Historia de las representaciones gráficas y diagramáticas en Lógica

Vicente Casas Cañas
Tutor: D. Luis Vega Reñón
Trabajo Fin de Máster en Filosofía Teórica y Práctica
Especialidad en Lógica, Historia y Teoría de la Ciencia
Facultad de Filosofía
UNED
(Febrero-2012)

HISTORIA

DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y DIAGRAMÁTICAS EN LÓGICA

Vicente Casas Cañas.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

Las representaciones gráficas y los diagramas han tenido un papel relevante a lo largo de la historia de la ciencia y del pensamiento. La doble hélice que representa el ADN, o el diagrama en el que Newton nos muestra la descomposición de la luz blanca, son solo un par de ejemplos de los múltiples que se idearon en diversas áreas científicas. Otros ejemplos los encontramos en la matemática, como puede ser la representación gráfica de las funciones algebraicas. Tomemos el caso de una parábola, representación de una función cuadrática del tipo $y = a x^2 + b x + c$. Tanto la ecuación como la parábola son distintas formas de afirmar lo mismo, cada una con su utilidad (Gardner, 1985, p.54). Si continuamos en el campo de la matemática, y nos centramos en la geometría, los diagramas han mostrado también su relevancia y su papel mediador en el acceso a objetos inteligibles geométricos (Vega, 1999, p.12).

Abundando en la idea de la relevancia de los diagramas en la ciencia, Marcus du Sautoy, catedrático de matemáticas en la Universidad de Oxford, autor de diversos trabajos divulgativos sobre temas científicos, nos recuerda el diagrama de Copérnico sobre su Teoría Heliocéntrica (*Figura 1*). Un diagrama que podemos ver en el famoso tratado de Copérnico *De revolutionibus orbium coelestium*[1], y sobre el cual comenta Du Sautoy:

> ***"el libro que escribió Copérnico tenía más de 400 páginas y estaba lleno de palabras, cifras y ecuaciones… Sin embargo, ¡ese diagrama tan sencillo del principio lo resume todo! No hay que seguir leyendo, con verlo basta para saber que el sol está en el centro del sistema solar"***[2] (Marcus du Satoy)

---

[1] La figura 1 está tomada de la obra de Copérnico, *Sobre las revoluciones (de los orbes celestes),* con la siguiente referencia bibliográfica: Copernicus, Nicolaus: *De Revolutionibus Orbium Coelestium.* Norimbergae: apud Ioh. Petreium, 1543. 6, 196 pp. (Figura 1 en Folio 9 recto). Se puede consultar la versión digital en la siguiente página web: http://ads.harvard.edu/books/1543droc.book/

[2] Entrevista concedida a RTVE en febrero de 2011.
http://www.rtve.es/television/20110206/redes-simetrias-del-universo/402059.shtml

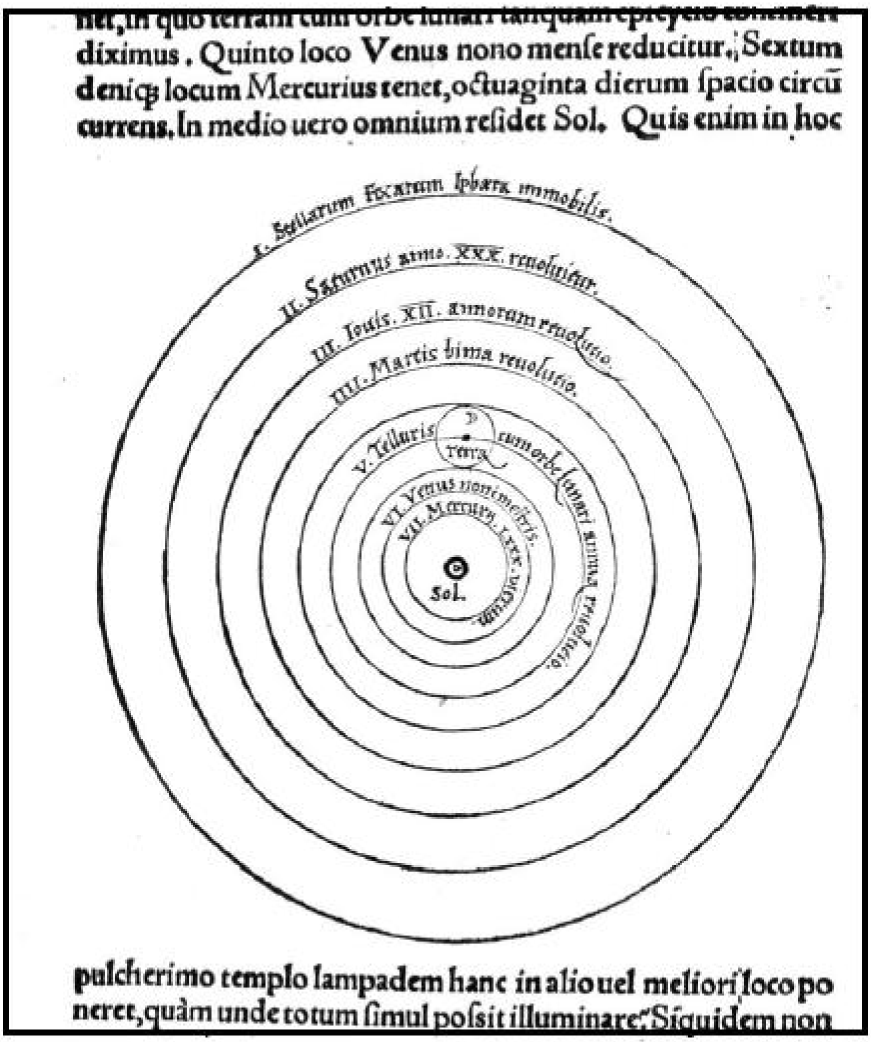


Figura 1
(Diagrama del Sistema Heliocéntrico propuesto por Copérnico en De Revolutionibus Orbium Coelestium, 1593.)

La Lógica tampoco ha estado ajena a la importancia y la influencia de las representaciones gráficas. A lo largo de la historia, el papel de los diagramas en la Lógica ha sido diverso en su importancia y acierto. De lo cual tenemos ejemplos en algunos tratados y monografías sobre la historia de la lógica. Sin embargo, no contamos con un estudio detallado y centrado solamente en la historia de los diagramas lógicos. Tarea que parece pendiente de ser realizada (Vega, 1997, p.63). No obstante, sería injusto no mencionar algunas contribuciones al respecto, de entre las cuales destaca *Máquinas y Diagramas lógicos* de Gardner (1985). Si bien Gardner analiza distintas aportaciones diagramáticas importantes históricamente, estrictamente no se puede considerar como un estudio histórico del tema que nos ocupa. A modo de ejemplo, Gardner comienza su análisis con una amplia referencia a la obra de Ramón Llull, cuya vida transcurrió en su mayor parte durante el siglo XIII, para pasar más adelante al estudio de algunas contribuciones gráficas de otros autores, pero surgidas en períodos anteriores a Llull. No es falta de rigor histórico por parte de Gardner. Realmente no es su pretensión realizar un estudio histórico al modo tradicional, sino hacer una reflexión sobre el tema acudiendo a distintas aportaciones surgidas en diversos momentos históricos. Aparte de esto, Gardner dedica algunos apartados de su libro a analizar diversas aportaciones sobre las llamadas "máquinas lógicas", que si bien no deja de ser un tema de interés, no se ciñe estrictamente al tema de las representaciones gráficas en lógica.

También podemos encontrar algunos artículos dignos de mención, que adoptan una perspectiva histórica sobre el tema, pero que tendrían más bien un valor introductorio, dada su limitada extensión. Como muestra, deberíamos citar el artículo de Baron, *A Note on the Historical Development of Logic Diagrams: Leibniz, Euler and Venn* ["Un comentario sobre el desarrollo histórico de los diagramas lógicos: Leibniz, Euler y Venn"] (1969). Otros artículos se centran en determinados sistemas diagramáticos. Así lo hace Davenport, en *The role of graphical methods in the history of logic* ["La función de los métodos gráficos en la historia de la lógica"] (1952), analizando el método de Euler, el de Venn y el de Lewis Carroll, dejando para el final su propia aportación gráfica. Coumet en su artículo de 1977, *Sur l'histoire des diagrammes logiques, "figures géométriques"*["Sobre la historia de los diagramas lógicos", -figuras geométricas-"], profundiza en los diagramas de Venn. Y en cuanto a monografías, también encontramos cierta diversidad, dependiendo del sistema diagramático objeto de estudio. Mencionamos, a título de ejemplo, *The existential graphs of Charles S. Peirce* ["Los grafos existenciales de Charles S. Peirce"] (1973), de Roberts; *The Logical Status of Diagrams* ["El estatus lógico de los diagramas"] (1994), de Shin; y *Los gráficos existenciales peirceanos* (2010) de Zalamea.

Todo lo anterior son muestras de un interés por los diagramas en Lógica, pero se echa en falta aquello de lo que hablábamos más arriba, a saber, el de una historia de las representaciones gráficas en esta disciplina. Por lo tanto, afrontar una revisión desde una perspectiva histórica sobre el tema, se presenta como una tarea con cierta dificultad ante la escasez de referencias y trabajos que puedan orientar sobre el camino a seguir. Pero esta dificultad puede ser entendida como un reto ante la posibilidad de proponer una propia visión sobre la evolución de las representaciones gráficas en Lógica. En el siguiente apartado haré una propuesta sobre ello. No será un estudio exhaustivo, dada las limitaciones de espacio, pero intentaré analizar las principales aportaciones gráficas a lo largo de la historia de la Lógica.

Considero que esta historia se puede dividir en tres grandes etapas. Una primera etapa que transcurriría desde Aristóteles hasta comienzos del siglo XVIII. Comenzaremos por las primeras representaciones gráficas, algunas muy simples, emparentadas con las proposiciones categóricas y el silogismo aristotélico. Estudiaremos el llamado "cuadrado de oposición" y algunas representaciones de las figuras silogísticas aristotélicas. Veremos en qué consistía el "pons asinorum". Revisaremos el llamado "Árbol de Porfirio", para terminar esta primera etapa con el análisis de la utilización de los gráficos por parte de Ramón Llull. La segunda etapa transcurriría desde comienzos del siglo XVIII, cuando aparecen los primeros diagramas circulares, con Leibniz, hasta comienzos del siglo XX, cuando fallece Charles Peirce. En esta segunda etapa nos centraremos en las aportaciones de Leibniz, Euler, Venn y Peirce. La tercera etapa abarcaría desde comienzos del siglo XX hasta la actualidad. Haré referencia a los desarrollos gráficos de Karnaugh, para finalizar con las interesantes aportaciones de Barwise y Etchemendi.

2. HISTORIA DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y DIAGRAMÁTICAS EN LÓGICA

2.1. Las primeras representaciones gráficas *(Desde Aristóteles hasta comienzos del siglo XVIII)*

Durante esta etapa de larga duración, una buena parte de las representaciones gráficas que van surgiendo tienen su base conceptual en la lógica aristotélica. Así sucede con el "cuadrado de oposición" que analiza las relaciones entre los distintos tipos de proposiciones categóricas. Los intentos fallidos de representación de las figuras silogísticas también se inspiran en las ideas aristotélicas del silogismo categórico. Por su parte, el "pons asinorum" es una representación que ofrece un método de construcción de silogismos válidos. Como vemos, todas se sustentan en conceptos de la lógica aristotélica. Sin embargo, si bien tienen esa base conceptual común, carecen de una cierta "conexión gráfica" entre ellos. Se podría resumir diciendo que son representaciones conectadas conceptualmente, pero inconexas gráficamente. El llamado "Árbol de Porfirio" se ha relacionado tradicionalmente con la *Isagoge,* un escrito introductorio a las *Categorías* de Aristóteles. De nuevo reaparece esa idea de desconexión gráfica con el resto de representaciones ya referidas, y de una conexión conceptual, algo más lejana esta vez, con Aristóteles. Además de lo mencionado, surgieron otras propuestas como las de Ramón Llull, con intento de valor probatorio, y algo distantes de los conceptos lógicos de Aristóteles. Todo ello lo trataremos a continuación.

2.1.1. El Cuadrado de Oposición.

Si dirigimos la mirada al origen de la lógica en nuestra tradición occidental, es obligado referirse a Aristóteles (384 a.n.e. – 322 a.n.e.). Sus escritos sobre lógica[3] están recogidos bajo el nombre de *Organon*. Entre sus grandes aportaciones a la lógica están el estudio de las proposiciones categóricas, el análisis de las relaciones de oposición y su teoría del silogismo. Sin embargo, los escritos de Aristóteles sobre lógica no contienen diagramas ni representaciones gráficas. Algunos estudiosos del tema han especulado con la idea de que Aristóteles pudiera utilizar algunos conceptos espaciales en sus clases, al explicar el silogismo (Baron, 1969, p.114-115), pero lo cierto es que no hay constancia efectiva de ello. De lo que tenemos constancia es de la utilización, a lo largo de la Edad Media, de representaciones gráficas elementales referidas a conceptos aristotélicos. Una de las más utilizadas es el conocido "**cuadrado de oposición**", cuya versión más difundida la podemos ver en la figura 2. Convendría, por tanto, recordar algunos conceptos e ideas aristotélicos sobre las proposiciones categóricas, base conceptual de este diagrama. De este modo se hará más claro su sentido y utilidad.

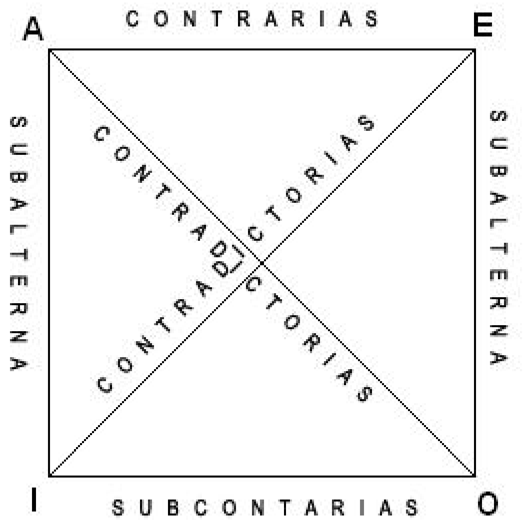


Figura 2
(cuadrado de oposición en su forma más elaborada)

---

3 Curiosamente Aristóteles no emplea el término "lógica"

Uno de los primeros pasos que realiza Aristóteles, en el desarrollo de la lógica, es centrarse en el estudio de los enunciados[4]. Lo realiza principalmente en *Sobre la Interpretación (Peri Hermeneias)* y en los *Analíticos Primeros*[5] (*Analytiká prótera*). De los tipos de enunciados que existen, Aristóteles escoge los enunciados asertivos[6], que consistirían en afirmar o negar algo (predicado) acerca de algo (sujeto). Dado que ***"Necesariamente, todo enunciado asertivo <constará> de un verbo o una inflexión de verbo"*** (Aristóteles, *Sobre la Interpretación,V,10*), el enunciado asertivo tendría la forma: "P se dice o se predica de S", o "P no se dice o no se predica de S". Durante la Edad Media se fue imponiendo la forma "**sujeto (S) + cópula (es) + predicado (P)**", o de manera esquemática "S es P" ("S no es P"). El Sujeto puede ser un individuo o entidad concreta, o bien un concepto o entidad abstracta. En el primer caso tendremos un enunciado o proposición categórica singular y en el segundo caso se tratará de un enunciado o proposición categórica general. Así *"Sócrates es mortal"* sería un ejemplo de enunciado o proposición singular, mientras que *"El hombre es mortal"* sería el caso de una proposición general.

En su análisis, Aristóteles decide prescindir de las proposiciones singulares. Ello se debería a dos razones principalmente (Mosterín, 2006, p.167). Por un lado, a que en las demostraciones silogísticas se requerirá que el sujeto y el predicado sean intercambiables, es decir, que el sujeto pueda hacer de predicado y viceversa, para lo cual ambos deben ser conceptos. Y por otro lado, al hecho de que Aristóteles considere la lógica como un instrumento para el conocimiento científico, lo cual le llevará a interesarse solo por lo universal o general, dejando de lado lo individual. Los individuos carecerían, por tanto, de interés científico y no merecería la pena incorporar los términos singulares al sistema (Vega, 2011c, p.562).

Una vez aclarado su interés por los enunciados generales, pasemos a ver la clasificación que Aristóteles hace de ellos:

---

[4] Como nos recuerda María José Frápolli en *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica*, p.229 (ver referencia completa al final), existen denominaciones alternativas al término "enunciado", como puede ser el de "proposición": ***"las diferencias aparentes entre ellas tienen que ver más con matices […] que con diferencias reales en cuanto a su definición"***. En este trabajo se utilizará indistintamente uno u otro término.

[5] La referencia bibliográfica de las traducciones consultadas de *Sobre la Interpretación* y de *Analíticos Primeros* en el presente trabajo, se encuentran al final, en el apartado de Bibliografía.

[6] El término utilizado por Aristóteles es el de "enunciados apofánticos", que se podría traducir, según Candel por "enunciado declarativo" (Aristóteles, *Sobre la Interpretación,*V, 9).

> ***"Así, pues, la proposición es un enunciado afirmativo o negativo de algo acerca de algo: este enunciado, a su vez, <puede ser> universal o particular o indefinido. Llamo universal a darse en todos o en ninguno, particular a darse en alguno o no darse en alguno o no darse en todos, e indefinido a darse o no darse sin <indicar> lo universal ni lo particular"*** (Aristóteles, *Analíticos Primeros*, I, 24 a 16-20).

Por tanto tendríamos tres tipos de enunciados generales, de acuerdo a la cuantificación (Mosterín, 2006, p.166-167):

(i) Enunciados Universales, como por ejemplo "Todos los hombres son mortales", donde el predicado se aplica a todas las cosas a las que se aplica el sujeto.

(ii) Enunciados Particulares, como por ejemplo "Algunos animales son mamíferos", donde el predicado se aplica a algunas cosas a las que también se aplica el sujeto.

(iii) Enunciados Indefinidos, como por ejemplo "El anciano es sabio", donde el predicado se aplica al sujeto, no quedando claro si se hace de manera universal o particular, pues no se utilizan cuantificadores.

Dada la ambigüedad y falta de precisión de los enunciados indefinidos, Aristóteles propone que sean tratados como enunciados particulares. De este modo, se centrará en el estudio de los enunciados categóricos universales y enunciados categóricos particulares. Si la clasificación basada en la "cantidad" la combinamos con el criterio basado en la "calidad", afirmativa o negativa, tendremos los cuatro tipos de enunciados categóricos ya conocidos:

- **Universales afirmativos**: Siguiendo a Aristóteles, tendrían la forma "P se predica de todo S". En una versión más moderna se expresaría como "Todo S es P".
- **Universales negativos**: cuya formulación aristotélica sería "P no se predica de ningún S", o más modernamente como "Ningún S es P".
- **Particulares afirmativos**: "P se predica de algún S", o "Algún S es P".
- **Particulares negativos**: "P no se predica de algún S", o también "Algún S no es P"

Establecidos los tipos de enunciados, el interés de Aristóteles se dirige al estudio de las relaciones entre ellos. El primer tipo de relación que analiza es la relación de oposición entre enunciados (*"antíthesis"*). Existen dos tipos de oposición: la contradicción (*"antíphasis")* y la contrariedad (*"enantíosis"*).

La contradicción se da i) entre un enunciado universal afirmativo y el correspondiente enunciado particular negativo, y ii) entre un enunciado universal negativo y el correspondiente enunciado particular afirmativo. Siguiendo las formulaciones de los enunciados categóricos tendríamos las siguientes relaciones contradictorias:

i) "Todo S es P" es el contradictorio de "Algún S no es P"
ii) "Algún S no es P" es el contradictorio de "Todo S es P"
iii) "Ningún S es P" es el contradictorio de "Algún S es P"
iv) "Algún S es P" es el contradictorio de "Ningún S es P"

En las relaciones de contradicción, los dos miembros de cada par ("Todo S es P" / "Algún S no es P" por un lado, y "Ningún S es P" / "Algún S es P" por otro), no pueden ser ni verdaderos ni falsos a la vez; es decir, uno de ellos es verdadero si y solo si el otro es falso. Tendremos así lo siguiente:

i) "Todo S es P" es verdadero si y solo si "Algún S no es P" es falso
ii) "Algún S no es P" es verdadero si y solo si "Todo S es P" es falso.
iii) "Ningún S es P" es verdadero si y solo si "Algún S es P" es falso.
iv) "Algún S es P" es verdadero si y solo si "Ningún S es P" es falso.

Por lo que se refiere a la contrariedad, ésta se produce entre un enunciado universal afirmativo y su correspondiente enunciado universal negativo. De acuerdo con esto:

i) "Todo S es P" es el contrario de "Ningún S es P"
ii) "Ningún S es P" es el contrario de "Todo S es P"

Dos proposiciones contrarias no pueden ser ambas verdaderas, pero sí pueden ser ambas falsas. Si una es verdadera, la otra es falsa, pero no a la inversa. Es decir:

i) Si "Todo S es P" es verdadero, entonces "Ningún S es P" es falso
ii) Si "Ningún S es P" es verdadero, entonces "Todo S es P" es falso
iii) Si "Todo S es P" es falso, "Ningún S es P" puede ser tanto verdadero como falso
iv) Si "Ningún S es P" es falso, "Todo S es P" puede ser tanto verdadero como falso.

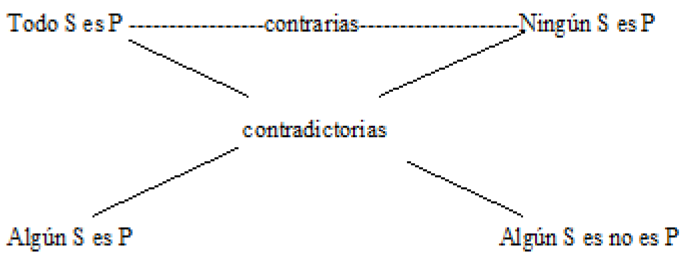


Figura 3
(Representación gráfica actual basada en las relaciones de contrariedad y contradicción propuestas por Aristóteles)

Estas relaciones de oposición propuestas por Aristóteles podrían representarse según se puede ver claramente en la figura 3 (Parsons, 2008, p.4) [7]. Si Aristóteles hubiera utilizado algún tipo de representación diagramática, posiblemente habría sido algo similar a la figura 3. Sin embargo, recordemos que Aristóteles no utilizó representaciones gráficas de este tipo en sus escritos. Ni la figura 2 ni la figura 3 son obra del Estagirita. La figura 3 es una recreación actual de los conceptos aristotélicos de oposición entre proposiciones categóricas. La figura 2 fue una figura ampliamente utilizada durante la Edad Media, y cuya autoría ha sido fuente de controversias. Sin embargo, fijémonos como ambas figuras tienen algunos elementos en común. Precisamente, aquellos referidos a las relaciones de oposición aristotélicas (contrariedad y contradicción). En la figura 2 aparecen dos relaciones adicionales, la subalternación y la subcontrariedad, añadidas por el autor del cuadrado. Más adelante las analizaremos. Por el momento, nos referiremos al autor material del famoso "cuadrado". Una línea de investigación apunta a que fue Apuleyo (123-5 / c.180) el primero en realizarlo. Seguramente más conocido por su novela *El asno de oro*, es en su escrito *Peri Hermeneias*[8] donde Apuleyo introdujo el cuadrado que nos ocupa. Así nos lo comentan David Londey y Carmen Johanson en su monografía *The logic of Apuleius* (1987, Apéndice B, p.109), a la vez que nos proporcionan el cuadrado dibujado por Apuleyo (ver figuras 4 y 5). Es un tema controvertido, el de la autoría, ya que por otro lado estudiosos como Jean Beaujeu consideran dicha obra, *Peri Hermenias*, como apócrifa, comentando al respecto: ***"la pobreza de contenido y, sobre todo, de notables particularidades del lenguaje, impiden atribuir este texto a Apuleyo"*** (J. Beaujeu, 1973, Introd., p.VII) [9]

[7] Gráfico presentado por Parsons y que reproducimos con alguna modificación no esencial.
[8] No confundir con *Peri Hermeneias* de Aristóteles
[9] Texto original: "la pauvreté du contenu et surtout de notables particularités de langue interdisent d'attribuer ce texte à Apulée » (traducido por el autor de este trabajo)

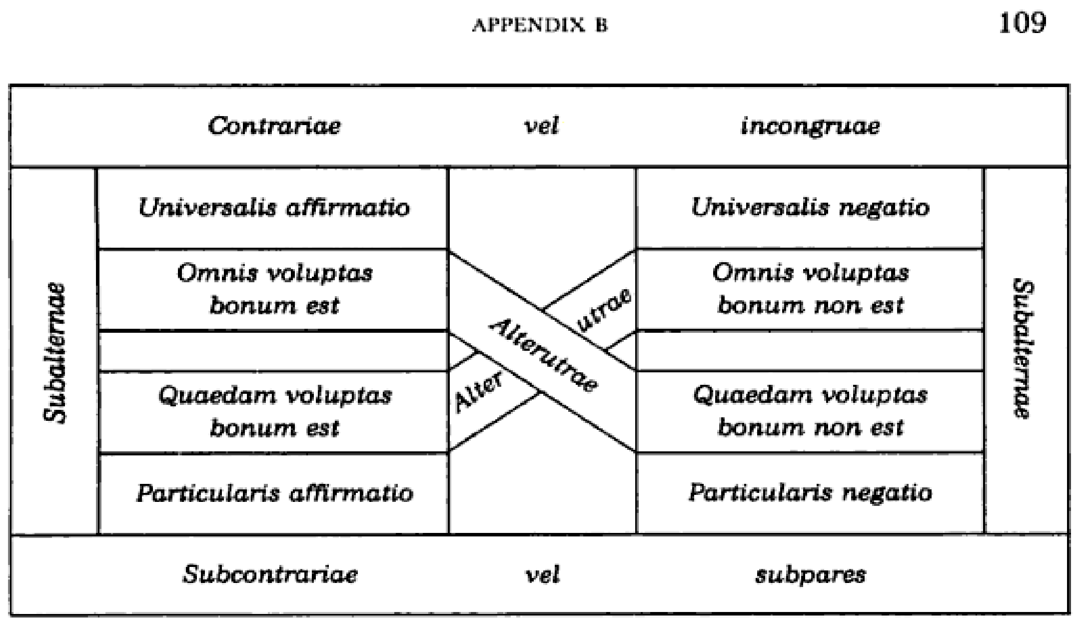


Figura 4(cuadrado de oposición –versión de Apuleyo-)

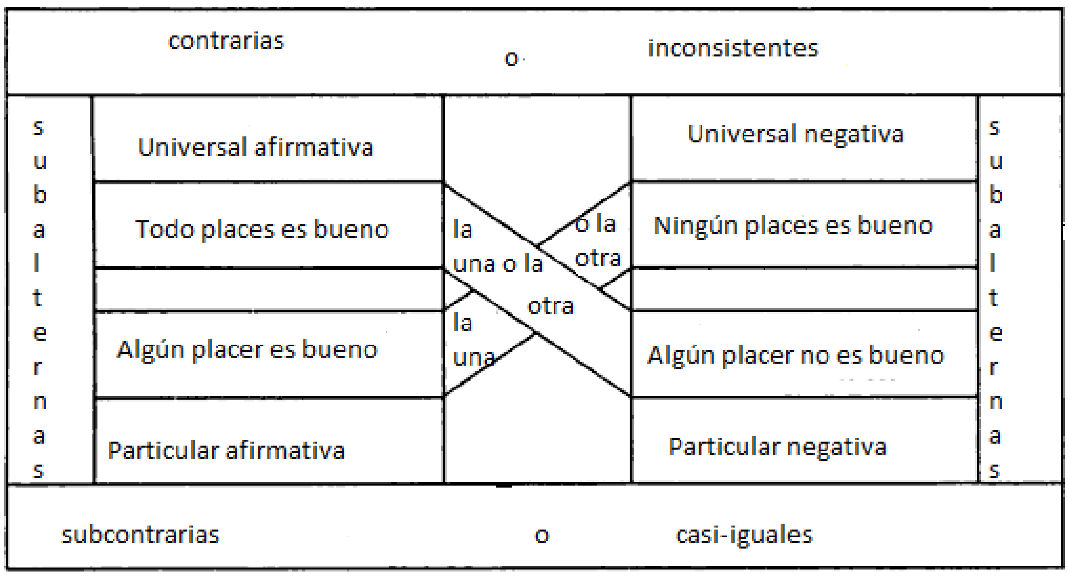


Figura 5 (cuadrado de la Figura 4, traducido)

Fijémonos en algunas particularidades del gráfico atribuido a Apuleyo (Figuras 4 y 5). En primer lugar observamos el uso que hace del término “alterutrae”[10] para la relación de contradicción. Para la relación de contrariedad utiliza “Contrariae vel[11] incongruae” (contrarias o inconsistentes). Aparte de estos dos tipos de oposiciones, que son los que describe Aristóteles, en el cuadrado de Apuleyo aparecen, como se

[10] Término latino cuya traducción podría ser “una de las dos” o “la una o la otra”
[11] “vel” (latín) se correspondería con la “o” inclusiva, en contraste con “aut”(latín), que sería la “o” exclusiva

comentaba más arriba, otros dos tipos de relaciones de oposición: la “Subcontrariedad” y la “Subalternación”. La subcontrariedad (“subpares”[12], según la terminología de Apuleyo) se da entre los enunciados particulares. Ambos pueden ser verdaderos, pero no pueden ser ambos falsos. Así tendríamos que:

i) Si “Algún S es P” es falso, entonces “Algún S no es P” es verdadero
ii) Si “Algún S es P” es verdadero, “Algún S no es P” puede ser o bien verdadero o bien falso
iii) Si “Algún S no es P” es falso, entonces “Algún S es P” es verdadero
iv) Si “Algún S no es P” es verdadero, entonces “Algún S es P” puede ser verdadero o falso.

En cuanto a la “Subalternación”[13], ésta se produce entre los enunciados universales y particulares de la misma cualidad. De este modo:

i) “Algún S es P” es la subalterna de “Todo S es P”
ii) “Algún S no es P” es la subalterna de “Ningún S es P”

Si la universal es verdadera, la correspondiente particular también lo es, pero esto no se da a la inversa. Por otro lado, si la particular es falsa, la universal correspondiente también lo es. Es decir, tendríamos:

i) Si “Todo S es P” es verdadero, entonces “Algún S es P” es verdadero
ii) Si “Todo S es P” es falso, “Algún S es P” podría ser verdadero o falso
iii) Si “Algún S es P” es verdadero, “Todo S es P” podría ser verdadero o falso
iv) Si “Algún S es P” es falso, entonces “Todo S es P” es falso.
v) Si “Ningún S es P” es verdadero, entonces “Algún S no es P” es verdadero
vi) Si “Ningún S es P” es falso, “Algún S no es P” podría ser verdadero o falso
vii) Si “Algún S no es P” es verdadero, “Ningún S es P” podría ser verdadero o falso
viii) Si “Algún S no es P” es falso”, entonces “Ningún S es P” es falso.

En la subalternación los dos miembros pueden llegar a ser ambos verdaderos o ambos falsos, con lo cual no se trataría estrictamente hablando de una relación de oposición (Vega, 2011a, p.143). Incluso hay autores que consideran que la relación de subcontrariedad tampoco sería una auténtica oposición entre proposiciones. De esta forma advierten que el “cuadrado de oposición” puede tender a cierta confusión,

[12] “subpares” se podría traducir por “casi-iguales”

[13] El término que aparece en el cuadrado de la figura 4 es “subalternae” . Curiosamente, nos señalan Londey y Johanson, que Apuleyo, si bien analiza este tipo de relación entre las universales y sus particulares, realmente no utiliza ningún término en concreto para designar este tipo de relación.

precisamente por la inclusión de la subalternación y la subcontrariedad (Parsons, 2008, nota 1, p.4).

Como vemos, el cuadrado que proporcionó Apuleyo sienta las bases de la figura que ha llegado hasta nuestros días (figura 2). Es cierto que a lo largo de los siglos se fueron produciendo algunos cambios, sobre todo referidos a la terminología. De esta forma, Pedro Hispano (siglo XIII) nos muestra el cuadrado de oposición una vez eliminados algunos términos utilizados por Apuleyo, quedando como se puede ver en las figuras 6 y 7. (Petrus Hispanus, p.14)

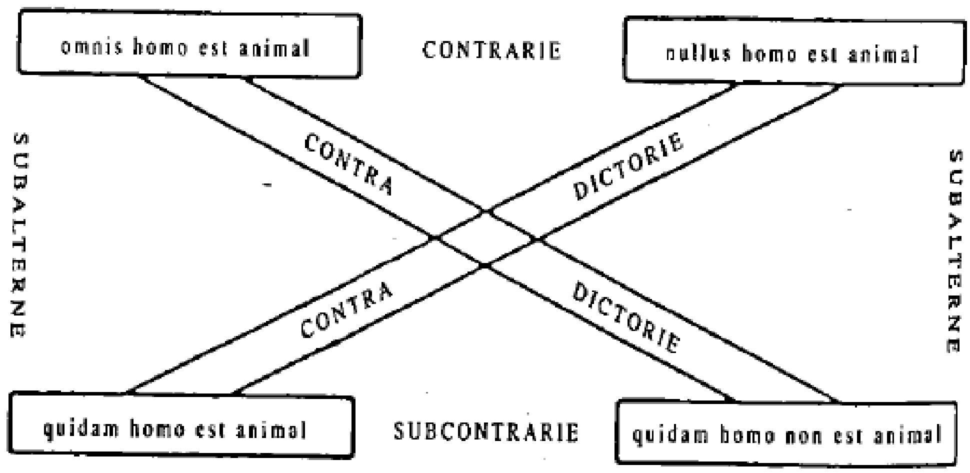


Figura 6 (Cuadrado de Oposición – versión de Pedro Hispano-)

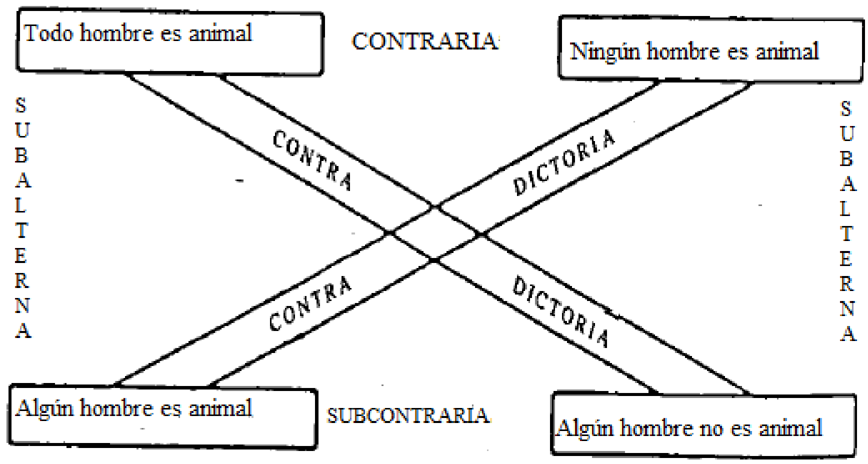


Figura 7
(traducción del cuadrado de la figura 6)

El último cambio notable en el cuadrado de oposición, que se produjo durante la Edad Media, está relacionado con la simbolización que se impuso para designar las proposiciones categóricas. De tal modo que cada tipo de proposición categórica se designó del siguiente modo: “A” para la Universal Afirmativa, “E” para la Universal Negativa, “I” para la Particular Afirmativa y “O” para la Particular Negativa. Así que en el cuadrado, dichas letras se situaron en sus vértices, sustituyendo tanto a las proposiciones que servían como ejemplos, como a los términos descriptivos de cada tipo de proposición. El cuadrado definitivo es el que hemos visto más arriba en la figura 2, que recoge las relaciones de contradicción (A-O, E-I), contrariedad (A-E), la subcontrariedad (I-O) y las relaciones de subalternación (A-I, E-O).

Estas relaciones de oposición constituyen lo que tradicionalmente se ha conocido como la doctrina de la oposición, que junto, principalmente, con las doctrinas de la conversión y de la obversión constituirían la llamada Teoría de la Inferencia Inmediata[14]. Una inferencia inmediata consiste en un razonamiento simple en el que se obtiene una conclusión a partir de una única premisa. El cuadrado de oposición serviría, por tanto, no solo para reflejar las distintas oposiciones entre las proposiciones categóricas, sino también como instrumento gráfico para realizar dichas inferencias inmediatas. En concreto, el cuadrado de oposición nos proporciona dieciséis inferencias inmediatas válidas. No las relataremos todas ellas para no ser reiterativos, pues basta con acudir a la descripción que hemos hecho de las diferentes relaciones de oposición y escoger aquellas inferencias cuyo resultado sea una conclusión verdadera o falsa. Por ejemplo, en el caso de la contradicción, podemos afirmar que si “Todo S es P” es verdadero, entonces “Algún S no es P” es falso. Esto sería una inferencia inmediata basada en una relación de oposición (en concreto, una oposición por contradicción). Podremos obtener ocho inferencias inmediatas a partir de las relaciones de oposición por contradicción. En cuanto a las relaciones de contrariedad dan lugar a dos inferencias inmediatas válidas. Por ejemplo, <si “Todo S es P” es verdadero, entonces “Ningún S es P” es falso>, sería un ejemplo de inferencia inmediata basada en la oposición por contrariedad. Las relaciones de subcontrariedad dan lugar a dos inferencias inmediatas (e.g. Si “Algún S es P” es falso, entonces “Algún S no es P” es verdadero), y las relaciones de subalternación dan lugar a cuatro inferencias inmediatas válidas, como por

[14] Aunque éstas serían, siguiendo a Garrido (1981, p.155), las principales formas de inferencia inmediata, Ferrater Mora recoge alguna más. Por otro lado, el propio Ferrater Mora nos llega a recordar que el término de “inferencia inmediata” resulta equívoco para algunos autores, “pues no hay, propiamente hablando, inferencias inmediatas” (Ferrater Mora, 1975, p.945). Como vemos, es un tema abierto a la polémica, pero que sobrepasa los límites del presente trabajo.

ejemplo, a partir de que "Algún S no es P" sea falso, inferir que "Ningún S es P" es falso.

Brevemente comentaré que la conversión consiste en invertir los términos de una proposición categórica manteniendo el valor de verdad de la misma. Sin embargo, no disponemos de un cuadrado de conversión, al contrario de lo que sucede con la oposición. Habría tres tipos de conversión. La llamada conversión simple, en la cual se permutan los términos de una proposición, pero no se cambia ni la cantidad ni la cualidad. Un ejemplo de conversión simple sería pasar de "Ningún S es P" a "Ningún P es S". En segundo lugar estaría la conversión accidental, en la cual se pasa de una proposición universal a su correspondiente particular, a la vez que se permutan los términos. Por ejemplo, una conversión accidental sería transformar "Todo S es P" en "Algún P es S". El último tipo de conversión sería la conversión por contraposición, en la cual se permutan los términos (como en el resto de conversiones), y además se antepone a cada término convertido una partícula negativa. Por ejemplo, si a la proposición "Todo S es P", se la aplica la conversión por contraposición, obtendríamos "Todo no P es no S".

La obversión consiste en cambiar la cualidad de la proposición y negar el predicado, conservando el valor de verdad. Por ejemplo, la obversa de "Todo S es P" es "Ningún S es no P". El término "obversión" fue propuesto por Alexander Bain, y no se trataría propiamente de una conversión, puesto que no hay inversión de términos.

También es interesante observar cómo se dan otro tipo de relaciones entre proposiciones categóricas para las cuales el cuadrado de oposición puede llegar a ser útil. Me refiero a las relaciones de equivalencia. Una relación de equivalencia regula la transformación de dos proposiciones opuestas en equivalentes, mediante el uso de la negación. El siguiente párrafo nos muestra de forma clara la utilidad del cuadrado de oposición al respecto:

> ***"dos contradictorias devienen equivalentes mediante la anteposición de la negación: p.e. la proposición "Todo S es P" se torna equivalente a su contradictoria "Algún S no es P", bajo la forma "No es el caso de que todo S sea P"*** (Vega, 2011b, p.434)

Aparte de estas aplicaciones del cuadrado de oposición, algunos autores de la Edad Media pensaron en la posibilidad de su utilización con las proposiciones modales. En principio se conservaron las cuatro letras, A, E, I, O, ya utilizadas para las proposiciones categóricas, pero con el siguiente significado: A para "Necesario", E para

"Imposible", I para "Posible afirmativa", y O para "Posible negativa". El cuadrado correspondiente quedaría así:

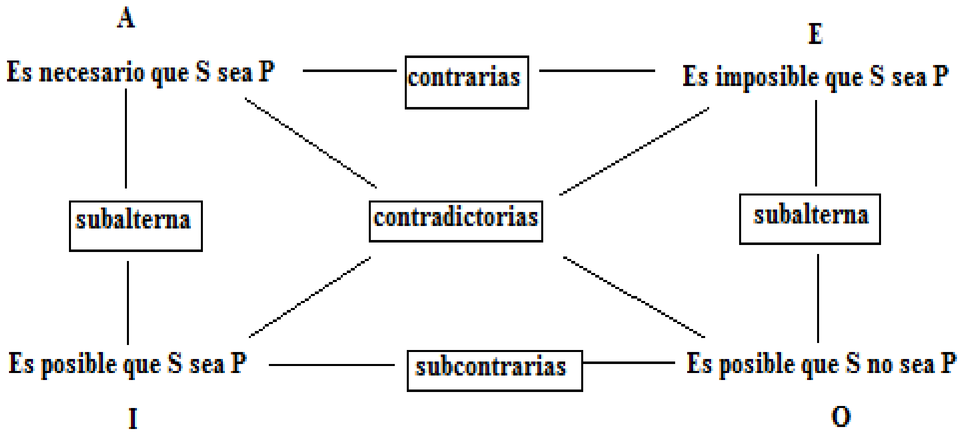


Figura 8
(cuadrado de oposición para proposiciones modales)

Como se puede observar, se conservan las mismas relaciones de oposición que en el caso de las proposiciones categóricas.

En base a lo anterior, fueron surgiendo planteamientos donde se combinaban la cuantificación (Universal/Particular), la cualidad (Afirmativa/Negativa) y la modalidad (Necesario/Posible). Las combinaciones resultantes daban un total de ocho proposiciones modales cuantificadas, cuyas relaciones de oposición se reflejaron en el octágono modal (figura 9) (Lagerlund, 2010).

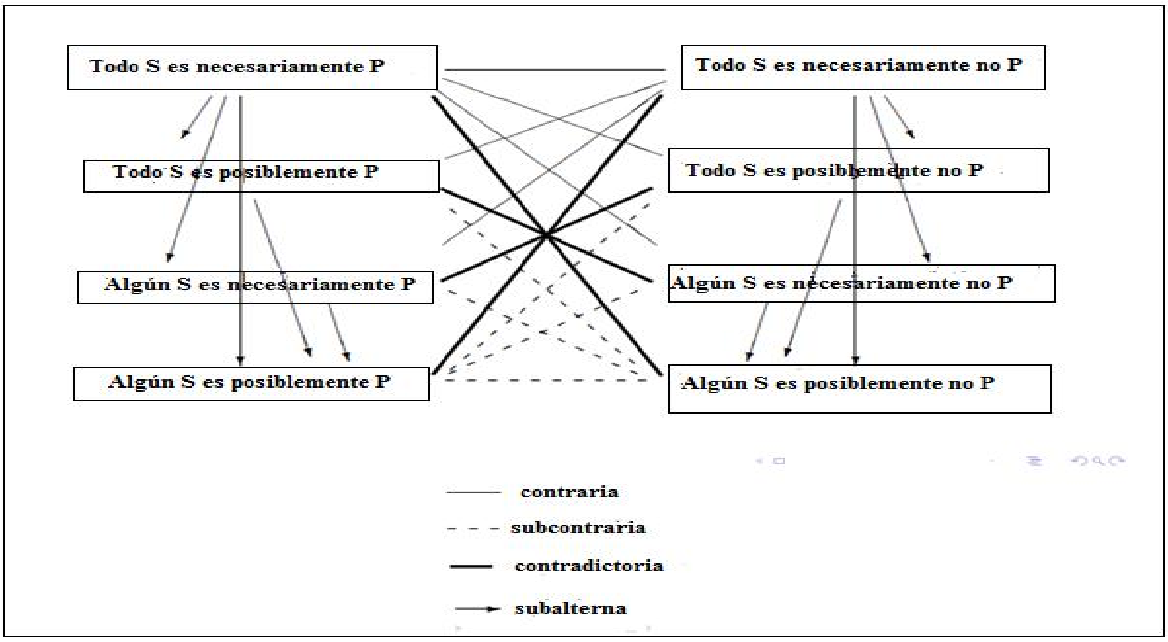


Figura 9
(octágono modal)

Jean Buridan (c.1300-1358) fue uno de los filósofos que más indagó en esta dirección, pero no se contentó solo con atenerse a las proposiciones modales cuantificadas que hemos visto reflejadas en la figura 9. En el estudio de las relaciones de oposición quiso incluir también otros dos tipos más de proposiciones. Por un lado, las proposiciones con términos oblicuos del tipo "De todo hombre todo asno corre" [15]. Y por otro lado, también incluyó en su análisis las proposiciones con predicado cuantificado, del tipo "Algún hombre algún animal es"[16]. Esta es la ampliación realizada por Buridan, y que vemos reflejada en la figura 10.

[15] Los términos oblicuos son utilizados para realizar una restricción. Así, si a la proposición "Todo asno corre", le añadimos el caso oblicuo "De Juan", tendremos "De Juan todo asno corre", donde el predicado ("corre") se aplica solo a los asnos de Juan. Esto es lo que se entiende como proposición con término oblicuo.

[16] La construcción de este tipo de proposiciones es poco usual. En la Edad Media, la cuantificación del predicado se relaciona con la manera de entender la cópula "es". Para un más amplio análisis de la cuantificación del predicado y su relación con el octágono modal, se puede acudir a CAMPOS BENITEZ, Juan Manuel: *El Octagon Medieval de Oposición y Equivalencia: Tres Aplicaciones.*(p.138-139). En Revista Española de Filosofía Medieval, 17 (2010), pp.129-141

	Proposiciones modales cuantificadas	**Proposiciones con término oblicuo**	**Proposiciones con predicado cuantificado**
1	Todo hombre necesariamente corre	De todo hombre todo asno corre	Todo hombre todo corredor es
2	Algún hombre necesariamente corre	De algún hombre todo asno corre	Algún hombre todo corredor es
3	Todo hombre necesariamente no corre	De todo hombre todo asno no corre	Todo hombre todo corredor no es
4	Algún hombre necesariamente no corre	De algún hombre todo asno no corre	Algún hombre todo corredor no es
5	Todo hombre posiblemente corre	De todo hombre algún asno corre	Todo hombre algún corredor es
6	Algún hombre posiblemente corre	De algún hombre algún asno corre	Algún hombre algún corredor es
7	Todo hombre posiblemente no corre	De todo hombre algún asno no corre	Todo hombre algún corredor no es
8	Algún hombre posiblemente no corre	De algún hombre algún asno no corre	Algún hombre algún corredor no es

Figura 10
(En las tres columnas se recogen los tres tipos de proposiciones estudiadas por Buridan)

Las relaciones de oposición entre las proposiciones del cuadro de la figura 10 aparecen recogidas, de forma esquemática, en la representación gráfica de la figura 11. Es el octágono propuesto por Buridan o como él lo llamó, la Magna Figura[17].

[17] Las figuras 10 a 13 están tomadas (con las modificaciones y traducciones adecuadas) de *Summulae de dialéctica* de Buridan (ver la referencia completa al final), de las páginas 44 y 45. El traductor de dicha obra, Gyula Klima, en una nota al pie (p.45) nos aclara que los diagramas presentados son una reconstrucción que facilitan la comprensión de las ideas de Buridan. Asimismo, nos comenta el traductor que en sus manuscritos Buridan presentó diagramas separados para los tres tipos de proposiciones. Como ejemplo, exponemos algunos de estos diagramas (figuras 16 y 17) tomados de la obra de BURIDAN (1499): *Perutile compendium totius logice* p.[46] (ver referencia completa al final).

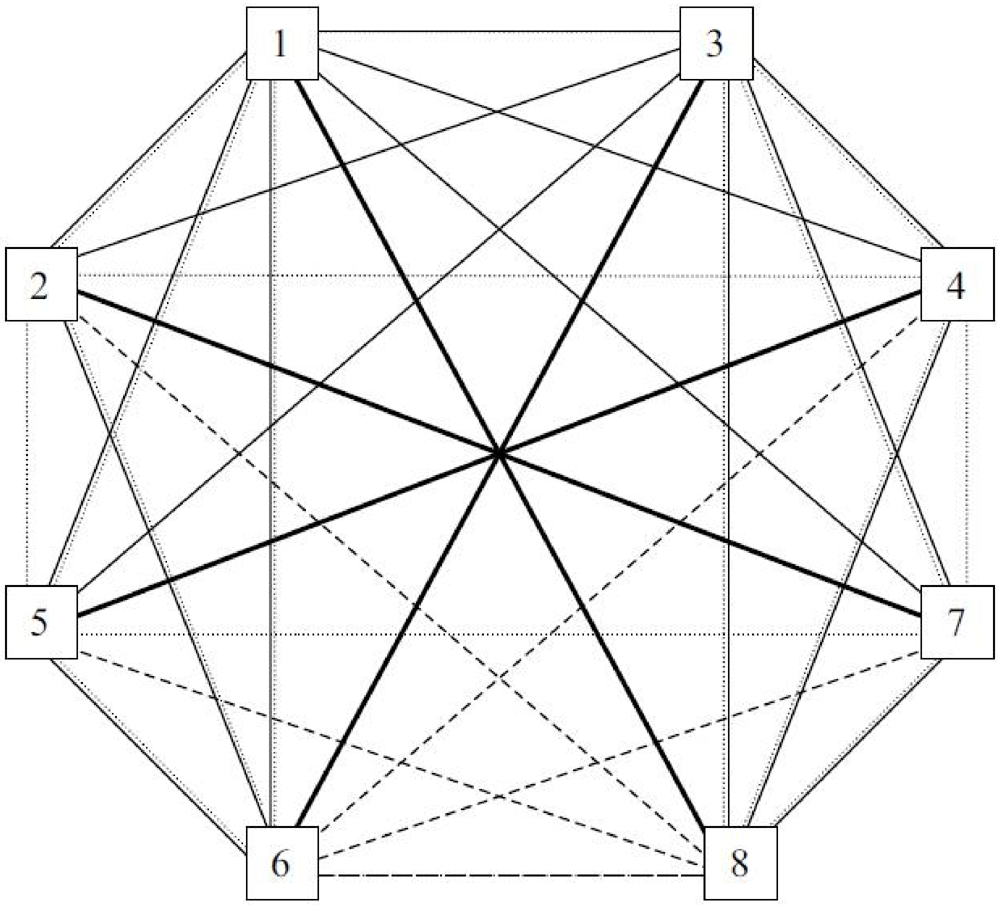


Figura 11
(Esquema de la Magna Figura, de Buridan)

Observemos como cada vértice de la Magna Figura (fig.11) está numerado. Dicha numeración se corresponde con las proposiciones recogidas en la tabla de la figura 10. Así, por ejemplo, el vértice "1" incluiría las proposiciones "Todo hombre necesariamente corre", "De todo hombre todo asno corre" y "Todo hombre todo corredor es". También podemos observar como cada vértice está unido con los otros vértices por distintos tipos de líneas según la relación de oposición de que se trate. De esta forma, en la figura 12, se resumen dichas líneas con el nombre correspondiente de la relación de oposición.

1.							
sa	2.						
cr	cr	3.					
cr	dp	sa	4.				
sa	dp	cr	cd	5.			
sa	sa	cd	sc	sa	6.		
cr	cd	sa	dp	dp	sc	7.	
cd	sc	sa	sa	sc	sc	sa	8.

cd = contradictorias

cr = contrarias

sc = subcontrarias

sa = subalternas

dp = separadas o independientes ("dp" abreviado del latín "disparatae")

Figura 12
(cuaro-resumen de las relaciones de oposición reflejadas en la Magna Figura –fig.11-)

En la figura 13 se recogen, de forma resumida, las relaciones de oposición que ya se ven representadas en las figuras 11 y 12. Se ha incluido una columna con el significado de cada relación de oposición expresados en notación simbólica[18] (las letras p y q serían los números del 1 al 8).

cd (p,q)	Contradictoras	$(p \leftrightarrow \sim q)$ □ $(q \leftrightarrow \sim p)$	(1,8); (2,7); (3,6); (4,5)
cr (p,q)	Contrarias	$(p \rightarrow \sim q)$ □ $(q \rightarrow \sim p)$	(1,3); (1,4); (1,7); (2,3); (3,5)
sc (p,q)	Subcontrarias	$(\sim p \rightarrow q)$ □ $(\sim q \rightarrow p)$	(8,6); (8,5); (8,2); (6,7); (6,4)
sa (p,q)	Subalternas	$p \rightarrow q$	(1,2); (1,5); (1,6); (2,6); (3,4); (3,7); (3,8); (4,8); (5,6); (7,8)
dp (p,q)	Separadas o Independientes	$\sim(p \leftrightarrow \sim q)$ □ $\sim(q \leftrightarrow \sim p)$	(2,4); (2,5); (4,7); (5,7)

Figura 13
(cuadro resumen de las relaciones de oposición de la Magna Figura, con su significado en notación simbólica)

Veamos un ejemplo clarificador de todo esto. Empecemos con un par de proposiciones que aparecen en la figura 10. Escojamos dos proposiciones modales cuantificadas, como "Todo hombre necesariamente corre" (1) y "Todo hombre necesariamente no corre" (3). Si acudimos al octágono de la figura 11, vemos que están unidas por una línea. A continuación, en la figura 14, señalaremos con un círculo los números 1 y 3, correspondientes a las proposiciones del ejemplo. Así, veremos más fácilmente el tipo de relación entre ellas. Fijémonos donde se intersectan las filas y columnas correspondientes, es decir, la fila 1 con la columna 3, y la fila 3 con la columna 1 (ver figura 15).

[18] Esta notación simbólica la ha incluido el traductor, con la intención de expresar de manera precisa cada tipo de oposición. Por ello, decido incluirla también, con alguna modificación necesaria debido a ciertas inexactitudes de dichas expresiones simbólicas por parte del propio traductor.

1.							
sa	2.						
cr	cr	3.					
cr	dp	sa	4.				
sa	dp	cr	cd	5.			
sa	sa	cd	sc	sa	6.		
cr	cd	sa	dp	dp	sc	7.	
cd	sc	sa	sa	sc	sc	sa	8.

Figura 14
Ejemplo práctico (parte 1) de las relaciones de oposición según Buridan

1.							
sa	2.						
cr	cr	3.					
cr	dp	sa	4.				
sa	dp	cr	cd	5.			
sa	sa	cd	sc	sa	6.		
cr	cd	sa	dp	dp	sc	7.	
cd	sc	sa	sa	sc	sc	sa	8.

Figura 15
Ejemplo práctico (parte 2) de las relaciones de oposición según Buridan

La relación obtenida viene simbolizada por las letras “cr”, a la vez que confirmamos el tipo de línea que nos aparecía en la Magna Figura. Acudiendo al cuadro de la figura 13 vemos que se trata de que ambas proposiciones son contrarias. El significado expresado simbólicamente es ($p \rightarrow \sim q$) □ ($q \rightarrow \sim p$). Sustituyendo las letras p y q, por los números de las proposiciones 1 y 3, tendríamos (“1”→ ~ “3”) □ (“3”→ ~”1”). Ahora sustituimos los números por sus correspondientes significados, y tendríamos que si “Todo hombre necesariamente corre” es verdadero, entonces es falso que “Todo hombre necesariamente no corre”, y si “Todo hombre necesariamente no corre” es verdadero, entonces “Todo hombre necesariamente corre” es falso.

