UNED

TRABAJO FIN DE MASTER

Crecimiento de la derivada de Productos de Blaschke

Tutor:
Dr. Cristóbal GONZÁLEZ ENRÍQUEZ
Universidad de Málaga
Autor:
Adnan BOUAOUDA ARAFA

10 de octubre de 2013

A la memoria de
René COLIN

Agradecimientos

No existen palabras para agradecerle a mi tutor, Dr. D. Cristóbal González Enríquez, todo el tiempo y esfuerzo dedicados, no ha sido sólo una ocasión para aprender y abrir mis ojos sobre nuevos horizontes sino también toda una lección de humildad.

Nada de eso hubiera podido ser posible sin la ayuda apreciable del Dr. D. Daniel Girela Álvarez quien me abrió las puertas del departamento de análisis matemático de la universidad de Málaga.

Mi gratitud también para todos mis profesores de la UNED por su excelente atención y enseñanza, a pesar de las distancias, sobre todo para Dra. Dª Beatriz Hernandez Boto, por su amabilidad y buena coordinación.

A todos los familiares y amigos que me han apoyado especialmente a mi esposa Rajaa y mis pequeños Awn y Hidaya por el tiempo robado, a mis padres Aicha y Mustapha, a mis hermanos Rachid, Samir, Abderrahim, Maryam, Amine, Alae, a mi amigo Nicolás Roser Nebot por su suporte incondicional y a mis compañeros de trabajo Nicolas David y Rafael Porras por su ayuda.

Finalmente a la memoria de mi amigo y profesor René Colin, por haber creído en mi y por enseñarme que las matemáticas son toda una forma de ser ¡Que en paz descanse!

Índice general

Resumen

El estudio de espacios de funciones analíticas en el disco unidad representa uno de los pilares básicos del Análisis Complejo, en especial los espacios de Hardy H^p. Una manera de introducir estos espacios es a través del estudio de los ceros de funciones analíticas en el disco unidad, en particular a través de la fórmula de Jensen. Toda función H^p admite una factorización (esencialmente única) como producto de una constante unimodular por un *producto de Blaschke* (que soporta todos los ceros de la función), por una función sin ceros (que soporta la norma H^p de la función). Llevados quizás por el deseo de estudiar la distribución de ceros de otras funciones analíticas sobre el disco unidad (no en H^p), surge la necesidad de estudiar con mayor profundidad la clase de los productos de Blaschke. Uno de los temas de investigación en este sentido incluye intentar caracterizar aquellos productos de Blaschke cuya derivada pertenece a un determinado espacio de funciones analíticas sobre el disco unidad. Esta memoria se dedica a estudiar cuando la derivada de un producto de Blaschke pertenece a algún espacio de Hardy o de Bergman.

Introducción

El tema central de esta memoria trata sobre los productos de Blaschke, más concretamente sobre el crecimiento de su derivada. Esta memoria consta de dos capítulos, un primero dedicado a introducir los productos de Blaschke en el contexto de los espacios de Hardy, y un segundo capítulo dedicado a estudiar cuando la derivada de un producto de Blashcke pertenece a algún espacio de Hardy o de Bergman.

Históricamente, los *productos de Blaschke infinitos* fueron introducidos por el matemático austriaco Wilhelm Blaschke [8] en 1915. En 1929 R. Nevanlinna [30] introdujo la clase de funciones acotadas con valores unimodulares en casi todo punto de la frontera. Los primeros estudios exhaustivos de las propiedades de las funciones internas se hicieron por parte de O. Frostman [14], W. Seidel [37] y F. Riesz [35]. Sus esfuerzos por entender los ceros y el comportamiento en la frontera de las funciones analíticas acotadas culminaron en el famoso teorema de factorización canónica.

Un producto de Blaschke es del tipo

$$B(z) = \prod_n \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n} z}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que satisface la llamada *condición de Blaschke*,

$$\sum_n \big(1 - |a_n|\big) < \infty. \tag{2}$$

La condición de Blaschke asegura que el producto anterior converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto del disco unidad, definiendo por tanto una función analítica en el disco unidad, con sucesión exacta de ceros, contando multiplicidades, dada por $\{a_n\}$. Además, como cada factor es un automorfismo del disco unidad (debemos entender que cuando $a_n = 0$, el factor correspondiente es z), se tiene que cada factor está acotado por 1, luego el producto entero también está acotado por 1. El caso es que mucho más es cierto. En realidad, la mayor parte del primer capítulo de la memoria está dedicada a probar que cada producto de Blaschke tiene límite radial de módulo 1 en casi todo punto de la frontera de $\mathbb{D}$. Para probar esto ha sido necesario dar una breve introducción de la teoría de los espacios de Hardy H^p. Como referencias principales hemos usado los libros de Duren [13], Garnett [16], y Tsuji [38].

Decimos que una función f, analítica sobre el disco unidad, escrito $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, está en el espacio de Hardy, H^p, con $0 < p \le \infty$, si sus medias integrales de orden p están uniformemente acotadas para $r \in [0,1)$, o sea, si

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0 \le r < 1} M_p(r,f) < \infty, \qquad \text{donde} \qquad \begin{cases} M_p(r,f) = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(re^{i\theta})\big|^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 0 < p < \infty, \text{ y} \\ M_\infty(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|, \end{cases}$$

A lo largo del capítulo 1 también vemos la íntima relación existente entre los productos de Blaschke y los espacios de Hardy: Las sucesiones de ceros de funciones en H^p (cualquier $p \in (0,\infty]$) vienen caracterizadas por la condición de Blashcke. Es más, dada una sucesión de Blaschke, el producto de Blaschke correspondiente está en H^∞ que, al ser el más pequeño de todos los espacios de Hardy, hace que tengamos un ejemplo de función en H^p con sucesión exacta de ceros dada por $\{a_n\}$. Esto, a su vez, nos permite factorizar (Teorema de Factorización de Riesz) cada función f de H^p como producto de un producto de Blaschke, que carga con los ceros de f, con una función g, de H^p, sin ceros, que carga con la norma de la función, aunque en realidad no es una verdadera norma cuando $p < 1$.

El segundo capítulo lo dedicamos a estudiar la pertenencia (o no) de la derivada de productos de Blaschke a los espacios de Hardy y a los espacios de Bergman. Recordamos que el espacio de Bergman A^p, $0 < p \leq \infty$, consiste en el espacio de funciones analíticas sobre el disco unidad que están en $L^p(\mathbb{D},\, dA)$, donde $dA = \frac{1}{\pi} dx dy$ representa al elemento de área normalizada del disco unidad. La relación clásica dada por Hardy-Littlewood [22], $H^p \subset A^{2p}$, es mejorada para algunos índices p (los más interesantes para nosotros) cuando trabajamos con derivadas de productos de Blaschke: Si $B' \in H^p$ entonces $B' \in A^{p+1}$. De esta manera, usando una u otra inclusión, podemos transferir casi siempre los resultados para H^p a resultados similares para A^p.

El hecho de que los productos de Blaschke se anulen en sucesiones cuyos puntos límite han de estar en la frontera del disco unidad y que, al mismo tiempo, tengan límite radial unimodular en casi todo punto de la frontera, nos incita a pensar que no debe haber muchos espacios que contengan a las derivadas de los productos de Blashcke. La derivada de una función mide de alguna manera las distorsiones que ésta imprime en los puntos de su dominio. Así, es de esperar que un producto de Blaschke aumente su distorsión a medida que van aumentando sus ceros, o a medida que estos se distribuyan de manera que provoquen grandes oscilaciones. Los resultados que vamos a presentar van en esta dirección. La concentración o distribución de ceros de un producto de Blaschke condicionan de una manera u otra al crecimiento de su derivada. En general, los resultados que presentamos se pueden agrupar en los siguientes bloques:

- Si no se exige más que la condición de Blaschke, entonces el crecimiento de la derivada de los productos de Blaschke puede ser bastante arbitrario, haciendo que todos lo espacios de Hardy dejen fuera la derivada de algún producto de Blaschke.

- Si exigimos que los ceros se aproximen a la frontera más rápido que lo estipulado por la condición de Blashcke, entonces mejora la integrabilidad de la derivada de los correspondientes productos de Blaschke.

- Si los ceros están uniformemente separados entre sí (productos de Blaschke interpolantes), entonces podríamos imaginar una mejoría en la integrabilidad de la derivada. Sin embargo, esto no va a ser así, aunque sí será cierto que si un producto de Blaschke interpolante tiene derivada bien controlada, entonces sus ceros deben aproximarse a la frontera más rápido que lo que estipula la condición de Blaschke, obteniéndose un recíproco de la situación dada en el apartado anterior.

- Si los ceros se aproximan a la frontera de manera no tangencial, o sea, están en un ángulo de Stolz, conseguimos controlar bastante bien la derivada del producto de Blaschke, debido a que el producto de Blaschke admite una extensión holomorfa a todo un entorno de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\zeta_0\}$, siendo ζ_0 el vértice del ángulo.

- Si los ceros están en un ángulo de Stolz, y están uniformemente separados, entonces obtenemos lo mejor que se puede decir sobre la derivada del producto de Blaschke.

Los autores de los resultados que presentamos en la memoria son básicamente los siguientes: Protas, Ahern, Clark, Cohn, y Kim con resultados de finales de los 70, principio de los 80; luego nos basamos en resultados obtenidos por Girela, Peláez, Vukotić, y Mashreghi, a partir de finales de los 90. Con los trabajos de estos autores, conseguimos establecer un dibujo de cómo se encuentra la situación actual, al menos en lo referente a la pertenencia de la derivada de productos de Blaschke en los espacios de Hardy y de Bergman, y que hemos tratado de plasmar en la figura 1.

Pertenencia de la derivada a los espacios de Hardy H^p. Un primer resultado, evidente, lo obtenemos para los productos de Blaschke finitos: sus derivadas están en cualquier espacio. Sin embargo, cuando pasamos a productos de Blaschke infinitos, nos encontramos con otra historia. Un resultado clásico de Privalov asegura que, para $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $f' \in H^1$ si y solo si f admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y, en ese caso, $f(e^{i\theta})$ es una función absolutamente continua. Como es evidente que los productos de Blaschke infinitos no admiten extensiones continuas a $\overline{\mathbb{D}}$, resulta entonces que ningún producto de Blaschke tiene derivada en H^1. Luego haciendo uso de que los espacios de Hardy decrecen con índice creciente, tenemos

Teorema. *Si B es un producto de Blaschke* infinito, *entonces $B' \notin H^p$ para ningún $p \geq 1$.*

Así que $p \geq 1$ son índices prohibidos para la pertenencia en H^p de la derivada de productos de Blaschke infinitos. Pero es que, sin pedir una mayor restricción sobre los ceros, siempre podemos encontrar, para $0 < p < 1$, un producto de Blaschke (infinito) cuya derivada no está en H^p, aún teniendo (su derivada) límite radial en casi todo punto, ver el Corolario 2.20.

La derivada de un producto de Blaschke, como el dado en (1), puede calcularse fácilmente,

$$B'(z) = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)^2} B_n(z), \qquad \text{donde } B_n(z) = \prod_{j\neq n} \frac{-\overline{a_j}}{|a_j|} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}. \tag{3}$$

Haciendo uso de lo que se conoce como la derivada angular en el sentido de Carathéodory, junto con la notación introducida por Ahern-Clark [5], podemos dar la expresión de su módulo en la frontera del disco unidad, entendido como límite radial:

$$\left|B'(e^{i\theta})\right| = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|e^{i\theta}-a_n|^2}. \tag{4}$$

De esta manera, conseguimos establecer la equivalencia siguiente, (escribimos $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, con $\theta_n \in [-\pi,\pi)$):

$$B' \in H^p \iff \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|e^{i\theta}-a_n|^2} \in L^p(\partial\mathbb{D}) \iff f_B(\theta) := \sum_n \frac{1-|a_n|}{(1-|a_n|)^2+(\theta-\theta_n)^2} \in L^p([-\pi,\pi)). \tag{5}$$

Con ayuda de esto, recuperamos de forma inmediata el siguiente resultado de Protas [34].

Teorema (Protas, 1973). *Supongamos que B es un producto de Blaschke con sucesión de ceros $\{a_n\}$.*

(i) *Si $\sum_n \big(1-|a_n|\big)^{1-p} < \infty$ para algún $p \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, entonces $B' \in H^p$.*

(ii) *Si $\sum_n (1-|a_n|)^{\frac{1}{2}} \log \frac{1}{1-|a_n|} < \infty$, entonces $B' \in H^{\frac{1}{2}}$.*

Este resultado es bastante preciso, es decir, existe un producto de Blaschke B cuyos ceros $\{a_n\}$ satisfacen $\sum_n (1-|a_n|)^{\frac{1}{2}} < \infty$ y $B' \notin H^{\frac{1}{2}}$. El ejemplo es explícito: Para un valor fijo de $\alpha \in (1,2)$, la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 2}$ viene dada por

$$a_n = (1-d_n)e^{i\theta_n}, \qquad \text{donde} \quad d_n = \frac{1}{n^2 \log^{2\alpha} n} \quad \text{y} \quad \theta_n = \sum_{j=n}^{\infty} d_j^{1/2}. \tag{6}$$

Cohn [12] se dio cuenta de que el recíproco a la primera parte del Teorema de Protas es cierto si nos restringimos a la clase de los *productos de Blaschke interpolantes*. Decimos que una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ es *uniformemente separada* o *interpolante* si

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \prod_{n\neq m} \left| \frac{a_n - a_m}{1-\overline{a_m}a_n} \right| \geq \delta, \text{ para todo } m. \tag{7}$$

Estas sucesiones satisfacen claramente la condición de Blaschke, por lo que podemos construir los que llamamos *productos de Blaschke interpolantes*, asociados a sucesiones uniformemente separadas. El argumento de Cohn es bastante fácil si conocemos un poco de la teoría de productos de Blaschke interpolantes. Un famoso teorema de Carleson reza así:

Si $\{a_n\}$ es interpolante, existe $C > 0$ tal que para toda $f \in H^p$, $\sum_n (1-|a_n|)|f(a_n)|^p \leq C\|f\|_{H^p}$.

Con esto y usando que para productos de Blaschke interpolantes se tiene $|B'(a_n)| \asymp \frac{1}{1-|a_n|}$, obtenemos el recíproco al resultado de Protas. Por lo demás, no hay mejoría general en el exponente de integrabilidad de la derivada de productos de Blaschke interpolantes, ya que el mismo ejemplo dado en (6) es el de un producto de Blaschke interpolante (Peláez [32]).

Si restringimos la sucesión de ceros de B a un ángulo de Stolz con vértice en $e^{i\theta}$, definido, para algún $\sigma \geq 1$, como

$$\Omega_\sigma(\theta) := \left\{ z \in \mathbb{D} : \left|e^{i\theta} - z\right| \leq \sigma\left(1-|z|\right) \right\},$$

resulta que sí existe un rango de p's para los que $B' \in H^p$. Este es un resultado de Girela-Peláez-Vukotić [20]. La prueba está basada en que la función $\frac{1}{(1-z)^2} \in \bigcap_{p<\frac{1}{2}} H^p \setminus H^{\frac{1}{2}}$.

Teorema (Girela-Peláez-Vukotić, 2007). *Si B es un producto de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz que, sin pérdida de generalidad, tiene su vértice en 1, entonces $|B'(z)| \lesssim \frac{1}{|1-z|^2}$, $z \in \mathbb{D}$ y, por consiguiente, $B' \in \bigcap_{p<\frac{1}{2}} H^p$.*

El ejemplo de producto de Blaschke B con ceros $a_n = 1 - \frac{1}{n\log^2 n}$, $n \geq 2$, permite ilustrar que el resultado es preciso. Estos ceros están en el radio $(0,1)$ y, usando la función f_B, vemos que $B \notin H^{\frac{1}{2}}$.

Si ahora combinamos sucesión de ceros en un ángulo de Stolz, junto con ser uniformemente separada, entonces cubrimos nuestras máximas expectativas.

Teorema (Girela-Peláez-Vukotić, 2007). *Sea B un producto de Blaschke interpolante cuya sucesión de ceros está contenida en un ángulo de Stolz. Entonces $B' \in H^p$ para todo $p < 1$.*

También podemos combinar sucesión de ceros en un ángulo de Stolz, junto con una convergencia más rápida a la frontera, del tipo $\sum(1-|a_n|)^\alpha < \infty$. Obtenemos el siguiente resultado de Ahern-Clark [5].

Teorema (Ahern-Clark, 1974). *Sea B un producto de Blaschke cuya sucesión de ceros $\{a_n\}$ está en un ángulo de Stolz y satisface que $\sum_n (1-|a_n|)^\alpha < \infty$, para algún $\alpha \in (0,1]$. Entonces*

$$B' \in \bigcap_{0<p<\frac{1}{1+\alpha}} H^p.$$

La demostración de este resultado se basa en que podemos equiparar $|B'(e^{i\theta})|$ con $|P'(e^{i\theta})|$, donde P es el producto de Blaschke con ceros de igual módulo que los a_n pero sobre el radio que termina en la punta del ángulo de Stolz.

Este resultado vuelve a ser preciso, como prueba Mashreghi en su libro [28, Example 8.18].

Pertenencia de la derivada a los espacios de Bergman A^p. Los espacios de Bergman presentan mejores resultados, en cierto modo, que los espacios de Hardy. En primer lugar, usando el Lema de Schwarz-Pick, tenemos

Teorema. *Si B es un producto de Blaschke, entonces $B' \in A^p$ para todo $p < 1$.*

Este resultado es preciso. En 1955 Rudin [36] probó la existencia de un producto de Blaschke B tal que $B' \notin A^1$, en 1968 Piranian [33] dio un ejemplo explícito, y en 2007 Peláez [32, Thm. 1] dio un ejemplo de producto de Blaschke *interpolante*.

En la otra dirección tenemos que si B es un producto de Blaschke infinito, entonces B cubre el disco unidad "casi completamente" un número infinito de veces (Frostman), por tanto la integral $\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^2\, dA(z)$, que representa al área de la región cubierta por B contando multiplicidades, debe ser igual a infinito, dando lugar a que $B' \notin A^2$. Este resultado, aunque conocido de mucho antes, se lo atribuimos a Kim[25], ya que lo generaliza.

Teorema (Kim, 1984). *Si B es un producto de Blaschke infinito, entonces $B' \notin A^2$ y, consecuentemente, $B' \notin \bigcup_{p\geq 2} A^p$.*

Una vez que hemos conseguido restringir el objeto de estudio al rango $p \in [1,2)$, presentamos el siguiente resultado de Kim, del que damos una prueba autocontenida.

Teorema (Kim, 1984). *Supongamos que B es un producto de Blaschke con ceros $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1, \ldots$.*

(i) *Si $\sum_n \big(1-|a_n|\big)^{2-p} < \infty$ para algún $p \in (1,2)$, entonces $B' \in A^p$.*

(ii) *Si $\sum_n (1-|a_n|) \log \frac{1}{1-|a_n|} < \infty$, entonces $B' \in A^1$.*

Si nos referimos al ejemplo de producto de Blaschke B dado en (6), observamos que $\{a_n\}$ satisface (ii), luego $B' \in A^1$, pero recordamos que $B' \notin H^{\frac{1}{2}}$, lo que nos indica que la inclusión debida a Hardy-Littlewood, $H^{\frac{1}{2}} \subset A^1$, es estricta. Por otro lado, también observamos que $\{a_n\}$ satisface (i) con $p = \frac{3}{2}$, lo que nos dice que $B' \in A^{\frac{3}{2}} \setminus H^{\frac{1}{2}}$, o sea, que el enunciado $B' \in H^p \implies B' \in A^{p+1}$ no tiene recíproco.

A continuación mencionamos que el resultado de Kim, apartado (i), también admite un recíproco en el caso de tratar con productos de Blaschke interpolantes. El resultado se sigue del siguiente Teorema de Girela-Peláez-Vukotić [20, Thm. 3.4], que se prueba usando el hecho de que si B es interpolante, entonces su derivada es "grande" sobre pequeños entornos de cada cero, la constante de acotación dependiendo solo de la constante de interpolación y del "tamaño del entorno". Además estos entornos son disjuntos dos a dos, lo que nos permite conseguir una cota inferior para la integral $\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z)$ que resulta depender de $\sum_n (1-|a_n|)^{2-p}$.

Teorema (Girela-Peláez-Vukotić, 2007). *Si B es un producto de Blaschke interpolante con ceros $\{a_n\}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) \gtrsim \sum_n (1-|a_n|)^{2-p}.$$

En particular, si la serie diverge entonces $B' \notin A^p$

Dada la naturaleza de los productos de Blaschke interpolantes, volvemos a preguntarnos si sus derivadas tienen mejores exponentes de integrabilidad que los de otros productos de Blaschke. Con los productos de Blaschke normales, lo más que se puede decir (sin imponer condiciones adicionales) es que $B' \in A^p$ para todo $p < 1$. Eso es también lo mejor que se puede decir para productos de Blaschke interpolantes. Un ejemplo de producto de Blaschke interpolante cuya derivada no está en A^1 fue dado por Peláez [32, Thm. 1] en 2007. La base de todo esto quizás la podamos encontrar en el sorprendente resultado de Naftalevič [29] de 1956, que probó que para cada sucesión de Blaschke $\{a_n\}$, existe una sucesión interpolante $\{z_n\}$ tal que $|z_n| = |a_n|$ para cada n. Este resultado nos proporciona un ejemplo de producto de Blaschke interpolante B tal que $B' \notin \bigcup_{p>1} A^p$. Basta con verificar que la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n \log^2 n}$, $n \geq 2$, es una sucesión de Blaschke y satisface, para $p > 1$, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|a_n|)^{2-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p} \log^{2(2-p)} n} = \infty.$$

Luego, es cuestión de girar los a_n, de acuerdo con el resultado de Naftalevič, para obtener una sucesión interpolante

Si ahora condicionamos la ubicación de los ceros a un ángulo de Stolz, el resultado $B' \in \bigcup_{p<1/2} H^p$ implica inmediatamente este otro.

Teorema (Girela-Peláez-Vukotić, 2007). *Si los ceros de un producto de Blaschke B están todos en un ángulo de Stolz, entonces $B' \in \bigcup_{p<3/2} A^p$.*

Este resultado, tan sencillo, es, sin embargo, preciso, ya que Girela-Peláez [19] probaron que el producto de Blaschke B con ceros dados por $a_n = 1 - \frac{1}{n \log^2 n}$, $n \geq 2$, todos ellos en el radio $(0,1)$, verifica que $B' \notin A^{\frac{3}{2}}$. La demostración no resulta nada fácil, se necesita usar la función φ_B, que es análoga a la función f_B utilizada en la sección anterior para tales propósitos: Si B es un producto de Blaschke con sucesión de ceros dada por $\{a_n\}$, escribimos $d_n = 1 - |a_n|$ y definimos la siguiente función decreciente,

$$\varphi_B(\theta) = \sum_n \frac{d_n}{(\theta + d_n)^2}, \qquad \theta \in (0, \infty).$$

El teorema que permite dar el ejemplo de producto de Blaschke con ceros en un radio y con derivada no perteneciente a $A^{\frac{3}{2}}$ es como sigue.

Teorema (Girela-Peláez). *Sea B un producto de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz. Supongamos que*

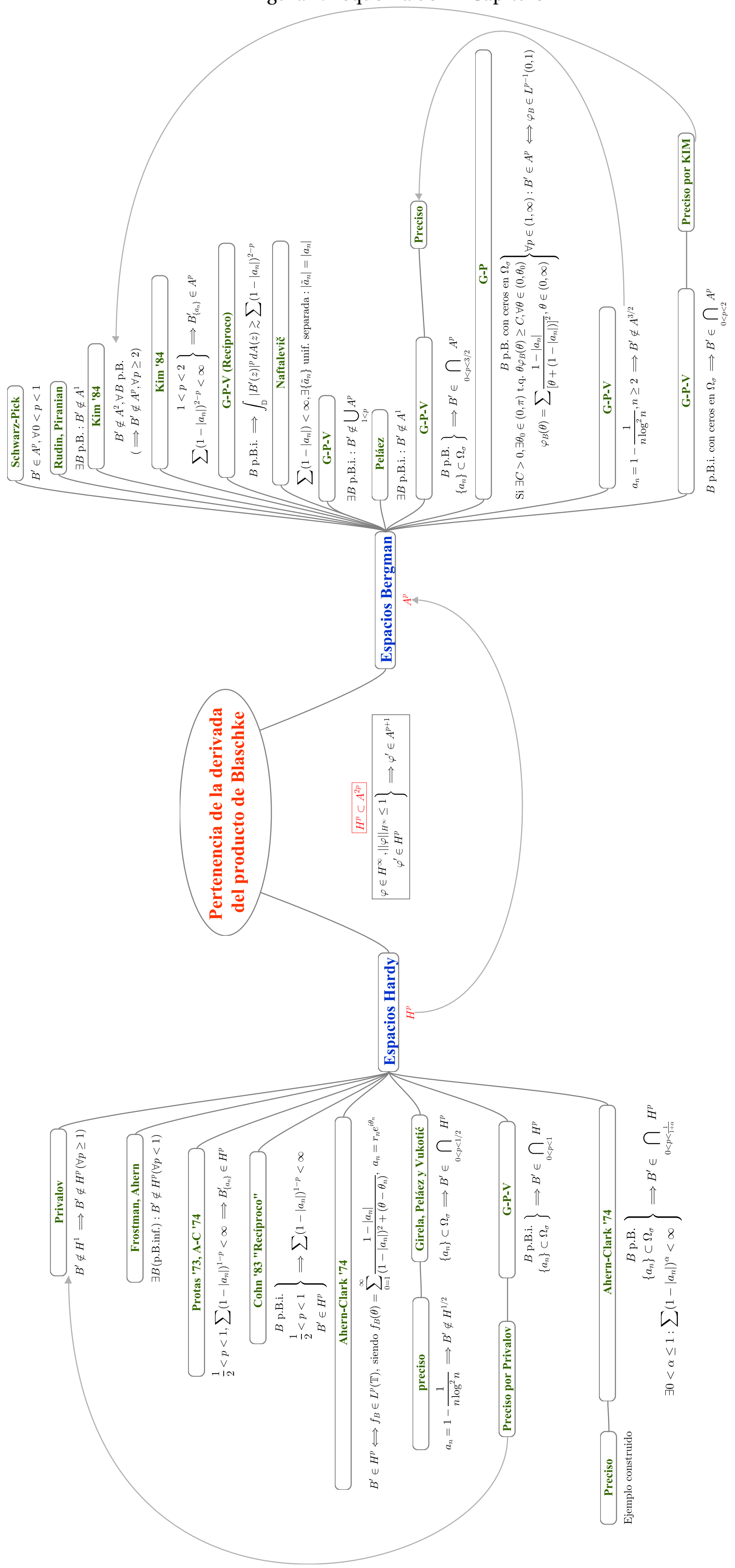
(8) *Existen constantes $C > 0$ y $\theta_0 \in (0, \pi)$ tales que* $\quad \theta \varphi_B(\theta) \geq C, \quad$ *para todo $\theta \in (0, \theta_0)$.*

Entonces, para cualquier $p \in (1, \infty)$, tenemos $B' \in A^p$ si, y solo si, $\varphi_B \in L^{p-1}(0,1)$.

Finalizamos el capítulo, y el trabajo, dando un resultado para un producto de Blaschke B interpolante y con ceros en un ángulo de Stolz. Sabemos entonces que $B' \in H^p$ para todo $p < 1$. Haciendo uso ahora de la inclusión $H^p \subset A^{2p}$, concluimos entonces que $B' \in A^p$ para todo $p > 2$, cubriendo de nuevo las máximas expectativas de integrabilidad para la derivada de productos de Blaschke.

Teorema. *Sea B un producto de Blaschke interpolante cuya sucesión de ceros está contenida en un ángulo de Stolz. Entonces $B' \in A^p$ para todo $p < 2$.*

Figura 1: Esquema del 2º Capítulo



Capítulo 1

Un contexto para los productos de Blaschke

1.1. Contando ceros de funciones analíticas: la fórmula de Jensen

La distribución de los ceros de una función f holomorfa en un dominio D no está sujeta a ninguna condición salvo la obligada por el principio de identidad de Weierstrass para que la función no sea idénticamente cero, y es que el conjunto de sus ceros no tenga puntos de acumulación en el interior de D. Esta restricción implica que, si la función no es idénticamente cero en D, el conjunto de sus ceros es a lo sumo numerable en D, o sea, que sus ceros se pueden expresar en forma de sucesión, y sus puntos de acumulación, de existir, han de estar en $\partial_\infty D$ ($= \partial D$ si D está acotado, y si no lo está, $\partial_\infty D = \partial D \cup \{\infty\}$). Otra de sus consecuencias es que en cualquier subconjunto compacto de D, f solo puede tener una cantidad finita de ceros. Pero a pesar de esto, cuando cambiamos la clase $\mathcal{H}ol(D)$ de las funciones holomorfas en D por otra subclase más pequeña, definida por condiciones de crecimiento de sus elementos, entonces podemos decir algo más sobre la distribución de los ceros. La mayoría de los teoremas que relacionan crecimiento de una función y sus ceros se basan en la fórmula de Jensen.

Teorema 1.1 (Fórmula de Jensen). *Sea $f(z) = c_N z^N + c_{N+1} z^{N+1} + \dots$ holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y sea $\{a_n\}$ la sucesión exacta de sus ceros no nulos (repetidos de acuerdo a su multiplicidad). Entonces, para $0 < r < 1$,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \log(|c_N| r^N) + \sum_{\{|a_n| \le r\}} \log \frac{r}{|a_n|}$$

Demostración. La función $F(z) = f(z)/(c_N z^N)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ tras evitar la posible singularidad en 0, $F(0) = 1$, y tiene como ceros la sucesión $\{a_n\}$. Esto reduce la demostración a probar

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|F(re^{i\theta})\right| d\theta = \sum_{\{|a_n| \le r\}} \log \frac{r}{|a_n|}, \qquad 0 < r < 1.$$

Supongamos $0 < r < 1$. La fórmula es trivial cuando ningún a_n tiene módulo menor o igual que r, o sea, cuando F no tiene ceros en $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$, el disco cerrado de centro 0 y radio r, pues en ese caso existe una rama holomorfa de $\log(F)$ en $\overline{\Delta(0,r)}$ y, por la propiedad del valor medio, tomando partes reales:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|F(re^{i\theta})\right| d\theta = \log|F(0)| = 0 = \sum_{\{|a_n| \le r\}} \log \frac{r}{|a_n|}.$$

Cuando alguno de los a_n tiene módulo menor o igual que r, observamos primero que solo puede haber una cantidad finita de ellos. A continuación observamos que la función

$$G(z) = \frac{F(z)}{\prod_{\{|a_n| \le r\}} (z - a_n)}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

es holomorfa en $\mathbb{D}$ y no tiene ceros en $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$, por tanto, existe una rama holomorfa de $\log G$ en un entorno de $\mathbb{D}(0,r)$ y, de nuevo, por la propiedad del valor medio y tomando partes reales, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|G(re^{i\theta})\right|d\theta=\log|G(0)|,$$

Lo que desarrollado equivale a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|F(re^{i\theta})\right|d\theta-\sum_{\{|a_n|\le r\}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|re^{i\theta}-a_n\right|d\theta=\log|F(0)|-\sum_{\{|a_n|\le r\}}\log|a_n|,$$

bajo el supuesto de que cada una de las integrales $\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|re^{i\theta}-a_n\right|d\theta$ exista. Pasamos a analizar este tipo de integrales. Escribimos $a_n=r_ne^{i\theta n}$. Entonces,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|re^{i\theta}-a_n\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\log\left|re^{i\theta}\right|+\log\left|1-\tfrac{r_n}{r}e^{i(\theta_n-\theta)}\right|\right)d\theta\overset{(\varphi=\theta_n-\theta)}{=}\log r+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-\tfrac{r_n}{r}e^{i\varphi}\right|d\varphi.$$

El lema siguiente nos confirma que la integral en el miembro de la derecha es nula. Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|F(re^{i\theta})\right|d\theta=\log|F(0)|-\sum_{\{|a_n|\le r\}}\log|a_n|+\sum_{\{|a_n|\le r\}}\log r=\log|F(0)|+\sum_{\{|a_n|\le r\}}\log\frac{r}{|a_n|}.\qquad\blacksquare$$

Lema 1.2. *Para* $\rho>0$*,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-\rho e^{i\theta}\right|d\theta=\log^+\rho.$$

donde $\log^+(\rho)=\text{máx}\{\log(\rho),0\}$.

Demostración. La función $(1-z)$ es holomorfa y sin ceros en $\mathbb{D}$, luego existe una rama holomorfa de $\log(1-z)$ en $\mathbb{D}$ y, por la propiedad del valor medio, tomando partes reales,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-\rho e^{i\theta}\right|d\theta=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(1-\rho e^{i\theta})\,d\theta\right]=\operatorname{Re}(\log 1)=\log|1|=0=\log^+\rho,\qquad\text{para todo } 0<\rho<1.$$

Por otro lado, si $\rho>1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-\rho e^{i\theta}\right|d\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\rho e^{i\theta}\right|+\log\left|\rho^{-1}e^{-i\theta}-1\right|d\theta\\&\overset{(\varphi=-\theta)}{=}\log\rho+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\rho^{-1}e^{i\varphi}-1\right|d\varphi\overset{(0<\rho^{-1}<1)}{=}\log\rho=\log^+\rho.\end{aligned}$$

Queda el caso $\rho=1$. Observemos que $\log\left|1-e^{i\theta}\right|=\log\left(\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right|\left|e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right|\right)=\log\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right|$, luego su integral entre $-\pi$ y π puede presentar problemas de convergencia cerca de $\theta=0$, pero como $\log\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right|\sim\log|\theta|$ cuando $\theta\sim0$ y $\log|\theta|$ es integrable cerca de 0, vemos que no hay problemas de convergencia. Así pues,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-e^{i\theta}\right|d\theta&=\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|2\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\right|d\theta\overset{\text{f. par}}{=}2\int_0^{\pi}\log(2\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2})d\theta\\&\overset{(\varphi=\frac{\theta}{2})}{=}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\operatorname{sen}\varphi)d\varphi=4(\log 2)\frac{\pi}{2}+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=0,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=-\frac{\pi}{2}\log 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\operatorname{sen}\tfrac{\varphi}{2}\cos\tfrac{\varphi}{2})\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\tfrac{\varphi}{2}\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\varphi}{2})\,d\varphi\\&\underset{(\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}{\overset{(\theta=\frac{\varphi}{2})}{=}}\frac{\pi}{2}\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\operatorname{sen}\theta\,d\theta+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\log\operatorname{sen}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi.\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

1.2. La condición de Blaschke para introducir los espacios de Hardy

Una de las consecuencias de la fórmula de Jensen es el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Sea $f(z) = c_N z^N + c_{N+1} z^{N+1} + \dots$ holomorfa no idénticamente nula en $\mathbb{D}$ y sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros no nulos repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Son equivalentes*

a) La función de r, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta$, está acotada superiormente.

*b) $\{a_n\}$ satisface la llamada **condición de Blaschke**,*

$$\sum_n (1 - |a_n|) < \infty.$$

Demostración. Por la fórmula de Jensen, se tiene, para $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \sum_{\{n:\ |a_n|\le r\}} \log\frac{r}{|a_n|} + \log(|c_N r^N|),$$

de donde se sigue que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta$ es una función creciente de r, pues el lado derecho crece con r.

a) $\Longrightarrow$ *b)*. En este caso, existe $C > 0$ independiente de $r \in (0,1)$ tal que

$$\sum_{\{n:\ |a_n|\le r\}} \log\frac{r}{|a_n|} + \log(|c_N r^N|) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \le C, \qquad r \in (0,1).$$

Haciendo $r \to 1^-$, obtenemos entonces que $\sum_n \log\frac{1}{|a_n|} < \infty$. O sea, la serie $\sum_n \log|a_n|$ converge (absolutamente, pues al ser $|a_n| < 1$ para todo n, todos los términos $\log|a_n|$ son negativos). Esto equivale a decir entonces que $\sum_n (1 - |a_n|)$ es convergente, o sea, que $\{a_n\}$ satisface la condición de Blaschke.

b) $\Longrightarrow$ *a)*. En este caso, la convergencia (absoluta) de la serie $\sum_n (1 - |a_n|)$ equivale a la convergencia absoluta de la serie $\sum_n \log\frac{1}{|a_n|}$. Por tanto, usando la fórmula de Jensen, se tiene para $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \sum_{\{n:\ |a_n|\le r\}} \log\frac{r}{|a_n|} + \log(|c_N r^N|) \le \sum_n \log\frac{1}{|a_n|} + \log|c_N|.$$

La última expresión es una constante independiente de r, indicándonos que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta$ está acotada superiormente como función de r. ∎

Normalmente, la condición de Blaschke incluye también los sumandos correspondientes a los ceros nulos de la función. El enunciado del teorema anterior lo podemos entonces encontrar como sigue:

Sea f holomorfa y no idénticamente nula en el disco unidad $\mathbb{D}$ y sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros repetidos de acuerdo a su multiplicidad (incluyendo los ceros nulos). Entonces $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta$ está acotada superiormente si, y sólo si, $\{a_n\}$ satisface la condición de Blaschke: $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$.

