UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

Máster Universitario en Filosofía Teórica y Práctica

Especialidad de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Trabajo Fin de Máster

Lógica intuicionista y construcción de pruebas para proposiciones necesarias y proposiciones contingentes

Autor: Albert Amat Genís

Tutor: Amparo Díez Martínez

Madrid, Junio de 2013

RESUMEN

Este trabajo considera el problema de la atribución de valores de verdad a cierto tipo de proposiciones, cuestionando la ley del tercio excluido. La lógica intuicionista, aquí presentada a partir de la semántica de mundos posibles de Kripke, considera verdadera una proposición cuando se ha construido de ella una prueba. Dado que la lógica intuicionista estudia tan sólo proposiciones necesarias lógico-matemáticas, proponemos extender el método constructivo de pruebas proposicionales a las proposiciones universales como son las leyes científicas, lo cual es de interés en Filosofía de la Ciencia, y a las proposiciones contingentes, con el fin de desarrollar un método constructivo universal de análisis proposicional.

Conceptos clave: *lógica intuicionista; semántica de mundos posibles de Kripke; construcción de pruebas proposicionales; proposiciones lógico-matemáticas; proposiciones necesarias; proposiciones contingentes; leyes científicas; Filosofía de la Ciencia; denotación; descripciones definida*s.

ABSTRACT

This study considers the problem of attributing values of truth to certain kinds of propositions, challenging the law of excluded middle. Intuitionistic logic, presented here following Kripke's semantics of possible worlds, considers a proposition to be true when a proof for it has been constructed. Given that intuitionistic logic only studies necessary logical-mathematical propositions, we propose to extend the constructive method of propositional proofs to universal propositions such as scientific laws – an approach which is of interest in the Philosophy of Science – as well as to contingent propositions, with the aim of developing a universal constructive method of propositional analysis.

Key words: *Intuitionistic logic; Kripke's semantics of possible worlds; construction of propositional proofs; logical-mathematical propositions; necessary propositions; contingent propositions; scientific laws; Philosophy of Science; denotation; definite descriptions.*

Ce moment fut extraordinaire. J'étais là, immobile et glacé, plongé dans une extase horrible. Mais, au sein même de cette extase quelque chose de neuf venait d'apparaître : je comprenais la Nausée, je la possédais. A vrai dire je ne me formulais pas mes découvertes. Mais je crois qu'a présent, il me serait facile de les mettre en mots. L'essentiel c'est la contingence. Je veux dire que, par définition, l'existence n'est pas la nécessité. Exister, c'est être là*, simplement ; les existants apparaissent, se laissent* rencontrer*, mais on ne peut jamais les* déduire[1]. (Antoine Roquentin)

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo considero inicialmente las dificultades en atribuir un valor de verdad a determinadas proposiciones y, con ello, señalo el cuestionamiento de la validez de la *ley del tercio excluido.* A continuación, expongo los planteamientos de la *lógica intuicionista*, tanto en su modalidad axiomática como en un especial desarrollo de la *semántica de mundos posibles de Kripke*, planteamientos que se basan en una nueva definición de función veritativa, que considera una proposición como verdadera cuando se ha construido para ella una prueba[2]. Dado que la lógica intuicionista estudia –en principio- únicamente las *proposiciones lógico-matemáticas* de tipo abstracto, considero interesante extender el *método constructivo* a las *proposiciones universales* que son leyes científicas, lo cual es aplicable en el ámbito de la *Filosofía de la Ciencia*, así como también utilizar dicho método en la de las *proposiciones contingentes,* con el propósito de universalizar el ámbito de aplicación del constructivismo. Finalmente, concluyo con una reflexión acerca de los conceptos de *esencia* y *existencia*.

[1] Jean-Paul Sartre (2012): *La Nausée*, Editions Gallimart, París, 186.

[2] Denomino *prueba* al proceso de construcción de enunciados que permitan establecer los criterios para la afirmación de una proposición.

1. 1. El *tertium non datur* en lógica clásica

Es desde la creación misma de la ciencia lógica por Aristóteles que se establece la exclusión de una tercera posibilidad a la atribución del valor de verdad de las proposiciones: éstas pueden ser únicamente verdaderas o falsas. Por esta razón, conjuntamente con el principio de identidad y el de no contradicción[3], la *ley del tercio excluido* (LTE) –o *tertium non datur*- goza en lógica clásica del estatus de elemento fundacional. En la formalización moderna, la LTE está incluida por Russell y Whitehead como teorema *2.11 en sus *Principia Mathematica*, como también lo está la ley de la doble negación, principios equivalentes en el marco del significado del operador clásico de *negación* [RW, 105-106].

1. 2. Las infinitas proposiciones y el problema de la atribución de valores de verdad a algunas de ellas

El lenguaje, formalizado o natural, permite construir infinitas fórmulas y enunciados, respectivamente, usando para ello los términos categoremáticos y sincategoremáticos que lo componen. A las proposiciones expresadas por los enunciados así formados pueden serles atribuidos valores de verdad mediante la correspondencia con el mundo no lingüístico. Sin embargo, en ocasiones no es posible -o, al menos, evidente- la labor de encontrar este valor de verdad proposicional. En lo que atañe a proposiciones futuras, ya Aristóteles advierte este hecho. Por ejemplo, consideremos el enunciado *El primer presidente de Estados Unidos del S. XXIII será de ascendencia china*. Puede argumentarse que la proposición que expresa es ya verdadera o falsa, aunque aún no lo sepamos. Sin embargo, si fuera verdadera en este momento, lo que en ella se dice será necesariamente verdadero. Si fuera falso, sería del mismo modo necesariamente falso. Dado que ninguna de las dos cosas es cierta, ya que estamos tratando de un hecho

[3] En realidad, la lógica formal muestra que estas tres leyes son equivalentes: $(p \rightarrow p) \equiv (p \vee \neg p) \equiv \neg(p \wedge \neg p)$.

contingente, la proposición no puede ser verdadera ni falsa en el momento de su proferencia[4].

Frege advierte también que atribuir valores de verdad a ciertas proposiciones es problemático. En efecto, el enunciado *Ulises fue dejado en Ítaca profundamente dormido*, comprensible y con sentido, presenta la característica de que *Ulises* carece de referencia. A causa de ello no es posible afirmar ni negar el enunciado que expresa ese sentido incompleto [Fr, 29-30]. En realidad, no es posible considerar el enunciado como objeto de atribución de valores de verdad.

Russell, en su ensayo de 1905 *On Denoting* [R1], aborda de otro modo el problema de enunciados que contengan expresiones sin referencia. Considera que a un enunciado con sentido debe poder atribuírsele un valor de verdad y rechaza que de alguna manera puedan existir términos sin referencia en un extraño limbo lógico, ya que debería siempre considerarse «*that feeling for reality which ought to be preserved even in the most abstract studies*» [R2,169]. Analizando su conocido ejemplo *El (actual) rey de Francia es calvo*[5], donde el complejo denotativo *el actual rey de Francia* no tiene una referencia hoy en día, ni en la época en que se escribió el artículo, distingue Russell entre las negaciones enunciativas interna y externa, aplicables a proposiciones contingentes como la que nos ocupa, las cuales permiten reformulaciones diversas del enunciado al objeto de la atribución de su valor de verdad. Para mostrar esta diferencia, presentaremos en primer lugar la expresión formal del enunciado:

$$\exists x\ (Rx \wedge (y)\ (Ry \rightarrow x = y) \wedge Cx)$$[6]

Traducida esta fórmula al lenguaje natural obtenemos una conjunción de tres elementos:

- Actualmente, hay al menos un rey en Francia: $\exists x\ Rx$ (existencia)
- Actualmente, hay a lo sumo un rey en Francia: $(x)(y)((Rx \wedge Ry) \rightarrow x=y)$ (unicidad)

---

[4] Este argumento está citado (por Priest) en [P§7] señalando uno de sus puntos débiles, la falacia de ambigüedad: no sabemos si el esquema *Si A necesariamente B* corresponde a $\Box(A \rightarrow B)$ o a $A \rightarrow \Box B$.
[5] El enunciado exacto de Russell es *The King of France is bald.* [R1, 483] Sin embargo, para nuestro propósito utilizaremos el enunciado *El actual rey de Francia es calvo*.
[6] Este análisis coincide con el de Strawson [S, 324].

- Ese único rey de Francia es calvo: $\exists x\, ((Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x=y) \wedge Cx)$

A continuación mostraremos los dos modos distintos mediante los que el enunciado puede ser negado:

a) Negación externa:

$\neg \exists x\, ((Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x=y) \wedge Cx)$

Sus fórmulas equivalente son:

- $(x)(\neg Rx \vee \exists y\, (Ry \wedge \neg x=y) \vee \neg Cx)$
- $(x)(\neg Rx \vee \neg(y)(Ry \rightarrow x=y) \vee \neg Cx)$

Llevando esta fórmula negada de nuevo al lenguaje natural, observamos que para todos los objetos del Universo de Discurso -para cada *x* que sea posible considerar- se cumple que:

- *x* no es un rey (actualmente no hay al menos un rey): $(x)\neg Rx$

o bien

- Hay más de un rey (actualmente no hay a lo sumo un rey): $(x)\, \exists y(Ry \wedge \neg x=y)$

o bien

- *x* es no-calvo: $(x)\neg Cx$

En definitiva, en el dominio considerado, escogido cualquier elemento que forma parte de él, ocurre que resulta ser: (i) no-rey o (ii) no es el único rey o (iii) no-calvo (este último, puede ser o no ser rey, lo cual justificaremos más adelante).

b) Negación interna:

$\exists x\, ((Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x=y) \wedge \neg Cx)$

La traducción de esta fórmula al lenguaje natural es: *Existe un único rey y no es calvo*.

Observamos ahora que en los casos de la afirmación y de la negación interna, el argumento de C está ligado mediante un cuantificador existencial, lo cual determina que ese individuo *x* es el mismo que el ligado en *Rx*. Ello no ocurre en la negación externa, donde el *x* que es o no es calvo no tiene por qué ser el mismo individuo que el que se da la circunstancia que es rey. En el caso de la negación interna, dado el Universo de Discurso, afirmamos que podemos tomar -porque existe- un objeto que es único rey de Francia -actualmente- y no-calvo. En el caso de la negación externa, afirmamos que tomemos el objeto que tomemos -es decir, para todos se cumple que- ese objeto o bien no es un rey actualmente en Francia o bien no es calvo o bien no es el único rey actualmente en Francia.

Si ahora añadimos al enunciado original cada una de sus negaciones –externa e interna- en modo disyuntivo, obtenemos las siguientes fórmulas complejas:

a. $\exists x(Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x = y) \wedge Cx) \vee \neg\exists x(Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x = y) \wedge Cx)$

Es decir, *hay un único rey de Francia calvo o no hay un único rey de Francia calvo*. Observamos que a partir de la negación externa obtenemos un enunciado compuesto que expresa la LTE.

b. $\exists x(Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x = y) \wedge Cx) \vee \exists x(Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x = y) \wedge \neg Cx)$

En lenguaje natural, *hay un único rey de Francia y es calvo o hay un único rey de Francia y es no-calvo*, advirtiendo que a partir de la negación interna no es posible enunciar la LTE.

Russell resuelve el problema que plantea una expresión denotativa no referencial afirmando que toda proposición en la que exista un término o complejo de este tipo es falsa, ya que la conjunción que forma el enunciado original afirmativo es falsa si uno de sus términos lo es: no hay en la actualidad un rey en Francia. Este análisis evita ciertas indefiniciones y compromisos sintéticos expresados al modo británico -como considerar que el rey pueda llevar peluca [R1, 485]- y muestra además la nula disposición a cuestionar el tercio excluso[7]; pero no es seguramente el análisis más adecuado. En su

[7] «*The former course may by taken, as by Meinong, by admitting objects which do not subsist, and denying that they obey the law of contradiction; this, however, is to be avoided if possible.*» [R1, 484].

crítica feroz a la teoría de las descripciones de Russell, Strawson muestra una aproximación distinta al problema, señalando que el hecho de que una expresión tenga o no sentido no tiene nada que ver con que, proferida en una determinada circunstancia, lo sea para considerar su verdad o falsedad. Distingue entre una frase o expresión, su uso y su proferencia, y cree que el error de Russell es confundir las expresiones con su uso, y el *significado* con la *mención* de una expresión en una circunstancia determinada[8]. Apelando a las reglas de uso lingüístico, parece claro para Strawson que al proferir en la actualidad *El rey de Francia es calvo*, los hablantes competentes comprenden la expresión pero no se plantean su valor de verdad: se da por supuesto que si no existe rey, la proposición no es verdadera ni falsa, siguiendo en esto el camino expresado anteriormente por Frege.

Tampoco es tarea sencilla atribuir valores de verdad a las proposiciones expresadas por los llamados *enunciados borrosos* -a veces denominados también *enunciados vagos*. Por ejemplo, consideremos los enunciados *El árbol está vivo* y *El árbol está muerto*. Seguramente, nos pondremos todos de acuerdo en atribuir a los enunciados anteriores sus correspondientes valores de verdad si vemos un árbol frondoso de hojas verdes, o si vemos otro completamente seco. Sin embargo, ya no es tan cierto el acuerdo si lo que vemos es un árbol de hoja perenne que ha perdido muchas de sus hojas. O ¿en qué momento se pasa del día a la noche en el crepúsculo? En estos casos ¿qué valor de verdad atribuimos entonces a los enunciados cuando consideramos procesos progresivos y continuos como son la muerte o el anochecer?

Estos son algunos elementos adicionales que ponen en jaque la LTE, aunque ninguno de los autores que hemos visto lo hace explícitamente. Quizá porque, como dice

---

Russell se refiere a que Meinong acepta, en cierto modo, que el actual rey de Francia existe y a la vez no existe, $p \wedge \neg p$. Luego, $\neg(p \vee \neg p)$, ambas aberraciones lógicas de calibre. Es preciso, sin embargo, señalar que Meinong no confiere la misma cualidad existencial a un nombre con referencia que a una expresión que carezca de ella, aunque sí afirma que cualquier objeto concebible existe en un cierto modo.

[8] *«We are apt to fancy we are talking about sentences and expressions when we are talking about the uses of sentences and expressions. This is what Russell does.»* [S, 327; el argumento completo se extiende de la página 325 a la 329 del mismo artículo].

Putnam, el principio de bivalencia es una idealización muy útil [Pt§6]. Tiene que ser de parte del mundo abstracto y no de la realidad sensible cuando no sólo se plantea el rechazo explícito a la LTE, sino que además a partir de esta negación se construye un sistema formal consistente, la *lógica intuicionista*.

