UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

Máster Universitario en Filosofía Teórica y Práctica

Especialidad de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Trabajo Fin de Máster

El concepto de verdad en matemáticas

Autor: Jesús M. Landart Ercilla

Tutora: Dra. Amparo Díez Martínez

Septiembre, 2018

Resumen

La teoría clásica de la verdad matemática afirma que la deducción a partir de axiomas intuitivos es condición suficiente y necesaria para la verdad matemática. Al menos tres crisis importantes a lo largo de los últimos ciento cincuenta años quebraron esta confianza: la irrupción de geometrías no euclídeas, el descubrimiento de contradicciones en el seno de la teoría de conjuntos y la constatación de existencia de limitaciones intrínsecas en los sistemas axiomáticos. La última esperanza, la posibilidad de encontrar un algoritmo que respondiera a toda pregunta bien formulada, se desvanecía igualmente. Quedaba una concepción mucho más débil de verdad matemática, menos ingenua y de gran riqueza de matices.

Palabras clave: Verdad, Teoría de Conjuntos, Matemáticas, Lógica, Teorías axiomáticas, Indecibilidad, Entscheidungsproblem.

Abstract

The classical theory of mathematical truth affirms that deduction from intuitive axioms is a sufficient and necessary condition for mathematical truth. At least three major crises over the last 150 years have broken this confidence: the emergence of non-Euclidean geometries, the discovery of contradictions within the Set Theory and the existence of intrinsic limitations in axiomatic systems. The last hope, the possibility of finding an algorithm that answers all well-formulated questions, also vanished. Today remains a much weaker conception of mathematical truth, less ingenuous and rich in nuances.

Keywords: Truth, Theory of Sets, Mathematics, Logic, Axiomatic Theories, Indecibility, Entscheidungsproblem.

Abreviaturas utilizadas en este trabajo:

AF: Axioma de formación

AI: Axioma de Igualdad

ArF: Aritmética formal

CS: Conjunto de sucesores

GE: Geometría euclídea

N: Conjunto de los números naturales

NBG: Sistema axiomático de la Teoría de Conjuntos de von Neumann- Bernays- Gödel

Q: Conjunto de los números racionales

R: Conjunto de los números reales

TA. Teoría axiomática

TC: Teoría de Conjuntos

TIG-1: Primer teorema de incompletitud de Gödel

TIG-2: Segundo teorema de incompletitud de Gödel

TM: Máquina de Turing

UTM: Máquina de Turing Universal

Z: Conjunto de los números enteros

ZF. Sistema axiomático de la Teoría de Conjuntos de Zermelo- Fraenkel

INDICE

I FUNDAMENTACIÓN

II LA VERDAD

III ACCESIBILIDAD A LA VERDAD

I FUNDAMENTACIÓN

Aquel que quiera construir altas torres, deberá permanecer largo tiempo en los fundamentos. Anton Bruckner

1. Introducción

> *"Tendremos que ponernos en guardia contra las pretensiones de los filósofos, que pretenden dictar a priori lo que la matemática debiera ser, independientemente de lo que es".* Gian-Carlo Rota

Hay cuatro tipos de verdad científica que no son independientes: la verdad lógica, la verdad por definición, la verdad matemática y la verdad empírica (Garrido, 2003). Una verdad lógica es una verdad necesaria en virtud de su forma lógica, como "los murciélagos son mamíferos o no son mamíferos". La verdad de la frase no tiene relación alguna con el conocimiento que tengamos de la filiación taxonómica de los quirópteros, refleja simplemente una necesidad lógica. Una afirmación como "la semana tiene siete días" es de otro tipo: es verdadera precisamente porque la semana se ha definido previamente como un periodo de siete días. Una verdad empírica es una verdad relativa a hechos del mundo, que es verdad pero pudiera haber sido falsa en otro mundo posible[1]. Las verdades empíricas son *a posteriori*, porque nos aseguramos de su verdad (en la medida en que podemos) acudiendo a la experiencia, directa o indirectamente. Por ejemplo "Napoleón fue derrotado en la batalla de Waterloo" es una verdad empírica. No podemos trasladarnos de época y visualizar su derrota, pero existen métodos historiográficos que nos permiten saber de su verdad; estudios documentales principalmente. Una verdad matemática como "el conjunto Q es denso en R" o "el número e es trascendente" es de otro tipo; y es a este tipo de verdad al que vamos a

[1] Siendo más rigurosos debemos llamar verdad empírica a toda afirmación tomada provisionalmente como verdadera a la luz de las investigaciones del momento presente. Posteriores investigaciones o cambios de paradigma podrían hacer que en el futuro declaremos la afirmación como falsa. Por eso diremos, con Karl Popper, que todo enunciado científico debe ser falsable, en el sentido de que debe articular, en el seno de la teoría de la que emana, la posibilidad de demostrar su falsedad. Todo experimento (toda consulta con la realidad), cuyo resultado sea armónico con el enunciado, incrementará la evidencia a favor del mismo sin llegar a demostrar empíricamente su verdad; mientras que un resultado contrario al mismo nos habilita para deducir la falsedad del enunciado por inferencia deductiva *modus tollens*.

dedicar este trabajo. En todo caso conviene recordar que las verdades no se dan en el vacío, de modo absoluto, sino que son relativas a la teoría en la que se sostienen. En el seno de sus respectivas teorías adquieren el sentido que hace de las afirmaciones genuinos portadores de verdad.

Justificar la verdad de un aserto matemático requerirá, por supuesto, acudir a los conceptos de verdad lógica y de verdad por definición pues la matemática está repleta de procesos inferenciales (lógicos) y definitorios. En una primera visión ingenua, y dado que la verdad matemática es una propiedad que se hereda a través de las deducciones correctas desde los axiomas de partida hacia las conclusiones, lo que se conoce como *Tesis clásica de la Verdad matemática* afirmará que "la deducción a partir de axiomas intuitivos es condición suficiente y necesaria para la verdad matemática" (Garrido, 2003). Esta tesis presenta históricamente tres quiebras importantes: la justificación de geometrías no euclídeas, la detección de contradicciones en el seno de la Teoría de Conjuntos (TC) y la constatación de límites epistémicos en el seno de toda teoría axiomática (TA), derivados de los teoremas de incompletitud de Gödel. Tras la primera de las crisis deja de ser cierto que la deducción a partir de axiomas intuitivos sea condición necesaria de verdad (cada una de las geometrías no euclídeas presentadas tiene al menos un axioma que no es intuitivo). La segunda crisis implica algo más grave: que la deducción a partir de axiomas intuitivos tampoco es condición suficiente. La matemática llevaba camino de ser construida en su totalidad desde la TC, más concretamente desde dos únicos conceptos primigenios que, como tales, no se definían: el de *conjunto* y el de *pertenencia*. Frege se esforzó por encontrar una axiomática completa de la TC sobre la que edificar la matemática entera, pero Bertrand Russell descubrió que la axiomática de Frege conducía a contradicción. Una contradicción en el seno de la TC era una noticia de extraordinario calado. Prueba de ello es el tono del párrafo escrito por Frege al recibir la misiva de Russell en la que le hacía saber la existencia de contradicciones en el seno de su TC:

> Difícilmente puede ocurrirle a un escritor científico algo más desgraciado que el que uno de los fundamentos del edificio que ha construido se tambalee una vez que la obra está terminada. Yo me he

> visto puesto en esta situación por una carta de Mr. B. Russell, justamente cuando la impresión de este [segundo] volumen estaba casi terminada. Solatium miseris, socios habuisse malorum[2]. Yo también he tenido este consuelo, si se le puede llamar consuelo, puesto que todo el que haya hecho uso en sus demostraciones de extensiones de conceptos, clases y conjuntos está en la misma situación. No es precisamente cuestión de mi método particular de establecer los fundamentos, sino de si es posible en absoluto una fundamentación lógica de la aritmética. Frege, G. Grundsetze del Arithmetik, Vol II, Appendix)

Sucesivas axiomatizaciones, como la de Zermelo-Fraenkel (ZF), propuesta por el primero en 1908 y matizada y mejorada por el segundo en 1922, sortearon tal problema eliminando aquellos conjuntos que provocaban las paradojas y contradicciones que había señalado Russell, como se verá en el capítulo 10. Sin embargo, la conjura el peligro era poco satisfactoria: no había manera conocida de demostrar la consistencia del sistema ZF o de cualquiera de sus alternativas. No se conocían paradojas en su seno, pero nadie podía asegurar que no afloraran al día siguiente.

En esa época uno de los matemáticos más prestigiosos del mundo, David Hilbert, propuso en la década de 1920 el que luego se conoció como *El programa de Hilbert*, un programa de investigación que conduciría (pretendidamente) a asentar la matemática sobre bases firmes de manera definitiva. A nadie se le escapó la dificultad del programa; pero lo que nadie esperaba fue la contribución del austríaco Kurt Gödel en 1931 con sus Teoremas de Incompletitud, que mostraron que el programa de Hilbert era imposible. No era ya que los axiomas de las teorías podían ser no intuitivos, sino que existían limitaciones intrínsecas a lo que se puede exigir de una TA lo suficientemente rica como para albergar en su seno la aritmética, en cuanto a completitud y consistencia. Así, era imposible demostrar la consistencia de la teoría ZF y nos debíamos conformar con la ausencia de evidencia de contradicciones, algo diferente a la evidencia de

[2] *Es un consuelo para los desdichados tener compañía en la miseria*

ausencia de las mismas, que era lo anhelado por Hilbert al proponer su programa. En este ambiente de incertidumbre se forjan varias escuelas de pensamiento matemático: logicistas, constructivistas o intuicionistas y formalistas principalmente.

Mientras tanto, y de forma paralela, se desarrollaban teorías de la verdad en el sentido más amplio, no necesariamente matemática.

Mortalmente golpeadas por Kurt Gödel y sus dos teoremas de incompletitud, las esperanzas de David Hilbert derivaron hacia la posibilidad de que al menos, ante un problema dado correctamente definido, pudiera contarse con un algoritmo que lo resolviera en un tiempo finito. Expresado de un modo más formal: quedaba la esperanza de que en un sistema axiomático del primer orden siempre se pudiera decidir algorítmicamente si una fórmula dada es o no es consecuencia de los axiomas iniciales. Incluso esa última esperanza cayó a manos de Alonzo Church y Alan Turing en 1936.

Este trabajo pretende recoger la historia de todo este apasionante proceso, en medio de cuyas crisis se iba fraguando un concepto de verdad matemática mucho más complejo que el que la Tesis Clásica dejaba entrever.

Asumiremos con Benacerraf[3] que toda teoría sobre la verdad matemática debe cumplir la condición de asumir una teoría previa sobre la verdad general, motivo por el que daremos cuenta de las teorías de la verdad más relevantes, quedándonos al final con la Teoría de Tarski, que presentará los elementos necesarios y suficientes para formalizar el concepto de verdad matemática, cosa que haremos a continuación desde la teoría de modelos.

La propia definición de modelo nos llevará a preguntarnos por la naturaleza de los objetos matemáticos, pues un modelo hace referencia necesariamente a un universo de objetos. La construcción de toda la matemática sobre la TC nos pondrá sobre la pista de

[3] Benacerraf, P. (1973) Mathematical Truth. Journal of Philosophy 70, pp. 661-80. Recensión de la traducción al castellano en Benacerraf, B. (2004) La Verdad Matemática (2004) Ágora, Papeles de filosofía, 23/2,233-253.

que los objetos de la matemática son conjuntos, y que todo el edificio se puede construir sobre el concepto del conjunto vacío, de modo que toda consideración platónica de existencia separada de los objetos matemáticos en un mundo de las ideas matemáticas será considerado ocioso y superfluo. No necesitamos una ontología de los objetos matemáticos para pensar sobre la verdad matemática. La matemática entera se construye sobre el vacío, en un logro intelectual que haría las delicias de un maestro zen.

En determinados momentos de la confección del presente documento el autor se ha encontrado con la tentación de obviar ciertas explicaciones técnicas o ciertos temas laterales que, sin embargo, consideraba necesarios para terminar de reflejar fielmente los procesos que se describen. Se ha optado en tales casos por llevar dichos desarrollos a apéndices, con la pretensión, al separarlos del hilo central del trabajo, de que no distraigan la atención del argumento principal, pero que figuren para guía y consulta en caso necesario.

2. La tesis clásica de la verdad matemática

Euclides dejó constancia ya en el siglo III a.C. de que la geometría podía presentarse como una serie de teoremas deducibles de tan sólo cinco enunciados introducidos sin prueba y algunas definiciones: la deducción se revelaba como un proceso que transmite la verdad de los axiomas a los enunciados de los teoremas.

El enunciado de la *Tesis clásica de la verdad matemática*, como se ha adelantado en la introducción, es el siguiente:

Tesis clásica de la verdad matemática: la deducción a partir de axiomas intuitivos es condición suficiente y necesaria para la verdad matemática[4].

Conviene detenerse en ambos aspectos: la suficiencia y la necesidad.

Suficiencia

La idea que subyace a esta tesis es bien sencilla: los axiomas de partida expresan verdades, pues son intuitivos, claros, precisos e incuestionables; y las deducciones a partir de los mismos son operaciones que conservan dicha verdad. Por lo tanto la demostración (la prueba de que un enunciado se deduce realmente de los axiomas) es condición suficiente de verdad. Inquirir por la verdad de un enunciado matemático es preguntarse por el proceso deductivo que nos lleva de los axiomas al enunciado. Encontrar tal camino deductivo es decir la última palabra sobre la verdad del enunciado.

[4] La suficiencia y necesidad simultáneas es el *summum bonum* de las propiedades que puede exhibir una condición, porque cuando las posee, capta completamente la esencia del objeto al que se refiere, y solamente esa esencia. Es lo que se denomina una caracterización. Toda caracterización (toda condición suficiente y necesaria) es equivalente a una definición perfecta. De ahí la importancia de la Tesis Clásica.

Necesidad

La enorme seguridad en la suficiencia animaba a considerar también la necesidad: si la inferencia deductiva no fuera necesaria esto significaría que existirían proposiciones verdaderas que no serían deducibles. Por supuesto, nadie había demostrado que tales proposiciones (aparte de los axiomas) no existieran, pero había una gran confianza de que así fuera.

Así, siempre supuestas pero nunca demostradas, la suficiencia y la necesidad formaban conjuntamente la caracterización de la verdad matemática. Sobre el quehacer matemático sobrevolaba esta presunción perfecta, hermosamente cristalizada en los Elementos de Euclides, y aunque grandes partes de la matemática crecieran a veces *con vigor, pero sin rigor*, como el cálculo infinitesimal, derivar todo el corpus matemático de unos limpios axiomas autoevidentes seguía siendo el desideratum de la labor matemática

Las crisis ocasionadas por la irrupción de las geometrías no euclídeas por un lado y por la existencia de paradojas en la TC y los teoremas de incompletitud de Gödel por otro, quebraron esa confianza. La primera afecta en lo que atañe a la necesidad: las geometrías no euclídeas partían de axiomas no intuitivos, pero eran completamente coherentes[5] (como veremos más adelante) y la segunda en lo que atañe a la suficiencia, sobre todo tras los trabajos de Gödel de 1931. La segunda crisis era aún mucho más grave pues la matemática entera estaba ya bastante bien fundada sobre TC, y fallas en la misma hacían que la deducción a partir de axiomas verdaderos ni siquiera apareciera ahora como suficiente. Esta doble quiebra de confianza necesita, para ser correctamente apreciada, un desglose preciso, que es lo que se hace a continuación.

[5] Empleamos aquí la palabra “coherentes” en el sentido habitual que connota ausencia de contradicciones. Más adelante definiremos dicha propiedad deseable en las teorías axiomáticas como consistencia.

3. La primera crisis: las geometrías no euclídeas

Las geometrías no euclídeas surgieron de un intento de depurar la geometría euclídea (GE) del plano. David Hilbert propuso en 1900 reformular dicha geometría a partir de la depuración de la lógica formal, mediante una reformulación axiomática. Había cinco postulados indemostrables, los "cinco de Euclides", simples e intuitivos como prescribía la *Tesis clásica*. El resto de postulados originales de Euclides eran cuestiones lógicas. Era sumamente difícil dudar de la validez universal de los mismos.

A1: Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.

A2: Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

A3: Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.

A4: Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

A5: Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a la misma.

El quinto (el famoso "quinto de Euclides") era más enigmático que los demás. La afirmación material en él contenida era clara y distinta, que diría Descartes; pero no estaba nada claro que no fuera una consecuencia lógica de los cuatro axiomas anteriores. Durante dos milenios los matemáticos se afanaron[6] en demostrar que

$$\{A1, A2, A3, A4\} \vdash A5.$$

[6] Se afanaron hasta límites inconcebibles. Janos Bolyai fue advertido en una carta por su padre, también matemático, refiriéndose al empeño en demostrar la dependencia del quinto de los otros cuatro*:*
Por amor de Dios, te lo ruego: olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque, lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo, y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida. (Boyer, 1994; 674)

Proclo, por ejemplo, lo intentó, (ver Apéndice 2) pero estaba usando inadvertidamente el propio postulado en su demostración, con lo que incurría en una *petitio principii*. Sin embargo, A5 encerraba insondables misterios: su aparente claridad e inocencia enmascaraba la realidad de que era equivalente a muchos otros enunciados de apariencia muy diferente. Por ejemplo, se puede demostrar que A5, en la formulación arriba indicada equivale a

> $(A5)_1$: Existe un par de rectas tales que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra.
>
> $(A5)_2$: Existe un par de triángulos no congruentes semejantes.
>
> $(A5)_3$: Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos.
>
> $(A5)_4$: Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, entonces el cuarto también es recto.
>
> $(A5)_5$: Existe al menos un triángulo en el que la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos.
>
> $(A5)_6$: Por un punto situado dentro de un ángulo menor que 60º puede siempre trazarse una recta que corte a ambos lados del ángulo.
>
> $(A5)_7$: Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera.
>
> $(A5)_8$: Se puede construir un triángulo cuyo área sea mayor que cualquier área dada.

La afirmación de que cualquiera de los $(A5)_j$ es un enunciado alternativo a A5, y equivalente a él significa, aunque en principio no sea obvio en absoluto, exactamente que

$$\{A1, A2, A3, A4, (A5)_j\} \vdash A5, \text{ y}$$

$$\{A1, A2, A3, A4, A5\} \vdash (A5)_j.$$

Es decir: si adjuntamos cualquiera de ellos como quinto axioma, podemos obtener el enunciado dado en A5 como deducción lógica (como teorema); y si admitimos A5 como quinto, entonces cualquiera de los $(A5)_j$ es un teorema demostrable. Esto hace que sea especialmente difícil estudiar la dependencia o independencia de A5 respecto a {A1, A2, A3, A4}, pues dado que la GE nos es profundamente natural, es muy fácil que se nos cuele de rondón en la demostración algún enunciado análogo al que queremos deducir, sin haberlo deducido a su vez de los cuatro restantes, con lo que habríamos incurrido en una *petitio principii* similar a la cometida por Proclo. De hecho, la formulación original de Euclides es muy diferente de la que aquí se da con el nombre de Postulado de las paralelas (debida en su forma moderna al matemático escocés John Playfair):

> $(A5)_9$: si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Al no poderse demostrar que {A1, A2, A3, A4} ⊢ A5, se intentó por reducción al absurdo. Si se pudiera demostrar que {A1, A2, A3, A4} junto con la negación de A5, ¬A5, llevaba a una contradicción, quedaría demostrado que {A1, A2, A3, A4} ⊢ A5.

Sin embargo jamás se encontró tal contradicción: la no asunción de A5 y la colocación en su lugar de alternativas daba lugar a extrañas geometrías, que eran coherentes, o al menos parecían serlo.

La negación de A5 ("por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a la misma") es necesariamente igual a "por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna o se puede trazar más de una paralela a la misma", que podemos desglosar en una disyuntiva

> A5' (por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a la misma" ó
>
> A5" (por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a la misma").

El desenlace es fácil de imaginar: se idearon dos geometrías: una de ninguna paralela (geometría elíptica) y otra de más de una paralela (geometría hiperbólica) a una dada por un punto exterior. Todos los resultados deducidos de {A1, A2, A3, A4} eran, evidentemente, comunes a todas las geometrías, no así cuando intervenía A5 o alguna de sus alternativas. Por ejemplo: mientras que en la GE la suma de ángulos de un triángulo era de 180º, en la geometría elíptica sin paralelas era mayor de 180º y en la geometría hiperbólica de más de una paralela era menor de 180º.

Beltrami demostró en 1868 la ausencia de contradicción en la geometría hiperbólica y poco después se demostraría lo mismo para el caso de ausencia de paralelas. Veamos, a modo de ilustración, el segundo caso:

3.1. Prueba de no contradicción de la geometría elíptica.

La geometría elíptica (o geometría de Riemann) se basa, como hemos dicho en A1,..., A4, A5'. La situación de partida era una confianza ciega en la coherencia interna y ausencia de contradicción de la GE (A1,...,A5), y una relativa seguridad de que el sistema elíptico sería contradictorio, aunque no había manera conocida de demostrarlo. Es importante entender que la demostración de ausencia de contradicción encontrada se basa en el supuesto de legitimidad de la GE, y que por lo tanto es una aseveración relativa a tal supuesto, en aquel momento indemostrado.

Es importante asimismo entender que la GE no define lo que es un punto ni una recta, sino que encuentra en el llamado plano euclídeo un modelo correcto sobre el que los términos "punto", "recta" tienen referencia, y por tanto significado. No fue difícil encontrar modelos para las geométricas elíptica e hiperbólica. Concretamente para la geometría elíptica un modelo conveniente es una superficie esférica. Un punto sobre el plano quedaba convertido en un punto sobre la esfera, y una recta sobre el plano quedaba convertida en un círculo máximo sobre la esfera. Con este modelo los nuevos enunciados adquirían un sentido claro e intuitivo:

> B1: por dos puntos distintos sobre una esfera pasa uno y sólo un círculo máximo[7].
>
> B2: un segmento de círculo máximo se puede extender a un círculo máximo completo
>
> B3: Se puede trazar sobre una esfera un círculo con un punto y radio (medido sobre la esfera) cualquiera.
>
> B4: todos los ángulos rectos sobre una esfera son iguales entre sí.

[7] Aquí hay un problema técnico, aunque de sencilla solución: mientras que en el plano todo punto no remite sino a sí mismo, en una esfera todo punto determina a otro: su opuesto. Todo círculo máximo que pase por un punto pasa asimismo por su opuesto, y derivado de este hecho, si dos círculos máximos se cortan en un punto, también se cortan en el opuesto. Así, consideraremos la pareja de puntos como uno único, con lo que se mantiene el axioma sin el menor problema. El modo de hacerlo es el habitual en matemáticas: considerar la oposición como una relación entre puntos de la esfera, comprobar que dicha relación es de equivalencia (lo que es trivial) y considerar, en lugar del conjunto de puntos de la esfera, el conjunto de clases de equivalencia por la relación de oposición, que será exactamente el conjunto de pares de puntos opuestos.

B5': por un punto sobre la esfera, exterior a un círculo máximo, no pasa ningún otro círculo máximo que no corte al primero.

Debemos recordar que la condición de paralelismo euclídeo era precisamente la ausencia de tal punto de intersección, por lo que es evidente la identidad de B5' con el postulado de ausencia de paralelas.

Así, comprobamos que los postulados de la geometría plana sin paralelas, incomprensible y anti intuitiva a primera vista, tienen exactamente la misma forma que ciertos teoremas de la GE del espacio relativos a una superficie esférica, que sí son intuitivos. Esto es muy importante, porque nos muestra el camino para demostrar la ausencia de contradicción de la geometría hiperbólica: si la GE en el espacio es no contradictoria, entonces todos los teoremas que se deduzcan de ella relativos a una superficie esférica estarán ausentes de contradicción. Dado que los postulados de la geometría elíptica tienen la misma forma que teoremas de la GE espacial restringida a la esfera, también estos estarán ausentes de contradicción.

Debemos hacer algunas precisiones:

1. La presencia o ausencia de contradicción es un asunto exclusivamente formal. Atiende a la forma lógica de los postulados y a las reglas de inferencia deductiva empleadas, no al contenido material de las afirmaciones realizadas por las proposiciones.

2. La demostración de consistencia [8] anterior no es absoluta, sino relativa a la consistencia de la GE del espacio (y por ende, del plano).

3. La ausencia de contradicción lógica equivale a imposibilidad de falsedad en toda interpretación del sistema axiomático. Esto es importante porque el concepto de verdad matemática, como veremos, hace referencia a los modelos. Los modelos son conjuntos

[8] Llamaremos consistencia a la propiedad de los sistemas axiomáticos de ausencia de contradicción.

de objetos que son la referencia de los términos de la teoría, de modo que las relaciones lógicas entre los términos tienen como referencia las relaciones entre objetos del modelo. En ausencia de modelos, toda teoría es una mera elucubración, con sintaxis, pero sin semántica. En este trabajo defenderemos la existencia de una semántica y un sentido en los enunciados matemáticos. Lo que hace a una teoría ser semánticamente consistente es, como condición suficiente y necesaria, que el conjunto de todos sus postulados sea verdadero al menos en una interpretación.

Repetimos la argumentación más detenidamente:

Dado que una superficie bidimensional como una esfera está embebida en el espacio $\mathbf{R}^3$, si suponemos que la GE de $\mathbf{R}^3$ es verdadera (es decir, que los axiomas o postulados de la GE se cumplen en el modelo de espacio físico tridimensional), entonces todos los teoremas que de ella se deduzcan serán verdaderos, y en particular aquellos relativos a lo que sucede en una superficie esférica.

Como la forma de los axiomas de la GE del espacio relativos a la superficie esférica son de la misma forma que los axiomas de la geometría elíptica o geometría sin paralelas en el plano, ésta será asimismo verdadera en al menos una interpretación.

Como la consistencia es condición suficiente y necesaria para ser verdadera en al menos una interpretación, entonces la geometría plana sin paralelas es consistente (ausente de contradicción).

Beltrami había demostrado lo propio para el caso de geometría hiperbólica (o geometría de Lobachevski) de más de una paralela. En su caso la forma de los postulados equivalían a teoremas de la GE del espacio sobre una pseudoesfera[9], y las líneas más cortas eran hipérbolas.

[9] Una pseudoesfera es la superficie de revolución de forma semejante a dos husos pegados por la base. Se obtiene girando una tractriz alrededor de su asíntota. Se denomina pseudoesfera porque mientras en la esfera todos los puntos tienen una misma curvatura positiva, en esta superficie todos los puntos tienen una misma curvatura negativa. Dicha superficie se genera por la revolución de una curva denominada tractriz alderedor de su asíntota.

3.2. Consecuencias de la no contradicción de las geométricas no euclídeas.

Recordemos el hilo argumental que había guiado estas investigaciones: el afán por demostrar la dependencia o independencia de A5 respecto a {A1,...,A4} había dado nulos resultados. Pero se había demostrado que sustituyendo A5 por cualquiera de sus alternativas, A5' ó A5'', los sistemas resultantes estaban ausentes de contradicción. La dependencia de A5 de sus cuatro compañeros hubiera equivalido a que tanto {A1,...,A4, A5'} como {A1,...,A4,A5''} fueran contradictorios, pues en su seno se podría demostrar tanto A5 (por deducirse de {A1,...,A4} por hipótesis de partida como alguna de sus negaciones, A5' en un caso y A5'' en el otro. Aplicando un razonamiento *modus tollens*, dada la ausencia de contradicción ahora demostrada en ambas geométricas no euclídeas, quedaba demostrada la independencia de A5 por reducción al absurdo.

Este es un precioso ejemplo de lo sorpresivo que puede ser el descubrimiento matemático: queriendo demostrar una cosa (la dependencia de A5), no sólo se demuestra lo contrario sino que además se descubre la existencia de otras geometrías consistentes que amplían el universo matemático en general, y el geométrico en especial, como nunca antes se pudo soñar.

3.3. ¿Qué es hoy la geometría?

La inequívoca etimología de la palabra geometría nos evoca tareas de agrimensura, sumamente importantes en las sociedades agrícolas y ganaderas de la antigüedad. Así, la geometría sería matemática aplicada al estudio de figuras, parcelaciones del plano y propiedades de dichas parcelas. Sin gran esfuerzo podemos ampliar el estudio a las figuras no planas, concibiendo una geometría del espacio que con una axiomática tal que la reducción de la misma a todo plano embebido en dicho espacio sea una GE plana. Tenemos así la GE del espacio. La tendencia a la abstracción creciente habilitó a los matemáticos a explorar espacios cada vez más complejos: la limitación física a tres dimensiones no tenía ningún sentido en matemáticas, se podían estudiar con igual rigor espacios de cuatro, cinco o ***n*** dimensiones, y todos ellos quedaban dentro del estudio de la geometría, que veía desdibujada su definición inicial. Cuando se incluyeron modelos no euclídeos el alejamiento de la intuición geométrica usual fue aún mayor; hasta el punto en que la geometría empezó a entenderse como el estudio de los subconjuntos de un conjunto general en el que estaban incluidos.

El siguiente paso en abstracción lo dio Felix Klein (1829-1925), en su programa de Erlangen en 1872, para el que la geometría era el estudio de las propiedades invariantes por transformaciones. Cuando un subconjunto (pensemos a modo de ejemplo un triángulo en un plano) era sometido a una transformación (una traslación, un giro, una homotecia, una deformación) continua (sin romper, rasgar ni pegar), algunas de sus propiedades permanecían, y otras no. Cuanto más "agresiva" es la transformación más basal y profunda será la propiedad que se mantenía invariante. Una geometría en sentido de Klein es un conjunto de transformaciones efectuadas sobre un conjunto dado, que mantienen invariantes unas determinadas propiedades y no otras. A modo de ejemplo: un movimiento rígido (una traslación, una rotación o una suma de ambos) mantiene en un triángulo las longitudes de sus lados; una ampliación o reducción (homotecia) no lo hace, pero sí mantiene las razones entre dos de ellos (y por lo tanto los ángulos).

