Trabajo fin de máster en filosofía teórica y práctica
UNED, 2018
Tutor: Jesús Zamora Bonilla
Alumno: Pedro Espejo-Saavedra Roca

EL CÁLCULO INFINITESIMAL EN NEWTON Y LEIBNIZ

Trabajo fin de máster en filosofía teórica y práctica
UNED, 2018
Tutor: Jesús Zamora Bonilla
Alumno: Pedro Espejo-Saavedra Roca

EL CÁLCULO INFINITESIMAL EN NEWTON Y LEIBNIZ

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este TFM es mostrar y precisar una parte de una investigación más amplia del mismo título que he realizado con tal motivo sobre algunos aspectos muy generales del cálculo infinitesimal siguiendo algunos textos de Gustavo Bueno fundador del denominado materialismo filosófico. Sin embargo, el engarce con sus argumentaciones no aparecerán de modo directo en este artículo, dada su naturaleza. En este trabajo sólo pretendo familiarizar al lector con dos textos canónicos del cálculo infinitesimal: *The october 1666 tract. on* fluxións de Newton e *Historia et Origo* Calculii *Differentialis* (1713-1714) de Leibniz. Y esto es importante porque la historiografía de un saber cualquiera, además de ser una parte sustancial del mismo, puede ser una manera muy eficaz de afianzar su aprendizaje y fomentar su posible desarrollo.

Doy primero algunos datos para situar el contexto social y político de Newton y Leibniz, para inmediatamente situar los resultados de la investigación historiográfica sobre la polémica sobre la prioridad de la invención del cálculo infinitesimal y hacer un breve comentario sobre la importancia de Descartes —al establecer la dualidad aritmético geométrica de la matemática— como paso previo necesario y fundamental que influyó en la invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Una vez hecho esto, paso a comentar los textos de Newton y Leibniz. Con respecto al de Newton trato de resaltar como su demostración del teorema central del cálculo está ligado a su concepción mecánica y al germen de lo que luego será su teoría de la gravitación, y en el de Leibniz trato de mostrar cómo sus investigaciones matemáticas y su afortunada notación situaron a la matemática en el sendero de su desarrollo en su situación más o menos actual según mi formación. Es evidente, que estas explicaciones, no pretenden ser un análisis de las concepciones matemáticas definitivas de ambos autores.

Termino haciendo algunas breves valoraciones personales sobre los textos comentados.

CONTEXTO SOCIAL Y POLÍTICO

Estas breves palabras deben tomarse con bastante cautela porque a pesar de su generalidad son más bien lugares comunes, que aunque han sido confrontadas con algunos manuales, no son fruto de una investigación directa y precisa, ni son pronunciadas por un especialista en estos temas, un simple aficionado a la filosofía. Salvando esto, por otra parte inevitable, diríamos que el contexto social y político de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) se sitúa en los comienzos de lo que suele llamarse "modernidad", y que se asocia al surgimiento y al establecimiento de los límites principales de las ciencias estrictas o positivas. Redondeando las fechas el periodo abarcaría aproximadamente dos siglos, desde 1650 a 1850. Esta época fue convulsa, marcada por la formación de los estados nacionales, enfrentados unos con otros, y marcando distancias frente a la injerencia de iglesia católica, los países con las iglesias reformadas de forma más acusada. A su vez la revolución científica no hubiera sido posible sin un desarrollo técnico y tecnológico concomitante, asociado habitualmente a la industria del carbón y a la máquina de vapor. Ciñéndonos más al tema que nos ocupa, esta época supuso una crisis del modelo filosófico escolástico o medieval, en el que la teología era considerada la ciencia suprema que regía a las demás. Puede comprobarse esto en la cuestión primera, artículo 2: *La doctrina sagrada, ¿es o no es ciencia?*, de la *Suma Teológica* de Santo Tomás. Este modelo utilizaba como soporte la silogística aristotélica que fue perdiendo peso a favor precisamente de las nuevas investigaciones matemáticas, que se sustentaban sobre una metodología general del razonamiento, al modo del método de Descartes. Este proceso se puede rastrear muy bien —aunque un poco posterior en el tiempo—, entre otros, en el discurso11, tomo 7: *De lo que conviene quitar en las súmulas*, del *Teatro Crítico Universal* de Benito Jerónimo Feijoo. De este modo el cálculo infinitesimal daba cobertura como pieza clave, en la primera ciencia moderna, establecida de modo riguroso, la física de Newton. Ahora bien esta cobertura se produjo al principio sin una clara distinción entre ciencia y filosofía, algo que, me parece, se fue produciendo paulatinamente después, y que es la situación en la que nos encontramos actualmente, y por eso la nueva ciencia tuvo importantes contenidos heréticos con respecto a la doctrina tradicional de la iglesia católica dominante hasta entonces. Aquí se situaría la doctrina unitarista ocasionalista del espacio absoluto de Newton, como sensorio divino —*Óptica,* cuestión 31—, y la armonía preestablecida de la monadología de Leibniz —*Monadología* puntos 53-54—.

Señalar, por otra parte, que durante la vida de Leibniz y Newton se utilizaba todavía abundantemente el latín como lenguaje común entre los científicos, y que las comunicaciones eran bastante deficitarias si las comparamos con los actuales avances, se realizan mediante cartas y personas interpuestas que a menudo se hacían una copia de los manuscritos que transportaban, y en el que era bastante habitual que se suscitaran recelos sobre la prioridad de ciertos resultados, y en el que incluso los políticos de los estados nacientes percibían de modo receloso, porque en ocasiones tenían ciertas aplicaciones militares, o simplemente eran una bandera ideológica de las naciones en cuestión. La comunicación científica fue mejorando paulatinamente con las instituciones —*Accademia dei Lincei* (1603), *Royal Society* de Londres (1660), la *Académie Royal des Sciences* de París (1666)…— y revistas científicas que se fueron creando, y con el paulatino establecimiento diferenciado de las ciencias, desde los talleres o laboratorios de los científicos a las universidades tradicionales como enseñanzas regladas.