En general cualquier condición que implique *a)* del teorema anterior va a imponer la condición de Blaschke sobre la sucesión de ceros.

Teorema 1.4. *Sea f holomorfa y no idénticamente nula en el disco unidad $\mathbb{D}$ y sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supongamos que f satisface alguna de las siguientes condiciones:*

a) La función $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ está acotada superiormente.

b) Para $0 < p < \infty$, la función $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$ está acotada superiormente.

c) $|f|$ está acotada en $\mathbb{D}$.

Entonces $\{a_n\}$ satisface la condición de Blaschke, $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$.

Nota. Observemos que tanto la función $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ como las funciones $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$, $0<p<\infty$, están acotadas inferiormente por 0.

Demostración. Solo hay que observar que cada una de las tres condiciones implica que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$ está acotada superiormente y entonces es cuestión de aplicar el teorema anterior. En efecto, las acotaciones que se precisan provienen de estas otras más simples:

a)' Para todo $x>0$, $\log x\le\log^+ x$.

b)' Para $0<p<\infty$ y $x>0$, $\log x\le\frac{1}{pe}x^p$.

c)' Para $0<x\le M$, $\log x\le\log M$. ∎

Definición 1.5 (Medias Integrales, la clase de Nevanlinna y los espacios de Hardy). Para f holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$, definimos las siguientes funciones de $r\in(0,1)$,

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta,$$ *la función característica de Nevanlinna de f.*

$$M_p(r,f)=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\Big)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$ *las medias integrales de f de orden p.*

$$M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$ *el módulo máximo de f.*

Estas formas de medir el crecimiento de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ dan lugar a distintos espacios.

- La *clase de Nevanlinna:* $\mathcal{N}=\big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D}:\ \sup_{0<r<1} T(r,f)<\infty\big\}$.
- Los *espacios de Hardy H^p, $0<p\le\infty$:* $H^p=\big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D}:\ \|f\|_{H^p}:=\sup_{0<r<1} M_p(r,f)<\infty\big\}$.

Lo primero que debemos destacar es la relación de inclusión entre estos espacios.

Teorema 1.6. *Para $0<p<q<\infty$ se tiene $H^\infty\subset H^q\subset H^p\subset\mathcal{N}$.*

La prueba de este resultado es prácticamente inmediata. Solo hemos de recordar la *Desigualdad de Jensen*, una "versión particular" de la *Desigualdad de Hölder* cuando trabajamos en espacios de medida finita.

Proposición 1.7 (Desigualdad de Jensen). *Sea (Ω,μ) un espacio de medida finita y sea Φ una función convexa de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para cada $f\in L^1(d\mu)$ se tiene,*

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right)\le\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega\Phi\big(f(x)\big)d\mu(x)$$

Demostración. El hecho de que Φ sea convexa implica que Φ tiene derivadas laterales en todos los puntos y que su gráfica tiene una "línea soporte" en cada uno de sus puntos. Esto último significa que para cada punto $\big(t_0,\Phi(t_0)\big)$, existe una constante $A\in\mathbb{R}$ (de hecho cualquier A entre $\Phi'_-(t_0)$ y $\Phi'_+(t_0)$ sirve) tal que

$$\Phi(t)\ge\Phi(t_0)+A(t-t_0),\qquad \text{para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$\Phi\big(f(x)\big)\ge\Phi(t_0)+A\big(f(x)-t_0\big),\qquad \text{para todo } x\in\Omega,$$

de donde se sigue, por integración y haciendo $t_0=\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f\,d\mu$,

$$\int_\Omega\Phi\big(f(x)\big)d\mu(x)\ge\int_\Omega\big[\Phi(t_0)+A\big(f(x)-t_0\big)\big]d\mu(x)=\Phi(t_0)\mu(\Omega)+A\overbrace{\Big(\int_\Omega f(x)d\mu(x)-t_0\mu(\Omega)\Big)}^{=0}=\Phi(t_0)\mu(\Omega).$$

O sea, $\Phi\big(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f\,d\mu\big)\le\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega\Phi\big(f(x)\big)d\mu(x)$, como queríamos probar. ∎

Demostración de las relaciones de inclusión. Si $f \in H^\infty$, se tiene,

$$M_q(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^q d\theta\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(re^{i\theta})\|_{H^\infty}^q d\theta\right)^{1/q} = \|f\|_{H^\infty},$$

Esto implica que $f \in H^q$ y además $\|f\|_{H^q} \le \|f\|_{H^\infty}$.

Si $f \in H^q$, se tiene, por la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} M_p(r,f) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} = \left[\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{q/p}\right]^{1/q} \\ &\le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{p\frac{q}{p}} d\theta\right)^{1/q} = M_q(r,f) \le \|f\|_{H^q}. \end{aligned}$$

Esto implica que $f \in H^p$ y además $\|f\|_{H^p} \le \|f\|_{H^q}$.

Si $f \in H^p$, entonces haciendo uso de que $\log^+ x \le C_p x^p$ para todo $p > 0$, se tiene,

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \le C_p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta = C_p\Big(M_p(r,f)\Big)^p \le C_p\|f\|_{H^p}^p.$$

Esto implica que $f \in \mathcal{N}$. ∎

En realidad las relaciones de inclusión son estrictas. Para probarlo, nos apoyamos en los siguientes lemas.

Lema 1.8. *Para $r \in (0,1)$ y $\theta \in [-\pi,\pi)$,*

$$\left|1-re^{i\theta}\right|^2 \le (1-r)^2 + r\theta^2, \qquad \left|1-re^{i\theta}\right|^2 \ge (1-r)^2 + 4r\frac{\theta^2}{\pi^2}, \qquad \left|1-re^{i\theta}\right|^2 \ge \begin{cases} 1, & si\ |\theta| \ge \frac{\pi}{2}, \\ 3\frac{\theta^2}{\pi^2}, & si\ |\theta| \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Primero observamos que

$$\left|1-re^{i\theta}\right|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\theta = (1-r)^2 + 2r\big(1-\cos 2\tfrac{\theta}{2}\big) = (1-r)^2 + 4r\operatorname{sen}^2\tfrac{\theta}{2}.$$

Así que la primera desigualdad se debe al hecho de que $|\operatorname{sen}\alpha| \le |\alpha|$ siempre, y la segunda desigualdad se debe a que $\operatorname{sen}\alpha \ge \frac{2}{\pi}\alpha$ siempre que $\alpha \in \big(0,\frac{\pi}{2}\big)$ (basta hacerse un dibujo). Para la primera línea de la tercera desigualdad, observamos que si $\pi \ge |\theta| \ge \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{\pi}{2} \ge \frac{|\theta|}{2} \ge \frac{\pi}{4}$, luego haciendo uso de que la función seno es creciente en $\big[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\big]$ obtenemos

$$\left|1-re^{i\theta}\right|^2 = (1-r)^2 + 4r\operatorname{sen}^2\tfrac{\theta}{2} \ge (1-r)^2 + 4r\operatorname{sen}^2\tfrac{\pi}{4} = (1-r)^2 + 2r = 1 + r^2 \ge 1.$$

Para continuar, suponemos que $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$, hacemos $h_\theta(r) = (1-r)^2 + 4r\frac{\theta^2}{\pi^2}$ y observamos que, como función de $r \in \mathbb{R}$, h_θ decrece hasta $r_\theta = 1 - 2\frac{\theta^2}{\pi^2} > 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$ y crece a partir de este r_θ. Por tanto,

$$(1-r)^2 + 4r\frac{\theta^2}{\pi^2} = h_\theta(r) \ge h_\theta(r_\theta) = \cdots = 4\frac{\theta^2}{\pi^2}\Big(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\Big) \overset{(|\theta|\le\frac{\pi}{2})}{\ge} 4\frac{\theta^2}{\pi^2}\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big) = 3\frac{\theta^2}{\pi^2}.$$ ∎

Lema 1.9. *La función f dada por $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$, satisface $f \in \bigcap\limits_{p<1} H^p \setminus H^1$.*

Demostración. Primero probamos que $f \notin H^1$:

$$M_1(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-re^{i\theta}|}d\theta \ge \frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{(1-r)^2+r\theta^2}}d\theta \overset{(1-r\le\theta)}{\ge} \frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\log\frac{\pi}{1-r},$$

y el miembro de la derecha tiende a ∞ cuando $r \to 1$.

Fijamos ahora $p \in (0,1)$ y probamos que $f \in H^p$:

$$\begin{aligned} M_p^p(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-re^{i\theta}|^p}d\theta = \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{\frac{\pi}{2}<|\theta|<\pi} + \int_{|\theta|\le\frac{\pi}{2}}\bigg)\frac{1}{|1-re^{i\theta}|^p}d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}<|\theta|<\pi}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\big(\frac{\sqrt{3}}{\pi}|\theta|\big)^p}d\theta = \frac{1}{2} + \frac{2\pi^p}{2\pi\big(\sqrt{3}\big)^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^{-p}d\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^{1-p}3^{p/2}(1-p)}\theta^{1-p}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{3^{p/2}2^{1-p}}. \end{aligned}$$ ∎

Teorema 1.10. *Para* $0<p<q<\infty$ *se tiene* $H^\infty \subsetneq H^q \subsetneq H^p \subsetneq \mathcal{N}$.

Demostración. La función $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $z\in\mathbb{D}$, es una transformación de Möbius que aplica el disco unidad conformemente sobre el semiplano $\{\operatorname{Re} w>\frac{1}{2}\}$ a la derecha de $\frac{1}{2}$. En este semiplano, la rama principal del argumento se mueve entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Luego la rama principal del logaritmo de f en $\mathbb{D}$, llamémosla g, aplica $\mathbb{D}$ conformemente sobre un dominio, no acotado, contenido en la semibanda horizontal $\{\xi:\ \operatorname{Re}\xi>\log\frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}\xi<\frac{\pi}{2}\}$. Esto prueba que $g(z)=\log\frac{1}{1-z}$ no está en H^∞.

Veamos que, para $q>0$, la función $f_{1/q}(z)=\frac{1}{(1-z)^{1/q}}=e^{\frac{1}{q}\log\frac{1}{1-z}}$, $z\in\mathbb{D}$, satisface $f_{1/q}\in\bigcap_{p<q}H^p\setminus H^q$. En efecto, por el lema anterior, $M_q^q(r,f_{1/q})=M_1(r,f)$ no está acotada superiormente, luego $f_{1/q}\notin H^q$. También por el lema anterior, para $p<q$, $M_p^p(r,f_{1/q})=M_{p/q}^{p/q}(r,f)$ está acotada superiormente, pues $\frac{p}{q}<1$, luego $f_{1/q}\in H^p$.

Veamos ahora que $g(z)=\log\frac{1}{1-z}$, $z\in\mathbb{D}$, satisface $g\in\bigcap_{p<\infty}H^p\setminus H^\infty$. En efecto, ya hemos visto que $g\notin H^\infty$. Por otro lado, como $g(z)=\log\frac{1}{1-z}=\log\frac{1}{|1-z|}+i\arg\frac{1}{1-z}$, entonces, para $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$, por el Lema 1.8, podemos encontrar una constante C tal que

$$\left|g(re^{i\theta})\right|^2=\log^2\frac{1}{|1-re^{i\theta}|}+\arg^2\frac{1}{1-re^{\theta}}\le\log^2\frac{1}{|1-re^{i\theta}|}+\frac{\pi^2}{2^2}\le\begin{cases}\frac{\pi^2}{2^2}, & \text{si } |\theta|\ge\frac{\pi}{2}\\ \log^2\frac{\pi}{\sqrt{3}|\theta|}+\frac{\pi^2}{2^2}, & \text{si } |\theta|\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Bigg\}\le C\log^2\frac{\pi}{\sqrt{3}|\theta|}.$$

Así que para cualquier $p>0$, tenemos $|g(re^{i\theta})|^p\le C^{p/2}\log^p\frac{\pi}{\sqrt{3}|\theta|}$, que es integrable en $(-\pi,\pi)$ y, por tanto, resulta que $g\in H^p$.

Veamos finalmente que $h(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, $z\in\mathbb{D}$, satisface $h\in\mathcal{N}\setminus\bigcup_{p>0}H^p$. En primer lugar observamos que, como $\operatorname{Re}\frac{1}{1-z}>\frac{1}{2}$ para todo $z\in\mathbb{D}$, entonces $|h(z)|=\left|e^{\frac{1}{1-z}}\right|=e^{\operatorname{Re}\frac{1}{1-z}}>e^{1/2}>1$, con lo que, atendiendo a que $\frac{1}{1-z}$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, lo propiedad del valor medio nos da lo que necesitamos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|h(re^{i\theta})\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|h(re^{i\theta})\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{1-re^{i\theta}}\,d\theta=1.$$

Esto prueba que $h\in\mathcal{N}$. Fijemos ahora $p>0$ y observemos que, a partir de que $e^x\ge x^2$ para $x>0$, tenemos $|h(re^{i\theta})|^p=e^{p\operatorname{Re}\frac{1}{1-re^{i\theta}}}=e^{p\frac{1-r\cos\theta}{|1-re^{i\theta}|^2}}\ge e^{p\frac{1-r}{|1-re^{i\theta}|^2}}\ge p^2\frac{(1-r)^2}{|1-re^{i\theta}|^4}$, lo que implica, por el Lema 1.8, que $h\notin H^p$ ya que el miembro de la derecha en la siguiente desigualdad tiende a ∞ cuando $r\to1^-$:

$$\begin{aligned}M_p^p(r,h)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(re^{i\theta})\right|^p d\theta\ge\frac{p^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r)^2}{|1-r^{i\theta}|^4}\,d\theta\\&\ge\frac{2p^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-r)^2}{((1-r)^2+r\theta^2)^2}\,d\theta\ge\frac{p^2}{\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{(1-r)^2}{(2\theta^2)^2}\,d\theta=\frac{p^2(1-r)^2}{12\pi}\Big(\frac{1}{(1-r)^3}-\frac{1}{\pi^3}\Big).\end{aligned}$$ ∎

Volviendo al tema de los ceros, expresamos los resultados que obtuvimos en términos de estos espacios.

Corolario 1.11. *Si* $f\in H^p$, $(0<p\le\infty)$ *ó* $f\in\mathcal{N}$, *entonces la sucesión exacta* $\{a_n\}$ *de sus ceros, repetidos de acuerdo a su multiplicidad, satisface la condición de Blaschke* $\sum_n(1-|a_n|)<\infty$. ∎

Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ con sucesión exacta de ceros $\{a_n\}$ satisfaciendo $\sum_n(1-|a_n|)=\infty$, entonces $f\notin\mathcal{N}$ y, por consiguiente, f no está en ninguna de sus subclases H^p. Por ejemplo, la sucesión $\{1-\frac{1}{n}\}$ no puede ser la sucesión exacta de ceros de ninguna función en H^∞. Ante la pregunta de si el recíproco es cierto, vemos que sí con el siguiente resultado, concluyendo que la condición de Blaschke caracteriza las sucesiones de los ceros de las funciones en H^∞ y, por tanto, en todos los H^p y la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$.

Teorema 1.12. *Sea* $\{a_n\}$ *un sucesión en* $\mathbb{D}$ *satisfaciendo la condición de Blaschke,* $\sum_n(1-|a_n|)<\infty$. *Entonces el producto de Blaschke asociado a* $\{a_n\}$, $\prod_n b_n(z)$, *donde*

$$b_n(z)=z,\quad \text{si } a_n=0,\qquad\qquad b_n(z)=\frac{-\overline{a_n}}{|a_n|}\,\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z},\quad \text{si } a_n\ne0,$$

converge absoluta y uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$, *definiendo una función* $B\in H^\infty$, *cuya sucesión de ceros es exactamente* $\{a_n\}$ *y además* $|B(z)|<1$ *para* $|z|<1$.

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{D}$ compacto, entonces $K \subset \mathbb{D}(0,R)$ para algún $R \in (0,1)$.

Para $z \in \mathbb{D}(0,R)$ y $a_n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\left|1-b_n(z)\right| &= \left|1-\frac{-\overline{a_n}}{|a_n|}\,\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\right| = \frac{\left|1-\overline{a_n}z+\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}z-\frac{|a_n|^2}{|a_n|}\right|}{|1-\overline{a_n}z|} = \frac{\left|(1-|a_n|)+\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}z(1-|a_n|)\right|}{|1-\overline{a_n}z|}\\
&= \frac{\left|1+\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}z\right|}{|1-\overline{a_n}z|}\,(1-|a_n|) \le \frac{1+\left|\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\right||z|}{1-|\overline{a_n}|\,|z|}\,(1-|a_n|) \qquad \left(\left|\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\right|=1,\quad |a_n|\le 1,\quad |z|\le R\right)\\
&\le \frac{1+R}{1-R}\,(1-|a_n|).
\end{aligned}$$

Y para $z \in \mathbb{D}(0,R)$ y $a_n = 0$, claramente,

$$|1-b_n(z)| = |1-z| \le 1+R \le \frac{1+R}{1-R}\,(1-|a_n|).$$

Así que como $\sum_n(1-|a_n|)$ converge, entonces $\sum_n\big(1-b_n(z)\big)$ converge absoluta y uniformemente en K y, por consiguiente, el producto $\prod_n b_n(z)$ converge absoluta y uniformemente en K. Esto prueba que $\prod_n b_n(z)$ define una función holomorfa B en $\mathbb{D}$ cuya sucesión de ceros es exactamente $\{a_n\}$.

Además, como cada factor b_n es un automorfismo del disco unidad (una transformación de Möbius del disco unidad en sí mismo), resulta que

$$|b_n(z)| \le 1, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Por consiguiente, el producto debe tener módulo acotado por 1,

$$|B(z)| = \left|\prod_n b_n(z)\right| \le 1, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Haciendo uso del principio del módulo máximo resulta que, como B no es constante, no puede alcanzar módulo máximo en el interior de $\mathbb{D}$ y, por tanto, se tiene que $|B(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. ∎

Dado que, para $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, cada factor del tipo $b_a(z) = \frac{-\overline{a}}{|a|}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ es de hecho un automorfismo de la esfera de Riemann (con cero en $a \in \mathbb{D}$ y polo en $\frac{1}{\overline{a}}$), resulta que el producto de Blaschke anterior tiene un dominio de definición mayor que $\mathbb{D}$:

Teorema 1.13. *Si $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ satisface la condición de Blaschke, $\sum_n(1-|a_n|) < \infty$, entonces el producto de Blaschke $\prod_n b_n(z)$ define una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$, donde $\mathbb{E}$ es el subconjunto de $\partial\mathbb{D}$ formado por los puntos de acumulación de $\{a_n\}$ (que son los mismos que los puntos de acumulación de $\{\frac{1}{\overline{a_n}}\}$), con sucesión exacta de ceros dada por $\{a_n\}$ y sucesión exacta de polos dada por $\{\frac{1}{\overline{a_n}}\}$.*

Demostración. Para probar esta aserción basta mostrar que para todo compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$ existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que b_n es holomorfa en K para todo $n \ge n_K$ y además $\prod_{n\ge n_K} b_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Sea pues K un compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$. Entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \mathbb{D}(0,R)$, y un natural n_K tal que $\mathbb{E} \cup \{a_n : n \ge n_K\} \cup \{\frac{1}{\overline{a_n}} :\ n \ge n_K\}$ queda a una distancia positiva, digamos $\delta > 0$, de K. Además podemos tomar n_K lo suficientemente grande como para que $\frac{1}{2} < |a_n| < \frac{3}{2}$ para todo $n \ge n_K$ (con lo que, también, $\frac{2}{3} < \frac{1}{|\overline{a_n}|} < 2$ para todo $n \ge n_K$). De esta manera, si $n \ge n_K$ tenemos que b_n es holomorfa en K y, además, para cualquier $z \in K$,

$$\left|1-b_n(z)\right| = \cdots = \frac{\left|1+\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}z\right|}{|1-\overline{a_n}z|}\big(1-|a_n|\big) \le \frac{1+R}{|\overline{a_n}|\left|\frac{1}{\overline{a_n}}-z\right|}\big(1-|a_n|\big) \le \frac{1+R}{\frac{1}{2}\delta}\big(1-|a_n|\big).$$

Esto muestra que la suma $\sum_{n\ge n_K}\big(1-b_n\big)$ y, consecuentemente, el producto $\prod_{n\ge n_K} b_n$, convergen absoluta y uniformemente en K, probando lo que queríamos. ∎

Podemos afinar un poco más sobre el comportamiento de productos de Blaschke en la frontera del disco unidad. De hecho podemos obtener que, por tratarse de funciones holomorfas y acotadas, cada producto de Blaschke B tiene límite radial de módulo 1 en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, esto es, para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$ existe $B^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} B(re^{i\theta})$, y $|B^*(e^{i\theta})| = 1$. Para llegar a este resultado, hemos de desviarnos momentáneamente de nuestro objetivo principal e introducir una teoría básica de funciones armónicas y subarmónicas.

Nota. Adoptando este resultado como cierto, obtenemos entonces el siguiente comportamiento en los puntos de acumulación de ceros de productos de Blaschke:

> *Si B es un producto de Blaschke con sucesión exacta de ceros $\{a_n\}$ y $\mathbb{E} \subset \mathbb{D}$ es el conjunto de puntos de acumulación de ceros de B, entonces $|B|$ no admite extensión continua a ningún punto de $\mathbb{E}$.*

En efecto, si $a \in \mathbb{E}$ entonces es límite de una subsucesión de la sucesión de ceros de B. Por tanto, es

$$\liminf_{\mathbb{D} \ni z \to a} |B(z)| = 0.$$

Por otro lado, aceptando el hecho de que B tiene límite radial de módulo 1 en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, debemos concluir que

$$\limsup_{\mathbb{D} \ni z \to a} |B(z)| = 1,$$

probando que no es posible obtener continuidad de $|B|$ en a. ∎

1.3. Funciones armónicas reales

Las funciones armónicas suelen introducirse y estudiarse en asignaturas de ecuaciones en derivadas parciales, pero cuando nos restringimos al plano, las técnicas de variable compleja hacen su aparición de manera natural, creándose de este modo una interacción que hace que ambas disciplinas se enriquezcan una de la otra. En lo que sigue nos limitaremos a exponer de manera concisa los resultados básicos de funciones armónicas reales en el plano complejo.

Definición 1.14 (Función armónica). Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si es de clase $\mathscr{C}^2$ y satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \equiv 0, \text{ en } \Omega.$$

Los primeros ejemplos de funciones armónicas los encontramos tomando las partes reales (o imaginarias) de funciones holomorfas. Y, básicamente, así son todas las funciones armónicas en el plano, ya que es fácil probar que si u es armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ entonces existe f holomorfa en $\mathbb{D}(z_0, r)$ tal que $u = \operatorname{Re} f$ en $\mathbb{D}(z_0, r)$, esto es, *toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa.*

Como consecuencia de este resultado, las funciones armónicas satisfacen la **propiedad del valor medio**: si u es armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $\mathbb{D}(z_0, R) \subseteq \Omega$ entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{\theta})\, d\theta, \quad \text{para todo } r \in [0, R).$$

Las funciones armónicas también satisfacen un **principio del máximo**, una de cuyas versiones se puede enunciar como sigue. *Si u es armónica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ y $\limsup_{D \ni z \to \xi} u(z) \le M$ para todo $\xi \in \partial_\infty D$, entonces $u(z) < M$ para todo $z \in D$, o $u \equiv M$ en D.*

Hay que hacer notar que si u es armónica entonces $-u$ también lo es, lo que da lugar a un **principio del mínimo para funciones armónicas**: *si u es armónica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ y $\liminf_{D \ni z \to \xi} u(z) \ge m$ para todo $\xi \in \partial_\infty D$, entonces $u(z) > m$ para todo $z \in D$, o $u \equiv m$ en D.*

El **problema de Dirichlet** en un dominio D con valores en la frontera ∂D dados por una función continua f plantea encontrar, si es posible, una función u, armónica en D, continua en $\overline{D}$ y tal que $u_{|\partial D} \equiv f$. Como consecuencia del principio del máximo (y del mínimo) obtenemos la unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet. Cuando el problema de Dirichlet siempre tenga solución para cualquiera que sea la función continua elegida en la frontera del dominio, diremos que es un **dominio regular para el problema de Dirichlet**.

El problema de saber qué dominios del plano son regulares para el problema de Dirichlet es de por sí bastante complicado. Se sabe que si cada componente conexa del complemento del dominio D consta de más de un punto, entonces dicho dominio es regular para el problema de Dirichlet. En particular, el disco unidad

$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ es regular para el problema de Dirichlet, y la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ con valores en la frontera dados por una función f, continua en $\partial\mathbb{D}$, viene dada por

$$(\star)\qquad u(z)=\begin{cases} P[f](z), & \text{si } z\in\mathbb{D},\\ f(z), & \text{si } z\in\partial\mathbb{D},\end{cases}$$

donde $P[f]$ se conoce como la *integral de Poisson de f*:

$$P[f](z)=P[f](re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_r(\theta-t)\,dt,\qquad z=re^{i\theta}\in\mathbb{D},$$

siendo $P_r(t)=\frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$ lo que se conoce como núcleo de Poisson. Sus propiedades básicas incluyen las propias de una *"aproximación de la identidad"*.

(1) $P_r(t)>0$.

(2) Para cada $r\in[0,1)$, la función $t\in\mathbb{R}\mapsto P_r(t)=\frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$ es continua en $\mathbb{R}$, es periódica de periodo 2π, es simétrica ($P_r(t)=P_r(-t)$), y es decreciente en $[0,\pi]$. (Nota: $P_r(0)=\frac{1+r}{1-r}$ y $P_r(\pi)=\frac{1-r}{1+r}$).

(3) La función u, dada por $u(re^{it})=P_r(t)$, es armónica en $\mathbb{D}$, ya que $P_r(t)=\operatorname{Re}\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}$.

(4) Si $\delta\in(0,\pi]$ entonces $P_r(t)\xrightarrow{r\to 0}0$ uniformemente en $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

(5) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,dt=1$, para todo $r\in[0,1)$.

La integral de Poisson de una función continua en $\partial\mathbb{D}$ es una función armónica en $\mathbb{D}$, y esto es porque el núcleo de Poisson es la parte real de una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Igualmente ocurre si solo tomamos la integral de Poisson de una función integrable, o más generalmente, la de una medida μ en $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, el espacio de las medidas de Borel finitas con signo sobre $\mathbb{T}$ (indistintamente $\partial\mathbb{D}$). O sea, el hecho de que el núcleo de Poisson sea la parte real de una función holomorfa en $\mathbb{D}$ nos dice que la integral de Poisson de una medida $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$,

$$P[d\mu](re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}P_r(\theta-t)\,d\mu(t),\quad re^{i\theta}\in\mathbb{D},$$

es también una función armónica en $\mathbb{D}$. Ahora bien, en el caso de una función continua f en $\mathbb{T}$, tenemos que $P[f]$ se extiende de manera continua a $\overline{\mathbb{D}}$, siendo la extensión en $\partial\mathbb{D}$ igual a f, lo que equivale a decir que $P_r*f\to f$ uniformemente en $\mathbb{T}$ cuando $r\to 1^-$. ¿Es que podemos afirmar algo análogo cuando f es integrable?

Para responder a esta pregunta hacemos unas observaciones previas.

Definición 1.15 (Espacios h^p). Decimos que $u\in h^p$ si u es armónica en $\mathbb{D}$ y $\sup_{0<r<1}M_p(r,u)<\infty$ donde

$$M_p(r,u)=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|u(re^{i\theta})\big|^p\,d\theta\Big)^{1/p},\qquad 1\le p<\infty,$$
$$M_\infty(r,u)=\max_{|z|=r}|u(z)|=\max_{|z|\le r}|u(z)|,\qquad \text{(por el principio del máximo)}.$$

Observamos que el hecho de que u sea armónica en $\mathbb{D}$ ya implica que $M_p(r,u)$ $(1\le p\le\infty)$ es finita cualquiera que sea $r\in(0,1)$. Lo importante de esta definición es que, para $u\in h^p$, existe $C>0$ tal que $M_p(r,u)\le C$ para todo $r\in(0,1)$.

Teorema 1.16. 1) *Si $f\in L^p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$, entonces $u=P[f]\in h^p$ y $\sup_{0<r<1}M_p(r,u)\le\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$.*

2) *Si $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$, entonces $u=P[d\mu]\in h^1$ y $\sup_{0<r<1}M_1(r,u)\le\|d\mu\|$, donde $\|d\mu\|$ denota la variación total de μ.*

Demostración. 1) En este caso tenemos $u(re^{i\theta})=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})\,dt.$

<u>Para $1\le p<\infty$</u>, tenemos por la desigualdad de Minkowski (o Jensen)

$$\begin{aligned}M_p(r,u)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|u(re^{i\theta})\big|^p\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})\,dt\Big|^p\,d\theta\\ &\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(e^{it})\big|^p\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\,d\theta}^{=1}\,dt=\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.\end{aligned}$$

Si $p=\infty$, la situación es más simple,

$$\left|u(re^{i\theta})\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(e^{it})\,dt\right| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,dt}^{=1},$$

lo que implica que $M_\infty(r,u) \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

2) En este caso es $u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(e^{it})$, y de nuevo,

$$\begin{aligned} M_1(r,u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(re^{i\theta})\right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\left|\mu\right|(e^{it})\,d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\theta\,d\left|\mu\right|(e^{it}) = \|d\mu\|. \end{aligned}$$

∎

Ya podemos responder a la pregunta anterior y dar el siguiente resultado de **convergencia de $P[f]$ a f**.

Teorema 1.17. *Supongamos que $f \in L^p$, para algún $p \in [1,\infty]$, o supongamos que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Para $u = P[f]$, o $u = P[d\mu]$, ponemos $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$. Entonces*

(A) *Si $1 \le p < \infty$, $\|u_r - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow{r\to 1^-} 0$.*
($p=\infty$ no puede incluirse porque $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ corresponde con convergencia uniforme y de darse $\|u_r - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \to 0$, al ser u_r continua, tendríamos que f también habría de serlo).

(B) *Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ entonces u resuelve el problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ con valores en la frontera dados por f. O sea, u es armónica en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y $u|_{\mathbb{T}} = f$.* ✓

(C) *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $u_r \xrightarrow{w^*} f$.*

(D) *Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, entonces $u_r \xrightarrow{w^*} \mu$.*

Demostración. (A) Sea τ_t el operador traslación $\tau_t f(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta-t)})$. Sabemos que τ_t es continuo en $L^p(\mathbb{T})$, o sea que $\tau_t f \xrightarrow[t\to 0]{} f$ en $L^p(\mathbb{T})$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que para $t \in (-\delta,\delta)$, $\|\tau_t f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fijado $\delta > 0$, como $P_r(t) \xrightarrow{r\to 1^-} 0$ uniformemente en $[\delta,\pi]$, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que para $r \in (r_0,1)$, $P_r(t) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}$ para todo $t \in [\delta,\pi]$.

Con estos preliminares ya abordamos la convergencia en norma $L^p(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned} \|u_r - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u_r(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i\theta})\right] P_r(t)\,dt\right|^p d\theta\right)^{1/p} \\ \left\{\begin{smallmatrix}\text{Minkowski}\\ (1\le p<\infty)\end{smallmatrix}\right\} &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} P_r(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\delta} + \int_{\delta\le|t|\le\pi}\right)\|\tau_t f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(t)\,dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(B) ✓

(C) Como $L^\infty(\mathbb{T})$ es el espacio dual de $L^1(\mathbb{T})$, hemos de ver que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_r(e^{i\theta})\,g(e^{i\theta})\,d\theta \xrightarrow[r\to 1^-]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,g(e^{i\theta})\,d\theta,\ \forall g \in L^1(\mathbb{T}).$$

Sea pues $g \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_r(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, f(e^{it})\, dt\, g(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)\, g(e^{i\theta})\, d\theta\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(P_r * g\right)(e^{it})\, dt \\ &\xrightarrow{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, g(e^{it})\, dt,\end{aligned}$$

ya que, por (A), $\|P_r * g - g\|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow{r\to 1^-} 0$ y, por tanto, $P_r * g \xrightarrow{w} g$.

(D) Como $\mathcal{M} = \mathscr{C}(\mathbb{T})^*$, hemos de ver que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_r(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta \xrightarrow{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\, d\mu(\theta),\ \forall g \in \mathscr{C}(\mathbb{T}).$$

Sea pues $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$, usamos (B), que nos dice $\|P_r * g - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{r\to 1^-} 0$, para obtener lo deseado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_r(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu(t)\, g(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)\, g(e^{i\theta})\, d\theta\right] d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(P_r * g\right)(e^{it})\, d\mu(t) \\ &\xrightarrow{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\, d\mu(t).\end{aligned}$$

∎

La relación que existe entre funciones armónicas en h^p y su comportamiento en la frontera es aún más fuerte. Los siguientes son **teoremas de representación**.

Teorema 1.18. *Supongamos que $u \in h^p$.*

- *Si $p = 1$, existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tal que $u = P[d\mu]$. Esto, a su vez, equivale a decir que u puede escribirse como diferencia de dos funciones armónicas positivas en $\mathbb{D}$.*
- *Si $1 < p \le \infty$, entonces existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $u = P[f]$.*

Demostración. Para $0 < r < 1$, consideremos $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{T}$ (o $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$). Observemos que las normas L^p de u_r son uniformemente acotadas para $r \in (0,1)$,

$$\|u_r\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_r(e^{it})|^p\, dt\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p\, dt\right)^{1/p} = M_p(r,u) \le \|u\|_{h^p},$$

Si $1 < p \le \infty$, tenemos que L^p es el espacio dual de $L^{p'}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), luego al decir que $\{u_r\}$ es un conjunto acotado en un espacio dual, podemos extraer una sucesión $r_n \uparrow 1$ de tal manera que u_{r_n} converge en la topología débil estrella a una cierta $f \in L^p$. En otras palabras, tenemos que para toda $g \in L^{p'}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{r_n}(e^{it})\, g(e^{it})\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, g(e^{it})\, dt,$$

o sea,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it})\, g(e^{it})\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, g(e^{it})\, dt.$$

En particular, para $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, observamos que $P_r(\theta - t) \in L^{p'}$ pues está en L^∞, luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt.$$

Pero por otro lado, observamos que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt$ es la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad unidad $\mathbb{D}$ con valores en la frontera dados por $u(r_n e^{it})$. Es evidente que esa solución viene dada por $U(re^{i\theta}) = u(rr_n e^{i\theta})$, pues ésta es una función armónica en $\mathbb{D}$, es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y sus valores en la frontera son $U(e^{i\theta}) = u(r_n e^{i\theta})$.

Así pues, del límite anterior se obtiene

$$u(re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} u(r_n re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt.$$

En el caso en que $p=1$, tenemos que $\{u_r : r\in(0,1)\}$ es un conjunto acotado en $L^1(\mathbb{T})$. Resulta que $L^1(\mathbb{T})$ no es dual de ningún espacio, pero como $L^1(\mathbb{T})$ se puede sumergir en $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, y éste sí es el espacio dual de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, entonces podemos extraer una sucesión $\{r_n\}$, $r_n \uparrow 1$ tal que $u_{r_n} \overset{w^*}{\to} \mu$, para cierta $\mu\in\mathcal{M}$. Esto quiere decir que si $v\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{r_n}(e^{it})\, v(e^{it})\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})\, d\mu(t).$$

En particular, para $e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}$, tenemos $v(e^{it}) = P_r(\theta-t)\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$, luego

$$u(re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} u(r_n re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu(t).$$

Ahora, descomponiendo $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ en diferencia de su parte positiva y su parte negativa, $\mu=\mu^+-\mu^-$, llegamos a escribir u como diferencia de dos funciones armónicas positivas:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu^+(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu^-(t) := u_1(re^{i\theta}) - u_2(re^{i\theta}).$$

Por otro lado, si u se escribe como diferencia de dos funciones armónicas positivas en $\mathbb{D}$, $u=u_1-u_2$, entonces, usando la propiedad del valor medio, observamos que está en h^1:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(re^{i\theta})\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_2(re^{i\theta})\, d\theta = u_1(0)+u_2(0), \qquad r\in(0,1). \qquad \blacksquare$$

1.4. Funciones subarmónicas

Del hecho que el disco unidad es regular para el problema de Dirichlet resulta que cualquier dominio de Jordan también lo es, en particular, cualquier disco es regular para el problema de Dirichlet. Con ayuda de esto y del principio del máximo (y del mínimo) podemos caracterizar las funciones armónicas en un dominio D como aquellas funciones que son continuas en D y satisfacen la **propiedad local del valor medio**, o sea, que satisfacen que para cada $z_0\in D$ existe $r_0>0$ tal que $\mathbb{D}(z_0,r_0)\subseteq D$ y

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \text{para todo } r\in[0,r_0).$$

Esta caracterización nos permite introducir una clase más general de funciones con propiedades similares a las armónicas y que son fundamentales a la hora de resolver el problema de Dirichlet en dominios más generales. Estamos hablando de las funciones subarmónicas (y por ende, de las superarmónicas). En vez de exigirles satisfacer la propiedad del valor medio, solo les exigiremos que satisfagan la **propiedad de la submedia local**, esto es, que satisfagan que para cada $z_0\in D$ existe $r_0>0$ tal que $\mathbb{D}(z_0,r_0)\subseteq D$ y

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \text{para todo } r\in[0,r_0).$$

Esta teoría de funciones subarmónicas se podría desarrollar dentro de la clase de las funciones continuas, pero se obtiene más generalidad (sin perder propiedades básicas) si consideramos la clase de las funciones semicontinuas superiormente. Introducimos esta clase a continuación.

