
Aplicación del
Método de los Elementos Finitos
a la ecuación de Helmholtz

Guillermo Castaño Ochoa
con la dirección y supervisión del

Dr. Pedro Serranho
Universidade Aberta/Portugal

FEBRERO DE 2013

Abstract

The goal of this paper is to present a finite element method approach to numerically solve the Helmholtz equation. We will apply this technique to some problems on stationary acoustic waves in 2-d for different geometries and media and obtain numerical solutions using FreeFem++ software.

This work will be presented as the *Trabajo de Fin de Máster* in Advanced Mathematics at de UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia), Spain.

Índice

Introducción	1
Desarrollo teórico	3
1. La ecuación de Helmholtz	3
2. El Método de los Elementos Finitos	5
2.1. El Método de los Elementos Finitos no es el Método de las Diferencias Finitas	5
2.2. Visión general	6
2.3. Espacios de Sobolev	7
2.4. Formulación variacional (Galerkin)	9
2.5. El teorema de Lax-Milgram: existencia y unicidad	12
2.6. Discretización del espacio: V_h	14
2.7. Error al introducir V_h	17
2.8. El sistema de ecuaciones	17
2.9. Extensiones estándar del Método de los Elementos Finitos	21
Parte práctica	23
1. Software para Método de los Elementos Finitos	23
2. FreeFem++	24
3. Problemas	25

Conclusiones y perspectivas	33
Bibliografía	36
Apéndice	38
A. El lenguaje de FreeFem++	38

Introducción

Muchos procesos físicos de la naturaleza cuyo correcto conocimiento, predicción y control son importantes están descritos por ecuaciones que involucran tanto magnitudes físicas como su variaciones espaciales o temporales (derivadas parciales). Entre estos procesos se encuentran: electromagnetismo, transferencia de calor, deformación de sólidos, dinámica de fluidos, acústica y muchos otros. Las ecuaciones que contienen derivadas parciales se denominan ecuaciones en derivadas parciales (EDP). El grado de una EDP es el mayor orden de derivada que dicha ecuación contiene.

Son de especial interés las ecuaciones de segundo orden, que se pueden clasificar como: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Las primeras describen un estado especial de un sistema que se caracteriza por poseer mínima cierta magnitud (típicamente la energía). Las ecuaciones parabólicas suelen describir procesos que evolucionan hasta un estado estacionario, mientras que las hiperbólicas suelen describir el transporte de alguna magnitud física (ecuación de ondas). Otros tipos de ecuaciones de segundo orden se dicen indeterminadas. La ecuación de Helmholtz, tratada en este trabajo es de tipo elíptico.

Junto con la propia ecuación nos serán impuestas ciertas condiciones de contorno: los valores que toma la función incógnita, su derivada o una combinación de ambas, en ciertas regiones.

Para la mayoría de las ecuaciones con que nos enfrentamos, no nos es posible encontrar una solución exacta de forma analítica e incluso no podemos saber si la solución, si es que existe, es única (aunque en el caso de la ecuación de Helmholtz, bajo ciertas condiciones, tal solución existe y es única como se verá en la sección 2.5). Nos vemos obligados, por ello, en problemas concretos de ciencia e ingeniería a resolverlas de forma aproximada mediante métodos numéricos. Una herramienta muy general para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales es el Método de los Elementos Finitos (FEM). Este método, está basado en la reformulación del problema en forma variacional y la sustitución del espacio de soluciones por otro de dimensión finita. Para ello se realiza una partición del dominio en elementos de tamaño finito (segmentos en una dimensión y típicamente triángulos y tetraedros en dos y tres dimensiones respectivamente, pero también cuadriláteros y prismas o cualquier otra forma geométrica con la que se pueda hacer una partición adecuada del dominio) y se buscan soluciones mediante familias de funciones dependientes de un número también finito de parámetros (posiblemente polinomios a trozos de primer grado, pero también por otros de mayor grado o por familias de funciones más generales que poseen mejores propiedades de aproximación y la posibilidad de reducir el número de cálculos necesarios para alcanzar la solución), de forma que el problema inicial se convierte en un sistema de ecuaciones que podemos resolver numéricamente.

El desarrollo moderno de esta técnica comienza hacia 1940, específicamente en el campo de ingeniería estructural (de ahí permanecen nombres como matriz de esfuerzo y vector de carga), con los trabajos de Hrennikoff en 1941 y McHenry

en 1943, quienes propusieron el uso de líneas en una dimensión para representar elementos como barras o vigas para el cálculo de esfuerzos en sólidos con sección transversal continua. En una investigación publicada 1943 [RC], Courant¹ propuso el mecanismo para la solución de esfuerzos añadiendo la técnica variacional. Después aplicó funciones de interpolación sobre subregiones triangulares que conformaban una región entera, obteniendo resultados numéricos aproximados. En 1947 Levy desarrolló el método de flexibilidad y fuerza, y en 1953 su trabajo sugirió la aplicación de un nuevo mecanismo (el método de rigidez y desplazamiento).

Aunque el Método de los Elementos Finitos es también aplicable a problemas en los que interviene el tiempo, aquí se estudiará la ecuación de Helmholtz (parte independiente del tiempo de la ecuación de ondas en el caso de ondas armónicas) en el plano. Concretamente se aplicará a ondas acústicas en una región acotada y con diferentes medios en su interior.

El trabajo está dividido en tres partes; la primera es la teórica, que incluye la deducción de la ecuación de Helmholtz para ondas electromagnéticas y acústicas (aunque se tratarán únicamente las segundas, el tratamiento es aplicable también a las primeras) y un desarrollo teórico del Método de los Elementos Finitos.

En la segunda parte se presenta el software para la aplicación del método y se resuelven varios problemas de ondas acústicas en una región acotada, que contiene distintos tipos de obstáculos en su interior (que implican distintas condiciones de contorno).

En la última parte se presentan las conclusiones y se muestran distintos caminos por los que se podría avanzar para hacer un estudio más profundo del Método de los Elementos Finitos.

Este trabajo será presentado como *Trabajo de Fin de Máster* en Matemáticas Avanzadas (especialidad de Análisis Matemático) en la UNED.

¹Richard Courant (8 de enero de 1888 – 27 de enero de 1972) Nació en Lublinitz, Alemania entonces y actualmente Polonia. Aunque puede considerarse como el padre del método de los elementos finitos, éste nombre no es debido a él y no apareció hasta 1960. El método se utilizó en una demostración de existencia del teorema de representación conforme de Riemann en un libro con Hurwitz de 1922 y posteriormente en una nota a pie de página en su libro con Hilbert “Métodos matemáticos para la física” de 1924, manual de éxito durante décadas. La primera aplicación como un método numérico la realizó en 1943 en su solución a un problema de torsión. Se le asignó la tarea de fundar un instituto para estudios graduados en matemáticas, que se convirtió en el actual “Instituto Courant”. Murió en Nueva York en 1972.

Desarrollo teórico

1. La ecuación de Helmholtz

La ecuación de Helmholtz² puede deducirse para un campo electromagnético en un medio libre de fuentes a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}$$

donde se ha eliminado el término ρ/ϵ de la tercera y J de la segunda por suponer que no hay cargas libres ni corrientes respectivamente. Usando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

en la primera y viendo que el primer término del miembro derecho es cero podemos escribir:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \mu \frac{\partial(\nabla \times \vec{H})}{\partial t} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

es decir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de ondas, donde $\epsilon\mu = 1/c^2$. Si buscamos una solución armónica, podemos poner

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re}(\vec{E}_0(x) e^{-i\omega t})$$

Con lo que obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E}(x) + k^2 \vec{E}(x) = 0$$

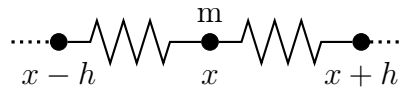
²Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (31 de agosto de 1821–8 de septiembre de 1894) fué un físico y médico alemán que hizo importantes contribuciones en una gran variedad de áreas de la ciencia. En fisiología y psicología es conocido por la descripción matemática del ojo, sus teorías de la visión, las ideas acerca de la percepción visual del espacio y del sonido. En física es conocido por sus teorías de conservación de la energía, trabajó en electrodinámica, termodinámica química y mecánica estadística. Como filósofo es conocido por sus trabajos en filosofía de la ciencia, sus ideas sobre la relación entre las leyes de percepción y leyes de la naturaleza, la ciencia de la estética y el poder civilizador de la ciencia.

(donde $k = \omega/c$ es el número de onda) que es la ecuación de Helmholtz, también conocida como ecuación de ondas reducida.

De un modo análogo obtenemos la misma ecuación para el campo magnético.

La ecuación de Laplace³ ($\nabla^2 \vec{A} = 0$) es un caso particular de la ecuación de Helmholtz, por lo que las técnicas aplicadas a la resolución de la segunda serán también aplicables para la primera.

Para el problema acústico podemos suponer el medio compuesto por muchas partículas de masa m (sometidas a la segunda ley de Newton) unidas por fuerzas elásticas (que cumplen la ley de Hooke).



Por lo que se cumplirá que:

$$\vec{F}_{Newton} = m \cdot \vec{a} = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t)$$

$$\vec{F}_{Hooke} = \vec{F}_{x+h} + \vec{F}_{x-h} = k(U(x+h, t) - U(x, t)) - k(U(x, t) - U(x-h, t))$$

Si consideramos un conjunto de N masas separadas uniformemente en un espacio $L = N \cdot h$, la masa total será $M = N \cdot m$ y llamando $K = k/N$ podemos reescribir las ecuaciones anteriores como:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) = \frac{KL^2}{M} \frac{U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)}{h^2}$$

y tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ obtenemos finalmente la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$$

Reordenando e identificando $\frac{KL^2}{M}$ con el cuadrado de la velocidad de propagación (c^2) obtenemos

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$$

³Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge (Normandía); 28 de marzo de 1749 – París; 5 de marzo de 1827) fue un astrónomo, físico y matemático francés. Entre otras aportaciones a la matemática caben destacar el desarrollo de la transformada de Laplace e investigaciones en la ecuación que lleva su nombre. Fue un creyente del determinismo causal.

o bien

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(x, t) = 0.$$

En n dimensiones la podemos expresar como:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = 0.$$

Si suponemos que la dependencia en el tiempo es armónica (existe una sola frecuencia ω), podemos expresar la función U como

$$U(x, t) = \text{Re}(u(x) e^{-i\omega t}).$$

Reemplazando ω/c por el número de onda k , la ecuación de Helmholtz para el campo u será

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

De forma general podemos decir que la ecuación de Helmholtz aparece frecuentemente en problemas físicos en los que la parte temporal es armónica. Se comprueba fácilmente que la ecuación de Helmholtz, igual que las de Laplace, Poisson y la biarmónica, es de tipo elíptico.

2. El Método de los Elementos Finitos

2.1. El Método de los Elementos Finitos no es el Método de las Diferencias Finitas

Anteriormente al desarrollo del Método de los Elementos Finitos uno de los métodos numéricos más utilizado para la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno era el de las diferencias finitas; en él, el problema se sustituye por otro discreto reemplazando

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x}$$

En el Método de los Elementos Finitos hay una modificación esencial: se comienza haciendo una *reformulación variacional* del problema. Después se discretiza. En el caso de ecuaciones elípticas (como es la ecuación de Helmholtz), la formulación variacional transforma el problema en uno de minimización:

$$\text{Hallar } u \in V \mid F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$$

donde: V es el conjunto de funciones admisibles y F es un funcional. Las funciones $v \in V$ a menudo representan cantidades que varían en forma continua (ej.. desplazamiento de un cuerpo elástico, temperatura, presión, etc.) y $F(v)$ es la energía

total asociada a v ; se trata por tanto de un problema de minimizar la energía total del sistema considerado. Esta forma de expresar el problema se denomina *forma variacional de Ritz*⁴.