Tenemos así para un conjunto dado, un conjunto anidado de geometrías diferentes, cada una más agresiva que la anterior, siendo la topología (la más general de todas ellas) la dedicada a estudiar aquellas propiedades que permanecen invariantes por todo tipo de tortura (homeomorfismo) al que sometamos al conjunto de estudio dado mientras la transformación sea continua (lo que intuitivamente significa como hemos dicho, sin romper ni pegar partes). A partir de Klein la diferencia entre la geometría y el álgebra desaparece y empiezan a proliferar tratados de geometría sin dibujo alguno; la tendencia a la abstracción no parará ahí, sino que crecerá enormemente con la convergencia entre álgebra y geometría, llegando a altísimas cotas de abstracción cuando irrumpe la Teoría de Categorías, el Álgebra Homológica y la K-Teoría Algebraica, fruto de los trabajos de Alexander Grothendieck, Samuel Eilenberg y muchos otros.

El 5 y 7 de febrero de 1.934, el matemático holandés van Schouten dio dos conferencias cuyo título era precisamente esta pregunta: ¿qué es la geometría? Según cuenta

Raymond Queneau[10], van Schouten repasó las diferentes definiciones que desde Klein se han dado de geometría. Después de haber demostrado que ninguna de ellas resultaba completamente satisfactoria, decidió adoptar la de O. Veblen:

> Se llama Geometría a una rama de las matemáticas que un número suficiente de gentes competentes están de acuerdo en denominar así por razones de sentimiento y de tradición.[11]

La influencia y las implicaciones de las nuevas geometrías en la idea que el ser humano se hace de lo que es conocimiento matemático fueron imposibles de ignorar; y la ausencia inicial de aplicación empírica quedó pronto subsanada: la geometría de Riemann (elíptica) encontró su aplicación en la Teoría General de la Relatividad, pero no fue eso lo que forzó su aceptación en el mundo matemático como conocimiento legítimo sino la consistencia interna. Como consecuencia, la verdad matemática ya no podía tener como condición necesaria la deducción de teoremas mediante reglas de inferencia deductiva válidas a partir de axiomas intuitivos. La tesis clásica, demasiado fuerte, había sido modificada por otra más débil:

Tesis moderada de la verdad matemática: la deducción desde axiomas intuitivos es condición suficiente (pero no necesaria) de la verdad matemática. (Garrido, 2003; 30)

A costa de rebajar la exigencia inicial, los matemáticos ganaban versatilidad y el universo de las cosas que podían estudiar se expandía hasta un infinito antes no soñado. El precio no sería, sin embargo, pequeño: en matemáticas había que abandonar para siempre la intuición. No sólo la verdad intuitiva era no necesaria, sino que la que hemos denominado tesis moderada tampoco sería cierta: existían verdades matemáticas que no

[10] *Selon Ibicrate, le geomètre,* uno de los ensayos incluídos en Bords de Raymond Queneau (Hermann, 2009). *Selon Ibicrate le geomètre* es también el título del capítulo XXXIX del Libro VIII *Ethernité de Gestes et opinions du docteur Faustroll, pataphysicien. Roman Néo-Scientifique* (1911) de Alfred Jarry.
[11] http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/tendencias2000/yaglom/yaglom.html

eran intuitivas. Peor aún: eran profundamente anti intuitivas. La historia de la matemática a partir del siglo XIX empezará a mostrar ejemplos de descubrimientos anti intuitivos en múltiples áreas: la matemática transinfinita de Cantor, la paradoja de Tarski- Banach[12] o la existencia de conjuntos no medibles en el seno de **R** son tres ejemplos de ello.

La segunda crisis sobre el concepto de verdad matemática vendrá de hecho por ese camino. Para calibrar correctamente la magnitud del descubrimiento de grietas en el edificio de la TC es necesario entender que la matemática entera estaba ya basada completamente en la misma. La matemática no va de números: va de conjuntos. Para hacer honor a esa importancia desarrollaremos en el capítulo siguiente la historia de esa reducción que pasa por sucesivas etapas, desde las vagas intuiciones geométricas hasta la numerización del análisis, siguiendo con la fundación de cada conjunto numérico en uno más básico, para llegar a los números naturales, *los únicos creados por Dios*, según Leopold Kronecker[13], siendo el resto obra del hombre. Pues bien, la inquisitiva mente humana no se detuvo en los números naturales, sino que también estos fueron fundados en la TC, esa teoría que a inicios del siglo XX mostraba unas grietas que amenazaban con derrumbar un edificio conceptual que era orgullo de la comunidad matemática, como veremos a continuación.

[12] Dada una esfera maciza en el espacio tridimensional, existe una descomposición de la misma en un número finito de piezas disjuntas que pueden juntarse de nuevo de manera diferente para dar dos copias idénticas de la bola original.
[13] La cita de Kronecker es *"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"*, está recogida en Eric Temple Bell (1986). Men of Mathematics. Nueva York: Simon and Schuster.

4. La fundamentación de la matemática

Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto que había concebido un método nuevo para edificar casas, empezando por el techo y prosiguiendo hacia abajo hasta los cimientos.

Jonathan Swift, Los viajes de Gulliver

4.1. La aritmetización del análisis

Situémonos a principios del siglo XVIII. La física y la astronomía habían experimentado en las décadas anteriores un tremendo auge gracias a la invención del *calculus*, el cálculo diferencial e integral, nacido de las manos de Newton y Leibniz en el XVII. Los enormes servicios que prestó el *calculus* no fueron acompañados por una fundamentación rigurosa, sino todo lo contrario. Estaba basado en vagas intuiciones geométricas y en ideas de cantidades que se acercaban infinitamente a ciertos valores. Los trabajos de Newton estaban plagados de referencias a *cantidades fluentes*, *incrementos nacientes* y *magnitudes evanescentes*, sin el menor rigor en las definiciones de los mismos. Existía el cálculo infinitesimal, pero no existía una noción de límite que diera coherencia al conjunto. A pesar de ello, los réditos eran magníficos. La física newtoniana había conocido un desarrollo antes impensable, y los trabajos de matemáticos sobre todo franceses a lo largo de todo el siglo XVIII e inicios del XIX como Legendre, Leverrier, L'Hôpital, Laplace o Fourier desarrollaron extraordinariamente el *calculus* sin necesidad de una fundamentación rigurosa. Ésta vino de mano de Bolzano (1781-1848) y de Weierstrass (1815-1897).

Weierstrass enunció la primera definición de límite sin hacer referencia a *cantidades fluentes*, a tendencias infinitesimales de aproximación ni a intuiciones geométricas. Su definición, que hoy en día se estudia en las escuelas sin llegar seguramente a ser bien comprendida por alumnos, es la siguiente:

Se dice que una función f tiende a un valor l cuando x tiende a a; y se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = l$, si $(\forall \varepsilon < 0) : \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon, \forall x$ tal que $|x - a| < \delta$.

La definición, un verdadero galimatías de símbolos de difícil comprensión para los alumnos que lo ven por primera vez, es una verdadera proeza que recoge los esfuerzos de las mejores mentes de la especie para atrapar el concepto de límite de manera estática, e inaugurará una serie de definiciones genéricamente conocidas como *definiciones épsilon-delta*, de las que el cálculo infinitesimal está hoy en día lleno. Tan sólo hace referencia a dos cantidades reales, arbitrarias, ε y δ. Estas cantidades son números reales, que pueden asociarse biyectivamente con los puntos de una recta, pero que no se sabían fundamentar a su vez.

Mediante el *estilo épsilon-delta* se definieron con completo rigor límites de sucesiones, derivadas, integrales y cualquier otro concepto que necesitara el análisis. Véase, por ejemplo la importantísima definición de Cauchy-Weierstrass de continuidad de una función.

Se dice que la función f es continua en el punto ***a*** si $(\forall \varepsilon < 0) : \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \forall x$ tal que $|x - a| < \delta$.

Sin embargo los propios números reales a los que se aludía en estas definiciones quedaban sin definir. Se sabía que eran más que los racionales (expresables mediante una fracción), pues ya los pitagóricos habían demostrado que existían números, como $\sqrt{2}$, que no eran expresables mediante una fracción (ver APENDICE 2). De alguna manera entonces poco clara, en la recta real quedaba una nube de huecos cuando se rellenaba con todos los números racionales. De hecho, Cantor demostraría que todo el peso se lo llevan los irracionales. La fundamentación de los racionales (el conjunto $\mathbb{Q}$)

sobre los enteros (el conjunto $\mathcal{Z}$) no era difícil, tampoco la de los enteros sobre los naturales. Veremos a continuación muy someramente cómo se realizaron dichas fundamentaciones[14], para acometer seguidamente la fundamentación de los reales sobre los racionales, de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{Q}$.

4.2. Fundamentación de $\mathcal{Z}$ sobre $\mathcal{N}$

El conjunto de los enteros no es sino el de los naturales más sus correspondientes negativos. El ser humano estaba muy familiarizado con ellos desde que existían transacciones comerciales en las que había posesiones y deudas. El capital real era la resta de ambas; y podía ser negativa. Esto daba la idea de concebir los números enteros como un par *(a,b)* de números naturales, siendo *a-b* el valor del mismo. Naturalmente, existirían infinitas parejas de números que compartirían el mismo valor, si la resta de sus componentes era la misma. Esta idea se formaliza así:

Definimos en el conjunto de pares de números naturales $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ la siguiente relación:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \leftrightarrow a - b = c - d$$

Es muy sencillo comprobar que la relación así definida es una relación de equivalencia, que dividirá al conjunto $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ en clases de equivalencia. Dentro de cada clase de equivalencia todos los pares tendrán el mismo valor de la diferencia de sus componentes, y por lo tanto todos ellos representarán al mismo número entero (tendrá el mismo dinero quien tiene un cash de 100 y debe 50 que quien tiene un cash de 150 y debe 100).

[14] Obviaremos el hecho de que no es suficiente fundamentar los conjuntos numéricos, sino también sus operaciones internas suma y producto, estas fundamentaciones no ofrecen mayor dificultad y se pueden ver en cualquier manual al uso.

Por lo tanto, definimos el conjunto $\mathcal{Z}$ como el conjunto cociente (el conjunto de clases de equivalencia) de $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ respecto a la relación citada y tenemos el problema solucionado. En cada clase de equivalencia podemos tomar uno de los pares como representante canónico: el que tenga una de las dos componentes igual a 0. Así, los elementos de $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ (10,8), (9,7), (5,3) y (2,0) pertenecen a la misma clase, representada por el último de ellos, (2,0), que denotaremos como +2; y los elementos de $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ (8,10), (7,9), (3,5) y (0,2) pertenecen a la misma clase, representada por el último de ellos, (0,2), que denotaremos como (-2).

4.3. Fundamentación de $\mathcal{Q}$ sobre $\mathcal{Z}$

El proceso es muy similar al anterior, basta tener en cuenta que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$. Así pues, en el conjunto de pares de enteros $\mathcal{Z}$ x $\mathcal{Z}$ definiremos la siguiente relación:

$$(a,b)R(c,d) \leftrightarrow ad = bc$$

y tras comprobar (trivialmente) que se trata de una relación de equivalencia, veremos que los elementos de cada clase reflejan al mismo número racional, luego definiremos el conjunto $\mathcal{Q}$ como el conjunto cociente (conjunto de clases de equivalencia) de $\mathcal{Z}$ x $\mathcal{Z}$ respecto de la relación anterior. En este caso, los elementos de $\mathcal{N}$ x $\mathcal{N}$ (12,8), (6,4), (3,2) pertenecen a la misma clase y expresan de tres maneras diferentes al mismo número racional, que en su forma irreducible se expresa como (3,2), o en la notación a la que estamos acostumbrados, $\frac{3}{2}$.

4.4. Fundamentación de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{Q}$

Como ya se ha adelantado, desde muy antiguo se sabía que los números racionales no eran suficientes; que había huecos entre ellos que no podían ser rellenados de modo alguno conocido. Los pitagóricos demostraron que $\sqrt{2}$ no podía ser expresado mediante un número racional, en una sencilla demostración atribuida a Hipaso de Metaponto (ver APENDICE 2).

Cantor (1845-1918) y Dedekind (1831-1916) fueron los autores de dicha fundamentación, de forma independiente. Cada uno presentó la suya, son diferentes y utilizan diferentes herramientas. Ambas son de extraordinaria belleza, sobre todo la de Cantor. Veremos ambas.

4.4.1. Las cortaduras de Dedekind (1872)

Dedekind partió de la biyección obvia entre $\mathcal{R}$ y los puntos de la recta. Dado que $\mathcal{Q}$ era un conjunto "ralo", que tenía huecos correspondientes a los números irracionales, los números reales al completo evocaban la idea de continuidad en la recta. Si consideráramos una partición de $\mathcal{Q}$ en dos conjuntos, A y B tales que todo número de A fuera menor que cualquier número de B, debería haber un número, $\boldsymbol{\alpha}$ que efectuara el corte el $\mathcal{Q}$, dejando A a la izquierda y B a la derecha. En esas condiciones, diremos que A es un corte de Q. La definición de un número real utilizando cortes de Dedekind es:

α es un número real, si $\alpha \equiv A_\alpha \subset \mathrm{Q}$ es un corte de Dedekind, definido por tres propiedades:

1. $A_\alpha \neq \emptyset$
2. $A_\alpha \neq Q$
3. $\forall y \in Q\colon (x \in A_\alpha)\hat{}(y < x) \rightarrow y \in A_\alpha$

En tales condiciones necesariamente existirá un número real $\boldsymbol{\alpha}$ que haga que la definición de corte anterior equivalga a esta otra:

$$A = \{q \in Q \mid q < \alpha\}$$

Y podrían ocurrir dos cosas:

1. Que A tuviera un elemento máximo. En tal caso el número $\boldsymbol{\alpha}$ del corte sería racional.
2. Que A no tuviera un elemento máximo, en cuyo caso $\boldsymbol{\alpha}$ sería irracional.

En ambos casos se podía definir el punto de cortadura como el segmento o subconjunto de $\boldsymbol{q}$ formado por todos los números racionales menores que el punto de cortadura. La idea de Dedekind fue la de asociar cada número real a cada corte posible de este tipo en el conjunto Q. Así, un número real se correspondería con el conjunto de todos los números racionales menores que el punto de corte. A modo de ejemplo, el irracional $\sqrt{2}$ será definido como el conjunto de racionales siguiente:

$$\sqrt{2} \equiv_{DEF} \{x \in Q \mid (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}$$

4.4.2. La construcción de Cantor

Cantor partió de la idea de sucesiones de números racionales. Algunas sucesiones convergían a un valor racional, por ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0. La definición de sucesión convergente en Q (debida a Cauchy) era la siguiente:

Se dice que la sucesión (a_n) converge a un $q \in Q$ (o que tiene por límite q) si

$$(\forall \varepsilon > 0): \exists n_0 \; tq \; |a_n - q| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Cuando tal cosa ocurra, diremos que la sucesión tiene por límite al racional q, y lo escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = q$. Esto requiere una mínima explicación: sea cual sea el valor de ε escogido, por muy pequeño que sea, avanzando suficientemente en los términos de la sucesión, encontraremos uno, (n_0) a partir del cual todos los demás están a menor distancia de q que dicho ε. Sin embargo, existían sucesiones de racionales que convergían a valores no racionales. Para ellos no había tal $q \in Q$ que fuera el límite de la sucesión: era necesario unificar el concepto de sucesiones que convergían hacia algún valor (racional o irracional) y no se dispersaban hacia infinito. Para ello Cauchy ideó la definición que se conoce como *sucesión de Cauchy* en su honor:

Una sucesión (a_n) es de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0){:}\ \exists n_0\ tq\ \left|a_p - a_q\right| < \varepsilon;\ \forall p, q \geq n_0$$

Es decir, ahora ya no exigimos que la distancia al límite sea menor que un valor prefijado, pues a priori dicho valor puede no pertenecer a $\boldsymbol{Q}$, y por lo tanto no estamos (aún) legitimados para mencionarlo; pero lo que sí podemos hacer es estipular que a partir de un elemento de la sucesión n_0, que dependerá del valor de ε elegido, dos miembros cualesquiera estarán a menor distancia entre sí que dicho ε. Es evidente que toda sucesión convergente es de Cauchy, aunque la recíproca no sea cierta.

Pues bien, dado que las sucesiones de Cauchy son precisamente las que atrapan a los números reales (sean o no racionales), se trata de definir una relación de equivalencia en el conjunto de todas las posibles sucesiones de Cauchy de números racionales, y fijarnos en el conjunto cociente bajo esa relación de equivalencia. No podemos definir la relación “converger al mismo número real” para tomar a continuación la clase de equivalencia así formada como el propio número real, porque los tenemos aún sin definir, de modo que Cantor se apoyó en la sucesión que converge al cero: denominó $\boldsymbol{I}$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy que convergían a 0, y definió la siguiente relación de equivalencia entre sucesiones:

$$(a_n)\ R\ (b_n) \leftrightarrow (a_n - b_n)\ \in \boldsymbol{I}$$

Con ello se aseguraba que para que dos sucesiones estuvieran relacionadas por la relación R bastaría que convergieran al mismo valor, esté éste incluido en $\boldsymbol{Q}$ o, sin necesidad de mencionar en momento alguno a ningún número real no racional.

Tan sólo quedaba definir el conjunto de los números reales, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, como el conjunto cociente de dichas clases de equivalencia. Con poco trabajo adicional se podía demostrar que dicho conjunto cumplía todas las propiedades deseables del conjunto de los reales (básicamente: que se trata de un cuerpo ordenado, arquimediano y completo[15]), y que era único salvo isomorfismo. Con esta maravillosa construcción (o con la análoga de Dedekind) quedaba por fin fundado el análisis sobre la teoría de los números, es lo que se conoce como la aritmetización del análisis.

4.5. La fundamentación de $\boldsymbol{N}$

Estando ya rigurosa y satisfactoriamente fundamentado el cálculo sobre $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sobre $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}$ sobre $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{Z}$ sobre $\boldsymbol{N}$, quedaba pendiente la fundamentación de los naturales.

A partir de mediados del XIX la fundamentación de la matemática desciende hasta los números naturales. El propio nombre de *naturales* remite a la utilidad de los mismos para contar vacas, cerdos y alcachofas. El número natural parecía ser la estructura primordial alrededor de la que orbita toda la matemática. La matemática del XIX era un tetraedro conceptual cuyas caras eran la aritmética o teoría de números, la geometría, el álgebra (teoría de ecuaciones) y el análisis (real o complejo). Todas estas disciplinas estaban ya enfocadas numéricamente. Las propiedades de los naturales parecen, en una primera mirada descuidada, evidentes y sin necesidad de justificación alguna, pero la realidad es muy otra. Esa sensación proviene del uso intuitivo que los humanos

[15]Un cuerpo K es ordenado cuando hay definido en él un orden total (ver APÉNDICE 1) compatible con las operaciones del cuerpo.
Un cuerpo K es arquimediano si para todo $\varepsilon > 0$ de K existe un natural n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$.
Un cuerpo K es completo si toda sucesión de Cauchy de elementos de K converge a un elemento de K.

hacemos continuamente de las operaciones elementales con ellos, y la realidad es que todos esos resultados pseudoevidentes son realmente teoremas que se deducen de principios anteriores. Esos principios fueron enunciados por Peano y Dedekind en 1890, y se conocen como los axiomas de Peano. Sobre unas bases axiomáticas mínimas se podían construir los números naturales y se podían demostrar todas sus propiedades conocidas[16]. Sea como fue, parecía intuitivo que fuesen los naturales la base de toda la matemática: todas las civilizaciones humanas, incluso las ágrafas poseen métodos para contar[17]. El conteo con los naturales parece ser tan *natural* como el propio nombre que les damos a estos números. No obstante debemos advertir que la axiomática de Peano no será la fundamentación rigurosa que estamos buscando, sino un paso previo (tanto conceptual como cronológicamente). El mérito de Peano fue axiomatizar de forma intuitiva las intuiciones que todos tenemos sobre lo que es un número natural.

4.5.1. Los axiomas de Peano

Un sistema de números naturales es un par (N,s) formado por un conjunto N y una aplicación $s: N \to N$ que verifican las siguientes propiedades:

1. s es una aplicación inyectiva. (Esto es: $s(n) = s(m) \Leftrightarrow s = m$)
2. Existe un único elemento $1 \in N$ tal que $(\forall n \in N) = s(n) \neq 1$
3. Si un subconjunto U de N verifica

$$1 \in U$$
$$n \in U \to s(n) \in U$$

[16] Las extensión teórica de la capacidad de los sistemas axiomáticos hasta la totalidad de propiedades, conocidas o no, no quedó zanjada hasta que Gödel lo hizo de forma negativa cincuenta años más tarde, pero esto de momento era completamente desconocido.

[17] Esta universalidad absoluta está en entredicho con el estudio de ciertas tribus amazónicas como los Pirahã de Brasil, que no saben contar ni tienen estructuras recursivas en su idioma. Aunque sea así, cosa que el autor de este trabajo duda, y dada la necesaria conexión filogenérica de los Pirahã con las demás etnias amerindias, consideraremos tal ausencia como una característica secundaria, adquirida (si es que podemos aplicar el participio "adquirido" a un olvido, a una dejación).

entonces $\mathcal{U} = \mathcal{N}$

La aplicación *s* hace corresponder a cada elemento su siguiente; siendo el 1 el único que no es siguiente de nadie. El axioma 3 se puede enunciar de otras maneras, haciendo referencia a una propiedad P, que si es cumplida por el 1, y siempre que se verifique que $Pm \Rightarrow Ps(m)$, entonces se cumple para todo n de N. Es el llamado *Principio de Inducción.*

A partir de estos axiomas Peano definió la suma de números naturales, y el producto, y pudo demostrar una a una muchas propiedades conocidas de los números naturales desde la prehistoria, hasta las más recientes[18].

4.5.2. Primera aproximación a la reducción de N a la TC

El siguiente paso, verdaderamente revolucionario, fue descender aún más y fundar la aritmética de los naturales en la TC. Cuando se logró se entendió que la matemática no trataba de números, sino de entidades abstractas aún más primigenias: los conjuntos. No es difícil advertir que contar supone un modo de medir, y que medir es comparar el tamaño (longitud, peso, superficie) de un objeto con otro que tenemos como patrón. En el conteo el patrón lo da el conjunto N y la medida es una biyección que establecemos entre los elementos del conjunto a contar y los elementos de un subconjunto de N, {1,2,...,k}. Cuando lo hayamos conseguido diremos que el conjunto a medir tiene k elementos.

Así pues, el propio hecho de contar supone en rigor establecer operaciones conjuntistas entre conjuntos. Quedaban los elementos del propio conjunto $\mathcal{N}$ como piedra angular de

[18] Esto no ha seguido siendo así. Por un lado se resisten conjeturas como la de Goldbach (todo par es suma de dos primos); y alguna afirmación, como la convergencia a cero de las sucesiones de Goodstein, se ha demostrado cierta y a la vez inasequible a los axiomas de Peano. Es decir: existen afirmaciones ciertas para los números naturales que no son demostrables dentro de la axiomática de Peano. Gödel ya lo había asegurado, aunque se conocen muy pocas proposiciones de este tipo.

todo el edificio, ellos mismos debían ser construidos sobre bases conjuntistas. La reducción del número natural a conjuntos estaba llamando a la puerta. Sobre los conjuntos teníamos un acercamiento intuitivo, que debería ser suficiente, pues no podíamos basarlo a su vez en conceptos anteriores, al ser él el concepto que queríamos que fuera primigenio: un conjunto es una colección de objetos bien determinados.

"Bien determinados" significa que no tenemos dudas de si un objeto pertenece o no al mismo, sea porque tenemos el listado completo de sus objetos constituyentes (dar el conjunto por extensión), o porque tenemos una propiedad P que la cumplen sus elementos, y sólo ellos.

Una estrategia extraordinariamente fecunda en matemáticas es la de definir una relación de equivalencia en un conjunto y estudiar el conjunto de las clases de equivalencia (conjunto cociente) generadas por dicha relación. Lo hemos visto en la reducción de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{Q}$, de $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Z}$ y de $\mathcal{Z}$ a $\mathcal{N}$. En el fondo esta estrategia es enormemente inteligente: basar un conjunto complejo en otro más simple exige añadir algo que dé cuenta exacta de dicha complejidad. Esto se realiza en dos fases: en una primera "complicamos a lo grande" el conjunto de partida: considerados el producto cartesiano del conjunto por sí mismo, o consideramos el conjunto de todas las sucesiones de elementos suyos, como se vio en las construcciones de $\mathcal{R}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Z}$. El cedazo que aplicamos a continuación en la segunda fase para capturar exactamente la complejidad que deseamos y no más consiste en definir una relación de equivalencia en el seno del conjunto engrosado, de manera que aquellos elementos que, pese a ser diferentes en dicho conjunto, "debieran ser iguales" en virtud de la reducción que deseamos hacer, estén relacionados. Hecho esto, nos fijamos en el conjunto cociente de las clases de equivalencia generadas y tomamos un representante canónico de cada clase como ejemplar del elemento en cuestión.

Una primera reducción de los números a conjuntos se realizó así: se consideró el conjunto de todos los conjuntos, denominado conjunto Universal $\mathcal{U}$. Evidentemente este conjunto es el mayor de los posibles, es un conjunto excesivo para nuestros fines. Si queremos basar los números naturales (que sirven para contar, no lo olvidemos) en una

TC, no podemos contar previamente nada, sólo tenemos el conjunto de todos los conjuntos. Pero hay una operación que sí podemos hacer sin necesidad de contar, y es emparejar elementos de dos conjuntos. Cuando lo intentamos, a veces es posible emparejar todos los elementos de los dos conjuntos, y a veces no lo es. Cuando lo es, diremos que hemos establecido una biyección entre ellos. Una biyección es un tipo de aplicación, una aplicación es un tipo de correspondencia, una correspondencia es relación; y una relación es un tipo de subconjunto de un producto cartesiano, el cual es a su vez una operación conjuntística (ver APÉNDICE 1).

Así, sin salirnos de las operaciones exclusivamente conjuntísticas podemos definir ahora una relación de equivalencia entre los conjuntos de $\mathcal{U}$: Dos conjuntos están relacionados si existe una biyección entre ambos. Nada cuesta comprobar que esta relación tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, con lo que es una equivalencia, y sus clases de equivalencia reúnen a todos los conjuntos de igual número de elementos, sin necesidad de ser contados. Hay una clase de equivalencia que contiene sólo el conjunto vacío (no puede haber dos conjuntos vacíos, porque dos conjuntos son diferentes si y sólo si no tienen exactamente los mismos elementos). Llamaremos "cero", y denotaremos 0, a dicha clase.

Sería tentador continuar diciendo que llamaremos "uno", y escribiremos 1, a la clase de todos los conjuntos de un elemento, y así sucesivamente. Pero no podemos hacerlo por la sencilla razón de que estaríamos introduciendo en la definición el elemento definido. Debemos definir 1,2,3, etc. sin hacer uso previo de 1,2,3... Incluso el cero lo hemos definido de un modo no riguroso pues hacemos uso de la propiedad de no tener elementos, que es la propiedad *tener cero elementos*. ¿Cómo salir de este atolladero?

La solución a este enigma nos la proporciona la idea subyacente a los propios axiomas de Peano que queremos convertir en teoremas y destronar de su posición de axiomas primigenios: nos bastaría definir el inicio, el cero, el conjunto vacío, y definir una operación *siguiente*. Si lo conseguimos, tendremos la lista de los representantes canónicos de cada una de las clases de equivalencia, y de hecho las propias clases serán prescindibles, pues ya habremos conseguido nuestro propósito.

Pero el modo riguroso de definir el cero necesita hacer uso de uno de los axiomas básicos de la TC, por lo que será necesario pasar brevemente por ello.

4.5.3. Los axiomas de la TC

La TC parte con una formulación intuitiva, realizada por Cantor, que dio origen tanto a sólidos resultados como a las paradojas de las que hablaremos más adelante. Fueron los esfuerzos de Zermelo (1871-1953) los que consiguieron una TC depurada. En origen, Cantor partía de dos axiomas: el axioma de formación (AF) y el axioma de igualdad (AI). Puede ser un ejercicio interesante esforzarse por entender que las secuencias de símbolos siguientes reflejan exactamente lo que más abajo se explica:

$$AF : \forall A(x) \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow A(x))$$
$$AI : \forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

El primero afirma que dada una *propiedad bien definida* A existe al menos un conjunto que está formado por aquellos elementos que poseen dicha propiedad. Más rigurosamente: dada una fórmula con una variable libre A(x), existirá al menos un conjunto ***y*** cuyos elementos son aquellos ***x*** que hacen verdadera la proposición A(x); esto es: la proposición "***x*** tiene la propiedad A".

El segundo afirma que dos conjuntos x, y son el mismo conjunto si constan de los mismos elementos. Es otra forma de postular que esencialmente un conjunto es su extensión y nada más.

En necesario advertir que si lo que se pretende es una fundamentación de la matemática no se permitirá en la descripción de A nada más que aquellas herramientas legítimas en este estadio inicial de la teoría para no caer en argumentos circulares ni peticiones de principio. Es decir: en este estadio inicial de la teoría, para definir A sólo podemos utilizar:

1. Las conectivas lógicas,

2. Los cuantificadores existencial y universal de la lógica formal

3. Los conceptos de igualdad y pertenencia de nuestra incipiente TC,

4. Variables libres ***x***, ***y***,...

Así las cosas, en estos momentos incipientes de la teoría, y hasta tener bien fundados conceptos adicionales, sólo admitiremos como descripciones legítimas de *A(x)* fórmulas como las siguientes: $x = x$, $x \in x$, $\neg(x \in x)$, etc. Según vayamos describiendo correctamente conjuntos concretos, podremos nombrarlos *a,b,...* y hacer con ellos descripciones precisas del tipo $x = a$, $a \in b$, etc. Es importante hacer notar que una descripción precisa *A(x)* puede hacer uso de más de una variable (en forma A(x,t)) siempre y cuando la variable auxiliar t no sea una variable libre sino ligada por un cuantificador. Valgan los siguientes ejemplos:

$\forall t(t \in y \Leftrightarrow A(t, y))$ es una descripción del tipo A(y), porque la variable t es una variable muda, al estar ligada por el cuantificador.