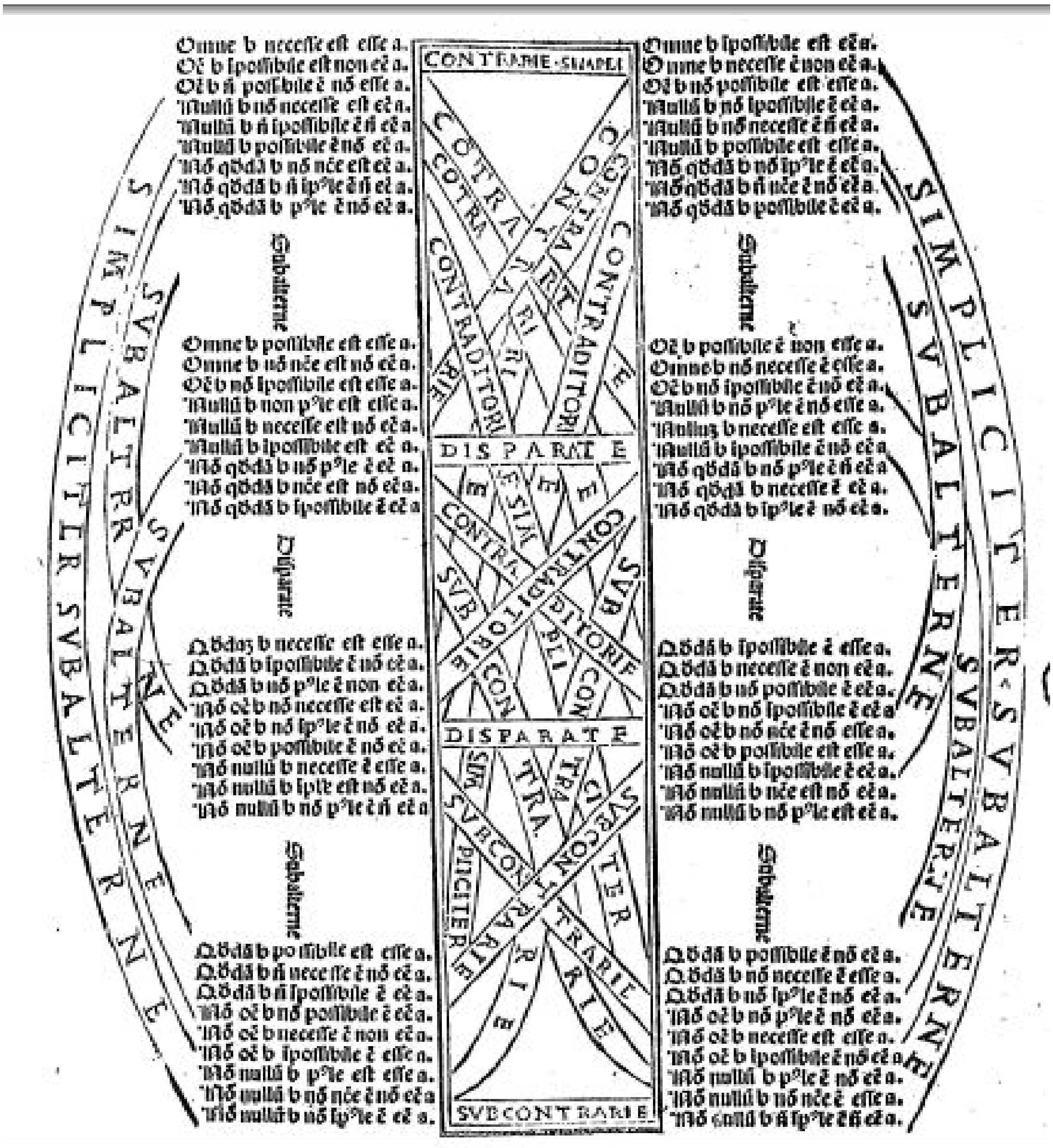


Figura 16
(la Magna Figura de Buridan tomada de
“Perutile compendium totius logice” p[46])

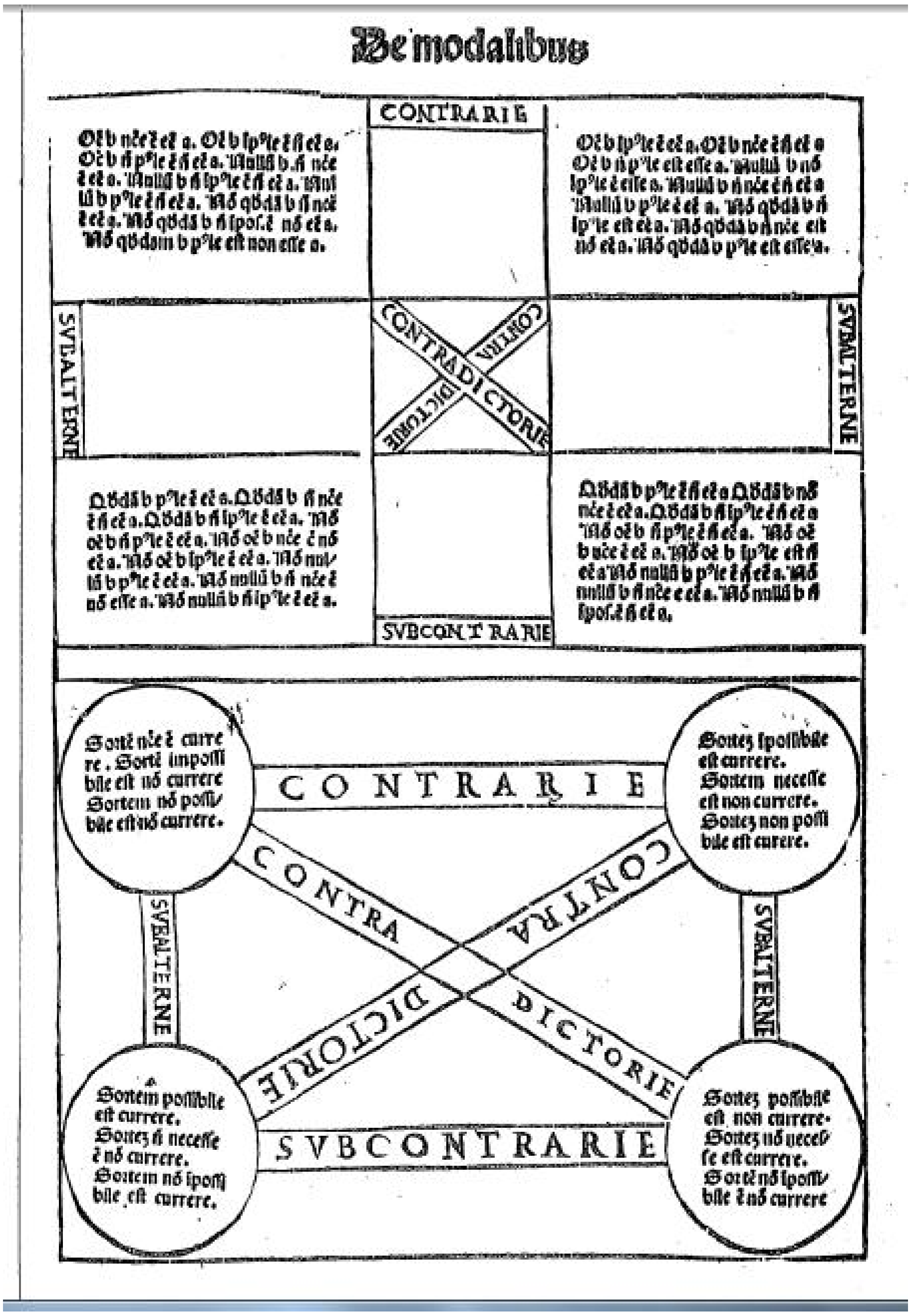


Figura 17
(Cuadrados de oposición, propuestos por Buridan en
"Perutile compendium totius logice", p[47])

Hasta aquí se han expuesto los principales desarrollos del cuadrado de oposición que tuvieron lugar principalmente en la Edad Media. Por lo que respecta al valor actual del "cuadrado de oposición", y las relaciones reflejadas en él, se podría decir que la relación de contrariedad se ha ido dejando de lado, mientras que seguiría vigente el interés por la relación de contradicción, tanto en contextos deductivos como argumentativos, si bien entendiendo la contradicción en su sentido de conjunción de una proposición y su negación (Vega, 2011a, 144). El "cuadrado de oposición" sigue atrayendo la atención de los estudiosos e investigadores, como lo prueba el hecho de la publicación, en la actualidad, de artículos e investigaciones sobre el tema[19]. Por ejemplo, Jan Wolenski (2008) nos ha mostrado las posibilidades del cuadrado de oposición para obtener hexágonos y octágonos lógicos, con una visión modernizada. Bernhard (2008) ha estudiado las diferentes correspondencias entre el cuadrado de la oposición y otras formas diagramáticas. Por su parte Staschok (2008) ha indagado sobre las posibilidades de los cuadrados no-tradicionales para la predicación y la cuantificación. Pizzi (2008) se ha centrado en la posibilidad de construcción de "cubos aristotélicos", tomando como base la idea del cuadrado de oposición. Todos ellos son algunos ejemplos de que el famoso cuadrado de oposición no es una mera reliquia lógica, sino una representación que ha servido de punto de partida para desarrollos más elaborados en la actualidad.

2.1.2. El Silogismo Categórico

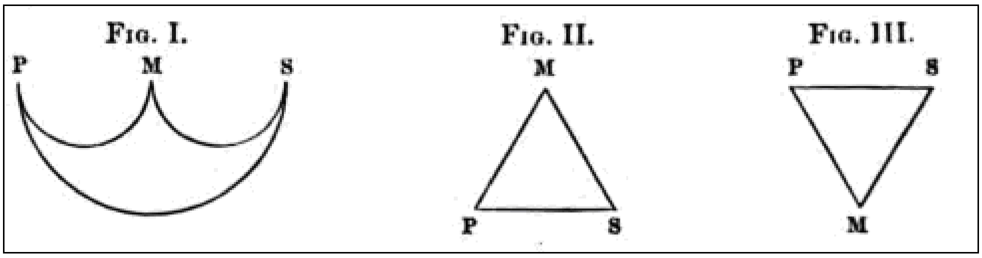


Figura 18
(Representaciones de las tres figuras aristotélicas del silogismo categórico)

Las representaciones gráficas de la figura18 se corresponden con las tres figuras del silogismo categórico propuestas por Aristóteles. Éste no es el autor de dichas representaciones, pues como ya comentamos más arriba, no utilizó este tipo de elementos representativos en sus obras. Al igual que ocurría con el cuadrado de oposición, también existe una cierta controversia sobre los diagramas representativos del silogismo categórico. Convendría, por tanto, ir por partes y aclarar algunas cuestiones elementales. Por ejemplo, ¿Qué entendía Aristóteles por silogismo?; ¿Qué es un silogismo categórico?; ¿Quién es el autor de dichas representaciones gráficas? ¿Qué valor y utilidad tienen estas representaciones? Intentaré responder a estas cuestiones de la forma más clara posible.

[19] Sirviendo de ejemplo, la revista Lógica Universalis dedicó el número 2 (2008), enteramente al Cuadrado de Oposición.

Aristóteles nos proporciona tres acepciones de “silogismo” (*syllogismós*). En un sentido más general, sería sinónimo de razonamiento, deducción o inferencia. Habría también una segunda acepción, más precisa, que entiende el silogismo como una deducción lógicamente válida:

> ***“Y el razonamiento es un enunciado en el que, sentadas ciertas cosas, se sigue necesariamente algo distinto de lo ya establecido por el <simple hecho de> darse esas cosas. Llamo por el <simple hecho de> darse esas cosas al <hecho de que aquello> se sigue en virtud de esas cosas, y llamo el <hecho de que aquello> se siga en virtud de esas cosas al <hecho de> que no se precise de ningún término ajeno para que se dé necesariamente <la conclusión>”*** (Aristóteles, Analíticos Primeros, I, 24b 18)

Por último, tendríamos una tercera acepción, más técnica, según la cual un silogismo es un tipo especial de deducción válida, que consta de tres proposiciones (dos premisas y una conclusión). Cuando las proposiciones son categóricas, el silogismo recibe el nombre de silogismo categórico. Pero las características de un silogismo categórico no se restringen solo a la conjunción o reunión de tres proposiciones categóricas. De forma esquemática, caracterizaremos al silogismo categórico de la siguiente manera:

i) Un silogismo categórico está compuesto por tres proposiciones categóricas. Dos de dichas proposiciones serán las premisas y la tercera proposición será la conclusión.

ii) La conclusión es una deducción válida a partir de las dos premisas.

iii) En un silogismo categórico aparecen tres términos generales no vacíos, y sólo tres términos, a los que denominaremos Término Mayor, Término Medio y Término Menor.

iv) La conclusión constará de dos términos, sujeto (S) y predicado (P). El sujeto de la conclusión será el Término Menor del silogismo; y el predicado de la conclusión será el Término Mayor del silogismo.

v) Una de las premisas, a la que llamaremos Premisa Menor, constará de dos términos generales: Un término será el Término Menor, y el otro término, será el Término Medio (M).

vi) La otra premisa, a la que llamaremos Premisa Mayor, constará de dos términos generales. Un término será el Término Mayor, y el otro será el Término Medio.

vii) En las premisas, tanto en la menor como en la mayor, el Término Medio podrá ser el sujeto o el predicado de dichas proposiciones. El papel que juegue el Término Menor en la Premisa Menor, dependerá de que el Término Medio sea sujeto o predicado. Asimismo, el papel que tenga en la Premisa Mayor el Término Mayor, dependerá de que el Término Medio sea sujeto o predicado. Sin embargo, no todas las combinaciones posibles son válidas para Aristóteles. Para él, solamente son lógicamente válidas las siguientes:

1) En la premisa mayor, el Término Medio (M) será el sujeto y el Término Mayor (P) será el predicado. En la premisa menor, el Término Medio (M) será el predicado, y el Término Menor (S) será el sujeto. Esta combinación se conoce como Primera figura del Silogismo Categórico, y se podría esquematizar así:

   Premisa mayor: M – P
   Premisa menor: S – M
   Conclusión: S – P

2) En la premisa mayor, el Término Medio (M) será el predicado y el Término Mayor (P) será el sujeto. En la premisa menor, el Término Medio (M) será el predicado, y el Término Menor (S) será el sujeto. Esta combinación se conoce como Segunda figura del Silogismo Categórico, y se podría esquematizar así:

   Premisa mayor: P – M
   Premisa menor: S – M
   Conclusión: S – P

3) En la premisa mayor, el Término Medio (M) será el sujeto y el Término Mayor (P) será el predicado. En la premisa menor, el Término Medio (M) será el sujeto, y el Término Menor (S) será el predicado. Esta combinación se conoce como Tercera figura del Silogismo Categórico, y se podría esquematizar así:

   Premisa mayor: M – P
   Premisa menor: M – S
   Conclusión: S – P

viii) Las tres proposiciones que forman un silogismo categórico, por el hecho de ser categóricas, serán de la forma Universal Afirmativa, Universal Negativa, Particular Afirmativa o Particular Negativa. Sin embargo, no todas las combinaciones posibles son válidas. Ello dependerá de la figura que sea. Así tendremos que para la primera figura, las combinaciones válidas serán AA/A (es decir, que la premisa mayor sea del tipo A –Universal afirmativa-, la menor del tipo A – Universal afirmativa-, y la conclusión sea del tipo A –Universal afirmativa-); EA/E; AI/I; EI/O. Para la segunda figura, las combinaciones válidas serán: EA/E; AE/E; EI/O; AO/O. Para la tercera figura, serán válidas: AA/I; IA/I; AI/I; EA/O; OA/O; EI/O. Un ejemplo de la primera figura, de la forma AA/A, sería "Todo B es C, todo A es B, luego todo A es C".

Podríamos seguir profundizando en el estudio del silogismo categórico, pero lo dejaremos para más adelante, cuando hablemos del "pons asinorum". Por ahora es suficiente para poder analizar y valorar las representaciones gráficas de la figura 18. No obstante es obligado mencionar la existencia de distintos estudios e investigaciones en torno al silogismo aristotélico, realizado por prestigiosos autores, y a los cuales remito al lector interesado en ampliar sus conocimientos en torno al tema.

Como ya dijimos, las tres representaciones de la figura 18 se corresponden con cada una de las figuras del silogismo propuestas por Aristóteles. Estas representaciones gráficas son recogidas por Sir William Hamilton en su obra *Discussions on philosophy and literature, education and university reform* (1866., p.666 y ss.). Hamilton realiza una auténtica indagación, cuasi detectivesca, acerca de la autoría de dichos diagramas, llegando a la conclusión de que el autor fue muy probablemente Amonio de Hernia (c.480). Es digno de alabanza el esfuerzo de Hamilton en la averiguación de la autoría, aunque pueda no haber sido aceptada de manera generalizada. Una vez hecha la indagación sobre el autor, Hamilton analiza el valor de los propios gráficos. Las conclusiones y comentarios de Hamilton no los deja en muy buen lugar, y no sin razón. Veamos algunos de estos comentarios.

Para Hamilton, la utilización de distintos tipos de figuras geométricas puede prestar a confusión. Además, algunas características de los gráficos como que el predicado siempre aparezca a la izquierda (figura 19) del sujeto, no reflejan de manera clara su relación con él.

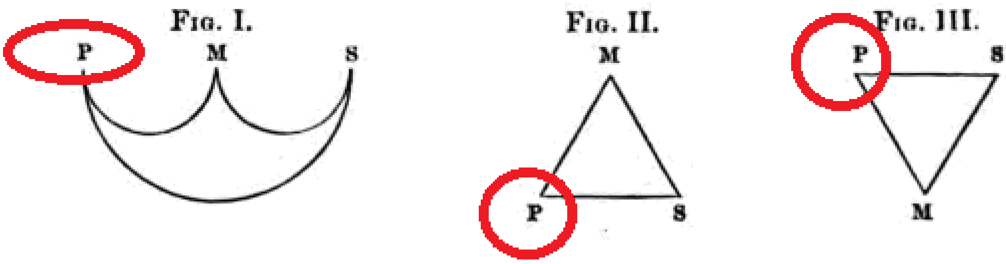


Figura 19
(situación del predicado en las representaciones gráficas de las figuras silogísticas)

Si nos centramos en la primera figura, los tres términos aparecen a un mismo nivel, lo cual no se deduce de lo propuesto por Aristóteles (Figura 20).

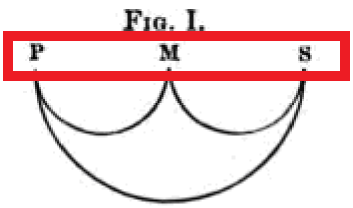


Figura 20(Representación de la primera figura del silogismo categórico)

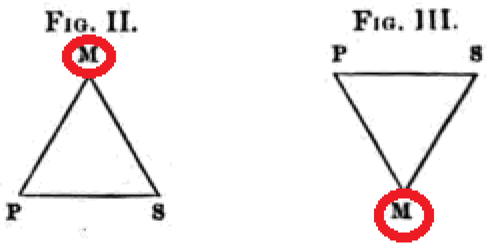


Figura 21
(segunda y tercera figura del silogismo)

Por lo que respeta a la segunda y tercera figura, el Término Medio no queda bien representado. Según Hamilton, no está "antes o después de los extremos", sino "arriba o abajo" de éstos (figura 21).

En resumen, estos gráficos silogísticos solo parecen poner de manifiesto la relación del Sujeto y del Predicado de la conclusión, a través del Término Medio, y poco más. De acuerdo con Hamilton y también con Gardner (1985, p.56) no parecen tener más valor que el comentado. El autor de dichas representaciones, fuera quien fuese, no llegó a alcanzar con sus gráficos el nivel de calidad y utilidad que tuvo, por ejemplo, el cuadrado de oposición que ya hemos revisado.

<u>*2.1.3. El "Pons asinorum"*</u>

Una representación gráfica directamente relacionada con el silogismo categórico es el conocido como "Pons Asinorum" ("puente de los asnos"). Su base conceptual se encuentra en los Analíticos Primeros (43a20-45b12) de Aristóteles. Recordemos las palabras de Bochenski acerca de la doctrina aristotélica sobre el silogismo: ***"En la axiomatización pueden proponerse fundamentalmente dos preguntas diferentes: (1) ¿Qué se sigue de premisas dadas? (2) ¿De qué premisas se puede deducir la sentencia (conclusión) dada?"*** (Bochenski, 1985, p.93)

Aristóteles se extendió sobre todo en la primera cuestión, como ya vimos en el apartado anterior. Sin embargo, no se olvidó de la segunda:

> ***"Hay que hablar ahora ya de cómo podremos disponer siempre de razonamientos en relación con la <cuestión> propuesta y por qué vía nos haremos con los principios correspondientes a cada <cuestión>; pues seguramente no sólo es preciso entender la formación de los razonamientos, sino también tener la capacidad de construirlos"*** (Aristóteles, *Analíticos Primeros*, 43a20)

Aristóteles proporciona una serie de reglas para la construcción de silogismos. En otras palabras, expone qué condiciones deben cumplir las premisas para obtener una conclusión concreta. Ahora no se trata de obtener una conclusión válida a partir de unas premisas dadas. Se trataría, por el contrario, de realizar una especie de camino inverso. Es decir, dados dos conceptos (términos), se plantearía la posibilidad de enunciar una proposición categórica verdadera con ellos, a modo de conclusión de un silogismo. Sin embargo, no disponemos de premisas que nos lleven a dicha conclusión válida. De esta forma, si pudiéramos formar dos premisas, de manera que cada una de ellas contuviera uno de esos términos, estaríamos en el camino de formar un silogismo válido para llegar a esa conclusión deseada. Según William y Martha Kneale (1971, p.186), Alejandro de Afrodisias[20], "el exégeta", concretó y elaboró, en base a lo propuesto por Aristóteles, un método para la construcción de silogismos, aunque no llegó a plasmarlo en una representación gráfica. A continuación, en la figura 22, tenemos un gráfico elaborado por los Kneale, en base a la propuesta teórica de Alejandro de Afrodisias.

---

[20] Finales siglo II? – primer tercio del siglo III?

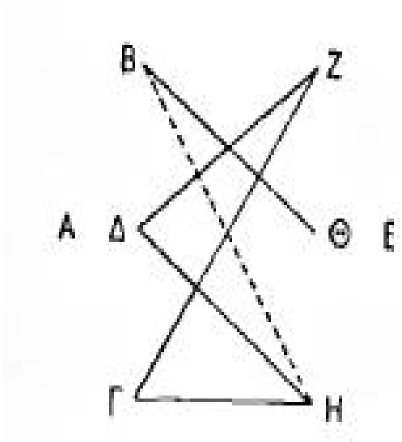


Figura 22
(gráfico basado en las ideas de Alejandro de Afrodisias, para la construcción de silogismos)

“**A”** sería el predicado de la conclusión, y “**E**” el sujeto. “**B**” es el grupo de características implicadas por A; “**Γ**” es el grupo de características que implican A, y “**Δ**” el grupo de características incompatibles con A. Por otra parte, “**Z”** sería el grupo de características implicadas por E, “**H**” el grupo de características que implican E, y “**Θ**” el grupo de características incompatibles con E. Si se encuentra un elemento común entre los grupos relacionados con A (B, Γ, Δ) y los grupos relacionados con E (Z, H, Θ), podremos construir un silogismo válido. En realidad, el método consistía en la búsqueda de un término medio, y se conoció durante la Edad Media como “inventio medii”. Parece ser que Filopón (490-566) ya aportó un gráfico[21] con bastantes similitudes al gráfico de la figura 22 (aquel inspirado en las ideas de Alejandro de Afrodisias). El gráfico de Filopón podemos verlo en la figura 23.

[21] Filoponi, Ioannis: *In Aristotelis Analytica commentaria*. Berlín, Reimer, 1905. (p.274)

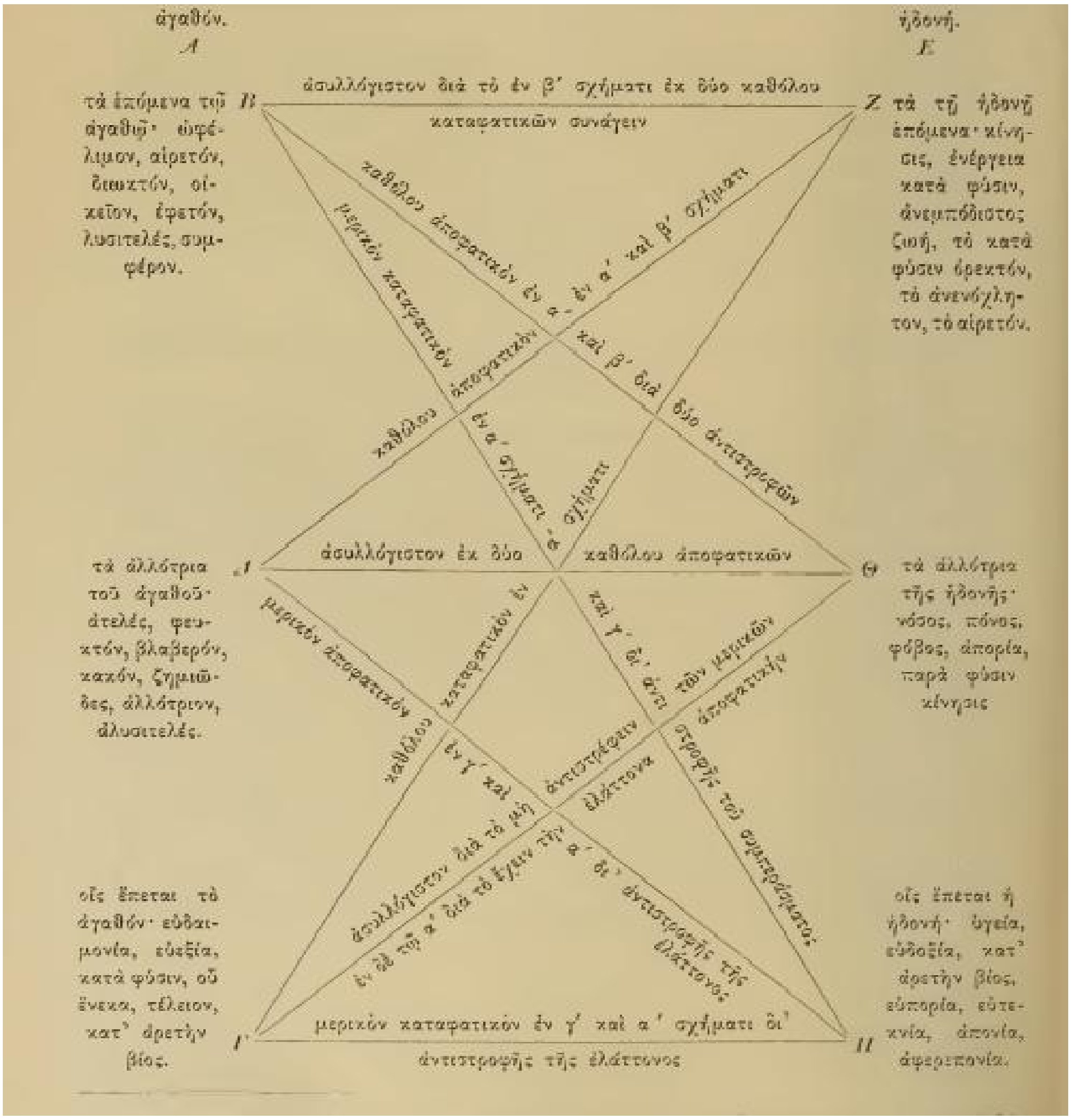


Figura 23
(gráfico de Filopón para la construcción de silogismos)

Bochenski (1985; p.154; 24.17) nos ofrece la versión traducida (Figura 24) del gráfico de Filopón , con su explicación y significado:

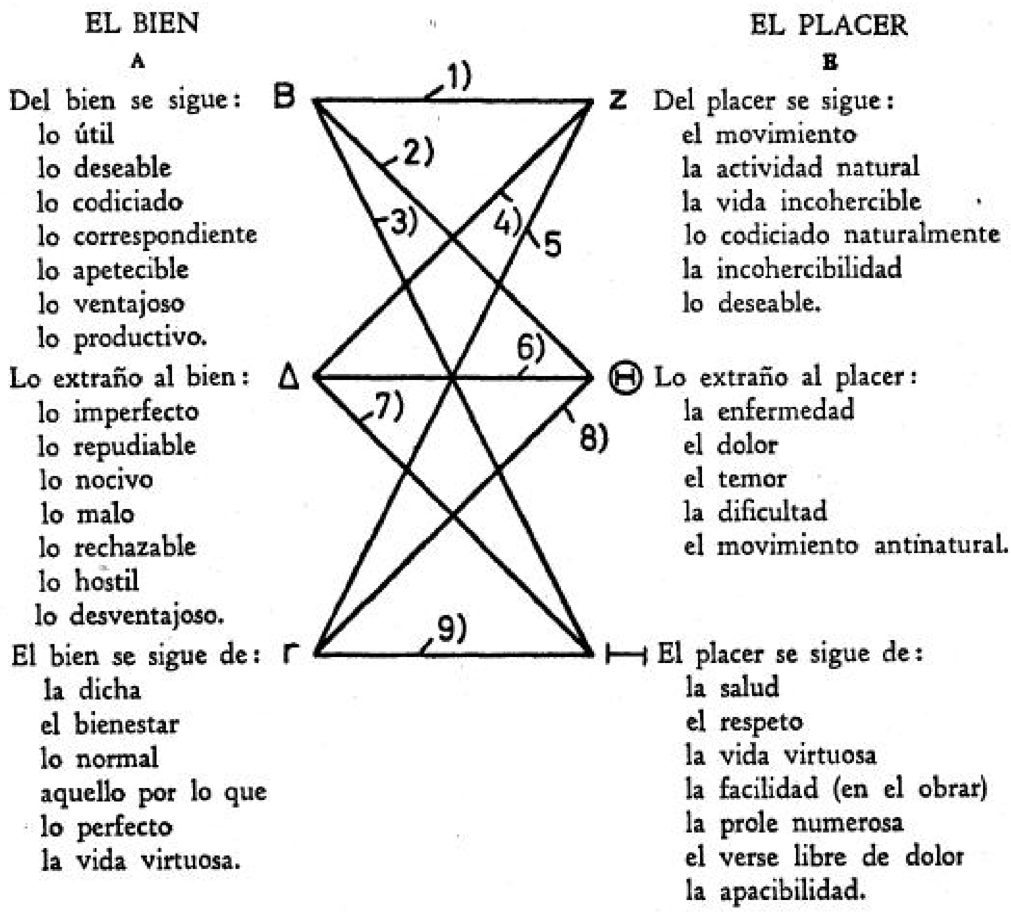


Figura 24
(versión traducida del gráfico de Filopón para la construcción de silogismos)

Interpretación del gráfico de Filopón (siguiendo la figura 24):

"***1) Asilogístico, por concluirse, dentro de la primera figura, a partir de dos (premisas) universales afirmativas.***

2) (Conclusión) universal negativa dentro de la primera y segunda (figuras), mediante dos conversiones.

3) (Conclusión) particular afirmativa dentro de la primera y tercera figuras, mediante la conversión de la conclusión.

4) (Conclusión) universal negativa en la primera y tercera figuras.

5) (Conclusión) universal afirmativa en la primera figura.

6) Asilogístico, a partir de dos universales negativas.

7) (Conclusión) particular negativa dentro de la tercera y primera (figuras), mediante la conversión de la (premisa) menor.

8) Asilogístico, por no ser convertible lo particular, y de la primera (figura), por contener (el silogismo) una (premisa) menor negativa.

9) (Conclusión) particular afirmativa dentro de la tercera y primera figuras, mediante la conversión de la premisa menor." (Bochenski, 1985, p.155)

Soy consciente de la dificultad de comprender plenamente el funcionamiento de la construcción de silogismos, solo con las explicaciones y gráficos vistos. Ruego al lector un poco de paciencia, pues un poco más adelante ofreceré un ejemplo clarificador de su uso, a la vez que cobrarán un sentido más completo los gráficos expuestos anteriormente. Sirva lo visto hasta ahora como introducción al método para construir un silogismo válido, a la vez de una prueba de la dificultad en la indagación acerca del tema.

Hamblin (1971; p.131) nos comenta que en el siglo XIII, Alberto Magno (1193/1206-1280) proporcionó su versión latina de los diagramas anteriores, basados en las reglas aristotélicas. Por su parte, Ferrater Mora (1975; Tomo II, p.449) nos señala las discrepancias en cuanto a la autoría del pons asinorum, nombre que tomó posteriormente el método de construcción del silogismo categórico. Se han propuesto hipótesis que atribuyen su creación (como tal nombre de "pons asinorum") a Jean Buridan (c.1300-1358); otras a Juan Dorp, discípulo del anterior y autor de *De arte inveniendi médium*; y otras lo atribuyen a Sanderson (en su obra *Compendium*, de 1680)**.** Según Prantl[22], el autor fue probablemente Petrus Tartaretus, plasmándolo éste en su *Comentario a Porfirio* de 1581. Por nuestra parte, hemos encontrado una versión algo anterior, en una edición de 1514 de la obra del propio Tartaretus[23]. Asimismo, Hamblin incide en la importancia de Tartaretus, al atribuirle la invención, al menos, del término "pons asinorum" (puente de los asnos).

[22] En *Geschichte der Logik im Abemdlande*. Leipzig, Verlag von S. Hirzel, 1855-70, IV, (p.206)
[23] Tartaretus, Petrus: *Commentarii in Isagogas Porphyrii et libros logicorum Aristotelis accuratissime recogniti.* [Basel], [Froben] 1514 (p.59)

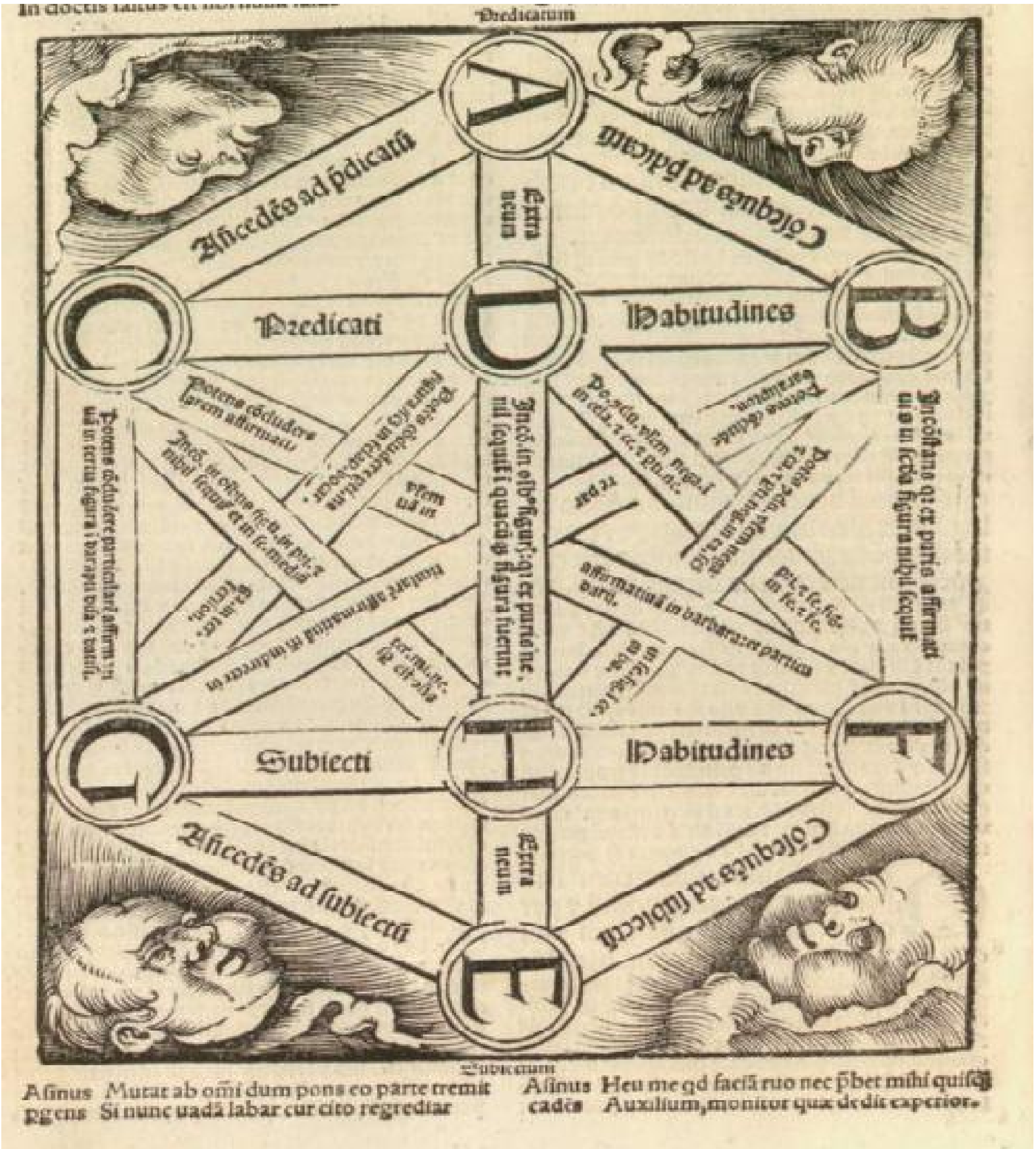


Figura 25
("Pons Asinorum" según Tartaretus, 1514)

Y a continuación tenemos la versión "esquematizada" de la figura 25 (figura 26) que proporciona Prantl.

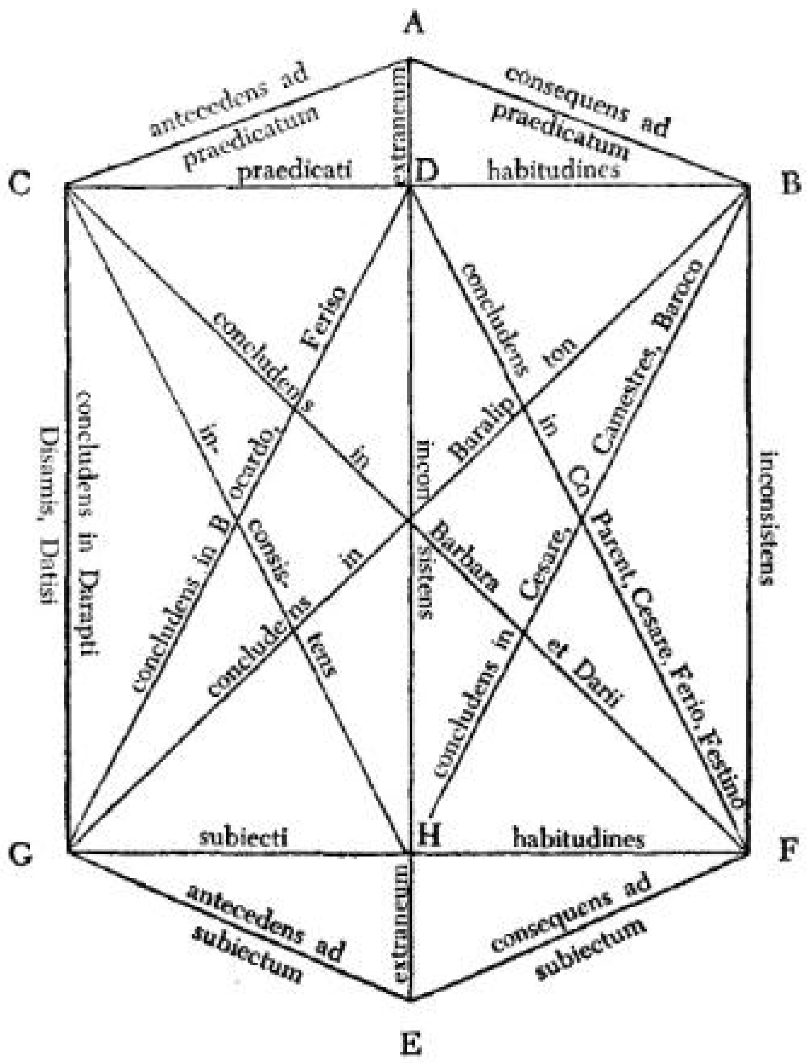


Figura 26
(versión esquematizada del Pons Asinorum)

Michael Evans[24] (1980, p.46), por su parte, nos ofrece una versión con tintes paródicos, del "pons asinorum", tomado de un manuscrito del siglo XVII, conservado en el Instituto Warburg de la Universidad de Londres, y que podemos ver en la figura 27.

[24] EVANS, Michael: *The Geometry of Mind.* En "Architectural Association Quarterly", 2, 4 (1980), pp.32-55

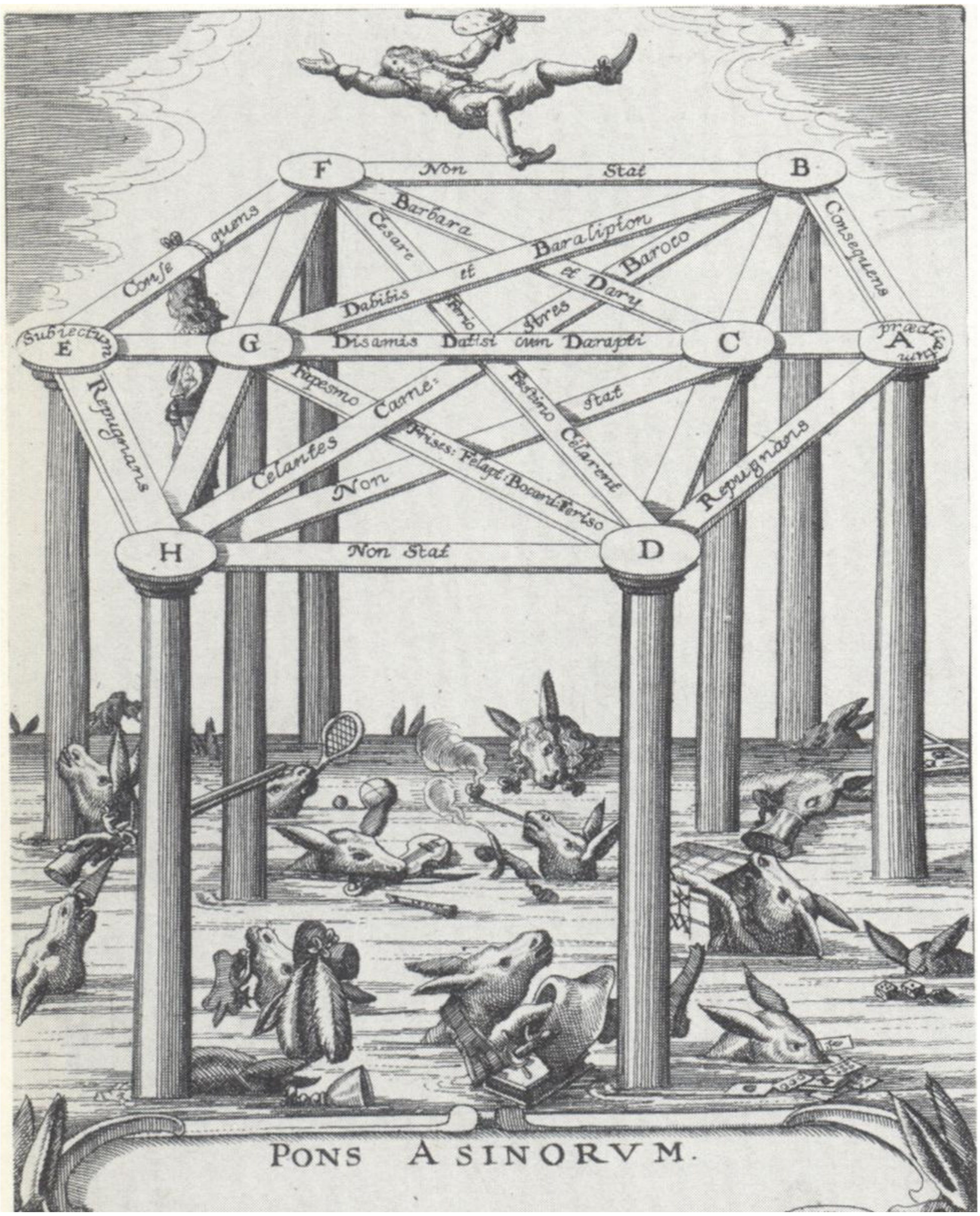


Figura 27
(versión paródica del Pons Asinorum)

Además de las distintas versiones y de las distintas hipótesis sobre la autoría, se añaden las discrepancias en torno al significado del propio término, "pons asinorum". Para unos, "el puente de los asnos" es una alegoría de un asno (quizás un hipotético estudiante principiante de lógica) que tiene que cruzar varios puentes que unen el término mayor y el término menor del silogismo. Bayle hace alusión a la posible relación del "puente de los asnos" (en francés, "pont aux ânes") con la paradoja conocida como “el asno de Buridan”, sobre un hipotético asno que no se decidía por escoger entre dos montones iguales de heno, y que moriría por su indecisión. (Bayle, 1820-24, tomo IV, p.258). Otra posible explicación que proporciona Bayle se basa en la similitud fonológica de la palabra francesa “ânes” (asnos) con “an” (palabra latina):

> ***“Pont aux Ânes, a veces también significa un mar de estos “an” o de estos “utrùm”, de los que no se sabe como salir; a veces, significa un repertorio de estos mismos “an” o “utrùm”, con solución, o los medios de pasar por arriba, temblando, como los asnos lo hacen sobre un puente donde los tablones mal unidos le dejan entrever el agua que pasa por debajo”***[25] (Bayle, 1820-24, tomo IV, p.258)

Dejando de lado el origen del término, de lo que tenemos certeza es de que se trata de un gráfico (con distintas versiones, como se ha visto) que sirve de ayuda en la inventio medii, o búsqueda del término medio con el fin de construir un silogismo válido. Para ver el mecanismo de este método, utilizaremos la versión estándar del “pons asinorum” que nos propone Hamblin (1971; p.132) (figura 28):

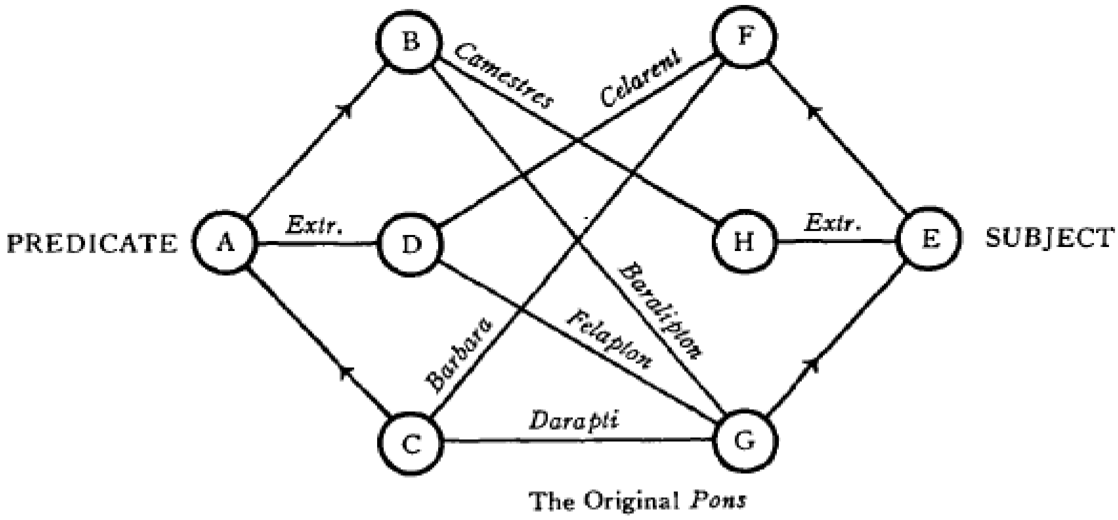


Figura 28
(Pons Asinorum estándar, según Hamblin)

Antes de pasar a analizar y ver un ejemplo concreto de cómo se aplica el “pons asinorum”, convendría aclarar algunos términos que aparecen en el gráfico (e.g.: Camestres, Celarent, etc.).

[25] Traducido por el autor del presente trabajo.

Recordemos que el silogismo categórico tenía cuatro figuras[26] que se distinguían por la posición del término medio en las premisas. Veámoslo en el siguiente cuadro (M es el término Medio, S el término Menor y P el término Mayor):

	1ª figura	2ª figura	3ª figura	4ª figura
Premisa mayor	M –P	P-M	M-P	P-M
Premisa menor	S-M	S-M	M-S	M-S
Conclusión	S-P	S-P	S-P	S-P

Figura 29
(esquema-resumen de las cuatro figuras silogísticas)

Por ejemplo, en la premisa mayor de la primera figura, el Término Medio (M) sería sujeto y el término mayor (P) sería el predicado. La premisa menor de esta primera figura tendría el Término Medio como predicado y el término menor (S) como sujeto. Y en la conclusión, como en todas las figuras, el Término Menor (S) sería el sujeto y el Término Mayor sería el Predicado.

Asimismo, recordemos que en cada figura, había una serie de modos válidos, de acuerdo con el tipo de proposición que fueran las premisas y la conclusión. (A –universal afirmativa-, E –universal negativa-, I –particular afirmativa-, O particular negativa-). En total hay 19 modos válidos, a los que habría que añadir otros cinco más, también considerados válidos aunque subalternos (ver figura 30). De forma abreviada, por ejemplo el modo EIO de la primera figura, significa que la premisa mayor es del tipo E (universal negativa), la premisa menor del tipo I (particular afirmativa), y la conclusión del tipo O (universal negativa).

[26] Tres propuestas por Aristóteles y una cuarta figura que apareció durante la Edad Media. Esta cuarta figura se ha atribuido erróneamente, por algunos, a Galeno (así lo hizo, por ejemplo, Averroes). Los Kneale (1971, p.183) no han encontrado ningún indicio de alguien que defendiera la doctrina de la cuarta figura, antes del final de la Edad Media.

	Modos válidos principales	Modos válidos subalternos
1ª figura	AAA-EAE-AII-EIO	AAI-EAO
2ª figura	EAE-AEE-EIO-AOO	EAO-AEO
3ª figura	AAI-IAI-AII-EAO-OAO-EIO	
4ª figura	AAI-AEE-IAI-EAO-EIO	AEO

Figura 30
(Modos válidos silogísticos)

Veamos un ejemplo de la primera figura y el modo EIO. Esquemáticamente representémoslo de la siguiente manera:

Premisa mayor: M-P (E)

Premisa menor: S-M (I)

Conclusión: S-P (O)

- M-P (E): Sería una proposición universal negativa con el Término Medio como sujeto. Por ejemplo, "Ningún hombre es insecto"
- S-M (I): Sería una proposición particular afirmativa con el Término Medio como predicado. Por ejemplo, "Algún animal es hombre"
- S-P (O): Se trataría de la conclusión, que en este caso sería una proposición particular negativa, a saber, "Algún animal no es insecto".

Durante la Edad Media se crearon una serie de palabras mnemotécnicas asociadas a cada modo válido. Las vocales de cada palabra hacían referencia al tipo de proposición de la premisa mayor, de la premisa menor y de la conclusión. Por ejemplo, para el modo AAA de la primera figura tendríamos la palabra B**a**rb**a**r**a**. Para el resto de modos, se ingeniaron otras palabras que recogemos en el siguiente cuadro (figura 31).

	Modos válidos principales						Subalternos	
1ª Fig.	AAA	EAE	AII	EIO			AAI	EAO
	Barbara	Celarent	Darii	Ferio			Barbari	Celaront
2ª Fig.	EAE	AEE	EIO	AOO			EAO	AEO
	Cesare	Camestres	Festino	Baroco			Cesaro	Camestrop
3ª Fig.	AAI	IAI	AII	EAO	OAO	EIO		
	Darapti	Disamis	Datisi	Felapton	Bocardo	Ferison		
4ª Fig.	AAI	AEE	IAI	EAO	EIO		AEO	
	Bamalip	Calemes	Dimatis	Fesapo	Fresison		Camenop	

Figura 31
(cuadro con palabras mnemotécnicas para los modos válidos del silogismo)

Las consonantes de estas palabras mnemotécnicas también tienen su significado y utilidad, aunque a decir verdad, no todas las consonantes lo poseen.

Las iniciales de las palabras de la segunda, tercera y cuarta figura, sirven para saber a qué palabra de la primera figura puede reducirse. Esto se relaciona con la Teoría de la Reducción de los modos imperfectos. Para Aristóteles, los silogismos de la primera figura eran "perfectos" puesto que el orden de los términos era más natural que en los otros modos. La teoría de la reducción consistía en la posibilidad de transformar un silogismo de un modo "imperfecto" en uno de la primera figura. De este modo, y teniendo en cuenta el valor de las iniciales de las ya vistas palabras mnemotécnicas, podríamos decir, por ejemplo, que el modo **F**elapton (3ª figura) sería reducible al modo **F**erio (1ª figura). Además de la consonante inicial, ya dijimos que algunas de las otras consonantes tienen su significado y aplicación en relación a la vocal que las precede. Veamos dicho significado:

- S: (del latín "simplex convertio", cuyo significado sería "conversión simple"). Consiste en cambiar el sujeto por el predicado y viceversa, sin cambiar la cantidad de la proposición.
- P: (del latín "per accidens", referido a una "conversión por accidente"). Consiste en el cambio de sujeto por predicado y predicado por sujeto, además del cambio de la cantidad de la proposición.

- M: (del latín "mutatio", cuyo significado sería "mutación", "cambio"). Se referiría a la trasposición de las premisas. La primera pasa a ser la segunda y la segunda a ser la primera.
- C: (del latín "contradictus", que significa "contradictorio"). Debe reemplazarse la precedente por la contradictoria de la conclusión.
- R: (del latín "remante", que significa "permanece"). Indica que la premisa permanece sin cambiar.

Retomemos el caso que veíamos más arriba, el del cambio de Felapton a Ferio. Pongamos como ejemplo concreto de silogismo del modo Felapton, el siguiente:

(Fe): "Ningún animal es incorruptible" (Premisa mayor)

(Lap): "Todo animal es viviente" (Premisa menor)

(ton): luego "Algún viviente no es incorruptible" (Conclusión)

Analicemos el significado de las partes de las palabras mnemotécnicas. Veámoslo:

Fe: La F indica que se puede reducir a un modo de la primera figura que empiece por F, en este caso Ferio. La "**e**", que se trata de una proposición universal negativa ("Ningún animal es incorruptible").

Lap: La "**a**" indica que se trata de una universal afirmativa. La "**p**" indica que esta proposición se puede convertir por accidente. Es decir, que pasaría de "Todo animal es viviente" a convertirse en "algún viviente es animal". La "L" no tendría ningún significado en particular, sirviendo para ayudar a componer la palabra correspondiente.

Ton: la "**o**" indica que es una particular negativa ("Algún viviente no es incorruptible") La t y la n no tienen un significado en particular.

En base a lo anterior, la reducción a un modo de la primera figura sería así[27]. Sabemos que por la inicial (F) sería reducida al modo Ferio:

Fe: Se trataría de la premisa mayor. La "e" nos indica que se trata de una proposición Universal Negativa. Realmente la premisa mayor no ha cambiado, es decir, ha quedado como era: "Ningún animal es incorruptible".

ri: Se trata de la premisa menor. La "i" nos indica que se trata de una proposición Particular Afirmativa. Esta premisa procede de "Todo animal es vivente" que se ha convertido por accidente, como ya vimos, en "Algún viviente es animal"

---

[27] Ejemplo tomado de Martain, Jacques: *El orden de los conceptos*. Ed. Club de Lectores, Buenos Aires, 1963, pp.263-266.

o: Se trata de la conclusión, que no cambia, es decir, es una proposición particular negativa: "algún viviente no es incorruptible".

Resumiendo, hemos convertido el siguiente silogismo:

-"Ningún animal es incorruptible" (Premisa mayor),

-"Todo animal es viviente" (Premisa menor),

luego "Algún viviente no es incorruptible" (Conclusión),

en este otro silogismo "perfecto":

-"Ningún animal es incorruptible" (Premisa mayor),

-"Algún viviente es animal" (Premisa menor)

luego "Algún viviente no es incorruptible" (Conclusión).

Hemos comentado que hay algunas consonantes que no tienen significado especial, y simplemente sirven para ayudar a componer la palabra. De ahí, que se produzcan algunas variaciones en la formación de dichas palabras mnemotécnicas según los textos y autores. A título de ejemplo, en algunos textos encontraremos la palabra CAMENTES en lugar de CALEMES (cuarta figura), refiriéndose al mismo modo (AE/E).

Para comprender el gráfico que nos presenta Hamblin (figura 28), es necesario referirse a una cierta complicación debida a algunos autores que introdujeron una variación en la cuarta figura. Simplemente cambiaron el orden de las premisas, con el consiguiente cambio en las palabras mnemotécnicas correspondientes. Debemos referirnos a ello, pues Hamblin, cuando construye su gráfico, se basa en esta forma de presentar la cuarta figura. Veamos los cambios en esta cuarta figura:

Cuarta Figura (tradicional)	P - M M – S S - P	Cuarta Figura (modificada)	M – S P – M S - P
	AAI (Bamalip)		AAI (Baralipton)
	AEE (Calemes)		EAE (Celantes)
	IAI (Dimatis)		AII (Dabitis)
	EAO (Fesapo)		AEO (Fapesmo)
	EIO (Fresison)		IEO(Frisesomorum)
	AEO (Camenop)		EAO(Celantop)

Figura 32
(cambios en la cuarta figura, según algunos autores)

Asumiendo los cambios de la figura 32, el cuadro de la figura 31 quedaría como se refleja en la figura 33.

	Modos válidos principales						Subalternos	
1ª Fig.	AAA	EAE	AII	EIO			AAI	EAO
	Barbara	Celarent	Darii	Ferio			Barbari	Celaront
2ª Fig.	EAE	AEE	EIO	AOO			EAO	AEO
	Cesare	Camestres	Festino	Baroco			Cesaro	Camestrop
3ª Fig.	AAI	IAI	AII	EAO	OAO	EIO		
	Darapti	Disamis	Datisi	Felapton	Bocardo	Ferison		
4ªFig (modi-Ficada)	AAI	EAE	AII	AEO	IEO		EAO	
	Baralipton	Celantes	Dabitis	Fapesmo	Frisesomorum		Celantop	

Figura 33
(cuadro con las palabras mnemotécnicas de los modos válidos, con los cambios en la cuarta figura)

No incidiré más en el análisis del silogismo y de la serie de palabras mnemotécnicas y sus transformaciones. Pero era necesario referirse a ellas, al menos con una básica explicación, para que fuera comprensible el diagrama del pons asinorum, donde dichas palabras aparecen. Ahora estamos en condiciones de ver el funcionamiento del pons asinorum. Supongamos que tenemos dos términos y que queremos establecer una conclusión, mediante un silogismo, conectando esos dos términos como sujeto y predicado. Nuestro principal objetivo será encontrar premisas verdaderas, y para ello será necesario hallar un término medio ("inventio medii").

Según el gráfico de Hamblin (fig.34), la letra E simboliza el sujeto, y la letra A el predicado (figura 34).

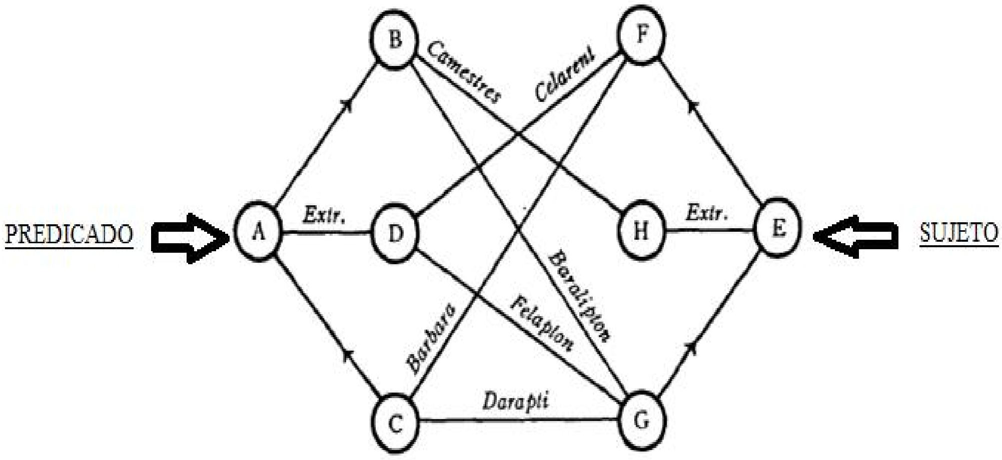


Figura 34
(ejemplo del uso del pons asinorum – parte 1-)

Además de las letras representativas del sujeto y del predicado, vemos que aparecen las letras B, C y D, conectadas mediante líneas con A (predicado). Dichas letras tendrían el siguiente significado:

(i) Grupo B: aquellos términos que son consecuentes de A

(ii) Grupo C: aquellos términos que son antecedentes de A

(iii) Grupo D: aquellos términos que son inconsistentes con A (que no son propios de A).

Por ejemplo, si un término T está en el grupo B, se podrá decir que "Todo A es T" es una proposición verdadera. Si el término T estuviera en el grupo C, se podría decir que "Todo T es A" es una proposición verdadera. Y si el término T estuviera en el grupo D, entonces "Ningún A es T" (o también, "Ningún T es A") sería una proposición verdadera.

Del mismo modo lo podríamos hacer con respecto al sujeto (E). Tendríamos también tres grupos:

(i) Grupo F: aquellos términos que son consecuentes de E

(ii) Grupo G: aquellos términos que son antecedentes de E

(iii) Grupo H: aquellos términos que son inconsistentes con E (que no son propios de E).

Si encontráramos un término que estuviera, por un lado en B, C, o D, y por otro lado que también estuviera en F, G, o H, entonces cabría la posibilidad de construir un silogismo válido. Por ejemplo, tengamos los términos "**madrileño**" y "**europeo**".

Queremos llegar a una conclusión en la que “madrileño” sea sujeto y “europeo” el predicado. Según el esquema de Hamblin, “madrileño” le corresponde la letra E y a “europeo” la letra A (figura 35).

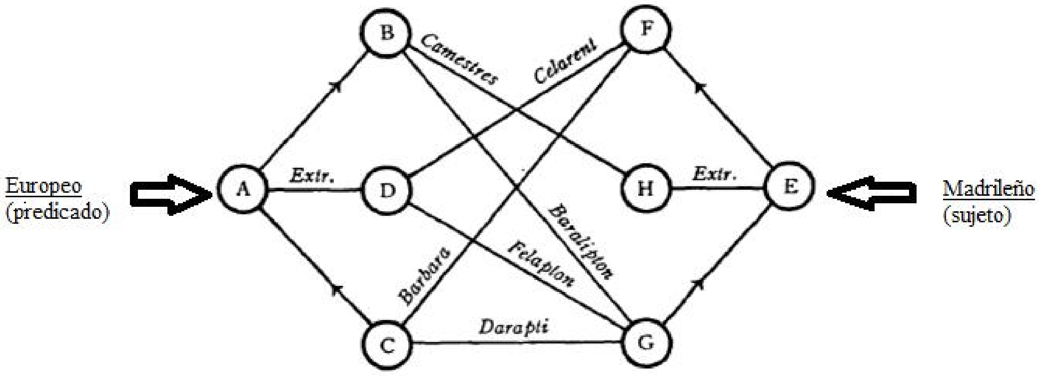


Figura 35
(ejemplo del uso del pons asinorum – parte 2-)

Consideremos un término como “**español**”. Tenemos la certeza de que “español” es un antecedente de “europeo”, ya que “Todo español es europeo”. Es decir, en este caso el término “español” estará incluido en el grupo C (figura 36).

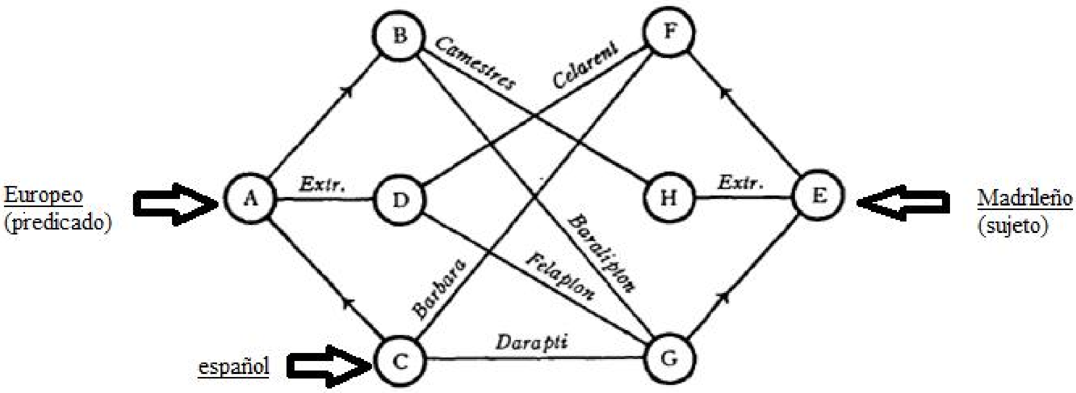


Figura 36
(ejemplo del uso del pons asinorum – parte 3-)

Por otro lado, si relacionamos el término “español” con “madrileño”, sabemos que “español” es un término consecuente de “madrileño”, es decir, el término “español” pertenecería también al grupo F (figura 37).

