
Grupos cristalográficos no euclídeos y sus acciones sobre el plano hiperbólico

escrito por

ALEJANDRO J. MONERRI MOLINA

Tutor: Profesor Francisco Javier Cirre Torres



Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Trabajo presentado para la obtención del título de
Master Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.
Especialidad Geometría y Topología

JUNIO 2016

ABSTRACT

Abstract en español:

En este trabajo se exponen las propiedades básicas de los subgrupos discontinuos Γ del grupo de isometrías del plano hiperbólico \mathbf{H} , tanto en el caso de cociente \mathbf{H}/Γ compacto, como en el caso no compacto. Para ello, se han estudiado las propiedades geométricas de las regiones fundamentales y los espacios cocientes asociados, así como la relación de éstos con sus estructuras algebraicas.

Abstract in English:

This Master Thesis deals with the basic properties of the discontinuous subgroups Γ of the group of isometries of the hyperbolic plane \mathbf{H} , both in the case of compact quotient \mathbf{H}/Γ and in the no-compact case. For this purpose, the geometrical properties of their fundamental regions and quotient spaces have been studied, as well as the relationship between them and their algebraic structures.

Keywords: Grupos cristalográficos no euclídeos, Regiones Fundamentales, Automorfismos de superficies de Riemann y de Klein

TABLA DE CONTENIDOS

| | Página |
|---|---------------|
| Índice de cuadros | iv |
| Índice de figuras | v |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 Preliminares | 3 |
| 2.1. Geometría Hiperbólica | 4 |
| 2.2. Espacios recubridores | 5 |
| 2.3. Grupos fuchsianos | 7 |
| 2.4. Superficies de Riemann y sus grupos de automorfismos | 8 |
| 2.5. Algunos resultados de la teoría de grupos | 11 |
| 3 Grupos NEC con espacio cociente compacto | 14 |
| 3.1. Definición. Propiedades básicas | 14 |
| 3.2. Región de Wilkie | 15 |
| 3.3. Clasificación algebraica | 30 |
| 3.4. Signatura y presentación de grupos NEC | 38 |
| 3.5. Isomorfismos de grupos NEC | 41 |
| 3.6. Área de una región fundamental | 48 |
| 3.7. Rango de un grupo NEC | 50 |
| 3.8. Subgrupos de grupos NEC | 53 |
| 4 Grupos NEC con espacio cociente no compacto | 62 |
| 4.1. Región Fundamental de grupos NEC no compactos | 63 |

| | |
|--|-----------|
| 4.2. Estructura algebraica de grupos NEC no compactos | 71 |
| 4.3. Estructura de grupos NEC no compactos y finitamente generados | 74 |
| 5 Conclusiones | 83 |
| Bibliografía | 85 |

ÍNDICE DE CUADROS

| TABLA | Página |
|---|---------------|
| 3.1. Signatura y Presentación | 40 |
| 3.2. Orden de los estabilizadores de los vértices | 50 |
| 4.1. Tabla de vértices de v | 73 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| FIGURA | Página |
|--|--------|
| 2.1. Vértice parabólico | 10 |
| 3.1. Región fundamental inicial $ApBCp^*D$ | 21 |
| 3.2. Región fundamental transformada $AqCq^*T(B)D$ | 22 |
| 3.3. Región fundamental inicial $ABpCp^*D$ | 23 |
| 3.4. Región fundamental transformada $AqCT(B)q^*D$ | 24 |
| 3.5. Región fundamental inicial $ApBCp'D$ | 24 |
| 3.6. Región fundamental transformada $AqCT(B)q'D$ | 25 |
| 3.7. Región fundamental inicial $ABpCp'D$ | 25 |
| 3.8. Región fundamental transformada $AqCq'T(B)BD$ | 26 |
| 3.9. Teselas para calcular la relación del vértice v | 29 |
| 4.1. Vértice parabólico en una región de Dirichlet no compacta | 65 |
| 4.2. Región de Dirichlet del grupo modular | 65 |
| 4.3. Región de Dirichlet del $\langle z \mapsto z + 1 \rangle$ | 66 |
| 4.4. F_1 tiene contorno cíclico. F_2, F_3 no tienen contorno cíclico | 66 |
| 4.5. Gráfico para demostración de 4.1 | 67 |
| 4.6. Ejemplo de sector para la demostración de la proposición 4.7 | 70 |
| 4.7. Estrella del vértice v | 73 |
| 4.8. Región fundamental con un vértice parabólico | 76 |
| 4.9. Superficie cociente correspondiente a componentes parabólicas | 76 |
| 4.10. Región fundamental con un lado en el eje \mathbf{R} | 77 |
| 4.11. Superficie cociente correspondiente a componentes hiperbólicas (funnel) | 77 |
| 4.12. Región fundamental con un lado en el eje \mathbf{R} y reflexiones | 77 |
| 4.13. Superficie cociente correspondiente a componentes hiperbólicas (funnel con línea de reflexión) | 77 |
| 4.14. Superficie orientable de género 1 no compacta | 79 |
| 4.15. Región fundamental del grupo G | 79 |
| 4.16. Superficie orientable de género 1 no compacta menos un disco cerrado | 80 |

INTRODUCCIÓN

Por el teorema de uniformización para superficies de Riemann sabemos que toda superficie compacta de Riemann de género mayor que uno es el espacio de órbitas del plano hiperbólico \mathbf{H} bajo la acción de un subgrupo discreto Γ del grupo de automorfismos de \mathbf{H} que preservan la orientación. La naturaleza discreta de estos subgrupos, llamados grupos fuchsianos, implica la existencia de las denominadas regiones fundamentales, que son polígonos hiperbólicos, entre cuyas propiedades está la de la naturaleza invariante de su área, que nos permite deducir las sorprendentes propiedades de finitud de sus grupos de automorfismos. Adicionalmente, las propiedades algebraicas de un subgrupo fuchsiano están estrechamente relacionadas con la estructura geométrica de su región fundamental. De esta forma, la conexión entre las propiedades algebraicas de los grupos fuchsianos y las geométricas de sus regiones fundamentales materializan una de esas relaciones que se encuentran, una y otra vez, entre distintas áreas de las matemáticas (Topología, Álgebra, Análisis Complejo, Teoría de Números, Geometría, etc.), en este caso, en el estudio de las superficies de Riemann y la Geometría Hiperbólica y que explican sus papeles centrales en el desarrollo de las matemáticas desde el pasado siglo.

Por otro lado, el grupo completo de automorfismos del plano hiperbólico contiene tanto las transformaciones que preservan la orientación, comentadas arriba, como transformaciones que la invierten, por ejemplo reflexiones y reflexiones con deslizamientos. Parece razonable por ello plantearse la siguiente cuestión: ¿en qué medida los subgrupos discretos del grupo completo de automorfismos de \mathbf{H} mantienen propiedades paralelas a las de los grupos fuchsianos? A estos grupos se les denomina grupos cristalográficos no euclídeos (NEC) y se demuestra que, en efecto, juegan un papel análogo al de los grupos fuchsianos en el estudio de las denominadas superficies de Klein, que son la versión no orientable o con borde de las superficies de Riemann.

El estudio de las propiedades de los grupos NEC comienza con los trabajos de Wilkie [28] y

Macbeath [18] que en 1966 y 1967, respectivamente, obtuvieron la clasificación completa de estos grupos en el caso de grupos de cociente compacto. Estos trabajos iniciales fueron extendidos, entre otros, por Macbeath y Hoare en [19] y por Zieschang en [29] al caso de grupos NEC de cociente no compacto, volviendo, además, a obtener, como casos particulares del caso NEC general, resultados clásicos relativos a grupos fuchsianos y a superficies de Riemann.

Asimismo, Singerman estudió, por ejemplo, la versión para grupos NEC del importante invariante dado por el área de sus regiones fundamentales, estudió las propiedades del grupo fuchsiano canónico de un grupo NEC en [25], e investigó, entre otros, el papel de estos grupos en el estudio de superficies de Riemann no orientables [24]. Posteriormente, Preston [23] en 1975 y May [21] en 1977 demostraron que las superficies de Klein, introducidas por Klein en 1897, pueden ser representadas por cocientes del tipo anterior, es decir, del plano hiperbólico por acciones de grupos NEC. Por último, destacar que la UNED y la Universidad Complutense de Madrid han tenido un papel extraordinariamente relevante en el estudio de los grupos NEC y de los grupos de automorfismos de superficies de Riemann y Klein; por ejemplo, el profesor Bujalance ha realizado una extensa investigación en el área de grupos NEC en [5] y [6] y en superficies de Riemann y Klein en [7], [9] y [10], donde únicamente se he citado las referencias usadas en la bibliografía de esta trabajo. Igualmente, los profesores Etayo y Martínez, entre otras aportaciones, construyeron en [12] regiones fundamentales convexas en forma de polígonos hiperbólicos con el número mínimo de lados a partir de una signatura NEC dada.

El contenido de la presente memoria gira entorno a la pregunta planteada arriba y para ello el trabajo se ha estructurado de la siguiente forma. En primer lugar, en el capítulo 2, Preliminares, presentamos resultados básicos de geometría hiperbólica, superficies de Riemann y sus automorfismos, Teoría de Grupos y Topología. Se revisan las definiciones fundamentales y resultados básicos necesarios para dar consistencia a la memoria, aunque dado que todos ellos se incluyen en los contenidos del grado y del máster, se presentan resumidos y sin demostraciones. El capítulo 3 se dedica al estudio de las propiedades de los grupos NEC de cociente compacto, aquellos en los que el espacio cociente \mathbf{H}/Γ es compacto. Se estudiarán asimismo las regiones fundamentales y sus propiedades, la clasificación algebraica, presentación y signatura de los grupos NEC. Adicionalmente, se introducirá el concepto de rango de un grupo NEC y se termina este capítulo con el estudio de dos tipos de subgrupos de gran relevancia: el grupo fuchsiano canónico de un grupo NEC y los subgrupos normales. El capítulo 4 es una introducción al estudio de grupos NEC de cociente no compacto, en particular, se estudian sus regiones fundamentales y su estructura tanto para el caso de ser finitamente generados como en los no finitamente generados.

Finalmente, quisiera acabar esta introducción señalando como objetivo personal de la presente memoria el adquirir y presentar los conocimientos fundamentales necesarios para poder realizar actividades de investigación en el área de grupos NEC, superficies de Klein y sus grupos de automorfismos.

PRELIMINARES

Este capítulo lo dedicamos a tratar los conceptos preliminares fundamentales necesarios para abordar la memoria. Se incluyen conceptos y resultados básicos de la geometría hiperbólica, en particular, los modelos del semiplano superior y del disco de Poincaré, la métrica hiperbólica y el teorema de Gauss-Bonnet, que serán empleados de forma sistemática durante la memoria. La bibliografía usada para esta parte son, fundamentalmente, [1] y [15], aunque aspectos parciales de los temas tratados han sido basados también en [3] y [19].

El estudio de superficies de Riemann y Klein hace necesario el uso sistemático de las nociones de levantamientos y espacios recubridores, a los que dedicamos la segunda sección del presente capítulo y que hemos tratado siguiendo fundamentalmente dos referencias, [15] y [22].

La tercera sección la dedicamos a los grupos fuchsianos, donde se repasará su definición y algunas propiedades importantes usadas a lo largo de la memoria. Las referencias usadas en esta sección son [19], [14] y [15].

La sección cuarta del capítulo la dedicamos el estudio de las propiedades de los cocientes del semiplano superior por grupos de sus automorfismos \mathbf{H}/Γ , en estrecha relación con el concepto de superficie de Klein y sus grupos de automorfismos, y en ella revisamos la definición de Superficie de Riemann y sus grupos de automorfismos, además se presentan resultados relacionados como la fórmula de Riemann-Hurwitz. La bibliografía usada en esta sección ha sido, esencialmente, [15].

Por último, se ha incluido un repaso de los conceptos ineludibles de teoría de grupos necesarios para este trabajo, en particular, grupos conmutadores y grupos de Sylow. Para esta sección, se han usado las referencias [8] y, de nuevo, el texto de Jones y Singerman [15].

2.1. Geometría Hiperbólica

Este trabajo va a usar de forma sistemática dos modelos del plano hiperbólico, el del semiplano superior \mathbf{H} y el modelo del disco unidad o de Poincaré \mathbf{D} . Recordamos que un modelo desde el punto de vista geométrico, se compone de un espacio soporte en el que definimos como se representan los objetos geométricos básicos como puntos y líneas. Los modelos del semiplano superior y del disco de Poincaré quedan enmarcados en el plano complejo, usado como espacio soporte a las definiciones geométricas.

En el modelo del semiplano superior, el espacio soporte es el conjunto de puntos del plano complejo $\mathbf{H} = \{z = x + iz \in \mathbf{C} : y > 0\}$. En este espacio queda definida una métrica de la forma $ds = \frac{|dy|}{y}$ cuyas geodésicas, las líneas hiperbólicas o H -líneas, son círculos o líneas ortogonales al eje real. Se puede demostrar que el grupo de isometrías del semiplano superior viene dado por las transformaciones de la forma

$$\frac{az + b}{cz + d} \text{ con } , a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1,$$

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \text{ con } , a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = -1.$$

Este grupo es isomorfo al grupo proyectivo especial lineal $PSL(2, \mathbf{R})$, la imagen del grupo $SL(2, \mathbf{R})$ de matrices de orden dos de determinante unidad en el grupo cociente $PGL(2, \mathbf{R})/\{\pm I\}$.

En el modelo del disco de Poincaré, el plano hiperbólico se identifica con el disco abierto $\mathbf{D} = \{w = u + iv \in \mathbf{C} : |w| < 1\}$ y la métrica se define como $\frac{|dw|}{1-|w|^2}$. En este caso, las H -líneas están dadas por círculos perpendiculares al círculo unidad y por las líneas que pasan por el origen, en otras palabras, H -líneas perpendiculares al círculo unidad. El grupo de isometrías del modelo de Poincaré consiste ahora en las aplicaciones

$$\frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}, \frac{a\bar{w} + b}{\bar{b}\bar{w} + \bar{a}} \text{ con } a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

Los modelos del semiplano superior y del disco de Poincaré son equivalentes, equivalencia que viene dada por la transformación de Möbius

$$w = \frac{z - i}{z + i}, w \in \mathbf{D}, z \in \mathbf{H}.$$

En lo que sigue nos centraremos en el modelo del semiplano superior, pero, por lo anterior, todos los resultados que presentamos tienen su contrapartida equivalente en el modelo de Poincaré. En primer lugar, definimos distancia hiperbólica ρ entre dos puntos $z, w \in \mathbf{H}$ como la longitud hiperbólica de la H -línea que une z y w . Donde se entiende que la longitud hiperbólica se calcula integrando sobre la métrica definida arriba. Se tiene el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.1 (Invarianza de la distancia hiperbólica). $\rho(T(z), T(w)) = \rho(z, w)$ para toda $T \in PSL(2, \mathbf{R})$, $z, w \in \mathbf{H}$.

Un grupo se dice que actúa transitivamente sobre un conjunto si dados dos elementos cualquiera del mismo a, b existe un elemento g del grupo tal que $a = gb$. Se tiene que $PGL(2, \mathbf{R})$ actúa de forma transitiva sobre la \mathbf{H} -Líneas. El elemento de \mathbf{H} -área se define $\frac{dx dy}{y^2}$ y se tiene, de nuevo, que el \mathbf{H} -área, calculado a partir del elemento de \mathbf{H} -área que acabamos de definir, es un invariante frente a transformaciones de $PGL(2, \mathbf{R})$. Se tienen además los siguientes resultados que serán ampliamente usados en la memoria:

Teorema 2.2 (Teorema de Gauss-Bonnet). Sea Δ un triángulo hiperbólico con ángulos α, β, γ . Entonces su \mathbf{H} -área es $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Decimos que un subconjunto de puntos C del plano hiperbólico es estrellado si existe un punto O del interior de C de forma que para todo $P \in C$, la \mathbf{H} -línea que une O y P está en C . En particular, los conjuntos convexos hiperbólicos son conjuntos estrellados. El siguiente corolario del teorema anterior resultará de utilidad en el capítulo 3 al estudiar el área de un grupo NEC:

Corolario 2.3 (Gauss-Bonnet para conjuntos polígonos estrellados). Sea Π un polígono hiperbólico estrellado de n -lados con ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Entonces $\mu(\Pi) = (n - 2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$.

2.2. Espacios recubridores

Presentamos las nociones de espacio recubridor y recubridor universal de gran utilidad en el estudio de las propiedades de los cocientes \mathbf{H}/Γ . En la última parte de esta sección, describimos los conceptos de recubrimientos ramificados (branched coverings), plegados (folded covering) y ramificados-plegados (branched and folded coverings) que serán usados en los capítulos 3 y 4.

Definición 2.4 (Abierto regularmente cubierto). Sea $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una aplicación continua y sobreyectiva. Un conjunto U de S se dice que está regularmente cubierto por p si su imagen inversa por p , $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de \tilde{S} , tales que para cada α la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U . Los conjuntos $\{V_\alpha\}$ y U se llamarán entornos elementales.

Definición 2.5 (Aplicación y espacio recubridores). Sea $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si todo punto s de S tiene un entorno U que está regularmente cubierto por p , entonces se dice que p es una aplicación recubridora y \tilde{S} un espacio recubridor de S .

Diremos además que \tilde{S} es un espacio recubridor de k -hojas de S si $p^{-1}(s)$ tiene k elementos. Si existe un s tal que $p^{-1}(s)$ tiene k -elementos, entonces $p^{-1}(s)$ tiene k -elementos para todo $s \in S$.

Se denomina transformación recubridora de (\tilde{S}, p) a un homeomorfismo $g : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ tal que $p \circ g = p$. Las transformaciones recubridoras forman un grupo bajo la operación de composición.

Si el espacio recubridor E es simplemente conexo, diremos que E es un recubridor universal de S . Se tiene que toda superficie conexa S tiene una superficie recubridora (\hat{S}, p) tal que \hat{S} es simplemente conexa, es decir, \hat{S} es su recubridor universal. El espacio recubridor universal es único en el siguiente sentido: si (\tilde{S}, q) es otro espacio recubridor simplemente conexo de S , entonces existe un homeomorfismo $f : \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$ tal que $p = q \circ f$. Más generalmente, si (\tilde{S}, q) es un espacio recubridor conexo de S , entonces hay una aplicación recubridora $f : \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$ tal que $p = q \circ f$, de forma que \hat{S} recubre todas las superficies recubridoras conexas de S . El siguiente resultado tiene una relevancia especial en el estudio de automorfismos de las superficies de Riemann y de Klein:

Teorema 2.6 (Aplicaciones y espacios recubridores). *Si \tilde{S} es conexo, el grupo G de transformaciones recubridoras de $p : \tilde{S} \rightarrow S$ actúa de forma discontinua en \tilde{S} . En particular, un elemento de G distinto de la unidad no puede tener puntos fijos en \tilde{S} .*

Decimos que (\tilde{S}, p) es un espacio recubridor regular de S , si para todo $s \in S$, el grupo G de transformaciones recubridoras actúa transitivamente sobre la fibra $p^{-1}(s)$. El siguiente resultado nos ofrece la forma natural de identificar una superficie con un cociente de una superficie recubridora por un grupo de transformaciones recubridoras:

Teorema 2.7 (Superficies recubridoras regulares). *Si (\tilde{S}, p) es una superficie recubridora regular de S y si G es el grupo de transformaciones recubridoras, entonces existe un homeomorfismo $q : S \rightarrow \tilde{S}/G$ dado por $q(s) = [\tilde{s}]_G$, donde $s \in S$ y $\tilde{s} \in p^{-1}(s)$.*

Un concepto más general que el recubrimiento, es el de recubrimiento ramificado, en el que el recubrimiento está definido en todo el espacio menos en un conjunto finito de puntos:

Definición 2.8 (Aplicación y espacio recubridores ramificados). Una aplicación continua $p : \tilde{S} \rightarrow S$ se dice que es un recubrimiento ramificado si existe un conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_n \in S$ tal que el conjunto $p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ es discreto y la restricción de p a $\tilde{S} - p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ es un recubrimiento. Los puntos $x_1, \dots, x_n \in S$ se denominan puntos de ramificación de p .

Intuitivamente, si \tilde{S} y S fueran subconjuntos de \mathbf{C} , entonces los puntos de ramificación de $f(z)$ se pueden entender como los puntos z donde las soluciones de $f(z) = c$ tienen multiplicidad mayor que q . Localmente a un punto de ramificación, la aplicación recubridora ramificada es equivalente a la aplicación $z \mapsto z^m$ y diremos que el punto de ramificación tiene índice m .

Análogamente, diremos que una aplicación recubridora es plegada (folded covering) si es localmente como la aplicación $x + iy \mapsto x + i|y|$. Por último, la aplicación puede ser ramificada y plegada a la (branched and folded covering); a continuación presentamos la definición formal en este caso (ver [28]):

Definición 2.9 (Aplicación ramificada y plegada). Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice que es una aplicación ramificada y plegada de orden n en un punto $x \in X$, si x tiene un entorno V y existe los homeomorfismos $h_1 : V \rightarrow W, h_2 : W^* \rightarrow f(V)$ tal que $f = h_2 \circ \varphi \circ h_1$, donde W es el disco unidad $|z| < 1$, n es un entero positivo, $W^* \subset W$ es el conjunto de $re^{i\theta}$ con $0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, $\varphi : W \rightarrow W^*$ es una aplicación continua

$$\varphi(re^{i\theta}) = re^{i|\theta^*|},$$

donde ϑ^* verifica $-\frac{\pi}{n} \leq \vartheta^* \leq \frac{\pi}{n}, \vartheta = \vartheta^*(\text{mod } 2\pi/n)$.

2.3. Grupos fuchsianos

Los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbf{R})$ se denominan grupos fuchsianos. Una característica que define a los grupos fuchsianos es la de su acción que, si bien en el caso general no es discontinua, verifica una versión algo más débil denominada acción propiamente discontinua. Un grupo G se dice que actúa propiamente discontinuamente sobre un espacio topológico Y si cada punto $y \in Y$ tiene un entorno V tal que si $g(V) \cap V \neq \emptyset$ para $g \in G$, entonces $g(y) = y$. El siguiente teorema resume las dos propiedades básicas que definen a los grupos fuchsianos:

Teorema 2.10 (Grupos fuchsianos). (i) Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbf{R})$. Entonces Γ es fuchsiano si y sólo si Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathbf{H} .

(ii) Sea Γ un grupo fuchsiano y sea $p \in \mathbf{H}$ un punto fijo para algún elemento de Γ . Entonces, existe un entorno W de p tal que ningún otro punto de W queda fijado por un elemento de Γ que no sea la identidad.

Los siguientes resultados son de utilidad en el capítulo 3

Corolario 2.11 (Γ -órbita es discreta). Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbf{R})$. Entonces, Γ es un grupo fuchsiano si y sólo si para todo $z \in \mathbf{H}$, Γz , la órbita de z por Γ es un subconjunto discreto de \mathbf{H} .

Teorema 2.12 (Orden finito de los elementos elípticos). Un elemento elíptico de un grupo fuchsiano tiene orden finito.

A cada grupo fuchsiano se le asocia una signatura, que un conjunto ordenado de enteros no negativos. Sucede que la signatura tiene asociada una presentación del grupo dado que es única salvo isomorfismos y que nos permite identificar o deducir muchas de sus propiedades. La signatura de un grupo fuchsiano se representa de la forma $(g; m_1, \dots, m_r)$ donde g representa el género de el espacio cociente \mathbf{H}/Γ y los enteros positivos mayores que 1, m_1, \dots, m_r se denominan periodos. A cada signatura le asignamos un grupo con la siguiente presentación

(i) Generadores: $x_1, \dots, x_r, a_1, b_1 \dots a_g, b_g$

(ii) Relaciones: $x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_r^{m_r} = 1, x_1 x_2 \dots x_r a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$.

Todo grupo fuchsiano tiene una representación como la anterior y todo conjunto de enteros de la forma g, m_1, \dots, m_r tal que

$$2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0,$$

tiene un grupo fuchsiano con la signatura $(g; m_1, \dots, m_r)$. Finalmente, dos grupo fuchsianos Γ, Γ' de signaturas $(g; m_1, \dots, m_r)$ y $(g'; m'_1, \dots, m'_r)$ respectivamente, son isomorfos si y sólo si $g = g', r = r'$ y hay una permutación ϕ del conjunto ordenado $(1, 2, \dots, r)$ tal que $m'_i = m_{\phi(i)}$.

Como sabemos, los grupos fuchsianos tienen asociadas regiones fundamentales que nos permiten teselar el espacio usando estas regiones como tesela básica. En el capítulo 3 se estudian estas regiones para el caso de los grupos NEC de cociente compacto, cuyas definición y propiedades son análogas a las del caso de grupos fuchsianos. Un tipo importante de región fundamental es la región de Dirichlet de un grupo fuchsiano Γ centrado en un punto p , definido como la intersección de todos los semiplanos formado por los puntos más cercanos al centro de la región p que al de sus transformados por elementos de Γ . La construcción de la región de Dirichlet tiene dos ventajas para el estudio y aplicación de las regiones fundamentales: en primer lugar, tiene propiedades muy convenientes como ser conexas y localmente finitas, es decir, cada punto de la tesela tiene algún entorno que interseca con un número finitos de otras teselas. En segundo lugar, permite su construcción para cualquier grupo fuchsiano, lo que implica que dado un grupo fuchsiano Γ , siempre podremos construir una región fundamental en forma de polígono hiperbólico convexo.

2.4. Superficies de Riemann y sus grupos de automorfismos

En esta sección, revisamos el concepto de superficies de Riemann. En primer lugar, introducimos su definición para posteriormente presentar las propiedades más relevantes de sus grupos de automorfismos necesarias para el resto del trabajo.

Definición 2.13 (Superficies de Riemann). Sea S una superficie y $\mathcal{U} = U_i$ una familia de abiertos que recubren S que verifica las siguientes propiedades

- (i) Para cada $U_i \in \mathcal{U}$ existe un homeomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbf{C}$, donde \mathbf{C} es el plano complejo.
- (ii) Si $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\phi_i \phi_j^{-1}$ es una aplicación conforme (también se llama analítica) definida en $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Entonces se dice que S es una superficie de Riemann.

El siguiente resultado resulta de gran relevancia:

Teorema 2.14 (Teorema de Uniformización). *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformalmente equivalente a una de las siguientes*

- (i) *La esfera de Riemann Σ ;*
- (ii) *El plano complejo \mathbf{C} ;*
- (iii) *El semiplano superior \mathbf{H} .*

Los homeomorfismos de S en S se llaman automorfismos si las funciones $\phi_i f \phi_j^{-1}$ son funciones conformes. El conjunto de automorfismos de una superficie de Riemann S es un grupo bajo la operación de composición que escribimos $Aut(S)$. Los automorfismos de las tres superficies de Riemann simplemente conexas se presentan en le siguiente teorema:

Teorema 2.15 (Automorfismos de superficies de Riemann). (i) $Aut(\Sigma) = PSL(2, \mathbf{C})$;
(ii) $Aut(\mathbf{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0\}$;
(iii) $Aut(\mathbf{H}) = PSL(2, \mathbf{R})$.

Si S es una superficie de Riemann y (\tilde{S}, p) es una superficie recubridora de S , entonces existe una única estructura compleja en \tilde{S} tal que la aplicación $p : \tilde{S} \rightarrow S$ es holomorfa. De aquí deducimos que cada transformación recubridora de (\tilde{S}, p) es un automorfismo de \tilde{S} . De esta forma, si S es una superficie de Riemann conexa, su recubridor universal (\hat{S}, p) tendrá una única estructura compleja con respecto a la cual la aplicación recubridora p es holomorfa y, por lo tanto, \hat{S} es una superficie de Riemann simplemente conexa. Se puede demostrar además que la cubierta universal (\hat{S}, p) es además un recubrimiento regular de S . Ahora, por el teorema de uniformización, \hat{S} será conformalmente equivalente a Σ , \mathbf{C} o \mathbf{H} . Puesto que la cubierta universal es regular, por el teorema 2.7 y la discusión anterior obtenemos el siguiente teorema, también de gran utilidad en la memoria:

Teorema 2.16 (Superficie de Riemann conformalmente equivalente a un cociente por un grupo discontinuo). Si S es una superficie de Riemann no conformalmente equivalente a Σ , \mathbf{C} , el plano complejo menos un punto o a un toro, entonces S tiene un espacio recubridor universal $\hat{S} = \mathbf{H}$, el semiplano superior, y S es conformalmente equivalente al cociente \mathbf{H}/G para algún grupo G de $PSL(2, \mathbf{R})$ actuando discontinuamente sobre \mathbf{H} .

En la sección anterior hemos visto que un grupo fuchsiano está representado de forma única, salvo isomorfismos, por un conjunto de números enteros denominado signatura. La signatura identifica además otras propiedades del grupo, entre ellas el área de la región fundamental asociada:

Teorema 2.17 (Área de una región fundamental). Sea Γ de signatura $(g; m_1, \dots, m_r)$. Si F es una región fundamental de Γ , cuya frontera tiene área hiperbólica nula, entonces

$$\mu(F) = 2\pi\{2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i})\}.$$

Además, si F es la región de Dirichlet de un grupo fuchsiano Γ con \mathbf{H}/Γ compacto, entonces se verifica que $\mu(F) \geq \pi/21$, donde la cota $\mu(F) = \pi/21$ se verifica únicamente para el grupo triangular $(0; 2, 3, 7)$.

La región de Dirichlet es un polígono hiperbólico y se puede demostrar que sus lados están emparejados por elementos de Γ . De esta forma, análogamente al caso del toro que queda definido identificando lados opuestos de un rectángulo, las identificaciones de lados de una región de Dirichlet emparejados por transformaciones de Γ nos permite definir la superficie de Riemann:

Teorema 2.18 (Superficie de Riemann como cociente de región de Dirichlet). *Si F es una región de Dirichlet de un grupo Γ , entonces F/Γ es homeomorfo a \mathbf{H}/Γ .*

Las regiones de Dirichlet también nos permiten identificar si la superficie de Riemann es compacta, como podemos ver en los dos próximos resultados:

Teorema 2.19 (Superficie de Riemann como cociente de región de Dirichlet). *Sea F es una región de Dirichlet de un grupo fuchsiano Γ , entonces \mathbf{H}/Γ es compacto si y sólo si F es un subconjunto compacto de \mathbf{H} .*

Teorema 2.20 (Superficies compactas y elementos parabólicos). *Si \mathbf{H}/Γ es compacto, Γ no contiene elementos parabólicos*

El siguiente teorema nos permite identificar los puntos fijos de los elementos parabólicos:

Teorema 2.21 (Puntos fijos en \mathbf{D}). *Sea v un punto en $\{z = 1\}$ del disco de Poincaré \mathbf{D} . Si v es un punto fijo de algún elemento de un grupo Γ que actúa en \mathbf{D} , entonces ese elemento es una transformación parabólica. Además, si el vértice $v \in \mathbf{D}$ de una región de Dirichlet queda fijo por una transformación parabólica T , los dos lados de la región de Dirichlet que se encuentran en v están emparejados por T , como se puede ver en la figura 2.21. Al vértice v le llamaremos vértice parabólico.*

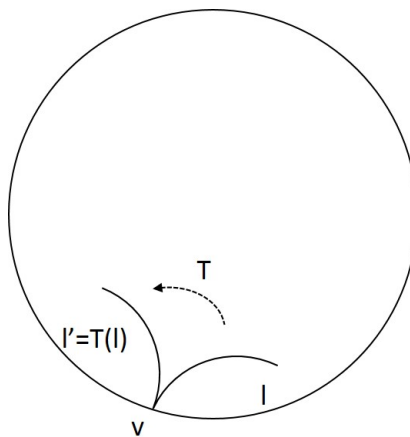


FIGURA 2.1. Vértice parabólico

Como podemos deducir del teorema 2.15, las superficies de Riemann de género 0 y 1 tienen un número infinito de automorfismos. Una propiedad sorprendente es la siguiente:

Teorema 2.22 (Número finito de automorfismos de las superficies de Riemann). *Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Entonces, el número de automorfismos de S $|Aut(S)| \leq 84(g - 1)$.*

Los grupos de $84(g-1)$ automorfismos de una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ se denominan grupos de Hurwitz. El siguiente teorema nos permite identificarlos:

Teorema 2.23 (Grupos de Hurwitz). *Un grupo finito G es un grupo de Hurwitz si y sólo si G es no trivial y tiene dos generadores x, y que obedecen las siguientes relaciones $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$.*

Para terminar esta sección presentamos el siguiente resultado que se denomina teorema de la fórmula de Riemann-Hurwitz y que nos relaciona el área de un subgrupo H de G con el índice finito $[G : H]$:

Teorema 2.24 (Teorema de la fórmula de Riemann-Hurwitz). *Si G es un subgrupo fuchsiano con región fundamental compacta y H es un subgrupo de G de índice finito, entonces $\mu(H) = [G : H]\mu(G)$.*

2.5. Algunos resultados de la teoría de grupos

Esta sección la dedicamos al estudio de algunos resultados de la teoría de grupos necesarios para el desarrollo de la memoria. En particular, se revisa, en primer lugar, los conceptos de subgrupo característico y subgrupo conmutador y su relación con los conceptos de subgrupo normal y abelianización. En segundo lugar, presentamos resultados acerca de grupos de Sylow y, por último, se introducen el grupo $PSL(2, q)$, así como algunas de sus propiedades de gran utilidad para el estudio de automorfismos de superficies de Riemann y Klein.

Un grupo G se dice simple si los únicos subgrupos normales son $\{1_G\}$ y el propio G . Una característica a tener en cuenta de los subgrupos normales es que la normalidad no es una propiedad transitiva, es decir, si G es un grupo, H y K subgrupos suyos de forma que H es normal en K y K normal en G , entonces H no tiene por qué ser normal en G , como se puede ver con el siguiente ejemplo usando el grupo diedral D_4 : $K = \{1, x^2, y, y \cdot f^2\}$, $H = \{1, y\}$, que son tales que K es normal en D_4 , pues es de índice 2, y H en K , por la misma razón. Sin embargo, H no es normal en G .

Una propiedad que permite verificar, en cierto modo, la transitividad anterior entre grupos normales, es mediante los subgrupos característicos. Un subgrupo H se dice característico de G si $T(H) = H$ para todo automorfismo T de G . Se demuestra que los subgrupos característicos son normales y que la propiedad de ser característico es transitiva, es decir, si H es característico de K y éste a su vez de G , entonces H será característico en G . Análogamente, Si H es característico de K y éste es normal en G , entonces H es normal de G .

Si a, b son dos elementos de un grupo G se denomina conmutador de a y b al elemento de G dado por $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. El subgrupo conmutador o derivado de G está generado por el conjunto de conmutadores de elementos de G y se escribe $[G, G]$. El conmutador de un grupo G es un subgrupo normal y característico del grupo G . Además, se puede demostrar que el grupo cociente $G/[G, G]$ es un grupo abeliano, que se denomina abelianización de G . Por último, si H es un subgrupo normal de G y G/H es abeliano, entonces $[G, G] \subseteq H$, es decir, el conmutador de G es el menor

subgrupo de G que verifica la propiedad de producir un cociente abeliano.

Sea G un grupo finito, p un número primo que divide al orden de G y H un subgrupo de G . Decimos que H es un p -subgrupo de G si su orden es de la forma $O(H) = p^n$, $n \geq 1$. Asimismo de decimos que H es un p -subgrupo de Sylow de G si H es un p -subgrupo de G y el índice de H en G no es múltiplo de p . En el siguiente teorema enunciamos las propiedades de los subgrupos de Sylow:

Teorema 2.25 (Teorema de Sylow). *Sea G un grupo finito de orden $p^n m$ donde p es un número primo, n y m enteros positivos tales que p no divide a m . Entonces se tiene:*

1. G tiene algún p -subgrupo de Sylow.
2. Para cada $1 \leq k \leq n$, G posee algún subgrupo de orden p^k .
3. Los p -grupos de Sylow de G son conjugados
4. El número n_p de p -subgrupos de Sylow de G cumple:
 - (4.1) n_p divide a m .
 - (4.2) $n_p - 1$ es múltiplo de p .