Una forma más conveniente de expresar el problema es multiplicar ambos lados de la ecuación por una *función test* v arbitraria y adecuada e integrar sobre todo el dominio. Aplicando el teorema de Green podemos convertirla en una ecuación (integral) en la que un miembro (digamos el de la derecha) no depende de la función incógnita. Esta forma de expresar el problema se denomina *forma variacional de Galerkin*⁵, de *Ritz-Galerkin* o *forma débil*. Esta técnica se corresponde con lo que en mecánica se denomina *principio de los trabajos virtuales*.

En general la dimensión del espacio de funciones admisibles V (por ejemplo las funciones continuas) es infinita, por lo que habitualmente el problema no puede ser resuelto analíticamente. Lo que se hace es reemplazar V por V_h , funciones dependientes de un número finito de parámetros.

El problema queda así convertido en

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \mid F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in V_h \quad (\text{Ritz})$$

o bien en un sistema de ecuaciones algebraicas en u_h

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \mid F(u_h, v_h) = G(v_h). \quad (\text{Galerkin})$$

Las ventajas del Método de los Elementos Finitos, respecto a otros métodos numéricos y en concreto al de diferencias finitas son:

- Se pueden tratar sin dificultad geometrías complejas.
- Las condiciones de contorno se tratan de manera fácil y sistemática.
- Trata las no linealidades de una forma sencilla.
- Está basado en un desarrollo matemático robusto.

2.2. Visión general

Los pasos para resolver un problema de contorno mediante el método de los elementos finitos puede resumirse en:

⁴Walther Ritz (Nacido el 22 de febrero de 1878 en Sion y fallecido en Göttingen(Suiza) el , 7 de julio de 1909) Fué un físico teórico suizo famoso por el principio de combinación Rydberg–Ritz, a parte de por su método variacional.

⁵Boris Grigoryevich Galerkin (en ruso: Борис Григорьевич Галёркин), nació en 1871 en Polotsk y falleció el 12 de julio de 1945 en Moscú.

- Formulación Variacional del problema
- Generar una partición del dominio
- Creación del espacio V_h
(en función de la partición)
- Solución del problema discreto
(Sistema de ecuaciones algebraicas)

El primer paso se realizará a mano, multiplicando la ecuación por una función test v , integrando y aplicando el teorema de Green. Para resto de los pasos se utilizará (habitualmente) un software específico (FreeFem++ en este trabajo).

La partición del dominio no tiene por que ser uniforme. Se hará más fina en aquellos lugares donde el campo varíe más bruscamente.

La discretización del espacio V implica la determinación del mecanismo por el que las funciones son aproximadas (linealizando en el caso más sencillo o bien utilizando polinomios de cierto grado u otras familias de funciones más generales dependientes de un número finito de parámetros).

Tras ello se resolverá el sistema de ecuaciones generado, obteniéndose los resultados, que pueden ser presentados o analizados para introducir refinamientos (métodos adaptativos) bien haciendo el mallado más fino en ciertas regiones o bien utilizando otras familias de funciones (por ejemplo polinomios de mayor grado).

2.3. Espacios de Sobolev

Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , $1 \leq n \leq 3$ con frontera diferenciable a trozos. Dada una función v , denotamos por

$$\int_{\Omega} v(x) dx$$

la integral en sentido Lebesgue⁶. Para $1 \leq q \leq \infty$ definimos la norma

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

y para $q = \infty$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup |v(x)| : x \in \Omega$$

Con estas condiciones se definen los *espacios de Lebesgue* como

$$L^q(\Omega) = \{v : v \text{ está definido en } \Omega \text{ y } \|v\|_{L^q(\Omega)} < \infty\}.$$

⁶Henri Léon Lebesgue, nacido en Beauvais (Francia) el 28 de junio de 1875 fue catedrático de la Sorbona y es conocido por su Teoría de la Medida. Falleció en París el 26 de julio de 1941.

Usamos la notación

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{con } |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

para indicar la derivada parcial de v .

En el caso del Método de los Elementos Finitos no necesitamos la derivada puntual sino en términos de integración, por lo que introducimos la derivada débil.

Una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil $D_w^\alpha v$ si existe una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x)D^\alpha\varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde $\mathcal{D}(\Omega)$ son las funciones de soporte compacto en Ω y

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{v : v \in L^1(K) \text{ para cualquier compacto } k \in \Omega\}.$$

Si la función existe, entonces $D_w^\alpha v = u$.

Si $v \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ entonces la derivada $D_w^\alpha v = u$ existe y coincide con D^α . Se puede, por tanto, utilizar la primera notación entendiendo que si no existe la derivada en sentido tradicional, nos estaremos refiriendo a la débil.

Vamos a generalizar los espacios de Lebesgue. Para ello introducimos la norma de Sobolev⁷

$$\|v\|_{W^{r,q}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q} \quad \text{si } 1 \leq q < \infty$$

y

$$\|v\|_{W^{r,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{si } q = \infty.$$

Los espacios de Sobolev se definen como

$$W^{r,q}(\Omega) = \{v \in L^1_{loc}(\Omega) : \|v\|_{W^{r,q}(\Omega)} < \infty\}$$

y forman un espacio de Banach⁸.

⁷Sergéi Lvóvich Sóbolev (Сергей Львович Соболев) (6 de octubre 1908– 3 de enero 1989) trabajó en análisis matemático y ecuaciones en derivadas parciales. Nació en San Petersburgo y murió en Moscú. Introdujo algunas de las nociones que son ahora fundamentales para distintas ramas de la matemática, como los espacios de Sóbolev. Fue el primero en introducir las funciones generalizadas (1935), posteriormente conocidas como distribuciones, que fueron formalizadas por Laurent Schwartz.

⁸Stefan Banach (30 de marzo de 1892 en Cracovia, – 31 de agosto de 1945 en Leópolis, Polonia, actual Ucrania), uno de los destacados de la Escuela de Matemática de Lwow (Lwowska Szkoła Matematyki) en la Polonia previa a la guerra. Fue un autodidacto en matemáticas. Sobrevivió a la ocupación alemana desde julio de 1941 hasta febrero de 1944, ganándose la vida alimentando un piojo con su sangre para el Instituto de Investigación sobre el Tifus. Théorie des opérations linéaires (Teoria operacji liniowych, 1932) está considerado su obra más importante, donde formuló el concepto ahora conocido como Espacio de Banach, y demostró muchos teoremas fundamentales del análisis funcional. También creó y editó la revista Studia Mathematica. Además de ser uno de los creadores del análisis funcional, hizo contribuciones importantes a la teoría de la medida, teoría de conjuntos, y otras ramas de las matemáticas.

Finalmente, tomando $q = 2$, se introducen los espacios H^p como:

$$H^p = \{v \in L^1_{loc} : \|v\|_{W^{q,2}} < \infty, \forall q \leq p\}.$$

esto es, H^p es la familia de funciones v tales que tanto ellas como todas sus derivadas $D^\alpha v$ hasta orden p son de cuadrado integrable en Ω .

Se comprueba [RA] que con estas condiciones, H^p , con el producto escalar

$$(u, v)_{H^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad u, v \in H^p(\Omega)$$

y la norma correspondiente $\|\cdot\|_{H^p(\Omega)}$, es un espacio de Hilbert⁹.

Se utilizará la notación $H_0^1(\Omega)$ para referirse al subespacio de H^1 formado por las funciones de este que se anulan en la frontera del conjunto abierto Ω .

2.4. Formulación variacional (Galerkin)

Las condiciones de contorno tienen un efecto importante en la formulación del problema y la aplicación del Método de los Elementos Finitos, por lo que estudiamos la ecuación de Helmholtz con distintas condiciones por separado.

Multiplicando la ecuación de Helmholtz por una función \bar{v} , $\bar{v} \in H^1$ e integrando en el dominio obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot \bar{v} dx + \int_{\Omega} k^2 u \bar{v} dx = 0.$$

Utilizando el teorema de Green¹⁰ obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} ds. \quad (\text{Variacional Helmholtz})$$

El objetivo es obtener del término de la derecha una forma lineal $b(v)$, para lo cual habrá que considerar las condiciones concretas en la frontera.

Condiciones de Neumann¹¹ Son las que especifican el valor de la derivada normal en la frontera. Aparecen en problemas en los que la fuerza o el flujo del

⁹David Hilbert (23 de enero de 1862, Königsberg, Prusia Oriental – 14 de febrero de 1943, Gotinga, Alemania) Uno de los mas grandes matemáticos de la Historia. Fue colega de Courant. “Se habla mucho de que científicos e ingenieros son enemigos[...]. Ni siquiera es posible ya que unos nada tienen que ver con los otros.”

¹⁰George Green, nacido en Sneinton (actualmente parte de Nottingham) en 1793 y fallecido en su ciudad natal en 1841). Trabajó sobre dinámica de fluidos, fuerzas de atracción y la aplicación del análisis matemático al estudio del electromagnetismo. Utilizaremos varias veces el teorema que lleva su nombre expresado como $\int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot v dx = \int_{\Gamma} \nabla u \cdot v ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$.

¹¹John von Neumann (28 de diciembre de 1903, Budapest, Imperio Austrohúngaro – 8 de febrero de 1957, Washington, D.C., Estados Unidos) fue un matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos. Está considerado como uno de los más importantes matemáticos de la historia moderna.

campo queda fijado en la frontera. El caso concreto en el que la condición es homogénea se corresponde con situaciones de aislamiento (en transferencia de calor), de libertad (en mecánica de sólidos) y reflectividad total en electromagnetismo y acústica (*sound-hard*).

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = 0, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

La integral del miembro derecho de la ecuación (Variacional Helmholtz) es

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} \, ds = \int_{\Gamma} g \bar{v} \, ds$$

que no depende de u , por lo que podemos expresar la formulación variacional como

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v} \, dx \quad \text{y} \quad b(v) = \int_{\Gamma} g \bar{v} \, dx.$$

Se observa que la condición de frontera ha quedado implícita en la formulación variacional; a la solución u solo se le exige pertenecer a $H^1(\Omega)$ y no hace falta imponer explícitamente que verifique $\partial u / \partial \nu = g$. Por ello, en el contexto del Método de los Elementos Finitos, este tipo de condiciones se denominan *condiciones de frontera naturales*.

Condiciones de Dirichlet Las condiciones de Dirichlet¹² son las que imponen el valor de la propia función (y no de sus derivadas) en ciertas regiones (frontera) del dominio de estudio. Se producen, por ejemplo, en problemas térmicos cuando existe un foco que fija la temperatura. En casos de electromagnetismo y acústica, como veremos más adelante, ante un obstáculo completamente absorbente (*sound-soft*) expresaremos el campo dispersado como el opuesto del campo incidente (que conocemos).

Nuestro problema es

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

¹² Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, actual Alemania, 13 de febrero de 1805 - Gotinga, actual Alemania, 5 de mayo de 1859). Ocupó la cátedra de Gotinga dejada por Gauss. Se le atribuye la definición "formal" moderna de *función*. Hizo una demostración particular (n=5 y n=14) del teorema de Fermat y estableció criterios de convergencia para las series. En física, estudió el equilibrio de sistemas y el potencial newtoniano.

que podemos expresar, utilizando (Variacional Helmholtz) como

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} \, ds.$$

Si se considera la condición homogénea ($u = 0$ sobre Γ), entonces el problema se expresa como

Encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx$$

y

$$b(v) = 0.$$

Para la deducción en el caso general puede consultarse [KA].