1. 3. Conjuntos infinitos y matemática constructiva

En 1908, el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer expresa su reticencia a aceptar sin más la validez de leyes formuladas a partir de conjuntos de objetos finitos cuando los conjuntos considerados están compuestos de infinitos miembros[9]. Parece obvio que podríamos conocer el valor proposicional de enunciados como *Algunos minerales terrestres están parcialmente compuestos de sales de calcio* mediante la observación sistemática de los minerales hasta que encontráramos uno que contenga dichas sales o habiendo constatado que en ninguno de ellos se encuentran. Los minerales existen en número finito y podrá establecerse en principio un procedimiento finito –quizá sumamente tedioso, pero finito al fin y al cabo- para determinar el valor de verdad de la proposición. Es decir, estaremos estableciendo una correspondencia entre el lenguaje y cierta realidad extralingüística que pertenece al mundo físico. Lorenzen llama a una proposición de este tipo *v-definida* o definida en el sentido de la verdad [L, 20].

Sin embargo, la situación es totalmente distinta si no tratamos acerca del mundo externo, sino que lo que estamos afirmando es una proposición lógico-matemática, como la conjetura de los números primos gemelos:

> *Existe un número infinito de pares de números primos que se diferencian entre sí en dos unidades*.

Ejemplos de estos pares son {3, 5}, {11, 13} ó {29, 31} [P, 104]. Observamos tras una corta reflexión que, en este supuesto, no disponemos de un método para examinar todos los infinitos casos posibles y, en consecuencia, no es posible afirmar A ni ¬A: ni en la

[9] El debate acerca de la existencia de los propios objetos –físicos o abstractos- que incluimos en cualquier conjunto a estudiar es el primero que debería establecerse. Aunque me referiré de nuevo a ello más adelante, adoptaré en general una posición pragmática que permita el desarrollo de este trabajo.

actualidad disponemos de esta prueba ni sabemos tampoco si existirá en el futuro. Por la evidencia de no poder manejar lo infinito como finito, la LTE se encuentra de nuevo en jaque, y ahora parece tratarse de *jaque mate*. Pero ¿podríamos de algún modo verificar este tipo de conjeturas? De algún modo sí, ya que para estas proposiciones es posible establecer un procedimiento decisorio distinto, no respecto de la verdad sino a posteriori, una *prueba*, y de este modo observar si se cumple en los casos que será posible examinar. Por ejemplo, si conjeturamos ahora *Algunos números impares son perfectos*[10]*,* que no es tampoco una proposición v-definida, podremos construir una prueba consistente en aducir un número impar *n*, cuyos divisores propios sumados vuelvan a dar *n*. Proposiciones de este tipo se denominan *p-definidas*, es decir, definidas en el sentido de la prueba [L, 26].

Para proceder el estudio de este tipo de conjuntos y de las proposiciones que de ellos resultan -lo cual conlleva aceptar las dificultades para mantener algunos de los criterios establecidos clásicamente- y al objeto también de construir un sistema lógico que plasme los procesos racionales de la mente, Brouwer[11] propone el desarrollo de un nuevo tipo de matemática, la *matemática constructiva*, que parte de un concepto diádico de *n* y *n+1* como elemento generador de todo el edificio teórico-formal[12]. La matemática constructiva reinterpreta el concepto de *existir*, ligándolo al concepto de prueba: algo existe si podemos construir –mentalmente, en el caso de objetos abstractos- una prueba de ello. La matemática constructiva conlleva la aparición de la *lógica intuicionista*, que redefine conceptos fundamentales como la semántica de funtores y cuantificadores, lo que observaremos a continuación [B§2].

---

[10] Llamamos a un número *perfecto* cuando equivale a la suma de sus divisores propios; p. e. 6 = 1 + 2 + 3 y 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

[11] Arend Heyting, en 1930, da forma lógica a las ideas de Brouwer, considerándose este momento el inicio de la lógica intuicionista.

[12] La matemática constructiva, liderada por Poincaré, Brouwer y Weyl, se opone a la matemática axiomaticista de Zermelo, Hilbert y Fraenkel, para la cual es necesario axiomatizar la teoría de conjuntos al fin de validar el análisis lógico clásico, evitando en el proceso cualquier contradicción [L, 12].

2. LA LÓGICA INTUICIONISTA

2. 1. Principios generales

El nombre de *logica intuicionista* procede de advertir el carácter no relevante del conector clásico de implicación, dado que por la estricta aplicación de la LTE, para todo par de proposiciones A y B, *(A→B) v (B→A)* es una tautología, sin que A y B deban compartir la más mínima relación de contenido o causal. Brouwer y Heyting pretenden establecer una relación de implicación estricta ligada a la noción *intuitiva* de consecuencia, lo cual da nombre al *intuicionismo* [M, 93]. A modo de primera definición -un tanto reduccionista- podemos enunciar que la lógica intuicionista es la lógica clásica en la que la LTE pierde su validez, de lo que se desprenderán consecuencias fundamentales. Ahora bien, ¿por qué pierde su validez la LTE en lógica intuicionista? En realidad, no se trata de una eliminación primaria sino consecuencia de la diferente consideración del concepto de verdad en el intuicionismo, en el cual afirmamos una proposición cuando hemos construido una prueba para ella y la negamos cuando, intentando construir para ella una prueba, aparece una contradicción, señalando la proposición como absurda. Ello conduce a un sistema lógico completamente distinto –y alternativo- al clásico. Evidentemente, de ¬¬A ya no podremos afirmar A, porque no haber demostrado que una proposición es absurda no significa que tengamos una prueba para esta proposición. Y es a partir de este cambio en la semántica de la negación que obtenemos la invalidez de la LTE: podemos no tener una prueba de A o de ¬A, pero no por ello debemos tenerla de ¬A o A; evidentemente, ello comporta que no es posible afirmar A v ¬A [D1, 135-139]. La reducción al absurdo no puede tampoco ser aplicada universalmente en este marco. Es posible mediante su uso negar un supuesto si de él obtenemos una contradicción. Pero, si el supuesto se encontraba previamente negado, no será lícito afirmarlo ya que ¬¬A→A no es ya una ley lógica.

A continuación expondré las características específicas de este tipo de sistema formal y la nueva definición de algunas de sus conectivas y cuantificadores.

2. 2. Axiomatización y definición de las conectivas

Las reglas de formación de fórmulas en lógica intuicionista son equivalentes a las clásicas. Utilizaré *A, B*, *C* como metavariables de fórmulas bien formadas del cálculo; *x,* *y, z* como metavariables de variables individuales; y *a, b* como metavariables de términos. La única regla de inferencia será el *modus ponens,* y las reglas de introducción de los cuantificadores universal y existencial *–I.* y *II.*- se utilizan *con las mismas restricciones que en lógica clásica*.

I. (C → A(a)) → (C → (x)A(x))
II. (A(a) → C) → (∃xA(x) → C)

Los axiomas en lógica de predicados intuicionista son:

1. A → (B → A)
2. (A → B) → ((A → (B → C)) → (A → C))
3. A → (B → A ^ B)
4. A ^ B → A
5. A ^ B → B
6. A → A v B
7. B → A v B
8. (A → C) → ((B → C) → (A v B → C))
9. (A → B) → ((A → ¬B) → ¬A)
10. ¬A → (A → B)
11. (x)A(x) → A(a)
12. A(a) →∃xA(x)

Si añadimos a ellos bien la ley de eliminación de la doble negación, bien la LTE, bien la Ley de Pierce –formas distintas de enunciar la misma verdad- obtenemos el sistema de lógica de predicados clásico. He señalado previamente que en lógica intuicionista el teorema (¬¬A → A) → (A v ¬A) no es válido, lo cual conduce a la cuestión de la *interdefinición de conectivas*. En lógica clásica podemos utilizar una de las conectivas principales -conjunción, disyunción o implicación- como primitiva y definir con la conectiva elegida más la negación las demás conectivas. Es incluso posible hacerlo con un único operador, como la *barra de Sheffer* o la *flecha de Peirce* de negación de la suma lógica. Del mismo modo, un cuantificador puede ser definido en función del otro y la negación. Todo ello es, sin embargo, producto del concreto significado de la operación de negación. En lógica intuicionista no es posible esta interdefinición de conectivas y cuantificadores porque si el signo principal de una fórmula es la negación, ésta no puede eliminarse. Consecuentemente, todos los signos sincategoremáticos son primarios [Ms§2]. La definición de conectivas y cuantificadores intuicionistas es como sigue:

a. *Disyunción*: para probar A v B debemos construir una prueba para A o una prueba para B.
b. *Conjunción*: para probar A ^ B debemos construir una prueba para A y una prueba para B.
c. *Implicación*: una prueba de A → B es un algoritmo que convierte una prueba de A en una prueba de B.
d. *Negación*: para construir ¬A debemos probar que una prueba de A conduce a una contradicción.
e. *Cuantificador existencial*: para probar $\exists x P(x)$ debemos construir un objeto *x* y demostrar que dicho objeto posee la propiedad *P(x)*.
f. *Cuantificador universal*: una prueba de *(x)P(x)* es un algoritmo que, aplicado a cualquier objeto *x*, demuestra que dicho objeto posee la propiedad *P(x)* [B§2].

2. 3. Semántica topológica aplicada a la lógica intuicionista

A continuación examinaremos la semántica de Kripke aplicada a la lógica intuicionista. Antes de ello, es importante advertir la relación de la topología matemática con los sistemas lógicos. No tenemos más que interpretar las proposiciones como subconjuntos de un espacio topológico, como pueden serlo también los nodos que las contienen en una semántica de mundos posibles. Los operadores lógicos pueden asimismo tener su contrapartida en los operadores de la teoría de conjuntos: la conectiva ^ corresponde al operador de intersección ∩; la conectiva **v** corresponde a la unión ∪; el operador de negación ¬ corresponde al concepto de conjunto complementario; y la implicación →, a la operación de inclusión ⊆ [VD§1.1]. En el apartado siguiente veremos cómo el modelo de Kripke para la lógica intuicionista utiliza una *relación de preorden* –binaria, reflexiva y transitiva- entre los nodos que conforman el espacio topológico, estableciéndose una variación continua en la relación de vecindad que aquéllos mantienen [M, 92ss; MT, 358; V§3]; y observaremos, además, cómo el espacio permite dar cabida a la cantidad creciente -aunque siempre infinita- de proposiciones que lo habitan.

3. LA SEMÁNTICA DE MUNDOS POSIBLES DE KRIPKE PARA LÓGICA INTUICIONISTA

Desde su aparición, la lógica intuicionista ha sido modelada utilizando diversos sistemas lógico-matemáticos. Hemos apuntado ya un modelo topológico[13], y mencionaremos más adelante otras interpretaciones como el modelo de Beth y el de probabilidad[14]. Ahora nos detendremos en otro de estos sistemas, que se encuentra entre los más interesantes en el desarrollo de las primitivas ideas de Brouwer y Heyting: me refiero al modelo de Saul Kripke -a partir de su semántica previa de mundos posibles para la lógica modal- expuesto en el artículo de 1965 *Semantical analysis of intuitionistic logic* [K1], del cual se desprende la completitud y consistencia de la lógica intuicionista de predicados.

Describiré en los siguientes capítulos los elementos más importantes de este modelo, de acuerdo a lo que se encuentra expuesto principalmente en el artículo original de Kripke, considerando asimismo contribuciones de otros autores [HC, 224-231; M, 92ss; Ms§5.1; MT, 356-359; P§6,20].

3. 1. La teoría modelo

Como hemos observado, la semántica de mundos posibles de Kripke para la lógica modal proporciona las bases del aparato conceptual y formal del sistema lógico constructivo que expondré a continuación. En este sistema, la primera definición

[13] Recientemente se han presentado propuestas que combinan la semántica de Kripke con la interpretación estrictamente topológica. Véase [M, 92ss].
[14] *Probabilidad*, entendida como *prueba* (del inglés, *provability logic*, de *probar*, *to prove*).

corresponde a la *estructura modelo intucionista* (EMI), que es un triple ordenado (G, K, R) donde K es el conjunto de mundos o nodos H_i, entendidos como estados de información; G es un elemento de K, normalmente el primer nodo de información; y R es una relación reflexiva y transitiva, una relación de *preorden*, que se establece en K entre los nodos. Un modelo sobre un EMI (G, K, R) es una función binaria $\phi(P, H)$ donde P denota letras proposicionales arbitrarias[15] y H denota los diversos elementos de K. La función $\phi(P, H)$ puede tomar los valores $\{1, 0\}$. Además, el modelo satisface la condición denominada *condición hereditaria de la información* o *preservación hacia el futuro*:

$$\text{Si } \phi(P, H) = 1 \text{ y } HRH' \ (H, H' \in K), \text{ entonces } \phi(P, H') = 1$$

Es decir, una vez una proposición toma el valor 1 en un nodo, su valor en los nodos posteriores que se relacionan con él mediante R continuará siendo 1.

Por inducción sobre P definimos las fórmulas A y B –fórmulas cualesquiera- cuyo modelo ϕ sobre H podrá asimismo tomar los valores $\phi(A, H) = \{1, 0\}$ y $\phi(B, H) = \{1, 0\}$. A partir de ellas, estamos ya en disposición de definir los conectores.

a. $\phi(A \wedge B, H) = 1$ sí y sólo sí (syss) $\phi(A, H) = \phi(B, H) = 1$. Si no es así, su valor es 0.
b. $\phi(A \vee B, H) = 1$ syss $\phi(A, H) = 1$ o $\phi(B, H) = 1$. Si no es así, su valor es 0.
c. $\phi(A \rightarrow B, H) = 1$ syss para todo $H' \in K$ tal que HRH', $\phi(A, H') = 0$ o $\phi(B, H') = 1$. Si no es así, su valor es 0.
d. $\phi(\neg A, H) = 1$ syss para todo $H' \in K$ tal que HRH', $\phi(A, H') = 0$. Si no es así, su valor es 0.

En la asignación de valores a la función ϕ mantenemos el mismo criterio constructivo que hemos expuesto con anterioridad. Es decir, algo es verdadero –o, más precisamente, la función ϕ sobre esta proposición toma valor 1- si hemos construido una prueba de ello. De otro modo, el valor de la función es 0.

---

[15] Como veremos más adelante, las proposiciones aquí estudiadas son proposiciones necesarias lógico-matemáticas.

Observamos inmediatamente que la conectivas ^ y **v** son equivalentes a las de la lógica clásica. No sucede lo mismo con → y ¬, que pasan en cierto modo a ser conectivas precedidas del operador modal de necesidad. En efecto, A→ B es □(A → B) y ¬A es □¬A, asegurando su validez en cualquier mundo posible. Ello es así por el hecho de definir un nodo como un estado de información en un punto del tiempo. En cada uno de los nodos, unas proposiciones han sido probadas y otras no. Teniendo probado ¬A en H, es posible asegurar que A tendrá un valor 0 en H': lo que en un nodo es contradictorio, en otro no puede haber sido probado afirmativamente. Sin embargo, si no se dispone todavía de una prueba para A, es posible pero no seguro que pueda probarse en un futuro. De ello observamos la imposibilidad de afirmar A v ¬A. En el caso del condicional, establecemos que en cualquier nodo H' tal que HRH', A → B seguirá siendo una fórmula verdadera. Es decir, relacionamos de manera relevante A y B, que permanecen necesariamente unidos en futuros estadios de información. De este modo, se fortalece la relación de implicación con respecto a la de la lógica clásica.