SOBRE LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Antes de entrar en el contenido del mismo, señalar que no nos vamos a ocupar de la disputa sobre el origen del cálculo infinitesimal, más allá de constatar el hecho relevante para nosotros de la especificidad del mismo en Leibniz y en Newton. Simplemente asumimos las siguientes conclusiones:

> *¿Quién fue el primero en descubrir el cálculo? ¿Fueron ambos descubrimientos independientes, o hubo plagio —total o parcial— por parte de alguno de los oponentes? Hoy en día hay un consenso general a la hora de afirmar que:*
>
> - *Newton descubrió y desarrolló el cálculo de fluxiones entre 1666 y 1669, cuando escribió el manuscrito* ***De Analysi****. Su primera publicación al respecto tuvo lugar en 1704* ***De Quadrature curvarum*** *—ambas obras editadas por Jones en el* ***Analysis****—.*
> - *Leibniz descubrió y comenzó a desarrollar el cálculo diferencial en 1675, cuando escribió su obra* ***De Quadratura Arithmetica****, no publicada, así como otros manuscritos inéditos. Su primera publicación sobre el tema tuvo lugar en 1684* ***Nova Methodus pro Maximis et Minimis****.*
> - *Ambos descubrimientos fueron independientes y siguieron vías muy diferentes, tanto desde el punto de vista conceptual como desde el punto de vista metodológico.*

- *El cálculo diferencial e integral de Leibniz —la denominación "integral" fue propuesta por Bernoulli— tuvo una influencia muy grande en el desarrollo de la matemática de finales del s. XVII y principios del XVIII. A partir de la difusión del* ***Commercium epistolicum*** *(1713-1714), el cálculo de fluxiones de Newton comenzó a tener una influencia mayor, sobre todo en Gran Bretaña.* (1)

La invención del cálculo infinitesimal es el resultado de un largo proceso de tanteos e investigaciones parciales de multitud de autores durante todo el s. XVI, que se inició con la introducción en Europa de los numerales árabes y un desarrollo de la aritmética decimal, muy relacionada también con el desarrollo del comercio y con los procesos contables bancarios. Todo esto confluyó en la obra de Descartes, *Discours de la méthode* (1637), que contiene tres apéndices: *La géométrie*, *La dioptrique* y *Les météores*. Esta obra supuso un antes y un después, e influyó directamente tanto en Newton como en Leibniz. Por lo que vamos a detenernos un poco en él. Nos parece acertadísima la valoración que hace Carl B. Boyer:

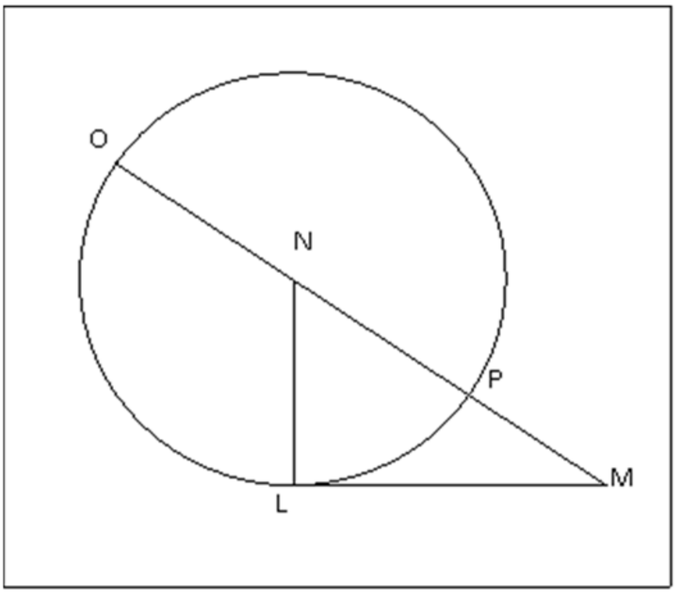
> *La géometrie de Descartes [es] el primer texto matemático que un estudiante de álgebra actual puede leer sin encontrarse con dificultades de notación. Prácticamente el único símbolo arcaico que se utiliza en el libro es el de ∝ en vez del* **=** *para la igualdad. El uso de Descartes de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes, y las últimas para las incógnitas o variables, adoptando para ellas la notación exponencial, y la utilización de los símbolos germánicos* **+** *y* **–** *hacen, combinados todos estos elementos, que la notación algebraica de Descartes se parezca tanto a la nuestra, debido obviamente a que ésta se deriva de aquella. Hay, sin embargo, una diferencia importante de punto de vista, ya que donde nosotros consideramos a los parámetros y a las incógnitas como números, Descartes los considera como segmentos. En un aspecto esencial rompe, no obstante, con la tradición griega, al no considerar, por ejemplo, $\boldsymbol{x^2}$ o $\boldsymbol{x^3}$ como un área o un volumen respectivamente, sino que los interpreta como segmentos, lo que permite abandonar el principio de homogeneidad, al menos explícitamente, y conservar, sin embargo, el significado geométrico.* (2)

Esto se encuadraba, en palabras de Descartes, dentro de un procedimiento general.

> *Si queremos, pues, resolver un problema cualquiera, supondremos en primer lugar la solución efectuada, y daremos nombres a todos los segmentos que parecen necesarios para su construcción, tanto a los que*

> *son desconocidos como a los conocidos. Después, y sin establecer ninguna diferencia entre los segmentos conocidos y desconocidos, se debe desentrañar la dificultad que muestre de una manera natural las relaciones entre estos segmentos, hasta que se pueda expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes. Esto constituirá una ecuación (en una incógnita), ya que los términos de una de estas dos expresiones son, considerados juntos, iguales a los términos de la otra.* (3)

Y puede resultar muy aleccionador poner de manifiesto estos grandes hallazgos a partir de ciertas construcciones sencillas como hace Carl Boyer (4). El Libro I de *La géométrie* contiene un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no en el sentido aritmético de los antiguos babilónicos, sino genéricamente, algo así como lo que hacían los griegos de la antigüedad. Por ejemplo para resolver la ecuación $z^2 = a \cdot z + b^2$ Descartes procede construyendo la siguiente figura:



Se traza el segmento **LM** de longitud **b** y perpendicular a él por **L** se traza el segmento **NL** de longitud **a/2**. Con centro en **N** se traza una circunferencia de radio **a/2**, y luego se traza la recta **MN** que corta a la circunferencia en **O** y en **P**. Entonces **z=OM** es el segmento buscado.

Podemos verlo aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo **MNL**:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \left(z - \frac{a}{2}\right)^2$$

Que desarrollando el binomino, eliminando el término cuadrático en **a** y despejando **z** resulta:

$$z^2 = a \cdot z + b^2$$

Pero también se puede obtener, y quizás sea más revelador, a partir de la semejanza de los triángulos **MLP** y **MLO**, estableciendo la siguiente proporción:

$$\frac{PM}{LM} = \frac{LM}{OM}$$

Que según las variables de la figura:

$$\frac{z-a}{b} = \frac{b}{z}$$

Esta proporción nos remite directamente a al pentagrama pitagórico y la sección aúrea, que aparece en los elementos de Euclides en el Libro II, 11 y en el libro VI, 30 como método para dividir un segmento en media y extrema razón.

Y sobre estos resultados, la dualidad aritmético-geométrica, construyó toda su concepción filosófica.