Condiciones de Robin¹³ Aunque las condiciones anteriores son de suma importancia, en las aplicaciones reales nos encontraremos con una situación intermedia. Las condiciones de Robin, también llamadas de Newton, Dankwerts o de impedancia (γ) en la frontera son aquellas en las que se especifica una combinación del valor de la función y de su derivada normal en la frontera. El problema de Helmholtz con éstas condiciones es

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = 0, & \text{en } \Omega \\ \gamma u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

y por ello

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} \, ds = \int_{\Gamma} (g - \gamma u) \bar{v} \, ds$$

de modo que el problema puede expresarse como

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

siendo ahora

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx + \int_{\Gamma} \gamma u \bar{v} \, ds$$

y

$$b(v) = \int_{\Gamma} g \bar{v} \, ds$$

¹³Victor Gustave Robin fue un matemático francés nacido en 1855, impartió clases de física matemática en la Sorbona. Trabajó también en termodinámica. Falleció en 1897

no habiendo sido necesario imponer condiciones a v . Así, las condiciones de Robin son tratadas de forma similar a las de Neumann, incluyendo un término adicional a la formulación variacional. Como la condición queda embebida en dicha formulación, se trata también de una condición natural.

Podemos observar que la condición tiende a la de Neumann cuando γ tiende a cero y a la de Dirichlet cuando γ tiende a infinito.

2.5. El teorema de Lax-Milgram: existencia y unicidad

El teorema de Lax-Milgram¹⁴ es fundamental en la formulación débil y el Método de los Elementos Finitos pues nos garantiza la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas condiciones. Antes de exponerlo se enuncian las siguientes definiciones:

Definición (Forma sesquilineal continua) Una forma sesquilineal (o una bilineal) $a(u, v)$ se llama continua o acotada si

$$\exists \gamma > 0 \mid a(u, v) \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Definición (Forma sesquilineal coerciva) Una forma sesquilineal (o una bilineal) $a(u, v)$ se llama coerciva o elíptica si

$$\exists \delta > 0 \mid a(v, v) \geq \delta \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Definición (Forma lineal continua) Una forma lineal b es continua si verifica que

$$|b(v)| \leq \gamma \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Teorema (Lax-Milgram) Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma sesquilineal continua y elíptica en $V \subset V^p$ y b una forma lineal en V continua. Entonces el problema

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V$$

tiene solución única u , $u \in V$, y existe una constante $c > 0$ que no depende de b tal que: $\|u\| \leq c \|b\|$.

Demostración Denotemos por V' el dual de V . Dado cualquier $u \in V$, definimos el funcional $Au(v) = a(u, v) \quad \forall v \in V$.

Au es lineal pues

$$Au(\alpha v_1 + \beta v_2) = a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) = \alpha Au(v_1) + \beta Au(v_2)$$

¹⁴Peter David Lax (nacido el 1 de mayo de 1926, en Budapest, Hungría). Ha realizado importantes contribuciones a sistemas integrables, dinámica de fluidos y ondas de choques, física de solitones, leyes de conservación hiperbólica, y computación
Arthur Norton Milgram (3 de junio de 1912, in Philadelphia – 30 de enero de 1961) hizo contribuciones en análisis funcional, combinatoria, geometría diferencial, topología, teoría de Galois y EDO.

Au es continua pues $\forall v \in V$

$$|Au(v)| = |a(u, v)| \leq \gamma \|u\| \|v\| \quad \forall v \in V$$

por tanto

$$\|Au(v)\|_V = \sup_{v \neq 0} \frac{Au(v)}{\|v\|} \leq \gamma \|u\| < \infty$$

luego $Au \in V'$. De modo análogo se prueba que $u \rightarrow Au$ es una aplicación lineal de $V \rightarrow V'$. Por el teorema de representación de Riesz,

$$\forall b \in V' \quad \exists! b^T \in V \quad \text{tal que} \quad b(v) = \langle b^T, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Tenemos que encontrar un único u tal que $Au(v) = f(v)$, $\forall v \in V$ o lo que es lo mismo, encontrar un único u tal que $Au = f$ en V' o $(Au)^T = f^T$.

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ v &\rightarrow v - \rho((Av)^T - f^T) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

donde ρ es una constante. Si T es contractiva, entonces, por el principio de la aplicación contractiva,

$$\exists! u \in V \mid Tu = u - \rho((Au)^T - f^T) = u$$

o lo que es lo mismo,

$$Au = f.$$

Basta considerar $\rho \in (0, 2\delta/\gamma^2)$ (donde δ y γ son las constantes que de la definición de elíptica y acotada de $a(\cdot, \cdot)$), para que T sea contractiva.

Por lo tanto se cumple que $A(u, v) = f(v)$ tiene solución única. \square

Estamos ahora en condiciones de establecer la existencia y unicidad de solución a la formulación débil. Por simplicidad se considerará el caso de Dirichlet con condiciones homogéneas, siendo Ω un abierto con frontera diferenciable a trozos.

Lema *La forma sesquilineal*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v} \, dx$$

es continua en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

La demostración puede encontrarse, junto con la del siguiente lema, en [OM].

Lema *Bajo ciertas condiciones de k , la forma sesquilineal*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} \, dx - \int_{\Omega} k^2 u \bar{v} \, dx$$

es elíptica en $H_0^1(\Omega)$.

Del teorema de Lax-Milgram y los dos lemas anteriores se deduce el siguiente

Teorema *La ecuación de Helmholtz con condiciones de contorno homogéneas tiene solución única.*

Demostraciones equivalentes para otras condiciones de contorno se pueden encontrar en [KA].

2.6. Discretización del espacio: V_h

Una vez establecida la formulación variacional, el siguiente paso en el Método de los Elementos Finitos es la discretización del problema. Para aclarar conceptos consideremos que el problema está definido en una dimensión y, sin pérdida de generalidad, que el dominio es $(0, 1)$. Hacemos una partición del dominio $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$ y designamos con $h_j = x_j - x_{j-1}$ y $h = \max (h_j)$. Sea ahora

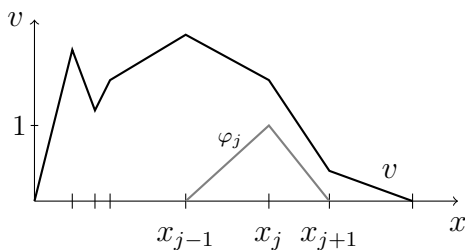
$$V_h = \{v \mid v \text{ es afín en cada intervalo de la partición,} \\ v \text{ es continua en } [0,1] \text{ y} \\ v(0) = v(1) = 0\},$$

y consideremos la base formada por las funciones sombrero, afines en cada intervalo de la partición y que cumplan

$$\varphi_j(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

y en el caso complejo, además, una

$$\psi_j(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ i & \text{si } k = j \end{cases}$$

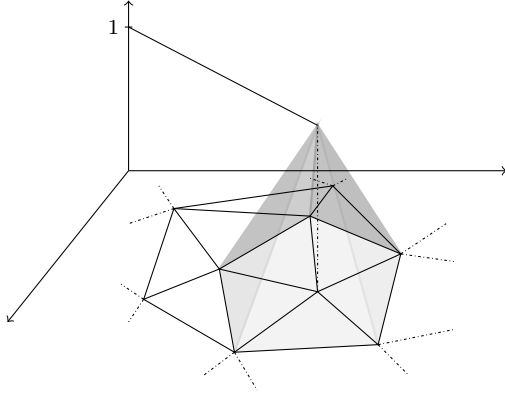


Con ello podemos expresar de manera única

$$v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x)$$

Así hemos reemplazado el espacio de funciones V por otro $V_h \subset V$ de dimensión finita M .

De forma análoga podemos discretizar el plano. En este caso tenemos más libertad para elegir la partición; podemos realizarla mediante rectángulos, hexágonos u otras figuras geométricas. La triangulación es la más utilizada. Se ha de hacer siempre de forma que cada arista o bien sea la arista de otro triángulo o bien es parte de la frontera (es decir, ningún vértice puede estar en el interior ni en el lado de otro triángulo; vértice con vértice o vértice en la frontera).



No hemos de olvidar que la discretización del espacio V no solo implica la creación de una partición sino que hemos de determinar una base mediante la cual se expresen las funciones de V_h . A modo ilustrativo se ha utilizado la función sombrero en una y dos dimensiones, lo cual implica que en ese caso el espacio V_h es el subespacio de V de funciones afines a trozos.

Cada función (vector del espacio V_h) puede expresarse de la forma

$$u(x, y) = u_0 + u_x x + u_y y$$

o bien $\vec{u} = (u_0, u_x, u_y)$. En este caso tenemos tres *grados de libertad* y pueden elegirse determinando la función en cada vértice. Otra elección puede ser determinar la función en el punto medio de cada lado.

Si consideramos un espacio V_h formado por funciones cuadráticas a trozos (polinomios de grado dos), las funciones pueden representarse mediante

$$u(x, y) = u_0 + u_x x + u_y y + u_{xx} x^2 + u_{xy} xy + u_{yy} y^2.$$

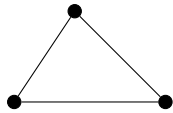
Tenemos ahora seis grados de libertad. Si queremos expresar una función de V_h en esta base $\{u_0, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\}$ hemos de conocer su valor en seis puntos, que se pueden ser los tres vértices y los centros de cada lado (o bien las funciones y sus derivadas en tres puntos, entre otras alternativas). En general, para determinar un polinomio de grado n ,

$$u(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_{ij} x^i y^j$$

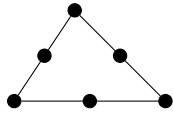
tendremos $(n + 1)(n + 2)/2$ grados de libertad.

Se muestra a continuación una tabla con varios elementos finitos triangulares indicando en cada caso el espacio de funciones utilizado, el número de grados de libertad y el grado de continuidad del espacio V_h . Los símbolos utilizados son:

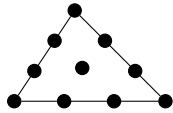
- Valor de la función en ese punto.
- Valor de las derivadas primeras en el punto.
- Valor de las derivadas segundas en ese punto.
- \ Valor de la derivada normal en el punto.



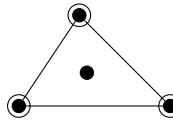
- Polinomios de grado 1
- 3 grados de libertad
- se aplica a funciones continuas



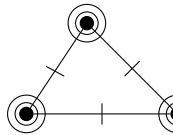
- Polinomios de grado 2
- 6 grados de libertad
- se aplica a funciones continuas



- Polinomios de grado 3
- 10 grados de libertad
- se aplica a funciones continuas



- Polinomios de grado 3
- 10 grados de libertad
- se aplica a funciones continuas



- Polinomios de grado 5
- 21 grados de libertad
- se aplica a funciones continuas con derivada continua

De forma análoga, en tres dimensiones podemos optar entre una gran variedad de elementos para hacer la partición (prismas, paralelepípedos,...) pero la más frecuente será mediante tetraedros (simplex en tres dimensiones), no necesariamente regulares. En este caso, si consideramos V_h como el espacio de funciones afines, podremos expresar u como

$$u(x, y, z) = u_0 + u_x x + u_y y + u_z z$$

por lo que podremos utilizar los valores de la función en los cuatro vértices para determinar las componentes de u en V_h .