Además, $n_p = [G : N_G(H)]$ para cada p -subgrupo de Sylow H de G .

Un grupo de gran interés en el estudio de automorfismos en superficies de Riemann y Klein, el grupo $PSL(2, p)$. Para ello, vamos a introducir la siguiente notación: para cada entero $p \geq 2$, sea \mathbf{Z}_p el anillo de enteros módulo p . Las matrices de determinante 1 con coeficientes en \mathbf{Z}_p forman un grupo que denominaremos $SL(2, p)$, en el cual las matrices unidad $\pm I$ forman un subgrupo normal. Se define $PSL(2, p) = SL(2, p)/\{\pm I\}$. El orden de $PSL(2, p)$ es finito y si p es primo se puede demostrar la siguiente fórmula:

$$|PSL(2, p)| = \begin{cases} \frac{p(p^2 - 1)}{2} & : p > 2 \\ 6 & : p = 2 \end{cases}$$

A continuación, enumeramos las propiedades de los grupos $PSL(2, p)$ que usaremos en el capítulo 5:

Teorema 2.26 (Propiedades de $PSL(2, p)$ - I). *$PSL(2, p)$ es un grupo de Hurwitz si y sólo si:*

- (i) $p = q$, donde q es un número primo y $q \equiv \pm 1 \pmod{7}$ o
- (ii) $p = q$, donde q es primo y q no es ninguno de $0, \pm 1 \pmod{7}$ o
- (iii) $p = 7$.

Teorema 2.27 (Propiedades de $PSL(2, p)$ - II). *Los elementos de $PSL(2, p)$ de orden 2 tienen traza 0, los elementos de orden 3 tienen traza 1 y los de orden 7 tienen traza ξ , donde se verifica $\xi^3 + \xi^2 - 2\xi - 1 = 0$.*

En concreto, el grupo $PSL(2, 8)$ resulta tener propiedades relevantes en el estudio de grupos de automorfismos de superficies de Klein. La siguiente propiedad será necesaria durante este estudio:

Teorema 2.28 (Propiedades de $PSL(2,8)$). *Dos elementos de $PSL(2,8)$ son conjugados si y sólo si tienen la misma traza.*

Para acabar esta sección vamos a repasar los conceptos de presentación y producto libre de grupos. Supongamos que un grupo Γ está generado por elementos X_i y relaciones $R_j(X_i) = 1$ con $i \in I, j \in J$, con I, J conjuntos de índices. Cada $R_j(X_i)$ se denomina palabra formada por los generadores X_i , que será simplemente un producto finito de potencias de generadores X_i . Decimos que las relaciones $R_j(X_i) = 1$ son relaciones definidoras de Γ si toda relación en Γ puede ser deducida a partir de ellas, es decir, una palabra $W(X_i)$ de generadores de X_i representa la identidad en Γ si y sólo si puede ser transformada en un producto de conjugados de palabras de $R_j(X_i)$. En este caso decimos que el grupo Γ tiene la presentación

$$\Gamma = \langle X_i, i \in I : R_j(X_i) = 1, j \in J \rangle.$$

Formalmente, se dice que el grupo Γ tiene la presentación vista arriba si es isomorfo al cociente del grupo libre $S = \langle X_i, i \in I \rangle$ por el subgrupo normal generado por las relaciones $R_j(X_i) = 1, j \in J$. Por ejemplo, los grupos cíclico C_n , diedral D_n y modular $PSL(2, \mathbf{Z})$ tienen las presentaciones

$$C_n = \langle X : X^n = 1 \rangle,$$

$$D_n = \langle X, Y : X^n = Y^2 = (XY)^2 = 1 \rangle,$$

$$PSL(2, \mathbf{Z}) = \langle X, Y : X^2 = Y^3 = 1 \rangle.$$

Por último, dados dos grupos $\Gamma = \langle X_i, i \in I : R_j(X_i) = 1, j \in J \rangle$ y $\Gamma' = \langle Y_{j'}, j' \in J' : S_{j'}(Y_{j'}) = 1, j' \in J' \rangle$, se llama producto libre de Γ y Γ' al grupo:

$$\Gamma * \Gamma' = \langle X_i \cup Y_{j'}, i \in I, j' \in J' : R_j(X_i) = 1 \cup S_{j'}(Y_{j'}) = 1, j \in J, j' \in J' \rangle.$$

GRUPOS NEC CON ESPACIO COCIENTE COMPACTO

Este capítulo lo dedicamos al estudio de las propiedades fundamentales de los grupos NEC de cociente compacto también denominados grupos NEC cocompactos. Análogamente a los grupos fuchsianos, definidos como los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbf{R})$, el grupo de automorfismos del semiplano complejo superior \mathbf{H} , los grupos NEC serán introducidos como los subgrupos discretos del grupo completo de simetrías de \mathbf{H} , siendo $PSL(2, \mathbf{R})$ un subgrupo del anterior.

Este capítulo se estructura de la siguiente forma: en primer lugar, definimos formalmente el concepto de grupo NEC y estudiamos sus propiedades básicas. Posteriormente, en las secciones 2 y 3 se definen las regiones fundamentales y de Dirichlet para grupos NEC, estudiamos sus propiedades elementales y obtenemos sus formas canónicas. Además, se deducen su presentación algebraica y su signatura. En la sección 4, se resuelve el problema de determinar las condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos NEC dadas sus representaciones estándar sean isomorfos. En la sección 5, profundizamos en el estudio de las regiones fundamentales y calculamos sus áreas. Dado una presentación de un grupo NEC, en la sección 6 planteamos y resolvemos el problema de calcular el número mínimo de generadores de ese grupo, que se denomina rango del grupo. Por último, en la sección 7 estudiamos algunas propiedades de los subgrupos de los grupos NEC, en particular, las relaciones entre las signaturas de los subgrupos normales y las del propio grupo, así como el número de ciertos subgrupos de un grupo NEC dado.

3.1. Definición. Propiedades básicas

En la sección 2.4 hemos definido el grupo Λ de todas las transformaciones de la forma

$$(3.1) \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1,$$

$$(3.2) \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = -1,$$

donde, como hemos visto en el capítulo 2, las transformaciones 3.1 son los automorfismos del semiplano superior $Aut(\mathbf{H}) = PSL(2, \mathbf{R})$ contenidos en el grupo de isometrías de \mathbf{H} con índice 2, y las 3.2 que también preservan \mathbf{H} , pero invierten la orientación.

Definición 3.1 (Grupos NEC). Denominamos grupo cristalográfico no euclídeo (NEC) a los subgrupos discretos de las isometrías de \mathbf{H} .

Ya vimos en el capítulo 2, que los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbf{R})$ son los grupos fuchsianos y puesto que $PSL(2, \mathbf{R}) \subset \Lambda$, el grupo de isometrías de \mathbf{H} , tenemos que los grupos fuchsianos son un subgrupo de los grupos NEC. Los grupos fuchsianos serán representados mediante el símbolo Λ^+ y llamaremos grupos NEC propios a los grupos contenidos en $\Lambda - \Lambda^+$.

Sea Γ un subgrupo discreto de Λ , como hemos visto en la sección 1.4, dependiendo de si Γ incluye o no elementos parabólicos, tendremos que el espacio cociente \mathbf{H}/Γ será compacto o no, respectivamente. En lo que queda de este capítulo, estudiaremos grupos NEC con espacio compacto, mientras que en el capítulo 4, estudiaremos las propiedades de los grupos NEC con espacio no compacto.

3.2. Región de Wilkie

En primer lugar, definimos los conceptos de región fundamental, teselación y región de Dirichlet asociados a un grupo NEC, Γ , y estudiamos sus propiedades. Posteriormente, obtendremos las denominadas representaciones canónicas de las regiones fundamentales y, finalmente, obtendremos la presentación canónica del grupo Γ .

Definición 3.2 (Región fundamental). Sea Γ un grupo NEC, decimos que F es una región fundamental de Γ si es conexa, cerrada y verifica:

1. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathbf{H}$,
2. $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset, T \in \Gamma - \{I\}$,

Al conjunto $\partial F = F - \mathring{F}$ le llamaremos contorno de F y a la familia $\{T(F) : T \in \Gamma\}$ la llamaremos teselación. Veremos más adelante que el contorno de las regiones fundamentales está compuesto por H-líneas, que serán los lados de la región fundamental, que intersectan entre si en puntos llamados vértices. A las imágenes de F por Γ las llamamos caras de la teselación.

La definición ha incluido la condición de que la región fundamental sea conexa. En la bibliografía, se encuentran distintas definiciones donde se exige la conexión, por ejemplo en [3], y otros donde explícitamente no se usa, como en [15]. En nuestro caso resulta más práctico exigirla, si bien vamos a hacer un uso intensivo de las regiones de Dirichlet como regiones fundamentales

lo que implica la conexión (y otras propiedades convenientes) como veremos más adelante. A continuación introducimos el concepto de región de Dirichlet para un grupo NEC y demostramos que es una región fundamental.

Definición 3.3 (Región de Dirichlet). Sea Γ un grupo NEC, sea $p \in \mathbf{H}$, tal que p no queda fijado por ningún $T \in \Gamma \setminus \{I\}$. Definimos región de Dirichlet para Γ centrada en p al conjunto

$$(3.3) \quad D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T_1(p))\},$$

o, lo que es equivalente,

$$(3.4) \quad D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p), \forall T \in \Gamma\}.$$

Como se puede apreciar, para toda transformación fija $T_1 \in \Gamma$ el conjunto de puntos z tales que $\{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, p) < \rho(z, T(p)) \quad \forall T \in \Gamma\}$ verifica que $p \in D_p(\Gamma)$ y como además la órbita de p por Γ es discreta, según vimos en el capítulo 2, tenemos que $D_p(\Gamma)$ contiene un entorno de p . Adicionalmente, el conjunto de puntos de \mathbf{H} equidistantes a p y $T(p)$, es decir, la mediatriz hiperbólica del segmento que los une, determinará un semiplano hiperbólico que contiene a p . Por lo tanto, $D_p(\Gamma)$ es la intersección de semiplanos hiperbólicos, luego será una región hiperbólica convexa. Si además se verifica que $D_p(\Gamma)$ es la intersección de un número finito de semiplanos hiperbólicos, tendremos que la región de Dirichlet es un polígono hiperbólico.

Por otro lado, las intersecciones de $D_p(\Gamma)$ con las bisectrices de los segmentos que unen p y $T(p)$ serán, o bien líneas hiperbólicas, o bien puntos, que llamaremos lados o vértices de $D_p(\Gamma)$, respectivamente. Así mismo, a los puntos de intersección entre lados se les denomina vértices. Ya sólo queda demostrar que, en efecto, las regiones de Dirichlet son regiones fundamentales. Para ello, demostramos previamente los siguientes dos lemas:

Lema 3.4 (Existencia de puntos de órbitas a distancia mínima). *Sea $z_1 \in \mathbf{H}$ y Γ un grupo NEC, entonces existe un z_0 de la Γ -órbita de z_1 cuya distancia a z_1 es mínima.*

Demostración. Como Γ es discreto, la Γ -órbita de un punto dado será un subconjunto discreto de \mathbf{H} , de forma que existirá un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $\{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z_1, z) < \varepsilon\}$ sólo contendrá z_1 . Por lo tanto, $\forall T \in \Gamma$ el conjunto $\{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, T(z_1)) < \varepsilon\}$ no contiene más elementos que $T(z_1)$. De esta forma, para cada $T \in \Gamma$ el disco de centro $T(z_1)$ y radio ε sólo contiene al punto $T(z_1)$ de la Γ -órbita de z_1 y por consiguiente los discos de centros $T(z_1)$ y radios $\varepsilon/2$ serán disjuntos los unos de los otros. Si tomamos un r suficientemente grande de forma que el conjunto $\{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, T(z_1)) < r\}$ contenga al menos un elemento de la Γ -órbita de z_1 junto con su disco asociado de radio $\varepsilon/2$, tendremos que a lo sumo contendrá un número finito de discos disjuntos de radio $\varepsilon/2$ y, por lo tanto, a lo sumo un número finito de elementos de la órbita de z_1 . Por lo tanto, habrá al menos uno de ellos de distancia mínima al propio z_1 . \square

Lema 3.5 (Representante único de cada órbita). *Si $z_1, z_2 \in \overset{\circ}{D}_p$, entonces z_1, z_2 no pertenecen a la misma órbita.*

Demostración. Si $\rho(z, p) = \rho(z, T(p))$ para alguna $T \in \Gamma$, entonces o bien z pertenece a la frontera de $D_p(\Gamma)$, o bien $z \notin D_p(\Gamma)$. Por lo tanto, tiene que verificarse $\rho(z, p) < \rho(z, T(p))$ en el caso $z \in \overset{\circ}{D}_p$ y eso $\forall T \in \Gamma$. Como tenemos que $z_1, z_2 \in \overset{\circ}{D}_p$ y ambos pertenecen a una misma órbita, se verificará $\rho(z_1, p) < \rho(z_1, T(p))$ o, lo que es lo mismo, $\rho(z_1, p) < \rho(T(z_1), p) \forall T \in \Gamma$, por lo que, en particular, $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$. De la misma forma, se tiene que verificar $\rho(z_2, p) < \rho(z_1, p)$, lo que no es posible. Es decir, una región de Dirichlet contiene a lo sumo un punto de cada órbita. \square

Teorema 3.6 (Regiones de Dirichlet son regiones fundamentales). *Si p no queda fijado por ningún elemento de $\Gamma - \{I\}$, entonces $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental para Γ .*

Demostración. Sea $z_1 \in \mathbf{H}$ y sea z_0 el punto de la Γ -órbita de z_1 cuya distancia a p sea mínima, que existe según acabamos de ver en el lema 3.4. Por lo tanto, $\rho(z_0, p) < \rho(z_0, T(p))$ y eso $\forall T \in \Gamma$, es decir, $z_0 \in \overset{\circ}{D}_p$ y tenemos que $D_p(\Gamma)$ contiene al menos un punto de cada Γ -órbita.

Por el lema 3.5, tenemos que el interior de $D_p(\Gamma)$ contiene a lo sumo un punto de cada Γ -órbita. Además, como $D_p(\Gamma)$ es la intersección de semiplanos cerrados, $D_p(\Gamma)$ será cerrado y convexo, luego será conexo por caminos y, de aquí, conexo. Por lo tanto $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental. \square

A continuación, vamos a estudiar la estructura de la región de Dirichlet: en primer lugar, demostramos que las regiones de Dirichlet son localmente finitas. A partir de este resultado, obtenemos que los vértices de una región de Dirichlet son aislados y, para el caso de cociente compacto, además tenemos que el número de vértices es finito. Por último, estudiamos la congruencia de lados de las regiones de Dirichlet, lo que nos va a permitir definir representaciones canónicas de las regiones fundamentales de los grupos NEC al final de esta sección.

Definición 3.7 (Localmente finito). Una región fundamental F de un grupo NEC se dice localmente finita si todo punto $p \in F$ tiene un entorno $V(p)$ tal que $V(p) \cap T(F) \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $T \in \Gamma$.

Proposición 3.8 (Regiones de Dirichlet son localmente finitas). *Las regiones de Dirichlet son localmente finitas.*

Demostración. Sea $F = D_p(\Gamma)$ con p no queda fija por ningún $T \in \Gamma - \{I\}$. Sea $a \in F$, y sea K un entorno compacto suyo. Supongamos que $K \cap T_i(F) \neq \emptyset$ para alguna sucesión infinita T_1, T_2, \dots de elementos distintos de Γ . Sea $\sigma = \sup_{z \in K} (\rho(p, z))$. Entonces, $\sigma \leq \rho(p, a) + \rho(a, z)$ para todo $z \in K$, y como K es acotado, σ es finita. Sea $w_j \in K \cap T_j(F)$, entonces $w_j = T(z_j)$ para $z_j \in F$ y, por la desigualdad triangular,

$$\rho(p, T_j(p)) \leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) = \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, p) \leq 2\sigma.$$

Por lo tanto, el conjunto infinito de puntos $T_1(p), T_2(p), \dots$ pertenece a la bola compacta de centro p y radio 2σ , que contradice la acción propiamente discontinua de Γ , propiedad que debería verificar según vimos en la sección 2.4. \square

Antes de demostrar que los vértices de una región de Dirichlet son aislados, el siguiente lema es necesario:

Lema 3.9 (Subconjuntos compactos). *Si C_1, C_2 son subconjuntos compactos de \mathbf{H} y Γ es un grupo NEC, entonces el conjunto $\{T \in \Gamma : T(C_1) \cap C_2 \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito.*

Demostración. Si desmostramos que dados dos subconjuntos compactos C_1, C_2 de \mathbf{H} , el conjunto $\{T \in \Lambda : T(C_1) \cap C_2 \neq \emptyset\}$ es compacto, el enunciado es inmediato, puesto que el conjunto sería compacto y los grupos NEC son discretos, el conjunto sólo puede ser finito. Sólo nos queda demostrar que, en efecto, $\{T \in \Lambda : T(C_1) \cap C_2 \neq \emptyset\}$ es compacto. Supongamos primero que $T \in \Lambda^+$, y sea $p \in C_1$. Entonces por 2.11 sabemos que el conjunto $G_p = \{T \in \Lambda^+ : T(p) \in C_2\}$ es un conjunto compacto. Sea ahora la aplicación $f : \mathbf{H} \rightarrow PSL(2, \mathbf{R}) : p \rightarrow G_p$ donde $PSL(2, \mathbf{R})$ queda topologizado de la forma usual con el espacio cociente de $SL(2, \mathbf{R})$ y la aplicación $q : SL(2, \mathbf{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbf{R})$, y el conjunto $SL(2, \mathbf{R})$ se identifica con \mathbf{R}^4 . Sea la aplicación continua $f : SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ definida por $f(A, p) = q(A)(p)$, $A \in SL(2, \mathbf{R})$. El conjunto $E = f^{-1}(C_2)$ es cerrado, puesto que el conjunto C_2 lo es. Además, como C_1, C_2 son acotados, existe una cota M tal que $|\frac{ap+b}{cp+d}| < M$ para todos las matrices $A \in$ y $p \in C_1$. Además, de la compacidad de C_2 de deducimos que habrá una segunda cota m tal que $Im(\frac{ap+b}{cp+d}) \geq m$ de donde deducimos a su vez que $Im(\frac{ap+b}{cp+d}) = Im(p)/|cp+d|^2$, es decir,

$$|ap+b| \leq M \sqrt{\frac{Im(p)}{m}},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que a, b, c, d están acotados. De esta forma E es cerrado y acotado, luego compacto, de forma que

$$\{T \in \Lambda : T(C_1) \cap C_2 \neq \emptyset\} = q(\{A \in SL(2, \mathbf{R}) : p \in C_1, \frac{ap+b}{cp+d}\}) = f(E),$$

será también compacto. Ahora, como las transformaciones de $\Lambda - \Lambda^+$ son del la forma $\frac{a\bar{p}+b}{c\bar{p}+d}$, a efectos de la demostración no se produce cambios relevantes, por lo que llegamos a la misma conclusión, y de aquí al enunciado del lema. \square

Proposición 3.10 (Vértices de región de Dirichlet son aislados). *Sea x un vértice de una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$, entonces existe un entorno de x , $V(x)$, que no contiene ningún otro vértice. Además, si Γ es un grupo NEC de cociente compacto, el número de vértices es finito.*

Demostración. Si x es un punto de un lado de la región de Dirichlet $F = D_p(\Gamma)$, entonces existe una $T_x \in \Gamma$ tal que $\rho(p, x) = \rho(T_x(p), x)$, y de aquí $\rho(p, x) = \rho(p, T_x^{-1}(x))$. Supongamos que un vértice v no es aislado, entonces existe una sucesión de vértices $v_i \in F$ tales que $v_i \rightarrow v$. Sea de nuevo un

$T_i \in \Gamma$ tal que $\rho(p, v_i) = \rho(p, T_i(v_i))$. Tendremos

$$\begin{aligned} \rho(v, T_i(v_i)) &\leq \rho(v, v_i) + \rho(v_i, T_i(v_i)) \leq \rho(v, v_i) + \rho(v_i, p) + \rho(p, T_i(v_i)) \\ &= \rho(v, v_i) + 2\rho(v_i, p) \leq \rho(v, v_i) + 2\rho(v_i, v) + 2\rho(v, p), \end{aligned}$$

por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene $\rho(v, T_i(v_i)) < 2\rho(v, p) + \varepsilon$ para i suficientemente grande, lo que significa que $T_i(v_i) \in K$ para todo $i > N$ donde K es una región compacta de \mathbf{H} . De donde deducimos que hay una subsucesión $T_{n_i}(v_{n_i}) \rightarrow b \in \mathbf{H}$, lo que contradice la proposición 3.8.

Supongamos ahora que \mathbf{H}/Γ es compacto. Como las regiones de Dirichlet son localmente finitas, si $[z] \in \mathbf{H}/\Gamma$, entonces existe a lo sumo un número finito de $z' \in F$ tales que $\Pi(z') = [z]$ donde Π es la aplicación canónica $\Pi : F \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma$. Sean z_1, z_2, \dots una sucesión infinita de puntos distintos de F . Como \mathbf{H}/Γ es compacto, la sucesión infinita $[z_1], [z_2], \dots$ debe tener un punto límite $[l] \in \mathbf{H}/\Gamma$. Además, la preimagen de $[l]$ será un número finito de puntos l_1, l_2, \dots, l_k de F . Supongamos que ninguno de ellos es el punto límite de la sucesión (z_i) . Como cada l_i tiene un entorno V_i en \mathbf{H} conteniendo un número finito de puntos de la sucesión y además l_1, l_2, \dots, l_k pertenecen todos a la misma Γ -órbita, cada V_i contendrá un número finito de puntos de la forma $S(z_j)$. De donde deducimos que $\bigcap_{i=1}^k (\Pi(V_i))$ es un entorno abierto de $[l]$ conteniendo únicamente un número finito de puntos de la sucesión $([z_j])$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, alguno de los l_1, l_2, \dots, l_k es el límite de la sucesión (z_j) , lo que implica que F es compacto.

Ahora por la proposición (5.2) de [28], puesto que F es compacto, tendrá intersección no vacía con un número finito de sus imágenes por Γ , por lo que F será un polígono convexo con un número finito de lados. \square

Definición 3.11 (Congruencia de vértices y lados). Sea $D_p(\Gamma)$ la región de Dirichlet de un grupo NEC, Γ , y sean u, v vértices y s un lado. Si $T \in \Gamma - I$ y se verifica $u = T(v)$, se dice entonces que u, v son congruentes. Análogamente, si $T(s)$ es un lado de $D_p(\Gamma)$, entonces s y $T(s)$ se llaman lados congruentes.

Proposición 3.12 (Pares de congruencias). *El número de lados congruentes de una región de Dirichlet $F = D_p(\Gamma)$ de un grupo NEC Γ es como máximo dos.*

Demostración. En primer lugar, demostramos que si s y $T(s)$ con $T \in \Gamma$ son lados de F , entonces $F \cap T(F) = T(s)$. En efecto, si $F \cap T(F)$ contiene tres puntos pertenecientes a más de un lado, entonces como $F, T(F)$ son convexos, $F \cap T(F)$ es convexo, luego tienen que contener un triángulo hiperbólico de vértices los tres puntos no pertenecientes a una misma geodésica, es decir, contiene un triángulo hiperbólico de área no nula. Pero esto es imposible, pues las regiones de Dirichlet son regiones fundamentales y, por tanto, la existencia de este triángulo contradice la definición 3.2(ii).

Supongamos ahora que tenemos tres lados congruentes en F , $s, R(s)$ y $T(s)$, con $R, T \in \Gamma - I$. Entonces, tenemos por lo anterior, $R(s) = F \cap R(F)$ y $T(s) = F \cap T(F)$, es decir, $s = R^{-1}(F) \cap F = T^{-1}(F) \cap F \implies R = T$, luego sólo podemos tener congruencias de pares de lados. \square

Acabamos de demostrar que a lo sumo dos lados de una región de Dirichlet son congruentes. Si pensamos en los tipos de transformaciones que incluyen los grupos NEC, tenemos además de las congruencias definidas por las transformaciones elípticas de orden 2, las reflexiones, que dejan el propio lado invariante. En esto se distinguen de las elípticas de orden 2, donde sólo hay un punto fijo en el lado. Todo esto se presenta con detalle en la siguiente proposición:

Teorema 3.13 (Tipos de congruencia de lados). *Sea $F = D_p(\Gamma)$ una región Dirichlet del grupo NEC Γ , s un lado de la región y sea $T \in \Gamma$ tal que $T(s)$ sea también un lado de la región, entonces se verifica alguna de las siguientes:*

- (i) s y $T(s)$ son distintos y ningún otro lado t de $D_p(\Gamma)$ es congruente a s ,
- (ii) s y $T(s)$ coinciden, T es elíptico de orden 2 y existe un único punto fijo de s por T ,
- (iii) s y $T(s)$ coinciden, T es una reflexión y s queda fijo por T .

Demostración. La primera parte es consecuencia directa de la proposición 3.12. Supongamos ahora que F y $T(s)$, $T \in \Gamma$ tienen un lado en común. Entonces, $T^{-1}(F)$ y F también coinciden en un lado. Si estos lados son iguales, entonces $T^{-1}(F) \cap F = F \cap T(F)$, es decir, $T = T^{-1} \implies T^2 = I$, lo que, como vimos en el capítulo 2, significa que T es una transformación elíptica de orden 2. Así mismo, sabemos que esta transformación deja un sólo punto fijo, luego tiene que transformar los segmentos entre los vértices del lado y el punto fijo entre si.

Finalmente, si T es una reflexión, tenemos que $s = T(s) = F \cap T(F)$, donde cada punto de $F \cap T(F)$ es fijo por T . □

Ya estamos en condiciones de analizar que formas pueden tomar las regiones fundamentales de un grupo NEC. Para ello definimos una forma de etiquetar los lados de una región fundamental y, por lo tanto, de la propia región fundamental, que llamaremos símbolo o etiqueta de una región fundamental. A partir de éstas, obtenemos los posibles símbolos de estas regiones que presentaremos de una forma que denominaremos canónica.

Sea F una región fundamental de un grupo NEC Γ de cociente compacto. Sabemos por lo anterior que F tiene un número finito de lados. Los lados que no tienen congruencias, por ser del tipo (iii) según vimos arriba, se etiquetan primero siguiendo la nomenclatura r_1, r_2, \dots, r_{k_r} . Los lados congruentes dos a dos por transformaciones no elípticas de orden 2 los nombramos c_1, c_2, \dots, c_{k_c} e igualmente los relacionados por transformaciones del tipo (ii) se nombrarán e_1, e_2, \dots, e_{k_e} . Los lados relacionados por congruencias de pares c_i , se transforman, preservando o invirtiendo la orientación de forma que, en el primer caso, el lado congruente se convierte en c'_i y, en el segundo, en c^*_i . Ahora simplemente etiquetamos de esta forma todos los lados de la región fundamental en orden antihorario. Teniendo en cuenta el símbolo de la región así definida, la podemos transformar, como veremos a continuación, en otras regiones fundamentales, donde el orden de los lados está definido y veremos que sólo hay unas pocas combinaciones posibles de símbolos de regiones fundamentales para los grupos NEC.

Lema 3.14 (Regla de transformación 1). Sean A, B, C, D sucesiones finitas de etiquetas de lados de una región fundamental de un grupo NEC, p, p^* dos lados congruentes y $T \in \Gamma$ la transformación que materializa esa congruencia con inversión, de forma que el símbolo de la región fundamental es $ApBCp^*D$. Entonces, Γ tiene una región fundamental de la forma $AqCq^*T(B)D$, donde q es una línea hiperbólica que une el vértice formado por A y p con el vértice formado por B y C , q^* es el lado congruente a q y $T(B)$ es la imagen por la transformación que define la congruencia entre q y q^* de la parte de la región fundamental delimitada por p, B y q .

Demostración. En la figura 3.1 podemos ver la región fundamental $ApBCp^*D$, que llamaremos región fundamental inicial, donde A, B, C, D son una sucesión finita de vértices que hemos llamado $\underbrace{a_1, \dots, a_r}_A, \underbrace{b_1, \dots, b_s}_B, \underbrace{c_1, \dots, c_t}_C, \underbrace{d_1, \dots, d_u}_D$, respectivamente.

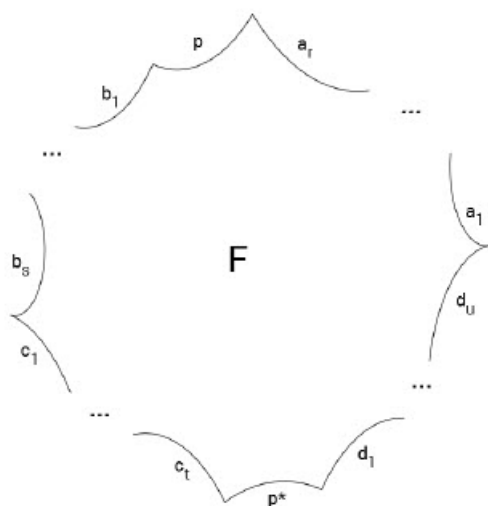
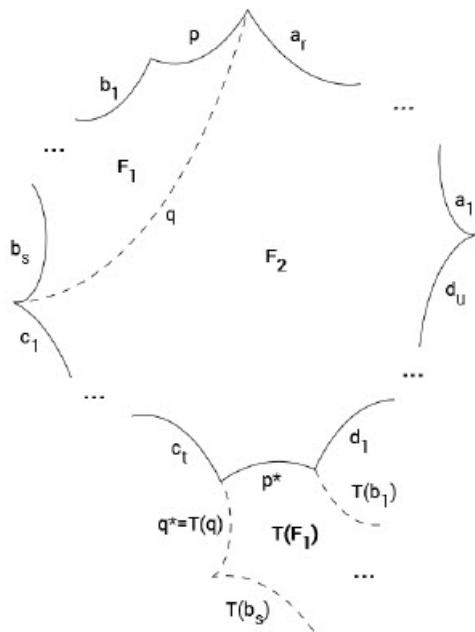


FIGURA 3.1. Región fundamental inicial $ApBCp^*D$


 FIGURA 3.2. Región fundamental transformada $AqCq^*T(B)D$

En la figura 3.2 se ha definido la línea hiperbólica q que une el vértice entre A y p con el vértice entre B y C . Esta línea hiperbólica divide la región fundamental original en dos partes que hemos denominado F_1 y F_2 . Sea $T \in \Gamma$ el elemento que transforma p en p^* , y sea la $F' = F_2 \cup T(F_1)$, entonces F' es otra región fundamental. En efecto, por un lado si $z \in \mathbf{H}$, entonces existe por hipótesis una $S \in \Gamma$ y un $x \in F'$ tal que $z = S(x)$. Por lo tanto, puesto que $x \in F_1 \cup F_2$ tenemos que, o bien $x \in F_1$, o bien $x \in F_2$. En el segundo caso, tenemos que para $x \in F'$ y $S \in \Gamma$, para todo $z \in \mathbf{H}$, $z = S(x)$. En el primer caso, tendríamos análogamente que para todo $z \in \mathbf{H}$, $z = ST^{-1}(x)$, es decir, se verifica la primera condición de región fundamental 3.2(i).

Para la segunda condición del teorema 3.2, vemos de nuevo que para F_2 se verifica por hipótesis. Análogamente, como también se verifica por hipótesis esa condición para F_1 , entonces $\mathring{F}_1 \cap T(\mathring{F}_1) = \emptyset, T \in \Gamma - \{I\}$. Esto significa que dados $R, S \in \Gamma$ distintas, se tiene que verificar que $R(\mathring{F}_1) \cap S(\mathring{F}_1) = \emptyset$ ya que en caso contrario, tendríamos que existiría un x , tal que $x \in R(\mathring{F}_1)$ y $x \in S(\mathring{F}_1)$, luego $T^{-1}(x) \in \mathring{F}_1$ y $T^{-1}(x) \in T^{-1}S(\mathring{F}_1)$, de aquí deducimos que $\mathring{F}_1 \cap T^{-1}S(\mathring{F}_1) \neq \emptyset$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, F' es una región fundamental. \square

Lema 3.15 (Regla de transformación 2). Sean A, B, C, D sucesiones finitas de etiquetas de lados de una región fundamental de un grupo NEC, p, p^* dos lados congruentes y $T \in \Gamma$ la transformación que materializa esa congruencia con inversión, de forma que el símbolo de la región fundamental es $ABpCp^*D$. Entonces, Γ tiene una región fundamental de la forma $AqCT(B)q^*D$, donde q es una línea hiperbólica que une el vértice formado por A y B con el vértice formado por p y C , q^* es el lado congruente a q y $T(B)$ es la imagen por la transformación que define la congruencia entre

q y q^* de la parte de la región fundamental delimitada por B , p y q .

Demostración. La demostración de este lema es totalmente análoga al del lema anterior. La diferencia radica únicamente en la forma de las regiones fundamentales inicial y transformada que mostramos en las figuras 3.3 y 3.4, respectivamente. \square

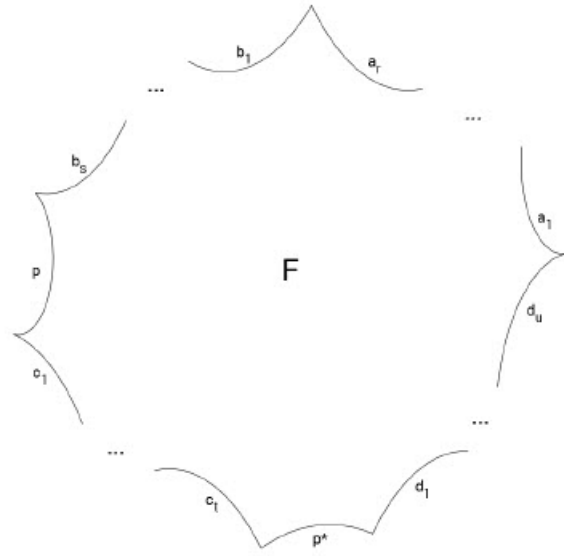


FIGURA 3.3. Región fundamental inicial $ABpCp^*D$

Lema 3.16 (Regla de transformación 3). Sean A, B, C, D sucesiones finitas de etiquetas de lados de una región fundamental de un grupo NEC, p, p' dos lados congruentes y $T \in \Gamma$ la transformación que materializa esa congruencia, de forma que el símbolo de la región fundamental es $ApBCp'D$. Entonces, Γ tiene una región fundamental de la forma $AqCT(B)q'D$, donde q es una línea hiperbólica que une el vértice formado por A y p con el vértice formado por B y C , q' es el lado congruente a q y $T(B)$ es la imagen por la transformación T que define la congruencia entre q y q' de la parte de la región fundamental delimitada por p , B y q .