Antes hemos mencionado que la función veritativa ϕ sobre fórmulas en lógica intuicionista puede tomar los valores del conjunto $\{1, 0\}$. Ahora podemos definir más precisamente la noción de *validez de una fórmula*. Para el cálculo proposicional, una fórmula A es válida syss $\phi(A, H_i) = 1$. Un modelo tal que $\phi(A, H_i) = 0$ es un contraejemplo. En lógica predicativa, para definir la validez, además del EMI es necesario definir una *función dominio cuantificacional* Ψ en K –dominio en el que se encuentran todos los elementos de los cuales se predica una propiedad- donde $\Psi(H)$ es un *conjunto no vacío*[16] para todo $H \in K$. Si HRH' ($H, H' \in K$), entonces $\Psi(H) \subseteq \Psi(H')$. Partiendo de estas premisas, se procede a definir el concepto de *validez de un modelo cuantificacional* sobre la estructura estudiada como una función de valor de

[16] El dominio debe contener al menos un elemento. Por otra parte, el dominio es variable: la cantidad de los especímenes que pertenecen al dominio del discurso es –o puede ser- distinto en cada nodo. No tendría demasiada justificación permitir a otros elementos que forman parte de los nodos ser variables y mantener el dominio constante.

verdad $\phi(P^n, H)$, donde P^n es un predicado n-ádico. En el caso de n = 0, la función $\phi(P^n, H)$ toma el valor {1, 0}[17]. Si $n \geq 1$, entonces $\phi(P^n, H)$ es un subconjunto del producto cartesiano del conjunto de los dominios sobre K, n-tuplos que son miembros de $[\Psi H]^n$. Se requiere además que:

- Para n = 0, si HRH' y $\phi(P^n, H) = 1$, entonces $\phi(P^n, H') = 1$.
- Para $n \geq 1$, si HRH' entonces $\phi(P^n, H) \subseteq (P^n, H')$.

Es decir, la información se transmite al avanzar en los nodos y un dominio cuantificacional de un nodo posterior contiene al menos todos los elementos de un dominio de un nodo previo. También observamos que la función ϕ mapea K a un subconjunto del dominio cuantificacional variable $\Psi(H)$. Dado que el dominio cuantificacional de H está incluido en el de H' ($\Psi(H) \subseteq \Psi(H')$), podemos asegurar que cualquier proposición o fórmula que haya sido descubierta o inventada –probada, en definitiva- permanece en este mismo estado a medida que se avanza a través de los nodos.

Si el elemento A del que pretendemos definir la validez es una letra proposicional, entonces la función de verdad $\phi(P, H)$ puede tomar los valores {1, 0}. Si A es, en cambio, una fórmula del tipo $P^n(x_1 \ldots x_n)$, asignaremos constantes $a_1 \ldots a_n$. que pertenecen al conjunto unión de todos los dominios de los mundos $\Psi(H)$ –al que llamamos conjunto U[18]- tales que $H \in K$. Ahora estamos ya en condiciones de definir la *validez de una fórmula en un modelo intuicionista cuantificacional*:

- $\phi(P^n(x_1 \ldots x_n), H) = 1$ syss $(a_1 \ldots a_n) \in \phi(P^n, H)$.
- $\phi(P^n(x_1 \ldots x_n), H) = 0$ syss $(a_1 \ldots a_n) \notin \phi(P^n, H)$.

Definida la validez de una fórmula, proseguimos para definir los cuantificadores en el modelo de Kripke:

---

[17] Si un predicado no tiene dominio de aplicación, su valor de verdad puede ser trivialmente 1 ó 0. Si es 1 en H, debe mantenerse su valor de verdad en H' por la condición de preservación hacia el futuro.

[18] Más adelante, al tratar de la *lógica libre*, desarrollaremos este concepto de *dominio cuantificacional ampliado U*.

e. $\phi(\exists y\ A(x_1 \ldots x_n, y), H) = 1$ syss *existe un b* $\in \Psi(H)$ tal que $\phi(A, x_1 \ldots x_n, y) = 1$ cuando se asigna $a_1 \ldots . a_n$ a $x_1 \ldots x_n$ y b se asigna a y. En otro caso, tomará el valor 0.
f. $\phi((y)\ A(x_1 \ldots x_n, y), H) = 1$ syss *para cada* H' $\in$ K tal que HRH' y $\phi(A, x_1 \ldots x_n, H') = 1$ cuando se asigna $a_1 \ldots . a_n$ a $x_1 \ldots x_n$ y se asigna *cada elemento b* de $\Psi(H')$ a y. En otro caso, tomará el valor 0.

Es posible la redefinición del concepto de validez en un modelo intuicionista cuantificacional, como conjunción de la función $\phi(P^n, H)$ y de una función $\phi(A, H)$, a la cual se asignan valores {1, 0}, dependiendo de la asignación de elementos de U a las variables libres de A, y a la satisfacción de las condiciones previamente expuestas. De este modo, $\phi(P^n(x_1 \ldots x_n), H) = 1$ cuando a x_i se asigna a_i tal que $1 \leq i \leq n$ syss $(a_1 \ldots . a_n) \in \phi(P^n, H)$.

Conocemos que la validez es la preservación de la verdad en todas los mundos e interpretaciones. Si existe únicamente un nodo en una interpretación intuicionista, las condiciones recursivas para las conectivas anteriormente definidas se reducen a las condiciones clásicas. Es por ello que una interpretación intuicionista de un solo mundo es una interpretación clásica y las inferencias intuicionísticamente válidas lo son también clásicamente; sin embargo, la conversa no es cierta. De este modo, la lógica intuicionista es una sublógica de la clásica[19].

---

[19] Puede ser interesante observar que entre la debilidad de la lógica intuicionista y la fortaleza de la lógica clásica se encuentran lógicas llamadas intermedias, una de las cuales es la denominada lógica LC, que se obtiene forzando R a ser un orden lineal. Es decir, para todo H, H' $\in$ K, debe darse bien HRH', bien H'RH, bien H = H' [P, 107].

3. 2. Árboles lógicos intuicionistas

Hasta aquí hemos definido los conceptos básicos de la semántica de Kripke para lógica intuicionista, observando que una misma proposición en distintos nodos puede poseer distintos valores veritativos. Ahora es necesario poner en movimiento esta información dotando al sistema de un *tempo*. Para ello, Kripke propone un modelo en el que los nodos estén conectados entre sí en forma de árbol, definiendo una coordenada temporal –relacionada con R pero no cuantificada- por la que los nodos son puntos en el tiempo que contienen un estado de información variable: son *situaciones evidenciales*.

Un árbol de este tipo será un triplo (G, K, S), donde K es el conjunto de los nodos, G ∈ K y S es una relación definida en K syss cumple los siguientes puntos:

1. No existe un H ∈ K tal que HSG.
2. Para cada H ∈ K excepto G, existe un único H' ∈ K tal que H'SH.
3. Para cada H ∈ K, GS*H, donde S* es el llamado ancestral de la relación S ($H_1S^*H_2$ syss $H_1 = H_2$ o $H_1S^nH_2$ para alguna potencia *n* de S).

Utilizaremos la terminología siguiente:

- Si HSH' llamamos a H *predecesor* de H', y a éste *sucesor* de H.
- El árbol es *finitario* si cada H tiene un número finito de sucesores.
- Un nodo H sin sucesores es un *nodo ciego*.

En un árbol de este tipo, K se caracteriza en términos de la relación S y de su campo de acción, y G es caracterizado como el único elemento de K que no tiene predecesor: es decir, es el *nodo origen*. Para una interpretación intuicionista es necesario además que los nodos –los elementos de H- sean números naturales- y que la relación S sea *decidible*. Definidos el árbol, la terminología y las condiciones a cumplir, podemos presentar seguidamente el modelo: un EMI (G, K, R) es un *árbol EMI* syss existe una relación S tal que (G, K, S) es un árbol y R es la menor relación reflexiva y transitiva que contiene a S, la relación ancestral tal que R = S*.

Consideremos ahora un modelo que consta de una fórmula A del cálculo proposicional cuyas únicas subfórmulas atómicas son P, Q, R; uno de los múltiples árboles –en lo que a valores de ϕ se refiere- en un EMI (G, K, R) es el representado por la fig. 1, donde los elementos de K son G, H_1, H_2, H_3, H_4.

FIG. 1

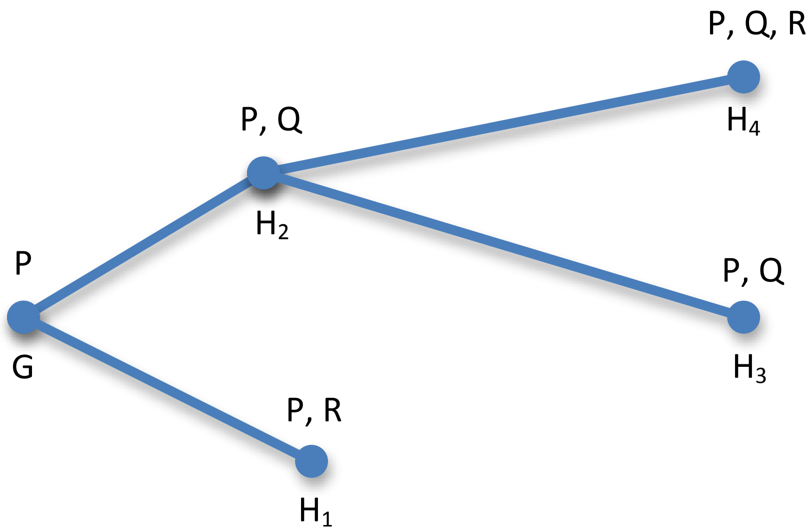

Figura 1. Representación de un modelo intuicionista según la semántica de mundos posibles de Kripke. En esta figura, escribimos una fórmula atómica sobre un elemento de K si ϕ le asigna el valor 1; no la escribimos si le asigna el valor 0. Observaremos que, en este modelo, ϕ(Q, G) = 0 y ϕ(P, G) = 1[20].

Permaneceremos en un nodo por un tiempo indefinido hasta adquirir la suficiente información para avanzar al nodo siguiente. En nuestro ejemplo, nos detenemos en G hasta probar Q o R, momento en el que avanzamos a H_2 o H_1. Es precisamente en el momento de avanzar cuando se da la relación entre nodos, HRH'. Observando este

[20] Sobre la conveniencia de asignar a una proposición valor 1 en el nodo G, es importante señalar que ello significa partir de una situación de información en la que la prueba para una proposición está construida sin el proceso lógico-mental previo correspondiente. Este tipo de proposiciones pueden únicamente ser contingencias de las cuales tengamos evidencia inmediata o axiomas, aunque este punto se ampliará más adelante.

árbol concreto podemos comprender gráficamente el porqué de si $\phi(A, H) = 1$ y HRH', entonces $\phi(A, H') = 1$: si tenemos probado A en H, también lo estará en H', pues una proposición no puede *desprobarse*. En este modelo, la conjunción y la disyunción se comportan clásicamente. En cambio, para asegurar una negación de A es necesario no sólo que A no se haya probado en el momento actual; también es imprescindible que no lo sea en el futuro, sea cual sea la cantidad de nueva información incorporada, lo cual formalizamos del siguiente modo:

$$\phi(\neg A, H) = 1 \text{ syss } \phi(A, H') = 0 \text{ para todo } H' \in K \text{ y } HRH'.$$

La expresión anterior se interpreta en el sentido que para asegurar la negación de A, es necesario probar que A es un absurdo, es decir, que A deriva contradicción, por lo que no podría ser probada en ningún H.

En el caso del condicional, que -como ya sabemos- tampoco se comporta clásicamente, es necesario que en cualquier situación futura donde probemos A, obtengamos una prueba automática de B. El *algoritmo* antes mencionado, o la *relación relevante* entre A y B.

Sabemos que en lógica intuicionista la LTE ha perdido su validez. Podemos observarlo construyendo un modelo particular de árbol que constituya un contraejemplo al *tertium no datur*. Consideramos únicamente dos mundos, G y H, dónde se ha probado P en H. (fig. 2)

FIG. 2

Figura 2. Contraejemplo al tertium non datur *en un modelo intuicionista de Kripke, dado que en G no es posible probar P o -¬P.*

La situación corresponde a $\phi(P, G) = 0$ y $\phi(P, H) = 1$. Dado que $\phi(P, H) = 1$, es necesario que $\phi(\neg P, G) = 0$, puesto que lo que ahora es verdadero no puede ser falso en un nodo anterior. Es decir, no es posible que en G exista la prueba de $\neg$P, aunque sí es posible que P no se haya probado. Entonces, dado que en G aún no disponemos de la prueba para P ni es posible que dispongamos de la prueba para ¬P, obtenemos en G un contraejemplo de la LTE, $\phi(P \vee \neg P, G) = 0$[21].

Las consideraciones hasta aquí expuestas pueden ser aplicadas a la teoría de Kreisel de construcción de *secuencias de libre elección* (SLE), mediante un desarrollo de la relación S que consista en la elección libre de ceros y unos, restringiendo que un 1 solo puede ser seguido de otro 1 por la transmisión hereditaria de la información de un nodo al siguiente. Podemos aplicar el esquema representado en la fig. 2 a una SLE. Observamos que P toma en G el valor 0 y el valor 1 en H. El 0 de G puede seguirse de un número arbitrario de ceros o de un uno. Un 1, lo hemos ya indicado, puede sólo ser seguido por unos. Sea $P(\alpha)$ la aserción *Un 1 ocurre en la SLE*, o $\exists n(\alpha(n) = 1)$, donde *n* es un número natural. Mientras sigamos escribiendo ceros, sabemos que no hemos establecido $P(\alpha)$. Sin embargo, ya que α no tiene otra restricción que la de estar en S, no podemos descartar encontrar más tarde un 1, siendo por ello imposible afirmar $\neg P(\alpha)$, lo que puede formalizarse en la teoría de Kreisel como $\neg(\alpha \int S)\, (P(\alpha) \vee \neg P(\alpha))$, donde $\alpha \int S$ varía sobre la SLE en S. La fórmula anterior es, como vemos, un nuevo contraejemplo a la LTE.