Si en vez utilizar la aproximación lineal utilizamos la polinómica de grado n , el número de grados de libertad será $(n + 1)(n + 2)(n + 3)/6$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que un *elemento finito* es una terna formada por:

- una región acotada K determinada por un conjunto finito de puntos (típicamente un simplex)
- un espacio de funciones P en K de dimensión finita (habitualmente polinomios)
- un conjunto de $n = \dim(P)$ funcionales para expresar las funciones P en la región K .

2.7. Error al introducir V_h

Sea $T_h = \{K\}$ una triangulación de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos $V = H^1(\Omega)$ y $V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}$, (donde P_1 son los polinomios de grado 1) es decir, V_h es el espacio de elementos finitos de funciones afines en triángulos K .

$$h_K = \text{mayor lado de } K$$

$$\rho_K = \text{diámetro del círculo inscrito en } K$$

Por otro lado, se impone que $\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta$, es decir, se impide que los ángulos sean arbitrariamente pequeños.

Se denota con $\pi_h u$ a la función afín en cada triángulo de T_h , y que coincide con u en todos los nodos de T_h . Entonces se verifica el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en [CJ].

Teorema Sea $K \in T_h$ un triángulo con vértices a^i , $i = 1, 2, 3$. Para cada triángulo $K \in T_h$, se define $\pi v(a^i) = v(a^i)$, $i = 1, 2, 3$.

Entonces:

$$\|v - \pi v\|_{L^\infty(K)} \leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)},$$

$$\max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha(v - \pi v)\|_{L^\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)},$$

donde

$$\|v\|_{L^\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|.$$

2.8. El sistema de ecuaciones

Tras la discretización, el problema $a(u, v) = b(v)$ se nos convierte en otro $a(u_h, v_h) = b(v_h)$, de dimensión finita que se corresponde con un sistema de ecuaciones lineales. Para ver como se lleva a cabo se considera la ecuación de Helmholtz con condiciones de Neumann (el caso de condiciones de Robin es semejante y el de Dirichlet se explica mas adelante).

De forma general el proceso es el siguiente:

La ecuación (Variacional Helmholtz) se expresa, tras la restricción al espacio V_h como

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \nabla \bar{v}_h - k^2 u_h \bar{v}_h) \, dx = \int_{\Gamma} \bar{v}_h g \, ds \quad \forall v_h \in V_h.$$

Como es cierto para todo v_h de V_h y $\{\varphi_i\}$ es una base de V_h , la ecuación anterior será también cierta para cada elemento de la base, es decir

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \nabla \bar{\varphi}_i - k^2 u_h \bar{\varphi}_i) \, dx = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_i g \, ds \quad i = 1, \dots, N$$

donde N es el número de nodos. Como la función incógnita se puede expresar como

$$u_h = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j,$$

sustituyendo en la anterior

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right) \nabla \bar{\varphi}_i - k^2 \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right) \bar{\varphi}_i \right) dx = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_i g ds, \quad i = 1, \dots, N$$

puesto que ξ_i es constante,

$$\sum_{j=1}^N \xi_j \left(\int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \nabla \bar{\varphi}_i - k^2 \varphi_j \bar{\varphi}_i) dx \right) = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_i g ds, \quad i = 1, \dots, N$$

que forma el sistema de N ecuaciones con N incógnitas buscado. Dicho sistema se puede representar como

$$A\xi = b.$$

Donde cada elemento de la matriz A es

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \nabla \bar{\varphi}_i - k^2 \varphi_j \bar{\varphi}_i) dx,$$

ξ es el vector columna con los coeficientes de u_h en la base $\{\varphi_i\}$ y b es otro vector columna con elementos

$$b_i = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_i g ds.$$

A es llamada la matriz de esfuerzo (*stiffness*) y b el vector de carga (*load*).

El proceso es igual para otras ecuaciones: cada componente a_{ij} de la matriz A se obtiene de la parte sesquilineal de la formulación variacional reemplazando u por φ_j y v por φ_i (y realizando la integración correspondiente). Cada componente b_i del vector b se obtiene sustituyendo \bar{v} por $\bar{\varphi}_i$ en la forma lineal de la formulación variacional.

La matriz A es simétrica y casi hueca (*sparse*) pues cada fila solo tiene como elementos no nulos los correspondientes a los nodos del propio elemento y de los elementos finitos contiguos.

En la práctica el proceso se realiza, tras referenciar adecuadamente los elementos y los nodos, estableciendo una matriz para cada elemento finito y ensamblándolas (posicionándolas en el lugar correspondiente y sumando cuando se solapan) en la matriz A . En el caso de una triangulación y ajuste por polinomios de primer grado se formarán matrices 3×3 para cada elemento finito. En general el tamaño de cada matriz se corresponderá con los grados de libertad del elemento.

Condiciones de Dirichlet En el desarrollo de la formulación variacional, se dejó sin resolver el problema con condiciones de Dirichlet

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx = \int_{\Gamma} \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds$$

al no saber como expresar la integral del miembro derecho. Una vez linealizado el problema, veamos como hacerlo:

Introduciendo la familia de funciones

$$V_{h,g} = \{v \in V_h : v|_{\partial\Omega} = g\}$$

y suponiendo que g es la restricción a $\partial\Omega$ de una función lineal a trozos, es decir, $g = u_{h,g}|_{\partial\Omega}$, $u_{h,g} \in V_{h,g}$ (en el caso de que no lo sea utilizamos una aproximación de g linealizada a trozos), podemos expresar $u_h = u_{h,0} + u_{h,g}$, que satisface las condiciones de contorno. Se puede probar que el resultado de u_h es independiente elección de $u_{h,g}$, por lo que tomaremos esta como nula en todos los nodos interiores. Así, $u_{h,g}$ es conocida: nula en los nodos interiores e igual a g en los nodos de la frontera. Solo nos queda determinar $u_{h,0} \in V_{h,0}$. Si tenemos n_i nodos interiores y n_b nodos en la frontera del dominio Ω , el sistema de ecuaciones puede, dejando los nodos de la frontera como últimas incógnitas, expresarse como

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{0,g} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ g \end{bmatrix}$$

donde A_{00} es la matriz ($n_i \times n_i$) correspondiente a los n_i nodos interiores, que tiene como elementos

$$(A_{00})_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \nabla \bar{\varphi}_i - k^2 \varphi_j \bar{\varphi}_i) \, dx ,$$

$A_{0,g}$ es la matriz ($n_i \times n_b$) correspondiente a los n_b nodos de la frontera, que se obtienen mediante la integral anterior, b_0 son las n_i primeras entradas de

$$b_i = \int_{\Gamma} \varphi_i g \, ds ,$$

y tanto ξ_g como g son los vectores con los n_b valores de la función g .

La anterior ecuación matricial se puede expresar como

$$A_{00}\xi_0 + A_{0g}\xi_g = b_0$$

es decir

$$A_{00}\xi_0 = b_0 - A_{0g}g$$

de donde los valores ξ_0 pueden ser calculados.

La solución del sistema La matriz A es muy grande (para problemas sencillos fácilmente adquiere varios miles de incógnitas) aunque la mayoría de sus elementos son nulos (*sparse*). Se han de utilizar, por tanto, técnicas especiales para su resolución. FreeFem++, como otros paquetes, permite elegir de entre varios métodos cual será el que se utilice para la solución del sistema. Alguno de ellos son:

gradiente conjugado: el método del gradiente conjugado (CG) suele presentar un buen rendimiento y es utilizado muy frecuentemente. Se trata de un método iterativo con una convergencia muy rápida (el número de iteraciones necesarias para llegar a la solución exacta es menor que el número de incógnitas). Es el método que se utilizará en los problemas, por lo que se muestra a continuación una breve descripción de su algoritmo: Sea ξ^0 una estimación inicial. Ponemos

$$r^0 = A\xi^0 - b$$

$$d^0 = -r^0$$

e iteramos en $k = 1, 2, \dots$

$$\alpha_{k-1} = -\frac{r^{k-1} \cdot d^{k-1}}{\langle d^{k-1}, d^{k-1} \rangle},$$

$$\xi^k = \xi^{k-1} + \alpha_{k-1} d^{k-1},$$

$$r^k = A\xi^k - b,$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\langle r^k, d^{k-1} \rangle}{\langle d^{k-1}, d^{k-1} \rangle},$$

$$d^k = -r^k + \beta_{k-1} d^{k-1}$$

Una descripción más detallada de estos métodos y algunos más puede encontrarse en [\[CM\]](#)

LU: Se trata de descomponer la matriz de coeficientes como producto una triangular inferior (*Lower*) por una triangular superior (*Upper*). Debido a que la matriz está esencialmente vacía, se utilizan técnicas especiales para reducir el número de calculos necesarios (por ejemplo las rutinas de UMFPACK).

Crout y Cholesky: Son variantes de la descomposición LU. En el método Cholesky, la que la matriz U es la traspuesta de la matriz L. Es aplicable solamente a matrices simétricas definidas positivas.

GMRES: El método generalizado de mínimos residuos. Se trata de un proceso iterativo con una convergencia muy buena: en al menos M operaciones obtiene el resultado exacto, aunque con un número pequeño en comparación con M se puede obtener una buena aproximación a la exacta.

2.9. Extensiones estándar del Método de los Elementos Finitos

Elementos Finitos No Conformes Se trata de una extensión del Método de los Elementos Finitos en la que a las funciones de V_h sólo se les exige continuidad en los puntos medios de cada borde de la partición. Son aplicados fundamentalmente en ecuaciones de cuarto orden que aparecen en ingeniería estructural. El problema variacional puede formularse como:

Encontrar $p_h \in \tilde{V}_h$ tal que $a_h(p_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$
 donde p_h coincide con g en los puntos medios de los bordes de la partición que están sobre Γ y

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in K_h} (a \nabla u, \nabla v)_K, \quad u, v \in V_h$$

siendo K cada elemento de la partición K_h ,

$$\tilde{V}_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \text{ es lineal}, K \in K_h \\ \text{y } v \text{ es continuo en los puntos medios de los bordes interiores}\}$$

y

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \text{ es lineal}, K \in K_h \\ \text{y } v \text{ es continuo en los puntos medios de los bordes interiores} \\ \text{y es cero en los puntos medios de los bordes de la frontera}\}$$

Mixed Finite Elements El método de elementos finitos acoplados se basa en agregar una variable escalar adicional al problema, creando dos espacios distintos pero acoplados. Por ejemplo, en dinámica de fluidos podemos querer calcular la velocidad del fluido en determinadas condiciones. Aunque no nos interese la presión, la introducción de ésta variable y el tratamiento simultáneo de los espacios (de velocidad y presión), puede ayudar a obtener un mayor grado de precisión en ambas variables. Un mecanismo para obtener las ecuaciones acopladas es semejante al que se utiliza para convertir una ecuación diferencial de orden dos en dos de orden uno. En este caso introducimos una nueva variable w mediante $-\nabla u = w$. Aplicamos la formulación variacional a ambas ecuaciones y, eligiendo adecuadamente las bases de las funciones, obtenemos un sistema de ecuaciones en el que los coeficientes forman una matriz de bloques, uno de los cuales está formado por ceros, cuya solución se puede optimizar.

Elementos Finitos Discontinuos Ha sido utilizado fundamentalmente en problemas de advección (hiperbólico) en aquellos casos en los que el Método de los Elementos Finitos Continuos no se comporta bien.