Demostración. De nuevo mostramos las regiones fundamentales inicial y transformada en las figuras 3.5 y 3.6. En este caso, como se indica en el enunciado del lema, la transformación $T \in \Gamma$ ahora preserva la orientación y, por lo tanto, $T(B)$ preserva el orden de los lados en vez de invertirlos como en los casos de las proposiciones 3.14 y 3.15. \square

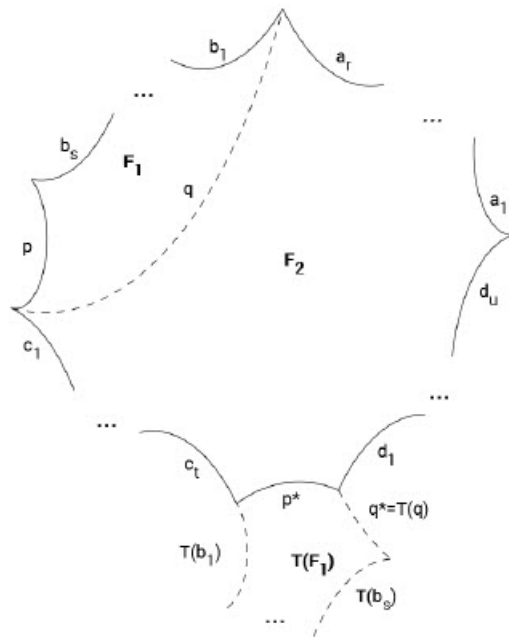


FIGURA 3.4. Región fundamental transformada $AqCT(B)q^*D$

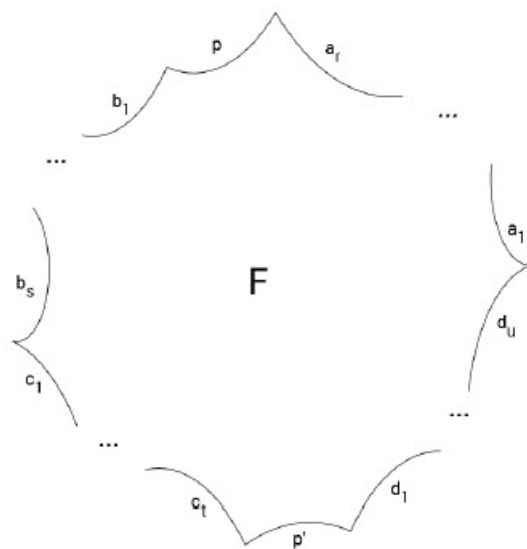


FIGURA 3.5. Región fundamental inicial $ApBCp'D$

Lema 3.17 (Regla de transformación 4). *Sean A, B, C, D sucesiones finitas de etiquetas de lados de una región fundamental de un grupo NEC, p, p' dos lados congruentes y $T \in \Gamma$ la transformación que materializa esa congruencia, de forma que el símbolo de la región fundamental es $ApBCp'D$. Entonces, Γ tiene una región fundamental de la forma $AqCq'T(B)D$, donde q es una línea*

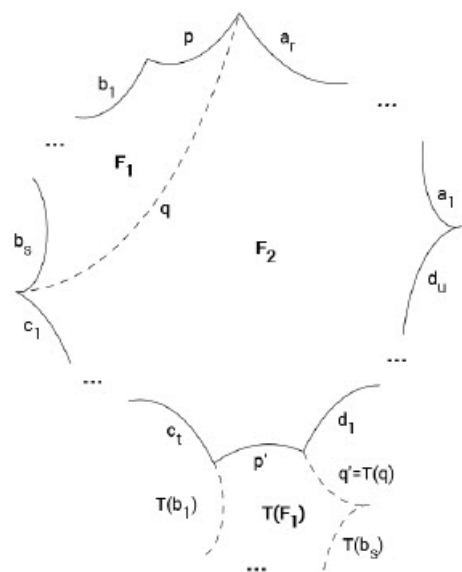


FIGURA 3.6. Región fundamental transformada $AqCT(B)q'D$

hiperbólica que une el vértice formado por A y B con el vértice formado por p y C , q' es el lado congruente a q y $T(B)$ es la imagen por la transformación T que define la congruencia entre q y q' de la parte de la región fundamental delimitada por B , p y q .

Demostración. De nuevo mostramos las regiones fundamentales inicial y transformada en las figuras 3.7 y 3.8. Este caso es análogo al lema 3.16. \square

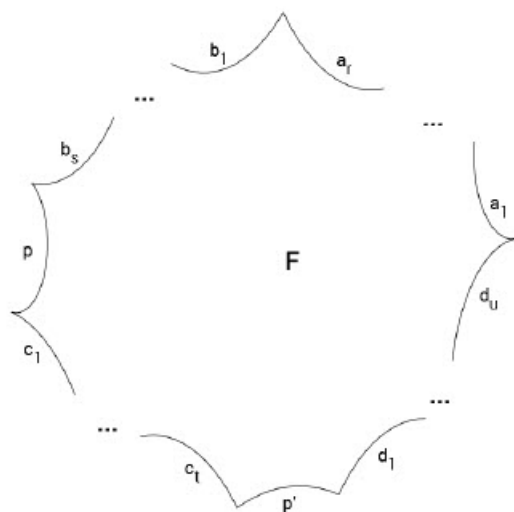


FIGURA 3.7. Región fundamental inicial $ABpCp'D$

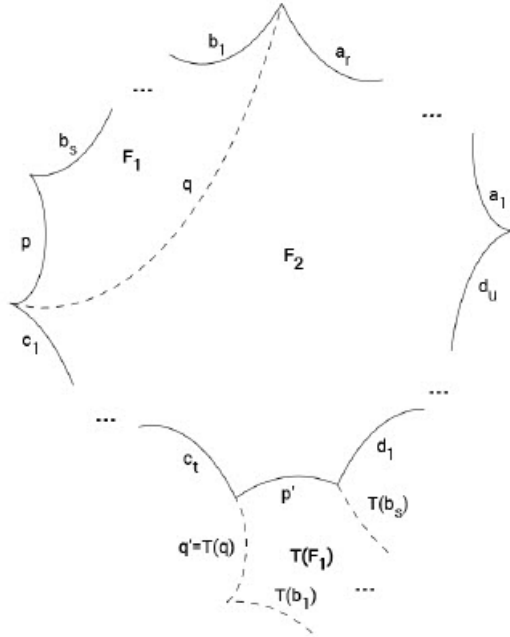


FIGURA 3.8. Región fundamental transformada $AqCq'T(B)BD$

Una región de Wilkie es un polígono hiperbólico cuyos lados están etiquetados de una forma característica, que mostramos a continuación, y que tiene unos ángulos interiores que verifican unas condiciones especiales.

El teorema a continuación nos dice que formas posibles de etiquetar los lados tiene una región de Wilkie, que obtendremos a partir de las reglas de transformación dadas por los lemas 3.14 a 3.17. Posteriormente, en esta misma sección, calcularemos los ángulo interiores del polígono y daremos la definición definitiva de la región de Wilkie.

Teorema 3.18 (Formas canónicas de las regiones de Wilkie). *Sea F una región fundamental de un grupo NEC de cociente compacto Γ . Entonces puede encontrarse un polígono hiperbólico R homeomorfo a F cuyos lados pueden etiquetarse de alguna de las formas que se presentan a continuación:*

- (i) $x_1x'_1 \dots x_px'_p a_1b'_1a'_1b_1 \dots a_qb'_qa'_qb_q e_1c_{1,1} \dots c_{1,m_1} e'_1 \dots e_r c_{r,1} \dots c_{r,m_r} e'_r$,
- (ii) $x_1x'_1 \dots x_px'_p a_1b'_1a'_1b_1 \dots a_qb'_qa'_qb_q e_1c_{1,1} \dots c_{1,m_1} e'_1 \dots e_r c_{r,1} \dots c_{r,m_r} e'_r c_{r+1,1} \dots c_{r+1,m_{r+1}}$,
- (iii) $x_1x'_1 \dots x_px'_p d_1d_1^* \dots d_sd_s^* e'_1 \dots e_r c_{r,1} \dots c_{r,m_r} e'_r$,
- (iv) $x_1x'_1 \dots x_px'_p d_1d_1^* \dots d_sd_s^* e'_1 \dots e_r c_{r,1} \dots c_{r,m_r} e'_r c_{r+1,1} \dots c_{r+1,m_{r+1}}$.

Demostración. En primer lugar, por el enunciado sabemos que F es un polígono hiperbólico con un número finito de lados. Supongamos que contiene lados congruentes asociados por transformaciones de Γ que no preservan la orientación, que etiquetamos como $p_1, p_1^*, \dots, p_s, p_s^*$. Aplicando las reglas de transformación definidas en los lemas 3.14 a 3.17, podemos juntar todos los pares así congruentes de forma que el polígono quede $d_1d_1^* \dots d_sd_s^* Q$, donde Q es una sucesión finita de

etiquetas de lados donde no habrá ningún par del tipo dd^* . Por ejemplo, si el polígono inicial lo representamos mediante la sucesión de símbolos $Ap_1Bp_1^*C$, aplicando las reglas de transformación, obtenemos un polígono $d_1d_1^*BCA$, donde pasamos de comenzar el etiquetado en A a comenzar por d_1 . Ahora llamamos D a BCA que será una sucesión finita de etiquetas de lados, y si hay algún par de congruencias de este tipo más, repetimos la operación nuevamente, obteniendo el polígono $d_1d_1^*Eqq^*G$. Ahora, transformamos de nuevo este polígono de la forma habitual para obtener otra región fundamental, uniendo el vértice entre d_1^* y E mediante una línea hiperbólica con el vértice entre q y q^* obteniendo finalmente el polígono $d_1d_1^*d_2d_2^*H$, donde de nuevo H es una sucesión finita de etiquetas. Repitiendo el proceso obtenemos, finalmente, la sucesión de etiquetas que buscábamos $d_1d_1^*...d_sd_s^*Q$.

En segundo lugar, supongamos ahora que Q contiene pares del tipo a, a' sin ninguna etiqueta intermedia. Por ejemplo, sea la sucesión de etiquetas $xx'Aaa'B$. Ahora unimos el vértice entre x' y A con el vértice entre a y a' por una línea hiperbólica y , obteniendo la sucesión de etiquetas $xx'y'CB$, de forma que las etiquetas correspondientes a lados congruentes sin etiquetas intermedias se han movido al principio de la sucesión. Aplicando esto al resto de etiquetas del mismo tipo, obtenemos un polígono etiquetado de la forma

$$(3.5) \quad x_1x'_1...x_px'_pd_1d_1^*...d_sd_s^*R.$$

En tercer lugar, supongamos que tenemos dos pares congruentes p, p' y q, q' de forma que la región esté etiquetada de alguna de la formas $EApBp'Cq'Dq$, $EApBq'Cq'Dp$ o $EApBq'Cp'Dq$. Aplicando la siguiente secuencia de transformaciones al último caso, obtenemos lo que se denomina una pareja de congruencias ligada de la forma $ab'a'bQ$. Para simplificar la notación, usamos las mismas letras para las sucesiones de lados y las parejas de lados congruentes. De esta forma, $EApBq'Cp'Dq$ y aplicando la regla de transformación 4 a A , obtenemos $EpBq'Cp'ADq$ y aplicando la regla de transformación 4 a B , obtenemos $Epq'Cp'ADqB$ y aplicando la regla de transformación 3 a C , obtenemos $Epq'p'EADCqB$ y moviendo la cadena una posición a la derecha, obtenemos $Bpq'p'EADCq$ y aplicando la regla de transformación 4 a E , obtenemos $Bpq'p'EADCq$ y aplicando la regla de transformación 3 a $q'p'$, obtenemos $BpEADCq'p'q$ y moviendo la cadena una posición a la derecha, obtenemos $qBpEADCq'p'$ y aplicando la regla de transformación 3 a Bp , obtenemos $qEADCBpq'p'$ y moviendo la cadena tres posiciones a la derecha, obtenemos finalmente $p'q'p'qEADCB$, como queríamos demostrar. Ahora podemos efectuar estas transformaciones hasta obtener todas las parejas de congruencias ligadas de la sucesión de etiquetas de R de forma que la ecuación 3.5 quede

$$(3.6) \quad x_1x'_1...x_px'_pa_1b'_1a'_1b_1...a_qb'_qa'_qb_qd_1d_1^*...d_sd_s^*S.$$

Una vez realizadas las transformaciones anteriores sobre la región fundamental, S no tiene ni parejas de congruencias ligadas del tipo $a_1b'_1a'_1b_1$, ni parejas de congruencias del tipo dd^* ni del tipo xx' . Por lo tanto, van a ser grupos de etiquetas de lados sin congruencias como en 3.13(iii). Si hay en S alguna pareja de congruencias que etiquetamos con e, e' , van a limitar a grupos de estos tipos de lados que etiquetamos con c , por lo que tendremos finalmente la estructura resultante de etiquetas de lados

$$x_1x'_1\dots x_px'_p a_1b'_1a'_1b_1\dots a_qb'_qa'_qb_q d_1d_1^*\dots d_sd_s^* e_1c_{1,1}c_{1,2}\dots c_{1,m_1}e'_1\dots e_sc_{s,1}c_{s,2}\dots c_{s,m_s}e'_s T.$$

Donde la sucesión de etiquetas dada por T será, o bien vacía, o bien únicamente de lados no emparejados por congruencias que hemos etiquetado con c . Por último, supongamos que tenemos simultáneamente una región etiquetada de forma que tengamos simultáneamente pares de lados de congruencias ligados y pares de lados congruentes con su orientación invertida, por ejemplo $dd^*ab'a'bR$, podemos aplicar de nuevo las reglas de transformación (regla 4 a d^*) y escribir el etiquetado equivalente $dab'a'd^*bR$, aplicando ahora la regla 1 con $B = ab'$ y $C = a'$ y teniendo en cuenta que al transformar B se invierte el orden de los lados, tenemos finalmente el etiquetado $da'd^*bb'aR$, de forma que se desligan los pares de congruencias ligados, permitiendo eliminar estos términos de la ecuación 3.6. Finalmente, obtenemos necesariamente alguna de las formas canónicas del enunciado. \square

De la forma que hemos definido los lados de la región, la relación de los pares congruentes en términos de preservar o invertir la orientación, junto con la estructura de lados dada por los pares ligados, junto con sus identificaciones, vemos que las superficies representadas mediante las formas canónicas 3.18(i)-(ii) son superficies cerradas orientables de género q con r o $r + 1$ agujeros. Así mismo, las formas canónicas 3.18(iii)-(iv) serán superficies canónicas de género (no orientable) s con r o $r + 1$ agujeros.

Dado un lado p de una región fundamental F , a la transformación T de Γ que verifica que $p \subset F \cap T(F)$ la denotamos como $[p]$. Por el teorema 3.13 sabemos que esa transformación va a ser única. Además, si q es el lado congruente a p , se verifica que $[p]q = p$ y $[q]^{-1} = [p]$, que se obtienen directamente del enunciado del teorema 3.13. El siguiente teorema establece una relación entre las teselas con un vértice v en común y ciertos lados relacionados de la región fundamental:

Proposición 3.19 (Relación canónica de vértices). *Sea v un vértice de una región fundamental F de un grupo NEC de cociente compacto Γ , y sea el conjunto finito de todas las transformaciones $T_i, i = 1, \dots, N$ de Γ con $v \in T_i(F)$ donde el índice está ordenado en sentido horario, $T_1 = 1$ y los T_i son tales que $T_{i-1}(p_i), i = 1, \dots, N$ es el lado de $T_{i-1}(F)$ separando $T_{i-1}(F)$ de $T_i(F)$. Entonces, las N transformaciones de $[p_i] \in \Gamma, i = 1, \dots, N$, verifican $[p_1]\dots[p_N] = 1$. A la relación anterior se la denomina relación canónica del vértice v (ver figura 3.2).*

Demostración. En la figura 3.2 se representa el esquema de teselas coincidentes en un vértice v siguiendo las denominaciones del enunciado. Sea Φ el conjunto de elementos T de Γ tales que

$v \in T(F)$. Por el lema 3.8 sabemos que F tiene intersección vacía con a lo sumo un número finito

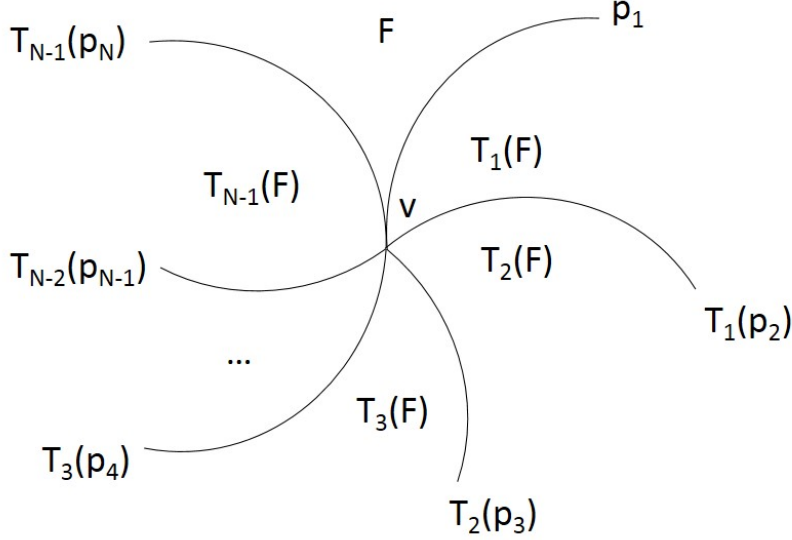


FIGURA 3.9. Teselas para calcular la relación del vértice v

de sus imágenes mediante Γ , por lo que Φ es un conjunto finito de, digamos, N elementos. Sean entonces $F, T_1(F), \dots, T_{N-1}(F)$ las N caras que se encuentran en v ordenadas en sentido horario. Si llamamos $T_{i-1}(p_i), i = 1, \dots, N-1$ al lado de $T_{i-1}(F)$ separando $T_{i-1}(F)$ de $T_i(F)$, entonces p_i es el lado de F separando $T_{i-1}^{-1}T_i(F)$ de F .

Por lo tanto, siguiendo la notación introducida arriba, tenemos que $T_{i-1}^{-1}T_i = [p_i]$, o lo que es lo mismo, $T_i = T_{i-1}[p_i]$. De aquí, llamando q_i al congruente de p_i , obtenemos $T_i(q_i) = T_{i-1}[p_i](q_i) = T_{i-1}(p_i)$. De esta forma, puesto que $T_{i-1}(p_i)$ separa $T_{i-1}(F)$ de $T_i(F)$, entonces p_i es el lado que separa F de $T_{i-1}^{-1}T_i(F)$. Así mismo, la imagen de F dada por $T_{i-1}(F)$, tiene el lado $T_{i-2}p_{i-1}$ que separa $T_{i-2}(F)$ de $T_{i-1}(F)$ y que es contiguo a $T_{i-1}p_i$ en $T_{i-1}(F)$. Por lo tanto, p_i de F será contiguo a $T_{i-1}^{-1}T_{i-2}(p_{i-1}) = T_{i-1}^{-1}T_{i-1}(q_{i-1}) = q_{i-1}$, luego las etiquetas p_i y q_{i-1} son contiguas en la sucesión de etiquetas que representan F , con p_i siguiendo o precediendo a q_{i-1} dependiendo de si T_{i-1} preserva o invierte la orientación.

Para $N-1$ tenemos $T_{N-1} = T_{N-2}[p_{N-1}] = T_{N-3}[p_{N-2}][p_{N-1}] = \dots = [p_1] \dots [p_{N-2}][p_{N-1}]$. Donde $T_{N-1}(p_N)$ es el lado de $T_{N-1}(F)$ que separa $T_{N-1}(F)$ de F , luego p_N separa F de $T_{N-1}^{-1}(F)$, es decir, $[p_N] = T_{N-1}^{-1}$. Finalmente, esto nos da $T_{N-1}[p_N] = 1 \Rightarrow [p_1] \dots [p_{N-2}][p_{N-1}][p_N] = 1$. \square

Proposición 3.20 (Relaciones canónicas de vértices conjugados). *Si v, v' son dos vértices conjugados de una región fundamental F de un grupo NEC de cociente compacto Γ , la relación canónica de v es conjugada a la relación canónica de v' o a su inversa.*

Demostración. Sea $[p_1] \dots [p_{N-2}][p_{N-1}][p_N] = 1$ la relación canónica de v y sea T la transformación tal que $T(v') = v$. Entonces la imagen de T es una de las caras que intersectan a F en v , lo

cual significa que, siguiendo la notación de la proposición anterior, existe un $i, 1 \leq i \leq N-1$ tal que $T(F) = [T_i](F)$. De la demostración de esa misma proposición sabemos que los dos lados de $[T_i](F)$ que se cortan en v son $T_{i-1}[p_i] = T_i[q_i]$ y $T_i[p_{i+1}]$. De esta forma, v' es el vértice de F entre los lados p_{i+1} y q_i , donde de nuevo p_{i+1} sigue o precede a q_i según T_i preserve o invierta la orientación.

Supongamos que T_i preserve la orientación, entonces la relación canónica de v' queda $[p_{i+1}][p_{i+2}] \dots [p_N][p_1] \dots [p_i]$ y llamando $R = [p_1] \dots [p_i]$ tenemos

$1 = RR^{-1} = [p_1] \dots [p_i][p_{i+1}][p_{i+2}] \dots [p_N][p_1] \dots [p_i]([p_1] \dots [p_i])^{-1}$ que es la relación canónica de v , es decir, las relaciones canónicas son conjugadas.

Por último, en el caso de que T_i no preserve la orientación, la relación canónica para v' es, en términos de los lados conjugados $q_1, \dots, q_N, [q_i][q_{i-1}] \dots [q_1][q_N] \dots [q_{i+1}] = 1$ y tomando la inversa tenemos $1 = ([q_i][q_{i-1}] \dots [q_1][q_N] \dots [q_{i+1}])^{-1} = ([q_{i+1}]^{-1}([q_i])^{-1} \dots ([q_N])^{-1} \dots ([q_1])^{-1} = [p_{i+1}][p_{i+2}] \dots [p_N][p_1] \dots [p_i]$ que, como en el caso anterior, multiplicando por R y R^{-1} a derecha e izquierda respectivamente nos da la relación canónica de v . \square

3.3. Clasificación algebraica

El puente entre la geometría de las regiones fundamentales, representada por sus lados y vértices como hemos visto en la sección anterior, y la naturaleza algebraica de los grupo de transformaciones de las que son regiones fundamentales, en este caso el grupo NEC Γ , viene dado por el siguiente teorema. Esto nos va a permitir obtener un algo más adelante la presentación de los grupos NEC.

Antes de enunciar el teorema, introducimos el concepto de relación básica. Sea $\Sigma = \{T : T(F) \cap F \neq \emptyset, T \in \Gamma\}$. Si $R, U \in \Sigma$, existe un elemento $S \in \Gamma$ tal que $RS = U$. Si se verifica que $F \cap R(F) \cap U(F) \neq \emptyset$ entonces $R^{-1}F \cap F \cap S(F) \neq \emptyset$, es decir, $F \cap S(F) \neq \emptyset$. De esta forma, $S \in \Sigma$. A la relación $RS = U$ tales que $R, S, U \in \Sigma$ y $F \cap R(F) \cap U(F) \neq \emptyset$ la denominamos relación básica. Se puede demostrar, ver [28], que Σ es un conjunto completo de generadores y que el conjunto L de las relaciones básicas es un conjunto completo de relaciones de Σ .

Teorema 3.21 (Conjunto completo de Generadores de Γ). *Sea F una región fundamental de un grupo NEC Γ de cociente compacto y sea $\Sigma' = \{T_i \in \Gamma\}$ el conjunto de elementos de Γ que lleva F a una cara vecina. Sea L'_1 un conjunto de relaciones canónicas que incluye una por cada conjunto de vértices congruentes de F y sea L'_2 el conjunto de relaciones $[c_i]^2 = 1$, que incluye una por cada lado c_i de F que no es congruente con ningún otro lado de F . Entonces, Σ' es un conjunto completo de generadores de Γ y $L' = L'_1 \cup L'_2$ es un conjunto completo de relaciones en términos de Σ' .*

Demostración. Sabemos que Γ está generado por el conjunto $\Sigma = \{T : T(F) \cap F \neq \emptyset, T \in \Gamma\}$ y tenemos que demostrar que las $T \in \Gamma$ pueden ser expresadas en términos de elementos de Σ' del enunciado. Puesto que $T(F) \cap F \neq \emptyset$, se deduce que F y $T(F)$ tienen al menos un vértice en común, que llamaremos v . Por lo tanto, tenemos por la demostración de la proposición 3.20, que podemos escribir $T = [p_1][p_2] \dots [p_r]$ donde N es el número de caras que tienen el vértice común v , $r < N$ y

las $[p_i]$ son elementos de Σ' , pues llevan F a teselas vecinas. A este tipo de relación le llamamos expresión reducida del elemento T de Σ en términos de elementos de Σ' .

Sean ahora $R, S, U \in \Sigma$ tales que verifican la relación básica $RS = U$, podemos reemplazar esta expresión por la relación obtenida al usar las expresiones reducidas de cada una de las transformaciones de la relación básica, obteniendo cada relación básica en términos de los elementos de Σ' . Como el conjunto de relaciones L representa un conjunto completo de relaciones en términos de elementos de Σ y éstos pueden representarse en términos de elementos de Σ' , entonces el conjunto L_1 de relaciones obtenidas de esta forma son un conjunto completo de relaciones en términos de elementos de Σ' .

Por otro lado, del teorema 3.20 sabemos que las relaciones canónicas de todos los vértices de F con consecuencia de las relaciones de L' , por lo tanto si demostramos que cada relación básica $RS = U$ es consecuencia de una relación canónica, de una relación de L'_2 o se satisface idénticamente, entonces habremos demostrado completamente el enunciado del problema. Podemos encontrar los siguientes casos:

1) R o S son la unidad: Este caso es trivial, ya que entonces tenemos relaciones del tipo $1.S = S$ y similares.

2) Relaciones son del tipo $RS = U = 1$: en este caso, puesto que la relación básica verifica además $F \cap R(F) \cap U(F) = F \cap R(F)$, tenemos los siguientes subcasos:

2a) Si $R = [p_1], [p_1]^2 = 1$, y $[p_1]$ preserva la orientación, entonces $S = [p_1]$ y la relación básica $RS = U$ es la relación canónica del vértice de F dado por $F \cap R(F)$, fijo por la transformación $[p_1]$.

2b) Si $R = [p_1], [p_1]^2 = 1$, y $[p_1]$ invierte la orientación, entonces $S = [p_1]$ y la relación básica $RS = U$ es una del conjunto L'_2 .

2c) Si $R = [p_1], [p_1]^2 \neq 1$, y $[p_1]$ preserva la orientación, entonces $S = [p_2] \dots [p_N]$ y $RS = 1$ es la relación canónica del vértice entre los lados $[q_N]$ y $[p_1]$.

2d) Si $R = [p_1], [p_1]^2 \neq 1$, y $[p_1]$ invierte la orientación, entonces $S = [q_1]$ y la relación es la relación trivial $[p_1][q_1] = 1$.

2e) Si $R = [p_1][p_2] \dots [p_r], 1 < r < N$ y R preserva la orientación, entonces $U = [p_{r+1}] \dots [p_N]$ y tenemos que $RS = U$ es la relación canónica del vértice entre $[p_1]$ y $[q_N]$

2f) Si $R = [p_1][p_2] \dots [p_r], 1 < r < N$ y R invierte la orientación, entonces $U = [q_r] \dots [q_1]$ y tenemos que $RS = U$ es la relación trivial $[p_1] \dots [p_r][q_r] \dots [q_1]$.

3) Relaciones del tipo $RS = U \neq 1$: en este caso tenemos que $F \cap R(F) \cap U(F)$ es un vértice, llamémoslo v , con $[p_1] \dots [p_r] \dots [p_N] = 1$ su relación canónica. Tenemos los casos:

3a) Si R preserva la orientación, tenemos que $v \in R(F)$ es el vértice entre los lados $R(q_r)$ y $R(p_{r+1})$ de $R(F)$. Además, como $R_{-1}F \cap F \cap R_{-1}U(F) = R_{-1}F \cap F \cap S(F) = R_{-1}(v)$, entonces $R_{-1}(v)$ es el vértice de F entre q_r y p_{r+1} , que será un punto de $F \cap R(F)$. Por lo tanto, al preservar R la orientación, tenemos que las caras que intersectan en $R_{-1}(v)$, en el sentido de las agujas del reloj, serán $F, [p_{r+1}]F, [p_{r+1}][p_{r+2}]F, \dots$ por lo que S es, o bien $[p_{r+1}][p_{r+2}] \dots [p_{r+s}]$ con $r+s < N$, o bien, $[p_{r+1}][p_{r+2}] \dots [p_N][p_1] \dots [p_t]$ con $t < r$. Finalmente obtenemos que la relación $RS = U$ será una de

las dos siguientes:

$$[p_1][p_2]\dots[p_r][p_{r+1}][p_{r+2}]\dots[p_{r+s}]$$

o

$$[p_1][p_2]\dots[p_r][p_{r+1}][p_{r+2}]\dots[p_N][p_1]\dots[p_t] = [p_1]\dots[p_t].$$

De esta forma, las relaciones $RS = U$ se satisfacen idénticamente en el primer caso, o son consecuencia de la relación canónica en el segundo.

3b) Si R invierte la orientación, las caras que intersectan en $R_{-1}(v)$, en el sentido de las agujas del reloj, serán $F, [q_r]F, [q_{r-1}]F, \dots$ por lo que S es, o bien $[q_r][q_{r-1}]\dots[q_{r-s}]$ con $s < r - 1$, o bien, $[q_r][q_{r-1}]\dots[q_1][q_N]\dots[p_{N-t+1}]$ con $r + t < N$, por lo que la relación $RS = U$ será una de las dos siguientes:

$$[p_1][p_2]\dots[p_r][q_r][q_{r-1}]\dots[q_{r-s}] = [p_1][p_2]\dots[p_{r-s-1}]$$

o

$$[p_1][p_2]\dots[p_r][q_r]\dots[q_1][q_N]\dots[p_{N-t+1}] = [p_1]\dots[p_{N-t}].$$

De nuevo, las relaciones $RS = U$ se satisfacen idénticamente en el primer caso, o son consecuencia de la relación canónica en el segundo. \square

Finalmente, terminamos esta sección respondiendo a la siguiente pregunta: dado un grupo NEC de cociente compacto Γ , ¿Qué relación existe entre la forma canónica de una región fundamental de Γ y su presentación como grupo? La respuesta se ofrece en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.22 (Presentación canónica de Γ de cociente compacto y orientable). *Sea Γ un grupo NEC con \mathbf{H}/Γ compacto tal que el cociente sea una superficie orientable con s agujeros y de género q . Supongamos además que en su interior existen p puntos donde la aplicación cociente $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma$ es un recubrimiento ramificado de órdenes dados, los elementos del conjunto $B = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ arbitrariamente ordenados. Supongamos además que alrededor del agujero k -ésimo donde la aplicación cociente es ramificada y plegada de órdenes los dados por los elementos del conjunto $V_k = \{n_{k,1}, n_{k,2}, \dots, n_{k,m_k}\}$ escritos en orden cíclicamente. Entonces, existe la presentación de Γ , que denominaremos canónica, de la forma:*

Generadores:

$[x_i], i = 1, 2, \dots, p$, transformaciones elípticas,

$[a_j], [b_j], [e_k], j = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, s$, transformaciones hiperbólicas,

$[c_{k,l}], k = 1, 2, \dots, s$ y $l = 1, 2, \dots, m_k + 1$, reflexiones

y relaciones:

(a) $[c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, 2, \dots, s$ y $l = 1, 2, \dots, m_k + 1$,

(b) $[x_i]^{h_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p$,

(c) $[e_k][c_{k,m_k+1}][e_k]^{-1}[c_{k,1}] = 1, ([c_{k,l}][c_{k,l+1}])^{n_{k,l}} = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k$,

(d) $\prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k] = 1$.

Demostración. Del teorema 3.18 sabemos que la forma canónica de la región fundamental de Γ será de una de las formas:

1. $x_1 x'_1 \dots x_p x'_p a_1 b'_1 a'_1 b_1 \dots a_q b'_q a'_q b_q e_1 c_{1,1} \dots c_{1,m_1} e'_1 \dots e_s c_{s,1} \dots c_{s,m_s} e'_s c_{s+1,1} \dots c_{s+1,m_{s+1}}$.
2. $x_1 x'_1 \dots x_p x'_p a_1 b'_1 a'_1 b_1 \dots a_q b'_q a'_q b_q e_1 c_{1,1} \dots c_{1,m_1} e'_1 \dots e_s c_{s,1} \dots c_{s,m_s} e'_s$,

Para el primer caso, según hemos visto en el teorema 3.21, los generadores son:

$$[x_i], i = 1, \dots, p,$$

$$[a_j], j = 1, \dots, q,$$

$$[b_j], j = 1, \dots, q,$$

$$[e_k], k = 1, \dots, s-1,$$

$$[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k,$$

ya que cada lado h de la región fundamental F va a verificar que su transformación asociada $[h]$ es, por definición, aquella tal que $F \cap [h]F \supset h$, es decir, es un elemento del grupo de transformaciones de Γ que transforman F en alguno de sus caras vecinas, luego como vimos en el teorema 3.21, uno de los generadores de Γ .

Por otro lado, puesto que los lados etiquetados mediante $c_{k,l}$ son únicos, en el sentido de no ser congruentes a ningún otro de los de F , serán reflexiones de forma que sus transformaciones asociadas verificarán la relación

$$(3.7) \quad [c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1.$$

Análogamente, los vértices de los pares (x_i, x'_i) son tales que las caras $[x_i]F, [x_i]^2F, \dots$ dejan ese vértice invariante por lo que las transformaciones $[x_i], [x_i]^2, \dots$ son los elementos de la relación canónica de v , es decir, existirá un entero f_i tal que

$$(3.8) \quad [x_i]^{f_i} = 1.$$

Además, por ser $[x_i]$ un elemento cíclico finito, será elíptico de orden f_i .