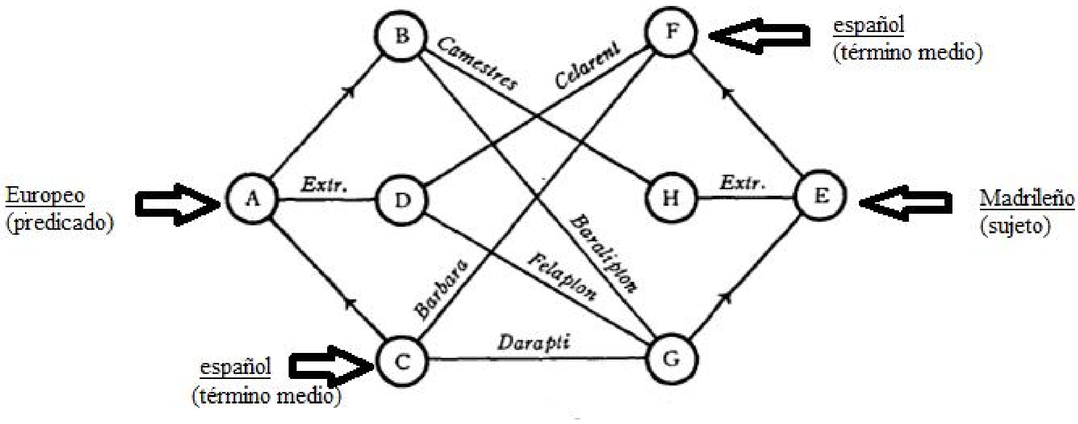


Figura 37
(ejemplo del uso del pons asinorum – parte 4-)

En el gráfico de la figura 37 vemos que las letras C y F (a las que pertenece el término medio hallado, es decir, "español"), están unidas por la palabra "**Barbara**" (ver figura 38).

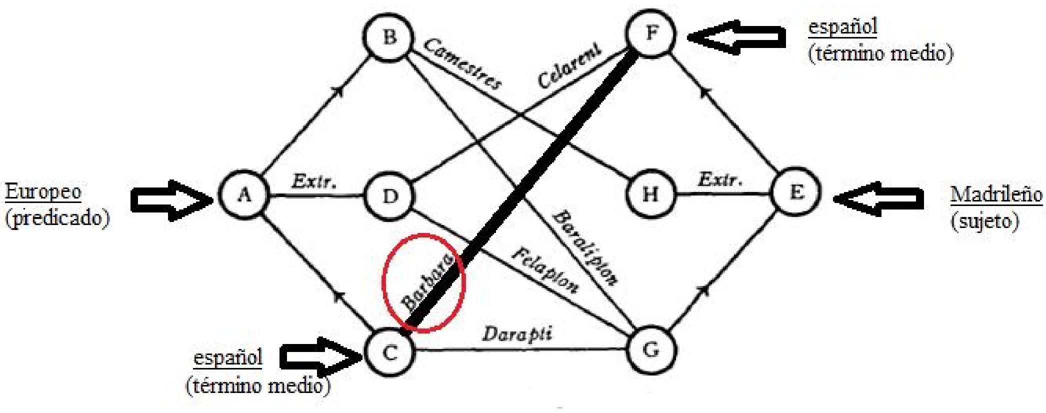


Figura 38
(ejemplo del uso del pons asinorum – parte 5-)

Ello significa que se puede construir un silogismo de la primera figura con el modo AA/A, que vendría a ser de la siguiente manera, teniendo en cuenta que el término medio es "español", el término menor es "madrileño" y el término mayor es "europeo". El silogismo correspondiente sería:

(Bar) Premisa mayor: **Todo español es europeo**

(Ba) Premisa menor: **Todo madrileño es español**

(Ra) Conclusión: **Todo madrileño es europeo**

Ahora bien, si nos fijamos en el diagrama que nos ofrece Hamblin, vemos que aparecen nada más que seis palabras mnemotécnicas (Camestres, Baralipton, Celarent, Felapton, Barbara, Darapti) de los veinticuatro posibles modos silogísticos válidos (incluidos los subalternos). Recordemos el cuadro con las palabras mnemotécnicas (figura 33), y rodeemos con un círculo las palabras recogidas en el gráfico de Hamblin, dando lugar al cuadro de la figura 39.

	Modos válidos principales						Subalternos	
1ª	AAA	EAE	AII	EIO			AAI	EAO
Fig.	Barbara	Celarent	Darii	Ferio			Barbari	Celaront
2ª	EAE	AEE	EIO	AOO			EAO	AEO
Fig.	Cesare	Camestres	Festino	Baroco			Cesaro	Camestrop
3ª	AAI	IAI	AII	EAO	OAO	EIO		
Fig.	Darapti	Disamis	Datisi	Felapton	Bocardo	Ferison		
4ªFig	AAI	EAE	AII	AEO	IEO		EAO	
(modi-Ficada)	Baralipton	Celantes	Dabitis	Fapesmo	Frisesomorum		Celantop	

Figura 39
(cuadro con las palabras mnemotécnicas de los modos válidos, rodeando con círculos los reflejados en el pons asinorum de Hamblin)

¿Qué sucede, pues, con el resto de palabras que no aparecen en el gráfico del pons asinorum? ¿Acaso implicaría que el "pons asinorum" propuesto estaría incompleto? Veamos las explicaciones que nos proporciona Hamblin al respecto.

Hamblin nos dice que el "pons asinorum" puede realizar una simplificación de los modos, ya que aprovecha las simetrías de las premisas. Así que, ignorando el orden de las premisas y de los términos dentro de las premisas del tipo E e I, tendríamos las siguientes igualdades:

Celantes = **Camestres**

Celantop = **Camestrop**

Cesare = **Celarent**

Cesaro = **Celaront**

Festino = Ferison = Frisesomorum = **Ferio**

Dabitis = **Disamis**

Datisi = **Darii**

Fapesmo = **Felapton**

Traslademos estas igualdades al cuadro-resumen con las palabras mnemotécnicas, tachando (x) los modos que serían redundantes, según dichas igualdades. Conservaremos el último de los miembros de cada igualdad (Camestres, Camestrop, Celarent, Celaront, Ferio, Disamis, Darii, Felapton). El cuadro quedaría reflejado en la figura 40 (recordemos que están rodeados con un círculo los modos que aparecen en el gráfico de Hamblin).

	Modos válidos principales						Subaltemos	
1ª	AAA	EAE	AII	EIO			AAI	EAO
Fig.	Barbara	Celarent	Darii	Ferio			Barbari	Celaront
2ª	EAE	AEE	EIO	AOO			EAO	AEO
Fig.	~~Cesare~~	Camestres	~~Festino~~	Baroco			~~Cesaro~~	Camestrop
3ª	AAI	IAI	AII	EAO	OAO	EIO		
Fig.	Darapti	Disamis	~~Datisi~~	Felapton	Bocardo	~~Fresison~~		
4ªFig	AAI	EAE	AII	AEO	IEO		EAO	
(modi-Ficada)	Baralipton	~~Celantes~~	~~Dabitis~~	~~Fapesmo~~	~~Frisesomorum~~		~~Celantop~~	

Figura 40
(simplificación de los modos válidos – parte 1-)

Nos quedan aún catorce modos válidos posibles, mientras que en el gráfico de Hamblin solo se recogen seis de ellos. Sin embargo, observemos que hay tres modos subalternos, Barbari, Celaront y Camestrop, que aún están sin ser eliminados, pero que pueden derivarse fácilmente de Barbara, Celarent y Camestres, respectivamente. Es decir, estos tres modos subalternos también podrían ser suprimidos. Realicemos gráficamente las eliminaciones pertinentes (Figura 41).

	Modos válidos principales						Subalternos	
1ª Fig.	AAA	EAE	AII	EIO			AAI	EAO
	Barbara	Celarent	Darii	Ferio			~~Barbari~~	~~Celaront~~
2ª Fig.	EAE	AEE	EIO	AOO			EAO	AEO
	~~Cesare~~	Camestres	~~Festino~~	Baroco			~~Cesaro~~	~~Camestrop~~
3ª Fig.	AAI	IAI	AII	EAO	OAO	EIO		
	Darapti	Disamis	~~Datisi~~	Felapton	Bocardo	~~Ferison~~		
4ªFig (modi-Ficada)	AAI	EAE	AII	AEO	IEO		EAO	
	Baralipton	~~Celantes~~	~~Dabitis~~	~~Fapesmo~~	~~Frisesomorum~~		~~Celantop~~	

Figura 41
(simplificación de los modos válidos – parte 2-)

A pesar de las sucesivas eliminaciones que hemos ido realizando, aún sigue habiendo cinco modos que no aparecen en el gráfico de Hamblin del “Pons Asinorum”: Darii, Ferio, Baroco, Disamis y Bocardo. ¿Se podría considerar que el Pons es completo sin estos modos? Si nos fijamos en los modos rodeados con círculo, que son los que aparecen en el Pons, se trata de silogismos con ambas premisas universales. Los otros modos (Darii, Ferio, Baroco, Disamis, Bocardo), contienen alguna premisa particular. Si nos atenemos al siguiente pasaje de Aristóteles, donde parecería ofrecer un cierto tipo de variante en torno a la teoría silogística, se justificaría la “eliminación” de esos otros cinco modos, quedándonos con los seis que aparecen en el gráfico de Hamblin. Leamos esas palabras de Aristóteles a las que nos referimos:

“Pero es preciso escoger, no lo que se sigue de algo <particular>, sino todo lo que se sigue de la cosa tomada en su totalidad, v.g.: no qué se sigue de algún hombre <individual>, sino de todo hombre: pues el razonamiento <se forma> a través de las proposiciones universales”.

(Aristóteles, *Analíticos primeros*, 43 b – 12)

Hamblin no llega a estar completamente de acuerdo con prescindir de esos cinco modos, y siguiendo el análisis que hizo Dorp, llega a demostrar la siguiente regla:

“Un silogismo en el que una premisa es particular afirmativa, es válido si y solo si, tanto el silogismo en el cual la premisa particular

afirmativa es reemplazada por su correspondiente universal, y el silogismo en el que la premisa universal es reemplazada por su conversa, son ambos válidos". (Hamblin, 1971, p.134)

Esta regla le sirve a Hamblin para justificar la no eliminación de los cinco modos de los que estábamos pendientes. Por tanto, el Pons Asinorum completo, según Hamblin, sería el siguiente (figura 42):

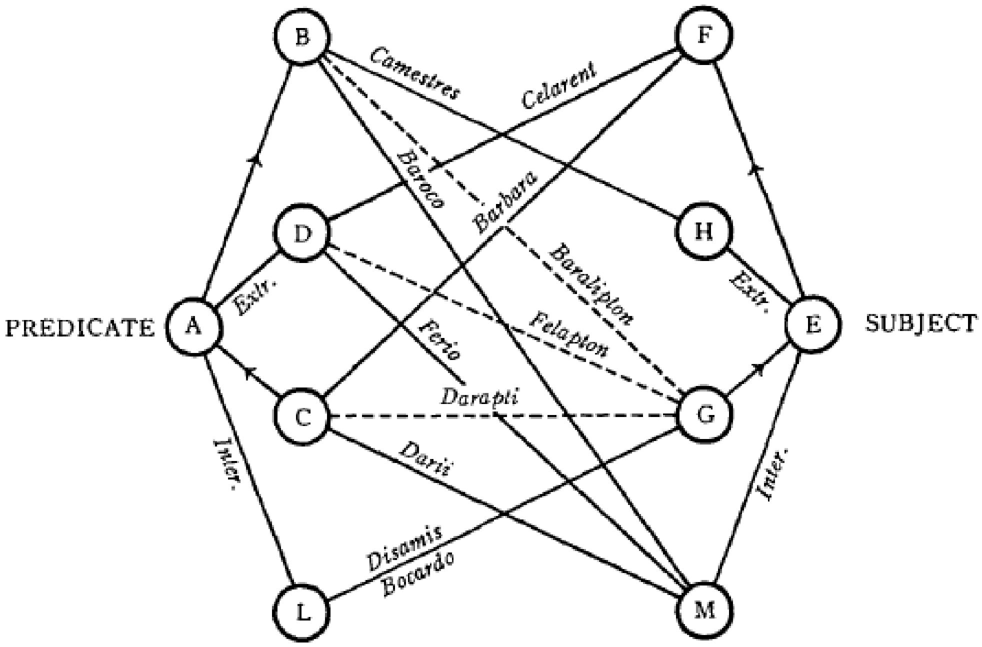


Figura 42
(Pons Asinorum ampliado, según Hamblin)

Expliquemos los nuevos elementos introducidos en el gráfico. En primer lugar tenemos los nuevos cinco modos, de los que ya hemos hablado: Darii, Ferio, Baroco, Disamis, Bocardo. Observamos también que algunas líneas están punteadas. Con ello se quiere indicar que los modos correspondientes (Baralipton, Felapton, Darapti) se podrían reducir a un modo de la primera figura (Barbara, Ferio, Darii, respectivamente).

Por último, tenemos en el nuevo gráfico, las letras L y M rodeadas con un círculo. La letra L representa al grupo de términos que intersectan con el término predicado, A, pero ni es antecedente ni consecuente de él. Si tuviéramos un término, T, que perteneciera a L, sería un término aplicable a algunos elementos que son A, y la proposición "Algun T es A" sería verdadera. Lo mismo se puede decir de M en relación con E (sujeto). Seguramente lo veamos más claro con un ejemplo. Supongamos que tenemos los términos "**animal acuático**" y "**animal pulmonado**", y queremos obtener una proposición lógicamente válida, en la cual el primero sea predicado, y el segundo sea sujeto. Para ello construiremos un silogismo adecuado. Identifiquemos primero en el gráfico, el sujeto y el predicado de la conclusión (Figura 43)

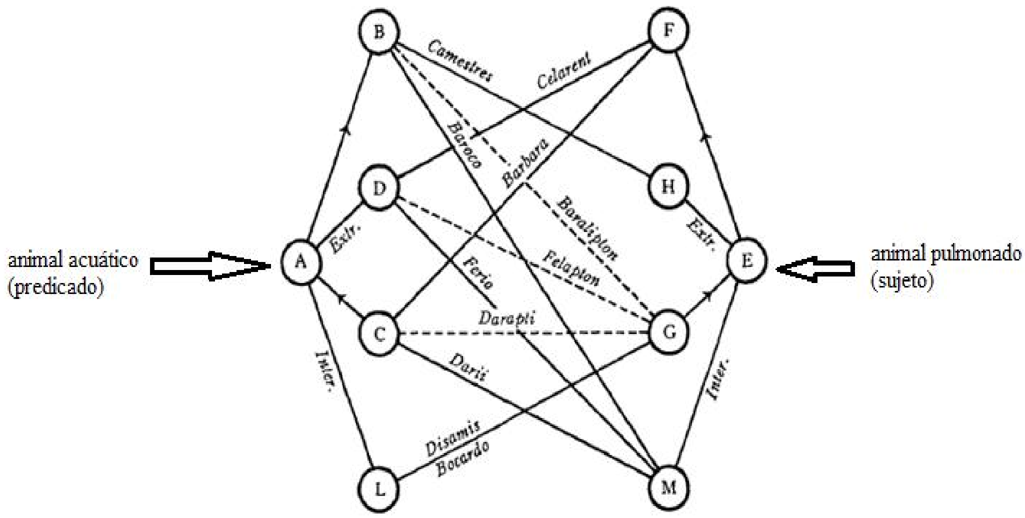


Figura 43
(Ejemplo de uso del Pons Asinorum ampliado – parte 1-)

Respecto al predicado, sabemos que una de las propiedades de algunos animales acuáticos es la de ser mamíferos (e.g. los delfines). Así que dicha característica ("mamífero") no podría ser incluída en el grupo B, pues no es cierto que "Todos los animales acuáticos son mamíferos". Tampoco estaría en el grupo C, pues no es cierto que "Todos los mamíferos son animales acuáticos", y tampoco en el grupo D, pues tampoco es cierto que "Ningún mamífero es acuático" (v.gr. los delfines). Así que dicha propiedad la deberíamos incluir en L (en su relación con el predicado). Parece que vamos por buen camino para encontrar el término medio del futuro silogismo. En este caso, dicho término medio sería "mamífero" (ver figura 44).

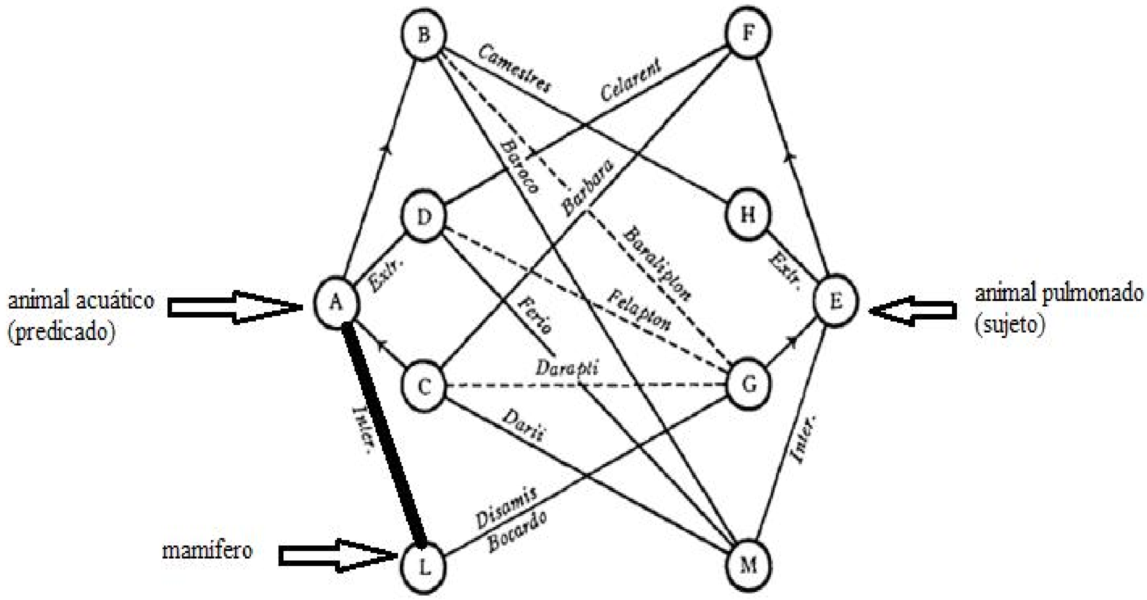


Figura 44
(Ejemplo de uso del Pons Asinorum ampliado – parte 2-)

Veamos cómo se relaciona este término ("mamífero") con nuestro sujeto ("animal pulmonado"). Parece que es una característica de los animales mamíferos el de ser pulmonados; así que el término "mamífero" pertenecería al grupo G (de entre los cuatro F, G, H, M), pues "Todo mamífero es animal pulmonado" (ver figura 45).

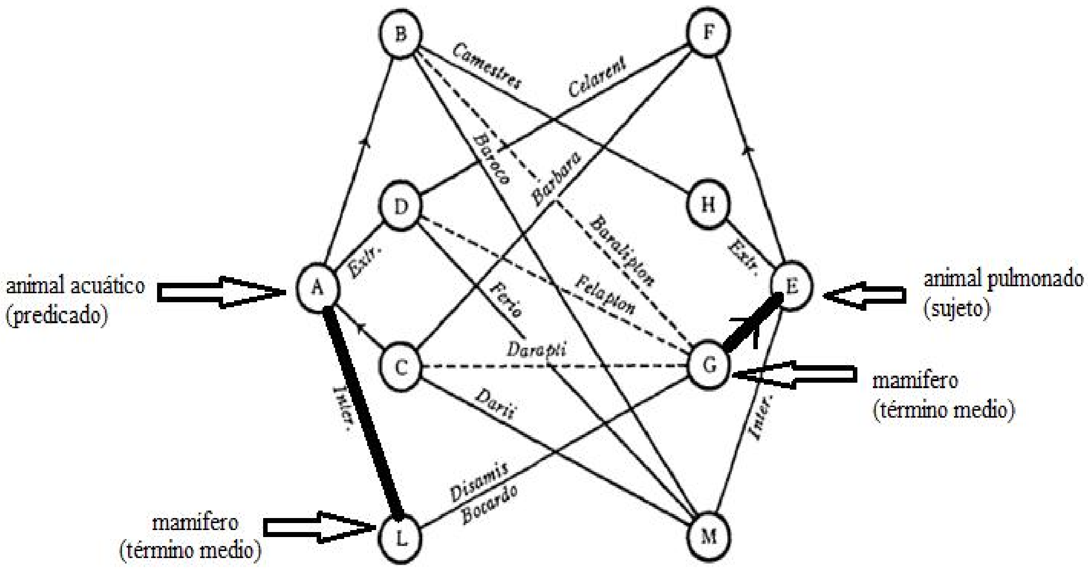


Figura 45
(Ejemplo de uso del Pons Asinorum ampliado – parte 3-)

Tenemos por tanto el sujeto de la conclusión (término menor), “animal pulmonado”, el predicado (término mayor) “animal acuático”, y el término medio, “mamífero”. Tenemos los grupos a los que pertenece el término medio, que son el grupo L y el grupo G. Y siguiendo la figura del pons, la línea que une L y G lleva los nombres de Disamis y Bocardo (ambos de la 3ª figura), que serán los dos modos de los posibles silogismos válidos que podremos construir (ver figura 46). Tendríamos por tanto, los silogismos siguientes:

3ª figura:

M-P (Di): “Algún mamífero es animal acuático” (premisa mayor)

M-S (Sa): “Todo mamífero es animal pulmonado” (premisa menor)

S-P (Mis): “Algún animal pulmonado es animal acuático” (conclusión)

M-P (Bo): “Algún mamífero no es animal acuático” (premisa mayor)

M-S (car): “Todo mamífero es animal pulmonado” (premisa menor)

S-P (do): “Algún animal pulmonado no es animal acuático” (conclusión)

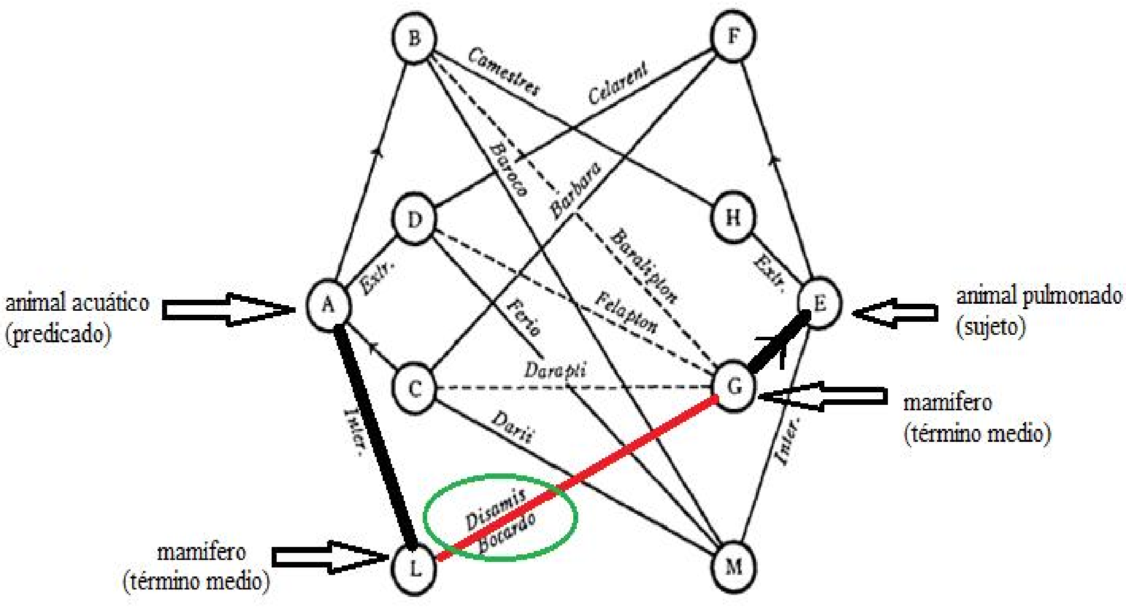


Figura 46
(Ejemplo de uso del Pons Asinorum ampliado – parte 4-)

Según Hamblin, el grafico de su Pons Asinorum ampliado (figura 42) es un gráfico completo para la construcción de cualquier silogismo válido. No lo encontraremos en ningún texto medieval, pues es de su propia cosecha. Según Hamblin, su “pons” expone, de forma gráfica, una teoría silogística más simple que la que tradicionalmente se ha estudiado, y a la vez sería una teoría completa. Al final de su artículo, se lamenta Hamblin de que su diagrama no estuviera disponible para su uso durante la Edad Media: ***“Quizás es una pena, para la historia de la lógica”*** (Hamblin, 1976, p.136). Pero al menos sus aportaciones nos han servido para profundizar en el sentido y valor que tuvo el Pons Asinorum, para una época en la que uno de los elementos básicos, en el estudio de la lógica, era el silogismo aristotélico.

2.1.4. El árbol de Porfirio

Porfirio (234? – 305?), filósofo neoplatónico discípulo de Plotino, fue un prolífico escritor que trató una gran variedad de temas. Una de sus obras más importantes fue su *Isagoge*[28], una introducción a la doctrina aristotélica de las categorías. En la parte III (“De la especie”), apartado 4, nos dice Porfirio:

> ***“En cada categoría hay algunos géneros generalísimos, así como diversas especies especialísimas y otras especies intermedias entre los géneros generalísimos y las especies especialísimas. Género generalísimo es aquel por encima del cual no puede haber otro género superior; especie especialísima, aquella por debajo de la cual no puede haber otra especie inferior; y especies intermedias entre el género generalísimo y la especie especialísima, las que ellas mismas son a la vez géneros y especies, si bien, naturalmente, en respectos distintos.”***
> (Porfirio, *Isagoge*, p.13)

Porfirio nos describe las relaciones de subordinación que se dan dentro de una categoría. Habría un término general por encima del cual no hay otro término más general. Por debajo de ese término más general habría una especie que a su vez sería género de otra especie de nivel más inferior, y así, de manera sucesiva hasta llegar a una especie (especialísima) por debajo de la cual no habría más especies. Porfirio, para aclarar la explicación anterior, toma, como ejemplo de categoría, la substancia, que sería el género más elevado. El hombre sería, en este caso, la especie especialísima. Y también realiza la indagación correspondiente sobre los géneros y especies intermedios. Este esquema conceptual se vio plasmado, a lo largo de la Edad Media, en un esquema gráfico conocido como “Árbol de Porfirio”, y del que ofrecemos, en la figura 47, una de

---

[28] El significado de “Isagoge” es “Introducción”

sus diversas versiones que han aparecido a lo largo de la historia (tomada de Ferrater Mora, 1975, p.126)

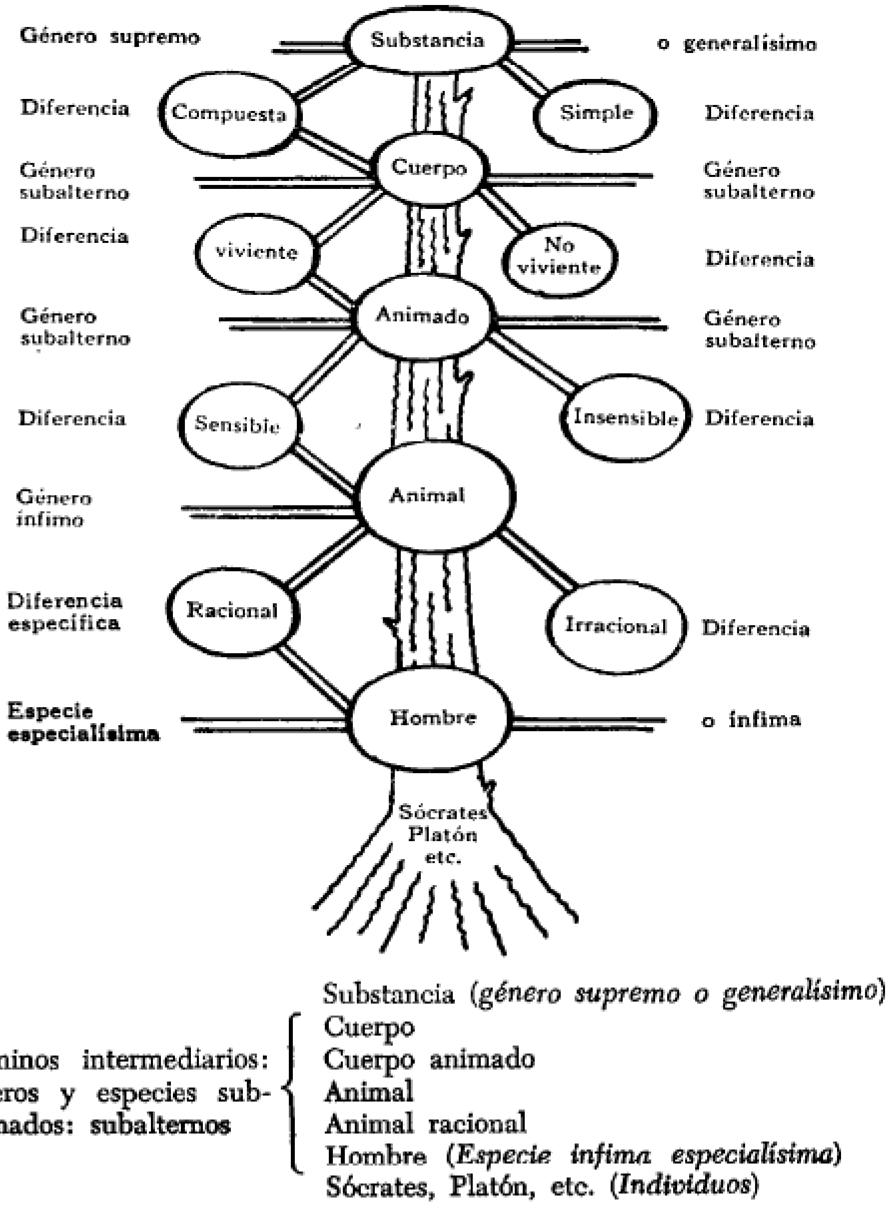


Figura 47
(El árbol de Porfirio)

La substancia, en este caso, sería el género generalísimo. El cuerpo es especie de la substancia, pero a la vez es género de la especie intermedia denominada "cuerpo animado". Sin embargo, el cuerpo animado es género de otra especie de nivel inferior, la especie "animal", que a su vez se convierte en género de la especie "hombre". Esta subordinación de conceptos nos la resume perfectamente Elí de Gortari al definir en su Diccionario de la Lógica, el Árbol de Porfirio:

“Esquema de definición por dicotomías sucesivas, que descienden del género más general a las especies más específicas o ínfimas” (Elí de Gortari, 2000, p.45)

Si bien “el árbol de Porfirio” no fue creación, como esquema gráfico, del propio Porfirio, si ha sido asumido de manera general que la exposición de este filósofo en su *Isagoge*, y a la que hemos hecho referencia, es la base conceptual del esquema. Sin embargo, no todos los estudiosos coinciden en dicha autoría “conceptual”. Narro y Rovira, en la introducción[29] a la traducción de la *Isagoge*, nos recuerdan unas palabras de Leopoldo Eulogio Palacios al respecto:

“Este célebre dibujo […] no aparece en Porfirio: ha sido pergeñado por los lectores de su Isagoge, y ha pasado con el nombre del autor de este tratado a los innumerables libros de lógica que lo reproducen con variantes, añadiduras y omisiones. Pero mucho antes de Porfirio, Séneca escribió en la quincuagésima octava de sus Epístolas Morales una descripción de la serie de conceptos genéricos y específicos que se pueden disponer en árbol”

Efectivamente, si leemos la carta mencionada de Séneca (4 a.n.e. – 65), podremos ver como hace un análisis similar al de Porfirio, aunque en primer lugar, toma un recorrido inverso: ***“con la mirada hacia atrás, cada ser en particular, ya que así llegaremos hasta el primer género”*** (Séneca, *Epístolas morales a Lucilio*, p.328). Comienza señalando la existencia de distintas especies (hombre, caballo, perro) que tienen como vínculo común el género que las abarca: animal. Los animales, como las plantas, tienen alma (según Séneca), y por tanto el peldaño superior será el de los seres animados. Siguiendo con esta ascensión conceptual, dado que también hay seres inanimados, la categoría superior será la de cuerpo. Y como realidad anterior a la corporal, hallamos “lo que es” –quod est-, que vendría a ser el equivalente de la substancia aristotélica. Realizado este análisis (Séneca, *Epístolas morales a Lucilio*, p.328-329) de “abajo a arriba”, pasa a hacer el recorrido de “arriba a abajo” coincidiendo en lo esencial con las ideas de Porfirio:

“ ``Lo que es´´ lo reparto entre las especies que constituyen los seres corpóreos y los incorpóreos; no existe una tercera. El cuerpo, ¿cómo lo divido? Diré que hay cuerpos animados e inanimados. A su vez los

[29] Introducción (p.XXIII) en Porfirio: *Isagoge* (Ver referencia completa al final)

animados, ¿cómo los dividiré? Diciendo que unos tienen alma, otros sólo principio vital; o bien que unos tienen impulso propio, caminan, mudan de lugar; otros, fijos en el suelo por la raíz, se alimentan y desarrollan. De nuevo, los animados, ¿en qué especies los reparto? O bien son mortales o inmortales" (Séneca, *Epístolas morales a Lucilio*, p.330)

Por lo que hemos visto, quizás no está tan claro que "el árbol de Porfirio" fuera resultado solo de las ideas de Porfirio, aunque lo más importante es su utilidad, aún hoy en día, para expresar un proceso denominado por algunos como "dicotomía" o "división exhaustiva" (Jevons, 1888, p.106-107)

2.1.5. El "Ars" de Ramón Llull

Ramón Llull nació en Palma (c.1232). Después de una crisis espiritual, dedicó su vida a divulgar la fe cristiana y convertir a los infieles. Llull llegó al convencimiento de que los principales dogmas cristianos se podrían demostrar a través de razonamientos irrefutables. Es en este contexto en el que debe ser comprendida su Arte ("Ars"), que luego explicaremos. Era tal la seguridad de Llull en su método y en su fe, que llegó a costarle la vida. En su tercer viaje al norte de África intentó predicar los errores de la fe musulmana. Según algunos cronistas, fue apedreado por la muchedumbre, quedando malherido y muriendo en el viaje de regreso (1315).

Según Llull, las verdades de la fe deben ser halladas por deducción lógica de los principios de la ciencia. Su Ars es el arte del descubrimiento de las verdades. Dicha obra fue fruto de numerosos intentos cuya culminación sería el Ars Generalis Ultima (1305-08). Me referiré básicamente, a modo de ilustración, a los elementos esenciales de esta obra[30].

Los elementos básicos o "alfabeto" del método llulliano se pueden resumir en el cuadro de la figura 48. Utiliza las letras B, C, D, E, F, G, H, I, K, para representar nueve principios absolutos, nueve principios relativos, nueve cuestiones generales, nueve sujetos, nueve virtudes y nueve vicios.

[30] Para la elaboración del capítulo dedicado a Llull, se ha consultado las obras de Umberto Eco, Anthony Bonner y Martin Gardner, referenciadas al final en la Bibliografía.

	Principios absolutos	Principios relativos	Cuestiones Generales	Sujetos	Virtudes	Vicios
B	Bondad	Diferencia	¿Si?	Dios	Justicia	Avaricia
C	Grandeza	Concordancia	¿Qué?	Ángel	Prudencia	Gula
D	Eternidad	Contrariedad	¿De qué?	Cielo	Fortaleza	Lujuria
E	Poder	Principio	¿Por qué?	Hombre	Templanza	Orgullo
F	Sabiduría	Medio	¿Cuánto?	Imaginación	Fe	Apatía
G	Voluntad	Fin	¿De qué clase?	Sensitiva	Esperanza	Envidia
H	Virtud	Mayoridad	¿Cuándo?	Vegetativa	Caridad	Ira
I	Verdad	Igualdad	¿Dónde?	Elementativa	Paciencia	Mentira
K	Gloria	Minoridad	¿Cómo? y ¿Con qué?	Instrumentativa	Piedad	Inconstancia

Figura 48
(Elementos básicos del Ars de Ramón Llull)

Sería una suerte de alfabeto del pensamiento. A partir de este alfabeto se forman cuatro figuras. La primera figura ("A") se crea a partir de los principios absolutos (ver columna correspondiente en la figura 48). Se trata de un círculo dividido en nueve partes. El sujeto y el predicado en esta figura se convierten mutuamente. Veámoslo en la figura 49 (tomado del *Arte Breve* de Llull, p.72)

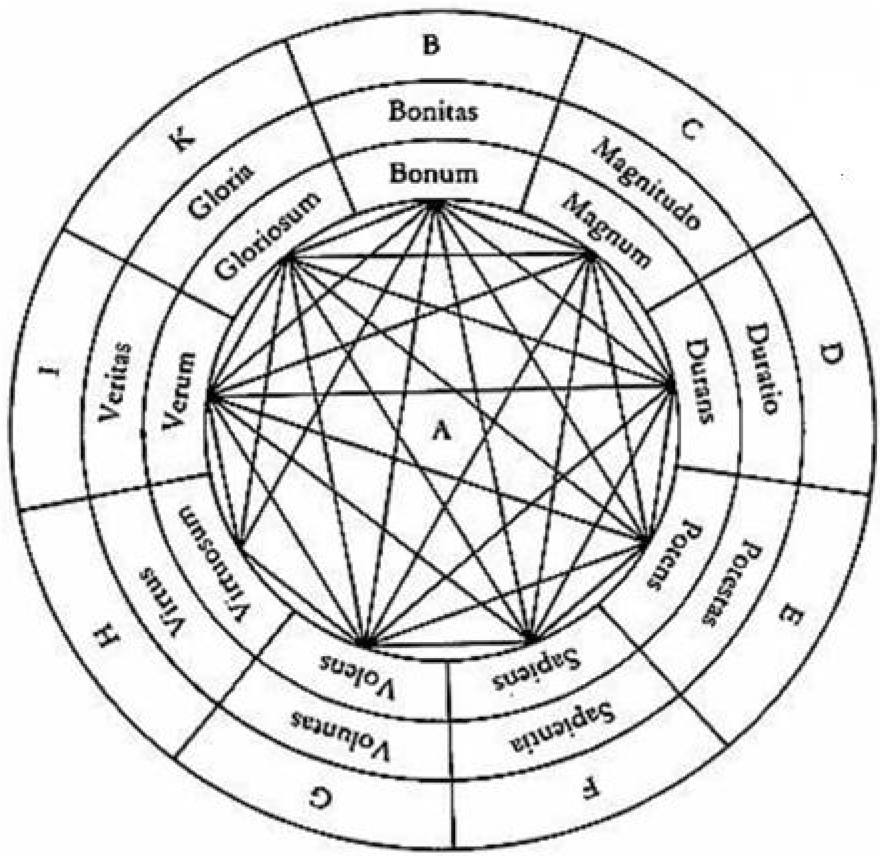


Figura 49
(Primera Figura (A) según el Ars de Llull)

Realmente la primera figura (A) es utilizada por Llull para realizar todos los emparejamientos posibles entre los Principios Absolutos para crear, de esta manera, proposiciones del tipo “La Bondad es grande” o “La Grandeza es buena”. Llull excluye las combinaciones del tipo BB (“La Bondad es buena”).

La segunda figura (ver figura 50, tomada del *Arte Breve* de Llull, p.73), es conocida como T.

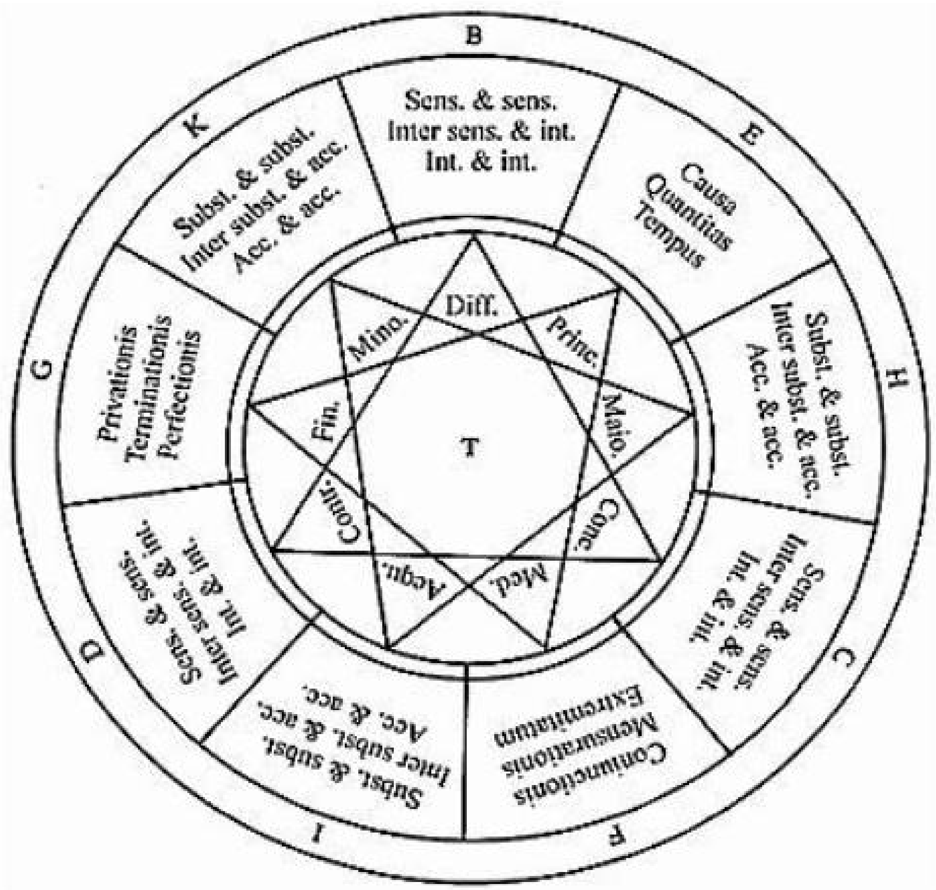


Figura 50
(Segunda Figura (T) según el Ars de Llull)

En el centro vemos tres triángulos. El primero es el de la diferencia, concordancia y contrariedad. El segundo, el del principio, el medio y el fin. Y el tercero, el de la mayoridad, la igualdad y la minoridad. Como nos recuerdo Umberto Eco, esta figura, en realidad, no realiza ninguna combinatoria, sino que consiste más bien en ***"un artificio visual-mnemónico que permite recordar las relaciones fijas entre varios tipos de relación y varios tipos de entidad"*** (Eco, 1994, p.33 –en la versión electrónica, p.45-). Intentemos descifrar con la ayuda del propio Llull, en su Arte Breve, el significado de esta figura. Decíamos que el primer triángulo es el de la diferencia, concordancia y contrariedad. Fijémonos en el ángulo de la diferencia (Diff.). El "compartimento" al que está conectado contiene tres líneas: i) Sens & sens; ii) Inter Sens & Int.; iii) Int. & int. Ello viene a significar que existen tres tipos de diferencia. A saber, según Llull:

i) Diferencia entre lo sensual y lo sensual, como por ejemplo, entre la piedra y el árbol.

ii) Diferencia entre lo intelectual y lo sensual, como por ejemplo, entre el alma y el cuerpo.

iii) Diferencia entre lo intelectual y lo intelectual, como por ejemplo, entre el alma y Dios.

Lo mismo puede decirse de los otros ángulos, el de la concordancia y la contrariedad. Es decir, cada una de ellas se darían entre lo sensual y lo sensual, entre lo intelectual y lo sensual, y entre lo intelectual y lo intelectual.

En cuanto al triángulo del Principio, Medio y Fin, vemos que el ángulo del Principio se conecta con el compartimento que contiene tres "especies":

i) Causa: que significa causa eficiente, material, formal y final.
ii) Cantidad.
iii) Tiempo.

El ángulo de Medio tiene también tres especies:

i) Medio de Conjunción: como la que se da entre el sujeto y el predicado, pues siempre hay un término medio entre ambos.
ii) Medio de Medida: *"existe por el acto que se da entre el agente y el agible, igual que el amar se encuentra entre el amante y el amable"* (Llull, *Arte Breve*, p.74).
iii) Medio de Extremidades: *"como la línea que hay entre dos puntos"* (Llull, *Arte Breve*, p.74)

En cuanto al ángulo de Fin, también tiene tres especies:

i) El fin de la privación
ii) El fin de la terminación
iii) El fin de la perfección (fin último)

El último triángulo, es el de la mayoridad, igualdad y minoridad. Cada una de ellas tiene tres especies:

i) Entre substancia y substancia
ii) Entre substancia y accidente
iii) Entre accidente y accidente

La tercera figura del Ars llulliana (ver figura 51; tomada de Bonner, 2007, p.142), se compone a partir de las dos primeras figuras. Así, un elemento de dicha tercera figura puede representar dos conceptos, a la vez, procedentes de las figuras A y T.

BC	CD	DE	EF	FG	GH	HI	IK
BD	CE	DF	EG	FH	GI	HK	
BE	CF	DG	EH	FI	GK		
BF	CG	DH	EI	FK			
BG	CH	DI	EK				
BH	CI	DK					
BI	CK						
BK							

Figura 51
(Tercera Figura del Arte de Ramón Llull)

Vemos que la tercera figura consta de 36 compartimentos, cada uno de los cuales tendrá múltiples significados, dependiendo, a su vez, del significado atribuido a cada letra. Por ejemplo, el compartimento BC, si nos atenemos a los Principios Absolutos (primera figura), podría significar que la “Bondad es Grande”, pero si a la C le damos el significado de un Principio Relativo, tendríamos que “La Bondad es concordante”.

La cuarta figura (ver figura 52; tomada de Bonner, 2007, p.143) la podemos ver a continuación:

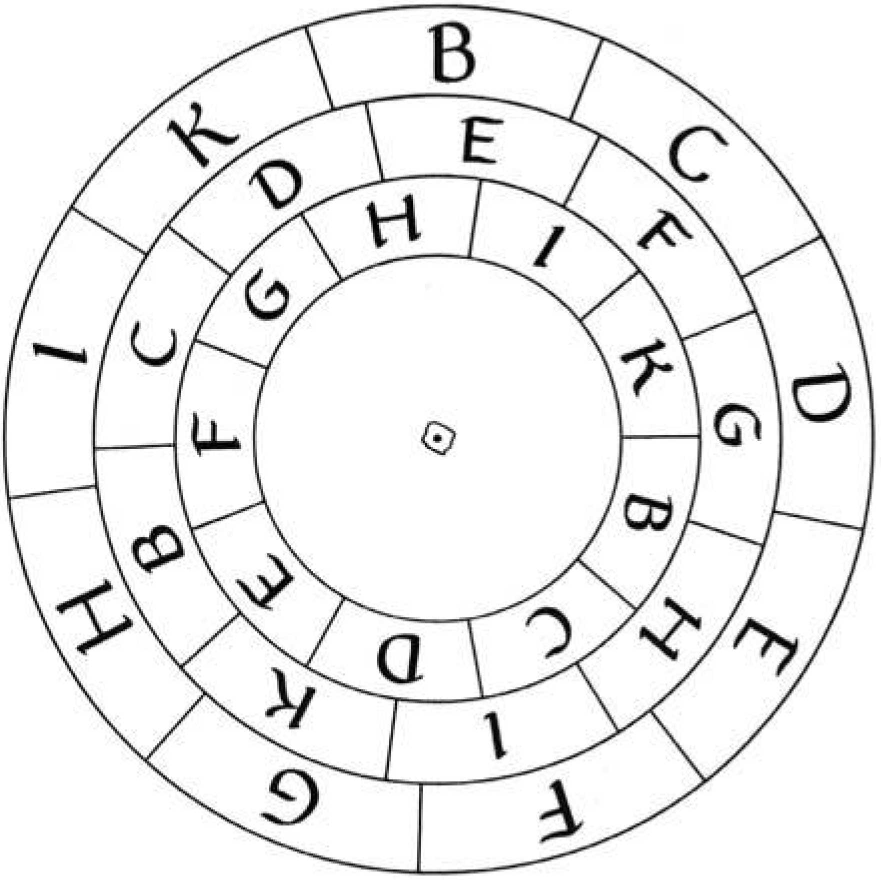


Figura 52
(Cuarta Figura del Arte de Llull)

Consta de tres círculos concéntricos. El más externo sería fijo, y los dos interiores serían giratorios. Vemos que cada círculo tiene las nueve letras (de la B a la K). El mecanismo giratorio estaría dispuesto para que se pudieran formar combinaciones de tres letras, de tal manera que no se pudieran repetir, sin tener en cuenta el orden. Matemáticamente serían combinaciones de nueve elementos tomados de tres en tres. Aplicando la fórmula para hallar el número total de combinaciones, tendríamos: [9!] / [(3!) * (6!)] = [9 * 8 * 7] / [3 * 2 * 1] = 84 combinaciones.

Ahora bien, hay que tener en cuenta que cada letra tiene un doble significado, pues puede referirse a un elemento de la primera figura o de la segunda figura, con lo cual, el número total de combinaciones realmente será mucho mayor que las 84 combinaciones halladas más arriba. Para entenderlo, escojamos una de esas 84 combinaciones. Por ejemplo, la combinación BCD. Como decíamos, cada letra puede ser un elemento de la primera figura o de la segunda. La letra B, podría significar “Bondad” o “Diferencia”. Lo mismo pasaría con la C y con la D. Así que realmente estaríamos combinando seis elementos en lugar de tres. Esto puede suponer un problema en cuanto a la simbolización, que será resuelto por Llull mediante un artilugio que luego explicaremos. Los estudiosos de Llull lo han resuelto de la siguiente manera. Cuando una letra se refiera a la primera figura se pondrá en mayúscula. Cuando se refiera a la segunda figura, se pondrá en minúscula. Así, la tripleta BCD, en realidad está representando combinaciones de seis elementos (B, C, D, b, c, d) tomados de tres en tres, lo que hace un total de veinte combinaciones. Es decir, el conjunto (tripleta) BCD, representa en realidad las siguientes veinte combinaciones:

1. B C D	11. C D b	17. D b c	20. b c d
2. B C b	12. C D c	18. D b d	
3. B C c	13. C D d	19. D c d	
4. B C d	14. C b c		
5. B D b	15. C b d		
6. B D c	16. C c d		
7. B D d			
8. B b c			
9. B b d			
10. B c d			

Figura 53
(las veinte posibles combinaciones de la tripleta BCD)

Pero estas veinte combinaciones son las originadas por una sola tripleta (BCD). Como teníamos un total de 84 tripletas, el número total de combinaciones será de 84 x 20, es decir, 1.680 combinaciones, cada una con su significado. Decíamos que Llull había resuelto el problema de la representación de otra manera. Llull utiliza una simbolización que puede dar lugar a cierta confusión, y conviene aclarar al lector. Utiliza una letra adicional (T), no para ser combinada, sino como marca de diferenciación. Así la T, en una combinación, debe interpretarse de tal manera que la letra (o letras) que la siguen, serán entendidas como elementos de la segunda figura (según la otra representación, como si fueran minúsculas). Así la combinación B C b (la numerada como 2 en la figura 53) se representaría, según la notación llulliana, como BCTB, y la combinación Bbc (la número 8 de la figura 53), sería, según Llull, representada como BTBC.

Una vez explicados los elementos básicos del Arte llulliano (en su último desarrollo), veamos como se utilizan. Las combinaciones posibles de la cuarta figura, dan lugar a preguntas. La elección de la pregunta vendría dada por la primera letra.

Pongamos un ejemplo (Bonner, 2007, p.150). Escojamos la combinación 15 de nuestra figura 53. Se trata de la combinación: “Cbd”. La primera letra de esta combinación, la C, es la que nos indica el tipo de pregunta a realizar. Para ello debemos acudir al “alfabeto” (figura 48). En la columna de “cuestiones generales”, en la fila correspondiente a la C, la cuestión que aparece es: “¿Qué?”. Una vez identificado el tipo de cuestión, debemos descifrar los conceptos que corresponden a cada letra. De esta manera tenemos que C=grandeza; b=diferencia; d=contrariedad. La pregunta que formula Llull al respecto es: “¿Qué es gran diferencia y contrariedad?”. Veamos otro ejemplo (tomado de Eco, p.34 –en la versión electrónica es p.46). Tenemos la combinación BCc, cuya pregunta correspondiente sería: “¿Si la bondad es grande en cuánto contiene en sí cosas concordantes?”.

Aunque la combinatoria llulliana parece determinar de forma exacta las cuestiones a plantearse, sin embargo, el significado de cada término permite ciertas libertades. En el siguiente ejemplo, tomado de Bonner, para la combinación “Hik” (HTIK, según la notación original de Llull), tendríamos: ***“Pregunta: ¿Cuándo hay menos caridad, paciencia y piedad? La respuesta es: Cuandoquiera que haya mayor ira, mentira e inconstancia”***. (Bonner, 2007, p.171). Aquí vemos como la “H” es polisémica, pues es igual a “cuando”, “mayor” (mayoridad), “caridad” e “ira; la I = “paciencia” y “mentira”, y la K = “menos” (menoridad), “piedad” e “inconstancia”.

El método llulliano es un primer intento de utilizar la lógica para llegar al conocimiento de la verdad. El gran número de combinaciones a las que se puede llegar tienen una intención. Gardner nos lo resume de manera diáfana:

> ***“Para Llull era natural suponer que agotando todas las combinaciones de tales principios se podrían explorar todas las posibles estructuras de la verdad, y obtener así conocimiento universal”*** (Gardner, 1985, p.40)

2.2. *Los diagramas lógicos: Leibniz, Euler, Venn y Peirce* (Comienzos del siglo XVIII hasta comienzos del siglo XX)

Después de todos los siglos de la anterior etapa, caracterizada por esa “inconexión gráfica” a la que me he referido más arriba, va a producirse un cambio sustancial en lo que se refiere a las representaciones gráficas en lógica. Se trata de la aparición de los diagramas lógicos. Comencemos definiendo el concepto de diagrama lógico:

> ***"Un diagrama lógico es una figura geométrica de dos dimensiones cuyas relaciones espaciales están dispuestas de modo que sean isomórficas con la estructura lógica de un enunciado o conjunto de enunciados, con el fin de hacer ver la forma lógica del enunciado o conjunto de enunciados correspondiente"*** (Vega, 1997, p.163)

Se puede considerar que el primero que introduce el uso de los diagramas lógicos es Leibniz. Utiliza dos tipos de diagramas, los diagramas lineales y los diagramas circulares. Los primeros no tuvieron realmente continuación, pero los diagramas circulares iniciaron un método de representación y de trabajo que tuvo su continuación con Euler, Venn y Peirce, llegando hasta la actualidad, como podremos comprobar al analizar la tercera etapa histórica.

2.2.1. Gottfried Leibniz (1646-1716)

De las múltiples contribuciones de Leibniz a distintas disciplinas, quizás una de las menos conocidas sea su propuesta de representación diagramática en lógica. Es idea ampliamente extendida que Euler fue el primero en utilizar los diagramas circulares como representación gráfica de los silogismos categóricos. Baron, basándose en Couturat, nos recuerda que realmente fue Leibniz el que, unos cuantos años antes que Euler, había hecho su propuesta diagramática, con líneas y con círculos. Convendría acudir al propio texto de Leibniz, y comprobar efectivamente este hecho. Leibniz explora en primer lugar, la posibilidad de representar gráficamente las proposiciones universales. Tomaremos directamente del escrito de Leibniz, sus diagramas para las proposiciones categóricas (Leibniz, 1703, pp.292-293)

La universal afirmativa (del tipo "Todo B es C"), se representaría así (figura 54) según Leibniz:

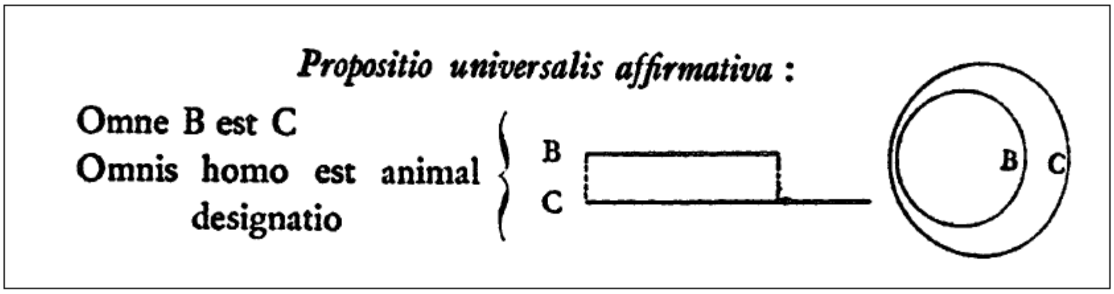


Figura 54
(Representación gráfica de la Universal Afirmativa, según Leibniz, 1703, p.292)

La universal negativa sería representada de acuerdo a lo mostrado en la figura 55.

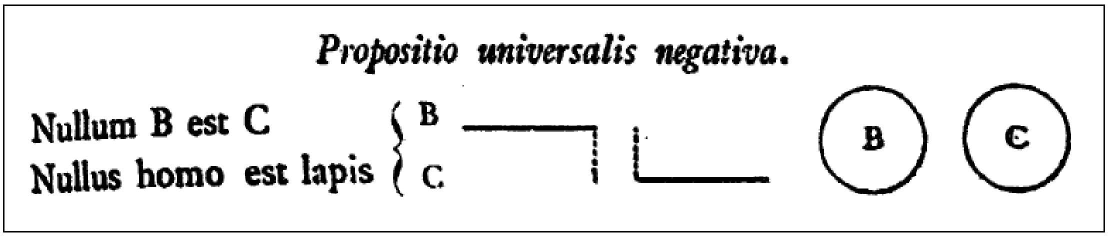


Figura 55
(Representación gráfica de la Universal Negativa, según Leibniz,1703, p.293)

La Particular Afirmativa sería representada, según Leibniz, según la figura 56.

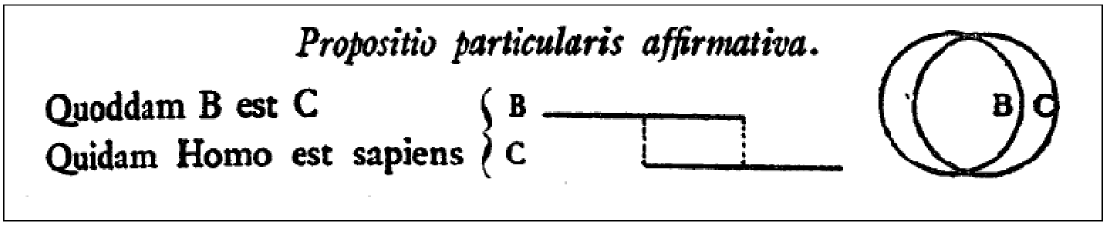


Figura 56
(Representación gráfica de la Particular Afirmativa, según Leibniz, 1703, p.293)

La Particular negativa la podemos ver representada en la figura 57.

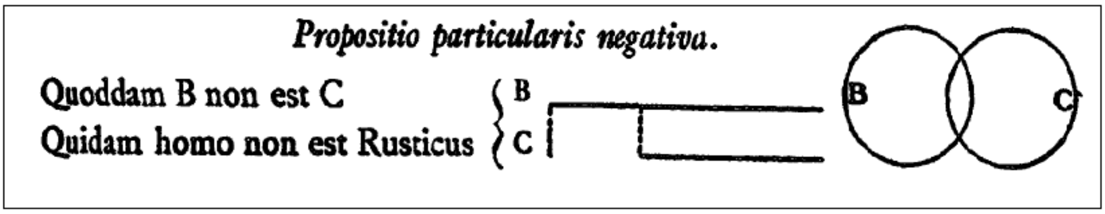


Figura 57
(Particular negativa, según la representación gráfica propuesta por Leibniz, 1703,p.293)

En las figuras lineales, los conceptos se representan por línea paralelas. Las líneas de puntos indican el sentido de la proposición. También delimitan en cada línea el segmento considerado. Vemos como tanto en la universal afirmativa como en la particular afirmativa, las líneas punteadas cortan segmentos en cada línea paralela. En las particulares negativas, solo una de las líneas de puntos corta a la paralela. En la universal negativa, ninguna de las dos líneas de puntos corta a la otra paralela.