> *Así pues, como la utilidad de este método es tan grande que el entregarse sin él al cultivo de las letras parece que sería más nocivo que provechoso, he llegado al convencimiento de que ya anteriormente ha sido de algún modo vislumbrado por los grandes ingenios bajo la guía incluso de su sola capacidad natural. Pues tiene la mente humana no sé qué de divino, en donde las primeras semillas de pensamientos útiles han sido arrojadas de tal modo que con frecuencia, aun cuando descuidadas y ahogadas por estudios contrarios, producen un fruto espontáneo. Esto lo experimentamos en las más fáciles de las ciencias, la Aritmética y la Geometría, viendo con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de aritmética, que llaman álgebra, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras. Y estas dos ciencias no son otra cosa que frutos espontáneos nacidos de los principios innatos de este método, y no me extraña el que hasta ahora tales frutos referidos a los objetos más simples de estas disciplinas hayan crecido más felizmente que en las otras, donde obstáculos de mayor peso suelen ahogarlos; pero donde, no obstante, también podrán sin duda alguna llegar a perfecta madurez, con tal de que sean cultivados con gran cuidado.* (5)

Esta es la base más importante sobre la que se apoyaron tanto Newton como Leibniz, que no dejaron de señalar ambos, lo que les costó comprender el pensamiento de Descartes, y la que les permitió sintetizar multitud de resultados parciales anteriores en el teorema central del cálculo —la derivación y la integración son operaciones inversas—, que es el núcleo del cálculo infinitesimal. Veamos como aparece en los textos que vamos a comentar.

EXPLICACIONES AL TEXTO DE NEWTON

Para nuestra explicación del *The october 1666 tract on fluxions*, utilizaremos la versión que aparece en *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, volumen I, editados por D.T. Whiteside con la asistencia de M.A. Hoskin, Cambridge at the university Press (1967), págs. 400-448., nosotros lo citaremos [N. págs. Xi-Xf.].

Este texto es una sistematización de las investigaciones que Newton, fue desarrollando desde el verano de 1665, en su granja de Woolsthorpe, hasta octubre de 1666, debido a una epidemia de peste en la universidad.

D.T. Whiteside, siguiendo a Newton —hay que tener en cuenta que este pequeño tratado parece que no fue concebido por Newton para ser publicado, sino como una síntesis de sus investigaciones inmediatamente anteriores—, divide el texto en tres partes o secciones, en una primera, desde la página 400 a la 415, aparecen la teoría de las ochos proposiciones y una serie de ejemplos; la segunda, desde la página 416 a la 441, consiste en una serie de aplicaciones o problemas; y la tercera, desde la 441 a la 448, en el que se sigue la numeración de los problemas de la sección anterior, se refiere a la gravedad.

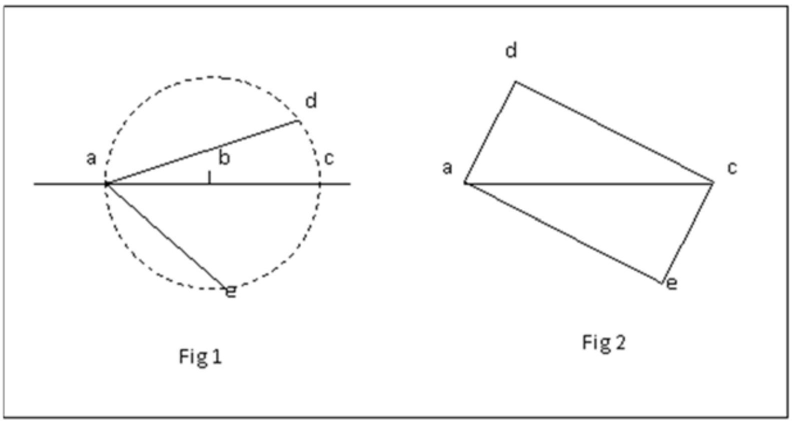
Newton otorga una gran importancia a su sistema de proposiciones, sólo hay que ver el rótulo con el que van enmarcadas.

> *To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient.* [N. pág. 400.]
> {Para resolver los problemas relativos al movimiento las siguientes proposiciones son suficientes.}

Debo advertir al lector, que dado que voy a trabajar directamente con el texto en inglés —no dispongo de una traducción del mismo— y mis conocimientos del idioma son muy rudimentarios, por no decir, precarios, y dado que hoy tal competencia idiomática es bastante habitual, he preferido ofrecer el original junto a mi lectura —entre llaves y con otra tipografía—, que tendrá bastante de interpretación, por no decir, tergiversación. Aunque esto suponga alargar las dimensiones del trabajo, así no coartaré a que el lector pueda apreciar las particularidades del inglés del s. XVII y la fraseología del propio Newton. Este ejercicio aunque puede ser útil al lector, es sobre todo necesario para mi propia compresión del texto. Por ello voy a transcribir el enunciado de estas ocho proposiciones, que en el tratado de Newton aparecen juntas, para hacer alguna aclaración después.

Proposición 1.

If the body a in the Perimeter of y^e cirkle or sphaere adc moveth towards its center b, its velocity to each point (d, c, e) of y^t circumference is as y^e chords (ad, ac, ae) drawne from that body to those points are.



[N. pág. 400.]

{Si el cuerpo a en el perímetro de un círculo y^e o esfera adc se mueve hacia su centro b, su velocidad en cada punto (d, c, e) de la circunferencia y^t es como las cuerdas de y^e (ad, ac, ae) dibujadas desde ese cuerpo a aquellos puntos.}

Proposición 2.

If y^e Δs adc, aec, are alike viz: $ad = ec$ &c (thought in divers plaines) & 3 bodys move from the point a uniformely & in equall times, y^e first to d, & 2d to e, y^e 3d to c; Then is the thirds motion compounded of y^e motion of the first & second.
[N. pág. 400.]

{Si y^e Δs adc, aec, son semejantes, como: $ad = ec$ etc. (aunque en diversos planos) y 3 cuerpos se mueven desde el punto a uniformemente y en tiempos iguales, y^e primero a d, el segundo a e, y^e tercero a c; entonces el tercer movimiento es compuesto del y^e movimiento del primero y del segundo.}

Proposición 3.

All the points of a Body keeping Parallel to it selfe are in equall velocity.
[N. pág. 400.]

{Todos los puntos de un cuerpo que se mantienen paralelos entre sí tienen la misma velocidad.}

Proposición 4.

If a body move onely $\begin{Bmatrix} angularly \\ circularly \end{Bmatrix}$ about some axis, y^e velocity of its points are as their distance from that axis.
[N. pág. 401.]

