresión finita para  $\gamma$  como producto de elementos de  $E'$ . ■

El conjunto de generadores que hemos obtenido antes no será en general minimal, puesto que parejas de aristas congruentes del polígono fundamental representan parejas de elementos inversos, de los cuales solo uno es necesario como generador.

### 3.3.4 Relaciones como ciclos

Nótese que un ciclo con inicio y final en un mismo polígono tiene una palabra asociada equivalente a la identidad, es decir, expresa la identidad como producto de elementos de  $E'$ , y por tanto es una relación entre los elementos de  $E'$ . Existe por tanto una aplicación sobreyectiva entre relaciones en  $E$  y ciclos en la teselación. La cuestión será ahora determinar un conjunto defnitorio de relaciones, para lo cual examinaremos los ciclos que se pueden formar en la teselación.

**Proposición 3.3.4.1.** *La palabra asociada a un ciclo arbitrario con base en un polígono  $\gamma F$  es conjugada de la palabra asociada a un ciclo con base en  $F$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  un ciclo con base en el polígono  $\gamma F$  para cierto  $\gamma \in \Gamma$ , y sea  $w$  su palabra asociada. Sea  $\mathcal{C}'$  un camino con inicio en  $F$  y final en  $\gamma F$ , el cual siempre existe. Podemos formar un ciclo componiendo el camino  $\mathcal{C}'$ , el ciclo  $\mathcal{C}$ , y de nuevo  $\mathcal{C}'$  pero en orden inverso. El ciclo resultante  $\mathcal{C}''$  está basado en  $F$ , y su palabra será

$$w_\gamma \cdot w \cdot w_\gamma^{-1}$$

donde  $w_\gamma$  es la palabra asociada a  $\mathcal{C}'$ . ■

Ello significa que podemos obtener cualquier relación a partir de relaciones de los ciclos basados en  $F$ , por lo que se puede obtener un conjunto defnitorio de relaciones que contenga solo ciclos de esta clase.

### 3.3.5 Relaciones canónicas

Dado un vértice cualquiera  $v$  del polígono fundamental, las regiones adyacentes a dicho vértice forman en sentido antihorario un  $F$ -ciclo

$$F, \gamma_1 F, \gamma_2 F, \dots, \gamma_m F, F$$

para cierto entero  $m$ . La arista del polígono  $\gamma_{i-1} F$  adyacente a  $\gamma_i F$  es congruente con otra arista de  $F$  que denotaremos  $[n_i]$ . Entonces

$$\gamma_{i-1}^{-1}(\gamma_i F) = g_{n_i} F \implies \gamma_i = \gamma_{i-1} \circ g_{n_i}.$$

Operando sucesivamente se obtiene la expansión de la identidad

$$id = g_{n_1} \circ \dots \circ g_{n_m} \quad (3.3.3)$$

que se denomina *relación canónica* del vértice  $v$ . Se puede demostrar [18] que si dos vértices de  $F$  son congruentes entre sí, la relación canónica de uno de ellos es conjugada de la del otro o de su inversa. Más aún, por la forma en que se construye la expansión, resulta que las relaciones canónicas de dos vértices congruentes de la teselación son conjugadas la una de la otra o de su inversa.

Análogamente, dada una arista  $[i]$ , el ciclo  $F, g_i F, F$  representa una relación —que también llamaremos canónica— entre un generador y su inverso, ambos en  $E'$ . Lógicamente, las relaciones asociadas a aristas congruentes de la teselación también son conjugadas entre sí.

Definimos el conjunto de relaciones canónicas  $\mathcal{R}'$  como el conjunto que contiene un representante de cada clase de conjugación de relaciones canónicas de los vértices y de las aristas del polígono fundamental. Todas estas relaciones se han obtenido de, y representan a, ciclos con base en  $F$ , que llamaremos ciclos canónicos.

### 3.3.6 Operaciones con ciclos

Nuestro objetivo ahora es estudiar con qué operaciones pueden obtenerse unos ciclos a partir de otros, es decir, unas relaciones a partir de otras. La idea principal es que todo ciclo puede obtenerse como suma de ciclos menores. Ello es debido a que el espacio de partida  $\mathbb{H}$ , en el que se define la teselación  $\mathcal{T}$ , es simplemente conexo.

Si un ciclo contiene un subciclo, ese subciclo puede eliminarse pues se corresponde con una secuencia de elementos equivalente a la identidad. Recíprocamente, en todo ciclo puede insertarse un subciclo basado en una región cualquiera de la sucesión. De forma algebraica:

$$id = w_1 \cdot w_2 \longleftrightarrow id = w_1 \cdot w \cdot w_2$$

donde por conveniencia hemos partido la palabra del ciclo principal en las partes anterior y posterior al polígono base del subciclo, y siendo  $w$  la palabra asociada a este (por tanto equivalente a la identidad). También podremos componer dos ciclos: cuando el subciclo tenga una porción igual a la del ciclo principal pero recorrido en sentido inverso, podemos concatenar ambos ciclos y luego colapsar la parte común. Algebraicamente

$$w_1 w_2 w_3 \longleftrightarrow w_1 w_2 (w_2^{-1} w_4) w_3 = w_1 w_4 w_3$$

siendo  $w_2^{-1} w_4 = id$  la palabra asociada al subciclo. Esta operación puede interpretarse como formar un nuevo ciclo que comparte parte del recorrido con el original pero que en cierto tramo se desvía por otro camino. En concreto, aplicando estas operaciones se obtiene que una relación se deriva de su conjugada por un elemento cualquiera  $\gamma$ .

A continuación trataremos de reducir un ciclo arbitrario como suma de ciclos lo más simples posibles: las relaciones canónicas. Lo que pretendemos demostrar es que la relación de cualquier ciclo se puede obtener por composición y conjugación de relaciones de  $\mathcal{R}'$ . En consecuencia, el ciclo inicial era composición de elementos de  $\mathcal{R}'$  o de sus conjugados.

**Proposición 3.3.6.1.** *El conjunto  $\mathcal{R}'$  es un conjunto completo de relaciones definitorias para  $\Gamma$  en términos de elementos de  $E'$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  un ciclo basado en  $F$ . Como es finito, la máxima altura que alcanzan los elementos de  $\mathcal{C}$  es un entero  $n$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los elementos de altura  $n$  en  $\mathcal{C}$  forman una secuencia conexa  $\gamma_j F, \gamma_{j+1} F, \dots, \gamma_{j+k} F$  (si hay más de una, procederemos con una tras otra).

Sea  $v$  el vértice del segmento entre  $\gamma_{j+k-1} F$  y  $\gamma_{j+k} F$  que yace en el contorno interior del ciclo concéntrico de altura  $n$ . Sea  $r$  la relación asociada al ciclo que recorre las regiones incidentes en el vértice  $v$  de forma que el ciclo empiece y acabe en un polígono de altura  $n-1$ , y el segundo elemento sea  $\gamma_{j+k} F$ . Este ciclo es congruente con un ciclo canónico que recorre los polígonos incidentes a un vértice  $v_0$  de  $F$ , salvo el sentido, luego su palabra es idéntica a una relación canónica o su inversa.

La composición de estos dos ciclos tiene estrictamente menos elementos de altura  $n$ , pues el ciclo que sumamos solo tiene elementos de altura  $n-1$  o  $n$ , y estos últimos están en  $\mathcal{C}$  pero recorridos en sentido inverso; en particular  $\gamma_{j+k} F$  no pertenece al ciclo resultante. Así pues, en un número finito de pasos podemos reducir la secuencia a un solo elemento de altura  $n$ , momento en el que cabe distinguir dos posibilidades:

- si  $\gamma_{j-1} \neq \gamma_{j+1}$  procedemos como antes, con lo que suprimimos de  $\mathcal{C}$  la región  $\gamma_j F$ .
- si  $\gamma_{j-1} = \gamma_{j+1}$ , el ciclo entra y sale en  $\gamma_j F$  por la misma arista, con lo cual podemos restar el ciclo  $\gamma_{j-1} F, \gamma_j F, \gamma_{j-1} F$ , congruente con el ciclo canónico asociado a una arista de  $F$ , luego su palabra también es idéntica a una relación canónica.

En ambos casos, hemos eliminado todos los elementos de altura  $n$ , reduciendo la altura del ciclo en una unidad. Por lo tanto, en un número finito de pasos podemos reducir el ciclo  $\mathcal{C}$  al ciclo trivial (el caso  $n=1$  no es diferente) como suma de ciclos congruentes a los ciclos asociados a los elementos de  $\mathcal{R}'$ . ■

Para obtener una presentación de  $\Gamma$ , tenemos un conjunto válido de generadores y otro de relaciones. Del conjunto  $E'$  eliminamos un elemento de cada pareja de inversos, que es redundante. Del conjunto  $\mathcal{R}'$  eliminamos las relaciones que asocian estos inversos entre sí, y en el resto sustituimos cada elemento eliminado por el inverso de su inverso (que está en  $E$ ). Los conjuntos resultantes forman una presentación:  $\Gamma = \langle E, \mathcal{R} \rangle$ .

### 3.4 Presentación a partir de la palabra canónica

La palabra de superficie de un polígono fundamental contiene información suficiente para determinar un conjunto de generadores, pues enumera todas las parejas de aristas congruentes. Sin embargo, para determinar las relaciones, nos hará falta conocer los ángulos en los vértices, entre aristas consecutivas.

#### 3.4.1 Generadores

Según hemos determinado en la sección anterior, un conjunto  $E$  de generadores para  $\Gamma$  está formado por las transformaciones que llevan el polígono  $F$  en alguna de sus regiones adyacentes. Por tanto, de cada segmento de la palabra de superficie se obtienen los siguientes generadores

Tabla 3.1: Generadores asociados a una palabra en forma canónica.

Segmento	Generadores	Preservan la orientación
$M = a_1 b'_1 a'_1 b_1 \dots a_g b'_g a'_g b_g$	$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$	Sí
$N = a_1 a_1^* \dots a_g a_g^*$	$\alpha_1, \dots, \alpha_g$	No
$X = x_1 x'_1 \dots x_r x'_r$	$\xi_1, \dots, \xi_r$	Sí
$C_i = e_i c_{i,0} \dots c_{i,s_i} e'_i$	$\epsilon_i$ $\rho_{i,0}, \dots, \rho_{i,s_i}$	Sí No

Para determinar las relaciones, debemos estudiar qué hace cada una de estas transformaciones.

#### 3.4.2 Transformaciones elípticas

Cada uno de los generadores del tipo  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , proviene de una pareja  $x_i x'_i$  de aristas congruentes. La transformación  $\xi_i$  lleva  $x_i$  en  $x'_i$  y al hacerlo deja fijo el vértice común entre ambas. Por tanto,  $\xi_i$  es una transformación elíptica cuyo punto fijo es dicho vértice.

La aplicación sucesiva de esta transformación gira el polígono fundamental hasta devolverlo a su posición original en un número finito de pasos, es decir,  $\xi_i$  es finito de orden  $m_i$ , para cierto entero positivo, luego el elemento  $\xi_i$  es elíptico. Resulta inmediato que si  $\theta_i$  es el ángulo en dicho vértice

$$2\pi = m_i \theta_i \implies \theta_i = \frac{2\pi}{m_i}.$$

La relación canónica asociada a dicho vértice no es otra que  $\xi_i^{m_i} = id$ .

#### 3.4.3 Reflexiones

Los generadores  $\rho_{i,j}$  corresponden a aristas que aparecen una sola vez y por tanto dejan invariante la recta que la contiene. Son por tanto reflexiones, invierten la orientación y son de orden 2. La

relación canónica que se obtiene de este tipo de aristas es

$$\rho_{i,j}^2 = id.$$

La relación canónica asociada al vértice entre  $c_{i,j-1}$  y  $c_{i,j}$  se compone de pares  $\rho_{i,j-1}\rho_{i,j}$ . La composición de dos reflexiones cuyos ejes se cortan en un punto es una rotación alrededor de dicho punto, de ángulo  $2\theta_{i,j}$  siendo  $\theta_{i,j}$  el ángulo entre estas aristas. Eso significa que la relación canónica asociada a este vértice es

$$(\rho_{i,j-1}\rho_{i,j})^{n_{i,j}} = id$$

donde

$$2\theta_{i,j}n_{i,j} = 2\pi \implies \theta_{i,j} = \frac{\pi}{n_{i,j}}$$

El vértice entre  $e_i$  y  $c_{i,0}$  es congruente con el vértice entre  $c_{i,s_i}$  y  $e'_i$ . Es decir, si empezamos a recorrer el ciclo alrededor del vértice saliendo por  $e_i$ , la siguiente arista es congruente con  $c_{i,s_i}$ , la siguiente con  $e'_i$ , luego  $c_{i,0}$  y de nuevo  $e_i$  (aunque no necesariamente del polígono inicial). La relación es entonces

$$(\epsilon_i \rho_{i,s_i} \epsilon_i^{-1} \rho_{i,0})^{l_k} = id, \quad \text{donde} \quad l_k = \frac{2\pi}{2(\theta_{i,0} + \theta_{i,s_i})} \in \mathbb{N},$$

siendo  $\theta_{i,0}$  el ángulo en el vértice entre  $e$  y  $c_{i,0}$ , y  $\theta_{i,s_i}$  el ángulo en el vértice entre  $c_{i,s_i}$  y  $e'$ . El periodo  $l_k$  es un entero positivo, pues al recorrer los polígonos que inciden en el vértice, se retorna al polígono inicial tras un número  $l_k$  de secuencias  $e_i c_{i,0} e'_i c_{i,s_i}$ .

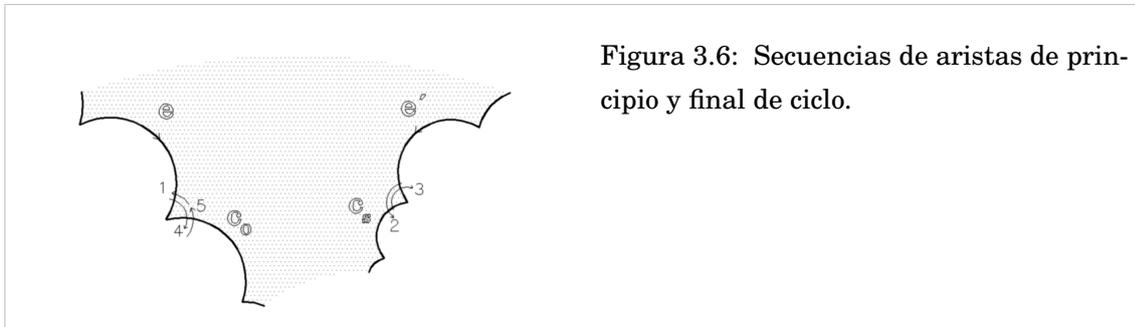


Figura 3.6: Secuencias de aristas de principio y final de ciclo.

En

cuanto a los elementos  $\epsilon_i$ , en general serán hiperbólicos. Si en la palabra canónica los segmentos  $M$ ,  $N$  y  $X$  son vacíos y solo hay un ciclo  $C_1$ , entonces el elemento  $\epsilon_1$  será elíptico, e incluso puede estar ausente de la palabra, como en los grupos triangulares.

### 3.4.4 El vértice restante

El resto de vértices del polígono fundamental son todos congruentes entre sí. Si la palabra tiene un segmento  $M$ , al recorrer el vértice empezando por una etiqueta cualquiera  $p$ , como se preserva la orientación, el siguiente generador de la relación es el siguiente de la etiqueta congruente  $p'$ . Entonces una secuencia  $a_i b'_i a'_i b_i$  se convierte en la palabra  $\alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}$ . En consecuencia

$$\left\{ \prod_{i=1}^r (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m [\alpha_i \beta_i] \right\}^l = id$$

donde  $[\alpha_i \beta_i] = \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}$  es el conmutador de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , y  $l$  es un entero positivo igual a  $l = 2\pi/\theta$ , donde  $\theta$  es la suma de los ángulos interiores en los vértices de esta clase de congruencia. Este periodo  $l$  es también un entero positivo, pues al recorrer todos los polígonos incidentes en uno de estos vértices, se retorna al polígono inicial tras un número entero de secuencias  $x_1 x'_1 \dots a'_m b_m$ .

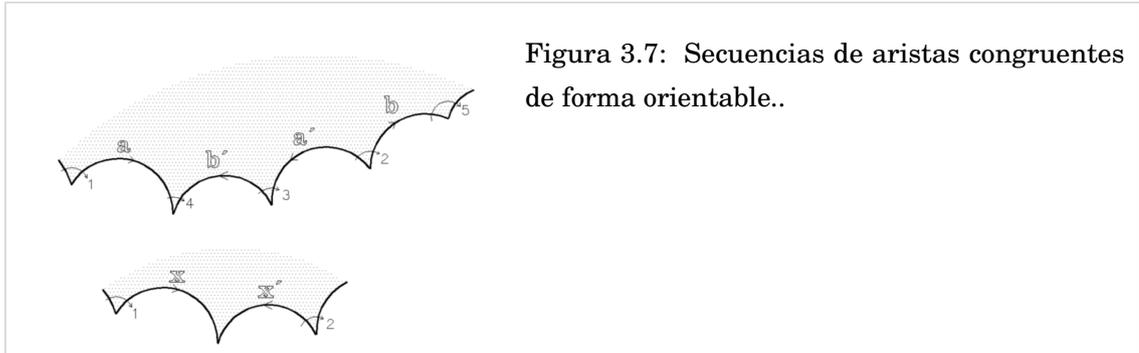


Figura 3.7: Secuencias de aristas congruentes de forma orientable..