A partir de estos elementos básicos, Leibniz representa los silogismos categóricos (figuras 58 a 81, tomadas de Leibniz, 1703, pp.294 a 298) Así, para la primera figura del silogismo categórico, y en concreto para el modo “Barbara”, tendríamos la representación de la figura 58. Recordemos que este modo se podría esquematizar así:

Todo C es B

Todo D es C

Conclusión: Todo D es B

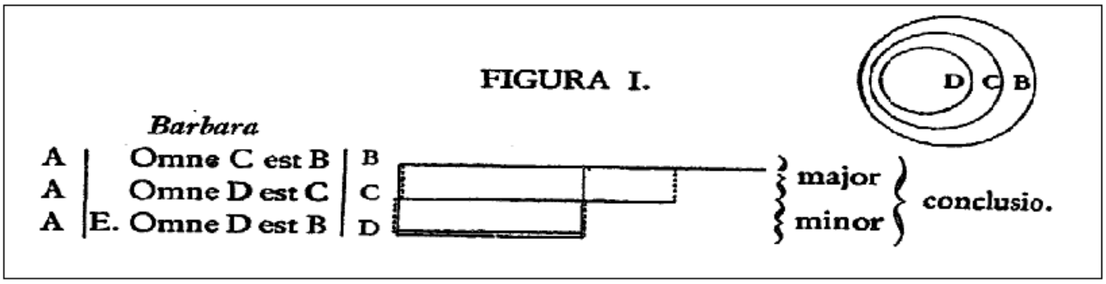


Figura 58
(Representación gráfica del modo Barbara, de la primera figura silogística)

A continuación veremos los distintos modos de la primera figura. Primero recordaremos el esquema correspondiente, y a continuación la representación gráfica propuesta por Leibniz.

Barbari:

Todo C es B

Todo D es C

Conclusión: Algún D es B

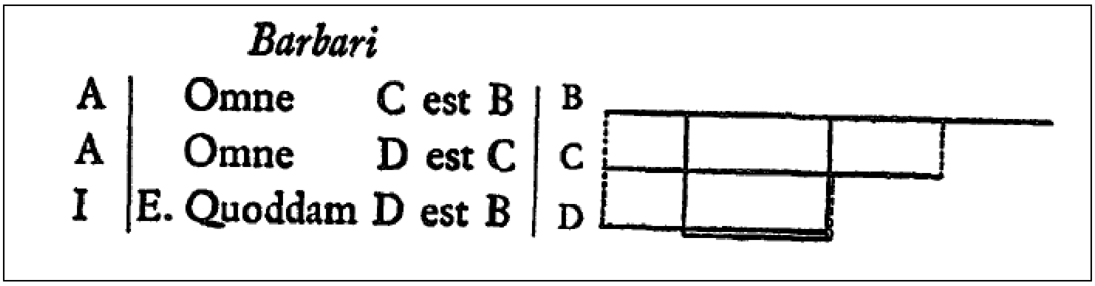


Figura 59 (Representación gráfica, según Leibniz, para el modo Barbari)

Celarent:

Ningún C es B

Todo D es C

Conclusión: Ningún D es B

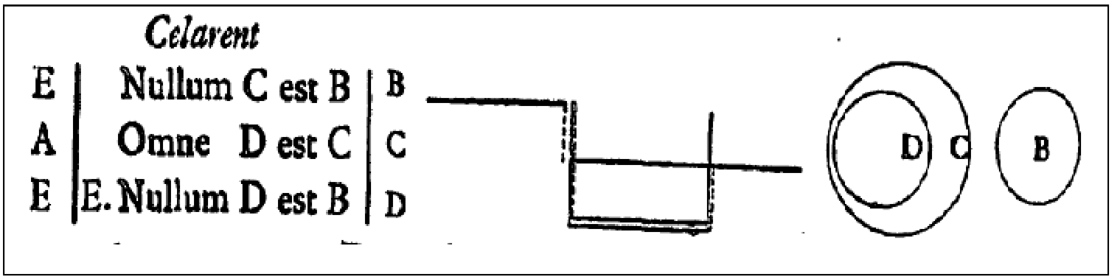


Figura 60
(Representación gráfica, según Leibniz, para el modo Celarent)

Celaro:

Ningún C es B

Todo D es C

Conclusión: Algún D no es B

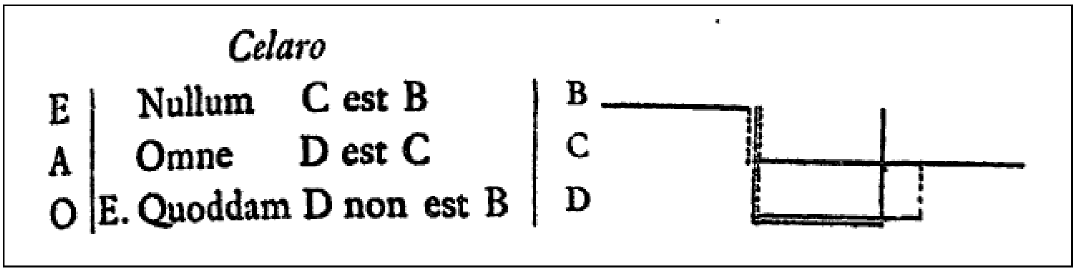


Figura 61
(Representación gráfica del modo Celaro, según Leibniz)

Darii:

Todo C es B

Algún D es C

Conclusión: Algún D es B

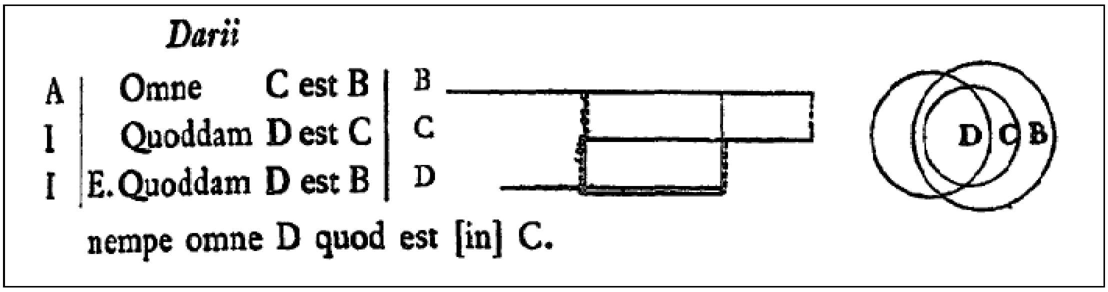


Figura 62
(Representación gráfica del modo Darii, según Leibniz)

Ferio:

Ningún C es B

Algún D es C

Conclusión: Algún D no es B

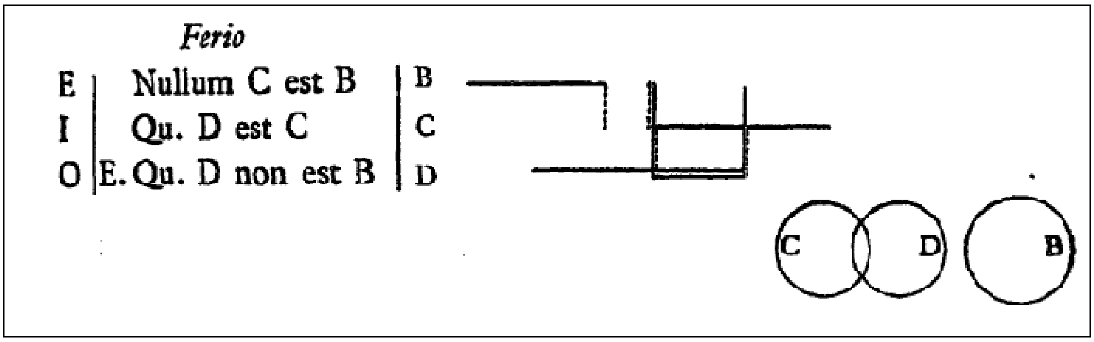


Figura 63
(Representación del modo Ferio, según Leibniz)

A continuación veremos los distintos modos de la segunda figura del silogismo categórico. Primero recordaremos el esquema del modo correspondiente, para a continuación pasar a la representación gráfica propuesta por Leibniz.

Cesare:

Ningún B es C

Todo D es C

Conclusión: Ningún D es B

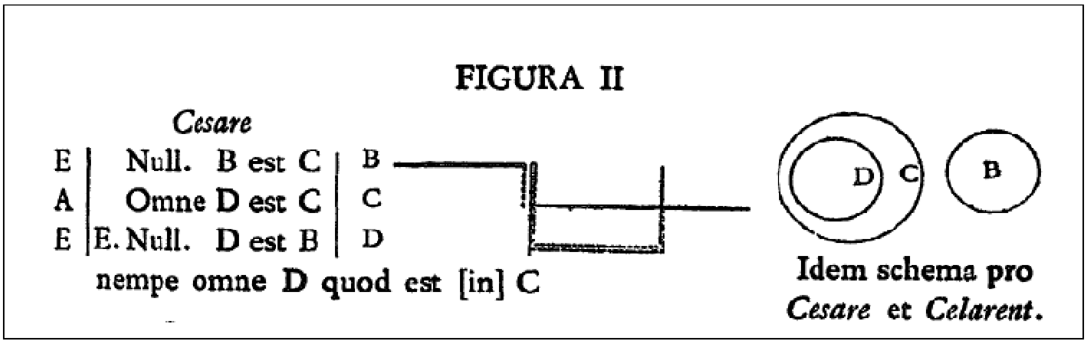


Figura 64
(Representación gráfica para el modo Cesare según Leibniz. Indica Leibniz que es el mismo esquema que para el modo Celarent, de la primera figura)

Cesaro:

Ningún B es C

Todo D es C

Conclusión: Algún D no es B

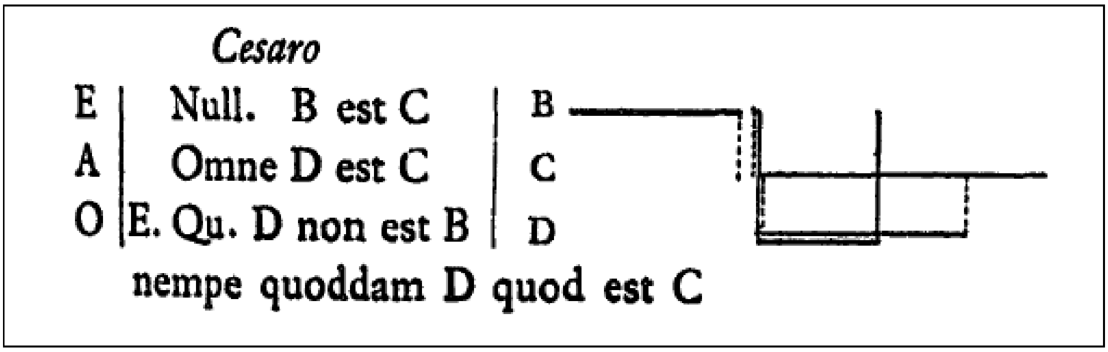


Figura 65
(Representación del modo Cesaro, según Leibniz)

Camestres:

Todo B es C

Ningún D es C

Conclusión: Ningún D es B

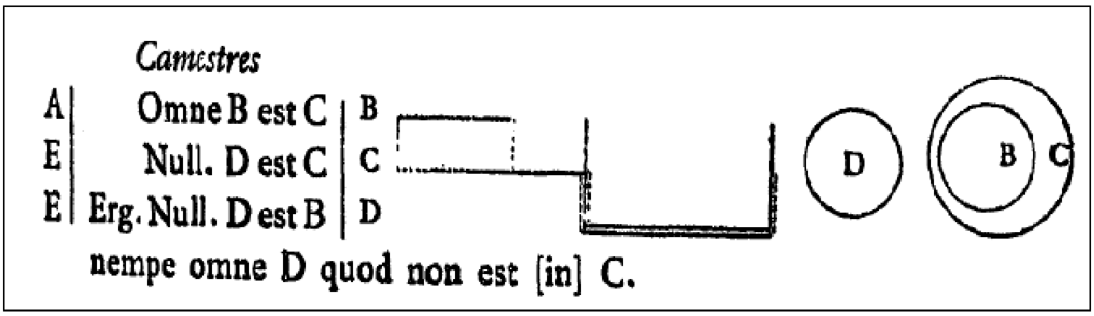


Figura 66
(Representación gráfica del modo Camestres, según Leibniz)

Camestros:

Todo B es C

Ningún D es C

Conclusión: Algún D no es B

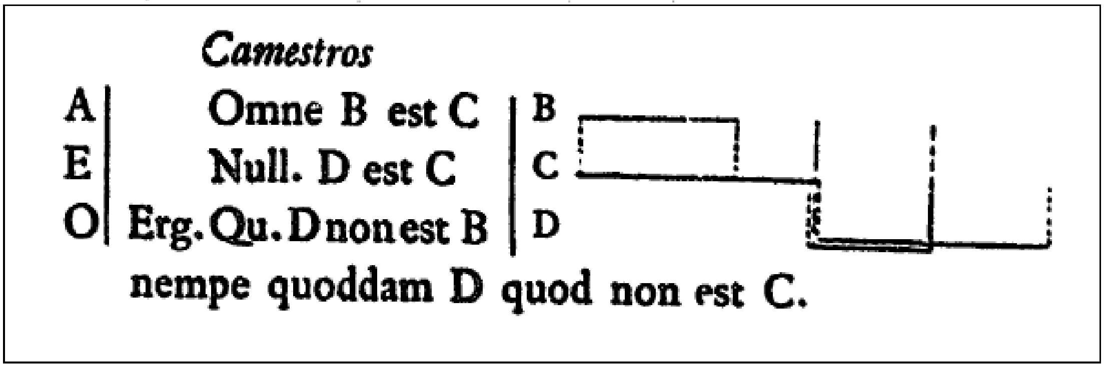


Figura 67
(Representación gráfica del modo Camestros, según Leibniz)

Festino:

Ningún B es C

Algún D es C

Conclusión: Algún D no es B

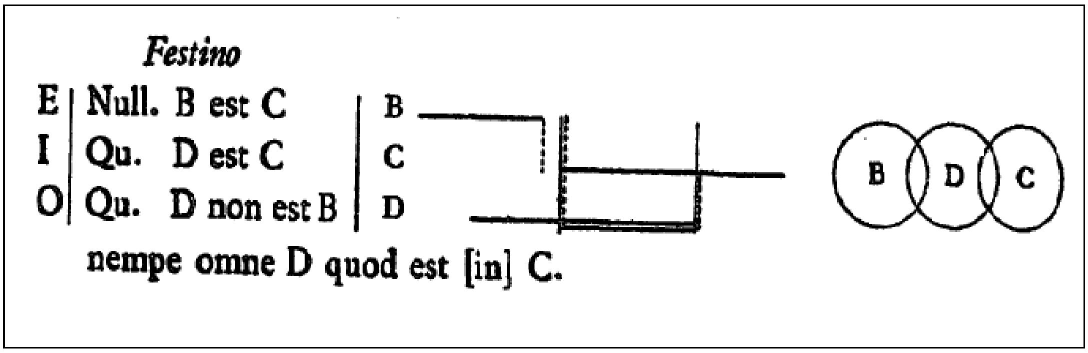


Figura 68
(Representación gráfica del modo Festino, según Leibniz)

Baroco:

Todo B es C

Algún D no es C

Conclusión: Algún D no es B

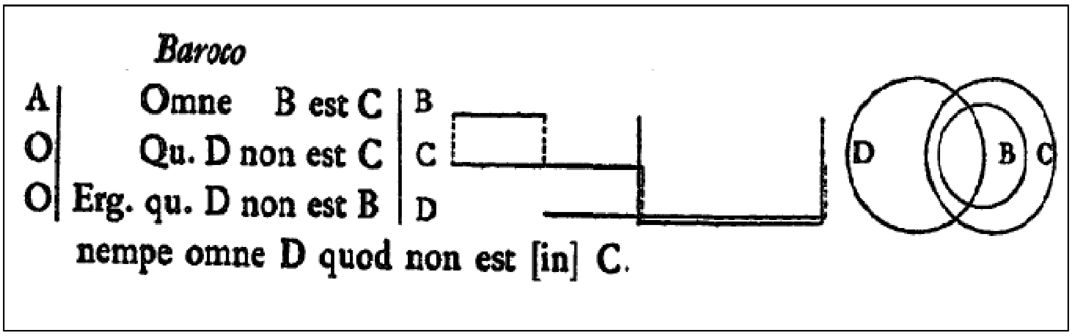


Figura 69
(Representación gráfica del modo Baroco, según Leibniz)

A continuación veremos los distintos modos de la tercera figura del silogismo categórico. Seguiremos el mismo método de trabajo que con las otras figuras. Primero recordaremos el esquema del modo correspondiente. Y en segundo lugar, dispondremos de la representación gráfica propuesta por Leibniz.

Darapti:

Todo C es B

Todo C es D

Conclusión: Algún D es B

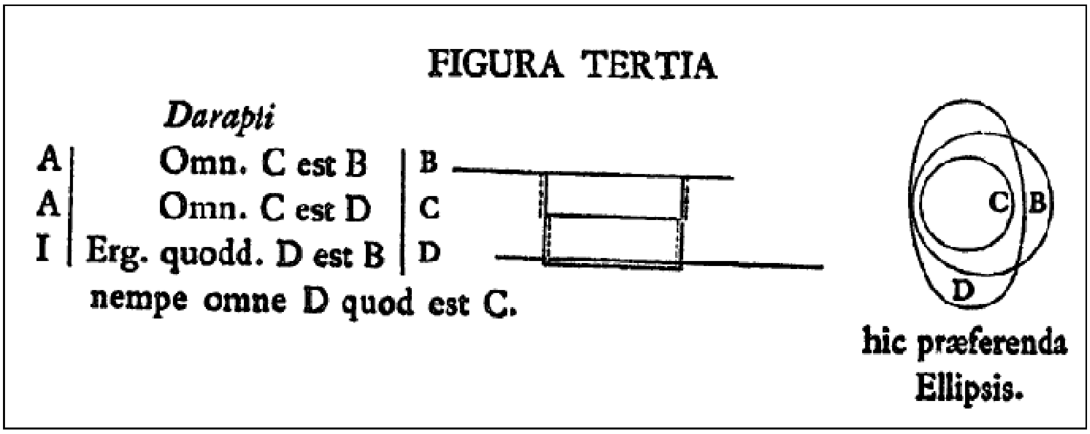


Figura 70
(Representación gráfica del modo Darapti, según Leibniz)

Felapton:

Ningún C es B

Todo C es D

Conclusión: Algún D no es B

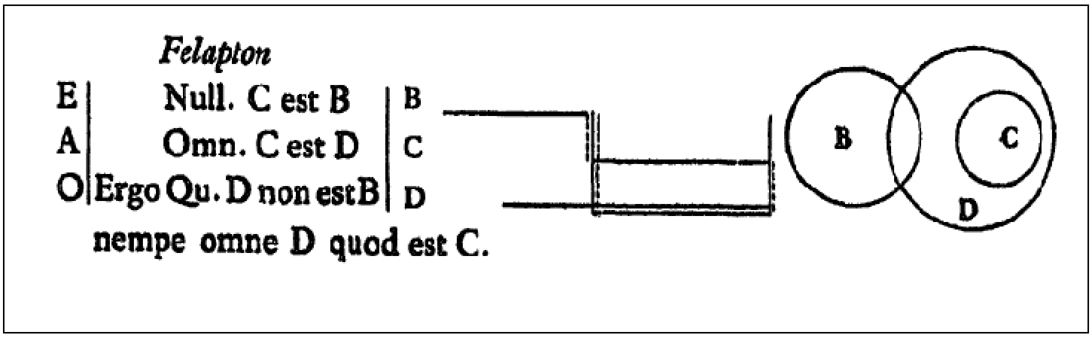


Figura 71
(Representación gráfica del modo Felapton, según Leibniz)

Disamis:

Algún C es B

Todo C es D

Conclusión: Algún D es B

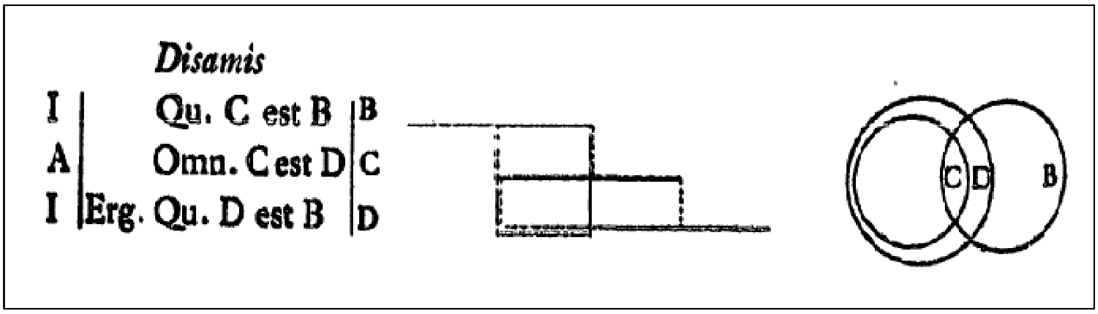


Figura 72
(Representación gráfica del modo Disamis, según Leibniz)

Datisi:

Todo C es B

Algún C es D

Conclusión: Algún D es B

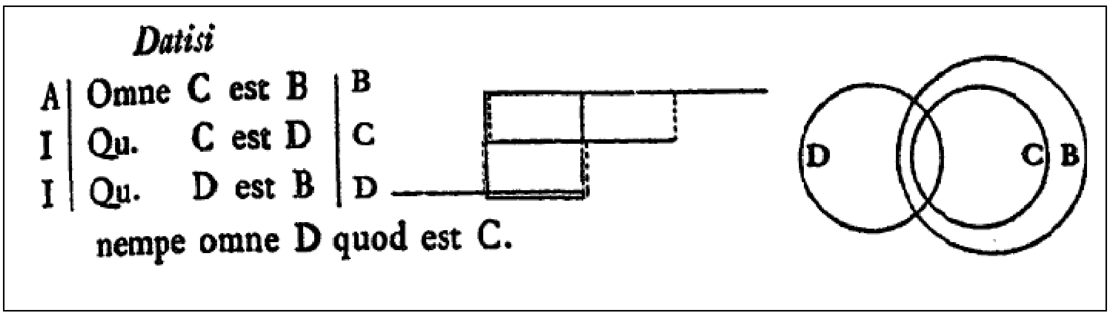


Figura 73

(Representación gráfica del modo Datisi, según Leibniz)

Bocardo:

Algún C no es B

Todo C es D

Conclusión: Algún D no es B

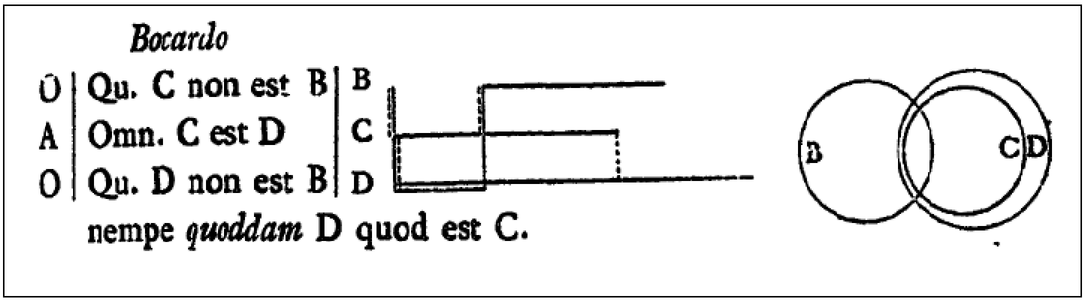


Figura 74
(Representación gráfica del modo Bocardo, según Leibniz)

Ferison:

Ningún C es B

Algún C es D

Conclusión: Algún D no es B

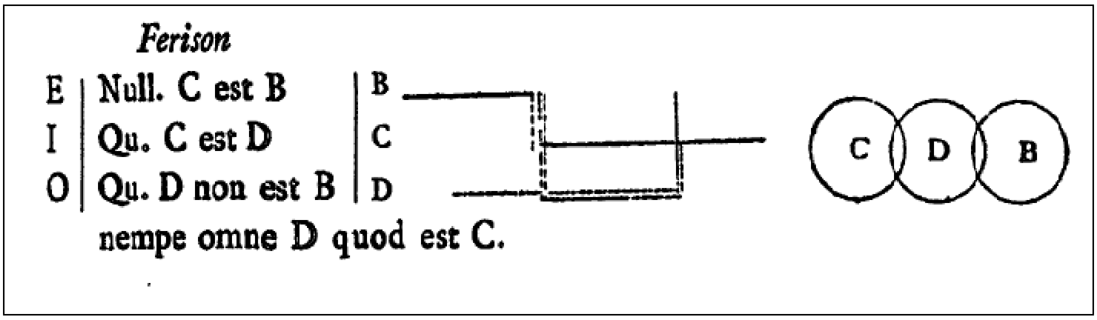


Figura 75
(Representación gráfica del modo Ferison, según Leibniz)

A continuación veamos los modos de la cuarta figura y su correspondiente representación gráfica.

Callentes:

Todo B es C

Ningún C es D

Conclusión: Ningún D es B

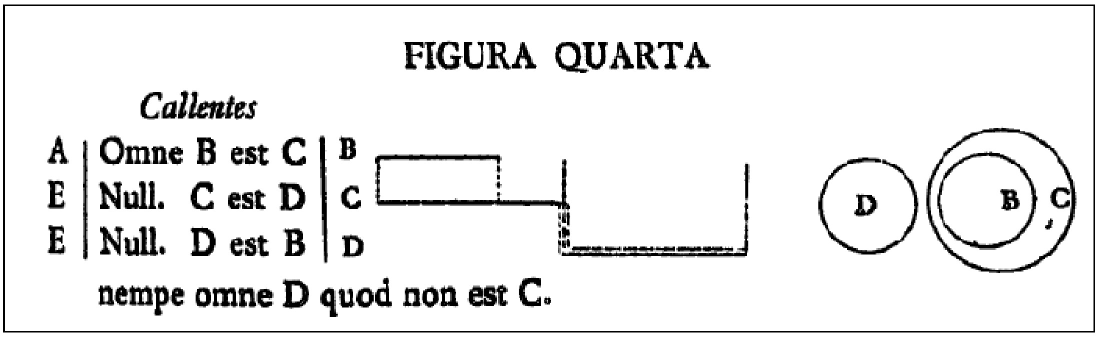


Figura 76
(Representación gráfica del modo Callentes, según Leibniz)

Callentos

Todo B es C

Ningún C es D

Conclusión: Algún D no es B

Callentos
A | eodem modo, non differt schemate a *Camestros*.
E |
O |

Figura 77
(Leibniz nos indica que el gráfico correspondiente a Callentos es el mismo que el de Camestros – 2ª figura -)

Baralip

Todo B es C

Todo C es D

Conclusión: Algún D es B

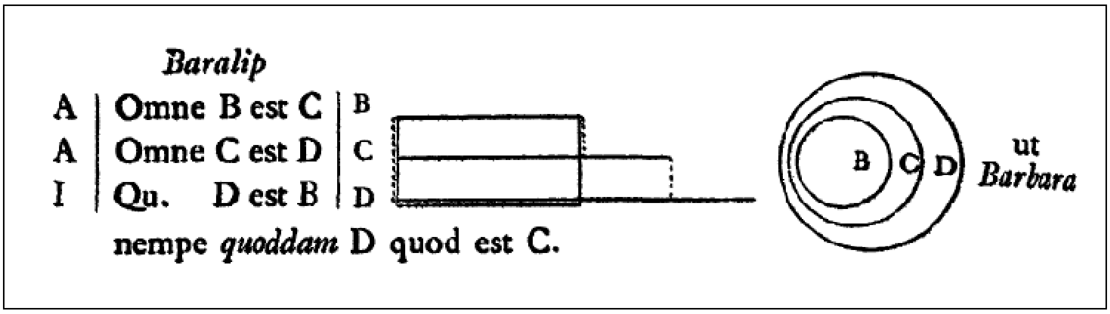


Figura 78
(Representación gráfica del modo Baralip, según Leibniz)

Dibatis:

Algún B es C

Todo C es D

Conclusión: D es B

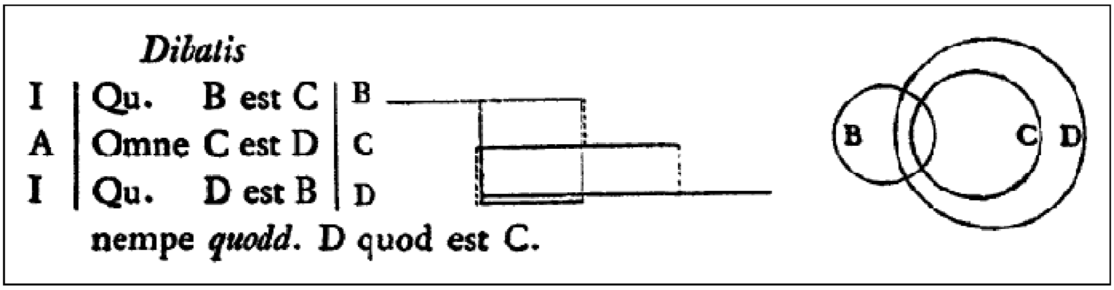


Figura 79
(Representación gráfica para Dibatis, según Leibniz)

Fessapmo

Ningún B es C

Todo C es D

Conclusión: Algún D no es B

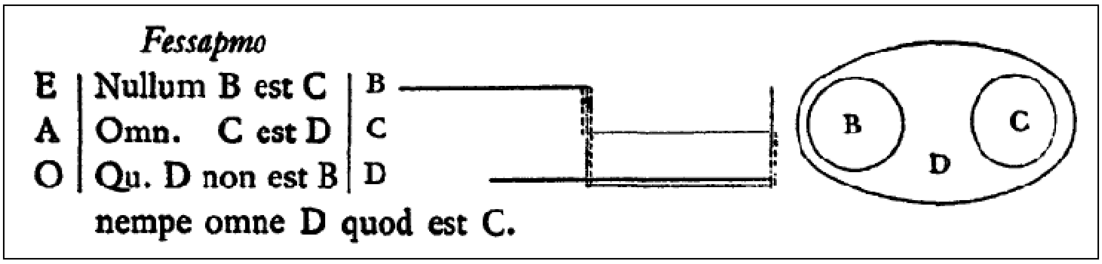


Figura 80
(Representación gráfica para Fessapmo, según Leibniz)

Fresisom:

Ningún B es C

Algún C es D

Conclusión: Algún D no es B

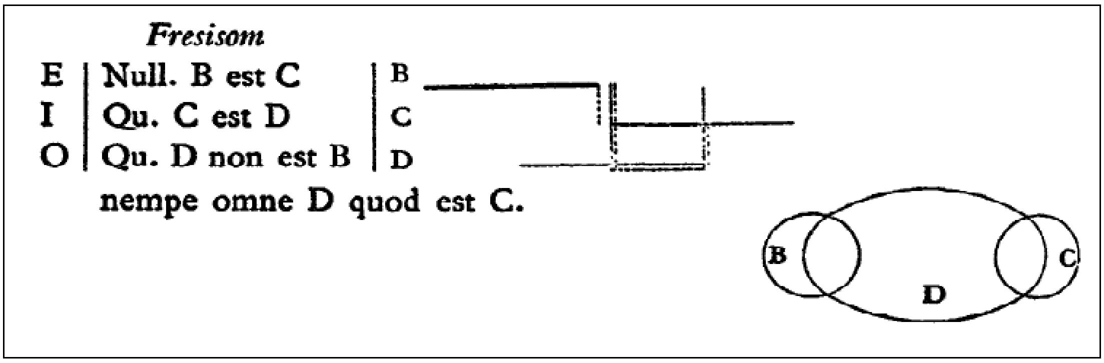


Figura 81
(Representación gráfica para Fresisom, según Leibniz)

Con sus diagramas, Leibniz abrió un nuevo camino en la representación gráfica en lógica. A continuación veremos las aportaciones de Euler, Venn y Peirce que siguieron la línea iniciada por el gran genio alemán.

2.2.2. Leonhard Euler (1707-1783)

Los escritos en los que Euler expone su sistema diagramático datan de 1761, y se incluyen en la obra titulada *Cartas a una Princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*[31]. Es posible que nos resulte extraño que una de las principales aportaciones a la historia de los diagramas lógicos, se recoja en una colección de epístolas dirigidas a un miembro de la nobleza prusiana. Sirvan, por tanto, las siguientes notas biográficas sobre Euler para darle sentido a este hecho.

Euler era un matemático y físico suizo. En 1727 recibió una invitación de la Academia de las Ciencias de San Petersburgo, llegando a sustituir a Daniel Bernoulli en el departamento de matemáticas, en 1733. La situación política en Rusia comenzó a complicarse debido a los problemas relacionados con la sucesión al trono. Todo ello creó, a su vez, una situación de incertidumbre en la Academia de Ciencias. En consecuencia, Euler decidió aceptar la invitación que le había hecho otra Academia, en esta ocasión la de Ciencias de Berlín, incorporándose a ella en 1741. Asimismo tuvo la posibilidad de dar clases a la princesa Filippina von Schwendt de Anhalt-Dessau, pariente de Federico II el Grande de Prusia. Debido a la interrupción de dichas clases, Euler completó sus lecciones por escrito, en forma de cartas. Le escribió doscientas

---

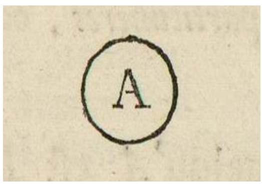
[31] Publicado en francés, bajo el título de *Lettres a une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de phisique et de philosophie.* Editado por la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo: Tomo I (cartas I a LXXIX) en 1768; Tomo II (cartas LXXX a CLIV) en 1768; Tomo III (cartas CLV a CCXXXIV) en 1772. Esta es la edición que se ha manejado para la elaboración de este capítulo. También existe una traducción al inglés: Hunter, H.: *Letters to a German Princess*; London, 1795. Asimismo hay una traducción disponible en castellano, *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*, Ed. Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1990.

treinta y cuatro cartas sobre temas científicos y filosóficos, con una finalidad preferentemente didáctica. Las escribió entre 1760 y 1762. En 1766, Euler regresó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. La situación política en el Imperio ruso se había ido calmando, y el ofrecimiento de un nuevo puesto en la Academia con unas condiciones ventajosas hicieron que Euler se decidiera por regresar a San Petersburgo. Por entonces, recopiló las cartas que había dirigido a la princesa Filippina von Schwendt bajo el título de *Cartas a una Princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*, publicando en 1768 los dos primeros tomos, y en 1772, el tercero. Las cartas CII a CVIII estaban dedicadas a la lógica, y en algunas de éstas Euler expone su sistema de representación diagramática. Es un sistema que básicamente había ya creado Leibniz hacía unos cincuenta y ocho años. Sin embargo Euler no hace ninguna mención del gran filósofo alemán. No creo que Euler fuera deshonesto intelectualmente al respecto, sino que simplemente desconocía los diagramas propuestos por Leibniz.

Euler explica a la princesa conceptos lógicos básicos: los tipos de proposiciones (universales, particulares, afirmativas, negativas); el sujeto y el predicado de una proposición; el silogismo categórico e hipotético, etc. Debido a la naturaleza pedagógica de estas cartas, la exposición de Euler es un tanto particular. La podríamos dividir en dos partes. La primera parte es una introducción en la cual Euler hace uso de los diagramas circulares. La segunda parte consiste en una exposición de los conceptos lógicos, de un modo tradicional sin hacer ya referencia a dichos diagramas.

En esa primera parte introductoria mencionada, es donde Euler hace su primera gran aportación diagramática a la Lógica:

"Ya que una noción general contiene un infinito número de objetos individuales, la consideramos como un espacio en el que están todos los individuos contenidos. Así para la noción de "hombre" creamos un espacio



en el cual se concibe que todos los hombres están comprendidos” [32]
(Euler, 1768, Tomo II, p.98)

Como vemos, se trata de una idea sencilla pero no por ello menos ingeniosa. De alguna manera era una idea asumida de forma implícita ya por Leibniz, pero Euler la formula de manera clara y explícita. A partir de esta figura, Euler ascenderá en el nivel explicativo pasando a representar los cuatro tipos de proposiciones categóricas de sobra conocidos, así como los silogismos.

Partiremos del cuadro-resumen que propone Euler[33] (Euler, 1768, tomo II, p.101)

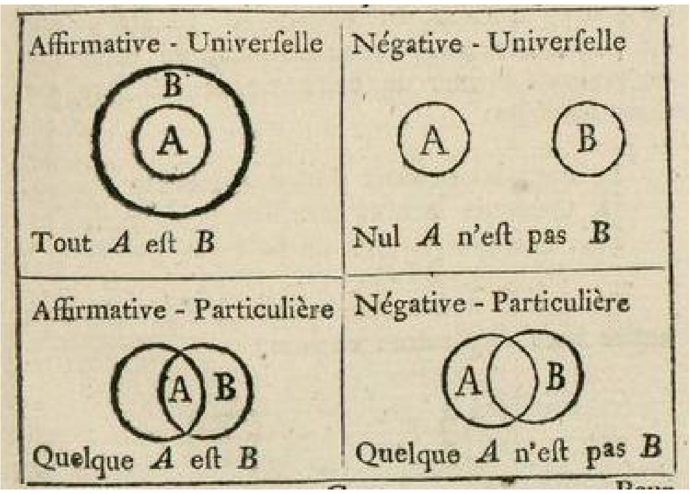


Figura 82
(cuadro-resumen para las proposiciones categóricas, según Euler)

Traduciremos las frases en francés de dicho cuadro:

Afirmativa – Universal Todo A es B	Negativa – Universal Ningún A es B
Afirmativa – Particular Algún A es B	Negativa – Particular Algún A no es B

Figura 83
(traducción del cuadro de la figura 82)

[32] Traducido al español, por el autor de este trabajo, a partir del fragmento de *Lettres a une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de phisique et de philosophie,* 1768, Tomo II, p.98 (referencia completa al final)
[33] Imagen tomada del original

A continuación seguiremos el análisis que hace Euler, caso por caso. En primer lugar, para las proposiciones Universales Afirmativas (del tipo **"Todo A es B"**) propone el siguiente diagrama:

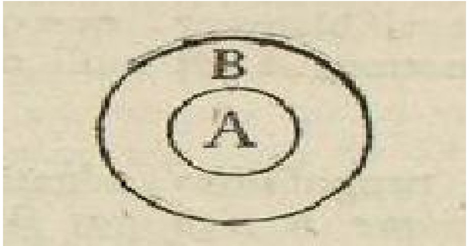


Figura 84
("Todo A es B")

El espacio A que representa al sujeto, está todo él contenido en el espacio B, que representa al predicado. Además Euler señala que este diagrama representa también otras dos proposiciones adicionales:

"Algún B es A" y "Algún B no es A". Euler nos expone esta idea con un ejemplo. Si B representa la idea de "árbol" en general, y A, la de "peral" en general, el diagrama representaría estas tres proposiciones:

(i) "Todo peral es un árbol"

(ii) "Algunos árboles son perales"

(iii) "Algunos árboles no son perales"

Si nos fijamos, Euler no solo muestra la representación diagramática de la Universal Afirmativa, que ya había realizado Leibniz, sino que también está introduciendo una representación de la doctrina de la conversión (inversión de los términos de una proposición categórica, manteniendo el valor de verdad). De este modo (ii) sería conversa accidental de (i). Esto es una muestra, en principio, de la potencia de los diagramas de Euler, ya que como vemos, un solo diagrama es capaz de representar de una sola vez tres proposiciones categóricas, y abre la posibilidad a la representación de la conversión. Pero señalemos que Euler no hace ninguna referencia explícita a estos hechos.

Para las proposiciones Universales Negativas (del tipo **"Ningún A es B"**), Euler propone el siguiente diagrama:

Figura 85
("Ningún A es B")

Nos recuerda Euler que este diagrama representa también la proposición "Ningún B es A", que es la conversa simple de "Ningún A es B". De nuevo, el diagrama propuesto representa dos proposiciones, la universal negativa y su conversa, aunque Euler sigue sin hacer mención del tema de la conversión.

El potencial que poseen los diagramas de Euler al tratar las proposiciones universales, se torna en ambigüedad al representar las proposiciones particulares. Lo cual se refleja en cierta confusión en su exposición, así como en las propias dudas manifestadas por él mismo:

> ***"Para los dos últimos casos, que representan las proposiciones particulares, destaco que encierran alguna duda, ya que no está resuelto si es una gran parte de A la que está contenida o no está contenida en B"***[34](Euler, 1768, tomo II, p.102)

De este modo, para las proposiciones Particulares Afirmativas ("Algún A es B"), Euler propone este diagrama (fig.86):

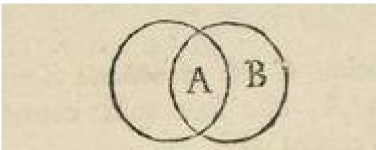


Figura 86
("Algún A es B")

Y para las Particulares Negativas ("Algún A no es B"), este otro (fig.87):

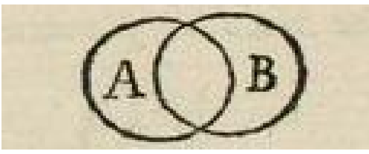


Figura 87
("Algún A no es B")

Ahora bien, el propio Euler nos dice que el diagrama de la particular afirmativa (figura 86) representa en realidad cuatro proposiciones (Euler, 1768, Tomo II, p.103):

(i) "Algún A es B"

(ii) "Algún B es A"

(iii) "Algún A no es B"

(iv) "Algún B no es A"

---

[34] ***"Pour les deux derniers cas, qui représentent des propositions particulieres, je remarque, qu'ils renferment quelque doute, puisqu'il n'est pas décidé, si c'est une grande partie de A qui est contenuë ou qui n'est pas contenuë en B"*** (Traducido al español por el autor de este trabajo)

Observemos que (iii) se trata también de la correspondiente proposición Particular Negativa. Así que parte de la información que representa el diagrama de la figura 86 (particular afirmativa), es decir, iii) “Algún A no es B”, representa la misma información del diagrama de la figura 87 (particular negativa). En consecuencia, según la exposición de Euler, los diagramas de las figuras 86 y 87 serían parcialmente redundantes. Es más, en otra parte de su escrito, Euler viene a reconocer implícitamente que ambos diagramas representan lo mismo, con la diferencia, según él, de que en el diagrama propuesto para la particular negativa (figura 87) se remarca la parte de A que no está comprendida en B: ***“…pero se destaca aquí principalmente, que hay algo en la noción A que no está comprendido en la noción B, o que se encuentra fuera de esta noción”***[35] (Euler, 1768, tomo II, p.100)

Esta poca claridad diagramática sobre las proposiciones particulares no solo se manifiesta en lo visto más arriba. Continuemos con el análisis al respecto y para ello volvamos a la interpretación euleriana del diagrama propuesto para la particular afirmativa (figura 86). Recordemos que este diagrama, según Euler, representaba cuatro proposiciones, como ya dijimos: (i) “Algún A es B”; (ii) “Algún B es A”; (iii) “Algún A no es B”; y (iv) “Algún B no es A”. Sin embargo, de estas cuatro proposiciones, solamente la (i) y la (ii) son lógicamente deducibles de la proposición particular afirmativa. Por el contrario, la (iii) y la (iv) no lo son.

En realidad, el problema al que se está enfrentando Euler, y que no termina de resolver desde un punto de vista diagramático, es el de reflejar de manera adecuada la existencia de los elementos que se afirman en las proposiciones particulares. Así, en “Algún A es B”, el diagrama correspondiente (figura 86) no deja clara la existencia de lo que se afirma en la proposición, es decir, que existe al menos un elemento de A que también es de B. Se podría argumentar, en favor de Euler, que situar la letra “A” en la intersección de los dos círculos, sería la marca identificativa existencial de al menos un elemento de A que es también de B. Pero si ello fuera así, del mismo modo podríamos decir que la letra “B” sería también otra marca identificativa existencial, en este caso de al menos un elemento de B que no es de A. Pero esta información no la podemos deducir de la proposición que dio pie al diagrama. Es decir, de “Algún A es B” no se sigue necesariamente que “Algún B no es A”. Además, si consideráramos que la letra “A”, en dicho diagrama, es una marca existencial, podríamos aventurarnos a decir, con

[35] Traducido por el autor del presente trabajo

cierta base, que el área que no está marcada con ninguna letra no contiene ningún elemento, es decir, que la clase representada por el área del círculo A que no está incluida en B, es una clase vacía. Es decir, que no habría un elemento de A que no fuera B, o dicho con otras palabras, que es falso que "Algún A no es B", o que es cierto que "Ningún A no es B". Sin embargo, esto tampoco lo podemos deducir necesariamente de la proposición origen del diagrama. Es decir, de "Algún A es B" no se puede deducir que "Ningún A no es B".

El mismo tipo de análisis lo podríamos realizar para el diagrama propuesto para la particular negativa (figura 87).

Euler es consciente de la problemática implícita en la representación de las proposiciones particulares. Por ello, en su carta CV, intenta resolverlo introduciendo un nuevo elemento gráfico: el asterisco (*). Así, la proposición "Algún A es B", que en principio Euler representaba como se ve en las figuras 86 y 88, pasa a ser representada como en la figura 89, en la cual, el signo * representa, según Euler, tanto la parte de A que está en B, como la parte de B que está en A

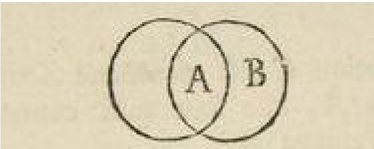


Figura 88 ("Algún A es B")

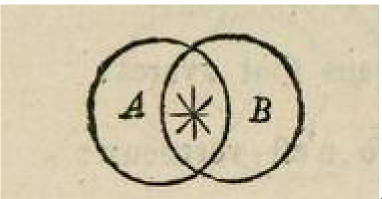


Figura 89(Representación alternativa de "Algún A es B")

Con este nuevo elemento, Euler realiza, a modo de ejemplo, la representación de algunos silogismos. Pero lo cierto es que el nuevo signo incorporado no aporta ninguna mejora sustancial al sistema. Y lo que es más importante, no resuelve de manera definitiva los problemas vistos en relación a la representación de las proposiciones particulares.

En resumen, los diagramas de Euler para las proposiciones universales, se muestran con cierta fortaleza al representar de una manera adecuada y legítima más de una proposición (p.e. la proposición universal y las conversas). Sin embargo, el sistema euleriano muestra su mayor debilidad al tratar las proposiciones particulares, como hemos visto, y como también nos comenta Sun-Joo Shin[36]. Y recordemos que la ambigüedad puede llevarnos a terrenos intrincados en una disciplina como la lógica. De todos modos, continuemos con el estudio del sistema de Euler, y veamos cómo se "comportan" sus diagramas circulares, en el terreno del silogismo, que ya habíamos visto con Leibniz. De este modo, Euler pasa a explicar y representar las distintas formas de silogismo. En su explicación diagramática no utiliza la tradicional clasificación de los silogismos en figuras, como había hecho Leibniz. Euler considera cuatro tipos de casos: i) Silogismos cuya premisa mayor[37] es una proposición Universal Afirmativa; ii) Silogismos cuya premisa mayor es una proposición Universal Negativa; iii) Silogismos cuya premisa mayor es una proposición Particular Afirmativa; y iv) Silogismos cuya premisa mayor es una proposición Particular Negativa.

Recordemos la notación utilizada por Euler[38]: "A" para designar el término medio; "B", para designar el término mayor, y "C" para el término menor.

i) *Silogismos cuya Premisa Mayor es una proposición Universal Afirmativa*:

i.1.) Todo A es B

Todo C es A

Conclusión: Todo C es B

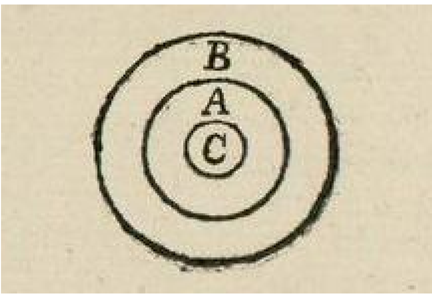


Figura 90
(Modo AAA, primera figura)

Se correspondería con la tradicional Primera Figura, y el modo AA/A

i.2.) Todo A es B

Algún C es A

Conclusión: Algún C es B

---

[36] Shin, Sun-Joo and Lemon, Oliver, "Diagrams", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/diagrams/>. (especialmente en el apartado 2.1. del artículo); El mismo tipo de comentario lo podemos encontrar en Sun-Joo Shin: *The Logical Status of Diagrams.* Ed. University of Notre Dame, Indiana. 1995 (pp.12-15)

[37] Si nos atenemos a lo que escribe literalmente Euler, éste habla de "Primera Proposición", aunque realmente se trataría de lo que tradicionalmente es la Premisa Mayor.

[38] En algunos casos, Euler cambia la denominación de los términos. He preferido conservar la misma designación de los términos en todos los casos, para una mayor claridad expositiva.

En este caso habría dos diagramas que representarían dicho silogismo, según Euler (figuras 91 y 92). Se corresponderían con la Primera Figura, y el modo AI/I.

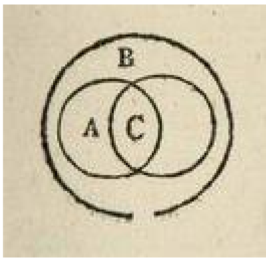


Figura 91(Modo AII, primera figura)

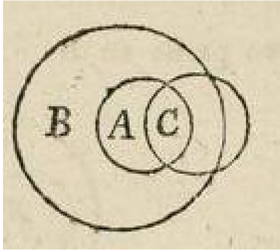


Figura 92
(otra manera de representar el modo AII, primera figura)

i.3) Todo A es B

Ningún C es B

Conclusión: Ningún C es A

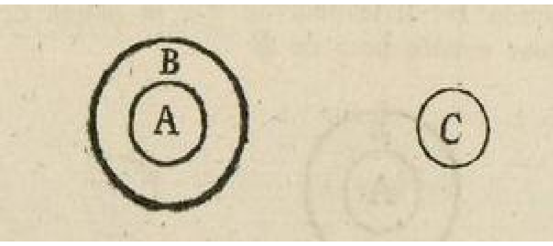


Figura 93
(Modo AEE de la segunda figura)

Corresponde a la Segunda Figura, y al modo AE/E.

Dentro de este tipo, Euler incluye una variante, con la misma conclusión y el mismo diagrama:

Todo A es B

Ningún B es C

Conclusión: Ningún C es A

Esta variante se correspondería con lo que tradicionalmente era la Cuarta Figura, y el modo AE/E

i.4) Todo B es A

Algún C no es A

Conclusión: Algún C no es B

El diagrama correspondiente[39] sería el de la figura 94.

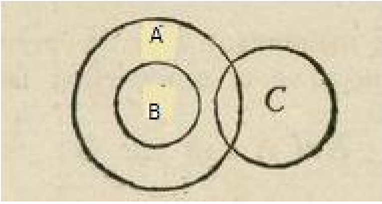


Figura 94
(Modo AOO, de la segunda figura)

Se trataría de la Segunda Figura, y su modo AO/O.

i.5) Todo B es A

Todo A es C

Conclusión: Algún C es B

El diagrama[40] sería el de la figura 95.

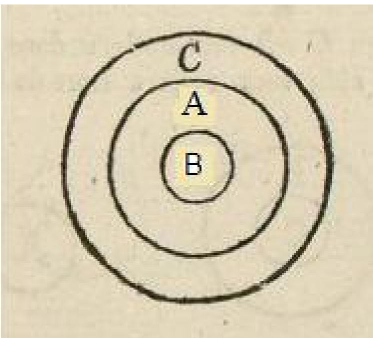


Figura 95

(Modo AAI, cuarta figura)

Se trataría de la Cuarta Figura, y el modo AA/I

Para Euler no hay más formas de silogismo en el cual la premisa mayor sea una Universal Afirmativa. Euler parece olvidarse de dos formas más, correspondientes a la tercera figura. Una sería el modo AA/I, y cuyo esquema es:

Todo A es B

Todo A es C

Conclusión: Algún C es B

La otra es el modo AI/I, cuyo esquema sería:

Todo A es B

Algún A es C

Conclusión: Algún C es B

ii) *Silogismos cuya Premisa Mayor es una proposición Universal Negativa:*

ii.1) Ningún B es A

[39] En este caso, Euler cambia, en el original, el nombre de los términos, haciendo que A sea el término mayor y B el término medio. Como he comentado en nota anterior, he decidido no respetar este cambio, y utilizar la misma designación que para el resto de los casos.
[40] Euler cambia, en el original, el nombre de los términos

Todo C es A

Conclusión: Ningún C es B

El diagrama[41] sería del de la figura 96.

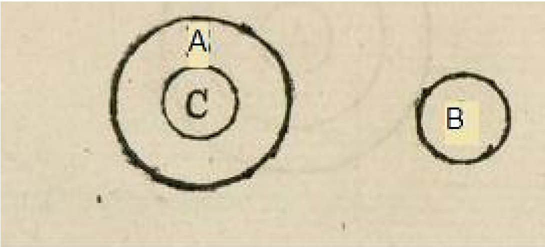


Figura 96
(modo EAE, segunda figura)

Se corresponde con la Segunda Figura, y el modo EA/E

ii.2) Ningún A es B

Todo C es A

Conclusión: Ningún C es B

El diagrama correspondiente sería el de la figura 97.

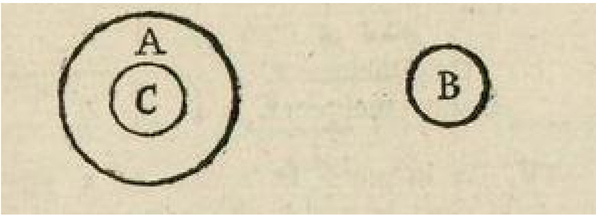


Figura 97
(Modo EAE, primera figura)

Corresponde a la Primera Figura, y al modo EA/E.

ii.3) Ningún A es B

Algún C es A

Conclusión: Algún C no es B

Se correspondería con la Primera Figura, y al modo EI/O

En esta ocasión, Euler nos propone tres posibles diagramas, que se pueden ver en las figuras 98, 99 y 100.

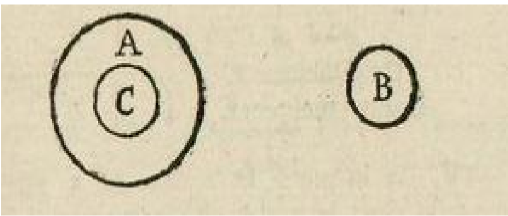


Figura 98
(primera forma de representar el modo EIO, de la primera figura)

[41] Euler cambia, en el original, el nombre de los términos

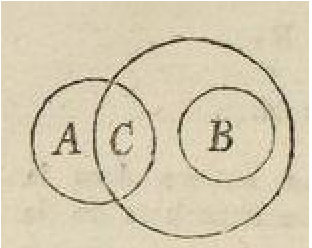


Figura 99
(segunda forma de representar el modo EIO de la primera figura)

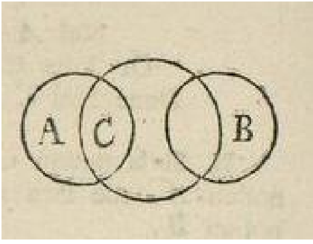


Figura 100
(tercera forma de representar el modo EIO de la primera figura)

Dentro de este tipo, Euler incluye una variante, con la misma conclusión y los mismos diagramas:

Ningún A es B

Algún A es C

Conclusión: Algún C no es B

Esta variante se correspondería con la tradicional Tercera Figura, y el modo EI/O.

ii.4) Ningún B es A

Algún C es A

Conclusión: Algún C no es B

Euler propone tres posibles diagramas[42] (figuras 101, 102 y 103), para su representación. Este silogismo se correspondería con la Segunda Figura, y el modo EI/O

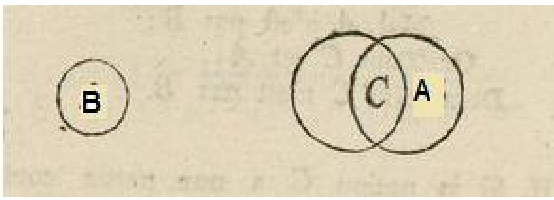


Figura 101
(primera forma para el modo EIO, segunda figura)

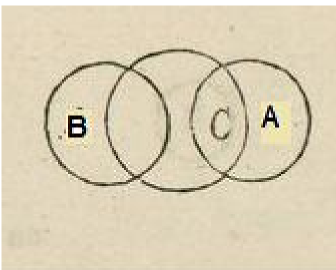


Figura 102
(segunda forma para el modo EIO de la segunda figura)

[42]Euler cambia, en el original, el nombre de los términos

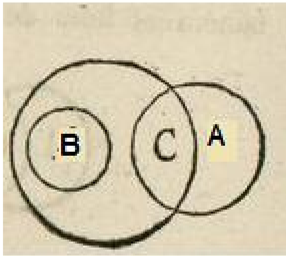


Figura 103
(tercera forma para el modo EIO
- segunda figura-)

Dentro de este tipo, Euler incluye una variante, con la misma conclusión y los mismos diagramas:

Ningún B es A

Algún A es C

Conclusión: Algún C no es B

Se corresponde con la tradicional Cuarta Figura, y el modo EI/O.

Euler parece olvidarse del caso del silogismo de la Tercera Figura, y el modo EA/O, cuyo esquema sería:

Ningún A es B

Todo A es C

Conclusión: Algún C no es B

Y también se olvida de representar el caso de la Cuarta Figura, y el modo EA/O, cuyo esquema sería:

Ningún B es A

Todo A es C

Conclusión: Algún C no es B

iii) *Silogismos cuya Premisa Mayor es una proposición Particular Afirmativa*:

iii.1) Algún A es B

Todo A es C

Conclusión: Algún C es B

Representado por los diagramas de las figuras 104 y 105. Correspondería a la tradicional Tercera Figura, y en concreto al modo IA/I.

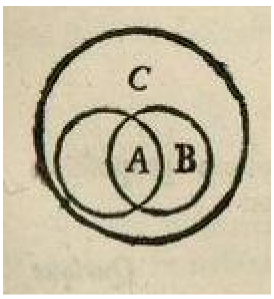


Figura 104(primera forma de representar
el modo IAI de la tercera figura)

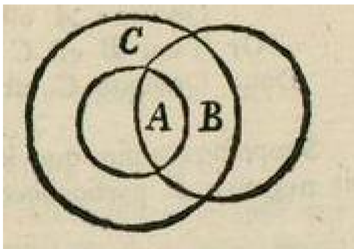


Figura 105(segunda forma de representar el modo IAI de la tercera figura)

iii.2) Algún B es A

Todo A es C

Conclusión: Algún C es B

Se correspondería con la Cuarta Figura, y el modo IA/I.

Lo representa mediante los diagramas[43] de las figuras 106 y 107.

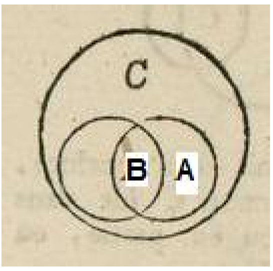


Figura 106
(Primera forma de representar el modo IAI de la cuarta figura)

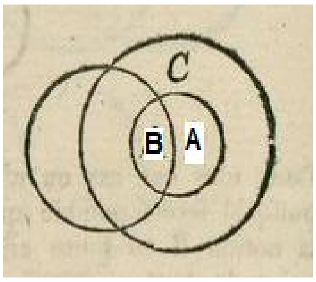


Figura 107
(Segunda forma de representar el modo IAI de la cuarta figura)

iv) *Silogismos cuya Premisa Mayor es una proposición Particular Negativa:*

Solo existiría un caso:

Algún A no es B

Todo A es C

Conclusión: Algún C no es B

Que se correspondería con la Tercera Figura, y el modo OA/O.