Métodos Adaptativos Si queremos mejorar la precisión del Método de los Elementos Finitos podemos hacer mas fina la partición del dominio. También se puede aumentar el grado de los polinomios con los que aproximamos las funciones. La adaptabilidad automática hp-FEM, introducido por Ivo Babuska, se basa en una combinación de refinamientos en el tamaño de los elementos (h) y el grado de los polinomios (p). Con ello se obtienen velocidades de convergencia mucho mejores que variando únicamente el tamaño de la partición o el grado de los polinomios utilizados para crear V_h .

Parte práctica

1. Software para Método de los Elementos Finitos

Actualmente existe una gran cantidad de software libre disponible para los sistemas operativos más corrientes (Windows, Unix, Linux, Mac). Se muestra una pequeña lista.

Aplicaciones de código libre para FreeFem++.

Nombre	Descripción
CalculiX	Creado en Alemania por los empleados de una fábrica de motores para aviación. Está enfocado al diseño estructural en tres dimensiones.
Code Aster	Escrito en Python y Fortran, se utiliza para ingeniería civil y estructural.
deal.II	Conjunto de herramientas escrito en C++ que se pueden utilizar tanto en pequeños ordenadores como en clústers de mas de 10000 núcleos.
DUNE	Distributed and Unified Numerics Environment está formado por una serie de librerías escritas en C++ dedicadas a la resolución por distintos métodos de EDPs. Posee uno para el método de los elementos finitos. Puede ser una de las aplicaciones más interesantes.
Elmer	Desarrollado por el Centro Finandés para la Ciencia, contiene modelos físicos para dinámica de fluidos, mecánica estructural, electromagnetismo, transferencia de calor y acústica. Soporta procesamiento en paralelo. Se puede ejecutar tanto desde línea de comandos como en un entorno gráfico. Bien documentado y muy potente.
FEBio	Finite Elements for Biomechanics, creado en el Laboratorio de Investigación músculo-esqueletal de la Universidad de Utah, está enfocado a modelos biomecánicos.
FeelFem	Ceado por el Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) se trata de un repositorio de herramientas para FEM que sirven para generar código.
FElt	Soluciona problemas de estática y dinámica estructural así como problemas de análisis térmico. Puede hacer análisis espectral de problemas dinámicos.
FEMLISP	Entorno para resolver PDEs escrito en Common Lisp.
FEniCS Project	Paquete de aplicaciones desarrolladas por investigadores americanos y europeos destinadas a la solución automatizada de ecuaciones diferenciales.
FiPy	Escrito en Python y orientado a objetos, es un paquete para solucionar ecuaciones diferenciales que permite resolver sistemas acoplados.
FreeFem++	Escrito en C++, el problema se escribe en su formulación variacional. Es el que se ha utilizado para la realización de este trabajo. Desarrollado fundamentalmente por Frederic Hecht.
GetDP	Es una aplicación para resolver ecuaciones mediante elementos finitos en una, dos y tres dimensiones con una metodología semejante a la de FreeFem++.
Hermes Project	Desarrollado por el grupo hp-FEM, liderado por Pavel Solin, es una librería modular en C/C++.
Impact	Escrita en Java, está enfocada a problemas de dinámica e impactos.
KFEM	Entorno para KDE variante de FreeFem++.
OOFEM	Es una librería en C++ orientada a objetos para resolver problemas de mecánica y dinámica de fluidos.
OpenFOAM	(Field Operation And Manipulation) Inicialmente desarrollada para CFD (computational fluid dynamics) incluye análisis por elementos finitos mediante descomposición en tetraedros.

Continúa...

Aplicaciones de código libre para FreeFem++ (*continuación*)

OpenSees	Open System for Earthquake Engineering Simulation, son una serie de interpretes que aceptan código en formato Tcl extendido.
ROOT	Software desarrollado en el CERN, para tratamiento de datos de física nuclear que dispone de infinidad de módulos, entre ellos para FEM.
SfePy	Paquete escrito en Python y C. Es semejante a FiPy.
TOCHNOG	Enfocado a geotecnología, contiene rutinas para tratamiento de elasticidad, viscosidad, flujo a través de medios porosos... Procesa un fichero de entrada y tiene la capacidad de almacenar los resultados en base de datos. Utiliza las rutinas de LAPACK.
Z88	Contiene un entorno gráfico y está enfocado principalmente a ingeniería mecánica. Está escrito en ANSI-C.

También hay decenas de aplicaciones comerciales pero según se indica en varios sitios no tienen por qué poseer funcionalidades mejores que los paquetes listados anteriormente.

2. FreeFem++

FreeFem++ es un software especializado en la resolución de ecuaciones diferenciales en dos y tres dimensiones aplicando el método de elementos finitos. Se trata de software de distribución libre escrito en C++. Se puede instalar en sistemas operativos UNIX/Linux, Windows y Mac. Puesto que los fuentes están disponibles, se puede instalar en casi cualquier sistema operativo. Para realizar el trabajo se ha utilizado FreeFem++cs que es un entorno también gratuito que incluye FreeFem++, un editor que resalta la sintaxis y detecta ciertos errores y un visor de resultados.

Un archivo (*script*) de FreeFem++ tiene una sintaxis similar a la de C++: terminación de instrucciones con punto y coma, declaración de variables obligatoria, bifurcaciones y bucles semejantes a C. En el apéndice A se resumen las características básicas que se han utilizado. Para una guía detallada véase [FH]. Los pasos principales a seguir cuando se crea un *script* para resolver un problema utilizando FreeFem++ se pueden resumir en:

- definir una región especificando su frontera (`border`)
- crear una partición (triangulación) de la misma (`mesh`)
- generar el espacio de funciones (`fespace`) sobre la región triangulizada
- especificar la formulación variacional del problema (`problem(problema)`)
- lanzar el cálculo (`problema`).

3. Problemas

Descripción de los problemas

En las siguientes secciones se determinará, aplicando los resultados obtenidos a lo largo del trabajo y utilizando FreeFem++, el campo acústico en una región acotada. Se considerarán regiones en dos dimensiones y se observará como el campo es afectado por la existencia de distintos obstáculos. El campo está gobernado por la ecuación de Helmholtz en la que el número de onda, k , se tomará como un real positivo (valores complejos de k modelan medios absorbentes).

Se utilizará la técnica de descomponer el campo u en incidente u^i y dispersado u^s de forma que

$$u^i + u^s = u$$

donde el campo u^i es la solución en el espacio libre de medios, que conocemos:

$$u^i(x) = \Phi(x, z)$$

siendo z la posición de la fuente, que consideraremos fuera del dominio y Φ la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz.

Con estas condiciones (dos dimensiones, ecuación de Helmholtz y fuente puntual) el campo está dado por

$$\Phi(x, z) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - z|)$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie y orden cero¹⁵.

La determinación del campo u , se realiza mediante los siguientes pasos. En primer lugar planteamos la formulación variacional para u^s , expresando las condiciones de contorno en función de u^i (que es conocida). A continuación se calcula u^s mediante el Método de los Elementos Finitos y a la solución obtenida se le suma u^i . Por último se representa la parte real de u , que es la que representa el campo real.

Problema 0:

Ningún medio dispersante en el dominio

Para contrastar un campo conocido con el obtenido por el Método de los Elementos Finitos, vamos a considerar que en nuestra región de estudio no hay ningún medio dispersante (la ecuación de Helmholtz se cumple en todo el dominio, con k constante y sin imponer condiciones de frontera). El campo acústico generado por

¹⁵Como FreeFem++ no dispone de las funciones de Hankel, la expresaremos como función de las de Bessel: $H_0^{(1)} = J_0 + i \cdot Y_0$.

una fuente puntual estará dado por la solución fundamental $\Phi(x, z)$ antes expresada. Vamos a contrastar ese campo teórico con el obtenido por el Método de los Elementos Finitos conociendo sólo el valor en la frontera.

Como primer paso en la creación del *script* lo que haremos es definir la región. Se puede hacer paramétricamente, forma muy adecuada para nuestra geometría. A continuación la triangulamos (60 aristas en la frontera). Creamos un espacio V_h para esa triangulación y le asignamos el valor de Φ , representando, tras tomar la parte real, el valor del campo correspondiente a la solución fundamental.

Por otro vamos a calcular el campo mediante el Método de los Elementos Finitos dado el valor del campo en la frontera. Para ello se define el problema variacional, con condiciones de contorno de Dirichlet. La parte sesquilineal de la expresión de Galerkin es

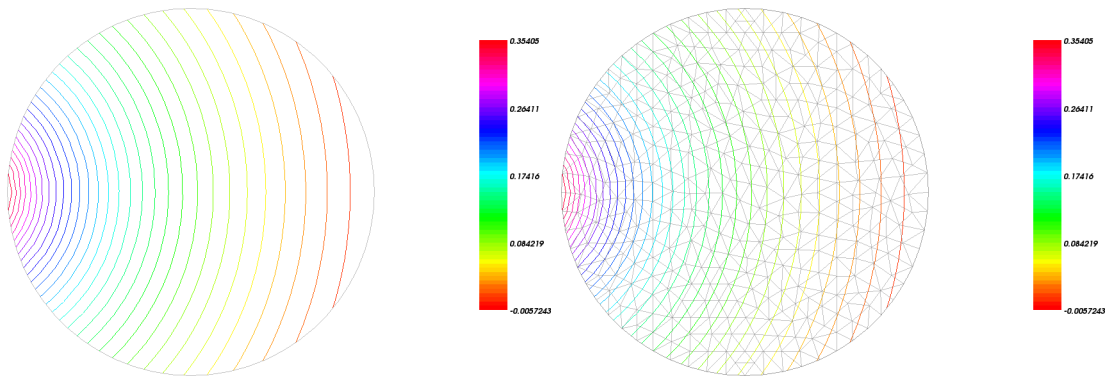
$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx$$

que podemos escribir en dos dimensiones como

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - k^2 u \bar{v} \right) \, dx \, dy \quad (\text{FB})$$

muy fácil de expresar en FreeFem++. Las condiciones en la frontera las indicaremos explícitamente.

Tras lanzar el cálculo del problema representamos la parte real de la solución.



Campo teórico (mediante función de Hankel) y calculado mediante F.E.M (solapado con la triangulación).

En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos correspondientes al eje x

x	valor real	valor calculado	error relativo
-1.0	0.354049	0.354049	-1.56789e-16
-0.9	0.3067	0.307132	-0.00141037
-0.8	0.269316	0.269551	-0.000871853
-0.7	0.239753	0.239919	-0.000693532
-0.6	0.213275	0.213329	-0.000252193
-0.5	0.19033	0.190343	-7.14917e-05
-0.4	0.170159	0.170169	-6.26444e-05
-0.3	0.151448	0.151464	-0.000110207
-0.2	0.134427	0.134505	-0.000579026
-0.1	0.118614	0.118668	-0.000458876
0.0	0.103813	0.103814	-1.31635e-05
0.1	0.0900195	0.0900027	0.000186705
0.2	0.0770183	0.0770323	-0.000182185
0.3	0.0648389	0.0648307	0.000127232
0.4	0.0532604	0.0532537	0.00012554
0.5	0.0421407	0.0421408	-2.72414e-06
0.6	0.0317093	0.031704	0.000168653
0.7	0.0217227	0.0217143	0.000388394
0.8	0.0120798	0.0120958	-0.0013263
0.9	0.00300191	0.00301302	-0.00369912
1.0	-0.00572434	-0.00572434	-1.51522e-16

Resultados numéricos sobre el eje x

Se observa que el cálculo mediante el Método de los Elementos Finitos se aproxima con gran precisión al teórico (solución fundamental). Pese a que se ha utilizado una triangulación con tan solo 60 aristas en la frontera, en el peor de los casos hay un error del 0,3 %.