Si la palabra tiene un segmento  $N$ , una pareja de símbolos  $a_i a_i^*$  da lugar a una palabra  $\alpha_i^2$ , como se puede ver en el siguiente esquema.

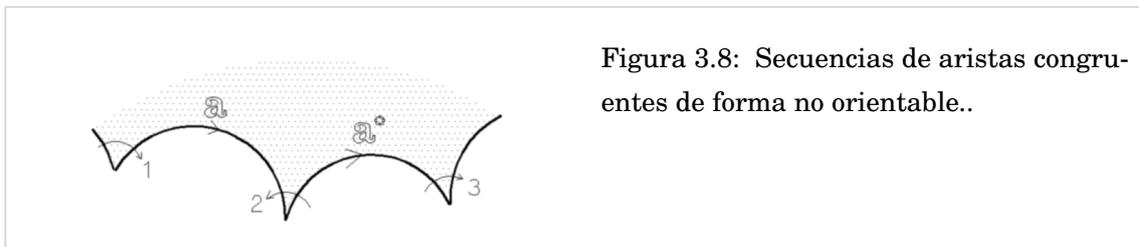


Figura 3.8: Secuencias de aristas congruentes de forma no orientable..

La relación resultante del vértice en este caso es

$$\left\{ \prod_{i=1}^r (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m (\alpha_i^2) \right\}^l = id,$$

donde el periodo  $l$  es un entero positivo  $l = 2\pi/\theta$ , siendo como antes  $\theta$  la suma de ángulos interiores de esta clase de vértices.

### 3.4.5 Área del polígono fundamental

Podemos utilizar la fórmula de Gauss-Bonnet para calcular el área del polígono fundamental, conociendo el número de aristas y los ángulos interiores. Se tiene que un polígono hiperbólico de  $n$  lados, con ángulos interiores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , tiene área

$$\mu = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \theta_i. \tag{3.4.1}$$

La cantidad total de aristas del polígono fundamental es la suma de las siguientes cantidades:

- $4g$  para palabras  $P^+$  o  $2g$  en caso contrario (por los elementos  $a_i, b_i$  y sus congruentes). Definimos un parámetro  $\alpha$ , de valor 2 en el primer caso y 1 en el segundo, de modo que el número de aristas de esta clase sea siempre  $2\alpha g$ .

- $2r$  por las aristas  $x_i, x'_i$ .
- $2k$  por los elementos de conexión al inicio y final de cada ciclo,  $e_i, e'_i$ .
- $\sum_{i=1}^k (s_i + 1)$  por todas las aristas  $c_{ij}$ .

Los ángulos individuales en cada vértice solo se conocen en algunos casos, pero para el resto de vértices sabemos la suma total de los ángulos de vértices congruentes entre sí:

- $\frac{2\pi}{m_i}$  por cada vértice entre una arista  $x_i$  y la siguiente  $x'_i$ .
- $\frac{2\pi}{2n_{i,j}}$  por cada vértice entre las aristas  $c_{i,j-1}$  y  $c_{i,j}$ .
- $\frac{\pi}{l_k}$  por cada clase de congruencia de vértices entre  $e_i - c_{i,0}$  y  $c_{i,s_i} - e'_i$ .
- $\frac{2\pi}{l}$  por la clase de congruencia que contiene a todos los demás vértices.

Aplicando estos valores:

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \pi \left( 2\alpha g + 2r + 2k + \left( k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} (1) \right) - 2 \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{2\pi}{2n_{i,j}} + \sum_{i=1}^k \frac{\pi}{l_k} + \frac{2\pi}{l} \right) \\ &= 2\pi \left\{ \alpha g + k - 2 + \left(1 - \frac{1}{l}\right) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left( \left(1 - \frac{1}{l_k}\right) + \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right) \right\} \end{aligned}$$

donde, como ya hemos comentado,  $\alpha$  toma valor 1 si el signo es negativo o 2 en caso contrario. Se puede observar que a efectos de calcular el área, los periodos  $l$  y  $l_k$  tienen el mismo efecto que los periodos de vértices entre rotaciones y reflexiones respectivamente.

Las áreas de un grupo y de sus subgrupos de índice finito verifican la fórmula de Hurwitz-Riemann:

**Proposición 3.4.5.1.** *Si  $\Gamma'$  es un grupo NEC y  $\Gamma$  es un subgrupo de  $\Gamma'$  de índice finito, entonces*

$$\frac{\mu(\Gamma')}{\mu(\Gamma)} = [\Gamma' : \Gamma]. \quad (3.4.2)$$

*Demostración.* Sea  $F$  una región fundamental para  $\Gamma$ . Si  $\{g_1, \dots, g_n\} \subset \Gamma'$  son representantes de las clases laterales de  $\Gamma$  en  $\Gamma'$ , se verifica que  $g_1 F \cup \dots \cup g_n F$  es una región fundamental para  $\Gamma'$ . En consecuencia

$$\mu(\Gamma') = \mu(g_1 F) + \dots + \mu(g_n F) = n \mu(F) = [\Gamma' : \Gamma] \mu(\Gamma).$$

■

### 3.4.6 Reducción a la presentación canónica

De las relaciones canónicas de los vértices se deduce que cada clase de congruencia de vértices tiene asociado un entero positivo. En el caso de los vértices fijos por elementos elípticos o reflexiones, este entero tiene una interpretación geométrica en términos del ángulo que forman las aristas y una interpretación algebraica como el orden del elemento elíptico resultante.

Sin embargo, para los otros dos tipos de vértices, podemos obviarlos introduciendo generadores adicionales. Si el periodo asociado al vértice restante es  $l > 1$ , entonces definimos

$$\xi_0^{-1} = \Pi_{i=1}^r(\xi_i) \cdot \Pi_{i=1}^k(\epsilon_i) \cdot \Pi_{i=1}^m[\alpha_i \beta_i]$$

o bien

$$\xi_0^{-1} = \Pi_{i=1}^r(\xi_i) \cdot \Pi_{i=1}^k(\epsilon_i) \cdot \Pi_{i=1}^m(\alpha_i^2)$$

según que la palabra tenga una secuencia del tipo  $M$  o  $N$ . Entonces la relación del vértice base se reduce a  $\xi_0^l = id$ , con lo cual  $\xi_0$  tendrá orden  $l_0 = l$ . Por otra parte, reescribiendo la definición de  $\xi_0$  se obtiene

$$\Pi_{i=0}^r(\xi_i) \cdot \Pi_{i=1}^k(\epsilon_i) \cdot \Pi_{i=1}^m[\alpha_i \beta_i] = id$$

o bien

$$\Pi_{i=0}^r(\xi_i) \cdot \Pi_{i=1}^k(\epsilon_i) \cdot \Pi_{i=1}^m(\alpha_i^2) = id$$

que es de la misma forma que la relación original pero con periodo unidad.

Análogamente, si un ciclo de periodos tiene un periodo  $l_k > 1$  definimos

$$\rho_{i,s_i+1} = \epsilon_i \rho_{i,s_i} \epsilon_i^{-1}.$$

Entonces  $\rho_{i,s_i+1}^2 = id$  (es una reflexión) y nos quedan las relaciones

$$\begin{aligned} (\rho_{i,s_i+1} \rho_{i,0})^{l_k} &= id \\ \epsilon_i \rho_{i,s_i} \epsilon_i^{-1} \rho_{i,s_i+1} &= id \end{aligned}$$

que son del mismo tipo pero con periodo unidad.

En resumen, para definir una presentación del grupo, además de la palabra de superficie del polígono, son necesarios los valores de los periodos asociados a elementos elípticos y a parejas de reflexiones. Los periodos asociados al resto de vértices se asimilan a generadores adicionales del tipo apropiado, cuando son distintos de la unidad. La presentación canónica es entonces, ajustando convenientemente las cantidades de periodos  $r'$  y  $s'_i$ :

Tabla 3.2: Presentación canónica asociada a una palabra.

Componente	Generadores	Relaciones
$M = a_1 b_1' a_1' b_1 \dots a_g b_g' a_g' b_g$	$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$	$\prod_{i=1}^{r'} (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^g [\alpha_i \beta_i]$
$N = a_1 a_1^* \dots a_g a_g^*$	$\alpha_1, \dots, \alpha_g$	$P \prod_{i=1}^{r'} (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^g (\alpha_i^2)$
$X = x_1 x_1' \dots x_r x_r'$	$\xi_1, \dots, \xi_{r'}$	$\xi_i^{m_i} = id$
$C_i = e_i c_{i,0} \dots c_{i,s_i} e_i'$	$\epsilon_i$ $\rho_{i,0}, \dots, \rho_{i,s_i}$	$\epsilon_i \rho_{i,s_i} \epsilon_i^{-1} \rho_{i,0} = id$ $(\rho_{i,j-1} \rho_{i,j})^{n_{i,j}} = id$ $\rho_{i,j}^2 = id$

Wilkie [18] utiliza generadores y relaciones adicionales similares a estas para el caso particular en que un ciclo de periodos carece de las aristas de conexión  $e_i$  y  $e_i'$ , que pueden estar ausentes en a lo más un ciclo. Incluso en este caso, los generadores y relaciones obtenidos son los mismos.

Cabe mencionar también que si a un polígono fundamental le añadimos aristas correspondientes a los nuevos generadores introducidos, el espacio cociente será homeomorfo al original, pues las características topológicas del espacio dependen solo de la componente  $M$  o  $N$ , según el caso, y del número  $k$  que permanecen inalterados.

### 3.5 Signaturas NEC

A lo largo de esta sección introduciremos la noción de *signatura* de un grupo NEC. Las signaturas son un medio eficiente de codificar la información más relevante para construir la presentación canónica para el grupo. Esta se compone de los siguientes elementos:

- Necesitamos saber si contiene generadores que provienen de una componente  $M$  o de una componente  $N$ . Definiremos por tanto un *signo*: denotaremos a las primeras con el signo + —pues provienen de una palabra  $P^+$ , y la superficie cociente será orientable— y a las segundas el signo  $-$ .
- Independientemente de lo anterior sabemos que hay un número entero de generadores o parejas de generadores del tipo anterior. Sea  $g$  este número entero, que coincide con el *género* de  $\mathbb{H}/\Gamma$ .
- Los generadores elípticos quedan totalmente determinados por sus periodos, con lo que necesitamos una tupla de enteros  $[m_1, \dots, m_r]$ , mayores de 2, que denominaremos *periodos propios*.
- Cada secuencia  $C_i$  queda totalmente determinada por una tupla  $(n_{i1}, \dots, n_{is_i})$ , de enteros mayores de 2, que denominaremos *ciclo de periodos* (por razones que veremos luego).

Toda esta información queda resumida en una signatura NEC  $\sigma$ , que es una expresión de la forma

$$\sigma = (g ; \pm ; [m_1, \dots, m_r] ; \{ (n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k}) \} ) \quad (3.5.1)$$

donde cada número  $m_i$  o  $n_{ij}$  es un entero mayor o igual a 2 y  $g$  es un entero no negativo. Los números  $[m_1, \dots, m_r]$  serán los periodos propios, los números  $n_{i,j}$  se denominan *periodos de enlace*. Cada grupo  $C_i = (n_{i1}, \dots, n_{is_i})$  es un ciclo de periodos. Ambos pueden ser vacíos, lo cual se representa como  $[-]$  y  $(-)$  respectivamente. También  $r$  o  $k$  pueden ser igual a cero, en cuyo caso no hay periodos propios o ciclos de periodos, respectivamente. Este último caso lo representaremos con dos llaves  $\{\}$ . Llamaremos *género* al entero  $g$  y *signo de la signatura* al segundo símbolo, que denotaremos por  $sgn(\sigma)$ .

### 3.5.1 Signaturas equivalentes

Las signaturas también nos permiten clasificar grupos NEC salvo isomorfismo, puesto que como demostró Macbeath [13], dos grupos NEC son isomorfos si y solo si sus signaturas son *equivalentes*. Decimos que dos signaturas  $\sigma$  y  $\sigma'$  son equivalentes si:

- El género y el signo coinciden:  $g = g'$  y  $sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$ .
- Los periodos propios coinciden, salvo permutación:  $r = r'$  y  $m_i = m'_{\phi(i)}$  para cada  $i = 1, \dots, r$ , y para cierta permutación  $\phi \in S_r$ .
- $k = k'$  y existe una permutación  $\psi \in S_k$  tal que el ciclo  $C_i$  se puede obtener del ciclo  $C'_{\psi(i)}$  por medio de una permutación cíclica y tal vez una inversión, según la siguiente regla:
  - si el signo es positivo entonces o bien todos los ciclos de la signatura se invierten o no se invierte ninguno.
  - si el signo es negativo entonces unos ciclos pueden requerir una inversión y otros no.

Si solo nos interesa una signatura salvo equivalencia, el orden de los periodos propios no es relevante, como tampoco el orden de los ciclos de periodos. Sin embargo sí lo es el orden relativo de los periodos dentro de cada ciclo. Si la signatura es positiva, también es importante el sentido en que se escriben los periodos, mientras que en caso de ser negativa, cada ciclo puede leerse en un sentido o en otro.

### 3.5.2 Relación entre signaturas y palabras de superficie

A continuación a cada signatura NEC le asignaremos una palabra de superficie. Si el signo de la signatura es positivo, será una palabra de tipo  $P^+$ , mientras que si es negativo, será del tipo  $P^-$ . En el primer caso habrá una secuencia  $M$  formada por  $g$  cuaternas  $a_i b'_i a'_i b_i$ , mientras que en el

segundo habrá una secuencia  $N$  formada por  $g$  pares  $a_i a_i^*$ . En ambos casos el número  $g$  es el género de la signatura.

La secuencia  $X$  de la palabra tendrá una pareja de etiquetas  $x_i x_i'$  por cada periodo propio, siendo el valor de los periodos irrelevante. Finalmente, por cada ciclo de periodos habrá una secuencia  $C_i = e_i c_{i1} \dots c_{is_i} e_i'$  que contendrá un elemento  $c_{ij}$  por cada periodo en dicho ciclo. De nuevo los valores de los periodos son irrelevantes.

A partir de la palabra de superficie solamente no es posible recuperar la signatura del grupo, puesto que falta la información sobre los periodos. Sin embargo, estos dependen de los ángulos del polígono fundamental. Con la información contenida en la signatura, se tienen todos los datos necesarios para obtener una presentación del grupo.

En cambio, la palabra de superficie nos dice qué clase de superficie de Klein es el espacio de órbitas  $\mathbb{H}/\Gamma$ , salvo homeomorfismo. Se tratará de una superficie orientable si es del tipo  $P^+$  (o no orientable en caso contrario) y su género será  $g$ . El número de componentes conexas del borde será  $k$  (el número de ciclos de periodos).

### 3.5.3 Generadores y relaciones

Como hemos visto, podemos asignar una palabra de superficie a cada signatura NEC. De esta palabra, que representa un polígono fundamental, podemos obtener un sistema de generadores y relaciones. En la práctica, asignamos una presentación canónica a cada signatura, pues contiene toda la información necesaria.

Dada la signatura NEC

$$\sigma = (g ; \pm ; [m_1, \dots, m_r] ; \{ (n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k}) \} )$$

le asignaremos el siguiente conjunto de generadores y relaciones, en función de los componentes de la signatura:

Tabla 3.3: Presentación asociada a una signatura NEC según [13, §5].

Signatura	Generadores	Tipo	Relaciones
$m_i$	un elemento $\xi_i$	Elíptico	$\xi_i^{m_i} = id$
$(n_{i,1} \dots n_{i,s_i})$	$\rho_{i0}, \dots, \rho_{is_i}$	Reflexiones	$(\rho_{i,j-1} \rho_{i,j})^{n_{i,j}} = id$ $\rho_{i,j}^2 = id$
	un elemento $\epsilon_i$	Varios	$\epsilon_i \rho_{i,s_i} \epsilon_i^{-1} \rho_{i,0} = id$
$g, +$	$g$ parejas $\alpha_i, \beta_i$	Hiperbólicos	$\prod_{i=1}^r (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m [\alpha_i \beta_i] = id$
$g, -$	$g$ elementos $\chi_i$	Refl. con desliz.	$\prod_{i=1}^r (\xi_i) \cdot \prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m (\chi_i^2) = id$

Los generadores  $\epsilon_i$  son en general elementos hiperbólicos, pero en ciertos casos pueden ser elípticos o incluso la identidad.

### 3.5.4 Área de una signatura NEC

A la hora de obtener la signatura NEC, hemos partido de un polígono fundamental, del cual hemos obtenido una presentación. Distintos polígonos fundamentales pueden dar lugar a una misma signatura. Esto es de esperar puesto que el polígono fundamental de un grupo no es único. No obstante, también grupos distintos pueden tener mismas presentaciones, ya que la presentación define el tipo de isomorfía del grupo, no sus elementos.