Funciones semicontinuas superiormente (*s.c.s.*).

Definición 1.19. Sea S un conjunto de $\mathbb{C}$. Decimos que una función $u: S\to[-\infty,\infty]$ es **semicontinua superiormente (*s.c.s.*) en $a\in S$** si

$$\limsup_{S\ni z\to a} u(z) \le u(a).$$

Decimos que u **es *s.c.s.* en S** si lo es en cada punto de S.

Enunciemos algunas propiedades de estas funciones:

$\boxed{1}$ Si u es continua entonces, evidentemente, u es *s.c.s.*.

$\boxed{2}$ En caso de tener sentido, la suma de dos funciones *s.c.s.* es *s.c.s.*. Los casos sin sentido se dan cuando, por ejemplo, para un mismo punto z_0 se tiene $u_1(z_0) = -\infty$ y $u_2(z_0) = +\infty$.

$\boxed{3}$ El máximo de dos funciones *s.c.s.* es *s.c.s.*.

$\boxed{4}$ Si S es cerrado en $\mathbb{C}$, entonces χ_S es *s.c.s.*.

$\boxed{5}$ $u : S \to [-\infty,\infty]$ es *s.c.s.* si, y solo si, para todo $t \in \mathbb{R}$, $u^{-1}\big([-\infty, t)\big)$ es abierto en S.

$\boxed{6}$ Si S es compacto y $u : S \to [-\infty,\infty)$ es *s.c.s.* entonces u está acotada superiormente y alcanza su máximo en S.

$\boxed{7}$ Sea $u : S \to [-\infty,\infty]$ *s.c.s.* y sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua creciente (se entiende Φ definida en $-\infty$ e ∞ de forma natural), entonces $\Phi \circ u$ es *s.c.s.*.

$\boxed{8}$ Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones *s.c.s.* de S en $[-\infty,\infty]$ y $u_n \searrow u$, entonces u es *s.c.s.* en S.

Demostración. Sea $a \in S$. Si $u(a) = +\infty$, no hay nada que probar. Así que supongamos que $u(a) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $u_n(a) \searrow u(a)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n(a) - u(a)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $u(a) \leq u_N(a) < u(a) + \varepsilon$. Ahora como $\limsup_{z\to a} u_N(z) \leq u_N(a) < u(a) + \varepsilon$, existe $r_N > 0$ tal que si $z \in \mathbb{D}(a, r_N) \cap S$ entonces $u_N(z) < u(a) + \varepsilon$. Finalmente, como $u_N \geq u$, resulta que si $z \in \mathbb{D}(a, r_N) \cap S$ entonces $u(z) \leq u_N(z) < u(a) + \varepsilon$, probando que $\limsup_{z\to a} u(z) \leq u(a)$. ∎

$\boxed{9}$ De igual manera se prueba que si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones *s.c.s.* se S en $[-\infty,\infty]$, entonces $u(z) = \inf_n u_n(z)$ es *s.c.s.* en S.

$\boxed{10}$ Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $u : D \to [-\infty,\infty)$ *s.c.s.*. Sea K un subconjunto compacto de D. Entonces existe una sucesión decreciente $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$, acotadas superiormente (por $\max_K u$ en el caso en que $u \not\equiv -\infty$), tal que $f_n \searrow u$ en K.

Demostración. Si $u_{|K} \equiv -\infty$, entonces $f_n \equiv -n$ hace el trabajo.
Supongamos entonces que u no es idénticamente igual a $-\infty$ en K. Por $\boxed{6}$ u está acotada superiormente en K y alcanza su máximo (finito porque $u \not\equiv -\infty$) en K, al que podemos llamar M. Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{C}$,

$$f_n(z) = \sup_{\xi\in K}\big(u(\xi) - n|\xi - z|\big).$$

Observamos que estas f_n hacen el trabajo.

$\boxed{10.1}$ $f_{n+1}(z) \leq f_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

↓ Para cada $\xi \in K$ y cada $z \in \mathbb{C}$, $u(\xi) - (n+1)|\xi - z| \leq u(\xi) - n|\xi - z| \leq f_n(z)$. Por tanto, tomando supremo cuando $\xi \in K$ en el lado izquierdo, tenemos $f_{n+1}(z) \leq f_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$. ↑

$\boxed{10.2}$ Para todo n, $u(z) \leq f_n(z) \leq M$, donde la primera desigualdad es para $z \in K$ y la segunda para $z \in \mathbb{C}$.

↓ Como $u \leq M$ en K, entonces para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, tenemos trivialmente

$$f_n(z) = \sup_{\xi\in K}\big(u(\xi) - n|\xi - z|\big) \leq M.$$

Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in K$

$$u(z) = \big(u(z) - n|z - z|\big) \leq \sup_{\xi\in K}\big((u(\xi) - n|\xi - z|\big) = f_n(z).$$ ↑

$\boxed{10.3}$ f_n es continua en $\mathbb{C}$.

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, y $\xi \in K$, tenemos

$$\big(u(\xi) - n|z_1 - \xi|\big) - \big(u(\xi) - n|z_2 - \xi|\big) = n\big(|z_2 - \xi| - |z_1 - \xi|\big) \le n\big(|z_2 - z_1| + |z_1 - \xi| - |z_1 - \xi|\big) = n|z_2 - z_1|.$$

O sea,

$$u(\xi) - n|z_1 - \xi| \le u(\xi) - n|z_2 - \xi| + n|z_2 - z_1| \le f_n(z_2) + n|z_2 - z_1|.$$

Luego tomando supremos cuando $\xi \in K$, tenemos

$$f_n(z_1) \le f_n(z_2) + n|z_2 - z_1|.$$

De manera análoga obtenemos $f_n(z_2) - f_n(z_1) \le n|z_2 - z_1|$, con lo que concluimos que f_n es Lipschitziana con constante de Lipschitz inferior a n,

$$\big|f_n(z_1) - f_n(z_2)\big| \le n|z_2 - z_1|.$$

$\boxed{10.4}$ Para cada $a \in K$, $f_n \searrow u(a)$.

Sea $a \in K$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\limsup_{z\to a} u(z) \le u(a)$, existe $r > 0$ tal que $u(z) < u(a) + \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}(a, r) \cap K$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M - r n_0 \le u(a) + \varepsilon$. Ahora para $\xi \in K$ y $n \ge n_0$ tenemos

$$\begin{cases} u(\xi) - n|\xi - a| < u(a) + \varepsilon, & \text{si } \xi \in \mathbb{D}(a, r) \cap K, \\ u(\xi) - n|\xi - a| \le M - nr \le M - n_0 r \le u(a) + \varepsilon, & \text{si } |\xi - a| \ge r. \end{cases}$$

En cualquier caso, tenemos para $\xi \in K$ y $n \ge n_0$,

$$u(\xi) - n|\xi - a| \le u(a) + \varepsilon,$$

de donde se sigue, tomando el supremo cuando $\xi \in K$,

$$f_n(a) \le u(a) + \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_0.$$

Como, por $\boxed{10.2}$, $u(a) \le f_n(a)$ para todo n, obtenemos entonces que $\lim_n f_n(a) = u(a)$.

$\boxed{11}$ Lo anterior puede ser generalizado a esto otro: *Supongamos que* $u : S \to [-\infty, \infty]$. *Entonces* u *es s.c.s. en* S *si, y solo si, existe una sucesión decreciente de funciones continuas* $\{f_n\} \subset \mathscr{C}(S, \overline{\mathbb{R}})$ *tal que* $u(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in S$.

Demostración. Claramente, si existe una sucesión decreciente de funciones continuas $\{f_n\} \subset \mathscr{C}(S, \overline{\mathbb{R}})$ tal que $u(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in S$, entonces u es *s.c.s.* en S.

Por otro lado, supongamos que u es *s.c.s.* en S. Entonces, si es necesario, componiendo con un homeomorfismo creciente Φ de $\overline{\mathbb{R}}$ sobre $[0, 1]$ (del tipo, $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$) y aplicando $\boxed{7}$, podemos suponer también, sin pérdida de generalidad que $u(S) \subseteq [0, 1]$.

Ante esta suposición, observamos que $M(z, r) = \sup\{u(\xi) : \xi \in \mathbb{D}(z, r) \cap S\}$, $z \in S$, $r > 0$, es una función, mayor o igual que 0, que crece con r cuando z está fijo y, consecuentemente, las medias integrales,

$$I(z, r) = \frac{1}{r} \int_0^r M(z, t)\, dt, \qquad z \in S, \quad r > 0,$$

están bien definidas, son crecientes en r para z fijo y son continuas en $z \in S$ para r fijo.

Veamos que $I(z, r)$ crece con r. Fijemos $z \in S$ y tomemos $0 < r_1 < r_2$. Entonces el hecho de que $M \ge 0$ y que crezca con r da

$$\begin{aligned} I(z, r_2) - I(z, r_1) &= \frac{1}{r_1 r_2} \Big[r_1 \int_0^{r_2} M(z, t)\, dt - r_2 \int_0^{r_1} M(z, t)\, dt \Big] \\ &= \frac{1}{r_1 r_2} \Big[\overbrace{(r_1 - r_2)}^{\le 0} \int_0^{r_1} M(z, t)\, dt + r_1 \int_{r_1}^{r_2} M(z, t)\, dt \Big] \\ &\ge \frac{1}{r_1 r_2} \Big[(r_1 - r_2) M(z, r_1) r_1 + r_1 M(z, r_1)(r_2 - r_1) \Big] = 0. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $I(z,r)$ es continua en z. Es más, veamos que para $r>0$ fijo, $I(\cdot,r)$ es lipschitziana con constante menor o igual que $\frac{1}{r}$. Para ello, tomemos $z_1,\ z_2\in S$, observemos que entonces $M(z_2,t)\leq M(z_1,t+|z_2-z_1|)$, $t>0$, y recordemos que $0\leq M(z,t)\leq 1$, pues $u(S)\subseteq[0,1]$, para obtener

$$\begin{aligned}I(z_2,r)&=\frac{1}{r}\int_0^r M(z_2,t)\,dt\leq\frac{1}{r}\int_0^r M(z_1,t+|z_2-z_1|)\,dt=\frac{1}{r}\int_{|z_2-z_1|}^{r+|z_2-z_1|}M(z_1,t)\,dt\\&\leq\frac{1}{r}\int_0^r M(z_1,t)\,dt+\frac{1}{r}\int_r^{r+|z_2-z_1|}M(z_1,t)\,dt\\&\leq I(z_1,r)+\frac{1}{r}M(z_1,r+|z_2-z_1|)\,|z_2-z_1|\leq I(z_1,r)+\frac{1}{r}|z_2-z_1|.\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que $I(z_1,r)\leq I(z_2,r)+\frac{1}{r}|z_1-z_2|$, dando por resultado que

$$\big|I(z_2,r)-I(z_1,r)\big|\leq\frac{1}{r}|z_2-z_1|.$$

Una última observación. Del hecho de que u sea *s.c.s.* se tiene que $M(z,r)\searrow u(z)$ cuando $r\searrow 0$, por lo que $I(z,r)\searrow u(z)$ cuando $r\searrow 0$. Así que juntando todo esto, basta tomar una sucesión $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ con $r_n\searrow 0$, para concluir que $f_n(z)=I(z,r_n)$, $n\in\mathbb{N}$, define una sucesión decreciente de funciones continuas en S con límite puntual u en S. ∎

$\boxed{12}$ Como consecuencia de estas últimas propiedades obtenemos que si u es *s.c.s.* en S, entonces u es Borel-medible en cada subconjunto boreliano de S.

$\boxed{13}$ Además, si D es abierto, $u:D\to[-\infty,\infty)$ es *s.c.s.* y $K\subset$ es un subconjunto compacto de D, entonces u es Borel medible en K y está acotada superiormente en K (de hecho alcanza el máximo en K), por tanto, la integral de u sobre K tiene perfecto sentido (aunque pueda ser igual a $-\infty$).

Funciones subarmónicas ($\mathcal{SH}$).

Definición 1.20. Sea $D\subset\mathbb{C}$ dominio. Sea $u:D\to[-\infty,\infty)$. Decimos que u es **subarmónica** en D, denotado $u\in\mathcal{SH}(D)$, si

(i) $u\not\equiv-\infty$.

(ii) u es *s.c.s.* en D.

(iii) u satisface la propiedad de la submedia local en D que, recordamos, significa que para cada $z_0\in D$ existe $r_0>0$ tal que $\mathbb{D}(z_0,r_0)\subseteq D$ y

$$u(z_0)\leq L(z_0,r,u):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta,\qquad\text{para todo } r\in[0,r_0).$$

Notemos que considerar la integral en (iii) tiene perfecto sentido por la propiedad $\boxed{13}$ de las funciones semicontinuas. Dejamos abierta la posibilidad de que alguna de dichas integrales pueda ser $-\infty$, aunque más adelante veremos que esto no es posible.

A continuación enunciamos una serie de propiedades básicas.

$\boxed{1}$ Si u es subarmónica en un dominio D y $z_0\in D$, entonces existe $R>$ tal que $\mathbb{D}(z_0,R)\subseteq D$ y

$$u(z_0)\leq A(z_0,r,u):=\frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(z_0,r)}u(z)\,dA(z),\quad\text{para todo } r\in(0,R).$$

↲ En efecto. Primero observamos que la integral sobre discos del tipo $\mathbb{D}(z_0,r)$, tiene sentido por lo anterior. Ahora, de la propiedad de la submedia local, dado $z_0\in$ existe $R>0$ tal que $\mathbb{D}(z_0,R)\subseteq D$ y

$$u(z_0)\leq L(z_0,r,u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta,\qquad\text{para todo } r\in(0,R).$$

Por tanto,

$$\int_0^r 2\rho\, u(z_0)\, d\rho \le \int_0^r \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})\, d\theta\, \rho\, d\rho, \qquad \text{para todo } r\in(0,R),$$

de donde se sigue que

$$r^2\, u(z_0) \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}(z_0,r)} u(z)\, dA(z) = r^2\, A(z_0,r,u), \qquad \text{para todo } r\in(0,R),$$

que es lo que queríamos probar. ⮥

$\boxed{2}$ La subarmonicidad es una propiedad local.

$\boxed{3}$ Si u es subarmónica en un dominio D y $D'\subset D$ es dominio también, entonces u es subarmónica en D'.

$\boxed{4}$ Supongamos que u_1, u_2 son subarmónicas un dominio D y que λ_1 y λ_2 son números positivos, entonces $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$ es o bien subarmónica en D o bien $\equiv -\infty$. (Veremos que esto último es imposible).

$\boxed{5}$ Supongamos que $u: D\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathscr{C}^2$. Entonces $u\in\mathcal{SH}(D)$ si, y solo si, $\Delta u\ge 0$ en D.

Demostración. Para cada $z\in D$ tomamos $r_z=\operatorname{dist}(z,\partial D)$. Entonces $\mathbb{D}(z,r_z)\subseteq D$. Como $u\in\mathscr{C}^2(D)$, entonces, para $z\in D$, la función de medias integrales $L(z,\rho,u)$ está en $\mathscr{C}^1(0,r_z)$. Luego por el Teorema de Green, para $\rho\in(0,r_z)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho}L(z,\rho,u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}[u(z+\rho e^{i\theta})]\, d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[u_x(z+\rho e^{i\theta})\cos\theta + u_y(z+\rho e^{i\theta})\operatorname{sen}\theta]\, d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z|=\rho} u_x(\xi)\frac{dy}{\rho} - u_y(\xi)\frac{dx}{\rho}\\
&= \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|\xi-z|\le\rho}(u_{xx}(\xi)+u_{yy}(\xi))\, dA(\xi) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|\xi-z|\le\rho}\Delta u(\xi)\, dA(z).
\end{aligned}$$

Supongamos inicialmente que $u\in\mathcal{SH}(D)$ y que, por reducción al absurdo, existe $z_0\in D$ tal que $\Delta u(z_0)<0$. Como $u\in\mathscr{C}^2(D)$, existe $r_0>0$ tal que $\Delta u(z)<0$ para todo $z\in\mathbb{D}(z_0,r_0)\subset D$. Por lo anterior tenemos entonces que

$$\frac{d}{d\rho}L(z_0,\rho,u) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0|\le\rho}\Delta(z)\, dA(z)<0, \qquad \rho\in(0,r_0),$$

lo que implica que $L(z_0,\rho,u)$ es una función decreciente de $\rho\in[0,r_0]$. En particular, tendríamos

$$u(z_0) = L(z_0,0,u) > L(z_0,\rho,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad \text{para todo } \rho\in(0,r_0),$$

lo cual contradice la propiedad de la submedia local.

Supongamos ahora que $\Delta u\ge 0$ en D. Entonces u satisface (i) y (ii) trivialmente. Para ver la propiedad de la submedia local, tomamos $z_0\in D$ y $r_0>0$ tales que $\mathbb{D}(z_0,r_0)\subset D$. Por la anterior fórmula tenemos

$$\frac{d}{d\rho}L(z_0,\rho,u) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0|\le\rho}\Delta u(z)\, dA(z)\ge 0.$$

Esto nos dice que $L(z_0,\rho,u)$ es una función creciente de $\rho\in[0,r_0)$ y, por tanto, que

$$u(z_0) = L(z_0,0,u) \le L(z_0,\rho,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})\, d\theta, \qquad \text{para todo } \rho\in(0,r_0).$$ ∎

$\boxed{6}$ Si h es armónica en D, entonces h, $-h$, $|h|$ son subarmónicas en D.

$\boxed{7}$ Si u y $-u$ son subarmónicas en D entonces u es armónica en D.

$\boxed{8}$ Si f es holomorfa en D y no idénticamente igual a 0, entonces $\log|f|$ es subarmónica en D.

↓Claramente, $\log|f|$ aplica D en $[-\infty,\infty)$, no es idénticamente igual a $-\infty$, y es continua en el sentido amplio, luego es *s.c.s.* en D. Finalmente, para comprobar la propiedad de la submedia local, fijamos $z_0 \in D$. Si $f(z_0) = 0$ entonces es $\log|f(z_0)| = -\infty \leq L(z_0, r, \log|f|)$ para todo $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$. Si, por el contrario, $f(z_0) \neq 0$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$ y $f(z) \neq 0$, cualquiera que sea $z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$. Esto implica que existe una rama holomorfa de $\log f$ en $\mathbb{D}(z_0, r_0)$, de donde se sigue que $\log|f|$ es armónica en $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ y, consecuentemente, por la propiedad del valor medio para funciones armónicas, $\log|f(z_0)| = L(z_0, r, \log|f|)$ para todo $r \in [0, r_0)$. ↑

$\boxed{9}$ Si $u \in \mathcal{SH}(D)$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y convexa ($\phi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)$), entonces $\phi \circ u \in \mathcal{SH}(D)$.

↓Claramente, $\phi \circ u : D \to [-\infty,\infty)$, $\phi \circ u \not\equiv -\infty$, y $\phi \circ u$ es *s.c.s.* en D porque ϕ es continua y u es *s.c.s.* en D. Finalmente la propiedad de la submedia local: Sea $z_0 \in D$, haciendo uso de que u satisface la propiedad de la submedia local, encontramos $r_0 > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset D$ y

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \text{para todo } r \in [0, r_0).$$

Ahora usamos, en primer lugar, que ϕ es creciente, y seguidamente, que ϕ es convexa para aplicar la desigualdad de Jensen:

$$\phi \circ u(z_0) \leq \phi\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\Big) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi \circ u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \text{para todo } r \in [0, r_0).$$ ↑

$\boxed{10}$ Si h es armónica en D, entonces $h^+ := \max\{h, 0\}$, y $h^- = (-h)^+$ son subarmónicas en D, ya que $\phi(x) = x^+$ es creciente y convexa en $\mathbb{R}$.

$\boxed{11}$ Si $f \in \mathcal{H}ol(D)$ y $p > 0$, entonces $|f|^p = e^{p\log|f|}$ es subarmónica en D, ya que $\phi(x) = e^{px}$ es creciente y convexa en $\mathbb{R}$.

$\boxed{12}$ Si u es subarmónica en D y $p \geq 1$, entonces u^+ y $(u^+)^p$ son subarmónicas en D, ya que $\phi_(x) = x^+$ y, cuando $p \geq 1$, $\phi_p(x) = (x^+)^p$ son crecientes y convexas en $\mathbb{R}$.

A continuación enunciamos y probamos un principio del máximo para funciones subarmónicas. Recordemos la notación habitual: Si D es un dominio de $\mathbb{C}$ entonces $\partial_\infty D$ denota a ∂D si D es acotado, y en caso contrario, denota a $\partial D \cup \{\infty\}$.

Teorema 1.21 (Principio del Máximo). *Sean $u : D \to [-\infty,\infty)$ subarmónica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ y $M \in \mathbb{R}$. Supongamos que*

$$\limsup_{D\ni z\to\xi} u(z) \leq M, \qquad \textit{para todo } \xi \in \partial_\infty D.$$

Entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$. Además si se da igualdad para algún $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Demostración. Sea $K = \sup_{z\in D} u(z) \in (-\infty,\infty]$. Por supuesto, $K > -\infty$, pues $u \not\equiv -\infty$. Nuestra intención es probar que $K \leq M$. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en D, que podemos suponer $z_n \to z^* \in D \cup \partial_\infty D$, tal que $u(z_n) \to K$. Distinguimos entonces 2 casos.
<u>Caso 1</u>: $z^* \in \partial_\infty D$. Entonces $K = \lim_n u(z_n) \leq \limsup_{D\ni z\to z^*} u(z) \leq M$.
<u>Caso 2</u>: $z^* \in D$. Entonces, usando la semicontinuidad superior de u y que $K = \sup_D u$, tenemos

$$K = \lim_n u(z_n) \leq \limsup_{D\ni z\to z^*} u(z) \leq u(z^*) \leq K \quad \Longrightarrow \quad K = u(z^*) < \infty.$$

Consideremos ahora $S = \{z \in D : u(z) = K\}$, y observemos en primer lugar que $S \neq \emptyset$, pues $z^* \in S$.

Veamos que <u>S es abierto</u>. Sea $z_0 \in S$ y sea $r_0 > 0$ tal que, por $\boxed{1}$, $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subseteq D$ y $u(z_0) \leq A(z_0, r_0, u)$. Como $u(z_0) = K = \max_D u$, entonces

$$K = u(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(z_0,r_0)} u(z)\, dA(z) \leq K,$$

de donde se sigue que $u(\xi) = K$ para casi todo $\xi \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$. Esto implica que para cada $\xi \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$ existe $\{\xi_n\} \subset \mathbb{D}(z_0, r_0)$ con $\xi_n \to \xi$ y $u(\xi_n) = K$, luego, por la semicontinuidad superior de u,

$$K = \lim_n u(\xi_n) \leq \limsup_{D \ni z \to \xi} u(z) \leq u(\xi),$$

Como también es $u(\xi) \leq K$, entonces la cadena anterior se convierte en igualdad, $u(\xi) = K$, lo que prueba que $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset S$, y así, que S es abierto.

Además S es cerrado en D. Sea $\{\xi_n\} \subset S$ con $\xi_n \to \xi_0 \in D$. Entonces la semicontinuidad superior de u y el hecho de que $K = \max_D u$, da

$$K = \lim_n u(\xi_n) \leq \limsup_{D \ni z \to \xi_0} u(z) \leq u(\xi_0) \leq K,$$

lo que prueba que $u(\xi_0) = K$, con lo que $\xi_0 \in S$ y, por tanto, prueba que S es cerrado en D.

Resulta que $S \neq \emptyset$, abierto y cerrado en D. Luego, como D es conexo, $S = D$, o sea, $u \equiv K$ en D y, por tanto, se sigue de aquí que $K \leq M$.

Este caso incluye también el caso de igualdad. ∎

Como consecuencia del Principio del máximo, probamos fácilmente la siguiente propiedad sobre mayorantes armónicas que, de hecho, se convertirá en una caracterización de funciones subarmónicas.

Teorema 1.22 (Principio de la mayorante armónica). *Sea $u \in \mathcal{SH}(D)$, donde D es un dominio en $\mathbb{C}$. Entonces u satisface el* ***Principio de la mayorante armónica****. O sea, para cada subdominio D' de D tal que $\overline{D'} \subset D$ y cada $h : \overline{D'} \to \mathbb{R}$ tal que h es armónica en D', continua en $\overline{D'}$, y satisface*

$$\limsup_{D' \ni z \to \xi} u(z) \leq h(\xi), \qquad \textit{para todo } \xi \in \partial_\infty D',$$

entonces se tiene que $u < h$ en D' o $u \equiv h$ en D'.

Demostración. Sea D' un subdominio de D, y sea h armónica en D' y continua en $\overline{D'}$ con $\limsup_{D' \ni z \to \xi} u(z) \leq h(\xi)$ para todo $\xi \in \partial D'$. Hemos de probar que $u < h$ en D' o que $u \equiv h$ en D'. Para ello, consideramos $v = u - h$, la cual es subarmónica en D' y, además, para todo $\xi \in \partial_\infty D'$.

$$\limsup_{D' \ni z \to \xi} v(z) = \limsup_{D' \ni z \to \xi} u(z) - h(\xi) \leq 0.$$

Luego, por el principio del máximo, $v < 0$ en D' o $v \equiv 0$ en D', o sea, $u < h$ en D' o $u \equiv h$ en D'. ∎

Teorema 1.23 (Caracterización de funciones subarmónicas por el principio de la mayorante armónica). *Supongamos que $D \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio y que $u : D \to [-\infty, \infty)$ es s.c.s. con $u \not\equiv -\infty$. Entonces u satisface la propiedad de la submedia local si y solo si u satisface el principio de la mayorante armónica.*

Demostración. Solo hay que probar que el principio de la mayorante armónica implica la propiedad de la submedia local. Sean $z_0 \in D$ y $R > 0$ tales que $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subset D$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión decreciente de funciones continuas en $\mathbb{C}$ acotadas superiormente por $\max_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} u$, tal que $f_n \searrow u$ en $\partial \mathbb{D}(z_0, R)$. Sea h_n la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}(z_0, R)$ con valores en la frontera dados por f_n, o sea, h_n es armónica en $\mathbb{D}(z_0, R)$, continua en $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)}$, y $h_n |_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} = f_n$. Observamos que $\limsup_{\mathbb{D}(z_0,R) \ni z \to \xi} u(z) \leq f_n(\xi) = h_n(\xi)$ para todo $\xi \in \partial \mathbb{D}(z_0, R)$, luego $u \leq h_n$ en $\mathbb{D}(z_0, R)$. En particular,

$$u(z_0) \leq h_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Ahora, como $\max_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} u \geq f_n$ y $f_n \searrow u$, el Teorema de la Convergencia Monótona implica que

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

de donde se sigue que u satisface la propiedad de la submedia local. ∎

Como consecuencia de esta caracterización de funciones subarmónicas, obtenemos que la propiedad de la submedia local se extiende a cualquier disco dentro del dominio de definición.

Corolario 1.24. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Para cada $z \in D$ sea $d_D(z) = \operatorname{dist}(z, \partial D)$. Entonces, para cada $z \in D$,*

$$u(z) \le L(z,r,u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta, \qquad \text{para todo } r \in \big(0, d_D(z)\big). \qquad \blacksquare$$

Veamos a continuación que las medias integrales de funciones subarmónicas son funciones crecientes.

Teorema 1.25. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Para cada $z \in D$ y cada r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2 < d_D(z)$,*

(a) $L(z_0, r_1, u) \le L(z_0, r_2, u)$.

(b) $A(z_0, r_1, u) \le A(z_0, r_2, u)$.

Demostración. Sea $z \in D$ y sean r_1, r_2 tales que $0 < r_1 < r_2 < d_D(z)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión decreciente de funciones continuas en $\mathbb{C}$ acotadas superiormente por $\max_{\partial\mathbb{D}(z,r_2)} u$, tal que $f_n \searrow u$ en $\partial\mathbb{D}(z_0, r_2)$. Sea h_n la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ con valores en la frontera dados por f_n.

Como $\limsup_{\mathbb{D}(z_0,R)\ni z\to\xi} u(z) \le f_n(\xi) = h_n(\xi)$ para todo $\xi \in \partial\mathbb{D}(z, r_2)$, entonces el principio de la mayorante armónica nos dice que $u \le h_n$ en $\mathbb{D}(z, r_2)$. Así,

$$L(z, r_1, u) \le L(z, r_1, h_n) = h_n(z) = L(z, r_2, h_n) = L(z, r_2, f_n),$$

De donde tomando límites y aplicando nuevamente el teorema de la convergencia monótona, obtenemos $L(z_0, r_1, u) \le L(z_0, r_2, u)$, lo que prueba (a).

Para probar (b), observamos primero que no hay nada que hacer si $A(z, r_1, u) = -\infty$ (un caso que nunca se va a dar). Por otro lado, si $A(z, r_1, u) > -\infty$ (que siempre va a ser el caso) entonces, para $r \in (0, r_1)$,

$$-\infty < A(z,r,u) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(z,r)} u(\xi)\,dA(\xi) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})\,\rho\,d\theta\,d\rho = \frac{2}{r^2}\int_0^r L(z,\rho,u)\,\rho\,d\rho,$$

lo que implica que $L(z, r, u) > -\infty$ para casi todo $r \in (0, r_1)$, y como es una función creciente de r, que entonces es $L(z, r, u) > -\infty$ para todo $r \in \big(0, d_D(z)\big)$. Así que para $0 < r_1 < r_2 < d_D(z)$ tenemos,

$$\begin{aligned}
A(z_0,r_2,u) - A(z_0,r_1,u) &= \frac{2}{r_2^2}\int_0^{r_2} L(z_0,\rho,u)\,\rho\,d\rho - \frac{2}{r_1^2}\int_0^{r_1} L(z_0,\rho,u)\,\rho\,d\rho \\
&= \frac{2}{r_2^2}\int_{r_1}^{r_2} L(z_0,\rho,u)\,\rho\,d\rho + \left(\frac{2}{r_2^2} - \frac{2}{r_1^2}\right)\int_0^{r_1} L(z_0,\rho,u)\,\rho\,d\rho \\
&\ge \frac{1}{r_2^2} L(z_0,r_1,u)(r_2^2 - r_1^2) + \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2 r_1^2} L(z_0,r_1,u)\, r_1^2 \\
&= L(z_0,r_1,u)\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2}\right] = 0.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Corolario 1.26. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Entonces, para cada $z \in D$,*

$$u(z) \le A(z,r,u) := \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(z,r)} u(\xi)\,dA(\xi), \qquad \text{para todo } r \in \big(0, d_D(z)\big). \qquad \blacksquare$$

Corolario 1.27. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Entonces,*

$$u(z) = \lim_{r\to 0^+} L(z,r,u) = \lim_{r\to 0^+} A(z,r,u), \qquad \text{para cada } z \in D.$$

Demostración. Sea $z_0 \in D$ y sea $\alpha > u(z_0)$. Por la semicontinuidad superior, $\limsup_{z\to z_0} u(z) \le u(z_0)$, luego existe $r_0 > 0$ tal que $u(z) < \alpha$ para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$, de donde se sigue que $L(z_0, r, u) \le \alpha$, y que $A(z_0, r, u) \le \alpha$, para todo $r \in (0, r_0)$. Como también es $u(z_0) \le L(z_0, r, u)$, y $u(z_0) \le A(z_0, r, u)$, para todo r, concluimos entonces que $u(z_0) = \lim_{r\to 0^+} L(z_0, r, u) = \lim_{r\to 0^+} A(z_0, r, u)$. $\blacksquare$

Teorema 1.28. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Entonces,*

(a) $L(z,r,u) > -\infty$ para todo $z \in D$ y todo $r \in (0, d_D(z))$.

(b) $A(z,r,u) > -\infty$ para todo $z \in D$ y todo $r \in (0, d_D(z))$.

Demostración. Basta probar (b) porque esto ya implicaría que $L(z,\rho,u) > -\infty$ para todo $z \in D$ y casi todo $\rho \in \big(0, d_D(z)\big)$, y como L es creciente en ρ, entonces sería $L(z,\rho,u) > -\infty$ para todo $z \in D$ y todo $\rho \in \big(0, d_D(z)\big)$.

Consideremos entonces el conjunto

$$E = \{z \in D : \text{ existe } r = r(z) > 0 \text{ tal que } \overline{\mathbb{D}(z,r)} \subset D \text{ y } A(z,r,u) > -\infty\}.$$

Lo primero que observamos es que $E \neq \emptyset$ ya que, al ser $u \not\equiv -\infty$, existe $z_0 \in D$ tal que $u(z_0) > -\infty$, lo que implica que $A(z_0,r,u) > -\infty$ para todo $r \in \big(0, d_D(z_0)\big)$.

Por otro lado notemos que *si $z_0 \in E$, entonces $A(z_0,r,u) > -\infty$ para todo $r \in \big(0, d_D(z_0)\big)$*. En efecto. Sea $r_0 > 0$ tal que $\overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)} \subset D$ y $A(z_0,r_0,u) > -\infty$. Entonces, como u es está acotada superiormente en $\overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)}$ por ser *s.c.s.*, obtenemos que la integral de u sobre cualquier subdisco de $\overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)}$ es finita ($> -\infty$), en particular, $A(z_0,r,u) > -\infty$ para todo $r \in (0,r_0)$. Por otro lado, como $A(z_0,r,u)$ crece con r, obtenemos que $A(z_0,r,u) > -\infty$ para $r \in \big(r_0, d_D(z_0)\big)$.

Este mismo argumento muestra que *E es abierto*, pues si $z_0 \in E$ entonces $A(z_0,r,u) > -\infty$ para todo $r \in \big(0, d_D(z_0)\big)$, lo que implica que u tiene integral finita ($> -\infty$) sobre cualquier subdisco de $\mathbb{D}\big(z_0, d_D(z_0)\big)$, probando que $\mathbb{D}\big(z_0, d_D(z_0)\big) \subseteq E$.

Finalmente, veamos que E es cerrado en D para concluir que $E \equiv D$, ya que D es conexo. En efecto. Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión en E con $z_n \to z_0 \in D$. Dado $r_0 = \frac{d(z_0)}{4} > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in \mathbb{D}(z_0,r_0)$ para todo $n \geq n_0$. En particular, para n_0, es fácil ver que se tiene

$$\mathbb{D}(z_0,r_0) \subset \overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)} \subset \mathbb{D}(z_{n_0}, 2r_0) \subset \overline{\mathbb{D}(z_{n_0},2r_0)} \subset D.$$

Como $z_{n_0} \in E$ entonces es $A(z_{n_0}, 2r_0, u) > -\infty$ y, por tanto, u tiene integral finita sobre cualquier subdisco de $\mathbb{D}(z_{n_0}, 2r_0)$, probando que $A(z_0,r_0,u) > -\infty$, o sea, que $z_0 \in E$. ∎

Corolario 1.29. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Entonces $u \in L^1_{loc}(D, dA)$ y, por tanto,* Área$\big(\{z \in D : u(z) = -\infty\}\big) = 0$. *Además, siempre que $\overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)} \subset D$, se tiene que $u \in L^1\big(\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)\big)$.* ∎

Corolario 1.30. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sean $u_1, u_2 \in \mathcal{SH}(D)$. Entonces $u_1 + u_2 \in \mathcal{SH}(D)$.*

Demostración. El caso $u_1 + u_2 \equiv -\infty$ queda excluido porque $u_1, u_2 \in L^1_{\text{loc}}(D, dA)$. ∎

Corolario 1.31. *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ entonces las medias integrales*

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\big|f(re^{i\theta})\big|\,d\theta, \qquad M_p(r,f) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(re^{i\theta})\big|^p\,d\theta\Big)^{1/p}, \quad (0 < p < \infty),$$

son finitas y, como funciones de $r \in (0,1)$, son crecientes. ∎

Teorema 1.32. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y sea $u \in \mathcal{SH}(D)$. Supongamos que $\overline{\mathbb{D}(z_0,r_0)} \subset D$. Sea $h = P[u]$, la integral de Poisson de u sobre $\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)$. Entonces h es armónica en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$, y $u \leq h$ en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$.*

Demostración. Como $u \in L^1\big(\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)\big)$, resulta entonces que $h(z_0 + re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + r_0e^{it})\,P_{r/r_0}(\theta - t)\,dt$ es una función armónica en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$.

Sea ahora $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\mathbb{C}$ acotadas superiormente por $\text{máx}_{\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)} u$, tal que $f_n \searrow u$ en $\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)$. Sea h_n la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$ con valores en la frontera dados por f_n. Como u es *s.c.s.*,

$$\limsup_{\mathbb{D}(z_0,r_0)\ni z\to\xi} u(z) \leq u(\xi) \leq f_n(\xi), \qquad \text{para todo } \xi \in \partial\mathbb{D}(z_0,r_0),$$

luego, por el principio de la mayorante armónica, tenemos que $u \leq h_n$ en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$. Ahora bien, $h_n(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(z_0 + r_0e^{it})\,d\mu_{\theta,r}(t)$, donde $d\mu_{\theta,r}(t) = P_{r/r_0}(\theta - t)\,dt$, y $f_n \searrow u$ en $\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)$ y las f_n están acotadas superiormente por $\text{máx}_{\partial\mathbb{D}(z_0,r_0)} u$. Así que, nuevamente por el teorema de la convergencia monótona, obtenemos que $h_n(z_0 + re^{i\theta}) \searrow h(z_0 + re^{i\theta})$ y, del hecho de que $u \leq h_n$ en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$, se sigue, tomando límites cuando $n \to \infty$, que $u \leq h$ en $\mathbb{D}(z_0,r_0)$. ∎

1.5. Convergencia radial y convergencia no tangencial

Teorema 1.33. *Sea $u \in h^1$ y sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tal que $u = P[d\mu]$. Supongamos que θ_0 es tal que existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu\big((\theta_0 - h, \theta_0 + h]\big)}{2h} = A.$$

Entonces $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta_0}) = A$.