Los diagramas que representarían este silogismo se ven en la figura 108.

[43] Euler cambia, en el original, el nombre de los términos

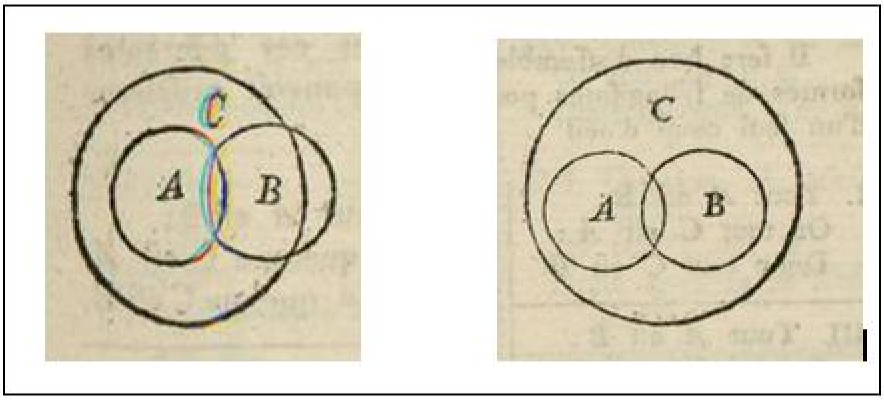


Figura 108
(dos formas de representación del modo OAO de la tercera figura)

Decía más arriba que este es el único caso en que la Premisa Mayor (o Primera Proposición, como la ha denominado Euler en toda su exposición) es una proposición Particular Negativa. Y así nos lo vienen a confirmar los tradicionales diecinueve modos posibles de silogismos. Sin embargo, Euler nos ofrece otro caso más en el que la "Primera Proposición" sería también una Particular Negativa. A primera vista nos produce cierta perplejidad, pero un simple análisis de los términos nos dará la respuesta. El silogismo que propone es el siguiente:

Algún A no es B

Todo C es B

Conclusión: Algún A no es C

En principio, lo que llama la atención es que Euler cambia la designación de los términos que ha venido utilizando: El término medio, que en la mayoría de los casos que Euler ha expuesto lo ha denominado con la letra A, en esta ocasión pasa a ser B; el término menor, que solía ser C, pasa a ser A; y el término mayor que era B, en esta ocasión pasa a ser C. Sin embargo, lo que presta a una mayor confusión es que la Premisa Menor es colocada en primer lugar, cuando lo habitual es colocar primero la Premisa Mayor, y además así lo ha venido realizando Euler en el resto de casos. Veamos cómo debería quedar expresado el silogismo, respetando la forma tradicional, es decir, colocando la Premisa Mayor en primer lugar. Asimismo realizaremos los cambios correspondientes del nombre de los términos:

Todo B es A

Algún C no es A

Conclusión: Algún C no es B

Es un tipo de silogismo ya analizado por Euler, y que según su clasificación sería el caso i.4) del tipo de silogismo cuya Premisa Mayor es Universal Afirmativa, y según la clasificación tradicional sería de la Segunda Figura, y el modo AO/O. Euler aclara todo esto un poco más adelante, después de haber creado cierto desconcierto en el lector.

Una vez que Euler ha analizado los posibles casos de silogismo[44], nos expone el siguiente cuadro-resumen con veinte casos válidos[45] (figuras 109 y 110).

[44] Recordemos que en su análisis, caso por caso, se ha olvidado, paradójicamente, de algún caso en particular.
[45] Sabemos que el número de tipos válidos de silogismo son diecinueve. Aclararemos esta confusión de Euler, un poco más adelante.

I. Tout *A* eſt *B*;
Or tout *C* eſt *A*:
Donc tout *C* eſt *B*.

II. Tout *A* eſt B;
Or quelque *C* eſt *A*:
Donc quelque *C* eſt *B*.

III. Tout *A* eſt *B*;
Or nul *C* n'eſt *B*:
Donc nul *C* n'eſt *A*.

IV. Tout *A* eſt *B*;
Or nul *B* n'eſt *C*:
Donc nul *C* n'eſt *A*

V. Tout *A* eſt *B*;
Or quelque *C* n'eſt pas *B*:
Donc quelque *C* n'eſt pas *A*.

VI. Tout *A* eſt *B*;
Or tout *B* eſt *C*:
Donc quelque *C* eſt *A*.

VII. Nul *A* n'eſt B;
Or tout *C* eſt *A*:
Donc nul C n'eſt *B*.

VIII. Nul *A* n'eſt B:
Or tout C eſt B:
Donc nul C n'eſt *A*.

IX. Nul *A* n'eſt *B*;
Or quelque C eſt *A*:
Donc quelque C n'eſt pas *B*.

X. Nul *A* n'eſt *B*;
Or quelque *A* eſt C:
Donc quelque C n'eſt pas *B*.

XI. Nul *A* n'eſt *B*;
Or quelque C eſt *B*
Donc quelque C n'eſt pas *A*.

XII. Nul *A* n'eſt B;
Or quelque *B* eſt C:
Donc quelque C n'eſt pas *A*.

XIII. Quelque *A* eſt B;
Or tout *A* eſt C:
Donc quelque C eſt B

XIV. Quelque *A* eſt B;
Or tout *B* eſt C:
Donc quelque C eſt *A*.

XV. Quelque *A* n'eſt pas *B*;
Or tout *A* eſt C:
Donc quelque C n'eſt pas *B*.

XVI. Quelque *A* n'eſt pas *B*;
Or tout C eſt B:
Donc quelque *A* n'eſt pas *B*.

XVII. Tout *A* eſt *B*;
Or quelque *A* eſt C:
Donc quelque C eſt *B*.

XVIII. Nul *A* n'eſt *B*;
Or tout *A* eſt C:
Donc quelque C n'eſt pas *B*.

XIX. Nul *A* n'eſt *B*;
Or tout B eſt C:
Donc quelque C n'eſt pas *A*.

XX. Tout *A* eſt *B*;
Or tout *A* eſt C:
Donc quelque C eſt *B*.

H 3 De ces

Figura 109
(cuadro-resumen de los casos de silogismos)

I. Todo A es B; Todo C es A: Entonces Todo C es B	II. Todo A es B; Algún C es A; Entonces Algún C es B
III. Todo A es B Ningún C es B; Entonces Ningún C es A	IV. Todo A es B Ningún B es C; Entonces Ningún C es A
V. Todo A es B Algún C no es B Entonces Algún C no es A	VI. Todo A es B Todo B es C Entonces Algún C es A
VII. Ningún A es B, Todo C es A; Entonces Ningún C es B	VIII. Ningún A es B, Todo C es B; Entonces Ningún C es A
IX. Ningún A es B, Algún C es A; Entonces Algún C no es B	X. Ningún A es B, Algún A es C; Entonces Algún C no es B
XI. Ningún A es B, Algún C es B; Entonces Algún C no es A	XII. Ningún A es B, Algún B es C; Entonces Algún C no es A
XIII. Algún A es B, Todo A es C; Entonces Algún C es B	XIV. Algún A es B, Todo B es C; Algún C es A
XV. Algún A no es B, Todo A es C; Entonces Algún C no es B	XVI. Algún A no es B, Todo C es B; Entonces Algún A no es B
XVII. Todo A es B, Algún A es C; Entonces Algún C es B	XVIII. Ningún A es B, Todo A es C; Algún C no es B
XIX. Ningún A es B, Todo B es C; Entonces Algún C no es A	XX. Todo A es B; Todo A es C; Entonces Algún C es B

Figura 110
(traducción del cuadro de la figura 109)

Después de su exposición diagramática, Euler realizará una explicación del silogismo categórico y del silogismo hipotético, de una forma tradicional, sin el uso de diagramas, por lo cual no analizaremos esta última parte explicativa.

El sistema de diagramas circulares de Euler merece algún comentario. Desde un punto de vista expositivo, presta a confusión los cambios de designación de los términos en los silogismos, y como prueba de ello, podemos verlo en la tabla adjunta más arriba (figuras 109 y 110). En unas ocasiones el Término Mayor es A, en otras es B. Evidentemente esto no invalida el silogismo en sí, pero hace que la exposición, que tiene una intención eminentemente pedagógica, se haga más difícil de seguir. Del mismo modo, los veinte casos recogidos en dicho cuadro-resumen prestan a confusión. Un poco más adelante, Euler nos aclara que en realidad son solamente diecinueve casos válidos, ya que dos de los casos recogidos (el V y el XVI) son el mismo expresado de distinta forma, y se refieren al ya comentado caso de la Segunda Figura, y el modo AO/O.

También llama la atención que en su análisis detallado de los silogismos, caso por caso, se olvide de algunos modos que ya comentamos (de la tercera y cuarta figura), para luego recogerlos en el cuadro-resumen. Como decía, estas críticas se referirían más al aspecto formal y de presentación, y no tanto al valor en sí del sistema diagramático que él propone.

El sistema euleriano se muestra, en ciertos aspectos, como un sistema potente basado en la sencillez de representar un concepto mediante un círculo. La validez de los diagramas circulares ya había sido puesta de manifiesto con Leibniz. Es más, los diagramas lineales de éste, incluso llegan a ser, en algunos casos, más clarificadores. Cuando Euler intenta representar las proposiciones categóricas, se observa cómo un mismo diagrama se puede corresponder con distintas proposiciones. Sin embargo, la robustez del sistema no parece ser tal en algunos casos. Se muestra ambiguo, sobre todo en relación a las proposiciones particulares, y también al representar algunos silogismos. Ambigüedad que nos ejemplifica Sun-Joo Shin[46] con el siguiente silogismo. Recordemos el caso ii.3) de silogismo según la clasificación euleriana:

Ningún A es B

Algún C es A

[46] Shin, Sun-Joo and Lemon, Oliver, "Diagrams", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/diagrams/>. (apartado 2.1. del artículo)

Conclusión: Algún C no es B

En esta ocasión, Euler nos proponía tres posibles diagramas (figuras 111, 112 y 113):

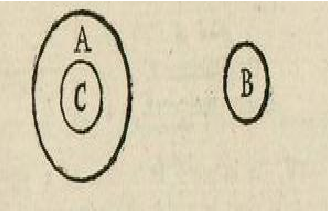


Figura 111(caso 1 para la representación del silogismo tipo ii.3 según Euler)

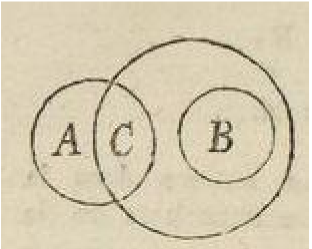


Figura 112(caso 2 para la representación del silogismo tipo ii.3 según Euler)

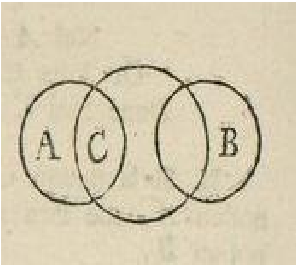


Figura 113 (caso 3 para la representación del silogismo tipo ii.3 según Euler)

Visualmente tampoco está tan claro que en el primer caso (figura 111) se obtenga directamente solo la conclusión propuesta, pues también se podría obtener "Ningún C es B". En el caso 2 (figura 112), también se podría llegar directamente a la conclusión "Todo B es C", a partir de lo que se nos muestra visualmente.

Las críticas expuestas al sistema de Euler no desmerecen el esfuerzo de éste ni el valor de su propuesta. Todo lo contrario. Es absolutamente meritorio y de gran valor la aportación de Euler, que a decir verdad, ya había sido adelantada por Leibniz. La idea de representar gráficamente un concepto como lo hace Euler, con la intención de que los razonamientos posteriores basados en dichos grafismos sean más precisos y claros, es muestra de ingenio y sencillez a la vez. Es en el desarrollo posterior donde el sistema de Euler muestra ciertas debilidades. Sin embargo, Leibniz y Euler inician un camino novedoso que será seguido por otros autores, como Venn y Peirce, que irán revisando y perfeccionando el sistema diagramático circular.

2.2.3. John Venn (1834-1923)

Este lógico y matemático inglés realizó una de las mayores contribuciones a las representaciones diagramáticas en lógica. Evidentemente, su sistema tiene una clara relación con el sistema leibziano y euleriano, y es deudor de él en lo que respecta a algunos elementos. Tal es la relación entre el sistema de Euler y el de Venn, que en ocasiones sus nombres van de tal manera asociados, que se llega a hablar, equivocadamente, de los diagramas de Euler y Venn como un sistema único de representación, dejando además olvidadas las aportaciones más tempranas de Leibniz. Estas confusiones suelen producirse en contextos y publicaciones no especializados. Procede, pues, si queremos ser rigurosos, a que establezcamos la cuestión en sus justos términos.

Desde que Euler redacta las cartas en las cuales expone su sistema, en 1761[47], hasta que Venn muestra el suyo, en 1881, en su *Lógica Simbólica*[48], transcurrieron nada menos que ciento veinte años. Es muy probable, atendiendo a lo escrito por Venn, que éste tampoco conociera los diagramas de Leibniz. Pues bien, a pesar de las críticas de Venn hacia Euler, aquél se basa inicialmente en la misma idea euleriana de representar un concepto o término mediante una figura geométrica cerrada, normalmente un círculo[49]. En suma, el punto de partida que escoge John Venn es el mismo que el de Euler, es decir, representar un concepto o término mediante un círculo. Aquello que se encuentra dentro del círculo representa los objetos o individuos que caen dentro del concepto. Recordemos que el diagrama de Euler al respecto era el que vemos en la figura 114.

Figura 114

(representación de un concepto, según Euler)

[47] El año en que Euler redacta dichas cartas es el 1761, aunque no fueran publicadas hasta 1768.

[48] John Venn expone de forma completa su sistema diagramático en *Symbolic Logic* (1881), aunque ya había adelantado algunos elementos en dos artículos. El primero, de julio de 1880, titulado *On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings.* El segundo, de diciembre de 1880, y cuyo título es *On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions*. (Se podrán encontrar todas las referencias completas al final).

[49] Venn también utilizará elipses, aunque el tipo de figura geométrica no será un elemento esencial. La utilización de dichas elipses por parte de Venn, se debe a la búsqueda de una mayor claridad visual cuando se va incrementando el número de términos.

Venn lo acepta como válido[50], aunque con alguna pequeña variación. En principio Venn sitúa la letra representativa del concepto, no en el interior del círculo, sino en el exterior muy próxima a la línea de la circunferencia. Este detalle podría parecer nimio, pero tendrá su importancia en la claridad de los diagramas al ir incorporando más elementos al sistema.

De este modo, si el concepto del que se trata fuera "x", la representación diagramática según Venn sería como se ve en la figura 115.

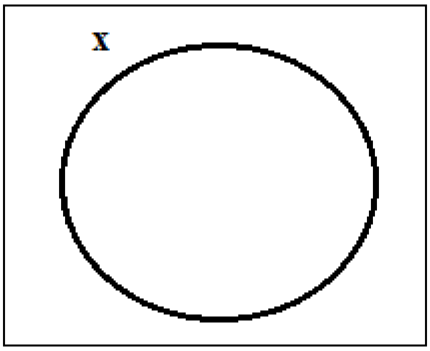


Figura 115(representación del concepto "X"según Venn)

La aportación de Venn no se restringe solo al cambio de posición de la letra representativa del concepto. Sería algo demasiado intranscendente como para tratarlo como aportación novedosa. Venn introduce, aparte de lo dicho, un nuevo elemento en el sistema. Algo que por su sencillez parecería también baladí, pero que por el contrario será un elemento importante en el desarrollo de su método. Si "lo de dentro" del círculo representa un determinado concepto, "lo de fuera" del círculo representa aquello que no cae dentro del concepto. Si el interior del círculo representa el concepto "x", el exterior del círculo representa no-x, o según la notación que prefiere utilizar Venn, $\bar{x}$.

En realidad, Venn se está basando en el proceso lógico de la dicotomía, según él mismo reconoce:

> ***"Lo que en última instancia tenemos que hacer es dividir toda la extensión en un número definido de clases o compartimentos que sean mutuamente exclusivos y conjuntamente exhaustivos […] un proceso lógico muy conocido, a saber, el de la dicotomía"***[51] (Venn, 1881, p.101)

---

[50] Siendo rigurosos, Venn no comienza su estudio diagramático con el caso de un solo concepto y su correspondiente representación, ya que asume como válida esta aportación de Euler. Venn pasa directamente al estudio de la representación para el caso de dos conceptos. Sin embargo, he preferido realizar esta explicación en relación a un solo concepto, ya que de este modo, quedará de forma más clara el modo en que Venn va construyendo su sistema.

[51] ***"What we ultimately have to do is to break up the entire field into a definite classes or compartments which are mutually exclusive and collectively exhaustive […] a very familiar logical process, viz. that of dichotomy"*** (Traducido por el autor del presente trabajo).

En este párrafo, Venn se está refiriendo al caso particular de dos conceptos, pero es aplicable tanto a los casos de más de dos conceptos, así como también al caso muy particular de un solo concepto. En este último caso, la dicotomía da lugar a la clase x y la clase no-x, como ya hemos visto.

Una vez establecidas estas sencillas bases diagramáticas, Venn continuará desarrollando su sistema, incorporando una serie de novedades en relación al sistema euleriano, consiguiendo un método más flexible y con más potencialidad en su aplicación al cálculo lógico. El siguiente paso, por tanto, será el de considerar la representación de dos conceptos o términos. Recordemos que Leibniz y Euler pasaban directamente a representar los distintos tipos de proposiciones a que podían dar lugar las relaciones entre conceptos. Venn se muestra más cauto al respecto. En primer lugar, su objetivo será representar gráficamente los términos o conceptos (primero, el caso de dos términos, luego el de tres, y así sucesivamente), para, en un paso posterior, abordar la representación de proposiciones. Se trataría, por tanto, de encontrar ahora un modo de representar gráficamente el caso de dos términos. Sería un gráfico que sirviera como marco de referencia o trabajo, o como él lo llama, un "diagrama primario" (en principio para dos términos). No se trataría, por tanto, de encontrar un método que vaya analizando caso por caso las distintas clases de proposiciones y obtener distintos diagramas, como hacían Leibniz y Euler; sino de encontrar ese único marco que sirva de herramienta para un posterior trabajo de cálculo lógico.

Comenzando por el caso de dos términos, sean x e y, tendremos también en consideración "no-x" ($\bar{x}$) y "no-y" ($\bar{y}$). Ateniéndonos al proceso de dicotomía que vimos más arriba, tendríamos cuatro posibles combinaciones que se corresponderían con clases mutuamente exclusivas, y a la vez colectivamente exhaustivas. Éstas serían: $\mathbf{x\,y}$ (aquellos x que son y), $\mathbf{x\,\bar{y}}$ (aquellos x que no son y), $\mathbf{\bar{x}\,y}$ (aquellos que no son x pero son y), $\mathbf{\bar{x}\,\bar{y}}$ (aquellos que no son x ni y). Ahora se trataría, siguiendo a Venn, de representar gráficamente de manera inequívoca estas clases o compartimentos. La propuesta que hace Venn destaca por su sencillez, lo cual no ensombrece su genialidad. El diagrama que veremos a continuación (figura 116) es tan conocido, incluso por los alumnos de la escuela elemental al estudiar la teoría de conjuntos, que puede hacernos olvidar el hecho de que es fruto del ingenio de este lógico inglés. Se trata del siguiente diagrama:

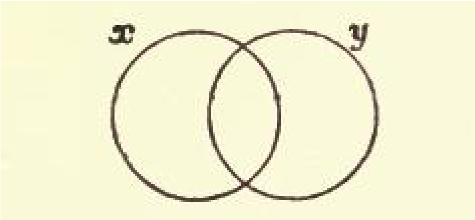
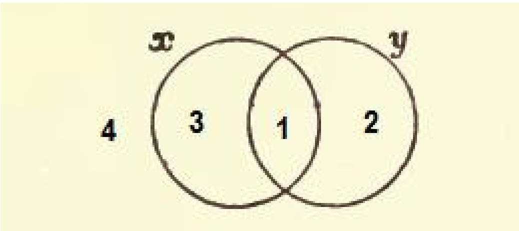


Figura 116

(representación gráfica de dos conceptos, según Venn)

Tiene ciertas similitudes con el diagrama que Euler proponía para la proposición particular afirmativa. Pero Venn quiere dejar claro de que se trata de un marco de trabajo, de una estructura que sirva de base para un trabajo lógico posterior. El diagrama refleja visualmente las cuatros subclases que hemos visto (**x y, x y,** $\bar{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}$**,** $\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}$). Veamos cómo se corresponde cada clase mencionada con un área determinada del diagrama. Contribuyamos a clarificar la explicación con la figura 117, que explícitamente no expone Venn, pero que se deduce de sus explicaciones:



(1) Se corresponderia con $\mathbf{x\ y}$

(2) Se corresponderia con $\bar{\mathbf{x}}\ \mathbf{y}$

(3) Se corresponderia con $\mathrm{x}\ \bar{\mathrm{y}}$

(4) Se corresponderia con $\bar{\mathrm{x}}\ \bar{\mathrm{y}}$

Figura 117
(ampliación de la figura 116)

Para el caso de tres términos (x, y, z), el número total de clases o compartimentos será de ocho, pues son las posibles combinaciones que habrá, teniendo en cuenta **x**, $\bar{\mathbf{x}}$, **y**, $\bar{\mathbf{y}}$, **z**, $\bar{\mathbf{z}}$. Para cuatro términos, el número total de dichas clases sería de dieciséis. Y en general, para el caso de **n** términos, el número total de clases será 2^n. Pero volvamos al caso de los tres términos. El diagrama representativo correspondiente que propone Venn es el siguiente:

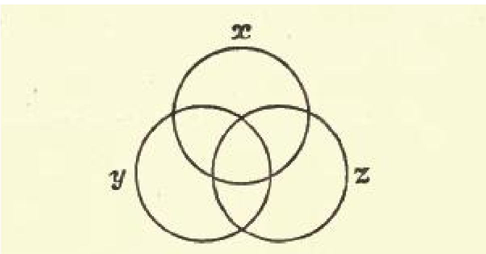


Figura 118(Diagrama de Venn

para tres términos)

De nuevo, contribuyamos a clarificar la correspondencia entre las áreas que aparecen en el diagrama, y las clases resultantes de todas las combinaciones posibles según el procedimiento propuesto por Venn. Veámoslo en la figura 119.

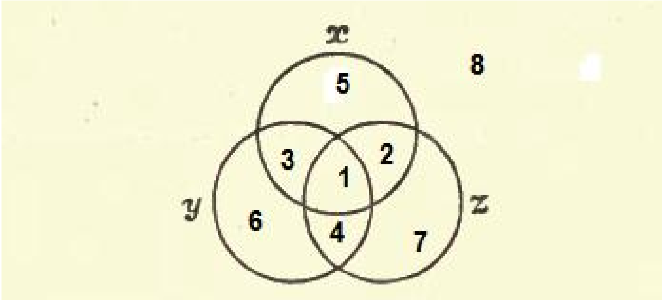


Figura 119

(Ampliación de la figura 118)

(1) Se corresponde con " x y z "

(2) Se corresponde con " x $\bar{y}$ z "

(3) Se corresponde con " x y $\bar{z}$ "

(4) Se corresponde con " $\bar{x}$ y z "

(5) Se corresponde con " x $\bar{y}$ $\bar{z}$ "

(6) Se corresponde con " $\bar{x}$ y $\bar{z}$ "

(7) Se corresponde con " $\bar{x}$ $\bar{y}$ z "

(8) Se corresponde con " $\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$ "

Para el caso de cuatro términos (x, y, z, w), Venn propone la utilización de elipses, buscando una mayor claridad visual para representar las dieciséis áreas posibles resultantes de realizar las combinaciones a partir de **x, y, z, w, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{w}$**. El diagrama de Venn para cuatro términos sería el que se muestra en la figura 120.

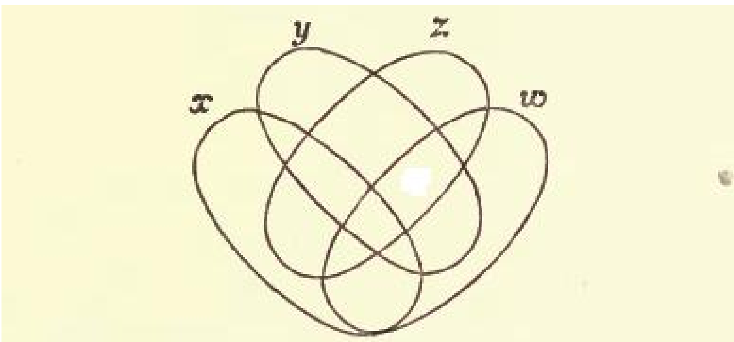


Figura 120 (representación gráfica para cuatro términos, según Venn)

Observemos como a medida que el número de términos va en aumento, también crece la complejidad del diagrama, y en consecuencia su claridad y utilidad se hace menos evidente. Así para cinco términos, propone el diagrama de la figura 121, con una característica particular. La pequeña elipse central debe observarse como una porción de "la parte exterior de z". Así, por ejemplo, las cuatro porciones de esa pequeña elipse están dentro de "**y**" y de **"w"**, pero no son parte de **"z"**.

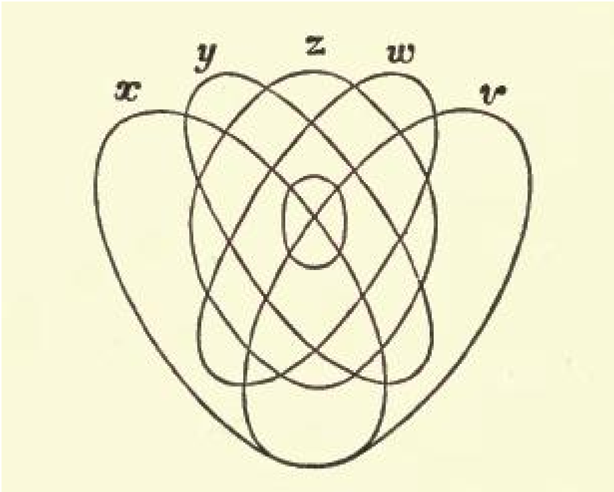
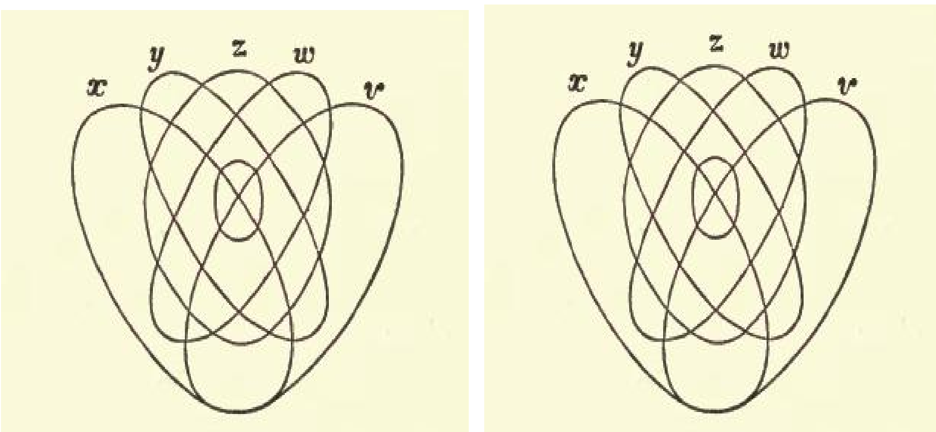


Figura 121
(representación gráfica para cinco términos, según Venn)

Venn es consciente de esta complejidad. Aun así, se atreve a proporcionar una solución diagrámatica para el caso de seis términos (x, y, z, w, v, u). Según él, se deberían dibujar dos diagramas de cinco términos, uno para **"u"** y otro para **" $\overline{u}$ ".**

u


$\overline{u}$

Figura 122
(representación gráfica para seis términos, siguiendo a Venn) [52]

Establecido el marco de trabajo, según el número de términos de que se trate, Venn pasará al estudio de las proposiciones. Se trata de encontrar algún tipo de operación con dichos diagramas primarios, de tal forma que reflejen la información contenida en una o varias proposiciones. Previamente se debe determinar el número total de términos implicados. De acuerdo con dicho número, se escogería el diagrama primario correspondiente que ya hemos visto. A continuación, deberíamos operar con

[52] Venn no dibuja en su trabajo la figura 122, pero se deduce fácilmente de sus indicaciones.

dicho diagrama según la información que nos proporcionen las proposiciones iniciales, y de acuerdo con algún método en particular. El método que propone Venn es lo que podríamos llamar "método de eliminación". Dada una proposición, se trataría de determinar qué "compartimento" o "clase" no contendría ningún elemento, y realizar alguna marca identificativa de este hecho en dicho compartimento del diagrama. Venn escoge marcar dicho compartimento mediante el sombreado. Si hay más proposiciones que van añadiendo información, entonces se buscan otros compartimentos de los cuales podamos tener la certeza de que son compartimentos o clases vacías, es decir, que no contienen ningún elemento. Veámoslo con un ejemplo sencillo, para el caso de dos términos. Sea la proposición *"Todo x es y"*. Se trataría de lo que tradicionalmente se llama una proposición Universal Afirmativa. Dado que consta de dos términos, deberíamos escoger el diagrama primario correspondiente. Reproduzcámoslo de nuevo en la figura 123.

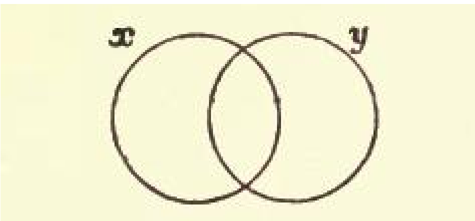


Figura 123(Representación de "Todo x es y"-paso 1-)

Recordemos las cuatro áreas del diagrama que se correspondían con las cuatro clases correspondientes (ver figura 124).

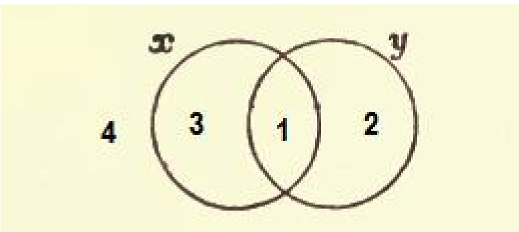


Figura 124(Representación de "Todo x es y"-paso 2-)

(1) Se corresponde con $\mathbf{x\ y}$

(2) Se corresponde con $\mathbf{\bar{x}\ y}$

(3) Se corresponde con $\mathbf{x\ \bar{y}}$

(4) Se corresponde con $\mathbf{\bar{x}\ \bar{y}}$

Como nuestra proposición objeto de análisis es **"Todo x es y"**, se puede deducir que no existe un elemento de "**x**" que no sea "**y**", o dicho de otro modo, que la clase "$\mathbf{x\ \bar{y}}$" (área 3 de la figura 124) es vacía. De este modo procederíamos a "eliminar" dicha clase mediante el sombreado del área correspondiente en el diagrama, quedando así (figura 125):

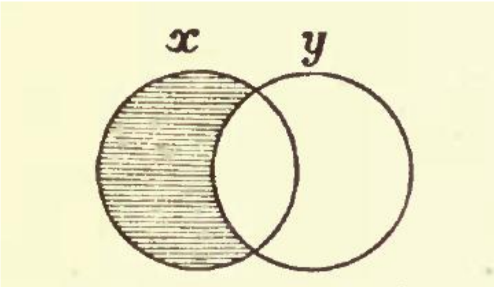


Figura 125(Representación final de “Todo x es y”-paso 3-)

El método propuesto por Venn parece sencillo y fácil de aplicar, al menos para una proposición del tipo que hemos visto (Universal Afirmativa). Sin embargo, analizando el proceso realizado, podríamos decir que las cosas no son tan simples y automáticas como aparentemente parecen. Pasar de **“Todo x es y”** a “eliminar” una determinada clase (de las cuatro propuestas), requiere una o varias operaciones intermedias. Podríamos aventurar el siguiente recorrido operativo a modo de hipótesis. En el siguiente esquema, no se entienda el signo “→” estrictamente como implicación lógica, sino como indicación de dicho recorrido:
(i) “Todo x es y” (es verdadera) → (ii) Es falso que “Algún x no es y” (o también, “No es el caso de que algún x no sea y”) →(iii) la clase “**x** $\bar{\mathbf{y}}$**”** no contiene elementos→(iv) Eliminación (sombreado) del área correspondiente a dicha clase.

El paso de (i) a (ii) se basa en una inferencia inmediata, llegando a la contradictoria de la Universal Afirmativa, es decir, a la Particular Negativa[53]. Sin embargo, lo que realmente estamos realizando en (ii) es negar la contradictoria de (i), o dicho de otra forma, estamos buscando la proposición equivalente de (i) [54]. Esta operación, que se nos muestra evidente y eficaz en este ejemplo concreto, nos haría pensar en que hemos hallado un método auxiliar que sirviera de apoyo al “método de eliminación” (sombreado) que Venn realiza en sus diagramas. Podría ser el hallazgo de un algoritmo que sirviera de base para el método de “eliminación” de Venn. Sin embargo, esto es más una ilusión que una realidad. Dicho posible algoritmo no es tal, pues no parece fácilmente aplicable cuando se incrementa el número de términos. Lo

---

[53] Recordemos lo visto en el capítulo dedicado al Cuadrado de Oposición.

[54] Recordemos el concepto de relación de equivalencia entre proposiciones: *“El análisis de la equivalencia se propone regular la transformación de unas proposiciones opuestas en equivalentes, mediante la negación de la inserción de la negación. Así, dos contradictorias devienen equivalentes mediante la anteposición de la negación: p.e. la proposición <Todo S es P> se torna equivalente a su contradictoria, <Algún S no es P>, bajo la forma <No es el caso de que Todo S sea P>”* (Vega, 2011b, p.434) . Siguiendo lo anterior, “Algún S no es P” se torna equivalente a “Todo S es P” bajo la forma “No es el caso de que Algún S no sea P”. Y cambiando el nombre de los términos del caso que nos ocupa en el ejemplo de Venn, “No es el caso de que Algún x no sea y” es equivalente a “Todo x es y”.

que se intenta poner de manifiesto es que el sistema que Venn propone, requiere de unos pasos u operaciones intermedios sobre los cuales no nos da excesivas pistas de cómo llevarlo a cabo, de cómo ejecutarlo de manera inequívoca. Simplemente nos viene a decir que deduzcamos, partiendo de una proposición dada, qué compartimento o clase del diagrama primario está "vacío". Este punto más débil del sistema de Venn se ve compensado, por otra parte, con su flexibilidad y sencillez, en cuanto que un mismo diagrama puede ser utilizado para el cálculo con más de una proposición, ya que vamos reflejando en el diagrama, mediante el sombreado sucesivo de los compartimentos, la información que vamos incorporando con diversas proposiciones. Será más clarificador que lo veamos con un ejemplo del propio Venn. Supongamos que tenemos las proposiciones (i) "Todo x es y", y (ii) "Todo y es x". Partiríamos del diagrama para dos términos, ya visto anteriormente (fig.126).

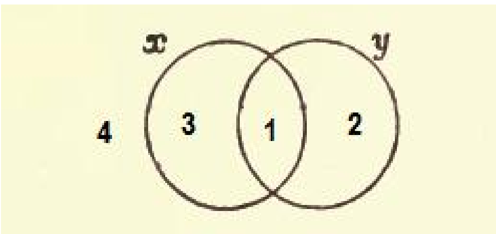


Figura 126(Representación de "todo x es y"Y "todo y es x"-paso 1-)

De (i) deduciríamos que "$x\ \bar{y}$" no contiene ningún elemento, y por tanto, el área correspondiente (el área 3 de la figura 126), debería ser sombreado, como vimos al tratar el caso de la Universal Afirmativa, resultando por el momento la figura 127.

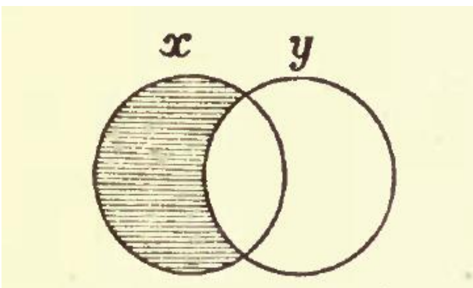


Figura 127(Representación de"todo x es y" Y "todo y es x" -paso 2-)

Ahora bien, disponemos de más información, es decir, la que nos proporciona (ii) "Todo y es x". De (ii) podemos deducir que " $\bar{x}\ y$ ", no contiene ningún elemento, con lo cual deberíamos sombrear en nuestro actual diagrama de trabajo (figura 127) la zona correspondiente, dando como resultado el diagrama final de la figura 128.

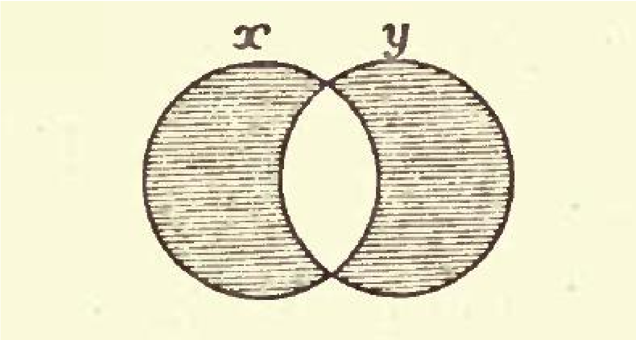


Figura 128
(Representación final de "todo x es y" Y "todo y es x"-paso 3-)

El diagrama de la figura 128 serviría para representar también, por ejemplo, la proposición "Todo x es todo y", que viene a resumir en una sola proposición lo expresado en (i) y (ii), y que en definitiva nos lleva a la conclusión, como podemos ver en el diagrama final, de que "x" e "y" son lo mismo.

El sistema de Venn se nos muestra como más robusto y flexible a la vez, en contraste con el sistema euleriano, que era más rígido, ya que se restringía a las proposiciones y silogismos categóricos. Por otro lado, como aspecto menos positivo, el método de Venn exige esos pasos intermedios de los que hemos hablado, que van desde la proposición dada al hallazgo de la posible clase vacía que debe ser eliminada (sombreada).

En honor a la verdad, y coincidiendo con lo que comenta Shin[55], al menos en lo que se refiere al ejemplo de la proposición Universal Afirmativa, visualmente se muestra más clara la relación espacial de contención en el diagrama de Euler que en el de Venn. El lector puede juzgar comparando la representación gráfica para "Todo x es y" según el método de Euler (Figura 129) y la representación según el método de Venn (Figura 130).

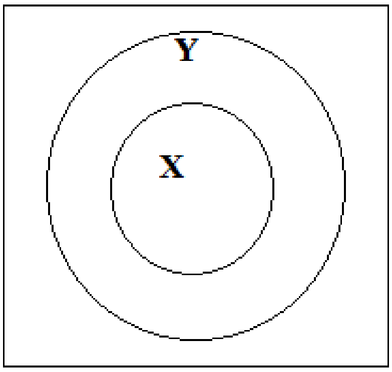


Figura 129("Todo x es y"

representado por el método de Euler)

[55] Shin, Sun-Joo and Lemon, Oliver, "Diagrams", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/diagrams/>. (apartado 2.2. del artículo)

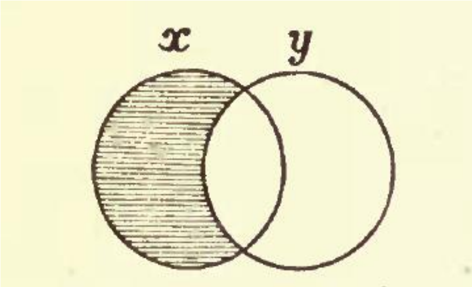


Figura 130("Todo x es y" representado por el método de Venn)

Sin embargo, Venn no se detiene en analizar, como sí lo hacía Euler, cada tipo de proposición categórica. Venn ha encontrado un método general para representar conjuntos de proposiciones, sean con dos o más términos. Los cuatro tipos de proposiciones categóricas tradicionales serían unos determinados casos de la multitud de casos que pueden ser tratados con su método de representación. Sin embargo, creo interesante, y hasta conveniente ver como se representarían los otros tres casos de proposiciones categóricas. Lo cual puede poner de manifiesto algunas debilidades del sistema de Venn, y que él mismo trata de eludir.

Veamos cómo se representaría **"Ningún x es y"**. Considerando esta proposición como verdadera, podríamos deducir que no existe un elemento de **x** que sea **y**, o expresado de otro modo, que la clase "xy" es vacía. Realizando el sombreado correspondiente, nos quedaría el siguiente diagrama de la figura 131.

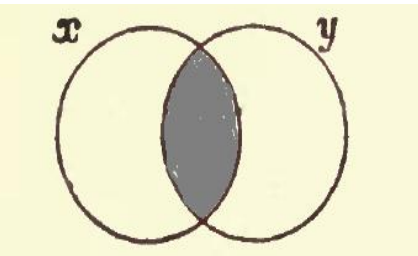


Figura 131(Representación, según el método de Venn, de "Ningún x es y")

La figura 131 también nos serviría para representar "Ningún y es x". Ahora bien, ¿qué resultado obtendremos con las proposiciones particulares, tanto afirmativas como negativas? Es una cuestión a la que Venn no se enfrenta directamente, y de hecho no estudia concretamente dichos casos. Sin embargo, desde aquí sí las trataremos de analizar.

El primer caso sería el de la Particular Afirmativa, es decir, del tipo "Algún x es y". A partir de esta proposición, y siguiendo el método de Venn de búsqueda de una clase vacía, realmente no podemos afirmar que alguna de las cuatro clases posibles, a saber, $\mathbf{x\,y}$, $\mathbf{x\,\bar{y}}$, $\mathbf{\bar{x}\,y}$, $\mathbf{\bar{x}\,\bar{y}}$, no contiene elementos. Por tanto, en el diagrama correspondiente, no podríamos legítimamente sombrear ningún compartimento, quedando el diagrama intacto como se ve en la figura 132.

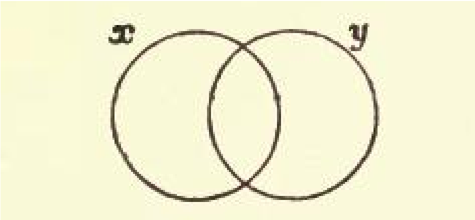


Figura 132(Representación final para "Algún x es y" aplicando el método de Venn)

La información proporcionada por el diagrama de la figura 132 es ambigüa, pues no podemos afirmar con seguridad que **" $x\ \bar{y}$ "** o **" $\bar{x}\ y$ ",** sean vacías, pero tampoco tenemos información sobre la existencia de elementos pertenecientes a estas clases. En cuanto a la clase **"xy"**, visualmente nos da la misma información que las otras dos clases vistas. No podemos aludir a que tenemos la certeza de que **"xy"** tiene algún elemento, porque dicha certeza no proviene del diagrama en sí, sino de la enunciación de la proposición "Algún x es y", con lo cual caeríamos en una especie de "círculo vicioso".

Algo similar nos sucede al intentar representar "Algún x no es y" (Proposición Particular Negativa). Llegamos al diagrama 133 con similares ambigüedades a las que teníamos con el diagrama 132.

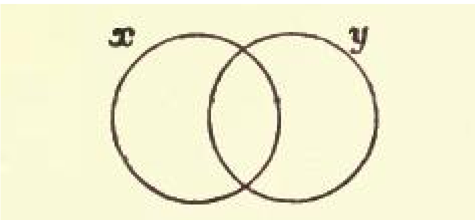


Figura 133(Representación final para "Algún x no es y"aplicando el método de Venn)

Continuando con nuestro análisis, se produce una ambigüedad adicional. Las figuras 132 y 133 son las mismas. Es decir, tenemos un mismo diagrama para representar gráficamente tanto a la Particular afirmativa como a la Particular negativa. Recordemos que esta dificultad con las proposiciones existenciales también fue un obstáculo para Euler. Éste intentó resolverlo mediante la utilización de un signo especial, el asterisco, para señalar la parte común de los términos implicados en la proposición (ver figura 134).

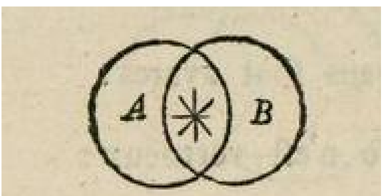


Figura 134(intento de solución diagramática de Euler para las particulares)

Fue un artilugio que realmente Euler no supo aprovechar adecuadamente para resolver el problema de la ambigüedad en las proposiciones existenciales y su representación diagramática. Venn, por su parte, elude dicho problema. Años más tarde, en *Los Principios de Lógica Empírica o Inductiva* (1889) realiza un comentario sobre las diferencias entre las Proposiciones Universales y las Proposiciones Particulares, que están en la base del método de representación diagramática del propio Venn:

> ***"De esa manera 'Ningún X es Y' se interpreta como la negación de la existencia de una clase tal como XY; 'Todo X es Y' como la negación de 'X que no sea Y' […] Todas las proposiciones universales, sean afirmativas o negativas en su forma habitual, se interpretan aquí como negativas. Es decir, niegan la existencia de una cierta combinación. Por otro lado, todas las proposiciones particulares se interpretan como afirmativas; es decir, declaran que una determinada combinación sí que existe"***[56](Venn, 1889, p.230)

En estas palabras se resume la base de la validez del método diagramático de eliminación (sombreado) al aplicarlo a proposiciones universales, y se pone de manifiesto el por qué falla en su aplicación a las proposiciones particulares. Venn no logra encontrar un elemento gráfico que resuelva este problema. Si lo hará un poco más tarde Charles S. Peirce.

Venn propone algunos ejemplos con más de dos términos. Los casos de tres términos serían donde se incluiría el estudio de los silogismos. Venn no realiza la tarea exhaustiva que hacen Leibniz y Euler, es decir, la de estudiar caso por caso cada tipo de silogismo. Venn ha encontrado un sistema de representación que va más allá del silogismo categórico. El silogismo se muestra como un sistema demasiado rígido, estableciendo determinadas condiciones en cuanto a su estructura, al número de términos y el tipo de figuras y modos. El sistema de Venn es un sistema abierto para cualquier tipo de proposiciones. Los silogismos categóricos serían un caso particular de todos los posibles casos que pueden ser analizados mediante los diagramas de Venn. No obstante, él mismo propone para su representación, un ejemplo de silogismo categórico,

---

[56] Venn, J.: *The Principles of Empirical or Inductive Logic*, p.230: ***"Thus `No X is Y´ is interpreted as denying the existence of any such class as XY; 'All X is Y´ as denying 'X that is not Y´ […] All universal propositions, whether affirmative or negative in their customary form, are here interpreted as negative. That is they deny the existence of a certain combination. On the other hand all particular propositions are interpreted as affirmative; that is, they declare that a certain combination does exist"*** (traducido por el autor del presente trabajo)

para posteriormente compararlo con el diagrama propuesto por Euler. El ejemplo propuesto es el siguiente (Venn, 1881, p.115):

Premisa mayor: Ningún y es z

Premisa menor: Todo x es y

Conclusión: Ningún x es z

Partiríamos del diagrama primario para tres términos, que reproducimos en la figura 135.

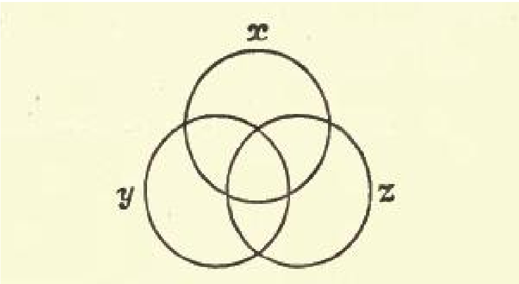


Figura 135(diagrama primario para tres términos, x,y,z)

Para facilitar la tarea, numeraremos las distintas áreas posibles (figura 136).

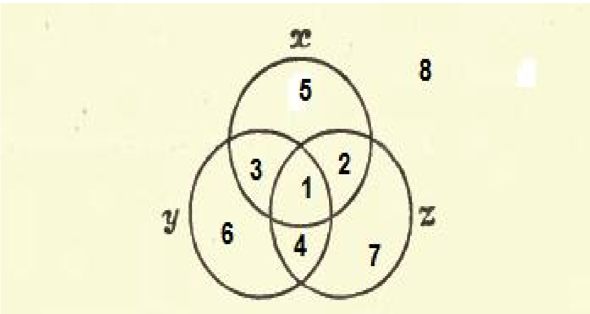


Figura 136(diagrama primario para tres términos,con las áreas numeradas)

De acuerdo con la primera premisa ("Ningún y es z"), deberíamos eliminar (sombrear) las zonas 1 y 4, pues esas zonas y solo esas podrían contener elementos de **y** que fueran a la vez elementos de **z**. Por otro lado, la segunda premisa ("Todo x es y") nos lleva a deducir que no existe un elemento de **x** que no sea **y**, y por tanto los compartimentos 2 y 5 deberán ser vacíos (y por tanto, ser sombreados según el método de Venn). El diagrama de Venn resultante, y que representaría la conclusión sería el de la figura 137.

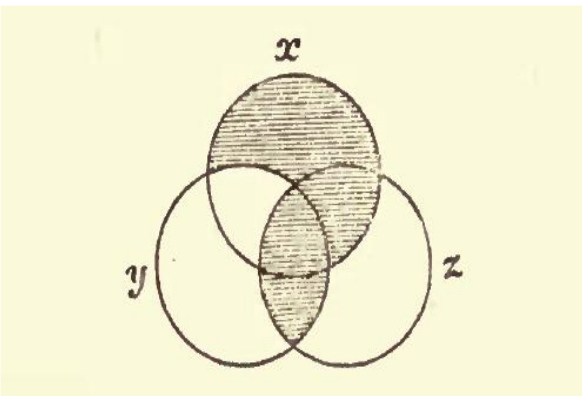


Figura 137(Representación de la conclusión "Ningún x es z", a partir de las premisas: i) "Ningún y es z"; ii) "Todo x es y", siguiendo el método de Venn)

Venn compara su diagrama con el diagrama propuesto por Euler, que lo podemos ver en la figura 138.

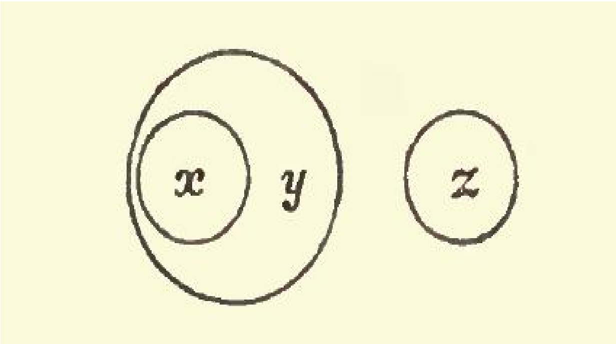


Figura138(Representación alternativa propuesta por Euler, para el mismo silogismo de la figura 137)

Como el propio Venn reconoce, en cuanto a la representación de la relación que se da en la conclusión ("Ningún x es z"), no parece que su sistema sea superior al de Euler, desde un punto de vista visual. En este caso, el diagrama de Euler parece ser incluso más claro a la hora de mostrar dicha relación. Por otro lado, Venn comenta en favor de su propio sistema y del ejemplo en particular que hemos visto, que el diagrama expresado en la figura 137 muestra una mayor ventaja, al contener una información pictórica más completa. Por ejemplo, Venn comenta que, en base a su diagrama final, no podemos considerar como vacía la clase de las **x** que son **y** pero no son **z**. Realmente es una ventaja que no se ve muy clara si lo comparamos con el diagrama de Euler. En lo que sí parece tener razón Venn al hablar de las ventajas de su sistema, es cuando la información de las proposiciones se va haciendo más compleja. Por ejemplo, si tenemos las siguientes proposiciones:

(i) "Todo X es Y o Z" (siendo la "o" inclusiva)

(ii) "No existe Y o Z que no sea X" (siendo la "o" inclusiva)

Según la información de (i), tendríamos el siguiente diagrama de Venn expuesto en la figura 139.

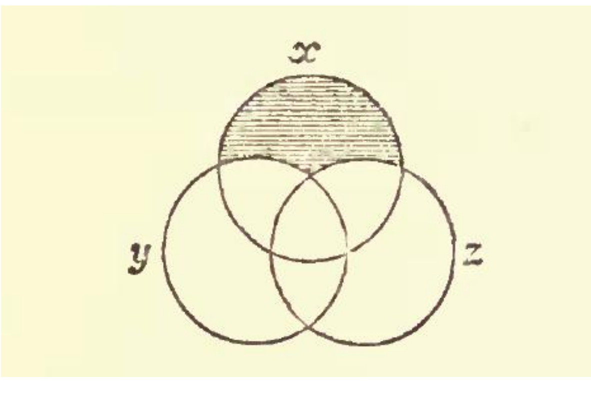


Figura 139 (Representación según Venn de "Todo X es Y o Z")

Si al diagrama de la figura 139, añadimos la información de (ii), es decir, que "No existe Y o Z que no sea X", el diagrama final resultante lo veríamos en la figura 140.

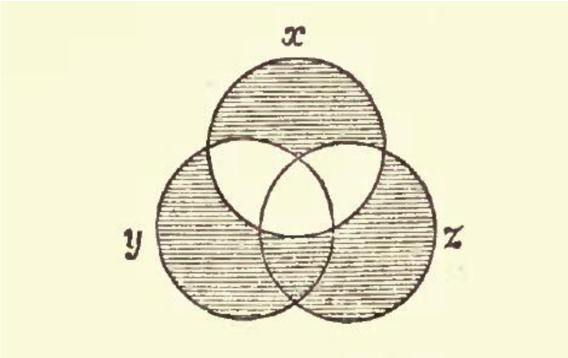


Figura 140 (Representación final de las proposiciones conjuntas"todo X es Y o Z" y ii) "No existe Y o Z que no sea X")

Como vemos, al hacerse más compleja la información inicial, parece más útil el sistema de Venn. Y si el número de términos aumenta, la balanza parece inclinarse definitivamente hacia su lado. Veamos un ejemplo con cuatro términos:

(i) Todo X es, o bien Y y Z, o no es Y

(ii) Si todo XY es Z, entonces es W

(iii) Ningún WX es YZ

En base a la anterior información, queremos llegar a saber las relaciones de inclusión y exclusión entre X e Y.

Al utilizar cuatro términos (x, y, z, w), nuestro diagrama de partida será el que se muestra en la figura 141.

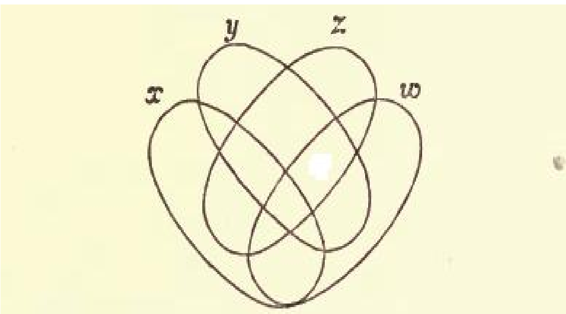


Figura 141(Diagrama inicial para cuatro términos, según Venn)

De (i) ("**Todo X es, o bien Y y Z, o no es Y**") , lo primero que deducimos es que la clase "XY que no es Z", ("**x y** $\bar{\mathbf{z}}$"), debe ser eliminada (sombreada). Veámoslo gráficamente en la figura 142.

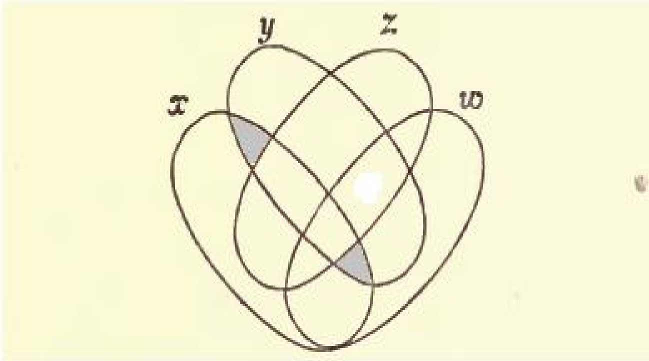


Figura 142(Representación gráfica de "Todo X es, o bien Y y Z, o no es Y")

Partiendo del diagrama de la figura 142, deberemos añadir la información que nos proporcione (ii) ("**Si todo XY es Z, entonces es W**"). De ii) se deduce que no existen elementos de XYZ que no sean W, o de otro modo, que "x y z $\overline{w}$" es vacía (debe ser eliminada). Sombrearemos el área correspondiente, utilizando la figura 142. El diagrama resultante será el de la figura 143.

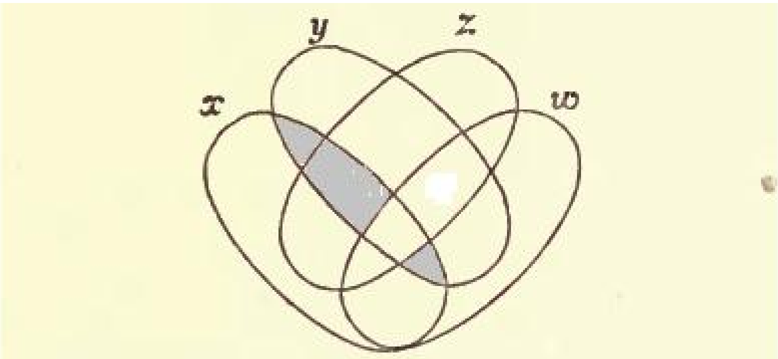


Figura 143 (Representación conjunta de i)" "Todo X es, o bien Y y Z, o no es Y")y ii) "Si todo XY es Z, entonces es W")

De (iii) "**Ningún WX es YZ**", se ve fácilmente que la clase "wxyz" es vacía (también debe ser eliminada). Esta información la añadiremos a la figura 143, obteniendo el diagrama final en la la figura 144. Salta a la vista que X e Y son mutuamente exclusivas, o dicho de otro modo: **"Ningún X es Y"**.

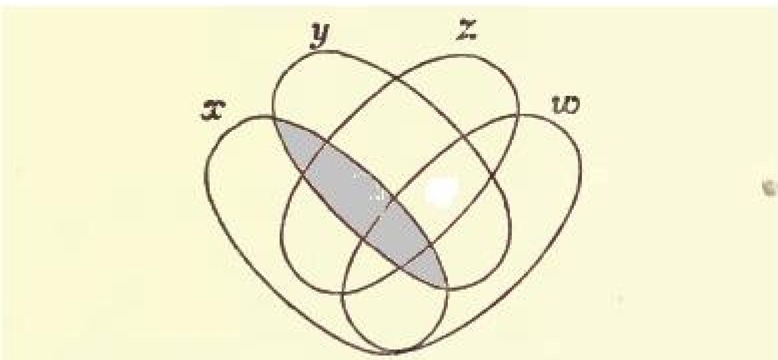


Figura 144 (Representación conjunta de i)" "Todo X es, o bien Y y Z, o no es Y"); ii) "Si todo XY es Z, entonces es W"); iii) "Ningún WX es YZ")

Venn no niega que pudiera realizarse una representación diagramática de estos ejemplos mediante el sistema euleriano, pero añade que sería mucho más laborioso y que su sistema se muestra más eficaz y clarificador. Sin embargo, hay que destacar que el sistema de Euler estaba diseñado especialmente para el silogismo categórico. De ahí que se muestre más ineficaz para problemas más complejos. El mismo Venn lo reconoce:

> ***"Pero se debería entender que el fracaso del método antiguo se debe sencillamente al intento de aplicarlo a un cierto conjunto más complicado de datos que aquellos para los cuales fue diseñado"***[57] (Venn, 1881, p.117)

Vistas las ventajas del sistema de Venn, así como sus ciertas debilidades, sobre todo las referidas a las proposiciones existenciales, concluiré este capítulo con unas palabras del propio Venn que nos pondrán sobre la pista del posible valor de los diagramas, no solo en lo referente a su sistema, sino que también sería aplicable a la hora de considerar otros futuros desarrollos diagramáticos:

> ***"Pero también recurriré de manera constante a los diagramas; por un lado con una finalidad de simple ilustración, y por otro lado, porque en algunas ocasiones realmente proporcionarán un modo más breve de prueba"***[58] (Venn, 1881, p.124).