Sin embargo, todos los polígonos fundamentales que dan lugar a signaturas equivalentes tienen la misma área. Esta depende únicamente de la información recogida en la signatura: signo ( $\alpha$ ), género ( $g$ ), periodos ( $m_i, n_{ij}$ ) y número de ciclos ( $k$ ). La expresión que hemos obtenido antes para el área del polígono fundamental (una vez asimilados el periodo  $l$  y cada  $l_k$  a periodos adicionales de los tipos  $m_i$  y  $n_{ij}$ ) resulta

$$\mu(\sigma) = 2\pi \left\{ \alpha g + k - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right\} \quad (3.5.2)$$

a la que nos referimos como el área de la signatura NEC.

De esta definición se deduce la condición necesaria que mencionábamos antes que deben satisfacer los valores  $g, \alpha, k, m_i$  y  $n_{ij}$ : puesto que el área de un polígono fundamental es positiva, para que  $\sigma$  sea una signatura NEC válida, se debe verificar

$$\mu(\sigma) > 0.$$

Existe una condición adicional que es trivial: si el signo es negativo, el género debe ser estrictamente positivo, pues no hay superficies compactas no orientables de género cero. Cuando  $g$  es de valor nulo, la superficie de Klein resultante es orientable, por lo que por convenio tendrá siempre signo positivo, aun cuando la palabra de superficie no contenga secuencias del tipo  $M$  ni  $N$ . Las dos condiciones mencionadas son también suficientes, es decir, si la signatura  $\sigma$  tiene área positiva y  $\alpha + g > 1$ , entonces existe un grupo NEC de signatura  $\sigma$  [7, Tma. 0.2.8].

En caso contrario, la signatura aun define un grupo cristalográfico, pero no del plano hiperbólico (en el que la curvatura es constante de valor  $-1$ ). Si el área  $\mu(\sigma)$  es nula, entonces  $\sigma$  representa uno de los 17 grupos cristalográficos del plano euclídeo, y si es negativa, representa un grupo cristalográfico de la esfera (que tiene curvatura constante  $+1$ ) [13].

## 3.6 Grupos NEC de superficie

Un grupo NEC de superficie es un grupo de signatura

$$(g; \pm; [-]; \overbrace{\{(-), \dots, (-)\}}^k). \quad (3.6.1)$$

Es decir, no tiene periodos propios, y si  $k > 0$  (en cuyo caso decimos que es un grupo NEC de superficie con borde) entonces cada ciclo de periodos es vacío, es decir, carece de periodos de enlace.

**Proposición 3.6.0.1.** *Dos grupos NEC de superficie son isomorfos si y solo si sus firmas NEC coinciden.*

*Demostración.* Si las firmas coinciden entonces sus presentaciones coinciden y los grupos son isomorfos, al igual que en el caso general. Sin embargo, dos grupos isomorfos pueden tener firmas equivalentes aunque no iguales. En este caso, el género, la orientabilidad y el número de óvalos coinciden, pero los periodos y los ciclos pueden encontrarse permutados. Como en una firma NEC de superficie no hay periodos, y todos los ciclos son vacíos, la única permutación posible es la identidad. En consecuencia, si dos grupos son isomorfos sus firmas coinciden. ■

### 3.6.1 Propiedades de los grupos de superficie

Puesto que no hay periodos, el área de un grupo NEC de superficie  $\Gamma$  es

$$\mu = 2\pi(\alpha g + k - 2) = 2\pi(p - 1), \tag{3.6.2}$$

donde  $p = \alpha g + k - 1$  es el género algebraico de  $\mathbb{H}/\Gamma$ .

La presentación también se simplifica: no hay generadores elípticos y cada ciclo contiene nada más que una reflexión.

Tabla 3.4: Presentación asociada a una firma NEC de superficie.

Signatura	Generadores	Relaciones
(-)	$\rho_{i,0}$ un elemento $\epsilon_i$	$\rho_{i,0}^2 = id$ $\epsilon_i \rho_{i,0} \epsilon_i^{-1} \rho_{i,0} = id$
$g, +$ $g, -$	$g$ parejas $\alpha_i, \beta_i$ $g$ elementos $\chi_i$	$\prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m [\alpha_i \beta_i] = id$ $\prod_{i=1}^k (\epsilon_i) \cdot \prod_{i=1}^m (\chi_i^2) = id$

La ausencia de periodos tiene además la siguiente consecuencia:

**Proposición 3.6.1.1.** *Sea  $\Gamma$  un grupo NEC. Entonces  $\Gamma$  es de superficie si y solo si ningún elemento de  $\Gamma$  es elíptico.*

*Demostración.* Sea  $F$  una región fundamental para  $\Gamma$ . Todo punto interior tiene estabilizador trivial, por tanto si existe un elemento elíptico  $e$ , su punto fijo está en la imagen de un vértice de  $F$  por un elemento  $\gamma \in \Gamma$ . En consecuencia hay dos posibilidades para  $e$ :

- Es conjugado de un generador elíptico del grupo o de una de sus potencias.
- Es conjugado del producto de dos reflexiones consecutivas o de una de las potencias de tal producto.

El hecho de que no haya generadores elípticos ni ciclos con más de una reflexión implica que no puede haber elementos elípticos en  $\Gamma$ . Por otro lado, sea  $\Gamma$  un grupo NEC sin elementos elípticos. La signatura de  $\Gamma$  no puede contener ningún periodo propio ni ningún periodo de enlace, pues estos surgen de elementos elípticos. Por tanto, la signatura de  $\Gamma$  es  $(g; \pm; [-]; \overbrace{\{(-), \dots, (-)\}}^k)$ , con lo cual es un grupo de superficie. ■

Puesto que todos los elementos elípticos preservan la orientación, se sigue inmediatamente el siguiente

**Corolario 3.6.1.2.** *Un grupo NEC  $\Gamma$  es de superficie si y solo si su subgrupo Fuchsiano canónico  $\Gamma^+$  es de superficie, y en tal caso la signatura de  $\Gamma^+$  es*

$$(p; +; [-]; \{\}),$$

donde  $p = \alpha g + k - 1$  es el género algebraico de  $\mathbb{H}/\Gamma$ .

### 3.6.2 Espacios recubridores de superficies de Riemann

Como espacio topológico, toda superficie de Riemann conexa  $S$  tiene un espacio recubridor simplemente conexo denotado  $\tilde{S}$ , que denominamos *recubridor universal* [11, Teorema 4.19.4]. Por el teorema de uniformización, solo existen tres superficies de Riemann simplemente conexas, salvo equivalencia conforme. Ello significa que salvo equivalencia conforme el recubridor de una superficie de Riemann  $S$  es el plano complejo, el semiplano superior o la esfera de Riemann. Además existe una estructura analítica en el recubridor  $\tilde{S}$  tal que la proyección  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  es analítica [11, Teorema 4.19.5], y además es única (prop 1.3.1.3).

El grupo fundamental de  $S$  es isomorfo al grupo de transformaciones recubridoras  $\Gamma = \{g : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S} \mid \pi g = \pi\}$  (que permutan las preimágenes de cada  $s \in S$ ). Cada una de estas transformaciones es un automorfismo de  $\tilde{S}$  [11, Corolario 4.19.6]. Es más, el grupo de transformaciones recubridoras actúa discontinuamente en  $\tilde{S}$  [11, Teorema 4.19.2] y  $S$  es isomorfo al cociente  $\tilde{S}/\Gamma$ , y la proyección es el morfismo analítico.

Si el género  $p$  de  $S$  es mayor que 1, el recubridor universal es  $\tilde{S} = \mathbb{H}$ , y todo lo anterior se resume en el siguiente resultado:

**Proposición 3.6.2.1** ([7, Prop. 1.2.1]). *Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta de género  $p \geq 2$ ,  $r : \mathbb{H} \rightarrow S$  su aplicación recubridora y sea  $\Gamma$  el grupo*

$$\Gamma = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid rf = r\}. \quad (3.6.3)$$

*Denotamos por  $O_z$  a la órbita por  $\Gamma$  de un punto  $z \in \mathbb{H}$ . Entonces*

- La aplicación  $h : \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow S : O_z \mapsto r(z)$  es un homeomorfismo.
- El estabilizador  $\Gamma_z$  es trivial para todo  $z \in \mathbb{H}$ .
- $\Gamma$  es un grupo NEC de superficie y un grupo Fuchsiano.

Lo que quiere decir la proposición anterior es que el grupo  $\Gamma$  no contiene elementos elípticos y por tanto la proyección  $\pi$  no es ramificada en ningún punto. El objetivo es extender ahora este resultado a todas las superficies de Klein con género algebraico  $p \geq 2$ .

**Teorema 3.6.2.2** ([7, Tma. 1.2.3]). *Sea  $S$  una superficie de Klein compacta de género  $g$  y con  $k$  componentes en su borde  $\partial S$ . Si se cumple la condición  $ag + k \geq 3$ , entonces existe un grupo NEC de superficie  $\Gamma$  tal que  $S \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ . Y si  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$  es la proyección canónica, entonces*

$$\Gamma = \{\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi\gamma = \pi\}.$$

*Demostración.* La condición sobre el género y los óvalos de  $S$  es equivalente a que su género algebraico sea mayor de 1. Por tanto la cobertura doble  $S_c$  es el cociente del semiplano  $\mathbb{H}$  por un grupo NEC de superficie  $\Gamma_c \subset \text{Aut}^+(\mathbb{H})$  (de hecho Fuchsiano), en virtud de la proposición 3.6.2.1. Asumimos aquí que o bien no es orientable o bien  $k > 0$ , pues de lo contrario  $S$  es de Riemann y hemos acabado.

Sea  $\sigma$  la involución analítica que satisface  $f\sigma = f$ , donde  $f : S_c \rightarrow S$  es la proyección de la cobertura doble en  $S$ . Como  $\langle \sigma \rangle$  es finito, el cociente  $S_c/\langle \sigma \rangle$  es una superficie de Klein, y además es isomorfo a  $S$  (véase Prop. 1.5.1.1). En particular sea

$$\tilde{f} : S_c/\langle \sigma \rangle \rightarrow S : O_x \mapsto f(x)$$

tal isomorfismo. Como  $S_c \neq \mathbb{H}$  y  $r : \mathbb{H} \rightarrow S_c$  es una aplicación recubridora, existe una transformación  $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  no trivial tal que  $rg = \sigma r$ . En consecuencia  $\Gamma = \langle \Gamma_c, g \rangle$  es un subgrupo NEC tal que  $[\Gamma : \Gamma_c] = 2$ . Ello es consecuencia de que

- $g \notin \Gamma_c$ , puesto que  $g$  invierte la orientación (como  $\sigma$ ).
- $rg^2 = (rg)g = \sigma rg = \sigma^2 r = r$ , con lo cual  $g^2 \in \Gamma_c$ .
- Si  $h \in \Gamma_c$  entonces  $rg hg^{-1} = \sigma r h g^{-1} = \sigma r g^{-1} = r g g^{-1} = r$ , con lo cual  $g \Gamma_c g^{-1} \subseteq \Gamma_c$ .

Podemos entonces formar el cociente  $\mathbb{H}/\Gamma$ . El objetivo es mostrar que es isomorfo a  $S$ . Para ello construimos un isomorfismo  $h$  que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{H}/\Gamma \\ \downarrow r & & \uparrow h \\ S_c & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (3.6.4)$$

La función buscada es  $h : f(r(z)) \mapsto \pi(z)$ , que está bien definida. Como  $\Gamma$  es discreto (a consecuencia de serlo  $\Gamma_c$ ) y el cociente  $\mathbb{H}/\Gamma \simeq S$  es compacto, entonces  $\Gamma$  es un grupo NEC. Supongamos que  $\Gamma$  tiene un elemento elíptico  $e$ . Como  $\Gamma_c$  es de superficie,  $e \in \Gamma \setminus \Gamma_c$ , con lo cual  $\Gamma = \Gamma_c \cup e\Gamma_c \in \text{Aut}^+(\mathbb{H})$ , esto último por ser  $e$  un elemento que preserva la orientación. Pero hemos supuesto que  $S$  no es de Riemann, y por tanto  $\Gamma \notin \text{Aut}^+(\mathbb{H})$ , por lo que no existe ningún elemento elíptico en  $\Gamma$ , y es por tanto de superficie.

Por definición,  $\Gamma \subset \{\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi\gamma = \pi\}$ . Para la inclusión contraria, si  $\pi\gamma = \pi$ , entonces o bien es analítica (en cuyo caso  $\gamma \in \Gamma_c \subset \Gamma$ ) o bien es antianalítica, en cuyo caso  $g\gamma$  es analítica y tiene la propiedad de que

$$\pi g\gamma = f r g\gamma = f \sigma r\gamma = f r\gamma = \pi\gamma = \pi.$$

Entonces  $g\gamma \in \Gamma_c$ , lo cual implica que  $\gamma \in g^{-1}\Gamma_c = g\Gamma_c \subset \Gamma$ . ■

### 3.6.3 Levantamientos de isomorfismos al semiplano superior

Como hemos visto, si  $S_c$  es una superficie de Riemann de género  $p \geq 2$ , entonces el recubridor universal de  $S_c$  es el semiplano superior  $\mathbb{H}$ . Además, existe un grupo NEC (Fuchsiano) de superficie  $\Gamma_c$  que coincide con el grupo de transformaciones recubridoras, es decir, que  $\pi_c g = \pi_c$  para todo  $g \in \Gamma_c$ . En este caso sí es posible levantar un isomorfismo  $\tau : \mathbb{H}/\Gamma_c \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma'_c$  entre dos cocientes por grupos de superficie.

**Proposición 3.6.3.1.** Sean  $\Gamma_c$  y  $\Gamma'_c$  dos grupos Fuchsianos de superficie, y sean  $X_c = \mathbb{H}/\Gamma_c$  y  $X'_c = \mathbb{H}/\Gamma'_c$  sus cocientes. Si existe un isomorfismo  $\tau : X_c \rightarrow X'_c$  entonces existe un isomorfismo  $\tilde{\tau} \in \text{Aut}^+(\mathbb{H})$  tal que  $\pi'_c \tilde{\tau} = \tau \pi_c$ . En particular,  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados por  $\tilde{\tau}$ .

*Demostración.* Sea  $\tilde{\tau}\pi'_c : \mathbb{H} \rightarrow X'_c$ . Como  $\mathbb{H}$  es el recubridor universal de  $X'_c$  y  $\pi'_c$  es la proyección recubridora, dado un punto  $x' \in (\pi'_c)^{-1}(\tau(\pi_c(x)))$ , existe una función analítica  $\tilde{\tau}$  de un entorno de  $x$  en un entorno de  $x'$ , que satisface  $\pi'_c \tilde{\tau} = \tau \pi_c$ . Además, podemos extender dicha función por continuación analítica a todo  $\mathbb{H}$  y el teorema de monodromía garantiza que dicha función es única. La proyección  $\pi_c$  es sobreyectiva, luego por la proposición 1.3.1.1 es un morfismo. Razonando de forma análoga sobre la inversa de  $\tau$  se obtiene otra función analítica que lleva  $x'$  en  $x$ , que es el morfismo inverso de  $\tilde{\tau}$ .

Sea ahora un elemento  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $\pi_c \gamma = \pi_c$ , se tiene que

$$\pi'_c(\tilde{\tau}\gamma\tilde{\tau}^{-1}) = \tau\pi_c\gamma\tilde{\tau}^{-1} = \tau\pi_c\tilde{\tau}^{-1} = \pi'_c\tilde{\tau}\tilde{\tau}^{-1} = \pi'_c$$

y por tanto  $\tilde{\tau}\Gamma\tilde{\tau}^{-1} \subseteq \Gamma'$ . La inclusión contraria se prueba de forma análoga. ■

El isomorfismo obtenido no será en general único, pues depende de la imagen  $x'$  que hayamos elegido. La traslación de esta proposición a superficies de Klein arbitrarias se obtiene usando el teorema 1.5.2.3:

**Proposición 3.6.3.2.** Sean  $X$  y  $X'$  dos superficies de Klein compactas que satisfacen cada una de ellas la condición  $ag + k \geq 3$ . Si existe un isomorfismo  $\tau : X \rightarrow X'$ , entonces existe un automorfismo  $\tilde{\tau} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  que induce  $\tau$ .

*Demostración.* Sean  $X_c$  y  $X'_c$  sus coberturas dobles. Entonces  $\tau$  levanta a un isomorfismo  $\tau' : X_c \rightarrow X'_c$  tal que  $\tau f = f' \tau'$ , siendo estas las proyecciones asociadas a cada cobertura doble. Por la proposición anterior, este isomorfismo levanta a su vez a un isomorfismo  $\tilde{\tau} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  que verifica  $\pi'_c \tilde{\tau} = \tau \pi_c$ . En consecuencia,  $\pi' \tilde{\tau} = \tau \pi$ , y que por lo tanto induce  $\tau$ .