Demostración. *Veamos en primer lugar que podemos suponer que* $\theta_0 = 0$.
En efecto. Fijemos θ_0 de manera arbitraria. Consideremos la medida $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ dada por $\mu_0 = \mu(\theta_0 - E)$, $E \subset \mathbb{T}$, con lo que, al ser $\mu_0(E) = \int_{\theta_0 - E} d\mu(t) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\theta_0 - E}(t)\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{T}} \chi_E(\theta_0 - t)\, d\mu(t)$, tenemos

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\, d\mu_0(t) = \int_{\mathbb{T}} f(\theta_0 - t)\, d\mu(t), \quad f \in L^1(d\mu).$$

Observemos que si $\lim_{h\to 0} \frac{\mu((\theta_0 - h, \theta_0 + h])}{2h} = A$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu_0\big((-h,h]\big)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu\big(\theta_0 - (-h,h]\big)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu\big((\theta_0 - h, \theta_0 + h]\big)}{2h} = A.$$

Luego, si el resultado es cierto para $\theta_0 = 0$, entonces tenemos $P[d\mu_0](r) \xrightarrow[r\to 1^-]{} A$ de donde se sigue que

$$\begin{aligned} P[d\mu](re^{i\theta_0}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta_0 - t)\, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, d\mu_0(t) \\ &\overset{P_r(t) = P_r(-t)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(-t)\, d\mu_0(t) = P[d\mu_0](r) \xrightarrow[r\to 1^-]{} A. \end{aligned}$$

Supongamos entonces que $\frac{\mu((-h,h])}{2h} \xrightarrow[h\to 0]{} A$. Hemos de probar que $P[d\mu](r) \xrightarrow[r\to 1^-]{} A$. Para ello, fijamos inicialmente $\varepsilon > 0$, y consideremos la función de variación acotada

$$F(\theta) = \mu\big((-\pi, \theta]\big) = \int_{(-\pi,\theta]} d\mu(t), \quad \theta \in (-\pi, \pi],$$

extendida de forma periódica a $\mathbb{R}$. Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \big|u(r) - A\big| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t) d\mu(t) - A\right| = \left|\frac{1}{2\pi} P_r(t) F(t)\Big|_{-\pi^+}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(t) P_r'(t) dt - A\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi} P_r(\pi) \overbrace{F(\pi)}^{=\mu(\mathbb{T})} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big[F(t) - F(-t)\big] \overbrace{(-P_r')(t)}^{\oplus} dt - A\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} P_r(\pi)|\mu(\mathbb{T})| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{F(t) - F(-t)}{2t} - A\right| (-P_r')(t)\, 2t\, dt + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2At(-P_r')(t)\, dt - A\right| \\ &= \frac{1}{2\pi} P_r(\pi)|\mu(\mathbb{T})| + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left|\frac{F(t) - F(-t)}{2t} - A\right| [-P_r'(t)]\, 2t\, dt + \left|\frac{\cancel{2}A}{\cancel{2}\pi}\left[-tP_r(t)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} P_r(t)\, dt\right] - A\right| \\ &= \frac{P_r(\pi)}{2\pi}|\mu(\mathbb{T})| + P_r(\pi)|A| + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left|\frac{F(t) - F(-t)}{2t} - A\right| [-P_r'(t)]\, 2t\, dt, \end{aligned}$$

donde $\delta \in (0,\pi)$ ha sido escogido de manera que $\left|\frac{F(t) - F(-t)}{2t} - A\right| < \varepsilon$ para todo $t \in (0, \delta]$. Ahora observamos que existe una constante $C > 0$ tal que $\left|\frac{F(t) - F(-t)}{2t} - A\right| \le C$ para todo $t \in [\delta, \pi]$. Juntando todo esto, obtenemos

$$\begin{aligned} \big|u(r) - A\big| &\le P_r(\pi)\Big(\frac{|\mu(\mathbb{T})|}{2\pi} + |A|\Big) + \frac{\cancel{2}\varepsilon}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\delta} -P_r'(t)\, t\, dt + \frac{\cancel{2}C}{\cancel{2}\pi}\int_{\delta}^{\pi} -P_r'(t)\, t\, dt \\ &\le P_r(\pi)\Big(\frac{|\mu(\mathbb{T})|}{2\pi} + |A|\Big) + \frac{\varepsilon}{\pi}\left[-tP_r(t)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} P_r(t)\, dt\right] + \frac{C}{\pi}\left[-tP_r(t)\Big|_{\delta}^{\pi} + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t)\, dt\right] \\ &\le P_r(\pi)\Big(\frac{|\mu(\mathbb{T})|}{2\pi} + |A|\Big) + \overbrace{\big(1 - P_r(\pi)\big)}^{\le 1}\varepsilon + \frac{C}{\pi}\big(\delta P_r(\delta) - \pi P_r(\pi) + \pi P_r(\delta)\big) \\ &\le 2\varepsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta para todo $r \in (r_0, 1)$, para cierto r_0, ya que

$$P_r(\pi)\Big(\frac{|\mu(\mathbb{T})|}{2\pi} + |A|\Big) + \frac{C}{\pi}(\delta P_r(\delta) - \pi P_r(\pi) + \pi P_r(\delta)) \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0.$$

Con esto queda probado que $u(r) \xrightarrow[r\to 1^-]{} A$. ∎

Corolario 1.34. *Sea $u \in h^1$. Entonces existe $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tal que $u = P[d\mu]$. Es bien sabido que la función $F(\theta) = \mu\big((-\pi,\theta]\big) = \int_{(-\pi,\theta]} d\mu(t)$, $\theta \in (-\pi,\pi]$ y luego extendida de manera periódica a $\mathbb{R}$, al ser de variación acotada, es derivable en casi todo punto de $\mathbb{R}$, en cuyo caso, para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\frac{\mu\big((\theta-h,\theta+h]\big)}{2h} = \frac{F(\theta+h)-F\big((\theta-h)\big)}{2h} \xrightarrow[h\to 0]{} F'(\theta).$$

Por el teorema anterior tenemos entonces que, para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$, $u(re^{i\theta}) \xrightarrow[r\to 1^-]{} F'(\theta)$. ∎

Como consecuencia de la convergencia radial para funciones armónicas en h^1, obtenemos este otro resultado, ahora para funciones holomorfas en H^1 y, por consiguiente, en todos sus subespacios.

Corolario 1.35. *Si $f \in H^1$, en particular si $f \in H^\infty$, entonces f tiene límite radial en casi todo punto $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.*

Demostración. Si $f \in H^1$, entonces $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in h^1$, luego para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$, existen $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$. ∎

Definición 1.36 (Límite Radial). Para $f \in H^1$, denotamos por

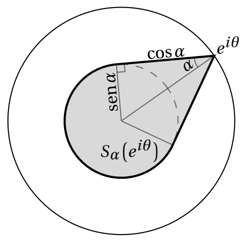
$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

a la función, definida en casi todo $e^{i\theta}$, por el límite radial de f en $e^{i\theta}$ (cuando exista, que es casi siempre).

La existencia de límite radial en casi todo punto puede extenderse a la clase de Nevanlinna. El caso es que mucho más es cierto. La existencia de límite radial en un punto de la frontera $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ va a implicar la existencia de lo que vamos a llamar límite no tangencial en $e^{i\theta}$, esto es, la existencia de límite de la función cuando nos aproximamos a $e^{i\theta}$ a lo largo de una región que termina en ángulo en dicho punto.

Definición 1.37 (Ángulo de Stolz). Dado $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ y $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, definimos el ángulo de Stolz en $e^{i\theta}$ de "apertura α", y lo denotamos $S_\alpha(e^{i\theta})$ o $S_\alpha(\theta)$, como la intersección de $\mathbb{D}$ con la envolvente convexa cerrada del disco $\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)$ y el punto $e^{i\theta}$. O sea,

$$z \in S_\alpha(e^{i\theta}) \iff z = (1-t)w + te^{i\theta}, \quad \text{para algún } t \in [0,1) \text{ y algún } w \in \overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}.$$



Es claro que toda región de $\mathbb{D}$ que se "aproxime" a $e^{i\theta}$ formando un ángulo está contenida dentro de un ángulo de Stolz. Observemos que la idea de considerar la envolvente convexa cerrada de $\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)$ y el punto $e^{i\theta}$ (excluyendo este último del conjunto $S_\alpha(\theta)$) es simplemente para poder decir que todo radio es un ángulo de Stolz. A lo largo del texto, tendremos ocasión de volver a tratar este tipo de regiones y puede que, en alguna parte, los ángulos de Stolz sean regiones abiertas....

Definición 1.38 (Límite No Tangencial). Dada f analítica en $\mathbb{D}$ y $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, decimos que f tiene límite no tangencial $L \in \mathbb{C}$ en $e^{i\theta}$ si para todo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos

$$\lim_{S_\alpha(\theta)\ni z\to e^{i\theta}} f(z) = L,$$

lo cual lo denotamos por $\lim_{z\to e^{i\theta}\ \text{n.t.}} f(z) = L$, o $f(z) \xrightarrow{z \overset{\angle}{\to} e^{i\theta}} L$.

Vamos a empezar probando que la existencia de límite radial para funciones en H^∞ implica la existencia de límite no tangencial para funciones en H^∞ y, como consecuencia de esto y de una representación de las funciones en la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$ como cociente de funciones en H^∞, vamos a obtener la existencia de límite no tangencial para funciones en $\mathcal{N}$, lo que nos lleva a la existencia de convergencia no tangencial para funciones en cualquier espacio de Hardy H^p, cualquiera que sea $p \in (0,\infty]$.

Teorema 1.39 (Fatou). *Sean $f \in H^\infty$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que existe $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ (casi todo θ vale). Entonces f tiene límite no tangencial $f^*(e^{i\theta})$ en $e^{i\theta}$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Hemos de probar la aserción

$$\left|f(z) - f^*(e^{i\theta})\right| \xrightarrow[z\in S_\alpha(\theta)]{z\to e^{i\theta}} 0.$$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $S_\alpha(\theta)$ con límite $e^{i\theta}$, entonces podemos escribir $z_n = (1-t_n)w_n + t_n e^{i\theta}$, con $t_n \in [0,1)$ y $w_n \in \overline{\mathbb{D}(0, \operatorname{sen}\alpha)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además como $|e^{i\theta} - w| \geq 1 - \operatorname{sen}\alpha > 0$ para todo $w \in \overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}$, obtenemos que $t_n \to 1$ cuando $n \to \infty$:

$$t_n = \frac{z_n - w_n}{e^{i\theta} - w_n} = \frac{z_n - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - w_n} + \frac{e^{i\theta} - w_n}{e^{i\theta} - w_n} \longrightarrow 1.$$

Para probar nuestra aserción basta mostrar, dada la arbitrariedad de $\{z_n\}$, que $f(z_n) \to f^*(e^{i\theta})$. Para ello, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(z) = f\big((1-t_n)z + t_n e^{i\theta}\big), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Observamos que para n fijo, θ fijo, tenemos que $t_n e^{i\theta} + (1-t_n)z$, $z \in \mathbb{D}$, describe el disco de centro $t_n e^{i\theta}$ y radio $(1-t_n)$, el cual está obviamente contenido en $\mathbb{D}$. Por tanto f_n es analítica en $\mathbb{D}$, y acotada ya que

$$\|f_n\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}(t_n e^{i\theta}, 1-t_n)} |f(z)| \leq ||f||_{H^\infty}.$$

Todo esto nos dice que $\{f_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada en $\mathbb{D}$, luego es una familia normal y, por tanto, contiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.

Veamos que cualquier subsucesión de $\{f_n\}$ uniformemente convergente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, lo hace a la constantemente igual a $f^*(e^{i\theta})$. Esto probará que la misma sucesión $\{f_n\}$ converge a la constante $f^*(e^{i\theta})$ uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$.

Sea $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a F uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Observemos que para $r \in (0,1)$, y puesto que $f(re^{i\theta}) \xrightarrow{r\to 1^-} f^*(e^{i\theta})$,

$$F(re^{i\theta}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(re^{i\theta}) = \lim_{k\to\infty} f\big((1-t_{n_k})re^{i\theta} + t_{n_k}e^{i\theta}\big) = \lim_{k\to\infty} f\big([r + (1-r)t_{n_k}]e^{i\theta}\big) = f^*(e^{i\theta}),$$

Por tanto F es constante en el radio $(0, e^{i\theta})$, que es un conjunto con puntos de acumulación en $\mathbb{D}$. Por tanto, por el Teorema de la Identidad de Weierstrass, F es constante en $\mathbb{D}$ y dicha constante es $f^*(e^{i\theta})$. Con esto tenemos $f_n \longrightarrow f^*(e^{i\theta})$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Ahora, probar que $f(z_n) \longrightarrow f^*(e^{i\theta})$ es lo mismo que probar que $f_n(w_n) \longrightarrow f^*(e^{i\theta})$. Vemos esto último entonces: Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \longrightarrow f^*(e^{i\theta})$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, en particular lo hace en $\overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f_n(w) - f^*(e^{i\theta})\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_\varepsilon$ y todo $w \in \overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}$. Esto implica que $\left|f_n(w_n) - f^*(e^{i\theta})\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. ∎

Teorema 1.40. *Sea f analítica en $\mathbb{D}$, $f \not\equiv 0$. Entonces $f \in \mathcal{N}$ si, y solo si, f es cociente de dos funciones en H^∞.*

Demostración. Supongamos que f se escribe como cociente de dos funciones analíticas acotadas, $f = \frac{f_1}{f_2}$, con $f_1, f_2 \in H^\infty$. Sea $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ el orden de 0 como cero de f_2, entonces, como f es analítica en $\mathbb{D}$, el orden de 0 como cero de f_1 ha de ser mayor o igual que N. Dicho esto, obtenemos que $\frac{f_j(z)}{z^N}$, $j = 1,2$ son analíticas y, además, acotadas. Por ello podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f = \frac{f_1}{f_2}$, con f_j analítica y acotada en $\mathbb{D}$ y $f_2(0) \neq 0$. Por otro lado, dividiendo arriba y abajo por M, donde $M = \max\{\|f_1\|_{H^\infty}, \|f_2\|_{H^\infty}\}$, podemos suponer, también sin pérdida de generalidad, que $f = \frac{f_1}{f_2}$, con $f_j \in H^\infty$, $\|f_j\|_{H^\infty} \leq 1$, $(j = 1,2)$, y $f_2(0) \neq 0$.

Con estas reducciones, tenemos, por la fórmula de Jensen,

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log\left|f_1(e^{it})\right| - \log\left|f_2(e^{it})\right|\right)^+ d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f_1(e^{it})\right| + \left(-\log\left|f_2(e^{it})\right|\right)^+ d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\log\left|f_2(re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\overset{\text{F. Jensen}}{=} -\log|f_2(0)| - \sum_{z_n \text{ cero de } f_2} \log^+ \frac{r}{|z_n|} \leq -\log|f_2(0)|.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\sup_{0<r<1} T(r,f) \le -\log|f_2(0)|$, luego $f \in \mathcal{N}$.

Supongamos ahora que $f \not\equiv 0$ está en $\mathcal{N}$. Hemos de probar que f puede escribirse como cociente de dos funciones en H^∞.

Para cada $\rho \in (0,1)$ consideramos $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $|z| < \frac{1}{\rho}$. Observamos que f_ρ es holomorfa en $\mathbb{D}(0,\frac{1}{\rho})$, en particular en $\overline{\mathbb{D}}$, luego tiene una cantidad finita de ceros en $\overline{\mathbb{D}}$. Sea $A = \{\rho \in (0,1) : f_\rho$ tiene ceros de módulo $1\} = \{\rho \in (0,1) : f$ tiene ceros de módulo $\rho\}$. Observemos que A es un conjunto de $(0,1)$ a lo sumo numerable, luego $(0,1)\setminus A$ es denso en $(0,1)$. A partir de ahora consideraremos solo $\rho \in (0,1)\setminus A$.

Para $\rho \in (0,1)\setminus A$, sea B_ρ el producto de Blaschke (finito) formado por los ceros de f_ρ en $\mathbb{D}$. (Recordemos que f_ρ no tiene ceros en $\partial\mathbb{D}$). Entonces f_ρ/B_ρ es una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$ sin ceros en $\overline{\mathbb{D}}$. Así que podemos tomar una rama holomorfa de $\log\frac{f_\rho}{B_\rho}$ en $\overline{\mathbb{D}}$. Su parte real es armónica en $\overline{\mathbb{D}}$ y coincide con $\log\left|\frac{f_\rho(z)}{B_\rho(z)}\right|$. Además podemos recuperarla a partir de la integral de Poisson de sus valores en la frontera, para $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f_\rho(z)}{B_\rho(z)}\right| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{f_\rho(e^{it})}{B_\rho(e^{it})}\right| P_r(\theta-t)\,dt \overset{|B_\rho(e^{it})|=1}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f_\rho(e^{it})\right| \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)dt\\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\log^+\left|f_\rho(e^{it})\right| - \log^-\left|f_\rho(e^{it})\right|\right]\left(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right)dt\right].\end{aligned}$$

Por compleción analítica tenemos entonces que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\log\frac{f_p(z)}{B_p(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\log^+\left|f_\rho(e^{it})\right| - \log^-\left|f_\rho(e^{it})\right|\right]\left(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right)dt + i\beta.$$

Tomando exponenciales, podemos escribir

$$f_\rho(z) = \frac{B_\rho(z)\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-\left|f_\rho(e^{it})\right|\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt + i\beta}}{e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_\rho(e^{it})\right|\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt}} = \frac{\varphi_\rho(z)}{\psi_\rho(z)}.$$

Observamos que φ_ρ, ψ_ρ son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y acotadas por 1, o sea, $\|\varphi_\rho\|_{H_\infty} \le 1$, $\|\psi_\rho\|_{H_\infty} \le 1$. Además, como $f \in \mathcal{N}$, tenemos, para $z = r^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_\rho(e^{it})\right|\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f(\rho e^{it})\right|\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}\,dt\\ &\le \frac{1+r}{1-r}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f(\rho e^{it})\right|dt \le \frac{1+r}{1-r}\sup_{0\le\rho<1} T(\rho,f),\end{aligned}$$

luego, llamando $T = \sup_{0\le\rho<1} T(\rho,f)$, tenemos para $z \in \mathbb{D}$,

$$|\psi_\rho(z)| = e^{-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_\rho(e^{it})\right|\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt} \ge e^{-\frac{1+|z|}{1-|z|}T} > 0,$$

independientemente de $\rho \in (0,1)\setminus A$.

Observamos ahora que $\{\varphi_\rho,\ \rho \in (0,1)\setminus A\}$, $\{\psi_\rho,\ \rho \in (0,1)\setminus A\}$ son familias normales en $\mathbb{D}$. Por tanto, existe una sucesión $\{\rho_k\} \subset (0,1)\setminus A$, con $\rho_k \to 1$, y existen φ, ψ holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $\varphi_{\rho_k} \to \varphi$ y $\psi_{\rho_k} \to \psi$, uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.

Como φ_ρ, ψ_ρ son funciones acotadas por 1, entonces φ y ψ son también funciones de H^∞ acotadas por 1. Además, el hecho de que, para cada $\rho \in (0,1)\setminus A$ y cada $z \in \mathbb{D}$, tengamos que $|\psi_\rho(z)| \ge e^{-\frac{1+|z|}{1-|z|}T}$, implica que también $|\psi(z)| \ge e^{-\frac{1+|z|}{1-|z|}T} > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. O sea, ψ nunca se anula en $\mathbb{D}$. Por tanto, del hecho de que $f(\rho z) = f_\rho(z) = \frac{\varphi_\rho(z)}{\psi_\rho(z)}$, $z \in \mathbb{D}$, tenemos, tomando límites para cada $z \in \mathbb{D}$, que

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi,\psi \in H^\infty,\ \|\varphi\|_{H^\infty} \le 1,\ \|\psi\|_{H^\infty} \le 1, \text{ y } \psi \text{ nunca cero en } \mathbb{D}. \qquad \blacksquare$$

Con este teorema podemos obtener que toda función en $\mathcal{N}$ tiene límite no tangencial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. Sólo hace falta ver que los valores en la frontera no son cero en un conjunto de medida positiva.

Teorema 1.41. *Sea $f \in \mathcal{N}$. Entonces f tiene límite no tangencial $f^*(e^{i\theta})$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y, además, $\log\left|f^*(e^{i\theta})\right| \in L^1(\mathbb{T})$ a menos que $f \equiv 0$. Si $f \in H^p$, entonces $f^*(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Supongamos $f \in \mathcal{N}$ y $f \not\equiv 0$. Escribimos $f = \frac{f_1}{f_2}$, con $f_j \in H^\infty$, $\|f_j\|_{H^\infty} \le 1$, $j \in \{1,2\}$. Entonces f_j tiene límite no tangencial $f_j^*(e^{i\theta})$ en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, y el cociente $\frac{f_1}{f_2}$ también tiene límite no tangencial $\frac{f_1^*(e^{i\theta})}{f_2^*(e^{i\theta})}$ en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$ siempre que $f_2^*(e^{i\theta}) \neq 0$ también en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. Esta última aserción se seguirá de que $\log|f_2^*| \in L^1(\mathbb{T})$, así que probaremos que $\log\left|f_j^*(e^{i\theta})\right| \in L^1(\mathbb{T})$, con lo que tendremos que

1) $f_2^* \neq 0$ en c.t.p., 2) $f^* = \frac{f_1^*}{f_2^*}$ existe y es finito en c.t.p., y 3) $\log|f^*| = \log|f_1^*| - \log|f_2^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

Escribimos $f_j(z) = c_N z^N + c_{N+1} z^{N+1} + \dots$ y denotamos por $\{a_n\}$ la sucesión exacta de ceros no nulos de f_j, para obtener, por el lema de Fatou y la fórmula de Jensen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|f_j^*(e^{i\theta})\right|\right| d\theta &\le \liminf_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|f_j(re^{i\theta})\right|\right| d\theta = \liminf_{r\to 1}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f_j(re^{i\theta})\right| d\theta\right]\\ &= \liminf_{r\to 1}\left[-\log|c_N| - \log r^N - \sum_n \log^+\frac{r}{|a_n|}\right] \le \liminf_{r\to 1}\left[-\log|c_N| - \log r^N\right] = -\log|c_N| < \infty,\end{aligned}$$

lo que implica que $\log|f_j^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

Observemos que si $f \in H^\infty$, entonces claramente $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$. Por otro lado, si $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, veamos que $f^* \in L^P(\mathbb{T})$. Para ello, usamos de nuevo el lema de Fatou:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta \le \liminf_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le \|f\|_{H^p}. \qquad \blacksquare$$

<u>*Nota*</u>. Como consecuencia de este resultado, es evidente que si $f \in \mathcal{N}$ y $f^*(e^{i\theta}) = 0$ sobre un subconjunto de $\mathbb{T}$ de medida positiva, entonces $\log|f^*| \notin L^1(\mathbb{T})$ y, por tanto, hemos de admitir que $f \equiv 0$.

Corolario 1.42. *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(0) \neq 0$. Entonces $f \in \mathcal{N}$ si y solo si $\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|f(re^{i\theta})\right|\right| d\theta < \infty$. En particular, si $f \in \mathcal{N}$ y no tiene ceros, entonces $\log|f|$ es armónica en $\mathbb{D}$ y, además, $\log|f| \in h^1$.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{N}$ y que $f(0) \neq 0$. Escribamos $f = \frac{f_1}{f_2}$ con $f_j \in H^\infty$, $\|f_j\|_{H^\infty} \le 1$ y $f_j(0) \neq 0$. Para probar la aserción basta mostrar que $\sup_{0<r<1}\left\|\log|f_j(r\cdot)|\right\|_{L^1} < \infty$. Repetimos entonces lo hecho en la demostración del teorema, excepto la aplicación del lema de Fatou. Denotamos por $\{a_n\}$ la sucesión exacta de ceros de f_j, para obtener, por la fórmula de Jensen, que $\left\|\log|f_j(r\cdot)|\right\|_{L^1} \le -\log|f_j(0)|$ para todo $r \in (0,1)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|f_j(re^{i\theta})\right|\right| d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f_j(re^{i\theta})\right| d\theta = -\log|f_j(0)| - \sum_n \log^+\frac{r}{|a_n|} \le -\log|f_j(0)| < \infty. \qquad \blacksquare$$

Como aplicación de todo lo que llevamos, ya podemos retomar el tema de los productos de Blaschke y probar que tienen límite no tangencial de módulo 1 en casi todo punto de la frontera de $\mathbb{D}$.

Teorema 1.43. *Si B es un producto de Blaschke entonces, para casi todo $\theta \in \mathbb{T}$, $\left|B^*(e^{i\theta})\right| = 1$.*

Demostración. Por supuesto, si el producto de Blaschke es finito, $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$ en todo punto $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.

Cuando la sucesión de ceros de B, $\{a_n\}$, es infinita, consideramos, para cada $N \in \mathbb{N}$, el producto de Blaschke finito, $B_N(z)$, asociado a los puntos $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, y el producto de Blaschke infinito $\frac{B(z)}{B_N(z)}$ asociado a la cola de la sucesión $\{a_n\}_{n=N+1}^\infty$. Así, usando que $|B_N(e^{i\theta})| = 1$ para todo θ, que las medias integrales son funciones crecientes de r, que $\frac{B^*(e^{i\theta})}{B_N(e^{i\theta})} \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ y, finalmente, que $|B| \le 1$, tenemos

$$\left|\frac{B(0)}{B_N(0)}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\,d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{B^*(e^{i\theta})}{B_N(e^{i\theta})}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|B^*(e^{i\theta})\right| d\theta \le 1.$$

Observemos ahora que $B_N(0) \xrightarrow{N\to\infty} B(0)$, luego $\frac{B(0)}{B_N(0)} \xrightarrow{N\to\infty} 1$. Así obtenemos que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|B^*(e^{i\theta})\right| d\theta = 1$, de donde, usando que $|B| \le 1$, se sigue que, para casi todo $\theta \in \mathbb{T}$, $\left|B^*(e^{i\theta})\right| = 1$. $\blacksquare$

1.6. Teoremas de factorización

Teorema 1.44 (Factorización de Riesz). *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f \not\equiv 0$ y $\{a_n\}$ la sucesión exacta de sus ceros.*

(*i*) *Si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces $f = Bg$ donde B es el producto de Blaschke asociado a $\{a_n\}$, $g \in H^p$, no se anula en $\mathbb{D}$, y $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$.*

(*ii*) *Si $f \in \mathcal{N}$, entonces $f = Bg$ donde B es el producto de Blaschke asociado a $\{a_n\}$, $g \in \mathcal{N}$, no se anula en $\mathbb{D}$, y $\sup_r T(t,g) = \sup_r T(r,f)$.*

Demostración. Supongamos que $f \in H^p$ para algún $p > 0$, o que $f \in \mathcal{N}$, entonces $\{a_n\}$ satisface la condición de Blaschke y, por tanto, podemos considerar el producto de Blaschke, B, asociado a $\{a_n\}$.

Sea $g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{D}$ tras evitar todas las singularidades provocadas por los ceros de B (que son los mismos que los de f) y, además, g no se anula nunca y $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| \geq |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea $B_N(z)$ el producto de Blaschke asociado a $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Como $|B_N(e^{i\theta})| = 1$ para todo θ, existe $R = R(N,\varepsilon) \in (0,1)$ tal que $|B_N(re^{i\theta})| > 1-\varepsilon$ para todo $r \in [R,1)$, y todo θ.

Si ahora suponemos que $f \in H^p$ para algún $p > 0$, usamos que $M_p(r,f)$ es una función creciente de r, para obtener, para $r < R$,

$$M_p\Big(r, \frac{f}{B_N}\Big) \leq M_p\Big(R, \frac{f}{B_N}\Big) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} M_p(R,f) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_{H^p},$$

mientras que para $r \in [R,1)$,

$$M_p\Big(r, \frac{f}{B_N}\Big) \leq (1-\varepsilon)^{-1} M_p(r,f) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_{H^p}.$$

En cualquier caso obtenemos que $\frac{f}{B_N} \in H^p$ y que $\left\|\frac{f}{B_N}\right\|_{H^p} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_{H^p}$.

Ahora, como $1 \geq |B_N| \geq |B_{N+1}|$ para todo N, y $|B_N| \searrow |B|$, entonces $|f| \leq \left|\frac{f}{B_N}\right| \leq \left|\frac{f}{B_{N+1}}\right|$ para todo N, y $\left|\frac{f}{B_N}\right| \nearrow \left|\frac{f}{B}\right|$. Luego, tanto en el caso $p = \infty$, como cuando $p < \infty$ (usando el teorema de la Convergencia Monótona), tenemos que $g = \frac{f}{B}$ está en H^p y que

$$\|f\|_{H^p} \leq \left\|\frac{f}{B_N}\right\|_{H^p} \leq \left\|\frac{f}{B}\right\|_{H^p} = \|g\|_{H^p} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_{H^p}.$$

Haciendo ahora que $\varepsilon \searrow 0$, tenemos que, de hecho, $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Si ahora suponemos que $f \in \mathcal{N}$, entonces usamos de manera análoga que $T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ es una función creciente de r, para obtener, para $r < R$,

$$\begin{aligned} T\Big(r, \frac{f}{B_N}\Big) \leq T\Big(R, \frac{f}{B_N}\Big) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{|f(Re^{i\theta})|}{|B_N(Re^{i\theta})|}\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\Big(\frac{|f(Re^{i\theta})|}{1-\varepsilon}\Big)\,d\theta \\ &\leq \log^+\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\,d\theta \leq \log^+\frac{1}{1-\varepsilon} + \sup_{0<r<1} T(r,f), \end{aligned}$$

y para $r \in [R,1)$,

$$T\Big(r, \frac{f}{B_N}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{|f(re^{i\theta})|}{|B_N(re^{i\theta})|}\,d\theta \leq \log^+\frac{1}{1-\varepsilon} + \sup_{0<r<1} T(r,f).$$

De aquí se sigue que $\sup_r T\big(r, \frac{f}{B_N}\big) \leq \log^+\frac{1}{1-\varepsilon} + \sup_r T(r,f)$. Por otro lado, como $|f| \leq \left|\frac{f}{B_N}\right|$ y $\left|\frac{f}{B_N}\right| \nearrow \left|\frac{f}{B}\right| = |g|$, tenemos, de nuevo por el teorema de la Convergencia Monótona, que $g = \frac{f}{B} \in \mathcal{N}$ y que

$$\sup_r T(r,f) \leq \sup_r T\Big(r, \frac{f}{B_N}\Big) \leq \sup_r T\Big(r, \frac{f}{B}\Big) = \sup_r T(r,g) \leq \log^+\frac{1}{1-\varepsilon} + \sup_r T(r,f)$$

Haciendo ahora $\varepsilon \searrow 0$, tenemos que, de hecho, $\sup_r T(r,g) = \sup_r T(r,f)$. ∎

Este primer teorema de factorización constituye una herramienta de gran utilidad para probar muchos resultados en los espacios H^p. La factorización, en sí, nos ofrece la comodidad de trabajar con funciones que nunca se anulan y luego, de manera inmediata, pasar al caso general. Veamos a continuación algunas de estas aplicaciones.

Observemos que lo que hemos estado llamando norma-H^p es solo una verdadera norma si $p \geq 1$, mientras que si $p < 1$, $\|\cdot\|_{H^p}$ no satisface la propiedad triangular, aunque $\|f - g\|_{H^p}^p$ define una métrica invariante frente a traslaciones. Esto último se debe al hecho de que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, para $a > 0$, $b > 0$ y $p \in (0,1)$, (simplemente hay que estudiar el crecimiento de la función $(1+x)^p - x^p$). Nuestro propósito es probar que H^p es completo.

Lema 1.45. *Si $f \in H^p$ para algún $p \in (0,\infty)$, entonces*

$$|f(z)| \leq (1-|z|)^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{H^p}, \qquad |z| < 1.$$

Nota. Si $p = \infty$, obviamente $|f(z)| \leq \|f\|_{H^\infty}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Supongamos primero que $p = 1$. Entonces por la fórmula de Cauchy, para $|z| < R < 1$, y teniendo en cuenta que, en este caso, $|Re^{i\theta} - z| \geq R - |z|$,

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z}\, iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{R}{R-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{R}{R-|z|}\|f\|_{H^1}.$$

Haciendo tender ahora R a 1, obtenemos el resultado deseado.

Supongamos ahora que $p \neq 1$. Entonces usamos la factorización de Riesz, $f = Bg$, donde B es el producto de Blaschke asociado a los ceros de f, y g es una función en H^p, sin ceros en $\mathbb{D}$ y con $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Resulta entonces que $|f| \leq |g|$ y, como g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, podemos considerar una rama holomorfa de g^p en $\mathbb{D}$. De esta manera $g^p \in H^1$ con $\|g^p\|_{H^1} = \|g\|_{H^p}^p$ y, por lo anterior, para $|z| < 1$,

$$|f(z)|^p \leq |g(z)|^p = \left|g(z)^p\right| \leq \frac{1}{1-|z|}\|g^p\|_{H^1} = \frac{1}{1-|z|}\|g\|_{H^p}^p. \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.46. *Si $0 < p \leq \infty$, H^p es un espacio métrico completo.*

Demostración. El caso $p = \infty$ es obvio. Así que suponemos que $0 < p < \infty$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en H^p. Por el lema anterior,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq (1-|z|)^{\frac{-1}{p}} \|f_n - f_m\|_{H^p}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D} \text{ y cualesquiera } n, m \in \mathbb{N}.$$

Esto nos dice que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en cada disco del tipo $\overline{\Delta(0,r)}$ con $0 < r < 1$, luego es uniformemente de Cauchy en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, con lo cual existe f holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.

Comprobemos que $f \in H^p$. Observemos que, al ser $\{f_n\}$ de Cauchy en H^p, $\{f_n\}$ es entonces acotada en H^p, o sea, existe $C > 0$ tal que $\|f_n\|_{H^p} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con ayuda de esto y el lema de Fatou,

$$M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_n \left|f_n(re^{i\theta})\right|^p d\theta \leq \liminf_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(re^{i\theta})\right|^p d\theta \leq \liminf_n \|f_n\|_{H^p}^p \leq C.$$

Finalmente probamos que $\{f_n\}$ converge a f en H^p, o sea, que $\|f_n - f\|_{H^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Usamos que $\{f_n\}$ es de Cauchy en H^p para encontrar n_0 tal que $\|f_n - f_m\|_{H^p} \leq \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \geq n_0$. Así, si $n \geq n_0$, haciendo uso del lema de Fatou de nuevo,

$$\begin{aligned} M_p^p(r, f_n - f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\right|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_m \left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta \leq \liminf_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{H^p}^p \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Como esta estimación es válida para todo $r \in (0,1)$, obtenemos

$$\|f_n - f\|_{H^p} = \sup_r M_p(r, f_n - f) \leq \liminf_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{H^p} \leq \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

A continuación usamos la factorización de Riesz para probar un teorema de convergencia en media a los valores frontera para funciones en H^p.

Teorema 1.47. *Sea $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$. Escribamos $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})\big(\in L^p(\mathbb{T})\big)$, y $f^*(e^{i\theta}) = \text{lím}_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ como la función que se obtiene de aplicar límites radiales (no tangenciales) en casi todo punto de la $\partial\mathbb{D}$. Entonces $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ (cosa que ya sabemos) y además*

$$\lim_{r\to 1} \|f_r\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p} \qquad y \qquad \lim_{r\to 1} \|f_r - f^*\|_{L^p} = 0.$$

Nota. Teniendo en cuenta este resultado y que las medias integrales de orden p son funciones crecientes de r, resulta que $\|f\|_{H^p} = \sup_r M_p(r,f) = \text{lím}_{r\to 1} M_p(r,f) = \text{lím}_{r\to 1} \|f_r\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p}$. O sea, este resultado establece una inyección isométrica de H^p en $L^p(\mathbb{T})$ para todo $p \in (0,\infty)$. Por otro lado, la inyección isométrica de H^∞ en L^∞ es obvia.