$\forall t(t \in y \Leftrightarrow A(t, u))$ no es una descripción del tipo A(y), porque la variable t es una variable muda, al estar ligada por el cuantificador, pero no la variable u, que está libre como la y.

Ahora estamos en condiciones de definir varios importantes conjuntos (cosa que hasta el momento no hemos hecho aún).

Los axiomas AI y AF nos dan cuenta respectivamente de la existencia y de la unicidad de ciertos conjuntos, dadas descripciones precisas *A(x)* . La unicidad proviene del hecho de que si hubiera dos conjuntos cuyos elementos, y sólo ellos hicieran verdadera la descripción A(x), entonces ambos conjuntos tendrían los mismos elementos, y por lo tanto serían el mismo conjunto. Existencia y unicidad es todo lo que necesitamos para definir rigurosamente un conjunto. Con estas herramientas, definimos:

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

Estamos legitimados a tal definición pues por el AF: $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \neq x)$, al ser $(x \neq x)$ una descripción precisa. Ahora bien, como (x=x) es una necesidad lógica, su negación es una contradicción por tanto no hay un x que lo cumpla. Así, sin necesidad de recurrir al concepto de cero hemos encontrado un conjunto bien definido que no tiene elementos. Además, este conjunto es único en virtud de AI. Lo llamaremos conjunto vacío y lo denotaremos Ø.

De la misma manera podemos definir el conjunto universal $\mathcal{U} = \{x \mid x = x\}$. Dado que todo conjunto es igual a sí mismo, $\mathcal{U}$ es el conjunto de todos los conjuntos.

Si tuviéramos dos conjuntos previamente bien definidos, *a* y *b*, la expresión $(x = a) \vee (x = b)$ es una descripción precisa, que nos servirá para definir el concepto de *par no ordenado* de dos conjuntos.

Si *a* y *b* son dos conjuntos, entonces $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = b))$, y además será único. Dicho único *y* es el conjunto cuyos elementos son precisamente los conjuntos *a* y *b*. Será llamado conjunto par no ordenado de *a* y *b*.

Esto nos habilita a construir conjuntos diversos a partir de conjuntos previos. En particular, como existe {}, existen los conjuntos { {} }, { { {} } }, { { { {} } } } etc, como se comprueba tan sólo con hacer tanto *a* como *b* iguales a {} y sucesivos. Todos estos conjuntos son unitarios, es decir, tienen un elemento.

Además, dado que existe ∅ = {} y { {} }, también existirá el conjunto { {} , { {} }}, que ya no es unitario, y siguiendo proceso podremos construir legítimamente conjuntos como { {}, { {} }, { {} , { {} }}}, de tres elementos, etc.

No necesitamos más para definir la unión de dos conjuntos previos. La construcción rigurosa, dados dos conjuntos previos *a* y *b*, es sencilla utilizando AF y AI, que nos aseguran la existencia y unicidad del conjunto unión a partir del descripción definida $(x \in a) \vee (x \in b)$. Con este arsenal podremos construir más y más conjuntos de una forma absolutamente rigurosa. Aunque no se hará aquí, también es sencillo definir la gran unión de conjuntos, extrapolación del concepto de unión de dos conjuntos a la unión de una familia arbitraria de conjuntos, familia que puede ser finita, infinita numerable o incluso infinita no numerable.

4.5.4. La construcción rigurosa de $\mathcal{N}$ a partir de la TC.

Es tentador considerar el número *n* como el conjunto de todos los conjuntos de *n* elementos, pero hemos visto que eso no es lícito por su evidente circularidad. No podríamos hacer referencia al número *n* antes de definirlo. Afortunadamente ahora poseemos las herramientas de la TC justas y necesarias para hacerlo correctamente. El conjunto $\mathcal{U}$ como vimos, permite definir una relación de biyección en su seno quedando todos los conjuntos agrupados en clases de equivalencia. Dentro de cada clase, todos los conjuntos admiten biyecciones entre sí, de modo que todos tienen los mismos elementos. Sin embargo, no sabemos nombrarlos ni definirlos, necesitamos mecanizar la construcción de un representante canónico de cada una de dichas clases de equivalencia. Pero para esto ya tenemos todas las herramientas disponibles, partiendo del conjunto vacío que ya tenemos bien definido.

Efectivamente, ∅ = $\{x \mid x \neq x\}$ es el representante (y en este caso único elemento) de la clase de conjuntos que no tienen elementos, definido sin utilizar el concepto del cero en ningún momento. Ahora llamaremos "0" a dicho conjunto.

$$0 \equiv_{DEF} \varnothing$$

Por el teorema de existencia y unicidad del par no ordenado, dados dos conjuntos previos a y b, haciendo a=b= {}, construimos en conjunto $\{\varnothing\} = \{\{\ \}\}$, que ya no es un conjunto vacío, sino que es un conjunto que tiene un elemento: el conjunto vacío. Lo denominaremos el *unitario* de {}. En realidad no hemos hecho uso previo del concepto de "uno", a pesar de que nos sea imposible dejar de pensar que este conjunto sólo tiene un elemento, dado nuestro conocimiento previo y mundano de "uno", pero lo crucial es que no hemos hecho uso alguno de tal intuición. Y ahora, dados ambos conjuntos, por el teorema de existencia y unicidad del par no ordenado, construiremos el conjunto { {}, { {} }}, que por el AI es único. Esto nos da pie a definir el sucesor de un conjunto dado a del siguiente modo:

$$s(a) = a \cup \{a\} = \{x \mid x \in a \vee x = a\}$$

Este sucesor tiene todos los elementos de *a*, y uno añadido que no coincide con ninguno de los anteriores: el propio *a* como elemento. Así pues, hemos dado con un método para construir un conjunto con un elemento más que otro dado, proceso que podemos repetir indefinidamente. Si partimos del que hemos denominado $0 \equiv_{DEF} \{\ \}$, definimos a continuación:

$$
\begin{aligned}
&1 \equiv_{DEF} s(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} \\
&2 \equiv_{DEF} s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0.1\} \\
&3 \equiv_{DEF} s(2) = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} \\
&\ldots \\
&n \equiv_{DEF} s(n-1) = \ldots = \{0,1,2,\ldots,(n-1)\}
\end{aligned}
$$

Con esta operación *sucesor*, partiendo del vacío construimos los números naturales 0,1,2,...

Pero aún no tenemos todas las herramientas necesarias para construir el conjunto de los números naturales tal y como emana de los axiomas de Peano. Lo que tenemos es la construcción de los *n* primeros de ellos, para todo *n*. Asimismo, coinciden con los cardinales, que miden los tamaños de los conjuntos finitos. El conjunto 4={0,1,2,3} se puede biyectar con cualquier conjunto de tantos elementos como él, que llamamos a partir de ahora "*cuatro*". Por ese motivo elegiremos a dicho conjunto como el representante canónico de su clase de equivalencia.

También, dado que cada conjunto es la colección de todos los naturales menores que él mismo (con la relación de orden derivada de la inclusión conjuntista), los conjuntos 0,1,2... son los ordinales finitos. El procedimiento constructivo anterior asegura que tenemos un buen orden (ver APÉNDICE 1). Es importante advertir que todo elemento de cualquiera de los conjuntos así generados, además de elemento es subconjunto suyo. 4={0,1,2,3} tiene a 0,1,2 y 3 como elementos, pero 3={0,1,2}; 2={0,1} y 1={0}, además son subconjuntos de 4.

4.5.5. Conjuntos infinitos

El conjunto de los naturales está formado por el cero y el sucesor de cualquiera de sus elementos. Es lo que se llama un Conjunto de Sucesores (CS). Ser un CS es una forma válida de propiedad bien definida de conjuntos. Para expresar que un conjunto x es un CS lo haremos así: CSx. La formalización de este concepto queda como sigue:

$$\forall \mathrm{z} : CSz \Leftrightarrow_{DEF} \varnothing \in \mathrm{z} \wedge \forall \mathrm{u}\big(\mathrm{u} \in \mathrm{z} \rightarrow \mathrm{s(u)} \in \mathrm{z}\big)$$

Evidentemente todo z que cumpla la definición contiene en su seno a todos los naturales (por contener al vacío y a todos sus sucesores), pero puede contener además a otros elementos que nada tienen que ver con los naturales. Por ello el conjunto de los naturales será la intersección de todos los conjuntos de sucesores existentes. Así:

$$w \equiv_{DEF} \{x \mid \forall z(CSz \to x \in z)\}$$

El conjunto w así definido es el conjunto de los naturales, w = {0,1,2...}. Con estas herramientas podemos demostrar fácilmente que los axiomas de Peano se cumplen para el conjunto w:

1. El cero de Peano es aquí el {} conjuntista

2. La operación "siguiente" es la definida más arriba para sucesor de un conjunto dado.

3. Todo número natural n es asimilado al conjunto de los naturales menores que él $n \equiv_{DEF} s(n-1) = ... = \{0,1,2,...,(n-1)\}$

4. Todo n es sucesor de alguien excepto el 0

5. Toda propiedad A(x) que se verifique para x=0 y sea tal que si se verifica para un x, entonces se verifica para su siguiente, es una propiedad que se verifica para todo n.

Así queda demostrado que todas las propiedades de las entidades generadas por la axiomática de Peano se cumplen para las entidades generadas por los axiomas conjuntistas, y dada la identidad de los indiscernibles, que ambos conjuntos de entidades son el mismo. Con ello se completa de forma magnífica la reducción de la aritmética (y de hecho la matemática entera) a la TC. Ahora debe entenderse en toda su magnitud la importancia del descubrimiento de contradicciones de apariencia irresoluble en el seno de la TC. De ello hablamos en el siguiente capítulo.

5. La segunda crisis: paradojas en la TC

La TC, tal y como fuera enunciada por Cantor, era muy intuitiva y poco a poco iba siendo utilizada para fundamentar la matemática en su totalidad. Posteriormente fue re-formalizada y matizada por Frege. Sin embargo, la aparición de contradicciones en su seno supuso la segunda gran quiebra de confianza en la tesis clásica de la verdad matemática.

> La tesis clásica de la verdad matemática, en la parte que aún se mantenía (la deducción desde axiomas intuitivos es suficiente para la verdad matemática) resulta totalmente afectada. Pues las contradicciones o falsedades lógicas no pueden ser verdades en ningún modo ni, por tanto, verdades matemáticas. (Garrido, 2003)

Repasaremos a continuación las paradojas[19] más importantes presentando versiones breves de las mismas.

5.1. Paradoja de Burali-Forti

Los ordinales de Cantor generalizaban la noción de números naturales y la extrapolaban a dominios infinitos. Así, si los números naturales son 0,1,2… y cada número se puede considerar como el conjunto de todos los anteriores, 2 = {0,1}, etc.; podemos llamar ω al conjunto de todos los naturales; ω = {1, 2, 3,…}, y desde ese momento tenemos por primera vez en la historia de la matemática al infinito (al infinito numerable, deberíamos precisar) como un objeto actual. Dado que todo natural tiene su siguiente, nada nos impide seguir con la lista de los ordinales infinitos más allá: $0,1,2,\dots,\omega,\omega+1,\omega+2,\dots,2\cdot\omega,2\cdot\omega+1,\dots,3\omega,\dots,\omega^2,\dots,\omega^3,\dots,\omega^\omega,\dots\omega^{\omega^\omega},\dots$ Estos ordinales sirven para “contar” conjuntos infinitos, de la misma manera que los números naturales sirven contar conjuntos finitos. Estos ordinales están bien ordenados mediante la

[19] La palabra “paradoja” suele reservarse para aquellos resultados y razonamientos que parecen contradictorios pero no lo son. En el contexto de los problemas, algunos de ellos irresolubles, encontrados en el seno de la TC, mantenemos la nomenclatura aunque no sea estrictamente correcta, en aras del uso habitual y muy consolidado en la literatura técnica sobre el asunto.

relación de inclusión. Dado que cada ordinal es idénticamente igual al conjunto de todos los ordinales inferiores a él, para todo par de ordinales a,b, se cumple que $a < b \Leftrightarrow a \subset b$.

Dado que en la teoría de Cantor tiene perfecto sentido contar todos los números naturales, y el resultado es un ordinal más, el que hemos denominado ordinal ω, de la misma manera tendrá sentido considerar el ordinal Ω que resulta de contar todos los ordinales. Ahora bien, por una parte, podía probarse que todo ordinal tiene un siguiente, luego podremos considerar el ordinal Ω + 1. Evidentemente, por ser su siguiente,

$$\Omega + 1 > \Omega \qquad (1)$$

Pero hemos dejado claro por definición que Ω es el ordinal del conjunto de todos los ordinales y siendo Ω + 1 uno de dichos ordinales, Ω + 1 deberá estar en la lista de ordinales que forman Ω, por lo que

$$\Omega + 1 \leq \Omega \qquad (2)$$

La contradicción entre (1) y (2) es lo que se conoce como paradoja (o antinomia) de Burali-Forti. Debe su nombre al matemático Cesare Burali-Forti, que la descubrió en 1897. No tiene resolución posible en el seno de la teoría de Cantor, pero sí en las teorías axiomáticas de conjuntos ZF o NBG.

5.2 La paradoja de Cantor

El propio Cantor fue uno de los primeros comentaristas de los problemas en la TC. En 1905 descubrió la paradoja que lleva su nombre, y que se deduce de la mera existencia del conjunto $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos. Sin embargo la postulación de existencia de tal conjunto emanaba directamente de la teoría, al existir una descripción precisa *A(x)* que legitima, dentro de la teoría, la definición $\mathcal{U}=\{ x \mid x = x \}$.

Esta paradoja se basa en el teorema de Cantor que afirma que la cardinalidad del conjunto de partes de todo conjunto es mayor que la del propio conjunto. Cantor lo demostró rigurosamente probando que la existencia de una aplicación sobreyectiva entre cualquier conjunto y el conjunto de sus partes llevaba indefectiblemente a una contradicción. Al no existir tal función sobreyectiva, quedaba demostrada la menor cardinalidad del conjunto original.

Así pues, aplicado al conjunto universal, tenemos que

$$\text{Card } [P(\mathcal{U})] > \text{Card } (\mathcal{U}) \quad (1)$$

Sin embargo, P($\mathcal{U}$) es un conjunto, y como tal debe estar incluido en el conjunto de todos los conjuntos. Por lo tanto, dado que la cardinalidad de un subconjunto es menor o igual que la de su conjunto de partes, tenemos que

$$\text{Card } [P(\mathcal{U})] \leq \text{Card } (\mathcal{U}) \quad (2)$$

La contradicción entre (1) y (2) es el resultado que se conoce como paradoja de Cantor.

5.3. La paradoja de Russell

En el seno de la Teoría de Conjuntos de Cantor no hay ninguna limitación para la naturaleza de los conjuntos, ni de los elementos a los que tales conjuntos pertenecen. En particular, los elementos de un conjunto pueden ser a su vez conjuntos. Eso es lo que sucede, dado un conjunto X, con el conjunto de partes, P(X). Cada elemento de P(X) es un conjunto, con la propiedad de estar incluido en X como subconjunto, propio o impropio.

Así, podremos concebir la idea de conjuntos que se contengan a sí mismos como elementos. Dado que no es el caso habitual, los llamaremos conjuntos singulares. Los conjuntos no singulares son los llamados conjuntos normales, y no se contienen a sí mismos como elementos. A modo de ejemplo, el conjunto de todos los insectos es un conjunto normal, porque dicho conjunto es un objeto abstracto, no es un insecto. Sin embargo el conjunto de todos los objetos (reales, ideales, actuales o figurados) que no son insectos se contiene a sí mismo como elemento, pues él mismo no es un insecto, al igual que cualquiera de sus elementos.

Formalizando esta idea, llamemos R al conjunto de todos los conjuntos normales:

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Nos preguntamos por la naturaleza de R. ¿Es R normal o singular?

1. Supongamos que R es normal:

$$R \notin R \Rightarrow R \notin \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow R \in \{x \mid x \in x\} \Rightarrow R \in R$$

   luego R es singular

2. Supongamos que R es singular:

$$R \in R \Rightarrow R \in \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow R \notin R$$

   luego R es normal.

Así pues, llegamos a una contradicción en ambos casos, que podemos sintetizar así:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

5.4. Paradoja de la función ***y***

Como vimos, los axiomas AF y AI eran parte basal de la TC de Cantor:

$$AF: \forall A(x) \exists y \, \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$$
$$AI: \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Según el AF, siempre que tengamos una descripción precisa *A(x)* podemos postular la existencia del conjunto de aquellos x que cumplen *A(x).* Nada impide que en la descripción precisa exista otra variable *y*, y que sea la misma *y*, cuya existencia es asegurada por el axioma. Concretamente, haciendo $A(x) = x \notin y$, el AF nos asegura la existencia del conjunto:

$$\exists y \, \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin y)$$

Pero este conjunto está caracterizado por la propiedad de que un elemento pertenece a él si y solo si no pertenece a él, lo cual es una flagrante contradicción.

5.5. Reformulando la TC

Todas estas grietas clamaban por una refundación de la TC, cosa que se efectuó desde varios frentes. Básicamente se formularon dos axiomáticas de la TC que pretendían conjurar los problemas presentados: la de Zermelo-Fraenkel (ZF) y la de Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Estas teorías axiomáticas tratan de evitar los problemas que ocasionan aquellos conjuntos de los que no podemos hablar sin que se nos presenten contradicciones peligrosas e insalvables, como el conjunto $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos. El propio Cantor, consciente de estos problemas, pretendió separar conceptualmente los "conjuntos" que no ofrecían estos problemas (y que llamó *multiplicidades consistentes*) de aquellos otros "agregados" que denominó *multiplicidades inconsistentes*. La diferencia entre ambos no estribaba, en la mente de Cantor, en el tamaño finito de unos y el infinito de otros. Ciertamente, los conjuntos finitos no ofrecían problemas, pero muchos conjuntos infinitos, tomados como un infinito actual, tampoco.

> Cuando decimos que $\mathcal{N}$ tiene menos elementos que P($\mathcal{N}$), estamos estimando el tamaño de la totalidad de los números naturales, comparándolo con el tamaño de otro conjunto. Esta afirmación no es reducible a afirmaciones sobre conjuntos finitos de números naturales, aquí estamos tratando a N como un todo, como una colección completada. Se dice entonces que hablamos de "infinito actual" (Ivorra, 2008)

La existencia de paradojas mostraba que no se podía usar alegremente esa consideración actual de todo conjunto infinito, sino que existían algunos que eran esencialmente inacabados en el sentido de que no podían ser pensados en su actualidad como una totalidad, a diferencia del conjunto $\mathcal{N}$, que no ofrecía esos problemas. Nació así la decisión de denominar conjunto tan sólo a aquellos tipos de colecciones de objetos con buenas propiedades que hacían de ellos los elementos básicos para fundamentar la matemática.

La teoría ZF evita las paradojas eliminando el axioma AF de la teoría precedente: para estar legitimado a defender la existencia de un conjunto no debería bastar una descripción precisa *A(x).* Sólo algunos conjuntos tendrán derecho a la existencia, mientras que el resto serán denominados genéricamente *Clases*. Posteriormente Bernays y John von Neumann propusieron una TA alternativa que distinguía cuidadosamente los *conjuntos* de las *clases*. Se trataba de una teoría complicada, que fue mejorada por Gödel, recibiendo en adelante el nombre del acrónimo formado por los apellidos de los tres: NBG. La teoría NBG tiene dos conceptos primigenios que como tales no define: el de *clase* y el de *pertenencia*; sin embargo el concepto de *conjunto* es derivado, y tiene definición: un conjunto es toda clase que pertenece a otra clase. Con ello quedaban excluidas las clases que tantos problemas habían proporcionado con las paradojas anteriores, como la clase de todos los conjuntos o la de todos los ordinales. Por lo demás, los axiomas de ambas teorías, ZF y NBG son bastante similares y entrar en ello sobrepasa ampliamente los propósitos de este trabajo, si bien pueden encontrarse muy concienzudamente explicados en Ivorra (2008).

Superada la crisis, la matemática siguió avanzando a paso firme a lo largo del siglo XX bastante ajena al terremoto que sacudió a sus fundamentos: los matemáticos que no se dedicaban a cuestiones muy fundamentales seguían realizando su trabajo sin mayor problema. Paralelamente, las teorías sobre la verdad (matemática o no) estaban fraguándose en las mentes de filósofos y matemáticos que en muchas ocasiones coinciden con los héroes de esta historia: los ilustres nombres de Frege, de Tarski, de Kripke, de Quine, Russel o del mismo Wittgenstein aparecen en este momento. El capítulo siguiente se dedica al acercamiento a todo ello.

II LA VERDAD

¿Qué es la verdad?

Juan, 18:38

6. Las teorías de la verdad

Como se ha mencionado en la introducción, asumimos en este trabajo la afirmación de Benacerraf[20] de que una concepción global de la verdad matemática deberá cumplir la condición de tener una teoría global previa de la verdad, matemática o no.

En una primera instancia debemos tener en cuenta que la verdad es un tipo de predicado que se predica de un sujeto. A aquellos sujetos susceptibles de unirse a tal predicado los llamaremos portadores de verdad. Así, "A es verdad" tiene sentido si y sólo si A es un portador de verdad.

Para seguir avanzando es preciso fijar algunas definiciones previas, tales como oración, enunciado y proposición.

Utilizaremos la palabra **oración** en el sentido dado por el *Diccionario Panhispánico de dudas*: estructura sintáctica constituida por un sujeto y un predicado[21]. Cuando dicha oración exprese un pensamiento completo y enuncie un hecho, afirmándolo o negándolo, a dicha oración la llamaremos **enunciado**. Así pues, los enunciados son un tipo concreto de oraciones y al igual que ellas, son entidades lingüísticas. Reservaremos el término **proposición** para referirnos al pensamiento expresado por los enunciados; pero no por todos ellos, sino por un subconjunto de enunciados: el de aquellos que no contienen elementos no referenciales. Un enunciado puede contener elementos no referenciales por varios motivos. Por ejemplo, puede contener deícticos, que apuntan a objetos o circunstancias que sólo están claros en el contexto de la proferencia[22] del enunciado, y no en todo caso; por ejemplo "este perro es negro" será a veces verdadero y a veces falso, en virtud de cuál sea el perro que está presente en cada momento.

[20] Benacerraf, P. (1973) *Mathematical Truth*, Journal of Philosophy 70, pp. 661-80. Ver la recensión sobre dicho artículo en Benacerraf, B. (2004) *La Verdad Matemática* Ágora, Papeles de filosofía, 23/2,233-253

[21] http://www.rae.es/diccionario-panhispanico-de-dudas/terminos-linguisticos

[22] La proferencia de un enunciado supone situarlo en el espacio-tiempo, y por lo tanto en un contexto determinado. Así, el enunciado "te amo", que es un enunciado-tipo y que no posee valor de verdad mientras no quede claro quién es el objeto indirecto referido por "te", se convierte en un enunciado-ejemplar que sí lo tiene. En este sentido, R. Orayen propone que los portadores de verdad son una subclase de las oraciones-caso: las oraciones -caso que son verdaderas o falsas.

Incluso puede que no haya perro alguno en el contexto, en cuyo caso se predica algo sobre nada en absoluto, como en el clásico ejemplo de “el actual rey de Francia es calvo”[23]. Vemos que la semántica es crucial a la hora de asociar un valor de verdad a un enunciado. Debemos entender unívocamente el significado de los términos que empleamos en los enunciados para poder adscribirle un valor de verdad.

Para aclarar convenientemente el concepto de Verdad es necesario entrar aún en mayores sutilezas[24]. Asumiremos para ello la teoría de Frege del significado en virtud del sentido y de la referencia.

6.1. Sentido y referencia (Frege)

Frege en su trascendental artículo *Über Sinn und Bedeutung* de 1892 distinguió entre sentido y referencia como dos componentes del significado de una expresión. Para Frege en el enunciado-tipo debe considerarse que el sentido es el pensamiento que expresa y la referencia es su valor de verdad. Debemos también diferenciar un enunciado de los usos de un enunciado. Cuando identificamos una proposición con el significado de un enunciado, la estamos identificando sólo con una parte de ese significado: el sentido. Es una imprecisión decir que a un enunciado determinado le corresponde un sentido determinado de una vez y para siempre, y con él, un valor de verdad. Por ello, Frege propone diseñar un lenguaje formal que evite las ambigüedades debidas a diferentes contextos. Así, un enunciado como "Yo estoy escribiendo ahora" debe ser sustituido por algo así como "a está escribiendo algo en t”. Con ello se puede dar cuenta de los tres usos; semántico, pragmático y psicológico para las proposiciones:

1. Respecto al uso semántico: declara a los pensamientos como portadores de verdad

[23] En este caso hay varias posibles interpretaciones diferentes, que se resumen en dos: la de Frege y la de Russell. Para Frege el enunciado no expresa un pensamiento completo ya que no existe una referencia del sujeto, y por lo tanto no es que “el actual rey de Francia es calvo” sea falso, es que ni siquiera es portador de verdad. Russell en cambio afirmará que este enunciado implica que existe un rey actual de Francia, que es único y que es calvo. Como es falso, el enunciado sería falso.

[24] En la siguiente exposición sobre las teorías de la Verdad seguiremos fielmente a Díez, 2005.

2. Respecto al uso pragmático: cada enunciado porta el valor de verdad del pensamiento que expresa.

3. Respecto al uso psicológico: siempre que no identifiquemos un deseo o una creencia con una imagen individual. Las creencias pueden servir para diferenciar proposiciones: si un hablante competente puede creer que un enunciado X expresa un pensamiento verdadero y que otro enunciado Y expresa un pensamiento falso, sin entrar en contradicción, entonces la proposición expresada por X es diferente de la proposición expresada por Y.

6.2. Análisis del significado en términos de sentido y referencia.

El sentido de una expresión cualquiera puede ser visto como la regla (una función) que se sigue para construir a partir de ella una referencia. Aplicando esta regla, podemos distinguir (Díez Martínez, A. , 2009; 34):

> 1. La proposición (el significado, el sentido de un enunciado). Es una función que va de mundos posibles a valores de verdad.
>
> 2. Los nombres propios. Su sentido es una función que va de mundos posibles a individuos.
>
> 3. Los predicados monádicos. Su sentido es una función de mundos posibles a colecciones de individuos (cada colección se denomina extensión del predicado *P*, y es el conjunto de los *x* que hacen que *Px* tenga valor de verdad V)
>
> 4 Los predicados n-ádicos. Su sentido es una función de mundos posibles a n-tuplas de individuos.
>
> 5. La intensión de una expresión es una regla que determina su extensión.

En este ámbito teórico se ha propuesto definir la extensión de una proposición como la colección de mundos posibles que la hacen verdadera. Esto tendría el problema de que dos enunciados que fueran verdaderos en exactamente los mismos mundos posibles expresarían ambos la misma proposición, aunque un hablante competente sostenga que se puede creer la verdad de uno y la falsedad de otro sin caer en contradicción. Por lo tanto reconoceremos que equivalencia extensional no implica sinonimia. No debemos confundir regla con objeto. Ya lo advertía el propio Frege:

> Un concepto y su extensión no son la misma cosa pero la coincidencia en extensión es un criterio necesario y suficiente para la ocurrencia entre los conceptos de la relación correspondiente a la identidad entre los objetos, pues la identidad en el sentido propio de la palabra no tiene lugar entre conceptos.[25]

Con ello Frege está definiendo la equivalencia entre conceptos como una relación similar a la de identidad entre objetos. Entendido el concepto como una regla, podemos pensarlo como una instrucción para lograr encontrar o construir una colección de objetos (colección que puede ser unitaria o incluso nula). En definitiva, tratar de evitar la noción de significado identificando las proposiciones con oraciones-caso no es una estrategia con mucho recorrido: no podemos determinar de qué oración-tipo es una determinada oración-caso, a menos que acudamos a la noción de significado.

6.3. El concepto de verdad lógica.

Veamos la relación entre el predicado "verdad" realizado sobre un portador de verdad y el uso que se hace de ello en lógica. Nos basaremos en la reflexión de A. Diez:

> La lógica no sólo no puede prescindir de la noción de verdad, sino que explica la relación de consecuencia lógica en términos de una

[25] Frege, G.: Dr. E.G. Husserl: Philosophie del Arithmetik, Psichologische und logische Untersuchung, en Kleine Schriften, Zurich, Georr Olmes, 1990:183-4

> relación lógica necesaria, y esa necesidad está estrechamente relacionada con las nociones de verdad y validez (Diez, A., 2009; 37)

Es decir: debemos comenzar con la relación de consecuencia lógica, de la cual poseemos dos explicaciones:

> 1. La explicación semántica, de la que deriva la noción de verdad. Existe una relación de consecuencia en un sistema S entre las premisas Γ y la conclusión α cuando bajo ninguna interpretación pueden resultar verdaderas las premisas y falsa la conclusión. Diremos que la inferencia desde el conjunto de afirmaciones Γ a la afirmación α es un inferencia semánticamente válida.
>
> 2. La explicación sintáctica, de la que deriva la noción de derivabilidad. Decimos que una inferencia deductiva es sintácticamente válida (es decir, que hay una relación de consecuencia sintáctica entre las premisas Γ y la conclusión α), cuando podemos obtener o construir α a partir de Γ y los axiomas o reglas de S. Es una definición absolutamente constructiva: debemos poder construir α a partir de las premisas de Γ utilizando las reglas combinatorias o sintácticas válidas en el sistema S.