Tomemos ahora los vértices entre los lados $c_{k,l}$ y $c_{k,l+1}$: puesto que se verifica que $[c_{k,l}]^2 = 1$, las caras que se encuentran en v serán $[c_{k,l}]F, [c_{k,l+1}]F, [c_{k,l}][c_{k,l+1}]F, \dots$, por lo que la relación canónica en v será de la forma

$$(3.9) \quad \{[c_{k,l}][c_{k,l+1}]\}^{g_{k,l}} = 1.$$

Sea v el vértice formado por los lados $(e_k, c_{k,1})$. Su vértice congruente v' será el dado por los lados (c_{k,u_k}, e'_k) , puesto que los lados e_k y e'_k son congruentes y el vértice $(e_k, c_{k,1})$ sólo puede ser congruente al formado por (c_{k,m_k}, e'_k) o al dado por (e'_k, e_{k+1}) , pero esto último es imposible puesto que tendríamos que (c_{k,m_k}, e'_k) sería congruente a un vértice formado por lados ninguno de los cuales sería congruente a alguno de los lados c_{k,m_k} o e'_k . Observemos que, como e_k y e'_k son congruentes, tendremos, como se vio durante la demostración del teorema 3.21, que se verifica

$[e'_k] = [e_k]^{-1}$. Finalmente, como los vértices v y v' son conjugados por la transformación $[e_k]$, podremos escribir la clase de relaciones canónicas de estos vértices de la siguiente forma: sea F la región fundamental, v el vértice dado arriba, entonces $[c_{k,1}]F$ será la cara vecina dada por la reflexión de F sobre el lado $c_{k,1}$ que compartirá el vértice v . Ahora, la cara $[e_k]^{-1}[c_{k,1}]F$ será una cara vecina de F , pero en este caso comparte el vértice v' . De aquí, la cara $[c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}]F$ será otra cara vecina que comparte el vértice v' y por lo tanto la cara $[e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}]F$ será otra cara vecina de F que comparte v . En otras palabras, las caras vecinas de F que comparten v serán de la forma $([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^l F$ para l entero, y por la relación canónica del vértice v , podemos asegurar que existe un entero l_k de forma que se verificará

$$(3.10) \quad ([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^{l_k} = 1.$$

Por último, tendremos aquellos vértices de F no representados en los casos anteriores, que representamos mediante la relación

$$(3.11) \quad \left\{ \prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^{s-1} [e_k][c_{s,1}] \times \prod_{k=1}^{s-1} [e_{s-k}]^{-1} \times \prod_{j=1}^q ([b_{q-j+1}][a_{q-j+1}][a_{q-j+1}]^{-1}[a_{q-j+1}]^{-1}) \times \prod_{i=1}^p [x_{p-i+1}]^{-1}[c_{s,m_s}] \right\}^l = 1.$$

Definimos ahora el generador $[e_s]^{-1} = \prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^{s-1} [e_k]$, de donde teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$\prod_{k=1}^{s-1} [e_{s-k}]^{-1} = ([e_{s-1}]^{-1}[e_{s-2}]^{-1} \dots [e_2]^{-1}[e_1]^{-1}) = (\prod_{k=1}^{s-1} [e_k])^{-1},$$

y

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^q ([b_{q-j+1}][a_{q-j+1}][b_{q-j+1}]^{-1}[a_{q-j+1}]^{-1}) \\ &= ([b_q][a_q][b_q]^{-1}[a_q]^{-1}[b_{q-1}][a_{q-1}][b_{q-1}]^{-1}[a_{q-1}]^{-1} \dots [b_2][a_2][b_2]^{-1}[a_2]^{-1}[b_1][a_1][b_1]^{-1}[a_1]^{-1}) \\ &= (\prod_{j=1}^q [a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

obtenemos finalmente las relaciones

$$(3.12) \quad ([e_s][c_{s,m_s}][e_s]^{-1}[c_{s,1}])^l = 1$$

y

$$(3.13) \quad [e_s]^{-1} = \prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k].$$

De esta forma, tenemos que las relaciones 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12 y 3.13 forman un conjunto completo de relaciones en términos de los generadores

$$[x_i], i = 1, \dots, p,$$

$$[a_j], j = 1, \dots, q,$$

$$[b_j], j = 1, \dots, q,$$

$$[e_k], k = 1, \dots, s,$$

$[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k.$

Si se verifica que $l_k, l = 1$ tenemos las relaciones y generadores del enunciado. En caso contrario, si para algún $k, l_k = 1$, definimos $[e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1} = [c_{k,0}]$ y podemos escribir las relaciones

$$(3.14) \quad ([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1})^{-1}[c_{k,0}] = [e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,0}] = 1,$$

$$(3.15) \quad [c_{k,0}]^2 = ([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1})([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}) = 1$$

y teniendo en cuenta 3.10, tenemos que

$$(3.16) \quad ([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^{l_k} = ([c_{k,0}][c_{k,1}])^{l_k} = 1.$$

De nuevo, añadiendo ahora los $[c_{k,0}]$ al conjunto de generadores y las relaciones 3,14,3,15,3,16, obtenemos los generadores y relaciones del enunciado.

Por último, supongamos que tenemos el caso (ii) del enunciado, que tendrá los generadores:

$[x_i], i = 1, \dots, p,$

$[a_j], j = 1, \dots, q,$

$[b_j], j = 1, \dots, q,$

$[e_k], k = 1, \dots, s,$

$[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k.$

con las relaciones que quedan justificadas de forma totalmente análoga al caso anterior

(i) $[c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1,$

(ii) $[x_i]^{f_i} = 1,$

(iii) $\{[c_{k,l}][c_{k,l+1}]\}^{l_k} = 1,$

(iv) $([e_k][c_{k,m_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^{l_k} = 1,$

(v) $\{\prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k]\}^l = 1.$

De nuevo, si los $l, l_k = 1$, tenemos los generadores y relaciones del enunciado. Si por el contrario l no es la unidad, definimos el generador $[x_0]$ de la forma

$$[x_0]^{-1} = \prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k] \text{ y reemplazamos (v) por}$$

(vi) $[x_0]^l = 1$

y

(vii) $\prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k] = 1.$

Análogamente al caso de arriba, si ahora alguno de los $l_k \neq 1$, introducimos el generador $[c_{k,0}]$ como antes y obtenemos otra vez la conclusión del teorema. \square

Por último, enunciamos el caso de grupos NEC de cociente compacto y no orientable. La demostración es totalmente análoga al caso anterior y simplemente la bosquejamos:

Teorema 3.23 (Presentación canónica de Γ de cociente compacto y no orientable). *Sea Γ un grupo NEC con \mathbf{H}/Γ compacto tal que el cociente sea una superficie no orientable con s agujeros y de género no orientable r . Supongamos además que en su interior existen p puntos donde la*

aplicación cociente $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma$ es un recubrimiento ramificado de órdenes los elementos del conjunto $B = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ arbitrariamente ordenados. Supongamos además que alrededor del agujero k -ésimo, donde la aplicación cociente es ramificada y plegada donde los órdenes son los dados por los elementos del conjunto $V_k = \{n_{k,1}, n_{k,2}, \dots, n_{k,m_k}\}$ ordenados cíclicamente. Entonces, existe la presentación de Γ , que denominaremos canónica, de la forma:

Generadores:

$[x_i], i = 1, 2, \dots, p$, transformaciones elípticas,
 $[d_j], j = 1, 2, \dots, r$, reflexiones con deslizamientos,
 $[e_k], k = 1, 2, \dots, s$, transformaciones hiperbólicas,
 $[c_{k,l}], k = 1, 2, \dots, s$ y $l = 1, 2, \dots, m_k + 1$, reflexiones

y relaciones:

- (a) $[c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, 2, \dots, s$ y $l = 1, 2, \dots, m_k + 1$,
- (b) $[x_i]^{h_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p$,
- (c) $[e_k][c_{k,m_k+1}][e_k]^{-1}[c_{k,1}] = 1, ([c_{k,l}][c_{k,l+1}])^{n_{k,l}} = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k$,
- (d) $\prod_{i=1}^p [x_i] \prod_{j=1}^r [d_j]^2 \prod_{k=1}^s [e_k] = 1$.

Demostración. De nuevo tenemos dos casos que quedan caracterizados por la forma canónica de la región fundamental para el caso no orientable, que son:

1. $x_1 x_1' \dots x_p x_p' d_1 d_1^* \dots d_r d_r^* \dots e_1 c_{1,1} \dots c_{1,u_1} e_1' \dots e_{s-1} c_{s-1,1} \dots c_{s-1,u_{s-1}} e_{s-1}' c_{s,1} \dots c_{s,u_s}$,
2. $x_1 x_1' \dots x_p x_p' d_1 d_1^* \dots d_r d_r^* e_1 c_{1,1} \dots c_{1,u_1} e_1' \dots e_s c_{s,1} \dots c_{s,u_s} e_s'$.

Para el primer caso del enunciado, los generadores son

$[x_i], i = 1, \dots, p$,
 $[d_j], j = 1, \dots, r$,
 $[e_k], k = 1, \dots, s-1$,
 $[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k$.

con las relaciones que quedan justificadas de forma análoga al teorema anterior

- (i) $[c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1$,
- (ii) $[x_i]^{h_i} = 1, i = 1, \dots, p$,
- (iii) $[c_{k,l}][c_{k,l+1}]^{n_{k,l}} = 1, k = 1, \dots, s$,
- (iv) $([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])_{k,l}^n = 1$,
- (v) $\prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j][d_j]^{*-1} \prod_{k=1}^{s-1} [e_k][c_{s,1}] \times \prod_{k=1}^{s-1} [e_{s-k}]^{-1} \times \prod_{i=1}^t [x_{t-i+1}]^{-1} [c_{s,u_s}]^l = 1$.

Definimos ahora el generador $[e_s]^{-1} = \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j][d_j]^{*-1} \prod_{k=1}^{s-1} [e_k]$, de donde obtenemos finalmente las relaciones

- (vi) $([e_s][c_{s,u_s}][e_s]^{-1}[c_{s,1}]) = 1$,

y

- (vii) $[e_s]^{-1} = \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j][d_j]^{*-1} \prod_{k=1}^s [e_k]$.

De esta forma, tenemos las relaciones (i),(ii),(iii),(iv),(vi) y (vii) en términos de los generadores:

$$[x_i], i = 1, \dots, p,$$

$$[d_j], j = 1, \dots, r,$$

$$[e_k], k = 1, \dots, s-1,$$

$$[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k.$$

Si se verifica que $l_k, l = 1$ tenemos las relaciones y generadores del enunciado, si definimos

$$[e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1} = [c_{k,0}] \text{ y podemos escribir las relaciones}$$

$$(viii) ([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1})^{-1}[c_{k,0}] = [e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1}[c_{k,0}] = 1,$$

$$(ix) [c_{k,0}]^2 = ([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1})([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1}) = 1,$$

lo que nos da

$$(x) ([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^{l_k} = ([c_{k,0}][c_{k,1}])^{l_k} = 1.$$

De nuevo, añadiendo ahora los $[c_{k,0}]$ al conjunto de generadores y las relaciones (viii),(ix),(x), obtenemos los generadores y relaciones del enunciado.

Análogamente en el segundo caso del enunciado, tendremos los generadores:

$$[x_i], i = 1, \dots, p,$$

$$[d_j], j = 1, \dots, r,$$

$$[e_k], k = 1, \dots, s-1,$$

$$[c_{k,l}], k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k.$$

con las relaciones

$$(i) [c_{k,l}]^2 = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1,$$

$$(ii) [x_i]^{h_i} = 1, i = 1, \dots, p,$$

$$(iii) [c_{k,l}][c_{k,l+1}]^{l_k} = 1,$$

$$(iv) ([e_k][c_{k,u_k}][e_k]^{-1}[c_{k,1}])^{l_k} = 1,$$

$$(v) \left\{ \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j][d_j^*]^{-1} \prod_{k=1}^{s-1} [e_k][c_{s,1}] \times \prod_{k=1}^{s-1} [e_{s-k}]^{-1} \right\}^l = 1.$$

Definiendo el generador

$$[x_0]^{-1} = \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q ([a_j][b_j][a_j]^{-1}[b_j]^{-1}) \prod_{k=1}^s [e_k]$$

y reemplazamos (v) por

$$(vi) [x_0]^l = 1$$

y

$$(vii) \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j]^2 \prod_{k=1}^s [e_k] = 1.$$

Análogamente al caso de arriba, si ahora alguno de los $l_k \neq 1$, introducimos el generador $[c_{k,0}]$ como antes y obtenemos otra vez la conclusión del teorema.

De nuevo, si los $l, l_k = 1$, tenemos los generadores y relaciones del enunciado. Si por el contrario l no es la unidad, definimos el generador $[x_0]$ de la forma

$$[x_0]^{-1} = \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j]^2 \prod_{k=1}^s [e_k]$$

y reemplazamos (v) por

$$(vi) [x_0]^l = 1$$

y

$$(vii) \prod_{i=1}^t [x_i] \prod_{j=1}^q [d_j]^2 \prod_{k=1}^s [e_k] = 1. \quad \square$$

Podemos resumir los resultados de esta sección de la siguiente forma: dado un grupo NEC Γ , entonces existe un polígono fundamental F de \mathbf{H}/Γ de forma que el estabilizador de los vértices dados por los lados (x_i, x'_i) , digamos M_i , son grupos cíclicos de rotaciones de orden m_i entero, los estabilizadores de los vértices dados por los lados $(c_{i,j}, c_{i,j+1})$, que llamaremos N_{ij} , será el grupo diedral de orden $2n_{ij}$, puesto que puede presentarse de la forma

$$\langle x = c_{i,j}, y = c_{i,j}c_{i,j+1} \mid x^2 = y^{2n_{ij}} = (xy)^2 = 1 \rangle$$

ya que

$$(xy)^{2n_{ij}} = (c_{i,j}c_{i,j}c_{i,j}c_{i,j+1})^{2n_{ij}} = (c_{i,j+1})^{2n_{ij}} = 1^{n_{ij}} = 1.$$

Cualquier otro punto de $c_{i,j}$ tiene como estabilizador el grupo de reflexiones Z_2 .

3.4. Signatura y presentación de grupos NEC

En la sección anterior, hemos demostrado las posibles presentaciones de un grupo NEC a partir de la geometría de las formas fundamentales. Esta sección la vamos a dedicar a estudiar que características geométricas nos permiten identificar las propiedades del grupo NEC incluyendo su presentación. Esto lo vamos a resolver de forma análoga a cómo se realiza en el caso particular de los grupos Fuchsianos, en particular, introduciendo el concepto de signaturas NEC.

A continuación, estudiaremos la relación entre la signatura y su presentación, así como las características geométricas de la región fundamental asociada. Esto nos permitirá finalmente obtener los resultados principales de esta sección relacionados con las propiedades de isomorfía de grupos NEC, es decir, bajo que condiciones, en función de la representación geométrica o algebraica de dos grupos NEC, éstos serán isomorfos.

Previamente, un comentario sobre la notación. En la sección anterior hemos representado las transformaciones del grupo NEC (excepto la unidad y los generadores) con corchetes, por ejemplo $[p]$, y a los lados de las regiones fundamentales con letras latinas de la forma p . Esto era conveniente para las demostraciones efectuadas en esa sección, ya que estaban relacionadas con relaciones canónicas de vértices y con transformaciones asociadas a lados conjugados de la región fundamental y sus caras vecina. En esta sección, sin embargo, usaremos letras griegas para representar a los lados y reservaremos el alfabeto latino para representar a todos los elementos de los grupos NEC (no sólo a sus generadores).

Definición 3.24 (Signatura de Wilkie). Una signatura NEC o de Wilkie consiste en un signo \pm y una sucesión de enteros ordenadas por subsucesiones de la siguiente forma:

(0) un signo \pm , + para el caso orientable, – para el caso no orientable,

(1) un entero $g \geq 0$,

(2) un conjunto ordenado de enteros $m_1, \dots, m_p, m_i \geq 2$ que denominamos periodos propios de la signatura,

(3) un conjunto ordenado de ciclos de periodos

$C_1 = (n_{11}, \dots, n_{1m_1}), \dots, C_k = (n_{k1}, \dots, n_{ks_k}), n_{ij} \geq 2$. La signatura se escribe $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_k\})$,

o bien explícitamente, $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$. Los conjuntos de periodos pueden estar vacíos, obteniendo signaturas de Wilkie del tipo:

$(g, +, [],)$, representa un grupo NEC sin periodos ni ciclos,

$(g, +, [m], (0))$, representa un grupo NEC con un periodo propio y dos ciclos vacíos.

La signatura de Wilkie de un grupo NEC así definida, tiene asociados símbolos de superficie, entendidos como las formas canónicas de las regiones fundamentales asociadas, de la siguiente forma:

$$(3.17) \quad (g, +, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

tiene asociado una región fundamental cuya forma canónica es:

$$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_p \xi'_p \alpha_1 \beta'_1 \alpha'_1 \beta_1 \dots \alpha_g \beta'_g \alpha'_g \beta_g \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k.$$

Observemos como la signatura y la forma canónica se identifican en función del número de periodos y de ciclos y sus longitudes, sin que el valor exacto de los enteros que representan los periodos y ciclos es relevante. Análogamente, para el caso no orientable tenemos una signatura:

$$(3.18) \quad (g, -, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

que tiene asociado una región fundamental cuya forma canónica es:

$$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_p \xi'_p \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k \delta_1 \delta_1^* \dots \delta_g \delta_g^*.$$

Desde un punto de vista geométrico, ya vimos que 3.17 representa una superficie orientable con borde menos k discos y de género g . Igualmente, la superficie representada por 3.18 representa una superficie no orientable con borde menos k discos y género no orientable g .

Recordemos de la sección anterior, que los generadores y relaciones estaban ligados con los vértices donde los lados de un determinado tipo (asociados a las transformaciones) se encontraban. De esta forma, los periodos (relacionados con los exponentes que aparecían en las relaciones) se pueden asociar a los vértices donde intersectan estos lados; en otras palabras, podemos imaginar los periodos asociados a los vértices de los polígonos fundamentales. De esta forma, los periodos m_i se asociarán a vértices M_i comunes a los lados $\xi_i \xi'_i$ y los ciclos n_{ij} asociados a los vértices N_{ij} comunes a los lados $\gamma_{ij-1}, \gamma_{ij}$.

Ya vimos en la sección anterior como obtener la presentación de un grupo NEC a partir de la forma del polígono fundamental asociado. Teniendo esto en cuenta y como acabamos de asociar a la forma canónica de la región fundamental una signatura, es inmediato definir para cada signatura la presentación del grupo NEC cuya región fundamental tenga la forma canónica asociada a esa signatura. Recordemos que las presentaciones asociadas a los polígonos fundamentales escritos en su forma canónica son, para el caso orientable:

$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_p \xi'_p \alpha_1 \beta'_1 \alpha'_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta'_p \alpha'_p \beta_p \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k$. cuyos generadores son

$$x_i, i = 1, 2, \dots, p,$$

$$a_i, b_i, e_j, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, k,$$

$c_{i,j}, i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 0, 1, 2, \dots, s_i$,

y las relaciones:

(a) $c_{i,j}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 0, 1, 2, \dots, s_k$,

(b) $x_i^{m_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p$,

(c) $e_i c_{i,s_{i+1}} e_i^{-1} c_{i,0} = 1, (c_{i,j-1} c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s_k$,

(d) $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{j=1}^q (a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}) \prod_{i=1}^k e_i = 1$.

Para el caso no orientable de polígono

$$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_r \xi'_r \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k \delta_1 \delta_1^* \dots \delta_g \delta_g^*$$

tenemos los generadores

$x_i, i = 1, 2, \dots, p$,

$d_i, i = 1, 2, \dots, r$,

$e_i, i = 1, 2, \dots, k$,

$c_{i,j}, i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 0, 1, 2, \dots, s_i$,

y las relaciones:

(a) $c_{i,j}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 0, 1, 2, \dots, s_i$,

(b) $x_i^{m_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p$,

(c) $e_i c_{i,s_{i+1}} e_i^{-1} c_{i,0} = 1, (c_{i,j-1} c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s_i$,

(d) $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{i=1}^r d_i^2 \prod_{i=1}^k e_i = 1$.

Ahora hemos usado la notación comentada al inicio de la sección, cambiando los corchetes por el alfabeto latino en minúsculas, mientras que los lados de la región fundamental se representan con el alfabeto griego. Además, recordando la sección anterior, los generadores x_i están asociados a las relaciones canónicas de los vértices dados por los lados ξ_i, ξ'_i , los generadores $c_{i,j}$ con los vértices dados por los lados $\gamma_{ij-1}, \gamma_{ij}$ e igualmente los generadores a_i, b_i, d_i, e_i con los lados $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \epsilon_i$. Así mismo, usaremos el operador conmutador $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ para simplificar las notaciones. Finalmente, en la tabla a continuación representamos explícitamente como se relacionan signatura y presentación. Hemos visto como las transformaciones a, b, \dots, x, \dots , definidas en la

| Elemento de la signatura | Generador | Relación |
|---|--------------------------------|--|
| Periodo m_i | x_i | $x_i^{m_i}$ |
| Ciclo $C_i = (n_{i1}, \dots, n_{is_i})$ | $e_i, c_{i0}, \dots, c_{is_i}$ | $e_i c_{i,s_i} e_i^{-1} c_{i,0} = 1, c_{i,j}^2, (c_{i,j-1} c_{i,j})^{n_{i,j}}$ |
| $g+$ | $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ | $x_1 \dots x_r [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] e_1 \dots e_k$ |
| $g-$ | d_1, \dots, d_g | $x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k d_1 \dots d_g$ |

Cuadro 3.1: Signatura y Presentación

presentación de los grupos NEC transforman los lados correspondientes del polígono fundamental $\alpha, \beta, \dots, \xi, \dots$. De las definiciones y propiedades de estas transformaciones, estudiadas a lo largo de las secciones anteriores, y lo visto en esta, sabemos que los vértices M_i permanecen invariantes por las transformaciones del grupo $\langle x_i \rangle$, de forma que tenemos que el grupo cíclico x_i será el estabilizador de los vértices M_i . Análogamente, el grupo $\langle c_{i,j-1} c_{i,j} \rangle$ será el estabilizador de los

vértices N_{ij} . Adicionalmente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.25 (Propiedades geométricas de los grupos NEC). *Un elemento de orden finito de un grupo NEC Γ es conjugado a alguno de los siguientes:*

- (i) a una potencia de alguna $x_i, 1 \leq i \leq p$,
- (ii) a una potencia de alguna $c_{i,j-1}c_{i,j}, 1 \leq j \leq s_i, 1 \leq i \leq k$,
- (iii) algún $c_{i,j}, 1 \leq j \leq s_i, 1 \leq i \leq k$.

Demostración. Un elemento de orden finito t de Γ será o bien una rotación, o bien una reflexión. En cualquiera de los dos casos, tendremos un punto fijo en el semiplano superior \mathbf{H} que podemos denominar x . Además, como F es una región fundamental, existirá alguna imagen de F por Γ tal que $y = gx \in F, g \in \Gamma$. Por lo tanto, $x = g^{-1}y = tx = tg^{-1}y$, es decir, $y = gtg^{-1}y$, luego la transformación conjugada gtg^{-1} es un estabilizador de y . Puesto que los únicos puntos en F con estabilizador no trivial son los vértices M_i, N_{ij} y los puntos de los lados de F cuyas transformaciones asociadas son las reflexiones, es decir, los puntos de los lados γ_{ij} . Es decir, t será conjugado a alguno de esos estabilizadores, que serán según vimos en el párrafo anterior, o bien un elemento de $\langle x_i \rangle$ que es el caso (i), o uno de $\langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle$ que es el caso (ii), o una reflexión, es decir, algún $c_{i,j}$ que es el caso (iii). \square

3.5. Isomorfismos de grupos NEC

Esta sección la dedicamos a estudiar las propiedades de isomorfía de grupos NEC: dadas dos presentaciones o dos signaturas, ¿bajo que condiciones representan grupos isomórficos? Antes de responder esta pregunta vamos a matizar el concepto de isomorfía. Para ello vamos a introducir el concepto de isomorfía geométrica y vamos a estudiar bajo que condiciones dos grupos NEC son geoméricamente isomorfos, lo que nos dará pie a estudiar la isomorfía de estos grupos desde un punto de vista general.

Definición 3.26 (Isomorfismo geométrico). Dos grupos NEC Γ, Γ' se dice que son geoméricamente isomórficos si existe un homeomorfismo de $\mathbf{H}, t : x, y \rightarrow x', y'$ y un isomorfismo de grupos $\Gamma, \Gamma', g \rightarrow g'$ tales que $y = gx \Leftrightarrow y' = g'x'$. De esta forma, tenemos $y' = g'x' \Rightarrow ty = g'tx \Rightarrow tgx = g'tx \Rightarrow g' = tgt^{-1}$, es decir, dos grupos Γ, Γ' son geoméricamente isomorfos si son conjugados en el grupo de homeomorfismos de \mathbf{H} .

Por otro lado, diremos que un isomorfismo de Γ en Γ' (no necesariamente geométrico) puede ser realizado geoméricamente si para todo elemento g de Γ existe un homeomorfismo t de \mathbf{H} tal que su imagen por el isomorfismo es tgt^{-1} independientemente de g . En este caso, diremos que t es una realización geométrica del isomorfismo. Puesto que el número de puntos fijos determina la naturaleza de las transformaciones en el plano hiperbólico y como además los isomorfismos geométricos dejan invariante el conjunto de este tipo de puntos, tenemos que los isomorfismos geométricos transforman rotaciones (punto fijo) en rotaciones, reflexiones (infinitos puntos fijos)

en reflexiones y reflexiones con traslación (ningún punto fijo) en reflexiones con traslación. En efecto, si x es un punto fijo de g y t es un isomorfismo geométrico, tenemos que $x = gx$ y $g' = tgt^{-1}$, de forma que $g'tx = tgx = tx$, luego tx será un punto fijo de g' . Análogamente, si x' es un punto fijo de g' , tenemos que $x' = g'x' = tgt^{-1}x' \Rightarrow t^{-1}x' = tgt^{-1}x'$ y x' es un punto fijo de g , es decir, hay una relación uno a uno entre los puntos fijos de g y g' transformados por el isomorfismo geométrico que es lo que queríamos ver. De esta forma, si t es un isomorfismo geométrico, la imagen de la órbita de x por Γ será $t(\Gamma x) = t(\Gamma(t^{-1}(tx))) = (t\Gamma t^{-1})(tx) = \Gamma'(tx)$, es decir, será la órbita por Γ' del punto tx . De aquí deducimos que un isomorfismo geométrico induce un homeomorfismo entre los cocientes \mathbf{H}/Γ y \mathbf{H}/Γ' que denominaremos t^* .

Antes de analizar las propiedades de isomorfía geométrica de los grupos NEC, definimos el concepto de equivalencia directa e indirecta entre periodos de ciclos de firmas, que usaremos para enunciar y demostrar las isomorfías:

Definición 3.27 (Ciclos equivalentes). Dados dos ciclos de periodos $C = (n_1, \dots, n_s), C' = (n'_1, \dots, n'_{s'})$ decimos que C y C' son directamente equivalentes si uno es una permutación cíclica de otro, es decir, si $s = s'$ y existe un entero k tal que $n_i = n'_{i+k}$, tomando módulo s para la suma de índices. Análogamente, se dice que los ciclos son inversamente equivalentes si uno es la permutación cíclica inversa de otro, es decir, si existe un entero k tal que $n_i = n'_{k-i}$, tomando otra vez módulo s para la suma de índices.

Finalmente, obtenemos las condiciones de isomorfía geométrica entre grupos NEC.

Teorema 3.28 (Isomorfismo geométrico entre grupos NEC). *Si un grupo NEC Γ de firma $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ es geoméricamente isomorfo a un grupo NEC Γ' de firma $(g', \pm, [m'_1, \dots, m'_p]\{C'_1, \dots, C'_{s'}\})$, entonces ambos son orientables/no orientables, $p = p', s = s'$ los periodos $[m']$ son una permutación de los periodos $[m]$. Además, en el caso orientable, los ciclos C'_i son, o bien todos directamente, o bien todos inversamente equivalentes a $C_{\phi(i)}$, donde ϕ es una permutación de $(1, 2, \dots, s)$. Para el caso no orientable, para cada i el ciclo C'_i es, o bien directamente, o bien inversamente equivalente a $C_{\phi(i)}$, donde ϕ es, de nuevo, una permutación de $(1, 2, \dots, s)$.*

Demostración. Como sabemos de la teoría de grupos, dado un grupo Γ actuando sobre el semi-plano superior \mathbf{H} , se denomina estabilizador de $x \in \mathbf{H}$ al conjunto $St(x) = \{g \in \Gamma : gx = x\}$, es decir, el conjunto de elementos de Γ que dejan invariante x . Así mismo, llamamos órbita de x al conjunto $Orb(x) = \{z \in \mathbf{H} : \exists g \in \Gamma, gx = z\}$. Se tiene que si $y \in Orb(x)$ entonces $St(y) = gSt(x)g^{-1}$, con $gx = y$. De aquí deducimos que, para el caso del homeomorfismo t^* inducido según definimos arriba entre los espacios cociente \mathbf{H}/Γ y \mathbf{H}/Γ' , todos los puntos de una misma Γ -órbita tienen estabilizadores geoméricamente isomorfos, pues los estabilizadores son subgrupos y son conjugados en el grupo de homeomorfismos de \mathbf{H} . De esta forma, hablaremos de estabilizador de un punto del espacio cociente, entendido como la clase de isomorfismos a la que pertenecen los estabilizadores de los puntos de una órbita.

El homeomorfismo t^* definido arriba, aplicará entonces puntos de $S = \mathbf{H}/\Gamma$ en $S' = \mathbf{H}/\Gamma'$ con

estabilizadores geoméricamente isomorfos. Si identificamos los cocientes con sus polígonos fundamentales cuya forma canónica es la obtenida según su signatura, obtenemos que los estabilizadores de los puntos M_i y los de su imagen por t^* son geoméricamente isomorfos, es decir, conjugados y, por lo tanto, si es estabilizador del primero es un grupo cíclico de rotaciones de orden m_i , el del segundo también será cíclico del mismo orden. Similarmente, si los estabilizadores de los puntos N_{ij} son grupos diedrales de orden n_{ij} , lo mismo sucederá con los estabilizadores de $t^*(N_{ij})$. En otras palabras, el homeomorfismo t^* induce una aplicación biyectiva de los periodos y de los ciclos de Γ en los de Γ' .

Como se deduce de los enunciados de los teoremas 3,22 y 3,23 los vértices N_{ij} , correspondientes a las intersecciones de los lados $(c_{i,j}, c_{i,j+1})$, pertenecen todos a las mismas componentes de la frontera de S pues son todos puntos rodeando al i -ésimo agujero de su frontera, y por lo tanto, sus t^* -imágenes serán todas pertenecientes a su vez a la misma componente de la frontera de S' , es decir, las imágenes de los N_{ij} serán $N'_{i'j'}$ tales que todos los puntos con el mismo índice i tendrán sus imágenes con el mismo índice i' y cada ciclo de la signatura de Γ corresponderá con un ciclo de la misma longitud y con los mismos periodos en Γ' . Además, dentro de cada ciclo, el orden que se ha tomado alrededor de la i -ésima componente corresponderá a un ciclo con el mismo orden, o su reverso, y, por último, los puntos elegidos como N_{i1} para cada i son irrelevantes desde un punto de vista geométrico, de forma que permutaciones cíclicas de los puntos serán posibles.

Llamemos $[C_i]$ la componente de la frontera de S en el caso no orientable, entonces contiene los puntos N_{ij} y tendremos una permutación ϕ como la del enunciado que verificará $[C'_i] = t^*[C_{\phi(i)}]$. Dependiendo de si la aplicación t^* de la componente de la frontera $[C_i]$ en $[C'_i]$, que será una aplicación entre 1-esferas y por lo tanto tendrá grado $+1$ o -1 dependiendo de si t^* aplica respetando o invirtiendo la orientación de las componentes de la frontera, es decir, los ciclos serán directamente o inversamente equivalentes según el grado de t^* .

Finalmente, en el caso orientable, cada componente de la frontera tendrá la orientación inducida por la orientación de la superficie, de forma que, todas las componentes de la superficie S estarán orientadas de la misma forma, e igualmente todas las componentes de la frontera de la superficie orientable S' , es decir, en el caso orientable t^* aplica todos los pares ligados de componentes de ciclos, digamos $[C_i]$ y $[C'_j]$ de forma que son todos directamente equivalentes o todos inversamente equivalentes según t^* preserve o invierte la orientación. \square

Llegados a este punto es importante señalar que un isomorfismo de grupos no tiene por qué tener una realización geométrica. Observemos que si $G = \langle 1, g, g^2, g^3, g^4 \rangle$ es el grupo cíclico de rotaciones de orden 5 y $u : G \rightarrow G : r \rightarrow r^2$ un automorfismo de G , veamos que no puede ser derivado geoméricamente: en efecto, si así fuese tendríamos que existiría un homeomorfismo $t : D \rightarrow D$ tal que si $x, x', y, y' \in D$ y $a, b \in G$ con $b = u(a)$, entonces $y = ax \Leftrightarrow ty = y' = u(a)x' = bx' = btx$. Si $y = ax$, entonces se debería verificar que $ty = btx = a^2tx \implies tax = a^2tx$, es decir, a^2 y a tienen que ser conjugados. Esto implica, por ejemplo, que g^3 y g^4 elementos de G son conjugados en el grupo de los homeomorfismos de D , pues $(g^4)^2 = g^8 = g^5g^3 = g^3$. Sin embargo, no son conjugados

entre si, ya que son rotaciones de ángulos $6\pi/5$ y $8\pi/5$ respectivamente y por lo tanto serán las transformaciones $U_{e^{6\pi/5}}$ y $U_{e^{8\pi/5}}$, que no pueden ser conjugadas.

Sin embargo, en el caso de grupos planos de cociente compacto todo isomorfismo puede ser realizado geoméricamente como se demuestra, por ejemplo, en [29]. La demostración no se incluye, más que por su dificultad, por ser necesario incluir conceptos de la teoría de espacios de Teichmüller y homeomorfismos cuasi-conformes que implicarían extender en exceso la presente memoria.

Con la base dada por los resultados anteriores podemos enfrentarnos al objetivo último de esta sección, en particular, la respuesta a la siguiente pregunta: ¿bajo qué condiciones dos grupos NEC con signaturas dadas son isomorfos?

Teorema 3.29 (Isomorfismo entre grupos NEC). *Las condiciones de isomorfía geométrica entre dos grupos NEC Γ y Γ' son necesarias y suficientes para que los dos grupos sean isomorfos.*

Demostración. Como hemos comentado en el párrafo anterior al teorema, los isomorfismos entre dos grupos NEC pueden ser realizados geoméricamente, de forma que las condiciones de isomorfismo geométrico son necesarias para que sean isomorfos en su sentido más general.

La demostración de la suficiencia de las condiciones del teorema se divide en cinco partes:

- (i) Sea ϕ una permutación de $(1, 2, \dots, p)$, entonces los grupos NEC $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ y $(g, \pm, [m_{\phi(1)}, \dots, m_{\phi(p)}]\{C_1, \dots, C_s\})$ son isomorfos.
- (ii) Si C'_j es una permutación cíclica de C_j entonces los grupos NEC $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ y $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j, C_{j+1}, \dots, C_s\})$ son isomorfos.
- (iii) Sea ϕ una permutación de $(1, 2, \dots, s)$, entonces los grupos NEC $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ y $(g, \pm, [m_1, \dots, m_p]\{C_{\phi(1)}, \dots, C_{\phi(s)}\})$ son isomorfos.
- (iv) Si C_i^* es un ciclo con los mismos periodos que C_i pero escritos en sentido inverso, entonces los grupos NEC $(g, +, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ y $(g, +, [m_1, \dots, m_p]\{C_1^*, \dots, C_s^*\})$ son isomorfos.
- (v) Si C_i^* es un ciclo con los mismos periodos que C_i pero escritos en sentido inverso, entonces los grupos NEC $(g, -, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_s\})$ y $(g, -, [m_1, \dots, m_p]\{C_1, \dots, C_i^*, \dots, C_s\})$ son isomorfos.

Pasemos a demostrar cada una de las propiedades de isomorfía planteadas:

- (i) El orden de los p puntos de ramificación es irrelevante, como se puede ver al reemplazar los generadores x_i y x_{i+1} por los generadores $x'_i = x_i x_{i+1} x_i^{-1}$ y $x_{i+1} = x_i$ respectivamente, que al reemplazar en las relaciones del grupo da,

$$\begin{aligned} x_i'^{h_{i+1}} &= (x_i x_{i+1} x_i^{-1})^{h_{i+1}} = x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{h_{i+1}} x_i^{-1} = x_i x_i^{-1} = 1, \\ x_{i+1}'^{h_i} &= x_i^{h_i} = 1, \\ x_1 \dots x_{i-1} x_i' x_{i+1}' \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_s \\ &= x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} x_i^{-1} x_i \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_s \\ &= x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_s = 1, \end{aligned}$$

de forma que volvemos a obtener el mismo número de generadores con las mismas relaciones, es decir, los grupos son isomorfos bajo permutaciones de los ciclos.