Demostración. Veamos primero que el resultado es cierto para $p > 1$. Si $f \in H^p$ con $p > 1$, entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en h^p, luego vienen representadas por las integrales de Poisson de sendas funciones de $L^p(\mathbb{T})$, que las denominamos U y V. Por otro lado, al ser $u = P[U]$ y $v = P[V]$, entonces resulta que, por los teoremas de convergencia en norma para funciones armónicas, $\|u_r - U\|_{L^p} \to 0$ y $\|v_r - V\|_{L^p} \to 0$ cuando $r \to 1$, siendo $u_r(z) = u(rz)$ y $v_r(z) = v(rz)$. Esto implica que $\|f_r - (U + iV)\|_{L^p} = \|(u_r + iv_r) - (U + iV)\|_{L^p} \to 0$ cuando $r \to 1$. De este tipo de convergencia, sabemos que existe una sucesión $\{r_k\} \nearrow 1$ tal que $f_{r_k} \to (U + iV)$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$. Pero sabemos que f tiene límite radial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, o sea, $f_r \to f^*$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$, por lo que ha de ser, esencialmente, $f^* = U + iV$. Y con esta igualdad queda probada la aserción del teorema en este caso.

Nota. Además, en este caso, $p > 1$, también hemos probado que $f = P[f^*]$, o sea, que f es la integral de Poisson de sus valores en la frontera de $\mathbb{D}$.

Supongamos ahora que $p \le 1$. Entonces empezamos factorizando la función f como $f = Bg$, donde B es un producto de Blaschke, que soporta los ceros de f, y g es una función en H^p, sin ceros, que lleva la norma de f, o sea, tal que $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Observemos que $|f| \le |g|$ y, teniendo en cuenta que $\left|B^*(e^{i\theta})\right| = 1$ para casi todo θ, resulta que $\left|f^*(e^{i\theta})\right| = \left|B^*(e^{i\theta})\, g^*(e^{i\theta})\right| = \left|g^*(e^{i\theta})\right|$ para casi todo θ. Por otro lado, como g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, entonces podemos definir una rama holomorfa de $g^{p/2}$ en $\mathbb{D}$, que la llamamos h. Además, es fácil ver que $h = g^{p/2} \in H^2$. Por tanto, por lo anterior, $h^* \in L^2(\mathbb{T})$ y $\|h_r - h^*\|_{L^2} \to 0$ cuando $r \to 1$, lo que implica que $\|h_r\|_{L^2} \to \|h^*\|_{L^2}$, que traducido en términos de g significa que $g^* \in L^p(\mathbb{T})$ y que $\|g_r\|_{L^p} \to \|g^*\|_{L^p}$. Esto último nos indica que $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, ya que $|f^*| = |g^*|$ en casi todo punto, y que $\|f_r\|_{L^p} \to \|f^*\|_{L^p}$, ya que, por un lado tenemos

$$\|f_r\|_{L^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^p d\theta \xrightarrow{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta = \|f^*\|_{L^p}^p,$$

y por el otro lado, usando el Lema de Fatou, tenemos

$$\|f^*\|_{L^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta \le \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta = \liminf_{r\to 1} \|f_r\|_{L^p}^p.$$

Veamos ahora que $\|f_r - f^*\|_{L^p} \to 0$ cuando $r \to 1$. Recordemos que, cuando $0 < p \le 1$ y a y b son positivos, se tiene que $(a+b)^p \le a^p + b^p$. Entonces, para casi todo θ,

$$\left|f(re^{i\theta})\right|^p + \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p - \left|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})\right|^p \ge 0,$$

lo que, por el Lema de Fatou, implica,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{r\to 1} \Big(\left|f(re^{i\theta})\right|^p + \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p - \left|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})\right|^p\Big)\, d\theta \\ &\qquad \le \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\left|f(re^{i\theta})\right|^p + \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p - \left|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})\right|^p\Big)\, d\theta. \end{aligned}$$

Ahora, en el lado izquierdo, basta usar la convergencia radial en casi todo punto y, en el lado derecho, la convergencia de las normas $\|f_r\|_{L^p} \to \|f^*\|_{L^p}$, para obtener,

$$2\|f^*\|_{L^p}^p \le 2\|f^*\|_{L^p}^p + \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\left|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta = 2\|f^*\|_{L^p}^p - \limsup_{r\to 1} \|f_r - f^*\|_{L^p}^p,$$

de donde se sigue que $\|f_r - f^*\|_{L^p} \to 0$ cuando $r \to 1$. ∎

A continuación damos una consecuencia inmediata de este resultado basada en el hecho de que, para a y b positivos y $p \in (0,1]$, se tiene

$$\left|\log^+ a - \log^+ b\right| \le \tfrac{1}{p}|a-b|^p,$$

desigualdad que se obtiene de estudiar el crecimiento de la función $\varphi(x) = \log x - \frac{1}{p}(x-1)^p$, $x \ge 1$.

Corolario 1.48. *Si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log^+\left|f(re^{i\theta})\right| - \log^+\left|f^*(e^{i\theta})\right|\right| d\theta \xrightarrow{r\to 1} 0.$$ ∎

Uno podría pensar que para obtener este corolario bastaría con pedir que $f \in \mathcal{N}$. Sin embargo, ni siquiera se mantiene la convergencia de $\left\|\log^+|f_r|\right\|_{L^1}$ a $\left\|\log^+|f^*|\right\|_{L^1}$. Como ejemplo, basta considerar la función $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}$, la cual está en $\mathcal{N} \smallsetminus \bigcup_{p>0} H^p$. (Se prueba de la misma manera que se hizo para $e^{\frac{1}{1-z}}$) . Resulta que esta función satisface $\log^+|f(z)| = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}$, con lo que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\,d\theta = 1, \quad \text{para todo } r\text{, mientras que} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\log^+\left|f^*(e^{i\theta})\right|}^{=0 \text{ c.t.p.}}\,d\theta = 0.$$

Otra de las consecuencias de este teorema la encontramos en la nota que hay dentro de la demostración. Además, la podemos completar para que incluya el caso $p = 1$.

Corolario 1.49. *Si $p \ge 1$ y $f \in H^p$, entonces $f = P[f^*]$. O sea, f se recupera a partir de sus valores en la frontera mediante su integral de Poisson.*

Demostración. Basta probar el resultado para $p = 1$. Observemos que $f_\rho(z) := f(\rho z)$, $\rho \in (0,1)$, satisface

$$f_\rho(re^{i\theta}) := f(\rho re^{i\theta}) = P_r * f_\rho(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(\rho e^{it})\,dt \xrightarrow{\rho\to 1} f(re^{i\theta}), \qquad \text{para todo } re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Como $f \in H^1$, entonces $f^* \in L^1(\mathbb{T})$ y, por tanto, $\Phi = P[f^*]$ es una función armónica (compleja) en $\mathbb{D}$. Para probar que $f = \Phi$, nos basamos en que $\left\|f_\rho - f^*\right\|_{L^1} \to 0$, para obtener, para $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ fijo, y usando las estimaciones usuales del núcleo de Poisson,

$$0 \le \left|f_\rho(re^{i\theta}) - \Phi(re^{i\theta})\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\left|f_\rho(e^{it}) - f^*(e^{it})\right| dt \le \frac{1+r}{1-r}\left\|f_\rho - f^*\right\|_{L^1},$$

de donde, tomando límites cuando $\rho \to 1$, concluimos que $f = \Phi$. ∎

Destaquemos de nuevo lo curioso de este resultado. Si $f \in H^1$, la teoría sobre funciones armónicas asegura que $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ están en h^1, luego se pueden representar como integrales de Poisson de medidas finitas con signo con soporte en $\mathbb{T}$. En otras palabras, f se representa como la integral de Poisson de una medida finita (compleja) con soporte en $\mathbb{T}$, $f = P[d\mu]$. Esto es lo que nos da la teoría de funciones armónicas. Ahora bien, el hecho de que f sea además analítica, nos está diciendo que la parte singular de la medida μ es nula, dando lugar a que f se represente como la integral de Poisson de una medida absolutamente continua que, además, resulta ser $d\mu(\theta) = f^*(e^{i\theta})\,d\theta$.

Supongamos ahora que f es holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces $\log|f|$ es subarmónica en $\mathbb{D}$ y, según el Teorema 1.32, para cada $\rho \in (0,1)$, $\log\left|f(\rho re^{i\theta})\right|$ queda mayorada por la función armónica $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f_\rho(e^{it})\right| dt$. Si ahora admitimos que f está en H^p para algún $p > 0$, entonces tenemos límites radiales de f y cabe pensar en la posibilidad de que la función subarmónica $\log|f(z)|$ quede mayorada por la integral de Poisson de $\log|f^*|$ en $\mathbb{D}$. Este es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 1.50. *Si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces, para $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,*

$$\log\left|f(re^{i\theta})\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f^*(e^{it})\right| dt.$$

Demostración. Por los comentarios anteriores tenemos, para $\rho \in (0,1)$ y $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$\log\left|f(\rho re^{i\theta})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f(\rho e^{it})\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\left(\log^+\left|f(\rho e^{it})\right| - \log^-\left|f(\rho e^{it})\right|\right) dt. \tag{1.1}$$

Ahora por el Corolario 1.48, para $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, usando la estimación $P_r(\theta) \leq \frac{1+r}{1-r}$,

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\left|\log^+\left|f(\rho e^{it})\right| - \log^+\left|f^*(e^{it})\right|\right| dt \leq \frac{1+r}{1-r}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log^+\left|f(\rho e^{it})\right| - \log^+\left|f^*(e^{it})\right|\right| dt \xrightarrow{\rho\to 1} 0,$$

luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log^+\left|f(\rho e^{it})\right| dt \xrightarrow{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log^+\left|f^*(e^{it})\right| dt.$$

Por otro lado, por el Lema de Fatou tenemos,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f^*(e^{it})\right| dt \leq \liminf_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f_\rho(e^{it})\right| dt.$$

Todo esto nos indica que, al tomar límites cuando $\rho \to 1$ en (1.1), obtenemos el resultado deseado. ∎

De nuevo, trabajando con la función $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}$, observamos que el resultado no es cierto para la clase de Nevanlinna, ya que

$$\log|f(z)| = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} > 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}, \quad \text{mientras que} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,\overbrace{\log\left|f^*(e^{it})\right|}^{=0 \text{ c.t.p.}}\, dt = 0.$$

Por otro lado, observamos que se puede dar la desigualdad estricta en el resultado, incluso cuando la función en sí no tiene ceros (que hace que $\log|f|$ sea armónica y uno puede pensar que la igualdad sería plausible). Esto se consigue trabajando con la inversa multiplicativa de la función anterior, $h(z) = e^{-\frac{1+z}{1-z}}$. Observamos que $h \in H^\infty$, pues $|h(z)| = e^{-\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}} \leq e^0 = 1$, y, además, no tiene ceros. Sin embargo, para $z \in \mathbb{D}$,

$$\log|h(z)| = -\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} \quad < \quad 0 \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,\overbrace{\log\left|h^*(e^{it})\right|}^{=0 \text{ c.t.p.}}\, dt.$$

Factorización canónica. A continuación nos preguntamos si hay alguna manera de "rellenar" la diferencia que puede haber en la desigualdad del resultado anterior. Supongamos entonces que $f \in H^p$ para algún $p > 0$ y que $f \not\equiv 0$. Iniciamos el proceso factorizando f como $f = Bg$, donde B es el producto de Blaschke formado por los ceros de f, y g es una función en H^p que nunca se anula, con $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Además, debido a que $|B| < 1$ en $\mathbb{D}$ y a que $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ para casi todo θ, se verifica que $|f| \leq |g|$ en $\mathbb{D}$ y que $\left|f^*(e^{i\theta})\right| = \left|g^*(e^{i\theta})\right|$ para casi todo θ. Podemos entonces considerar una rama holomorfa del $\log g$ en $\mathbb{D}$, con lo que $\log|g|$ es armónica en $\mathbb{D}$ y, por el Corolario 1.50, para $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$\log\left|f(re^{i\theta})\right| \leq \log\left|g(re^{i\theta})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\left|g^*(e^{it})\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f^*(e^{it})\right| dt := u(re^{i\theta}).$$

Observemos que la función u, así definida, es armónica en $\mathbb{D}$, ya que es la integral de Poisson de la función $\log|f^*|$ que, por el Teorema 1.41, está en $L^1(\mathbb{T})$. Además, por ese mismo teorema, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Todo esto nos indica que $u \in h^1$ y, por tanto, tiene límite radial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, que debe coincidir con la derivada (en casi todo punto) de la función de variación acotada asociada a la medida que representa a $u = P[\log|f^*|]$, o sea, $u^*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = \log\left|f^*(e^{i\theta})\right|$ para casi todo θ. De aquí se sigue que la función

$$F(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*(e^{it})\right| dt}$$

es analítica en $\mathbb{D}$ y satisface $|f| \leq |g| \leq e^u = |F|$. Precisamente, como $|F| = e^u$, resulta que $|F|$ tiene límite radial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, que, abusando del lenguaje (!) lo denotamos por $|F^*(e^{i\theta})|$, o sea, para casi todo θ, $|F^*(e^{i\theta})| \overset{!}{=} \lim_{r\to 1}|F(re^{i\theta})| = e^{u^*(e^{i\theta})} = |g^*(e^{i\theta})| = |f^*(e^{i\theta})|$. (Observemos que, en principio, no estamos diciendo que exista el límite radial $F^*(e^{i\theta})$, sino solamente el límite radial de su módulo).

Una función F, analítica en $\mathbb{D}$, que puede representarse como

$$F(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(e^{it})\,dt}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

donde $\psi \geq 0$, $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$ y $\psi \in L^p(\mathbb{T})$, se llama **función externa para H^p**.

Definamos ahora la función $S_o(z) = \frac{g(z)}{F(z)}$, $z \in \mathbb{D}$. Claramente, es una función analítica en $\mathbb{D}$ que satisface, a partir de las propiedades anteriores,

$$0 < |S_o(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}; \qquad |S_o^*(e^{i\theta})| = 1, \text{ c.t. } \theta.$$

(Ahora sí, $S_o^*(e^{i\theta})$ sí existe como límite radial en casi todo punto puesto que S_o es acotada, y, como consecuencia, se obtiene la existencia del límite radial $F^*(e^{i\theta})$).

Puesto que S_o es analítica en $\mathbb{D}$ y nunca se anula, podemos considerar una rama holomorfa $-\log S_o$ en $\mathbb{D}$, con lo que $\mathrm{Re}[-\log S_o] = -\log|S_o|$ es armónica y positiva en $\mathbb{D}$, luego es la integral de Poisson de una medida finita positiva $d\mu$, y tiene límite radial en casi todo punto igual a $\mu'(\theta) = -\log\left|S_o^*(e^{i\theta})\right| = 0$, o sea, la función de variación acotada asociada a $d\mu$ tiene derivada cero en casi todo punto. Esto implica que entonces $d\mu$ es una medida finita positiva, singular con respecto a la medida de Lebesgue. Mediante compleción analítica, existe $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que

$$-\log S_o(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t) - i\gamma, \qquad \text{o sea,} \qquad S_o(z) = e^{i\gamma}\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)} := e^{i\gamma} S(z).$$

Una función S, analítica en $\mathbb{D}$, que puede representarse como

$$S(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.3}$$

donde $d\mu$ es una medida finita positiva singular, se llama **función interna singular**.

Recordemos que $S_o = \frac{g}{F} = e^{i\gamma} S$ y que $f = Bg$. De esta manera obtenemos lo que llamamos la **factorización canónica de $f \in H^p$** como producto de una constante unimodular por un producto de Blaschke, por una función interna singular, por una función externa para H^p,

$$f = Bg = BS_oF = e^{i\gamma} BSF. \tag{1.4}$$

Teorema 1.51 (Factorización Canónica). *Cualquier función $f \not\equiv 0$ de la clase H^p $(p > 0)$ tiene una única factorización de la forma* (1.4). *Recíprocamente, si f admite una factorización como en* (1.4), *donde F es una función externa para H^p, entonces $f \in H^p$ y $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.*

Demostración. Ya hemos probado que toda función $f \not\equiv 0$ de la clase H^p $(p > 0)$ tiene una factorización de la forma (1.4), y la unicidad se sigue de la forma en que se ha construido la factorización.

Para el recíproco, probamos primero que toda función externa para H^p es de hecho una función en H^p. Supongamos entonces que F es analítica en $\mathbb{D}$ y admite una representación de la forma (1.2) con $\psi \geq 0$, $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$ y $\psi \in L^p(\mathbb{T})$. Entonces, por la desigualdad de Jensen,

$$\left|F(re^{i\theta})\right|^p = \left| e^{p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} \log\psi(e^{it})\,dt} \right| = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\log\left(\psi(e^{it})\right)^p dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\left(\psi(e^{it})\right)^p dt.$$

Y ahora por el Teorema de Fubini, teniendo en cuenta que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\theta = 1$ para todo t,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F(re^{i\theta})\right|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\theta\,\left(\psi(e^{it})\right)^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\psi(e^{it})\right)^p dt = \|\psi\|_{L^p}^p.$$

Lo que significa que $F \in H^p$ y que $\|F\|_{H^p} \leq \|\psi\|_{L^p}$. Es más, como $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$, es evidente que $|F^*| = \psi$, luego $\|F\|_{H^p} = \|F^*\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p}$.

A continuación, supongamos que f admite una factorización de la forma (1.4), $f = e^{i\gamma}BSF$, con F una función externa para H^p. Entonces, dado que $e^{i\gamma}BS$ es una función en H^∞ acotada por 1, que tiene módulo 1 en casi todo punto de la frontera y que $F \in H^p$, resulta evidente que $f \in H^p$ y que $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$. ∎

Definición 1.52 (Función interna). Decimos que una función I, holomorfa en $\mathbb{D}$, es interna si $I \in H^\infty$ y $\left|I^*(e^{i\theta})\right| = 1$ para casi todo θ.

Nota. Por el teorema de factorización canónica, tenemos que toda función interna I admite una representación de la forma

$$I = e^{i\gamma} B\,S, \tag{1.5}$$

donde $e^{i\gamma}$ es una constante unimodular, B es un producto de Blaschke y S es una función interna singular.

Cabe decir que también hay una factorización canónica para funciones en la clase de Nevanlinna. En el teorema de factorización canónica para funciones en H^p es fundamental la desigualdad dada en el Corolario 1.50. Cuando $f \in \mathcal{N}$, esta desigualdad no es necesariamente cierta, y esto provoca la aparición de un factor singular que es cociente de dos funciones internas singulares. Antes de enunciar el siguiente Teorema, conviene definir el concepto de **función externa para la clase $\mathcal{N}$** como una función F, holomorfa en $\mathbb{D}$ que admite una representación de la forma (1.2), con $\psi \geq 0$ y $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$ (no incluimos la condición $\psi \in L^p$).

Teorema 1.53. *Cualquier función $f \in \mathcal{N}$ admite una factorización de la forma*

$$f(z) = e^{i\gamma} B(z)\,\frac{S_1(z)}{S_2(z)}\,F(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.6}$$

donde $e^{i\gamma}$ es una constante unimodular, B es un producto de Blaschke (el asociado a los ceros de f), S_1 y S_2 son funciones internas singulares y F es una función externa para la clase $\mathcal{N}$ (con $\psi = f^*$). Recíprocamente, toda función de la forma (1.6) *pertenece a $\mathcal{N}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{N}$. Aplicamos su factorización de Riesz, $f = B\,g$. Sabemos que $|f| \leq |g|$ en $\mathbb{D}$, que $g \in \mathcal{N}$ y no tiene ceros, que $\sup_r T(r,f) = \sup_r T(r,g)$, y que $|f^*| = |g^*|$ (en casi todo punto). Además $\log|f^*| = \log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Como g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, podemos considerar una rama holomorfa del $\log g$ en $\mathbb{D}$, y por el Corolario 1.42, $\log|g| \in h^1$. Por tanto, por el teorema de representación de funciones armónicas en h^1, existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, tal que

$$\log\left|g(re^{i\theta})\right| = P[d\mu](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,d\mu(t), \qquad re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

También, $\log|g|$ tiene límite radial $\log|g^*|$ en casi todo punto, luego la descomposición de $d\mu(\theta)$ en parte absolutamente continua y parte singular, y esta última, en parte positiva y parte negativa, resulta ser del tipo

$$d\mu(\theta) = \log\left|g^*(e^{i\theta})\right| d\theta + d\sigma^+(\theta) - d\sigma^-(\theta).$$

Así, por compleción analítica, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\log g(z) = i\gamma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|g^*(e^{i\theta})\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma^+(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma^-(\theta).$$

Por tanto, como $\log|g^*| = \log|f^*|$, tenemos la factorización anunciada en (1.6),

$$f(z) = B(z)\,g(z) = e^{i\gamma} B(z)\,\frac{e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*(e^{it})\right| dt}\; e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma^-(t)}}{e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma^+(t)}} \equiv e^{i\gamma} B(z)\,\frac{F(z)\,S_1(z)}{S_2(z)}.$$

Supongamos ahora que f admite una factorización del tipo (1.6), entonces la parte $F(z)\,\frac{S_1(z)}{S_2(z)}$ admite una representación en términos de una medida finita con signo del tipo $d\mu(\theta) = \log\psi(e^{i\theta})\,d\theta + d\sigma^+(\theta) - d\sigma^-(\theta)$, con $\psi > 0$, $\log\psi \in L^1(\mathbb{T})$, y $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$ una medida singular. Esta representación es como sigue:

$$F(z)\,\frac{S_1(z)}{S_2(z)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)}.$$

Observemos que la descomposición en parte positiva y parte negativa, $d\mu = d\mu^+ - d\mu^-$, es del tipo $d\mu^+(\theta) = \log^+ \psi(e^{i\theta})\,d\theta + d\sigma^+(\theta)$, y $d\mu^-(\theta) = \log^- \psi(e^{i,\theta})\,d\theta + d\sigma^-(\theta)\,d\theta$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$, que $|B| \leq 1$, y que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, concluimos que $f \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} T(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|e^{i\gamma} B(re^{i\theta})\,F(re^{i\theta})\,\frac{S_1(re^{i\theta})}{S_2(re^{i\theta})}\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\log^+\left|B(re^{i\theta})\right|}^{=0} + \log^+ e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(t)}\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu^+(t)\,d\theta = \mu^+(\mathbb{T}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 2

Integrabilidad de la derivada de los productos de Blaschke

Este capítulo lo dedicamos, tal como hemos anunciado en la introducción, al estudio de las condiciones que aseguren la pertenencia de las derivadas de los productos de Blaschke a determinados espacios de funciones clásicos en el disco unidad, en concreto a los espacios de Hardy H^p y los espacios de Bergman A^p. El capítulo, por tanto, contiene, aparte de una sección preliminar, dos secciones más con los resultados que se obtienen a partir de restricciones sobre los ceros de los productos de Blaschke y hasta qué punto son precisos.

2.1. Resultados y conceptos preliminares

En esta sección vamos a introducir conceptos y resultados preliminares que nos van a servir como herramientas para desarrollar las siguientes secciones.

2.1.1. Automorfismos del disco unidad y la métrica pseudo-hiperbólica

Sea $\mathbb{B}$ el conjunto de las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, o sea, $f \in \mathbb{B}$ si y solo si f es analítica en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Empezamos recordando el simple pero tremendemente útil lema de Schwarz:

Lema 2.1 (Schwarz). *Si $f \in \mathbb{B}$, y si $f(0) = 0$, entonces*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.1}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2.2}$$

Si se da la igualdad en (2.1) *para algún punto $z \neq 0$, o bien en* (2.2)*, entonces $f(z) = e^{i\gamma} z$, siendo $\gamma \in \mathbb{R}$.*

La prueba consiste en observar que la función $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ es analítica en $\mathbb{D}$, pues en 0 presenta una singularidad evitable, y luego, dado que $\limsup_{|z|\to 1} |g(z)| \leq 1$, aplicar el principio del máximo.

Vamos a necesitar la forma invariante del lema de Schwarz debida a Pick. Sea $a \in \mathbb{D}$. Denotemos por T_a la transformación de Möbius

$$T_a(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a} z}.$$

Observemos que T_a aplica el disco unidad en sí mismo, y 0 en a. Además, su inversa es T_{-a} y, al tratarse de una transformación de Möbius, T_a preserva circunferencias de la esfera de Riemann (esto es, circunferencias o rectas del plano complejo son transformadas en circunferencias o rectas del plano complejo). También preserva ángulos y simetrías con respecto a circunferencias de la esfera de Riemann.

Lema 2.2 (Schwarz-Pick). *Si $f \in \mathbb{B}$, entonces*

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|, \quad z_1, \, z_2 \in \mathbb{D}, \tag{2.3}$$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{2.4}$$

Si se da la igualdad en (2.3) *para algún par de puntos $z_1 \neq z_2$, o bien en* (2.4) *para algún $z \in \mathbb{D}$, entonces $f(z) = e^{i\gamma} T_a(z)$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y algún $a \in \mathbb{D}$.*

La prueba consiste en aplicar el Lema de Schwarz a la función $T_{-f(z_2)} \circ f \circ T_{z_2}$. Observemos que si en (2.3) dividimos por $|z_1 - z_2|$ y hacemos tender z_1 a z_2, obtenemos (2.4) en $z = z_2$.

Con ayuda del lema de Schwarz, podemos probar que los automorfismos del disco unidad, o sea, las aplicaciones conformes del disco unidad sobre sí mismo, son únicamente del tipo $e^{i\gamma} T_a(z)$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y algún $a \in \mathbb{D}$. Dicho de otra manera, los automorfismos del disco unidad son las únicas funciones $\varphi \in \mathbb{B}$ tales que satisfacen las igualdades en (2.3) y en (2.4):

$$\left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{1 - \overline{\varphi(z_2)} \varphi(z_1)} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|, \quad z_1, \, z_2 \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{2.6}$$

En el caso de tratarse de $T_{-a}(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, entonces $(T_{-a})'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$ y, por tanto, (2.6) se transforma en

$$1 - \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|^2 = 1 - |T_{-a}(z)|^2 = |(T_{-a})'(z)| \left(1 - |z|^2\right) = \frac{\left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \overline{a}\, z|^2}. \tag{2.7}$$

Recordemos que los factores que aparecen en un producto de Blaschke son precisamente automorfismos del disco unidad. Por eso estamos interesados en sus propiedades.

En primer lugar observamos que, para cada $a \in \mathbb{D}$ y cada $r \in (0,1)$, tenemos que $T_a\big(\{|z| = r\}\big)$ es una circunferencia contenida en el disco unidad cuyos centro c y radio R son fáciles de calcular mediante argumentos puramente geométricos a partir de las propiedades que cumple toda transformación de Möbius: la línea recta que pasa por 0 y a queda invariante mediante T_a y además es ortogonal a la circunferencia $T_a\big(\{|z| = r\}\big)$. Por tanto, el segmento

$$[\alpha, \beta] := \left[T_a\big(-r \tfrac{a}{|a|}\big), \, T_a\big(r \tfrac{a}{|a|}\big) \right] = \left[\tfrac{|a|-r}{1-r|a|} \, \tfrac{a}{|a|}, \, \tfrac{|a|+r}{1+r|a|} \, \tfrac{a}{|a|} \right]$$

es un diámetro del disco $T_a\big(\mathbb{D}(0,r)\big)$, con lo cual su centro c y su radio R vienen dados por

$$c = \tfrac{1}{2}\Big(T_a\big(-r \tfrac{a}{|a|}\big) + T_a\big(r \tfrac{a}{|a|}\big) \Big) = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 |a|^2} \, a, \qquad R = \tfrac{1}{2} \Big| \, T_a\big(-r \tfrac{a}{|a|}\big) - T_a\big(r \tfrac{a}{|a|}\big) \Big| = \frac{1 - |a|^2}{1 - r^2 |a|^2} \, r.$$

Además, se sigue de todo esto que la circunferencia $T_a\big(\{|z| = r\}\big)$ debe estar contenida en el anillo de centro 0 y radios $|\alpha| = \big|T_a\big(-r \tfrac{a}{|a|}\big)\big|$ y $|\beta| = \big|T_a\big(r \tfrac{a}{|a|}\big)\big|$. Dicho de otra manera, escribiendo $|z|$ en vez de r, tenemos

$$\frac{\big||z| - |a|\big|}{1 - |a|\,|z|} \leq \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}\,z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a|\,|z|}, \qquad z, a \in \mathbb{D}. \tag{2.8}$$

Definamos ahora

$$\varrho(z_1, z_2) := |T_{-z_2}(z_1)| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}\, z_1} \right|, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{D},$$

y comprobemos que se trata de una métrica en $\mathbb{D}$, conocida como la *métrica pseudo-hiperbólica de* $\mathbb{D}$. Se ve fácilmente que es simétrica y que $\varrho(z_1, z_2) = 0$ si y solo si $z_1 = z_2$. Para probar la propiedad triangular observamos primero que, por el Lema de Schwarz-Pick, las funciones en $\mathbb{B}$ son no expansivas con respecto a ϱ, y son isometrías (se da la igualdad en la anterior desigualdad) con respecto a ϱ en el caso, y solo en este caso, de automorfismos del disco unidad, o sea,

$$\text{para toda } f \in \mathbb{B}, \qquad \varrho\big(f(z_1), f(z_2)\big) \leq \varrho\big(z_1, z_2\big), \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{D},$$

dándose la igualdad en un (todo) par de puntos $z_1 \neq z_2$ si, y solo si, $f \in \mathbb{B}$ es un automorfismo del disco unidad.

Usamos esto último para probar la propiedad triangular de ϱ, de hecho probamos algo un poco más fuerte.

Lema 2.3. *Para tres puntos cualesquiera z_1, z_2, z_3 de $\mathbb{D}$,*

$$\frac{\left|\varrho(z_1,z_3)-\varrho(z_3,z_2)\right|}{1-\varrho(z_2,z_3)\varrho(z_3,z_1)} \le \varrho(z_1,z_2) \le \frac{\varrho(z_1,z_3)+\varrho(z_3,z_1)}{1+\varrho(z_2,z_3)\varrho(z_3,z_1)}. \tag{2.9}$$

Demostración. El caso $z_3 = 0$ es la desigualdad (2.8). La más general se sigue trivialmente de la invariancia de ϱ frente a automorfismos de $\mathbb{D}$. ∎

Una vez probado que ϱ define una métrica en $\mathbb{D}$, introducimos el conocido como *disco pseudo-hiperbólico de centro $a \in \mathbb{D}$ y radio $r \in (0,1)$*:

$$\Delta(a,r) = \{z \in \mathbb{D} : \varrho(z,a) < r\} = \{z \in \mathbb{D} : \left|T_{-a}z\right| < r\} = T_a\big(\mathbb{D}(0,r)\big),$$

2.1.2. Derivada angular en el sentido de Carathéodory

Diremos que $f \in \mathbb{B}$ tiene *derivada angular en el sentido de Carathéodory* en $\zeta \in \mathbb{T}$ si $f(\zeta)$ existe (como límite radial o no tangencial) y tiene módulo 1 y además existe $f'(\zeta) := \lim_{r\to 1} f'(r\zeta)$. Si f no tiene derivada angular en el sentido de Carathéodory en ζ, adoptamos el convenio de Ahern y Clark [5], y escribimos $|f'(\zeta)| = \infty$, lo que no necesariamente implica que $|f'(r\zeta)| \to \infty$ cuando $r \to 1$. El siguiente teorema recoge los resultados básicos sobre la derivada angular:

Teorema 2.4 (Carathéodory [9]**).** *Si $f \in \mathbb{B}$ y $\zeta \in \mathbb{T}$, entonces*

(i) $|f'(\zeta)| = \lim\limits_{r\to 1} \frac{1-|f(r\zeta)|}{1-r}$;

(ii) *Si f tiene una derivada angular en ζ, entonces $f'(\zeta) = \overline{\zeta}\, f(\zeta)\left|f'(\zeta)\right|$;*

(iii) *Si $f_n \in \mathbb{B}$ y $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, entonces*

$$\left|f'(\zeta)\right| \le \liminf_{n\to\infty} \left|f_n'(\zeta)\right|.$$

Para una breve introducción al concepto de derivada angular y una prueba detallada de este resultado, nos referimos a [28, Ch. 4].

Corolario 2.5. *Si f y g pertenecen a $\mathbb{B}$, y si $\phi = fg$, entonces*

$$|\phi'(\zeta)| = |f'(\zeta)| + |g'(\zeta)|, \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{T}. \tag{2.10}$$

Demostración. Consideramos un primer caso en el que tanto f como g tienen derivada angular en el sentido de Carathéodory en $\zeta \in \mathbb{T}$. Entonces, claramente, $\phi(\zeta)$ existe (como límite radial) y tiene módulo 1, y además

$$\lim_{r\to 1}\left|\phi'(r\zeta)\right| = \lim_{r\to 1}|f'(r\zeta)\,g(r\zeta) + f(r\zeta)\,g'(r\zeta)| = f'(\zeta)\,g(\zeta) + f(\zeta)\,g'(\zeta).$$

Por tanto, ϕ tiene derivada angular en el sentido de Carathéodory en ζ. Ahora solo falta comprobar la igualdad (2.10). Para ello, usamos (ii) del Teorema 2.4,

$$\left|\phi'(\zeta)\right| = \left|f'(\zeta)\,g(\zeta) + f(\zeta)\,g'(\zeta)\right| = \left|\overline{\zeta}\, f(\zeta)\left|f'(\zeta)\right| g(\zeta) + f(\zeta)\,\overline{\zeta}\, g(\zeta)\left|g'(\zeta)\right|\right| = \overbrace{|\overline{\zeta}\, f(\zeta)\,g(\zeta)|}^{=1}\big(\left|f'(\zeta)\right| + \left|g'(\zeta)\right|\big).$$

La demostración del resultado quedaría completa considerando ahora solamente el caso en que f no tiene derivada angular (en el sentido de Carathéodory) en $\zeta \in \mathbb{T}$. Entonces tenemos, por (i) del Teorema 2.4,

$$\infty = \left|f'(\zeta)\right| \overset{(i)}{=} \lim_{r\to 1} \frac{1-\left|f(r\zeta)\right|}{1-r}.$$

Como $f, g \in \mathbb{B}$, resulta que $|\phi| = |fg| \le |f|$ y, por tanto, $\frac{1-|f(r\zeta)|}{1-r} \le \frac{1-|\phi(r\zeta)|}{1-r}$, dando lugar a que $\left|\phi'(\zeta)\right| = \infty$ y, en consecuencia,

$$\left|\phi'(\zeta)\right| = \left|f'(\zeta)\right| + \left|g'(z)\right|.$$ ∎

Si $f, g \in \mathbb{B}$, diremos que g es un *divisor* de f si $f = gh$, para agún $h \in \mathbb{B}$.

Corolario 2.6. *Supongamos que φ, y φ_n, $n = 1, 2, \dots$, son funciones de $\mathbb{B}$, y que φ_n es un divisor de φ para todo n. Si $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, entonces $|\varphi_n'(\zeta)| \to |\varphi'(\zeta)|$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$.*

Demostración. Observemos que, fijado $\zeta \in \mathbb{T}$, el Teorema 2.4 (iii) implica que $|\varphi'(\zeta)| \le \liminf |\varphi_n'(\zeta)|$, mientras que el Corolario 2.5 implica que $|\varphi'(\zeta)| \le |\varphi_n'(\zeta)|$. ∎

Podemos usar este Corolario para dar una representación de $\left|B'(\zeta)\right|$, $\zeta \in \mathbb{T}$, siendo B un producto de Blaschke infinito (para productos de Blaschke finitos, lo que vamos a probar es trivial). Si $\{a_n\}$ es la sucesión exacta de ceros de B, y escribimos $B(z) = \prod_n b_n(z)$, siendo cada b_n el correspondiente automorfismo del disco unidad que se anula en a_n, entonces observamos que $B_N = \prod_{n=1}^N b_n$, $N = 1, 2, \dots$, son divisores de B y que $B_N \to B$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Por tanto, por el Corolario 2.6, $\left|B_N'(\zeta)\right| \to \left|B'(\zeta)\right|$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Además, por el Corolario 2.5, resulta que $\left|B_N'(\zeta)\right| = \sum_{n=1}^N \left|b_n'(\zeta)\right|$, $\zeta \in \mathbb{T}$. De aquí se sigue que, para todo $\zeta \in \mathbb{T}$,

$$\left|B'(\zeta)\right| = \lim_{N\to\infty} \left|B_N'(\zeta)\right| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \left|b_n'(\zeta)\right| = \sum_{n=1}^\infty \left|b_n'(\zeta)\right| = \cdots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1-|a_n|^2}{|\zeta - a_n|^2}. \tag{2.11}$$

Observemos que para un producto de Blaschke B, la existencia de derivada angular en el sentido de Carathéodory en casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$ es equivalente a la existencia del límite radial $\left|B'(\zeta)\right| = \lim_{r\to 1}\left|B'(r\zeta)\right|$ en casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Esto es debido al hecho de que, al tratarse de un producto de Blaschke, ya tenemos asegurada la existencia de límite radial de módulo 1 en casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$.

2.1.3. Productos de Blaschke interpolantes

Una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{D}$ se dice *uniformemente separada* si existe $\delta > 0$ tal que

$$\inf_n \prod_{m\neq n} \varrho(a_m, a_n) = \inf_n \prod_{m\neq n} \left| \frac{a_n - a_m}{1 - \overline{a_m} a_n} \right| \ge \delta. \tag{2.12}$$

Observemos que toda sucesión uniformemente separada implícitamente satisface la condición de Blaschke (pues cada producto infinito debe converger). Otra de las características de estas sucesiones es que realmente están bien separadas con respecto a la métrica pseudo-hiperbólica. De alguna manera nos dice que el producto de Blaschke asociado a una sucesión uniformemente separada, al tener sus ceros bien separados, debe presentar una "distorsión pequeña", o sea $|B'|$ no debe ser "muy grande", lo que, a fin de cuentas, debe implicar una mejor integrabilidad de $|B'|$.