{Si un cuerpo se mueve únicamente $\begin{Bmatrix} angularmente \\ circularmente \end{Bmatrix}$ alrededor de un eje, la velocidad y^e de sus puntos es como sus distancias a ese eje.}

Proposición 5.

The motions of all bodys are either parallel or angular, or mixed of y^m both after y^e same manner, y^t the motion towards c (Prop 2) is compounded of those towards d & e. And in mixed motion any line may bee taken for y^e axis (or if a line or superficies move in plano, any point in y^t plane may bee taken for the center) of y^e angular motion.
[N. pág. 401.]

{En los movimientos de todos los cuerpos ya sean paralelos o angulares o compuesto de ambos y^m según la misma manera y^e, el movimiento y^t hacia c (Prop. 2) es compuesto de aquellos hacia d y e. Y en el movimiento compuesto cualquier línea puede ser tomada como eje de y^e (o si una línea o superficie se mueve en un plano, cualquier punto y^t del plano puede ser considerado como centro) del movimiento angular y^e.}

Proposición 6.

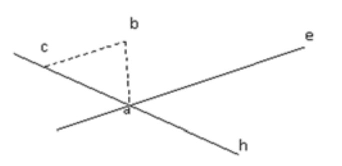
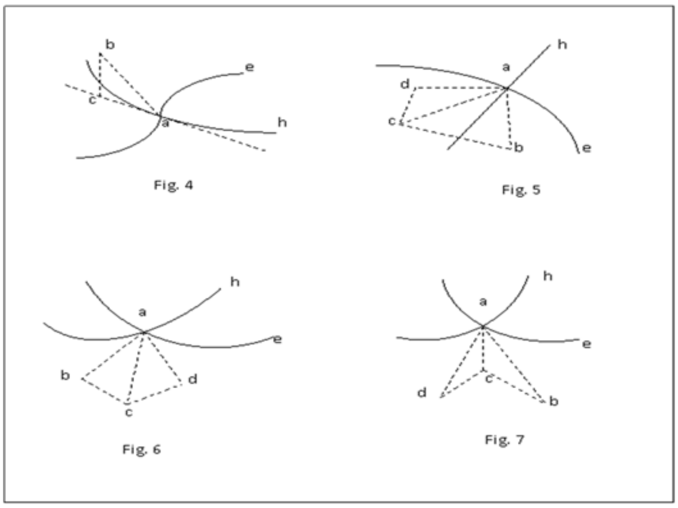


Fig. 3

If y^e lines ae, ah being moved doe continually intersect; I describe y^e trapezium $abcd$, & its diagonal ac; & say y^t, y^e proportion & position of these five lines ab, ad, ac, cb, cd, being determined by requisite data; shall designe y^e proportion & position of these five motions; viz: of y^e point a fixed in y^e line ae & moveing towards b, of y^e point a fixed in y^e line ah & moveing towards d; of y^e intersection point a moveing in plaine $abcd$ towards c, (for those five lines are ever en y^e same plaine, thought ae & ah may chanch [chance] onely to touch that plaine in their intersection point a); of y^e order of y^e letters c, b; & of y^e intersection point a moving in y^e line ah parallely to cd & according to y^e order of the letters c, d.



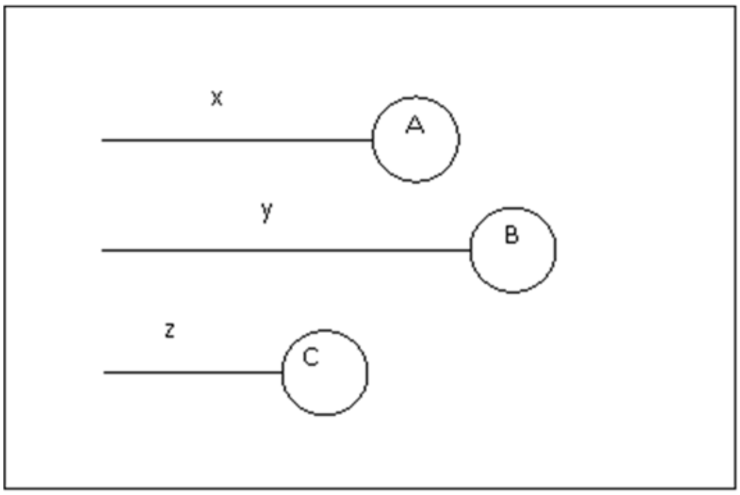
Note y^t, one of y^e lines as ah (fig 3d & 4th) resting, y^e points d & y^epoint c shall been in y^e line ah if it bee streight (fig 3), otherwise in its tangent (fig 4th).
[N. págs. 401-402]

{Si las y^e líneas ac, ah se mueven constantemente intersectadas; describo sobre y^e el trapecio $abcd$, su diagonal ac; y digo que la y^t, y^e proporción y la posición de estas cinco líneas ab, ad, ac, cb, cd son determinadas por los datos requeridos; designaremos la proporción y^e y la posición de estos cinco movimientos; es decir, fijado el punto a de y^e en la línea ae de y^e y moviéndose hacia b, fijado el punto a de y^e en la línea ah de y^e moviéndose hacia d; la intersección a moviéndose en el plano $abcd$ de y^e hacia c, (para que aquellas cinco líneas de y^eque sólo están en el mismo plano, aunque ae y ah puedan intercambiarse, únicamente en la proximidad en ese plano de su intersección en el punto a); el punto intersección a de y^e moviéndose en la línea ae de y^e paralelamente a cb deacuerdo con y^e en el orden de las letras c, b; el punto de intersección a de y^e moviéndose en la línea ah de y^e paralelamente a ah paralelamente a cd y deacuerdo con y^e en el orden de las letras c, d.

Denotamos y^t descansando sobre ah una de las líneas de y^e (fig. 3ra y 4ta), donde los puntos d y a son coincidentes, y el punto c de y^e estará en la línea de y^e ah si ella es recta (fig. 3ra), en cualquier otro caso en su tangente (fig. 4ta).}

Proposición 7.

Having an Equation expressing y^erelation twixt two or more lines x, y, z &c; described in y^e same time by two or more moveing bodys $A, B, C,$ &c: the relation of their velocitys p, q, r, &c may bee thus found, viz:



Set all y^e termes on one side of y^e Equation that they become equall to nothing. And first multiply each terme by so many times $\frac{p}{x}$ as x hath dimensions in y^t terme. Secondly multiply each terme by so many times $\frac{q}{y}$ as y hath dimensions in it. Thirdly (if here be 3 unknowne quantitys) multiply each terme by so many times $\frac{r}{z}$ as z hath dimensions in y^t terme, (& if there bee still more unknown quantitys doe like to every unknowne quantity). The summer of all these products shall bee equall to nothing. W[ch] Equation gives y^e relation of y^e velocitys p, q, r, &c.