- (ii) La segunda operación es equivalente a demostrar que el orden de los periodos $n_{k,1}$ es irre-

levante, es decir, cualquier permutación de $(1, \dots, m_k)$ tal que los elementos del ciclo C'_k son una permutación de los elementos del ciclo C_k , produce un grupo isomorfo. Para ello basta con ver que el conjunto $n_{k,1}, n_{k,2}, \dots, n_{k,m_k}$ puede ser movido un lugar cíclicamente. Sabemos que se verifican la siguiente relación:

$$1 = e_k c_{k,m_k+1} e_k^{-1} c_{k,1} = e_k c_{k,m_k+1} e_k^{-1} c_{k,1}^{-1} \Rightarrow c_{k,1} = e_k c_{k,m_k+1} e_k^{-1}, \text{ de forma que obtenemos}$$

$$1 = (c_{k,1} c_{k,2})^{n_{k,1}} = (e_k c_{k,m_k+1} e_k^{-1} c_{k,2})^{n_{k,1}}.$$

Reemplazando el generador $c_{k,2}$ por $c'_{k,2} = e_k^{-1} c_{k,2} e_k$, nos permite escribir la relación anterior de la forma:

$$1 = (e_k c_{k,m_k+1} e_k^{-1} e_k c'_{k,2} e_k^{-1})^{n_{k,1}} = (e_k c_{k,m_k+1} c'_{k,2} e_k^{-1})^{n_{k,1}} = e_k (c_{k,m_k+1} c'_{k,2})^{n_{k,1}} e_k^{-1}.$$

Esto lo podemos escribir como $(c_{k,m_k+1} c'_{k,2})^{n_{k,1}}$. Usando la relación $(c_{k,2} c_{k,3})^{n_{k,1}} = 1$, obtenemos $(e_k c'_{k,2} e_k^{-1} c_{k,3})^{n_{k,2}} = 1$.

Definimos ahora el generador $c_{k,\alpha} = e_k c'_{k,2} e_k^{-1}$, que verifica $c_{k,\alpha}^2 = e_k c'_{k,2} e_k^{-1} e_k c'_{k,2} e_k^{-1} = e_k c'_{k,2} c'_{k,2} e_k^{-1} = e_k e_k^{-1} c_{k,2} e_k e_k^{-1} c_{k,2} e_k e_k^{-1} = c_{k,2} c_{k,2} = 1$, de forma que obtenemos las dos relaciones:

$$e_k c'_{k,2} e_k^{-1} c_{k,\alpha} = 1$$

y

$(c_{k,\alpha} c_{k,3})^{n_{k,2}} = 1$, esta última se obtiene de forma completamente análoga a la relación obtenida arriba, $c_{k,m_k+1} c'_{k,2})^{n_{k,1}}$.

Ahora, si usamos los generadores $c_{k,\alpha}, c'_{k,2}, c_{k,l}, l = 3, 4, \dots, m_k + 1$ y las relaciones

$$e_k c'_{k,2} e_k^{-1} c_{k,\alpha} = 1,$$

$$(c_{k,\alpha} c_{k,3})^{n_{k,2}} = 1,$$

$$(c_{k,l} c_{k,l+1})^{n_{k,l}} = 1, l = 3, 4, \dots, m_k,$$

$$(c_{k,m_k+1} c'_{k,2})^{n_{k,2}} = 1,$$

junto con el resto de generadores y relaciones que no han variado, observamos como el resultado es un grupo con el mismo número de generadores y con las mismas relaciones entre ellos, es decir, el nuevo grupo es isomorfo.

(iii) La tercera operación es equivalente a demostrar que el orden de los s agujeros es irrelevante, es decir, que cualquier permutación de $(1, \dots, s)$ producen un grupo con los mismos generadores y presentación. Definamos dos generadores $e'_i = e_i e_{i+1} e_i^{-1}, e'_{i+1} = e_i, c'_{i+1,l} = c_{i,l}, l = 1, 2, \dots, m_i, c'_{i,l} = e_i c_{i+1,l} e_i^{-1}, l = 1, 2, \dots, m_{i+1}$. Estos generadores cumplen las relaciones:

$$c_{i,l}^2 = e_i c_{i+1,l} e_i^{-1} e_i c_{i+1,l} e_i^{-1} = e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l} e_i^{-1} = 1, l = 1, \dots, m_{i+1}$$

$$c_{i+1,l}^2 = c_{i+1,l} c_{i+1,l} = 1, l = 1, \dots, m_i$$

$$e'_i c'_{i,m_{i+1}+1} e_i^{-1} c'_{i,1} = e_i e_{i+1} e_i^{-1} e_i c_{i+1,m_{i+1}+1} e_i^{-1} e_i e_{i+1}^{-1} e_i^{-1} e_i c_{i+1,1} e_i^{-1} = e_i [e_{i+1} c_{i+1,m_{i+1}+1} e_{i+1}^{-1} c_{i+1,1}] e_i^{-1} = e_i e_i^{-1} = 1$$

$$e'_{i+1} c'_{i+1,m_{i+1}+1} e_{i+1}^{-1} c'_{i+1,1} = e_i c_{i+1,m_{i+1}+1} e_i^{-1} c_{i+1,1} = 1$$

$$(c'_{i,l} c'_{i,l+1})^{n_{i+1,l}} = (e_i c_{i+1,l} e_i^{-1} e_i c_{i+1,l+1} e_i^{-1})^{n_{i+1,l}}$$

$$= (e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} e_i^{-1})^{n_{i+1,l}} = e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} e_i^{-1} e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} e_i^{-1} \dots e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} e_i^{-1}$$

$$= e_i c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} \dots c_{i+1,l} c_{i+1,l+1} e_i^{-1}$$

$$= e_i (c'_{i,l} c'_{i,l+1})^{n_{i+1,l}} e_i^{-1} = e_i e_i^{-1} = 1$$

$$(c'_{i+1,l}c'_{i+1,l+1})^{n_{i+1,l}} = (c_{i,l}c_{i,l+1})^{n_{i+1,l}} = 1$$

Para el caso orientable tendremos la relación

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_{i-1} e'_i e'_{i+1} e_{i+2} \dots e_s \\ &= x_1 \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_{i-1} e_i e_{i+1} e_i^{-1} e_{i+2} \dots e_s \\ &= x_1 \dots x_p a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} e_1 \dots e_{i-1} e_i e_{i+1} e_{i+2} \dots e_s = 1 \end{aligned}$$

y para el caso no orientable

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_p d_1^2 \dots d_r^2 e_1 \dots e_{i-1} e'_i e'_{i+1} e_{i+2} \dots e_s = x_1 \dots x_p d_1^2 \dots d_r^2 e_1 \dots e_{i-1} e_i e_{i+1} e_i^{-1} e_{i+2} \dots e_s \\ &= x_1 \dots x_p d_1^2 \dots d_r^2 e_1 \dots e_{i-1} e_i e_{i+1} e_{i+2} \dots e_s = 1 \end{aligned}$$

(iv) Si ahora tenemos un grupo en el que invertimos el orden de los periodos de cada ciclo de otro grupo dado, tenemos que los generadores serán

$$\begin{aligned} & x'_i, \\ & a'_j, j = 1, \dots, g, \\ & b'_j, j = 1, \dots, g, \\ & e'_k, k = 1, \dots, s, \\ & c'_{k,l}, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1, \end{aligned}$$

y las relaciones serán (los subíndices se definen de forma que el orden en cada ciclo queda invertido y adicionalmente invertimos el orden de los puntos de ramificación por conveniencia),

$$\begin{aligned} & (a) c'^2_{k,l} = 1, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1, \\ & (b) x_i^{h_{p-i+1}} = 1, i = 1, \dots, p, \\ & (c) e'_k c'_{k,m_k+1} e'^{-1}_{k,1} c'_{k,1} = 1, (c'_{k,l} c'_{k,l+1})^{n_{k,m_k-l+1}} = 1, l = 1, \dots, m_k, k = 1, \dots, s, \\ & (d) x'_1 \dots x'_p a'_1 b'_1 a'^{-1}_1 b'^{-1}_1 \dots a'_g b'_g a'^{-1}_g b'^{-1}_g e'_s \dots e'_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el orden de los puntos de ramificación es irrelevante y reescribiendo las relaciones (c) de la forma

$$e'^{-1}_k c'_{k,1} e_k c_{k,m_k+1} = 1, (c'_{k,l+1} c'_{k,l})^{n_{k,m_k-l+1}} = 1,$$

y transformando e invirtiendo la relación (d) obtenemos

$$\begin{aligned} & (a'_1 b'_1 a'^{-1}_1 b'^{-1}_1 \dots a'_g b'_g a'^{-1}_g b'^{-1}_g e'_s \dots e'_1)^{-1} = x'_1 \dots x'_p \\ & \Rightarrow e'^{-1}_1 \dots e'^{-1}_s b'_g a'_g b'^{-1}_g a'^{-1}_g \dots b'_1 a'_1 b'^{-1}_1 a'^{-1}_1 = x'_1 \dots x'_p \\ & \Rightarrow e'^{-1}_1 \dots e'^{-1}_s b'_g a'_g b'^{-1}_g a'^{-1}_g \dots b'_1 a'_1 b'^{-1}_1 a'^{-1}_1 (e'_s \dots e'_1)^{-1} = x'_p \dots x'_1 (e'_s \dots e'_1)^{-1} \\ & \Rightarrow e'_s \dots e'_1 x'^{-1}_1 \dots x'^{-1}_p e'^{-1}_1 \dots e'^{-1}_s b'_g a'_g b'^{-1}_g a'^{-1}_g \dots b'_1 a'_1 b'^{-1}_1 a'^{-1}_1 (e'_s \dots e'_1)^{-1} = 1 \\ & \Rightarrow e'_s \dots e'_1 x'^{-1}_1 e'^{-1}_s \dots e'^{-1}_1 \dots e'_s \dots e'_1 x'^{-1}_p e'^{-1}_1 \dots e'^{-1}_s b'_g a'_g b'^{-1}_g a'^{-1}_g \dots b'_1 a'_1 b'^{-1}_1 a'^{-1}_1 e'^{-1}_s \dots e'^{-1}_1 = 1, \end{aligned}$$

de esta forma, definiendo los generadores $x''_i = e'_s \dots e'_1 x'^{-1}_1 e'^{-1}_s \dots e'^{-1}_1$, obtenemos finalmente la relación (d) de la forma

$$x''_p \dots x''_1 b'_g a'_g b'^{-1}_g a'^{-1}_g \dots b'_1 a'_1 b'^{-1}_1 a'^{-1}_1 e'^{-1}_s \dots e'^{-1}_1 = 1.$$

Usando los generadores

$$\begin{aligned} & x''_i, \\ & a''_j = a_{q-j+1}, j = 1, \dots, g, \\ & b''_j = b_{q-j+1}, j = 1, \dots, g, \end{aligned}$$

$$e''_k = e_k^{-1}, k = 1, \dots, s,$$

$$c''_k, l = c_{k, m_k - l + 1}, k = 1, \dots, s, l = 1, \dots, m_k + 1,$$

obtenemos el mismo número de generadores y las mismas relaciones en ambos grupos, lo que implica que son isomorfos.

(v) De (iii) tenemos que podemos permutar los ciclos sin alterar la clase de isomorfismo a la que pertenece una signatura dada, de forma que podemos asumir que la signatura

$(g, -, [m_1, \dots, m_p] \{C_1, \dots, C_i^*, \dots, C_s\})$ donde el ciclo C_i^* se ha obtenido del ciclo C_i invirtiendo el orden de sus periodos, es isomorfa a la signatura $(g, -, [m_1, \dots, m_p] \{C_1, \dots, C_s^*\})$ donde la permutación nos ha llevado i a s . De esta forma, tomamos Γ' con esta última signatura y teniendo en cuenta la forma de las signaturas de Γ y Γ' tenemos que los generadores y relaciones de ambos grupos son idénticos excepto,

$$e_s c_{s, m_s} c_{s, 0} e_s^{-1} = 1,$$

$$c_{s, j-1}^2 = c_{s, j-1}^2 = (c_{s, j-1} c_{s, j})^{n_{s, j}} = 1,$$

$$x_1 \dots x_p e_1 \dots e_s d_1^2 \dots d_r^2 = 1,$$

para el caso de Γ , y en el caso de Γ'

$$e'_s c'_{s, m_s} c'_{s, 0} e'^{-1}_s = 1,$$

$$c'^2_{s, j-1} = c'^2_{s, j-1} = (c'_{s, j-1} c'_{s, j})^{n_{s, m_s+1-j}} = 1,$$

$$x'_1 \dots x'_p e'_1 \dots e'_s d'^2_1 \dots d'^2_r = 1.$$

Definimos ahora un isomorfismo ϕ entre los dos grupos de la siguiente forma; la imagen de los generadores de Γ es idéntica a la de los generadores de Γ' :

$$\phi(x_i) = x'_i, \phi(e_i) = e'_i, \phi(c_{i, j}) = c'_{i, j}, i = 1, \dots, s-1,$$

$$\phi(d_i) = d'_i, i = 2, \dots, r,$$

y sólo se diferencia en los siguientes generadores

$$d = e'_s d'_1, \phi(e_s) = d e'^{-1}_s d^{-1}, \phi(c_{s, j}) = d c'^{-1}_{s, m_s+1-j} d^{-1},$$

$$\phi(d_1) = e'_s d'_1.$$

Observemos que todas las relaciones de ambos grupos son idénticas, en el caso de generadores idénticos es claro:

$$1 = \phi(1) = \phi((x_i)^{h_i}) = (\phi(x_i))^{h_i} = (x'_i)^{h_i},$$

$$1 = \phi(1) = \phi(c_{i, j}^2) = (c'_{i, j})^2,$$

$$1 = \phi(1) = \phi(c_{i, j} c_{i, j+1})^{g_{i, j}} = (\phi(c_{i, j}) \phi(c_{i, j+1}))^{g_{i, j}} = (c'_{i, j} c'_{i, j+1})^{g_{i, j}},$$

$$1 = \phi(1) = \phi(e_i c_{i, m_i+1} e_i^{-1} c_{i, j}) = \phi(e_i) \phi(c_{i, m_i+1}) \phi(e_i^{-1}) \phi(c_{i, j}) = e'_i c'_{i, m_i+1} e'^{-1}_i c'_{i, j},$$

y para el caso generadores con imágenes distintas de la unidad, e_s, d_1 y $c_{s, j}$, tenemos

$$\phi(c_{s, j}^2) = (\phi(c_{i, j}))^2 = (d c_{s, m_s+1-j} d^{-1})^2$$

$$= (e'_s d'_1 c'_{s, m_s+1-j} (e'_s d_1)^{-1})^2$$

$$= (e'_s d'_1 c'_{s, m_s+1-j} d'^{-1}_1 e'^{-1}_s)^2$$

$$= e'_s d'_1 c'_{s, m_s+1-j} d'^{-1}_1 e'^{-1}_s e'_s$$

$$= d'_1 c'_{s, m_s+1-j} d'^{-1}_1 e'^{-1}_s = 1,$$

$$\phi(c_{s, j} c_{s, j+1})^{g_{s, j}} = (\phi(c_{s, j}) \phi(c_{s, j+1}))^{g_{s, j}}$$

$$\begin{aligned}
 &= (dc'_{s,j}d^{-1}d_1c'_{s,j+1}d^{-1})^{g_{s,j}} \\
 &= (dc'_{s,j}c'_{s,j+1}d^{-1})^{g_{s,j}} \\
 &= dc'_{s,j}d^{-1}d_1c'_{s,j+1}d^{-1}\dots dc'_{s,j}d^{-1}d_1c'_{s,j+1}d^{-1} \\
 &= dc'_{s,j}c'_{s,j+1}c'_{s,j}c'_{s,j+1}\dots c'_{s,j}c'_{s,j+1}d^{-1} \\
 &= d(c_{s,j}c_{s,j+1})^{g_{s,j}}d^{-1} = dd^{-1} = 1, \\
 1 &= \phi(1) = \phi(x_1\dots x_p d_1^2 \dots d_r^2 e_1 \dots e_s) \\
 &\phi(x_1)\dots\phi(x_p)\phi(d_1^2)\dots\phi(d_r^2)\phi(e_1)\dots\phi(e_s) \\
 &= x'_1\dots x'_p e'_1 \dots d'_s d_{-1} (e'_s d_1)^2 \dots d_r'^2 \\
 &= x'_1\dots x'_p e'_1 \dots d'_s e_s^{-1} d^{-1} \phi(d_1)\dots d_r'^2 \\
 &= x'_1\dots x'_p e'_1 \dots e'_s d_1' e_s^{-1} (e'_s d_1')^{-1} e'_s d_1' e_s d_1' \dots d_r'^2 \\
 &= x'_1\dots x'_p e'_1 \dots e'_s d_1' e_s^{-1} d_1'^{-1} e_s'^{-1} \\
 e'_s d_1' e_s d_1' \dots d_r'^2 &= x'_1\dots x'_p e'_1 \dots e'_s d_1'^2 \dots d_r'^2.
 \end{aligned}$$

Con lo que la quinta operación sobre grupos no orientables es también un isomorfismo.

Con esto quedan demostradas las isometrías para las cinco operaciones propuestas y, por lo tanto, el enunciado del teorema. \square

3.6. Área de una región fundamental

Una de las características de gran interés en el estudio de grupos fuchsianos es el área de sus regiones fundamentales: el área hiperbólica de una región fundamental de un grupo fuchsiano dado es un invariante numérico del mismo. Además, dada la signatura de un grupo, podemos obtener ese invariante de forma sencilla a partir de los parámetros de la signatura. Por lo tanto, parece razonable preguntarse si los grupos NEC tienen propiedades similares. Esto va a ser el objetivo de los siguientes tres teoremas.

Teorema 3.30 (Área de la región fundamental de un grupo NEC es invariante). *Sean F_1 y F_2 dos regiones fundamentales de un grupo NEC Γ . Supongamos que las áreas hiperbólicas de los contornos de ambas son nulos. Entonces sus áreas son iguales, $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.*

Demostración. En primer lugar, hemos visto en la sección 2.3 que el área de un conjunto en \mathbf{H} es invariante frente a transformaciones del grupo de isometrías de \mathbf{H} del que Γ es un subconjunto. Sea $j = 1, 2$ y Q_j el interior de F_j , entonces $\mu(Q_j) = \mu(F_j)$ por el enunciado. Entonces,

$$F_1 \supseteq F_1 \cap \cup_{g \in \Gamma} g(Q_2) = \cup_{g \in \Gamma} (F_1 \cap g(Q_2)).$$

Puesto que la unión es disjunta, ya que Q_2 es el interior de una región fundamental distinta de F_1 , tenemos que se verificará

$$\mu(F_1) \geq \sum_{g \in \Gamma} \mu(F_1 \cap g(Q_2)) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g^{-1}(F_1) \cap Q_2) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g(F_1) \cap Q_2).$$

Por otro lado, $\cup_{g \in \Gamma} g(F_1) = \mathbf{H}$, de forma que $\cup_{g \in \Gamma} g(F_1 \cap Q_2) = Q_2$.

Finalmente, se tiene que $\mu(g(F_1) \cap Q_2) \geq \mu(Q_2) = \mu(F_2)$, es decir, $\mu(F_1) \geq \mu(F_2)$. De la misma forma tenemos $\mu(F_2) \geq \mu(F_1)$, es decir $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. \square

Teorema 3.31 (Suma de ángulos de un conjunto congruente de vértices de una región fundamental). *Sea F una región fundamental de un grupo NEC de cociente compacto Γ . Sean $\theta_1, \dots, \theta_t$ los ángulos internos de un conjunto congruente de vértices de F y sea m el orden del estabilizador de uno de esos vértices. Entonces, $\theta_1 + \dots + \theta_t = \frac{2\pi}{m}$.*

Demostración. Sean v_1, \dots, v_t un conjunto de vértices congruentes de F de ángulos internos $\theta_1, \dots, \theta_t$. De las demostraciones de los teoremas 3.22 y 3.23 sabemos que de las relaciones canónicas del vértice v_1 de F , tenemos una transformación $g \in \Gamma$ y un entero, que llamaremos orden del estabilizador de v_1 , m tales que $g^m = 1$ y $g(v_1) = v_1$, de forma que el estabilizador de v_1 será el conjunto $H = \{1, g, \dots, g^{m-1}\}$. Entonces, las regiones $g^r(F)$, $r = 0, 1, \dots, m$ tienen todas en común el vértice v_1 de ángulo θ_1 .

Supongamos ahora que hay un $v_k, T_k \in \Gamma$ tal que $T_k v_k = v_1$, entonces el conjunto de todos los elementos de Γ que llevan v_k en v_1 será una transformación de la forma hT_k con $h \in H$, puesto que si $pv_k = v_1$, entonces $pT_k^{-1}v_1 = v_1 \Rightarrow pT_k^{-1} \in H$ de donde se deduce que p es de la forma hT_k con $h \in H$. Luego tendremos que el conjunto de transformaciones que llevan v_k en v_1 tendrá también m elementos y todas las regiones de la forma $g^r T_k(F)$ tendrán v_1 como vértice ahora formando un ángulo θ_k puesto que v_1 formará el mismo ángulo con la región $g^r T_k(F)$ que v_k con R , que es θ_k por hipótesis.

Si la región $h(F)$, $h \in \Gamma$ contiene al vértice v_1 , entonces $h^{-1}(v_1) \in F$, de forma que será un vértice de F , digamos v_i , $1 \leq i \leq t$. Por lo tanto, $h \in HT_i$ de donde deducimos que la región $h(F)$ es una de las mt regiones que rodean al vértice v_1 y además cada ángulo θ_i estará repetido m veces. Por último, si dos regiones son tales que $g^r T_k(F) = g^s T_l(F)$, se tiene $g^r T_k v_k = g^s T_l v_l \Rightarrow g^r v_1 = v_1 = g^s T_l v_l \Rightarrow v_1 = T_l v_l = T_l v_k$, de donde deducimos $k = l$, es decir, $T_k = T_l$ y de aquí también $g_r = g_s$. Finalmente deducimos el enunciado del teorema: $m(\theta_1 + \dots + \theta_t) = 2\pi$. \square

Teorema 3.32 (Área de la región fundamental de un grupo NEC). (a) *Sea Γ un grupo NEC de signatura $(g, +, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11} \dots n_{1s_1}), \dots, (n_{k1} \dots n_{ks_k})\})$. Entonces el área de la región fundamental F del grupo dado es*

$$\mu(F) = 2\pi(2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}).$$

(b) *Si Γ un grupo NEC de signatura $(g, -, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11} \dots n_{1s_1}), \dots, (n_{k1} \dots n_{ks_k})\})$. Entonces el área de la región fundamental F del grupo dado es*

$$\mu(F) = 2\pi(g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}).$$

Demostración. Sea Γ un grupo NEC de cociente compacto cuya región fundamental es F . En la sección 3.2 hemos visto que bajo estas condiciones la región fundamental será un polígono hiperbólico convexo con un número finito de lados. Por el teorema de Gauss-Bonet para conjuntos convexos sabemos que el área de F será $\mu(F) = (n - 2)\pi - A$, donde A es la suma de los ángulos de F .

Además, por 3.31 sabemos que la suma de los ángulos de un conjunto de vértices conjugados es $2\pi/l$, donde l es el orden del estabilizador. Entonces, si denotamos (δ_1, δ_2) al vértice donde

intersectan δ_1 y δ_2 , podemos tener los casos de la tabla a continuación:

| | Vértice | Orden del estabilizador |
|-----|------------------------|-------------------------|
| (a) | (x_i, x'_i) | m_i |
| (b) | $(c_{i,j-1}, c_{i,j})$ | $2n_{ij}$ |
| (c) | $(e_i, c_{i,0})$ | 2 |
| (d) | (c_{i,s_i}, e'_i) | 2 |

Cuadro 3.2: Orden de los estabilizadores de los vértices

Cada vértice de los tipos (a) y (b) no tienen otros conjugados y por lo tanto forman cada uno un conjunto de vértices conjugados, de forma que la suma de ángulos de (a) y (b) será $\sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i})$ y $\sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r (1 - \frac{1}{n_{ij}})$ respectivamente. Como se vio en los teoremas 3.22 y 3.23, por un lado los vértices (c) y (d) son conjugados entre si, por lo tanto su suma será $k \frac{2\pi}{2} = k\pi$ y por otro lado, el resto de vértices son todos conjugados entre si con estabilizador, por lo que tenemos que la suma de sus ángulos será 2π , de donde obtenemos $A = 2\pi + k\pi + \pi \sum_{i=1}^r (\frac{1}{m_i}) + \pi \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r (\frac{1}{n_{ij}})$ lo que finalmente nos da

$$\begin{aligned} \mu_F &= (n-2)\pi - (2\pi + k\pi + \pi \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{\pi}{n_{ij}}) = (2r + 2k + (s_1 + 1) + \dots + (s_k + 1) + 4g - 2)\pi - \\ & (2\pi + k\pi + \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{\pi}{n_{ij}}) \\ &= 2\pi(r + k + s_1 + \dots + s_k + 2g - 1 - 2 + k + \sum_{i=1}^r \frac{\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2n_{ij}}) \\ &= 2\pi(k + \frac{s_1 + \dots + s_k}{2} + \frac{k}{2} + 2g - 2 - \frac{k}{2} + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2n_{ij}}) \\ &= 2\pi(k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} + 2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2n_{ij}}) \\ &= 2\pi(k + 2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}})) \end{aligned}$$

que es el enunciado en el caso (a). El caso (b) es completamente análogo, teniendo simplemente en cuenta que ahora $n = r + k + g$, con lo que la demostración queda completa. \square

3.7. Rango de un grupo NEC

Dada la presentación de un grupo cualquiera Γ , el mínimo número de generadores necesario para definirlo completamente se llama rango de Γ , y lo denotamos de la forma $rg(\Gamma)$. Si, en particular, el grupo tiene una representación geométrica de forma que tiene asociado una región fundamental, por ejemplo en el caso de grupos fuchsianos, definimos el rango geométrico del grupo $gr(\Gamma)$ al número de parejas de lados congruentes. Recordemos de la teoría de grupos fuchsianos, cada una de esas parejas de lados congruentes determina un generador del grupo, como podemos ver en [14], [15]. Obviamente, tenemos que se verifica $rg(\Gamma) \leq gr(\Gamma)$ y la cuestión es estudiar que característica debe tener un grupo para que ambos conceptos coincidan. El objetivo de esta sección

es estudiar el rango y el rango geométrico de un grupo NEC y entender como se relacionan. Para ello introducimos el concepto de rango geométrico de un grupo NEC y obtenemos su rango en función de los términos de su signatura.

Sea Γ un grupo NEC, F un polígono fundamental de Γ y x un lado de F . Como vimos en la sección 3.3, existe una única transformación $g \in \Gamma$ tal que $F \cap g(F) = x$ y decimos que cada lado de F determina una transformación de Γ . Análogamente, vemos que $g^{-1}(x)$ es también un lado de F que determina a su vez la transformación $g^{-1} \in \Gamma$. Llamemos $N(F)$ al número de parejas de transformaciones g, g^{-1} . Si tomamos un representante de cada una de esos pares de transformaciones, sabemos que obtenemos un sistema de generadores de Γ que llamaremos sistema geométrico de generadores asociados a F , que contendrá $N(F)$ elementos. Estamos en condiciones de definir el rango geométrico de un grupo NEC:

Definición 3.33. Sea Γ un grupo NEC y F una región fundamental suya. Definimos rango geométrico de Γ , $gr\Gamma$ al mínimo del conjunto $N(F)$ donde F es región fundamental de Γ . Diremos que Γ es un grupo NEC de tipo finito si $gr(F)$ es finito, es decir, si Γ tiene un polígono fundamental con un número finito de lados, como ocurre en el caso de grupos NEC de cociente compacto.

En las secciones anteriores hemos representado las regiones fundamentales de los grupos NEC de cociente compacto en forma de una sucesión de lados a la que hemos asociado un conjunto de generadores que podemos denominar geométricos, de forma que para ellos tenemos ya una cota para el rango geométrico. Por ejemplo, para el caso compacto y orientable, teníamos una signatura y región fundamental de la forma

$$(g, +, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11} \dots n_{1s_1}) \dots (n_{k1} \dots n_{ks_k})\}),$$

$$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_p \xi'_p \alpha_1 \beta'_1 \alpha'_1 \beta_1 \dots \alpha_g \beta'_g \alpha'_g \beta_g \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k,$$

por lo que la cota superior del rango geométrico será

$$2g + p + k \sum_{i=1}^k s_i.$$

Análogamente, para el caso no orientable tendremos

$$(g, -, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11} \dots n_{1s_1}) \dots (n_{k1} \dots n_{ks_k})\}),$$

$$\xi_1 \xi'_1 \dots \xi_p \xi'_p \alpha_1 \alpha_1^* \dots \alpha_g \alpha_g^* \varepsilon_1 \gamma_{10} \gamma_{11} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon'_1 \varepsilon_2 \gamma_{20} \gamma_{21} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \gamma_{k1} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon'_k,$$

por lo que la cota superior del rango geométrico será en el caso no orientable

$$g + p + k + \sum_{i=1}^k s_i.$$

Finalmente, podemos condensar el resultado en el siguiente teorema

Teorema 3.34 (Rango geométrico de un grupo NEC). *Sea Γ un grupo NEC de signatura*

$(g, \pm, [m_1, \dots, m_p] \{(n_{11} \dots n_{1s_1}), \dots, (n_{k1} \dots n_{ks_k})\})$. Entonces se tiene

(i) Si $p + k = 0$ entonces $gr(\Gamma) = \alpha g$.

(ii) Si $p + k > 0$, entonces $gr(\Gamma) = \alpha g + p + k + \sum_{i=1}^k s_i$.

Donde tenemos que $\alpha = 2$ si el signo es $+$ y en caso contrario es $\alpha = 1$

Demostración. En el caso orientable, si $p = k = 0$, tenemos los grupos cuyas regiones fundamentales se pueden caracterizar por la secuencia de símbolos $\alpha_1 \beta'_1 \alpha'_1 \beta_1 \dots \alpha_g \beta'_g \alpha'_g \beta_g$, luego la cota

superior del rango geométrico será g . Si $p + k > 0$, entonces la cota superior es la que hemos obtenido en la discusión anterior al enunciado del teorema $2g + p + k + \sum_{i=1}^p s_i$.

En el caso no orientable, tenemos que si $p + k = 0$, entonces el polígono fundamental tendrá los lados $\alpha_1^*, \dots, \alpha_g$ y, por lo tanto, su rango geométrico tendrá como cota g . Si $p + k > 0$, hemos obtenido arriba que la cota superior del rango geométrico será $g + p + k + \sum_{i=1}^k s_i$. De donde obtenemos el enunciado del teorema.

Por otro lado, en la sección anterior hemos visto que el área de la región fundamental F se puede expresar de la forma

$$\mu(F) = 2\pi(\alpha g - 2 + \sum_{i=1}^p (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}))$$

, y por Gauss-Bonnet también podemos escribir el área de la forma

$$\mu(F) = (n - 2)\pi - \sum_{\lambda=1}^{r+k+s+d} \left(\frac{2\pi}{l_\lambda}\right),$$

donde r es el número de ciclos de pares de lados x_i, x'_i conjugados por transformaciones elípticas, k los ciclos de pares e_i, c_{i1} o c_{is_i}, e'_i , s ciclos correspondientes a los pares de lados c_{ij}, c_{ij+1} y finalmente los d ciclos correspondientes al resto de lados. Además, l_λ es el estabilizador correspondiente a alguno de los vértices conjugados correspondientes al ciclo λ , donde los ciclos se ordenan agrupando los tipos de forma que $\lambda = 1, \dots, r$ da $l_\lambda = m_\lambda$, $l_\lambda = 2$ para $\lambda = r + 1, \dots, r + k$, $l_\lambda = 2n_{ij}$ para $\lambda = r + k + 1, \dots, r + k + s$ y los últimos d ciclos corresponden al resto de lados. De aquí escribimos

$$2\pi(\alpha g - 2 + \sum_{i=1}^p (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}})) = (n - 2)\pi - \sum_{\lambda=1}^{r+k+s+d} \left(\frac{2\pi}{l_\lambda}\right)$$

simplificando obtenemos

$$2\alpha g - 4 + 2 \sum_{i=1}^p (1 - \frac{1}{m_i}) + 2k + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}) = n - 2 - \sum_{\lambda=1}^{r+k+s+d} \left(\frac{2}{l_\lambda}\right)$$

y agrupando los términos en los sumatorios

$$2\alpha g - 2 + 2r + 2k + s = n - \sum_{\lambda=r+1}^{r+k} \left(\frac{2}{l_\lambda}\right) - \sum_{\lambda=r+k+s+1}^{r+k+s+d} \left(\frac{2}{l_\lambda}\right)$$

puesto que

$$\sum_{\lambda=r+1}^{r+k} \left(\frac{2}{l_\lambda}\right) + \sum_{\lambda=r+k+s+1}^{r+k+s+d} \left(\frac{2}{l_\lambda}\right) \geq 0$$

obtenemos

$2\alpha g - 2 + 2r + 2k + s \leq n$, es decir la cota inferior del rango geométrico es $\alpha g + p + k + \sum_{i=1}^s s_i$, que al ser igual a la cota superior, nos da el resultado del teorema. \square

Antes de acabar esta sección presento una breve nota acerca de la relación entre el rango algebraico y el rango geométrico de un grupo NEC. En particular, Kauffmann-Zieschang demuestran en [16] que los rangos geométricos y algebraicos, si bien coinciden en algunos casos concretos por ejemplo para grupos NEC sin reflexiones, difieren en el caso general, donde el rango geométrico es mayor que el algebraico.

3.8. Subgrupos de grupos NEC

Si Γ es un grupo NEC propio, éste tiene un subgrupo fuchsiano distinguido de índice dos que llamaremos grupo fuchsiano canónico Γ^+ y que se define como $\Gamma^+ = \Gamma \cap \Lambda^+$. El primer objetivo de esta sección es obtener la signatura Γ^+ a partir de la signatura NEC del grupo Γ .

Como se ha visto en los teoremas de presentación de grupos NEC en la sección 3.3, los elementos de orden finito de Γ son conjugados a alguno de los siguientes:

- una potencia de algún $x_i, 1 \leq i \leq r$,
- una potencia de algún producto $c_{i,j-1}c_{i,j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s_i$,
- algún $c_{i,j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s_i$.

Los dos primeros casos se corresponden a elementos elípticos y forman, por lo tanto, parte del grupo fuchsiano canónico Γ^+ . Como por otro lado, la signatura de un grupo fuchsiano queda definida por el género de la superficie del cociente compacto asociado al grupo \mathbf{H}/Γ^+ y los periodos de cada una de las clases de conjugación de subgrupos finitos ciclos maximales, y estos últimos corresponden, como se sabe, uno a uno con los ciclos elípticos de la región fundamental asociada a Γ^+ , bastaría con conocer cuantas clases de conjugación de los elementos elípticos están en Γ^+ para poder conocer los periodos de la signatura del grupo fuchsiano asociado a Γ .

Proposición 3.35 (Clases conjugación ciclos elípticos en Γ^+). (a) Sea $x_i \in \Gamma$ un generador elíptico. Entonces los grupos conjugados de $\langle x_i \rangle$ en Γ tienen exactamente dos clases de conjugación en Γ^+ . (b) Cualquier grupo conjugado a $\langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle$ en Γ es conjugado a $\langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle$ en Γ^+ .