Sin embargo, ulteriores desarrollos en el sistema de Kreisel conducen a contraejemplos menos esperados, y algo más preocupantes. Por ejemplo, en un modelo de árbol ϕ sobre una *estructura modelo intuicionista* EMI (G, K, R), identificamos los nodos como números naturales y G con 0. Si S es un desarrollo que consiste en todas las secuencias de libre elección en las cuales la elección inicial es 0, y definimos una fórmula molecular A recursivamente a partir de una fórmula atómica P, llegamos al sorprendente resultado de que si $\phi(A, G) = 0$, entonces derivamos en el sistema de Kreisel la fórmula $\neg(\alpha \int S)A(\alpha)$, que no es otra cosa que un contraejemplo de la validez de A en dicho sistema. Observamos que este contraejemplo de la validez de A se da

[21] Situación, por otra parte, transitoria, ya que en el nodo sucesor $\phi(P \vee \neg P, H) = 1$.

porque la elección inicial es 0 (= G) y $\phi(A, G) = 0$; por ello cada secuencia contiene 0[22]. Conviene meditar acerca de este tipo de situaciones contrafácticas que se dan por cómo el sistema ha sido construido y su mecánica operacional, y no tanto por la conveniencia o no de que una proposición tome valor 0 en G. Como hemos observado, las proposiciones contingentes, por su propio carácter, deberían poder tomar un valor inicial 1 si por *estado inicial* entendemos la *información evidente disponible*. Una proposición contingente del tipo *Llueve* –si estuviera lloviendo- se encontraría en este caso: $\phi(A, G) = 1$. Si por el contrario, necesitamos verificar mediante una prueba –más adelante trataré este punto- el hecho de llover, la proposición no tomaría sin más el valor 1 en G. Sin embargo, esta indefinición se produce por el hecho de no concretar Kripke si G es un nodo inicial absoluto o relativo; es decir, si G se da en el principio de cualquier saber o es un punto arbitrario tomado como inicio -por ejemplo, septiembre de 1905 con la publicación de la Relatividad Especial. Del mismo modo, las proposiciones necesarias deberían tomar únicamente valor 1 tras un proceso de reflexión, más o menos largo, y no en un nodo G absoluto. Exceptuando, claro está, los axiomas[23].

Observaciones sobre el dominio pueden conducirnos a información acerca de los cuantificadores. Sabemos que $\psi(H)$ es la especie de todos los individuos que conocemos que pertenecen al dominio D, según la información disponible en cada momento en H. Si en G ninguna proposición ha sido probada y en H lo ha sido P, dado que D debe contener al menos un elemento, es obligado que $\psi(G) = \{0\}$ y $\psi(H) = \{0, 1\}$. Este modo de exponer la información permite comprender mejor la condición anteriormente enunciada de que, en general, si HRH', entonces $\psi(H) \subseteq \psi(H')$. Afirmamos en H que para cada *x* en D, si P(x) = 1 no sólo será así para cada *x* que ahora pertenece al dominio, sino que su valor será también 1 para cualquier elemento que *en el futuro*

---

[22] De igual modo podemos encontrar en las SLE un contraejemplo de un esquema como ((x)(P(x) v Q)) → ((x)P(x) v Q), el cual es válido en cualquier modelo cuantificacional donde el dominio $\psi(H)$ sea constante, lo cual no tiene por qué ser cierto en lógica intuicionista. Para las demostraciones completas, ver [K1, 100-101].

[23] Más posibilidades: la decisión acerca de la inclusión de un axioma determinado en un sistema ¿corresponde a G, a nodos posteriores o es un proceso previo? Mi opinión es que, al no tratarse de una prueba sino de una asunción, cualquier axioma debería ya tomar el valor 1 en G, tanto si G es un inicio absoluto como relativo.

formará parte del dominio. Nótese que esta es exactamente la cláusula inductiva para la *cuantificación universal*. En el caso de la *cuantificación existencial*, lo que afirmaremos es que es necesario encontrar un *x* que haya sido ya probado en D; es decir, que pertenezca a $\psi(H)$, tal que $P(x) = 1$. Decimos de este elemento *x* en D tal que $P(x) = 1$ que *existe*.

3. 3. Modelos de Beth, interpretación de probabilidad y noción de forzamiento de Cohen

Los *modelos de Beth* son un tipo de modelos relacionales de lógicas no clásicas -como es la lógica intuicionista- y Kripke se sirve de ellos para aplicarlos a su particular semántica constructiva. La especificidad de un modelo de Beth depende básicamente de dos características:

(i) *La noción de barrado*: se construye un subconjunto del conjunto de nodos K al que llamamos B. Si cada camino a través del árbol de nodos H intersecciona con B, se dice que *H está barrado por B*. La noción de barrado permite definir el modelo de Beth como una función binaria $\eta(P, H)$ de acuerdo a las siguientes condiciones:

a. $\eta(P, H)$ toma los valores $\{1, 0\}$, donde P es una fórmula atómica y $H \in K$.
b. Si HSH' y $\eta(P, H) = 1$, entonces $\eta(P, H') = 1$.
c. Si B barra a H y $\eta(P, H') = 1$ para cada $H' \in B$, entonces $\eta(P, H) = 1$.

Observamos que, por la condición *c*, la información en un nodo sucesor está también garantizada en su antecesor cuando el nodo sucesor pertenece al subconjunto B que barra a H.

La definición del modelo de Beth η para los casos de $(\neg A)$, $(A \wedge B)$ y $(A \rightarrow B)$ -siendo A y B dos fórmulas cualesquiera- es equivalente a la definición de ϕ para las mismas conectivas (ver §3.1). El caso de la disyunción es distinto: $\eta(A \vee B, H) = 1$ syss existe un subconjunto B ∈ K tal que H está barrado por B y η(A, H') = 1 ó η(B, H') = 1, para cada H ∈ B. En caso contrario, el valor de la función es 0.

(ii) *El intervalo temporal de cambio de nodo*: hemos observado que en los árboles lógicos intuicionistas construidos de acuerdo al modelo de Kripke, el paso de un nodo a otro se produce en un intervalo temporal finito pero arbitrario, ligado a un cambio en el estado de información del sistema. En cambio, en el caso de los modelos de Beth, el paso de un nodo a su sucesor se produce en un intervalo finito de tiempo fijado previamente. No es posible permanecer indefinidamente en un nodo a menos que sea un nodo ciego, el final del recorrido en el árbol.

Los modelos de Beth permiten igualmente construir contraejemplos a leyes lógicas clásicas, entre ellas –no podía ser de otro modo- la LTE. Dado que el paso de un nodo a otro se encuentra garantizado en el tiempo, una proposición P que sea verdad en H' ∈ B cuando B barra a H, será también verdadera en H -la condición *c* expuesta previamente. De forma muy parecida a cómo hemos hecho en el sistema de Kreisler, el contraejemplo de P v ¬P se observa en la fig. 3.

FIG. 3

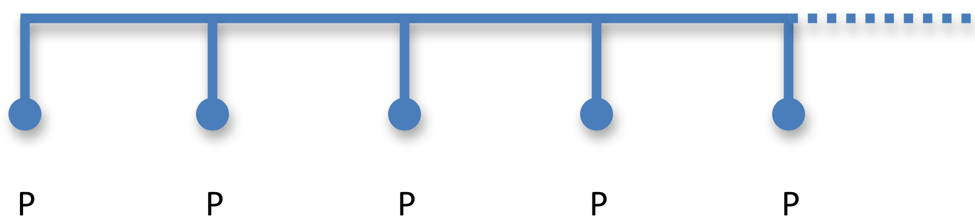

Figura 3. Nuevo contraejemplo al tertium non datur *en un modelo de Beth. [K1, 109]*

Del mismo modo, es posible hallar en un modelo de Beth un contraejemplo en el ámbito de los números naturales de la fórmula ((x)(P(x) v Q)) → ((x)P(x) v Q), fórmula que es clásicamente válida. No es posible probar (x)P(x) v Q, pero para cada número natural *x* tenemos construidas pruebas para P(x) o para Q[24].

Las secuencias de Kreisel y los modelos de Beth son sistemas creados a partir del concepto constructivo de la lógica intucionista. Existen, sin embargo, otras interpretaciones formales intuicionistas a partir de modelos que no reivindican originalmente su contenido intuicionista. A continuación mencionaré dos de ellos, la *interpretación de probabilidad* y el *concepto de forzamiento*. En el caso de la *interpretación de probabilidad*, la definición del criterio de verdad para una fórmula se produce en base a la *probabilidad* de dicha fórmula; es decir, una fórmula es verdadera cuando puede ser probada. En este caso partimos de un sistema formal E_0 y de una extensión arbitraria del mismo, a la que denominamos E. K será ahora el conjunto de todas las extensiones –vistas como parcelas de información- y la relación R definirá el criterio de extensión de un sistema a partir de otro: ERE' significará que E' es una extensión de E. A partir de una fórmula atómica P bien formada y cerrada en E_0, podemos construir recursivamente fórmulas moleculares mediante ^, v, ¬ y →. En este sistema, $\phi(P, E) = 1$ si P puede ser probada en E. De otro modo, su valor es 0. Así definido, $\phi(P, E)$ es un modelo EMI (E_0, K, R). Lógicamente, para cualquier fórmula molecular A que sea un teorema del cálculo intuicionista proposicional en E_0, $\phi(A, E_0) = 1$.

Podemos construir nuevos contraejemplos a la LTE en este modelo, como en el caso de que E_0 sea la *teoría elemental de los números enteros* y P sea la *fórmula indecidible de Gödel G*, cuya enunciación metamatemática es *La fórmula G no es demostrable*. La formalización del contraejemplo en este caso sería $\phi(P \vee \neg P, E_0) = 0$, porque P no puede ser probada en E_0 pero sí en ciertas extensiones de E tales que E_0RE'; y como hemos visto anteriormente, si $\phi(P, E') = 1$, no es posible $\phi(\neg P, E_0) = 1$.

[24] Para la demostración, ver [K1, 116].

La *noción de forzamiento de Cohen*, tiene su origen en la *paradoja de los infinitos de Cantor*: ya que no existe el mayor número cardinal, la colección del tamaño de los infinitos es asimismo infinita, siendo a su vez este último infinito mayor que todos los anteriores[25]. El forzamiento consiste en la expansión de un conjunto universo U a otro universo U' tal que el segundo es la extensión del primero. Ya que en el conjunto expandido U' aparecen nuevos subconjuntos formados por números ordinales que no se encontraban en U, se viola la *hipótesis del continuo* de Cantor, la cual afirma que *no existe un conjunto cuya cardinalidad se encuentre estrictamente entre la de los números enteros y la de los números reales*, habiendo demostrado previamente que el tamaño del conjunto de los números enteros es estrictamente menor que el de los números reales. La noción de forzamiento es, pues, un nuevo ejemplo de la paradoja de los infinitos.

Kripke retoma esta noción de forzamiento para aplicarla a su análisis intuicionista. Consideremos una estructura que consista en un conjunto parcialmente ordenado K de nodos y en una función dominio φ tal que para cada nodo H de K, la función asigna un conjunto no vacío de elementos $\varphi(H)$, de modo que si HRH' entonces $\varphi(H) \subseteq \varphi(H')$. K incorpora en este caso una relación de forzamiento, definida como sigue:

- Para cada nodo H sea L(H) la extensión de un lenguaje L en nuevas constantes para todos los elementos de $\varphi(H)$. A cada nodo H y cada letra predicativa *0-ádica* –o letra proposicional- la función $\phi(P, H)$ o bien toma el valor 1 o bien su valor permanece sin asignar, en consistencia con el requerimiento de que si HRH' y $\phi(P, H) = 1$, entonces $\phi(P, H') = 1$. En este contexto, H fuerza P syss $\phi(P, H) = 1$.
- Para cada nodo H y cada letra predicativa Q *n+1-ádica*, se asigna un conjunto -ahora posiblemente vacío- $\varphi_Q(H)$ de *n+1-tuplos* de elementos de $\varphi(H)$ de un modo tal que si HRH', entonces $\varphi_Q(H) \subseteq \varphi_Q(H')$. Se dice que H fuerza $Q(a_1 \ldots a_n)$ syss $Q(a_1 \ldots a_n) \in \varphi_Q(H)$.

[25] Permítaseme dejar constancia de cómo lo expresa Borges, rebatiendo la tesis del eterno retorno: «Cantor destruye el fundamento de la tesis de Nietzsche. Afirma la perfecta infinitud del número de puntos del universo, y hasta de un metro del universo, o de una fracción de ese metro. La operación de contar no es otra cosa para él que equiparar dos series.» (Jorge Luís Borges, *Historia de la Eternidad*, 87. Ed. Debolsillo, Barcelona, 2011)

A partir de una forma proposicional P se construyen mediante inducción fórmulas moleculares en L(H) siguiendo la misma noción de forzamiento:

- H fuerza A ^ B si H fuerza A y H fuerza B.
- H fuerza A v B si H fuerza A o H fuerza B,
- H fuerza A → B si, para cada HRH', si H' fuerza A entonces H' fuerza B.
- H fuerza ¬A si no existe un H' tal que HRH' en el que H' fuerza A.
- H fuerza (x)A(x) si para cada HRH' y cada término t ∈ φ(H'), H' fuerza A(t).
- H fuerza ∃xA(x) si para algún t ∈φ(H), H fuerza A(t).

Para terminar este apartado, señalaremos dos importantes características de la noción de forzamiento de Cohen:

(i) Es *consistente*, ya que en ningún nodo H se fuerza a la vez A y ¬A.

(ii) Es *monótona*, ya que si HRH' y H fuerza A, entonces H' fuerza A.

Hasta aquí, la exposición de las nociones básicas de la lógica intuicionista y del modelo semántico de Kripke que la desarrolla. Hemos observado cómo se construyen pruebas para proposiciones lógico-matemáticas y cómo se transmite y preserva esta información en un sistema. Sin embargo, nada hemos dicho sobre proposiciones no denotativas ni sobre contingencia, y de esto tratará el siguiente apartado.

4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL VALOR DE VERDAD DE LOS ENUNCIADOS NECESARIOS Y LOS CONTINGENTES

4. 1. La lógica libre y la semántica de mundos posibles

Una de las condiciones para la lógica clásica es que cada término singular denote un objeto en el dominio cuantificacional que se contempla. Por este motivo, un término sin referencia -como se desprende del análisis de Russell- convierte en falsa la proposición de la que forma parte. Ahora bien, si el objetivo es estudiar también proposiciones que contengan términos sin referencia, es posible recurrir a una lógica que presuponga un número de condiciones existenciales menor que las de la lógica clásica. Este tipo de sistema no solo permite incluir términos que no denoten objetos, sino también operar con modelos en los que el dominio cuantificacional se encuentre totalmente vacío[26]. Tal lógica es la llamada *lógica libre*, que incluye en su lenguaje el *predicado monádico de existencia*, E!, el cual toma valor 1 para un término *t* syss $t \in D$. De este modo, en lógica libre no son válidas la fórmulas $(x)A(x) \rightarrow A(t)$ y $A(t) \rightarrow \exists xA(x)$, sino que lo son sus correspondientes $[(x)A(x) \wedge E!t] \rightarrow A(t)$ y $[A(t) \wedge E!t] \rightarrow \exists xA(x)$.