Con estas herramientas podemos definir ya la verdad lógica como un caso especial de esta validez definida para argumentos; pero sólo conseguiremos el carácter de necesidad apuntado más arriba cuando no partamos de ninguna premisa inicial que condicione la validez sintáctica o de ninguna interpretación concreta que condicione la explicación semántica. La definición será diferente según adoptemos el punto de vista semántico o sintáctico:

> α es una verdad lógica en S si es verdadera bajo toda interpretación en S (en la explicación semántica).
>
> α es una verdad lógica en S si puede ser obtenida o construida sin premisas, utilizando sólo axiomas y las reglas de S (en la postura sintáctica).

6.4. El concepto de verdad más allá de la lógica

Hasta aquí la noción lógica del significado de verdad. Ahora queremos saber qué hay en estas nociones lógicas del significado con el que usamos la expresión "es verdadero" en el lenguaje natural. Básicamente las distintas teorías parten de dos intuiciones básicas comunes:

1. Un conjunto de verdades ha de ser consistente (es decir no pueden ser verdaderas a la vez α y su negación).

2. La verdad tiene que tener algo que ver con la realidad.

Para definir cualquier tipo de verdad aparte de la verdad lógica, existen varias teorías diferentes:

6.5. Teoría de la redundancia

Esta teoría viene a decir que "es verdadero que p" significa lo mismo que p; "es falso que p" significa lo mismo que ¬p. Por lo tanto se pueden eliminar las expresiones "es verdadero" y "es falso" sin pérdida semántica. Dos objeciones se han planteado a esta teoría:

1. La expresión "es verdadero" no siempre es redundante. Un ejemplo lo tenemos en "Todo lo que dice Juan es verdadero". La forma lógica de este aserto es: Λp (Ap -> p), pero ésta es una forma incorrecta, pues el alcance del cuantificador universal es todo el paréntesis, y por lo tanto p debe ocupar el lugar de un argumento en todas sus ocurrencias, como en el caso de Ap (p es afirmado por a), pero no así en la consecuencia, donde p aparece sola. Si lo que queremos decir es que para todo p, si p es afirmado por a, entonces p es verdadero, la forma lícita será: Λp (Ap ->Bp), pero ahora no podemos prescindir del predicado "es verdadero".

2. Si el enunciado p no tiene valor de verdad definido, por contener deícticos ("este libro es blanco") o predicar algo de nada ("el mayor número primo acaba en siete"), entonces el enunciado "p es verdadero" es falso, y no es por tanto equivalente al enunciado p. En este caso ni "p es verdadero" equivale a p, ni "p es falso" equivale a ¬p.

6.6. Teorías pragmáticas

Tratan de sustituir la noción de verdad por las de utilidad y verificabilidad. Son teorías condenadas al fracaso, pues "ser verdadero" es un predicado monádico mientras que "ser útil" y "ser verificable" son diádicos. Sus puntos básicos son:

1. La verdad se deriva de la correspondencia entre las creencias y el mundo, pero se mantiene por la coherencia con otras creencias.

2. Los significados de los términos vienen dados por sus consecuencias prácticas, nuestras ideas deben conformarse con la realidad.

3. Hay una realidad independiente de las opiniones, pero el conjunto de lo que creemos verdadero viene regulado por la propiedad de la coherencia pues la adquisición de una nueva creencia exige maximizar el viejo conjunto de creencias y restaurar en su caso la consistencia.

4. Una proposición es provisionalmente verdadera si pertenece a un conjunto coherente de proposiciones. Pero verdad y coherencia no se identifican: la coherencia (y la consistencia) se predican del conjunto de proposiciones, la verdad en cambio se predica de cada una de ellas. Sólo una teoría coherentista radicalizada defenderá que la noción de verdad se puede reducir a la de coherencia. La mayor parte de los pragmatistas están de acuerdo en que la coherencia sola no basta para justificar un sistema de creencias. Lo que sí afirmarán es que la verdad se reduce a coherencia más verificabilidad.

Veamos ahora las propuestas de varios autores respecto a las teorías pragmáticas del significado:

1. Para Wittgenstein el significado de una palabra es una regla para su uso, pero las reglas no son simplemente descripciones de usos, sino indicaciones de usos correctos. Hay aquí un innegable componente normativo.

2. Kripke menciona *la paradoja del escéptico* para explicar la diferencia entre lo que a uno le parece un uso correcto y lo que es un uso correcto. Alguien usa el signo (+) para menores de 57, y extrapola su uso para todo natural, por ejemplo, "57+68 =125" un escéptico podría preguntarse:

P1: ¿Cuál es el hecho que hace correcta la última expresión?
P2: ¿Cómo reconocemos la regla seguida hasta el 57?
P3: ¿Cómo y por qué proyectamos una operación particular a casos nuevos?
P4: ¿Necesitamos una regla para interpretar una regla?

El propio Kripke responde:

R1: No hay hechos que constituyan el significado de una expresión.
R2: No se puede dar una justificación última a la regla.
R3: Una regla se aplica correctamente en el seno de una comunidad de uso mayoritario.
R4: No podemos dar una respuesta satisfactoria a la paradoja escéptica, pero podemos vivir con las consecuencias. El significado carece de condiciones de verdad, pero tiene condiciones de afirmación

3. Quine abunda en el uso comunitario con dos apuntes:

1. Las expresiones que tienden a confirmar un enunciado son aquellas que provocan en la gente, como hecho conductual, el asentimiento.

2. Aunque el significado de un enunciado no observacional es el conjunto de sus implicaciones lógicas, los enunciados individuales raramente tienen su base en experiencias confirmadoras.

6.6.1. Objeciones a las teorías pragmáticas de la verdad

1. Tomar la verdad como una consecuencia del acuerdo general es colocar el carro delante de los bueyes: es en todo caso el acuerdo general el que existe en virtud de la verdad. Si pretendemos aprehender en lo posible el concepto de verdad debemos mantener siempre clara la diferencia entre tomar algo como verdadero y ser algo verdadero.

2. Como ya denunció Russell el criterio de coherencia se reduce a la consistencia, pero aunque la consistencia es una propiedad necesaria de un conjunto de verdades, no es suficiente; un gran número de falsedades puede ser consistente, como ocurre con los cuentos de hadas infantiles o con cualquier falsedad bien urdida.

3. Estas teorías están viciadas por su circularidad: se define la verdad mediante la consistencia, pero la noción de consistencia depende de la noción de verdad.

4. Son posibles distintos sistemas máximos coherentes y mutuamente incompatibles.

5. No podemos permitirnos confundir valor de verdad con verificabilidad, pues pueden existir verdades inverificables: afirmaciones sobre dominios infinitos, contrafácticos, etc.

6. Puede ser perfectamente verdadero algo que todos creen falso. Nadie pensó jamás que la cardinalidad de un minúsculo segmento de recta fuera la misma que la de todo el plano, o incluso de un espacio n-dimensional entero hasta que George Cantor lo demostró[26].

De todo ello concluimos que nuestros usos de "es verdadero" responden realmente una noción trascendente de verdad.

6.7. Teoría de la adecuación o de la correspondencia

Esta familia de teorías fue criticada por Frege. Los defensores de la idea de correspondencia interpretan la definición de Tomás de Aquino de *verdad como adecuación del pensamiento objetivo con la cosa*, correspondencia del contenido afirmado con alguna realidad. Ello nos conduce al problema de tener que considerar la existencia de dos estados de cosas: 1. El estado de lo afirmado, y 2. El estado de lo real. De la adecuación de ambos obtendremos el resultado de verdad de lo afirmado. Pero ese resultado es a su vez una afirmación cuya verdad debe ser comprobada, motivo por el cual hemos de suponer dos nuevos estados de cosas, de las que debiéramos investigar su adecuación, lo que nos llevaría a una nueva afirmación y así sucesivamente.

Solución: decir simplemente que un enunciado afirmado es verdadero si y sólo si el estado de cosas que afirma es real. Frege protestaría ante ello, defendiendo que la verdad es una noción primitiva, indefinible, pues todo decir viene después de la verdad, una noción que no se deja analizar en términos de otras nociones más básicas. Frege insistió en la importancia de la fuerza asertiva: un enunciado que carezca de fuerza asertiva no la va a adquirir añadiéndole las palabras "es verdadero".

Al respecto de las teorías de adecuación o correspondencia son importantes las opiniones de Russell y de Wittgenstein. Ambos sostienen algo de suma importancia:

[26] *Ich sehe es, aber ich glaube es nicht* (*Lo veo y no lo creo*), escribió el propio Cantor a su amigo Dedekind en una carta fechada el 20 de junio de 1877.

que la verdad es una correspondencia estructural entre el lenguaje y el mundo: existe una relación entre las proposiciones atómicas verdaderas y disposiciones de los átomos (datos sensibles) en el mundo. Ambos autores añaden además que una correcta teoría de la verdad ha de cumplir tres condiciones:

1. Debe admitir un contrario de la verdad: la falsedad.

2. Debe dar cuenta de que la verdad es una propiedad de creencias y de afirmaciones.

3. Dicha propiedad depende de la relación entre dichas creencias o afirmaciones y las cosas exteriores a ellas.

Carnap asume la teoría de la correspondencia de Russell, puntualizando que los enunciados que se refieren a la experiencia inmediata son verificados directamente, mientras que la verdad del resto de los enunciados depende de las interrelaciones lógicas: los enunciados compuestos tienen un valor de verdad que resulta de aplicar alguna función sobre los valores de verdad de los enunciados componentes a través de operadores lógicos. No obstante este programa tropieza con dificultades como las siguientes:

1. ¿Existen hechos negativos correspondientes a proposiciones negativas?

2. ¿En qué consiste el supuesto isomorfismo entre proposiciones y hechos?

Estos dos puntos oscuros tratan de ser evitados por la teoría de Tarski de la verdad.

6.8. Teoría semántica de Tarski

La teoría tarskiana es distinta tanto de la teoría de la redundancia como de la teoría de la correspondencia. Su punto de partida es la definición aristotélica de verdad:

> decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, es falso y decir de lo que es que es y de lo que no es que no es, es verdadero. Aristóteles, Metafísica, I, 7 (1011b 26-27)

La verdad de una oración consiste en su acuerdo con la realidad. A pesar de este punto de partida conciliador, las conclusiones que saca de estas intuiciones son muy diferentes de las que defienden las teorías de la redundancia y de la correspondencia.

Para Tarski una definición aceptable de la verdad debe cumplir dos condiciones de adecuación:

1. Adecuación material. Cualquiera que afirme o que niegue p ha de estar dispuesto a afirmar o a negar "***p*** es verdadero". Es decir: una caracterización de la verdad es adecuarse a su propiedad de redundancia. "***p***" es verdadera sii ***p***

2. Adecuación formal. Una definición de verdad será formalmente adecuada si se da en un metalenguaje para un lenguaje-objeto. Lo que define, entonces, no es "ser verdadero", sino "ser verdadero en ***L***". X es verdadero sii ***p*** (donde X es un nombre de un enunciado E y ***p*** es una traducción de E).

Aunque pueda parecer que esta es una versión refinada pero en el fondo trivial de la teoría de la redundancia, no es así debido precisamente a la distinción de dos niveles de lenguaje. En uno se usan las oraciones, en el otro se mencionan para afirmar algo sobre ellas.

La propuesta tarskiana es una definición recursiva de la verdad para lenguajes formales, propuesta que parte de una asignación de valores de verdad a las proposiciones atómicas, asignación que recoge esa relación que intuitivamente reconocemos entre la verdad y la realidad. Tarski da los siguientes pasos:

1. Asignación de valores de verdad de las proposiciones atómicas (esta asignación como se ha dicho es la que liga el concepto de verdad con la realidad).

2. Basándose en los valores asignados en el punto 1., se define sucesivamente la verdad de 1. (p^q); 2. ¬ p ; 3. /\xφ(x); 4. Pa.

3. Crea un par de listas correlacionadas entre constantes individuales y conceptos

4. Crea otro par de listas correlacionadas entre letras predicativas y conceptos.

Las ventajas del método de Tarski son las siguientes:

1. Ya no tiene que comparar dos estados de cosas. No tiene que buscar el hecho Pa en la realidad, sino tomar el objeto a y ver si tiene la propiedad P.

2. Frente a los coherentistas, que ven la verdad como una relación entre enunciados, la de Tarski es una teoría semántica que hace depender la verdad de alguna relación de los enunciados con la realidad. Hay un realismo en la teoría tarskiana.

3. Tarski presenta la definición de verdad en términos de satisfacción. Más que una definición de la verdad, se trata de fijar la extensión del predicado "es verdadero" en un lenguaje artificial determinado. Lo hace en tres tiempos:

A) se determina la referencia de las constantes individuales

B) se especifican las condiciones de satisfacción de los predicados, y

C) se especifican las condiciones de verdad de cada enunciado.

En resumen, la propuesta de Tarski se condensa en cuatro afirmaciones:

1. La verdad se predica de los enunciados, que son los genuinos portadores de verdad.

2. Toda teoría adecuada de la verdad ha de establecer un metalenguaje para un lenguaje L, de manera que se define la verdad-en-L, no la verdad absoluta.

3. No hay definición de la verdad que valga para todo lenguaje.

4. La noción de verdad, para un lenguaje L, puede ser reducida a las condiciones de satisfacción y referencia.

La teoría de Tarski es la más adecuada para encarar el concepto de verdad matemática (objeto final de este trabajo). No obstante, no puede consistir en una aplicación trivial e inmediata de la citada teoría porque no tenemos a priori clara la ontología de los objetos matemáticos a los que nos referimos en los asertos matemáticos: ¿hablan las matemáticas de lo real? ¿Cuál es el nivel de existencia del número 4, de un grupo abeliano o de la sucesión de Fibonacci? Que existan diversas escuelas de pensamiento al respecto no hacen sino complicar más el asunto. De ello nos ocupamos a continuación.

7. Modelos

Trabajando con sistemas formales podemos demostrar que una determinada fórmula deriva de los axiomas del sistema, y quizás de unas premisas añadidas, sin tener en cuenta para nada la semántica de los símbolos utilizados. Esta ausencia de significado dota a los sistemas lógicos de la absoluta generalidad necesaria para acometer el estudio de la TC sin tener que definir previamente lo que es un conjunto. El motivo de no definir conjunto y pertenencia es que si lo definiéramos, deberíamos introducir otros elementos primigenios en base a los cuales definir ambos conceptos, y estaríamos en las mismas. Como hemos visto, existen axiomáticas suficientemente sutiles de la TC para verla libre de contradicciones[27], con lo que nos bastará la TC para construir la matemática entera sobre ella. Si posteriormente se encuentra una fundamentación de la TC sobre elementos aún más primitivos, la situación no variaría sustancialmente.

Sin embargo, cuando los matemáticos trabajan ante proposiciones matemáticas concretas no ven en ellas meras cadenas de símbolos como las vería un lógico puro: ven conceptos matemáticos, ven números, figuras, volúmenes, aplicaciones, funciones, nudos, grafos y espacios de dimensiones muy variadas. En suma: interpretan los elementos de las proposiciones.

Parece obvio que una interpretación es una asignación de algún tipo de objetos a los términos de las proposiciones, y que la verdad de las proposiciones tiene que estar relacionada con la satisfacción de aquello que se enuncia por parte de los objetos referidos: estamos hablando ya de objetos matemáticos y de las relaciones que existen entre los mismos, con independencia de la ontología de los mismos.

En el lenguaje formal tendremos: variables (x_i), constantes (c_j), relatores, cada uno con su rango (R_i^n sería el i-ésimo relator de rango n), funtores, cada uno con su rango (f_i^n

[27] Entiéndase en sentido laxo: verla libre de las contradicciones denunciadas por Russel, Burali-Forti o el propio Cantor. El segundo teorema de Gödel, que se verá en páginas posteriores impedirá que tengamos una prueba final de consistencia de la Teoría de Conjuntos en este sentido.

sería el *i*-ésimo funtor de rango *n*), y varios elementos especiales denominados negador, implicador, cuantificador universal y descriptor. Estrictamente no se necesitan más elementos, toda vez que el cuantificador existencial, el conjuntor y el disyuntor son construibles con los elementos dados. Las cadenas bien formadas de símbolos de $\mathcal{L}$ pueden ser de dos tipos: ***términos*** o ***fórmulas***. El sentido de tal diferencia *vendrá* dada a la postre porque los términos serán nombres de objetos y las fórmulas serán afirmaciones. La frase anterior está conjugada en futuro por motivos que se verán a continuación; de momento no deseamos hacer referencia a significados ni semántica alguna; contamos únicamente con una sintaxis de símbolos carentes de significado. Denominaremos ***término*** a toda variable, toda constante, todo funtor n-ádico dotado de sus n argumentos, o toda cadena con descriptor del tipo $|x_i\ \alpha$, donde | es el descriptor y α es una fórmula. Llamaremos ***fórmula*** a todo relator ***n***-ádico tipo R_i^n dotado de sus ***n*** argumentos, y si α y β son fórmulas, a toda expresión del tipo $\neg\alpha$, $\alpha\rightarrow\beta$ *ó* $\bigwedge x_i\ \alpha$.

Es importante repetir que no hacemos inicialmente ninguna referencia al significado de tales elementos. No tendremos semántica hasta que tengamos modelos.

7.1. Definición de modelo

Intentando relacionar el lenguaje formal $\mathcal{L}$ con el universo de objetos $\mathcal{U}$ del cual, presuntamente, estamos hablando, definiremos:

> Un modelo $\mathcal{M}$ de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ viene determinado por cuatro elementos: una colección no vacía de objetos $\mathcal{U}$, llamada Universo de $\mathcal{M}$ y tres criterios:
>
> C1. Un criterio que asocie las constantes c_i de $\mathcal{L}$ a objetos $M(c_i)$ de $\mathcal{U}$.
>
> C2. Un criterio que asocie cada relator n-ádico R_i^n de $\mathcal{L}$ con una relación n-ádica $M(R_i^n)$ en $\mathcal{M}$
>
> C3. Un criterio que asocie cada funtor n-ádico f_i^n de $\mathcal{L}$ con una función n-ádica $M(f_i^n)$ en $\mathcal{M}$

Es decir: tenemos dos sistemas uno frente a otro: por un lado, un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y por otro un $\mathcal{U}$ universo de objetos. Los objetos de $\mathcal{U}$ están estructurados de una determinada manera, mediante relaciones n-arias y mediante funciones que tienen sus argumentos (m-arios) en los objetos de $\mathcal{U}$. Si existe un criterio triple como el del recuadro, podremos decir que $\mathcal{M}$ es un modelo de $\mathcal{L}$.

Si bien la mera existencia de un modelo exige un criterio que asocie las constantes a objetos (de modo que las constantes son realmente nombres de objetos), las variables tienen más libertad. El criterio para asignar objetos a las variables es variado dentro de un modelo; y hablaremos de *valoraciones diferentes*. Una valoración ***v*** en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ sobre un modelo $\mathcal{M}$ es un criterio (una aplicación)

$$\boldsymbol{v}\text{:}\ \mathcal{L} \ni x_i \to \mathrm{v}(x_i) \in \mathcal{M}$$

que asigna a cada variable x_i de $\mathcal{L}$ un objeto $v(x_i)$ de $\mathcal{M}$.

7.2. Definición de denotación y satisfacción

Así, diremos que un término ***t*** del lenguaje $\mathcal{L}$ (a partir de ahora daremos por supuesto que estamos en un lenguaje $\mathcal{L}$, sin nombrarlo más) denota a un objeto *M(t)[v]* de $\mathcal{M}$ respecto a la valoración ***v***; y diremos que el modelo $\mathcal{M}$ satisface la fórmula α respecto a la valoración ***v***. Para evitar complicaciones de sinonimia impondremos que la aplicación ***v*** es inyectiva de modo que dos términos t_1 y t_2 no pueden nombrar el mismo objeto de $\mathcal{M}$. Cuando una fórmula sea satisfecha por un modelo M denotaremos $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha[\mathrm{v}]}$.

Aunque las definiciones rigurosas de satisfacción y denotación en un modelo son farragosas[28], sus sentidos son muy claros: si la fórmula es una relación n-ádica R_n^i el modelo $\mathcal{M}$ la satisfará cuando los n objetos $M(t_i)[v]$ de $\mathcal{M}$ denotados por los términos $(t_1,\ldots,t_n)$ implicadas con la valoración dada cumplan la relación n-ádica $M(R_i^n)$ en $\mathcal{M}$ que le corresponde al universo $\mathcal{U}$ en virtud del criterio C2. Del mismo modo, el objeto denotado por una función n-ádica con sus $\boldsymbol{n}$ argumentos $(t_1,\ldots,t_n)$ con la valoración $\boldsymbol{v}$ dada (recordemos una vez más que una tal función no es una fórmula, sino un término, y por lo tanto le corresponde un objeto de $\mathcal{U}$) coincide con el objeto que es el valor de la función n-ádica en $\mathcal{M}$ que le corresponde en virtud del criterio C3 y cuyos argumentos son los objetos de $\mathcal{U}$ denotados por las $\boldsymbol{n}$ variables argumentales t_i. Seguiríamos definiendo que una fórmula $\neg\, \boldsymbol{\alpha}$ es satisfecha por el modelo si y solo si no es el caso que $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}[\mathbf{v}]$, que $(\boldsymbol{\alpha}\rightarrow \boldsymbol{\beta})$ es satisfecha si y sólo si no $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}[\mathbf{v}]$, ó $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\beta}[\mathbf{v}]$, así sucesivamente[29].

En suma, la idea es que los términos del lenguaje denoten los objetos del modelo, y que las fórmulas del lenguaje *hablen* de los objetos de $\mathcal{U}$ y de sus propiedades, relaciones y funciones. Es de crucial importancia para nuestra idea de verdad matemática entender que aquí nace la semántica: es a partir de este momento en el que signos del lenguaje $\mathcal{L}$ adquieren un significado: en las definiciones de denotación y satisfacción atribuimos significado a esos símbolos que anteriormente tan solo tenían una sintaxis: cuando definimos (como acabamos de hacer) que "una fórmula $\neg\, \boldsymbol{\alpha}$ es satisfecha por el modelo si y solo si no es el caso que $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}[\mathbf{v}]$" es cuando el símbolo $\neg$ del lenguaje $\mathcal{L}$ es interpretado como "no". Y lo mismo se puede decir del resto de las conectivas que no hemos pormenorizado en aras de la brevedad.

---

[28] Una exposición rigurosa puede verse en https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf

[29] Podemos definir seguidamente el significado del resto de conectivas y cuantificadores del modo que cualquiera podría imaginar, por ejemplo $\mathcal{M} \vDash (\alpha\text{->}\beta)[v]$ **sii no** $\mathcal{M} \vDash \alpha[v]$ **ó** $\mathcal{M} \vDash \beta[v]$. No abundaremos en ello.

Pero lo más importante de la definición de denotación y satisfacción es que a partir de ella podemos definir el concepto de verdad.

7.3. Definición de verdad (relativa a un modelo)

Llegamos al punto crucial de nuestro recorrido por la teoría de modelos: la definición de verdad relativa a un modelo.

Una fórmula $\boldsymbol{\alpha}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$ es verdadera en un modelo $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}[\mathbf{v}]$**,** cualquiera que sea la valoración **v** de $\mathcal{L}$ en **M.** Cuando tal ocurra no hará falta referirse a valoración alguna, y denotaremos simplemente $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}$.

Una fórmula $\boldsymbol{\alpha}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$ es falsa en un modelo $\mathcal{M}$ si ninguna valoración v de L en M cumple que $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\alpha}[\mathbf{v}]$.

Si $\boldsymbol{\Gamma}$ es un conjunto de fórmulas de L, con $\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ indicaremos que todas las fórmulas de $\boldsymbol{\Gamma}$ son verdaderas en M.

De todo ello, podemos sacar las primeras conclusiones, todas ellas coherentes con el sentido intuitivo previo que tenemos de la noción de “verdad”:

1. Dado un modelo $\mathcal{M}$ para un lenguaje L una fórmula $\boldsymbol{\alpha}$ no puede ser verdadera y falsa, pues ante una valoración cualquiera v, la fórmula será o no será satisfecha.

2. Toda sentencia es verdadera o falsa en un modelo.

3. Una fórmula $\boldsymbol{\alpha}$ es verdadera en un modelo sii $\neg\boldsymbol{\alpha}$ es falsa.

4. Si $\mathcal{M} \vDash (\alpha \to \beta)$ y $\mathcal{M} \vDash \alpha$, entonces $\mathcal{M} \vDash \beta$. Efectivamente, si $\mathcal{M} \vDash (\alpha \to \beta)$ y $\mathcal{M} \vDash \alpha$; entonces para toda valoración v se cumple que $\mathcal{M} \vDash (\alpha \to \beta)[v]$ y M $\vDash \alpha[v]$, y no tenemos más que aplicar la definición de satisfacción para una valoración para obtener $\mathcal{M} \vDash \beta$.

5. $\mathcal{M} \vDash \alpha$ *sii* M $\vDash \forall x \alpha$

En particular 4. nos habilita para utilizar la regla deductiva *modus ponens* al concepto de verdad en un lenguaje L relativo a un modelo $\mathcal{M}$. Tal y como está definida, la verdad es un concepto relativo a un modelo. Existen fórmulas que serán verdaderas en unos modelos y falsas en otros, pero existirán sentencias que serán verdaderas en todo modelo, lo cual nos obliga a introducir unos conceptos adicionales:

Una fórmula **α** es **lógicamente válida** si es verdadera en todo modelo de $\mathcal{L}$. Cuando tal cosa ocurra no hará falta especificar el modelo, y lo denotaremos **⊨α**.

Una fórmula **α** es **insatisfacible** si es falsa en todo modelo de $\mathcal{L}$.

Una fórmula **α** es **satisfacible** si es verdadera en algún modelo de $\mathcal{L}$.

Una fórmula **α** es **falsable** si es falsa en algún modelo de $\mathcal{L}$.

De estas definiciones y de las anteriores caen como fruta madura ciertos resultados extremadamente convenientes:

R1: α es lógicamente válida sii ¬α es insatisfacible

R2: **α no puede ser lógicamente válida e insatisfacible.**

R3: **α** es **falsable sii** $\neg\alpha$ es satisfacible

R4: Si $\vDash (\alpha \to \beta)$ y $\vDash \alpha$, entonces $\vDash \beta$.

R5: $\vDash \alpha$ *sii* $\vDash \forall x \alpha$

En particular, R4 y R5 nos convencen de que las reglas de inferencia *modus ponens* (MP) y de *introducción del generalizador* (IG) son lógicamente válidas, esto es: que nos llevan de fórmulas lógicamente válidas a fórmulas lógicamente válidas. Concretamente, todos los axiomas de la lógica que no mencionamos por haber partido de ellos intuitivamente, tales como

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$

$$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$$

son lógicamente válidos, porque son verdaderos en todo modelo de L. Y dado que los procesos deductivos generan teoremas verdaderos a partir de axiomas verdaderos, tendremos que todos los teoremas lógicos son lógicamente válidos, como no podría ser de otro modo.

Más aún; cualquier fórmula deducible de un conjunto de fórmulas verdaderas en un modelo debe ser verdadera en dicho modelo: las consecuencias lógicas de premisas verdaderas son siempre verdaderas, y el proceso inferencial de deducción conserva la verdad: el cálculo deductivo habitual es matemáticamente aceptable (Ivorra, 2008, 87)

Dada la definición de verdad anterior, se necesita un modelo para poder hablar de ella. Aquí tiene su aplicación la teoría de la verdad de Tarski. Es de crucial importancia lo siguiente: si tenemos, dado un sistema axiomático, un conjunto de fórmulas $\mathbf{\Gamma}$ que se satisfacen en una estructura **M** dada, esa estructura constituye un modelo para el conjunto de fórmulas inicial.

Cuando tal cosa ocurre, el conjunto de axiomas inicial es consistente, pues si no lo fuera no podríamos haber encontrado un modelo que satisficiera **Γ**: recordemos la conclusión 2. de la propia definición de verdad que listábamos dos páginas atrás: toda sentencia es verdadera o falsa en un modelo. Ahora bien, nada obliga en principio a que ese modelo sea único, ni siquiera a que los diferentes modelos sean isomorfos. La categoricidad era una de las buenas propiedades que Hilbert atribuía a toda buena TA, y consiste en que salvo isomorfismo, una TA sólo tenga un modelo.

Más adelante veremos que en general no es así, y que el teorema de Löwenheim-Skolem es el culpable de ello.

Pero cuando una TA tiene un modelo (o modelos) en el que se satisfacen todos los axiomas, ocurre algo muy importante: en tal modelo (o modelos) también se satisfará necesariamente toda fórmula que se derive como teorema de los axiomas de **Γ**[30]. Por desgracia, la afirmación recíproca no es cierta: no tenemos la seguridad de que una proposición que se satisfaga en todos los modelos de un conjunto de axiomas **Γ** sea posible derivarla de dichos axiomas por deducción.

No sólo no tenemos la seguridad, sino que como veremos más adelante, los teoremas de incompletitud de Gödel nos asegurarán que existen proposiciones que serán verdaderas y no deducibles de los axiomas siempre que el sistema axiomático sea lo suficientemente rico como para dar cuenta de la aritmética.