Demostración. (a) Sea $g \in \Gamma - \Gamma^+$ y supongamos que $\langle x_i \rangle$ y $gx_i g^{-1}$ son conjugados en Γ^+ . Entonces, existiría un $h \in \Gamma^+$ tal que

$$\langle x_i \rangle = \langle hgx_i g^{-1}h^{-1} \rangle = \langle kx_i k^{-1} \rangle,$$

con $k = hg \in \Gamma - \Gamma^+$. El grupo $\langle x_i \rangle$ es el estabilizador de un único punto $p \in \mathbf{H}$, de forma que deducimos $p = x_i p = kx_i k^{-1} p$, es decir $k^{-1} p = x_i k^{-1} p \Rightarrow k^{-1} p = p$. Esto significa que k pertenece al conjunto de estabilizadores de p lo cual implica que $k \in \langle x_i \rangle$. Lo cual es imposible puesto que $k \in \Gamma - \Gamma^+$ mientras que $x_i \in \Gamma^+$. (a) Sea $g \in \Gamma - \Gamma^+$ entonces

$$C = \langle g \langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle g^{-1} \rangle = \langle g \langle c_{i,j}c_{i,j-1} \rangle g^{-1} \rangle,$$

esto último es cierto puesto que $(c_{i,j}c_{i,j-1})^m = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j-1}}(c_{i,j}c_{i,j-1})^m = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j-1}-m}$, donde $(c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j-1}} = 1$ por hipótesis y $m < p$, ya que en caso contrario podemos simplificar y tomar módulo p . Finalmente,

$$C = \langle g \langle c_{i,j}c_{i,j-1} \rangle g^{-1} \rangle = \langle g \langle c_{i,j}c_{i,j-1}c_{i,j}c_{i,j} \rangle g^{-1} \rangle = \langle gc_{i,j} \rangle \langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle \langle gc_{i,j} \rangle^{-1},$$

de donde deducimos que C es conjugado a $\langle c_{i,j-1}c_{i,j} \rangle$ mediante un elemento $gc_{i,j} \in \Gamma^+$. \square

Ya estamos en condiciones de demostrar el primer resultado básico de esta sección:

Teorema 3.36 (Signatura del grupo fuchsiano canónico). (a) Si Γ tiene signatura

$(g, +, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$, entonces Γ^+ tiene signatura $(2g + k - 1; m_1, m_1, \dots, m_r, m_r, n_{11}, \dots, n_{ks_k})$.

(b) Si Γ tiene signatura $(g, -, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$, entonces Γ^+ tiene signatura $(g + k - 1; m_1, m_1, \dots, m_r, m_r, n_{11}, \dots, n_{ks_k})$.

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que los grupos conjugados a cada $\langle x_i \rangle$ en Γ , tienen dos clases de conjugación en Γ^+ , de forma que tendremos periodos asociados a estas clases de conjugación de la forma $m_1, m_1, \dots, m_r, m_r$, donde ahora repetimos los periodos simples del grupo NEC dos veces. Así mismo, las clases de conjugación asociadas a $\langle c_{i,j-1} c_{i,j} \rangle$ aportarán un periodo cada una, de forma que los periodos del grupo fuchsiano canónico son

$(m_1, m_1, \dots, m_r, m_r, n_{11}, \dots, n_{ks_k})$.

Para terminar, tenemos que calcular el género de la superficie \mathbf{H}/Γ^+ que nos permitirá escribir la signatura del grupo fuchsiano canónico. Como, por el teorema de la fórmula de Riemann-Hurwitz, la superficie de la región fundamental del grupo fuchsiano canónico $\mu(F^+)$ es el doble de la del grupo NEC propio μ_F , tendremos que:

$$\mu(F^+) = 2\pi(2g' - 2 + \sum_{i=1}^{r+d} (1 - \frac{1}{l_i})) = 2\mu_F$$

$$= \mu(F) = 4\pi(\alpha g - 2 + \sum_{i=1}^p (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}),$$

donde l_i es el periodo i -ésimo del grupo fuchsiano canónico y $d = s_1 + \dots + s_k$. Simplificando,

$$2g' - 2 + \sum_{i=1}^{r+d} (1 - \frac{1}{l_i}) = 2\alpha g - 4 + \sum_{i=1}^p (1 - \frac{1}{m_i}) + 2k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=s_i}^r (1 - \frac{1}{n_{ij}})$$

$$\Rightarrow 2g' - 2 = 2\alpha g - 4 + 2k \Rightarrow g' = \alpha g - 2 + k.$$

De aquí deducimos que las signaturas del grupo fuchsiano canónico son

$(\alpha g + k - 1; m_1, m_1, \dots, m_r, m_r, n_{11}, \dots, n_{ks_k})$

donde $\alpha = 2$ si el grupo NEC es orientable y 1 en caso contrario. \square

Como es bien conocido, un subgrupo de índice dos de un grupo dado es un subgrupo normal, de forma que el estudio del grupo fuchsiano canónico puede verse como un caso particular del estudio más general del cálculo de la estructura de los subgrupos normales de un grupo NEC dado. A este tema dedicamos esta última parte de la sección, en particular, vamos a estudiar la forma de la signatura de un subgrupo de índice N , primo distinto de dos, de un grupo NEC. Más detalles sobre los subgrupos normales de los grupos NEC y sus signaturas pueden verse en [5] y [6]. Antes de presentar los resultados acerca de las signaturas de los subgrupos normales, introducimos el concepto de sistema elíptico completo:

Definición 3.37. Sea Γ un grupo NEC y sea $\{x_1, \dots, x_r\}$ un conjunto de elementos elípticos de Γ , ninguno de los cuales es el producto de dos reflexiones en Γ . Decimos que este conjunto es un sistema elíptico completo s.e.c. si se cumple:

(i) Cada elemento elíptico de Γ que no sea producto de dos reflexiones de Γ es conjugado en Γ a

una potencia de $x_i, 1 \leq i \leq r$.

(ii) Cada potencia no trivial de x_i no es conjugada a ninguna potencia de $x_j (i \neq j)$.

Tenemos que los s.e.c. tienen las siguientes propiedades:

Proposición 3.38 (Propiedades de las s.e.c.). *Si Γ es un grupo NEC y A, B son dos s.e.c., entonces tienen el mismo número de elementos y los mismos periodos. Además, los generadores elípticos de Γ forman un s.e.c.*

Demostración. En primer lugar, sean $A = \{x_1, \dots, x_r\}$ y $B = \{y_1, \dots, y_s\}$, y supongamos que $r \neq s$, digamos $r < s$. Supongamos así mismo que los x_i, y_j ordenados de tal forma que $x_i = y_i^{l_i}$. Sea ahora z un elemento elíptico de Γ , entonces, por definición, tendremos que $z = y_s^{n_z}$, además tendremos $z = x_r^{m_z} = y_r^{l_r m_z}$, luego se verificará $y_r^{l_r m_z} = y_s^{n_z}$, lo cual es absurdo pues hemos supuesto que $r \neq s$. En otras palabras, se tiene que verificar que $r = s$. Por otro lado, como x_i, y_i son elípticas, tenemos que existen m_i, n_i tales que $1 = x_i^{m_i} = y_i^{n_i}$. Supongamos que $n_i < m_i$ y sean $z = x_i^{n_i+1}$ y $x_i = y_i^{l_i}$, entonces, $z = x_i^{n_i+1} = y_i^{l_i(n_i+1)} = y_i^{l_i} = x_i$, lo cual es absurdo, luego se tiene que verificar que $n_i = m_i$. De esta forma, los periodos de los x_i y los y_i de los s.e.c. son los mismos.

Por otro lado, si los generadores elípticos de un grupo NEC no fuesen un s.e.c. tendríamos que, o bien no verifican (i), o bien (ii). Si no se verificase (i), existirían transformaciones elípticas que no son producto de reflexiones, que no estarían representados por ninguna potencia de los generadores elípticos, lo cual es absurdo. Si no se verificase (ii), tendríamos que para alguna transformación elíptica digamos x_i , existiría un x_j , también elíptica, tal que $x_i = x_j^m$, lo que implicaría que podríamos definir una nueva signatura de Γ con un generador elíptico menos que la inicial, lo que es imposible por que la nueva signatura no sería isomorfa. Por lo tanto, los generadores elípticos forman un s.e.c. □

Por lo tanto, conocidos los órdenes de los elementos de un s.e.c., serán conocidos los periodos propios de la signatura de Γ .

A continuación, en las tres próximas proposiciones vamos a presentar tres resultados parciales acerca de la signatura de un subgrupo normal de índice N impar no necesariamente primo de un grupo NEC Γ , a saber, resultados acerca de los periodos propios, periodos cíclicos y el signo de la signatura, respectivamente. La sección finaliza con un teorema que nos da la signatura de un subgrupo normal de índice N primo de un grupo NEC Γ dado, a partir de su signatura.

Proposición 3.39 (Periodo de subgrupo normal). *Sea Γ un grupo NEC de signatura*

$$(g, \pm, [m_1, \dots, m_r] \{ (n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k}) \})$$

y supongamos que Γ_0 es un subgrupo normal de Γ tal que $[\Gamma : \Gamma_0] = N$, con N impar. Entonces, si suponemos que p_i es el exponente de x_i módulo $\Gamma_0, 1 \leq i \leq r$, entonces, los periodos propios de Γ_0

son

$$\left[\left(\frac{m_i}{p_i} \right)_{i=1, \dots, r, p_i \neq m_i}^{N/p_i} \right].$$

Demostración. Como Γ_0 es un subgrupo normal de Γ de índice impar, si c_{ij} es una reflexión de Γ , entonces c_{ij} pertenece a Γ_0 , pues en caso contrario $c_{ij}\Gamma_0$ sería un elemento de orden 2 en un subgrupo de orden impar. Dado el conjunto de todos los elementos conjugados de $x_i^{p_i}$ con $p_i \neq m_i$, tenemos que estudiar cuantas clases diferentes de elementos de la forma $Sx_i^{p_i}S^{-1}, S \in \Gamma$ no son conjugados por elementos de Γ_0 , que serían por tanto un conjunto de elementos que verificarían las condiciones de la definición 3.37.

Puesto que Γ_0 es normal en Γ de orden N , tendremos que el cociente Γ/Γ_0 tendrá N elementos que escribiremos $\{\Gamma_0R_1, \dots, \Gamma_0R_N\}$, de forma que habrá un $P \in \Gamma_0$ y un $R_k, 1 \leq k \leq N$, tales que $S = PR_k$. Por lo tanto, $Sx_i^{p_i}S^{-1} = PR_kx_i^{p_i}R_k^{-1}P^{-1}$.

Por lo tanto, hemos reducido el problema a estudiar cuantas clases de elementos de la forma $R_kx_i^{p_i}R_k^{-1}$ no son conjugados por elementos Γ_0 . Por el enunciado, puesto que x_i módulo Γ_0 tiene exponente p_i , tenemos que el elemento Γ_0x_i , que denotamos (Γ_0x_i) , de Γ/Γ_0 es un grupo cíclico de orden p_i , de donde tenemos

$$\Gamma_0R_k = \Gamma_0S_{ij}x_i^q,$$

donde $S_{ij}\Gamma_0, 1 \leq j \leq N/p_i$ es un conjunto de representantes de las clases $\frac{\Gamma/\Gamma_0}{(\Gamma_0x_i)}$. Por lo tanto,

$$R_kx_i^{p_i}R_k^{-1} = \gamma S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}\gamma^{-1}, \gamma \in \Gamma_0,$$

que nos permite reducir el problema de nuevo a encontrar cuantos elementos de la forma $S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}$ no son conjugados por elementos de Γ_0 .

En primer lugar, si dos elementos $S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}$ y $S_{ih}x_i^{p_i}S_{ih}^{-1}$ son conjugados por un elemento $T \in \Gamma_0$, entonces se verificará

$$S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1} = TS_{ih}x_i^{p_i}S_{ih}^{-1}T^{-1},$$

de donde deducimos que

$$x_i^{p_i} = S_{ij}^{-1}TS_{ih}x_i^{p_i}S_{ih}^{-1}T^{-1}S_{ij},$$

llamando $M = S_{ij}^{-1}TS_{ih}$, vemos que M conmuta con $x_i^{p_i}$, luego demos asegurar que $x_i^{p_i}$ y M fijan el mismo punto y M es elíptica. De donde deducimos que M tiene que ser una potencia de algún x_i , puesto que en caso contrario dos transformaciones elípticas distintas $M = x_j^q$ y x_i con $i \neq j$ deberían ser conjugadas, lo cual es imposible por ser los generadores elípticos de Γ un s.e.c. Por lo tanto, supongamos que $M = x_i^{q_i}$, entonces $M = x_i^{q_i} = S_{ij}^{-1}TS_{ih} \Rightarrow S_{ij}x_i^{q_i} = TS_{ih}$ que se verifica sólo si $S_{ij} = S_{ih}$, ya que en caso contrario, los representantes de las clases distintas j y h de $\frac{\Gamma/\Gamma_0}{(\Gamma_0x_i)}$ se podrían relacionar con una $T \in \Gamma_0$, lo que implicaría que pertenecerían a la misma clase.

Además, por las condiciones del enunciado, vemos que el orden de $S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}$ en Γ_0 tiene el mismo orden que $x_i^{p_i}$, es decir, m_i/p_i .

Repitiendo la misma discusión para todos los elementos elípticos x_i , con $p_i \neq m_i$ y consideremos el conjunto $E = \{S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1} : i = 1, \dots, \tau, p_i \neq m_i, 1 \leq j \leq N/p_i\}$.

Ahora probamos que E es un s.e.c. para Γ_0 . En efecto, como Γ_0 es normal, si $u \in E$ tenemos que $u \in \Gamma_0$. Comprobemos que se verifican las dos condiciones de la definición 3.37 :

(i) Si $x \in \Gamma_0$ es un elemento elíptico que no es producto de dos reflexiones de Γ_0 , será también un elemento elíptico de Γ_0 de forma que hay un $t \in \Gamma$ y un $x_i \in \Gamma$ tal que $x = tx_i^{q_i}t^{-1}$, que es conjugado

en Γ_0 a un elemento de la familia E . De esta forma, E verifica la primera condición.

(ii) Si tomamos dos elementos de la forma $S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}$ y $S_{kl}x_k^{p_k}S_{kl}^{-1}$, tenemos que si hubiera un $t \in \Gamma_0$ para los cuales

$$(S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1})^q = t(S_{kl}x_k^{p_k}S_{kl}^{-1})^p t^{-1},$$

tendríamos

$$(S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1})^q = t(S_{kl}x_k^{p_k}S_{kl}^{-1})^p t^{-1},$$

es decir,

$$x_i^{p_i q} = S_{ij}^{-1} t S_{kl} x_k^{p_k p} S_{kl}^{-1} t^{-1} S_{ij},$$

lo que significaría que $x_i^{p_i q}$ sería conjugado a una potencia de x_k , lo cual es imposible puesto que los x_i son un s.e.c. de Γ .

Además, si los dos elementos $S_{ij}x_i^{p_i}S_{ij}^{-1}$ y $S_{kl}x_k^{p_k}S_{kl}^{-1}$ fuesen conjugados para algún $T \in \Gamma_0$, tendríamos, como hemos visto arriba, que $S_{ij} = S_{ih}$. Por lo tanto, el conjunto E tiene que ser un s.e.c. del grupo Γ_0 .

Finalmente, puesto que para cada x_i con $p_i \neq m_i$, tenemos $1 \leq j \leq N/p_i$ elementos en E tales que el orden de cada uno es m_i/p_i , los periodos propios de Γ_0 serán

$$[(\frac{m_i}{p_i})_{i=1, \dots, \tau}], p_i \neq m_i. \quad \square$$

Proposición 3.40 (Ciclos de subgrupo normal). *Sea Γ un grupo NEC de signatura*

$$(g, \pm, [m_1, \dots, m_r][(n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})])$$

y supongamos que Γ_0 es un subgrupo normal de Γ tal que $[\Gamma : \Gamma_0] = N$, con N impar. Entonces, si suponemos que k_i es el menor número natural para el que se verifica $e_i^{k_i} \in \Gamma_0$, los ciclos de periodos de Γ_0 son

$$(n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{k_i \text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})^{N/k_i}, i = 1, \dots, k.$$

Demostración. Vamos a obtener los ciclos del subgrupo normal Γ_0 a partir de las propiedades de su región fundamental, región que obtendremos a partir de la región fundamental del grupo principal Γ .

Sea F la región fundamental de Γ , que para los efectos de esta demostración representaremos con el símbolo $\varepsilon_i \gamma_{i0} \dots \gamma_{is_i} \varepsilon_i' A$, donde A denota el resto de caras del polígono F . Además, c_{ij} es el elemento de Γ que fija el lado γ_{ij} , N_{ij} es el vértice común a los lados $\gamma_{i,j-1}, \gamma_{ij}$ y e_i es el elemento de Γ que transforma ε_i' en ε_i .

Como, por hipótesis, para $e_i \in \Gamma$, k_i es el menor número entero tal que $e_i^{k_i} \in \Gamma_0$, entonces el cociente Γ/Γ_0 contendrá N clases, de las cuales las k_i primeras pueden ser representadas por las clases $\{\Gamma_0, e_i \Gamma_0, \dots, e_i^{k_i-1} \Gamma_0\}$ y tendremos N/k_i elementos de Γ que denotaremos por $\beta_2, \dots, \beta_{N/k_i}$, tales que

$$\Gamma/\Gamma_0 = \{\Gamma_0, e_i \Gamma_0, \dots, e_i^{k_i-1} \Gamma_0, \beta_2 \Gamma_0, \dots, \beta_2 e_i^{k_i-1} \Gamma_0, \dots, \beta_{N/k_i} e_i^{k_i-1} \Gamma_0\}.$$

A partir de esta representación de las clases del cociente de Γ/Γ_0 , obtenemos una representación del polígono fundamental de Γ_0 de la forma

$$F' = F \cup \dots \cup e_i^{k_i-1} F \cup \beta_2 F \cup \dots \cup \beta_2 e_i^{k_i-1} F \cup \dots \cup \beta_{N/k_i} e_i^{k_i-1} F. \text{ En efecto, sea } z \in \mathbf{H}, \text{ como } F \text{ es una}$$

región fundamental de Γ , existirá un $w \in F$ tal que $z = T(w), T \in \Gamma$. Pero por la descomposición vista arriba de clases del cociente Γ/Γ_0 , tendremos alguna clase $T_{kl} = \beta_k e_i^{p_l}, k = 1, \dots, N/k_i, \beta_1 = 1$ con $T = \gamma T_{kl}, \gamma \in \Gamma_0$. Por lo tanto, $z = \gamma T_{kl}(w) = \gamma(T_{kl}(w))$.

Como $T_{kl}(w) \in F'$, z estará en la Γ_0 -órbita de algún punto de F' , por lo que la unión de Γ_0 -imágenes de F' será \mathbf{H} . Por otro lado, supongamos que $z, S(z)$ con $S \in \Gamma_0$ pertenece al interior de F' . Tenemos que demostrar que en ese caso se verifica $S = I$, de forma que el interior de F' contendrá exactamente un único punto de cada Γ_0 -órbita y, teniendo en cuenta lo anterior, podremos asegurar que F' es una región fundamental de Γ_0 . Supongamos que $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $B_\varepsilon(z)$ está contenido en el interior de F' . Entonces, $B_\varepsilon(z)$ tiene intersección no trivial con k imágenes del interior de F , con $1 \leq k \leq n$, imágenes que llamamos $T_{ij_1}(\mathring{F}), \dots, T_{ij_k}(\mathring{F})$. Puesto que $B_\varepsilon(S(z)) = S(B_\varepsilon(z))$ y sea $B_\varepsilon(z)$ con intersección no vacía con $T_{ij}(\mathring{F}), 1 \leq j \leq n$. Entonces, $B_\varepsilon(z)$ tendrá intersección no vacía con $S^{-1}T_{ij}(\mathring{F})$, luego $S^{-1}T_{ij} = T_{ij_l}, 1 \leq l \leq k$. Por lo tanto, $T_{ij}\Gamma_0 = S^{-1}T_{ij}\Gamma_0 = T_{ij_l}$, de forma que $T_j = T_{ij_l}$ y $S = I$, como queríamos demostrar.

Recordemos que al estudiar la forma canónica de los símbolos que representan las regiones fundamentales F de un grupo NEC dado Γ , que como hemos comentado anteriormente determinan la estructura topológica del cociente \mathbf{H}/Γ , los lados de F de la forma $\varepsilon_i \gamma_{i0} \dots \gamma_{is_i} \varepsilon'_i$ están ligados a los agujeros de la superficie \mathbf{H}/Γ , de forma que cada lado de este tipo se identifica con un agujero determinado de esa superficie. Además, esto se verificaba tanto para superficies orientables como no orientables. Vamos a ver a continuación que el equivalente a estos lados en el caso de la región F' asociada el subgrupo normal de índice N , Γ_0 , serán los lados dados por

$$\beta_j e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i), \beta_j e_i^{k_i-1}(\gamma_{i0}), \dots, \beta_j e_i^{k_i-1}(\gamma_{is_i}), \\ \beta_j e_i^{k_i-2}(\varepsilon_i), \dots, \beta_j e_i(\gamma_{is_i}), \beta_j(\gamma_{i0}), \dots, \beta_j(\gamma_{is_i}), \beta_j(\varepsilon'_i),$$

con $j = 1, \dots, N/k_i, \beta_1 = 1$. Para ello vamos a ver que, en efecto, la familia de lados anterior genera, para cada j , un agujero en la superficie F'/Γ_0 . La demostración se va a realizar para β_1 , siendo los restantes casos análogos.

Sea entonces la familia de lados dada por

$$e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i), \dots, \beta_j e_i(\gamma_{i0}), \dots, e_i(\gamma_{is_i}), \gamma_{i0}, \dots, \gamma_{is_i}, \varepsilon'_i,$$

y vamos a estudiar si se verifican las dos condiciones:

- (1) Existe una transformación en Γ_0 que envía la cara ε'_i a $e_i^{k_i-1}(\varepsilon'_i)$, y
- (2) No existen transformaciones en Γ_0 que envíen puntos de los lados $\gamma_{i0}, \gamma_{i0}, \dots, e_i^{k_i-1}(\gamma_{is_i})$ a otro punto de F' .

Consideramos que las caras estudiadas se identifican en el cociente F'/Γ_0 . Observemos que (1) se verifica, pues como se tiene que $e_i^{k_i} \in \Gamma_0$ y $e_i^{k_i}(\varepsilon'_i) = e_i^{k_i-1} e_i(\varepsilon'_i) = e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i)$, entonces existe una transformación en Γ_0 , $e_i^{k_i}$ que envía ε'_i a $e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i)$.

Para que se verifique (2), tenemos que demostrar que no hay ninguna transformación que envíe un punto de los lados dados en si mismo, a otro de esos lados o a otro lado cualquiera de F' , o a un punto cualquiera de F' , es decir, que no se verifica ninguno de los casos:

- (2.1) Existe una $\beta \in \Gamma_0$ que envía un punto $p \in e_i^r(\gamma_{ij})$ a un punto $q \in e_i^r(\gamma_{ij})$: en este caso,

tendríamos que $e_i^{-r}(q) = q' \in \gamma_{ij}$ y $e_i^{-r}(p) = p' \in \gamma_{ij}$, es decir, $e_i^{-r} \beta e_i^r(p') = q'$, pero no existen transformaciones de la forma dada en Γ que nos identifiquen dos puntos en un mismo lado γ_{ij} .

(2.2) Existe una $\beta \in \Gamma_0$ que envía un punto $p \in e_i^r(\gamma_{ij})$ a un punto $q \in e_i^s(\gamma_{ih})$: en este caso, tendríamos que $e_i^{-s}(q) = q' \in \gamma_{ih}$ y $e_i^{-r}(p) = p' \in \gamma_{ij}$, es decir, $e_i^{-s} \beta e_i^r(p') = q'$, pero no existen transformaciones de Γ que envíe un punto del lado γ_{ij} al lado γ_{ih} .

(2.3) Existe una $\beta \in \Gamma_0$ que envía un punto $p \in e_i^r(\gamma_{ij})$ a un punto q de cualquier otro lado de F' que no sea del tipo $\beta_h e_i^s(\gamma_{ij})$: de nuevo tendríamos que debería existir una transformación en Γ que identificaría un punto de γ_{ij} con otro punto de otro lado diferente de F , lo cual es de nuevo imposible.

(2.4) Existe una $\beta \in \Gamma_0$ que envía un punto $p \in e_i^r(\gamma_{ij})$ a un punto q de cualquier otro lado del tipo $\beta_h e_i^s(\gamma_{ij})$: en este caso, tendríamos que

$$e_i^{-r}(p) = p' \in \gamma_{ij}, e_i^{-s} \beta_h^{-1}(q) = q' \in \gamma_{ij}. \text{ Si } p' \neq q',$$

tendríamos de nuevo que existiría una transformación de Γ que enviaría un punto del lado γ_{ij} a otro distinto de γ_{ij} , que es imposible. Por lo tanto será $p' = q'$, es decir

$$e_i^{-s} \beta_h^{-1} \beta e_i^r(p') = p'.$$

Puesto que $p' \in \gamma_{ij}$ es un punto fijo de $e_i^{-s} \beta_h^{-1} \beta e_i^r$, tendremos que esta transformación será o bien un producto de $c_{ij-1} c_{ij}$, un producto de $c_{ij} c_{ij+1}$ o una del tipo c_{ij} , que son elementos de Γ_0 , es decir, $e_i^{-s} \beta_h^{-1} \beta e_i^r \in \Gamma_0$, lo que implica que $\beta_h e_i^s \Gamma_0 = \beta e_i^r \Gamma_0 = e_i^r \Gamma_0$, lo que contradice nuestra definición de clases del cociente Γ/Γ_0 .

De esta forma, hemos demostrado que para cada $j = 1, \dots, N/k_i$, la familia de lados $\beta_j(\varepsilon'_i), \dots, \beta_j e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i)$ es un agujero de la superficie definida por el cociente F'/Γ_0 .

Puesto que cada agujero de esta superficie se corresponde con un ciclo de periodos de valores n_{ij} , asociados a los vértices N_{ij} , comunes a los lados $\gamma_{ij-1}, \gamma_{ij}$, y cuyos estabilizadores son el grupo diedral de orden $2n_{ij}$, tendremos que el ciclo de periodos asociado a los lados

$$e_i^{k_i-1}(\varepsilon_i), \dots, \beta_j e_i(\gamma_i 0), \dots, e_i(\gamma_i s_i), \gamma_i 0, \dots, \gamma_i s_i, \varepsilon'_i,$$

será la mitad del orden de los estabilizadores de los puntos $\beta_j e_i^h(N_{ij}), j = 1, \dots, N/k_i, i = 1, \dots, k$. De esta forma, obtenemos que los ciclos correspondientes a los lados de arriba serán

$$\{(n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{k_i \text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})^{N/k_i}, i = 1, \dots, k\},$$

donde el exponente N/k_i representa el número de puntos para cada i , que son j puntos, indexados por $j = 1, \dots, N/k_i$. \square

Proposición 3.41 (Signo de la signatura de subgrupo normal). *Sea Γ un grupo NEC de signatura $(g, \pm, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$ y supongamos que Γ_0 es un subgrupo normal de Γ tal que $[\Gamma : \Gamma_0] = N$, con N impar. Entonces, las signaturas de Γ y Γ_0 tienen el mismo signo.*

Demostración. En primer lugar, tenemos, de forma análoga a la proposición anterior, que el cociente Γ/Γ_0 queda representado por las clases $\Gamma/\Gamma_0 = \{g_1 \Gamma_0, g_2 \Gamma_0, \dots, g_N \Gamma_0\}$.

Si F es la región fundamental de Γ , $F' = \bigcup_{i=1}^N (g_i F)$ será la región fundamental de Γ_0 . Sean α, β lados congruentes de F' y supongamos que $h \in \Gamma_0$ es la transformación tal que $h(\alpha) = \beta$ y sean $\alpha \in g_i F, \beta \in g_j F, \alpha = g_i \bar{\alpha}, \beta = g_j \bar{\beta}$, con $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ lados de F . Entonces $g_j^{-1} h g_i : \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$.

Si Γ tiene el espacio cociente orientable, las g_i preservarán la orientación y así lo harán las $g_j^{-1} h g_i$ y por lo tanto h . De esta forma, Γ_0 tendrá también cociente orientable. Si Γ tiene el espacio cociente no orientable, podemos suponer que h invierte la orientación. Supongamos que Γ contiene reflexiones, entonces al ser N impar y Γ_0 contendrá, como hemos visto antes, esas reflexiones. Sea $c \in \Gamma_0$ una reflexión y supongamos que $g \in \Gamma$ invierte la operación, entonces cg conservará la orientación y puesto que $g\Gamma_0 = cg\Gamma_0$, por lo que podemos asumir que las g_i conservan la orientación. De esta forma, las $g_j^{-1} h g_i$ invierten la orientación, luego el cociente \mathbf{H}/Γ_0 será no orientable. Finalmente, si Γ tiene cociente no orientable, pero no incluye reflexiones, las transformaciones que invierten la orientación serán anti-traslaciones (glide reflections) y de nuevo como en el caso anterior podemos suponer que las g_i conservan la orientación, y así, las $g_j^{-1} h g_i$ invertirán la orientación, de donde finalmente deducimos que el cociente será no orientable.

Por lo tanto, los signos de los signaturas de Γ y Γ_0 serán iguales. \square

Teorema 3.42 (Signatura de subgrupo normal). *Sea Γ un grupo NEC de signatura*

$(g, +, [m_1, \dots, m_r] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}) \dots (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$,

y sea Γ_0 un subgrupo normal de Γ de índice primo $p \neq 2$. Supongamos que

e_1, \dots, e_t tienen exponentes $> 1 \pmod{\Gamma_0}$,

x_1, \dots, x_d tienen orden p primo,

$x_{d+1}, \dots, x_\alpha, \alpha \geq d$ tienen exponentes $> 1 \pmod{\Gamma_0}$

Entonces, si Γ tiene signatura de signo $+$, la signatura de Γ_0 es

$(gp + \frac{(r+t-2)(p-1)}{2}; +; [\frac{m_{d+1}}{p}, \dots, \frac{m_\alpha}{p}, (m_{\alpha+1})^p \dots (m_r)^p];$

$\{(n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{p\text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=1, \dots, t} (n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=t+1, \dots, k}^p\}$

y si Γ tiene signatura de signo $-$, la signatura de Γ_0 es

$(gp + (r+t-2)(p-1); -; [\frac{m_{d+1}}{p}, \dots, \frac{m_\alpha}{p}, (m_{\alpha+1})^p \dots (m_r)^p];$

$\{(n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{p\text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=1, \dots, t} (n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=t+1, \dots, k}^p\}$.

Demostración. Los valores de los periodos propios, de los periodos de los ciclos y el signo de la signatura quedan definidos por las proposiciones 3,39,3,40 y 3,41. En particular, los periodos propios son

$$\begin{aligned} & [(\frac{m_i}{p_i})^{N/p_i}]_{i=1, \dots, \tau, p_i \neq m_i} \\ & = [\frac{m_{d+1}}{p}, \dots, \frac{m_\alpha}{p}, (m_{\alpha+1})^p, \dots, (m_\tau)^p] \end{aligned}$$

donde para las condiciones del enunciado del teorema tenemos $N = p$, $p_i = p = m_i, i = 1, \dots, d$,

$1 = p_i = p \neq m_i, i = d + 1, \dots, \alpha$ y $p_i = 1 \neq p, i = \alpha + 1, \dots, \tau$.

Los ciclos quedan

$$(n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{k_i\text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})^{N/k_i}, i = 1, \dots, k$$

$$= (n_{i1} \dots n_{is_i} \underbrace{\dots}_{p\text{-veces}} n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=1, \dots, t} (n_{i1} \dots n_{is_i})_{i=t+1, \dots, k}^p,$$

donde para las condiciones del enunciado del teorema tenemos $k_i = p, i = 1, \dots, t$ y $k_i = 1, i = t + 1, \dots, k$.

Sean μ_F y $\mu_{F'}$ las áreas de las regiones fundamentales F y F' de Γ y Γ_0 , respectivamente entonces

$$\mu_F = 2\pi(2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}})),$$

de donde, teniendo en cuenta que $[\Gamma : \Gamma_0] = \mu(F')/\mu(F)$, podemos escribir

$$p\mu_F = p2\pi(2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + k + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}})) = \mu_{F'}.$$

Por otro lado,

$$\mu_{F'} = 2\pi(2g' - 2 + \sum_{i=1}^{\alpha} (1 - \frac{p}{m_i}) + \sum_{i=\alpha+1}^{\tau} (p - \frac{p}{m_i}) + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (p - \frac{p}{n_{ij}}) + p \sum_{i=t+1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (p - \frac{p}{n_{ij}}) + t + (k - t)p),$$

igualando el valor de las áreas calculados de las dos formas, obtenemos

$$2gp - 2p + p \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + pk + p \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n_{ij}}),$$

$$= 2g' - 2 + \sum_{i=1}^{\alpha} (1 - \frac{p}{m_i}) + \sum_{i=\alpha+1}^{\tau} (p - \frac{p}{m_i}) + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (p - \frac{p}{n_{ij}}) + p \sum_{i=t+1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} (p - \frac{p}{n_{ij}}) + t + (k - t)p,$$

es decir,

$$2gp - 2p + kp + p \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) = 2g' - 2 + t + (k - t)p + \sum_{i=1}^{\alpha} (1 - \frac{p}{m_i}) + \sum_{i=\alpha+1}^{\tau} (p - \frac{p}{m_i}),$$

simplificando

$$2gp - 2p + kp + p\tau = 2g' - 2 + t + (k - t)p + \alpha + p(\tau - \alpha)$$

finalmente, se tiene

$$2g' = 2gp - 2p + kp + p\tau + 2 - t - p(k - t) - \alpha - p(\tau - \alpha)$$

$$= 2gp - 2p + 2 - t + pt - \alpha + p\alpha$$

$$= 2gp - 2p + 2 - t + pt - \alpha + p\alpha$$

$$\Rightarrow g' = gp + \frac{(p-1)(\alpha+t-2)}{2}.$$

Si el signo de la signatura es $-$, los coeficientes de g en nuestro cálculo serán 1 en vez de 2, con el resto del cálculo idéntico, luego

$$gp - 2p + kp + p\tau = g' - 2 + t + (k - t)p + \alpha + p(\tau - \alpha)$$

$$gp - 2p + kp + p\tau = g' - 2 + t + kp - tp + \alpha + p\tau - p\alpha$$

$$gp - 2p = g' - 2 + t - tp + \alpha - p\alpha$$

$$\Rightarrow g' = gp - 2p + 2 - t + tp - \alpha + p\alpha = gp + (p-1)(\alpha+t-2). \quad \square$$

GRUPOS NEC CON ESPACIO COCIENTE NO COMPACTO

El objetivo de este capítulo es describir las posibles estructuras de los grupos NEC con espacio cociente no compacto. Para ello, estudiaremos sus regiones fundamentales, construiremos las regiones de Dirichlet asociadas a estos grupos y estudiaremos sus propiedades lo que, finalmente, nos permitirá obtener sus estructuras. La bibliografía básica usada para este capítulo incluye las referencias Beardon [2], Jones-Singerman [15], Macbeath-Hoare [19] y Zieschang-Vogt-Coldeway [29].

Este capítulo se divide de la siguiente forma: en la primera sección, estudiamos las peculiaridades de las regiones fundamentales asociadas a grupos NEC de cociente no compacto, entre otros, veremos la relación entre presentación de un grupo y las propiedades de la región fundamental asociada y estudiaremos las propiedades de las regiones de Dirichlet en el caso no compacto. En la segunda sección, enunciamos un teorema de estructura de los grupos NEC no compactos en el caso general. Este teorema, enunciado por primera vez por Macbeath y Hoare [19] en 1976, resuelve desde el punto de vista algebraico la estructura de los grupos NEC no compactos en forma de producto libre de grupos con presentaciones específicas. Sin embargo, la estructura así obtenida, si bien de interés desde el punto de vista de la teoría de grupos, dificulta la comprensión de los aspectos geométricos subyacentes, en particular, la forma de las regiones fundamentales asociadas a los grupos involucrados o las particularidades del espacio cociente asociado. Por ello, en la última sección del capítulo estudiamos la estructura de grupos NEC de cociente no compacto finitamente generados, donde gracias a las propiedades adecuadas que todavía mantiene la región fundamental en este caso, se puede obtener una presentación canónica del grupo similar a la del caso compacto, explicitando la vertiente geométrica del problema.