En la semántica de mundos posibles de Kripke, donde un nombre designa rígidamente en todos los mundos posibles [K2, 131ss], observamos que un objeto determinado puede pertenecer a determinados mundos pero no a otros. Por ejemplo, el objeto *Bertrand Russell* pertenece al dominio de los filósofos en un mundo posible del año 1905, pero no pertenece a dicho dominio en un mundo que se encuentre en el año 2013. Y -por ser rígida la designación- no es posible que *Bertrand Russell* designe una cosa en 1905 y otra en 2013. Para estudiar apropiadamente estos casos recurrimos a la *lógica libre*, que combina designadores rígidos con cuantificadores en los dominios de los mundos en los que sus referentes no existen [N2§1,5.3]. Este sistema utiliza el *modelo semántico de Kripke para lógica libre positiva,* donde los predicados se interpretan en un dominio cuantificacional ampliado -un dominio en cierto modo externo- constituido por la unión de todos los dominios[27] que alguna vez han sido considerados para evaluar una determinada proposición. En un sistema de este tipo, las constantes individuales actúan a modo de designadores rígidos y las conectivas se definen del mismo modo que en lógica intuicionista, añadiendo a ellas el operador de existencia antes mencionado. El valor de la función veritativa en un nodo depende de la pertenencia al dominio del nodo del designador rígido[28] que es la constante individual

[26] La semántica de Kripke para lógica intuicionista requiere que el dominio cuantificacional contenga al menos un elemento, situación que considera la *lógica inclusiva*, un tipo de lógica libre [N2§1.3].
[27] El dominio *U*, mencionado ya durante la exposición de la teoría de modelos de Kripke.
[28] Estrictamente, de la pertenencia al dominio del valor de verdad del designador rígido.

en cada caso considerada: $\phi(E!t, H) = 1$ syss $\phi(t, H) \in D_H$. O, lo que es lo mismo, la constante forma parte del dominio[29] [N1, 93].

Es interesante observar que autores como Nolt y Thomason advierten de discrepancias entre la lógica intuicionista original de Heyting y la desarrollada por Kripke en la semántica de mundos posibles, a causa precisamente de esta referenciabilidad que Kripke permite a objetos aún no construidos. En aras de una mayor clarificación, Thomason propone sustituir la semántica intuicionista de Kripke por una lógica libre, por considerarla más apropiada en el tratamiento de estos casos [N1, 94-95].

Este análisis en términos de pertenencia de los objetos a un dominio cuantificacional ampliado que permita el estudio de proposiciones no referenciales parece ciertamente más adecuado que el análisis reduccionista de Russell, que considera aquellas proposiciones invariablemente falsas, y va también más allá del análisis de Strawson, basado en diferenciar una proposición de su uso. Cierto es que el marco lógico-matemático de la lógica libre, ausente tanto en Strawson como en Russell, permite mayor precisión en el tratamiento de objetos y propiedades que el lenguaje natural, así como en la construcción de distintos escenarios posibles mediante la utilización de conjuntos; pero este marco está también ausente en el análisis de Frege y aún más claramente en el de Aristóteles; y, sin embargo, estos autores, aún sin renunciar expresamente a la LTE, señalan la dificultad en atribuir valores de verdad a ciertas proposiciones, aunque por motivos diferentes. Observamos que Aristóteles lo hace en el caso de las proposiciones contingentes futuras. Frege, pero también Russell y Strawson, lo hacen al tratar de los términos sin referencia. Para la lógica constructiva, cualquiera

[29] Los términos no denotativos pueden ser de dos tipos: (i) *localmente no designativos*, cuando en algún nodo sucesor encuentran su referencia; y (ii) *globalmente no designativos*, si al final del proceso de ampliación de información siguen sin referencia [N1, 104]. A este respecto, debe asimismo tenerse en cuenta que el lenguaje actual puede resultar inapropiado para nombrar aquello que aún no se conoce.

de los casos anteriores significará que la función veritativa tomará valor 0 dado que no se considera la diferencia entre los tipos de proposiciones para las cuales no se tiene construida una prueba. Más adelante en este trabajo, trataré acerca de este hecho y de si esta diferenciación puede ser aplicable o interesante en el intuicionismo.

4. 2. Proposiciones necesarias y proposiciones contingentes

Hemos observado que los signos y reglas de formación del lenguaje permiten construir infinitas proposiciones, del mismo modo que el conjunto de los números naturales contiene infinitos elementos aunque no tengamos construidos más que las que efectivamente hemos construido. También hemos observado el proceso de la ampliación de los dominios cuantificacionales en la sucesión de nodos, así como el hecho de que el descubrimiento o invención de enunciados permite agregar a la información existente en mundos anteriores cualesquiera nuevos datos. Como resultado, los mundos sucesores seguirán conteniendo infinitas proposiciones, pero las nuevas proposiciones acuñadas producirán que este infinito sea más denso que el de los nodos antecesores, resultado relacionado con la noción de forzamiento anteriormente señalada. Sin embargo, hasta ahora considerábamos únicamente el comportamiento de los nodos en relación a las proposiciones necesarias en ellos contenidas, verdades abstractas, pues como necesarias debemos considerar las fórmulas válidas del cálculo que se derivan como teoremas en el proceder lógico y matemático. Pero éstas son sólo una parte de las infinitas[30] proposiciones necesarias posibles, ya que debemos asimismo considerar las proposiciones necesarias que forman parte del ámbito de las diversas ciencias naturales[31]. A todas estas proposiciones necesarias es aplicable la condición de que una

[30] Podemos discutir si las proposiciones lógico-matemáticas o científicas existen en número infinito, aunque sin duda lo son considerando las generadas mediante redundancia. También son infinitas las proposiciones necesarias lingüísticas, del tipo *Ningún soltero es casado*, a causa de la continua posibilidad de definir nuevos términos. Sin embargo, es importante mencionar en este punto la diferencia entre infinitos actuales y potenciales. En el primer caso, se trata de conjuntos completos y definidos que constan de infinitos elementos, y de los que todos sus elementos pueden darse conjuntamente: es decir, no son construidos mediante un proceso. En cambio, el infinito potencial se refiere a secuencias o series que se pueden imaginar o construir y que no tienen fin. Las infinitas proposiciones lingüísticas pertenecen a este último tipo de infinito, como también lo son los números naturales. Aunque, en cierto modo, los infinitos potenciales presuponen algún infinito actual, éste no puede ser conocido mediante la experiencia.

[31] Al menos, estas proposiciones no parecen haber sido consideradas, ya que posteriormente observaremos que su comportamiento no es estrictamente el mismo que el de las proposiciones lógico-matemáticas.

vez la función veritativa –constructiva- de una proposición toma el valor de verdad 1, no puede retomar un valor 0. En realidad, ésta puede ser considerada una definición de una proposición necesaria en lógica intuicionista: una proposición P es necesaria syss una vez tomado el valor 1, no puede volver al valor 0.

$$(P \rightarrow \Box P) =_{def} ((\phi(P, H) = 1) \rightarrow \sim\Diamond (\phi(P, H') = 0)) \text{ para } H, H' \in K \text{ y } HRH'$$ [32]

El caso de las proposiciones contingentes, también formando parte del cada vez más denso infinito proposicional, no ha sido considerado en los estudios de lógica intuicionista. Este tipo de proposiciones posee la característica de que su función veritativa puede tomar el valor 1 en unos mundos y el valor 0 en sus sucesores. En definitiva, son proposiciones meramente posibles. Podemos observar este comportamiento sin apartarnos del ámbito matemático. Sea C el conjunto formado por {1, 2, 3, 4} y sea $A(S_C)$ un algoritmo que escribe continuamente sus subconjuntos en un orden aleatorio, con una secuencia de tiempo determinada. Por ejemplo: {1}, {1, 2, 4}, {3, 4}, {2, 3}, {2}…. A continuación, consideremos el enunciado P: *El subconjunto de C que está siendo escrito en el momento* t *por* $A(S_C)$ *es {1, 2, 4}*. Es fácil comprender que puede construirse una prueba para P en la que su función veritativa tome el valor 1 en un nodo antecesor H y cambiar a 0 en un nodo sucesor H', siendo H, H' ∈ K y HRH', pues su verdad o falsedad dependerá de un proceso aleatorio. Esta característica proposicional permitirá también definir la contingencia, con las mismas bases con las que anteriormente hemos definido la necesidad:

$$(P \rightarrow \sim(\Box P \vee \Box\neg P) =_{def} \Diamond ((\phi(P, H) = 1) \wedge (\phi(P, H') = 0)) \text{ para } H, H' \in K \text{ y } HRH'$$

Dado que el propósito original de Brouwer y Heyting era formalizar aquello que sucede en el mecanismo racional humano, era comprensible que su estudio se centrara en las proposiciones lógico-matemáticas como captura de dicho modo de proceder. Por su

[32] En esta definición y en la siguiente para la contingencia, utilizo el operador clásico de negación, representado por ~.

naturaleza, no les interesaba observar qué sucedía con las verdades científicas y los hechos contingentes. Sin embargo, dado el interés que puede representar contar con un estudio holístico de la extensión proposicional, considero de interés extender el método constructivo al resto de proposiciones. De este modo, se pone a disposición de las ciencias naturales un mecanismo probatorio que, como veremos, puede contribuir a clarificar algunas de las situaciones paradójicas consecuencia del significado clásico de la *negación*.

4. 3. La construcción de una prueba para las proposiciones no abstractas

4. 3. 1. Consideraciones previas

Tanto las verdades científicas como las contingentes tienen en común la necesidad de recurrir para su contrastación a un ámbito extramental[33] y hallar entre éste y el nivel lógico-lingüístico una función de correspondencia. Una de las cuestiones iniciales a plantear en un propósito verificador de este tipo debe ser acerca del modo de poner en correspondencia elementos ontológicamente tan distintos. Pero aún existe una cuestión primera: establecer que existen[34] tanto objetos abstractos como físicos. En lo que atañe a los objetos abstractos y el cálculo lógico-matemático, Heyting *asume* como ciertos -como por otra parte, ocurre en cualquier sistema lógico o matemático- una serie de axiomas y reglas de transformación y define su método constructivo para los objetos lógico-matemáticos. Previamente a ello, debe también *asumir* que los objetos abstractos existen.

En el caso de las proposiciones que son originalmente v-definidas, las que se cotejan con una realidad extramental, también es obligado realizar un número de asunciones, procurando que sean lo menos problemáticas posibles. Deben, sin embargo, ser en algún grado problemáticas porque ello es motivo de vivo debate en Filosofía de la Ciencia. Pero para llegar al propósito que pretendo -establecer un método- seguiré criterios sumamente pragmáticos, aunque seguirán siendo asunciones y no certezas: los objetos

[33] Puede considerarse que ello no siempre así, por ejemplo en el caso de la contingencia *Brunelleschi está pensando en Florencia*. Sin embargo, dejaré de lado las proposiciones que sólo pueden ser verificadas por el sujeto de quien se predica el pensamiento, por quien las piensa o mediante técnicas aún por venir.

[34] *Los hay* -como mínimo- en el sentido que establece el cuantificador existencial, sin entrar en la discusión de si son objetos del mundo.

que se consideran y que serán tratados con el método, existen. Lo dice también Quine, pragmático acerca de la existencia de objetos y de propiedades de la Física, que expresa la preeminencia de esta ciencia sobre otros ámbitos del conocimiento [Q, 296ss]. En referencia a los fenómenos observables, debe resultar imprescindible conocer sus características físicas con el fin de incorporar el objeto y su propiedad a nuestro sistema lógico-constructivo, para así tomar una decisión acerca del valor veritativo de las proposiciones de las que éstos objetos forman parte. Cierto es que algunos objetos pueden observarse directamente mediante los sentidos y otros no pueden serlo más que con instrumentos de medida. Pero, en cualquier caso, toda decisión científica que permita subsumir los objetos en una categoría conceptual implica aceptar previamente una base teórica ineludible. En palabras de Van Fraassen,

> *To accept a theory involves no more belief, therefore, than that what it says about observable phenomena is correct. To delineate what is observable, however, we must look to science—and possibly to that same theory—for that is also an empirical question* [VF, 57].

De este modo, si deseamos conocer el peso de un objeto mediante una báscula de muelle *debemos asumir la ley de Hooke* de la deformación de un material elongable cuando a él se aplica una fuerza; y, en general, *asumiremos la validez de los datos experimentale*s -como elemento clasificatorio, comparativo y métrico- aún conociéndolos cargados de teoría, pues no disponemos de otra opción para importar datos a la construcción de pruebas proposicionales. Asumiremos también que *nuestra construcción del mundo está necesariamente ligada a nuestro modo de razonar* y a nuestra estructura lingüística, y no es posible ni en cierto sentido necesario tratar de depurarlo, pues toda transformación que ello pueda operar sobre las verdades científicas no producirá distorsiones locales sino universales en toda la comunidad científica. Por otra parte, además de estas posibles transformaciones -invasión sistémica del modo de operar humano en el conocimiento- existe otro aspecto a considerar. Deberíamos preguntarnos si un observador interno a cualquier sistema puede alguna vez conocer qué es lo que le rodea aislando su condición y sin que ello conduzca siempre a una referencia a otra cosa asimismo interna. Por ejemplo, cuando hoy parece ser que se confirma la existencia del *bosón de Higgs* y que ello puede explicar la masa de los objetos, nos encontramos refiriéndolo a otro concepto del universo, el *campo de Higgs*, especie de éter cuántico del que desconocemos su esencia –o incluso su existencia. Quizá una teoría física global permita la vieja idea determinista de Newton, convirtiendo cualquier proposición en necesaria; pero cualquier conocimiento completo -si fuera posible- no parece posible sin separarse de lo que se pretende estudiar. Esta inquietud, por otro lado, no es tampoco nueva en el pensamiento. Para constatarlo baste recordar el imposible grabado de Flammarion en el que un monje medieval se asoma fuera de la última esfera aristotélica para observar el mecanismo del universo. (Fig. 4) Terminaré la serie de asunciones previas para la construcción de proposiciones no matemáticas, aceptando -como hacen varios autores, entre ellos Van Fraassen- que existen proposiciones que no son verdaderas ni falsas[35] resultado principalmente del uso de términos sin referencia.

[35] Van Fraassen hace esta afirmación respondiendo al realismo de Dummett, quien considera que las proposiciones son verdaderas o falsas en virtud de una realidad. La respuesta de Van Fraassen es que existen realistas que aceptan que ciertas proposiciones no son verdaderas ni falsas. Citado en [D2, 125].