Esta es una de las razones por las que estudiaremos la integrabilidad de la derivada de *productos de Blaschke interpolantes*, los cuales los definimos como productos de Blaschke asociados a sucesiones uniformemente separadas. Veremos que, en general, mejoran los resultados obtenidos para los otros productos de Blaschke.

Las sucesiones uniformemente separadas también suelen llamarse *interpolantes*. El término interpolante proviene del problema de *interpolación universal para H^∞*, planteado por el matemático norteamericano R. Creighton Buck. Este consiste en caracterizar todas las sucesiones interpolantes para H^∞, es decir, aquellas $\{a_n\}$ tales que, para cualquiera que sea la sucesión acotada $\{w_n\}$ en $\mathbb{C}$, existe f en H^∞ con la propiedad de que $f(a_n) = w_n$ para todo n. Alrededor del año 1958, tras soluciones parciales dadas por Walter K. Hayman [23] y por Donald J. Newman [31], el sueco Lennart Carleson [10] resolvió el problema: *$\{a_n\}$ es una sucesión universalmente interpolante para H^∞ si y solo si $\{a_n\}$ es uniformemente separada.*

La derivada de un producto de Blaschke interpolante evaluada en cada cero está íntimamente ligada a la cercanía del cero a la frontera del disco unidad: cuanto más cerca, más grande es la derivada. La siguiente Proposición da fe de ello.

Proposición 2.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión uniformemente separada con constante de separación $\delta > 0$, esto es, $\delta := \inf_n \prod_{\{n\neq k\}} \varrho(a_n, a_k) > 0$. Sea B el correspondiente producto de Blaschke asociado a $\{a_n\}$. Entonces*

$$\frac{\delta}{1-|a_n|^2} \le |B'(a_n)| \le \frac{1}{1-|a_n|^2}, \qquad \textit{para todo } n. \tag{2.13}$$

Demostración. Observemos en primer lugar que la desigualdad de la derecha es cierta para cualquier función en $\mathbb{B}$. Esto es debido a que, por el Lema de Schwarz-Pick, para todo $z \in \mathbb{D}$, en particular para cualquiera de los a_n, se tiene

$$|B'(z)| \le \frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Para probar ahora la desigualdad de la izquierda escribimos

$$B(z) = \prod_n b_n(z), \qquad \text{donde } b_n(z) = \begin{cases} \dfrac{-\overline{a_n}}{|a_n|}\,\dfrac{z-a_n}{1-\overline{a_n}\,z}, & \text{si } a_n \ne 0, \\ z, & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

Entonces su derivada admite la siguiente representación

$$B'(z) = \sum_k b_k'(z)\,\frac{B(z)}{b_k(z)}.$$

Observemos que cada $B_k := \frac{B}{b_k} = \prod_{\{n\ne k\}} b_n$ es un producto de Blaschke con sucesión exacta de ceros $\{a_n\}_{\{n:n\ne k\}}$, o sea, $B_k(a_n) = 0$ para $n \ne k$, y además, para a_k, usamos la constante de separación

$$\big|B_k(a_k)\big| = \prod_{n=1,\,n\ne k}^{\infty} \big|b_n(a_k)\big| = \prod_{n\ne k}\left|\frac{a_k - a_n}{1-\overline{a_n}a_k}\right| = \prod_{n\ne k} \varrho(a_n, a_k) \ge \delta. \tag{2.14}$$

Por tanto, evaluando $|B'|$ en a_n, podemos concluir el lema,

$$\big|B'(a_n)\big| = \Big|\sum_k b_k'(a_n)\,B_k(a_n)\Big| = \big|b_n'(a_n)\big|\,\big|B_n(a_n)\big| \ge \frac{\delta}{1-|a_n|^2}. \qquad \blacksquare$$

El caso es que esta relación se puede extender a discos pseudo-hiperbólicos de centro a_n y radio fijo.

Proposición 2.8. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión uniformemente separada con constante de separación $\delta > 0$ y sea B el correspondiente producto de Blaschke asociado a $\{a_n\}$. Entonces,*

$$\frac{\delta}{6}\,\frac{1}{1-|a_n|^2} \le |B'(z)| \le \frac{2}{1-|a_n|^2}, \qquad \textit{para todo } z \in \Delta\big(a_n, \tfrac{\delta}{3}\big) \textit{ y todo } n = 1, \dots. \tag{2.15}$$

Demostración. Empezamos probando una desigualdad como la de (2.15) con a_n reemplazado por z. Por un lado, el Lema de Schwarz-Pick asegura que

$$|B'(z)| \le \frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.16}$$

Por otro lado, fijamos n y escribimos, como viene siendo habitual, $B = \prod_k b_k = b_n B_n$. Entonces su derivada, $B' = b_n' B_n + b_n B'$, queda acotada por abajo como sigue:

$$\big|B'(z)\big| = \big|b_n'(z)\,B_n(z) + b_n(z)\,B_n'(z)\big| \ge \big|b_n'(z)\big|\,\big|B_n(z)\big| - \big|b_n(z)\big|\,\big|B_n'(z)\big|, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.17}$$

Nos disponemos ahora a estimar cada uno de los términos que han aparecido. Para ello, restringimos z al disco pseudo-hiperbólico $\Delta\big(a_n, \frac{\delta}{3}\big)$.

En primer lugar, acotamos $|b_n'(z)|$ con ayuda del Lema de Schwarz-Pick,

$$|b_n'(z)| = \frac{1-|b_n(z)|^2}{1-|z|^2} = \frac{1-\varrho(z,a_n)^2}{1-|z|^2} \ge \frac{1-\big(\frac{\delta}{3}\big)^2}{1-|z|^2}, \qquad z \in \Delta\big(a_n, \tfrac{\delta}{3}\big).$$

Ahora, como pasaba en (2.14), tenemos $|B_n(a_n)| \ge \delta$ por la propiedad de separación. Así que por la propiedad triangular para la métrica pseudo-hiperbólica y el Lema de Schwarz-Pick de nuevo, tenemos

$$|B_n(z)| = \varrho\big(0, B_n(z)\big) \ge \varrho\big(0, B_n(a_n)\big) - \varrho\big(B_n(z), B_n(a_n)\big) \ge |B_n(a_n)| - \varrho(z, a_n) \ge \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}, \qquad z \in \Delta\big(a_n, \tfrac{\delta}{3}\big).$$

El tercer término es fácil de acotar,

$$|b_n(z)| = \varrho(z, a_n) \le \frac{\delta}{3}, \qquad z \in \Delta\big(a_n, \tfrac{\delta}{3}\big),$$

al igual que el cuarto, de nuevo por Schwarz-Pick y la estimación del segundo término,

$$|B_n'(z)| \leq \frac{1-|B_n(z)|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{1-\left(\frac{2\delta}{3}\right)^2}{1-|z|^2}, \qquad z \in \Delta\left(a_n, \tfrac{\delta}{3}\right),$$

Todo esto, metido en (2.17), nos da

$$\left|B'(z)\right| \geq \frac{\left[\left(1-\left(\frac{\delta}{3}\right)^2\right)\frac{2\delta}{3} - \frac{\delta}{3}\left(1-\left(\frac{2\delta}{3}\right)^2\right)\right]}{1-|z|^2} = \frac{\left(\frac{\delta}{3}+\frac{2\delta^3}{9}\right)}{1-|z|^2} \geq \frac{\delta}{3}\,\frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in \Delta\left(a_n, \tfrac{\delta}{3}\right). \tag{2.18}$$

Juntando entonces (2.16) y (2.18), obtenemos

$$\frac{\delta}{3}\,\frac{1}{1-|z|^2} \leq \left|B'(z)\right| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in \Delta\left(a, \tfrac{\delta}{3}\right). \tag{2.19}$$

Ahora es cuestión de relacionar $(1-|z|^2)$ con $(1-|a_n|^2)$ cuando $z \in \Delta\left(a, \frac{\delta}{3}\right)$. Para ello, hacemos uso del hecho que $\Delta\left(a_n, \frac{\delta}{3}\right)$ es el disco euclídeo $T_{a_n}\left(\mathbb{D}\left(0, \frac{\delta}{3}\right)\right)$, donde $T_{a_n}(z) = \frac{z+a_n}{1+\overline{a_n}z}$, y que, por tanto, el punto de dicho disco más cercano a la frontera de $\mathbb{D}$ es $T_{a_n}\left(\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right)$ y el más alejado de la frontera de $\mathbb{D}$ es $T_{a_n}\left(-\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right)$. Por tanto,

$$z \in \Delta\left(a, \tfrac{\delta}{3}\right) \implies \begin{cases} 1-|z|^2 \leq 1-\left|T_{a_n}\left(-\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right)\right|^2 = \dfrac{\left(1-\left(\frac{\delta}{3}\right)^2\right)\left(1-|a_n|^2\right)}{\left|1-\overline{a_n}\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right|^2} \leq \dfrac{1+\frac{\delta}{3}}{1-\frac{\delta}{3}}\left(1-|a_n|^2\right) \overset{(\delta\leq 1)}{\leq} 2\left(1-|a_n|^2\right), \\ 1-|z|^2 \geq 1-\left|T_{a_n}\left(\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right)\right|^2 = \dfrac{\left(1-\left(\frac{\delta}{3}\right)^2\right)\left(1-|a_n|^2\right)}{\left|1+\overline{a_n}\frac{\delta}{3}\frac{a_n}{|a_n|}\right|^2} \geq \dfrac{1-\frac{\delta}{3}}{1+\frac{\delta}{3}}\left(1-|a_n|^2\right) \overset{(\delta\leq 1)}{\geq} \frac{1}{2}\left(1-|a_n|^2\right). \end{cases}$$

Introduciendo estas estimaciones en (2.19) llegamos a la conclusión deseada. ∎

El siguiente resultado de Carleson es fundamental en la resolución del problema de interpolación universal, y a la vez, va a mostrarse útil en nuestra tarea de dar condiciones necesarias y suficientes para que la derivada de productos de Blaschke pertenezcan a los espacios de Hardy. Una demostración se puede encontrar en [13, Chap. 9].

Teorema 2.9. *Si $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ es una sucesión uniformemente separada y $0 < p < \infty$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in H^p$,*

$$\sum_n \left(1-|a_n|\right)\left|f(a_n)\right|^p \leq C\|f\|_{H^p}^p.$$

Construir sucesiones uniformemente separadas (interpolantes) puede no ser evidente, dada la condición que se le impone. Sin embargo, hay una familia de sucesiones que vienen caracterizadas por condiciones fáciles de verificar y que constituyen una subclase bastante importante dentro de la clase de las sucesiones interpolantes. Diremos que una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ es una *sucesión exponencial* en $\mathbb{D}$ si, una vez ordenada según módulo creciente, existe $q \in (0,1)$ tal que

$$1-|a_{n+1}| \leq q\left(1-|a_n|\right), \qquad n \geq 1. \tag{2.20}$$

La siguiente relación entre sucesiones interpolantes y sucesiones exponenciales fue probada independientemente por Hayman [23], Kabaila, y Newman [31] (ver también Duren [13, Thm. 9.2]).

Teorema 2.10. *Toda sucesión exponencial es uniformemente separada. Al revés, si una sucesión uniformemente separada está sobre un radio, entonces es exponencial.*

Demostración. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ una sucesión exponencial (la suponemos ya ordenada según módulo creciente), y sea $q \in (0,1)$ para el que se verifica (2.20). Por la desigualdad (2.8), tenemos, para $n > k$,

$$\left|\frac{a_n-a_k}{1-\overline{a_k}\,a_n}\right| \geq \frac{|a_n|-|a_k|}{1-|a_k|\,|a_n|} = \frac{(1-|a_k|)-(1-|a_n|)}{(1-|a_n|)+|a_n|\,(1-|a_k|)} \geq \frac{(1-q^{n-k})\cancel{(1-|a_k|)}}{(1+q^{n-k})\cancel{(1-|a_k|)}},$$

y análogamente para $n < k$. Por tanto,

$$\prod_{n=1,\,n\neq k}^{\infty}\left|\frac{a_n-a_k}{1-\overline{a_k}\,a_n}\right| \geq \prod_{n<k}\frac{1-q^{k-n}}{1+q^{k-n}}\prod\frac{1-q^{n-k}}{1+q^{n-k}} \geq \left(\prod_n\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2,$$

lo que probaría que $\{a_n\}$ es una sucesión uniformemente separada, si es que somos capaces de probar que el producto infinito $\prod_n \frac{1-q^n}{1+q^n}$ es, de hecho, absolutamente convergente. Pero esto es cierto, pues la serie asociada a $\left(1-\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)=2\,\frac{q^n}{1+q^n}$ es absolutamente convergente.

Supongamos ahora que $\{a_n\}$ es una sucesión uniformemente separada que está sobre un radio de $\mathbb{D}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho radio es el segmento abierto $(0,1)$ y que la sucesión ya está ordenada según módulo creciente. Sea $\delta \in (0,1)$ para el que se verifica

$$\prod_{n=1,\, n\neq k}^{\infty} \left|\frac{a_n-a_k}{1-\overline{a_k}\,a_n}\right| \geq \delta, \qquad \text{para todo } k\geq 1.$$

Esto implica que, para $k\geq 1$,

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{1-a_k\,a_{k+1}} \geq \prod_{n=1,\, n\neq k}^{\infty} \left|\frac{a_n-a_k}{1-\overline{a_k}\,a_n}\right| \geq \delta,$$

de donde se sigue que $\{a_n\}$ es una sucesión exponencial:

$$1-a_{k+1} \leq 1-\frac{\delta+a_k}{1+\delta\,a_k} = \frac{(1-\delta)\,(1-a_k)}{1+\delta\,a_k} \leq (1-\delta)\,(1-a_k). \qquad \blacksquare$$

Cabe destacar que Newman [31] también consideró el caso de una sucesión uniformemente separada y contenida dentro de un ángulo de Stolz. En estas circunstancias puede probarse que dicha sucesión es unión finita de sucesiones exponenciales.

2.1.4. Ángulos de Stolz

Recordemos que el ángulo de Stolz $S_\alpha(\theta)$, de vértice $e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}$ y "apertura α", con $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, se define como la envolvente convexa cerrada del disco $\overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}$ y el punto $\{e^{i\theta}\}$, excluyendo este último punto. Esta definición puede resultar incómoda a la hora de trabajar con ella. Por ello, vamos a definir otro tipo de regiones, que también vamos a llamar ángulos de Stolz, y que, en cierto modo, van a ser equivalentes entre sí: Para $e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}$ y para $\sigma\geq 1$, (re)definimos el ángulo de Stolz, denotado ahora como $\Omega_\sigma(\theta)$, o también $\Omega_\sigma\left(e^{i\theta}\right)$, o incluso simplemente Ω_σ cuando $e^{i\theta}=1$, como

$$\Omega_\sigma(\theta) := \left\{z\in\mathbb{D} \,:\, \left|e^{i\theta}-z\right| \leq \sigma\left(1-|z|\right)\right\}. \tag{2.21}$$

Observemos de nuevo que los radios son regiones de Stolz con $\sigma=1$. Lo primero que hacemos ahora es comprobar que ambas regiones son equivalentes.

Proposición 2.11. *$S_\alpha(\theta)\subset\Omega_\sigma(\theta)$ donde $\sigma=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$.*

Demostración. Escribamos $z\in S_\alpha(\theta)$ como $z=(1-t)\,w+t\,e^{i\theta}$, para algún $t\in[0,1)$ y algún $w\in\overline{\mathbb{D}(0,\operatorname{sen}\alpha)}$. Entonces

$$\left.\begin{aligned} \left|e^{i\theta}-z\right| &= \left|e^{i\theta}-(1-t)\,w-t\,e^{i\theta}\right| = (1-t)\,|1-w| \leq (1-t)\,(1+\operatorname{sen}\alpha) \\ 1-|z| &= 1-\left|(1-t)\,w+t\,e^{i\theta}\right| \geq (1-t)-(1-t)\,|w| \geq (1-t)\,(1-\operatorname{sen}\alpha) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{|e^{i\theta}-z|}{1-|z|} \leq \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} =: \sigma.$$

$\blacksquare$

Proposición 2.12. *$\Omega_\sigma(\theta)\subset S_\alpha(\theta)$, donde $\alpha=\arccos(\frac{1}{\sigma})$.*

Demostración. Tomemos $\alpha=\arccos\frac{1}{\sigma}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, con lo cual $\cos\alpha=\frac{1}{\sigma}$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{\sigma^2-1}}{\sigma}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e^{i\theta}=1$. Para probar que $z\in S_\alpha$, basta asumir que $|z|\geq\operatorname{sen}\alpha$ y que al escribir z como $z=1-(1-z):=1-se^{i\varphi}$, entonces debe ser $s\leq\cos\alpha$ y $|\varphi|\leq\alpha$.

Empezamos viendo que $s:=|1-z|\leq\cos\alpha$. Como $z\in\Omega_\sigma$ y $|z|\geq\operatorname{sen}\alpha$, entonces

$$s=|1-z|\leq\sigma\left(1-|z|\right)\leq\sigma\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)=\sigma\left(1-\frac{\sqrt{\sigma^2-1}}{\sigma}\right)=\sigma-\sqrt{\sigma^2-1}=\frac{1}{\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}}\leq\frac{1}{\sigma}=\cos\alpha.$$

Ahora del hecho de que $s=|1-z|\leq\sigma\left(1-|z|\right)$ se sigue que

$$1-s\cos\varphi=\operatorname{Re}\left(1-se^{i\varphi}\right)\leq\left|1-se^{i\varphi}\right|=|z|\leq 1-\frac{s}{\sigma},$$

de donde $s\cos\varphi\geq\frac{s}{\sigma}=s\cos\alpha$ y, en consecuencia, $|\varphi|\leq\alpha$. $\blacksquare$

Esta definición de ángulo de Stolz resulta ser más cómoda de manejar. Observemos que si una sucesión de Blaschke está contenida dentro de un ángulo de Stolz, $\Omega_\sigma(\theta)$, entonces, por el Teorema 1.13, el producto de Blaschke B asociado a dicha sucesión admite una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}\setminus\{e^{i\theta}\}$, lo cual induce a pensar que, en comparación con otras situaciones más "normales", que B' debe presentar una mejor integrabilidad cerca de la frontera del disco unidad, ya que el único punto donde puede haber un comportamiento más caótico es $e^{i\theta}$. Esta es una de las razones para estudiar la integrabilidad de derivadas de productos de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz, que sin pérdida de generalidad, siempre supondremos que el vértice es 1.

Damos a continuación una serie de resultados que nos serán de utilidad en lo que queda de texto. En primer lugar, observamos que, considerando un pequeño ángulo de Stolz $\{\overline{a}z:\ a\in\Omega_\sigma\}$, con punta en un determinado $z\in\mathbb{D}$, entonces los puntos de esta región, $\overline{a}z$, son equiparables, en cuanto la distancia a 1 se refiere, con los correspondientes puntos radiales, $|a|z$.

Proposición 2.13 (Vinogradov [39]**).** *Si $\sigma\in[1,\infty)$ entonces*

$$\frac{1}{2+\sigma}\le\frac{|1-\overline{a}z|}{|1-|a|z|}\le 2+\sigma,\qquad \textit{para todo } z\in\overline{\mathbb{D}} \textit{ y todo } a\in\Omega_\sigma. \tag{2.22}$$

Demostración. Sean $|z|\le 1$ y $a\in\Omega_\sigma$, entonces $\overline{a}$ también está en Ω_σ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{|1-\overline{a}z|}{|1-|a|z|}&=\frac{|1-|a|z+z(|a|-\overline{a})|}{|1-|a|z|}\le\frac{|1-|a|z|+|z(|a|-\overline{a})|}{|1-|a|z|}\le 1+\frac{|(|a|-1)-(\overline{a}-1)|}{|1-|a|z|}\\&\le 1+\frac{(1-|a|)+|1-\overline{a}|}{1-|a|\,|z|}\le 1+\frac{(1-|a|)+|1-\overline{a}|}{1-|a|}\le 2+\sigma.\end{aligned}$$

La desigualdad de la izquierda se prueba de la misma forma:

$$\begin{aligned}\frac{|1-|a|z|}{|1-\overline{a}z|}&=\frac{|1-\overline{a}z+z(\overline{a}-|a|)|}{|1-\overline{a}z|}\le\frac{|1-\overline{a}z|+|z(\overline{a}-|a|)|}{|1-\overline{a}z|}\le 1+\frac{|(\overline{a}-1)-(|a|-1)|}{|1-\overline{a}z|}\\&\le 1+\frac{|1-\overline{a}|+(1-|a|)}{1-|\overline{a}|\,|z|}\le 1+\frac{|1-\overline{a}|+(1-|a|)}{1-|a|}\le 2+\sigma.\end{aligned}$$

∎

Usamos este resultado para probar que todos los puntos de una pequeña región de Stolz con punta en z, $\{\overline{a}z:\ a\in\Omega_\sigma\}$, distan de 1 al menos tanto como el mismo z.

Proposición 2.14. *Si $\sigma\in[1,\infty)$ entonces existe una constante $K_\sigma>0$ tal que*

$$\left|\frac{1-z}{1-\overline{a}z}\right|\le K_\sigma,\qquad \textit{para todo } z\in\overline{\mathbb{D}} \textit{ y todo } a\in\Omega_\sigma. \tag{2.23}$$

Demostración. En primer lugar, consideramos el caso en que a es real y $0<a<1$. Sea

$$S(z)=\frac{1-z}{1-az}.$$

Teniendo en cuenta que S es una transformación de Möbius con coeficientes reales, que aplica el disco unidad conformemente sobre el disco $\mathbb{D}\left(\frac{1}{1+a},\frac{1}{1+a}\right)$, el cual está incluido en el disco $\mathbb{D}\left(0,\frac{2}{1+a}\right)$, tenemos

$$\left|\frac{1-z}{1-az}\right|\le\frac{2}{1+a}\le 2,\qquad z\in\overline{\mathbb{D}},\ 0<a<1.$$

Ahora, para $a\in\Omega_\sigma$ arbitrario, usando la Proposición 2.13 y el caso anterior, obtenemos

$$\left|\frac{1-z}{1-\overline{a}z}\right|=\left|\frac{1-z}{1-|a|z}\right|\left|\frac{1-|a|z}{1-\overline{a}z}\right|\le 2(2+\sigma)\ =:K_\sigma,\qquad z\in\overline{\mathbb{D}}.$$

∎

A continuación vemos que si un ángulo de Stolz se agranda cambiando cada punto a de la región por todo un disco pseudo-hiperbólico de radio fijo, $\Delta(a,\delta)$, entonces la región obtenida sigue estando dentro de un ángulo de Stolz.

Proposición 2.15. *Dados $\sigma \geq 1$ y $0 < \delta < 1$, existe $\overline{\sigma} > \sigma$ tal que*

$$\bigcup_{a \in \Omega_\sigma} \Delta(a,\delta) \subseteq \Omega_{\overline{\sigma}},$$

de donde concluimos trivialmente que $\varrho(z,\Omega_\sigma) \geq \delta$ para cada $z \in \mathbb{D} \setminus \Omega_{\overline{\sigma}}$.

Demostración. Fijemos $a \in \Omega_\sigma$. Entonces tenemos que $|1-a| \leq \sigma\big(1-|a|\big)$. Recordemos que $\Delta(a,\delta)$ es el disco euclídeo de centro $c = \frac{1-\delta^2}{1-\delta^2|a|^2}\,a$ y radio $r = \frac{1-|a|^2}{1-\delta^2|a|^2}\delta$. Por tanto, para $z \in \Delta(a,r)$, consideraciones geométricas muestran que $|1-z| \leq |1-c|+r$, y que $1-|z| \geq 1-|c|-r$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{|1-z|}{1-|z|} &\leq \frac{|1-c|+r}{1-|c|-r} = \frac{\left|1-\frac{1-\delta^2}{1-\delta^2|a|^2}\,a\right| + \frac{1-|a|^2}{1-\delta^2|a|^2}\,\delta}{1-\frac{1-\delta^2}{1-\delta^2|a|^2}\,|a| - \frac{1-|a|^2}{1-\delta^2|a|^2}\,\delta} = \frac{\left|1-\delta^2|a|^2-a+\delta^2 a\right| + \big(1-|a|^2\big)\delta}{1-\delta^2|a|^2-|a|+\delta^2|a|-\big(1-|a|^2\big)\delta} \\
&= \frac{\left|(1-a)+\delta^2\, a(1-\overline{a})\right| + \big(1-|a|^2\big)\delta}{\big(1-|a|\big)\big(1+\delta^2|a|\big)-\big(1-|a|^2\big)\delta} \leq \frac{\big(1+\delta^2|a|\big)|1-a| + 2(1-|a|)\,\delta}{\big(1+\delta^2|a|-\delta-\delta\,|a|\big)\big(1-|a|\big)} \\
&\leq \frac{\big((1+\delta^2)\sigma+2\delta\big)\,(1-|a|)}{(1-\delta)\,(1-\delta|a|)\,(1-|a|)} \leq \frac{(1+\delta)^2}{(1-\delta)^2}\,\sigma.
\end{aligned}$$

Esto prueba que podemos tomar $\overline{\sigma} = \frac{(1+\delta)^2}{(1-\delta)^2}\,\sigma$. ∎

2.2. Pertenencia de la derivada a los espacios de Hardy H^p

2.2.1. ¿Qué podemos esperar?

La cuestión central es: Dado un producto de Blaschke B,

¿Se verifica que $B' \in H^p$, para algún $p > 0$?

Por supuesto, si B es un producto de Blaschke finito, entonces B es holomorfa en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$, luego B' también y, por tanto, B' está en todos los espacios H^p. Así que esta cuestión solo tiene sentido preguntarla cuando el producto de Blaschke es infinito.

En esta dirección, para empezar a dar respuesta a esta pregunta, recurrimos al siguiente Teorema de Privalov (ver Duren [13, Thm. 3.11]), caracterizando las funciones holomorfas sobre el disco unidad cuya derivada está en H^1.

Teorema 2.16 (Privalov). *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Son equivalentes:*

(i) $f' \in H^1$.

(ii) *f admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y, sobre la frontera $\partial\mathbb{D}$, $f\big(e^{i\theta}\big)$ es absolutamente continua.*

Consecuencia inmediata de lo anterior es el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Sea B un producto de Blashke infinito, entonces $B' \notin H^1$.*

Demostración. Basta ver, por el Teorema de Privalov, que B no admite extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que B admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$, entonces, como B tiene límite radial de módulo 1 en casi todo punto (Teorema 1.43), debe ser que $\left|B\big(e^{i\theta}\big)\right| = 1$ para todo θ. Por otro lado, B tiene un número infinito de ceros, luego deben acumularse en al menos un punto de $\partial\mathbb{D}$, luego, por la supuesta continuidad de B en $\mathbb{D}$, debería ser $B = 0$ en ese punto de la frontera, contradiciendo que $|B| = 1$ en todo punto de $\partial\mathbb{D}$. ∎

Corolario 2.18. *Para cualquier producto de Blaschke infinito, B, se tiene $B' \notin \bigcup\limits_{p \geq 1} H^p$.* ∎

Volvamos a formular la cuestión central con más precisión: Dado un producto de Blaschke infinito, B,

¿Se verifica que $B' \in H^p$ para algún $p < 1$?

La respuesta es que en general no se puede afirmar nada. Existen productos de Blaschke infinitos tales que su derivada no está en la clase de Nevanlinna y, por tanto, en ningún espacio de Hardy. Este es un resultado de Frostman [15]. Recordemos que la fórmula (2.11), y el comentario justo después, nos dice cómo calcular el límite radial de $|B'|$ en un punto de $\partial\mathbb{D}$,

$$\left|B'(\zeta)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|a_n|^2}{|\zeta - a_n|^2}, \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Así que si $\{a_n\}$ es una sucesión de Blaschke tal que $\sum_n \frac{1-|a_n|}{|\zeta-a_n|^2} = \infty$ para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y B es el producto de Blaschke asociado a $\{a_n\}$, entonces B' deja de tener límite radial finito en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$, provocando que B' no pueda estar en la clase de Nevanlinna, porque de estar en ella, tendría que tener límite radial finito en casi todo punto de la frontera del disco unidad. Para dar un ejemplo más concreto nos basamos en el siguiente resultado de Ahern [1].

Teorema 2.19 (Ahern, 1979). *Sea E un subconjunto cerrado de $\mathbb{T}$ (identificado con $[0,2\pi)$). Sabemos que su complemento es entonces unión a lo sumo numerable de intervalos disjuntos dos a dos, $\mathbb{T} \setminus E = \bigcup_n I_n$, donde cada I_n es del tipo $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Supongamos que se satisface*

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) = 2\pi, \qquad y \qquad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) \log \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} = \infty. \tag{2.24}$$

Entonces existe una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) *El conjunto de puntos de acumulación de $\{a_n\}$ está contenido en $\{e^{i\theta} : \theta \in E\}$.*

(ii) *$\sum_n (1-|a_n|)^\alpha < \infty$, para todo $\alpha > \frac{1}{2}$.*

(iii) *El producto de Blaschke B asociado a $\{a_n\}$ es tal que $B' \notin \mathcal{N}$.*

Demostración. Escribamos $\ell_n := (\beta_n - \alpha_n)$. Por (2.24), tenemos $\sum_n \ell_n = 2\pi$, y $\sum_n \ell_n \log \frac{1}{\ell_n} = \infty$. Esto último implica que hay una cantidad infinita de I_n's y, por tanto, $\ell_n \to 0$, para que la suma sea finita. Además, podemos encontrar una sucesión $\{\delta_n\} \subset (0,1]$, con $\lim \delta_n = 0$ y tal que

$$\sum_n \delta_n \ell_n \log \frac{1}{\ell_n} = \infty. \tag{2.25}$$

Definamos ahora, para $n \geq 1$,

$$a_n = (1 - \ell_n^{2-\delta_n})\, e^{i\alpha_n}.$$

Observemos que (i) se verifica trivialmente ya que, al tener $(1-\ell_n^{2-\delta_n}) \to 1$ y al estar cada a_n en el radio que termina en $e^{i\alpha_n}$, el conjunto de puntos límite de $\{a_n\}$ está contenido en el conjunto de puntos límite de $\{e^{i\alpha_n}\}$, y éste está en $\{e^{i\theta} : \theta \in E\}$, puesto que E es cerrado.

También se verifica (ii): Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Como $(2-\delta_n)\alpha \to 2\alpha > 1$ y $\ell_n \to 0$, existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $(2-\delta_n)\alpha > 1$ y $\ell_n < 1$ para todo $n \geq N_\alpha$, luego,

$$\sum_{n \geq N_\alpha} (1-|a_n|)^\alpha = \sum_{n \geq N_\alpha} \ell_n^{(2-\delta_n)\alpha} \leq \sum_n \ell_n = 2\pi.$$

Para probar (iii), escribimos a_n como $a_n = r_n e^{i\alpha_n}$, con $r_n = 1 - \ell_n^{2-\delta_n}$, y recurrimos a la fórmula (2.11) y a la estimación del Lema 1.8,

$$\left|e^{i\theta} - a_n\right|^2 = \left|1 - e^{-i\theta} a_n\right|^2 = (1-r_n)^2 + 4r_n \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\alpha_n - \theta}{2}\right) \leq (1-r_n)^2 + (\alpha_n - \theta)^2.$$

Entonces, para $\theta \in I_k$, siendo k tal que $\ell_k < 1$ (lo que ocurre siempre a partir de un k_0 en adelante), tenemos que $(\alpha_k - \theta)^2 \leq \ell_k^2$ y, por tanto,

$$\left|B'(e^{i\theta})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n^2}{|e^{i\theta} - a_n|^2} \geq \frac{1-r_k}{(1-r_k)^2 + (\alpha_k - \theta)^2} \geq \frac{\ell_k^{(2-\delta_k)}}{\ell_k^{2(2-\delta_n)} + \ell_k^2} \geq \frac{1}{\ell_k^{2-\delta_k} + \ell_k^{\delta_k}} \geq \frac{1}{2\ell_k^{\delta_k}},$$

de donde se sigue que

$$\int_{I_k} \log^+ \left|B'(e^{i\theta})\right| d\theta \geq (-\log 2)\ell_k + \delta_k \ell_k \log \tfrac{1}{\ell_k},$$

y, en consecuencia, como $\sum_n \ell_n = 2\pi$ y por (2.25), concluimos que $B' \notin \mathcal{N}$:

$$\int_{\mathbb{T}} \log^+ \left|B'(e^{i\theta})\right| d\theta \geq \sum_{k\geq k_0} \int_{I_k} \log^+ \left|B'(e^{i\theta})\right| d\theta \geq \sum_{k\geq k_0} (-\log 2)\ell_k + \delta_k \ell_k \log \tfrac{1}{\ell_k} = \infty.$$

∎

Corolario 2.20. *Existe un producto de Blaschke infinito, B, con sucesión de ceros asociada, $\{a_n\}$, satisfaciendo:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$,

(ii) $\sum_n (1-|a_n|)^\alpha < \infty$, *para todo* $\alpha > \frac{1}{2}$,

(iii) $B' \notin \mathcal{N}$.

Demostración. Dado que la serie de términos positivos $\sum_{\{n\geq 2\}} \frac{1}{n\log^2 n}$ converge, definimos, para $n \geq 2$, $\ell_n = \frac{c}{n\log^2 n}$, donde c es una constante positiva para que $\sum_{\{n\geq 2\}} \ell_n = 2\pi$. Estas van a ser las longitudes de los intervalos I_n, definidos como $I_n = \left(\alpha_n, \alpha_n + \ell_{n+1}\right)$, donde $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_n = \sum_{\{k\leq n\}} \ell_k$, $n \geq 2$. Obviamente $E = \mathbb{T} \setminus \bigcup_n I_n$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{T}$ con un único punto de acumulación, $2\pi \cong 0$ en $\mathbb{T}$. Además,

$$\ell_n \log \frac{1}{\ell_n} = \frac{c}{n\log^2 n} \log \frac{n\log^2 n}{c} = \frac{c}{n\log n} + \frac{2c\log\log n - c\log c}{n\log^2 n},$$

que claramente no tiene suma finita. Considerando ahora la sucesión $\{a_n\}$ construida en el Teorema anterior, obtenemos el resultado deseado. ∎

2.2.2. La función f_B

El resultado anterior liga, en cierto modo, la integrabilidad de la derivada de un producto de Blaschke, con la integrabilidad de la función que aparece en la fórmula (2.11). En esta sección vamos a ver que efectivamente esa relación es así.

Sea B un producto de Blaschke con ceros dados por $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, donde θ_n han sido escogidos en la rama principal del argumento, $\theta_n \in [-\pi, \pi)$. Siguiendo Ahern y Clark [5], definimos la función f_B como

$$f_B(\theta) = \sum_n \frac{1-r_n}{(1-r_n)^2 + (\theta-\theta_n)^2}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi),$$

la cual va a ser de gran ayuda más adelante para producir algunos ejemplos ilustrativos.

Lema 2.21 (Ahern-Clark, 1974). *$B' \in H^p$ si, y solo si, $f_B \in L^p$.*

Demostración. Volvamos a usar la identidad (2.11), junto con la estimación del Lema 1.8, para obtener

$$f_B(\theta) = \sum_n \frac{1-r_n}{(1-r_n)^2 + (\theta-\theta_n)^2} \lesssim \sum_n \frac{1-r_n^2}{|e^{i\theta}-a_n|^2} = |B'(e^{i\theta})|,$$

de manera que si $B' \in H^p$, lo que equivale a decir que $B'(e^{i\theta}) \in L^p$, entonces $f_B \in L^p$.