Problema 1:

Obstáculo impenetrable completamente absorbente

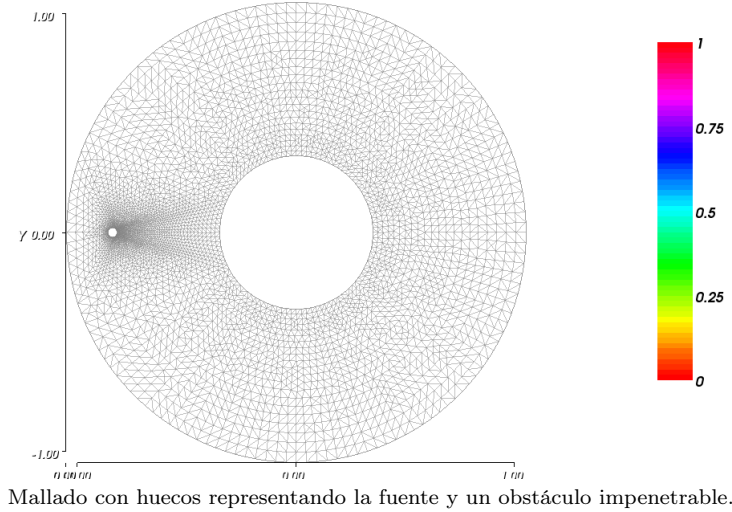
Se considerará ahora un obstáculo impenetrable completamente absorbente (*sound-soft*) que ocupa la región D (circunferencia centrada en el origen de radio $1/3$) dentro del dominio Ω . Se impondrá también que la pared de la región de estudio ($\partial\Omega$) sea completamente absorbente. Ello implica que el campo u será nulo en la frontera (tanto en ∂D como en $\partial\Omega$).

Como no nos interesa calcular el campo dentro del material dispersante (ya que sabemos que en su interior el campo es nulo y no necesitamos calcularlo), podemos parametrizar su frontera en el sentido de las agujas del reloj (al aumentar el parámetro), de forma que FreeFem++ excluye de la región de estudio su interior. Se reduce así el tamaño de la matriz que representa la forma sesquilineal en V_h .

Para incorporar la fuente dentro del dominio, evitando valores infinitos y adaptándose a lo que podría ser un micrófono, se creará una pequeña circunferencia

M , (también parametrizada en sentido horario y por tanto quedando fuera del cálculo) y asignando en ella el valor de la función de Hankel centrada en su origen.

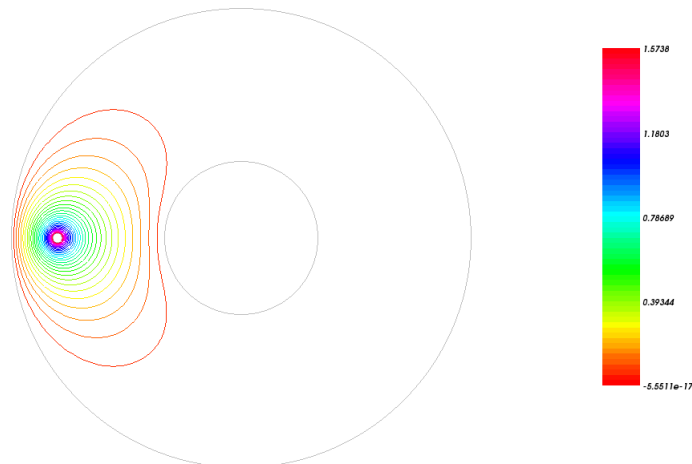
Se crea una triangulación con 140, 100 y 60 vértices en $\partial\Omega$, ∂D y ∂M respectivamente obteniéndose:



Para el cálculo del campo, el problema puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^s(x) + k^2 u^s(x) &= 0, & x \in \Omega \\ u^s(x) &= -u^i, & x \in \partial\Omega \cup \partial D. \\ u^s(x) &= u^i, & x \in \partial M. \end{aligned}$$

Definimos el problema (“*problem*”) para u^s con las condiciones de contorno. Por tratarse de un obstáculo completamente absorbente, el campo será nulo en su frontera. Por ello $u^s = -u^i$. Se puede expresar, por tanto, que en la frontera (“*on*”) u^s es el opuesto de la solución fundamental (*free-space*). Tras calcular la solución le agregamos u^i y representamos la parte real (realizándose el cálculo en 0,12s).



Campo resultante al confinar una fuente de tamaño finito entre dos obstáculos completamente absorbentes.

Problema 2: Obstáculo completamente reflectante

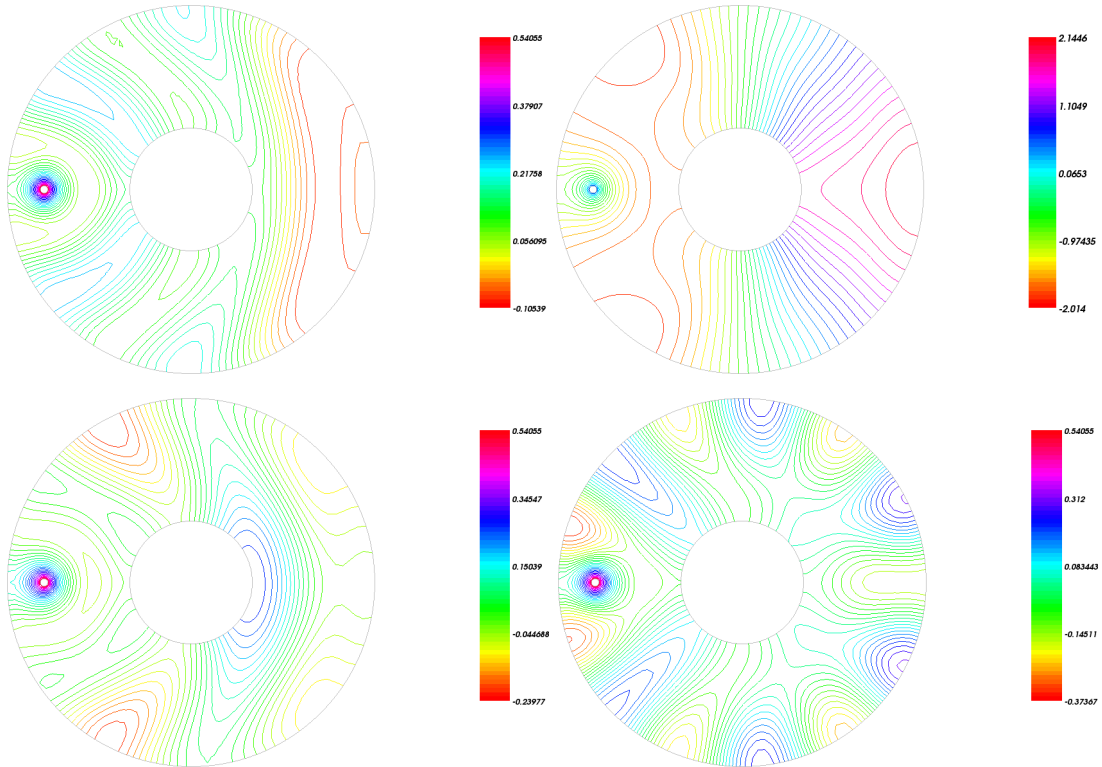
El hecho de que un obstáculo refleje completamente las ondas incidentes lo podemos expresar como

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} = - \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \quad x \in \partial D$$

Se trata, por tanto de un problema con condiciones de Neumann. La formulación de variacional en dos dimensiones para u^s será

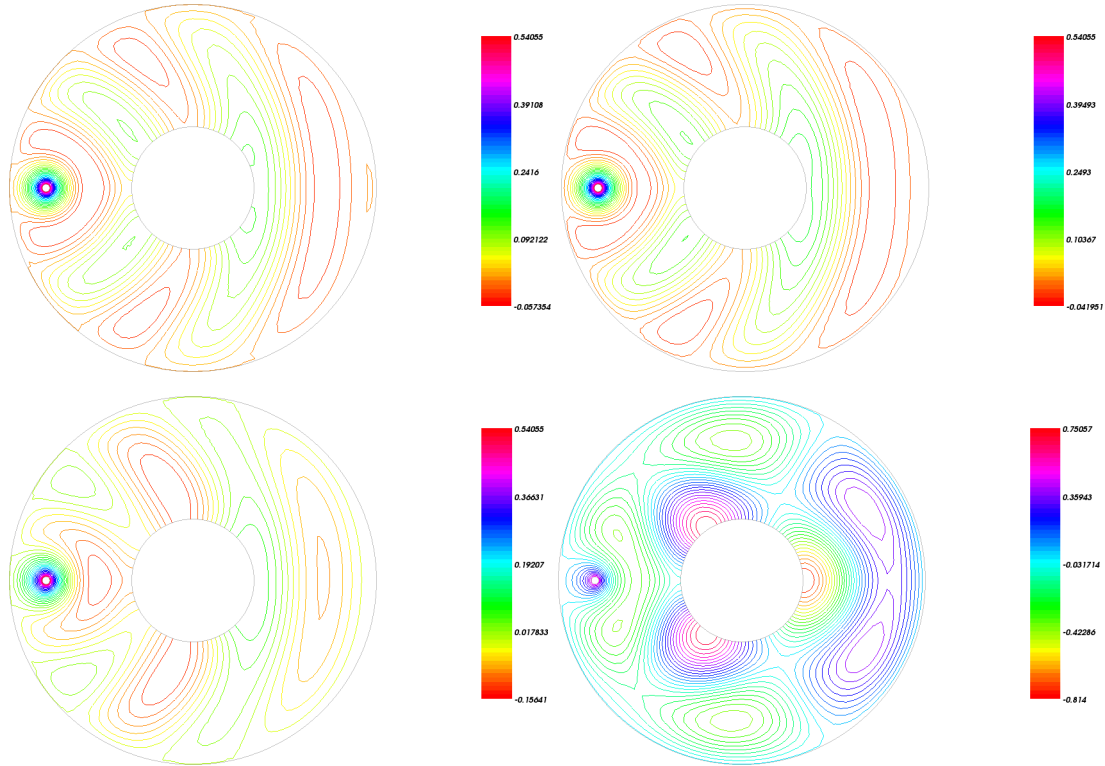
$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u^s}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u^s}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - k^2 u^s \bar{v} \right) dx dy = \int_{\Gamma} g \bar{v} ds \quad (\text{FB})$$

donde $g = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu}$. Situaremos la fuente en el interior del dominio.



Campo resultante entre dos obstáculos reflectantes para $k = 1, 2, 4$ y 8

Si suponemos que la pared del dominio (Ω) es completamente absorbente, tendremos una situación totalmente distinta. Para el cálculo del campo dispersado se impondrá una condición de Dirichlet en la frontera Ω (que en FreeFem++ representamos mediante condición “on”) y una condición Neumann en la frontera con el obstáculo (expresada mediante integral de línea). Obtenemos así el siguiente campo:



Campo resultante en un recinto completamente absorbente con un obstáculo reflectante para $k = 1, 2, 4$ y 8 .