Además, si  $\Gamma_c$  y  $\Gamma'_c$  son los grupos Fuchsianos de superficie que producen los cocientes  $X_c$  y  $X'_c$ , entonces  $\Gamma = \langle \Gamma_c, \sigma \rangle$  y  $\Gamma' = \langle \Gamma'_c, \sigma' \rangle$  son grupos NEC de superficie tales que  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  y  $X' = \mathbb{H}/\Gamma'$ . La demostración de que son grupos NEC con índice  $[\Gamma : \Gamma_c] = [\Gamma' : \Gamma'_c] = 2$  es análoga a la del teorema 3.6.2.2. ■

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores, y de la proposición 1.5.4.1

**Teorema 3.6.3.3.** Sean dos superficies de Klein  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  y  $X' = \mathbb{H}/\Gamma'$  para sendos grupos NEC de superficie  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ . Entonces  $X$  y  $X'$  son isomorfas si y solo si  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados en  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ .

*Demostración.* Resta por probar que si  $X$  y  $X'$  son isomorfas, entonces  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados. Por la proposición anterior, existe un automorfismo  $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  tal que  $\pi' \tilde{\tau} = \tau \pi$ . Repitiendo el razonamiento de 3.6.3.1, sea  $\gamma \in \Gamma$ : como  $\pi \gamma = \pi$ , se tiene que

$$\pi'(\tilde{\tau} \gamma \tilde{\tau}^{-1}) = \tau \pi \gamma \tilde{\tau}^{-1} = \tau \pi \tilde{\tau}^{-1} = \pi' \tilde{\tau} \tilde{\tau}^{-1} = \pi'$$

luego  $\tilde{\tau} \Gamma \tilde{\tau}^{-1} \subseteq \Gamma'$ . La inclusión contraria se prueba de forma análoga. ■

Ahora aplicaremos el resultado anterior al caso en que ambas superficies son la misma:

**Teorema 3.6.3.4.** Sea  $\Gamma$  un grupo NEC de superficie. Entonces  $\text{Aut}(\mathbb{H}/\Gamma) \simeq N(\Gamma)/\Gamma$ , donde  $N(\Gamma)$  es el normalizador de  $\Gamma$  en  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ .

*Demostración.* Por el teorema anterior, todo isomorfismo  $g \in \text{Aut}(\mathbb{H}/\Gamma)$  levanta a un isomorfismo  $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  tal que  $\tau \Gamma \tau^{-1} = \Gamma$ , con lo cual  $\tau \in N(\Gamma)$ . Así pues podemos definir un homomorfismo sobreyectivo  $h : \tau \mapsto g$ , pues es obvio que  $h(\tau \tau') = h(\tau)h(\tau')$ , por simple composición de aplicaciones. El núcleo de este homomorfismo es  $\{\tau \in N(\Gamma) \mid h(\tau) = id\} = \{\tau \in N(\Gamma) \mid \pi = \pi \tau\} = \Gamma$ . Por el primer teorema de isomorfía

$$\text{Aut}(\mathbb{H}/\Gamma) \simeq N(\Gamma)/\Gamma.$$

Cabe destacar que el normalizador de un grupo NEC en  $Aut(\mathbb{H})$  es a su vez un grupo NEC [7, Prop. 1.3.4].

En toda esta sección, la hipótesis de que los grupos NEC carecen de periodos es esencial, pues para que se pueda levantar homotópicamente un isomorfismo es necesario que el recubrimiento sea regular, no ramificado. Por ejemplo dos grupos Fuchsianos triangulares cualesquiera tienen cocientes isomorfos a la esfera de Riemann. Sin embargo, si sus periodos no coinciden entonces no son ni siquiera isomorfos, con lo que tampoco pueden ser conjugados [11, p. 252].

El teorema 3.6.3.4 se extiende a cualquier grupo de autormorfismos de un cociente  $\mathbb{H}/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo N.E.C. de superficie:

**Teorema 3.6.3.5** ([7, p. 37]). *Sea  $\Gamma$  un grupo N.E.C. de superficie y  $G$  un grupo de autormorfismos del cociente  $\mathbb{H}/\Gamma$ . Entonces existe un grupo N.E.C.  $\Gamma'$  que contiene a  $\Gamma$  como subgrupo normal, tal que  $G \simeq \Gamma'/\Gamma$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo de automorfismo de la superficie de Klein  $\mathbb{H}/\Gamma$ .  $G$  es por tanto subgrupo de  $Aut(\mathbb{H}/\Gamma)$ , lo que significa que  $N(\Gamma)/\Gamma$  contiene un subgrupo isomorfo a  $G$ , obtenido por composición de la aplicación inclusión con el isomorfismo  $\varphi : Aut(\mathbb{H}/\Gamma) \rightarrow N(\Gamma)/\Gamma$  (véase Tma. 3.6.3.4). Sea  $K = \varphi(G)$  dicho subgrupo.  $K$  está formado por clases laterales de  $\Gamma$  en  $N(\Gamma)$ : llamemos  $\Gamma'$  a la unión de dichas clases:  $\Gamma' = \{g\gamma | g\Gamma \in K; \gamma \in \Gamma\} \subset N(\Gamma)$ . El conjunto  $\Gamma'$  tiene estructura de grupo, pues si  $h_1 = g_1\gamma_1$  y  $h_2 = g_2\gamma_2$  están en  $\Gamma'$  entonces

$$h_1 \cdot h_2^{-1} = g_1\gamma_1(g_2\gamma_2)^{-1} = g_1(\gamma_1\gamma_2^{-1})g_2^{-1} = g_1g_2^{-1}\gamma_3 = g_3\gamma_3.$$

para ciertos  $g_3\Gamma \in K$ ,  $\gamma_3 \in \Gamma$ . En consecuencia  $\Gamma'$  es un subgrupo de  $N(\Gamma)$  que contiene a  $\Gamma$  como subgrupo. como  $N(\Gamma)$  es un grupo NEC,  $\Gamma'$  también lo es. El que  $\Gamma$  sea normal en  $\Gamma'$  se debe a que  $\Gamma$  es estable bajo conjugación en  $\Gamma'$ : dado  $h = g\gamma \in \Gamma'$  arbitrario

$$h^{-1}\Gamma h = (g\gamma)^{-1}\Gamma g\gamma = (\gamma'g)^{-1}\Gamma(\gamma''g) = g^{-1}(\gamma')^{-1}\Gamma\gamma''g = g^{-1}\Gamma g = \Gamma$$

donde  $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$  y  $g \in N(\Gamma)$ . Por construcción, el cociente  $\Gamma'/\Gamma$  es isomorfo a  $K$  y por tanto a  $G$ . ■

## GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE ORDEN $\geq 4(p - 1)$

Sea  $X$  una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico  $p > 1$ . En tal caso existe un grupo N.E.C. de superficie con borde  $\Lambda$  tal que  $X \simeq \mathbb{H}/\Lambda$ . En este capítulo estudiaremos bajo qué condiciones puede existir un grupo  $G$  de automorfismos de  $X$  de orden  $|G| \geq 4(p - 1)$ . Dicho orden será finito pues para  $p > 1$  el grupo de automorfismos es finito (véase el teorema 1.5.3.3). En consecuencia la acción de  $G$  sobre  $X$  es discontinua y el cociente  $X/G$  es una superficie de Klein compacta. Puesto que  $\partial X \neq \emptyset$ , el cociente  $X/G$  también tiene borde no vacío, con lo que ambas son superficies de Klein estrictas.

El primer resultado que necesitamos es una fórmula de Riemann-Hurwitz para morfismos entre superficies de Klein. A continuación la aplicaremos a la proyección  $\pi : X \rightarrow X/G$ , lo que nos permitirá obtener una serie de condiciones acerca de los puntos de ramificación de  $\pi$ . En todo este proceso seguiremos el razonamiento de C.L. May [14], adaptándolo a nuestro problema.

En segundo lugar, el grupo  $G$  de automorfismos es isomorfo al cociente  $\Gamma/\Lambda$ , para cierto grupo N.E.C.  $\Gamma$  que contiene a  $\Lambda$  como subgrupo normal. En tal caso, es de aplicación el teorema 2.4.1 de [7], que establece que la signatura de  $\Gamma$  tiene un ciclo de periodos vacío o un ciclo con dos periodos consecutivos de valor 2. Diremos para abreviar que el grupo  $G$  *actúa* con la signatura  $\sigma(\Gamma)$ .

El que el orden del grupo  $G$  sea superior a cierta cota es equivalente a que el área de la signatura del grupo  $\Gamma$  sea inferior a otra cota, que se determina por la relación entre el índice del subgrupo y las áreas respectivas.

### 4.1 Fórmula de Riemann-Hurwitz

El objetivo es encontrar una fórmula como la de Riemann-Hurwitz entre superficies de Riemann, que relacione el índice de los puntos de ramificación de un morfismo entre superficies de Klein compactas con sus géneros [14, Tma. 2].

### 4.1.1 Morfismos entre superficies de Klein estrictas y compactas

**Teorema 4.1.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  superficies de Klein estrictas (no de Riemann) compactas y sea  $f : X \rightarrow Y$  un recubrimiento (sobreyectivo) de grado  $r$ . Sea  $p_X$  el género algebraico de  $X$  y  $p_Y$  el de  $Y$ . Entonces

$$p_X - 1 = r(p_Y - 1) + \sum_{x \in X} \frac{n_x}{2} (e_f(x) - 1). \quad (4.1.1)$$

*Demostración.* Sea  $F : X_c \rightarrow Y_c$  la aplicación analítica entre superficies de Riemann que levanta el morfismo  $f$  a las respectivas coberturas dobles de Riemann. Si el grado de  $F$  es  $r'$ , la fórmula de Hurwitz para superficies de Riemann compactas [16, Teorema 4.16] en este caso establece

$$2p_X - 2 = r'(2p_Y - 2) + \sum_{\omega \in X_c} (e_F(\omega) - 1). \quad (4.1.2)$$

donde el género de  $X_c$  es por definición  $p_X$  y el de  $Y_c$  es  $p_Y$ .

Por otro lado la aplicación analítica  $F$  tiene grado  $r'$ , y como las proyecciones  $\pi_X : X_c \rightarrow X$  y  $\pi_Y : Y_c \rightarrow Y$  tienen grado 2, se tiene

$$\pi_Y F = f \pi_X \implies 2r = 2r'.$$

Finalmente,  $e_F(\omega) = e_{\pi_Y F}(\omega) = e_{f \pi_X}(\omega) = e_f(\pi_X(\omega))$ , con lo cual

$$\sum_{\omega \in X_c} (e_F(\omega) - 1) = \sum_{x \in X} n_x (e_f(x) - 1).$$

donde  $n_x$ , definido como en 1.3.5, es el número puntos en la preimagen de  $x$  por  $\pi_X$ .

Sustituyendo todos los elementos en la fórmula se obtiene la expresión del teorema. ■

### 4.1.2 Fórmula de Hurwitz para la proyección canónica

Sea ahora un grupo N.E.C.  $\Gamma$  y  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  su espacio de órbitas. Como el género algebraico de  $X$  es  $p \geq 2$  podemos afirmar que  $Aut(X)$  es finito. Consideremos entonces el cociente  $X/G$ , para cierto grupo de automorfismos  $G \subset Aut(X)$ . Este cociente es una superficie de Klein compacta, pues un grupo finito siempre actúa discontinuamente. Sea  $q$  el género algebraico del cociente. Aplicaremos la fórmula de Hurwitz a la proyección  $X \rightarrow X/G$ .

Para ello vamos a reescribir esta expresión en términos de los puntos de  $X/G$  sobre los cuales la proyección es ramificada. Estos puntos forman un conjunto finito

$$\{a_1, \dots, a_\omega\} \subset X/G$$

ya que son puntos aislados y  $X/G$  es compacta. Para cada tal  $a_i$  denominaremos  $n_i = n_{a_i}$  y  $k_i = e_\pi(x)$ , el índice de ramificación de cualquier punto  $x$  en la fibra  $X_i = \pi^{-1}(a_i)$ . Sea  $r$  el orden de  $G$ , lo que significa que  $\pi$  es un recubrimiento ramificado de  $r$  hojas.

Los únicos puntos que contribuyen al sumatorio son precisamente los puntos  $x \in X$  en los que  $\pi$  es ramificado. Sea  $\pi(x) = a_i$ ; se pueden dar dos casos:

- el grado relativo de  $x$  es 1, es decir,  $n_x = n_{a_i} = n_i$ . Entonces hay  $r/k_i$  puntos en la fibra  $X_i$  y

$$\sum_{x \in X_i} n_x(e_\pi(x) - 1) = \frac{r}{k_i} n_i (k_i - 1) = r n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$$

- el grado relativo de  $x$  es 2 ( $n_x = 2, n_i = 1$ ). Entonces hay  $r/2k_i$  puntos en la fibra  $X_i$  y

$$\sum_{x \in X_i} n_x(e_\pi(x) - 1) = \frac{r}{2k_i} 2(k_i - 1) = r n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$$

En consecuencia, en ambos casos la suma  $\sum_{x \in X_i} n_x(e_\pi(x) - 1)$  toma el mismo valor, que sustituido en la fórmula de la sección anterior resulta:

$$2(p - 1) = 2r(q - 1) + \sum_{i=1}^{\omega} r n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$$

que podemos reescribir como

$$\frac{2(p - 1)}{r} = 2q - 2 + \sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \quad (4.1.3)$$

Nótese que si  $p > 1$ , entonces el lado izquierdo de la igualdad es estrictamente positivo. En tal caso:

$$\sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) > 2 - 2q \quad (4.1.4)$$

### 4.1.3 Valores del género algebraico $q$ positivos

Vamos a estudiar las diferentes posibilidades que se dan en función del género algebraico  $q$  del cociente:

**$q > 1$ :**

En tal caso:  $2q - 2 + \sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \geq 2$  con lo cual

$$r \leq p - 1.$$

En consecuencia, para que el grupo de automorfismos alcance como mínimo la cota  $4(p - 1)$ , el género algebraico de  $X/G$  debe ser como máximo 1, lo que significa que su cobertura doble es la esfera o el toro. Las únicas superficies de Klein con borde que satisfacen dicha condición son el disco por un lado, y el ánulo y la banda de Möbius por el otro.

**$q = 1$ :**

Sustituyendo en la ecuación (4.1.3):

$$r = \frac{2(p - 1)}{\sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)},$$

con lo cual, para obtener  $r \geq 4(p-1)$  se debe cumplir

$$0 < \sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

La única combinación de valores para los cuales se alcanza este valor, que además es la cota superior para cualquier grupo de automorfismos que de lugar a una superficie de género algebraico unidad, es  $\omega = 1$ ,  $n_1 = 1$  y  $k_1 = 2$ . Es decir, la proyección  $\pi$  es ramificada sobre un punto  $a \in \partial(X/G)$ . La fibra de  $a$  está formada por  $r/2$  puntos en  $\partial X$  o bien  $r/4$  puntos en  $\overset{\circ}{X}$ .

#### 4.1.4 El caso $q = 0$

Cuando el género  $q$  es nulo, el cociente  $X/G$  es por fuerza el disco cerrado  $D$ . En este caso existen más posibilidades que dependen del número de puntos interiores sobre los que hay ramificación.

##### 4.1.4.1 Si solo hay ramificación sobre el interior de $X/G$

Entonces  $n_i = 2$  para todo  $i$ , con lo cual

$$\frac{(p-1)}{r} = -1 + \omega - \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{k_i} > 0$$

En consecuencia  $\omega > 1$ . Para que se alcance  $r \geq 4(p-1)$  se debe cumplir:

$$0 < \omega - 1 - \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{k_i} \leq \frac{1}{4}$$

lo cual implica que  $\omega = 2$  y los respectivos índices de ramificación son:

- bien  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$  y  $r = 6(p-1)$ .
- o bien  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 4$  y  $r = 4(p-1)$ .

##### 4.1.4.2 Ramificación sobre cualquier punto de $X/G$

Para que el lado derecho de la igualdad 4.1.3 sea positivo y se alcance un valor  $r \geq 4(p-1)$ , los valores de  $\omega$  deben encontrarse en el rango

$$3 \leq \omega \leq 5$$

Recordemos que en este caso al menos dos fibras están en  $\partial X$  ([14, Lema 2]) y sus índices de ramificación son de valor 2 ([14, Lema 1]). Entonces, sin pérdida de generalidad podemos tomar  $k_1 = k_2 = 2$ . En consecuencia, la fórmula 4.1.3 se reduce a

$$\frac{2(p-1)}{r} = -2 + \sum_{i=1}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) = -1 + \sum_{i=3}^{\omega} n_i \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$$

Como además el ciclo de periodos es no vacío, el teorema 2.4.2 de [7] garantiza que el índice de  $\Gamma$  en  $\Gamma'$  (esto es, el orden de  $G$ ) es un entero par.

$\omega = 3$

Se tiene

$$\frac{2(p-1)}{r} = -2 + 1 + n_3 \left(1 - \frac{1}{k_3}\right)$$

lo que conlleva  $n_3 = 2$  para que el lado derecho sea positivo. Si además se quiere la cota inferior para  $r$ , debe ser

$$0 < 1 - \frac{2}{k_3} \leq \frac{1}{2} \implies 2 < k_3 \leq 4.$$

Las dos posibilidades son

- bien  $k_3 = 3$  y  $r = 6(p-1)$ .
- o bien  $k_3 = 4$  y  $r = 4(p-1)$ .