Supongamos ahora $f_B \in L^p$. Escribimos $B = B_0 \cdot \prod_{i=1}^4 B_i$, donde B_0 contiene los ceros de B de módulo menor que $\frac{1}{2}$, y cada factor B_i, $i = 1, \ldots, 4$, tiene sus ceros en un trapecio circular de apertura como mucho $\frac{\pi}{2}$. Será entonces suficiente demostrar que la derivada de cada uno de estos factores pertenece a H^p. Con B_0 no hay ningún problema, ya que se trata de un producto de Blaschke finito. Para tratar con los otros cuatro factores de manera unificada, suponemos, sin pérdida de generalidad, que B es un producto de Blaschke cuyos ceros, $a_n = r_n e^{i\theta}$, se encuentran en el trapecio circular $\left\{re^{i\theta} \in \mathbb{D} : -\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4},\ r \geq \frac{1}{2}\right\}$. Hemos de probar que si

$f_B \in L^p(-\pi,\pi]$, entonces $B' \in H^p$, o, equivalentemente, haciendo alusión a la identidad (2.11) y al comentario de después, hemos de probar que la siguiente integral es finita:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|B'(e^{i\theta})\right|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_n \frac{1-r_n^2}{|e^{i\theta}-r_n e^{i\theta_n}|^2}\Big)^p d\theta = \int_{|\theta|\le \frac{3}{4}\pi} + \int_{\pi \ge |\theta| \ge \frac{3}{4}\pi} = (I)+(II).$$

Para tratar la integral (I), observamos que $\left|e^{i\theta}-a_n\right|^2 = \left|1-r_n e^{i(\theta_n-\theta)}\right|^2$ y que, para $|\theta| \le \frac{3}{4}\pi$ y $|\theta_n| \le \frac{\pi}{4}$, tenemos $|\theta-\theta_n| \le |\theta| + |\theta_n| \le \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi$, lo que nos permite usar la siguiente estimación del Lema 1.8:

$$\left|e^{i\theta}-a_n\right|^2 \ge (1-r_n)^2 + \tfrac{4r_n}{\pi^2}(\theta-\theta_n)^2 \overset{(r_n \ge \frac{1}{2})}{\ge} \tfrac{2}{\pi^2}\left[(1-r_n)^2+(\theta-\theta_n)^2\right],$$

de manera que nos queda

$$(I) = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \Big(\sum_n \frac{(1+r_n)(1-r_n)}{|e^{i\theta}-r_n e^{i\theta_n}|^2}\Big)^p d\theta \le \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \Big(\pi^2 \sum_n \frac{1-r_n}{(1-r_n)^2+(\theta-\theta_n)^2}\Big)^p d\theta = \pi^{2p} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f_B(\theta)^p d\theta < \infty.$$

En cuanto a la integral (II), observamos que si $\pi \ge |\theta| \ge \frac{3}{4}\pi$ y $|\theta_n| \le \frac{\pi}{4}$, entonces

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} \le |\theta| - |\theta_n| \le |\theta-\theta_n| \le |\theta| + |\theta_n| \le \pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{2}\pi,$$

lo que implica que $\cos(\theta-\theta_n) \le 0$ y, por tanto, que

$$\left|e^{i\theta}-r_n e^{i\theta_n}\right|^2 = 1 + r_n^2 - 2r_n\cos(\theta-\theta_n) \ge 1 + r_n^2 \ge 1.$$

De ahí que, usando que $\{a_n\}$ es una sucesión de Blaschke,

$$(II) = \int_{\pi \ge |\theta| \ge \frac{3}{4}\pi} \Big(\sum_n \frac{1-r_n^2}{|e^{i\theta}-r_n e^{i\theta_n}|^2}\Big)^p d\theta \le \int_{\pi \ge |\theta| \ge \frac{3}{4}\pi} \Big(2\sum_n (1-|a_n|)\Big)^p d\theta < \infty. \qquad \blacksquare$$

2.2.3. La condición C_{1-p} implica $B' \in H^p$

La restricción impuesta en esta sección sólo considera el valor absoluto de los ceros, en general este tipo de restricciones nos da resultados unidireccionales, veremos en otras secciones que los resultados recíprocos se obtienen añadiendo otras condiciones.

Para $\alpha > 0$, diremos que *una sucesión* $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ *satisface la condición* C_α si

$$\sum_n \left(1-|a_n|\right)^\alpha < \infty.$$

Notemos que si $\{a_n\}$ es la sucesión de ceros de un producto de Blaschke entonces satisface $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$, lo que implica que para cualquier $\alpha \ge 1$, se tiene necesariamente $\sum_n (1-|a_n|)^\alpha < \infty$. La propiedad C_α es interesante cuando $0 < \alpha < 1$. Antes de usarla, veamos un lema previo que nos permitirá estimar las integrales que nos encontraremos en esta sección. Su demostración, o parte de ella, puede encontrarse en muchos lugares, como por ejemplo en [13, p. 65; 24, Thm. 1.7; 38, p. 226]

Lema 2.22. *Para cada* $0 < r < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} \le \begin{cases} C(\gamma)\frac{1}{(1-r)^{\gamma-1}}, & si\ \gamma > 1, \\ C\log\frac{1}{1-r}, & si\ \gamma = 1, \\ C(\gamma), & si\ \gamma < 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Demostración. Por simetría, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+r^2-2r\cos\theta\right)^{\frac{\gamma}{2}}} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2+4r\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

En todos los casos usaremos las estimaciones que se encuentran en el Lema 1.8. Para $\gamma \le 0$, no hay nada que hacer. Para $0 < \gamma < 1$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} = 2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big) \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\big(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\theta\big)^\gamma} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = C(\gamma).$$

Cuando $\gamma \ge 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} &= 2\Big(\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big) \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\gamma} \\ &\le 2\int_0^{1-r} \frac{d\theta}{1-r} + 2\int_{1-r}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\big(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\theta\big)^\gamma} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \le \begin{cases} C\log\frac{1}{1-r}, & \text{si } \gamma = 1, \\ C(\gamma)\frac{1}{(1-r)^{\gamma-1}}, & \text{si } \gamma > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

∎

El siguiente resultado se debe a Protas [34], y su demostración es sencilla, más aún si utilizamos la maquinaria de derivadas angulares en el sentido de Carathéodory introducida por Ahern y Clark en [5].

Teorema 2.23 (Protas, 1973). *Supongamos que B es un producto de Blaschke con sucesión de ceros $\{a_n\}$.*

(i) *Si $\sum_n \big(1-|a_n|\big)^{1-p} < \infty$ para algún $p \in \big(\frac{1}{2},1\big)$, entonces $B' \in H^p$. O sea, $\{a_n\}$ satisface C_{1-p}, para algún $p \in \big(\frac{1}{2},1\big)$, implica $B' \in H^p$.*

(ii) *Si $\sum_n (1-|a_n|)^{\frac{1}{2}} \log\frac{1}{1-|a_n|} < \infty$, entonces $B' \in H^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Según la identidad (2.11), el hecho de que $p < 1$ (para introducir el exponente dentro de la suma), y el lema anterior (para el caso $\gamma = 2p \ge 1$), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \big|B'(e^{i\theta})\big|^p\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|e^{i\theta}-a_n|^2}\Big)^p d\theta \\ &\le \sum_n \big(1-|a_n|^2\big)^p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-a_n e^{-i\theta}|^{2p}} \le \begin{cases} C\sum_n \frac{\big(1-|a_n|\big)^p}{\big(1-|a_n|\big)^{2p-1}}, & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ C\sum_n \big(1-|a_n|\big)^{\frac{1}{2}} \log\frac{1}{1-|a_n|}, & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Las hipótesis se encargan de concluir el resultado deseado. ∎

Cabe preguntarse cómo de preciso es el resultado que acabamos de probar, ¿es posible eliminar el factor logarítmico en el apartado (ii)?. La respuesta es que no.

Teorema 2.24. *Existe un producto de Blaschke B cuyos ceros $\{a_n\}$ satisfacen $\sum_n (1-|a_n|)^{1/2} < \infty$ y $B' \notin H^{1/2}$.*

Demostración. La forma de construir el ejemplo que damos a continuación se basa en el Lema 2 de Ahern y Clark [6]. Empezamos fijando $\alpha \in (1,2)$. Nuestra sucesión $\{a_n\}_{n\ge 2}$ va a venir dada por

$$a_n = (1-d_n)e^{i\theta_n}, \qquad \text{donde} \quad d_n = \frac{1}{n^2\log^{2\alpha} n} \quad \text{y} \quad \theta_n = \sum_{j=n}^{\infty} d_j^{1/2}.$$

En primer lugar observamos que la definición de la sucesión tiene perfecto sentido ya que

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n^{1/2} = \sum_n \frac{1}{n\log^\alpha n} < \infty.$$

Por otro lado, observemos que $a_n \to 1$ ya que $d_n \to 0$ y $\theta_n \to 0$. Además, lo anterior nos dice que la sucesión $\{a_n\}$ satisface $\sum_n (1-|a_n|)^{1/2} < \infty$. Así que solo hemos de probar que el producto de Blaschke B, asociado a $\{a_n\}$, no está en $H^{1/2}$, que es lo mismo que probar, según el Lema 2.21, que $f_B \notin L^{1/2}$, donde

$$f_B(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{d_n^2 + (\theta-\theta_n)^2}.$$

Para $\theta_{N+1} < \theta \le \theta_N$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N} f_B(\theta)^{1/2}\,d\theta &= \int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d_n}{d_n^2+(\theta-\theta_n)^2}\Big)^{1/2}d\theta \\
&\ge \int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N}\Big(\frac{d_N}{d_N^2+(\theta-\theta_N)^2}\Big)^{1/2}d\theta = \int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N}\Big(\frac{1/d_N}{1+\big(\frac{\theta-\theta_N}{d_N}\big)^2}\Big)^{1/2}d\theta = d_N^{1/2}\int_0^{\frac{\theta_N-\theta_{N+1}}{d_N}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= d_N^{1/2}\operatorname{arcsenh}\Big(\frac{\theta_N-\theta_{N+1}}{d_N}\Big) = d_N^{1/2}\operatorname{arcsenh}\big(d_N^{-1/2}\big) = d_N^{1/2}\log\big(d_N^{-1/2}+\sqrt{1+d_N^{-1}}\big) \\
&\ge d_N^{1/2}\log\big(d_N^{-1/2}\big) = \frac{\log\big(N\log^{\alpha}N\big)}{N\log^{\alpha}N} = \frac{1}{N\log^{\alpha-1}N}\Big(1+\frac{\alpha\log\log N}{\log N}\Big).
\end{aligned}$$

Ahora, como el paréntesis del último término tiende a 1 cuando $N\to\infty$, entonces existe $N_0\in\mathbb{N}$ que asegura que $1+\frac{\alpha\log\log N}{\log N} > \frac{1}{2}$ para todo $N\ge N_0$. Con esto, obtenemos que, para $N\ge N_0$ y $\theta_{N+1}<\theta\le\theta_N$,

$$\int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N} f_B(\theta)^{1/2}\,d\theta \ge \frac{1}{2}\,\frac{1}{N\log^{\alpha-1}N}.$$

Así tenemos que, gracias a que $\alpha\in(1,2)$ y a que $\sum\frac{1}{n\log^{\alpha-1}n}=\infty$,

$$\int_0^{2\pi} f_B(\theta)^{1/2}\,d\theta \ge \sum_{N=N_0}^{\infty}\int_{\theta_{N+1}}^{\theta_N} f_B(\theta)^{1/2}\,d\theta \ge \sum_{N=N_0}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{1}{N\log^{\alpha-1}N} = \infty. \qquad ∎$$

2.2.4. Productos de Blaschke interpolantes para el recíproco

En este apartado vamos a conseguir el recíproco de la primera parte del Teorema 2.23, a condición de asumir que la sucesión de ceros es uniformemente separada.

Teorema 2.25 (Cohn, 1983 [12]**).** *Si $\{a_n\}$ es la sucesión de ceros de un producto de Blaschke interpolante B tal que $B'\in H^p$ para algún $p\in\big(\frac{1}{2},1\big)$, entonces $\{a_n\}$ cumple C_{1-p}.*

Demostración. Esto es inmediato a partir del Teorema 2.9 y la Proposición 2.7:

$$\|B'\|_{H^p}^p \gtrsim \sum_n \big(1-|a_n|\big)\,|B'(a_n)|^p \gtrsim \sum_n \big(1-|a_n|\big)\big(1-|a_n|\big)^{-p}. \qquad ∎$$

Nota. Cabría pensar que para un producto de Blaschke interpolante B, cuya sucesión de ceros satisface C_{1-p}, con $p\le\frac{1}{2}$, podría darnos la pertenencia de B' en H^p, siendo $p\le\frac{1}{2}$. Sin embargo, un resultado tan general no puede ser cierto: Peláez [32, Thm. 3] probó que el ejemplo que se da en nuestro Teorema 2.24 es también un producto de Blaschke interpolante, o sea, probó que existe un producto de Blaschke interpolante, B, con sucesión de ceros satisfaciendo $C_{\frac{1}{2}}$ y tal que $B'\notin H^{\frac{1}{2}}$.

2.2.5. Ceros en un ángulo de Stolz implica $B'\in\bigcap_{p<\frac{1}{2}}H^p$

Aquí vamos a ver qué pasa cuando restringimos la ubicación de los ceros de un producto de Blaschke, concretamente a un ángulo de Stolz. Según comentábamos en el apartado de Ángulos de Stolz, un producto de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz con vértice en $e^{i\theta}$ admite una extensión holomorfa a todo un entorno de $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{e^{i\theta}\}$. Luego es de esperar una mejora en la integrabilidad de la derivada del producto de Blaschke. Los resultados siguientes están probados por Girela, Peláez y Vukotić en [20, Thm. 2.3], aunque ellos se lo atribuyen a Ahern y Clark [5, Thm. 12 y Thm. 8].

Teorema 2.26. *Sea B un producto de Blaschke con sucesión de ceros $\{a_n\}$ contenida en un ángulo de Stolz. Entonces*

$$B'\in\bigcap_{0<p<\frac{1}{2}}H^p.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el ángulo de Stolz tiene su vértice en $z = 1$ y que es del tipo Ω_σ para cierto $\sigma \geq 1$. Tal como hemos visto en la prueba del Teorema 1.10, la función $f_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ está en H^p para todo $p < \frac{1}{2}$, y no está en $H^{\frac{1}{2}}$. Así que basta probar que

$$|B'(z)| \lesssim \frac{1}{|1-z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Utilizando la notación habitual, $B = \prod_n b_n$, $B_n = \frac{B}{b_n}$, tenemos

$$|B'(z)| = \Big|\sum_n b_n'(z)\, B_n(z)\Big| \leq \sum_n |b_n'(z)| = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a}_n z|^2} s \leq 2\sum_n \frac{1-|a_n|}{|1-\overline{a}_n z|^2}.$$

Aplicamos ahora la Proposición 2.14, junto con que $\{a_n\}$ es una sucesión de Blaschke, para obtener el resultado deseado:

$$|(1-z)^2 B'(z)| \leq 2\sum_n (1-|a_n|)\Big|\frac{1-z}{1-\overline{a}_n z}\Big|^2 \leq 2K_\sigma \sum_n (1-|a_n|) := C. \qquad \blacksquare$$

El ejemplo que sigue nos asegura que este resultado es preciso.

Teorema 2.27. *Existe un producto de Blaschke B, con ceros en el radio $(0,1)$, tal que $B' \notin H^{\frac{1}{2}}$. Más concretamente, el producto de Blaschke con ceros $a_n = 1 - \frac{1}{n\log^2 n}$, $n \geq 2$, no pertenece a $H^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Según el Lema 2.21, basta ver que f_B no pertenece a $L^{\frac{1}{2}}$, donde f_B es

$$f_B(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1/(n\log^2 n)}{1/(n^2\log^4 n) + t^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log^2 n}{1 + t^2 n^2 \log^4 n}.$$

Dado que la función $x\log^2 x$, $x \geq 1$, es creciente, podemos encontrar, para $t > 0$, el único número mayor que 1, μ_t, con la propiedad de que

$$t\mu_t \log^2 \mu_t = 1.$$

Entonces, tenemos

$$f_B(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{2\leq n\leq \mu_t} n\log^2 n \asymp \mu_t^2 \log^2 \mu_t. \tag{2.27}$$

La segunda equivalencia necesita justificación. Por un lado, tenemos

$$\sum_{2\leq n\leq \mu_t} n\log^2 n \leq (\mu_t - 1)\,\mu_t \log^2 \mu_t \leq \mu_t^2 \log^2 \mu_t,$$

mientras que, por el otro lado, tenemos,

$$\sum_{2\leq n\leq \mu_t} n\log^2 n \geq \sum_{\frac{\mu_t}{2}\leq n\leq \mu_t} n\log^2 n \geq \frac{\mu_t^2}{2^2}\log^2\frac{\mu_t}{2} = \frac{\log^2\frac{\mu_t}{2}}{4\log^2\mu_t}\,\mu_t^2\log^2\mu_t \geq C\mu_t^2\log^2\mu_t.$$

Se puede escribir entonces

$$f_B(t)^{\frac{1}{2}} \geq C\mu_t \log\mu_t = \frac{C}{t\log\mu_t},$$

siendo C una constante positiva fija. Si consideramos la definición de μ_t, tenemos

$$\log\mu_t + 2\log\log\mu_t = \log\frac{1}{t},$$

de donde se sigue que $\log\mu_t \asymp \log\frac{1}{t}$, cuando $t \to 0$. O sea, existen entonces constantes positivas α y t_0 tales que

$$f_B(t)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\alpha}{t\log\frac{1}{t}}, \qquad \text{para todo } t \in (0, t_0].$$

Todo esto nos dice que $f_B \notin L^{\frac{1}{2}}$:

$$\int_0^{2\pi} f_B(t)^{1/2}\, dt \geq \alpha\int_0^{t_0} \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}\, dt = \infty. \qquad \blacksquare$$

2.2.6. Ceros en un ángulo de Stolz e interpolantes implica $B' \in \bigcap_{p<1} H^p$

Vamos a ver a continuación qué pasa al combinar más de una restricción de las que acabamos de ver. Es de esperar una mejoría en los resultados obtenidos por separado. Empezamos mezclando sucesiones interpolantes dentro de un ángulo de Stolz. Este resultado también es de Girela-Peláez-Vukotić [20].

Teorema 2.28. *Sea B un producto de Blaschke interpolante cuya sucesión de ceros está contenida en un ángulo de Stolz. Entonces $B' \in H^p$ para todo $p < 1$.*

Nota. El Teorema 2.17 nos dice que esto es lo mejor que se puede obtener para la derivada un producto de Blaschke.

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión uniformemente separada y contenida en un ángulo de Stolz. En su artículo de 1959, Newman [31, a lo largo del Thm. 3] demostró que $\{a_n\}$ es unión finita de sucesiones exponenciales y, por tanto, $\{a_n\}$ cumple C_{1-p}, para todo $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Esto, a su vez, nos dice por el Teorema 2.23, que $B' \in \bigcap_{p<1} H^p$. ∎

2.2.7. Ceros en un ángulo de Stolz satisfaciendo C_α implica $B' \in \bigcap_{p<\frac{1}{1+\alpha}} H^p$

Para terminar esta sección, mezclamos a continuación la condición C_α junto con la de estar en un ángulo de Stolz.

Teorema 2.29 (Ahern-Clark, 1974 [5]**).** *Sea B un producto de Blaschke cuya sucesión de ceros $\{a_n\}$ satisface la condición C_α para algún $\alpha \in (0,1]$. Supongamos, además, que esos ceros están contenidos en un ángulo de Stolz. Entonces*

$$B' \in \bigcap_{0<p<\frac{1}{1+\alpha}} H^p.$$

Nota. El caso $\alpha = 1$ fue visto en la subsección 2.2.5.

Lema 2.30. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Blaschke contenida en el ángulo de Stolz Ω_σ (con vértice en 1). Si B y P son los productos de Blaschke asociados a $\{a_n\}$ y $\{|a_n|\}$, respectivamente, entonces*

$$\left|B'(e^{i\theta})\right| \asymp \left|P'(e^{i\theta})\right|, \qquad e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}.$$

Demostración. En primer lugar hemos de darnos cuenta que, por el Teorema 1.13, tanto B como P admiten extensiones holomorfas a un entorno de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Escribamos ahora $a_n = r_n e^{i\theta_n} \in \Omega_\sigma$. Por la Proposición 2.13, tenemos, para todo θ y todo n,

$$(2+\sigma)^{-1} \le \frac{\left|1 - r_n e^{i(\theta-\theta_n)}\right|}{\left|1 - r_n e^{i\theta}\right|} \le 2+\sigma. \tag{2.28}$$

por otra parte, por la representación de $\left|B'(e^{i\theta})\right|$ obtenida en (2.11), tenemos

$$\left|B'(e^{i\theta})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n{}^2}{\left|e^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n{}^2}{\left|1 - r_n e^{i(\theta-\theta_n)}\right|^2}, \quad \text{y} \quad \left|P'(e^{i\theta})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n{}^2}{\left|e^{i\theta} - r_n\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n{}^2}{\left|1 - r_n e^{i\theta}\right|^2}.$$

Entonces, al juntar todo esto con la estimación (2.28), obtenemos el resultado deseado:

$$(2+\sigma)^{-1}\left|P'(e^{i\theta})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-r_n{}^2)(2+\sigma)^{-1}}{\left|1 - r_n e^{i\theta}\right|^2} \le \left|B'(e^{i\theta})\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-r_n{}^2)(2+\sigma)}{\left|1 - r_n e^{i\theta}\right|^2} = (2+\sigma)\left|P'(e^{i\theta})\right|. \quad ∎$$

***Demostración del Teorema* 2.29.** Por el Lema 2.30, podemos permitirnos considerar que $a_n \ge 0$. Hemos de probar, según el Lema 2.21, que $f_B \in L^p$ para todo $p < \frac{1}{1+\alpha}$, donde f_B viene dada en este caso por

$$f_B(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n}{(1-r_n)^2 + \theta^2}.$$

Considerando la desigualdad $x^{1-\alpha} \le 1 + x^2$, tenemos

$$f_B(\theta) = \sum_n \frac{1-r_n}{\theta^2 + \left(1-r_n\right)^2} = \sum_n \frac{1-r_n}{\theta^2\left[\left(\frac{1-r_n}{\theta}\right)^2 + 1\right]} \le \sum_n \frac{1-r_n}{\theta^2\left(\frac{1-r_n}{\theta}\right)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\theta^{1+\alpha}} \sum_n (1-r_n)^\alpha,$$

de donde se sigue, dado que $\sum_n (1-r_n)^\alpha < \infty$ (porque $\{a_n\}$ cumple C_α), que $f_B \in L^p$ para todo p que satisfaga $(1+\alpha)p < 1$, o sea, para todo $p < \frac{1}{1+\alpha}$. ∎

A continuación vemos que este resultado es también preciso.

Teorema 2.31 (Mashreghi [28, Example 8.18]**).** *Dado* $0 < \alpha \le 1$, *existe un producto de Blaschke con sucesión de ceros* $\{r_n\}$ *en el radio* $(0,1)$, *que satisface la condición* C_α *y, por tanto,* $B' \in \bigcap_{0<p<\frac{1}{1+\alpha}} H^p$, *pero tal que* $B' \notin H^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

Demostración. Sea $\{\varepsilon_n\} \subset (0,1)$ una sucesión positiva y decreciente tal que $\varepsilon_n \asymp \varepsilon_{n+1}$ y $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\log^{1+\alpha}\frac{1}{\varepsilon_n}} < \infty$. Por ejemplo, $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ sirve. Sea m_n la parte entera de $\frac{1}{\varepsilon_n^\alpha \log^{1+\alpha}\frac{1}{\varepsilon_n}}$, y escojamos m_n elementos del intervalo $[1-\varepsilon_n, 1-\varepsilon_{n+1})$, por ejemplo, todos ellos iguales a $1-\varepsilon_n$. Construimos de esta manera la sucesión $\{r_n\}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^\infty (1-r_n)^\alpha \asymp \sum_{n=1}^\infty m_n \varepsilon_n^\alpha \asymp \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\log^{1+\alpha}\frac{1}{\varepsilon_n}} < \infty.$$

Sin embargo, cuando $\varepsilon_{N+1} < \theta < \varepsilon_N$, tenemos

$$f_B(\theta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1-r_n}{(1-r_n)^2 + \theta^2} \asymp \sum_{n=1}^\infty \frac{m_n\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2 + \theta^2} \ge \frac{m_N \varepsilon_N}{\varepsilon_N^2 + \theta^2} \ge \frac{m_N}{2\varepsilon_N} \asymp \frac{1}{\left(\varepsilon_N \log\frac{1}{\varepsilon_N}\right)^{1+\alpha}} \asymp \frac{1}{\left(\theta \log\frac{1}{\theta}\right)^{1+\alpha}},$$

por lo que $f_B \notin L^{\frac{1}{1+\alpha}}$ y, en consecuencia, por el Lema 2.21, $B' \notin H^{\frac{1}{1+\alpha}}$. ∎

2.3. Pertenencia de la derivada a los espacios de Bergman A^p

Igual que en el apartado anterior se considera la misma cuestión para los espacios de Bergman.

Definición 2.32 (Espacio de Bergman). El espacio Bergman A^p es el espacio de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_{A^p} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z)\right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

donde $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx\, dy$ es la medida de área de Lebesgue normalizada en $\mathbb{D}$.

Estos espacios también forman una sucesión decreciente de espacios conforme p aumenta. Un resultado clásico de Hardy y Littlewood [22] nos dice que $H^p \subset A^{2p}$ y que esta inclusión es continua con norma del operador inclusión igual a 1, (ver Vukotić [40] para una demostración elemental de este hecho).

2.3.1. La situación inicial

De nuevo observamos que los productos de Blaschke finitos tienen derivadas en todos los espacios de Bergman. Así que los teoremas que veremos a continuación tienen su interés cuando el producto de Blaschke es infinito. El primer resultado que vemos hace uso del Lema de Schwarz-Pick y nos dice que la derivada de un producto de Blaschke siempre tiene un grado de integrabilidad con respecto a la medida de área.

Teorema 2.33. *Sea B un producto de Blaschke. Entonces* $B' \in A^p$ *para todo* $p < 1$.

Demostración. Sea B un producto de Blaschke y sea $p < 1$. Por el Lema de Schwarz-Pick, tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) \le \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^p dA(z) = \frac{1}{1-p},$$

lo que nos dice que $B' \in A^p$. ∎

Nos podemos preguntar si existe algún producto de Blaschke B tal que $B' \not\in A^1$. Y efectivamente, en 1955 Rudin [36] probó la existencia de un tal producto de Blaschke, en 1968 Piranian [33] dio un ejemplo explícito, y en 2007 Peláez [32, Thm. 1] dio un producto de Blaschke *interpolante* cuya derivada no está en A^1.

También cabe preguntarse si hay exponentes prohibidos para la pertenencia de la derivada de productos de Blaschke en A^p, como ocurría con H^p, que ningún producto de Blaschke infinito tiene derivada en H^1, (Teorema 2.17). En ese sentido tenemos el siguiente resultado de Kim [25, Thm. 1.1], en su versión particular.

Teorema 2.34 (Kim, 1984). *$B' \not\in A^2$ para ningún producto de Blaschke infinito B.*

Para la demostración necesitamos el siguiente resultado de Ahern que podemos encontrar, en su versión generalizada, en [3, Thm. 6].

Teorema 2.35. *Sea B un producto de Blaschke infinito, entonces $B' \in A^2$ si, y solo si,*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \left|B(re^{i\theta})\right|}{1-r} \right)^2 d\theta\, dr < \infty.$$

***Demostración del Teorema* 2.34.** Sea B un producto de Blashcke infinito con sucesión de ceros dada por $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Vamos a probar que

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |B(z)|}{1 - |z|} \right)^2 dA(z) = \infty,$$

de donde se deduce inmediatamente, mediante cambio a polares y el Teorema 2.35, que $B' \notin A^2$.

Fijemos $\varepsilon \in (0,1)$. Consideremos, para cada $n = 1, 2, \ldots$, el disco pseudo-hiperbólico $\Delta(a_n, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : \varrho(z, a_n) < \varepsilon\} = T_{a_n}(\mathbb{D}(0,\varepsilon))$, el cual es un disco euclídeo de centro $c_n = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2|a_n|^2}\, a_n$ y radio $r_n = \frac{1-|a_n|^2}{1-\varepsilon^2|a_n|^2}\, \varepsilon$ y, por tanto, su área (normalizada) es

$$\text{Área}\big(\Delta(a_n,\varepsilon)\big) = \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \varepsilon^2 |a_n|^2} \right)^2 \varepsilon^2 \geq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} \big(1 - |a_n|\big)^2. \tag{2.29}$$

Dado que cada factor que aparece en el producto de Blaschke B tiene módulo menor que 1, resulta que

$$|B(z)| \leq \left| \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \right| = \varrho(z, a_n) < \varepsilon, \qquad \text{para todo } z \in \Delta(a_n, \varepsilon).$$

Por tanto, para $z \in \Delta(a_n, \varepsilon)$, tenemos

$$\frac{1 - |B(z)|}{1 - |z|} \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 - |c_n| + r_n} = \cdots = \frac{1-\varepsilon}{\frac{(1+\varepsilon)(1-|a_n|)}{1-\varepsilon|a_n|}} \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} \frac{1}{1-|a_n|}.$$

De aquí se sigue que

$$\int_{\Delta(a_n,\varepsilon)} \left(\frac{1 - |B(z)|}{1 - |z|} \right)^2 dA(z) \geq \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} \frac{1}{1-|a_n|} \right)^2 \text{Área}\big(\Delta(a_n,\varepsilon)\big) \geq \frac{1}{4} \frac{(1-\varepsilon)^2 \varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} = \delta_\varepsilon > 0.$$

Así que para probar nuestra aserción solo hay que probar que hay infinitos de estos discos pseudo-hiperbólicos, $\Delta(a_n, \varepsilon)$, disjuntos dos a dos.

Para ello, empezamos considerando $n_1 = 1$. Entonces el disco pseudo-hiperbólico $\Delta(a_{n_1}, 2\varepsilon)$, de radio pseudo-hiperbólico 2ε, es un disco euclídeo con adherencia en $\mathbb{D}$, luego contiene solo una cantidad finita de ceros de B. Como B tiene infinitos ceros, entonces existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \notin \Delta(a_{n_1}, 2\varepsilon)$. Resulta entonces que $\Delta(a_{n_1}, \varepsilon) \cap \Delta(a_{n_2}, \varepsilon) = \varnothing$. Suponiendo ahora por inducción que hemos encontrado naturales $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_2 > n_1 = 1$ tales que los discos $\Delta(a_{n_j}, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, k$, son disjuntos dos a dos, observamos que $\bigcup_{1 \leq j \leq k} \Delta(a_{n_j}, 2\varepsilon)$ es relativamente compacto en $\mathbb{D}$, luego contiene solo una cantidad finita de ceros de B. Por tanto, como B tiene infinitos ceros, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $a_{n_{k+1}} \notin \bigcup_{1 \leq j \leq k} \Delta(a_{n_j}, 2\varepsilon)$, lo que implica que $\Delta(a_{n_{k+1}}, \varepsilon)$ no tiene ningún elemento en común con los discos anteriores, $\Delta(a_{n_j}, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, k$. Así, por inducción, construimos una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ tal que los discos $\Delta(a_{n_k}, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$, son disjuntos dos a dos. Con esto queda probada la aserción y, con ella, el teorema. ∎

***Demostración alternativa del Teorema* 2.34.** Basta observar que la integral $\int_{\mathbb{D}}|B'(z)|^2\,dA(z)$ representa el área de la imagen, con multiplicidades, de $\mathbb{D}$ mediante B. Entonces solo hay que tener una idea de cuánto cubre B y cuántas veces.

Para saberlo, recurrimos a un conocido resultado de Frostman [14] (ver también Garnett [16, Thm. II.6.4] que dice que si $I(z)$ es una función interna, entonces para todo $a \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{E}$, donde $\mathbb{E}$ es un conjunto de capacidad logarítmica 0 (para nuestros propósitos podemos suponer $\mathbb{E}$ de área 0), se tiene que el llamado *Shift de Frostman*,

$$I_a(z) = \frac{I(z)-a}{1-\overline{a}I(z)},$$

es un producto de Blaschke.

Así que si partimos de un producto de Blaschke infinito entonces, para casi todo $a \in \mathbb{D}$, $B_a = \frac{B-a}{1-\overline{a}B}$ vuelve a ser un producto de Blaschke y, además, infinito, porque de ser finito, resultaría que todos sus *shifts* volverían a ser productos de Blaschke finitos, incluido el propio $B = (B_a)_{-a}$. Ahora, decir que B_a es un producto de Blaschke infinito implica que B toma el valor a infinitas veces. Por tanto, por el Teorema de Frostman, estamos diciendo que un producto de Blaschke infinito cubre el disco unidad $\mathbb{D}$ (salvo un conjunto de área 0) un número infinito de veces y, por consiguiente, $\int_{\mathbb{D}}|B'(z)|^2\,dA(z) = \infty$. ∎

Corolario 2.36. *Para cualquier producto de Blaschke infinito, $B' \notin \bigcup_{p\geq 2} A^p$.* ∎

Teniendo en cuenta la inclusión de Hardy y Littlewood, $H^p \subset A^{2p}$, podemos obtener resultados de pertenencia de la derivada de productos de Blaschke en A^p a partir de los resultados de pertenencia de la derivada de los productos de Blaschke en $H^{\frac{p}{2}}$. Sin embargo, en nuestras circunstancias, ya que trabajaremos con derivadas de productos de Blaschke y con índices p entre 1 y 2, la situación puede mejorar, y mucho. La siguiente proposición, basada en el Lema de Schwarz-Pick, nos lo dice. Recordemos que $\mathbb{B}$ es la bola unidad cerrada de H^∞.

Proposición 2.37. *Sea φ una función de $\mathbb{B}$. Si $\varphi' \in H^p$ entonces $\varphi' \in A^{p+1-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$.*

Nota. Observemos que $p+1 > 2p$ si y solo si $p<1$, lo que nos indica que, para $p<1$, $A^{p+1-\varepsilon} \subset A^{2p}$ para todo ε suficientemente pequeño.

Demostración. Para $\varepsilon \in (0,1)$ y por el Lema de Schwarz-Pick, tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} \left|\varphi'(z)\right|^{p+1-\varepsilon} dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} \left|\varphi'(z)\right|^p \left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^{1-\varepsilon} dA(z) \leq \|\varphi'\|_{H^p}^p \int_0^1 \frac{2r}{(1-r)^{1-\varepsilon}}\,dr = \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi'\|_{H^p}^p.$$ ∎

El caso es que podemos deshacernos del ε que aparece en el resultado anterior. El siguiente es un caso particular de un resultado de Ahern, probado en el artículo de 1984 de Kim [25, Thm. B].

Teorema 2.38 (Ahern, Kim 1984). *Sea φ una función de $\mathbb{B}$. Si $\varphi' \in H^p$ entonces $\varphi' \in A^{p+1}$.*

Para probar este teorema haremos uso de un resultado de la teoría de espacios de Hardy, el Teorema Maximal Complejo de Hardy-Littlewood (ver, por ejemplo, Duren [13, Thm.1.9] para una demostración).

Teorema 2.39 (Hardy-Littlewood). *Supongamos que $f \in H^p$ para algún $p \in (0,\infty]$. Definamos la función maximal radial de f como*

$$F(\theta) = \sup_{0\leq r<1} \left|f(re^{i\theta})\right|, \qquad \theta \in \mathbb{T}.$$

Entonces $F \in L^p$ y $\|F\|_{L^p} \leq B_p \|f\|_{H^p}$. ∎

***Demostración del Teorema* 2.38.** Sea $\Psi(\theta) = \sup_{r<1}\left|\varphi'(re^{i\theta})\right|$ la función maximal radial de φ', y consideremos, para $\theta \in \mathbb{T}$, $\lambda(\theta) = 1$ si $\Psi(\theta) \leq 1$ y $\lambda(\theta) = \frac{1}{\Psi(\theta)}$ si $\Psi(\theta) \geq 1$.

Por el Lema de Schwarz-Pick tenemos $\left|\varphi'(re^{i\theta})\right| \leq \frac{1-|\varphi(re^{i\theta})|^2}{1-r^2} \leq \frac{1}{1-r}$. Así, para $\theta \in \mathbb{T}$,

$$\int_0^1 \left|\varphi'(re^{i\theta})\right|^{p+1} dr \leq \int_0^{1-\lambda(\theta)} \frac{1}{(1-r)^{p+1}}\,dr + \left(\Psi(\theta)\right)^{p+1} \int_{1-\lambda(\theta)}^1 dr = \begin{cases} \Psi(\theta)^{p+1}, & \text{si } \Psi(\theta) \leq 1, \\ \frac{1}{p}\left(\Psi(\theta)^p - 1\right) + \Psi(\theta)^p, & \text{si } \Psi(\theta) \geq 1. \end{cases}$$

En cualquier caso, lo anterior queda acotado por $\left(\frac{1}{p}+1\right)\Psi(\theta)^p$. Por tanto, haciendo uso del Teorema Maximal Complejo de Hardy-Littlewood, dado que $\varphi' \in H^p$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{D}} \left|\varphi'(z)\right|^{p+1} dA(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \left|\varphi'(re^{i\theta})\right|^{p+1} r\,dr\,d\theta \le \left(\tfrac{1}{p}+1\right)\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta)^p\, d\theta \le \left(\tfrac{1}{p}+1\right) B_p^p \|\varphi'\|_{H^p}^p. \qquad \blacksquare$$

2.3.2. La condición C_{2-p} implica $B' \in A^p$

Las técnicas empleadas en el último resultado son bastante ilustrativas de lo que podemos conseguir. Empezamos dando un resultado análogo al de Protas. En este caso, la primera parte se debe a Kim [25, Thm. 3.1], quien probó algo más general en el mismo artículo de 1984 de antes, y la segunda parte se debe a Rudin [36], (Kim también lo generaliza).

Teorema 2.40 (Kim, 1984). *Supongamos que B es un producto de Blaschke con ceros $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1,\ldots$.*

(i) *Si $\sum_n \left(1-|a_n|\right)^{2-p} < \infty$ para algún $p \in (1,2)$, entonces $B' \in A^p$.*

(ii) *Si $\sum_n (1-|a_n|)\log\frac{1}{1-|a_n|} < \infty$, entonces $B' \in A^1$.*

<u>*Nota*</u>. Observemos que el ejemplo de producto de Blaschke que se da en el Teorema 2.24 tiene sucesión de ceros satisfaciendo (ii), luego la derivada de dicho producto de Blaschke está en A^1, pero no está en $H^{\frac{1}{2}}$, por lo que esto prueba que la inclusión de Hardy-Littlewood, $H^{\frac{1}{2}} \subset A^1$, es estricta.