Se observa claramente como en los obstáculos reflectantes las líneas de igual amplitud llegan perpendicularmente, mientras que al acercarse a los absorbentes, las líneas se hacen paralelas a la superficie.

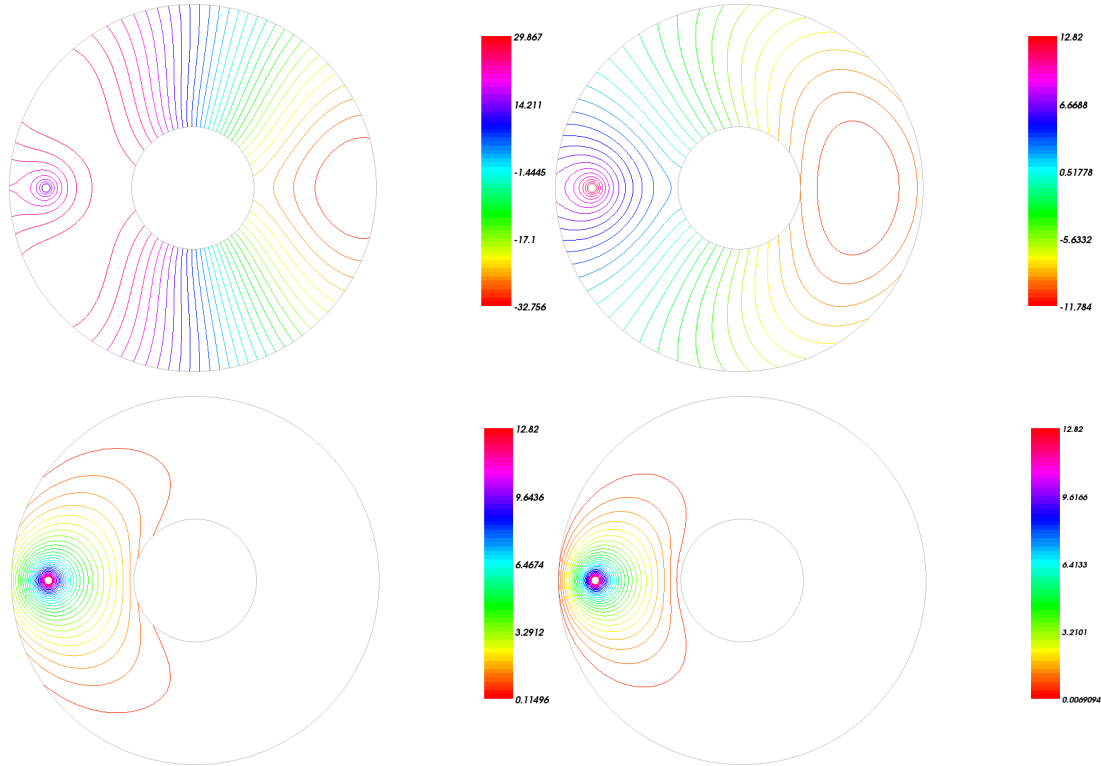
Problema 3: Obstáculo con comportamiento intermedio

Para una situación intermedia entre las dos anteriores, podemos modelar las condiciones en la frontera mediante condiciones de Robin, que en el caso de descomponer el campo en incidente mas dispersado, se escriben

$$\frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x) + \gamma u^i = -\frac{\partial u^s}{\partial \nu}(x) - \gamma u^s \quad x \in \partial D$$

Tal y como se dedujo en el apartado de las condiciones de Robin, y expresado en dos dimensiones la formulación variacional es

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - k^2 u \bar{v} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \gamma u ds \quad (\text{FB})$$


 Campo resultante para $\gamma = 0, 2, 1, 10, 100$ con $k = 1$.

Para la misma geometría que en los problemas anteriores, se ve claramente que al variar γ desde cero hasta valores grandes (por ejemplo 100) como el comportamiento de las paredes pasa de reflectante a absorbente.

Problema 4:

Medio no homogéneo con índice de refracción continuo

La ecuación de Helmholtz en un medio no homogéneo viene dada por

$$\nabla^2 u(x) + n(x)k^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

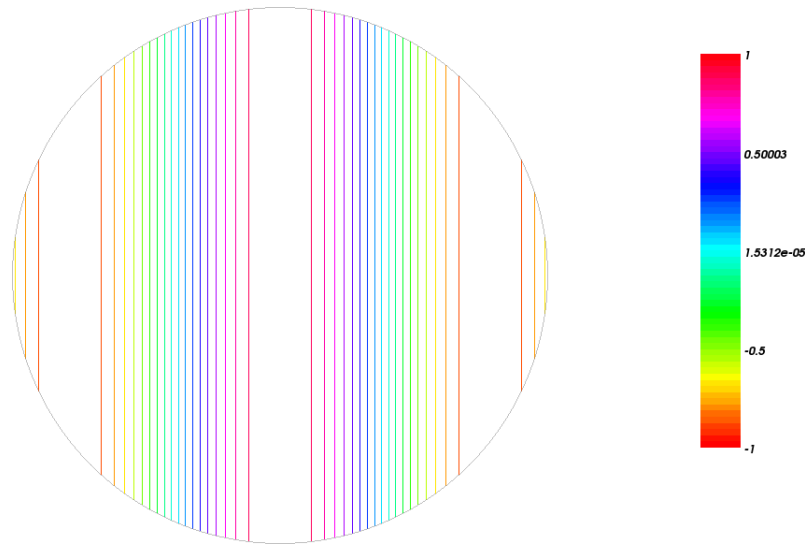
donde el índice de refracción n será considerado real¹⁶, con $0 \leq n(x) \leq 1$. En estas condiciones podemos considerar $k' = \sqrt{n}k$, y todo el desarrollo es válido sin realizar cambios, mientras mantengamos k' dentro de la integral.

Nuestra región de estudio seguirá siendo el círculo unidad, pero para mostrar un resultado más evidente, utilizaremos una onda plana (propagándose en el sentido de las x crecientes) en vez de la producida por una fuente puntual. Por tanto, se asigna en la frontera el valor del campo como

$$u(x) = e^{ikx_1}, \quad x \in \partial\Omega$$

¹⁶un índice de refracción complejo modela un medio absorbente.

donde x_1 es la primera componente de $x = (x_1, x_2)$. en esas condiciones, el campo es el que se muestra a continuación

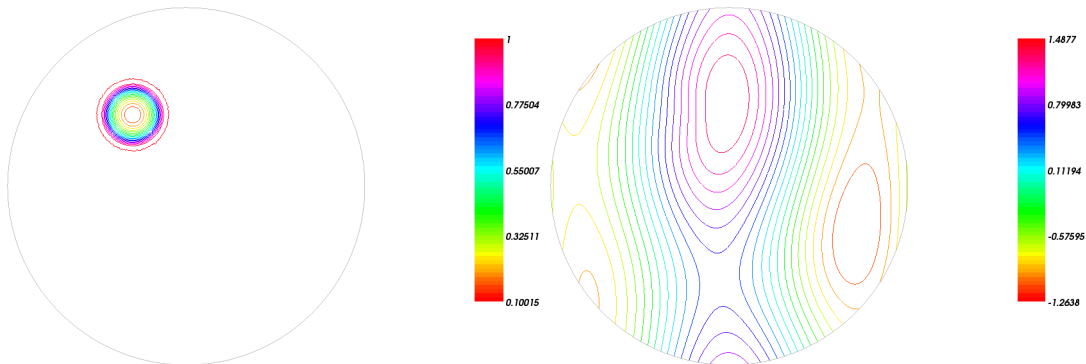


Onda plana.

Si alteramos el índice de refracción de forma que se atenga a la ecuación

$$n = 1 - A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{r^2 - (x-x_0)^2}}$$

en el interior de un círculo de radio r y valga 1 fuera de el, se obtiene, para $r = 0,2$ y $A = 0,9$, el siguiente resultado



Índice de refracción y deformación de una onda plana.

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

Aunque la ecuación de Helmholtz ya me era conocida, al realizar el trabajo he comprendido mejor su significado, importancia y características. La técnica de separar el campo en incidente y dispersado, aunque también conocida, ha quedado mucho más clara.

La elaboración de trabajo me ha permitido adquirir un conocimiento riguroso y extenso (no se puede decir completo pues existen infinitas variantes y técnicas cuyo dominio exigiría muchos años de dedicación) de una técnica que empezó a formarse hace algunas décadas y que con el tiempo está adquiriendo un grado de desarrollo e implantación cada vez mayor. Muestra su utilidad en infinitos campos de la ciencia y de la técnica más actuales (todos aquellos gobernados por ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno) entre los que podemos destacar diagnóstico por imagen (ecografías, TAC, resonancias), fisiología, dinámica de reacciones químicas, membranas, dinámica de fluidos (CFD), problemas de transferencia del calor, estructuras, geofísica, meteorología, antenas, física nuclear y un largo etcétera.

El número de publicaciones que se realizan sobre el tema es inmenso. Existen muchos grupos de trabajo accesibles en internet, algunos de ellos hacen disponible a los interesados la bibliografía y los medios (software y presentaciones) que han elaborado. Debido a ello, a lo largo del trabajo ha sido necesario mejorar la capacidad para filtrar y organizar información procedente de fuentes dispares.

Empezar a trabajar con FreeFem++ ha sido bastante sencillo. Tiene documentación completa y gran cantidad de ejemplos. No obstante tiene una gran potencia y hay muchas opciones que no he investigado.

Es de destacar la rigurosa base matemática sobre la que se asienta este método numérico.

Para el estudio y desarrollo del Método de los Elementos Finitos se ha de tener una base sólida de análisis funcional, álgebra lineal así como el conocimiento métodos numéricos y programación.

En este trabajo se han presentado dos deducciones de la ecuación de Helmholtz y se han mostrado distintas condiciones de contorno aplicables a las ondas acústicas. Tras la deducción de la formulación variacional y utilizando el teorema fundamental del Método de los Elementos Finitos, el teorema de existencia y unicidad de Lax-Milgram, se ha mostrado como aproximar un problema posiblemente irresoluble por medios analíticos en un sistema de ecuaciones.

Aunque para mostrar la aplicabilidad del método se han utilizado problemas con geometrías sencillas, la utilización en otras más complicadas no aporta dificultad. Si la precisión buscada no es muy crítica, todos los cálculos se pueden realizar

en un ordenador sin requerimientos especiales y en tiempos muy razonables. En casos de mayor complejidad se puede recurrir a procesamiento en paralelo.

Se han mostrado los efectos que distintos medios y objetos provocan en la distribución de ondas acústicas estacionarias.

Perspectivas

Este trabajo abre las puertas a infinidad de áreas en las que se puede seguir investigando, entre ellas están todas las extensiones estándar que se han descrito en la sección 2.9. Otras vías de investigación son las siguientes:

PML: Perfectly matches layers El método de capas perfectamente acopladas es un mecanismo para acotar la región de estudio de forma que se pueda reducir enormemente el número de incógnitas necesarias para resolver el problema.

Problema inverso Por problema inverso se entiende la determinación de la estructura de un medio desconocido analizando el campo dispersado en función del campo incidente. La cantidad de situaciones en las que es aplicable esta técnica es enorme, pero caben destacar el diagnóstico por imagen, detección de fisuras en estructuras y prospecciones geológicas. Cualquier avance en este sentido es de gran valor.

Software Como se ha indicado en la sección 1, hay una gran cantidad de software libre para trabajar con el Método de los Elementos Finitos. Sería interesante llevar a cabo una comparación exhaustiva entre ellos. En concreto Elmer y el Proyecto Hermes son dos alternativas, a tener muy en cuenta, para realizar un estudio adicional.