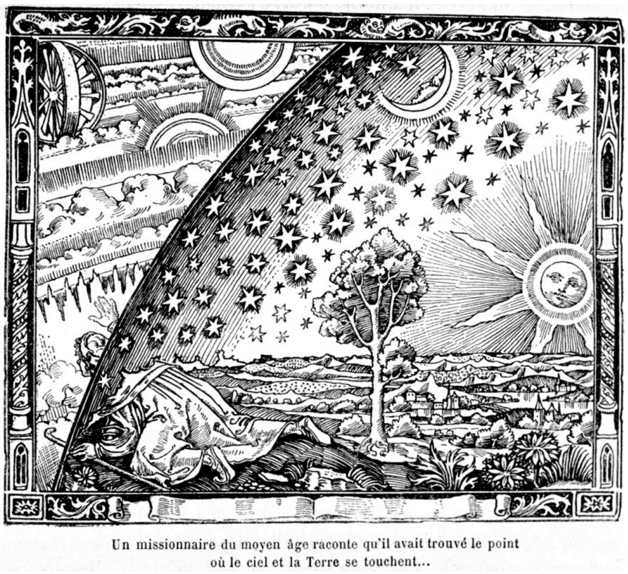

Fig. 4 Grabado de Camille Flammarion en L'atmosphère: météorologie populaire *(1888)*

4. 3. 2. El método constructivo

El método constructivo de pruebas proposicionales está perfectamente definido cuando se comprende el concepto de una proposición p-definida. Si el propósito es partir de cómo se construyen este tipo de proposiciones para seguidamente diseñar un método constructivo para el resto -es preciso mantener una unidad de criterios para un estudio holístico proposicional- este método debería fijarse como objetivo la transformación de las proposiciones v-definidas en proposiciones p-definidas[36]. Hemos observado que Brouwer plantea su sistema lógico como aprehensión de un modo racional de proceder, y acepta lo construido de acuerdo al método como existente. Las asunciones previas basadas en la preeminencia de la Física aceptan los objetos y propiedades que dicha disciplina estudia. Ahora es necesario estipular y sistematizar este método constructivo, para permitir una formalización de las proposiciones así estudiadas. En esta formalización, una primera aproximación podría ser la posibilidad de que el objeto a estudiar fuera acompañado del operador de existencia *E!*, como

[36] Cierto es que, estrictamente hablando, ello no será así, pues las proposiciones originalmente v-definidas necesitan en cada caso de una conexión con una realidad extramental.

ocurre en la lógica libre. De este modo, *E!a* debería estar presente en cualquier fórmula predicativa sobre un objeto *a*. Sin embargo, dadas nuestra asunciones, esto sería redundante; y en mayor grado lo será si tenemos en cuenta otra afirmación de Quine según la cual '*Ser' es ser el valor de una variable*. Si consideráramos la existencia del mismo modo, la obtención de un dato experimental proporcionaría el predicado de una proposición y la seguridad de que esta predicación se refiere a algo; es decir, nos ofrecería el sujeto y el predicado de un enunciado. Considerar de este modo la construcción de una proposición no plantea excesivos problemas[37] cuando utilizamos nombres propios en enunciados como *La luz se desplaza en el vacío a una velocidad de 299.792.458 m/s,* afirmada después de la medida más precisa. Se dan, sin embargo, otros casos en los que el sujeto proposicional no es tan evidente. Por ejemplo, cuando me dispongo a pesar una pepita de oro en una balanza, o a establecer la edad de un fósil mediante una medición con C_{14}. Cuando el objetivo es conocer las propiedades de un objeto cualquiera, sin especial identificación, la primera operación a realizar es *nominarlo*, convirtiéndonos en modernos demiurgos platónicos. Parece por ello razonable que necesitemos un *operador nominativo* o *designativo*, al que llamaremos *N!*, el cual asegura la designación del objeto a estudiar si éste no ha sido nombrado previamente -básicamente, si el objeto no dispone de un nombre propio. Siguiendo nuestro ejemplo, tenemos en el laboratorio varias muestras de oro de las que queremos conocer su peso. El paso previo a construir la proposición en cuestión es identificar cada muestra con un nombre. Obsérvese que este método hace más difícil -¿o imposible?- designar algo que no existe. Por ejemplo, cualquier partícula subatómica que *parezca existir* puede ser nombrada -el caso del *bosón de Higgs* es conocido- sin saber si existe o no. Sin embargo, en este contexto, cualquier valor predicativo que asignemos a un sujeto de este tipo asegura su existencia, y de algo que no existe no podremos asignar un valor predicativo. Un bosón *parecerá existir* si algo interacciona de un modo determinado con un equipo de medición. Que aquella interacción provenga de un bosón

[37] No plantea problemas si previamente obviamos el problema de la carga teórica de cualquier observación, tanto a *ojo desnudo* como mediante instrumentación. Una vez obviado, comprendemos que la *luz* es una entidad -parcialmente- definida o que, al menos, no debería confundirse con otro fenómeno físico. Es en este sentido cuando afirmamos que, teniendo identificado un sujeto proposicional y disponiendo de una medida del mismo, la construcción de una prueba proposicional no debiera conllevar ulteriores inconvenientes.

o no, quedará por aclarar. Sin embargo, lo que parece evidente es que aquel *algo* interactúa con quien lo está midiendo, hecho expresado por el realismo de van Fraassen. Los casos de los términos sin referencia quedan al descubierto de este modo. Por ejemplo, si decimos *Pegaso pesa 600 kg* únicamente podremos construir una prueba para este enunciado con una medida de peso. Si la tenemos, por la asunción previa de que cualquier dato experimental se trata como predicación de una propiedad de un objeto existente, sabremos que Pegaso *existe en nuestro sistema*. Si no tenemos al menos una medida, comparación, clasificación o subsunción de *Pegaso* en un *concepto científico*, habremos nombrado a Pegaso mediante *N!a*, pero no asegurado su existencia. En estos casos, *E!a no podría añadirse* conjuntiva y redundantemente a cualquier proposición sobre Pegaso[38].

Con estos antecedentes podemos considerar ahora cómo construiremos una prueba para las proposiciones contingentes. Tomemos por ejemplo *Este caballo pesa 600 kg*, a la que llamaremos P; quizá la prueba puede articularse del modo siguiente, en una serie de pasos:

1. Nombramos al caballo a estudiar -de un dominio *x*- como *a*: N!a
2. Construimos *P*: (N!a ^) $P_{600Kg}a$[39]
3. Medimos mediante un procedimiento estandarizado el peso de *a*[40]

---

[38] Otra cosa distinta -pero muy cercana, por otro lado- es la proposición *Pegaso es un caballo alado*. Parecerá irrefutable si definimos a *Pegaso* como un equino que además tiene alas. Pero si pretendemos construir una prueba para esta *proposición conceptualmente necesaria* a través tanto de las características particulares de un *Pegaso* como de su inclusión en el género *Equus*, observaremos la diferencia con respecto a un simple asno. En efecto, si un concepto se refiere a una categoría o clase existente (en este caso a los equinos) acabará evidenciando que un *pegaso* es un término sin referencia, aunque se defina como equino con alas, porque al querer construir una prueba para el concepto, no será posible subsumirlo en ninguno de los subgrupos de equinos que existen.

[39] Una vez nombrado, N!a puede ser obviado en la fórmula -como es obviado E!a cuando contamos con el resultado de una variable- dado que forma parte de ella ya el objeto *a*; no puede obviarse, sin embargo, el acto de nominación. Si el caballo a estudiar fuera *Bucéfalo*, el paso 1 no sería obligado, iniciándose el proceso en el paso 2 con la proposición $P_{600Kg}b$.

[40] Cualquier inclusión en la extensión de los elementos de un concepto debe basarse en procedimientos sistemáticos definidos para cada concepto-predicación en el ámbito de cada ciencia en particular y, en su caso, con una medida para conceptos métricos [DUM§4].

4. Determinamos el valor de verdad de P en un mundo H en base al criterio siguiente: $\phi(P, H) = 1$ syss el resultado de la medida de peso de *a* es igual a 600 kg.[41] En cualquier otro caso, $\phi(P, H) = 0$[42].

Es posible invertir el orden de los pasos 2 y 3, lo cual nos da un procedimiento distinto. Si en el primer caso construimos el enunciado y luego lo verificamos o falsamos con la medida, en el segundo caso construiremos un enunciado "a medida".

Respecto a las proposiciones necesarias no matemáticas, nos encontramos con dos casos distintos. El primero se da en el ámbito de las regularidades nómicas científicas. El segundo se refiere a las proposiciones que son necesariamente verdaderas por su estructura. Asumiremos que la prueba de una *proposición universal*[43] *física* o *regularidad nómica* se construye a partir de pruebas de múltiples proposiciones particulares en las que se observa[44] un comportamiento regular de la naturaleza. Posteriormente, mediante *inducción*, se establece -se afirma- que cualquier nuevo objeto en el sistema estudiado se comportará de acuerdo al mismo criterio de regularidad. La prueba se reduce a una conjunción *suficiente* de enunciados particulares. Por ejemplo, en la regularidad nómica -expresada ahora como una proposición que requiere la construcción de una prueba- *La fuerza que desarrolla un cuerpo es el producto de su masa por la aceleración a la que está sometido*, realizamos *n* medidas de objetos que

---

[41] No seremos tan estrictos como en *El Mercader de Venecia*, donde Portia permite a Shylock cortarle una libra de su carne en pago al préstamo vencido, pero «*if the scale do turn but in the estimation of a hair, thou diest and all thy goods are confiscate*.» Permitimos un error de medida y consideramos unos límites a establecer.

[42] En este punto es necesario destacar la posibilidad de que el proceso de medición dé resultados distintos en coordenadas -espacio-temporales o nodales- diferentes. Por ejemplo, la medición del peso de un mismo cuerpo en la $Luna_1$ y la $Tierra_1$ (indicamos así que ambos planetas se encuentran en el mismo espacio nodal) proporcionará resultados diferentes porque la masa de los dos planetas es diferente -coordenada espacial distinta. Otra cosa diferente es cuando nos encontramos en $Tierra_1$ y $Tierra_2$, donde la coordenada nodal es distinta: la masa de las dos tierras puede ser la misma pero, por ejemplo, la constante gravitatoria sería distinta.

[43] Podemos dudar de si una verdad científica es una proposición necesaria, porque puede no ser verdadera en todos los mundos posibles. Menos polémicamente, podemos llamarlas *proposiciones universales* o *generalizaciones nómicas*.

[44] La noción de *observación* se comprende aquí sin la intención de entrar en la polémica de si es posible o no observar externamente a un sistema conceptual que proporcione su base teórica. Aceptaremos por el momento que *observar* se refiere a incorporar datos de un sistema físico a un sistema lingüístico (lógico-científico) que permita cierto grado de análisis de los datos del primero.

involucren las tres magnitudes estudiadas, *f*, *m* y *a*, relacionándolas del modo que la regularidad expresa. Una vez hecho esto, disponemos de *n* términos de una conjunción: $f_1=m_1a_1\wedge \ldots \wedge f_n=m_na_n$. Si *todos*[45] los sistemas observados que involucren *fuerza*, *aceleración* y *masa* muestran el mismo comportamiento, construimos la *prueba por inducción*[46]:

$$\phi(f=ma, \mathrm{H}) = 1 \text{ syss } \phi(f_1=m_1a_1, \mathrm{H}) =\ldots= \phi(f_n=m_na_n, \mathrm{H}) = 1$$

En cualquier caso distinto, $\phi(f=ma, \mathrm{H}) = 0$. El valor de la función constructiva de esta proposición *f=ma* en el nodo inicial G será 0 si éste es el inicio absoluto de la investigación.

Un caso de algún modo diferente del anterior es el de las leyes probabilísticas, aunque la prueba se construirá igualmente utilizando una conjunción de términos para los que se cumpla una propiedad determinada, la propiedad predicada. En este caso, no todos los términos de la conjunción expresarán valor 1 en el ámbito de las pruebas particulares. Por ejemplo, consideremos el enunciado P *Al tirar un dado, la probabilidad de obtener 6 es de 1/6.* Dado que se trata de una regularidad nómica-estadística, esperaremos que, construyendo pruebas del tipo *al tirar un dado, obtengo 6*, denotado como D(6), solamente 1/6 -no más ni menos- de los términos conjuntivos deban ser verdad para construir una prueba de P. De este modo, después de *n* tiradas -consideradas estadísticamente suficientes- estableceremos

$$\phi(\mathrm{P}, \mathrm{H}) = 1 \text{ syss } \phi(\mathrm{D}(6)_1, \mathrm{H}) =\ldots = \phi(\mathrm{D}(6)_n , \mathrm{H})= 1: (1/6)$$

---

[45] De nuevo, consideramos los errores sistémicos como asumidos; por ello, requerimos que *cualquier nuevo objeto* observado se comporte de acuerdo a la relación que estudiamos.
[46] Más precisamente, construimos la prueba *como resultado* de la inducción.

donde el resultado *1: (1/6)* denota que la función de prueba constructiva toma valor 1 en 1/6 de los casos[47]. En cualquier caso distinto, $\phi(P, H) = 0$; aunque, en una ley estadística, la afirmación *cualquier caso distinto* no goza de igual fortaleza que en el caso de una regularidad nómica absoluta.

El segundo tipo de proposiciones necesarias que no son lógico-matemáticas son las necesidades conceptuales -las verdaderas en virtud de los conceptos lingüísticos- por una determinada elección de los términos de sujeto y predicado del enunciado. En determinadas ocasiones estas proposiciones tienen una correspondencia muy evidente con las proposiciones contingentes. Por ejemplo, consideremos las proposiciones P_1 y P_2.

- P_1: *El tren de la vía 1 para en todas las estaciones excepto en Odawara, Kakegawa y Kyoto*.
- P_2: *El tren de la vía 1 para en todas las estaciones excepto en las que no para.*

Es evidente que P_2 es cierta siempre -cuando en la vía 1 hay un tren que circula, punto que no es menor- mientras que P_1 lo es contingentemente, y pensaremos que un anuncio de la estación seguramente anunciará P_1 y no P_2 para informar a los pasajeros; pero, si P_1 es cierta, P_1 y P_2 producirán exactamente los mismos efectos en el comportamiento del tren y en la movilidad de los pasajeros.

La proposición necesaria *El caballo es un animal vertebrado* es también una necesidad conceptual. Las pruebas constructivas para este tipo de proposiciones deberán remitir al mundo físico a partir del cual se crean los conceptos, y pueden ser de diversos tipos, de los que señalaremos dos. El primer tipo de prueba puede construirse utilizando el conjunto de propiedades que significa *ser un término* determinado[48]. En el caso de *ser un caballo*, $(x)[Cx \leftrightarrow (P_1x \wedge \ldots\ldots \wedge P_nx)]$, una de las cuales es ser vertebrado, por

[47] Aceptaremos por el momento esta teoría de la probabilidad, asumiendo también un criterio de significancia estadística que permita construir la prueba proposicional, aún siendo conscientes de que este punto requiere ser precisado ulteriormente y desarrollado.
[48] Obviaremos también que sobre este tipo de conjunciones como propiedades de un término, existe debate.

ejemplo P_1a. Mediante la regla de eliminación de la conjunción y del bicondicional, obtenemos la característica pretendida: *Si a es un caballo, a es unanimal vertebrado*, $(x)[[Cx \leftrightarrow (P_1x \wedge .... \wedge P_nx)] \rightarrow [Cx \rightarrow P_1x]]$. En cuanto a la función veritativa proposicional -para todo *x*- se expresará mediante

$$\phi(Cx \rightarrow AVx, H) = 1 \text{ syss } \phi(Cx \rightarrow P_1x, H) = 1$$

Para todos los demás casos, $\phi(Cx \rightarrow AVx, H) = 0$.

Un segundo modo de probar una proposición de estas características es utilizar un concepto clasificatorio: los *animales vertebrados* comprenden los *mamíferos*; éstos comprenden los *herbívoros*, los cuales comprenden los *equinos* y estos comprenden a los *caballos*. La construcción de la prueba es como sigue -para todo x-: $\phi(Cx \rightarrow AVx, H) = 1$ syss $\phi(Cx \subseteq AVx, H) = 1$. En caso de no ser así, $\phi(AVx \rightarrow Cx, H) = 0$.