4.1. Región Fundamental de grupos NEC no compactos

En el segundo capítulo, para el caso de regiones fundamentales de grupos fuchsianos, y en el tercero, para el caso de grupos NEC de cociente compacto, ya hemos señalado que las regiones fundamentales en ambos casos pueden tener formas muy complicadas. Por ello, se buscan construcciones de este tipo de regiones con ciertas características (convexas, localmente finitas, poligonales, etc.) que nos permitan el estudio de sus propiedades. En particular, hemos usado de forma sistemática las construcciones basadas en la región de Dirichlet, que resulta ser un polígono hiperbólico, convexo y localmente finito. Sin embargo, en el caso de cociente no compacto, se presentan complicaciones adicionales como veremos a continuación. En primer lugar, el siguiente resultado establece una relación, esencial a la hora de estudiar la estructura de los grupos NEC de cociente no compacto, entre los generadores de un grupo NEC y la geometría de su región fundamental:

Corolario 4.1 (Grupos NEC finitamente generados). *Si G es un grupo NEC, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) G es finitamente generado.
- (ii) G tiene una región fundamental F que tiene un número finito de vecinos.

Esto es un corolario de la proposición 4.11.2 de [29], proposición que es, obviamente, de mucho mayor alcance. En vez de usar definiciones topológicas basadas en complejos (red plana, estrella, superficies topológicas, etc.) de la proposición, hemos particularizado el resultado a nuestro problema concreto: el semiplano superior y sus grupos de automorfismos (grupos NEC). Este resultado, nos va a permitir distinguir entre dos clases diferentes de grupos NEC: grupos de presentación finita, que estudiaremos en la sección 3 y el caso general, que se estudia en la próxima sección. Como ya vimos en el capítulo 3, una construcción particularmente útil de regiones fundamentales es la de la región de Dirichlet. Recordemos que se denomina región de Dirichlet $D_{z_0}(\Gamma)$ de un grupo NEC Γ al conjunto

$$D_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, z_0) \leq \rho(z, T(z_0)), \forall T \in \Gamma\}.$$

La siguiente proposición nos resume porque la construcción de regiones de Dirichlet es de gran utilidad:

Proposición 4.2 (Propiedades de la región de Dirichlet). *La región de Dirichlet de un grupo NEC $D_{z_0}(\Gamma)$ es cerrada, convexa, localmente finita y verifica que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D_{z_0}) = \mathbf{H}$, propiedad que denominamos Γ -recubrimiento. Además, $D_{z_0}(\Gamma)$ es compacta si y sólo si \mathbf{H}/Γ es compacto.*

Demostración. La demostración de las propiedades de ser cerrada, convexa, localmente finita y de ser un Γ -recubrimiento son idénticas a las dadas en el capítulo 3, en el teorema 3.6 y la proposición 3.8, por lo que no las repetiremos aquí.

Supongamos que \mathbf{H}/Γ es compacto y sea $p : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma$ la aplicación cociente. La familia de abiertos $\{p(W) : \mathbf{H} \supset W\}$, con \overline{W} compacto recubre \mathbf{H}/Γ . Como \mathbf{H}/Γ es compacto, tendremos alguna familia

finita de conjuntos $\overline{W_1}, \overline{W_2}, \dots, \overline{W_n}$ tales que el conjunto compacto $K = \overline{W_1} \cup \overline{W_2} \cup \dots \cup \overline{W_n}$ verificará $p(K) = \mathbf{H}/\Gamma$. En otras palabras, $\Gamma K = \mathbf{H}$.

Sea ahora $M = \max\{\rho(z_0, w) : w \in K\}$, entonces habrá algún punto de cada Γ -órbita en el disco hiperbólico de centro z_0 y radio M . Por lo tanto, la región de Dirichlet $D_{z_0}(\Gamma)$ es un subconjunto cerrado de un disco por lo que será compacto.

Finalmente, si $D_{z_0}(\Gamma)$ es compacto, su imagen mediante la aplicación cociente p , que es continua, será también compacta. \square

Llamamos teselación de Dirichlet a la clase de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\gamma D_{z_0}(\Gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Llamamos vértices de la teselación a los elementos 0-dimensionales de la misma. Análogamente, los lados de la teselación serán sus elementos 1-dimensionales y sus caras sus elementos 2-dimensionales.

La primera cuestión que nos planteamos es bajo que condiciones una región de Dirichlet es no compacta. Ya hemos visto que un grupo fuchsiano es un caso particular de grupo NEC, de forma que los resultados relativos a cocientes no compactos válidos para ellos, también se verificarán ahora como casos particulares. Para el caso fuchsiano tenemos por el teorema 2.20 que si el cociente es compacto, entonces no contiene elementos parabólicos. Esto nos permite hacernos una primera idea de que podemos esperar en el caso no compacto:

1. **Ejemplo 1: Región de Dirichlet con infinitos lados.** En la proposición 3.10 enunciamos que si un grupo NEC tiene cociente compacto, entonces el número de vértices de su región de Dirichlet es finito. De esta forma, un primer ejemplo de región fundamental no compacta viene dado por una región de Dirichlet con infinitos lados.
2. **Ejemplo 2: Vértices en $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.** En este caso, tenemos una región de Dirichlet con un número finito de lados, pero al menos uno de los vértices está, o bien en el eje real, o bien en $\{\infty\}$. Por ejemplo, ya vimos en el teorema 2.20 que si un grupo fuchsiano tiene elementos parabólicos, su región fundamental es no compacta. Además, también vimos en el teorema 2.21 que los puntos en el eje real sólo puede ser fijados por transformaciones parabólicas y que si un vértice v del eje real queda fijado por una transformación parabólica T , los dos lados de la región de Dirichlet que se encuentran en v están emparejados por T . A este vértice le llamamos vértice parabólico. Esta situación queda representada en la figura 4.1, donde hemos representado el vértice parabólico v , los dos lados l, l' de la región de Dirichlet que intersectan en él y la transformación parabólica T que empareja los lados anteriores. Otro caso similar lo tenemos para el grupo modular: en este caso, los lados 'coincidentes' en ∞ se corresponden a los z tales que $\{|z| \geq 1, \operatorname{Re}(z) = 1/2\}$, estos lados quedan emparejados por la transformación parabólica $T(z) = z + 1$, que fija ∞ , como se puede ver en la figura 4.2. En estos casos, por cada vértice parabólico al espacio cociente le faltará un punto, por ejemplo, en el caso anterior del grupo modular, tendremos que el espacio cociente será

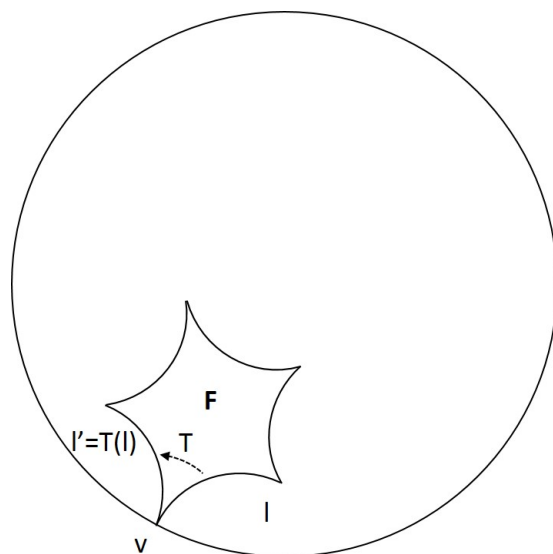


FIGURA 4.1. Vértice parabólico en una región de Dirichlet no compacta

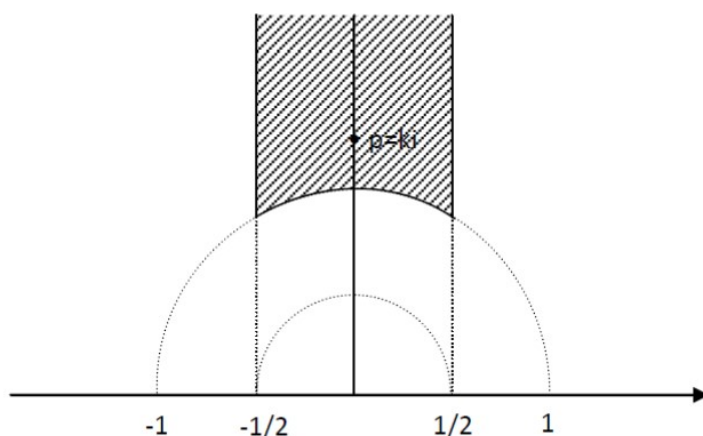


FIGURA 4.2. Región de Dirichlet del grupo modular

una esfera menos un punto correspondiente al vértice parabólico en ∞ , por lo que será homeomorfo al plano.

3. **Ejemplo 3: Lados en el eje \mathbf{R}** Por último, podemos tener lados de la región de Dirichlet en el eje real. Por ejemplo, la región de Dirichlet del grupo generado por $z \mapsto z + 1$ centrada en $p = 1/2 + i$, sería la región $\{z \in \mathbf{H} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$, como hemos dibujado en la figura 4.3. Como podemos observar, esta región fundamental tiene un lado en el eje real $\{x \in \mathbf{R} : -1/2 \leq x \leq 1/2\}$ y, adicionalmente, un vértice en ∞ . El espacio cociente será ahora una esfera menos un disco (por el lado en \mathbf{R}) y menos un punto (por el vértice en ∞), de forma que será homeomorfo a un cilindro, donde homeomorfismo significa ahora homeomorfismo conforme.

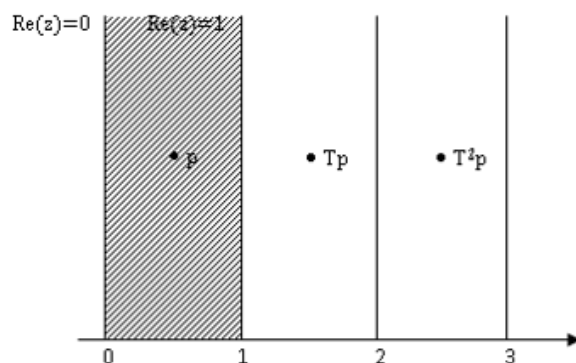


FIGURA 4.3. Región de Dirichlet del $\langle z \mapsto z + 1 \rangle$

Al estudiar los grupos NEC de cociente compacto, hemos visto que la región de Dirichlet asociada era una región compacta poligonal con un número finito de lados. Además, la idea básica en la que nos basábamos para efectuar el estudio de su clasificación y estructura residía en que podíamos describir esta región etiquetando su contorno como una única sucesión finita de lados y vértices, que denominamos ciclos y que esos lados tenían una longitud finita. Es decir, un ciclo es una sucesión de vértices v_i y lados e_i escrita de la forma $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = v_0$ donde el lado e_i está situado en la sucesión entre los vértices que lo limitan v_{i-1} y v_i y tiene una longitud finita. En la figura 4.4 podemos ver un ciclo, los vértices y lados de la región F_1 , y dos secuencias finitas de vértices y lados que no lo son, la frontera de la región F_2 , pues tiene un vértice en \mathbf{R} y por lo tanto los lados coincidentes en el vértice del eje real no tienen longitud finita, y F_3 con un vértice en $\{\infty\}$. Sin embargo, la próxima proposición nos confirma que la estrategia seguida en el caso de

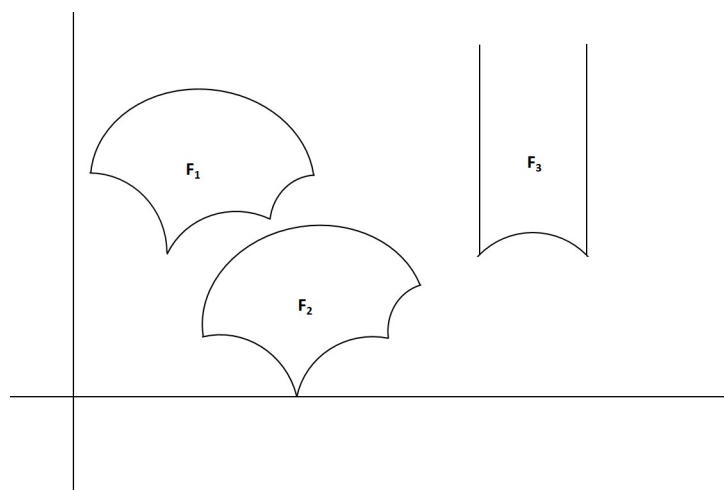


FIGURA 4.4. F_1 tiene contorno cíclico. F_2, F_3 no tienen contorno cíclico

grupos compactos no va a ser posible aplicarla en el caso actual de grupos NEC no compactos:

Proposición 4.3 (Grupos NEC no compactos no tiene ciclos). *Si \mathbf{H}/Γ es no compacto, entonces la región de Dirichlet asociada a Γ no contiene ciclos.*

Demostración. Consideremos \mathbf{H} como un subconjunto de la esfera de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ y sean F y \overline{F} la región de Dirichlet Γ y su cerradura, respectivamente. Por la proposición 4.2, F no es compacto, luego no puede ser un subconjunto cerrado en la esfera de Riemann, de forma que su cerradura debe incluir algún punto que no esté en F . Sin embargo, F es relativamente cerrado en \mathbf{H} por definición, por lo que los puntos de $\overline{F} - F$ deben de pertenecer a $\overline{\mathbf{H}} - \mathbf{H}$, es decir, pertenecerán a $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Sabemos de los preliminares que el grupo de isometrías del plano hiperbólico actúa transitivamente en $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, por lo tanto, podemos asumir que el punto en el infinito pertenece a $\overline{F} - F$.

La intersección de una línea hiperbólica $x = x_0$ con F será o vacía, o una semilínea que incluirá a la semilínea $y \geq y_0$, o bien la línea completa. Además, si v es un vértice, cualquier línea hiperbólica que pase por v tendrá una intersección con F de forma que el vértice será su punto final. Adicionalmente, se verifica que:

$$(4.1) \quad \text{Si } x_0 + iy_0 \in F \Rightarrow x_0 + iy \in F \forall y > y_0,$$

puesto que en caso contrario, existiría un $y_1 > y_0$ de forma que $x_0 + iy_1$ no estaría en F . En este caso, tendríamos que existiría una línea hiperbólica (semicírculo ortogonal a \mathbf{R}) que separaría $x_0 + iy_1$ de F , de forma que el interior incluiría F y cuyo exterior definiría un entorno de ∞ disjunto de F , lo que contradice nuestra suposición $\infty \in \overline{F}$, ver figura 4.5. De esta forma, deducimos que

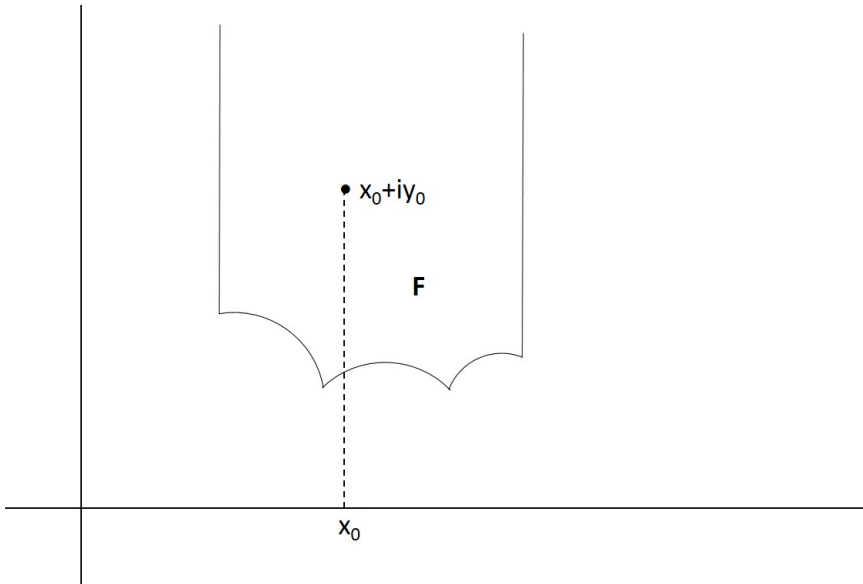


FIGURA 4.5. Gráfico para demostración de 4.1

cada línea hiperbólica de la forma $x = x_0$ contiene a lo sumo un sólo vértice v de F y, si ese vértice

existe, tendremos que será $v = x_0 + iy_0$ con $y_0 = \min\{y : x_0 + iy \in F\}$.

Al definir un ciclo, hemos visto que cada lado es un intervalo finito de línea con dos vértices. Sean $v = x_0 + iy_0$ y $v' = x_1 + iy_1$, dos de esos vértices. Por la ecuación 4.1, no podrá ser $x_0 = x_1$ y llamamos vértice izquierdo de un lado al vértice cuya parte real es menor, es decir, si $x_0 < x_1$, entonces v es el vértice izquierdo del lado de puntos finales v y v' . Si e_i, e_j son dos lados distintos y v fuese un vértice izquierdo de ambos, entonces podríamos escoger un ϵ suficientemente pequeño de forma que la línea $x = x_0 + \epsilon$ cortaría a las líneas e_i y e_j en dos puntos distintos $x_0 + \epsilon + iy_2$ y $x_0 + \epsilon + iy_3$ con, digamos, $y_2 < y_3$. En ese caso, de nuevo por 4.1, el punto $x_0 + \epsilon + iy_3$ pertenecería al interior de F , lo que es una contradicción ya que hemos supuesto que pertenecía a un lado.

Finalmente, supongamos que tenemos un conjunto finito de vértices v_0, v_1, \dots, v_n , numerados de tal forma que v_0 es el de menor parte real. Como acabamos de ver, v_0 sólo puede ser unido por un lado con a los sumo uno sólo de los otros vértices, por lo que no podemos llegar a formar un ciclo. \square

Para terminar la discusión acerca de los ciclos, un breve comentario relativo a los vértices parabólicos y a la relación entre la proposición 4.3 y el teorema 2.20. Aunque no se haya usado explícitamente en la demostración de 4.3, el punto en el infinito que nos permite demostrar la ecuación 4.1 y, a partir de ésta la proposición, es un vértice parabólico, de forma que, intuitivamente, podemos ver que ambos resultados son equivalentes. Sin embargo, la proposición 4.3 en términos de ciclos es más conveniente para el resto del capítulo.

El próximo paso consiste en definir el conjunto de distancia mínima de un punto $z_0 \in \mathbf{H}$, lo que nos va a permitir estudiar las propiedades de las regiones de Dirichlet en el caso no compacto.

Definición 4.4 (Conjunto de distancia mínima). Sea $z_0 \in \mathbf{H}$ no fijo por ninguna $\gamma \in \Gamma$ y sea $m(z) = \min\{\rho(z, \gamma z_0) : \gamma \in \Gamma\}$. Puesto que sólo hay un número finito de puntos en la órbita Γz_0 a una distancia (hiperbólica) menor o igual a R de un punto z , alguna(s) $\gamma \in \Gamma$ verificará(n) esa distancia mínima. Definimos entonces el conjunto de distancia mínima como $K(z) = \{\gamma \in \Gamma : \rho(z, \gamma z_0) = m(z)\}$.

El conjunto $K(z)$ nos da un criterio para saber si z es un punto interior a una cara, de un lado o un vértice. Antes necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 4.5 (Conjuntos interiores de distancia mínima). *Para cada $z \in \mathbf{H}$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $\rho(z, w) < \epsilon$, entonces $K(w) \subset K(z)$. Adicionalmente, si $\gamma \in \Gamma$ se verifica:*

- (i) $m(\gamma z) = m(z)$,
- (ii) $K(\gamma z) = \gamma K(z)$.

Demostración. Análogamente a la definición de distancia mínima $m(z)$, podemos definir la segunda distancia mínima como $m_1(z) = \{\rho(z, \gamma z_0) : \gamma \in \Gamma - K(z)\}$, que de nuevo por el mismo argumento que en el caso de $m(z)$ está bien definida. De esta forma, se tiene que $m_1(z) > m(z)$, digamos $m_1(z) = m + 2\epsilon, > 0$.

Supongamos ahora que $\rho(z, w) < \epsilon, \gamma \in K(z), \delta \in \Gamma - K(z)$, entonces

$$\rho(w, \gamma z_0) \leq \rho(w, z) + \rho(z, \gamma z_0) < m(z) + \epsilon,$$

$$\rho(w, \delta z_0) \geq \rho(z, \delta z_0) - \rho(z, w) > m_1(z) - \epsilon = m(z) + \epsilon,$$

por lo tanto, $\rho(w, \gamma z_0) \leq \rho(w, \delta z_0)$ y el mínimo $m(w)$ sólo puede ocurrir para $\gamma \in K(z)$.

Por otro lado, cómo la métrica hiperbólica es invariante por transformaciones de Γ , tenemos que $m(\gamma z) = \min\{\rho(\gamma z, \delta z_0) : \delta \in \Gamma\} = \min\{\rho(z, \gamma^{-1}\delta z_0) : \delta \in \Gamma\} = \min\{\rho(z, \delta' z_0) : \delta' \in \Gamma\} = m(z)$.

Por último, si $\theta \in K(\gamma z), \gamma \in \Gamma$, entonces $m(\gamma z) = \rho(\gamma z, \theta z_0) = \rho(z, \gamma^{-1}\theta z_0) = m(z)$, es decir, $\gamma^{-1}\theta \in K(z)$, de forma que $\theta \in \gamma K(z)$. Análogamente, si $\theta \in \gamma K(z), \gamma \in \Gamma$, se tiene que $\gamma^{-1}\theta \in K(z)$, luego $m(z) = \rho(z, \gamma^{-1}\theta z_0) = \rho(\gamma z, \theta z_0) = m(\gamma z)$, lo que implica que $\theta \in K(\gamma z)$, como queríamos demostrar. \square

Pasamos a clasificar los puntos de las caras de una teselación usando los conjuntos $K(z)$:

Proposición 4.6 (Clasificación de los puntos de una cara). *Un punto z es interior a una región de Dirichlet si y sólo si el número de elementos de $K(z)$ es 1. Un punto z es un punto interior de un lado de la región de Dirichlet si y sólo si el número de elementos de $K(z)$ es 2. Un punto z es un vértice de la región de Dirichlet si y sólo si el número de elementos de $K(z)$ es 3 o más.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $K(z) = \{\gamma\}$. Por la proposición 4.5 habrá un entorno V de z tal que si $w \in V$ entonces $K(w) \subset K(z) = \{\gamma\}$, ya que si se tuviese $K(w) = \emptyset$ se tendría que $0 = m(w) < m(z)$, lo cual es imposible por ser $m(z)$ la distancia mínima.

Por otro lado, si $D(\Gamma, z_0)$ es la región de Dirichlet de Γ centrada en z_0 , tenemos que si $z \in D(\Gamma, z_0)$ entonces $\rho(z, z_0) \leq \rho(z, \gamma z_0), \gamma \neq 1, \gamma \in \Gamma$, por la definición de región de Dirichlet, es decir, $1 \in K(z)$. Además, si $1 \in K(z)$, tenemos que $\rho(z, z_0) = m(z)$, en otras palabras, $z \in D(\Gamma, z_0) \Leftrightarrow 1 \in K(z)$. De esta forma, si $\gamma^{-1}z \in D(\Gamma, z_0)$, entonces $1 \in K(\gamma^{-1}z) = \gamma^{-1}K(z)$, es decir, $z \in \gamma D(\Gamma, z_0) \Leftrightarrow \gamma \in K(z)$. Finalmente, esto significa que para todo $w \in U$ se verifica $\gamma \in K(w)$, luego $w \in \gamma D(\Gamma, z_0)$, es decir, z tiene un entorno $U \subset \gamma D(\Gamma, z_0)$ luego es un punto interior a la cara $\gamma D(\Gamma, z_0)$ de la teselación.

Supongamos ahora que $K(z) = \{\gamma, \delta\}$, entonces $m(z) = \rho(z, \gamma z_0) = \rho(z, \delta z_0)$. Por lo anterior, $\gamma \in K(z) \Leftrightarrow z \in \gamma D(\Gamma, z_0)$ y $\delta \in K(z) \Leftrightarrow z \in \delta D(\Gamma, z_0)$, por lo tanto, $z \in \gamma D(\Gamma, z_0) \cap \delta D(\Gamma, z_0)$. Si llamamos $L_{\gamma\delta}$ a la línea hiperbólica equidistante entre γz_0 y δz_0 , se tiene $z \in \gamma D(\Gamma, z_0) \cap \delta D(\Gamma, z_0) \subset L_{\gamma\delta}$. Por la proposición 4.5, habrá un entorno V de z tal que si $w \in V$, entonces $K(w)$ será alguno de $\{\gamma\}, \{\delta\}, \{\gamma, \delta\}$. $K(w) = \{\gamma\}$ se verifica si y sólo si $\rho(w, \gamma z_0) < \rho(w, \delta z_0)$, $K(w) = \{\delta\}$, si y sólo si $\rho(w, \gamma z_0) > \rho(w, \delta z_0)$ y $K(w) = \{\gamma, \delta\}$ si y sólo si $\rho(w, \gamma z_0) = \rho(w, \delta z_0)$, es decir, si y sólo si $w \in L_{\gamma\delta}$. De esta forma, tendremos puntos w de V interiores a $\gamma D(\Gamma, z_0)$, interiores a $\delta D(\Gamma, z_0)$ e interiores (relativos) a la arista $\gamma D(\Gamma, z_0) \cap \delta D(\Gamma, z_0)$, de donde deducimos que z es interior (relativo) a la arista y no pertenece al interior de ninguna de las caras $\gamma D(\Gamma, z_0), \delta D(\Gamma, z_0)$ a las que pertenece. Finalmente, supongamos que $K(z) \subset \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ distintas. Tenemos que $m(z) = \rho(z, \gamma_1 z_0) = \rho(z, \gamma_2 z_0) = \rho(z, \gamma_3 z_0)$, y podemos identificar z con el centro del único círculo hiperbólico que pasa por los puntos $\gamma_1 z_0, \gamma_2 z_0, \gamma_3 z_0$. Por lo tanto, z es el único elemento de $\gamma_1 D(\Gamma, z_0) \cap \gamma_2 D(\Gamma, z_0) \cap \gamma_3 D(\Gamma, z_0)$, con lo que z debe de ser un vértice.

Queda claro además que cualquier entorno de z va a tener puntos no pertenecientes a la cara $\gamma_1 D(\Gamma, z_0)$ de la teselación, e igualmente pasa con las caras $\gamma_2 D(\Gamma, z_0)$, $\gamma_3 D(\Gamma, z_0)$ y cualquier otra cara $\gamma_3 D(\Gamma, z_0)$, de donde deducimos que z no es interior a ninguna cara.

En la proposición a continuación, demostramos que tampoco pertenece al interior (relativo) de un lado, con lo que la demostración queda terminada. \square

Proposición 4.7 (Caras adyacentes a vértices). *Si z es un vértice de una teselación con la tesela F la región de Dirichlet de un grupo Γ y V es un disco de centro z y radio ϵ definido como en la proposición 4.5, entonces los elementos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ de $K(z)$ se pueden ordenar de forma que $\gamma_1 F \cap V, \gamma_2 F \cap V, \dots, \gamma_k F \cap V$ son sectores adyacentes de V escritos en orden inverso a las agujas del reloj. Además, $\gamma_i F \cap \gamma_j F$ es una arista si $i = j \pm 1$ y es sólo el vértice z si $i \neq j, j \pm 1$, donde los índices se toman módulo k .*

Demostración. Usando el modelo del disco de Poincaré donde las h-líneas son, o bien arcos de circunferencias perpendiculares al círculo $|z| = 1$, o bien segmentos de diámetros, como vimos en el capítulo de preliminares. Además, puesto que el grupo de isometrías del plano hiperbólico es transitivo en \mathbf{H} , podemos asumir que $z = 0$. De esta forma, los puntos de la forma $\gamma_v z_0, \gamma_v \in K(z)$ que son equidistantes a $z = 0$ estarán en un círculo euclidiano de centro O y radio r . Así mismo, asumimos los puntos $\gamma_v z_0 = r e^{i\theta_v}$ ordenados de forma que $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_k \leq 2\pi$. Por lo tanto, el conjunto de puntos $|z| \leq r$ más cercano a uno de los $\gamma_v z_0$ es un sector del disco que llamaremos S_v . En la figura 4.6 se ha representado la situación de la demostración del teorema, en particular el sector S_2 correspondiente a los puntos más cercanos al punto $\gamma_2 z_0$, limitado por la circunferencia y los radios L_{12}, L_{23} .

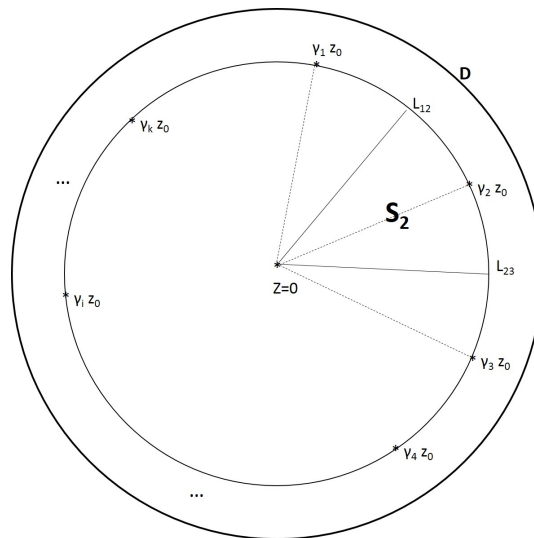


FIGURA 4.6. Ejemplo de sector para la demostración de la proposición 4.7

Sea $w \in V$, entonces tenemos por la proposición 4.5 que $K(w) \subset K(z)$ y de esta forma, el punto

más cercano a w en la órbita de Γz_0 será uno de los puntos $\gamma_1 z_0, \dots, \gamma_k z_0$. Es decir, los puntos de V cuya distancia es minimal al punto $\gamma_v z_0$ verificarán que $\gamma_v F \cap V = S_v \cap V$. Hemos ordenado los sectores S_v de forma contraria a las agujas del reloj, de forma que $S_i \cap S_j$ será bidimensional, unidimensional o cero-dimensional, dependiendo de que $i = j, i = j \pm 1, i \neq j, j \pm 1$, respectivamente. Puesto que S_i, S_j y V son conjuntos convexos, sus interiores (relativos) serán densos y lo mismo será entonces para los conjuntos $S_i \cap S_j \cap V = \gamma_i F \cap \gamma_j F \cap V$, por lo que $\gamma_i F \cap \gamma_j F$ para $i = j \pm 1$ será unidimensional con interior relativo denso, es decir, será un lado de la tesela.

Del enunciado de la proposición, deducimos que los únicos lados de la teselación a los que pertenece z son de la forma $\gamma_v F \cap \gamma_{v+1} F$ y z es un punto extremo de estos lados, de forma que z no pertenece al interior relativo de los lados, lo que completa la demostración de la proposición anterior, 4.6. \square

4.2. Estructura algebraica de grupos NEC no compactos

La estructura algebraica de los grupos NEC de cociente no compacto queda resuelta en el teorema que presentamos a continuación. Como ya hemos comentado, su enunciado y demostración usan esencialmente un enfoque topológico combinatorio dando lugar a una presentación del grupo NEC en forma de producto libre, finito o infinito, de grupos cíclicos y grupos de tres tipos distintos con presentaciones predefinidas.

Junto con el enunciado del teorema, indicamos los conceptos fundamentales usados para su demostración, pero sin entrar en su detalle ya que, por su naturaleza, se puede considerar más un problema de teoría de grupos con enfoque y método que se apartan de los objetivos de esta memoria.

Teorema 4.8 (Teorema de estructura de grupos NEC no compactos). *Un grupo NEC con cociente no compacto es el producto libre de grupos cíclicos por grupos de la forma*

$$(4.2) \quad \langle x_0, x_1, \dots; x_0^2, x_1^2, \dots, (x_1 x_0)^{n_0}, (x_2 x_1)^{n_1}, \dots \rangle,$$

donde $n_i > 1$ y el número de generadores y relaciones es finito o infinito, y por grupos de la forma

$$(4.3) \quad \langle \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots; \dots, x_{-1}^2, x_0^2, x_1^2, \dots, (x_{-1} x_0)^{n_{-1}}, (x_0 x_1)^{n_0}, \dots \rangle,$$

y

$$(4.4) \quad \langle x_1, \dots, x_r, e; x_1^2, \dots, x_r^2, (x_1 x_2)^{n_1}, \dots, (x_{r-1} x_r)^{n_{r-1}}, x_r e x_1 e^{-1} \rangle,$$

donde $r \geq 1$ y $n_i > 1$.

Demostración. En [19] se pueden encontrar todos los detalles de la demostración. Como ya hemos comentado, para el propósito de la memoria vamos a conformarnos con esbozar los conceptos fundamentales usados y la dinámica de la demostración, pero no el detalle.

El punto de partida es la presentación genérica de un grupo NEC dada por la siguiente proposición:

Proposición 4.9 (Presentación de un grupo NEC). *Sea \mathbf{H} el semiplano superior, Γ un grupo NEC y F una región de Dirichlet de Γ . Sea $E = \{\gamma : F \cap \gamma F \neq \emptyset\}$ y sea R el conjunto de E -relaciones $R = \{(\gamma, \delta) : \gamma, \delta \in \Gamma, F \cap \gamma F \cap \gamma \delta F \neq \emptyset\}$. Entonces, (E, R) es una presentación de Γ .*

De la teoría de grupos sabemos que dada una presentación (S, R) de un grupo dado G , si existe una partición de los generadores $S = S_1 \cup S_2$ y de las relaciones $R = R_1 \cup R_2$, con $R_i \subset F(S_i)$, $i = 1, 2$ con $F(S_i)$ el grupo libre definido por el conjunto de generadores S_i , entonces el grupo G se puede descomponer en el producto libre de los grupos $G_i = (S_i, R_i)$.

De esta forma, la demostración del teorema consiste esencialmente en, partiendo de la presentación de la forma de la proposición 4.9, descomponer y simplificar los generadores E y relaciones R hasta obtener una presentación reducida del grupo en forma de factores de un producto libre. Para ellos se siguen dos estrategias básicas:

(i) Simplificamos las presentaciones aplicando transformaciones de Tietze que nos permiten eliminar de la presentación subconjuntos disjuntos de los generadores y relaciones bajo ciertas condiciones.

(ii) Descomponemos los conjuntos de generadores y relaciones en subconjuntos disjuntos atendiendo a la dimensión de los elementos de las teselaciones de la siguiente forma

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2, R = R_0 \cup R_1 \cup R_2,$$

donde E_j es el conjunto de elemento de Γ para los cuales $F \cap \gamma F$ tiene dimensión j y R_j el conjunto de E -relaciones de Γ para los cuales $F \cap \gamma F \cap \gamma \delta F$ tiene dimensión j .

A partir de este planteamiento, se puede observar como, análogamente al caso compacto, las relaciones de vértices y la estructura o diagrama en estrella de un vértice dado adquieren gran relevancia para el proceso de descomposición y simplificación. Sin embargo, en el caso no compacto, las transformaciones que componen los generadores de la presentación reducida y sus relaciones se obtienen al considerar simultáneamente no sólo los diagramas de estrella, pero los diagramas de estrella de todos los vértices pertenecientes a una misma órbita, lo que nos lleva al concepto de tabla de vértices. A continuación, introducimos las definiciones formales de diagrama en estrella de un vértice y de tabla de vértices:

Definición 4.10 (Diagrama en estrella de un vértice). *Sea v un vértice de una región de Dirichlet F de un grupo NEC Γ . Denominamos diagrama de estrella de $v = v_1$ a la sucesión ordenada en el sentido de las agujas del reloj de caras de la teselación de R que comparten v como vértice, que escribiremos de la forma*

$$\gamma_{11}F, \gamma_{12}F, \dots, \gamma_{1n}F \text{ con } \gamma_{11} = 1.$$

De esta forma, $\gamma_{1i}F \cap \gamma_{1j}F$ es un lado si y sólo si $i = j \pm 1$ y en caso $i \neq j$ la intersección será v . En la figura 4.7 vemos el diagrama de estrellas del vértice v .