<u>*Nota*</u>. Pero es que mucho más es cierto. Los ceros del mismo producto de Blashcke en el Teorema 2.24 satisfacen $\sum_n \left(1-|a_n|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, o sea, satisfacen (i) con $p = \frac{3}{2}$, por lo que la derivada de dicho producto de Blaschke está en $A^{\frac{3}{2}}$ (y no está en $H^{\frac{1}{2}}$), lo que nos dice que el Teorema 2.38 no tiene recíproco.

Demostración. Simplemente para justificar lo dicho antes del enunciado, veamos que en (i) es fácil probar que $B' \in A^{p-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Usamos, como no, el lema de Schwarz-Pick y la estimación (ya usada tantas veces antes) $|B'(z)| \le \sum_n |b_n'(z)| = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}$, junto con que $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-r_n r e^{i(\theta-\theta_n)}|^2}\, d\theta = \frac{2\pi}{1-(r_n r)^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^{p-\varepsilon}\, dA(z) &\le \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \left|B'(re^{i\theta})\right|^{p-1-\varepsilon}\left|B'(re^{i\theta})\right| d\theta\, dr \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{p-1-\varepsilon}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-r_n r e^{i(\theta-\theta_n)}|^2}\, d\theta\, dr \\
&\le 4\sum_n (1-r_n)\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{p-1-\varepsilon}}\,\frac{1}{1-r_n r}\, dr \\
&\le 4\sum_n (1-r_n)\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{p-1-\varepsilon}(1-r_n)^{p-1}(1-r)^{2-p}}\, dr \\
&= 4\sum_n (1-r_n)^{2-p}\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{1-\varepsilon}}\, dr < \infty.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Para conseguir quitar el ε, tenemos que ser un poco más precisos en una integral de las que aparece arriba.

Lema 2.41. *Sean $q \in (0,1)$ y $s \in (0,1)$. Entonces existe un constante K_q, que solo depende de q, tal que*

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^q(1-sr)}\, dr \le K_q \frac{1}{(1-s)^q}. \tag{2.31}$$

***Demostración del Lema* 2.41.** Solo hay que dividir la integral de manera adecuada, parecido a lo que se hizo en la demostración del Teorema 2.38.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^q(1-sr)}\, dr &\le \int_0^s \frac{1}{(1-r)^q(1-r)}\, dr + \int_s^1 \frac{1}{(1-r)^q(1-s)}\, dr \\
&= \frac{1}{q(1-r)^q}\Big|_{r=0}^{s} - \frac{1}{1-s}\,\frac{(1-r)^{1-q}}{1-q}\Big|_{r=s}^{1} \\
&\le \frac{1}{q}\,\frac{1}{(1-s)^q} + \frac{1}{1-q}\,\frac{1}{(1-s)^q} = \frac{1}{q(1-q)}\,\frac{1}{(1-s)^q}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Usando este Lema en (2.30), pero empezando sin ε, obtenemos el resultado deseado en (i).

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) &\le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left|B'(re^{i\theta})\right|^{p-1} \left|B'(re^{i\theta})\right| d\theta dr \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-r_n r e^{i(\theta-\theta_n)}|^2} d\theta dr \\
&\le 4\sum_n (1-r_n) \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \frac{1}{1-r_n r} dr \\
&\le 4K_{p-1} \sum_n (1-r_n) \frac{1}{(1-r_n)^{p-1}} \\
&= 4K_{p-1} \sum_n (1-r_n)^{2-p} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

El apartado (ii) se prueba de manera similar. ∎

2.3.3. Productos de Blaschke interpolantes para el recíproco

El siguiente Teorema prueba que el resultado de Kim, apartado (i), también admite un recíproco en el caso de tratar con sucesiones de ceros que son interpolantes, esto es, que si B es un producto de Blaschke interpolante con $B' \in A^p$, entonces su sucesión de ceros satisface C_{2-p}.

Teorema 2.42 (Girela-Peláez-Vukotić [20, Thm. 3.4]**).** *Si B es un producto de Blaschke interpolante con ceros $\{a_n\}$, entonces*

$$
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p dA(z) \gtrsim \sum_n (1-|a_n|)^{2-p}. \tag{2.33}
$$

En particular, si la serie diverge entonces $B' \notin A^p$

<u>*Nota.*</u> El rango interesante de p's para esta estimación es cuando $1 < p < 2$. Si $p \le 1$ entonces siempre tenemos $\sum_n (1-|a_n|)^{2-p} < \infty$ debido a que la sucesión debe satisfacer la condición de Blashcke. Por otro lado, si $p \ge 2$ entonces la integral $\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p dA(z)$ en el caso de productos de Blashcke infinitos, porque ninguno de ellos puede estar en A^p (Teorema 2.34).

Demostración. Sea δ la constante de separación de la sucesión $\{a_n\}$. Entonces los discos pseudo-hiperbólicos $\Delta_n := \Delta\big(a_n, \frac{\delta}{3}\big)$, $n = 1, \dots$, son disjuntos dos a dos, y por la Proposición 2.8,

$$
|B'(z)| \ge \frac{\delta}{6} \frac{1}{1-|a_n|^2}, \qquad \text{para todo } z \in \Delta_n \text{ y todo } n = 1, \dots.
$$

Además, recordando cómo calcular el área de cada uno de estos discos (ver (2.29), tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) &\ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} |B'(z)|^p \, dA(z) \\
&\ge \left(\tfrac{\delta}{6}\right)^p \sum_n \Big(\frac{1}{1-|a_n|^2}\Big)^p \text{Área}(\Delta_n) = \left(\tfrac{\delta}{6}\right)^p \sum_n \Big(\frac{1}{1-|a_n|^2}\Big)^p \Big(\frac{1-|a_n|^2}{1-(\frac{\delta}{3})^2|a_n|^2}\Big)^2 \left(\tfrac{\delta}{3}\right)^2 \\
&\ge K_{\delta,p} \sum_n (1-|a_n|)^{2-p}.
\end{aligned}
$$

∎

Dada la naturaleza de los productos de Blaschke interpolantes, podemos preguntarnos si sus derivadas tienen mejores exponentes de integrabilidad que la de productos de Blaschke *normales*. Con los productos de Blaschke normales, lo más que se puede decir (sin imponer condiciones adicionales) es que $B' \in A^p$ para todo $p < 1$. Eso es también lo mejor que se puede decir para productos de Blaschke interpolantes. Un ejemplo de producto de Blaschke interpolante cuya derivada no está en A^1 fue dado por Peláez [32, Thm. 1] en 2007. La base de todo esto quizás la podamos encontrar en el sorprendente resultado de Naftalevič [29], que enunciamos a continuación, una demostración detallada del cual puede encontrarse en Cochran [11]

Teorema 2.43 (Naftalevič, 1956). *Para cada sucesión de Blaschke $\{a_n\}$, existe una sucesión interpolante $\{z_n\}$ tal que $|z_n| = |a_n|$ para cada n.*

Este resultado da pie a este otro.

Teorema 2.44. *Existe un producto de Blaschke interpolante B tal que $B' \notin \bigcup_{p>1} A^p$.*

Demostración. La sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n\log^2 n}$ satisface la condición de Blaschke. Por el Teorema 2.43, existe una sucesión interpolante $\{z_n\}$ tal que $|z_n| = |a_n|$ para todo n. Ahora, para $p > 1$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{2-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}\log^{2(2-p)} n} = \infty,$$

lo que permite concluir, por el Teorema 2.42, que el producto de Blaschke B con sucesión de ceros dada por $\{z_n\}$ es tal que $B' \notin A^p$. ∎

2.3.4. Ceros en un ángulo de Stolz implica $B' \in \bigcap_{p<\frac{3}{2}} A^p$

En este apartado usamos la relación existente entre H^p y A^{1+p}, dada en la Proposición 2.37 y el Teorema 2.38, para obtener el análogo al Teorema 2.26 de manera inmediata.

Teorema 2.45 (Girela-Peláez-Vukotić, 2007 [20]**).** *Si los ceros de un producto de Blaschke B están todos en un ángulo de Stolz, entonces*

$$B' \in \bigcap_{p<\frac{3}{2}} A^p.$$

Demostración. Sea B un producto de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz. Del Teorema 2.26 sabemos que $B' \in \bigcap_{p<\frac{1}{2}} H^p$, luego por el Teorema 2.38, $B' \in \bigcap_{p<\frac{3}{2}} A^p$. ∎

2.3.5. La función φ_B

El resultado anterior, tan sencillo, es, sin embargo, preciso.

Teorema 2.46 (Girela-Peláez [19]**).** *El producto de Blaschke B con sucesión de ceros dada por $a_n = 1 - \frac{1}{n\log^2 n}$, $n \geq 2$, todos ellos en el radio $(0,1)$, verifica que $B' \not\in A^{\frac{3}{2}}$.*

Para probar este resultado, haremos uso de una función φ_B, similar a f_B, introducida por Vinogradov [39] con otros propósitos, y reintroducida por Girela y Peláez [19] para dar un resultado análogo al Lema 2.21, de caracterización de pertenencia de B' en A^p mediante la integrabilidad de la función φ_B.

Si B es un producto de Blaschke con sucesión de ceros dada por $\{a_n\}$, escribimos $d_n = 1 - |a_n|$ y definimos

$$\varphi_B(\theta) = \sum_n \frac{d_n}{(\theta + d_n)^2}, \qquad \theta \in (0,\infty).$$

Es inmediato que φ_B es positiva y decreciente.

Teorema 2.47. *Sea B un producto de Blaschke cuyo ceros están en un ángulo de Stolz. Supongamos que*

(2.34) *Existen constantes $C > 0$ y $\theta_0 \in (0,\pi)$ tales que* $\theta\varphi_B(\theta) \geq C$, *para todo* $\theta \in (0,\theta_0)$.

Entonces, para cualquier $p \in (1,\infty)$, tenemos $B' \in A^p$ si, y solo si, $\varphi_B \in L^{p-1}(0,1)$.

Antes de proseguir, veamos cómo probar el Teorema 2.46 a partir de este resultado.

***Demostración del Teorema* 2.46.** Según el Teorema 2.47, basta ver que la correspondiente función φ_B,

$$\varphi_B(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{(\theta + d_n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \log^2 n}{(1 + \theta n \log^2 n)^2}, \quad \theta > 0,$$

satisface (2.34) y $\varphi_B \notin L^{\frac{1}{2}}$.

Dada la similitud de esta función con la función f_B que aparece en el Teorema 2.27, los mismos argumentos de allí prueban que existen constantes $K_1 > 0$ y $\theta_1 \in (0,1)$ tales que

$$\varphi_B(\theta) \geq K_1 \frac{1}{\theta^2 \log^2 \frac{1}{\theta}}, \qquad 0 < \theta < \theta_1.$$

Esto prueba que $\varphi_B \notin L^{\frac{1}{2}}$. Para poder concluir que $B' \notin A^{\frac{3}{2}}$, hemos de comprobar todavía que existen constantes $C > 0$ y $\theta_0 \in (0,1)$ tales que

$$\theta \varphi_B(\theta) \geq C, \qquad \text{para todo } \theta \in (0, \theta_0),$$

pero esto es evidente a partir del hecho que $\frac{1}{\theta \log^2 \theta} \to \infty$ cuando $\theta \to 0^+$. ∎

A continuación dedicamos casi todo lo que queda de este apartado para probar el Teorema 2.47. Lo primero que observamos es que éste es consecuencia inmediata del siguiente.

Teorema 2.48. *Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y que B es un producto de Blaschke cuyos ceros, $\{a_n\}$, están en un determinado ángulo de Stolz, Ω_σ, para algún $\sigma \geq 1$. Entonces existen $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $M > 0$ y $\theta_0 \in (0,\pi)$ tales que*

$$C_1 \int_0^{2\pi} \varphi_B^{p-1}(\theta)\, d\theta \geq \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) \geq C_2 \int_0^{\theta_0} \varphi_B^{p-1}(\theta)(1 - e^{-M\theta\varphi_B(\theta)})\, d\theta. \tag{2.35}$$

Vamos a necesitar ciertos resultados previos para la demostración del Teorema 2.48. El primero se debe a Marshall y Saranson, y aparece probado en Li [27, Prop. 4].

Proposición 2.49 (Marshall-Sarason, 1992). *Sea K un subconjunto convexo cerrado de $\overline{\mathbb{D}}$ con $0 \in K$. Sea B un producto de Blaschke con ceros $\{a_n\}$ contenidos todos en K. Si $z \in \mathbb{D} \setminus K$ y $\varepsilon(z) = \varrho(z, K)$, entonces*

$$|B'(z)| \geq \frac{2\varepsilon(z)}{1 + \varepsilon^2(z)} \frac{|B(z)|}{1 - |z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varrho^2(z, a_n)).$$

Idea de la demostración. Escribamos $B(z) = \prod_n b_n(z)$, donde $b_n(z) = z$ si $a_n = 0$, y $b_n(z) = \frac{-\overline{a_n}}{|a_n|} \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n} z}$, si $a_n \neq 0$. Entonces para $z \in \mathbb{D}$, tenemos, tras usar algunas identidades ya conocidas,

$$\begin{aligned}(1 - |z|^2) \frac{B'(z)}{B(z)} &= (1 - |z|^2) \sum_n \frac{b_n'(z)}{b_n(z)} = \sum_n \frac{\left(1 - |a_n|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{(z - a_n)(1 - \overline{a_n} z)} \\ &= \sum_n \frac{1 - a_n \overline{z}}{z - a_n} \frac{\left(1 - |a_n|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \overline{a_n} z|^2} = \sum_n \frac{1 - a_n \overline{z}}{z - a_n} \left(1 - \varrho^2(z, a_n)\right).\end{aligned}$$

Ahora todo consiste en probar, con argumentos geométricos, que existe un constante λ, con $|\lambda| = 1$, tal que

$$\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{1 - a_n \overline{z}}{z - a_n}\right) \geq \frac{2\varepsilon(z)}{1 + \varepsilon^2(z)}, \qquad \text{para todo } n, \text{ y todo } z \in \mathbb{D} \setminus K,$$

porque de esa manera tenemos, para $z \in \mathbb{D} \setminus K$,

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{B'(z)}{B(z)} \right| \geq \operatorname{Re}\left(\lambda \sum_n \frac{1 - a_n \overline{z}}{z - a_n} \left(1 - \varrho^2(z, a_n)\right)\right) \geq \frac{2\varepsilon(z)}{1 + \varepsilon^2(z)} \sum_n \left(1 - \varrho^2(z, a_n)\right).$$ ∎

Lema 2.50. *Sea B un producto de Blaschke cuya sucesión de ceros viene dada por $\{a_n\}$. Sea $\delta \in (0,1)$ y supongamos que $z \in \mathbb{D}$ satisface $\varrho(z, a_n) \geq \delta$ para todo n. Entonces*

$$|B(z)| \geq e^{-\frac{1}{2\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varrho^2(z, a_n))}. \tag{2.36}$$

Demostración. Escribimos de nuevo $B(z)=\prod_n b_n(z)$. Entonces haciendo uso de la desigualdad elemental $\log x \le x-1$, deducimos que

$$\log\frac{1}{|B(z)|}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{\varrho^2(z,a_n)}\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\varrho^2(z,a_n)}-1\Big)\le\frac{1}{2\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(1-\varrho^2(z,a_n)\big),$$

lo que implica (2.36). ∎

También vamos a necesitar el lema siguiente.

Lema 2.51. $\frac{1}{2\pi}\big((1-r)+(1-\varrho)+|t|\big)\le\big|1-\rho re^{it}\big|\le(1-r)+(1-\rho)+|t|,\qquad r,\rho\in[0,1),\quad t\in[-\pi,\pi].$

Demostración. El lado derecho se obtiene fácilmente a partir de la desigualdad $a^2+b^2\le(|a|+|b|)^2$,

$$\big|1-\rho re^{it}\big|=\sqrt{(1-r\rho)^2+4r\rho\,\mathrm{sen}^2\tfrac{t}{2}}\le 1-r\rho+2\sqrt{r\rho}\,\mathrm{sen}\tfrac{|t|}{2}\le(1-r)+r(1-\rho)+\sqrt{r\rho}|t|\le(1-r)+(1-\rho)+|t|.$$

Para tratar el lado izquierdo, primero suponemos que $r\rho\le\frac{1}{6}$, entonces

$$2\pi\big|1-r\rho e^{it}\big|\ge 2\pi(1-r\rho)\ge 2\pi\big(1-\tfrac{1}{6}\big)=\frac{5\pi}{3}\ge 2+\pi\ge(1-r)+(1-\rho)+|t|.$$

Ahora supongamos que $r\rho>\frac{1}{6}$, y empecemos con las estimaciones usuales,

$$\big|1-\rho re^{it}\big|^2=(1-r\rho)^2+4r\rho\,\mathrm{sen}^2\tfrac{t}{2}\ge(1-r\rho)^2+\tfrac{4}{\pi^2}r\rho|t|^2.$$

Usamos ahora que $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$, junto con el hecho de que $r\rho>\frac{1}{6}$ implica que $\min\{r,\rho\}\ge r\rho>\frac{1}{6}$ y, además, $\max\{r,\rho\}>\frac{1}{\sqrt{6}}$, porque lo contrario daría $r\rho\le\frac{1}{6}$, que no puede ser. (Suponemos sin perder generalidad que es $r\ge\frac{1}{\sqrt{6}}$). Con esto, tenemos

$$\begin{aligned}2\pi\big|1-\rho re^{it}\big|&\ge\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\big((1-r\rho)+\tfrac{2}{\pi}\sqrt{r\rho}|t|\big)\ge\pi\sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}\big((1-r)+r(1-\rho)+\sqrt{r\rho}|t|\big)\\&\ge 2\sqrt{2}\big((1-r)+\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1-\rho)+\tfrac{1}{\sqrt{6}}|t|\big)\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\big((1-r)+(1-\rho)+|t|\big)\ge(1-r)+(1-\rho)+|t|.\end{aligned}$$

Con esto queda probado el lema por completo. ∎

***Demostración del Teorema* 2.48.** Para simplificar escribiremos φ en vez de φ_B. Fijemos $\delta\in(0,1)$ y encontremos $\overline{\sigma}>\sigma$, por la Proposición 2.15, tal que $\varrho(z,\Omega_\sigma)\ge\delta$ para todo $z\in\mathbb{D}\setminus\Omega_{\overline{\sigma}}$. Utilizando la Proposición 2.49 con $K=\overline{\Omega}_\sigma$ y teniendo en cuenta que $x\mapsto\frac{2x}{1+x^2}$ es creciente en $(0,1)$, junto con la bien conocida identidad $1-\varrho^2(z,a)=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$, obtenemos, para cada $z=re^{it}\in\mathbb{D}\setminus\Omega_{\overline{\sigma}}$,

$$|B'(z)|\ge\frac{2\varrho(z,\Omega_\sigma)}{1+\varrho(z,\Omega_\sigma)^2}\frac{|B(z)|}{1-|z|^2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varrho^2(z,a_n))\ge\frac{2\delta}{1+\delta^2}|B(z)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}.$$

A continuación seguimos con $z=re^{it}\in\mathbb{D}\setminus\Omega_{\overline{\sigma}}$ y, como $a_n\in\Omega_\sigma$, observamos que $\varrho(z,a_n)\ge\delta$ para todo n, luego por el Lema 2.50,

$$|B'(z)|\ge\frac{2\delta}{1+\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}e^{-\frac{1}{2\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)(1-|a_n|^2)}{|1-\overline{a_n}z|^2}}.$$

Mediante la Proposición 2.13 y el Lema 2.51, tenemos $\big|1-\overline{a_n}z\big|\asymp\big|1-|a_n|z\big|\asymp\big((1-r)+(1-|a_n|)+|t|\big)$,

$$\begin{aligned}|B'(z)|&\ge\frac{2\delta}{(1+\delta^2)(2+\sigma)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{\big|1-|a_n|z\big|^2}e^{-\frac{(2+\sigma)^2}{2\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)(1-|a_n|^2)}{|1-|a_n|z|^2}}\\&\ge\frac{2\delta}{(1+\delta^2)(2+\sigma)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{\big((1-r)+(1-|a_n|)+|t|\big)^2}e^{-\frac{(2+\sigma)^2}{2\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|z|^2)(1-|a_n|^2)}{\frac{1}{4\pi^2}\big((1-r)+(1-|a_n|)+|t|\big)^2}}\qquad(2.37)\\&\ge\frac{2\delta}{(1+\delta^2)(2+\sigma)^2}\varphi\big((1-r)+|t|\big)e^{-\frac{16\pi^2(2+\sigma)^2}{2\delta^2}(1-r)\varphi\big((1-r)+|t|\big)}\\&=A\varphi\big((1-r)+|t|\big)e^{-K(1-r)\varphi\big((1-r)+|t|\big)},\end{aligned}$$

donde A y K son constantes positivas que solo dependen de δ y de σ.

Ahora observemos que existe una constante positiva β, que podemos tomar $\beta = \sqrt{\overline{\sigma}^2 - 1}$, tal que

$$|t| \geq \beta(1-r), \qquad \text{para todo } z = re^{it} \in \mathbb{D} \setminus \Omega_{\overline{\sigma}}, \text{ con } t \in [-\pi, \pi).$$

La razón de ello es que si $z = re^{it} \in \mathbb{D} \setminus \Omega_{\overline{\sigma}}$, con $t \in [-\pi, \pi)$, entonces

$$\overline{\sigma}^2 \big(1 - |z|\big)^2 \leq |1 - z|^2 = (1 - |z|)^2 + 4|z| \operatorname{sen}^2 \tfrac{t}{2} \leq (1 - |z|)^2 + |t|^2,$$

de donde se sigue que $|t| \geq \sqrt{\overline{\sigma}^2 - 1}\,(1-r)$.

Para continuar con nuestra tarea, tomamos $r_0 \in (0,1)$ tal que $(\beta+1)(1-r_0) \leq \pi$. De esta manera $\mathbb{D} \supset \mathbb{D} \setminus \Omega_{\overline{\sigma}} \supset \mathbb{E} \equiv \{re^{it} : 1 > r \geq r_0,\ \beta(1-r_0) \geq |t| \geq \beta(1-r)\}$. Con esto, podemos integrar en (2.37) y, tras realizar el cambio de variables $\theta = \theta(t) = 1 - r + t$ y luego aplicar Fubini, obtenemos la segunda desigualdad de (2.35) con $C_2 = \frac{2A^p r_0}{kp}$, $\theta_0 = (\beta+1)(1-r_0)$ y $M = \frac{Kp}{\beta+1}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) &\geq \int_{\mathbb{E}} |B'(z)|^p \, dA(z) \\
&\geq 2A^p r_0 \int_{r_0}^1 \int_{\beta(1-r)}^{\beta(1-r_0)} \varphi^p(1-r+t) e^{-Kp(1-r)\varphi(1-r+t)} \, dt \, dr \\
&= 2A^p r_0 \int_{r_0}^1 \int_{(\beta+1)(1-r)}^{(\beta+1)(1-r_0)} \varphi^p(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \, d\theta \, dr \\
&= 2A^p r_0 \int_{\theta=0}^{(\beta+1)(1-r_0)} \int_{r=1-\frac{\theta}{\beta+1}}^1 \varphi^p(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \, dr \, d\theta \\
&= \frac{2A^p}{Kp} \int_0^{(\beta+1)(1-r_0)} \varphi^{p-1}(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \Big|_{r=1-\frac{\theta}{\beta+1}}^1 \, d\theta \\
&= C_2 \int_0^{\theta_0} \varphi^{p-1}(\theta) \big(1 - e^{-M\theta\varphi(\theta)}\big) \, d\theta.
\end{aligned}$$

En cuanto a la primera desigualdad, escribimos $B = \prod_n b_n$, y así tenemos,

$$|B'(z)| = \Big|\sum_n b_n'(z) B_n(z)\Big| \leq \sum_n \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a}_n z|^2} |B_n(z)|. \tag{2.38}$$

Con la desigualdad elemental $\log(1-x) \leq -x$, obtenemos

$$\log|b_n(z)| = \frac{1}{2} \log(1 - (1 - |b_n(z)|^2)) \leq -\frac{1}{2}(1 - |b_n(z)|^2), \quad z \in \mathbb{D},$$

que, sumando en $j \neq n$ y usando la identidad $1 - |b_j(z)|^2 = 1 - \varrho^2(z, a_j) = \frac{(1-|z|^2)(1-|a_j|^2)}{|1-\overline{a}_j z|^2}$, nos da

$$\log|B_n(z)| \leq -\frac{1}{2} \sum_{j \neq n} \big(1 - |b_j(z)|^2\big) = \frac{1}{2}\big(1 - |b_j(z)|^2\big) - \frac{1}{2} \sum_j \big(1 - |b_j(z)|^2\big) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(1-|z|^2)(1-|a_j|^2)}{|1 - \overline{a}_j z|^2},$$

lo cual, introducido en (2.38), y usando las equivalencias $\big|1 - \overline{a}_n z\big| \asymp \big|1 - |a_n| z\big| \asymp \big((1-r) + (1 - |a_n|) + |t|\big)$, aportadas por la Proposición 2.13 y el Lema 2.51, nos permite obtener la siguiente estimación.

$$\begin{aligned}
|B'(re^{it})| &\leq \sum_n \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \overline{a}_n re^{it}|^2} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(1-r^2)(1-|a_j|^2)}{|1 - \overline{a}_j re^{it}|^2}} \\
&\leq e^{\frac{1}{2}} (2+\sigma)^2 \sum_n \frac{1 - |a_n|^2}{\big|1 - |a_n| re^{it}\big|^2} e^{-\frac{1}{2(2+\sigma)^2} \sum_n \frac{(1-r^2)(1-|a_n|^2)}{\left|1 - |a_n| re^{it}\right|^2}} \\
&\leq A \sum_n \frac{1 - |a_n|^2}{\big((1-r) + (1-|a_n|) + |t|\big)^2} e^{-K \sum_n \frac{(1-r^2)(1-|a_n|^2)}{\left((1-r) + (1-|a_n|) + |t|\right)^2}} \\
&\leq A \varphi\big((1-r) + |t|\big) e^{-K(1-r)\varphi\left((1-r)+|t|\right)},
\end{aligned}$$

donde A y K dependen sólo de σ.

Ahora, al integrar con respecto al elemento de área la desigualdad anterior, obtenemos, tras realizar el cambio $\theta = \theta(t) = 1 - r + t$ y aplicar Fubini, la primera desigualdad de (2.35) con $C_1 = \frac{2A^p}{Kp}$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p \, dA(z) &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left|B'(re^{it})\right|^p r \, dt dr \\
&\le A^p \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^p\big((1-r)+|t|\big) e^{-Kp(1-r)\varphi\left((1-r)+|t|\right)} \, dt dr \\
&= 2A^p \int_0^1 \int_0^{\pi} \varphi^p(1-r+t) e^{-Kp(1-r)\varphi(1-r+t)} \, d\theta dr \\
&= 2A^p \int_0^1 \int_{1-r}^{1-r+\pi} \varphi^p(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \, d\theta dr \\
&\le 2A^p \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi^p(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \, d\theta dr \\
&= 2A^p \int_0^{2\pi} \varphi^p(\theta) \int_0^1 e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \, dr d\theta \\
&= \tfrac{2A^p}{Kp} \int_0^{2\pi} \varphi^{p-1}(\theta) e^{-Kp(1-r)\varphi(\theta)} \Big|_0^1 \, d\theta \\
&= C_1 \int_0^{2\pi} \varphi^{p-1}(\theta)\big(1 - e^{-Kp\varphi(\theta)}\big) \, d\theta \\
&\le C_1 \int_0^{2\pi} \varphi^{p-1}(\theta) \, d\theta. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Dado el parecido entre φ_B y f_B, observamos que la pertenencia en A^p de la derivada de los productos de Blaschke con ceros en un ángulo de Stolz puede ser caracterizada tanto a través de la función φ_B como a través de f_B.

Teorema 2.52. *Sea B un producto de Blaschke cuyos ceros $\{a_n\}$ están en un ángulo de Stolz. Supongamos que se satisface la condición* (2.34). *Entonces*

$$B' \in H^p \iff B' \in A^{p+1}.$$

Nota. La posibilidad de quitar la hipótesis de que los ceros estén en un ángulo de Stolz no es viable ya que, según la segunda nota tras el Teorema 2.34, el producto de Blaschke B que se construye en el Teorema 2.24 es tal que $B' \in A^{\frac{3}{2}} \setminus H^{\frac{1}{2}}$.

***Demostración de Teorema* 2.52.** La implicación ($\Rightarrow$) es el Teorema 2.38 y no hace falta ni que los ceros estén en un ángulo de Stolz ni que se satisfaga (2.34). Para probar la otra implicación, ($\Leftarrow$), suponemos sin pérdida de generalidad que el ángulo de Stolz es Ω_σ, con $\sigma \ge 1$ y vértice en 1. Observamos, por el Teorema 2.47, que $B' \in A^{p+1} \iff \varphi_B \in L^p(0,1)$, donde

$$\varphi_B(\theta) = \sum_n \frac{1-|a_n|}{\big((1-|a_n|)+\theta\big)^2}, \qquad \theta \in (0,\infty).$$

Observemos ahora que, para todo n y todo θ con $|\theta| > 0$,

$$\big((1-|a_n|)^2 + \theta^2\big) \le \big((1-|a_n|)+|\theta|\big)^2 \le 2\big((1-|a_n|)^2 + \theta^2\big).$$

Luego la pertenencia en $L^p(0,1)$ de φ_B es equivalente a la pertenencia en $L^p(-\pi,\pi)$ de f_B, donde

$$f_B(\theta) = \sum_n \frac{1-|a_n|}{(1-|a_n|)^2 + \theta^2}, \qquad \theta \in (-\pi,\pi).$$

Esto, a su vez, equivale a la pertenencia en H^p de P', donde P es el producto de Blaschke con sucesión de ceros dada por $\{|a_n|\}$. Ahora bien, por el Lema 2.30, tenemos $\left|B'(e^{i\theta})\right| \asymp \left|P'(e^{i\theta})\right|$, para todo θ con $e^{i\theta} \ne 1$, de ahí la equivalencia con que $B' \in H^p$. $\blacksquare$

2.3.6. Ceros en un ángulo de Stolz e interpolantes implica $B' \in \bigcap_{p<2} A^p$

Cerramos el capítulo estudiando los productos de Blaschke interpolantes con ceros en un ángulo de Stolz, en analogía a lo visto en el correspondiente apartado 2.2.6.

Teorema 2.53. *Sea B un producto de Blaschke interpolante cuya sucesión de ceros está contenida en un ángulo de Stolz. Entonces $B' \in A^p$ para todo $p < 2$.*

Nota. Este resultado es preciso gracias al Teorema 2.34, debido a Kim, que asegura que ningún producto de Blaschke infinito tiene derivada en A^2.

Demostración. Por el Teorema 2.28, tenemos que $B' \in H^p$ para todo $p < 1$. Ahora, por el Teorema de Hardy-Littlewood, $H^p \subset A^{2p}$, concluimos que $B' \in A^p$ para todo $p < 2$. ∎

Bibliografía

[1] P. Ahern, *On a theorem of Hayman concerning the derivative of a function of bounded characteristic*, Pacific J. Math. **83** (1979), no. 2, 297–301. MR557929 (81b:30065)

[2] ______, *The mean modulus and the derivative of an inner function*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 2, 311–347, DOI 10.1512/iumj.1979.28.28022. MR523107 (80h:30027)

[3] ______, *The Poisson integral of a singular measure*, Canad. J. Math. **35** (1983), no. 4, 735–749, DOI 10.4153/CJM-1983-042-0. MR723040 (85c:30036)

[4] P. R. Ahern and D. N. Clark, *Radial* nth *derivatives of Blaschke products*, Math. Scand. **28** (1971), 189–201. MR0318495 (47 #7042)

[5] ______, *On inner functions with* H^p*-derivative*, Michigan Math. J. **21** (1974), 115–127. MR0344479 (49 #9218)

[6] ______, *On inner functions with* B^p *derivative*, Michigan Math. J. **23** (1976), no. 2, 107–118. MR0414884 (54 #2976)

[7] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1948), 17. MR0027954 (10,381e)

[8] W. Blaschke, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen*, Leipzig **61** (1915), 194–200.

[9] C. Caratheodory, *Theory of functions of a complex variable. Vol. 2*, Chelsea Publishing Company, New York, 1954. Translated by F. Steinhardt. MR0064861 (16,346c)

[10] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930. MR0117349 (22 #8129)

[11] W. G. Cochran, *Random Blaschke products*, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), no. 2, 731–755, DOI 10.2307/2001723. MR1022163 (91c:30061)

[12] W. S. Cohn, *On the* H^p *classes of derivatives of functions orthogonal to invariant subspaces*, Michigan Math. J. **30** (1983), no. 2, 221–229. MR718268 (84j:30049)

[13] P. L. Duren, *Theory of* H^p *spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York, 1970. MR0268655 (42 #3552)

[14] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie de fonctions*, Meddel Lund Univ Mat Sem 3, 1935.

[15] ______, *Sur les produits de Blaschke*, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar [Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund] **12** (1942), no. 15, 169–182 (French). MR0012127 (6,262e)

[16] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, 1st ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 236, Springer, New York, 2007. MR2261424 (2007e:30049)

[17] D. Girela and C. González, *Mean growth of the derivative of infinite Blaschke products*, Complex Variables Theory Appl. **45** (2001), no. 1, 1–10. MR1909626 (2003g:30057)

[18] D. Girela and J. Á. Peláez, *On the derivative of infinite Blaschke products*, Illinois J. Math. **48** (2004), no. 1, 121–130. MR2048218 (2005a:30064)

[19] ______, *On the membership in Bergman spaces of the derivative of a Blaschke product with zeros in a Stolz domain*, Canad. Math. Bull. **49** (2006), no. 3, 381–388, DOI 10.4153/CMB-2006-038-x. MR2252260 (2007e:30048)

[20] D. Girela, J. Á. Peláez, and D. Vukotić, *Integrability of the derivative of a Blaschke product*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **50** (2007), no. 3, 673–687, DOI 10.1017/S0013091504001014. MR2360523 (2008m:30040)

[21] ______, *Interpolating Blaschke products: Stolz and tangential approach regions*, Constr. Approx. **27** (2008), no. 2, 203–216, DOI 10.1007/s00365-006-0651-6. MR2336422 (2008i:30035)

[22] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals. II*, Math. Z. **34** (1932), no. 1, 403–439, DOI 10.1007/BF01180596. MR1545260

[23] W. Hayman, *Interpolation by bounded functions*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble **8** (1958), 277–290 (English, with French summary). MR0117348 (22 #8128)

[24] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer-Verlag, New York, 2000. MR1758653 (2001c:46043)

[25] H. O. Kim, *Derivatives of Blaschke products*, Pacific J. Math. **114** (1984), no. 1, 175–190. MR755488 (85h:30045)

[26] M. A. Kutbi, *Integral means for the first derivative of Blaschke products*, Kodai Math. J. **24** (2001), no. 1, 86–97, DOI 10.2996/kmj/1106157298. MR1813721 (2001j:30032)

[27] K. Y. Li, *Interpolating Blaschke products and the left spectrum of multiplication operators on the Bergman space*, Hokkaido Math. J. **21** (1992), no. 2, 295–304. MR1169796 (93h:30053)

[28] J. Mashreghi, *Derivatives of inner functions*, Fields Institute Monographs, vol. 31, Springer, New York, 2013. MR2986324

[29] A. G. Naftalevič, *On interpolation by functions of bounded characteristic*, Vilniaus Valst. Univ. Mokslų Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslų Ser. **5** (1956), 5–27 (Russian). MR0120387 (22 #11141)

[30] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analytische funcktionen*, Acad Sci Fennicae **A 32(7)** (1929), 1–75.

[31] D. J. Newman, *Interpolation in H^∞*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 501–507. MR0117350 (22 #8130)

[32] J. Á. Peláez, *Sharp results on the integrability of the derivative of an interpolating Blaschke product*, Forum Math. **20** (2008), no. 6, 1039–1054, DOI 10.1515/FORUM.2008.046. MR2479288 (2010j:30109)

[33] G. Piranian, *Bounded functions with large circular variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 1255–1257. MR0230906 (37 #6464)

[34] D. Protas, *Blaschke products with derivative in H^p and B^p*, Michigan Math. J. **20** (1973), 393–396. MR0344478 (49 #9217)

[35] F. Riesz, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **28** (1911), 33–62 (French). MR1509135

[36] W. Rudin, *The radial variation of analytic functions*, Duke Math. J. **22** (1955), 235–242. MR0079093 (18,27g)

[37] W. Seidel, *On the distribution of values of bounded analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), no. 1, 201–226, DOI 10.2307/1989711. MR1501738

[38] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1959. MR0114894 (22 #5712)

[39] S. A. Vinogradov, *Multiplication and division in the space of analytic functions with an area-integrable derivative, and in some related spaces*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **222** (1995), no. Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funktsii. 23, 45–77, 308, DOI 10.1007/BF02355826 (Russian, with English and Russian summaries); English transl., J. Math. Sci. (New York) **87** (1997), no. 5, 3806–3827. MR1359994 (96m:30053)

[40] D. Vukotić, *The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), no. 6, 532–536, DOI 10.2307/3647909. MR1984405

Índice alfabético