2.2.4. Charles Sanders Peirce (1839-1914)

Charles S. Peirce, filósofo norteamericano, destacó por ser un innovador en distintas áreas del pensamiento y de las ciencias. Fisch escribe lo siguiente acerca de él: ***"Peirce no fue solamente uno de los filósofos más originales y versátiles de América; fue su más prolífico proyectista y delineante de sistemas"*** (Fisch, 1986, p.1)

Entre sus intereses estuvo la lógica, campo en el cual realizó una serie de aportaciones novedosas, a la cabeza de las cuales están sus "grafos[59] existenciales".

---

[57] ***"But it should be understood that the failure of the older method is simply due to its attempted application to a somewhat more complicated set of data than those for which it was designed"***(traducido por el autor del presente trabajo)

[58] ***"But I shall make constant appeal to diagrams also; both for purposes of mere illustration, and occasionally because they will really afford much briefer modes of proof"*** (traducido por el autor del presente trabajo)

[59] El término utilizado por Peirce es "graphs", que algunos autores traducen por "gráficos" y otros por "grafos". Entiendo que esta última sería una traducción más correcta.

Antes de analizar sus aportaciones diagramáticas, debemos hacer alguna consideración en torno a sus escritos y las dificultades encontradas a la hora de consultar el material creado por este prolífico autor. Al respecto, podemos leer en un número exclusivo que le dedicó la revista Anthropos[60]:

> [Tras su muerte] ***"la obra de Peirce comenzó a editarse con dificultades y no siempre con acierto a partir de la ingente cantidad de sus manuscritos, muchos de los cuales permanecen aún inéditos"*** (Marrodán, 2006, p.94).
>
> Y un poco más adelante:
>
> ***"… muchos de*** [sic] ***estudiosos están de acuerdo en que no se dispone todavía de una edición apropiada de su obra que permita enjuiciar su pensamiento en conjunto"*** (Marrodán, 2006, p.95).

Peirce escribió gran cantidad de artículos y dictó numerosas conferencias. Las dos principales fuentes de las que se dispone para acercarnos a sus ideas y pensamiento son los llamados *Collected Papers*[61] y los *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, y a ellas he acudido para tal fin. Ha sido también necesaria la consulta de las obras de diversos especialistas y estudiosos[62] en los grafos peirceanos, sobre todo Don D. Roberts, J. Jay Zeman, Sun-Joo Shin y Fernando Zalamea.

Una vez realizados estos comentarios introductorios, es hora de analizar las aportaciones de Peirce al campo de los diagramas en lógica. Una de dichas aportaciones se refiere a las mejoras que introdujo en el sistema de Venn[63]. Recordemos que una de las principales debilidades de aquel método era lo referente a las proposiciones existenciales (particulares). Peirce critica además la ineficacia de dicho sistema para expresar información disyuntiva. Teniendo en cuenta lo anterior, las mejoras de Peirce se resumen en los siguientes dispositivos gráficos. En primer lugar, sustituye el sombreado para las clases vacías por el símbolo "0". En segundo lugar, introduce el símbolo "x" como elemento auxiliar para poder representar las Proposiciones Particulares. El símbolo "x" representa una clase no vacía. Y por último, introduce el símbolo "___", para reflejar la información disyuntiva. Este símbolo lineal sirve para

---

[60] Revista Anthropos: Huellas del conocimiento, num. 212, año 2006 (referencia completa al final)

[61] Para referirme a la obra "Collected Papers of Charles Sanders Peirce", utilizaré, como habitualmente se hace, la abreviatura CP seguida del número de volumen y de parágrafo. La referencia completa se encuentra al final del trabajo.

[62] Las referencias bibliográficas se podrán consultar al final.

[63] Como nos recuerda Shin (1994, pp.20 y 21), Peirce habla de los "diagramas de Euler" para referirse en general a los diagramas circulares. Incluso titula una sección como "De los diagramas de Euler". Las modificaciones que introduce Peirce, las realiza realmente sobre el sistema que Venn ideó.

conectar, en su caso, los dos símbolos anteriores ("0" con "x", "0" con "0", y "x" con "x").

Veamos cómo estas modificaciones se trasladan de manera efectiva a la representación de los diagramas. Así, para las proposiciones existenciales tendríamos los siguientes ejemplos (CP.4.359):

- **"Algún S es P"** se representaría, según Peirce, como se muestra en la figura 145.

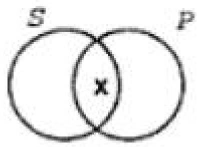


Figura 145
(Representación gráfica de "Algún S es P", mediante el método de Venn mejorado por Peirce)

- **"Algún S no es P"** se representaría según se ve en la figura 146.

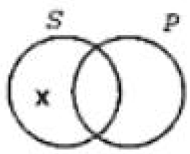


Figura 146
(Representación gráfica de "Algún S no es P", mediante el método de Venn mejorado por Peirce)

- **"Hay algo fuera de S y P"**, se representaría según la figura 147.

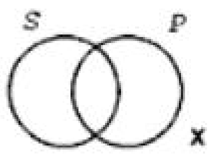


Figura 147
(Representación gráfica de "Hay algo fuera de S y P", mediante el método de Venn mejorado por Peirce)

En cuanto a la representación de las clases vacías, que con el sistema de Venn se realizaba mediante el sombreado, ya hemos comentado que Peirce sustituye dicho elemento por "0". Un ejemplo, que ya vimos al analizar el sistema de Venn, era la representación de una proposición del tipo "Todo S es todo P" (proposición que equivalía a la información conjunta proporcionada por i) "Todo S es P" y ii) "Todo P es S"). Recordemos que la representación diagramática correspondiente, según Venn, es la que se refleja en la figura 148.

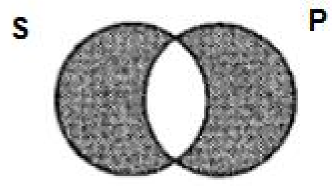


Figura 148
(Representación gráfica de "Todo S es todo P", según Venn)

Con los nuevos signos aportados por Peirce, el diagrama de la figura 148 quedaría como el de la figura 149.

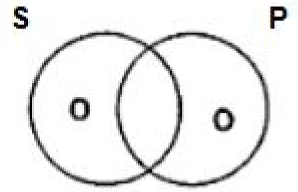


Figura 149
(Representación gráfica de "Todo S es todo P", según Peirce)

Si comparamos los diagramas de las figuras 148 y 149, el cambio del sombreado por el símbolo "0" no parece una sustancial mejora. Además, Peirce no explica el por qué del cambio. Sin embargo, como nos dicen Shin y Lemon (2008), el cambio queda justificado por sí mismo en la representación de las disyuntivas, siendo más claro el signo de "0" que el sombreado de Venn. Pasemos por tanto a ver algún ejemplo de la representación de la disyunción, según Peirce.

Supongamos que tenemos las siguientes proposiciones: i) "Todo S es P" y ii) "Algún S es P".

"Todo S es P" se representaría, según Peirce, según la figura 150.

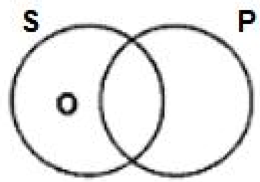


Figura 150
(Representación de "Todo S es P", según Peirce)

Por otra parte, "Algún S es P" se representaría según se ve en la figura 151.

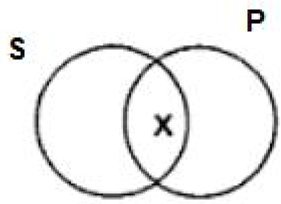


Figura 151
(Representación de "Algún S es P", según Peirce)

Si quisiéramos representar la disyunción de la información de los diagramas de las figuras 150 y 151, es decir, si quisiéramos representar en un solo diagrama la proposición **"Todo S es P, o, Algún S es P"**, no lo podríamos hacer ni con el sistema de Euler ni con el de Venn. Sin embargo, sería posible hacerlo mediante el sistema de Peirce, gracias al signo líneal de disyunción ("___"). La solución diagramática de Peirce la vemos en la figura 152.

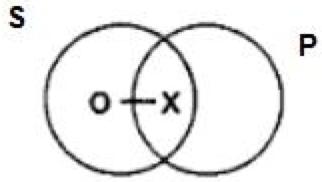


Figura 152
(Representación gráfica peirciana
de "Todo S es P, o, Algún S es P")

Ahora veamos qué sucede cuando la información se va haciendo más compleja, siguiendo un ejemplo que nos proponen Shin y Lemon (2008). Partamos de dos proposiciones. Sean

i) "**Todo S es P y Algún S es P**", cuya representación peirceana se muestra en la figura 153.

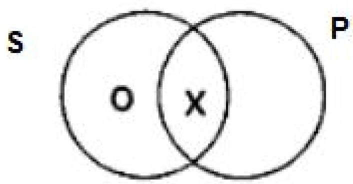


Figura 153

("Todo S es P y Algún S es P", según
el método de Peirce)

ii) "**Ningún S es P y Algún P es no S**", cuya representación sería el diagrama de la figura 154.

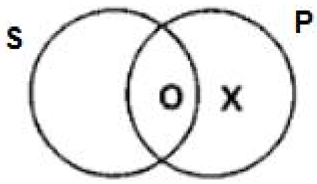


Figura 154
("Ningún S es P y Algún P es no S", según
el método de Peirce)

Ahora intentaremos represenar la disyunción de i) y ii), es decir, la disyunción de la información que expresan los diagramas de las figuras 153 y 154. Sería el diagrama correspondiente a la proposición: "**O, Todo S es P y Algún S es P; o, Ningún S es P y Algún P es no S**". Dicho diagrama lo vemos en la figura 155.

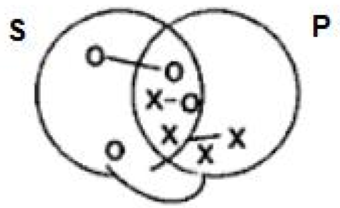


Figura 155
Representación gráfica peirceiana de
"O, Todo S es P y Algún S es P, o, Ningún S es P y Algún P es no S"

De acuerdo con Shin (1994, p.23), Peirce aumenta, con sus modificaciones, el poder de expresión de los diagramas circulares, pero pierde el poder visual que tenía el sistema original de Venn. Peirce es consciente de esta complejidad, y propone una representación alternativa a la figura 155, y que podemos ver en la figura 156.:

> ***"Sin embargo, hay una manera muy fácil y útil de evitar esto. Consiste en dibujar un Diagrama de Euler de Diagramas de Euler, cada uno rodeado por un círculo que represente su Universo de Hipótesis. No habrá necesidad de conectar las líneas en los diagramas envolventes,***

entendiéndose que sus compartimentos contienen los diversos posibles casos”.(CP. 4.365) [64]

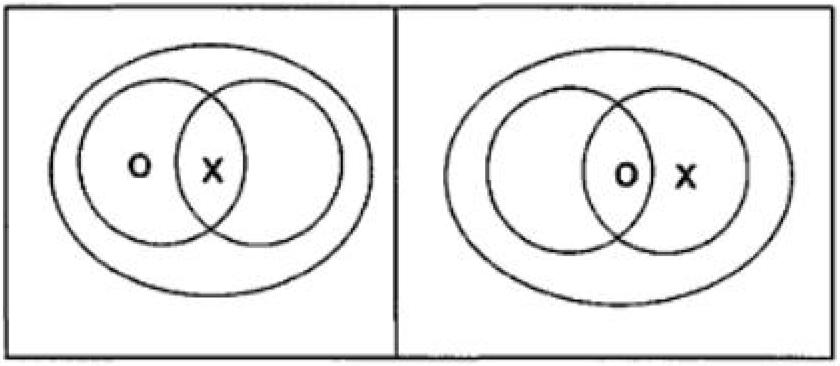


Figura 156
(Representación alternativa al diagrama de la figura 155;
tomada de Shin, 1994, p.23)

Aparte de las modificaciones vistas, Peirce introduce una serie de reglas de transformación aplicables al sistema de Venn (C.P. 4.362) [65]:

Regla 1: Se puede borrar cualquier signo completo de aserción, es decir, se puede borrar una “x”, un “0”, o una cadena que conecte una o varias “x”, y/o uno o varios “0”. Por ejemplo, el diagrama de la figura 157 se puede transformar en el diagrama de la figura 158, mediante la Regla 1.

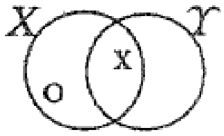


Figura 157
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 1)

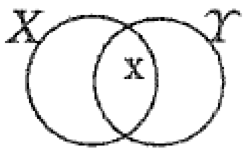


Figura 158
(Diagrama formado mediante la aplicación de la Regla 1 al diagrama de la figura 157)

Lo que en realidad hemos hecho al pasar de la figura 157 a la figura 158, ha sido una eliminación de una conjunción. Veámoslo en detalle. La figura 157 está

[64] Traducido por el autor de este trabajo. El párrafo original es el siguiente:
“There is, however, a very easy and very useful way of avoiding this. It is to draw an Euler’s Diagram of Euler’s Diagrams each surrounded by a circle to represent its Universe of Hypothesis. There will be no need of connecting lines in the enclosing diagrams, it being understood that its compartments contain the several possible cases”

[65] Para la interpretación de estas reglas ha sido de gran ayuda el artículo de Eric Hammer, “Peirce on Logical Diagrams” (ver referencia completa al final)

representando la conjunción de dos proposiciones: i) “Ningún X es no Y” y ii) “Algún X es Y”. Si aplicamos la eliminación de la conjunción, podemos afirmar que “Algún X es Y”, y que en realidad se representa gráficamente, siguiendo a Peirce, como se muestra en la figura 158.

Regla 2: Cualquier cadena (formada por un solo signo o más), puede ampliarse añadiendo x’s o también 0’s. De esta manera el diagrama de la figura 159 se transforma en el de la figura 160.

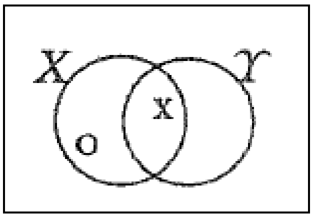


Figura 159(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 2)

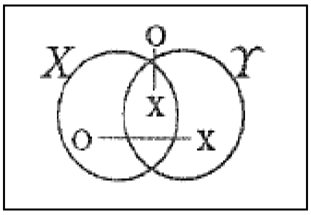


Figura 160(Transformación del diagrama de la figura 159 mediante la Regla 2)

Regla 3[66]: Un diagrama D se puede obtener a partir de dos diagramas, D1 y D2, siempre que los tres diagramas tengan el mismo número de círculos etiquetados con los mismos términos, y cada cadena que aparezca en D también aparezca en D1 o D2.

Por ejemplo, de acuerdo con la Regla 3, el diagrama de la figura 162, se podría formar a partir de los dos diagramas de la figura 161.

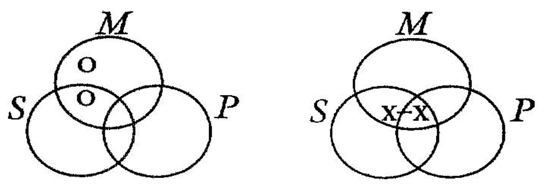


Figura 161
(A partir de estos dos diagramas, y aplicando la Regla 3, se formaría el diagrama de la figura 162)

---

[66] Esta es la interpretación que hace Hammer (1995, p.814) de la regla de Peirce. El propio Hammer comenta que el lenguaje que utiliza Peirce para esta regla es algo “opaco”.

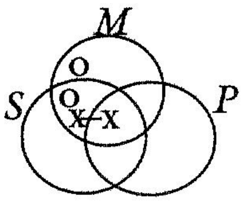


Figura 162
(Diagrama obtenido de aplicar la Regla 3 a los diagramas de la figura 161)

Regla 4: Consta de varios apartados.

R.4.i) Dos ocurrencias de un mismo signo ("x" o "0") en un mismo compartimento, pueden ser reducidas a una sola ocurrencia, con la condición de que, o bien ninguna de las dos ocurrencias estén ligadas a ningún otro signo; o bien ambas formen parte de la misma cadena. Así el diagrama de la figura 162 puede transformarse en el de la figura 163, mediante la aplicación de la Regla 4.i).

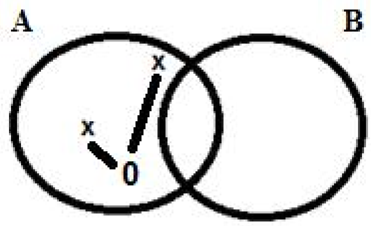


Figura 162
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 4.i)

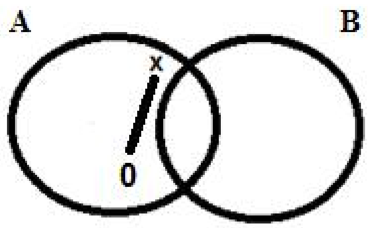


Figura 163
(Resultado de aplicar la Regla 4.i al Diagrama de la figura 162)

R.4.ii) Dos signos diferentes en un mismo compartimento, en el caso de que estén unidos entre sí, equivalen a ningún signo, y por tanto pueden ser eliminados, o insertados. Pero si no están unidos entre sí ni están conectados con ningún otro signo, entonces constituyen un absurdo. Así el diagrama de la figura 164 se puede convertir en el de la figura 165, mediante la Regla 4.ii).

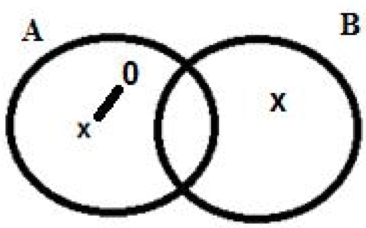


Figura 164(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 4.ii)

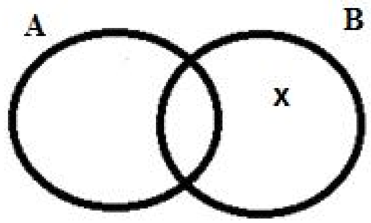


Figura 165
(Diagrama resultante de aplicar la Regla 4.ii) al diagrama de la Figura 164)

Por otro lado, el diagrama de la figura 166 constituiría un absurdo, según Peirce.

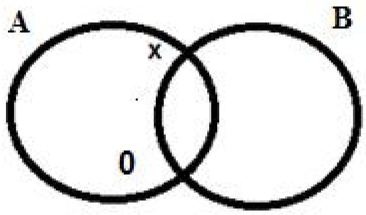


Figura 166
(Diagrama que respresenta un absurdo, según Peirce)

R.4.iii) Si tenemos un “0” y una “x” en un mismo compartimento, y uno de ellos forma parte de una cadena P, y el otro forma parte de una cadena Q, está permitido eliminar el “0” y la “x”, y unir las cadenas P y Q. Siguiendo esta regla, se puede pasar del diagrama de la figura 167 al diagrama de la figura 168.

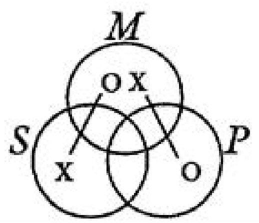


Figura 167
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 4.iii)

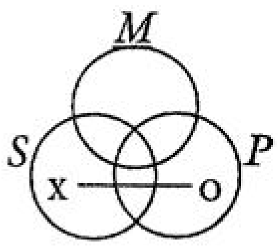


Figura 168
(Resultado de aplicar la regla 4.iii) al gráfico de la Figura 167)

Regla 5[67]: Se puede borrar un círculo, bajo ciertas condiciones. Antes de pasar a analizar las condiciones para dicho borrado, conviene hacer algunas aclaraciones previas. Si borramos un círculo que forme parte de un diagrama, cualquier compartimento “r” del nuevo diagrama, estará formado por la unión de dos compartimentos del antiguo diagrama. Uno de ellos está en el interior del círculo que va

[67] En esta ocasión, recurrimos tanto a la aclaración de Hammer (1995, p.815), como a la de Shin (1994, p.34)

a ser borrado ("r+"), y el otro está en el exterior de de dicho círculo ("r-"). Cuando el círculo es borrado, r+ y r- se unen, dando lugar a un nuevo compartimento r. Recurramos, para aclararlo, al diagrama de Venn para tres términos (figura 169).

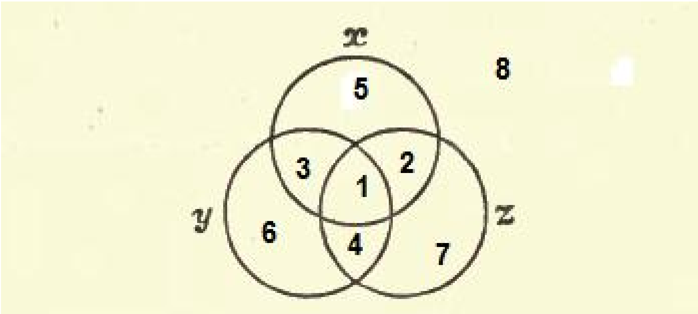


Figura 169
(Diagrama inicial del Venn para tres términos)

Supongamos que borramos el círclo "z", quedándonos solo con "x" e "y". Renombraremos, asimismo, los nuevos compartimentos:

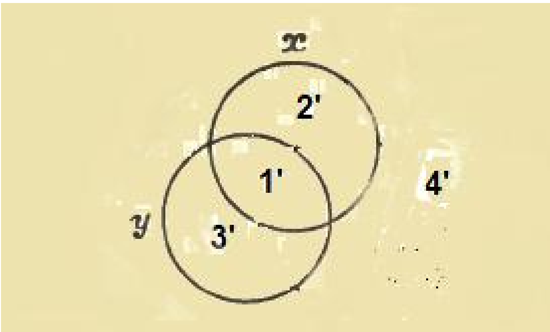


Figura 170
(Diagrama resultante al borrar Z del diagrama de la figura 169)

Cualquier compartimento (r) del diagrama de la figura 170, es el resultado de unir dos compartimentos [(r+) y (r-)] del diagrama de la figura 169. Por ejemplo, el compartimento 1' de la figura 170, es el resultado de unir los compartimentos 1 y 3 del diagrama de la figura 169.

Aclarado este concepto, pasemos a concretar la regla de transformación que estábamos viendo:

i) Si al borrar un círculo, en un nuevo compartimento hay dos "0" independientes, entonces deberán quedar unidos. Shin (1994, p.34) da el siguiente ejemplo, pudiendo transformar el diagrama de la figura 171 en el de la figura 172.

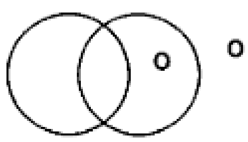


Figura 171
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 5.i)

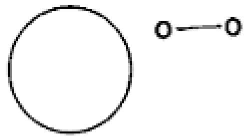


Figura 172
(Resultado de aplicar le Regla 5.i)
al diagrama de la figura 171)

ii) Considerando r+ y r- según la aclaración vista más arriba, y si en el compartimento r+ del diagrama original, hay un "0" formando parte de una cadena, P, entonces deberemos encontrar otra cadena Q, en r-, que contenga otro "0". En el diagrama final, deberemos unir ambas cadenas, la P y la Q. Si en r- no hubiera tal cadena Q, entonces la cadena P deberá ser borrada. Y lo mismo ocurre a la inversa, si en r- hay una cadena Q que contenga un 0, deberemos encontrar en r+ otra cadena P que contenga un 0; si no hubiera tal cadena P, entonces la cadena Q deberá ser borrada. Un ejemplo de aplicación de esta regla lo podemos ver en la transformación del diagrama de la figura 173 en el diagrama de la figura 174.

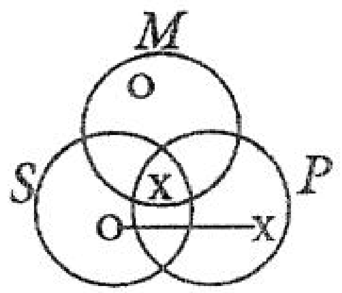


Figura 173
(Diagrama al que se le va a aplicar
la Regla 5.ii.)

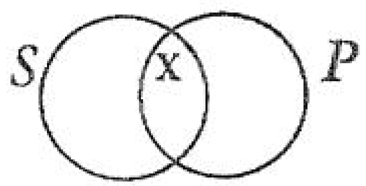


Figura 174
(Diagrama resultante de aplicar la
Regla 5.ii) al diagrama de la figura 173)

La aplicación de la regla 5.ii) al diagrama de la figura 173, se ha hecho de la siguiente manera. Cuando borramos el círculo M, el “0” que pertenecía a $M\ \overline{S}\ \overline{P}$ tiene que ser borrado, pues no hay ninguna cadena que contenga un “0” en $\overline{M}\ \overline{S}\ \overline{P}$.

Regla 6: Se puede añadir un nuevo círculo a un diagrama, con las siguientes condiciones:

i) Si el nuevo círculo pasa por un compartimento que contenga una “x”, se deberá dibujar otra “x” conectada con la primera, de tal forma que el nuevo círculo se encuentre entre las dos “x”, sin importar las demás conexiones de la primera “x”. Esta regla puede ejemplificarse en el paso de la figura 175 a la 176.

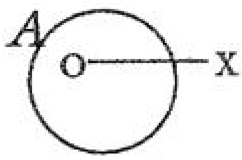


Figura 175
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 6.i.)

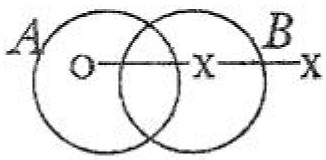


Figura 176
(Resultado de aplicar la Regla 6.i) al diagrama de la figura 175)

ii) Si el nuevo círculo pasa por un compartimento que contenga un “0”, se podrá insertar un duplicado separado de todas las conexiones de este “0”, de manera que un “0” esté en un lado y el otro, en el otro lado del nuevo círculo. Un ejemplo lo tenemos en el paso del diagrama de la figura 177 al de la figura 178.

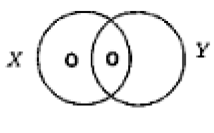


Figura 177
(Diagrama al que se va a aplicar la Regla 6.ii.)

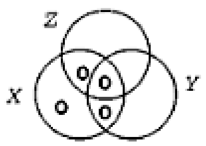


Figura 178
(Diagrama resultante de aplicar la Regla 6.ii) al diagrama de la figura 177)

El sistema de los diagrama de Venn, aún siendo mejorado con las modificaciones y reglas introducidas por Peirce, no podía resolver algunos problemas de representación. Entre otras cosas, nos dice Peirce: ***"No se puede extender a la lógica de relaciones"*** (C.P. 4.356) [68] .

Además, como bien señala Shin (1994, p.35), las reglas propuestas por Peirce para el método de Venn necesitarían ser aclaradas, e incluso podría añadirse alguna regla más para que fuera un sistema completo. Pero la principal crítica de Shin es sobre la falta de claridad sobre términos tales como "equivalencia" o "absurdo" utilizados por Peirce en algunas reglas. Según Shin hay una falta de distinción entre sintaxis y semántica por parte de Peirce. De otro lado, el propio Peirce es consciente de las limitaciones de sus propias reglas aplicadas a los diagramas de Venn: ***"Estas seis reglas han sido escritas completamente sin preconsideración; probablemente se podrían simplificar, y no sería improbable que alguna se hubiera pasado por alto"*** (CP. 4.362).

Como consecuencia de ello, Peirce irá creando y perfeccionando, a partir de 1896, un sistema propio. Al principio lo intentó con un sistema que denominó como "grafos de entidades" o "grafos entitativos", pero abandonó el proyecto por falta de "naturalidad e iconicidad" (CP. 4.434). Pasó así a crear su sistema conocido como de los "grafos existenciales". El término existencial hacía referencia a ***"la capacidad de los gráficos para plasmar pictóricamente cualquier estado existente de cualquier aspecto de cualquier universo posible"*** (Gardner, 1985, p.91).

Antes de comenzar a exponer el sistema de Grafos Existenciales de Peirce, conviene recordar las distinciones terminológicas que él mismo hace (CP. 4.418-4.421), y que servirán para aclarar donde se sitúa conceptualmente su sistema. De esta manera, define un **"diagrama"** como un signo ("representamen" según el vocabulario elaborado por Peirce) que es predominininantemente un icono de relaciones, apoyado por convenciones (CP.4.418). Un **"grafo"** es un diagrama sobre una superficie, y se compone de una hoja sobra la cual se escriben o dibujan puntos, líneas de conexión y líneas cerradas (CP.4.419). Un **"grafo lógico"** es un grafo que representa de forma icónica, relaciones lógicas, sirviendo de ayuda para el análisis lógico (CP. 4.420). Un **"grafo existencial"** es un grafo lógico gobernado por un sistema de representación (CP.4.421). Este sistema de representación se basa en lo siguiente:

i) la hoja (y cualquier parte de la hoja) en la que se escribe el grafo, y que representa un universo reconocido, real o ficticio.

[68] "It does not extend to the logic of relatives" (traducido por el autor del trabajo).

ii) todo grafo dibujado en la hoja, que no esté rodeado por una línea cerrada representando que está recortado de la hoja, representa algún hecho existente en dicho universo.

iii) dos grafos cualesquiera dibujados en diferentes partes de la hoja, representan, según ii), dos hechos independientes.

iv) distintos grafos dibujados en una hoja, forman un grafo compuesto.

El sistema de Grafos Existenciales consta de tres subsistemas. El subsistema Alfa, que se corresponde con la lógica proposicional; el susbsistema Beta, que se corresponden con la lógica de predicados; y el subsistema Gamma, que se corresponde con el cálculo funcional de segundo orden (y superior), y con la lógica modal. Posteriormente pasó a desarrollar un sistema de "grafos existenciales tintados (o coloreados)", que intentaba reinterpretar los tres subsistemas anteriores dándoles una mayor potencialidad.

Veremos muy sucintamete en que consiste cada subsistema, pues un análisis completo, aunque merecido, rebasaría los límites del presenta trabajo.

Antes de pasar a la explicación de las ideas de Peirce, creo conveniente hacer algunas aclaraciones. En primer lugar, y en lo que se refiere a la terminología, Peirce utiliza términos como "convenciones", realizando una enumeración de ellas, refiriéndose a definciones previas y descripciones de elementos utilizados. Asimismo, utiliza el término "Autorizaciones" ("Permissions") para referirse en ocasiones a reglas. En mi exposición he preferido no seguir expresamente esta terminología, sino otra más convencional, utilizada por autores como Zeman o Roberts, que han estudiado el sistema de Peirce. Es una terminología que parece más clara y presta menos a confusión.

Por otro lado, mi exposición se basa, sobre todo, en los escritos recogidos en *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, pero debido a las deficiencias ya comentadas más arriba, he creído conveniente acudir también a las interpretaciones de los autores citados, Roberts, Zeman, Shin y Zalamea. Por ello, el resumen de las ideas de Peirce que se expone a continuación no es una traslación exacta y minuciosa de todas las partes que se reflejan en la obra de Peirce, sino una elaboración propia que trata de recoger lo esencial de los grafos existenciales.

Dicho todo esto, pasaremos a estudiar en primer lugar el subsistema Alfa, que es el equivalente a la lógica de enunciados.

<u>Subsistema Alfa</u>

Definiciones (D) previas:

D.1.) Un grafo es una expresión proposicional, dentro del Sistema de Grafos Existenciales, de cualquier posible estado del universo. Es decir, un grafo es una representación de una proposición mediante un signo o combinación de signos.

D.2.) Una Hoja de Aserción es la superficie en la cual se dibujan los grafos

D.3.) Un grafo dibujado en la Hoja de Aserción es una instancia de dicho grafo.

Pasemos ahora a concretar los elementos (E) que forman parte del Subsistema Alfa:

E.1.) La Hoja de Aserción

E.2.) Las letras proposicionales como P, Q, R, …

E.3.) El “corte” o “sep”[69]. Se trata de una línea cerrada (normalmente un círculo o elipse, aunque puede tener cualquier forma). El interior de la línea de corte será el “área” de dicho corte. La línea de “corte”, junto con su área correspondiente se denomina “cerramiento” (enclosure).

Como consecuencia de la posible inserción de un “corte” en la Hoja de Aserción, debemos considerar una definición adicional: la de grafo bien formado.

D.4.) Un **grafo bien formado** es:

D.4.1.) Cualquier espacio en blanco de la Hoja de Aserción. En el caso particular de no dibujar nada en la Hoja de Aserción, tendremos también un grafo bien formado. Por ejemplo, si el rectángulo de la figura 179 representase la Hoja de Aserción, tendríamos entonces un grafo bien formado.

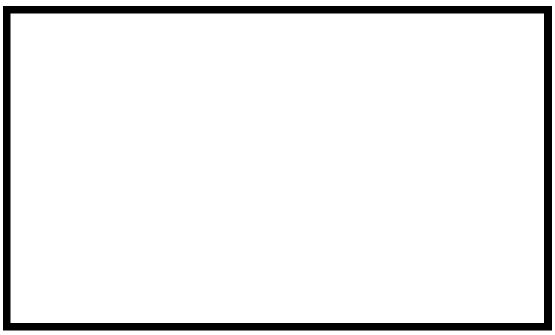


Figura 179
(Hoja de Aserción en blanco; sería un caso de grafo bien formado)

D.4.2.) Una letra proposicional inscrita en cualquier parte de la Hoja de Aserción. Por ejemplo, el grafo de la figura 180 sería un grafo bien formado.

[69] Del latin “saepes” (valla, cerca)

Figura 180
(Ejemplo de grafo bien formado)

D.4.3.) El cerramiento, mediante un corte, de un grafo bien formado, es otro grafo bien formado. Peirce nos deja claro que un corte (la línea que define el corte), en sí mismo, no es un grafo bien formado. Sí que lo es el corte junto con el interior que encierra: ***"Un corte no es un grafo; pero un cerramiento es un grafo"*** (CP.4.399).

La figura 181 correspondería a un ejemplo de grafo bien formado.

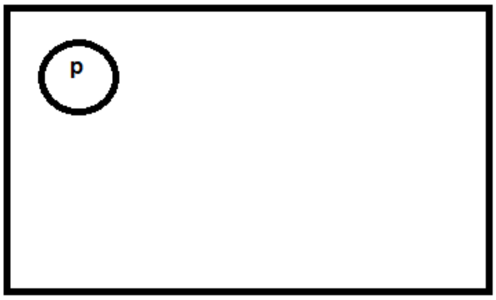


Figura 181
(ejemplo de grafo bien formado)

D.4.4.) Dos grafos bien formados yuxtapuestos son también un grafo bien formado. Según esto, la figura 182 correspondería a otro grafo bien formado.

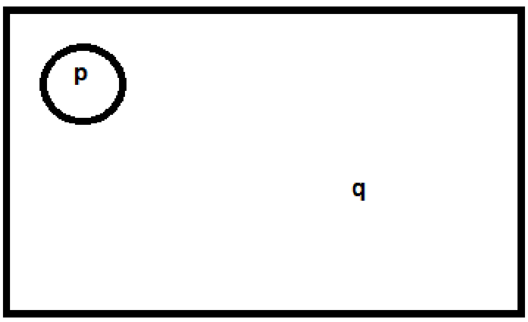


Figura 182
(Ejemplo de grafo bien formado)

D.4.5.) Exclusivamente son grafos bien formados los casos incluidos en D.4.1.) a D.4.4.), y ninguno más. Por ejemplo, no serían grafos bien formados los siguientes ejemplos recogidos en las figuras 183 y 184.

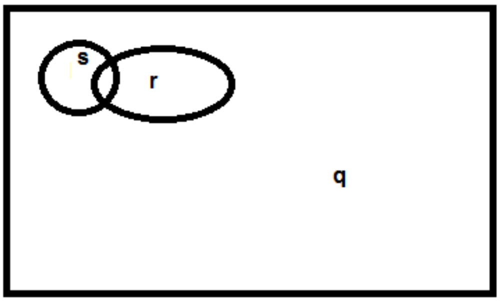


Figura 183
(Ejemplo de un caso de grafo no bien formado)

La figura 183 no sería un grafo bien formado, pues las dos líneas de corte se intersectan, lo cual no se recoge en la definición de grafo bien formado.

La figura 184 tampoco sería un grafo bien formado, pues el corte no incluye toda la letra proposicional, sino solo una parte de ella.

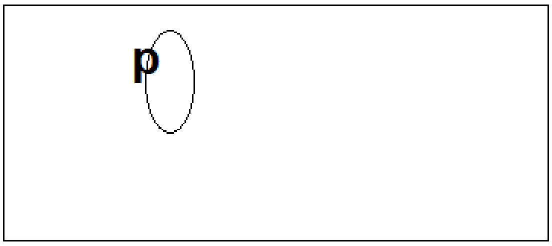


Figura 184
(Otro ejemplo de un caso de un grafo que no sería grafo bien formado)

Añadamos unas nuevas definiciones, a la vista de lo anterior.

D.5.) Un grafo bien formado que forma parte de otro grafo bien formado se denomina subgrafo.

Por ejemplo, el grafo de la figura 185, sería un subgrafo del grafo expresado en la figura 186.

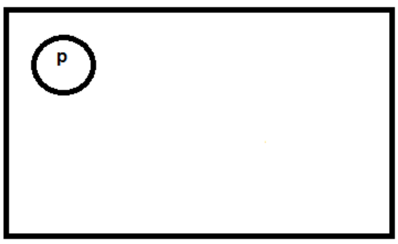


Figura 185
(Subgrafo del grafo de la figura 186)

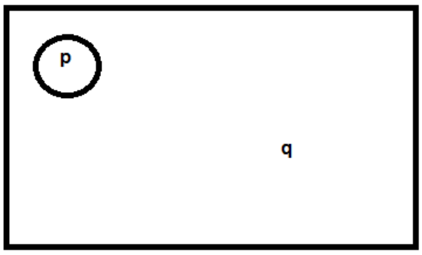


Figura 186
(Grafo que incluye el subgrafo de la figura 185)

D.6.) Sea un grafo que está encerrado en una serie sucesiva de cortes. El número de cortes se denomina "nivel" o "profundidad" del grafo. Si el grafo no está encerrado dentro de un corte, se dirá que su nivel o profundidad es cero. Por ejemplo, tengamos en cuenta la figura 187.

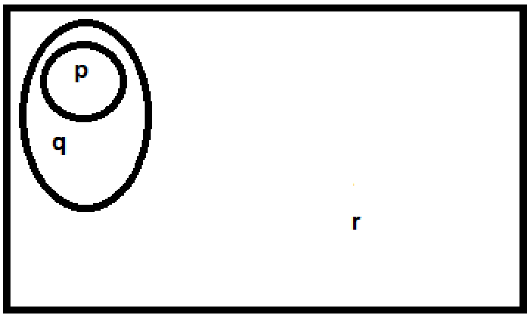


Figura 187
(grafo utilizado para la explicación del concepto "nivel")

En dicha figura, el subgrafo "r" tiene un nivel cero; el subgrafo "q" tiene nivel uno, y el subgrafo "p" tiene nivel dos. Asimismo el subgrafo de la figura 188, tendría nivel uno.

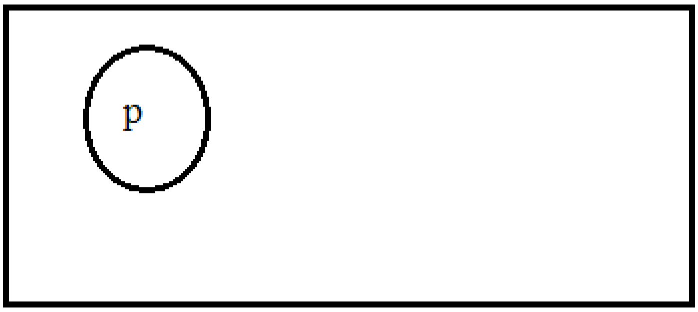


Figura 188
(subgrafo del grafo de la figura 187; este subgrafo tendría nivel uno, considerándolo parte del grafo de la figura 187)

D.7.) Si un grafo tiene un nivel cero o par, se dirá que el grafo está encerrado de forma par ("*evenly enclosed*"; CP.4.399). Si el nivel es impar, se dirá que está encerrado de forma impar ("*oddly enclosed*"; CP. 4.399).

De esta manera, y siguiendo con el ejemplo del grafo de la figura 187, "r" y "p" estarían encerrados de forma par, mientras que "q" lo estará de forma impar. El subgrafo de la figura 188 estaría también encerrado de forma impar (considerándolo parte del grafo de la figura 187).

D.8.) Sean dos cortes, C_1 y C_2. Si C_1 contiene en su área el cerramiento de C_2, y nada más, entonces C_1 y C_2 constituyen un "doble corte". Por ejemplo, la figura 189 representa un doble corte.

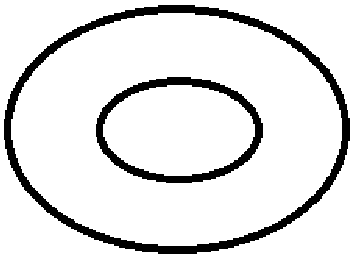


Figura 189
("Doble corte")

Una vez vistos los elementos esenciales y las definiciones básicas del subsistema Alfa, convendría pasar a analizar algunos elementos semánticos (S) de dicho subsistema:

S.1.) La Hoja de Aserción significa "la verdad".

S.2.) El corte es equivalente a la negación lógica. De esta manera, encerrar un subgrafo con un corte es equivalente a negar el contenido del corte. Por ejemplo, el grafo de la figura 190 sería la representación de la negación de la proposición p , es decir, $\neg$ p:

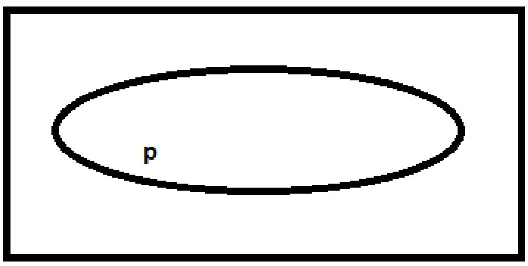


Figura 190
(Representación de la negación de "p")

S.3.) De acuerdo con S.1.) y S.2.), un "corte" que solo tenga un espacio en blanco en su interior, significa "Lo falso".

S.4.) Las letras, subgrafos y grafos pueden ser "verdaderos" o "falsos".

S.5.) Dos subgrafos yuxtapuestos son la representación gráfica de la conjunción lógica. Se entiende, por tanto, que dos subgrafos dentro de un corte, están también conjuntados. Ilustrémoslo con los siguientes ejemplos. La figura 191 sería el grafo representativo de la conjunción de las proposiciones "p" y "q" , es decir, "p^q".

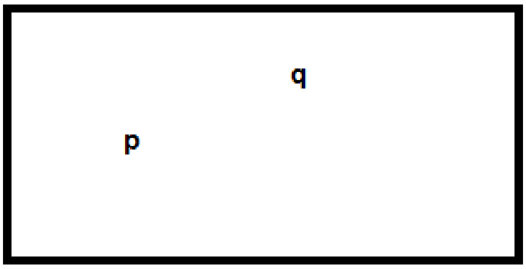


Figura 191
(Grafo representativo de "p^q")

Por otro lado, el grafo de la figura 192, sería la negación de la conjunción de "p" y "q", es decir, [¬ (p^q)].

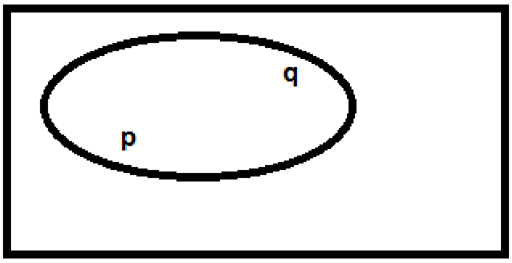


Figura 192
(Grafo representativo de [¬ (p^q)])

S.6.) La implicación lógica se representaría según la figura 193.

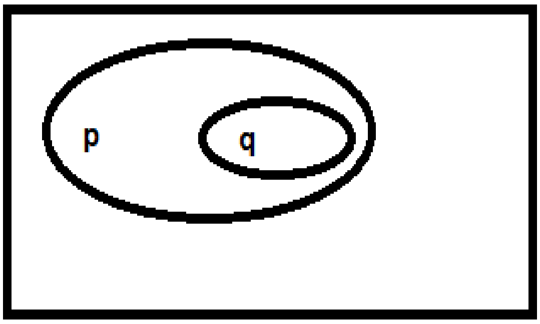


Figura 193
(Grafo representativo de la implicación "P → Q")

Expliquemos brevemente el significado de la figura 193. Realmente el grafo representa, según la significación del "corte" y de la yuxtaposicion: ¬ (P ^ ¬ Q). Sin embargo, esta expresión es equivalente a P → Q.

En este caso, Peirce admite una representación alternativa a la figura 193, introduciendo una sutil diferencia, según la cual los dos cortes pueden tener un punto de contacto (no cortándose) (ver figura 194).

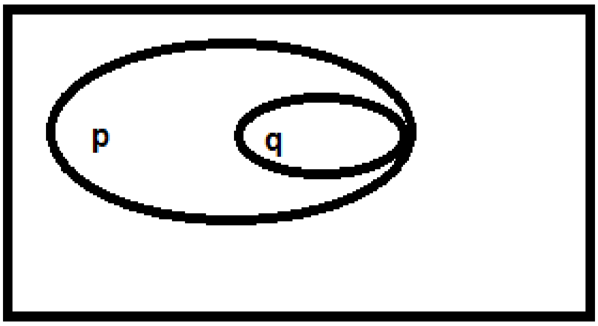


Figura 194

(Grafo alternativo a la representación de la implicación "P → Q")

S.7.) La disyunción de dos proposiciones, "p" y "q", (p V q), se representa según el grafo expresado en la figura 195.

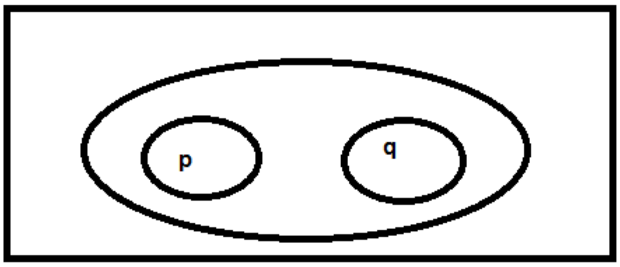


Figura 195
(Grafo representativo de la disyunción de "p" y "q", es decir, "p V q")

Realmente el grafo de la figura 195 representa, según la significación del "corte" y de la yuxtaposicion, ¬ (¬P ^ ¬ Q). Pero esta expresión es equivalente a "P v Q".

Veremos a continuación las **Reglas de transformación** del sistema Alfa. Pero previamente mencionemos que Peirce se basa en la convención de que se puede insertar una o varias proposiciones en la Hoja de Aserción, con el valor de premisas para derivar conclusiones. Teniedo esto en cuenta, propone las siguientes reglas de transformación:

R.1.) Regla de Borrado: Cualquier grafo de nivel par puede ser borrado.

Así, a partir del grafo de la figura 196 se puede inferir el grafo de la figura 197, borrando "q", pues tiene nivel par.

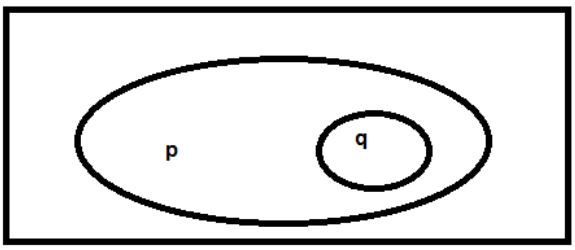


Figura 196
(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Borrado)

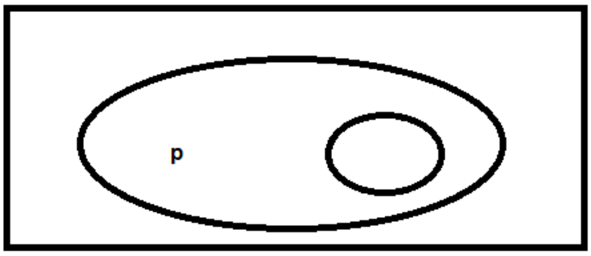


Figura 197
(Grafo obtenido a partir de la figura 196, aplicando la regla de borrado al subgrafo "q")

R.2.) Regla de Inserción: Cualquier grafo puede ser insertado en un área con nivel impar.

Por ejemplo, partiendo del grafo de la figura 198 se puede deducir el grafo de la figura 199, aplicando la regla de inserción.

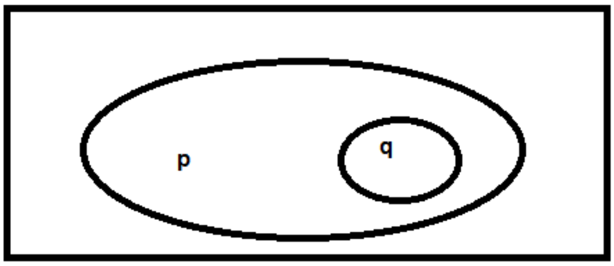


Figura 198
(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Inserción)

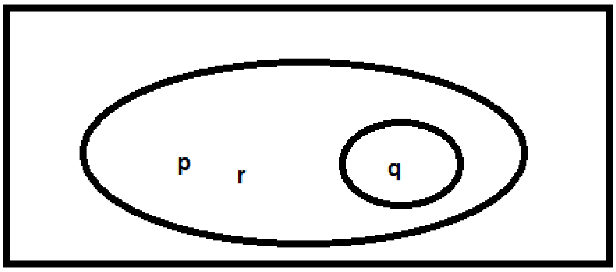


Figura 199
(Grafo obtenido de aplicar la regla de inserción al grafo de la figura 198)

R.3.) Regla de Iteración: Cualquier subgrafo puede repetirse en el mismo nivel donde se encuentre, o en un nivel con valor numérico mayor. Sin embargo, no está permitido repetirse en el interior de él mismo.

Por ejemplo, basándonos en esta regla, estaría permitido derivar el grafo de la figura 201, partiendo del grafo de la figura 200.

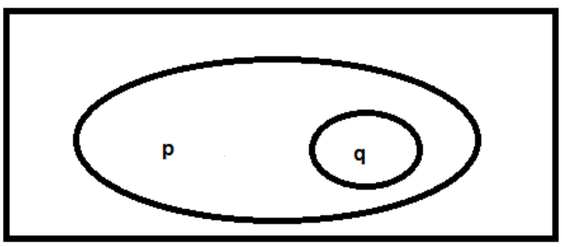


Figura 200
(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Iteración)

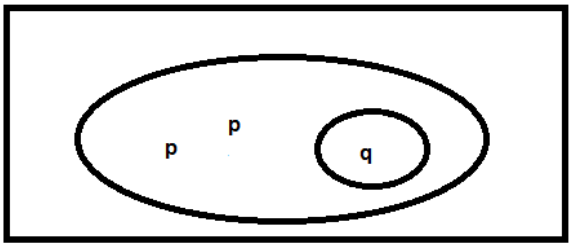


Figura 201
(Grafo obtenido a partir del grafo de la figura 200,mediante la regla de iteración. En este caso se ha iterado "p")

En este caso estamos iterando "p" en el mismo nivel. Sin embargo sería incorrecto que a partir del grafo de la figura 200 se derivara el de la figura 202. Se trata de una aplicación incorrecta de la regla de iteración, pues uno de los subgrafos de la figura 200 (concretamente el subgrafo representado en la figura 203), lo estamos iterando en el interior de él mismo.

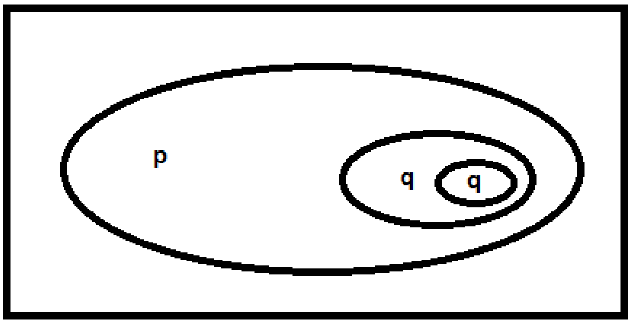


Figura 202
(Aplicación incorrecta de la regla de iteración sobre el grafo de la figura 200)

Figura 203
(subgrafo del grafo de la figura 200,reiterado incorrectamente en la figura 202)

R.4.) Regla de Desiteración: Si un grafo cualquiera –X- podría haberse derivado a partir de otro grafo –Y-, mediante la regla de iteración, entonces dado el grafo X podemos derivar el gráfico Y.

Por ejemplo, dado el grafo de la figura 204, se puede pasar, aplicando R.4, al grafo de la figura 205.

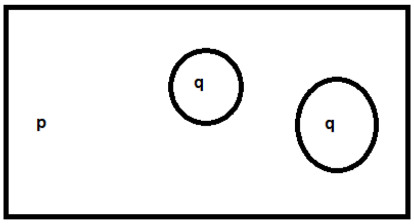


Figura 204
(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Desiteración)

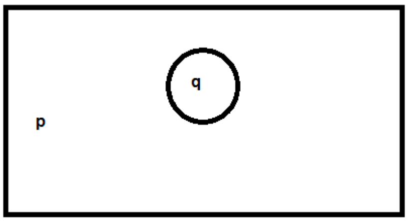


Figura 205
(Grafo obtenido a partir del grafo de la figura 204, aplicando la regla de desiteración)

R.5.) Regla del doble corte: Se pueden añadir o eleminar dobles cortes en cualquier parte del grafo. Por ejemplo, a partir del grafo de la figura 206, podemos deducir el grafo de la figura 207, aplicando la regla del doble corte.

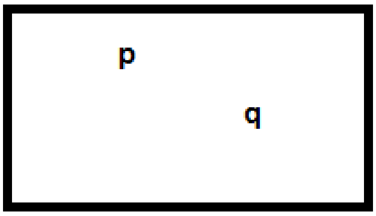


Figura 206
(Grafo al que se va a aplicar la Regal del "doble corte")

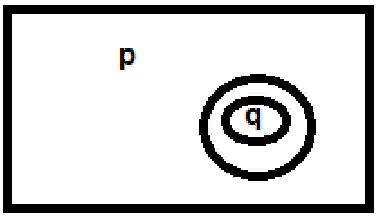


Figura 207
(Grafo obtenido a partir de la figura 206, aplicando la regla del "doble corte")

Subsistema Beta

Sería el subsistema correspondiente al cálculo de predicados de primer orden. Asume el subsistema Alfa, añadiéndole algunos elementos.

Antes de pasar a describir el susbsistema Beta, es conveniente aclarar algunos términos peirceanos. Uno de dichos términos es el de Rhema[70]. Un Rhema vendría a ser el predicado de una proposición. Por ejemplo "___es mortal" sería un Rhema. Como puede apreciarse, consta de una expresión verbal junto con un espacio en blanco. Dicho espacio está destinado a ser rellenado por un término, dando lugar así a una proposición.

[70]Término tomado del griego, y que etimológicamente significa "lo que se dice".

Siguiendo con el ejemplo propuesto, si utilizamos el término "María", tendríamos la proposición "María es mortal". Este caso que hemos visto sería el caso de un Rhema no relativo, pues contiene solamente un "espacio en blanco". En el caso de que tuviera más de un espacio en blanco se trataría de un Rhema relativo. Así, por ejemplo el Rhema "__ es mayor que __", se trataría de un caso de Rhema relativo. Necesitaríamos dos términos para formar una proposición, como "Ocho es mayor que siete".

Una vez aclarado en que consiste un Rhema, ya estamos en condiciones de pasar al análisis del subsistema Beta.

El primer elemento que Peirce introduce en Beta es la llamada "línea de identidad". Consiste en una línea contínua, sin importar su forma. También sería una forma válida, como línea de identidad, la inscripción de un punto. Inscribir una línea de identidad en la Hoja de Aserción es un grafo bien formado en el sistema Beta, y significa "algo existe". Es decir, afirma la existencia de un objeto en el universo del discurso. Por ejemplo, los grafos de las figuras 208 y 209 serían grafos bien formados en Beta y su significado sería: "algo existe".

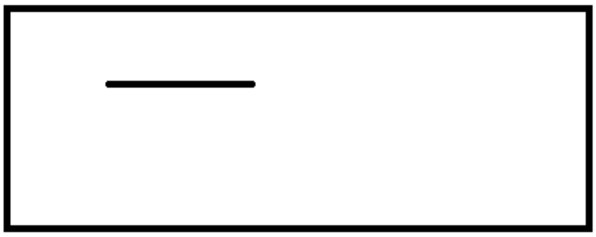


Figura 208
("Algo existe")

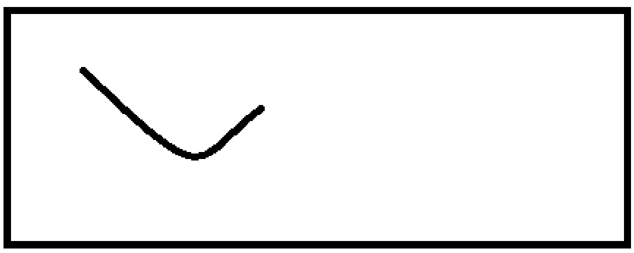


Figura 209
("Algo existe")

La figura 210 también repesentaría una línea de identidad. Por su forma especial en la que los dos extremos se unen, se llama "ciclo". No debemos confundirlo con el "corte", el cual se utilizaba para la negación. El ciclo se distingue normalmente por tener un trazo más grueso que el corte.

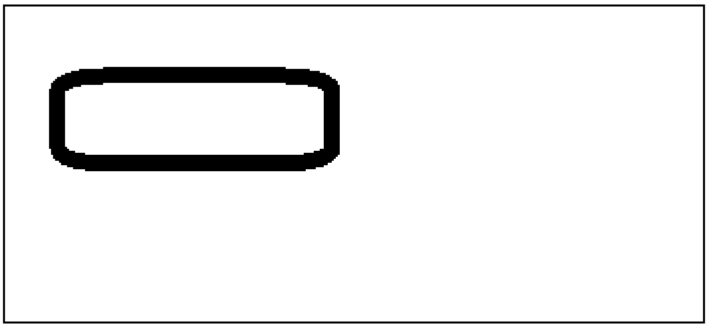


Figura 210("un ciclo", en este caso con el significado de "algo existe")

A una línea de identidad puede añadirse un Rhema en uno de sus extremos o a los dos. En ambos casos tendríamos también un grafo bien formado. El lugar por el que la línea de identidad se une al Rhema, es denominada por Peirce como "gancho", y vendría a coincidir con lo que más arriba hemos llamado "espacio en blanco" al definir el Rhema. Veamos un ejempo de caso de una línea de identidad unido a un Rhema por uno de sus extremos (ver figura 211).

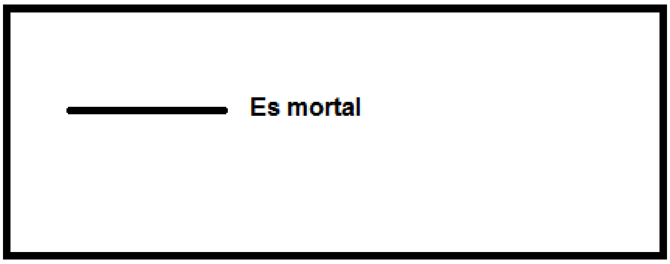


Figura 211(línea de identidad unida a un Rhema;el significado del grafo sería: "Existe al menos alguien que es mortal")

Analicemos con más detalle los componentes del grafo de la figura 211. Tenemos una línea de identidad, y unido a uno de sus extremos está el Rhema "___es mortal". La unión de la línea de identidad con el Rhema se realiza en el "gancho" (espacio en blanco) del Rhema. El significado de este grafo concreto sería "Existe al menos alguien que es mortal" ($\exists$x Mortal(x)).

Veamos ahora un ejemplo de una línea de identidad con los extremos unidos cada uno a un Rhema (Ver figura 212).

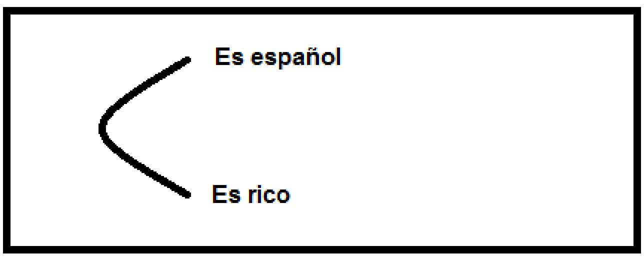


Figura 212 (Una misma línea de identidad unida a dos Rhemas;su significado sería: "Al menos un español es rico")

El significado del grafo de la figura 212 sería "Al menos un español es rico" [∃x(Español(x)∧ es rico(x))]

Es importante destacar que cuando se inserta un rhema, todos sus "ganchos" (sean uno o varios), tienen que estar unidos a una línea de identidad. En caso contrario no sería un grafo beta bien formado. Así por ejemplo, el grafo de la figura 213 no sería un grafo beta bien formado, pues el rhema "_es lo contrario de_" tiene dos "ganchos", y solo uno de ellos tiene una línea de identidad unido a él.