Recapitulemos: la teoría de la verdad de Tarski, que habíamos admitido como la más idónea para hacerse cargo del concepto de verdad matemática, proclama la necesidad de

[30] Esto era muy importante cuando la única manera de demostrar la consistencia de una TA era mediante la existencia de un modelo, como ocurrió en la historia relatada en el capítulo 3 con las demostraciones de consistencia de las geometrías de Riemann y Lobachevski: hasta la invención de la metamatemática por David Hilbert no había otro modo de demostraciones de consistencia. Aunque no era tarea nada fácil, no hacía falta demostrar la satisfacción en el modelo de todo teorema de la TA, sino tan sólo de los axiomas.

establecer un metalenguaje para un lenguaje *L*, de manera que se define la verdad-en-*L*, no la verdad absoluta; y la propia verdad queda reducida a las condiciones de satisfacción t referencia. Por lo tanto las verdades lo son relativas a los modelos; pues sólo con referencia a modelos podemos hablar de satisfacción y de referencia.

Ahora bien, con anterioridad a tener una teoría de la verdad del tipo de la de Tarski, debemos saber qué podemos esperar de las teorías axiomáticas que construimos en un lenguaje L dado, qué relación existe entre las teorías y sus modelos, cuál es la capacidad real de las teorías de decidir por la verdad o falsedad de enunciados formados en su seno, y cuál es el estatus de una determinada teoría en cuanto a su consistencia interna.

Estas y otras preguntas fueron planteadas por David Hilbert en el cambio del siglo XIX al XX, y fueron parcialmente respondidas en las primeras décadas del XX, generalmente de forma muy diferente a la que hubiera sido deseable. Entramos en la tercera crisis de los fundamentos de la matemática, esta vez apuntando de lleno a la lógica.

Lo vemos en el capítulo siguiente.

III ACCESIBILIDAD A LA VERDAD

O las matemáticas son demasiado grandes para la mente humana, o la mente humana es más que una máquina. Kurt Gödel.

El logro de Kurt Gödel en la lógica moderna es singular y monumental; de hecho, es más que un monumento, es un hito que permanecerá visible en el espacio y el tiempo ... El tema de la lógica ciertamente ha cambiado por completo su naturaleza y posibilidades con el logro de Gödel . John von Neumann

No debemos creer a los que profetizan hoy con expresión filosófica y tono superior el "ignoramus et ignorabimus"[31]*. Para nosotros no hay ignorabimus [en la matemática], y en mi opinión tampoco en las ciencias naturales. Por el contrario, en lugar del necio ignorabimus, nuestro lema es: Wir müssen wissen, wir werden wissen! Debemos saberlo, ¡lo sabremos! David Hilbert*

[31] "*Ignoramos e ignoraremos*", locución latina acuñada por el fisiólogo Emil du Bois-Reymond en su obra *Über die Grenzen des Naturerkennens* (1872), en la que defiende unos nítidos límites humanos al acceso a la verdad; algo contra lo que Hilbert se posicionó mientras pudo.

8. Los límites de las teorías axiomáticas: los teoremas de incompletitud de Gödel

> *"El teorema de Gödel es una fuente inagotable de abusos intelectuales*" Sokal, A., Brickmon, J. Imposturas intelectuales

8.1. El Programa de Hilbert

Kurt Gödel publicó sus famosos teoremas de incompletitud en 1931[32]. No nacen en vacío, sino que se fraguan en medio de un magma discursivo importante que recorría el mundo matemático de medio a medio. Como hemos visto, desde finales del siglo XIX algunos resultados habían conmovido profundamente los cimientos de la matemática. George Cantor había descubierto en la década de los años 70 sorprendentes demostraciones de resultados que le hicieron exclamar: "lo veo, pero no lo creo"[33]. Hilbert tenía grandes simpatías por el trabajo de Cantor, toda vez que abría insospechadas regiones ignotas al pensamiento y a la investigación matemática. Cantor admitía procedimientos no finitistas en los razonamientos matemáticos, como el recurso al Axioma de Elección; y eso no suponía ningún problema para Hilbert[34]. Otros, como Kronecker se mostraban beligerantes en extremo con los trabajos de Cantor. Fruto de estos trabajos fueron presentadas afirmaciones extraordinarias con sus correspondientes demostraciones no finitistas. Por ejemplo, que el conjunto de los números racionales es a la vez numerable y denso en el conjunto de los reales; o que existían diversos tipos (infinitos tipos realmente) de infinito, unos más grandes que otros. Todos estos

[32] En un *paper* titulado *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, publicado con fecha 17 de noviembre de 1930, en el volumen de 1931 de Monatshefte für Mathematik.
[33] Por ejemplo: la existencia de una biyección entre los puntos de un segmento y los de todo el plano. La existencia de una biyección es la caracterización de igual potencia o cardinalidad de dos conjuntos; de donde se deducía que el tamaño del conjunto de puntos de un segmento, de toda la recta o de todo un plano (y de hecho, de todo un espacio tridimensional, o n-dimensional) es el mismo.
[34] "*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können" (Nadie debería poder expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros),* exclamó Hilbert en una conferencia titulada "On the Infinite", el 4 de junio de 1925 en Munich, en memoria de Weierstrass.

resultados no atañían a cuestiones laterales de la matemática, sino a cuestiones absolutamente troncales. A partir de principios del nuevo siglo XX la cosa empeoró: Russell encontraría paradojas irresolubles en el seno de la TC, de las que ya hemos hablado. En el seno de todos los elementos críticos estaba la noción de infinito. Esto provocó la aparición de una nueva corriente de pensamiento en filosofía de la matemática. Hasta el momento Hilbert representaba al formalismo, que llevado a sus últimas consecuencias (cosa que él no hacía en modo alguno) afirmaba que la matemática consistía en la manipulación de una serie de símbolos en cadenas bien formadas mediante unas reglas sintácticas específicas, pero sin sentido alguno. Russell y Whitehead defendían una postula diferente: el logicismo, que identificaría la matemática con la lógica. En este panorama de confrontamiento surge la escuela constructivista en torno al matemático L. E. J. Brouwer[35]..

La escuela constructivista ponía una cota muy clara a los objetos conceptuales de los que podía ocuparse la matemática: aquellos que fueran construibles en una serie finita de pasos. El infinito en acto de Cantor quedaba anatemizado con energía, como un juego de palabras, un despropósito sin el menor sentido. Además, los constructivistas no admitían ninguna demostración de existencia por reducción al absurdo, aduciendo que todo objeto matemático debía ser construible en un número finito de pasos.

Hilbert, que se había convertido mucho antes en el matemático más respetado del planeta, intervino en el asunto directamente. Dos décadas antes había puesto a la comunidad matemática mundial a trabajar en una misma dirección con la elaboración de su famosa lista de los 23 problemas cruciales pendientes, y ahora elaboraría lo que se conoce como *El Programa de Hilbert*[36]: un intento de consolidar la base de la matemática “desde afuera” y por procedimientos finitistas mientras se relajaban las exigencias de finitud de la escuela constructivista en el quehacer matemático “interno”. Aquí es donde el formalismo “moderado” mostraría toda su fuerza, porque trataría a los

---

[35] Brouwer estuvo involucrado en una controversia pública que ha sido calificada como *muy degradante* en la década de 1920 con Hilbert sobre la política editorial de los *Mathematische Annalen*

[36] De hecho, en su lista de 23 problemas de la conferencia en París del Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 el segundo problema era precisamente probar que los axiomas de la aritmética son consistentes (esto es, que la AF no supone una contradicción).

enunciados sobre teorías matemáticas (metamatemáticos por tanto) con la implacabilidad de un análisis exclusivamente sintáctico para no introducir querencias y sesgos propios del investigador; mientras que trabajaría con los enunciados de matemáticas normales como siempre se había hecho, como hacía Cantor: mediante símbolos con una semántica clara en la que los matemáticos manejan objetos conceptuales claramente definidos y son tratados como si existieran empíricamente. Al estudio de los enunciados (cadenas de símbolos al fin y al cabo) sobre las matemáticas las llamaría metamatemática, acuñando tal término para señalar que su función respecto a la matemática era la misma que la de la metafísica sobre la física.

La metamatemática fue por lo tanto un invento de Hilbert. La desarrolló con el objeto expreso de promover métodos diferentes con los cuales demostrar las buenas propiedades de los sistemas matemáticos, sobre todo la consistencia. Anteriormente la consistencia se demostraba, como se ha explicado en el capítulo 3, mediante la existencia de modelos. La consistencia supone la imposibilidad de demostrar simultáneamente una proposición p y su negación. Dado un modelo y una proposición que puede interpretarse en un modelo, esa proposición sólo puede ser verdadera o falsa en el modelo, de modo que la mera existencia del modelo garantiza la consistencia del sistema.

Consciente de que la matemática entera dependía de bases claras tales como la teoría aritmética, propuso encontrar una TA satisfactoria de la misma. En la conferencia que impartió en Zurich invitado por la Sociedad Matemática Suiza, titulada *Axiomatisches Denken* ("El pensamiento axiomático"[37]), terminaba con una rotunda declaración:

> *"Creo firmemente que todo lo que está sujeto al pensamiento científico cae bajo el poder del método axiomático y, por tanto, de la matemática."*

[37] D. Hilbert, *Fundamentos de las Matemáticas*. Selección de varios trabajos de Hilbert por Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura. Colección Mathema. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México 1993. pp 23-35

La satisfactoriedad de una teoría matemática, a ojos del Hilbert de los años veinte, consistía en el cumplimiento de varias propiedades (Gonzalez-Asenjo, F. 1976).

a) CONSISTENCIA: El sistema debe estar exento de contradicciones. Recordemos que la existencia de contradicciones es fatal para cualquier sistema axiomático, porque si existe un solo enunciado p tal que su negación ¬p pertenece al sistema, entonces toda afirmación puede ser demostrada y la TA se vuelve estéril (Ver el *Principio de Explosión*, a continuación).

b) DECIDIBILIDAD: La validez de cualquier demostración debe ser verificable por manipulaciones mecánicas en una cantidad finita de pasos. Adoptando un lenguaje informático, esta condición dice que debe ser posible, al menos en principio, crear un programa capaz de verificar la validez de los razonamientos matemáticos.

c) COMPLETITUD: Dado cualquier enunciado P, o bien él o bien su negación debe ser demostrable.

d) DEMOSTRABILIDAD DE CONSISTENCIA: La consistencia del sistema debía ser demostrable en un número finito de pasos.

e) CATEGORICIDAD. Un sistema es categórico si solo admite un modelo (salvo isomorfismo).

La dificultad de la tarea era evidente, pero nadie imaginó que fuera imposible; y que tal imposibilidad fuera demostrable. Eso es lo que hizo Gödel en 1931 al demostrar que en general estas propiedades no se pueden dar a la vez. Más concretamente, sus dos teoremas de incompletitud establecen que si se cumplen las condiciones a) y b) entonces necesariamente la condición c) falla y la d) no puede conseguirse.

En el fondo no eran sino los propios éxitos personales los que impulsaban a David Hilbert en su programa: en 1899 había demostrado en su obra "Fundamentos de la geometría" que la GE es consistente y completa.

> [Fundamentos de la geometría] suele ser considerada una de sus contribuciones más importantes a la matemática moderna. Esta relevancia no descansa exclusivamente en los resultados matemáticos alcanzados en este célebre trabajo, sino en gran medida en las ideas metodológicas o fundacionales allí elaboradas. (Giovannini, 2014)

El programa de Hilbert era la extrapolación de la fundamentación de la GE del propio Hilbert a la matemática entera. Las cinco propiedades anteriores se mostraban como desidetara irrenunciables para toda teoría matemática. Tras dos milenios y medio la GE tenía una presentación perfecta, y esto dio pie a Hilbert a considerar que todo sistema debería poseer estas mismas propiedades, y que tal posesión debería ser demostrable por métodos metamatemáticos finitistas. Los objetos de estudio aquí no eran ahora los objetos matemáticos, sino las propias teorías matemáticas que estudian los objetos matemáticos. Por lo tanto el estudio es "externo" a las mismas, es metamatemático, no matemático.

Además, todo el programa de Hilbert estaba ceñido a la lógica clásica, de primer y segundo orden. En la lógica clásica existen ciertas restricciones:

1. No tienen cabida los conceptos vagos, para los que dado un concepto no podamos decir dicotómicamente si un objeto cae bajo él o no. El conjunto de los números pares tiene cabida, pero no el conjunto de los números grandes.

2. Todas las fórmulas atómicas tienen un valor de verdad asociado, que sólo puede tomar además dos valores: V y F.

Existen otras lógicas: hay lógicas multivaluadas, que contemplan más posibles valores de verdad de los portadores de verdad, además de los clásicos V, F desde tres hasta un continuo entre F y V. Hay lógicas que son borrosas (fuzzy), lógicas que dan tratamientos específicos y diferentes a la conectiva condicional, lógicas como la intuicionista que rechazan el tercio excluso y el uso general de la reducción al absurdo, otras que son modales e introducen operadores de necesidad y suficiencia, otras como la deóntica, poseen operadores de obligatoriedad, prohibición o permiso... Pero no existe ninguna propuesta lógica que admita la contradicción en su seno[38]: todas exigen consistencia. Veamos el motivo.

Teorema o principio de explosión

Si en un sistema axiomático deductivo tiene cabida una proposición y su negación, entonces todo enunciado es un teorema.

Demostración

Sea Γ el conjunto de axiomas. Supongamos que $\Gamma \vdash (A \wedge \neg A)$

1. $(A \wedge \neg A)$ Premisa
2. A de 1. por la regla de eliminación del conjuntor
3. $A \vee B$ de 2. por la regla de introducción del disyuntor
4. $\neg A$ de 1. por la regla de eliminación del conjuntor

B de 3. y 4. por inferencia de la alternativa (IA)

la introducción de B, de la que nada hemos dicho ni definido, en la tercera línea es completamente legítima, tanto $p \to (p \vee q)$ como $(p \wedge q) \to p$ son reglas deductivas básicas. Por supuesto, lo que hemos hecho con B podríamos haberlo hecho con ¬B, o con cualquier proposición.

[38] Existe una excepción a la afirmación anterior: se trata de las llamadas *lógicas paraconsistentes*, basadas en los trabajos iniciales de N. Vasíliev y J. Lukasiewicz; que permiten cierto nivel de contradicción en su seno, por lo que coherentemente con ello no admiten el principio de explosión. No entraremos en ello.

La cuestión es que si se admite una sola contradicción del tipo (A^ ¬A) en un sistema deductivo, todo puede ser demostrado, todo es verdadero, y por el mismo motivo todo es falso. La propia racionalidad colapsa y el sistema es completamente inútil: nada interesante puede ser extraído de él. He aquí el núcleo de la importancia de las paradojas y la necesidad de evitarlas. Si dicha paradoja reside en el seno del sistema axiomático sobre el que se construye la matemática entera, la magnitud de la crisis es imposible de obviar.

8.2. La metamatemática

La metamatemática inició su andadura de modo tortuoso, dado que era un campo extraordinariamente difícil. Los éxitos parciales fueron importantes:

1. La consistencia y completitud del cálculo de proposiciones, capítulo inicial de toda matemática pues se ocupa de las propiedades de las funciones lógicas. La demostración de la consistencia y la completitud de dicho cálculo por métodos finitistas se mostró perfectamente realizable, lo que supuso un éxito inicial.

2. El cálculo de predicados, con cuantificadores existencial y universal demostró ser consistente sin mayores problemas, pero la demostración de su completitud fue más problemática. En 1930 Gödel demostró mediante su teorema de completitud que es completo, pero sin respetar el espíritu metamatemático de Hilbert, pues utilizó un teorema implicado por el Axioma de Elección, que no es finitista. En principio cabía la posibilidad de que existiera una demostración finitista que Gödel no pudo encontrar, pero esa esperanza cayó en 1954 cuando Jerzy Łoś demostró que el Teorema de Completitud del cálculo de predicados es equivalente al Teorema de Ideales Primos, dejando claro con ello que el auxilio de suposiciones no finitistas es imprescindible.

3. La aritmética formal (ArF). En 1930 se publicó un resultado de Presburguer que demostraba mediante métodos finitistas que el fragmento aditivo de la aritmética era consistente y completa. Espoleado por este resultado Gödel intentó hacer lo mismo para la ArF entera. Utilizando únicamente los métodos de Hilbert, Gödel demostró

exactamente lo contrario: que existen proposiciones indecidibles en la ArF, y que la adición de dichas proposiciones como axiomas no soluciona el problema de incompletitud porque el método de demostración se aplicaría igualmente al sistema ampliado. La incompletitud es una característica esencial de todo sistema axiomático que incorpore la aritmética. El segundo resultado de Gödel establece que si la ArF es consistente, su consistencia no se puede demostrar con los métodos finitistas de Hilbert (es decir, con los propios métodos de la ArF).

4. Gentzen concibió en 1936 una demostración de la consistencia de la ArF en la que usa una extensión del principio de inducción transinfinita hasta los ordinales menores a $\varepsilon_{0,}$ el primer ordinal ε. Este ordinal pertenece a la teoría cantoriana de ordinales, y es un ordinal transinfinito, el ordinal límite de la torre de exponenciación de ordinales ω. Gentzen demostró la consistencia de la ArF extendiendo la inducción ordinaria hasta el ordinal ε_0. Demostró además que la consistencia del sistema extendido hasta ε_0 implica la consistencia de la aritmética ordinaria por lo tanto su trabajo implica la demostración de la consistencia de la ArF, aunque sin atenerse a las condiciones hilbertianas de procesos finitistas.

5. El análisis, o cálculo de números reales es más complicado porque para definirlos necesitamos o bien sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind (vistas en el capítulo 4). En ambos casos tenemos que cuantificar no sólo con respecto a números reales, sino también respecto a conjuntos de números reales, lo que nos introduce en una lógica de segundo orden. Gentzen demostró la consistencia de los números reales por medios igualmente transinfinitos.

Hilbert esperaba que sus métodos metamatemáticos sirvieran también para demostrar la categoricidad de los sistemas, pero Leopold Lowenheim publicó en 1915 un famoso teorema, modificado en 1919 por Thoralf Skolem, que demuestra que todo sistema formal de primer orden, si posee modelos infinitos, entonces posee un modelo numerable (Gonzalez-Asenjo, F., 1976). Todo sistema lógico de primer orden con modelos infinitos posee modelos infinitos de cualquier tipo de cardinalidad. Esto implica que la categoricidad no puede ser cumplida, pues modelos de diferente cardinalidad no pueden ser isomorfos. Uno de los desiderata hilbertianos caía completamente.

Respecto a la independencia, la forma de demostrar la independencia de un axioma respecto a los demás se realizaba clásicamente por métodos no metamatemáticos, construyendo un modelo para el sistema resultante de sustituir dicho axioma por su negación, dejando los demás sin modificar. Si se encontraba tal modelo quedaba demostrada la consistencia del nuevo modelo, y con ello la independencia del axioma inicial.

Y respecto a la completitud, hemos visto que no se puede obtener para la ArF mediante la metamatemática de Hilbert. La TC es asimismo incompleta en virtud del teorema de Gödel, pues es una extensión de la ArF (en el sentido de que todo axioma de ArF es un axioma de TC), y si un sistema axiomático es incompleto, toda extensión axiomática del mismo también lo es.[39]

8.3. Los teoremas de incompletitud de Gödel

8.3.1. Diferenciando tres niveles

Para entender el trabajo de Gödel es necesario diferenciar tres niveles, que denominaremos $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{M}$. Lo centramos en la ArF, pero el planteamiento serviría para cualquier investigación metamatemática.[40]

[39] Existe un teorema demostrado por Lindenbaum que afirma que todo sistema axiomático tiene una extensión completa. Sin embargo y pese a las apariencias no viola el teorema de Gödel, pues la extensión cuya existencia demuestra Lindebaum no es axiomática. La extensión completa de S constituye un sistema no axiomatizable, con lo que no entra en contradicción con Gödel.
[40] En los párrafos que siguen adoptaremos la visión pedagógica de los tres niveles de Florencio González Asenjo en el ciclo de conferencias en la Fundación Juan March “Cuestiones de metamatemática” disponibles en https://www.march.es/conferencias/anteriores/voz.aspx?p1=2896

Llamaremos $\mathcal{A}$ al sistema informal de la aritmética, dado por los axiomas intuitivos de Peano. $\mathcal{A}$ es el sistema que todos usamos para contar, tenemos el principio de inducción ordinaria en el seno del mismo, tenemos los propios números naturales, y tenemos las operaciones básicas de suma y producto. La axiomática de Peano da cuenta de esta estructura intuitiva. Además, tenemos el sistema $\mathcal{S}$ formal de los números naturales, basado en axiomas que regulan las operaciones de unión, intersección, etc. Mediante este sistema tenemos los mismos números naturales que teníamos en el sistema intuitivo $\mathcal{A}$, pero ahora formalizado. $\mathcal{S}$ es el sistema que hemos visto en capítulos anteriores sobre la fundamentación de los naturales en la TC. Además tenemos el sistema metamatemático $\mathcal{M}$, con los nombres de los símbolos de $\mathcal{S}$. $\mathcal{M}$ es el estudio de la matemática de $\mathcal{S}$, y en $\mathcal{M}$ tenemos los nombres de los objetos de $\mathcal{S}$ y estudiamos las propiedades de $\mathcal{S}$, no de los objetos de $\mathcal{S}$.

Gödel establece un puente entre $\mathcal{A}$ (en cuyo seno tenemos, recordemos, números intuitivos y operaciones intuitivas entre ellos) y el sistema formal $\mathcal{S}$. Más aún, proyecta $\mathcal{M}$, la metamatemática de $\mathcal{S}$ en el seno de $\mathcal{A}$. Para entenderlo es necesario ver primero los conceptos de recursividad y expresabilidad.

8.3.2. Recursividad y expresabilidad

Dada una relación general $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ (por ejemplo, "ser menor que", que sería una relación diádica, pero en general $\mathcal{R}$ necesitará n argumentos) diremos que $\mathcal{R}$ es expresable en $\mathcal{S}$ si en el sistema formal $\mathcal{S}$ existe una fórmula con n variables libres tal que si esta relación se satisface para una n-tupla $(a_1,\ldots,a_n)$ de naturales dados en $\mathcal{A}$, entonces la fórmula correspondiente es demostrable en $\mathcal{S}$, y si la relación es falsa en $\mathcal{A}$, entonces la negación es demostrable en $\mathcal{S}$. Asimismo, diremos que una función[41] n-ádica es representable en $\mathcal{S}$ si la relación (n+1)-ádica definida por

$$\boldsymbol{R}(a_1, \dots, a_{n,} a_{n+1})\ sii\ f(a_1, \dots, a_{n,}) = \ a_{n+1}$$

es una relación expresable en $\mathcal{A}$.

Para tender este puente útil entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ debemos caracterizar correctamente las relaciones expresables en $\mathcal{S}$ y las funciones representables en $\mathcal{S}$. Esa caracterización se consigue con la definición de *función recursiva*. La definición de función recursiva es absolutamente formal y se apoya en una definición más básica: la de *función recursiva primitiva*. Una función es recursiva primitiva si es construible por iteración finita de las llamadas funciones recursivas elementales; que son:

1- La función monádica c(n)=0
2- La función monádica s(n)=n+1
3- Las funciones k-ádicas $p_i^k(x_1,\dots,x_k) = x_i$, que no es más que una función proyección que de una k-tupla toma el elemento i-ésimo
4- La función composición, que permite pasar de una función previa k-aria $f(x_1,\dots,x_k)$ y de k funciones n-arias $g_k(x_1,\dots,x_n)$ a la correspondiente función composición, n-aria $\mathrm{h}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathrm{f}(\mathrm{g}_1(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}),\dots,\mathrm{g}_\mathrm{k}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}))$
5- La definición por inducción de una función natural de variable natural. Es decir, la definición para $f(0)$ y para $f(n+1)$ dado el valor de $f(n)$.

Para dar cabida a funciones especiales que no son construibles dentro de estos esquemas[42], pero que conviene tenerlas incluidas porque son computables, ampliamos

[41] Recordemos que estamos en todo momento en el sistema de la AF: las funciones que tratamos aquí son funciones naturales de variable natural; y las relaciones son relaciones entre números naturales.
[42] Un ejemplo de función computable pero no construible con los cinco esquemas anteriores es la importante función de Ackerman *A(m,n)*, que es recursiva pero no recursiva primitiva. Es muy sencillo

el concepto, en lugar de llamar a las anteriores, las basadas en estos cinco esquemas constructivos, funciones recursivas, las llamamos funciones recursivas primitivas, y admitimos aun un sexto esquema, el denominado *operador de búsqueda o minimización no acotada* que no explicaremos; llamando simplemente funciones recursivas a las generales obtenidas por iteraciones finitas de cualesquiera de los seis métodos anteriores. Así, las funciones recursivas primitivas (las formadas con todos o algunos de los cinco procedimientos primeros) forman un conjunto incluido en el conjunto de las funciones recursivas generales (las formadas con cualquier combinación de los seis procedimientos). Dado que estas funciones son construibles en pasos finitos, son computables, lo que les añade interés por motivos que veremos más adelante.

La importancia de las funciones recursivas generales para nosotros en este momento es que éstas son exactamente las funciones de $\mathcal{A}$ representables en $\mathcal{S}$. La recíproca es cierta también: toda función representable es recursiva. Con ello tenemos una definición finitista de todas las funciones representables en $\mathcal{S}$. Con respecto a las relaciones, por medio de las funciones características de las mismas obtenemos los mismos resultados para ellas.

8.3.3. La numeración de Gödel

Comenzaremos con los objetos de $\mathcal{S}$. Este proceso se denomina gödelización y forma parte del aparato más técnico de la demostración de incompletitud que Gödel presentara en 1931. Se trata de asociar primero los símbolos de la ArF de $\mathcal{S}$ por números naturales de $\mathcal{A}$, a continuación cualquier fórmula de $\mathcal{S}$ y finalmente cualquier demostración. Los detalles técnicos se muestran en el APÉNDICE 4. Aquí daremos por establecido que podemos convertir cualquier símbolo, fórmula o incluso cadena de fórmulas que forman una demostración de $\mathcal{S}$, en un número natural (enorme) de $\mathcal{A}$, de forma unívoca y sin posibilidad de error.

demostrar que toda función recursiva primitiva *f(n)* está mayorada por la función de Ackerman, es decir, que $A(n,n) > f(n)$, Mediante la numeración de Gödel podemos hablar de recursividad de los conceptos lógicos. Efectivamente, a través del mecanismo ideado por Gödel cualquier afirmación sobre una TA puede convertirse en una afirmación sobre números naturales que pueda formalizarse en una teoría aritmética.

Tomemos la ArF en cualquiera de sus posibles formalizaciones. Tenemos un conjunto de axiomas que conforman un sistema exento de contradicción, y deseamos saber si además de la consistencia tiene la propiedad deseable de decidibilidad. Supongamos que toda demostración en el seno del sistema es verificable en un número finito de pasos. El virtud de la numeración de Gödel, podemos traducir cada enunciado a un número natural. Por ejemplo, el enunciado "7 es un número primo" podría tener en número 9124270246, y "12 es un número primo" podría tener, digamos el 136864053690. Poco importa que el segundo enunciado sea falso: dado que convenientemente formalizado no es sino una cadena de símbolos, tendrá su correspondiente numeración de Gödel. Es necesario recalcar que los dos enunciados mencionados en lenguaje natural deberían ser traducidos previamente al lenguaje formal de la aritmética que tenemos entre manos, y solo entonces podríamos encontrar los correspondientes números de Gödel, que no serían del tamaño ficticio de los mencionados, sino muchísimo más grandes. Nada de eso importa para la explicación de lo que sigue.

8.3.4. Un trípode conceptual previo y una definición

Los teoremas de incompletitud de Gödel descansan sobre un trípode conceptual: primero, la posibilidad de incrustar la lógica en la aritmética mediante la numeración de Gödel que acabamos de ver. Segundo, la demostración de que toda función recursiva es representable en toda teoría aritmética. Más aún: que la clase de las funciones representables coincide con la clase de las funciones recursivas, y la clase de las relaciones representables coincide con la clase de las relaciones recursivas. Y tercero: que es posible construir una sentencia bien formada que hable de ella misma. Esto es de extrema importancia, porque en el seno de una teoría $\mathcal{S}$ podemos deber hacer afirmaciones que hablen de las propiedades de la propia teoría $\mathcal{S}$.

Veamos con un poco de calma este tercer pilar previo: estamos afirmando que una teoría aritmética $\mathcal{S}$ puede albergar en su seno afirmaciones sobre propiedades de la propia teoría $\mathcal{S}$ (afirmaciones metamatemáticas, por tanto). Sea la sentencia *Consist S*, que afirma la consistencia de $\mathcal{S}$. Que $\mathcal{S}$ sea consistente equivale a que sea imposible demostrar en $\mathcal{S}$ tanto una sentencia como su contraria. Ya hemos visto que si esto ocurre para una única sentencia, entonces el sistema entero permite demostrar cualquier afirmación. En particular, dado que algo tan obvio como $x_0 = x_0$ deberá ser demostrable, la consistencia de $\mathcal{S}$ equivale a la inexistencia de demostración de $\neg(x_0 = x_0)$. Llamemos g al número de Gödel de $\zeta \equiv \neg(x_0 = x_0)$. Sea Dm la relación diádica definida de la siguiente manera:

> Dm(x,y) si y solo si x es el número de Gödel de la demostración de la sentencia cuyo número de Gödel es y.[43]

Esta relación Dm es recursiva en $\mathcal{A}$, y por lo tanto expresable en $\mathcal{S}$. Esto es: en $\mathcal{S}$ hay una fórmula Dm tal que cuando la expresión es verdadera (o respectivamente falsa) en $\mathcal{A}$, la correspondiente expresión (o respectivamente, su negación) es demostrable en $\mathcal{S}$.