$\omega = 4$

Para este valor se diferencian tres casos: ramificación sobre 2, 1 o cero puntos del interior de  $X/G$ .

- si  $n_3 = n_4 = 2$  entonces

$$\frac{2(p-1)}{r} = -1 + 2 \left(1 - \frac{1}{k_3} + 1 - \frac{1}{k_4}\right) = 3 - 2 \left(\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}\right) \geq 1$$

con lo cual  $r \leq 2(p-1)$ .

- si  $n_3 = 1, n_4 = 2$  entonces

$$\frac{2(p-1)}{r} = -1 + \left(1 - \frac{1}{k_3}\right) + 2 \left(1 - \frac{1}{k_4}\right) = 2 - \frac{1}{k_3} - \frac{2}{k_4} \geq \frac{1}{2}$$

por lo que  $r \geq 4(p-1)$  solamente si  $k_3 = k_4 = 2$ , y en tal caso se da la igualdad.

- si  $n_3 = n_4 = 1$  entonces

$$\frac{2(p-1)}{r} = -1 + \left(1 - \frac{1}{k_3} + 1 - \frac{1}{k_4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}\right)$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que  $k_3 \leq k_4$ , se dan las siguientes posibilidades:

- para  $k_3 = 2$ , cualquier valor de  $n > 2$  verifica que  $r \geq 4(p-1)$ . Pero para que  $r$  sea un entero par,  $k_4 - 2$  debe dividir a  $2k_4(p-1)$ .
- para  $k_3 = 3$ , debe ser  $k_4 < 7$ . Los únicos valores para los que  $r$  es siempre entero son  $k_4 = 3$  y  $k_4 = 6$ . Los valores  $k_4 = 4$  y  $k_4 = 5$  solo son posibles si  $p$  es congruente con  $1 \pmod{5}$  ó  $7$  respectivamente, en cuyo caso  $r$  es par.
- para  $k_3 = 4$ , debe ser  $k_4 = 4$ . Ningún valor mayor de  $k_3$  permite que  $r \geq 4(p-1)$ .

$\omega = 5$

Se tiene

$$\frac{2(p-1)}{r} = -2 + 1 + n_3 \left(1 - \frac{1}{k_3}\right) + \dots + n_5 \left(1 - \frac{1}{k_5}\right)$$

Con lo cual

$$0 < -1 + n_3 \left(1 - \frac{1}{k_3}\right) + \dots + n_5 \left(1 - \frac{1}{k_5}\right) \leq \frac{1}{2}$$

lo que solo puede darse si  $n_3 = n_4 = n_5 = 1$ ,  $k_3 = k_4 = k_5 = 2$ , valores para los cuales  $r = 4(p-1)$ .

#### 4.1.5 Resumen de resultados

En la tabla siguiente se recopilan los resultados de las secciones anteriores:

Tabla 4.1: Posibilidades de ramificación en  $X/G$  para  $|G| \geq 4(p-1)$ .

q	$\omega$	ramif. sobre int $X/G$	$\{k_1, \dots, k_\omega\}$	$r$	Observaciones
1	1	0	{2}	$4(p-1)$	
0	2	2	{2, 3}	$6(p-1)$	
			{2, 4}	$4(p-1)$	
0	3	1	{2, 2, 3}	$6(p-1)$	
		1	{2, 2, 4}	$4(p-1)$	
0	4	1	{2, 2, 2, 2}	$4(p-1)$	
0	4	0	{2, 2, 2, $n$ }	$\frac{4n(p-1)}{n-2}$	$n > 2$
			{2, 2, 3, $m$ }	$\frac{6m(p-1)}{2m-3}$	$6 \geq m \geq 3$
			{2, 2, 4, 4}	$4(p-1)$	
0	5	0	{2, 2, 2, 2, 2}	$4(p-1)$	

## 4.2 Signaturas con las que puede actuar el grupo $G$

Recordemos que  $G$  es isomorfo al cociente de un grupo N.E.C.  $\Gamma$  que contiene al grupo de superficie  $\Lambda$  como subgrupo normal. Ello significa que  $|G| = [\Gamma : \Lambda]$ . Las áreas de sus regiones fundamentales (o sus signaturas) guardan la misma proporción, es decir

$$\frac{\mu(\Lambda)}{\mu(\Gamma)} = |G| \iff \frac{\mu(\Lambda)}{|G|} = \mu(\Gamma).$$

Como  $\Lambda$  es de superficie, su área es

$$\mu(\Lambda) = 2\pi(\alpha g + k - 2) = 2\pi(p-1).$$

El problema de buscar aquellos grupos  $G$  cuyo orden sea al menos  $4(p-1)$ , equivale a buscar grupos N.E.C. cuya área cumpla

$$\mu(\Gamma) \leq \frac{2\pi(p-1)}{4(p-1)} = \frac{\pi}{2}$$

Para obtener las signaturas  $\sigma$  que cumplen dicha condición extenderemos el resultado del lema 4.1.1 de [7] a las signaturas que cumplen la igualdad  $\mu(\Gamma) = \pi/2$ . Nos apoyaremos en la

sección anterior teniendo en cuenta que la ramificación sobre un punto interior de  $X/G$  representa un periodo propio de  $\sigma$ .

#### 4.2.1 Signaturas $\sigma$ con área $\leq \pi/2$

Según la expresión (3.5.2), el área de una signatura es

$$\mu(\sigma) = 2\pi \left\{ q - 1 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right\} \quad (4.2.1)$$

donde hemos sustituido el género algebraico  $q = ag + k - 1$ . La condición  $0 < \mu(\sigma) \leq \pi/2$  equivale entonces a

$$0 < q - 1 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \leq \frac{1}{4}. \quad (4.2.2)$$

Para establecer el siguiente lema necesitaremos algunos resultados del capítulo 2 de [7] que estudia la relación entre las signaturas de un grupo y sus subgrupos normales.

**Lema 4.2.1.1.** *Sea  $\Gamma$  un grupo NEC que admite un grupo N.E.C. de superficie  $\Lambda$  como subgrupo normal, y sea  $\mu(\Gamma) \geq \pi/2$ . Entonces la signatura de  $\Gamma$  es una de las siguientes:*

1.  $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$
2.  $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$
3.  $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$
4.  $(0; +; [3]; \{(2,2)\})$
5.  $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$
6.  $(0; +; [2]; \{(2,2,2)\})$
7.  $(0; +; [-]; \{(2,2,2,n)\}) \quad n > 2$
8.  $(0; +; [-]; \{(2,2,3,m)\}) \quad 6 \geq m \geq 3$
9.  $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$
10.  $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$

*Demostración.* Valores de  $q$  mayores o iguales a 2 no son posibles. Para valores de  $q$  menores, recurrimos a la tabla 4.1. Si  $q = 1$  entonces  $r = 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $s_1 = 1$ ,  $s_j = 0$  para  $j > 1$ ,  $n_{1,0} = 2$ . Pueden darse dos casos: que  $X/G$  sea la banda de Möbius (no orientable,  $g = 1$  y  $k = 1$ ) o que sea un anulo (orientable,  $g = 0$  y  $k = 2$ ). Sin embargo en el primero no se cumple la condición del ciclo de

periodos vacío o con dos periodos consecutivos de valor 2 [7, Tma. 2.4.1]. En el segundo en cambio sí que aparece un ciclo vacío, y además es el único caso posible con  $k \geq 2$ .

Si  $q = 0$ , el cociente  $X/G$  es el disco cerrado (orientable,  $g = 0$ ,  $k = 1$ ), luego la signatura  $\sigma$  es de la forma

$$(\{0; +; [m_1, \dots, m_r]; \{(2, 2, n_3, \dots, n_s)\}\}) \quad \text{o bien} \quad (\{0; +; [m_1, \dots, m_r]; \{(-)\}\})$$

para ciertos enteros  $m_1, \dots, m_r$ , y  $n_3, \dots, n_s$ . En este caso, al existir un solo ciclo de periodos y ser no vacío, forzosamente deben aparecer dos periodos consecutivos de valor 2 [7, Tma. 2.4.1]. Consideraremos sin pérdida de generalidad que son los dos primeros, ya que permutar cíclicamente un ciclo de periodos da como resultado una signatura equivalente.

Volviendo a la tabla 4.1, se obtienen todas las signaturas de este tipo, teniendo en cuenta que ramificaciones sobre puntos interiores dan lugar a periodos propios. ■

Este mismo resultado se podría haber obtenido a partir de la expresión para el área de una signatura  $\sigma$ , estudiando los posibles valores de  $q$ ,  $r$ ,  $k$  y de los periodos  $m_i$  y  $n_{i,j}$  para los cuales su valor es menor que  $\pi/2$ .

### 4.3 Subgrupos propios de $Aut(S)$

Ahora consideraremos la relación entre un grupo  $G$  de automorfismos de una superficie de Klein con borde  $S = \mathbb{H}/\Lambda$ , y el grupo completo  $Aut(S)$ . El primero será isomorfo a  $\Gamma/\Lambda$  para cierto grupo N.E.C.  $\Gamma$  que contiene a  $\Lambda$  como subgrupo normal. El segundo será isomorfo al cociente  $N_{Aut(\mathbb{H})}(\Lambda)/\Lambda$ . Es obvio que  $\Lambda$  es normal en su normalizador, pero además  $N_{Aut(\mathbb{H})}(\Lambda) = \Gamma'$  contiene a  $\Gamma$  (pues este normaliza a  $\Lambda$ ).

#### 4.3.1 Consideraciones sobre el orden e índice de $G$ en $Aut(S)$

Tal como demostró May, existe una cota superior para el orden del grupo de automorfismos de una superficie de Klein  $S = \mathbb{H}/\Lambda$  con borde y de género  $p > 1$ :

**Teorema 4.3.1.1** ([14, Teorema 5]). *Si el género algebraico  $p$  de una superficie de Klein  $S$  compacta y con borde es mayor o igual a 2, entonces*

$$|Aut(S)| \leq 12(p-1) \tag{4.3.1}$$

En el caso de que esta cota se alcance para una superficie  $S$ , decimos que  $Aut(S)$  es un  $M^*$ -grupo [6]. Puesto que en este caso el orden de  $Aut(S)$  es mayor que  $4(p-1)$ ,  $Aut(S)$  debe ser isomorfo al cociente por  $\Lambda$  de un grupo N.E.C.  $\Gamma'$ , que contiene a  $\Lambda$  como subgrupo normal, y cuya signatura sea una de las del lema 4.2.1.1. Inspeccionando el valor que se obtiene para el

orden del grupo en cada caso, solo puede tratarse de la signatura número 7, en la que el valor del periodo restante es  $n = 3$ , es decir:

$$\sigma(\Gamma') = (0 ; + ; [-] ; \{ (2, 2, 2, 3) \} ) = \sigma_3.$$

Ahora bien, si el subgrupo  $G \subset Aut(S)$  tiene orden  $|G| \geq 4(p-1)$ , y a la vez  $|Aut(S)| \leq 12(p-1)$ , entonces

$$[Aut(S) : G] = \frac{|Aut(S)|}{|G|} \leq \frac{12(p-1)}{4(p-1)} \leq 3.$$

En consecuencia:

**Lema 4.3.1.2.** *Sea  $G$  un grupo de automorfismos de una superficie de Klein  $S$  con borde y con género algebraico  $p > 1$ , y sea el orden de  $G$  mayor o igual que  $4(p-1)$ . Entonces solo caben las siguientes posibilidades:*

- $G = Aut(S)$ , o
- $[Aut(S) : G] = 2$  ó  $3$ .

Vamos a suponer a continuación que este grupo  $G$  es un subgrupo propio de  $Aut(S)$ , y por tanto tiene índice 2 ó 3 en  $Aut(S)$ . Por el mismo argumento de antes, el orden de  $G$  es como máximo  $6(p-1)$ . Nótese que  $Aut(S)$  también es un grupo de automorfismos de orden mayor que  $4(p-1)$  y en consecuencia, tanto  $G$  como  $Aut(S)$  actúan con alguna de las signaturas del lema 4.2.1.1. En cualquier caso, no es posible que  $G$  sea un subgrupo propio de un subgrupo propio, puesto que para ello su índice debería ser al menos 4.

Por otra parte, para que  $Aut(S)$  contenga a  $G$  como subgrupo propio su orden debe ser al menos  $8(p-1)$ . Inspeccionando de nuevo el listado vemos que este valor solo puede alcanzarse con la signatura nº 7 cuando  $n = 3$  o  $n = 4$ . El primer caso ya lo hemos visto antes, y el segundo da como resultado

$$\sigma(\Gamma') = (0 ; + ; [-] ; \{ (2, 2, 2, 4) \} ) = \sigma_4,$$

en la que precisamente  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ . Estos son los dos únicos valores posibles, y solamente hay una signatura para cada uno de ellos. En consecuencia el orden de un subgrupo propio  $G$  si es mayor o igual que  $4(p-1)$  entonces solo puede tomar este valor o  $6(p-1)$ . En el primer caso tendrá índice 2 ó 3, y en el segundo necesariamente 2.

### 4.3.2 Parejas de signaturas compatibles

Vamos a inspeccionar cuáles de las signaturas de la lista cumplen la condición  $4(p-1) \leq |G| \leq 6(p-1)$ , y cuál puede ser la signatura de  $Aut(S)$  atendiendo a su orden. Ello no significa que existan parejas de grupos N.E.C. con dichas signaturas contenidos el uno en el otro, para lo cual deberán darse condiciones adicionales.

Posteriormente comprobaremos si es posible o no que un grupo N.E.C. con signatura  $\sigma$  esté contenido en otro grupo N.E.C. con signatura  $\sigma_3$  o  $\sigma_4$  (las únicas posibles).

Tabla 4.2: Signaturas con las que puede actuar  $G$ , si  $4(p-1) \leq |G| \leq 6(p-1)$ , atendiendo solamente al orden de los grupos.

$\sigma$	$ G $	Si $[Aut(S):G] = 2$ orden de $Aut(S)$	Si $[Aut(S):G] = 3$ orden de $Aut(S)$
$(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [2, 3]; \{(-)\})$	$6(p-1)$	$12(p-1)$	–
$(0; +; [2, 4]; \{(-)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [3]; \{(2, 2)\})$	$6(p-1)$	$12(p-1)$	–
$(0; +; [4]; \{(2, 2)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 6)\})$	$6(p-1)$	$12(p-1)$	–
$(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 3)\})$	$6(p-1)$	$12(p-1)$	–
$(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 6)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [-]; \{(2, 2, 4, 4)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$
$(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$	$4(p-1)$	$8(p-1)$	$12(p-1)$

De la lista anterior podemos descartar inmediatamente como subgrupos propios de  $Aut(S)$  los que actúan con signaturas  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 6)\})$  y  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 6)\})$ , pues dicho grupos contienen elementos de orden 6, pero ni  $\Gamma_3$  ni  $\Gamma_4$  tienen elementos de orden 6. En cuanto al resto de signaturas, comprobaremos caso por caso si se dan las posibilidades  $[Aut(S):G] = 2$  y  $[Aut(S):G] = 3$ .

### 4.3.3 El grupo completo $Aut(S) = G^*$

En adelante nos centraremos en buscar, para cada signatura de la lista, subgrupos propios de automorfismos que actúen con ella, suponiendo que existan. Para ello trataremos de buscar primero el grupo completo de automorfismos, cuando este actúa con signaturas  $\sigma_3$  o  $\sigma_4$ . De manera estándar consideraremos las siguientes presentaciones para grupos N.E.C. con estas signaturas:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &\rightarrow \Gamma'_3 = \langle c'_0, c'_1, c'_2, c'_3 \mid c'^2_0 = c'^2_1 = c'^2_2 = c'^2_3 = (c'_0 c'_1)^2 = (c'_1 c'_2)^2 = (c'_2 c'_3)^2 = (c'_3 c'_0)^3 = 1 \rangle \\ \sigma_4 &\rightarrow \Gamma'_4 = \langle c'_0, c'_1, c'_2, c'_3 \mid c'^2_0 = c'^2_1 = c'^2_2 = c'^2_3 = (c'_0 c'_1)^2 = (c'_1 c'_2)^2 = (c'_2 c'_3)^2 = (c'_3 c'_0)^4 = 1 \rangle \end{aligned}$$

A continuación buscaremos presentaciones posibles para los grupos finitos de automorfismos. Puesto que el grupo de automorfismos  $G^*$  es isomorfo a  $\Gamma'/\Lambda$ , para cierto  $\Gamma'$ , la proyección  $\theta: \Gamma' \rightarrow \Gamma'/\Lambda = G^*$  es un epimorfismo con kernel  $\Lambda$ . Así pues, necesitaremos una presentación para el grupo  $G^*$  y un epimorfismo  $\theta$  cuyo núcleo sea un grupo N.E.C. de superficie con borde. En tal caso diremos que el epimorfismo  $\theta$  es *suave* o *de superficie*. Para ello se deberán cumplir dos requisitos:

- $\theta$  debe preservar el orden de cada generador  $c'_i \notin \ker \theta$  y el de los productos  $c'_i c'_{i+1}$ , y
- al menos una reflexión  $c'_j$  debe estar en  $\ker \theta$ .