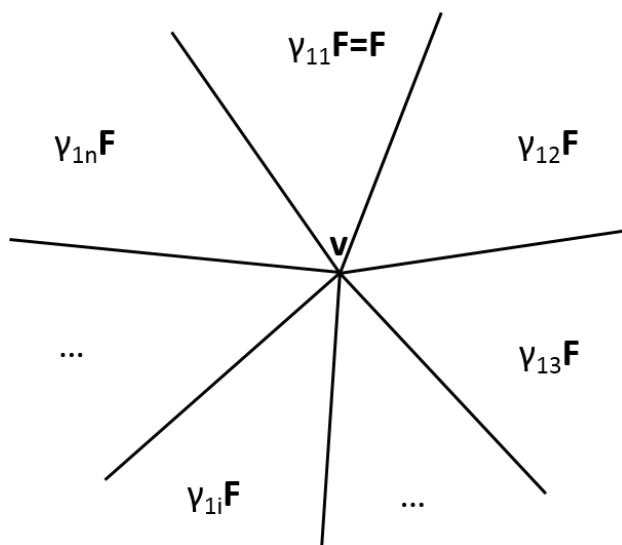


FIGURA 4.7. Estrella del vértice v

Ahora, dado un vértice v de F queremos obtener todos los vértices de F que están en la órbita de v :

Proposición 4.11 (Vértices en la órbita de v). *Sea v un vértice de F y $\gamma_{11}F, \gamma_{12}F, \dots, \gamma_{1n}F$ su diagrama de estrella. Entonces, los vértices de F en la órbita de $v = v_1$ serán*

$$v_2 = \gamma_{12}^{-1}v, v_3 = \gamma_{13}^{-1}v, \dots, v_n = \gamma_{1n}^{-1}v,$$

y para el vértice v_i su diagrama en estrella será

$$\gamma_{i1}F, \gamma_{i2}F, \dots, \gamma_{in}F, \text{ donde } \gamma_{ij} = \gamma_{1i}^{-1}\gamma_{1j}.$$

En el cuadro 4,1 podemos observar el esquema de vértices de F en la órbita del vértice v . De esta forma, los conjuntos de generadores y relaciones de las presentaciones sucesivamente

| | | | | | |
|-------------------------------|---------------------------|-----|---------------------------|-----|---------------------------|
| $v_1 = \gamma_{11}^{-1}v = v$ | $v_2 = \gamma_{21}^{-1}v$ | ... | $v_i = \gamma_{i1}^{-1}v$ | ... | $v_n = \gamma_{n1}^{-1}v$ |
| $\gamma_{11}v_1 = v$ | $\gamma_{21}v_2$ | ... | $\gamma_{i1}v_n$ | ... | $v_n = \gamma_{1n}^{-1}v$ |
| $\gamma_{12}v_1$ | $\gamma_{22}v_2 = v$ | ... | $\gamma_{i2}v_n$ | ... | $v_n = \gamma_{1n}^{-1}v$ |
| \vdots | \vdots | ... | \vdots | ... | |
| $\gamma_{1j}v_1$ | $\gamma_{2j}v_2$ | ... | $\gamma_{ij}v_n$ | ... | $v_n = \gamma_{1n}^{-1}v$ |
| \vdots | \vdots | ... | \vdots | ... | |
| $\gamma_{1n}v_1$ | $\gamma_{2n}v_2$ | ... | $\gamma_{in}v_n$ | ... | $v_n = \gamma_{nn}^{-1}v$ |

Cuadro 4.1: Tabla de vértices de v

simplificadas se toman de ciertos subconjuntos de las transformaciones de la tabla de vértices dando finalmente lugar al producto libre del enunciado. \square

4.3. Estructura de grupos NEC no compactos y finitamente generados

En el corolario 4.1 hemos visto que si la región fundamental asociada a un grupo G de automorfismos de \mathbf{H} tiene un número finito de vecinos, entonces el grupo G es finitamente generado. Los resultados discutidos en esta sección son, por lo tanto, un caso particular del resultado principal de la sección anterior que nos describía la forma general de un grupo NEC no compacto. En lo que sigue vamos a presentar los resultados básicos para este caso basándonos en la referencia de Zieschang [29], donde se pueden encontrar más detalles y referencias complementarias con indicaciones para las demostraciones de los resultados que vamos a presentar en esta sección.

En primer lugar, sea Γ un grupo NEC de cociente \mathbf{H}/Γ no compacto y tal que su región fundamental F tiene un número finito de vecinos. Entonces, existen en \mathbf{H}/Γ n curvas cerradas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ que descomponen la superficie cociente \mathbf{H}/Γ en $n + 1$ superficies conexas S_0, S_1, \dots, S_n donde cada $S_i, 1 \leq i \leq n$ es un cilindro con uno de sus finales la curva cerrada y S_0 es compacto. Además,

$$S_i \cap S_j = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ \gamma_j & \text{si } i = 0, 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que para obtener un región fundamental no compacta es necesario que, o bien tenga infinitos lados, o bien tenga vértices parabólicos, o bien tenga lados en el eje real. En el primer caso, la existencia de infinitos lados va a implicar la existencia de infinitos generadores, luego no entra en el presente apartado. La existencia de vértices parabólicos, por otro lado, implica que al menos una de las superficies componente contendrá la imagen del (de los) vértice(s) parabólico(s), de forma que las superficies S_i que los contienen se pueden representar geoméricamente como un cono con el vértice en el infinito. Por último, la existencia de lados en el eje real, implica que a las correspondientes superficies componentes les faltarán discos cerrados. El teorema a continuación es el equivalente para el caso no compacto pero de presentación finita a los teoremas 3.22 y 3.23 del capítulo 3:

Teorema 4.12 (Teorema de estructura de grupos NEC de cociente no compacto y representación finita). *Un grupo NEC, Γ , de presentación finita, cociente no compacto y orientable tiene como generadores:*

(a) $x_i, i = 1, 2, \dots, p$, transformaciones elípticas,

(b+) $a_j, b_j, j = 1, 2, \dots, q$, transformaciones hiperbólicas,

(c) $e_k, k = 1, 2, \dots, r$ y $r_1 \geq 1$, transformaciones hiperbólicas ($k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3, \dots, r$), parabólicas ($k = 1, \dots, r_1$)

(d) $c_k, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ y $1 \leq r_1$, reflexiones componente compacta

(e) $c_{k,l}, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ y $l = 1, 2, \dots, t_l + 1$, reflexiones componente compacta

(f) $c_{k,l,m}, k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r, l = 1, 2, \dots, u_k + 1, m = 1, \dots, u_{k,l}$, reflexiones componente no compacta

y relaciones:

- (a) $x_i^{h_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p, h_i \geq 2,$
 (b) $c_k^2 = 1, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2,$
 (c) $c_{k,l}^2 = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ y $l = 1, 2, \dots, t_l + 1,$
 (d) $c_{k,l,m}^2 = 1, k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r, l = 1, 2, \dots, u_k, m = 1, \dots, u_{k,l},$
 (e) $(c_{k,l} c_{k,l+1})^{h_{k,l}} = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3, l = 1, 2, \dots, t_l, h_{k,l} \geq 2, t_l \geq 1,$
 (f) $(c_{k,l,m} c_{k,l,m+1})^{h_{k,l,m}} = 1, k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r, l = 1, 2, \dots, u_k, m = 1, \dots, u_{k,l} - 1, h_{k,l} \geq 1, t_l \geq 1,$
 (g) $c_k e_k c_k e_k^{-1} = 1, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2,$
 (h) $c_{k,1} e_k c_{k,t_l+1} e_k^{-1} = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3,$
 (i) $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{k=1}^r e_k \prod_{j=1}^q (a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}) = 1.$

Para el caso de cociente no compacto, no orientable y finitamente generado se intercambian los generadores de (b) y la relación (i) por las (b') e (i'), respectivamente:

Generador: (b') $v_j, j = 1, 2, \dots, q,$ reflexiones con deslizamiento,

Relación: (i') $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{k=1}^r e_k \prod_{j=1}^q v_j^2 = 1.$

Respecto a los generadores y relaciones presentados es conveniente realizar las siguientes aclaraciones:

- (i) Los generadores-relaciones (d)-(b,g), las reflexiones con un sólo índice, son completamente análogas a los (e)-(c,h), las reflexiones representadas con dos índices de la forma habitual. Su introducción es motivada por consistencia en la notación ya que en éstas últimas se exige $t_l > 0$ y los (d)-(b,g) es el caso $t_l = 0$. De esta forma, los generadores y relaciones (d,e)-(b,c,g,h) se corresponden simplemente a las componentes frontera de S_0 , es decir, los correspondientes a los agujeros de la componente compacta.
- (ii) Los generadores-relaciones (f)-(f), reflexiones con tres índices, se corresponden a los generadores y relaciones de los agujeros de las componentes no compactas.
- (iii) Los generadores e_k se corresponden a generadores parabólicos para $k = 1, \dots, r_1$, agujeros de la componente compacta para $k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ y los generadores libres de las componentes no compactas correspondientes a las curvas γ_k , para $k = r_1 + r_2 + r_3 + 1$ que separan las componentes no compactas $S_k, k > 0$ de la componente compacta S_0 .

Demostración. A continuación, se propone el esbozo de una demostración del teorema. Cabe destacar que, análogamente al caso general descrito en la sección anterior, la demostración de este resultado no se encuentra explícita en la bibliografía usada en esta memoria y se basa, en cualquier caso, en el enfoque algebraico de las referencias de Macbeath y Hoare [19], o en el enfoque topológico combinatorio de Zieschang [29]. En primer lugar, de la discusión que precede al enunciado del teorema sabemos que la superficie cociente se divide en dos tipos de componentes, la componente S_0 , compacta y las componentes $S_i, i > 0$ no compactas. De esta forma, de los teoremas 3.22 y 3.23, sabemos que la componente compacta va a tener asociados, en el caso orientable, los generadores:

- (a) $x_i, i = 1, 2, \dots, p,$ transformaciones elípticas,
 (b) $a_j, b_j, j = 1, 2, \dots, q,$ transformaciones hiperbólicas,

(c) $e_k, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3, \dots, r$, transformaciones hiperbólicas

(d) $c_k, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ y $1 \leq r_1$, reflexiones (c.c.)

(e) $c_{k,l}, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ y $l = 1, 2, \dots, t_l + 1$, reflexiones (c.c.)

y relaciones:

(a) $x_i^{h_i} = 1, i = 1, 2, \dots, p, h_i \geq 2$,

(b) $c_k^2 = 1, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$,

(c) $c_{k,l}^2 = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ y $l = 1, 2, \dots, t_l + 1$,

(e) $(c_{k,l} c_{k,l+1})^{h_{k,l}} = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3, l = 1, 2, \dots, t_l, h_{k,l} \geq 2, t_l \geq 1$,

(g) $c_k e_k c_k e_k^{-1} = 1, k = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$,

(h) $c_{k,1} e_k c_{k,t_l+1} e_k^{-1} = 1, k = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_1 + r_2 + r_3$,

(i) $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{k=r_1}^{r_1+r_2+r_3} e_k \prod_{j=1}^q (a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}) = 1$,

o, para el caso no orientable, cambiamos los generadores (b) de arriba por

(b') $v_j, j = 1, 2, \dots, q$, reflexiones con deslizamiento,

y la relación (i) por

(i') $\prod_{i=1}^p x_i \prod_{k=1}^r e_k \prod_{j=1}^q v_j^2 = 1$.

Así mismo, las componentes no compactas pueden ser de dos tipos: en primer lugar, tenemos las del tipo parabólico (región fundamental con un punto en el infinito). En las figuras 4.8 y 4.9 podemos observar la forma de la región fundamental para el caso de componentes no compactas de tipo parabólico y la correspondiente superficie cociente con el característico puncture como vimos en la sección 4.1. La otra posibilidad es que se presenten agujeros abiertos, es decir,

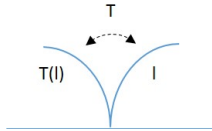


FIGURA 4.8. Región fundamental con un vértice parabólico

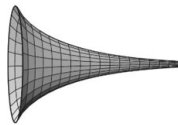


FIGURA 4.9. Superficie cociente correspondiente a componentes parabólicas

componentes no compactas que tienen bordes abiertos (región fundamental tiene lados en el eje real). Estas regiones se denominan funnels y se corresponden al caso de componentes no compactas de tipo hiperbólico, como podemos apreciar en las figuras 4.10 y 4.11. En el primer caso, si tenemos r_1 componentes del tipo parabólico, tendremos los generadores libres siguientes: (c') $e_k, k = 1, \dots, r_1$.

Por último, las componentes no compactas hiperbólicas (con bordes abiertos) se caracterizan

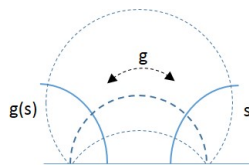


FIGURA 4.10. Región fundamental con un lado en el eje \mathbf{R}



FIGURA 4.11. Superficie cociente correspondiente a componentes hiperbólica (funnel)

porque en la componente k -ésima se puede tener en el agujero l -ésimo, m centros de rotación que son producto de dos reflexiones. Este caso se ha representado en las figuras 4.12 (región fundamental) y 4.13 (superficie cociente). Estos grupos tendrán, por lo tanto, los generadores

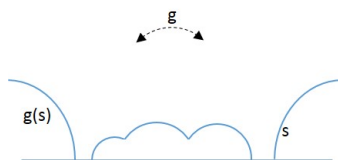


FIGURA 4.12. Región fundamental con un lado en el eje \mathbf{R} y reflexiones

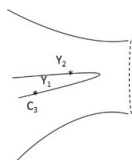


FIGURA 4.13. Superficie cociente correspondiente a componentes hiperbólicas (funnel con línea de reflexión)

(f) $c_{k,l,m}$, $k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r$, $l = 1, 2, \dots, u_k + 1$, $m = 1, \dots, u_{k,l}$, reflexiones

y relaciones:

(d) $c_{k,l,m}^2 = 1$, $k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r$, $l = 1, 2, \dots, u_k$, $m = 1, \dots, u_{k,l}$,

- (f) $(c_{k,l,m}c_{k,l,m+1})^{h_{k,l,m}} = 1, k = r_1 + r_2 + r_3 + 1, \dots, r, l = 1, 2, \dots, u_k, m = 1, \dots, u_{k,l} - 1, h_{k,l} \geq 1, t_l \geq 1$.
 Adicionalmente, tenemos que tener en cuenta los generadores dados por las curvas que separan estas componentes no compactas de la compacta, que serán tantos generadores libres, como componentes no compactas con bordes abiertos tenga nuestra superficie cociente, digamos $r - (r_1 + r_2 + r_3)$ componentes, que escribimos
 (c'') $e_k, k = s + 1, \dots, r$.

De esta discusión deducimos que un grupos NEC de cociente no compacto finitamente generado va a tener como generadores (a)-(b)-(c,c',c'')-(d)-(e)-(f) y relaciones (a)-(b)-(c)-(d)-(e)-(f)-(h), en el caso orientable, cambiando los generadores (b) por (b') y la relación (i) por (i') en el caso no orientable. \square

La superficie cociente en el caso orientable será una superficie de género g , donde se han eliminado r_1 puntos de otras tantas componentes no compactas, asociados a los vértices parabólicos de la región fundamental, se han eliminado además $r_1 + r_2$ discos abiertos en la componente compacta S_0 , p puntos en el interior de S_0 se corresponden a los puntos de ramificación, y se han eliminado $r - r_1 - r_2 - r_3$ discos cerrados en las componentes no compactas. En el caso no orientable hablamos ahora de género g no orientable con el resto de características análogas al caso orientable.

Igualmente al caso compacto, hablaremos de presentaciones equivalentes si coinciden los números anteriores y además las secuencias de números

$$(h_{k,l})_{k=r_1+r_2+1, \dots, r_1+r_2+r_3, l=1, \dots, u_k} \text{ y } (h_{k,l,m})_{k=r_1+r_2+r_3+1, \dots, r, l=1, 2, \dots, u_k, m=1, \dots, u_{k,l}-1}$$

son idénticos en ambas presentaciones salvo permutaciones.

Ejemplo 4: Superficie con una componente no compacta. En la figura 4.14 podemos ver un ejemplo de una superficie orientable de género $g = 1$ menos un disco (abierto) C_1 , donde la componente compacta es S_0 y la única componente no compacta S_1 tiene un punto en el infinito (vértice parabólico en su región fundamental). La componente compacta incluye tres puntos x_1, x_2, x_3 que son las imágenes de vértices fijos por transformaciones elípticas, y los puntos correspondientes al borde del disco C_1 que son imágenes de los vértices fijos por las reflexiones. Los generadores y relaciones del grupos NEC G , con región fundamental cuyo cociente sea la superficie de la figura 4.14 serán los siguientes:

Generadores:

- (a) $x_i, i = 1, 2, 3 = p$,
 (b) $a_j, b_j, j = 1 = q$,
 (c) $e_k, k = 1, 2 = r$,
 (d) $c_{k,l}, k = 2 \text{ y } l = 1, 2, 3, 4 = t_l + 1$,

y relaciones:

- (a) $x_i^{h_i} = 1, i = 1, 2, 3, h_i \geq 2$,
 (b) $c_{k,l}^2 = 1, k = 2 \text{ y } l = 1, 2, 3, 4 = t_l + 1$,
 (c) $(c_{k,l}c_{k,l+1})^{h_{k,l}} = 1, k = 2, l = 1, 2, 3, 4 = t_l, h_{k,l} \geq 2, t_l \geq 1$,

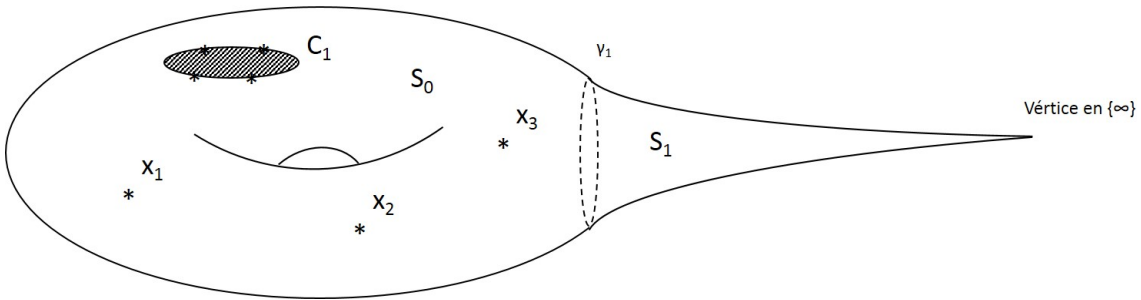


FIGURA 4.14. Superficie orientable de género 1 no compacta

- (d) $c_{k,1}e_k c_{k,t_l+1}e_k^{-1} = 1, k = 2,$
- (e) $\prod_{i=1}^3 x_i \prod_{k=1}^2 e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1.$

Finalmente, en la figura 4.15 presentamos una región fundamental compatible con el grupo anterior, donde los lados δ_1, δ'_1 están ligados por la transformación parabólica e_1 y v es el vértice parabólico. El significado de la notación usada para los lados de la región fundamental es la usual.

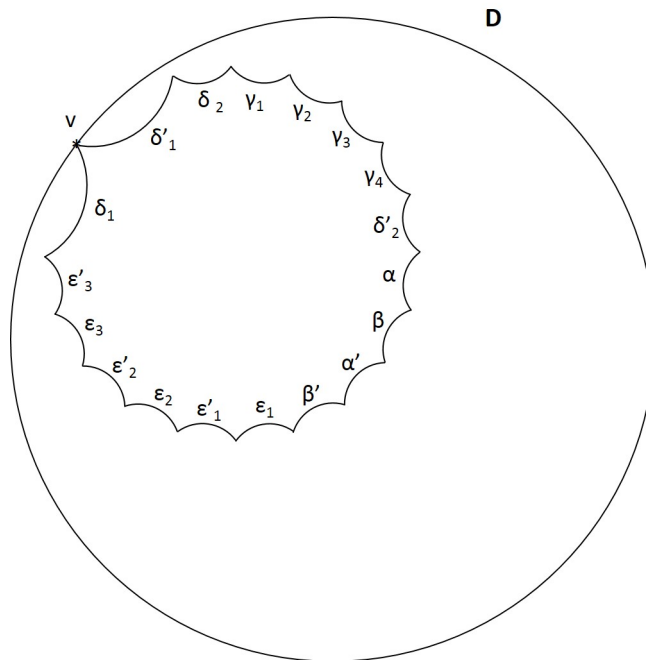


FIGURA 4.15. Región fundamental del grupo G

Ejemplo 5: Superficie con dos componentes no compactas. En la figura 4.16 podemos ver ahora una superficie orientable de género $g = 1$. S_0 es la componente compacta, donde hemos

eliminado un disco (abierto) C_1 , con puntos en el borde del disco que son imágenes de los vértices fijos por reflexiones (centros de rotación). Además tenemos un segundo disco C_2 , esta vez sin centros de rotación y en la componente compacta tenemos adicionalmente dos puntos x_1, x_2 que son imágenes de vértices fijos por transformaciones elípticas. Adicionalmente, hay dos componentes no compactas S_1 y S_2 , la primera con un punto en el infinito (vértice parabólico en su región fundamental) y, en la segunda, hemos eliminado un disco cerrado en el que incluimos dos puntos especiales (centros de rotación). La situación se corresponde a un grupo NEC con una región fundamental con un punto en el infinito (S_1) y un lado en el eje real (S_2). Los generadores y relaciones del grupos NEC G , con región fundamental cuyo cociente sea

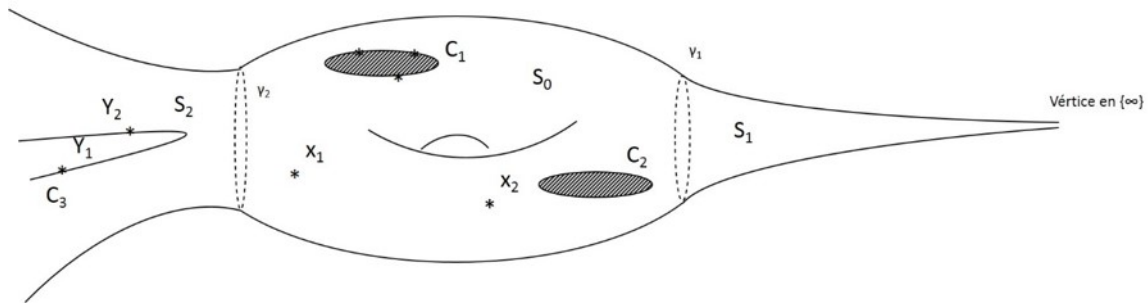


FIGURA 4.16. Superficie orientable de género 1 no compacta menos un disco cerrado

la superficie de la figura 4.16 serán ahora:

Generadores:

(a) $x_i, i = 1, 2 = p,$

(b) $a_j, b_j, j = 1 = q,$

(c₁) e_1 , el generador libre parabólico correspondiente a la componente S_1 , de forma que $r_1 = 1$,

(c₂) e_2, e_3 , los generadores asociados a los discos eliminados C_2, C_1 , respectivamente, de donde tenemos que $r_2 = 1, r_3 = 1$,

(c₃) e_4 , el generador libre hiperbólico correspondiente a la componente S_2 , obteniendo finalmente que $r = 4$,

(d) c_2 , correspondiente al disco C_2

(e) $c_{3,l}$ y $l = 1, 2, 3$, correspondientes al disco C_1

(f) $c_{4,1,m}, m = 1, 2$, correspondientes a la componente no compacta S_2

y relaciones:

(a) $x_i^{h_i} = 1, i = 1, 2, h_i \geq 2,$

(b) $c_2^2 = 1,$

(c) $c_{3,l}^2 = 1$ y $l = 1, 2,$

(d) $(c_{3,1}c_{3,2})^{h_{3,1}} = 1, (c_{3,2}c_{3,3})^{h_{3,2}} = 1, h_{3,l} \geq 2, l = 1, 2,$

(e) $c_{3,1}e_2c_{3,3}e_2^{-1} = 1,$

(f) $(c_{4,1,1}c_{4,1,2})^{h_{4,1,1}} = 1, h_{4,1,1} \geq 2,$

$$(g) \prod_{i=1}^2 x_i \prod_{k=1}^4 e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1.$$

Para terminar este capítulo, nos planteamos la cuestión de en qué medida las presentaciones dadas por los teoremas 4.12 y 4.8 son compatibles. Este último teorema es, en principio, una descripción general de la estructura de grupos NEC de cociente no compacto que nos permite estudiar la estructura de estos grupos sin la exigencia de tener un número finito de lados como en el teorema 4.12. Por ello, una diferencia obvia radica en el número de generadores, que en el primer caso son finitos y en el segundo finitos o infinitos. Adicionalmente, en el caso del teorema 4.12 teníamos el producto libre de un número finito de grupos cíclicos y de grupos generados por reflexiones, mientras que en el teorema 4.8, como acabamos de ver, tenemos el producto libre de un número finito o infinito de grupos cíclicos y de grupos generados por reflexiones. Sin embargo, la forma de las presentaciones de ambos tipos de grupos parecen diferir más allá del número finito o no de generadores y relaciones.

Para entender esta diferencia debemos tener presente que las presentaciones de los grupos en 4.8 de la forma dada por las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4 son presentaciones a las que hemos aplicado las transformaciones de Tietze. Mientras que en 4.12 la presentación no está simplificada. Por ello, no podemos esperar una estructura idéntica en las presentaciones de los grupos dadas por ambos teoremas.

Si bien los generadores y relaciones en 4.8, son análogos a los de las dadas por los generadores (b)-(f) y las relaciones (b)-(h) del teorema 4.12, parecen diferenciarse esencialmente en las transformaciones elípticas dadas en 4.12 por los generadores y relaciones (a) (elípticos) y en aquellas dadas por los generadores (c) con $1 \leq k \leq r_1$, que hemos identificado previamente como parabólicos.

Ejemplo 6: Grupo Modular. Para convencernos de que la ausencia de elementos de este tipo en la estructura de grupos NEC no compactos propuesta por el teorema 4.8 es sólo aparente, vamos a observar con algo más de detenimiento el caso del grupo modular. Como sabemos tiene cociente no compacto con dos generadores, uno elíptico y otro parabólico, $S : z \mapsto -\frac{1}{z}$ y $T : z \mapsto z + 1$, respectivamente. Ya vimos en los preliminares que el grupo modular tiene una presentación de la forma:

$$\Gamma = \langle S, T : S^2 = (ST)^3 = 1 \rangle.$$

Teniendo en cuenta la definición de producto libre de grupos y de grupos cíclicos vistos en los preliminares, vemos inmediatamente que el grupo modular puede presentarse por los generadores $S, U = ST$ de la forma

$$\Gamma = \langle S, U : S^2 = U^3 = 1 \rangle = \langle S : S^2 = 1 \rangle * \langle U : U^3 = 1 \rangle = C_2 * C_3,$$

de donde deducimos que el grupo modular puede representarse como el producto libre de dos grupos cíclicos y, con ello, se verifica el teorema 4.8, de forma que en las componentes de grupos cíclicos del producto libre del enunciado del teorema tenemos los generadores elípticos y parabólicos que esperaríamos encontrar en la estructura genérica en los grupos de este tipo.

En resumen, este teorema simplemente nos da la forma de los grupos NEC de cociente no compacto salvo isomorfismos algebraicos en forma de descomposición en producto libre de grupos cíclicos y grupos generados por reflexiones y rotaciones, completamente análogo al del teorema 4.12, salvo por el número de generadores que ahora puede ser infinito y el número de factores del producto libre que ahora también pueden ser infinitos, si bien los generadores y relaciones no están explicitados en el teorema 4.8.

CONCLUSIONES

A continuación, enumeramos las principales conclusiones del trabajo:

1. Partiendo de las propiedades de los subgrupos discretos de isometrías del plano hiperbólico que preservan la orientación, los llamados grupos fuchsianos, hemos estudiado las propiedades del grupo general de isometrías, los denominados grupos NEC. En particular, para el caso de cociente compacto, además de su estructura y presentación, se han estudiado sus regiones fundamentales y dos tipos importantes de sus subgrupos, a saber, los subgrupos fuchsianos canónicos y los subgrupos normales de índice impar.
2. Asimismo, se han esbozado las propiedades de los grupos NEC de cociente no compacto y se ha presentado dos teoremas de estructura de los mismos, uno para los finitamente generados y otro para caso general. En este caso, las herramientas algebraicas, geométricas y topológicas que nos permitían el estudio en el caso compacto no pueden usarse directamente, lo que se ha traducido en un capítulo parcialmente diferente del resto del TFM, donde el enfoque resulta esencialmente algebraico y basado en el estudio de las posibles presentaciones y sus equivalencias.
3. El estudio de los grupos NEC de cociente no compacto, nos lleva a plantearnos las siguientes cuestiones: ¿es posible obtener las presentaciones de grupos NEC no compactos (finitamente generados o no) con argumentos geométricos como hemos visto en el capítulo 3 para el caso compacto? ¿Se pueden definir signaturas NEC no compactas de forma análoga a los casos compactos? ¿Qué propiedades de isomorfismo se verificarían en este caso? ¿Se pueden extender los resultados referentes a áreas, grupos fuchsianos canónicos, subgrupos

normales, etc.? En la bibliografía estudiada, hay resultados parciales, siempre sin el uso de signaturas y con el enfoque topológico combinatorio, por ejemplo los ya comentados de Zieschang-Vogt-Coldewey [29], Macbeath-Hoare [19] o Hoare-Karrass-Solitar [13], lo que parece indicar que el enfoque geométrico tiene ciertas dificultades o limitaciones. Sin embargo, parece razonable explorar este enfoque comenzando, por ejemplo, con el análisis de situaciones específicas o ejemplos concretos del tipo superficies no compactas finitamente generadas con n componentes parabólicas, e ir entendiendo las dificultades en la definición de signaturas y cálculos asociados (áreas, subgrupos, etc.), así como el análisis de la situación resultante cuando n es infinito. Esto podría servir de base para un tratamiento geométrico del caso general.

Se ha tenido que ser sumamente selectivo con la materia incluida en esta memoria, debido a la extensión de los temas tratados. Ausencias destacadas son, por ejemplo, un estudio más detallado de los subgrupos normales de los grupos NEC, regiones fundamentales (de Wilkie) minimales, el concepto de grupos NEC maximales, los espacios de Teichmüller y espacios moduli en el contexto de los grupos NEC, un estudio detallado de las superficies de Klein (compactas, con componentes en la frontera, con invariantes, hiperelípticas, etc.) y sus automorfismos. Adicionalmente, el enfoque durante el TFM ha sido esencialmente algebraico y geométrico, no habiendo sido tratado en toda la memoria el enfoque topológico combinatorio como puede encontrarse, por ejemplo, en [29] y que, como se puede comprobar en esa obra, es de gran potencia y utilidad. La memoria ha usado como bibliografía básica, sobre todo, artículos de investigación. En particular, el capítulo 3 se basa fundamentalmente, pero no exclusivamente, en los artículos de Wilkie [28], Macbeath [18], Singerman [25] y Bujalance [5]. Análogamente, el capítulo 4 se ha basado en el artículo de Macbeath y Hoare [19] para el estudio de los grupos no finitamente generados y [29] para los finitamente generados. Para una correcta comprensión de estos artículos, he desarrollado, y en cierta medida incluido en la memoria, abundancia de detalles que, por su naturaleza, no presentan los artículos originales.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry*, Springer, (2005). (ISBN:1852339349).
- [2] Beardon, A. F., *Convex fundamental domains of Fuchsians groups*, Proc. Camb. Phil. Soc. 76, (1973), 511-513.
- [3] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups (Graduate texts in mathematics, 91)*, Springer-Verlag, (1983). (ISBN: 0387907882).
- [4] Borthwick, D. *Spectral Theory of Infinite-Area Hyperbolic Surfaces*, Birkäuser, Boston (2007).
- [5] Bujalance, E., *Normal subgroups of N.E.C. Groups*, Math. Z. 178, (1981), 331-341.
- [6] Bujalance, E., *Normal N.E.C. signatures*, Illinois Journal of Mathematics vol. 26, Number 3, (1982).
- [7] Bujalance, E., *Automorphisms groups of compact Klein surfaces*, Manuscripta mathematica 56, (1986), 105-124
- [8] Bujalance E., Etayo, J., Gamboa, J. M. *Teoría elemental de grupos*, UNED ediciones, (2002). (ISBN: 8436244362).
- [9] Bujalance, E., Cirre, F. J., Gamboa, J. M., Gromadzki, G. *Symmetries of Compact Riemann Surfaces (Lecture Notes in Mathematics)*, Springer-Verlag, (2007). (ISBN:9783642148279).
- [10] Bujalance, E., Gromadyki, G. *On automorphisms of Klein surfaces with invariant subsets*, Osake J. Math. 50, (2013), 251-269.
- [11] Costa, A. F., Martínez, F., *Planar hyperelliptic Klein surfaces and fundamental regions of NEC groups*, London Math. Soc. Lect. Note Series 173 (1992).
- [12] Etayo, J. J., Martínez, E., *Hyperbolic polygons and NEC groups*, Proc. Camb. Soc. 104 261 (1988).
- [13] Hoare, A. H. M., Karrass, A. and Solitar, D. *Subgroups of NEC groups*, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), 731-744.

BIBLIOGRAFÍA

- [14] Katok, S., *Fuchsian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics, (1992). (ISBN:0226425835).
- [15] Jones, A. G., Singerman, D., *Complex Functions*, Cambridge University Press, (1987). (ISBN:052131366).
- [16] Kaufmann, R., Zieschang, H., *On the rank of NEC groups*, London Math. Soc. Lect. Note Series 173 (1992).
- [17] Macbeath, A. M., *Groups of homeomorphisms of a simply connected space*, Ann. of Math. 79 (1964), 473-488.
- [18] Macbeath, A. M., *The classification of non-Euclidean plane crystallographic groups*, Canad. J. Math. 19 (1967), 1192-1205.
- [19] Macbeath, A. M., and Hoare A. H. M. *Groups of hyperbolic crystallography*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 235-249.
- [20] Martinez, E. *Convex fundamental regions for NEC groups*, Arch. Math. 47 (1986), 457-464.
- [21] (*)May, C. L., *Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary*, I. Glasgow Math. J. 18 (1977), 1-10.
- [22] Munkres, J. R., *Topología*, Prentice Hall, (2002). (ISBN:9788420531809).
- [23] (*)Preston, R., *Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces*, Ph. D. Thesis, University of Texas, (1975).
- [24] Singerman, D., *Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces*, Glasgow Math J. 12 (1971), 50-59.
- [25] Singerman, D., *On the structure of non-Euclidean crystallographic groups*, Proc. Camb. Soc. 76 233; (1974).
- [26] Singerman, D., *Universal tessellations*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid Vol. 1, números 1, 2, 3; (1988).
- [27] Singerman, D., *Superficies de Riemann y Cristalografía*, Notas de conferencia(2000).
- [28] Wilkie, H. C., *On non-Euclidean crystallographic groups*, Math. Zeitschr. 91 (1966), 87-102.
- [29] Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, H.-D. *Surfaces and Planar Discontinuous Groups (Lecture Notes in Mathematics 835)*, Springer-Verlag, (1980). (ISBN:0387100245).

(*) Este referencia ha sido usada en la Introducción para explicar el desarrollo de la teoría de los grupos NEC y sus aplicaciones en el estudio de automorfismos de las superficies de Klein, pero no se ha tenido acceso directo a la misma.