Las proposiciones conceptuales que refieren a conceptos matemáticos, del tipo *Ningún cuadrado es un triángulo*, necesitan también una referencia a objetos extralingüísticos, pero en este caso abstractos. La construcción en este caso de una prueba proposicional puede realizarse utilizando también el conjunto de propiedades que significa ser un término y observando que *cuadrados* y *triángulos* poseen propiedades incompatibles. Una vez *descubiertos* -en un determinado nodo H o en nodos diferentes H y H'- los triángulos y los cuadrados y definidas sus propiedades, se observa que los dos tipos de figuras se excluyen mutuamente.

4. 3. 3. La paradoja de la confirmación de Hempel

Los mecanismos utilizados en el ámbito de la lógica clásica para establecer regularidades nómicas no están exentos de controversia. En determinados casos pueden llevar a resultados absurdos, como los que evidencia la *paradoja de la confirmación de Hempel*, señalada por su autor como crítica a la generalización indiscriminada del método inductivo. El planteamiento de la paradoja es el siguiente. En una hipótesis de la que se pretende conocer su verdad o falsedad, constituida por una cuantificación universal que abarque un condicional -como es el caso de la proposición *Todos los cuervos son negros,* (x)(Cx $\rightarrow$ Nx)- si se utilizan los criterios de confirmación de Nicod afirmamos que cualquier hecho en el cual se dé N en presencia de C confirma la proposición[49]. Si, en presencia de C, no se da N, el hecho invalida la proposición. Pero en lógica clásica (x)[Cx $\rightarrow$ Nx] -a la que llamaremos S_1- equivale a (x)[¬Nx $\rightarrow$ ¬Cx] -que será S_2. Siguiendo nuevamente los criterios de Nicod, un cuervo negro confirma S_1 y es neutra respecto a S_2; por otro lado, un objeto que no sea un cuervo, sea o no sea negro confirma S_2 y es neutra con respecto a S_1. Pero precisamente por la equivalencia lógica de S_1 y S_2, no sólo cualquier objeto que no sea un cuervo y no sea negro confirma S_1, sino que también pueden encontrarse fórmulas equivalentes a S_1 y S_2 que son contradictorias, como es el caso de (x)((Cx ^ ¬Nx) $\rightarrow$ (Cx ^ ¬Cx)) [H, 9-11].

Esta paradoja -que sigue siendo objeto de debate actualmente en Filosofía de la Ciencia- se diluye en el ámbito de la lógica intuicionista debido al distinto significado de la partícula negativa: si bien será posible transformar S_1 en S_2, la conversa ya no es cierta[50]. Como consecuencia, cualquier nube blanca no confirma que los cuervos son negros -aunque sí lo hace cualquier objeto que no sea un cuervo y sea negro. Si traducimos el argumento al lenguaje natural, nos parecerá del mismo modo evidente que, partiendo del enunciado altamente indeterminado *Si no tenemos construida una prueba de que algo es negro, entonces no tenemos construida una prueba de que dicho objeto es un cuervo*, no podemos afirmar *Todo cuervo es negro*[51].

La disolución de la paradoja de Hempel en lógica intuicionista puede conducir a considerar la utilización del método constructivo como instrumento de análisis en Filosofía de la Ciencia, para lo cual, es obvio, se requieren ulteriores estudios que no son objeto de este trabajo. Lo que sí venimos discutiendo desde capítulos anteriores es el hecho de que la particular definición de la función veritativa intuicionista obvia el

[49] Aunque, por las características del condicional clásico, también confirma la proposición cualquier hecho en el cual se dé N sin la presencia de C.
[50] ¬Nx $\rightarrow$ ¬Cx equivale a ¬¬Cx $\rightarrow$ ¬¬Nx. Dado que el signo principal de esta fórmula es la negación, no es lícito el paso a Cx $\rightarrow$ Nx.
[51] Más precisamente, pero transformado en aras de la exposición, en lugar de *Todo cuervo es negro* debería haber dicho: *Si tenemos construida una prueba de que algo es un cuervo, también la tenemos construida de que ese objeto es negro*.

problema de si un enunciado carece de valor de verdad y no es posible, además, diferenciar entre si una proposición carece de valor de verdad, si es falsa o si no disponemos de una prueba para ella por desconocimiento de la realidad. Que ello sea o no satisfactorio no se considera. Llegar a este tipo de conocimiento debe ser posible, pero para ello es necesario observar desde otra perspectiva la función del valor veritativo proposicional.

4. 4. Opciones de valores de verdad de las proposiciones

¿Cuáles son los motivos por los que -en determinados casos- no será posible construir una prueba proposicional? Hemos observado que, en el caso de las proposiciones necesarias, no será posible cuando de ello se derive una contradicción, o cuando la información disponible en cada nodo concreto no sea suficiente a tal fin. Ahora bien, al no ser la lógica intuicionista una lógica multivalente -dispone únicamente de 1 y 0- no existe la posibilidad de discriminar los casos ontológicamente distintos por los que la función veritativa ϕ toma el valor 0. O, más propiamente, cuál es el significado de afirmar que una proposición queda negada. Para ello, deberíamos utilizar más de dos valores de verdad, como señalaremos ahora en una primera tentativa:

i. Para una proposición P de la cual tenemos una prueba construida, $\phi(P, H) = 1$.
ii. Cuando existe una prueba de $\neg P$, $\phi(P, H) = -1$.
iii. Si, en cambio, no contamos aún con una prueba de P ni de $\neg P$, $\phi(P, H) = 0$[52].

¿Es esta discriminación útil? Podemos observar, antes de responder, qué ocurriría con las proposiciones contingentes mediante ejemplos ya conocidos sobre los que aplicaremos estos nuevos valores de verdad. En el caso de *El actual rey de Francia es calvo*, proposición a la que llamaremos Q, concederemos $\phi(Q, H) = 1$ syss podemos verificar empíricamente que el único rey de Francia actual -hay un único rey en el

[52] Puede ser interesante observar que, una vez construida $\neg Q$ en un nodo cualquiera, $Q \vee \neg Q$ adquiere valor veritativo 1, y se cumple también la ley de no contradicción $\neg(Q \wedge \neg Q)$.

momento de considerar el enunciado- es calvo. Ahora bien, en el caso de la negación, este tipo de proposiciones merecen mayor atención.

Es evidente que no es lo mismo negar Q externamente (*El actual rey de Francia es calvo* conduce a una contradicción), que hacerlo internamente (existe una prueba de que hay algo que es único rey de Francia y no es calvo), ya que de ello se derivan consecuencias lógicas importantes. Pasemos a señalarlas, aunque ya advertimos que el análisis de Russell -clásico- no es completamente aplicable en el ámbito intuicionista.

Cuando la negación es externa, la proposición resultante en lógica clásica es una asociación disyuntiva debido a la transformación de De Morgan, y parecería que en nuestro caso construir una prueba proposicional sería proporcionar una prueba de al menos una de las tres situaciones siguientes[53]:

- No existe al menos un rey de Francia
- No existe a lo sumo un rey de Francia
- No existe nada calvo

Sin embargo, intuicionísticamente, ello no es así, debido a la imposibilidad de interdefinir conectivas y a no cumplirse una parte de las leyes de De Morgan, concretamente $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$. Es posible observarlo mediante un contraejemplo a la fórmula anterior, (fig. 5) considerando los nodos G, H y H', y las proposiciones A y B, en una relación EMI tal que GRH y GRH', donde $\phi(A, H) = 1$ y $\phi(B, H') = 1$. Entonces, $\phi(\neg A, G) = 0$ y $\phi(\neg B, G) = 0$, con lo cual $\phi(\neg A \vee \neg B, G) = 0$. Por otra parte, $\phi(A \wedge B, H) = 0$ y $\phi(A \wedge B, H') = 0$, lo que lleva a $\phi(\neg(A \wedge B), G) = 1$. Como consecuencia, $\phi([\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B], G) = 0$ [VD, 14]. Observamos pues que de la negación externa de la proposición Q parece que no es posible pasar a la disyunción a la que hacíamos referencia. De este modo, enunciamos aquí que existe una negación

[53] Hemos de hacer notar que, si bien en lógica clásica tampoco la fórmula $\neg \exists x (Rx \wedge (y)(Ry \rightarrow x=y) \wedge Cx)$ es equivalente a $\neg \exists x Rx \vee \neg \exists x (y)(Ry \rightarrow x=y) \vee \neg \exists x Cx$, sí parece que cualquiera de las tres situaciones señaladas puede tomarse como prueba de la negación externa.

global al enunciado Q que debe en el futuro ser estudiada, negación que puede afectar bien a las características del sujeto, bien al cumplimiento por parte de éste de la predicación, bien a ambos ámbitos conjuntamente. Aunque desconocemos su abasto, sí podemos observar que, si esta indeterminación afectara al sujeto, ello constituiría una diferencia fundamental con las proposiciones propiamente necesarias, pues sujeto y predicado se encuentran íntimamente unidos en este tipo proposicional.

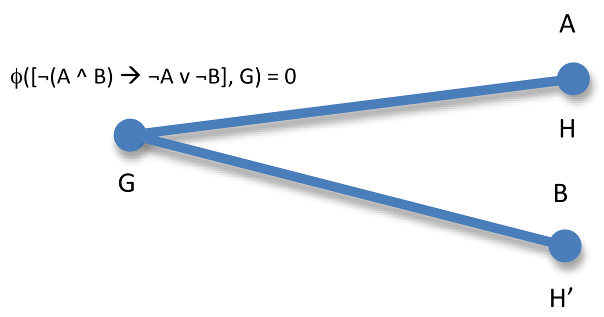

Figura 5. Construcción de un contraejemplo a una de las leyes de De Morgan a partir de un árbol lógico intuicionista de Kripke.

Si la negación es interna, se deberán probar las dos situaciones siguientes, sin que de ello parezca derivarse otras consecuencias:

- Algo es único rey de Francia.
- Ese objeto no es calvo[54].

Así pues, hemos identificamos hasta el momento dos tipos de negaciones para el enunciado contingente Q:

[54] Advertimos en este punto otra diferencia fundamental con la necesidad que, como ya afirmó Russell, sólo puede ser negada de un modo: es equivalente enunciar -aún en el ámbito probatorio intuicionista- *El triángulo no tiene tres ángulos* y *Es falso que el triángulo tenga tres ángulos.*

- ¬Q para la negación externa o global.
- -Q para la negación interna.

Por otro lado, es posible que no dispongamos de la información necesaria ni para afirmar ni para negar el enunciado contingente. En este caso, por no tener construida una prueba, el valor de verdad será el correspondiente al mismo caso en las proposiciones necesarias, es decir, $\phi(Q, H) = 0$[55].

Finalmente, existe un último valor de verdad para proposiciones contingentes. Hemos argumentado ya por qué Q no debería ser falsa sin más en el caso de que no existiera un rey en Francia sino un presidente de la república o una comuna anarquista; o si Francia se ha desintegrado y sus regiones son ahora soberanas; o si Francia ha sido tragada por la tierra; o aún si en ningún lugar existen ya monarcas. En todos estos casos, falta la referencia del sujeto de quien se predica. Lo que en realidad ocurre es que una proposición que en algún momento ha sido susceptible de atribución de valores de verdad, como lo ha sido Q, ha dejado de serlo. Podemos decir que, con respecto de la realidad, esta proposición se ha *descontextualizado*, ha perdido su *vigencia proposicional*: ya no existe la capacidad de probar empíricamente Q v ~Q, y la función veritativa debe tomar otro valor distinto a los expuestos hasta el momento; por ejemplo, el que denotaremos mediante el *signo de admiración*, $\phi(Q, H) = !$[56]

A continuación sintetizamos los valores de verdad que pueden tomar las proposiciones contingentes[57], a modo de ensayo, dejando el análisis de las consecuencias de esta propuesta para una investigación posterior:

---

[55] Si consideramos el caso de una proposición contingente futura, como *El próximo rey de Francia será calvo*, nos encontramos con que su valor de verdad no lo conocemos ni lo podemos conocer. Observamos que, en este caso, dado que no tenemos construida una prueba para P ni para ¬P, no es posible afirmar P v ¬P. Sin embargo, ésta es otra proposición distinta a la que considerábamos anteriormente, por lo que nos limitaremos a señalar su comportamiento pero no la incluiremos en el análisis de la contingencia presente.

[56] Es posible, aunque no lo sepamos en este momento, que este tipo de negación esté contenida en la negación externa, aunque la señalamos aquí separadamente pues es en este momento posible individualizarla y definirla.

[57] Como mínimo, una proposición contingente de la forma estudiada. En cambio, proposiciones contingentes como *Llueve* (*Ahora llueve*), parecen ser objeto de un solo tipo de negación, pues se dirían equivalentes –en el ámbito probatorio- *No es verdad que ahora llueve* y *Ahora no llueve*.

1) Proposiciones afirmadas:

i. *El actual rey de Francia es calvo* $\phi(Q, H) = 1$ syss disponemos de una prueba de que existe un único rey y de que es calvo.
ii. *El actual rey de Francia es calvo* $\phi(Q, H) = -1$ syss disponemos de una prueba de que existe un objeto que es único rey y también de que no es calvo (negación interna).
iii. *El actual rey de Francia es calvo* $\phi(Q, H) = -2$ syss disponemos de una prueba de que *El actual rey de Francia es calvo* conduce a una contradicción (negación externa).
iv. *El actual rey de Francia es calvo* $\phi(Q, H) = 0$ syss no tenemos la información suficiente para determinar el valor de verdad del enunciado, ni disponemos de una prueba para las proposiciones negadas que describiremos a continuación.
v. *El actual rey de Francia es calvo* $\phi(Q, H) = !$ syss el sujeto ha perdido la referencia: por ejemplo, cuando hay un presidente de la república y disponemos de una prueba de ello.

2) Proposiciones negadas:

vi. NO (*El actual rey de Francia es calvo*), $\phi(\neg Q, H) = 1$ syss disponemos de una prueba de que de la proposición en su globalidad se deriva una contradicción.
vii. NO (*El actual rey de Francia es calvo*), $\phi(-Q, H) = 1$ syss disponemos de una prueba para los dos componentes de la conjunción: existe un objeto actualmente que es único rey en Francia y ese mismo objeto no es calvo.
viii. NO (*El actual rey de Francia es calvo*), $\phi(\sim Q, H) = 1$ syss disponemos de una prueba de algo que está en contradicción con el sujeto proposicional, implicando que éste carece de referencia: por ejemplo, el acta oficial de nombramiento de un presidente de la república francesa o la disolución de Francia como estado.

La función veritativa de estas proposiciones negadas tomará asimismo valor 0 cuando no se disponga ni de las pruebas anteriores, ni de una prueba de una proposición afirmativa.