Quiero agradecer a mi Tutor de TFM, el Dr. Pedro Serranho, su paciencia, dedicación y sus acertadas directrices y sugerencias, pero sobre todo el que me haya hecho comprender que al investigar sobre un tema desconocido hay que centrarse en construir una base sólida antes de aventurarse en técnicas mas avanzadas.

A Feli, mi esposa, que ha tenido que padecer mi desentendimiento de la vida familiar y sin cuyo apoyo y amor no habría podido realizar este trabajo.

A mi madre y a la memoria de mi padre, que han dedicado toda su vida a sus hijos, dándonos todo el cariño y la mejor educación que hemos podido tener.

Guillermo Castaño Ochoa
con la dirección y supervisión del

Dr. Pedro Serranho
Universidade Aberta/Portugal

Bibliografía

- [RC] Richard Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*
Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), pp. 1–23.
- [RK] Rainer Kress, *Numerical Analysis*.
Springer, 1997.
- [ZC] Zhangxin Chen, *Finite Element Methods and Their Applications*.
Springer, 2005.
- [CJ] Claes Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*.
Cambridge University Press, 1987.
- [TO] Tinsley Oden, *finite element method*. Scholarpedia, 2009.
- [CK] David Colton, Rainer Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*.
Springer, 1998.
- [DC] David Colton, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*.
MSRI Publications, 2003.
- [TC] Tai L. Chow, *Mathematical methods for physicists*.
Cambridge University Press, 2000.
- [PS] Pavel Šolín, *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*
John Wiley & Sons, 2006.
- [OM] Olga Martin, *Variational study of an elliptic boundary problem*
<http://www.mathem.pub.ro/proc/bsgp-14/M4-MA.PDF>
- [RA] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*
Academic Press, 1975.
- [ZL] Zhilin Li, *MA587 Numerical Methods for PDEs –The Finite Element Method*.
Cap. 6,7,8 y 9 (PDF)
www4.ncsu.edu/~zhilin/TEACHING/MA587/chap6.pdf
- [KA] *Finite Element Method*
Department of Mathematics, KAIST, MAS765
<http://math.kaist.ac.kr/~dykwak/Courses/Num765-08/variation-fem.pdf>
- [CM] Carl D. Meyer *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra* Siam, 2000
- [BM] Xavier Brunotte, Gérard Meunier, Jean-François Imhoff, *Finite Element Modeling of Unbounded Problems using Transformations: A Rigorous, Powerful and Easy Solution*
IEEE Transactions on magnetics, Vol 28, Issue 2. 1992.

- [PX] Kristen Parrish, Chicheng Xu, Paul Tsuji, *Higher Order Fem Solutions for a Plane Wave Propagating Through an Inhomogeneous Dielectric*
EE 383V COMPUTATIONAL ELECTROMAGNETICS: FEM PROJECT
<http://www.cerc.utexas.edu/~kparrish/class/fem.pdf>
- [LT] L.L. Thompson, *Finite element methods for acoustic: A review of finite element methods for time-harmonic acoustics*
J. Acoust.Soc.Am. 2005
- [MB] Martin Burger, *Finite Element Approximation of Elliptic Partial Differential Equations on Implicit Surfaces*
Computing and Visualization in Science
March 2009, Volume 12, Issue 3, pp 87-100
- [DD] Jim Douglas Jr and Douglas B. Meade, *Second-Order Transmission Conditions for the Helmholtz Equation*
http://reference.kfupm.edu.sa/content/s/e/second_order_transmission_conditions_for_107166.pdf
- [SC] José Serrate, Ramón Clarisó, *El Método de los Elementos Finitos en problemas electromagnéticos: planteamiento y aplicaciones*
Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería
Vol 17,1,219-248, 2001
- [EC] Eliseo Chacón Vera, *Notas sobre FreeFem++2D y 3D*
<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++Spanish.pdf>
- [GS] Georges Sadaka, *FreeFem++, a tool to solve PDEs numerically*
arXiv:1205.1293v1 [math.NA] 7 May 2012
- [FH] F. Hecht, *FreeFem++, Third edition*
<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>

Apéndice

A. El lenguaje de FreeFem++

Aunque para la realización del trabajo se ha utilizado el entorno FreeFem++CS, se ha probado a utilizar FreeFem++ desde la línea de comandos, que únicamente tiene la desventaja de no tener resaltado de código y tener que usar un visor externo para observar los resultados. La sintaxis de FreeFem++ es semejante a C++. Se describen a continuación algunas características básicas del lenguaje.

Igual que en C/C++ es necesario declarar el tipo de variables antes de usarlas. Las más sencillas son las de tipo `int`, `real`, `complex` y `string`. Los dos primeros almacenan datos de tipo entero, números en coma flotante. Las variables de tipo `complex` almacenan números complejos en los que la parte real y la parte imaginaria son en coma flotante. Es de destacar que FreeFem++ no reconoce la letra `i` a menos que vaya precedida de un número (`i` o `1+i` no es reconocido pero `1i` o `1+1i` sí). Para la asignación de constantes a las variables tipo `string` se utilizan las comillas dobles.

Las variables tipo `border` permiten definir las fronteras de las distintas regiones. Se realiza paramétricamente, indicando un nombre, el tipo de parametrización y posiblemente un segundo código para referirnos a una frontera. Un ejemplo es el siguiente:

```
border a(t=0,1){x=t;y=0;label=1;};
border b(t=0,0.5){x=1;y=t;label=1;};
border c(t=0,0.5){x=1-t;y=0.5;label=1;};
border d(t=0.5,1){x=0.5;y=t;label=1;};
border e(t=0.5,1){x=1-t;y=1;label=1;};
border f(t=0,1){x=0;y=1-t;label=1;};
```

que a través de varias parametrizaciones forma una “L”, en sentido antihorario. En caso de hacer parametrización en sentido horario se genera un hueco. Todos los `border` deben ser cerrados.

Una vez creado podemos asignarle valores mediante `on(1)` si queremos referirnos a varios que tienen la etiqueta 1 o `on(f)` para referirnos a una parte concreta de la frontera.

El siguiente tipo de datos es `mesh`. Se inicializan con la función `buildmesh` indicando cuantos nodos se pondrán en la frontera. Un ejemplo es:

```
mesh th= buildmesh(a(20)+b(30)+c(10)+d(15)+e(7)+f(40));
```

que creará una triangulación de la región definida por la frontera `a-b-c-d-e-f-a` con el número de nodos indicados entre paréntesis en cada zona de la frontera.

El tipo de variable `fespace` almacena un espacio de elementos finitos. La declaración se hace de la forma

```
fespace Vh(Th,P1); Vh u;
```

En primer lugar se crea una clase `Vh` indicando la triangulación a utilizar y el tipo y forma de asignar funciones (en este caso polinomios de grado uno). En segundo lugar se crea la variable `u` propiamente dicha. En la creación del `fespace` se puede indicar que es de tipo complejo:

```
Vh<complex>u;
```

El siguiente paso es declarar un `problem`:

```
problem miproblema(uh,vh) =
  int2d(Th)( dx(uh)*dx(vh)
  + (2i+1)*dy(uh)*dy(vh) )
  - int2d(Th)( f*vh )
  + on(1,2,3,4,uh=g) ;
```

en el ejemplo anterior se ha declarado un problema con nombre `miproblema` que va a utilizar los `fespace` `uh` y `vh` para el espacio de soluciones y funciones test respectivamente y se le indica la forma variacional mediante integrales de volumen (`int3d`) de superficie (`int2d`) o de línea (`int1d`). Se indican también los valores de frontera que han de estar forzados (`on()`).

Cabe destacar que existen los operadores `dx` y `dy` para referirse a las derivadas parciales respecto a `x` e `y`. También existen los vectores `N.x` y `N.y` para referirse a las componentes `x` e `y` de la normal.

Tras estos pasos, lo que se suele hacer es indicar que se resuelva el problema indicando su nombre; en nuestro caso

```
miproblema;
```

los dos últimos pasos se pueden realizar de una vez, mediante el comando `solve`.

Para representar un resultado se utiliza la instrucción `plot` pasándole como parámetros el o los `vespace` a mostrar y otros parámetros opcionales.

Código de ejemplo

```

//Problema 0.
//Contiene 2 gráficas
//la primera se obtiene de asignar directamente
//la función de Hankel a uh_H perteneciente a Vh.
//la segunda se calcula a partir de los valores
// de la función de H. sólo en la frontera y
//resolviendo la ec. de Helmholtz.
//Se obtiene el mismo resultado, como cabía esperar.
//Podemos así reemplazar la fuente por los valores
// que la fuente produce en la frontera de omega

//unas constantes:
real d=1.3; //distancia de la fuente al origen (posicion (-d,0)
real k=0.4; //elegido para que se aprecie bien.

//la frontera
border omega(t=0, 2*pi){x=cos(t);y=sin(t)}; //circulo en senti
//do antihorario.

mesh Th=buildmesh(omega(60)); //triangulación con 60 vértices
//en la frontera de omega

func h=0.25i*(j0(k*sqrt((x+d)*(x+d)+y*y))
+ 1i*y0(k*sqrt((x+d)*(x+d)+y*y)));
//Como no hay función de Hankel,
// la creamos a partir de las de Bessel
//la raíz de -1 no se puede poner como i sino 1i

fespace Vh(Th,P1); // P1 vértices, no baricentro.
Vh <complex> uhH,uh,vh;
//se declaran tres espacios pertenecientes a Vh (complejo)

uhH=h; //asignamos la función de H.
Vh RuhH; //se declara RuhH perteneciente a Vh(real)
RuhH=real(uhH); //se le asigna la parte real de uhH
plot(RuhH,value=true,nbiso=32,nbarrow=100,
LabelColors=0,ShowAxes=0,ps="ejer0_1.eps");
//y se representa

problem helmholtz(uh,vh) =
int2d(Th)(dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh)
- k*k*uh*vh)
+ on(omega,uh=h);
//se declara un problema con la forma variacional (Galerkin)
// de la ec. Helmholtz y se fuerzan los valores
// de frontera (P. Dirichlet), mediante on(omega,...=...)

helmholtz; //se lanza el cálculo.
//se podría poner solve helmholtz(uh,vh)=int2d...
//que equivale a la declaración y cálculos simultaneamente

```

```

Vh Ruh; //se declara Ruh para albergar la parte real de uh
Ruh=real(uh);
plot(Th,Ruh,value=true,nbiso=32,nbarrow=100,
      LabelColors=0,ShowAxes=0,ps="ejer0_2.eps");
      //se representan juntos la triangula
      //ción Th, y la parte real del campo calculado (Ruh)
//se comprueba que uh
for(real i=0 ;i<1;i+=0.1){
cout << Ruh(i,0)<<endl;
}
{
  ofstream gnu("plot.gp");
for (real i=-1;i<=1;i+=0.1)
  {
    gnu << i << " " << RuhH(i,0) << " " << Ruh(i,0)
      << " " << (RuhH(i,0)-Ruh(i,0))/RuhH(i,0) <<endl;
  }
}
// llamada a gnuplot
exec("echo 'plot \"plot.gp\" using 1:2 title \"calculado\",\
      \"plot.gp\" using 1:3 title \"Hankel\" w l\
      pause 5\
      set term postscript\
      set output \"gnuplot.eps\"\
      replot\
      quit' | gnuplot");

```