Or thus. Translate all y^e termes to one side of y^e equation & multiply them being ordered according to x by this expression,

$$\&c. [invertido]\ \frac{3p}{x}.\ \frac{2p}{x}.\ \frac{p}{x}.\ 0.\ \frac{-p}{x}.\ \frac{-2p}{x}.\ \frac{-3p}{x}.\ \frac{-4p}{x}.\ \&c:$$

& being ordered by y^e dimensions of y multiply them by this,

$$\&c. [invertido]\ \frac{3q}{y}.\ \frac{2q}{y}.\ \frac{q}{y}.\ 0.\ \frac{-q}{y}.\ \frac{-2q}{y}.\ \&c.$$

The sume of these products shall bee equall to nothing, which equation gives y^e relation of their velocitys p, q, &c.

Or more Generally y^e Equation may bee multiplied by y^e terme[s] of these progressions

$$\frac{ap+4bq}{x}.\ \frac{ap+3bq}{x}.\ \frac{ap+2bp}{x}.\ \frac{ap+bq}{x}.\ \frac{ap}{x}.\ \frac{ap-bq}{x}.\ \frac{ap-2bq}{x}.\ \&c.$$

And

$$\frac{aq+2bq}{y}.\ \frac{aq+bq}{y}.\ \frac{aq}{y}.\ \frac{aq-bq}{y}\ \ \&c.$$

(a & b signifying any two numbers whither rationall or irrationall).
[N. pág. 402.]

{Tomando y^e como una ecuación que exprese la relación entre dos o más líneas $x, y, z, etc.$: descritas al mismo tiempo en y^e por dos o más cuerpos moviéndose $A, B, C, etc.$: la relación de sus velocidades $p, q, r, etc.$ puede ser entonces encontrada, es decir:

Todas las parejas de términos y^e a un lado de la ecuación de y^e que resultarán iguales a nada. Y primero multiplicando cada término por $\frac{p}{x}$ tantas veces como x dimensiones tuviera en término y^t. Segundo, multiplicando cada término por $\frac{q}{y}$ tantas veces como y dimensiones tuviera en él. Tercero (si hubiera tres cantidades desconocidas) multiplicando cada término por $\frac{r}{z}$ tantas veces como z dimensiones tuviera en término y^t, (y si hubiera todavía más cantidades desconocidas del mismo modo para cada cantidad desconocida). La suma de estos productos será igual a nada. Tal y^e ecuación da la relación de y^e velocidades $p, q, r, etc.$

O entonces. Trasladando todos los y^e términos a un lado de la y^e ecuación y multiplicándolos siendo ordenados en x por esta expresión,

$$\&c.\,[invertido]\ \frac{3p}{x}.\ \frac{2p}{x}.\ \frac{p}{x}.\ 0.\ \frac{-p}{x}.\ \frac{-2p}{x}.\ \frac{-3p}{x}.\ \frac{-4p}{x}.\ \&c:$$

siendo ordenados relativamente a y^e dimensiones de y multiplicándolos por éste,

$$\&c.\,[invertido]\ \frac{3q}{y}.\ \frac{2q}{y}.\ \frac{q}{y}.\ 0.\ \frac{-q}{y}.\ \frac{-2q}{y}.\ \&c.$$

La suma de estos productos será igual a nada, tal y^e ecuación da la relación de sus velocidades $p, q, etc.$

O más generalmente y^e ecuación puede ser multiplicada por y^e términos de estas progresiones

$$\frac{ap+4bq}{x}.\ \frac{ap+3bq}{x}.\ \frac{ap+2bp}{x}.\ \frac{ap+bq}{x}.\ \frac{ap}{x}.\ \frac{ap-bq}{x}.\ \frac{ap-2bq}{x}.\ \&c.$$

Y

$$\frac{aq+2bq}{y}.\ \frac{aq+bq}{y}.\ \frac{aq}{y}.\ \frac{aq-bq}{y}\ \ \&c.$$

(a y b significando cualesquiera dos números ya sean racionales o irracionales).

Proposición 8.

If two Bodys A & B, by their velocitys p & q describe y^e lines x & y. & an Equation bee expressing y^e relation twist one of y^e lines x, & y^eratio $\frac{q}{p}$ of their motions q & p; To find y^e other line y.

Could this ever bee done all problems whatever might bee resolved. But by y^e following rules it may bee very often done. (Note $y^t \pm m$ & $\pm n$ are logarithms or numbers signifying y^e dimensions of x.)

First get y^e valor of $\frac{q}{p}$. Which if it bee rationall & its Denominator consist of but one terme: Multiply y^t terme y^e quote shall bee y^evalor of y. As if $ax^{\frac{m}{n}} = \frac{q}{p}$. Then is $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} = y$. Or if $ax^{\frac{\overline{m}}{n}} = \frac{q}{p}$. Then is $\frac{na}{n+m} x^{\frac{n-m}{n}} = y$. (Soe if $\frac{a}{x} = ax^{\frac{\overline{1}}{1}} = \frac{p}{q}$. Then is $\frac{a}{0} x^0 = y$. soe $y^t y$ is infinite. But note y^t in this case x & y increase in y^e same proportion y^t numbers & their logarithms doe, y being like a logarithme added to an infinite number $\frac{a}{0}$. But if x bee diminished by c, as if $\frac{a}{c+x} = \frac{q}{p}$, y is also diminished by y^e infinite number $\frac{a}{0} c^0$ & becomes finite like a logarithme of y^e number x. & so x being given, y may bee mechanically found by a Table of logarithms, as shall bee hereafter showne.

Secondly. But if y^e valor $\frac{q}{p}$ consist of more termes y^n one, it may bee reduced to such a forme $y^t y^e$ denominator of each pte of it shall have but one terme, unless y^t pte bee $\frac{a}{c+x}$: Soe $y^t y$ may bee y^n found by y^e precedent rule. Which reduction is thus performed, viz: 1st, If the denominator bee not $a + bx$, nor all its termes multiplyed by x or xx, or x^3, &c: Increase or diminish x untill y^e last terme of y^e Denominator vanish. 2dly, And when all y^e termes in y^e Denominator are multiplyed by x or xx, or x^3 &c: Divide y^e numerator by y^e Denomr (as in Decimall numbers) until y^e Quotient consist of such pts none of whose Denominators are so multiplyed by x or xx, or x^3 &c: & begin y^e Division in those termes in wch x is of its fewest dimensions unless y^e Denominator be $a + bx$.