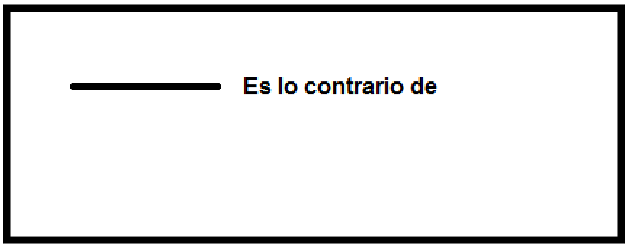


Figura 213(ejemplo de caso de un grafo no bien formado)

Por el contrario, la figura 214 sería un grafo bien formado, con el significado de "existe al menos algo que es lo contrario de algo".

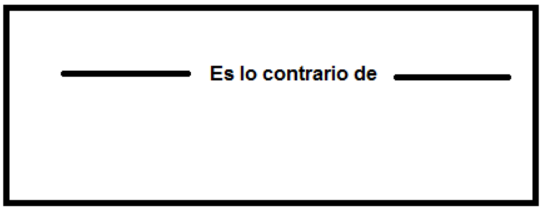


Figura 214(ejemplo de grafo bien formado, con el significado de "existe al menos algo que es lo contrario de algo")

También sería un grafo beta bien formado el ejemplo de la figura 215, en el cual vemos un rhema con dos ganchos, y una misma línea de identidad unida a ellos. Su significado sería "existe al menos alguien que se ama a sí mismo".

Figura 215(grafo bien formado, con un rhema con dos ganchos y una misma línea de identidad, y cuyo significado es:"existe al menos alguien que se ama a sí mismo")

Como vemos, con estos dos elementos (la línea de identidad y el rhema), y asumidos previamente los elementos de Alfa, Peirce construye el subsistema Beta. También propone una reglas de transformación, que son las mismas que para el subsistema Alfa, pero adaptadas al cálculo de predicados. Pero antes de pasar a su exposición, veamos algunos ejemplos más de grafos Beta, que nos ayuden a familiarizarnos con el sistema.

Fijémonos en la figura 216, que exponemos a continuación.

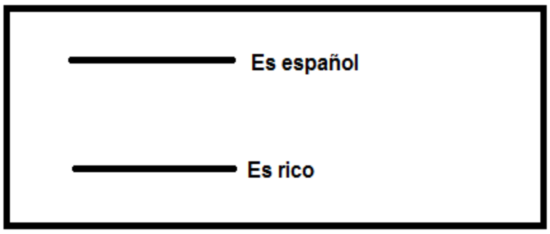


Figura 216(ejemplo de grafo beta. Su significado sería: "Existe al menos un español, y existe al menos unindividuo que es rico")

El grafo de la figura 216 es parecido al de la figura 212, pero tienen significados distintos. Así, la figura 216 significa: "Existe al menos un español; y existe al menos un indivíduo que es rico". Este grafo (figura 216) en realidad se trata de dos subgrafos independientes. Al estar en la misma Hoja de Aserción, según lo visto en el subsistema Alfa, se considera que es una conjunción de ambos subgrafos. El conjunto significa que al menos un indivíduo es español, y también que existe al menos un individuo que es rico, pero no quiere decir que ambos individuos sean necesariamente la misma persona.

Recordemos, por otra parte, que en el subsistema Alfa existía el elemento "corte", que ahora nos servirá para realizar la negación de los existenciales. Por ejemplo, consideremos el grafo de la figura 217.

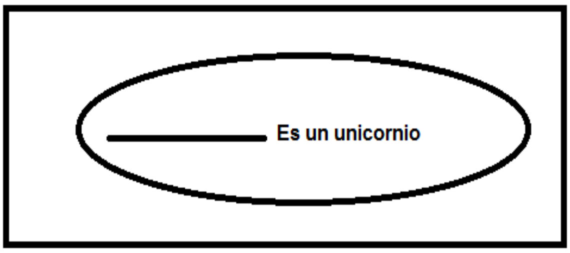


Figura 217("No existe ningún unicornio")

Dentro de la elipse o corte, se afirma que "Existe al menos un unicornio" (o también que "Existen los unicornios"). Al envolver dicha afirmación con la línea cerrada, estamos negándola, es decir, estamos diciendo que "No es el caso que exista al menos un unicornio", o "No es el caso que existan unicornios", o también "No existe ningún unicornio".

Respecto al grafo anterior (figura 217), debemos señalar que Peirce considera igualmente válida y con el mismo significado la siguiente representación, en la cual la línea de identidad está en contacto con la parte interior de la línea de corte. Se trata de una representación alternativa (figura 218).

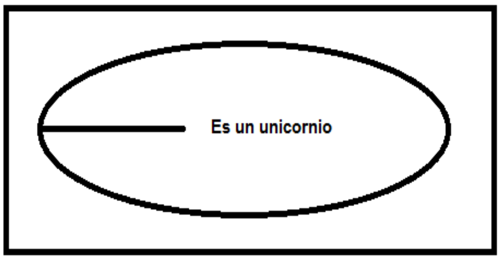


Figura 218(representación alternativa a la figura 217, con el mismo significado)

Veamos ahora otro ejemplo de grafo (figura 219), donde aparece de nuevo el elemento “corte” (negación).

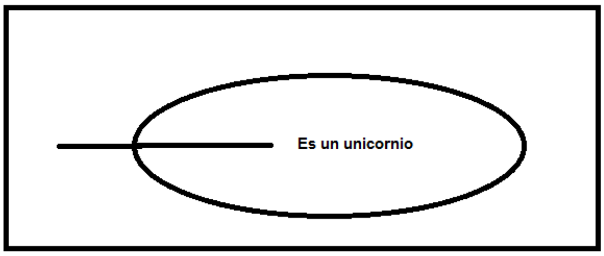


Figura 219(“Existen entidades que no son unicornios”)

En la figura 219 tenemos dos subgrafos yuxtapuestos (conjunción). El primero consiste en una línea de identidad exterior al óvalo. Su significado sería “algo existe”. El segundo sería el grafo que hemos visto en la figura 218, cuyo significado era: “No es el caso que exista al menos un unicornio”. Vemos que las dos líneas de identidad se unen en el mismo punto de contacto con el “corte” (óvalo), dando la sensación visual de que es una única línea que es cortada por el óvalo. Pero realmente se trata de dos líneas de identidad distintas. El significado de estos dos grafos yuxtapuestos de esta manera sería: “Existe algo y ese algo que existe no es un unicornio”, o dicho de otra manera: “Existen entidades que no son unicornios”.

Veamos un ejemplo más, como el que se muestra en la figura 220. Recordemos que una línea de identidad podía estar unida en cada extremo a un Rhema. Ahora tenemos el caso de una línea de identidad que está “enganchada” por un extremo con un Rhema, y por otro, con una línea de identidad que se encuentra en el interior de un “corte”.

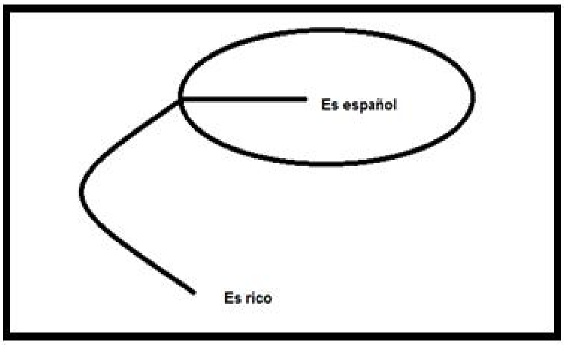


Figura 220 ("Existe al menos un individuo rico que no es español")

El "corte" que aparece en la figura 220, considerado aisladamente, expresa que "No es el caso que exista un individuo que sea español". La otra expresión, la exterior, considerada aisladamente significaría que "Al menos un individuo es rico". Sin embargo, ambas expresiones unidas por la línea de identidad significan: "Existe al menos un individuo rico que no es español".

Es interesante ver como se expresan gráficamente la proposiciones Universales Afirmativas del tipo "Todos los cuervos son negros". Se representaría negando la expresión "Existe al menos un cuervo que no es negro". Realmente lo que se hace es buscar la contradictoria y negarla. Es decir, algo similar a lo que hacía Venn cuando representaba, con sus diagramas, la Universal Afirmativa. El grafo existencial correspondiente a "Todos los cuervos son negros" sería el que se muestra en la figura 221.

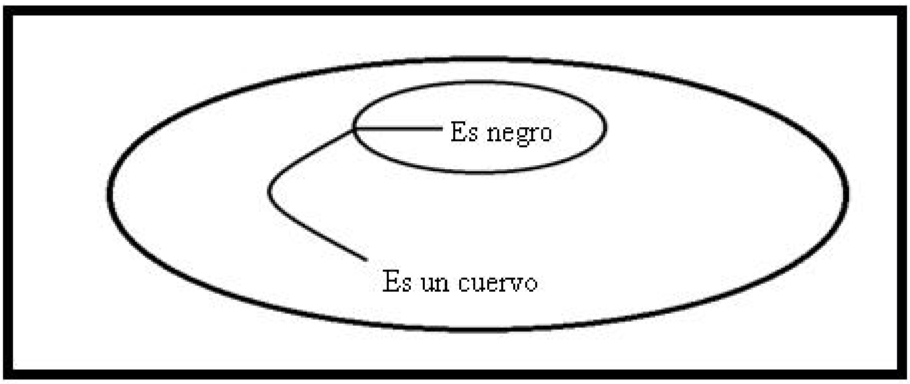


Figura 221
(Grafo para la Universal Afirmativa, "Todos los cuervos son negros)

Otra combinación utilizada en el subsistema Beta es la de una línea de identidad intersecada con un corte. Su significado es la no identidad de los individuos a los que se refieren los Rhema unidos por la línea de identidad. Veámoslo con el ejemplo que nos muestra la figura 222. Este grafo expresa que existe al menos un cuervo y existe algo que es negro, y que ambos individuos no son idénticos.

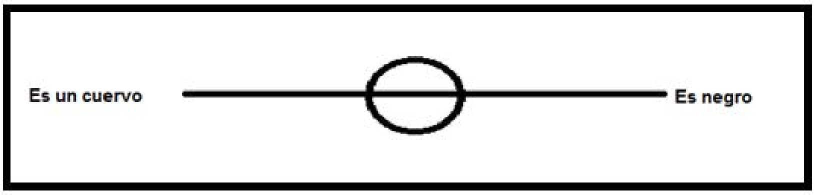


Figura 222
("Existe al menos un cuervo, y existe algo que es negro, y ambos individuos no son idénticos")

El grafo de la figura 223 significa que existen al menos dos hombres. Más exactamente, "Existe un hombre y existe otro hombre que no es idéntico al primero".

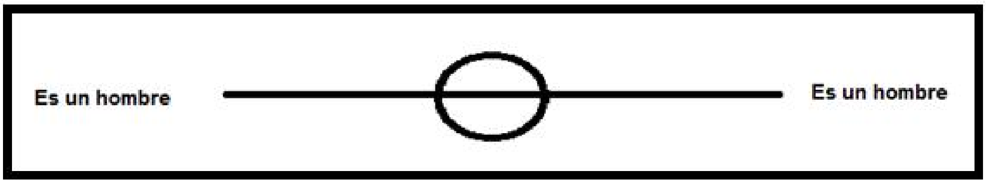


Figura 223
("Existe un hombre, y existe otro hombre que no es idéntico al primero")

Por último, veamos otro ejemplo de grafo beta (figura 224). Se trata, en esta ocasión de una expresión un tanto especial, que podría ser considerada como una línea de identidad ramificada (según Roberts, 1973), aunque Peirce prefiere decir que son varias líneas de identidad (en este ejemplo, serían tres) con una "ligadura".

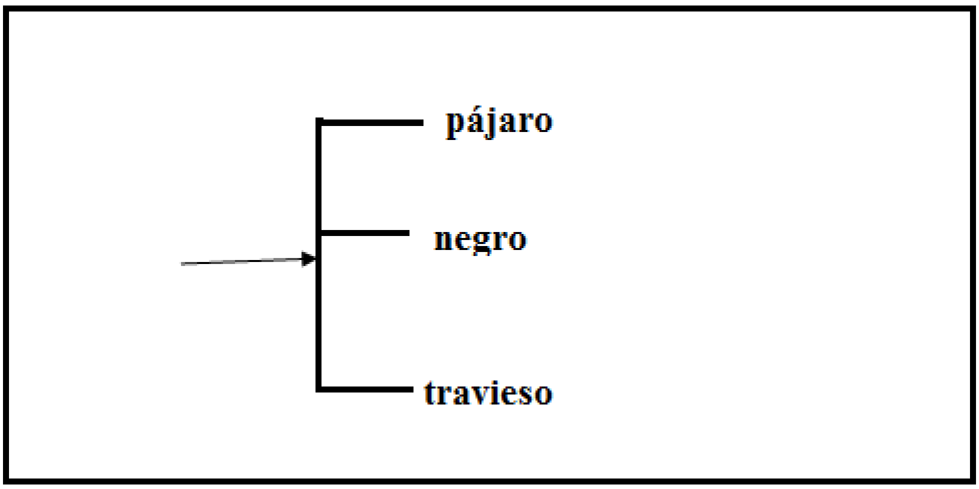


Figura 224
(línea de identidad ramificada o varias líneas de identidad con una "ligadura"; el significado sería: "Existe algo que es un pájaro y que es negro y que es travieso")

El significado de la figura 224 sería: "existe algo que es un pájaro y que es negro y que es travieso".

Pasemos ahora a ver las reglas de transformación para el subsistema Beta. Realmente son una adaptación de las reglas ya vistas en Alfa. Para una mayor claridad, se ha seguido principalmente la exposición de Roberts (1973, pp.47-63).

Reglas de Transformación del Subsistema Beta:

R.1.: Cualquier grafo en un nivel par puede ser eliminado; y cualquier línea de identidad que se encuentre en un nivel par, puede ser borrada parcialmente, de tal manera que sea dividida en dos partes. Así, según Roberts (1973, p.56), se puede pasar del grafo de la figura 225, que significa “Algo es F pero no es G”, al grafo de la figura 226 que significa “Existe algún F, y existe algo que no es G”.

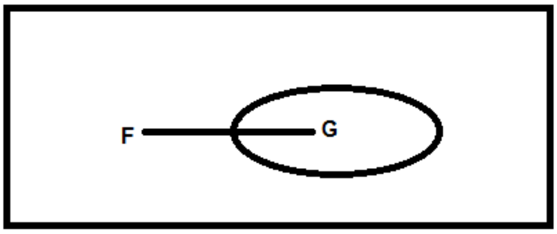


Figura 225
(“Algo es F pero no es G”)

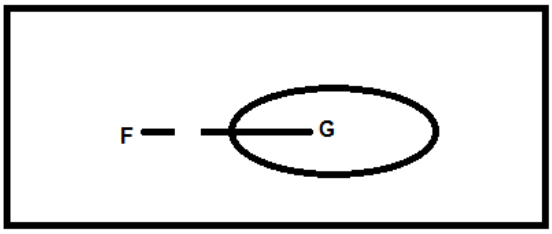


Figura 226(Grafo resultado de aplicar la Regla 1 al grafo de la Figura 225. El significado del nuevo grafo obtenidoes “Existe algún F, y existe algo que no es G”)

R.2. Regla de inserción: Se puede insertar cualquier grafo en un área con nivel impar. Además, dos líneas de identidad (o porciones de línea) en un mismo área de nivel impar, se pueden unir.

Aplicando esta regla, se puede pasar del grafo de la figura 227, que significa “No existe nada que sea F ni nada que sea G”, al grafo de la figura 228 que significa “No existe nada que sea F y G a la vez”.

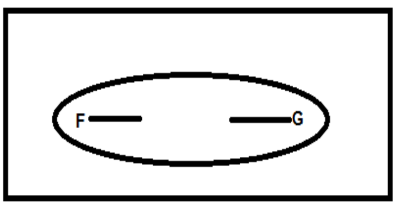


Figura 226
(“No existe nada que sea F ni nada que sea G”)

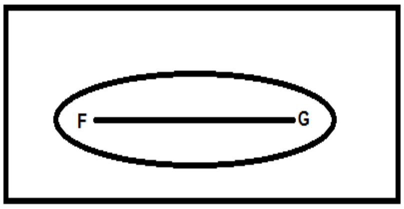


Figura 228 (Grafo resultado de aplicar la Regla 2 al grafo de la Figura 227. El significado del nuevo grafo obtenidoes "No existe nada que sea F y G a la vez")

R.3. Regla de Iteración: Es similar a la Regla de Iteración en Alfa. Recordemos que decía que cualquier subgrafo puede repetirse en el mismo nivel donde se encuentre, o en un nivel con valor numérico mayor. Pero no está permitido repetirse en el interior de él mismo.

Por ejemplo, a partir del grafo de la figura 229, que significa **[(□x F(x)) ^ (¬□y G(y))]**, se puede deducir, aplicando la regla de iteración, el grafo de la figura 230 cuyo significado es **[(□x F(x)) ^ ¬ (□y G(y) ^ □x F(x))]**.

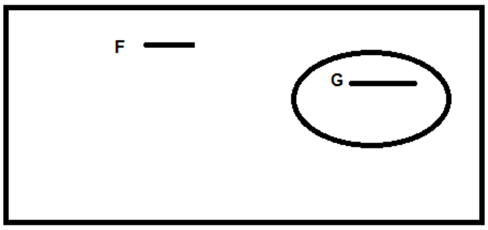


Figura 229
"(□x F(x)) ^ (¬□y G(y))"

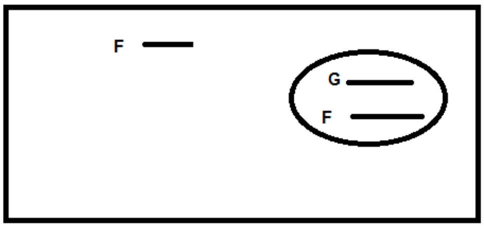


Figura 230(Grafo resultado de aplicar la regla de iteración al grafo de la figura 229. El significado del nuevo grafo es "(□x F(x)) ^ ¬ (□y G(y) ^ □x F(x))")

Dentro de la regla de iteración, agrega unos apartados dedicados a las líneas de identidad. Veamos dichos apartados:

a) Si tenemos una línea de identidad en la Hoja de Aserción, se le puede añadir una línea de identidad con extremos vacíos. Esta línea de identidad insertada no puede tocar ni intersecar ningún recorte. Como ejemplo, tenemos cómo del grafo de la figura 231 se puede pasar al grafo de la figura 232.

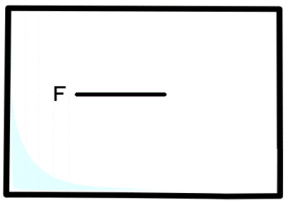


Figura 231(Grafo al que se va a aplicar Regla de Iteración, aptdo.a))

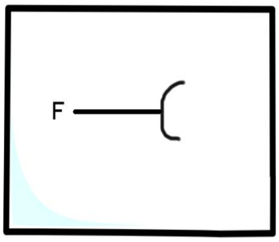


Figura 232(grafo obtenido de aplicar la Regla de iteración (apartado a)), al grafo de la figura 231)

Lo que implica realmente esta regla es que no importa el tamaño ni la forma de una línea de identidad.

b) Cualquier línea de identidad con terminaciones sueltas puede extenderse de tal manera que el nuevo extremo esté dentro de un corte. Como ejemplo, puede servirnos la transformación del grafo de la figura 233 en el grafo de la figura 234.

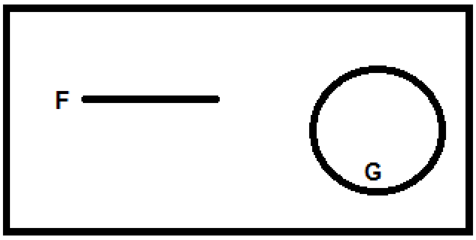


Figura 233(Grafo al que va a ser aplicada la Regla de Iteración, aptado.b))

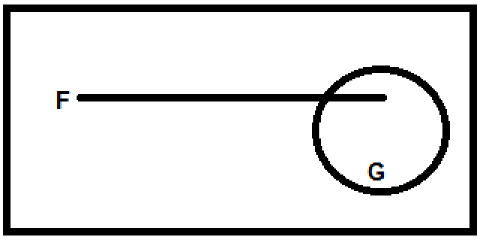


Figura 234(grafo obtenido de aplicar la regla de iteración(apartado b) al grafo de la figura 233)

c) Una ligadura extendida se puede unir a la ligadura de un grafo iterado. Por ejemplo, a partir del grafo de la figura 235 se puede deducir el de la figura 236, aplicando esta regla.

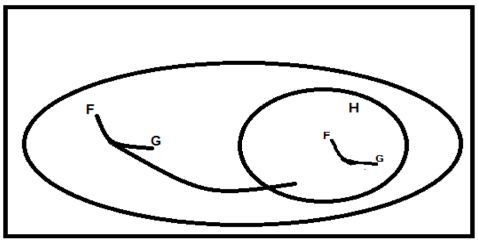


Figura 235(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Iteración -aptado.c-)

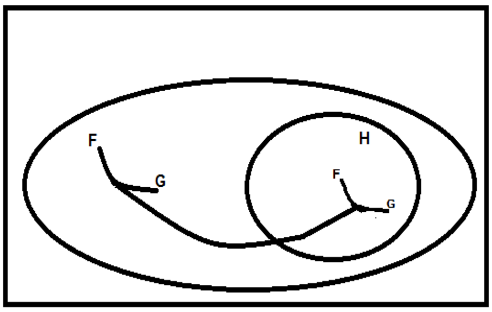


Figura 236(grafo obtenido de aplicar la regla de iteración, (apartado c),al grafo de la figura 235)

d) Se puede formar un lazo uniendo extensiones interiores, es decir, los dos finales sueltos de la parte más interior de una ligadura. Por ejemplo, podemos pasar del grafo de la figura 237 al de la figura 238, por aplicación de esta regla.

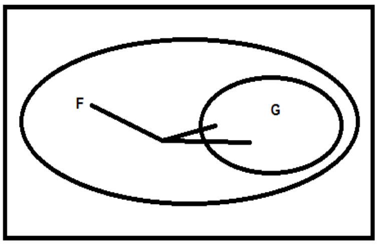


Figura 237(grafo al que se va a aplicar la Regla de Iteración –aptado.d-)

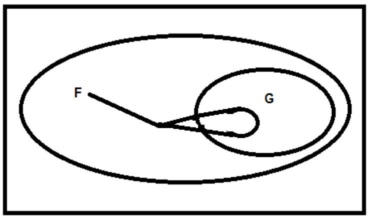


Figura 238(grafo obtenido de aplicar la regla de iteración, (apartado d), al grafo de la figura 237)

R.4. Regla de Desiteración: Cualquier grafo cuya ocurrencia pudiera ser el resultado de una iteración, entonces puede ser borrado. Es decir, R.4. nos permite volver al estado de cosas anterior a haber aplicado R.3. Así se puede pasar del grafo de la figura 239 al grafo de la figura 240, mediante la aplicación de la regla de desiteración.

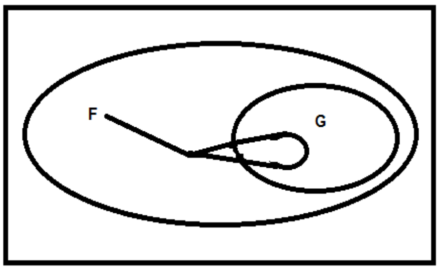


Figura 239(Grafo al que se va a aplicar la Regla de Desiteración)

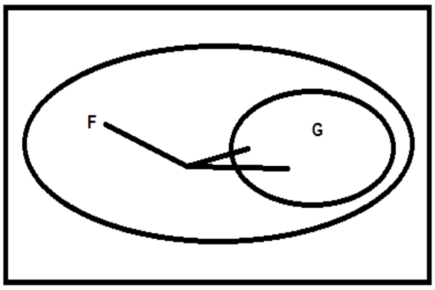


Figura 240(grafo obtenido de aplicar la regla de desiteración, al grafo de la figura 239)

R.5. Regla de Inserción del Doble corte: Un corte doble se puede insertar o eliminar arbitrariamente, ya sea alrededor de un gráfico o por sí mismo. El corte doble se puede insertar de tal manera que intersecte líneas de identidad, pero de tal modo que las líneas sean intersectadas por los dos cortes. De esta forma se puede transformar el grafo de la figura 241 en el de la figura 242.

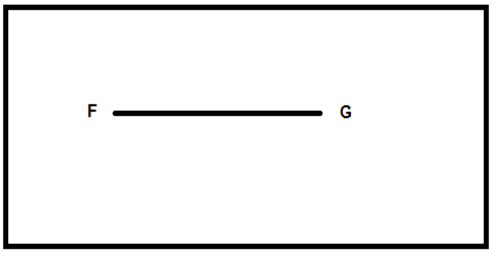


Figura 241
(Grafo al que se va a aplicar R.5)

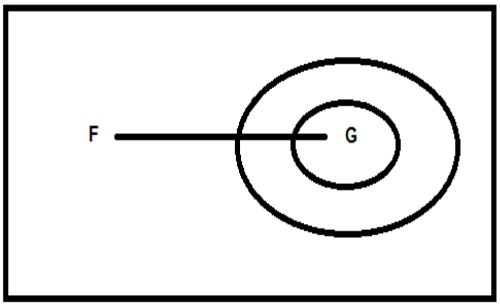


Figura 242(grafo obtenido de aplicar la regla de inserción del doble corte, al grafo de la figura 241)

El subsistema Gamma

A diferencia de los subsistemas Alfa y Beta, Gamma no llegó a ser completado. Sin embargo, explicaré brevemente sus principales características.

El elemento básico de Gamma es el llamado “corte quebrado” (broken cut). Así tendríamos como ejemplo de un grafo en Gamma, el de la figura 243, cuyo significado es “Posiblemente no es el caso que llueva” (CP.4.515).

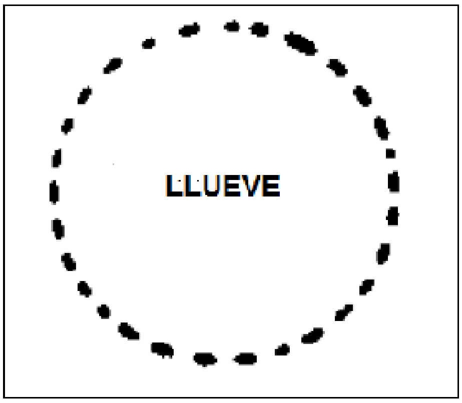


Figura 243(ejemplo de corte quebrado, con el significado de “Posiblemente no es el caso que llueva”)

Junto con el "corte quebrado", Peirce establece, en principio, dos reglas de transformación para Gamma:

R.1.: Si tenemos un "corte quebrado" en la Hoja de Aserción, entonces podemos insertar cualquier grafo dentro de dicho corte.

R.2.: Consta de dos partes:

R.2. i) Si tenemos un corte Alfa de nivel par, dicho corte se puede convertir en un "corte quebrado". Así por ejemplo, se puede pasar del grafo de la figura 244, cuyo significado es "No es el caso que g", al grafo de la figura 245, cuyo significado sería "Posiblemente no es el caso que g".

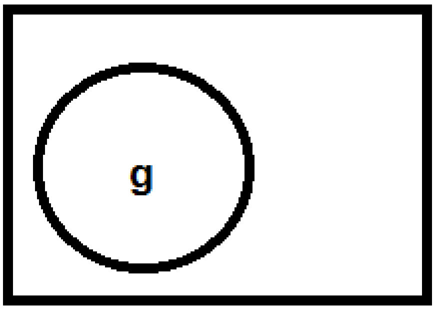


Figura 244("No es el caso que g")

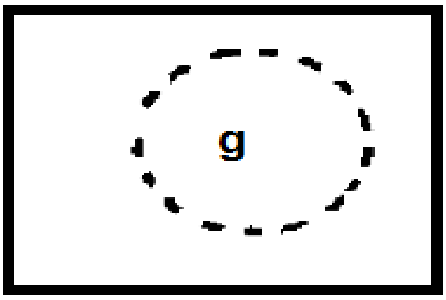


Figura 245(Grafo que se puede obtener del grafo de la figura 244, aplicando la regla R.2.i);el significado de este nuevo grafo sería"Posiblemente no sea el caso que g")

R.2.ii) Un corte quebrado con nivel impar, puede convertirse en un corte Alfa. Veámoslo con un ejemplo. Gracias a esta regla de transformación podemos transformar el grafo de la figura 246, cuyo significado es "No es el caso que posiblemente no sea el caso que g", en el grafo de la figura 247, cuyo significado es "No es el caso que no sea el caso que g", o también, eliminando la doble negación, se obtendría la aserción de "g".

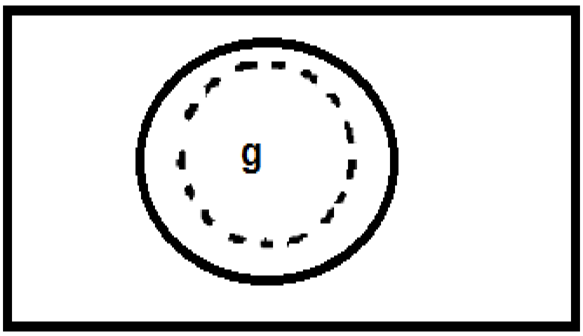


Figura 246
("No es el caso que posiblemente no sea el caso que g")

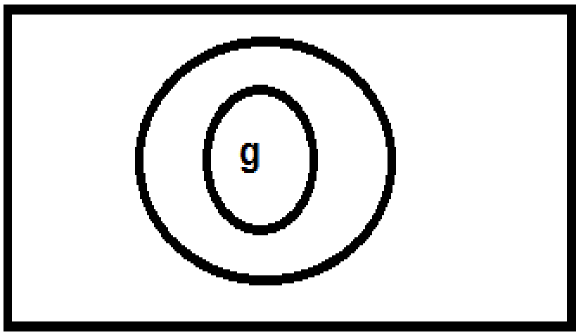


Figura 247(Grafo obtenido a partir de la figura 246, aplicando la regla R.2.ii); el significado del nuevo grafo es: "No es el caso que no sea el caso que g", o también, "g")

Establecidas estas reglas, veamos como se justifican las deducciones a las que llega Peirce, según Zalamea (2010, p.79)

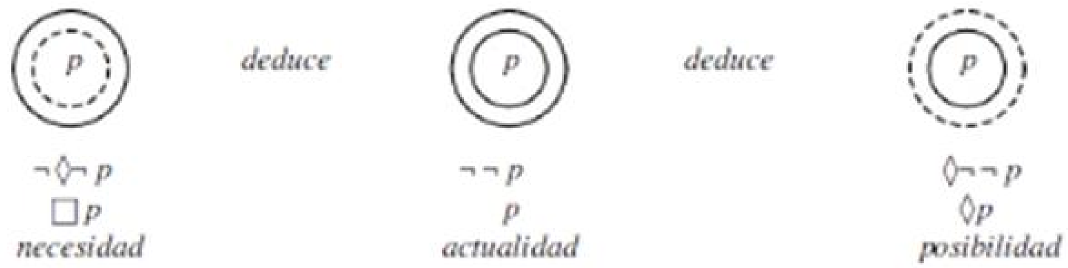


Figura 248 (representación de la necesidad)

Figura 249 (afirmación de "p")

Figura 250 (representación de la posibilidad)

Empecemos por el grafo de la figura 248, cuyo significado es: "No es posible que no sea el caso que p", o también "Es necesario que p". Aplicando a dicho grafo la regla R.2.ii) de Gamma, obtendremos el grafo de la figura 249. Si recordamos la regla de transformación de Alfa, el grafo de la figura 249, al contener un doble corte sobre "p", es equivalente a afirmar "p". Por último nos queda por ver como deducimos el grafo de la figura 250 a partir de la figura 249. Para ello solo tenemos que aplicar la regla R.2.i) al grafo de la figura 249, obteniendo el grafo de la figura 250 y cuyo significado es "Es posible que no sea el caso que no p", o también "Es posible que p".

Otro aspecto importante introducido por Peirce en el subsistema Gamma es la posibilidad de hacer "grafos de grafos" es decir, expresar proposiciones sobre proposiciones. Por ejemplo, sea X la Hoja de Aserción. El siguiente grafo Gamma (figura 251) expresa que la proposición "Llueve" está inscrita en la Hoja de Aserción (X). (adaptado de Roberts, 1973, p.73).

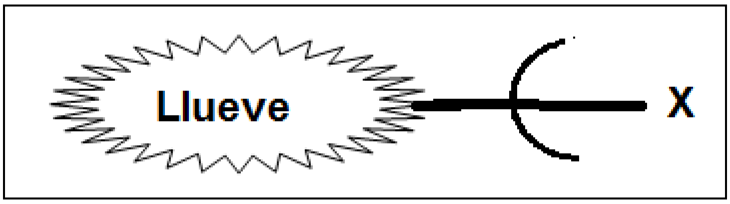


Figura 251(Grafo cuyo significado es: "La proposición "llueve" está inscrita en la Hoja de Aserción X")

Estos son meros ejemplos del intento de Peirce de crear un sistema para lógica modal y de orden superior. Con posterioridad, Peirce comenzó a elaborar un sistema de "Grafos tintados", que asumía los elementos de Alfa y Beta, y a la vez introducía un sistema de colores que trataba de ampliar la aplicación de sus grafos. Veremos a continuación sus elementos básicos, pues un estudio en profundidad excede del propósito del presente trabajo.

El sistema de los grafos tintados

El primer cambio que introduce Peirce se refiere a la Hoja de Aserción. La pasa a llamar la Hoja del Discurso ("Phemic sheet"). Sin embargo, la base conceptual de los grafos tintados es la Teoría de las Categorías de Peirce. Peirce establece que hay tres universos que deberían reflejarse en los grafos: El universo de lo Real y lo Existente (otras veces habla del Universo de la Verdad o de los hechos reales). En segundo lugar estaría el universo de lo cuestionable y lo posible. Y habría un tercer universo, que a veces denomina "Lo que es seguro que va a ser", aunque también lo denomina, en otras ocasiones, como el universo de la intención. Así que dependiendo del universo, la Hoja del Discurso deberá llevar una marca externa que lo identifique. Y para ello recurre a las tinturas heráldicas. En concreto recurre a los metales, colores y forros. Los metales los utilizará para el primer universo: La plata, para referirse a lo real o verdadero en un sentido general; el oro, para lo real o verdadero en un sentido especial. Añadirá más tarde el hierro y el plomo. Para el segundo universo utilizará los colores heráldicos. A saber: el azur, el gules, el sinople (verde heráldico) y el púrpura. El azur (azul) con el siguiente significado: si es azul oscuro, será para la posibilidad lógica. Si es azul claro, para la posibilidad subjetiva. El gules (rojo intenso) para la posibilidad objetiva. El verde heráldico para aquello que está en modo interrogativo. El púrpura (color violáceo) para la libertad o capacidad. Los forros heráldicos serán utilizados para el tercer universo. En este caso también hay cuatro tipos: sable (gris según Roberts; en heráldica es negro), Armiño (amarillo), Vero (marrón) y Potente (naranja). El sable sería para lo necesitado metafísicamente, racionalmente o secundariamente. El armiño para el propósito o la intención. El vero para lo ordenado (en el sentido de mandamiento). Y el potente (naranja) para lo obligado.

Una vez establecido el significado de cada color, cuando vayamos a trabajar en una Hoja de Discurso, su significado dependerá del color del borde de dicha Hoja. Así, si el borde es un metal, y en concreto es "plata" [71], la Hoja de Discurso serviría para expresar proposiciones y coincidiría con lo que anteriormente Peirce llamaba Hoja de Aserción. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que tenemos la siguiente hoja de discurso de la figura 252.

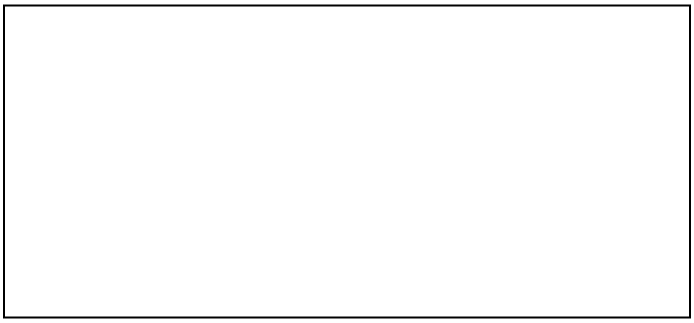


Figura 252 (Ejemplo de Hoja de Discurso según el sistema de Grafos tintados. En este caso, el borde es "plata" (blanco), lo cual hace que visualmente no se distinga el borde del resto de la hoja. No confundir el "borde" con las líneas negras que simulan el límite físico de la hoja de discurso)

Las líneas del rectángulo representan los bordes de la hoja. No hay colores dibujados en los bordes, así que eso significa que estamos en el caso de un borde de "plata" (blanco). La hoja de discurso estaría preparada para expresar proposiciones, según el significado de los colores que hemos visto más arriba.

Si quisiéramos expresar la proposición "llueve", solamente tendríamos que inscribir la proposición en la hoja (ver figura 253).

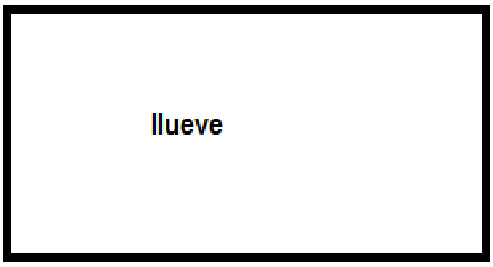


Figura 253 (Afirmación de la proposición "llueve")

Pero si quisiéramos insertar una proposición del tipo "Posiblemente lloverá", deberíamos utilizar el color azul (que representa la posibilidad). En este caso utilizaríamos el azul, no para los bordes de la Hoja del Discurso, sino solo para la proposición. La representación gráfica sería la que vemos en la figura 254.

[71] La "plata" es simbolizada por el blanco, es decir, el borde de la hoja sería blanco, lo que en realidad resulta en que no se dibuja ningún color en el borde, para este caso.

Figura 254 (Afirmación de la proposición "Posiblemente lloverá")

Desafortunadamente, Peirce propone pocos ejemplos que ilustren su sistema de Grafos Tintados, y que podrían aclarar ciertas dudas que van surgiendo al analizar sus escritos.

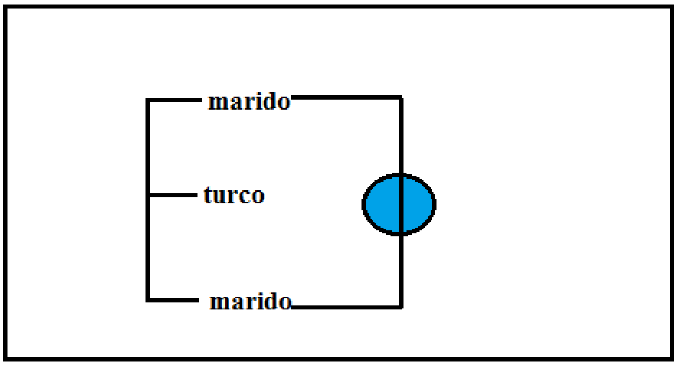


Figura 255(Grafo tintado con el significado"Hay una persona que es turco, y que es el marido de dos personas diferentes")

Veamos el ejemplo de la figura 255 (C.P. 4.569). Su significado es "Hay una persona que es turco, y que es el marido de dos personas diferentes". El área del corte es de color azul, y su significado es negar la posibilidad de que los individuos denotados por la línea por encima del círculo y por debajo, sean idénticos.

Después de haber visto los elementos básicos del sistema de grafos existenciales de Peirce, convendría hacer alguna consideración como conclusión. El sistema de Peirce constituyó un gran avance en la historia de las representaciones diagramáticas. A pesar de las mejoras que introdujo en el sistema de Venn, observó que había unas limitaciones insuperables a la hora de desarrollar un sistema lógico basado en diagramas. De ahí, la importancia de la elaboración de su nuevo sistema. Es cierto que en algunos momentos su lenguaje es algo obscuro, creando nuevos términos que nos resultan extraños. Por otro lado, se echan en falta algunos ejemplos que pudieran aclarar las reglas y definiciones propuestas por él, lo cual evitaría cierta ambigüedad a la hora de interpretar su sistema. No obstante, hay que reconocer su gran trabajo en elaboración de sus grafos que implican un refinamiento en sus representaciones (Vega, 1997, p.163).

También debemos recordar que Peirce no estaba interesado tanto en la resolución de problemas lógicos, como en hallar un método que analizara la estructura de cualquier razonamiento deductivo (Gardner, 1985, p.93). Hay que resaltar la importancia del sistema peirceano de grafos por su influencia en los desarrollos y análisis posteriores, pero esto ya pertenece a otro capítulo que veremos a continuación.

2.3 La vanguardia de los diagramas lógicos (Comienzos del siglo XX hasta la actualidad)

Después de la muerte de Peirce (1914), los grafos existenciales, su gran creación[72], cayeron en el olvido. Es más, a lo largo de varias décadas del siglo XX, los diagramas lógicos quedaron relegados a un papel secundario. Así, los diagramas de Venn fueron utilizados en la enseñanza de las matemáticas en los niveles de primaria y secundaria, sobre todo en la década de los sesenta y setenta, y en algunos países hasta en la década de los ochenta[73]. Ciertamente hubo interesantes aportaciones en el desarrollo diagramático dentro de la propia lógica. Fueron aportaciones puntuales y concretas, a veces con un interés preferentemente práctico, como sucede con los mapas de Karnaugh. Otro ejemplo de aportación diagramática es la del propio Gardner, al que hemos citado a lo largo de este trabajo, como investigador interesado en los diagramas lógicos. Gardner hace su propia propuesta de diagrama reticular para el cálculo proposicional (Gardner, 1985, p.97-123). Sin embargo, no es hasta finales de la década de los ochenta cuando aparece un nuevo planteamiento en torno a los diagramas lógicos, el cual se incluye en un proyecto más amplio, conocido como Proyecto del Razonamiento Heterogéneo. Pero antes de analizar esta nueva perspectiva en la Lógica, veamos primero los mapas de Karnaugh, a modo de ejemplo de aquellas aportaciones puntuales que surgieron en el siglo XX, durante aquellas décadas en las que los diagramas y gráficos lógicos habían caído en un cierto olvido.

2.3.1.Los mapas de Karnaugh

Maurice Karnaugh es un físico nacido en Nueva York (1924). En 1953, mientras trabajaba para los laboratorios Bell, publicó *The Map Method for Synthesis of*

[72] El propio Peirce los denomina "*my chef d'ouevre*" – mi obra maestra- (C.P. 4.347)

[73] Sobre este tema, son interesantes las aportaciones de Feynman, R: (1965), *New Textbooks for the new mathematics*, en Engineering and Science, vol. 28, pp. 9-15; y de Kline, M. (1973), *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid, Siglo XXI.

Combinational Logic Circuits ["El método de los mapas para la síntesis de circuitos lógicos combinatorios"], donde exponía un método[74] para la simplificación de los circuitos lógicos.

Veamos, en líneas generales, el método propuesto por Karnaugh. Será conveniente, para ello, analizar un par de ejemplos de funciones con cuatro variables. Partiremos de una expresión booleana formada por la suma de un producto de variables. Por ejemplo (Karnaugh, 1953), sea la función f= A' B C' D. Las cuatro letras, A, B, C y D, incluidas de esta forma en la fórmula, suponen la afirmación de cada variable, y A' B' C' D', indican la negación o la complementación de dichas variables. Asimismo, los valores 1 y 0, indican la afirmación o negación de la variable, según el caso. Es decir, la función propuesta viene a significar que (A' B C' D) = 1 si y solo si A=0, B=1, C=0, D=1. Esto lo podemos representar en una tabla de verdad, tal como se representa en la figura 256. Esta tabla de verdad puede representarse gráficamente mediante el correspondiente mapa de Karnaugh. Éste propuso, realmente, dos formas de representación (figuras 257 y 258), ambas equivalentes y con el mismo objetivo: la simplificación de una fórmula lógica.

Expliquemos, en primer lugar, la forma representada en la figura 257 y cómo hemos llegado a ella. Hemos dividido las cuatro variables en dos grupos (AB y CD), de tal forma que queden distribuidas en filas y columnas. Lo primero será crear las cuatro combinaciones posibles con los valores de las variables C y D, que encabezarán las columnas del cuadrado (figura 259): 00, 01, 11, 10. Hay que tener en cuenta que el primer dígito de cada par corresponde al valor de C, y el segundo al valor de D.

A continuación hacemos lo mismo para las variables A y B, que encabezarán, esta vez, las filas (figura 260): 00, 01, 11, 10. Recordemos que el primer valor del par corresponde a A, y el segundo a B.

Ahora tenemos una tabla (figura 260) con dieciséis celdas que se corresponden con las dieciséis filas que se muestran en la tabla de verdad de la figura 256. En cada celda habrá que situar los ceros o unos de la columna "f" de la tabla de verdad, según la combinación correspondiente de los valores de verdad de cada variable. Así, tenemos en la tabla de verdad (figura 256), la primera fila con los siguientes valores: A=0, B=0, C=0, D=0. Esta fila corresponde a la celda señalada en la figura 261 con una "x". En

[74] Es un refinamiento del método propuesto un año antes por VEITCH, E.W. (1952), *A chart method for simpifying truth functions*, en Proceedings, Association for Computing Machinery, Pittsburgh, Pa. Mayo, 2, 3, 1952.

esta celda deberemos escribir el valor correspondiente de “f”, que en este caso es 0 (ver figura 262)

A	B	C	D	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	**1**	**0**	**1**	**1**
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Figura 256
(Tabla de verdad de la función f= A’ B C’ D)

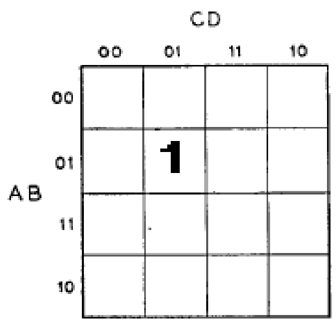


Fig.257(Mapa de Karnaugh-versión 1- para la función f= A’ B C’ D)

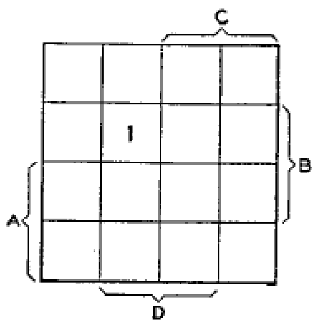


Figura 258 (Mapa de Karnaugh-Versión 2- para la función f= A’ B C’ D)

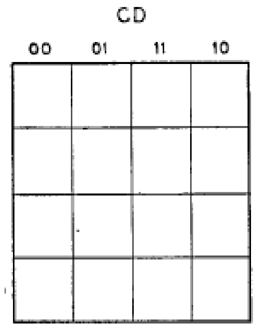


Figura 259
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f -Paso 1º-)

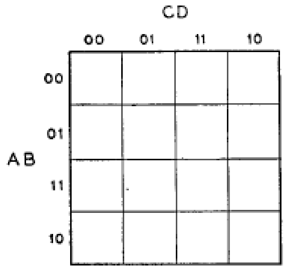


Figura 260
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f -Paso 2º)

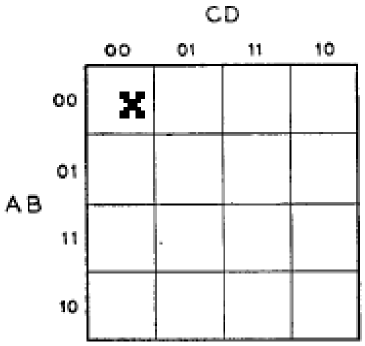


Figura 261
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f -Paso 3º)

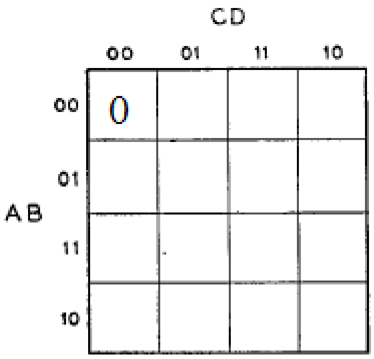


Figura 262
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f -Paso 4º)

Seguiríamos rellenando el resto de celdas con los valores correspondientes de "f", quedando el mapa de Karnaugh correspondiente como se ve en la figura 263.

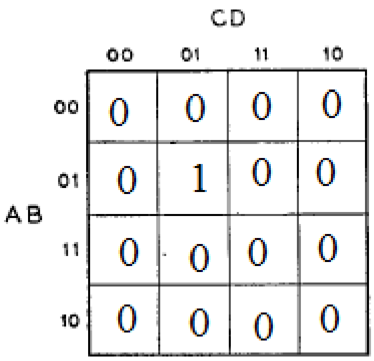


Figura 263
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f -Paso 5º)

Este cuadrado se puede simplificar algo más. De esta forma, Karnaugh prefiere dejar vacías las celdas que contienen "ceros", para una mayor claridad visual. Por tanto, en el mapa de Karnaugh, una celda vacía sería equivalente a tener el valor 0. Quedaría finalmente según se ve en la figura 264.

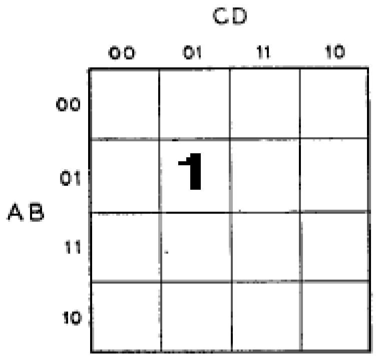


Figura 264
(construcción de un mapa de Karnaugh, para la función f - Paso 6º y último)

Ahora expliquemos la construcción del mapa de Karnaugh en la versión 2 de la figura 258. Las filas o columnas que están dentro de las "llaves" ({), designan las variables con valor 1; aquellas que están fuera, designarían el valor cero. Veamos cómo sería en relación a la variable A (figuras 265 y 266).

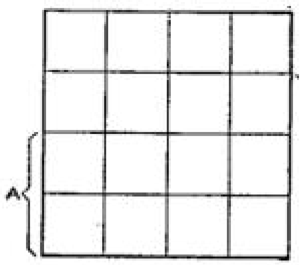


Figura 265
(construcción de un mapa de Karnaugh, -versión 2 -, para la función f -Paso 1º)

Las celdas marcadas con "x" (que son las incluidas en la llave), corresponderían al valor 1 en la variable A. Las que no están marcadas (no incluidas en la llave), corresponden al valor 0 (figura 266).

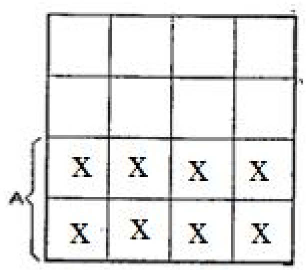


Figura 266
(construcción de un mapa de Karnaugh, -versión 2 – para la función f -Paso 2º)

Lo mismo sucede con el resto de variables, llegando a la tabla de la figura 267.

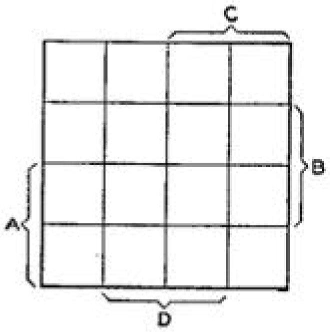


Figura 267
(construcción de un mapa de Karnaugh, -versión 2 – para la función f -Paso 3º)

Ahora tenemos una tabla con dieciséis celdas que se corresponden con las dieciséis filas que se muestran en la tabla de verdad de la figura 256. En cada celda habrá que situar los ceros o unos de la columna “f” de la tabla de verdad, según la combinación correspondiente de los valores de verdad de cada variable. Así tenemos, en la tabla de verdad, la primera fila con los siguientes valores: A=0, B=0, C=0, D=0. Esta fila corresponde a la celda señalada en la figura 268 con una “x”.

-

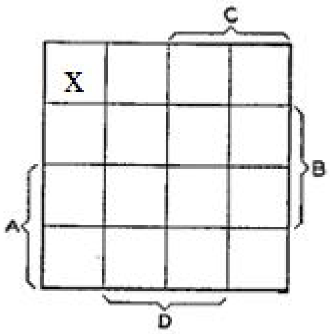


Figura 268
(construcción de un mapa de Karnaugh, versión 2 - para la función f - Paso 4º)

En dicha celda deberemos escribir el valor correspondiente de f, que en este caso es 0 (figura 269).

-

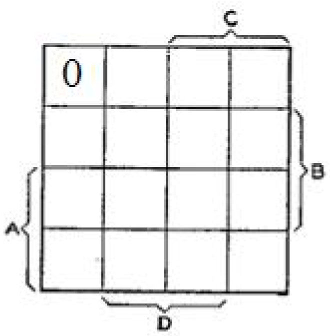


Figura 269
(construcción de un mapa de Karnaugh, versión 2 - para la función f -Paso 5º)

Seguiríamos rellenando el resto de celdas, quedando el mapa de karnaugh correspondiente (figura 270).

-

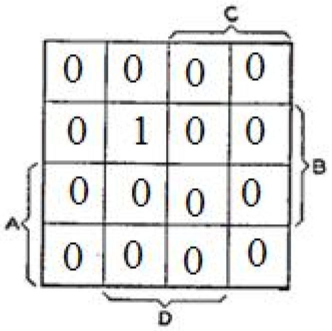


Figura 270
(construcción de un mapa de Karnaugh, versión 2 - para la función f -Paso 6º)

Recordemos que Karnaugh prefiere dejar vacías las celdas que contienen "ceros", para una mayor claridad visual. De esta manera, en el mapa de Karnaugh, una celda vacía sería equivalente a tener el valor 0. Quedaría finalmente según la figura 271.

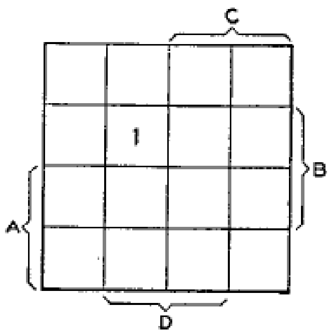


Figura 271
(construcción de un mapa de Karnaugh, -versión 2 - para la función f -Paso 7º y último)

Los mapas de Karnaugh que hemos construido como ejemplos no pueden simplificarse más. Los hemos utilizado por su valor ilustrativo a la hora de explicar cómo se construye un mapa de Karnaugh. Veamos ahora un ejemplo donde se plasme la utilidad de los mapas de Karnaugh para la simplificación de un circuito lógico. Sea la función OUT, definida de la siguiente manera:

OUT = **A'B'CD'** + **A'B'CD** + **A'BCD'** + **AB'C'D'** + **AB'CD'** + **AB'CD**

El circuito lógico correspondiente se representa en la figura 273, teniendo en cuenta la simbología al uso (figura 272).

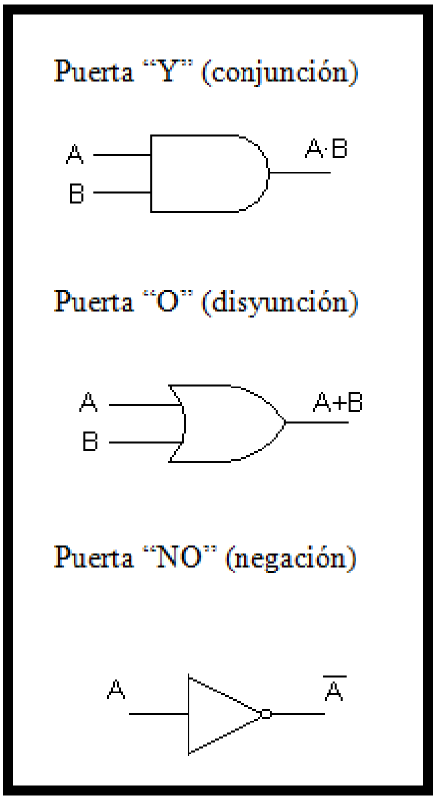


Figura 272
(símbolos utilizados en un circuito lógico)

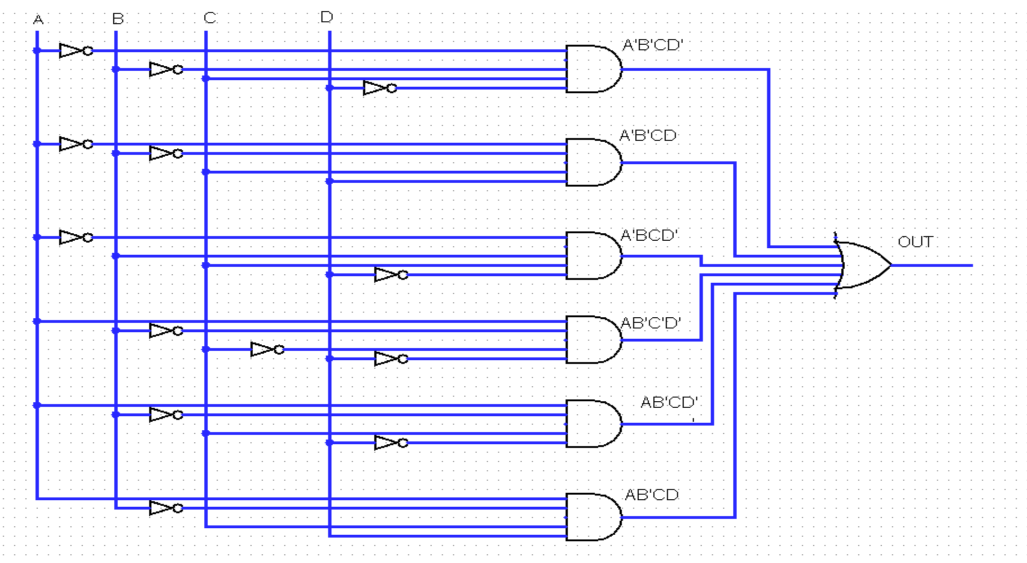


Figura 273(circuito lógico de la función OUT)

Nuestro propósito, ahora, será la de simplificar el circuito representado en la figura 273. El primer paso será la de obtener la tabla de verdad de la función propuesta, OUT (ver Figura 274).

A	B	C	D	OUT	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	A’B’CD’
0	0	1	1	1	A’B’CD
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	A’BCD’
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	AB’C’D’
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	AB’CD’
1	0	1	1	1	AB’CD
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

Figura 274
(tabla de verdad de la función OUT)

Ahora pasaremos los datos de la tabla de verdad a un mapa de Karnaugh (figura 275).

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01				1
11				
10	1		1	1

Figura 275
(Mapa de Karnaugh para la función OUT)

Es ahora cuando empieza verdaderamente el proceso de simplificación de la función, basándonos en la agrupación de "unos". Básicamente las reglas a seguir serán[75]:

- Las agrupaciones son de "unos". Cada grupo que se haga no contendrá ninguna celda vacía.
- Las agrupaciones solo pueden hacerse en horizontal y en vertical. No son válidas las agrupaciones en diagonal.
- Los grupos tienen que contener 2^n elementos. Es decir, contendrán 1, ó 2, ó 4, u 8, … "unos"
- Cada grupo será tan grande como sea posible
- Todos los unos tienen que pertenecer como mínimo a un grupo
- Puede haber solapamiento de grupos
- Al formar los grupos, la parte inferior del cuadrado se podrá agrupar con la superior y la izquierda con la derecha.
- La agrupación debe hacerse de tal manera que sea el menor número de grupos posibles, siempre y cuando no contradiga ninguna de las reglas anteriores

Siguiendo estas reglas, podemos hacer la siguiente agrupación (figura 276). Utilizaremos tres figuras geométricas para señalar los grupos (círculo, cuadrado y hexágono).