Procuraremos, siempre que sea posible, trabajar con familias infinitas de grupos en lugar de con grupos concretos, pues aquellas proporcionan resultados más generales. En particular, usaremos las siguientes familias de grupos:

- $G_D^* = \langle a, c, d \mid a^2 = c^2 = d^2 = (ac)^{2n} = (cd)^2 = (ad)^4 = (acad)^2 = 1 \rangle$ , para cada  $n > 0$ .

El subgrupo generado por  $(ac)^2$ , de orden  $n$ , es normal puesto que

$$\begin{aligned} (acac)^a &= (acac)^c = caca = (acac)^{-1} \quad y \\ (acac)^d &= dacac d = acad c d = (ac)^2 \end{aligned}$$

por ser  $acad = dacac$  y  $cd = dc$ . El cociente  $G_D^*/\langle (ac)^2 \rangle$  es isomorfo al producto directo  $\langle a, d \mid a^2 = d^2 = (ad)^4 = 1 \rangle \times \langle c \mid c^2 = 1 \rangle \simeq D_4 \times C_2$ . Por tanto el orden de  $G_D^*$  es  $16n$ . Consideremos la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  dada por

$$c'_0 \mapsto d, \quad c'_1 \mapsto c, \quad c'_2 \mapsto 1, \quad c'_3 \mapsto a.$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos, pues  $\theta_D(r_j) = 1$  para cada relator  $r_j$  de la presentación de  $\Gamma'_4$ . Además es sobreyectivo pues todos los generadores de  $G_D^*$  están en la imagen de  $\theta_D$ . Este epimorfismo es suave y su kernel uniformiza una superficie de Klein con borde  $S$ . Puesto que  $|\Gamma'_4/\Lambda| = 8(p-1) = 16n = |G_D^*|$ , resulta que el género de  $S$  es  $p = 2n + 1$ , y que  $G_D^*$  es el grupo completo de automorfismos de  $S$ .

- $G_S^* = \langle a, c, d \mid a^2 = c^2 = d^2 = (cd)^2 = (da)^4 = acadacdad = (ac)^{3n} = 1 \rangle$ , para cada  $n > 0$ .

El subgrupo generado por  $(ac)^3$ , de orden  $n$ , es normal puesto que

$$\begin{aligned} (acacac)^a &= (acacac)^c = cacaca = (acacac)^{-1} \quad y \\ (acacac)^d &= dacaca c d = acadacd c d = (ac)^3 \end{aligned}$$

ya que  $dacaca = acadacd$  (multiplíquese el relator  $acadacdad$  por la izquierda por  $cadaca$  y por la derecha por  $dad$  y se obtiene  $cadaca = dad = acadacd$ ).

El cociente  $G_S^*/\langle (ac)^3 \rangle$  es isomorfo al grupo simétrico  $S_4$ , y por tanto el orden de  $G_S^*$  es  $24n$ . Consideremos la aplicación  $\theta_S : \Gamma'_4 \rightarrow G_S^*$  dada por

$$c'_0 \mapsto a, \quad c'_1 \mapsto 1, \quad c'_2 \mapsto c, \quad c'_3 \mapsto d.$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos, pues  $\theta_S(r_j) = 1$  para cada relator  $r_j$  de la presentación de  $\Gamma'_4$ . Además es sobreyectivo pues todos los generadores de  $G_S^*$  están en la imagen de  $\theta_S$ . Este epimorfismo es suave y su kernel uniformiza una superficie de Klein con borde  $S$ . Puesto que  $|\Gamma'_4/\Lambda| = 8(p-1) = 24n = |G_S^*|$ , resulta que el género de  $S$  es  $p = 3n + 1 > 1$ , y que  $G_S^*$  es el grupo completo de automorfismos de  $S$ .

- $G_N^* = \langle a, c, d \mid a^2 = c^2 = d^2 = (cd)^2 = (ad)^3 = (ac)^6 = (acacac)^n = 1 \rangle$ , para cada  $n > 0$ .

Los elementos  $v = cacada$  y  $u = acacac = v^a$  verifican las igualdades

$$u^a = v, \quad v^a = u, \quad u^c = u, \quad v^c = uv^{-1}, \quad u^d = u^{-1} \quad \text{y} \quad v^d = vu^{-1},$$

y por tanto generan un subgrupo normal  $N$ . Además conmutan entre ellos y tienen ambos orden  $n$ , por lo que  $\langle u, v \rangle$  es abeliano e isomorfo a  $C_n \times C_n$ . El cociente  $G_N^*/N$  (generado por las imágenes de  $a$  y  $c$ ) es isomorfo a  $D_6$ . En particular,  $G_N^*$  es de orden  $12n^2$ . Consideremos la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  dada por

$$c'_0 \mapsto a, \quad c'_1 \mapsto 1, \quad c'_2 \mapsto c, \quad c'_3 \mapsto d$$

Igual que en los otros casos, esta aplicación define un epimorfismo suave, y su núcleo uniformiza una superficie de Klein con borde  $S$ . Se tiene ahora que  $|\Gamma'_3/\Lambda| = 12(p-1) = 12n^2 = |G_N^*|$ , con lo cual el género de  $S$  es  $p = n^2 + 1 > 1$  y  $G_N^*$  es el grupo completo de automorfismos de  $S$ .

#### 4.3.4 Signaturas posibles para subgrupos propios de $Aut(S)$

Veamos ahora los casos de la tabla 4.2. En cada caso, utilizaremos alguno de los pares de grupos y epimorfismos definidos antes.

Primero escogeremos una familia de grupos  $G^*$  apropiada para cada caso, junto con el epimorfismo suave  $\theta$ , de entre los definidos en el apartado anterior. Después definiremos un subgrupo propio  $\Gamma < \Gamma'_i$ , con índice  $n = 2$  ó  $3$ , y obtendremos la imagen de  $\Gamma$  por el epimorfismo  $\theta$ . El grupo imagen es un grupo de automorfismos que actúa en la misma superficie  $S$  si el kernel de la restricción  $\theta|_\Gamma$  coincide con  $ker \theta$ . Ahora bien

$$\begin{aligned} [\Gamma'_i : ker(\theta|_\Gamma)] &= [\Gamma'_i : \Gamma] \cdot [\Gamma : ker(\theta|_\Gamma)] = n \cdot |G| \quad \text{y} \\ [\Gamma'_i : ker(\theta|_\Gamma)] &= [\Gamma'_i : ker(\theta)] \cdot [ker(\theta) : ker(\theta|_\Gamma)] = |G^*| \cdot [ker(\theta) : ker(\theta|_\Gamma)]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$[ker(\theta) : ker(\theta|_\Gamma)] = \frac{n|G|}{|G^*|} = \frac{n}{[G^* : G]}.$$

En consecuencia,  $ker(\theta) = ker(\theta|_\Gamma)$  si y solo si el índice de  $G$  en  $G^*$  es el mismo que el de  $\Gamma$  en  $\Gamma'_i$ .

##### 4.3.4.1 $\sigma = (0; +; [-]; \{(-), (2)\})$

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $4(p-1)$ . No existen grupos de automorfismos con esta signatura que tengan índice 3 en  $Aut(S)$ , puesto que ningún grupo N.E.C. con signatura  $\sigma_3$  contiene un grupo N.E.C. con signatura  $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$  e índice 3.

Para el caso en que el índice de  $\Gamma$  en  $\Gamma' = \Gamma'_4$  sea 2, consideremos el grupo  $G_D^*$  y la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$e = c'_3 c'_1, \quad c_{10} = c'_0 \quad \text{y} \quad c_{20} = c'_2.$$

Este es un subgrupo normal, de índice 2, pues

$$e^{c'_1} = e^{c'_3} = e^{-1}, \quad c'_{10} = c_{10}, \quad c'_{10} = ec_{10}e^{-1}, \quad c'_{20} = c'_{20} = c_{20}$$

Estos generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$c_{10}^2 = c_{20}^2 = (ec_{10}e^{-1}c_{10})^2 = ec_{20}e^{-1}c_{20} = 1,$$

por lo que la signatura de  $\Gamma$  es  $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ . La imagen  $\theta_D(\Gamma)$  es un subgrupo  $G$  de  $G_D^*$  generado por  $\theta_D(e) = ac$  y  $\theta_D(c_{10}) = d$ . Este subgrupo es normal, ya que

$$d^d = d^c = d, \quad d^a = ac \cdot d \cdot ca \quad (ac)^a = (ac)^c = ca, \quad (ac)^d = d \cdot ac \cdot d.$$

El cociente  $G_D^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo valor de  $n$ , luego  $[G_D^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$  y  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En resumen, para todo  $n > 0$  existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$ , de género algebraico  $p = 2n + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  actuando con signatura  $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

#### 4.3.4.2 $\sigma = (0; +; [2, 3]; \{(-)\})$

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $6(p-1)$ , luego el índice de  $\Gamma$  en  $\Gamma' = \Gamma'_3$  solo puede ser 2. Consideremos el grupo  $G_N^*$  y la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_3$  generado por los elementos

$$x_1 = c'_2c'_3, \quad x_2 = c'_3c'_0, \quad e = c'_0c'_2 \quad \text{y} \quad c_{10} = c'_1.$$

Este es un subgrupo normal, de índice 2, pues

$$\begin{aligned} x_1^{c'_0} &= ex_2, & x_1^{c'_2} &= x_1^{c'_3} = x_1^{-1}, \\ x_2^{c'_0} &= x_2^{c'_3} = x_2^{-1}, & x_2^{c'_2} &= x_1e, \\ c'_{10} &= c'_{10} = c_{10}, & c'_{10} &= x_1^{-1}c_{10}x_1 \end{aligned}$$

(como  $e = x_2^{-1}x_1^{-1}$  podemos ignorarlo). Estos generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x_1^2 = x_2^3 = c_{10}^2 = ec_{10}e^{-1}c_{10} = x_1x_2e = 1,$$

por lo que la signatura de  $\Gamma$  es  $(0; +; [2, 3]; \{(-)\})$ . La imagen  $\theta_N(\Gamma)$  es un subgrupo  $G$  de  $G_N^*$  generado por  $\theta_N(x_1) = cd$  y  $\theta_N(x_2) = da$ . Este subgrupo es normal, ya que

$$(cd)^a = ad dc da, \quad (cd)^c = (cd)^d = dc, \quad (da)^a = (da)^d = ad, \quad (da)^c = cd ad dc$$

El cociente  $G_N^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo valor de  $n$ , luego  $[G_N^* : G] = [\Gamma'_3 : \Gamma]$  y  $|G| = 6(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En resumen, para todo  $n > 0$  existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$ , de género algebraico  $p = n^2 + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $6(p-1)$  actuando con signatura  $(0; +; [2, 3]; \{(-)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 12(p-1)$ .

**4.3.4.3  $\sigma = (0; +; [2,4]; \{(-)\})$** 

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $4(p-1)$ , por lo que puede tener índice 2 en  $\Gamma'_4$  o índice 3 en  $\Gamma'_3$ . Sin embargo este último caso no es posible: no hay elementos de orden 4 en ningún grupo N.E.C. con signatura  $\sigma_3$ .

Consideremos el grupo  $G_D^*$  y la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$x_1 = c'_2 c'_3, \quad x_2 = c'_3 c'_0 \quad e = c'_0 c'_2 \quad \text{y} \quad c_0 = c'_1.$$

Este es un subgrupo normal, pues es estable bajo conjugación por los generadores de  $\Gamma'_4$  que no están en  $\Gamma$  ( $e$  no es más que  $(x_1 x_2)^{-1}$  por lo que podemos ignorarlo):

$$\begin{aligned} x_1^{c'_0} &= x_2^{-1} x_1 x_2, & x_1^{c'_2} &= x_1^{c'_3} = x_1^{-1} \\ x_2^{c'_0} &= x_2^{c'_3} = x_2^{-1}, & x_2^{c'_2} &= e^{-1} x_2^{-1} e \\ c_0^{c'_0} &= c_0^{c'_2} = c_0, & c_0^{c'_3} &= x_1^{-1} c_0 x_1 \end{aligned}$$

Este subgrupo tiene índice 2 en  $\Gamma'_4$ . Los generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x_1^2 = x_2^4 = c_0^2 = e c_0 e^{-1} c_0 = x_1 x_2 e = 1,$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ . La imagen  $\theta_D(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta_D(x_1) = cd$  y por  $\theta_D(x_2) = da$ . Este subgrupo es normal en  $G_D^*$  ya que

$$\begin{aligned} (da)^a &= (da)^d = ad = (da)^{-1}, & (da)^c &= cdac = (cd)(da)^{-1}(cd)^{-1} \quad \text{y} \\ (cd)^a &= acda = (da)^{-1}(cd)^{-1}(da), & (cd)^c &= (cd)^d = dc = (cd)^{-1}. \end{aligned}$$

El cociente  $G_D^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo  $n$ , luego  $[G_D^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$  y  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En consecuencia, existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$  de género algebraico  $p = 2n + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  que actúa con signatura  $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

**4.3.4.4  $\sigma = (0; +; [3]; \{(2,2)\})$** 

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $6(p-1)$ , luego el índice de  $\Gamma$  en  $\Gamma' = \Gamma'_3$  solo puede ser 2. Consideremos el grupo  $G_N^*$  y la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_3$  generado por los elementos...

$$x_1 = c'_3 c'_0, \quad c_{10} = c'_1, \quad c_{11} = c'_2 \quad \text{y} \quad c_{12} = c'_3 c'_1 c'_3.$$

Este es un subgrupo normal, de índice 2, pues

$$\begin{aligned}x_1^{c'_0} &= x_1^{c'_3} = x_1^{-1}, \\c_{10}^{c'_0} &= c_{10}, \quad c_{10}^{c'_3} = c_{12}, \\c_{11}^{c'_0} &= x_1^{-1} c_{11} x_1, \quad c_{11}^{c'_3} = c_{11}, \\c_{12}^{c'_0} &= x_1^{-1} c_{10} x_1, \quad c_{12}^{c'_3} = c_{10}.\end{aligned}$$

Estos generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x_1^3 = c_{10}^2 = c_{11}^2 = c_{12}^2 = (c_{10}c_{11})^2 = (c_{11}c_{12})^2 = x_1c_{10}x_1^{-1}c_{12} = 1,$$

por lo que la signatura de  $\Gamma$  es  $(0; +; [3]; \{(2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_N(\Gamma)$  es un subgrupo  $G$  de  $G_N^*$  generado por  $\theta_N(x_1) = da$  y  $\theta_N(c_{11}) = c$ . Este subgrupo es normal, ya que

$$(da)^a = (da)^d = ad, \quad c^a = x_1^{-1}cx_1, \quad c^d = c.$$

El cociente  $G_N^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo valor de  $n$ , luego  $[G_N^* : G] = [\Gamma'_3 : \Gamma]$  y  $|G| = 6(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En resumen, para todo  $n > 0$  existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$ , de género algebraico  $p = n^2 + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $6(p-1)$  actuando con signatura  $(0; +; [3]; \{(2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 12(p-1)$ .

#### 4.3.4.5 $\sigma = (0; +; [4]; \{(2, 2)\})$

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $4(p-1)$ , por lo que puede tener índice 2 en  $\Gamma'_4$  o índice 3 en  $\Gamma'_3$ . Sin embargo este último caso no es posible: no hay elementos de orden 4 en ningún grupo N.E.C. con signatura  $\sigma_3$ .

Consideremos el grupo  $G_D^*$  y la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$x = c'_0c'_3, \quad c_0 = c'_2, \quad c_1 = c'_1 \quad \text{y} \quad c_2 = c'_0c'_2c'_0.$$

Este es un subgrupo normal, pues es estable bajo conjugación por los generadores de  $\Gamma'_4$  que no están en  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}x^{c'_0} &= x^{c'_3} = x^{-1}, \quad c_0^{c'_0} = c_2, \quad c_0^{c'_3} = c_0 \\c_1^{c'_0} &= c_1, \quad c_1^{c'_3} = x^{-1}c_1x, \quad c_2^{c'_0} = c_0, \quad c_2^{c'_3} = x^{-1}c_0x.\end{aligned}$$

Además tiene índice 2 en  $\Gamma'_4$ . Los generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x^4 = c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = (c_0c_1)^2 = (c_1c_2)^2 = xc_0x^{-1}c_2 = 1$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [4]; \{(2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_D(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta(x) = ad$  y por  $\theta(c_2) = c$ . Este subgrupo es normal en  $G_D^*$  ya que

$$\begin{aligned}(ad)^a &= (ad)^{-1}, \quad c^a = (ad)(dcd)(da) = (ad)c(ad)^{-1} \quad \text{y} \\(ad)^d &= (ad)^{-1}, \quad c^d = dcd = c.\end{aligned}$$

El cociente  $G_D^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo valor de  $n$ , luego  $[_D G^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$  y  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En consecuencia, existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$  de género algebraico  $p = 2n + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  que actúa con signatura  $(0; +; [4]; \{(2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

#### 4.3.4.6 $\sigma = (0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $4(p-1)$ , por lo que puede tener índice 2 en  $\Gamma'_4$  o índice 3 en  $\Gamma'_3$ .