$0^{(g)}$ es el número natural que en nuestra numeración habitual representamos por g, y que se obtiene por aplicar la función *siguiente* al cero *g* veces. *Nat x* es la sentencia que afirma que x es un número natural. Entonces, con esta nomenclatura en el seno de la teoría aritmética $\mathcal{S}$ podemos expresar la consistencia de la propia teoría mediante la sentencia aritmética siguiente:

[43] A partir de este momento cometeremos un leve abuso del lenguaje en aras de una mayor sencillez expositiva; y cuando haya que aludir a “la sentencia cuyo número de Gödel es x” mencionaremos directamente la “sentencia x”, dado que en virtud de la numeración de Gödel podemos referirnos a una cadena de símbolos con el número que le corresponde sin ambigüedad alguna.

$$Consist\ S \equiv \neg\exists x(Nat\ x\ \wedge\ Dm(x, 0^{(g)}))$$

En su interpretación metamatemática se trata del enunciado de una propiedad de una teoría matemática $\mathcal{S}$, por lo tanto es una sentencia que habita en $\mathcal{M}$. Esta sentencia será verdadera si y solo si la teoría aritmética $\mathcal{S}$ es consistente. Pero hemos reducido esta sentencia a otra equivalente que habla de la inexistencia de un número natural x con una propiedad concreta. Poco importa que esta sentencia sea astronómicamente grande e impracticable, de hecho[44] $g[\neg(x_0 = x_0)] = 2^3 \cdot 3^{32} \cdot 5^{17} \cdot 7^{17}$, así que el número de Gödel de *Consist S* es muchísimo mayor. Lo que importa es que hemos convertido la afirmación metamatemática de la consistencia de $\mathcal{S}$ en una afirmación sobre propiedades de números de $\mathcal{S}$, y en última instancia, en un número de $\mathcal{S}$.

Ahora es cuando toma verdadera importancia lo que hemos llamado el tercer pilar del argumento gödeliano. Gödel demostró rigurosamente (dentro de los parámetros de Hilbert de matematemática finitista) que es posible encontrar una sentencia que hable concretamente de sí misma, de hecho, que afirme cualquier cosa de sí misma. Lo llamaremos el *teorema de autoalusión*. Más formalmente: demostró que dada una propiedad φ(x) cualquiera, con una única variable libre; es posible encontrar una sentencia aritmética ψ que afirme que la propiedad φ es cumplida por un número concreto: el número de Gödel de ψ misma. En suma, y en virtud de la identificación entre sentencias y sus números de Gödel respectivos, lo que ψ está afirmando es "yo cumplo φ".

8.3.5. ω-consistencia

Necesitaríamos aún una definición de consistencia que sea algo más fuerte que la consistencia normal. Se obtiene mediante una definición de ω-contradicción que sea algo más débil que la contradicción que hemos utilizado hasta el momento. La

[44] Baste saber que la expresión formal de $\neg(x_0 = x_0)$ es la cadena de símbolos "$\neg = x_0\ x_0$", y tener en cuenta la asignación que la numeración de Gödel hace de los cuatro signos anteriores según lo expuesto en el apéndice 4 es 3,32,17 y 17. Así pues, los cuatro primeros primos con los exponentes citados hacen el número natural 2631036614753876674806472156292724609375000.

obviaremos en este trabajo porque cinco años después de que Gödel demostrara sus teoremas de incompletitud, John B. Rosser demostró que se podía obviar la hipótesis de ω-consistencia. Como suele suceder generalmente, al rebajar el nivel de exigencia de las condiciones previas, el teorema es más fuerte, y más difícil de demostrar.

8.3.6. Primer teorema de incompletitud de Gödel (TIG-1) (en versión de Rosser).

Enunciado: Si $\mathcal{S}$ es una teoría aritmética recursiva consistente, entonces es incompleta.

En esencia, el teorema (tanto en su versión Gödel como en su versión Rosser) es totalmente constructivo: Gödel construyó una sentencia G que no es ni demostrable ni refutable en $\mathcal{S}$. Primero definió la siguiente fórmula de una variable libre:

$$\varphi(x) \equiv \forall y(Nat\ y \rightarrow \neg Dm(y,x))$$

Es decir, aplicada a un argumento x, la fórmula φ afirma la inexistencia de demostración alguna para x. Por el teorema de autoalusión, deberá existir una sentencia aritmética G, de número de Gödel ***n*** tal que

$$\vdash_S \mathrm{G} \leftrightarrow \forall \mathrm{x}\left(\mathrm{Nat\ x} \rightarrow \neg \mathrm{Dm}\left(\mathrm{x}, 0^{(\mathrm{n})}\right)\right)$$

Es decir, G afirma su propia indemostrabilidad. Veamos ahora que si $\mathcal{S}$ es consistente (ω-consistente en el caso de Gödel), entonces G no es ni demostrable ni refutable:

1. G no es demostrable.
   Supongamos que $\vdash_S$ G. Sea q el número de Gödel de la demostración de G. Entonces Dm(q, n), es decir:

$$\vdash_S \exists x(\, Nat\, x \ \wedge \ Dm(x, 0^{(n)})$$

y en definitiva $\vdash_S$ ¬G (pues la interpretación natural de G era que G es indemostrable), con lo que tenemos una contradicción, y por tanto S es contradictoria.

2. G no es refutable.

Debemos demostrar ahora que no $\vdash_S$ ¬G (es decir, que no podemos refutar la sentencia G demostrando ¬G). Este es el paso para el que Gödel utilizaba su concepto de *ω-consistencia* y que Rosser, a costa de una mayor dificultad, pudo evitar. En síntesis, si $\vdash_S$ ¬G, no puede existir ningún natural q tal que Dm (q,n), luego:

$$(\forall q)\colon \mathrm{Nat}\ q \rightarrow \ \vdash_S \neg Dm\ (0^{(q)}, 0^{(n)})$$

Dada la consistencia de S (*ω-consistencia* en el caso de Gödel), lo anterior equivale a que no pueda existir ningún x que sea demostración de G, es decir, no puede ocurrir que

$$\vdash_S \exists x(Nat\ x \ \wedge Dm\big(x, 0^{(n)}\big)$$

Pero eso supone precisamente la veracidad del aserto que realiza G. Por tanto, no $\vdash_S$ ¬G.

En resumen, si S es consistente, hemos construido una sentencia G que no puede ser ni demostrada ni refutada, entonces S es incompleta. La suposición de consistencia es esencial, pues la hemos utilizado en la demostración. Y lo hemos hecho con las herramientas que Hilbert consideró idóneas para demostrar exactamente lo contrario. Al demostrar que G no es demostrable, hemos dado la razón a su interpretación natural (que es su propia indemostrabilidad); por lo tanto G es verdadera en su interpretación natural y es no demostrable en $\mathcal{S}$.

8.3.7. Segundo teorema de incompletitud de Gödel (TIG-2)

Enunciado: En una teoría aritmética recursiva $\mathcal{S}$ se puede demostrar su consistencia si y solo si es contradictoria. (Alternativamente: Si $\mathcal{S}$ es una teoría aritmética recursiva consistente, entonces su consistencia no puede ser demostrada en $\mathcal{S}$).

La demostración de este teorema pasa por demostrar que la sentencia *Consis S* equivale a demostrar la sentencia de Gödel G, y no la haremos aquí. Queda claro que la demostración de G equivale a la existencia de contradicción en el seno de $\mathcal{S}$, por lo que la demostración estaría terminada.

El TIG-2 no demuestra que *Consis S* sea verdadera y no demostrable, en lo que con una falsa analogía al primer teorema se podría suponer. Lo que demuestra es que si $\mathcal{S}$ es consistente, entonces su consistencia no es demostrable dentro de $\mathcal{S}$. Muestra por lo tanto un límite para el poder de los sistemas axiomáticos, porque tampoco afirma que $\mathcal{S}$ no sea consistente. Afirma la incapacidad de $\mathcal{S}$ para demostrar su propia consistencia. De hecho, como ya hemos dicho varias veces, Gentzen demostró en el mismo año 1931 la consistencia de la ArF desde fuera de ella misma, utilizando la inducción transinfinita hasta el cardinal $\varepsilon_{0.}$

8.4. Consecuencias filosóficas

Visto todo lo anterior, podemos decir con el profesor Ivorra:

> *Nosotros sabemos más sobre los números naturales que lo que puede probarse a partir de los axiomas de Peano. Concretamente, conocemos algunas afirmaciones cuya prueba requiere hablar de conjuntos infinitos.* (Ivorra, 2008)

Esto tiene dos importantes implicaciones filosóficas para este trabajo:

1. La mente humana[45] es más "potente" que la aritmética de Peano, toda vez que podemos salirnos de ella y demostrar cosas vetadas a tal sistema desde un sistema más amplio, como hizo Gentzen en 1931.

2. Dado que la TC es (en cualquiera de sus formas) una teoría que permite formalizar todo el pensamiento matemático y no es posible ir más allá de sí misma, y dado que según el TIG-2, demostrar su consistencia supondría que es contradictoria, tenemos que si la TC es consistente, no existe ningún argumento que pueda convencernos de que lo es (Ivorra, 2008; 182). En este sentido podemos decir que la TC es "más potente" que la mente humana.

Incluso en el caso de que en un futuro surgiera una teoría más general que la TC, desde la que poder demostrar la consistencia de la TC, quedaría al aire la consistencia de la nueva teoría. Esto limita radicalmente la fundamentación de la matemática y muestra la imposibilidad del programa de Hilbert.

[45] El autor de este trabajo no se siente del todo cómodo ante este antropomorfismo. Ha adoptado la locución "la mente humana" por simplificar, pero no ve cómo una mente artificial o alienígena podría superar las limitaciones de la mente humana a las que se hacen referencia en este apartado.

8.5. Lo que no implican los teoremas de Gödel

De pocos teoremas matemáticos se ha abusado más en la literatura poco seria, e incluso en parte de la literatura seria de divulgación científica que de los dos teoremas TIG-1 y TIG-2; por ejemplo en Penrose (1991). Si bien su importancia en lógica matemática es enorme, en la propia matemática se ha seguido trabajando sin el menor problema, sin que prácticamente matemático alguno haya mostrado la menor preocupación al respecto de la consistencia de la TC o de la existencia de posibles afirmaciones indecidibles. Ha habido veces que se ha demostrado, eso sí, que ciertas propiedades de números naturales eran a la vez ciertas e indemostrables en el seno de la ArF de Peano; por ejemplo, la convergencia a cero de las sucesiones de Goodstein (Dehornoy, 2001). ¿Demuestra esto, como afirma Penrose, que la mente humana tiene una potencialidad superior a la de los sistemas axiomáticos, para acceder de alguna manera platónica a las verdades matemáticas indemostrables? En absoluto. Lo que demuestra es que desde teorías más potentes se demuestran resultados más potentes, y que teorías que lo eran menos se veían incapaces para tal tarea demostrativa. Las limitaciones mostradas por Gödel son relativas al sistema en el que se trabaja en cada momento, no absolutas.

Es muy habitual leer que la consistencia de cualquier sistema axiomático que dé cuenta de la ArF es indemostrable en virtud del teorema de Gödel, haciendo referencia al segundo teorema de incompletitud. Esto, así dicho, da pie a interpretar que la consistencia de la ArF es un enigma. Esto no es correcto. No cabe ninguna duda razonable de la consistencia de la ArF. Lo que Gödel demostró es que una teoría aritmética recursiva T no puede mostrar su propia consistencia; no que no se pueda demostrar tal consistencia desde fuera de T. Lo que hizo Gentzen es exactamente eso: demostrar tal consistencia, pero con procedimientos ajenos a la propia ArF, como se ha dicho antes. Esto no involucra a mágicas propiedades de la mente humana, que es capaz de demostrar cosas por encima de los sistemas lógico-deductivos, sino que involucra a sistemas axiomáticos no finitistas, más potentes que una teoría finitista como la que deseaba Hilbert para su metamatemática.

De los teoremas de Gödel tampoco se deduce que todos los sistemas formales sean incompletos. Algunos son de hecho completos y consistentes a la vez. Un ejemplo de ello es la teoría elemental de los números reales.

Por otro lado, cuando nos preguntamos por la verdad o falsedad de una afirmación que involucra a números naturales (por no abandonar el conjunto N), debemos tener muy claro si nos estamos refiriendo a aquellas entidades intuitivas que usamos para contar vacas y coliflores (lo que hemos denominado el sistema $\mathcal{A}$), a aquellas entidades que surgen de una TA dada (lo que hemos denominado el sistema $\mathcal{S}$) o a los signos por los que denominamos a los segundos en una metamatemática de $\mathcal{S}$, que hemos denominado $\mathcal{M}$. Las entidades intuitivas son previas, son las que pretendemos sistematizar con las teorías axiomáticas ($\mathcal{S}$), que son posteriores, y Gödel nos asegura (ahora sí), que siempre habrá proposiciones indecidibles en tales teorías. Es decir: Gödel nos informa de la intrínseca incapacidad de toda TA para dar cuenta de las propiedades Hilbert-deseables a la hora de hablar de la aritmética de los números naturales. Así, si la verdad a la que nos referimos habita en $\mathcal{A}$, entonces es un concepto que desborda a toda teoría $\mathcal{S}$. De ahí se deduce la importante consecuencia para el presente estudio de que el concepto de verdad matemática no equivale el concepto de demostrabilidad matemática, lo que en los capítulos iniciales habíamos denominado la *Tesis Clásica de la verdad matemática* no puede sostenerse.

Otro error habitual es hablar de “sentencias de Gödel” para referirse a proposiciones que, siendo verdaderas, no pueden demostrarse en el seno de la propia teoría (como la convergencia a cero de las sucesiones de Goodstein). Gödel demostró sus teoremas de incompletitud construyendo efectivamente una sentencia autorreferente que no era ni demostrable ni refutable. Pero no demostró en absoluto que toda sentencia indecidible en el seno de una TA tuviera que tener la forma autorreferente de una sentencia de Gödel. De hecho, no es así en el caso de la convergencia a cero de las sucesiones de Goodstein (Kirby et al., 1982).

La aplicación de los teoremas de Gödel en debates filosóficos sobre la posibilidad de inteligencia de las máquinas es totalmente espuria. Más aún la pretendida aplicación en asuntos extramatemáticos sin teorías formalizadas, como en biología o sociología.

Recapitulemos: la pretensión de categoricidad de las TA's deseada por Hilbert había caído ante al teorema de Löwenheim-Scholem; la consistencia, si existía no podía ser demostrada desde dentro de una TA (por el TIG-2); la completitud brillaba por su ausencia (por el TIG-1) en cuanto la TA fuera lo suficientemente interesante como para dar cuenta de la ArF…

Tan sólo le quedaba a David Hilbert la esperanza de que al menos existiera, ante una sentencia dada, un algoritmo finito que respondiera si era deducible o no de los axiomas iniciales.

La historia de esta última decepción de Hilbert es contada en el capítulo siguiente.

9. El problema de la decisión (*Entscheidungsproblem*).

Leibniz, considerado inventor de la lógica matemática y del cálculo infinitesimal, tenía una idea de un *arte combinatorio* mediante el cual se pudieran demostrar los teoremas de modo mecánico y ciego. Al menos una parte importante de su filosofía puede considerarse una extensión de su idea de autómata, sea corporal o espiritual. "Lo que él perseguía a través de las matemáticas, la lógica simbólica, la metafísica y la teodicea, era el arte de inventar en general, que pondría en sus manos el secreto del universo" (Fortes, 1976).

Hilbert, en su famosa conferencia de 1900 titulada "*Mathematische Probleme*" ante el Congreso Internacional de París, retomó la idea leibniziana y la reformuló de la siguiente manera: dado un problema matemático cuya respuesta deba ser SI o NO, el problema de la decisión consiste en encontrar un método finitista por medio del cual tras un número finito de pasos mecánicos lleguemos a la solución del problema. La definición del problema en los términos que conocemos actualmente la efectuó en 1928, en el Congreso Internacional de Matemáticos en Bolonia. Resolver este problema se convierte así en un *desideratum* de primera magnitud para la comunidad matemática, pues tal resolución equivaldría a demostrar que todo problema matemático tiene solución (Galindo et al., 2017). La importancia de este problema cobra su verdadera dimensión si entendemos que en 1931 Gödel asesta sendas puñaladas mortales al doble deseo de Hilbert de demostrar la completitud y la consistencia de la *Aritmética Formal y sistemas afines* por métodos finitistas. Quedaba aún la esperanza de que podamos al menos tener un procedimiento algorítmico, que ante una sentencia concreta nos responda si es obtenible o no de los axiomas iniciales.

En un estudio sobre la verdad matemática no puede faltar este apartado, toda vez que la respuesta al problema de la decisión, si bien no nos dice gran cosa de la naturaleza última de esa verdad, sí nos habla de la capacidad humana de acceso a la misma. Por ello la inquietud de la comunidad matemática por el tema estuvo indisolublemente unida a los esfuerzos de los matemáticos del siglo XX por aclarar la capacidad de los sistemas axiomáticos, y no es de extrañar que nos encontremos con los mismos nombres en todas estas áreas, centrados en la sempiterna figura de David Hilbert.

La pregunta a la que debe responder el *Entscheidungsproblem* es exactamente: ¿Es posible en todo caso encontrar un algoritmo finito que nos dé la respuesta para toda pregunta matemática bien formulada? Ackerman y Hilbert definen el *Entscheidungsproblem* de la siguiente manera:

> En el sentido más amplio, se puede decir resuelto el *Entscheidungsproblem* cuando se tiene un procedimiento para decidir, para cada fórmula dada, si es satisfacible o no.[46]

Preguntas de este tipo son: ¿Todo número par es suma de dos primos?[47], ¿Es primo el número 654325421?, ¿Existen números perfectos impares?[48] ¿Tal fórmula concreta es demostrable en el seno de un sistema axiomático dado? Por supuesto, para algunas preguntas concretas se sabe la respuesta por el simple hecho de que se conoce el algoritmo finito que las responde. A modo de ejemplo, en el cálculo de enunciados el problema está plenamente solucionado. Esto es así porque tenemos una vía sintáctica y otra vía semántica para decidir sobre la validez de las inferencias y de los argumentos (Castrillo y Díez. , 2008). Una de las vías sintácticas es el cálculo axiomático: partimos de unos axiomas muy sencillos que involucran a variables proposicionales y a conectivas lógicas, más la regla de deducción *modus ponens* y la de transformación de fórmulas. A partir de ello, decidir si una determinada proposición es o no es un teorema consiste en encontrar la forma de deducir la fórmula (o su negación) a partir de los axiomas. Uno de los métodos semánticos consiste en plantear las llamadas *tablas de verdad* de la fórmula a partir de las tablas de verdad de las proposiciones integrantes.

---

[46] Traducción libre de Hilbert, D. and Ackermann, W. [1928]: *Grundzege der theoretischen Logik*, en *Die Grundlehren der Mathemathischen Wissenschaf*, vol. XXVII, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3ª ed. 1949, pág. 96.

[47] Esta es la Conjetura de Goldbach, indemostrada desde que la formulara Christian Goldbach en 1742

[48] Enigma matemático de respuesta desconocida en la actualidad. Si existiera alguno debería ser mayor que 10^{300}

Aquellas proposiciones que son verdaderas para toda combinación de valores de verdad de sus proposiciones elementales integrantes se denominan tautologías. El *teorema de la completitud del cálculo de proposiciones* afirma que la clase de teoremas coincide con la clase de las tautologías: el problema de la decisión está automáticamente resuelto. Si y solo si A es una tautología, entonces es un teorema.

Con el Cálculo de Predicados de primer orden[49] sucede algo bien diferente. Es un cálculo completo (demostración no finitista lograda por Gödel en 1931), pero no para toda fórmula hay un método para decidir si es o no un teorema.

9.1. La tesis de Church

El teorema de Church de 1936 dice que el problema de la decisión para el cálculo de predicados no se puede resolver. En un enunciado alternativo: la lógica de primer orden es indecidible. Para demostrar tal cosa Church carecía de una definición formal de calculabilidad (o computabilidad, que diríamos actualmente), por ello identificó este concepto, vago e intuitivo, con el de recursividad, que era un concepto absolutamente formal y riguroso. Su demostración se basa por lo tanto en una suposición: la de que la clase de las funciones computables coincide con la clase de las funciones recursivas. Que toda función recursiva era computable había quedado claro desde el momento en que se definió rigurosamente el concepto de función recursiva como aquella obtenible por iteración finita de varios tipos de funciones computables llamadas funciones recursivas simples. Pero la recíproca no estaba clara en absoluto, y en eso consistía la tesis de Church.

Tesis de Church:
Una función es computable si y solo si es recursiva.

[49] Recordemos: estamos en una lógica de primer orden cuando las cuantificaciones únicamente operan sobre variables, no sobre conjuntos de variables.

Con esta tesis primero demostró que toda fórmula del cálculo de predicados que sea decidible es equivalente a una relación recursiva (es decir, una relación con función característica recursiva). En la segunda parte del teorema produce una fórmula del cálculo de predicados que no es equivalente a ninguna relación recursiva. Entonces, por la Tesis de Church no sería decidible. Con ello otro sueño de Hilbert se desvanece (si bien de forma relativa a la asunción de la Tesis de Church, que queda como conjetura de trabajo, pero sin demostrar).

Más allá del Cálculo de Predicados nos encontramos con que los sistemas más importantes de la matemática son todos indecidibles. Existen, eso sí, parcelas decidibles más allá del cálculo de predicados:

> Ackerman demuestra en 1928 que el cálculo de predicados monádicos es decidible.
>
> Presburguer en 1930 demuestra que la parte aditiva de la ArF es decidible.
>
> Wanda Szmielew consigue en 1955 la demostración de que la teoría de grupos de primer orden (sin atender a subgrupos) lo es.
>
> Tarski demostró que el segmento de primer orden de la teoría de números reales es decidible.

Sin embargo, se trata siempre de teorías esqueléticas, en el sentido de que no dan cuenta de la complejidad de las teorías verdaderamente interesantes en matemáticas. (¿De qué podría servir una teoría de grupos que no haga mención a subgrupos?)

El estado de la cuestión era insatisfactorio: la matemática conjetural no es matemática normal, aunque las teorías científicas siempre se basan en hipótesis de trabajo que posteriormente ven acumulada su evidencia con la comprobación empírica o son falsadas, la matemática no avanza de esta manera por lo general. Toda teoría desarrollada a partir de una conjetura es conjetural, y no puede ser tomada sino como un estadio transitorio de conocimiento que espera mejores intuiciones, mayores pruebas.

No obstante, hay sólida evidencia a favor de la tesis de Church. A partir del concepto de la máquina de Turing (TM) el concepto de función computable adquirió una descripción muy clara: aquella que podía ser computada por una TM. Se demuestra que una TM puede computar toda función recursiva. Más exactamente: toda función computable por una función recursiva es computable por una TM, y toda función computable por medio de una TM es computable por medio de una función recursiva. La tesis de Church es equivalente por lo tanto a la tesis de Turing. En 1936 Alan Turing publica un artículo titulado "*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*" . En este artículo demostró que cualquier función que pueda ser real y efectivamente calculada por un ser humano también podría ser calculada mecánicamente en un número finito de pasos por una MT. Un corolario de todo ello es que la mayor parte de los números reales[50] no es computable. Esto es así porque la computabilidad de un número real supone por definición que su i-ésimo decimal se puede calcular en un finito número de pasos. Así, la cardinalidad del conjunto de números reales computables debe ser un infinito numerable, o $\aleph_0$. Dado que la cardinalidad de **R** es $\aleph_1$, la cardinalidad del continuo, el resultado es inmediato. [51]

9.2. Church y el cálculo lambda

El primero en contestar negativamente a la pregunta implícita en el *Entscheidungsproblem* de Hilbert no fue Turing, sino el lógico Alonzo Church. Lo hizo en el mismo año que Turing, 1936, de forma totalmente independiente y tan sólo unos meses antes; y para ello tuvo que lidiar por su cuenta con el concepto de computabilidad. El cálculo lambda de Church no es sino una forma de definir funciones. Para la demostración de sus dos teoremas de incompletitud Gödel había definido las funciones recursivas generales, Church mostró que su cálculo lambda era exactamente

[50] "*La mayor parte de los números reales*" es una expresión que, pese a su aspecto es absolutamente rigurosa. Significa "*todos los números reales excepto a lo sumo un conjunto de ellos con medida de Lebesgue igual a cero*"

[51] Más aún: la mayor parte de los números reales son *inexpresables*: no podemos ni siquiera mencionarlos ni hablar de ellos. Dado que toda alusión a un número consiste en una cadena finita de símbolos finitos, el conjunto de tales posibles secuencias es infinito, pero de cardinalidad numerable, con lo que no podemos cubrir sino una porción de medida cero de **R**.

igual de expresivo que la recursividad de Gödel (Breitner, 2011); posteriormente Turing mostraría que su MT era también equivalente a ambas formas de expresión funcional. La clase de funciones computables con el cálculo lambda coincide con la clase de funciones computable con una MT y con la clase de funciones recursivas generales. Los tres formalismos a pesar de ser muy diferentes, aparecían como equivalentes y con el mismo poder de expresión. Generalmente se toma esta notable coincidencia como evidencia de que la tesis de Church-Turing es cierta, es decir, que la noción intuitiva de algoritmo o procedimiento efectivo de cómputo equivale a la noción de cómputo en una MT. Sin embargo debemos apresurarnos a puntualizar que las argumentaciones de Church al respecto no eran demostraciones taxativas: éstas no podían existir toda vez que se trataba de identificar un concepto perfectamente formalizado: la recursividad, con otro que era intuitivo: el de calculabilidad efectiva.

El verdadero interés de esta noción de computabilidad reside en el hecho de que no todas las funciones ni todos los problemas matemáticos son computables. Así sucede, por ejemplo, con el décimo problema de Hilbert[52]. Una ecuación diofántica es una ecuación polinómica con coeficientes enteros, de la que se buscan asimismo soluciones enteras. El décimo problema de Hilbert, propuesto en la famosa conferencia de 1900 pregunta si hay un procedimiento efectivo que determine si una ecuación diofántica tiene o no solución. El problema quedó sin solución durante siete décadas, y Matiyasevich demostró en 1970 que este problema no tiene solución computable.

Debe hacerse notar desde un principio que el concepto de computabilidad nada tiene que ver con las posibilidades concretas de computación dada la tecnología de un momento dado, sino que es un concepto absoluto. Si un problema o un cálculo (como la constante de Chaitin, de la que hablaremos seguidamente) es no computable, así seguirá siendo por los siglos de los siglos. Se trata de un concepto absoluto (Penrose, 1991; 100).

[52] De la lista de 23 problemas que David Hilbert presentara en 1900 en su conferencia titulada "*Mathematische Probleme*" ante el Congreso Internacional de París

> mostrar que un conjunto es decidible no requiere más que señalar el algoritmo que lo genera. Y puesto que la noción intuitiva basta para identificar a un procedimiento como efectivo, puede hacerse sin una definición matemática de computabilidad. Sin embargo, para demostrar que no es decidible no basta con tener una noción intuitiva, se necesita una definición en regla. (Manzano, 2007)

La idea de Church para aprehender el concepto de computabilidad consistió en partir de un universo de objetos matemáticos que denominaremos operadores o funciones, y denotaremos $a, b, c, \dots, z, \dots$. Los argumentos de las mismas son de la misma clase: a su vez funciones u operadores. El resultado de operar dos de ellos es la obtención de otro operador (diremos que la composición de operadores es una operación interna en el conjunto de operadores).

Una función f de dos variables p, q se puede expresar como el resultado de aplicar la función composición fp a q. Y esta idea es extensible a funciones de más variables. La idea central del cálculo lambda de Church es la operación de abstracción, denotada por la letra **λ**. La forma canónica de la abstracción de Church es la siguiente:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x.[fx]}$$

Con ello se quiere expresar la función que consiste en aplicar f a un argumento x cualquiera. El énfasis de Church incide en la propia función, haciendo caso omiso del argumento. "El elegir el concepto de función como base fue ya un gran acierto, pero el distinguir en el lenguaje los valores de la función de la función misma, lo fue aún mayor" (Manzano, 2007). La variable x es una variable muda, y en la expresión entre corchetes simplemente indica el lugar (vacío) en el que se coloca el argumento. Así, $\boldsymbol{\lambda}$**x.[fx]** denota simplemente a la función **f**, que sólo entrega el valor *f(a)* cuando en el lugar del argumento se introduce el elemento a. Por este procedimiento podemos formalizar funciones para las que no existe nombre específico, por ejemplo: sea W la función que devuelve el argumento numérico más dos unidades elevado al cuadrado. Tendríamos:

$$W \equiv \boldsymbol{\lambda x}.[(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}]$$

Más aún, podemos expresar fácilmente las iteraciones de una misma función sobre un argumento. Así, si tenemos $\boldsymbol{\lambda f}.[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{fx})]$ denota la función que actuando sobre una función cualquiera (aquí f es un mero espacio para el argumento, por lo tanto es una variable muda) produce su iteración dos veces[53]. Entonces,

$$\boldsymbol{\lambda f}.[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{fx})]\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{gx})$$

Lo anterior también podemos escribir así: $\boldsymbol{\lambda fx}.[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{gx})$.

Church identifica los números naturales con estas iteraciones:

$$\boldsymbol{C_2} \equiv \lambda fx.[f(f(x))]$$

$$\boldsymbol{C_3} \equiv \lambda fx.[f(f(f(x)))]$$

$$\boldsymbol{C_4} \equiv \lambda fx.[f(f(f(f(x))))]$$, y en general

$$\boldsymbol{C_i} \equiv \lambda fx.\underbrace{[f(f(f \dots (f(x))))]}_{i\ veces}$$

Aunque fuera muy prolijo, sería posible desarrollar mediante la notación lambda de Church la totalidad de operaciones habituales de la aritmética, comenzando por la función sucesor, sumas, restas, productos, etc. Más aún: demostró que toda función recursiva era expresable mediante el cálculo lambda, lo que daba una nueva orientación al concepto de funciones computables.