If $y^n y^e$ termes in y^e valor of $\frac{q}{p}$ bee such as was before required, y^e valor y may bee found by y^e first pte of this Prop: onely it must bee so much diminished or increased as it was before increased or diminished by increasing or diminishing x. But if the denominator of any terme consist

of more termes y^n one, unless y^t terme bee $\frac{a}{c+x}$. First find those pts of $y`s$ valor w[ch] correspond to $y^e$ other pts of $\frac{q}{p}$ its valor. & $y^n$ by $y^e$ preceding rules &c: seeke $y^e$ pte of $y`s$ valor answering to this pte of $\frac{q}{p}$ its valor.
[N. págs. 403-404.]

{Si partimos de dos cuerpos A y B, por medio de sus velocidades p y q describen una y^e línea x e y y una y^e ecuación es dada expresando la doble relación de una y^e línea x, e y^e razón $\frac{p}{q}$ de sus movimientos p y q; para encontrar la línea y^e de y.

A todos los problemas a los que esto pudiera ser hecho podrían resolverse. Pero por aplicación a y^e de las siguientes reglas a muchos de ellos puede ser hecho. (Notemos que $y^t \pm m$ y $\pm n$ son logaritmos o números significando las dimensiones y^e de x.)

Primero conseguimos el valor y^e de $\frac{p}{q}$. El cual se es racional y su denominador consiste de un único término: multiplicamos el valor y^t por x y dividimos cada términos de él por y^e logaritmo de x en y^t término y^e citado será el valor y^ede y. Como si $ax^{\frac{m}{n}} = \frac{q}{p}$. Entonces es $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = y$.O si $ax^{\frac{m}{n}} = \frac{q}{p}$. Entonces $\frac{na}{n+m}x^{\frac{n-m}{n}} = y$. (En cualquier caso si $\frac{a}{x} = ax^{\frac{\bar{1}}{1}} = \frac{p}{q}$. Entonces es $\frac{a}{0}x^0 = y$. En cualquier caso $y^t y$ es infinito. Pero notemos que y^t en este caso x e y aumentan en y^e en la misma proporción que los números y^t y hechos sus logaritmos, siendo y como un logaritmo añadido a un número infinio $\frac{a}{0}$. Pero si x es disminuido por c, como si $\frac{a}{c+x} = \frac{q}{p}$, y es también disminuida por un y^e número infinto $\frac{a}{0}c^0$ y se llega a ser como un logaritmo finito y^e de número x. Y así se x es dado, y puede ser calculado mecánicamente encontrado por medio de una tabla de logaritmos, como se mostrará aquí después.

Segundo. Pero si el denominador y^e de valor y^e de $\frac{p}{q}$ consiste de más términos y^n, puede ser reducido por tal a uno que tendrá la forma $y^t y^e$ denominador de cada punto pero un término, excepto que el punto y^t sea $\frac{a}{c+x}$. En cualquier caso $y^t y$ puede ser encontrado como y^n por la precedente regla de y^e. Tal reducción es entonces realizada, es decir: primero, si el denominador no es $a + bx$, ni todos sus términos multiplicados por x o xx, o x^3, etc.: incrementada o disminuida la x hasta y^e último término de denominador nulo de y^e. Segundo, y cuando todos los términos y^e en el denominador de y^e son multiplicados por x o

> xx, o x^3, etc.: dividimos el numerador y^e por el denominador y^e (como en los números decimales) hasta que el cociente consista de tales puntos ninguno de cuyos denominadores esté multiplicado por x o xx, o x^3, etc.: y comenzando la división y^e en aquellos términos en los cuales x es de sus dimensiones más bajas excepto que el denominador y^e sea $a + bx$. Si los $y^n y^e$ términos en el valor y^e de $\frac{p}{q}$ sea tal como fuera antes requerido, el valor y^e de y puede ser encontrado por el primer punto de esta proposición: únicamente debe ser como mucho disminuido o aumentado como antes fuera incrementado o disminuido relativamente al incremento o disminución de x. Pero si el denominador de cualquier término consiste de más términos y^n, excepto que el término sea $\frac{a}{c+x}$. Primero encontramos esos puntos del valor de y que correspondan a otros puntos y^e de su valor $\frac{p}{q}$.}

Quisiera indicar la riqueza conceptual que Newton involucra en su manuscrito, a pesar de su reiteración algebraica, más propia de textos lógico-matemáticos, hay un verdadero vendaval de ideas matemáticas, físicas y filosóficas. Para asimilarlas se requeriría de una digestión mucho más prolongada, pero como el tiempo apremia, aquí sólo nos limitaremos a los primeros jugos en los que nos hallamos inmersos. La importancia de este texto nos parece que es inmensa porque es la primera gran síntesis del fundador de la ciencia moderna. Con respecto a esto, lo más llamativo e importante, es que el nacimiento de la ciencia moderna está ligado a un desarrollo nuclear, como es el del cálculo infinitesimal, de la matemática. Este hecho no es, a nuestro parecer, coyuntural, sino que está ligado al carácter determinativo de los números, ingrediente imprescindible de las ciencias, en especial de la física, como la ciencia que abrió el camino inmediatamente al resto. Desde este marco nos acercamos al tratado de Newton.

Con esto lo que queremos decir es que más que tratar de interpretar desde un punto de vista lo que está diciendo el propio Newton, nos limitamos a sugerir, diversas líneas desde las que se podría abordar. No pretendemos ahora, por tanto, una lectura coherente y precisa. Aunque espero que motivemos el interés por el mismo dando una idea suficiente.

Es importante señalar también que no hemos explotado completamente la riqueza de la labor editora de D.T. Whitside sobre la obra de Newton. Sus notas son de diverso tipo. Por un lado, aparte de las peculiaridades idiomáticas y la labor no siempre exacta de transcribir a caracteres mecánicos un texto manuscrito, nos indican pequeñas erratas que podrían causar confusión en un texto muy denso y conciso, por otro, nos brinda el significado de algunas abreviaturas de Newton, y sobre todo, nos remite a textos anteriores que, o bien, son el germen de ideas que aparecen en el tratado de manera más precisa, o bien son estudios extensos que aquí aparecen sintetizados en proposiciones o afirmaciones generales —Newton realiza aquí una labor de precisión y condensación de trabajos anteriores—, y por último, nos brinda también notas, en las que con terminología moderna, nos muestra las operaciones que está llevando a cabo el propio Newton. De todo esto hemos hecho un uso muy limitado, principalmente, en lo referente, al desarrollo del pensamiento newtoniano anterior.

Creo que la forma de abordar esto, y antes de comentar las ocho proposiciones con que comienza el tratado, es aclarar el primer ejemplo de la proposición octava, que el propio Newton utiliza para fijar las ideas referentes a la difícil enunciación verbal de dicha proposición.