Para el caso  $[Aut(S) : G] = 2$ : consideremos el grupo  $G_D^*$  y la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$x = c'_0 c'_1, \quad c_0 = c'_2, \quad c_1 = c'_3, \quad c_2 = c'_0 c'_3 c'_0 \quad \text{y} \quad c_3 = c'_0 c'_2 c'_0.$$

Este es un subgrupo normal, pues es estable bajo conjugación por los generadores de  $\Gamma'_4$  que no están en  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} x^{c'_0} &= x^{c'_1} = x^{-1}, & c_0^{c'_0} &= c_3, & c_0^{c'_1} &= c_0, & c_1^{c'_0} &= c_2, \\ c_1^{c'_1} &= x^{-1} c_2 x, & c_2^{c'_0} &= c_1, & c_2^{c'_1} &= x^{-1} c_1 x, & c_3^{c'_0} &= c_0, & c_3^{c'_1} &= x^{-1} c_0 x \end{aligned}$$

Además tiene índice 2 en  $\Gamma'_4$ . Los generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x^2 = c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_0 c_1)^2 = (c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3)^2 = (c_3 c_4)^2 = (c_3 x c_0 x^{-1})^2 = 1$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_D(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta_D(x) = cd$ ,  $\theta_D(c_1) = a$  y  $\theta_D(c_2) = dad$ . Este subgrupo es normal en  $G_D^*$  ya que

$$\begin{aligned} (cd)^c &= (cd)^d = (cd)^{-1}, & a^d &= dad, & (dad)^d &= a, \\ (a)^c &= cd dad dc, & (dad)^c &= cd a dc, \end{aligned}$$

y tiene índice 2 para todo  $n$ , con lo cual  $[G_D^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$ . El cociente  $G_D^*/G$  es isomorfo a  $C_2$ , luego  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En consecuencia, existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$  de género algebraico  $p = 2n + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  que actúa con signatura  $(0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

Para el caso  $[Aut(S) : G] = 3$ : consideremos el grupo  $G_N^*$  y la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_3$  generado por los elementos

$$x = c'_3 c'_0 c'_1 c'_3, \quad c_0 = c'_2, \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_0 \quad \text{y} \quad c_3 = c'_3 c'_0 c'_2 c'_0 c'_3.$$

Este es un subgrupo no normal de índice 3, como se puede comprobar con GAP [9]. Los generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$x^2 = c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_0 c_1)^2 = (c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3)^2 = x c_0 x^{-1} c_3 = 1,$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_N(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta_N(x) = adca$ ,  $\theta_N(c_1) = c$  y  $\theta_N(c_2) = d$ .

Usando los mismos elementos  $u$  y  $v$  definidos en 4.3.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} u &= acacad = acda \cdot d \cdot adca \cdot d \in G \\ v &= cacada = c \cdot aca \cdot adad = c \cdot acda \cdot d \in G \\ adca &= adacac \cdot acacad \cdot c \cdot d = v^{-1}ucd. \end{aligned}$$

Por tanto,  $G = \langle acda, c, d \rangle = \langle u, v, c, d \rangle$ . El subgrupo generado por  $u$  y  $v$  está contenido en  $G$  y es normal. El cociente  $G / \langle u, v \rangle$  es isomorfo a  $C_2 \times C_2$ , por lo que  $G$  tiene índice 3 en  $G_N^*$  y  $[G_N^* : G] = [\Gamma'_3 : \Gamma]$ . El orden de  $G$  es  $4n^2$  para cada entero positivo  $n$ . Como resultado de ello, para todo  $n > 0$  existe una superficie de Klein  $S$  compacta con borde, de género algebraico  $p = n^2 + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p - 1)$  actuando con signatura  $(0; +; [2]; \{(2, 2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 12(p - 1)$ .

#### 4.3.4.7 $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 3)\})$

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $6(p - 1)$ , luego el índice de  $\Gamma$  en  $\Gamma' = \Gamma'_3$  solo puede ser 2. Consideremos el grupo  $G_N^*$  y la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_3$  generado por los elementos...

$$c_{10} = c'_2 c'_0 c'_2, \quad c_{11} = c'_1, \quad c_{12} = c'_0 \quad \text{y} \quad c_{13} = c'_3.$$

Este es un subgrupo normal, de índice 2, pues

$$c_{10}' = c_{12}, \quad c_{11}' = c_{11}, \quad c_{12}' = c_{10}, \quad c_{13}' = c_{13}.$$

Estos generadores satisfacen las relaciones defnitorias

$$c_{10}^2 = c_{11}^2 = c_{12}^2 = c_{13}^2 = (c_{10}c_{11})^2 = (c_{11}c_{12})^2 = (c_{12}c_{13})^3 = (c_{13}c_{10})^3 = 1,$$

por lo que la signatura de  $\Gamma$  es  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 3)\})$ . La imagen  $\theta_N(\Gamma)$  es un subgrupo  $G$  de  $G_N^*$  generado por  $\theta_N(c_{10}) = cac$ ,  $\theta_N(c_{12}) = a$  y por  $\theta_N(c_{13}) = d$ . Este subgrupo es normal, ya que

$$(cac)^c = a, \quad (a)^c = cac, \quad d^c = d.$$

El cociente  $G_N^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo valor de  $n$ , luego  $[G_N^* : G] = [\Gamma'_3 : \Gamma]$  y  $|G| = 6(p - 1)$  para cada entero positivo  $n$ . En resumen, para todo  $n > 0$  existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$ , de género algebraico  $p = n^2 + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $6(p - 1)$  actuando con signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 3)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 12(p - 1)$ .

**4.3.4.8  $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 4, 4)\})$** 

Un grupo  $G$  que actúa con signatura  $\sigma$  tiene orden  $4(p-1)$ , por lo que puede tener índice 2 en  $\Gamma'_4$  o índice 3 en  $\Gamma'_3$ . Sin embargo este último caso no es posible: no hay elementos de orden 4 en ningún grupo N.E.C. con signatura  $\sigma_3$ .

Consideremos el grupo  $G_D^*$  y la aplicación  $\theta_D : \Gamma'_4 \rightarrow G_D^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$c_0 = c'_3, \quad c_1 = c'_2, \quad c_2 = c'_1 c'_3 c'_1 \quad \text{y} \quad c_3 = c'_0.$$

Este es un subgrupo normal, pues es estable bajo conjugación por  $c'_1$  —el único generador de  $\Gamma'_4$  que no está en  $\Gamma$ — y tiene índice 2 en  $\Gamma'_4$ . Los generadores satisfacen las relaciones definatorias

$$c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_0 c_1)^2 = (c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3)^4 = (c_3 c_0)^4 = 1$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 4, 4)\})$ . La imagen  $\theta_D(\Gamma)$  es un subgrupo  $G$  de  $G_D^*$  generado por  $\theta_D(c_0) = a$ ,  $\theta_D(c_2) = cac$  y  $\theta_D(c_3) = d$ . Este subgrupo es normal en  $G_D^*$  ya que

$$a^c = cac, \quad (cac)^c = a \quad \text{y} \quad d^c = d.$$

El cociente  $G_D^*/G$  es isomorfo a  $C_2$  para todo  $n$ , luego  $[G_D^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$  y  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero positivo  $n$ . En consecuencia, existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$  de género algebraico  $p = 2n + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  que actúa con signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 4, 4)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

**4.3.4.9  $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$** 

Un grupo  $\Gamma$  que actúe con signatura  $\sigma$  tendrá orden  $4(p-1)$ , por lo que puede tener índice 2 en  $\Gamma'_4$  o índice 3 en  $\Gamma'_3$ .

Para el caso  $[Aut(S) : G] = 2$ : consideremos el grupo  $G_S^*$  y la aplicación  $\theta_S : \Gamma'_4 \rightarrow G_S^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_4$  generado por los elementos

$$c_0 = c'_1, \quad c_1 = c'_2, \quad c_2 = c'_3, \quad c_3 = c'_0 c'_3 c'_0 \quad \text{y} \quad c_4 = c'_0 c'_2 c'_0.$$

Este es un subgrupo normal, pues es estable bajo conjugación por  $c'_0$  —el único generador de  $\Gamma'_4$  que no está en  $\Gamma$ — y tiene índice 2 en  $\Gamma'_4$ . Los generadores satisfacen las relaciones definatorias

$$c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = c_4^2 = (c_0 c_1)^2 = (c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3)^2 = (c_3 c_4)^2 = (c_4 c_0)^2 = 1,$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_S(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta_S(c_1) = c$ ,  $\theta_S(c_2) = d$ ,  $\theta_S(c_3) = ada$ , y por  $\theta_S(c_4) = aca$ . Este subgrupo es normal en  $G_S^*$  ya que es estable bajo conjugación por  $a$  —el único generador de  $G_S^*$  que no está en  $G$ —. Ahora bien, podemos tomar como generadores de  $G$  los elementos  $\langle c, d, ada, (ac)^2 \rangle$ , pues  $(ac)^2 = aca c$  y

$aca = (ac)^2 c$ . En consecuencia  $\langle (ac)^2 \rangle$  es un subgrupo de  $G$ . Si  $n$  es par,  $\langle (ac)^2 \rangle \neq \langle (ac) \rangle$  y  $G$  tiene índice 2 en  $G_S^*$ , pero si  $n$  es impar,  $\langle (ac)^2 \rangle = \langle (ac) \rangle$  y  $G = \langle c, d, ada, (ac) \rangle = \langle c, d, a \rangle = G_S^*$ .

En consecuencia,  $[G_S^* : G] = [\Gamma'_4 : \Gamma]$  y  $|G| = 4(p-1)$  para cada entero par  $n$ , luego para cada entero positivo  $m$  existe una superficie de Klein compacta con borde  $S$  de género algebraico  $p = 6m + 1 > 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  que actúa con signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 8(p-1)$ .

Para el caso  $[Aut(S) : G] = 3$ : consideremos el grupo  $G_N^*$  y la aplicación  $\theta_N : \Gamma'_3 \rightarrow G_N^*$  definidos en 4.3.3. Sea el subgrupo  $\Gamma < \Gamma'_3$  generado por los elementos

$$c_0 = c'_0, \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad c_3 = c'_3 c'_1 c'_3 \quad \text{y} \quad c_4 = c'_3 c'_0 c'_2 c'_0 c'_3.$$

Este es un subgrupo no normal de índice 3, como se puede comprobar con GAP [9]. Los generadores satisfacen las relaciones definitorias

$$c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = c_4^2 = (c_0 c_1)^2 = (c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3)^2 = (c_3 c_4)^2 = (c_4 c_0)^2 = 1,$$

luego  $\Gamma$  tiene signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$ . La imagen  $\theta_N(\Gamma)$  es un grupo  $G$  generado por  $\theta_N(c_0) = a$ ,  $\theta_N(c_2) = c$  y por  $\theta_N(c_4) = dacad$ .

Usando los mismos elementos  $u$  y  $v$  definidos en 4.3.3, se obtiene que

$$u^{-1} v^{-1} cacac = dacaca adacac cacac = dacacdc = dacad$$

luego

$$G = \langle a, c, dacad \rangle = \langle a, c, u^{-1} v^{-1} cacac \rangle = \langle a, c, uv \rangle.$$

Más aún, también  $(uv)^c = u^c v^c = u^2 v^{-1}$  pertenece a  $G$ , con lo cual

$$G = \langle a, c, uv \rangle = \langle a, c, uv, u^2 v^{-1} \rangle = \langle a, c, uv, u^3 \rangle.$$

Se deduce que si  $n$  (el orden de  $u$ ) no es divisible por 3 entonces  $\langle u^3 \rangle = \langle u \rangle$  y en consecuencia  $G = G_N^*$ . Sin embargo, si  $n$  es divisible por 3 entonces  $\langle uv, u^3 \rangle \simeq C_n \times C_{n/3}$  y por tanto  $G$  tiene índice 3 en  $G_N^*$  y  $|G| = 4(p-1)$ . En consecuencia  $[G_N^* : G] = [\Gamma'_3 : \Gamma]$ . Esto demuestra que para todo entero positivo  $m$  existe una superficie de Klein  $S$  compacta con borde de género algebraico  $p = 9m^2 + 1$  con un grupo de automorfismos  $G$  de orden  $4(p-1)$  actuando con signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$  y tal que  $|Aut(S)| = 12(p-1)$ .

### 4.3.5 Conclusiones

Recuperamos la tabla 4.2, pero esta vez indicamos qué casos son posibles, con la información que hemos obtenido en la sección anterior.

Tabla 4.3: Signaturas con las que puede actuar  $G \subsetneq \text{Aut}(S)$ , si  $4(p-1) \leq |G| \leq 6(p-1)$ .

$\sigma$	$[\text{Aut}(S):G] = 2$	$[\text{Aut}(S):G] = 3$
$(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [2,3]; \{(-)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [2,4]; \{(-)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [3]; \{(2,2)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [4]; \{(2,2)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [2]; \{(2,2,2)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	Sí, para infinitos valores de $p$ .
$(0; +; [-]; \{(2,2,2,6)\})$	No es posible.	No es posible.
$(0; +; [-]; \{(2,2,3,3)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [-]; \{(2,2,3,6)\})$	No es posible.	No es posible.
$(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	No es posible.
$(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$	Sí, para infinitos valores de $p$ .	Sí, para infinitos valores de $p$ .

En particular, hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.5.1.** *Sea  $G$  un subgrupo propio de automorfismos de una superficie de Klein con borde  $S$  de género algebraico  $p$ . Si el orden de  $G$  es mayor o igual que  $4(p-1)$  entonces  $G$  actúa con una de las signaturas de la tabla siguiente:*

$\sigma$	Orden de $G$	Índice en $\text{Aut}(S)$
$(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$	$4(p-1)$	2
$(0; +; [2,3]; \{(-)\})$	$6(p-1)$	3
$(0; +; [2,4]; \{(-)\})$	$4(p-1)$	2
$(0; +; [3]; \{(2,2)\})$	$6(p-1)$	2
$(0; +; [4]; \{(2,2)\})$	$4(p-1)$	2
$(0; +; [2]; \{(2,2,2)\})$	$4(p-1)$	2 ó 3
$(0; +; [-]; \{(2,2,3,3)\})$	$6(p-1)$	2
$(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$	$4(p-1)$	2
$(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$	$4(p-1)$	2 ó 3

*Recíprocamente, para cada pareja de signaturas e índices  $(\sigma, n)$  de la tabla existe una superficie  $S$  de género  $p$ , para infinitos valores de  $p$ , tal que un subgrupo propio  $G$  de automorfismos de  $S$  actúa con signatura  $\sigma$  y tiene índice  $n$  en  $\text{Aut}(S)$ .*

#### 4.4 Signaturas con las que puede actuar $\text{Aut}(S)$

La cuestión de si un grupo de automorfismos actuando con una signatura  $\sigma$  puede ser el grupo completo o bien admite una extensión, es más compleja de resolver. Este problema está relacionado con el concepto de maximalidad [5, p. 13]:

- Un grupo NEC  $\Gamma$  es *maximal* si no está propiamente contenido en ningún otro grupo NEC.

- Una signatura  $\sigma$  NEC es *maximal* si para cada grupo NEC  $\Gamma'$  que contiene un grupo NEC  $\Gamma$  con signatura  $\sigma$ , la igualdad  $dim(\Gamma) = dim(\Gamma')$  implica la igualdad  $\Gamma = \Gamma'$ , donde  $dim(\Gamma)$  es la dimensión de espacio de Teichmüller de  $\Gamma$ .

Cuando un grupo  $\Gamma$  es maximal, su signatura  $\sigma(\Gamma)$  es maximal. Sin embargo ello no significa que todo grupo NEC con signatura  $\sigma(\Gamma)$  sea maximal: puede existir un grupo NEC  $\Gamma'$  con la misma signatura  $\sigma(\Gamma)$  que esté propiamente contenido en otro grupo NEC. No obstante

**Teorema 4.4.0.1** ([5, Tma. 1.4.8]). *Si  $\sigma$  es una signatura maximal, entonces existe un grupo NEC maximal  $\Gamma$  tal que  $\sigma(\Gamma) = \sigma$ .*

En consecuencia:

**Corolario 4.4.0.2** ([5, Cor. 1.4.9]). *Dados un grupo NEC de superficie  $\Lambda$  y un grupo NEC  $\Gamma$  que contiene a  $\Lambda$  como subgrupo normal, y tales que el grupo de automorfismos  $G = \Gamma/\Lambda$  tiene signatura  $\sigma$  maximal, entonces existe un grupo  $\Gamma'$  maximal, isomorfo a  $\Gamma$  vía  $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ , tal que  $G' = \varphi(\Gamma)/\varphi(\Lambda)$  es el grupo completo de automorfismos de  $\mathbb{H}/\varphi(\Lambda)$ .*

Esto significa que si un grupo  $G$  de automorfismos actúa sobre una superficie  $S$  con una signatura maximal  $\sigma$ , existe un grupo de automorfismos  $G'$  que actúa sobre una superficie homeomorfa  $S'$  con signatura  $\sigma$ , cuya acción es topológicamente equivalente, y tal que  $G'$  es el grupo completo de automorfismos de  $S'$ . Esto es debido a que signaturas iguales implican isomorfismo, y que la clasificación topológica de  $S$  depende solo de la signatura de  $\Lambda$ , que es única para grupos de superficie isomorfos.