Asimismo, el cálculo lambda usa la operación de *β- reducción*. En la notación del cálculo lambda se expresa así:

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N]$$

[53] Esta afirmación debe ser tomada literalmente: el operador $\boldsymbol{\lambda f}.[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{fx})]$ significa "itérese dos veces lo que sigue.

Y consiste, dado un término M en el que hay lugares argumentales libres indicados por x, en la sustitución en la expresión del término M cada x que aparezca libre por otra expresión que denotamos por N.

Demos por definidas todas las posibles funciones elementales mediante el cálculo lambda de Church; diremos que un término A puede ser reducido a un término B cuando mediante un número finito β-reducciones podemos pasar de A a B, y lo denotaremos así:

$$A \to^{*} B$$

La relación de λ-convertibilidad es trivialmente una relación de equivalencia.[54] Cuando una expresión no puede ser más β- reducida decimos que está en su forma normal. Es de crucial importancia que Church demostrara que no toda λ-sentencia tiene su forma normal correspondiente. Veamos un contraejemplo: sea $\boldsymbol{\omega}$ la función definida por duplicar el argumento.

$$\boldsymbol{\omega} = (\lambda \mathrm{x.\,xx})$$

Tomemos la iteración de $\boldsymbol{\omega}$ consigo misma:

$$\boldsymbol{\omega\omega} = (\lambda \mathrm{x.\,xx})(\lambda \mathrm{x.\,xx})$$

Podemos iterar indefinidamente la operación de β- reducción, pues dicha operación nos dará como resultado el término M=xx, en el cual cada aparición de x es substituido por N=$(\lambda \mathrm{x.\,xx})$; con lo que volvemos a obtener $\boldsymbol{\omega\omega} = (\lambda \mathrm{x.\,xx})(\lambda \mathrm{x.\,xx})$.

Es decir, tendremos una cadena infinita del tipo:

$$\boldsymbol{\omega\omega} = (\lambda \mathrm{x.\,xx})(\lambda \mathrm{x.\,xx}) \to (\lambda \mathrm{x.\,xx})(\lambda \mathrm{x.\,xx}) \to (\lambda \mathrm{x.\,xx})(\lambda \mathrm{x.\,xx}) \ldots$$

con lo que queda demostrado que $\boldsymbol{\omega\omega}$ no tiene forma normal.

[54] Esta afirmación significa exactamente que esta relación tiene tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva. La comprobación de cada una de ellas es inmediata: la función identidad hace que M esté relacionado consigo mismo; si M es equivalente con N, N lo es con M, y si M es convertible a P y P a N, por composición de funciones M lo es a P

Que un término ***F*** del cálculo lambda represente a una función numérica ***f*** significa exactamente que si aplicamos en el cálculo lambda la función ***F*** a un número natural dado (representado en el cálculo lambda por la iteración $\boldsymbol{C_i}$), obtenemos precisamente el número natural (representado en el cálculo lambda por la iteración $\boldsymbol{C_j}$) que representa el valor (***j***) que devuelve ***f*** con dicho valor inicial (***i***) como argumento. En símbolos:

$$(\forall i, j \in \mathbf{N}):\ \ (f(i) = j)\ \ \leftrightarrow\ \ (FC_i \to^* C_j) \qquad (1)$$

Con estas herramientas conceptuales Church acometió el *Entscheidungsproblem* apoyándose en la numeración que Gödel había desarrollado años antes para sus demostraciones de incompletitud de 1931: dadas unas expresiones en el cálculo lambda, podemos numerizarlas y una vez numerizadas, podemos crear con el cálculo lambda funciones que operen con dichos números (que provienen de λ-sentencias previas) para crear las más diversas funciones, por ejemplo, funciones que nos devuelvan las λ-sentencias originales, o funciones que verifiquen si la λ-sentencia correspondiente está bien formada, o si está en su forma normal.

Sin embargo, Church demostró que no es posible crear una función definible en el cálculo λ que, teniendo como entrada un número responda dicotómicamente a la pregunta de si la λ-sentencia correspondiente tiene una forma normal o es de la forma de la λ-sentencia $\boldsymbol{\omega\omega}$, y no la tiene. (Breitner, 2011)

La demostración fue realizada por reducción al absurdo[55], suponiendo que tal función sí existe, utilizándola para todo número, obtendríamos el listado numerable $A = \{A_1, A_2, \dots\}$ de todas las λ-sentencia que poseen forma normal. Por lo tanto, podríamos definir una segunda función ***e*** de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{e}(n) = \begin{cases} i + 1, & si\ A_n C_n \to^* C_i \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad (2)$$

[55] Y publicada en Church, A. (1936). *An unsolvable problem of elementary number theory*. American journal of mathematics, 58(2), 345-363.

Esta función, para cada valor ***n*** devuelve un 1 si ***n*** no es la codificación de Gödel de una sentencia del cálculo lambda para la cual existe forma normal; y devuelve el número (i+1) en caso de que sí lo sea, siendo ***i*** el número de la codificación correspondiente a la forma normal de la sentencia inicial.

Si ***e*** es una función efectivamente calculable, entonces existirá un término E del λ-cálculo que la represente. Más aún, Church demostró que E debería tener una forma normal, con lo que estaría en el listado A, digamos $E = A_n$ para algún natural n,

Es decir:

$$[EC_n \to^* C_i] => [A_n C_n \to^* C_i] \qquad (3)$$

Y por lo tanto, por (2), tendremos que

$$e(n) = i + 1 \qquad (4)$$

Pero entonces, por lo visto en (1):

$$A_n C_n \to^* C_{i+1} \qquad (5)$$

Así, obtenemos de (3) y de (5) una contradicción, con lo que nuestra hipótesis de partida debe ser falsa: no podemos encontrar una función definible en el cálculo λ que, teniendo como entrada un número responda dicotómicamente a la pregunta de si la λ-sentencia correspondiente tiene una forma normal o no la tiene. Con ello, queda resuelto de forma negativa el *Entscheidungsproblem*.

9.3. El problema de la parada (*halting problem*)

La extraordinaria intuición de Turing consistió en concebir una máquina de Turing (TM) general (la Máquina de Turing Universal, UTM). Dado que todo problema bien concebido podía ser codificado en una TM, la contribución de Turing al *Entscheidungsproblem* de Hilbert consistió en mostrar que existía un problema para el que una UTM era incapaz de responder en un tiempo finito. Se denominó el problema de la parada. Consistía, dada una TM con una entrada dada, decidir si dicha TM se detendrá correctamente o no. Precisando más: se trataba de encontrar para una UTM un programa ***P***, tal que, dado un programa cualquiera ***q*** en una TM y unos datos de entrada ***x***, muestre como salida un **1** si la MT programada con ***q*** con entrada ***x*** termina en un número finito de pasos o muestre como salida un **0** si dicha TM programada con ***q*** con ***x*** como entrada entra a un bucle infinito.

Turing demostró por reducción al absurdo que el programa **P** no puede existir. El esquema de la demostración es el siguiente:

Supongamos que ***P*** existe. Ante el par de entrada ***(q, x)***, una UTM programada con ***P*** dará como respuesta ***1*** si una TM con un programa ***q*** se parará ante una entrada ***x***, y un ***0*** en caso contrario. Podemos concebir un programa ***D*** que tenga a ***P*** como subrutina y que haga lo siguiente:

Ante el código de un programa cualquiera, llamémoslo ξ, el programa D realiza dos acciones:

1. Llama al programa **P** para obtener la información de si una **MT** con ξ como programa se detendrá ante una entrada que es asimismo ξ **.** Es decir, ***D*** indaga con ayuda de ***P*** qué respuesta tiene una **MT** ante el par **(ξ, ξ).**
2. Obtenida la respuesta, **D** se comporta de la siguiente manera en función de la misma:

a. Si ξ termina (es decir, si **P** le entrega un **1** ante la entrada **(ξ, ξ)**, entonces **D** entra en un bucle infinito.

b. Si ξ **no termina** (es decir, si P le entrega un 0 ante la entrada **(ξ, ξ)**), entonces **D** se para.

Ahora bien, dado que no hay ninguna restricción para la secuencia de entrada **ξ,** bien puede ser la que codifique al propio programa ***D*** (nótese la autorreferencia de sabor gödeliano). En dicho caso, nos encontramos con que el programa ***D*** termina si ***D*** no termina, y viceversa.

Como no hay manera de evitar esta contradicción, necesariamente debe ser errónea la suposición inicial. Es decir, ***P*** no existe.

9.4. El azar en el seno de la matemática. Chaitin y la complejidad algorítmica

Dada la imposibilidad, ahora bien certificada por el teorema de Turing, de resolver el problema de la detención, pasamos a preguntarnos por la probabilidad de parada de un algoritmo cualquiera. Con ciertos programas (los bien constituidos), la máquina se detendrá convenientemente, y con otros se quedará atascada en un bucle infinito. Como en definitiva un programa no es sino una secuencia de símbolos codificables en ceros y unos, supondremos que escribimos un programa de longitud ***n*** a base de ***n*** ceros y unos tirando una moneda al aire ***n*** veces, existen 2^n programas posibles. Por lo tanto la probabilidad de obtener un programa concreto de n bits es 2^{-n}. De todos estos programas, una parte muy pequeña acabarán correctamente en la instrucción **FIN DE PROGRAMA**. Sea A_n el número de programas correctos desde este punto de vista, de n bits. Por lo tanto, la probabilidad de generar aleatoriamente un programa de n bits que detenga la máquina será:

$$P_n = A_n \cdot 2^{-n}$$

Y si lo extendemos a todos los programas posibles finitos obtenemos la constante **Ω** de Chaitin.

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{\iota=0}^{\infty} A_n \cdot 2^{-n}$$

La constante de Chaitin es una constante muy especial: es un número algorítmicamente aleatorio. Esto significa que no puede comprimirse en un programa más breve que él mismo. Kolmogorov había ideado el concepto de complejidad algorítmica (o cantidad de información) de un objeto matemático como el número de bits del programa más conciso capaz de generarlo. Lo veremos con dos ejemplos:

1. El número $\boldsymbol{\pi}$**.** A primera vista parecería que necesitamos una cantidad infinita de bits para expresar completamente el desarrollo decimal de $\boldsymbol{\pi}$**,** ya que dicho desarrollo implica a infinitos decimales sin que exista periodo alguno de repetición[56]. Sin embargo existen programas muy cortos y sencillos que generan $\boldsymbol{\pi}$ con cualquier cantidad de decimales, luego la complejidad algorítmica de $\boldsymbol{\pi}$ es pequeña; es decir, $\boldsymbol{\pi}$ no es algorítmicamente aleatorio.
2. El conjunto de Mandelbrot. Se trata del conjunto de aquellos de los puntos del plano complejo para los cuales la iteración de una sencilla función compleja tomándolos como semilla no se desborda hacia el infinito. La frontera de dicho conjunto es un fractal que, con sus recovecos y espirales de infinito detalle, es generable por programas extraordinariamente escuetos, por lo tanto posee muy poca complejidad en el sentido de Kolmogorov.

Los números reales en cuya expansión decimal aparece cualquier ristra de n cifras con la misma probabilidad se denominan números normales[57]. La demostración de normalidad de un número real suele ser por lo general muy difícil. Sobre $\boldsymbol{\pi}$ hay fundadas

---

[56] Podemos asegurar lo anterior porque $\boldsymbol{\pi}$ es un número irracional, cosa que Lambert demostró ya en 1770. De hecho es no sólo irracional, sino trascendente (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros, como demostró Lindemann en 1882).

[57] Estrictamente hablando los múmeros mencionados serían "normales en base 10", reservando el nombre de "normales" a aquellos que lo son en toda base.

sospechas de que lo es, de hecho en su expansión decimal de sus primeros veintitrés billones[58] de cifras, parece serlo, pero no hay hoy por hoy demostración sobre ello[59].

Chaitin (2003) definió en la década de los 60 del siglo pasado un *objeto algorítmicamente aleatorio* como aquel imposible de generar por un programa más corto que sí mismo, prácticamente a la vez que Kolmogorov. Demostró que todo número algorítmicamente aleatorio era normal, todas las j-secuencias de dígitos aparecían con igual frecuencia en el desarrollo decimal, y en cualquier base. Sin embargo la recíproca no es cierta: no todo número normal es algorítmicamente aleatorio, sin ir más lejos, $\boldsymbol{\pi}$, **e** o $\sqrt{\mathbf{2}}$ no lo son.[60]

A pesar de que este número $\boldsymbol{\Omega}$ está perfectamente definido y acotado entre cero y uno, en palabras de Chaitin, referidas a la expansión binaria de las cifras de $\boldsymbol{\Omega}$:

> No solamente no se puede calcular este número, sino que nunca se pueden saber cuáles son sus bits, porque esa información es matemáticamente incompresible... es incompresible e incomprensible; las palabras son muy semejantes. Para obtener los n primeros bits de omega necesito una teoría de n bits, de complejidad igual al fenómeno que quiero estudiar. Eso significa que no gano nada razonando. (Chaitin, 2003)

[58] Billones de los españoles, es decir, aproximadamente $23 \cdot 10^{12}$

[59] Concretamente en sus primeros veintitrés billones de cifras. Trueb, P. (2016). Digit Statistics of the First 22.4 Trillion Decimal Digits of Pi. *arXiv preprint arXiv:1612.00489*.

[60] El caso de $\sqrt{2}$ es especialmente fácil de demostrar. La igualdad $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ nos da pie a expresar $\sqrt{2}$ como una fracción continua: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$. Por lo tanto un simple programa como

Inicializar r al valor 0
Hacer r=$\mathbf{1} + \frac{1}{2+r}$
Repetir el paso anterior m veces
Dar el valor de r

nos da $\sqrt{2}$ con todos los decimales que deseemos simplemente aumentando convenientemente el valor de m.

El conocimiento de los M primeros dígitos de **Ω** nos proporcionaría información fidedigna sobre la detención o no detención de todos los algoritmos de longitud menor o igual a M. Esto no parece ser gran cosa, pero el conocimiento que dichos decimales aportarían a los matemáticos es algo inconmensurable: problemas de teoría de números como la conjetura de Goldbach, o muchísimas otras conjeturas, llevan siglos ocupando las mejores mentes de la especie humana, y la existencia de un solo contraejemplo demostraría negativamente cada conjetura. Los programas dedicados a buscar contraejemplos por mero rastreo entre los naturales de cualquier hipótesis en teoría de números son programas muy sencillos, de una complejidad algorítmica muy baja. Sabiendo si tales programas se detienen o no al encontrar el contraejemplo obtendríamos la solución de todas esas conjeturas mediante el conocimiento, tan sólo de la constante **Ω** de Chaitin. No obstante esa posibilidad está más allá de toda esperanza, y ello por doble motivo:

1. Tener los N primeros decimales de la expansión de **Ω** está fuera de nuestro alcance, en cuanto **N** deja de ser un número exiguo. No existe función recursiva que halle **Ω**, y por lo tanto **Ω** no es computable.
2. Aun teniendo dichos decimales, extraer de ellos la información concerniente a un programa concreto no es factible: "el tiempo t(n) que toma hallar todos los programas que paran con longitud menor que **n** a partir de **Ω** (**n**) crece más rápido que cualquier función recursiva" (Mario et al., 2006)

Para Chaitin la complejidad informacional está detrás del motivo profundo del resultado de los teoremas de incompletitud de Gödel:

> Los conjuntos de axiomas que normalmente utilizan los matemáticos son bastante concisos, pues de no serlo nadie creería en ellos. En la práctica, hay un vasto mundo de verdades matemáticas —una cantidad infinita de información— mientras que, por otra parte, cualquier conjunto dado de axiomas solamente abarca una cantidad finita, diminuta, de esa información. Tal es la razón, en pocas palabras, de que el teorema de incompletitud de Gödel sea, no misterioso y complicado, sino natural e inevitable. (Chaitin, 2003)

De hecho, una forma alternativa de enunciar los teoremas de incompletitud en versión de complejidad algorítmica es: "de un sistema formal axiomático cuya complejidad sea N no puede derivar un teorema que afirme que un objeto específico posee complejidad substancialmente mayor que **N**." (Mario et al.,2006)

Como hemos visto, **Ω** no tiene estructura: es puro azar a pesar de estar perfectamente definido. El siguiente éxito de Chaitin fue demostrar que el problema de hallar el i-ésimo decimal de **Ω** era traducible a una ecuación diofántica (de coeficientes enteros), que ocupaba 200 páginas, tenía 20.000 variables y un parámetro (Chaitin, 1988). Demostró que ambos problemas eran isomorfos, y que la pregunta ¿Es cero o uno el enésimo bit de la expansión decimal binaria de omega? en el primer problema correspondía a la pregunta ¿Tiene un número finito de soluciones la ecuación cuando hacemos el parámetro igual a n? Este asunto parece exclusivamente técnico, pero tiene importantísimas implicaciones filosóficas: tenemos dos problemas, A (el n-ésimo decimal de **Ω** y B (la resolución de ecuaciones diofánticas) que se han demostrado isomorfos. Tenemos la demostración de que el problema A es no computable, algorítmicamente aleatorio, caótico e irresoluble. Para nada ayuda el planteamiento B a encontrar solución en el A; pero hemos demostrado que B es igualmente aleatorio, caótico e irresoluble y eso es lo importante: el azar está incrustado en el seno mismo de la aritmética, dominio de las ecuaciones diofánticas.

Todo esto viene a ser una cuarta contestación negativa a los deseos de David Hilbert. La pregunta inicial la hizo Hilbert, la contestó Gödel, la replantearon en términos diferentes Turing y Church y ahora la vuelve a responder Chaitin. Tras estos resultados, y quizás otros que vengan queda desterrada para siempre la posibilidad de la mera existencia de una *Teoría del Todo* para las matemáticas, y de una forma realmente impactante: es posible que en el desarrollo decimal de la constante de Chaitin estén escondidos todos los misterios que la matemática oculta a los ojos de los hombres; pero por los dos motivos arriba explicados, ni podemos conocerlos ni, conociéndolos, podríamos extraer la información que necesitamos. Las teorías científicas son exitosas porque pueden comprimir: en unos pocos axiomas (en suma, expresables con pocos bits de información) condensan una enorme capacidad explicativa. Esto significa que la parte del universo que es compresible (que se puede comprimir) es a su vez comprensible (que se puede comprender). Para Martin-Delgado (2013) podemos dividir nuestra *esfera de conocimiento* en tres partes: la ciencia actual (lo actualmente conocido); la ciencia futura (que será conocida en el futuro); y lo incognoscible, que coincide con lo irreductible. En el mismo seno de la matemática hay un núcleo incognoscible por irreductible, y la constante de Chaitin es ejemplo paradigmático de ello.

9.5. La información escondida

Hemos afirmado que dentro de la expansión decimal de **Ω** está toda la información que necesitaríamos para responder a todas las preguntas matemáticamente relevantes y algorítmicamente implementables, y hemos asegurado que, pese a ello, no podemos servirnos de dicha información, y hemos dado dos motivos para ello. Puede parecer chocante que sea imposible extraer información de allá donde está, sabiendo además que realmente está allí. Sin embargo esto no tiene nada de misterioso y es perfectamente explicable. Ni siquiera se necesita que el objeto portador de dicha información tenga gran complejidad algorítmica, como es el caso de **Ω**. Basta con que el número real en cuestión sea normal. Lo veremos con π.

Como hemos dicho antes, que π sea normal (conjetura muy razonable) significa que la aleatoriedad de sus cifras decimales es tal que cualquier n-cadena aparece con la frecuencia y distribución que le corresponde por mero azar. Esto es, cada dígito aparece 1/10 de las veces, cada combinación de 2 dígitos aparece 1/100 de las veces, y cada j-cadena aparece cada $1/10^j$ de las veces. Tenemos dos hechos incuestionables por lo tanto:

> A) π es generable por programas de poquísimas líneas de código, luego no puede encerrar más información que el programa que lo genera. Por lo tanto π encierra poca información.

B) Dentro de π, admitiendo la normalidad, existe cualquier ristra de cifras (mientras sea una ristra finita). Por lo tanto existe una codificación de este Trabajo Fin de Máster[61], en el interior de π.

¿Cómo es posible conjugar ambas afirmaciones? ¿Podría el autor haber copiado este trabajo de dicho número? ¿Podría un tribunal acusar de plagio al autor demostrando tal circunstancia?

Esto, por supuesto no es ningún enigma. Tiene una respuesta clara: para dar la información contenida en este trabajo se pueden hacer dos cosas: ofrecer el trabajo escrito o dar el puesto del primer decimal de π a partir del cual está codificado (dada una codificación previa pactada). Dada la distribución de las j-cadenas con equiprobabilidad a lo largo de la expansión decimal, no ahorramos nada de información haciendo una cosa o la otra: el número que expresa dicho puesto ocuparía aproximadamente el mismo número de hojas que el propio trabajo. De ahí que sea necesario inyectar en el proceso la misma cantidad de información que se pretende obtener. Por lo tanto, realmente no hay información en π: al estar todo, en realidad no hay nada.

[61] De hecho deben existir infinitas copias del mismo, incluso con faltas de ortografía y conceptos erróneos que no existen en el original.

10. Conclusión

Cuando un lógico se refiere a la verdad emplea uno de los dos significados siguientes: o bien se referirá a que la afirmación en cuestión se deduce limpiamente de los axiomas de partida o que se puede verificar que la proposición es válida en todos los modelos de la teoría. ¿Debería contentarse un matemático con este concepto de verdad, o debería remitirse a un concepto más primitivo, más trascendental?

El matemático norteamericano de origen italiano Gian-Carlo Rota (1991) propone un ejercicio mental para ilustrar su particular visión de la verdad matemática, frente a los excesos formalistas: imaginar la labor docente de un profesor que, teorema tras teorema, desgrana en la pizarra las limpias deducciones formales descuidando todo posible significado real de lo que allí se muestra. No hay tal profesor - explica Gian-Carlo Rota- al contrario: el buen profesor ilustrará cómo los axiomas de partida son justificados por los bellos y útiles teoremas que con ellos se pueden demostrar. Son los teoremas los que re-obran sobre los axiomas, en algo similar a lo que se denomina círculo hermenéutico. No escogió Peano sus axiomas aleatoriamente, fijándose únicamente en que formaran un conjunto coherente exento de contradicción; al contrario: escogió cuidadosamente aquellos que recogían la esencia el concepto que pretendía atrapar: el de número entero que sirve para contar vacas, leopardos y mazorcas de maíz. A modo de ejemplo, la definición de topología en un conjunto[62] no consiste en una lista de tres propiedades meramente exenta de contradicción que deben cumplir ciertos subconjuntos del conjunto de partes (a los que llamaremos *abiertos de la topología*), sino que bien al contrario, se trata de encontrar aquellas propiedades que sean capaces de atrapar perfectamente las nociones de proximidad, de interior y de frontera que ya existían en la mente de los matemáticos, y hacerlo sin atender a un concepto previo de distancia; y que han demostrado sus frutos en trabajos innumerables de matemáticos desde que Poincaré la denominara *Analisis situs* en 1895. Es decir:

[62] Una topología en un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que cumplen tres propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $A_i, A_j \in \mathcal{T} \rightarrow A_i \cap A_j \in \mathcal{T}$
3. $(\forall S \subset \mathcal{T})\colon \bigcup_{A \in S} A \in \mathcal{T}$

> *había una verdad mundana, previamente percibida que sirve de motivación para toda demostración de los teoremas, y no al contrario, como pretenden deshonestamente los filósofos formalistas.* (Rota, 1995)

Otro ejemplo: la suma alternada de vértices, aristas y caras de todo poliedro tridimensional topológicamente equivalente a una esfera es igual a 2 (χ, o característica de Euler-Poincaré), y ésta es una verdad mundana, largamente observada cuya justificación más profunda proviene de la teoría de grupos y cuyas aplicaciones trascienden el espacio usual tridimensional y son generalizables a cualquier espacio y cualquier tipo de figura. La verdad que explicará el buen profesor de matemáticas a sus alumnos, afirma Gian-Carlo Rota, tiene un íntimo contacto con mundo real.

> *Un buen libro de matemáticas es uno que, sin dejar de servirse del método axiomático-deductivo, sabe convencer al lector de que lo que parece mera deducción formal consiste en realidad en el enunciado de hechos reales y verificables, hechos que pueden ser útiles en circunstancias vitales cualesquiera.* (Rota, G.C:, 1995)

Según Rota, el foco puesto en la verdad formal ha entorpecido la tarea de aclarar la verdadera naturaleza de la verdad matemática, ya que es un acercamiento reduccionista. La existencia de tan sólo cinco sólidos platónicos en el espacio euclídeo ordinario o la existencia de un increíble *heptaedro toroidal*[63] es algo más que la consecuencia de unos axiomas: es una verdad empírica del mundo en el que estamos inmersos. Más aún: tan sólo algún o algunos conjuntos de axiomas de partida recogerán lo que entendemos por espacio euclídeo, aquel en el que vivimos; la existencia de cinco sólidos platónicos es por tanto independiente tanto de nuestra voluntad como de cualquier sistema axiomático, si bien podemos construir sistemas axiomáticos en los que esta verdad sea

[63] Denominado poliedro de Szilassi. https://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro_de_Szilassi

deducible[64]; y serán los sistemas que tomaremos como deseables para construir nuestra geometría por el incontrovertible hecho de que a través de esos conjuntos de axiomas podemos modelizar nuestro mundo real.

Este acercamiento a la verdad matemática obvia intencionadamente el otro posible: aquel que aflora cuando la matemática se debe exclusivamente a sí misma y no tiene en cuenta necesidad empírica alguna, tal y como sucede a menudo con las áreas de la matemática que en cada momento son consideradas como "matemáticas puras", tal y como sucede con la teoría de números o con el álgebra más abstracta. No es inusual que explorando ámbitos hiperespecializados de un aspecto matemático, logros obtenidos en cualquier otro vengan al auxilio, proporcionando una profunda sensación de estar descubriendo, y no inventando. El propio Rota menciona[65] el caso del Teorema de los números primos[66], conjeturado primero por Gauss a partir de una cierta evidencia numérica y demostrado mucho después de forma independiente por Hadamard y de la Vallée-Poussin utilizando la teoría de funciones meromorfas, algo ni remotamente emparentado con los números primos hasta el momento. Otro tanto podríamos decir de la demostración por Andrew Willes en 1995 del conocido como Último Teorema de Fermat 358 años después de que fuera enunciado por Fermat, con un arsenal matemático de última generación que nada parecía tener en común a priori con el tema: las funciones modulares, y todo ello a través de una conjetura previa conocida como conjetura de Taniyama-Shimura, que involucraba a ecuaciones elípticas y formas modulares. Una teoría, que en principio ha sido planteada para un ámbito, sirve de repente en otro completamente diferente de forma tan inesperada que sorprende a los propios matemáticos que trabajan en esas teorías. El propio Willes describía así su trabajo en matemáticas:

---

[64] A estas alturas deberíamos ser más riguroso y decir*: podríamos construir sistemas axiomáticos que tuvieran modelos en los que el enunciado de existencia de cinco y sólo cinco sólidos platónicos del sistema fuera satisfecho en dichos modelos*.
[65] Rota (1991)
[66] Este teorema trata de la distribución asintótica de los números primos, concretamente de la distribución del número de primos menores que un número natural x dado, $\pi(x) \to \dfrac{x}{\log x}$.

> *Quizás la mejor manera de describir mi experiencia haciendo matemáticas sea comparándola con entrar en una mansión oscura. Entras en la primera habitación, y está oscura, completamente a oscuras. Vas dando tumbos, tropezando con los muebles. Poco a poco aprendes donde está cada mueble, y finalmente, después de más o menos seis meses, encuentras el interruptor de la luz y lo conectas. De repente todo se ilumina, y puedes ver exactamente dónde estás. Entonces entras en la siguiente habitación oscura…*[67]

Este segundo acercamiento a la verdad matemática sería menos instrumental que el primero, no hablaría de verdades del mundo sino de la propia matemática, y los matemáticos que a ello se dedican suelen tener una inclinación platónica al respecto, derivada de la íntima experiencia de descubrir un mundo "*que está ahí*", aunque a oscuras, como diría Willes. Tal es la posición de Kurt Gödel. Esta visión platónica de la matemática explica además el motivo de porqué la otra visión se sostiene: el mundo real, con sus objetos reales, es un pálido reflejo del mundo de las ideas en las que viven los objetos matemáticos, por eso las leyes de aquellos rigen los comportamientos y naturalezas de estos.

Se ha tratado de mostrar a lo largo de este trabajo que la visión platónica de las matemáticas es completamente superflua e innecesaria. La noción de verdad matemática es compleja y multiforme, pero nos podemos acercar a ella a través de una teoría de la verdad general, como exigía Benacerraf, y lo mencionábamos en la introducción. Tal es la teoría semántica de la Verdad de Tarski. En ella, la noción de verdad deriva de las nociones de satisfacción y referencia; de ahí su carácter semántico. Adoptando esta teoría de verdad, los enunciados matemáticos son más que símbolos con una sintaxis: los términos que en ellos aparecen son nombres de objetos: objetos matemáticos.

La cuestión es cómo adaptar la teoría tarskiana a la verdad matemática, porque

[67] Citado en Badiou, A., & Haéri, G. (2015). *Éloge des mathématiques*. Flammarion.