> If
> $$\frac{xx}{ax+b}=\frac{p}{q}$$
> Then by Division tis
> $$\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\frac{+bb}{a^3x+aab}=\frac{xx}{ax+b}=\frac{p}{q}$$
> (as may appeare by multiplication.)
>
> Therefore (by 1st pte of this Prop:) tis
> $$\frac{xx}{2a}\frac{-bx}{aa}+\square\frac{bb}{a^3x+aab}=y$$
> ($\square\frac{bb}{a^3x+aab}$ signifys y^t pte of y^e valor of y wch is correspond to y^e terme $\frac{bb}{a^3x+aab}$ of y^e valor of $\frac{p}{q}$, wch may bee found by a Table of logarithms as may hereafter appeare.)
> [N. pág. 404.]

En una notación más actual y en español.

Si
$$\frac{p}{q}=\frac{x^2}{ax+b}$$
Entonces por división es
$$\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3x+a^2b}=\frac{p}{q}$$
(como podría aparecer por multiplicación.)

Por tanto (por el 1er punto de esta proposición) es
$$\frac{x^2}{2a}-\frac{bx}{a^2}+\square\frac{b^2}{a^3x+a^2b}=y$$

(□ $\frac{b^2}{a^3x+a^2b}$ significa y^t punto de y^e valor de y que corresponde a y^e término $\frac{b^2}{a^3x+a^2b}$ de y^e valor de $\frac{p}{q}$, el cual puede ser encontrado por medio de una tabla de logaritmos como puede aparecer aquí después.)

En general, —después de la parte demostrativa, precisaremos un poco más—, la teoría de las ocho proposiciones pretende ofrecer una idea del mundo físico a través de la idea de movimiento, porque se supone que la naturaleza de los cuerpos es debida al movimiento relativo entre las partículas, que son consideradas como puntos geométricos.

Las dos primeras proposiciones marca el alcance de toda la teoría y, y parece como si toda la teoría que concluye con la demostración de la equivalencia de las proposiciones 7ª y 8ª, y la primera parte del tratado estuvieran destinadas a justificar estas dos. De hecho esta demostración utiliza las dos figuras de estas dos proposiciones primeras.

La primera proposición es una especie de conceptualización de velocidad media como suma con respecto al espacio recorrido, ligada a la trayectoria del movimiento.

La segunda es, en cambio, una ley de descomposición o composición de velocidades, no solo con respecto a la trayectoria de un cuerpo dado, en sus componentes, sino al análisis del movimiento de un conjunto indeterminado de partículas o puntos. Es una especie de regla de suma de vectores. En cierto modo, estas dos proposiciones serían algo así como el germen de lo que hoy es una teoría vectorial de la velocidad de un conjunto de masas puntuales.

La proposición contiene una afirmación importantísima para calibrar el tono general de la teoría de Newton: “from the point a uniformely & in equall times”. Esto supone que dada una trayectoria de un cuerpo cualquiera, este cuerpo discurre sobre su trayectoria de manera uniforme, y en la que todos los cuerpos están en sincronía, como se verá más claro en la proposición séptima. Esto le permite a Newton ignorar la dependencia temporal de los movimientos, y referirlos estrictamente a las relaciones espaciales o distancias que median entre los cuerpos. Sin duda, dentro del marco de las transformaciones espacio-temporales de Galileo, el tiempo es un invariante del movimiento, es decir, los incrementos temporales son independientes del movimiento del sistema de referencia en el que nos situemos, pero esta afirmación de Newton es mucho más exigente, y desde luego, es excesiva.

$\underline{Transformación\ de\ Galileo}$:

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} + \vec{v}_{relativa} \cdot t$$
$$t' = t + cte\ (de\ sincronización\ de\ relojes)$$

Las proposiciones tercera y cuarta establecen una tipología de movimientos de cualquier cuerpo, de translación, de rotación sobre sí mismo y de giro alrededor de otro. Estableciendo además, la igualdad en velocidad de todos los puntos en el movimiento de traslación, y la ley de velocidad tangencial en el giro de un sólido rígido como proporcional a la distancia al eje de rotación o giro.

La proposición quinta es una aplicación de la proposición 2 a esta tipología del movimiento, lo que supone en los movimientos mixtos de los anteriores, que cualquier movimiento puede ser descrito funcionalmente desde cualquier punto, algo así como el germen de la propiedad de los sistemas inerciales de que las leyes físicas son invariantes respecto a ellos. Todos los puntos, que aquí Newton les confiere una naturaleza fuertemente matemática son una especie de "sistemas inerciales" desde la que construir o calcular las trayectorias y las velocidades, que son siempre conceptualizadas de manera relativa unas con respecto a las otras, como precisará en la proposición séptima. Esto será matizado cuando se hable, en la tercera parte del tratado, del centro del movimiento. Me parece muy importante señalar aquí, que la teoría de Newton, fusiona la matemática y la física, debido a su concepción materialista —hipótesis del materialismo formalista— de las matemáticas que nosotros, en sintonía con él, venimos defendiendo también en este trabajo, pero a diferencia de él nosotros afirmamos, que esta hipótesis, los movimientos en el espacio físico se transforma de determinado modo al construirse sobre el papel como movimientos de puntos geométricos. Esto lo tratamos al hablar del carácter teórico de la lógica.

La proposición sexta precisamente aborda esta cuestión, mediante una especie de geometría local, atisbando quizás la posibilidad de la futura geometría diferencial: "being moved doe continually intersect". En realidad se establece un procedimiento por el cual la superficie geométrica plana es suficiente para analizar los movimientos tridimensionales, en el que se intuye la naturaleza direccional de la derivada, y sobre todo, se está intuyendo la naturaleza del espacio vectorial como sistema de coordenadas cartesianas: "parallely to cd & according to y^e order of the letters c, d." Es decir en el caso del plano, el vector que va desde el punto $a = (a_1, a_2)$ hasta $b = (b_1, b_2)$ será:

$$\overrightarrow{v_{ab}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

También en la proposición 6ª se habla de "requisite data", de datos, en el que se aprecia muy bien la involucración entre la física y la matemática. Mientras en matemáticas los datos nos sitúan en los ejemplos, mientras que, en física los datos nos sitúan en las determinaciones experimentales, empíricas, o magnitudes (físicas…). Esta involucración newtoniana todavía está presente en el español actual, en el que por supuesto aparecen también desarrollos tecnológicos más próximos a nosotros, la informática, aunque también fueron iniciadas en aquella época con las máquinas de calcular, por ejemplo, del propio Leibniz.