La gran mayoría de signaturas NEC son maximales, excepto para una lista cerrada de pares de signaturas  $\sigma < \sigma'$ . Las parejas de signaturas que representan subgrupos normales fueron obtenidas por Bujalance en [4], y las no normales por Estévez e Izquierdo en [8]. Si un grupo  $G$  de automorfismos actúa sobre una superficie  $S$  con una signatura que no aparece en el listado como contenida en otra, entonces dicha signatura se realiza como el grupo completo de automorfismos de una superficie topológicamente equivalente a aquella.

Si por el contrario la signatura no es maximal, el grupo  $G$  se corresponde con un grupo NEC  $\Gamma$ , que contiene como subgrupo normal a un grupo NEC de superficie  $\Lambda$ , que uniformiza  $S$ , y tal que  $\Gamma$  está propiamente contenido en un grupo NEC  $\Gamma'$ . No obstante, ello no significa automáticamente que la acción de  $G$  se pueda extender a un grupo de automorfismos estrictamente mayor. La razón es que el grupo  $\Lambda$  puede ser normal en este  $\Gamma'$  o no serlo. En el primer caso,  $\Gamma'/\Lambda$  es un grupo de automorfismos de  $S$  que contiene una copia isomorfa a  $G$ . En el segundo caso, la extensión de la acción de  $G$  no será posible.



## CONCLUSIONES

Las conclusiones principales de este trabajo se recogen a continuación:

- El estudio de las isometrías del semiplano superior  $\mathbb{H}$ , que coinciden con sus automorfismos como superficie de Klein, se justifica puesto que toda superficie de Klein compacta, con unas pocas excepciones, se obtiene como cociente del plano hiperbólico bajo la acción de un subgrupo discreto de sus automorfismos.
- Cuando el cociente  $S = \mathbb{H}/\Gamma$  es una superficie compacta, decimos que el grupo discreto  $\Gamma$  es un grupo cristalográfico no euclídeo (grupo NEC). Esta superficie  $S$  se puede construir explícitamente identificando aristas de una región fundamental regular para  $\Gamma$ . Su cobertura doble  $S_c$ , que es una superficie de Riemann, es entonces el cociente por su subgrupo Fuchsiano canónico  $\mathbb{H}/\Gamma^+$ .
- Cada grupo NEC queda determinado salvo isomorfismo por una signatura NEC de la forma

$$(g, \pm, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

Así mismo, ciertas parejas de signaturas distintas son equivalentes, bajo ciertas reglas de permutación de sus periodos, lo cual significa que los grupos NEC que determinan son isomorfos.

- No toda signatura se corresponde con un subgrupo de  $Aut(\mathbb{H})$ , no obstante, pues se requiere que se cumplan ciertas restricciones geométricas. Cuando estas se cumplen, las características topológicas de  $S$  (género  $g$ , orientabilidad  $\pm$  y número de componentes del borde  $k$ ) están determinados por la signatura de este grupo NEC.

- Todo morfismo entre superficies de Klein se puede expresar en forma local normal como una potencia —seguida tal vez de un plegado— cuyo exponente se denomina multiplicidad. Análogamente a como sucede con las superficies de Riemann, se define el grado de una aplicación en un punto, que resulta ser constante en todo punto de  $S$ . Se puede demostrar que existe una fórmula de Hurwitz para superficies de Klein.
- El morfismo cociente  $\mathbb{H} \rightarrow S$  será en general un recubrimiento ramificado de  $S$ . Este morfismo es no ramificado precisamente cuando  $G$  es un grupo de superficie, es decir, cuando su signatura no contiene ningún periodo. Recíprocamente, toda superficie de Klein que satisface

$$\alpha g + k \geq 3, \quad \text{donde } \alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es cociente de  $\mathbb{H}$  por un grupo NEC de superficie.

- El grupo de automorfismos de  $S = \mathbb{H}/\Gamma$ , que es finito, resulta ser isomorfo al cociente

$$Aut(\mathbb{H}/\Gamma) \simeq N_{Aut(\mathbb{H})}(\Gamma)/\Gamma$$

Usando la fórmula de Hurwitz mencionada antes, es posible encontrar una cota superior para  $|Aut(S)|$ , que en el caso de superficies de Klein con borde es  $12(p-1)$ , valor que no se puede mejorar pues se alcanza para infinitos valores del género algebraico  $p$ .

- Dos superficies  $\mathbb{H}/\Gamma$  y  $\mathbb{H}/\Gamma'$  son isomorfas como superficies de Klein si y solo si los grupos NEC de superficie  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados en  $Aut(\mathbb{H})$ . Por tanto, del estudio de las clases de equivalencia de superficies de Klein obtenidas a partir de la clase de isomorfismo del grupo  $\Gamma$ , surge el espacio de Teichmüller  $T(\Gamma)$  que es la colección de clases de subgrupos de  $Aut(\mathbb{H})$  isomorfos pero no conjugados de  $\Gamma$ .
- Si el cociente  $\mathbb{H}/\Gamma$  es una superficie con borde, su grupo de automorfismos puede tener subgrupos propios de orden mayor o igual a  $4(p-1)$  (donde  $p$  es el género algebraico de  $\mathbb{H}/\Gamma$ ) solo en un número finito de casos. El orden de  $G$  solo puede tomar valor  $4(p-1)$  o  $6(p-1)$ . El normalizador de  $\Gamma$  en  $Aut(\mathbb{H})$  debe tener signatura  $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, t)\})$ , donde  $t$  solo puede adoptar los valores 3 ó 4. El subgrupo propio  $G \subsetneq Aut(S)$  se corresponde con un subgrupo de  $N_{Aut(\mathbb{H})}(\Gamma)$ , cuya signatura pertenece a una lista cerrada de nueve signaturas posibles. Cualquiera de estas nueve se realiza como subgrupo propio de automorfismos de una superficie de Klein compacta con borde de género algebraico  $p$ , para infinitos valores de  $p$ .



## APÉNDICE A

El siguiente código se ha utilizado en GAP para comprobar que efectivamente las signaturas NEC que se proponen como subgrupos de  $\Gamma'_3$  y  $\Gamma'_4$  son subgrupos propios, determinar su índice y si son normales o no (véase la sección 4.3.4).

### A.1 Código en GAP

```

1 #!/bin/sh
2
3 # Rutina de GAP para la comprobacion de los subgrupos NEC
4 # de Gamma'_3 y de Gamma'_4 que dan lugar a subgrupos propios
5 # de Aut (S) con orden mayor o igual que 4 (p-1).
6
7 gap -r -b -q << EOI
8
9 # definicion de los grupos NEC Gamma'_3 y Gamma'_4
10 f4 := FreeGroup( "c'0", "c'1", "c'2", "c'3" );;
11
12 G3 := f4 / [f4.1^2, f4.2^2, f4.3^2, f4.4^2, (f4.1*f4.2)^2, (f4.2*f4.3)^2, (f4.3*f4.4)^2,
13           (f4.4*f4.1)^3];
14
15 G4 := f4 / [f4.1^2, f4.2^2, f4.3^2, f4.4^2, (f4.1*f4.2)^2, (f4.2*f4.3)^2, (f4.3*f4.4)^2,
16           (f4.4*f4.1)^4];
17
18 # subgrupos de G4
19 Print("\nSubgrupos de G4 \n");
20
21 # ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [-] \ ; \{ \ (-), \ (2) \ \} \ )
22 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [-] ; \{ (-), (2) \} ) \n");
23
24 g1 := Subgroup(G4, [G4.4*G4.2, G4.1, G4.3]);

```

```

21 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g1), ". Indice en G4: ",
22     Index(G4,g1), "\n");
23
24 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [2,4] \ ; \{ \ (-) \ \} \ )
25 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [2,4] ; \{ (-) \} ) \n");
26 g2 := Subgroup(G4, [G4.3*G4.4, G4.4*G4.1, G4.2]);
27 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g2), ". Indice en G4: ",
28     Index(G4,g2), "\n");
29
30 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [4] \ ; \{ \ (2,2) \ \} \ )
31 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [4] ; \{ (2,2) \} ) \n");
32 g3 := Subgroup(G4, [G4.1*G4.4, G4.3, G4.2, G4.1*G4.3*G4.1]);
33 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g3), ". Indice en G4: ",
34     Index(G4,g3), "\n");
35
36 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [2] \ ; \{ \ (2,2,2) \ \} \ )
37 Print("\n Signatura ( 0 ; + \ ; [2] ; \{ (2,2,2) \} ) \n");
38 g4 := Subgroup(G4, [G4.1*G4.2, G4.3, G4.4, G4.1*G4.4*G4.1, G4.1*G4.3*G4.1]);
39 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g4), ". Indice en G4: ",
40     Index(G4,g4), "\n");
41
42 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [-] \ ; \{ \ (2,2,4,4) \ \} \ )
43 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [-] ; \{ (2,2,4,4) \} ) \n");
44 g5 := Subgroup(G4, [G4.4, G4.3, G4.2*G4.4*G4.2, G4.1]);
45 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g5), ". Indice en G4: ",
46     Index(G4,g5), "\n");
47
48 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [-] \ ; \{ \ (2,2,2,2,2) \ \} \ )
49 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [-] ; \{ (2,2,2,2,2) \} ) \n");
50 g6 := Subgroup(G4, [G4.2, G4.3, G4.4, G4.1*G4.4*G4.1, G4.1*G4.3*G4.1]);
51 Print("Es normal en G4? ", IsNormal(G4, g6), ". Indice en G4: ",
52     Index(G4,g6), "\n");
53
54 # subgrupos de G3
55 Print("\nSubgrupos de G3 \n");
56
57 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [2,3] \ ; \{ \ (-) \ \} \ )
58 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [2,3] ; \{ (-) \} ) \n");
59 g7 := Subgroup(G3, [G3.3*G3.4, G3.4*G3.1, G3.2]);
60 Print("Es normal en G3? ", IsNormal(G3, g7), ". Indice en G3: ",
61     Index(G3,g7), "\n");
62
63 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [3] \ ; \{ \ (2,2) \ \} \ )
64 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [3] ; \{ (2,2) \} ) \n");
65 g8 := Subgroup(G3, [G3.4*G3.1, G3.2, G3.3, G3.4*G3.2*G3.4]);
66 Print("Es normal en G3? ", IsNormal(G3, g8), ". Indice en G3: ",
67     Index(G3,g8), "\n");

```

```

68
69 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [-] \ ; \{ \ (2,2,3,3) \ \} \ )
70 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [-] ; \{ (2,2,3,3) \} ) \n");
71 g9 := Subgroup(G3, [G3.3*G3.1*G3.3, G3.2, G3.1, G3.4]);
72 Print("Es normal en G3? ", IsNormal(G3, g9), ". Indice en G3: ",
73     Index(G3,g9), "\n");
74
75 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [2] \ ; \{ \ (2,2,2) \ \} \ )
76 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [2] ; \{ (2,2,2) \} ) \n");
77 g10 := Subgroup(G3, [G3.4*G3.1*G3.2*G3.4, G3.3, G3.2, G3.1, G3.4*G3.1*G3.3*G3.1*G3.4]);
78 Print("Es normal en G3? ", IsNormal(G3, g10), ". Indice en G3: ",
79     Index(G3,g10), "\n");
80
81 # para ( \ 0 \ ; \ + \ ; \ [-] \ ; \{ \ (2,2,2,2,2) \ \} \ )
82 Print("\n Signatura ( 0 ; + ; [-] ; \{ (2,2,2,2,2) \} ) \n");
83 g11 := Subgroup(G3, [G3.1, G3.2, G3.3, G3.4*G3.2*G3.4, G3.4*G3.1*G3.3*G3.1*G3.4]);
84 Print("Es normal en G3? ", IsNormal(G3, g11), ". Indice en G3: ",
85     Index(G3,g11), "\n");
86
87 Print("\n");
88 quit;
89 EOI

```

## A.2 Resultados

```

1 Subgrupos de G4
2
3 Signatura ( 0 ; + ; [-] ; { (-), (2) } )
4 Group([ c'3*c'1, c'0, c'2 ])
5 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2
6
7 Signatura ( 0 ; + ; [2,4] ; { (-) } )
8 Group([ c'2*c'3, c'3*c'0, c'1 ])
9 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2
10
11 Signatura ( 0 ; + ; [4] ; { (2,2) } )
12 Group([ c'0*c'3, c'2, c'1, c'0*c'2*c'0 ])
13 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2
14
15 Signatura ( 0 ; + ; [2] ; { (2,2,2) } )
16 Group([ c'0*c'1, c'2, c'3, c'0*c'3*c'0, c'0*c'2*c'0 ])
17 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2
18
19 Signatura ( 0 ; + ; [-] ; { (2,2,4,4) } )
20 Group([ c'3, c'2, c'1*c'3*c'1, c'0 ])
21 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2

```

```
22
23 Signatura ( 0 ; + ; [-] ; { (2,2,2,2,2) } )
24 Group([ c'1, c'2, c'3, c'0*c'3*c'0, c'0*c'2*c'0 ])
25 Es normal en G4? true. Indice en G4: 2
26
27 Subgrupos de G3
28
29 Signatura ( 0 ; + ; [2,3] ; { (-) } )
30 Group([ c'2*c'3, c'3*c'0, c'1 ])
31 Es normal en G3? true. Indice en G3: 2
32
33 Signatura ( 0 ; + ; [3] ; { (2,2) } )
34 Group([ c'3*c'0, c'1, c'2, c'3*c'1*c'3 ])
35 Es normal en G3? true. Indice en G3: 2
36
37 Signatura ( 0 ; + ; [-] ; { (2,2,3,3) } )
38 Group([ c'2*c'0*c'2, c'1, c'0, c'3 ])
39 Es normal en G3? true. Indice en G3: 2
40
41 Signatura ( 0 ; + ; [2] ; { (2,2,2) } )
42 Group([ c'3*c'0*c'1*c'3, c'2, c'1, c'0, c'3*c'0*c'2*c'0*c'3 ])
43 Es normal en G3? false. Indice en G3: 3
44
45 Signatura ( 0 ; + ; [-] ; { (2,2,2,2,2) } )
46 Group([ c'0, c'1, c'2, c'3*c'1*c'3, c'3*c'0*c'2*c'0*c'3 ])
47 Es normal en G3? false. Indice en G3: 3
```

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. V. Ahlfors.  
*Complex Analysis*.  
McGraw-Hill, 3<sup>a</sup> edition, 1953.  
Reprinted 2017.
- [2] N. L. Alling and N. Greenleaf.  
*Foundations of the Theory of Klein Surfaces*.  
Springer, 1971.
- [3] A. F. Beardon.  
*The Geometry of Discrete Groups*.  
Springer-Verlag, 2<sup>a</sup> edition, 1995.
- [4] E. Bujalance.  
Normal N.E.C. signatures.  
*Illinois Journal of Mathematics.*, 26(3):519–530, 1982.
- [5] E. Bujalance, F. J. Cirre, J. M. Gamboa, and G. Gromadzki.  
*Symmetries of Compact Riemann Surfaces, Volumen 2007*.  
Springer, 2010.
- [6] E. Bujalance, F. J. Cirre, and P. Turbek.  
Groups acting on bordered klein surfaces with maximal symmetry.  
*Groups St. Andrews.*, 1:50–58, 2001.
- [7] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, and G. Gromadzki.  
*Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces. A Combinatorial Approach*.  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [8] J. L. Estévez and M. Izquierdo.  
Non-normal pairs of non-euclidean crystallographic groups.  
*Bull. London Math Soc.*, 38:113–123, 2006.
- [9] The GAP Group.  
*GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2*, 2019.

- [10] M. Henle.  
*A Combinatorial Introduction to Topology.*  
Dover, 1979.
- [11] G. A. Jones and D. Singerman.  
*Complex Functions.*  
Cambridge U.P., 1987.
- [12] J. M. Lee.  
*Introduction to Smooth Manifolds.*  
Springer, 2<sup>a</sup> edition, 2000.
- [13] A. M. Macbeath.  
The classification of non-euclidean plane crystallographic groups.  
*Canadian J. Math.*, 19(3):1192–1205, 1967.
- [14] C. L. May.  
Automorphism of compact klein surfaces with boundary.  
*Pacific Journal of Mathematics*, 59(1):199–210, 1975.
- [15] C. B. Meyer.  
*Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*  
SIAM, 2000.
- [16] R. Miranda.  
*Algebraic Curves and Riemann Surfaces.*  
AMS, 1991.
- [17] J. R. Munkres.  
*Topología.*  
Pearson, 2<sup>a</sup> edition, 2002.
- [18] H. C. Wilkie.  
On non-euclidean crystallographic groups.  
*Math. Zeitsch.*, 91:87–102, 1966.