> Tarski mantiene la intuición de la teoría de la correspondencia de que la verdad tiene algo que ver con la realidad, que un enunciado sea o no verdadero depende de cómo es el mundo.[68]

Para incardinar la noción correspondiente implícita en la teoría de Tarski con ese "cómo es el mundo" introducimos la noción de modelo. En síntesis, para tener un modelo necesitamos un universo $\mathcal{U}$ de objetos. Teniendo esto en cuenta no parece fácil asumir la concepción del formalismo radical que defiende que la matemática es una mera combinatoria sin sentido (sin semántica) de símbolos mediante reglas precisas, aunque aceptaremos, y de buen grado, el rigor que emana del formalismo. Sin embargo, la fundamentación rigurosa y formal de la matemática entera sobre la TC, y concretamente sobre la noción primitiva de tan sólo dos elementos: *conjunto* y *pertenencia* (o si se prefieren *clase* y *pertenencia* en la teoría NBG); nos permite construir todo objeto matemático a partir del conjunto vacío. Sin pretender cerrar el tema de la supuesta ontología de los objetos matemáticos, creemos que esto es suficiente para despreocuparse de ello: no es necesario suponer ninguna ontología; de ahí que el platonismo matemático sea superfluo. Podemos asumir perfectamente con Quine que ser simplemente es ser el valor de una variable cuantificada.

Entendemos que el contacto con las verdades matemáticas y con su inherente belleza haga a los matemáticos decir cosas como ésta:

> Las matemáticas, consideradas correctamente, poseen no solamente verdad, sino una suprema belleza fría y austera, como la de una escultura, que no apela a ningún aspecto de nuestra más débil naturaleza, y que carece de los primorosos atavíos de la pintura o de la música, aunque es de una pureza sublime y capaz de una perfección rigurosa como solamente puede exhibir el arte más elevado. El verdadero espíritu del deleite, de la exaltación, del sentimiento de ser más que

[68] Diez, A. (2009; 50)

> humano, que es la piedra de toque de la más alta perfección, ha de buscarse en las matemáticas al igual que en la poesía. [69]

Pero no debemos olvidar que es un formalista quien lo escribe. La poderosa impresión de existencia de los entes matemáticos proviene de la necesidad de sus propiedades, de la independencia de las mismas de la voluntad del investigador; esa es toda la realidad ontológica de los objetos matemáticos: su hábitat es la mente de los matemáticos, no un mundo cristalino y fantástico de objetos matemáticos. Esa necesidad proviene de la necesidad de la trabazón lógica que subyace al trabajo matemático. La matemática se funda como hemos dicho en la TC, pero no menos en la lógica. La lógica (alguna lógica, no necesariamente lo que entendemos por *lógica clásica*) es una presuposición tácita de todo trabajo matemático.

La inmensa mayoría de la producción matemática se ha realizado con la lógica clásica de primer y segundo orden; y no deja de ser irónico que de la lógica provenga una de las más terribles limitaciones de la matemática: siempre habrá proposiciones verdaderas que serán indemostrables, si lo que manejamos es un sistema axiomático con la suficiente entidad como para dar cuenta de la aritmética. Este resultado de Gödel colocará en su justa medida lo que podemos esperar de la verdad matemática, admitiendo una visión que se aleja bastante de la ingenua tesis clásica que mencionábamos al inicio, pero al menos nos proporciona una visión más adecuada de lo que debemos entender por verdad matemática.

[69] Russell, B. (1919). *The Study of Mathematics. Mysticism and Logic and Other Essays.*

APENDICE 1: Definiciones basales

A continuación se ofrecen las definiciones de los principales conceptos matemáticos basados exclusivamente en la TC. Son conceptos necesarios para entender cabalmente el texto principal. A partir de ellos se edifica la matemática entera en su concepción actual.

PAR ORDENADO

Sea X un conjunto, sean $a,b \in X$, definimos $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$. Denominaremos a *a* primer elemento del par y a *b* segundo elemento del par. Análogamente, definimos la n-tupla ordenada de la siguiente forma: $(a,b,...,n)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},...,\{a,b,...,n\}\}$.

PRODUCTO CARTESIANO

Sean X, Y dos conjuntos. Definimos el producto cartesiano $X \times Y$ como el conjunto de los pares ordenados siguiente:

$$X \times Y = \{(a,b) \mid a \in X, b \in Y\}$$

CORRESPONDENCIA ENTRE DOS CONJUNTOS

Sean X, Y dos conjuntos. Una correspondencia de X en Y, $f: X \to Y$ es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. El conjunto X es el conjunto inicial de la correspondencia f, y el conjunto Y, el conjunto final.

Llamaremos origen de la correspondencia al conjunto

$$or(f)=\{x \in X \mid (\exists y \in Y) \wedge (x,y) \in f\}$$

Llamaremos imagen de la correspondencia al conjunto

$$img(f)=\{y\in Y\mid(\exists x\in X)\wedge(x,y)\in f\}$$

Si $(x,y)\in f$, el hecho de que y es la imagen de x por la correspondencia f lo denotaremos así: $y=f(x)$.

RELACIONES EN UN CONJUNTO

Sea X un conjunto. Una relación R es una correspondencia de X en el propio X. Si $(a,b)\in R$ diremos que a está relacionado con b mediante la relación R, y lo denotaremos así: aRb. En caso contrario denotaremos $a\overline{R}b$ o $\neg(aRb)$.

Una relación tiene la propiedad reflexiva (R) sii $(\forall a\in X):aRa$

Una relación tiene la propiedad antirreflexiva (Ar) sii $(\forall a\in X):a\overline{R}a$

Una relación tiene la propiedad simétrica (S) sii $(\forall a,b\in X):aRb\Rightarrow bRa$

Una relación tiene la propiedad antisimétrica (As) sii
$(\forall a,b\in X):(aRb\wedge bRa)\Rightarrow(a=b)$

Una relación tiene la propiedad transitiva (T) sii
$(\forall a,b,c\in X):(aRb\wedge bRc)\Rightarrow aRc$

Si una relación tiene las propiedades RST se denomina relación de equivalencia.
Si una relación tiene las propiedades R, As, T se denomina relación de orden.

CLASES DE EQUIVALENCIA Y CONJUNTO COCIENTE

Si en un conjunto X hay definida una relación de equivalencia se denomina clase de equivalencia de un elemento $a\in X$ al conjunto $[a]=\{x\in X\mid xRa\}$. Obviamente, en virtud de la propiedad reflexiva de toda relación de equivalencia, $a\in[a]$.

Se denomina conjunto cociente por la relación R al conjunto de las clases de equivalencia respecto a R; y se denota X/R. Es inmediato comprobar que $X = \bigcup_{[a]\in X/R}[a]$

NOCIONES DE ORDEN

Sea (X, $\leq$) un conjunto con una relación de orden. Sea $S \subseteq X$ un subconjunto cualquiera de X.

Orden total: (X, $\leq$) es un orden total si toda pareja de elementos de X está relacionada, es decir, si $(\forall x, y \in X):(x \leq y) \vee (y \leq x)$

Mínimo: $\min(X) = z \in X \mid (\forall y \in X): z \leq y$

Máximo: $\max(X) = z \in X \mid (\forall y \in X): y \leq z$

Ínfimo: $\inf(S) = \max\{x \in X \mid (\forall y \in S): x \leq y\}$

Supremo: $\sup(S) = \min\{x \in X \mid (\forall y \in S): y \leq x\}$

Buen orden: (X, $\leq$) es un buen orden si es un orden total y cualquier subconjunto de X tiene mínimo.

APLICACIONES

Dados dos conjuntos X, Y, una aplicación de X en Y es una correspondencia $f : X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$ que verifica una doble condición:

1. $or(f) = X$
2. $(\forall y, y' \in Y):[(f(x) = y) \wedge (f(x) = y')] \Rightarrow (y = y')$. Es decir, todo elemento del conjunto origen debe tener una y solo una imagen.

Aplicación inyectiva: $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva sii $(\forall x, y \in X):(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Aplicación suprajectiva: $f: X \to Y$ es sobreyectiva sii $img(f) = Y$. Es decir, sii $(\forall y \in Y): \exists x \in x \mid y = f(x)$

Aplicación biyectiva: $f: X \to Y$ es biyectiva sii es inyectiva y suprayectiva.

> En tal caso, X e Y son de la misma cardinalidad (denotaremos $X \approx Y$)
> $(X \approx Y)) \Leftrightarrow \exists z \in BIY(X,Y)$
> Si $f: X \to Y$ es biyectiva, entonces tiene inversa bien definida, que denominaremos $f^{-1}: Y \ni y \to x \in X \mid f(x) = y$

SUCESIONES DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

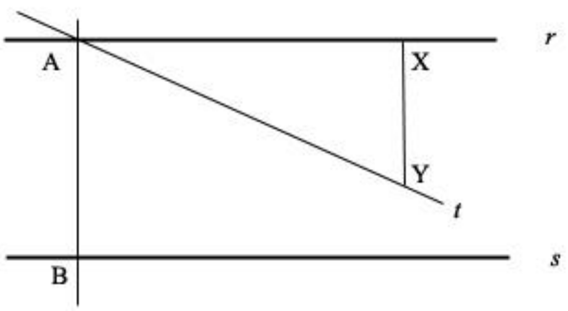
Dado un conjunto infinito X, una sucesión de elementos de X es una aplicación $a: N \ni n \to a(n) \in X$. Al elemento genérico $a(n)$ se le denomina n-ésimo elemento de la sucesión.

POTENCIA DE UN CONJUNTO

Denominamos potencia de un conjunto X al conjunto de todos sus subconjuntos. $P(X) = \{y \mid y \subset X\}$. No se debe confundir con el conjunto $\{y \mid y \in X\}$, que es, tautológicamente, el propio conjunto X. Si X es un conjunto finito de cardinalidad n, entonces la cardinalidad de $P(X)$ es 2^n. Se demuestra trivialmente por el hecho de que en un subconjunto cualquiera de X, cada uno de los elementos de X puede pertenecer o no pertenecer al mismo, dos posibilidades para cada uno de los n elementos.

APENDICE 2: VARIAS DEMOSTRACIONES ANTIGUAS

Presunta demostración de Proclo del quinto de Euclides.



"Sean dos rectas paralelas ***r*** y ***s***. Supongamos que ***t*** es distinta de ***r*** y que corta a ***r*** en A. Sea B el pie de la perpendicular desde A a ***s***. Veamos que ***t*** corta a ***s***. Si ***t*** coincide con la recta AB, ***t*** corta a ***s***. Si ***t*** no coincide con la recta AB una de las semirrectas de ***t***, la AY, está entre la semirecta AB y una semirecta de ***r***. Sea X el pie de la perpendicular de Y hasta r. Ahora si Y se desliza hasta el final de ***t***, el segmento XY crece indefinidamente y como la distancia entre ***r*** y ***s*** es constante, en algún momento deberá cruzar ***s***."

Por lo tanto, Proclo demuestra pretendidamente que toda recta que pase por A que no sea r corta indefectiblemente a s; y por lo tanto demuestra (de nuevo pretendidamente) la unicidad de las paralelas a una dada por un punto exterior. El error del Proclo es doble: por un lado supone que toda magnitud que crezca indefinidamente sobrepasa cualquier magnitud dada, lo que no es correcto: una sucesión tal y como (n-1)/(n+1) es siempre creciente pero nunca alcanza el valor de la unidad. Por otro lado supone que la distancia que separa a r y a s es constante, cuando de la definición de paralelas de Euclides lo único que se deduce es que no se cortan nunca. Realmente está introduciendo el propio postulado que desea demostrar, de forma subrepticia al hacer esta suposición. Incurre por lo tanto en una *petitio principii*.

Demostración pitagórica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

En la escuela pitagórica la irracionalidad de $\sqrt{2}$ fue un escándalo, hasta el punto de que este descubrimiento, realizado por Hipaso de Metaponto, según la leyenda fue silenciado (Lan, 1988). Para la escuela pitagórica el número era la esencia del universo, el αρχή. La consideración de "número" era la de "número natural", y las fracciones que representaban los números racionales no ofrecían mayor problema filosófico, pues eran construidos a partir de los naturales sin problema alguno. Sin embargo, la existencia de longitudes inconmensurables[70] con los números fraccionarios derrumbaba el edificio conceptual de la escuela. La demostración de Hipaso de Petaponto, cómo no, es por reducción al absurdo, suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional:

Supongamos que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \qquad (1)$$

para dos naturales *p*,*q* primos entre sí. Entonces $2 = \frac{p^2}{q^2}$ y por tanto:

$$2q^2 = p^2 \qquad (2)$$

En esta expresión q>1 necesariamente, pues en caso contrario sería p=$\sqrt{2}$ y sería un número natural. Además, p^2 debe ser un número par, lo cual sólo es posible si p es par a su vez, esto es: $p = 2c$ para algún $c \in N$. Sustituyendo en (2) tenemos:

$$p^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2q^2$$
$$2c^2 = q^2 \qquad (3)$$

De (3) obtenemos que q^2 es par, y por lo tanto q también lo es. Pero p y q no pueden ser ambos pares, pues inicialmente hemos supuesto que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p y q primos entre sí.

[70] En este sentido, "inconmensurable" no significa "enorme", sino" imposible de medir con". Los irracionales aparecían como inconmensurables con los racionales.

Y si ambos fueran pares tendrían al 2 como divisor común. Por lo tanto hemos obtenido una contradicción y el supuesto de partida debe ser falso: no existen dos naturales p, q tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Esta demostración abre los ojos de la matemática hacia unas dimensiones antes desconocidas: dentro de las magnitudes reales (de medida de longitudes de cosas tan reales como la diagonal de un cuadrado de lado unidad) existen valores que no son "captados" por los números naturales en base a fracciones, sino que son inconmensurables con ellos. Es el primer atisbo humano al hecho de que el conjunto $\mathcal{R}$ es mucho más denso que el conjunto $\mathcal{Q}$, aunque faltaran casi veinticinco siglos para formularlo de esta manera.

APÉNDICE 3: CRONOLOGIA

Se muestra a continuación la cronología de los hitos y publicaciones más importantes relacionadas con los fundamentos de la matemática moderna, directamente relacionados con la concepción de verdad matemática.

1829. Nikolai Lobachevski publica *Sobre los principios de la geometría*, trabajo en el que se enuncia por vez primera una geometría no euclídea a la que llamó *geometría imaginaria*.

1854. Riemann en su trabajo titulado *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* (*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen)* propone conceptos de geometría mucho más amplios que la euclídea, con métricas abstractas definidas por tensores métricos de los que la métrica euclídea es tan solo un caso concreto.

1868: Beltrami demuestra la consistencia relativa en la geometría hiperbólica mostrando un modelo de la misma inmerso en el espacio euclídeo tridimensional. Es una demostración relativa porque depende de la consistencia de la GE, aún sin demostrar en esas fechas.

1872: Félix Klein define en su *programa Erlangen* la geometría como el estudio de las invariantes por transformaciones en espacios generales, rompiendo para siempre con la imagen intuitiva de la geometría.

1874: Formulación incipiente de la TC a partir de los trabajos de Georg Cantor

1878: Cantor formula la Hipótesis del Continuo.

1872: Richard Dedekind muestra cómo construir los números reales a partir de los racionales mediante su método de cortaduras.

1884: Frege publica Los Fundamentos de la Aritmética (*Grundlagen der Arithmetik).* En esta obra pretende fundamentar la matemática en la lógica, dando inicio al proyecto logicista.

1897: El matemático italiano Cesare Burali-Forti descubre la paradoja que lleva su nombre en el seno de la TC.

1889 Giuseppe Peano publica un artículo de treinta páginas titulado *Nuevo método de exposición de los principios de la aritmética (Aritmetices principia, nova methodo exposita),* en el que confecciona su axiomática fundacional para el conjunto de los números naturales.

1899 David Hilbert demuestra en sus *Fundamentos de la geometría (Grundlagen der Geometrie)* que la GE es consistente y completa.

1900: En su famosa conferencia de 1900 titulada "*Mathematische Probleme*" ante el Congreso Internacional de París, David Hilbert propone una lista de 23 problemas abiertos, perfilando el trabajo de la comunidad matemática a lo largo del siglo que se iniciaba.

1902: Bertrand Russell expone la paradoja que lleva su nombre en una carta a Frege. Cuando su obra *Leyes básicas de la aritmética* (*Grundgesetze der Arithmetik*) estaba en la imprenta.

1902: Primera axiomatización de la TC por Frege intentando conjurar las paradojas encontradas.

1903: Russell demuestra que la teoría de Frege es inconsistente.

1905: Cantor encuentra una contradicción derivada del propio concepto de conjunto universal en su TC.

1907: Jan Brouwer propone el intuicionismo enfrentándose frontalmente al formalismo de Hilbert.

1908: Zermelo propone una teoría axiomática de conjuntos que conjura las contradicciones encontradas por Russell

1910-1913 Russell y Whitehead publican los *Principia Matemática*.

1915: Löwenheim demuestra que el cálculo de predicados monádicos de segundo orden con igualdad es decidible. De este fuerte resultado se deduce la decidibilidad del cálculo de primer orden.

1915-1919: Löwenheim y Skolem demuestran que todo sistema formal de primer orden, si posee modelos infinitos entonces posee un modelo numerable.

1920: Hilbert propone el que se conocería como *Programa de Hilbert*, cuya meta era derivar toda la matemática de un conjunto finito de axiomas cuidadosamente seleccionados, del que se podía demostrar su consistencia.

1922: Fraenkel corrige y mejora la teoría de Zermelo, quedando consolidada la teoría ZFC.

1923: John von Neuman fundamente los números naturales en la TC.

1928: Hilbert propone el conocido como *Entscheidungsproblem* en el Congreso Internacional de Matemáticos en Bolonia de ese año.

1928: Ackerman demuestra que el cálculo de predicados monádicos es decidible.

1929-1930: Gödel demuestra que el Cálculo de Predicados es completo por procedimientos no finitistas ajenos al programa de Hilbert. Más específicamente, demuestra que en una lógica de primer orden, toda fórmula que es válida en un sentido lógico es demostrable

1930. Presburguer demuestra que el fragmento aditivo de la Aritmética Formal es consistente y completo.

1931: Gödel demuestra sus dos teoremas de incompletitud. Por el primero demuestra que la Aritmética Formal no es completa y que la incompletitud es una propiedad esencial que no puede ser superada por adiciones de axiomas nuevos. Por el segundo demuestra que si la ArF es consistente entonces su consistencia no puede ser demostrada dentro del programa de Hilbert.

1931. Gentzen demuestra la consistencia de la Aritmética Formal usando una extensión del principio de inducción transinfinito hasta el primer ordinal ε, ε_0.

1931: Alfred Tarski presenta en Varsovia *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*, obra en la que presenta su teoría sobre la verdad, y se publica en alemán en 1936.

1936: John B. Rosser demuestra el teorema de Gödel sin hacer uso del concepto de ω-consistencia.

1936: Church mediante su cálculo lambda y Turing mediante su máquina conceptual solucionan negativamente y de forma independiente el problema global de la decidibilidad de la lógica de predicados de primer orden de la AF respondiendo así al *Entscheidungsproblem* de Hilbert.

1948: Alfred Tarski demuestra que el segmento de primer orden de la teoría de números reales es decidible.

1954. Los trabajos de Jerzy Łoś demuestran que el Teorema de Completitud del cálculo de predicados (demostrado por Gödel en 1931) es equivalente al Teorema de ideales primos, y con ello que el auxilio de suposiciones no finitistas es imprescindible para la demostración de completitud del cálculo de predicados.

1955 Wanda Szmielew demuestra que la teoría de grupos de primer orden (sin atender a subgrupos) es decidible.

1963: Paul Cohen demuestra que es la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

APENDICE 4: LA NUMERACIÓN DE GÖDEL

El procedimiento ideado por Gödel[71] comienza por asignar un número natural a todo signo del lenguaje formal L sobre el que construimos nuestras teorías formales. Recordemos que un lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$ es una colección de signos que pertenecen a alguna de las siguientes categorías:

1. Variables. El lenguaje $\mathcal{L}$ dispone de infinitas (un infinito numerable) variables, expresables con la ayuda de un subíndice i. Denotaremos por x_i a la variable de $\mathcal{L}$ de índice i.
2. Constantes, en número arbitrario, pero también numerable. Se denotan igualmente con ayuda de un subíndice, de modo que denotaremos c_i a la constante de $\mathcal{L}$ con índice i.
3. Relatores. Cada relator tiene un rango o ariedad, que es el número de argumentos que necesita para estar correctamente expresado. Para cada rango n, existirán en general cierto número de relatores, de modo que necesitan dos índices: la ariedad n y el índice que especifica de qué n-relator concreto se trata. Denotaremos R_i^n al i-ésimo n-relator
4. Funtores. Expresan nombres de funciones. Como los relatores, tendrán en general n argumentos, denotaremos f_i^n a la i-ésima función n-ádica.
5. Signos para las conectivas lógicas. Expresan operaciones lógicas: cuantificador universal ($\forall$)[72], negación (¬), condicional (->)[73].
6. Signo del descriptor (|).

[71] En la literatura existen asignaciones diferentes a la aquí mostrada; algunas conciben también codificaciones para los signos auxiliares de puntuación tales como paréntesis, comas, etc. Para lo que a este trabajo atañe, no es importante, basta con saber que tales asignaciones son posibles, aunque no haya un único modo de hacerlo.

[72] En tratados de lógica es habitual sustituir el símbolo habitual en matemáticas para el cuantificador universal ($\forall$) por el símbolo /\, y el del cuantificador existencial $(\exists)$ por \/. No debe llevarnos a error, pues es asunto de mera notación.

[73] No necesitamos estrictamente símbolos para las demás conectivas lógicas, dado que todas las demás son expresables por las conocidas combinaciones de las tres citadas:

Primer paso: asignación de un número de Gödel a cada signo de $\mathcal{L}$

Dado un signo ζ de L, asignamos un número de Gödel de ζ , que denotaremos g(ζ), de la siguiente forma:

$$g(\neg) = 3;\ g(\rightarrow) = 5;\ g(\wedge) = 7;\ g(|) = 9$$
$$g(x_i)= 17+8i$$
$$g(c_i)= 11+8i$$
$$g(R_i^n)= 5+8\cdot 2^n\cdot 3^i$$
$$g(f_i^n)=7+8\cdot 2^n\cdot 3^i$$

Esta asignación merece un comentario. Las conectivas y el descriptor son asignados a los números primos impares menores que 10, mientras que todas las demás han sido diseñadas para ser congruentes módulo 8 de manera específica a su naturaleza de relator, funtor, variable o constante. Así,

$$(\forall i) : g(x_i) \equiv 1 \bmod 8$$
$$(\forall i) : g(c_i) \equiv 3 \bmod 8$$
$$(\forall i, \forall n) : g(R_i^n) \equiv 5 \bmod 8$$
$$(\forall i, \forall n) : g(f_i^n) \equiv 7 \bmod 8$$

De este modo la asignación es completamente unívoca: si dividiendo g(ζ) entre 8 da de resto 1,3,5 ó 7, estaremos respectivamente ante una variable, una constante, un relator o un funtor. Todos los números son impares, de manera que ante un número de Gödel impar sabemos automáticamente que se trata de la asignación de Gödel de una variable, una constante, un relator o un funtor.[74]

[74] Podría extrañar la falta de una codificación específica para uno de los signos más importantes en todo desarrollo lógico-matemático; el signo (=). La extrañeza debe desaparecer al caer en cuenta de que se trata de un relator diádico, y que por lo tanto está ya contemplado.

Segundo paso: asignación de un número de Gödel a cada cadena de signos.

Sea ζ la cadena finita de signos de *L* formada por la concatenación $\zeta_1,..,\zeta_n$. Definimos el número de Gödel de la cadena ζ, g(ζ) de la siguiente forma:

$$g(\zeta) = p_1^{g(\zeta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(\zeta n)}$$, donde p_i es el i-ésimo primo.

Esta asignación genial hace que toda cadena tenga asociado un número de Gödel par (p_1 vale 2), y en su descomposición en factores primos el 2 está elevado necesariamente a un impar (el número de Gödel del primer signo es impar, pues el de cualquier signo es necesariamente por construcción)

Tercer paso: asignación de Gödel a una secuencia de cadenas de símbolos.

Sea ahora $\zeta_1,..,\zeta_n$ una secuencia, no de signos, sino de cadenas de signos. Definiremos el número de Gödel de la secuencia de cadenas de signos de la siguiente manera:

$$g(\zeta_1,...,\zeta_n) = p_1^{g(\zeta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(\zeta n)}$$

Ahora tenemos un número necesariamente par (por el mismo motivo que en el caso anterior), pero el exponente al que está elevado el 2 ahora es necesariamente par, pues en el apartado anterior vimos que si ζ_i es una secuencia de signos, entonces es necesariamente par.

Importancia teórica de la numeración de Gödel

La numeración de Gödel no es ambigua, en el sentido de que cada signo, cadena de signos o conjunto de cadenas de signos tiene asignado uno y solo un número, y dado un número podemos encontrar el signo, cadena o conjunto de cadenas correspondiente, dado que en virtud del teorema fundamental de la aritmética la descomposición en factores primos de un número es única.

Los números de Gödel de cualquier cadena (y no digamos de un conjunto de cadenas) son astronómicamente grandes, y no son operativos. No existe ninguna utilidad práctica en ellos; sin embargo la importancia teórica de esta numeración es enorme, y forma parte del núcleo más técnico de los teoremas de incompletitud de Gödel. El motivo de la su importancia estriba en que tiende un puente entre las teorías axiomáticas y la aritmética de los números naturales, de modo que toda sentencia, incluso todo razonamiento "es" (a través de la traducción gödeliana) un número natural. Así, los números naturales[75] hablan de matemáticas.

En principio sería posible hacer matemáticas del siguiente modo[76]:

Teorema:

4378909247562465578854652251756852378943896

Demostración:

8892389575472818264743743890758934758905674388182647437438907589347589
0567438818264743743890758934758905674388182647437438907589347589056743
894375983758998437589378932787641298746328763822

En suma, la matemática realizada por el ser humano desde el inicio de los tiempos, así como la que pueda realizar en el futuro cabe (de hecho cabe holgadamente) en el conjunto **N**. Cabe preguntarse si es posible una matemática de otro tipo, la naturaleza

---

[75] Algunos de ellos; otros no dirían nada, codificarían cadenas sin sentido o secuencias de cadenas sin sentido como $x_2 \neg - >=$

[76] Por supuesto, los números anteriores no significan nada; son una mera muestra de la idea que se desea transmitir. Las expresiones con sentido que guarden en su interior verdades matemáticas; y sus correspondientes cadenas de secuencias de signos que constituyen sus demostraciones tendrían unos números de Gödel de un tamaño desmesuradamente superior a lo aquí mostrado. La idea está tomada de Ivorra (2008)

especulativa de esta interesante pregunta queda fuera de los límites de este trabajo, pero podemos aventurar una respuesta negativa: las limitaciones que Gödel, Church, Turing y Chaitin enuncian sobre la accesibilidad a la verdad matemática no son antropológicas; son sistémicas, pertenecen a los propios sistemas axiomáticos, a los propios algoritmos. Cualquier máquina, cualquier inteligencia alienígena estará igualmente sometida a estas constricciones. No se nos ocurre forma de eludirlo, sin acudir a planteamientos tan sólo imaginados por la teología.

REFERENCIAS

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. Journal of Philosophy 70, pp. 661-80. Recensión de la traducción al castellano en Benacerraf, B. (2004) La Verdad Matemática (2004) Ágora, Papeles de filosofía, 23/2,233-253.

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial: Madrid

Breitner, J. (2011). *Church's undecidability result*. Recuperado de http://www.joachim-breitner.de/various/ChurchTalk2011.pdf

Castrillo, P., Díez, A (2003). *Formas lógicas: guía para el estudio de la lógica.* Universidad Nacional de Educación a Distancia: Madrid

Chaitin, G. J. (1988). Aritmética y azar. *Investigación y Ciencia*, 144, 44-50.

Chaitin, G. J. (2003). Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas. *Investigación y ciencia*, 322, 28-35.

Church, A. (1936). An unsolvable problem of elementary number theory. *American journal of mathematics*, 58(2), 345-363.

Dehornoy, P. (2001). ¿Es necesario el infinito? Ideas del infinito (pp. 69-73). *Prensa Científica*.

Díaz, J., & Torras, C. (2013). *La lente algorítmica de Turing: de la computabilidad a la teoría de la complejidad*. Arbor, 189(764), 080.

Díez Martínez, A. (2005). *Introducción a la Filosofía de la lógica*. UNED: Madrid

Fortes, A. (1974). Leibniz, filósofo de la Revolución Industrial. *Miscelánea Comillas: Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, 32(61), 295-330.

Garrido, J. (2003). *Verdad matemática*. Nivola: Tres Cantos.

Giovannini, E. N. (2014). *Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891–1905).* Revista de Filosofía vol. 39 Núm. 2 (2014): 121-146.Recuperado de http://dx.doi.org/10.5209/rev_RESF.2014.v39.n2.47307

Gonzalez-Asenjo, F. (1976). *Cuestiones de Matematemática*. En Conferencias de la Fundación Juan March. Madrid. Recuperado de https://www.march.es/conferencias/anteriores/voz.aspx?p1=2896

Ivorra, C (2008). *Lógica y Teoría de Conjuntos*. Recuperado de https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pd

Kirby, L., Paris, F. (1982) Accesible Independence results for Peano Arithmetics. *Bull. London Math. Soc*, 14 (1982), 285-293.

Lan, C. E. (1988). El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional. *Méthexis*, *1*(1), 17-31.

Manzano, M. (2007). *La piedra filosofal*. Recuperado de http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Download&task=no_task&cmd=no_cmd&file_id=544 Consultada el 10-05-2018

Mario Parra, C., & Suárez, J. A. (2006). Sobre dos teoremas de incompletez de Chaitin. *Lecturas Matemáticas*, 161-174.

Martin-Delgado, M. (2013). *Alan Turing and the origins of complexity*. Arbor, Ciencia, Pensamiento y Cultura. Vol 189 (764) a084

Penrose, R. (1991). *La nueva mente del emperador*. Mondadori; Madrid

Rota, G. C. (1991). La ambigüedad de la verdad matemática. *Sigma*, (6), 3-18.