Resumamos ahora en lenguaje formalizado los valores de verdad que puede tomar Q -el caso de proposición contingente estudiada- según lo descrito hasta ahora:

- i: ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y)) ∧ Cx)= 1
- ii: ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y) ∧ Cx)= -1 cuando ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y)) ∧ ¬Cx)= 1 (se corresponde con la negación *vii,* -Q).
- iii: ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y) ∧ Cx)= -2 cuando ¬ (∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y)) ∧ Cx))= 1 (se corresponde con la negación *vi,* ¬Q).
- iv: ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry → x=y) ∧ Cx)= 0 cuando no disponemos de información suficiente para afirmar o negar la proposición.
- v: ∃x ((Rx ∧ (y)(Ry→x=y) ∧ Cx)= ! cuando explícitamente falta la referencia (se corresponde con la negación *viii,* ~Q).

Anteriormente me he preguntado si es interesante considerar todas las posibilidades efectivas de valor de verdad de la función veritativa constructiva. Si la llamamos constructiva y nos regimos por los criterios estrictos intuicionistas, la situación es inequívocamente bivalente: la prueba está o no está construida. Ahora bien, hemos observado que esta construcción se hace ateniendo a los diversos componentes de la proposición, por lo que, considerando estos estados epistémicos más ricos, obtenemos en realidad una multivalencia de valores en la función veritativa. No es posible, por el momento, profundizar más en este aspecto; pero obsérvese que las proposiciones necesarias y las contingentes pueden tomar un número distinto de valores de verdad y parecen ser negadas también de modo distinto.

4. 5. El diferente carácter del valor de verdad de las proposiciones necesarias y las contingentes

Al exponer los puntos básicos del artículo de Kripke he señalado un aspecto fundamental de su construcción lógica intuicionista: la preservación hacia el futuro de un valor veritativo proposicional una vez éste adquiere valor 1. He mostrado asimismo que, en los casos de proposiciones contingentes, el valor de su función veritativa puede pasar de tomar valor 1 a valor 0 en nodos sucesores, advirtiendo con ello el distinto carácter que poseen los dos tipos proposicionales. Precisamente a causa de ello, cada vez que se avanza de un nodo antecesor a otro sucesor -quizá incorporando una prueba de una proposición necesaria- debería actualizarse la información de *todas* las infinitas proposiciones contingentes. Es decir, debería construirse una nueva prueba de las infinitas proposiciones de aquél tipo[58] pues de otro modo no podríamos asegurar un estado epistémico de información veraz y útil. Decía que esta construcción continua no parecería precisa en el caso de las proposiciones necesarias, pues observamos que no existe vuelta atrás una vez la función veritativa tiene valor 1. Sin embargo, ¿es esto así en todos los casos? Si consideramos las proposiciones en el ámbito de las ciencias -si es que fueran consideradas como necesarias- la Historia nos demuestra cuántas veces no se ha cumplido esta característica que hemos tomado como definitoria, incluso con teorías físicas tan bien construidas y demostradas empíricamente -en su tiempo- como la mecánica de Newton. Parecería, entonces, que la generalización nómica científica compartiría ciertas características de la contingencia, requiriendo la actualización continua de sus valores veritativos; o quizá toda construcción científica no es más que una útil aproximación a la verdad[59], cada vez más exacta[60], pero imposible de alcanzar, como si nos encontráramos en una de las paradojas de Zenón, donde a pesar de avanzar cierta distancia, sigue quedando una distancia infinita que recorrer. Es por esta constante búsqueda que deberíamos revisar qué definimos como proposición necesaria, o si existen diversos grados -absolutos y relativos- de necesidad. O si, observado de diferente modo, es posible que nodos sucesores de información impliquen no sólo la

---

[58] Proceso hercúleo, además de imposible.
[59] Quine afirma, en una discusión acerca de los límites, su tesis de que teorías científicas refutadas pueden ser mitos útiles, como es el caso de la Mecánica Clásica, que podemos utilizar cuando el error obtenido es lo suficientemente aceptable para nuestros propósitos [Q§51]. Sin embargo, posiblemente deberíamos afirmar que *toda la ciencia* es un mito útil, como diversos autores, entre ellos el mismo Quine, afirman.
[60] O quizá la Ciencia se aleja cada vez más de la verdad, como advierte Feyerabend [F§3].

construcción de nuevas pruebas proposicionales sino también la adopción de nuevos marcos conceptuales que den forma al conocimiento, principalmente el científico. Tampoco es, sin embargo, este asunto objeto del trabajo presente, pero discutiremos seguidamente en su último capítulo un posible modelo para esta diferencia proposicional.

4. 6. Los mundos posibles dentro de los mundos posibles

Hasta ahora hemos analizado el comportamiento de proposiciones necesarias y contingentes en lo que a la construcción de pruebas se refiere, y hemos advertido ciertas propiedades que pueden inferirse de la necesidad y la contingencia tras este estudio. Pretendo ahora tratar de otras características proposicionales, como la relación de una proposición necesaria con una *fórmula condicional cuantificada universalmente*. Por ejemplo, decimos: *Si existe un cuerpo, la aceleración que sufrirá en caída libre sobre la tierra será de 9.8 m.s*$^{-2}$, que formalizamos $(x)(Cx \rightarrow A^{9,8}x)$. Sin embargo, esto no demuestra que exista ningún cuerpo másico. Advierte únicamente de su comportamiento en el caso de que existiera. Para asegurar que un cuerpo existe, debemos hacerlo contingentemente, en el marco de una *fórmula cuantificada existencialmente*. De esto último no se deriva una generalización -como en el caso universal- sino únicamente ciertas características de cierto objeto, que existirá o no de modo circunstancial. Diremos, en un caso de este tipo: *Existe un cuerpo másico que está cayendo libremente con una aceleración medida de 9.8 m.s*$^{-2}$, formalizado como $\exists x(Cx \wedge A^{9,8}x)$. De esta afirmación no es posible deducir que todos los cuerpos en caída libre se comportarán igual ni que 9.8 m.s^{-2} es la aceleración producida por la gravedad terrestre.

Parece, por otro lado, razonable una discriminación de este tipo. Lo que se comporta siempre del mismo modo expresa necesidad, pero no entra a afirmar quién existe y quién no; en cambio, de una afirmación de existencia y unas características determinadas no podemos inferir un comportamiento general, a menos que pretendamos, como hemos visto previamente, construir una prueba por inducción, lo que es ya un tipo de cuantificación universal. *Lo contingente, precisamente por no ser necesario, sólo es posible que se dé cuando existe*. Es en este sentido que la contingencia es existencia, como afirma Roquentin en un preciso y elegante ejercicio de ventriloquia. Esta afirmación acerca del *ser* no debe llevar a confusión con la definición de *existencia* como ligada al concepto intuicionista de prueba; aquello de lo que tratábamos no es propiamente el mismo concepto existencial que ahora planteamos. La existencia de una prueba es la definición de las propiedades generales de los objetos: es también una necesidad, al menos en el ámbito intuicionista original. En cambio, la verdadera existencia es la presencia contingente en el dominio de estudio de los objetos que cumplirán aquellas propiedades como valores de variables en una teoría empírica.

Esta caracterización proposicional parece conducir a un modelo de mundos posibles particular. En él, existen nodos que podemos llamar *mundos marco* y que expresan únicamente proposiciones necesarias, donde la información que contienen se actualiza a medida que se adquiere conocimiento; y una vez existe una prueba de una proposición, el valor veritativo queda ya permanentemente fijado. En el caso de la necesidad -o regularidad- científica, sin embargo, este *permanentemente* se refiere a *hasta que llegue un nuevo paradigma* que cambie el propio marco conceptual del mundo. Puede ser, incluso, que existan *mundos marco lógico-matemáticos* y *mundos marco científicos,* siendo estos últimos susceptibles de evolución. De cualquier modo, en estos mundos no existe ningún tipo de garantía de la presencia de objetos que cumplan sus proposiciones necesarias. Para conocer esta información, es necesario que se encuentren en el interno de cada uno de estos estados epistémicos marco otro tipo de mundos posibles, cada uno de ellos constituyendo un dominio distinto de objetos, los *mundos existenciales*. Ni estos mundos ni los objetos que los habitan influyen sobre la necesidad de las proposiciones que rigen en el mundo marco; en cambio, aquellas proposiciones aseguran que cualquier objeto del dominio se comportará de acuerdo a sus propiedades y leyes. Estos mundos existenciales contendrán asimismo las infinitas proposiciones contingentes -incluidas aquellas a las que la LTE no será aplicable- para las que será necesario construir constantemente nuevas pruebas. Se trata, en definitiva, de expresar la necesidad y la contingencia como esencia y existencia, definiendo el universo a través de la integración de estos mundos metafísicamente distintos, que permitan contener y estudiar la totalidad de las -infinitas- proposiciones.

5. Conclusiones

El problema del infinito en el ámbito lógico y las consecuencias de su manejo en el estudio proposicional -particularmente la que se refiere a la vigencia de la ley clásica del tercio excluido- además de las situaciones que aparecen al tratar de atribuir valores de verdad a proposiciones contingentes en las que el sujeto proposicional carece de referencia, nos ha dado pie a considerar como instrumento analítico una lógica no clásica, la *lógica intuicionista*, explorando en qué medida ello puede aportar un nuevo terreno de abordaje y desarrollo de las situaciones anteriores.

En el curso de este estudio, hemos observado que, una vez fijados los valores de la función veritativa de una proposición contingente, dichos valores pueden mudar en el tiempo; y constatamos que esta característica proposicional es distinta a los casos de las proposiciones necesarias, para las cuales, en el marco de la construcción probatoria, un valor veritativo 1 se mantiene siempre en situaciones -nodos- futuras. De este modo, al extender el método constructivo probatorio de las proposiciones lógico-matemáticas a aquellas que no lo son, se nos permite profundizar en la metafísica de la necesidad y la contingencia. Uno de los aspectos que muestran esta diferencia esencial es el hecho de que las proposiciones necesarias y las contingentes pueden tomar distintos valores -cualitativa y cuantitativamente- veritativos, y las proposiciones contingentes pueden, por ello, ser negadas de modo distinto a las necesarias -discriminando un mayor número de situaciones, atendiendo a su estructura y a la referenciabilidad de su sujeto- hecho que hemos únicamente apuntado en este trabajo y que consideramos de interés desarrollar en el futuro.

Esta profundización en la metafísica del carácter proposicional puede conducir a la construcción de un sistema lógico holístico que contemple el universo en su globalidad, discriminando mundos posibles que tienen distinto carácter: estableciendo un marco conceptual gobernado por las proposiciones necesarias -en un contexto de mundos posibles kripkeano- poblados a su vez por mundos posibles de carácter contingente que describirán el ámbito de extensión -el dominio en que se cumplen- las proposiciones necesarias. En definitiva, proponemos habitar mundos esenciales y mundos existenciales, de carácter radicalmente distinto, y que se encuentran unos en el interior de otros.

Consideramos asimismo que el estudio proposicional en el ámbito de la lógica intuicionista y por su estricta condición de considerar algo como verdadero únicamente cuando se dispone de una prueba de ello, puede permitir abordar de modo distinto a como se ha hecho hasta ahora problemas clásicos de Filosofía de la Ciencia, como es el caso de la paradoja de la confirmación de Hempel, hecho que podría llevar a considerar la utilización de la lógica intuicionista como instrumento de análisis del aparato científico conceptual y experimental.

Por todo lo expuesto en este trabajo, aún compartiendo la afirmación de Putnam de que la ley del tercio excluido -y, por consiguiente, el sistema de lógica clásica- es una idealización muy útil, es obligado explorar nuevos caminos. En nuestros días seguimos utilizando la mecánica newtoniana, aún sabiendo que no deja de ser una simplificación de la realidad, útil a veces, pero radicalmente errónea en muchos casos. La misma cautela debemos observar al utilizar analíticamente cualquier otro sistema lógico-lingüístico de compromiso -esto es, útil pero del que son conocidas un número de limitaciones- porque un exceso de pragmatismo impide avanzar en el conocimiento. Otra cosa ciertamente distinta es si es posible deshacernos de esta servidumbre o, lo que es lo mismo, si la verdad es una meta alcanzable; pero es obligado tratar de averiguarlo.

REFERENCIAS

- [B] Bridges D. (2012): “Constructive Mathematics”, en Zalta E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/mathematics-constructive/>.
- [D1] Díez A. (2005): *Introducción a la Filosofía de la Lógica,* UNED, Madrid.

- [D2] Díez A. (2012): "El contenido empírico de las teorías", en Perís-Viñé L.M. (ed.), *Filosofía de la Ciencia en Iberoamérica: Metateoría estructuralista*, Tecnos, Madrid: 120-134.
- [DUM] Díez J. A. y Ulises Moulines C. (2008): *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*, Ariel Filosofía, Barcelona.
- [F] Feyerabend P. (1997): *Tratado contra el método,* Tecnos, Madrid.
- [Fr] Frege G. (1991): "Sobre sentido y referencia", en Valdés, L.M. (ed.), *La búsqueda del significado*, Tecnos, Madrid: 24-45.
- [H] Hempel C. G. (1945): "Studies in the Logic of Confirmation I", *Mind* **54** (213): 1–26.
- [HC] Hughes G. E. y Cresswell M. J. (2001): *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, Oxford.
- [K1] Kripke S. A. (1965): "Semantical analysis of intuitionistic logic I", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* **40**: 92-130.
- [K2] Kripke, S. A. (1991): "Identidad y necesidad", en Valdés L.M. (ed.), *La búsqueda del significado*, Tecnos, Madrid: 98-130.
- [L] Lorenzen P. (1971): *Metamatemática*, Tecnos, Madrid.
- [M] Montoya J. A. (2003): "Una contribución a la teoría de modelos de Kripke para el intuicionismo", *Boletín de Matemáticas. Nueva Serie* X(2): 92-109.
- [MT] Mosterín J. y Torretti R. (2010): *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia* (2ª ed.), Alianza Editorial, Madrid.
- [Ms] Moschovakis, J. (2010): "Intuitionistic Logic", en Zalta E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/>.
- [N1] Nolt J. (2007): "Reference and perspective in intuitionistic logic", *Journal of Logic, Language and Information* **16**(1): 91-115.
- [N2] Nolt J. (2011): "Free Logic", en Zalta E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy,* URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/logic-free/>.
- [P] Priest G. (2011): *An Introduction to Non-Classical Logic* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge.

- [Pt] Putnam H. (1994): *Cómo renovar la filosofía*, Cátedra, Madrid.
- [Q] Quine W. V. O. (2001): "Decisión óntica", *Palabra y objeto,* Herder, Barcelona: 295-345.
- [R1] Russell B. (1905): "On Denoting", *Mind (New Series)* **14**(56): 479-493.
- [R2] Russell B. (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, London.
- [RW] Russell B y Whitehead A.N. (1910): *Principia Mathematica*. Merchant Books, United Kingdom.
- [S] Strawson P. F. (1950): "On referring", *Mind(New Series)* **59**(235): 320-344.
- [V] Verbrugge R. L. C.(2010): "Provability Logic", en Zalta E. N. (ed.),*The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/logic-provability/>.
- [VD] Van Dalen D. (2001): "Intuitionistic Logic", en Gobble L. (ed.) *The Blackwell Guide to Philosophica Logic*, Blackwell, Oxford,
- [VF] Van Fraassen B. (1980): *The Scientific Image*, Oxford University Press, Oxford.