[75] Tomado de la página web del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid.
http://www.dma.fi.upm.es/
http://www.dma.fi.upm.es/java/matematicadiscreta/karnaugh/

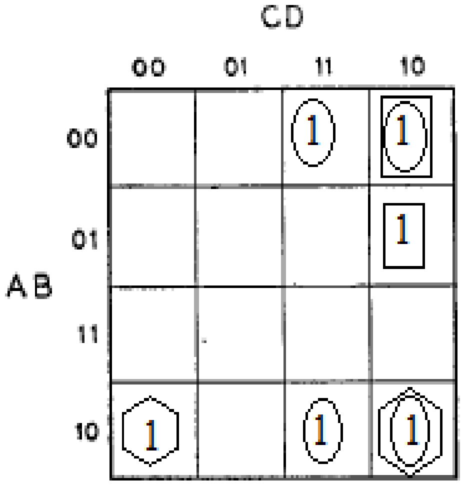


Figura 276
(Simplificación de la función OUT. Agrupación de "unos" en el Mapa de Karnaugh)

Tenemos así tres grupos que hemos identificado con distintas figuras geométricas que rodean a los unos. Vamos a numerar cada grupo. El grupo 1 será el formado por los "unos" rodeados de círculos. El grupo 2 será el formado por los "unos" que están rodeados por cuadrados. El grupo 3 está formado por los "unos" rodeados por hexágonos. Vemos que hay algunos "unos" que pertenecen a más de un grupo, pero eso está de acuerdo con las reglas que hemos visto más arriba. Así, tendremos:

Grupo 1 (círculos)

1.i) A=0 B=0 C=1 D=1

1.ii) A=0 B=0 C=1 D=0

1.iii) A=1 B=0 C=1 D=1

1.iv) A=1 B=0 C=1 D=0

Grupo 2 (cuadrados)

2.i) A=0 B=0 C=1 D=0

2.ii) A=0 B=1C=1 D=0

Grupo 3 (hexágonos)

3.i) A=1 B=0 C=0 D=0

3.ii) A=1 B=0 C=1 D=0

El siguiente paso será el de ir simplificando los grupos anteriores. Una manera de simplificación dentro de cada grupo se realiza tomando por parejas las condiciones.

Por ejemplo, sea una variable cualquiera, X. Pueden darse los siguientes casos, y las correspondientes simplificaciones:

X=0
X=0 ⇒ **X se transforma en X'**

X=0
X= 1 ⇒ **X se elimina**

X= 1
X= 1 ⇒ **se simplifica: X**

En base a estas reglas de transformación, tenemos las siguientes operaciones en nuestro ejemplo de la función OUT.

En el grupo 1:

1.i) A=0 B=0 C=1 D=1
1.ii) A=0 B=0 C=1 D=0 ⇒ A'B'C (A=0 B=0 C=1)

1.iii) A=1 B=0 C=1 D=1
1.iv) A=1 B=0 C=1 D=0 ⇒ AB'C (A=1 B=0 C=1)

A'B'C (A=0 B=0 C=1)
AB'C (A=1 B=0 C=1) ⇒ B'C (B=0 C=1)

En el grupo 2

2.i) A=0 B=0 C=1 D=0
2.ii) A=0 B=1C=1 D=0 ⇒ A'CD' (A=0 C=1 D=0)

En el grupo 3:

3.i) A=1 B=0 C=0 D=0
3.ii) A=1 B=0 C=1 D=0 ⇒ AB'D' (A=1 B=0 D=0)

Después de estas simplificaciones, la función quedaría así:

OUT= B’C + A’CD’ + AB’D’

Y el correspondiente circuito lógico obtenido sería el de la figura 277, que funcionalmente es el mismo que el de la figura 273, pero simplificado.

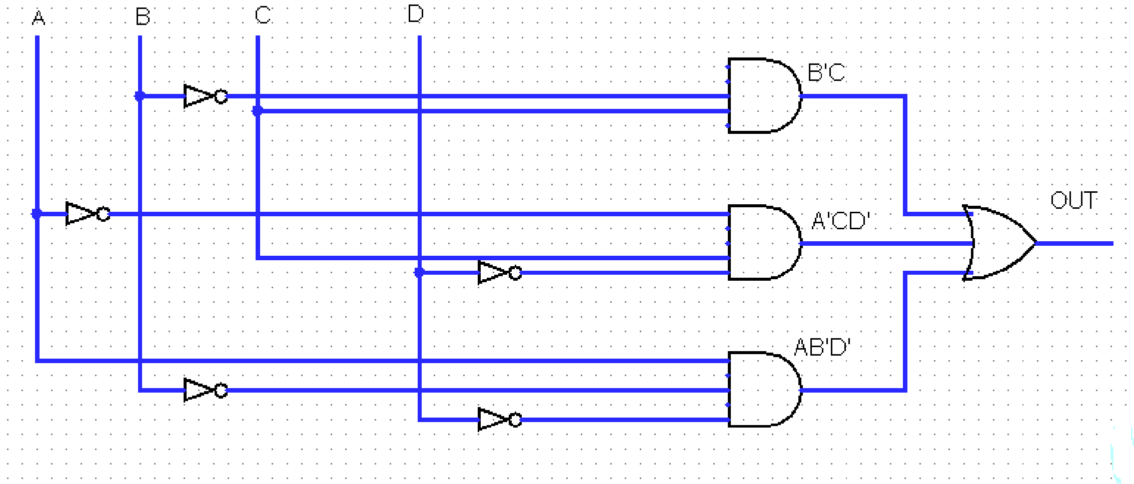


Figura 277
(circuito lógico simplificado, correspondiente a la función OUT)

2.3.2.El Proyecto del Razonamiento Heterogéneo

Aparte de algún desarrollo gráfico, como el de Karnaugh, con implicaciones prácticas claras, lo ciertos es que los diagramas lógicos habían quedado relegados a un segundo plano en el campo de la Lógica a lo largo de décadas durante el siglo XX. El interés por los diagramas lógicos y las representaciones visuales se vuelve a retomar a finales de la década de los años ochenta del siglo pasado, de la mano de Barwise (1942-2000) y Etchemendi (1952-). En principio, se centran en la aplicación de la información visual en la enseñanza de la lógica. Crean para ello un programa de ordenador al que llaman *El mundo de Tarski* (1987) donde se combina la información visual y la información verbal para la resolución de problemas lógicos. Un año antes, y en la misma dirección, habían creado *El mundo de Turing* (1986) para la enseñanza de la computabilidad.

El mundo de Tarski es un programa para la enseñanza de lenguaje lógico de primer orden. Básicamente consta de una “ventana” que simula las tres dimensiones, y que contiene bloques geométricos de diferentes tipos y tamaños. En otra parte de la pantalla se nos presentan una serie de proposiciones de primer orden, y debemos ser capaces de decir si son verdaderas o falsas, de acuerdo con la imagen que se nos muestra.

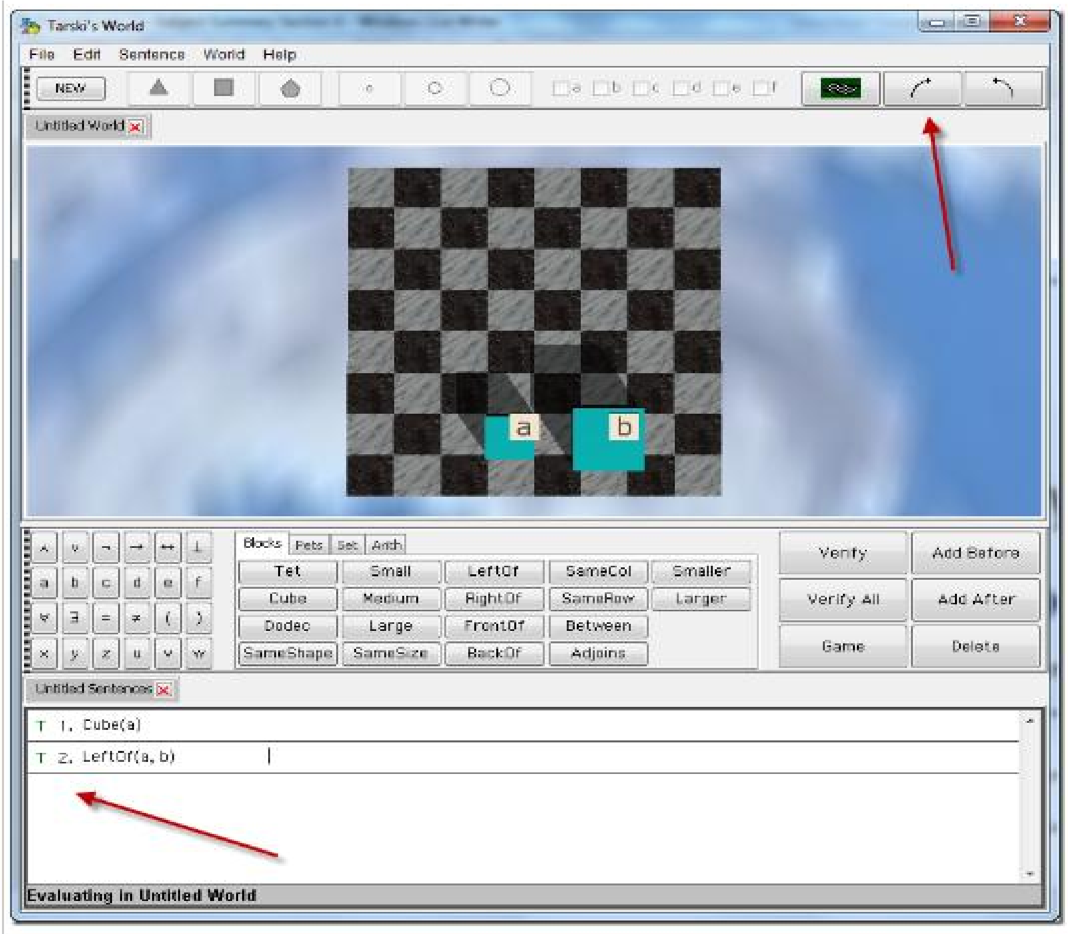


Figura 278
(Ejemplo de El Mundo de Tarski)

Las figuras utilizadas pueden ser tetraedros, cubos y dodecaedros. Tomemos como ejemplo de ejercicio de *El Mundo de Tarski* el que aparece en la figura 278. En la imagen que se nos muestra, aparecen en la parte inferior dos proposiciones de las cuales debemos de decidir si son verdaderas o falsas. La primera es “Cube (a)” [en español sería: “Cubo (a)”]. La proposición afirma que la figura “a” es un Cubo. Mirando la imagen deducimos que dicha proposición es verdadera, y así lo señalaríamos (En la imagen aparece a la izquierda de la proposición la letra T, inicial de “True”, -verdadero- en inglés). La segunda proposición es: “LeftOf(a,b)” [traducido al español sería “IzquierdaDe (a,b)”]. Afirma que “a” está a la izquierda de “b”. Partiendo de la imagen, se deduce que dicha afirmación es cierta, y así se marca en la imagen, mediante la T (“True”, verdadero en inglés).

Veamos otro ejemplo (figura 279).

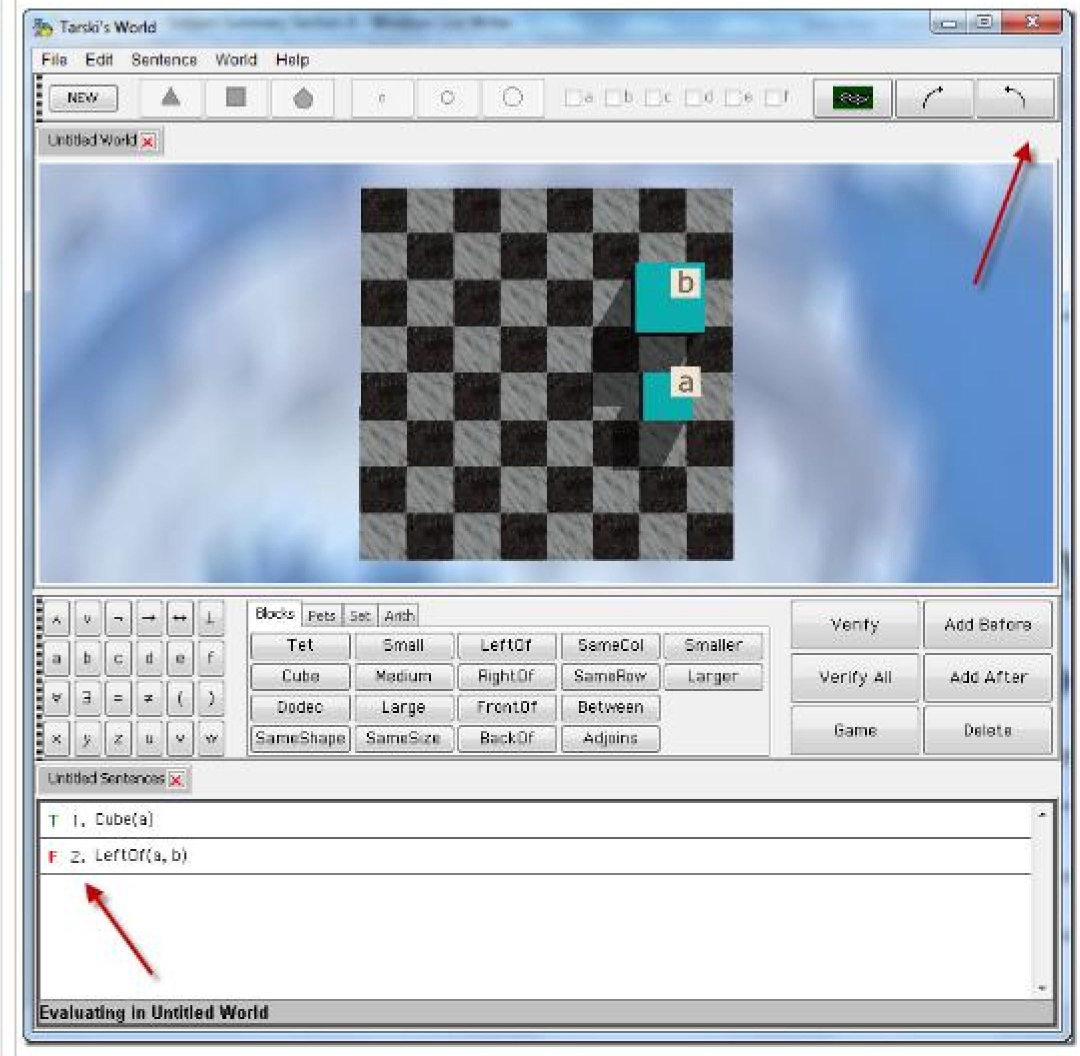


Figura 279
(otro ejemplo de El Mundo de Tarski)

Observemos como la segunda proposición, "LeftOf (a,b)" es falsa, pues no es cierto que "a" esté a la izquierda de "b", según la imagen propuesta.

Siguiendo la línea de acción de programas de ordenadores aplicados a la lógica, diseñaron más tarde el programa Hyperproof. El programa utiliza también lenguaje lógico de primer orden combinado con diagramas. Es algo más elaborado que Tarski's World, y pone de manifiesto que el razonamiento es multi-modal, donde intervienen reglas de inferencia que no forman parte de los sistemas deductivos tradicionales, pero son utilizados en nuestro razonamiento ordinario.

Los hallazgos de Barwise y Etchemendi al aplicar estos programas de ordenador en la enseñanza con sus alumnos, les llevó a plantear una revisión del tipo de investigación que se había venido realizando tradicionalmente en lógica. Observaron que las representaciones gráficas, en determinados casos, facilitaban el razonamiento.

Hicieron ver que la investigación tradicional se había venido centrando en la simbolización, en la lógica simbólica, en suma, en lenguajes lógicos artificiales. Según Barwise y Etchemendi ha sido un tipo de investigación divergente, en algunos aspectos, con la forma en que razonamos los seres humanos en nuestra vida cotidiana. En nuestro razonamiento cotidiano utilizamos información de muy diverso tipo: imágenes, frases, mapas, etc. Pero esta divergencia no lleva a Barwise y Etchemendi a plantear que hay dos formas distintas de razonar. Todo lo contrario. Su planteamiento es integrador. El razonamiento válido utiliza distintos tipos de información, dependiendo del problema del que se trate. De ahí que su proyecto de investigación se llame "Razonamiento heterogéneo". La investigación académica tradicional se ha centrado en la lógica simbólica. Barwise y Etchemendi no plantean anular ni descalificar la investigación académica tradicional centrada en dicha lógica simbólica. No plantean cambiar un modelo de estudio por otro. Su planteamiento es el de incorporar otros elementos, entre ellos los diagramáticos, al estudio de la lógica y el razonamiento. Es decir, tratan de *"expandir el territorio de la lógica liberándola del modo de representación"* (Shin, 2004, p. 93). Si un razonamiento puede representarse en un sistema del cual podemos decir que tiene validez, entonces será un sistema lógico válido, sea simbólico o no. (Shin, 2004, p.93).

En 1991, Barwise y Etchemendi publicaron *Visual information and valid reasoning* ("Información visual y razonamiento válido") [76], haciendo hincapié sobre lo comentado más arriba, es decir, el hecho de que la investigación sobre el razonamiento válido también debe incluir otras formas de representación no simbólica. Exponen en dicho artículo el siguiente ejemplo de prueba válida. Se proponen demostrar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ utilizando diagramas de Venn (Barwise y Etchemendi, 1991, p.9). Se trata de la ley distributiva de la unión respecto de la intersección. Barwise y Etchemendi recurren al marco de trabajo que ya utilizó Venn, es decir, el de los tres círculos que representan a los tres conjuntos (figura 280).

[76] La paginación de las citas es de la edición de 1996.

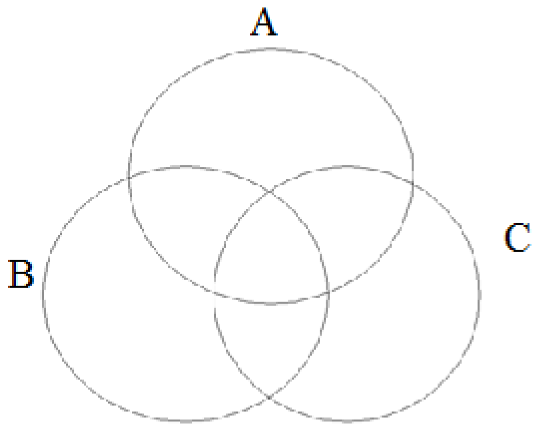


Figura 280
(Diagrama de Venn para tres términos)

Recordemos que Venn utilizaba el sombreado para eliminar una parte vacía. En este caso, Barwise y Etchemendi utilizan el sombreado para seleccionar una parte o un conjunto. La primera figura (figura 281) muestra la derivación de la primera parte de la igualdad (la de la izquierda, es decir, AU(B∩C)). Se irán sombreando las distintas partes, según se trate de la unión y la intersección.

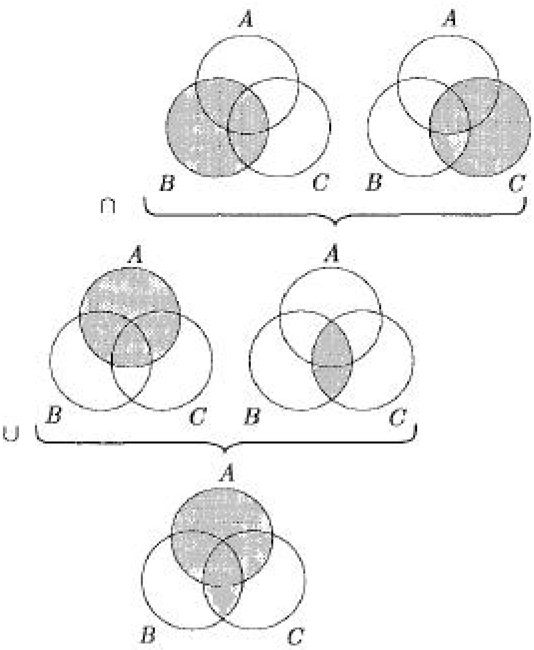


Figura 281
(derivación gráfica de AU(B∩C))

La siguiente figura (figura 282) muestra la derivación de la segunda parte de la igualdad: (AUB)∩(AUC).

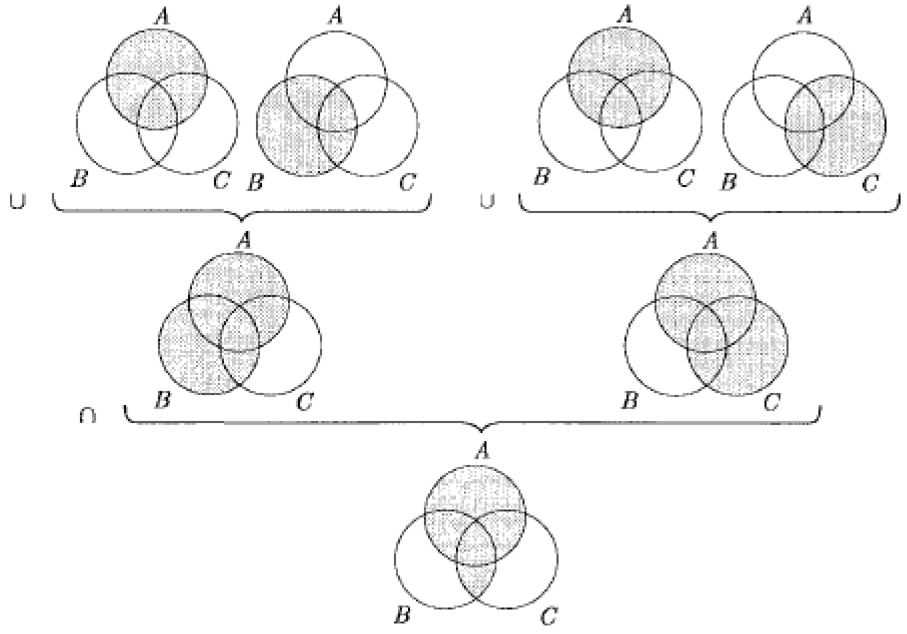


Figura 282
(derivación gráfica de (AUB)∩(AUC))

El hecho de llegar a la misma figura, demuestra que la ley de distribución se mantiene.

Como hemos podido comprobar, ***"Los diagramas de Venn nos proporcionan un formalismo que consiste en un sistema estandarizado de representaciones, junto con unas reglas para manipularlas. Bajo este punto de vista, se podrían considerar una analogía visual primitiva de sistemas formales de deducción desarrollados en lógica. Creemos que es posible proporcionar un análisis teorético de la información del sistema, que muestre, entre otras cosas, que la demostración vista más arriba es, de hecho, una prueba válida"*** (Barwise, 1991, p.9)

Lo que hace que sea una prueba válida es el homomorfismo que existe entre las regiones y los conjuntos asociados a ellas. De tal manera que existe también un homomorfismo entre las operaciones de adición e intersección entre regiones, y las operaciones de unión e intersección entre conjuntos. Así que un enunciado afirmativo verdadero, formulado en términos de adición e intersección de regiones que formen parte de un diagrama, se corresponde con un enunciado verdadero sobre conjuntos (Barwise, 1991, p.10).

Aparte de este planteamiento que abre la investigación en Lógica a otros elementos, como los diagramáticos, y la creación de programas de ordenador para la enseñanza de la lógica, Barwise y Etchemendi estuvieron interesados en la búsqueda de un marco matemático de trabajo que sirviera de base para la inferencia heterogénea. En su escrito *Information, Infons and Inference*, proponen una teoría de la inferencia aplicada a la información, y no a la representación de dicha información. Su pretensión es la de obtener unas reglas de inferencia aplicadas a la información, y no a la representación. Llegan por tanto a proponer cinco principios válidos de inferencia (Barwise y Etchemendi, 1989, p.59-61):

(1) **Aceptación**: Consiste en aceptar una información como dada. Esta información correspondería a la información inicial asumida en un razonamiento. También nos podemos referir a este paso como "caso abierto" inicial.

(2) **Asumir**: Dado un caso inicial "d", se puede asumir algo "extra", dando lugar a un subcaso inicial de "d". Un ejemplo de este principio sería suponer el antecedente de un condicional con el fin de probar el consecuente.

(3) **Subsumir**: Se desecha un caso abierto, si puede ser incluido en otros casos abiertos. Por ejemplo, se puede aplicar este principio si toda la información de un caso se agota en sus subcasos.

(4) **Fusionar**: Tomar la información común de una serie de casos abiertos, y formar un nuevo caso abierto.

(5) **Reconocer como posible**: Dado un caso abierto, reconocerlo como representación de una auténtica posibilidad si la información presente se mantiene en una situación. Esta forma de razonamiento se aplica cuando se acepta un contraejemplo para mostrar que un resultado no se sigue de una información dada.

La lógica tradicional se ha centrado, sobre todo, en una combinación del principio de "asumir" y "subsumir". En la práctica, cuando los seres humanos nos enfrentamos a tareas o problemas donde debemos razonar, habitualmente utilizamos el principio "fusionar", debido a la capacidad limitada de nuestra mente para mantener "casos abiertos", y necesitamos un mecanismo para consolidar casos.

Establecidos esos principios generales, lo que se necesitaría es una justificación de dichos principios. Barwise y Etchemendi recurren a un modelo llamado de "flujo de información". Una explicación de este modelo junto a la justificación de los principios citados, requiere introducirnos en el estudio de la Teoría de la Información, lo cual excede del ámbito del presente trabajo.

Asimismo lo que se necesitaría es comprobar como cada manipulación en un sistema se acopla a los cinco principios generales. Para ello veamos un ejemplo que nos proponen Barwise y Etchemendi. Veremos la solución diagramática a la que llegan para un sencillo problema. (Barwise, 1989, p.67-68):

*"Tenemos que sentar a cuatro personas, **A**, **B**, **C** y **D**, en cinco sillas dispuestas en fila. **A** y **C** tienen que flanquear la silla vacía. **C** debe estar más cerca del centro que **D**, el cual se tiene que sentar al lado de **B**. A partir de esta información, demuestre que la silla vacía no está en el medio, ni en un extremo. ¿Puede decir quién debe sentarse en el centro? ¿Puede decir quién debe sentarse en los extremos?"*

Vamos a resumir la información (I) de partida:

I.i) Tenemos que sentar a cuatro personas (A,B,C, y D) en cinco sillas en fila.

I.ii) A y C tienen que flanquear la silla vacía

I.iii) C tiene que estar más cerca del centro que D.

I.iv) D y B tienen que estar sentados uno al lado del otro.

Del mismo modo, para una mayor claridad, resumamos las cuestiones (C) a resolver:

C.i) Mostrar que la silla vacía no está en el centro ni en un extremo

C.ii) Mostrar quién debe sentarse en el centro

C.iii) Mostrar quién debe sentarse en los extremos

Intentaremos una solución diagramática para este problema. Empecemos con un diagrama que represente las cinco sillas (figura 283):

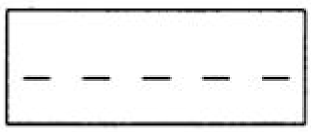


Figura 283
(Problema de las "cinco sillas";
Primer paso: representación inicial)

A continuación, utilizando el diagrama anterior (fig.283), expresemos con uno o varios diagramas la información de I.ii). Utilizaremos el signo "x" para la silla vacía. Tendremos seis posibles casos (figura 284):

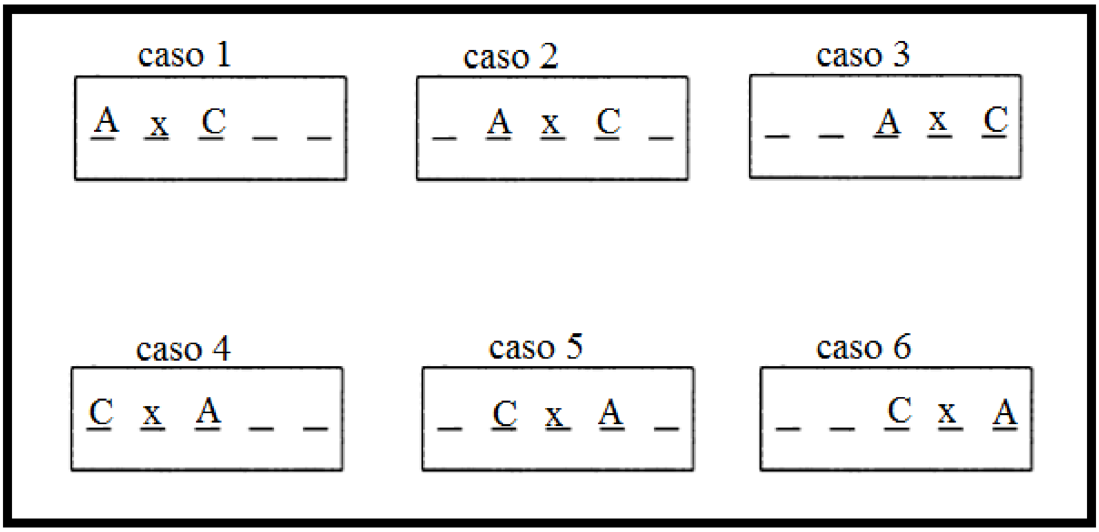


Figura 284
(Problema de las "cinco sillas". Segundo paso:
representación de los seis casos posibles, según la información de I.ii)

Ahora consideremos que en cada caso deberemos colocar a B y D. Tendremos por tanto los siguientes subcasos (figura 285):

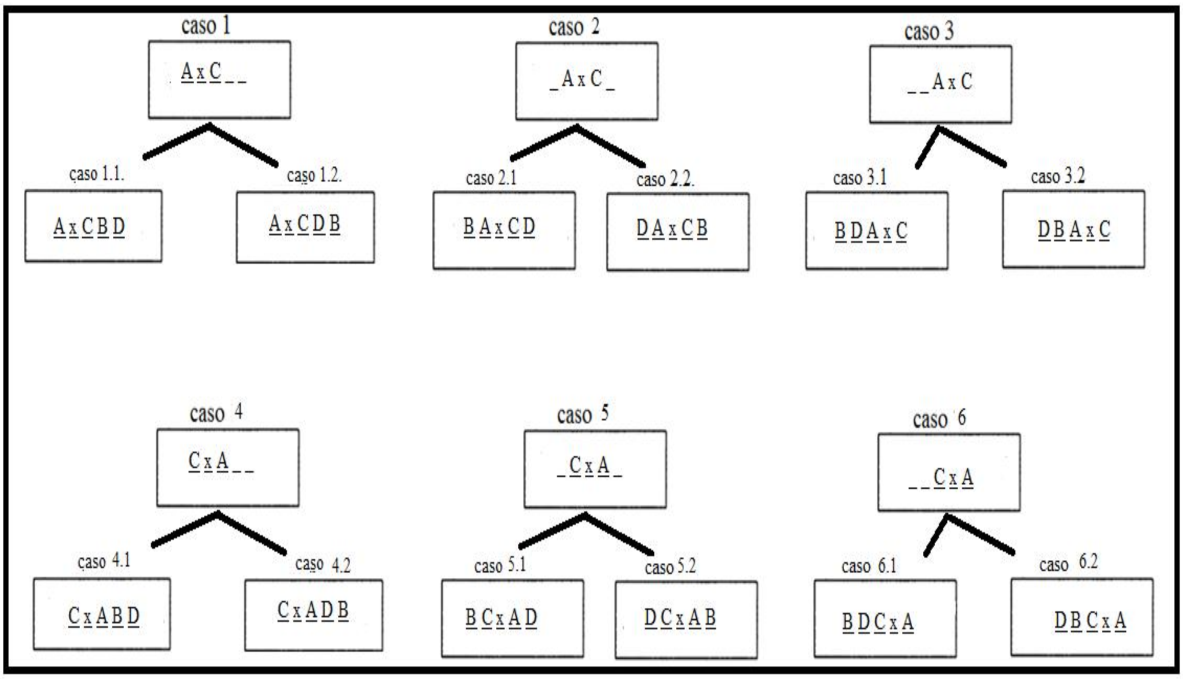


Figura 285
(Problema de las "cinco sillas". Tercer paso: representación de todos los subcasos)

De los doce posibles subcasos, hay algunos que deberemos cerrar, pues entran en conflicto con las condiciones iniciales. Veamos cuales:

Los subcasos 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, deben cerrarse pues entran en conflicto con I.iii).

Los subcasos 2.1, 2.2., 5.1, 5.2., deben cerrarse pues entran en conflicto con I.iv). Gráficamente sería como se muestra en la figura 286.

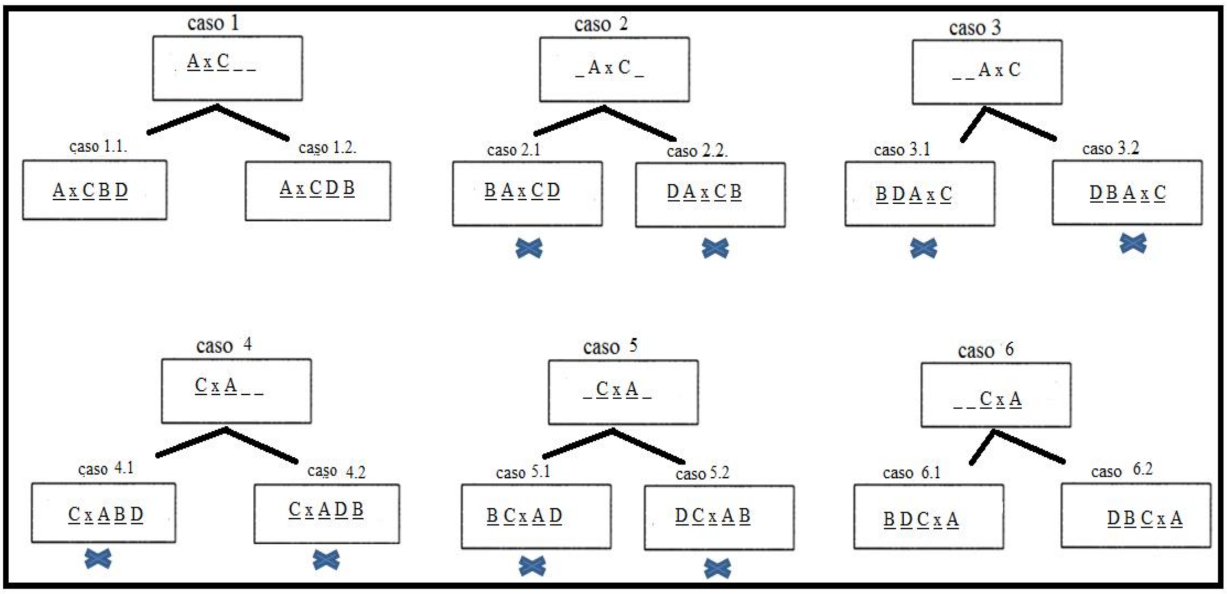


Figura 286

(Problema de las "cinco sillas". Cuarto paso: "cerramiento" de subcasos incompatibles con la información de I.iii) o I.iv))

De los cuatro subcasos posibles, podemos extraer la información común, y de esta manera tendríamos el siguiente diagrama (figura 287):

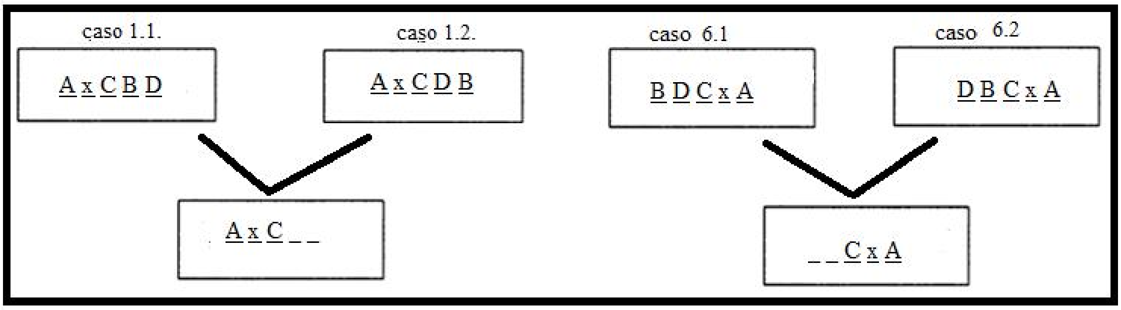


Figura 287

(Problema de las "cinco sillas". Quinto paso: agrupación de subcasos posibles)

En el siguiente diagrama final (figura 288), podemos comprobar la información que se nos pedía encontrar:

C.i) Mostrar que la silla vacía no está en el centro ni en un extremo.

C.ii) Mostrar quién debe sentarse en el centro.

C.iii) Mostrar quién debe sentarse en los extremos.

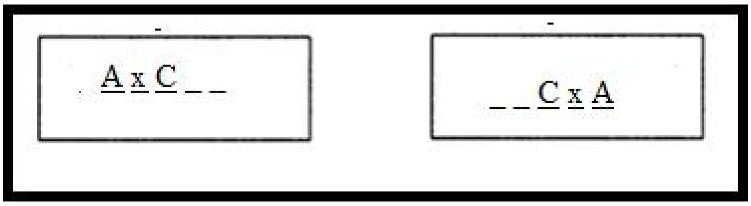


Figura 288
(Problema de las "cinco sillas". Solución gráfica)

Después de llegar a la resolución del problema ¿cómo saber que el razonamiento realizado es válido? Hemos manipulado diagramas que representaban información de un modo no-simbólico. No hemos utilizado proposiciones de primer orden. Según Barwise y Etchemendi, asumida la validez de los cinco principios inferenciales, el razonamiento aplicado es válido, ya que cada paso se basa en la aplicación de alguno de dichos principios.

El paso que se procesa en la figura 283 se produce en base al principio de Aceptación. El de la figura 284, se produce por el principio de Asumir. Las figuras 285 y 286 procesan unos pasos en base al principio de Subsumir. Y los últimos diagramas (286 y 287) se basan en la aplicación de Fusionar.

En *Information, infons and inference*, Barwise y Etchemendi proponen trascender las formas de representación para obtener una inferencia válida, y situarse en el nivel de información. Tradicionalmente, las reglas de inferencia se han dado en un nivel semántico de un determinado sistema; y este nivel semántico está unido a una forma de representación, diferente de un sistema a otro. Barwise y Etchemendi proponen una teoría lógica que se centra en una inferencia basada en un nivel informacional, desligado de la semántica entendida en un sentido tradicional. Proponen una semántica de un nivel más elevado que el que tradicionalmente se ha estudiado. La semántica se ha utilizado para ver si las reglas de transformación aplicadas en un sistema estaban legitimadas para ser utilizadas. Barwise y Etchemendi amplían el concepto de semántica, y a partir de ahí, proponen unos principios inferenciales.

Asimismo, ponen en entredicho la idea tradicional de un lenguaje universal para la lógica. Algunos lógicos han creído que dicho lenguaje podría ser el lenguaje de primer orden. Otros han llegado a pensar que este lenguaje universal podría ser proporcionado por los diagramas. Barwise y Etchemedi se muestran escépticos ante esta búsqueda de un lenguaje lógico universal (Shin, 2004, p.101). Para ellos, el sujeto que razona puede basarse en diferentes formas de representación según el caso, siempre que el sistema sea válido. En *Heterogeneous logic* estudian el caso de representación no-uniforme en el diseño de hardware como ejemplo de heterogeneidad. Veámoslo con algo más de detalle (Barwise y Etchemendi, 1996, p.183). Tomemos el ejemplo de un chip de ordenador. A la hora de su diseño, debemos tener en cuenta cientos de relaciones. Se pueden considerar desde el punto de vista del control, de las puertas lógicas y de la coordinación. Los ingenieros han resuelto el problema de la representación mediante tres sistemas de representación independientes entre sí. A saber: para la representación del control han utilizado gráficos de estado, para la representación de una puerta de información utilizan diagramas de circuitos, y para la sincronización se utilizan diagramas de sincronización. Veamos a continuación tres tipos diferentes de representación de un dispositivo muy sencillo, llamado unidad de generación de pulsos. En la figura 289 tenemos un diagrama de sincronización para la unidad de pulsos. El diagrama muestra que cualquier pulso de entrada debería convertirse en un pulso de salida de la unidad.

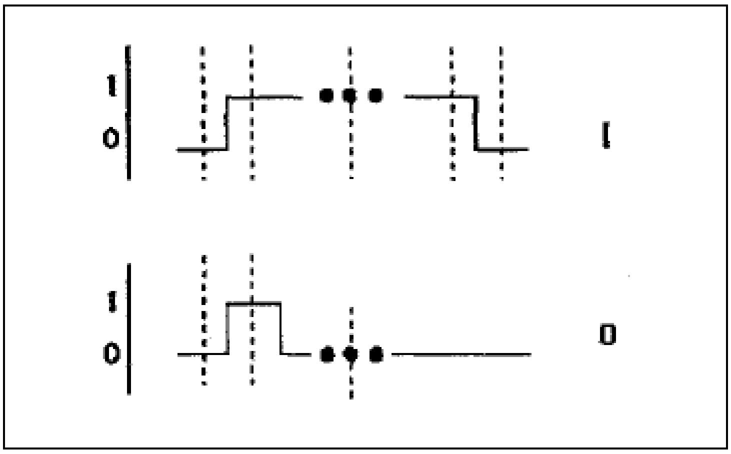


Figura 289
(diagrama de sincronización para la unidad de pulsos)

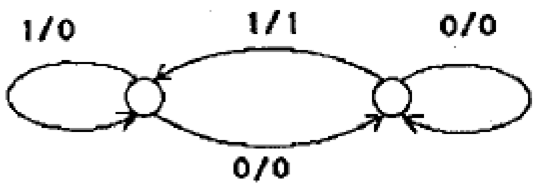


Figura 290
(diagrama de representación de estados internos de la unidad generadora de pulsos)

En la figura 290 se muestra un diagrama de estado para representar dos estados internos. Los arcos muestran transiciones entre esos estados. Y la figura 291 muestra un diagrama de circuito para la misma unidad de pulsos. Además de la puerta lógica, se utiliza un dispositivo de almacenamiento que mantiene un valor por unidad de tiempo antes de transmitirlo.

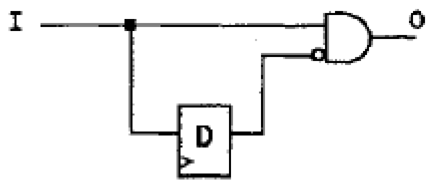


Figura 291
(Diagrama de circuito para la unidad de pulsos)

Cada uno de estos diagramas son esencialmente homomórficos, pues las relaciones físicas entre líneas y otros símbolos, representan relaciones entre distintos aspectos operacionales del chip. Sin embargo, una línea en alguno de los diagramas no tiene la misma interpretación que en otros: conexiones entre puertas, posibles transiciones entre estados y el valor en una conexión a lo largo del tiempo. Cuando los ingenieros se ponen a diseñar, utilizan los tres diagramas a la vez. Es un claro ejemplo de razonamiento heterogéneo en la vida real. Utilizan conjuntamente los tres conjuntos de convenciones, y razonan utilizando los tres.

Ahora bien, puede surgir alguna duda sobre la consistencia en el uso de diferentes sistemas, como en el ejemplo anterior. Es por ello que algunos investigadores proponen la necesidad de una "interlingua" cuando se utilizan diferentes sistemas de representación. Barwise y Etchemendi no creen necesaria esta "intelingua". Como ya demostraron en el programa "Hyperproof", el razonamiento heterogéneo unas veces funciona conmutando información diagramática con proposiciones de primer orden, y en otras ocasiones solo se utilizan oraciones para obtener una conclusión. Las reglas de inferencia de Hyperproof, como vemos, permiten combinar las dos formas de representación. Podemos adoptar distintas formas de reprentación y movernos de una forma a otra utilizando las reglas de inferencia (Shin, 2004, p.104). En resumen, Barwise y Etchemendi proponen el desarrollo de la lógica más allá de una forma determinada de representación. No es necesaria la existencia de una forma universal de representación, ni de una interlingua, caso de utilizar diferentes formas de representación.

A partir de los trabajos de Barwise y Etchemendi comenzaron a desarrollarse tres líneas de investigación. Por un lado, en el campo de la filosofía de la mente y de la psicología, se suscitó un interés por otras formas no lingüísticas de representación. También abrió un campo de investigación en las ciencias de la computación, implementando la representación no-simbólica en sus investigaciones. Y por último, en la propia investigación lógica, propició, sobre todo, el estudio del estatus lógico de sistemas diagramáticos, área en el que debe mencionarse a Shin, y sus desarrollos de los sistemas de Venn y de Peirce.

3. CONCLUSIONES

A la vista de esta revisión histórica acerca de las representaciones gráficas en lógica, podemos realizar algunos comentarios y observaciones a modo de conclusión.

En primer lugar, habría que hacer referencia a dos momentos históricos relevantes en el tema que nos ocupa, y que hemos analizado y de nuevo retomamos a modo de resumen. El primero de ellos es el de la aparición de los diagramas lógicos, gracias a Leibniz, en 1703. Hasta ese momento, las distintas aportaciones gráficas al mundo de la lógica habían dado muestras de una gran variedad en su utilidad y acierto. Una buena parte de ellas estaban basadas en la lógica aristotélica y en elementos tales como las proposiciones categóricas y el silogismo. Pero al analizar las distintas representaciones gráficas de aquella primera etapa histórica, se echa en falta algo difícil de definir y que podríamos expresar como una carencia de “conexión gráfica”, o también como la falta de un “paradigma gráfico” que diera cierta cohesión al conjunto de dichas representaciones. Con Leibniz se introduce el uso del diagrama lógico, y con Euler y Venn se produce su gran difusión. Este concepto, que ya definimos en su momento, proporciona esa coherencia gráfica que se echaba en falta en la primera etapa. Los diagramas circulares de Leibniz tienen una clara continuación con Euler, Venn y Peirce, aunque, claro está, con las sucesivas aportaciones y modificaciones. En esa segunda etapa histórica, el concepto de diagrama lógico se podría considerar como dicho “paradigma gráfico” del cual no se dispuso en la primera etapa.

El otro momento histórico a resaltar, sería la aparición del proyecto del Razonamiento Heterogéneo, que lleva implícito el concepto de “lógica heterogénea”.

Esta nueva visión de la lógica, que incluye elementos gráficos y diagramáticos como modo también de prueba, abre un camino novedoso en la investigación lógica. Pero a la vez nos hace adoptar un punto de vista, también novedoso, a la hora de valorar las aportaciones gráficas vistas a lo largo de la historia de la lógica. Dichas aportaciones, desde el cuadrado de oposición hasta los grafos existenciales de Peirce, por citar un par de ejemplos, serían muestras de lo que nos han venido a decir Barwise y Etchemendi. A saber, que la lógica, como estudio de la inferencia válida, debe incluir otros elementos además de la información verbal y de la representación simbólica tradicional. Por tanto, las distintas aportaciones gráficas y diagramáticas históricas deben ser entendidas como muestras del hecho de que el razonamiento humano utiliza una variedad de elementos, incluidos los gráficos, dependiendo del tipo de problema o asunto a resolver. De esta manera se explica la variedad en las formas, así como el mayor o menor acierto en la construcción y en la utilidad de dichas representaciones, incluidas los diagramas. Según el problema a tratar, según el área a aplicar, las representaciones vistas se muestran más o menos acertadas. Esto vendría a ser congruente con la visión que Barwise y Etchemendi nos ofrecen de la información visual y gráfica, a saber, que es una forma de representación que puede tener diversas utilidades, desde la simple complementariedad con otras formas de representación, hasta la capacidad de ofrecer una prueba válida.

4. BIBLIOGRAFÍA

- **ARISTOTELES**: *Analíticos Primeros* en *Tratados de Lógica (Órganon). Tomo II.* Ed. Gredos, Madrid, 1995 (traducción de Miguel Candel Sanmartín). pp.85-297.

- **ARISTOTELES**: *Sobre la interpretación* en *Tratados de Lógica (Órganon). Tomo II.* Ed. Gredos, Madrid, 1995 (traducción de Miguel Candel Sanmartín). pp.25-81

- **BARON**, Margaret E. (1969): *A Note on the Historical Development of Logic Diagrams: Leibniz, Euler and Venn.* The Mathematical Gazette, Vol. 53, No. 384 (1969, mayo), pp. 113-125

- **BARWISE**, J. (1993): *Heterogeneous reasoning,* en *Conceptual Graphs and Knowledge Representation*, G. Mineau, B. Moulin, and J. F. Sowa (eds.), Lecture Notes on Artificial Intelligence, Cambridge: MIT Press, 64-74

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY**, J.: (1986/1993). *Turing's World: An Introduction to Computability*. Primera edición por: Santa Barbara: Academic Courseware Exchange (1986). Stanford: CSLI and Cambridge: Cambridge University Press (1993), 123+ix.

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY**, J. (1987/1991). *Tarski's World*. Primera edición por: Santa Barbara: Academic Courseware Exchange (1987). Stanford: CSLI and Cambridge: Cambridge University Press. Primera edición como software para Macintosh (1991), 111+xv; Segunda edición como software Macintosh (1993), 116+xviii; Segunda edición como software para IBM (1993), 122+xviii.

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY**, J. (1989): *Information, infons and inference,* en *Situation and its applications I* (R.Cooper, K. Mukai, and J. Perry, eds.), Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, pp.33-78.

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY** (1991): *Visual information and valid reasoning*, en *Visualization in teaching and learning mathematics* (W. Zimmerman and S. Cunningham, editors), Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991, pp. 9-24. Reimpreso en *Philosophy and the Computer* (L. Burkholder, editor) Westview Press, Boulder (1992) pp. 160-182. Reimpreso en *Logical Reasoning with Diagrams* (G. Allwein and J. Barwise, editors) Oxford University Press, New York (1996) pp. 3-25 (Esta última referencia es la utilizada para las referencias en el presente trabajo)

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY**, J. (1994). *Hyperproof*. Programa creado por Gerard Allwein, Mark Greaves, and Mike Lenz. Stanford: CSLI and Cambridge: Cambridge University Press, 255+xvii.

- **BARWISE**, J.; **ETCHEMENDY**, J. (1996): *Heterogeneous Logic* en *Logical Reasoning with Diagrams*, pp.179-200 (Ed. Gerard Allwein and Jon Barwise), New York, Oxford, Oxford University Press, 1996. (esta es la edición consultada). También hay otra edición en *Diagrammatic Reasoning: Cognitive and Computational Perspectives*, J. Glasgow, N. Hari Narayana, y B. Chandrasekaran (eds), pp. 209-232, Cambridge, MA: AAAI Press/The MIT Press, 1995

- **BAYLE**, Pierre (1820-24): *Dictionnaire historique et critique de Pierre Bayle.* (16 vol.) Paris, Desoer, Libraire, Rue Christine.

- **BEAUJEU**, Jean (1973): *Apulée: opuscules philosophiques*. Paris, Belles Lettres.

- **BERNHARD**, Peter. (2008).*Visualizations of the Square of pposition*, en Logica universalis 2 (2008), 31-41

- **BOCHENSKY**, I.M. (1985): *Historia de la lógica formal.* Ed. Gredos. Madrid.

- **BONNER,** Anthony (2007): *The Art and Logic of Ramon Llull (A User's Guide).* Leiden, Boston.

- **BURIDAN,** J. (1487): *Summulae de dialéctica*; an annotated translation with a philosophical introduction, by Gyula Klima; Yale University Press, 2001, New Haven and London

- **BURIDAN,** Jean (1499): *Perutile compendium totius logice Joannis Buridani / cum preclarissima solertissim viri Joannis Dorp exposition.* Ed. Petrum Joannem de Quarengiis (Venetiis). 1499. [282] páginas sin numerar. (Material microfilmado accessible on-line en la Biblioteca Nacional de Francia, con el link: http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37283609t)

- **COUMET**, Ernest (1977): *Sur l'histoire des diagrammes logiques, «figures géométriques»* Mathématiques et Sciences Humaines, 60 (1977), p. 31-62. Paris.

Existe una traducción al español de Mary Sol de Mora Charles, con la siguiente referencia: Coumet, Ernest: *Sobre la historia de los diagramas lógicos, "Figuras geométricas".* Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Vol. 25, nº 52, 2002, pp. 167-195.

- **DAVENPORT**, Charles K. (1952): *The role of graphical methods in the history of logic*. Methodos, vol. 4 (1952), pp-145-164.

- **ECO**, Umberto: (1994) *La búsqueda de la lengua perfecta*. Barcelona, Ed.Grijalbo Mondadori. Existe una edición electrónica disponible en la página web de la Escuela de Filosofía Universidad ARCIS:
http://www.philosophia.cl/biblioteca/eco/Eco%20%20La%20b%FAsqueda%20de%20la%20lengua%20perfecta.pdf

- **EULER**, Leonhard (1768-1772): *Lettres a une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de phisique et de philosophie.* Ed. Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo: Tomo I (cartas I a LXXIX)- 1768; Tomo II (cartas LXXX a CLIV)-1768; Tomo III (cartas CLV a CCXXXIV)-1772

(Edicion en español: EULER, L: *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*, Ed. Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1990).

- **FERRATER MORA**, José (1975): *Diccionario de Filosofía*. (2 v.). Buenos Aires, Ed.Sudamericana, 5ª edición.

- **FISCH**, Max H. (1986): *Charles Sanders Peirce*. En: *Peirce: Semeiotic and Pragmatism. Essays by Max H. Fisch*. Kenneth Laine Ketner; Christian J.W.Kloesel (eds.) Indiana University Press, Bloomington.

- **FRÁPOLLI**, María José (2011): *Enunciado*. En *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica.* Vega Reñón, L.; Olmos Gómez, P.; (eds.). Madrid, Ed. Trotta, 2011. (pp.228-231)

- **GARDNER**, Martin (1985): *Máquinas y diagramas lógicos.* Alianza Editorial, Madrid.

- **GARRIDO**, Manuel (1981): *Lógica simbólica.* Madrid, Ed.Tecnos.

- **GORTARI**, Elí de (2000): *Diccionario de la Lógica*. México. Ed. Plaza y Valdés, 1ª ed. 1988; 1ª reimpresión 2000.

- **GUEVARA BRAVO**, César; **MARTÍNEZ ENRÍQUEZ**, Rafael (2007): *Leonhard Euler, de las cortes a las academias;* en Miscelánea Matemática, num.45 (2007), pp.1-24. Ed. Sociedad Matemática Mexicana. México, D.F.

- **HAMBLIN**, Charles Leonard (1976): *An improved Pons Asinorum?* En Journal of The History of Philosophy, Vol.4, Num.2, Abril 1976, pp.131-136. Publicado por The Johns Hopkins University Press

- **HAMILTON**, William (1866): *Discussions on philosophy and literature, education and university reform.* Edinburgh W. Blackwood and sons.

- **HAMMER**, Eric (1995): *Peirce on Logical Diagrams.* En *Transactions of the Charles S. Peirce Society*. Vol.31, nº4, Otoño-1995 Indiana University Press. (pp.807-827)

- **HISPANUS**, Petrus: *Tractatus: Summule Logicales*. Ed. Bompiani, Milán, 2004 (texto en latín con traducción al italiano).

- **JEVONS**, W. Stanley (1888): *Elementary lessons in logic: deductive and inductive.* London and New York, MacMillan and Co.

- **KARNAUGH**, M.(1953): *The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits.* En *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, part I, 72(9): 593-599, Noviembre, 1953.

- **KNEALE**, William; **KNEALE**, Martha (1971): *The development of logic.* Oxford: Clarendon Press.

- **LAGERLUND**, Henrik (2010): *Medieval Theories of the Syllogism*, en The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Edición de primavera de 2010), Edward N. Zalta (ed.). URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2010/entries/medieval-syllogism/>.

- **LEIBNIZ**, G. W. (1703): *De Formae Logicae Comprobatione per Linearum Ductus*; en COUTURAT, L. (ed.) *Opuscules et fragments inedits de Leibniz*. Paris: F. Alcan, 1961. (pp.292-321.)

- **LLULL**, Ramón: *Arte Breve.* Ed. Universidad de Navarra, Barañain (Navarra), 2004. (traducción de Josep E. Rubio)

- **LONDEY,** D.**; JOHANSON,** C. (1987): *The Logic of Apuleius*. Ed. E.J.Brill, Leiden, The Netherlands.

- **MARRODÁN**, Juan (2006): *Centros de trabajo alrededor de Peirce*. En “Revista Anthropos: Huellas del conocimiento”, num.212 (VV.AA.: *Charles Sanders Peirce: razón e invención del pensamiento pragmatista*), 2006, Ed. Anthropos, Barcelona.

- **MOSTERÍN,** J (2006): *Aristóteles: historia del pensamiento.* Madrid, Alianza Editorial.

- **PARSONS**, Terence (2008): *Things That are Right with the Traditional Square of Opposition.* Logica universalis, 2 (2008), 3-11

- **PEIRCE**, Charles Sanders: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds), Harvard University Press, Cambridge, 1931-1958. Edición electrónica de J. Deely, InteLex, Charlottesville, VA.

- **PEIRCE**, Charles Sanders: *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, vols. 1-6, M. H. Fisch et al. (eds), Indiana University Press, Bloomington, 1982-2000.

- **PIZZI**, Claudio. (2008). *Aristotle’s Cubes and Consequential Implication*, en Logica universalis 2 (2008), 143-153

- **PORFIRIO**: *Isagoge*. Ed. Anthropos, Barcelona, 2003. (introducción, traducción, notas, apéndices y bibliografía de Juan José García Norro y Rogelio Rovira)

- **REVISTA ANTHROPOS: HUELLAS DEL CONOCIMIENTO**. Num. 212, 2006. Número dedicado a: *Charles Sanders Peirce: razón e invención del pensamiento pragmatista*. VV.AA. Incluye diversos artículos dedicados Charles S. Peirce. Ed. Antrhopos, 2006, Barcelona.

- **ROBERTS**, Don D.(1973): *The existential graphs of Charles S. Peirce*. Ed. Mouton, The Hague, Paris.

- **SÉNECA**: *Epístolas morales a Lucilio* (v.1). Ed. Gredos, Madrid, 1986.

- **SHIN**, Sun-Joo (1995): *The Logical Status of Diagrams.* Ed. University of Notre Dame, Indiana.

- **SHIN**, Sun-Joo (2002): *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*. Massachussets Institute of Technology, Cambridge (MA), 2002

- **SHIN**, Sun-Joo (2004): *Heterogeneous Reasoning and Its Logic,* en The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 10, No. 1 (Mar., 2004), pp. 86-106

- **SHIN**, Sun-Joo; **LEMON**, Oliver (2008): *Diagrams*; en The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Edición de Invierno de 2008), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/diagrams/>.

- **STASCHOK**, Mireille. (2008). *Non-Traditional Squares of Predication and Quantification*, en Logica universalis 2 (2008), 77-85

- **VEGA REÑÓN**, Luis (1997): *Una guía de historia de la Lógica.* UNED, Madrid, 1997.

- **VEGA REÑÓN**, Luis (1999): *Hacer ver, hacer saber (El rigor informal de las pruebas matemáticas clásicas).* Ponencia presentada en el X Congreso Nacional de Filosofía de la Asociación Filosófica Argentina, Universidad nacional de Córdoba, 24-27 noviembre 1999. http://www.uned.es/dpto_log/lvega/docs/hacerverhacersaber.pdf

- **VEGA REÑÓN**, Luis (2011a): *Contradicción / Contrariedad.* En *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica.* Vega Reñón, L.; Olmos Gómez, P. (eds.). Madrid, Ed. Trotta, 2011. (pp. 142-144)

- **VEGA REÑÓN**, Luis (2011b): *Relaciones de Oposición.* En: *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica.* Madrid, Ed. Trotta, 2011. (pp. 433-435).

- **VEGA REÑÓN**, Luis (2011c): *Silogismo.* En: *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica.* Vega Reñón, L.; Olmos Gómez, P. (eds.). Madrid, Ed. Trotta, 2011. (pp.558-562)

- **VENN**, John (1880, julio): *On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings,* en Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1–18. vol. 9, 59, 1880.

- **VENN**, John (1880, diciembre): *On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions*; en Proceedings of the Cambridge

Philosophical Society: Mathematical and physical sciences. Vol. IV. (1880-1883). Cambridge; University Press, 1883.

- **VENN**, John (1881): *Simbolic Logic.* Ed. MacMillan and Co. London. (Existe una segunda edición revisada con los siguientes datos editoriales: London and New York, Macmillan and Co., 1894)

- **VENN**, John (1889): *The Principles of Empirical or Inductive Logic*. London and New York; MacMillan and Co.

- **WOLENSKI**, Jan. (2008). *Applications of Squares of Oppositions and Their Generalizations in Philosophical Analysis*, en Logica universalis 2 (2008), 13–29

- **ZALAMEA**, Fernando (2010): *Los gráficos existenciales peirceanos.* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

- **ZEMAN**, Jay J. (1964): *The Grafical Logic of C.S.Peirce*. (Tesis doctoral). The University of Chicago.

◊◊◊◊◊◊◊◊