> ***Dato** (del latín "datum", dado; "Barajar, Manejar, Utilizar"). Masculino. Información de un detalle o circunstancia que sirve para ayudar a formar idea de un asunto. Noticia. ⊙ Cada cantidad, magnitud o relación conocida de aquellas con que se opera para obtener la solución de un problema matemático. Dado. ⊙ (Generalmente en plural) Informática. Información dispuesta en forma adecuada para su tratamiento por ordenador. Véase. "Banco de datos".* (184)

Las proposiciones 7ª y 8ª establecen el cálculo matemático de la teoría, como si dijéramos su cierre, donde se establecen las verdaderas posibilidades de la teoría. Todo el resto de la primera parte del tratado se dispone para aclarar este cierre en el marco establecido por las proposiciones anteriores. En general la proposición séptima establece la velocidad como derivada de la trayectoria, y la octava la trayectoria como integral de la velocidad. Así la teoría del movimiento de Newton está ligada al cálculo infinitesimal, por eso la demostración de la equivalencia de las dos últimas proposiciones, con la que concluye la primera parte, es la manera que tiene Newton de construir el teorema central del cálculo.

Dado el marco de las proposiciones anteriores las velocidades de diferentes cuerpos se pueden expresar de modo muy fácil como función de las posiciones, vistas desde la coordenada de la propia trayectoria, son simplemente una línea recta. De este modo la proporción relativa entre las velocidades es la proporción relativa de la coordenada de la trayectoria.

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{p}{x} = \frac{q}{y}$$

El resto es una generalización a como se construiría el caso general de n partículas o puntos. En esta generalización se están suponiendo ciertas hipótesis que es preciso resaltar. Primero, que dado un conjunto de n partículas, el sistema de relaciones mutuas se puede aclarar mediante la resolución sucesiva de las múltiples relaciones diádicas. Sin duda, las relaciones diádicas existen, dado el carácter simultáneo del espacio en el que están situadas y dónde se mueven, otra cosa es que tal procedimiento sea posible. Hoy, sin embargo, sabemos que el problema de tres cuerpos sujetos a una fuerza central no tiene una solución analítica, es decir, expresable mediante funciones, se ha de recurrir a aproximaciones y al cálculo numérico, lo cual no quiere decir, que con tal cálculo no se consiga, en principio, la precisión que se desee.

Las demás explicaciones no hace sino establecer que para el caso de dos cuerpos la proporción relativa de uno con velocidad p con respecto a otro con velocidad q se podrá expresar como:

$$\frac{p}{q} = f(x)$$

es decir, que siempre existirá un cambio de variable que relacione las coordenadas de cada trayectoria con una arbitrariamente elegida, donde además se supone que $f(x)$ será desarrollable en serie de potencias racionales de x, con un número finito o infinito de términos, y en el que los coeficientes serán ahora racionales o irracionales. En la práctica Newton sólo investiga potencias enteras o potencias de $\pm 1/2$, expresados como monomios o como binomios con una constante. Si se supone que cualquier polinomio se puede expresar como producto del binomio de sus soluciones, y que este producto si está en el denominador se puede descomponer como suma de fracciones de las potencias de cada binomio, la aproximación no resulta excesiva, en cualquier caso, tiene un ámbito de aplicación bastante alto. Por ejemplo:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{s}{x-a} + \frac{t}{x-b} + \frac{u+vx}{(x-b)^2}$$

donde s, t, u, v se ajustan convenientemente para que se cumpla la igualdad.

Tengo que advertir que Newton no utiliza la notación funcional, que es un poco posterior. A esta función Newton la llama sorprendentemente y^t — “t” parece sugerir tiempo— análogamente a la trayectoria que denomina y, ya que no deja de ser una región del espacio. De aquí la reiteración con que Newton utiliza el símbolo y^e para enunciar o explicar cualquier cosa relativa a su teoría. El plano del papel es ahora espacio matemático y simultáneamente espacio físico. Lo que se afirma en realidad es que, para el caso $n = 2$:

$$\frac{p}{q} - y^t = \emptyset$$

Newton en esta proposición emplea la palabra nada “nothing”, y aunque en inglés me parece que el campo de “nothing” y cero “zero”, que también existe, están más próximos que en español, he preferido traducirlo por nada para abrir aún más si cabe el campo semántico, porque creo que Newton está indicando que su teoría tiene una potencia explicativa máxima. Por eso, también, en la última ecuación he utilizado el símbolo “∅” en vez del más correcto “0”. Esta diferencia luego la utilizaremos en las conclusiones para conceptualizar la filosofía que Newton desarrolla en este escrito y que aunque con modificaciones sustanciales con respecto a sus ideas físicas, se mantiene, me parece a lo largo de su vida, el espacio como sensorio divino que aparece en su *Óptica*.

Por otra parte el hecho de Newton insista en la proporción p/x significa que deber haber dependencia o proporción con x porque sino $p/q = cte$ y entonces los dos cuerpos se moverían en la misma trayectoria, y esto parece que para Newton no puede ser, quizás estuviera pensando ya en los planetas, en el que cada uno tiene su trayectoria, pero esto se debe a cuestiones genéticas del sistema solar a partir de gases cósmicos. Pero para Newton fue Dios quien los puso en sus posiciones adecuadas, como comentamos antes. Además las experiencia cotidiana nos pone delante de los choques, el contacto de los cuerpos, algo en lo que insistió antes Descartes, y le recordará insistentemente, entre otros, Leibniz, y al que Newton dedicará una gran parte de sus *Principia* a aclarar.

Teniendo en cuenta el análisis de la proposición 7ª parecería que para la proposición 8ª sólo sería necesario saber

$$ax^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = y$$

Newton primero aclara, primero, que la dimensión de un problema es la potencia de mayor grado que queremos integrar, supuesto su descomposición. Parece que para cualquier dimensión no hay ningún problema. Pero que ocurre cuando intentamos integrar $1/x$, el problema no es tanto que esta integral sea la función logaritmo —algo crucial como veremos después en el escrito de Leibniz—, que no es un polinomio, ya que Newton conocía muy bien su desarrollo en serie, y el cálculo se puede cortar por motivos de precisión experimental, sino la divergencia que aparece al hacer la integral definida.

> Soe if $\frac{a}{x} = ax^{\frac{\bar{1}}{1}} = \frac{p}{q}$. Then is $\frac{a}{0}x^0 = y$. soe $y^t y$ is infinite. But note y^t in this case x & y increase in y^e same proportion y^t numbers & their logarithms doe, y being like a logarithme added to an infinite number $\frac{a}{0}$. But if x bee diminished by c, as if $\frac{a}{c+x} = \frac{q}{p}$, y is also diminished by y^e infinite number $\frac{a}{0}c^0$ & becomes finite like a logarithme of y^e number x. & so x being

> given, y may bee mechanically found by a Table of logarithms, as shall bee hereafter showne. [N. pág. 403., parte de la proposición 8ª.]

En notación actual, como indica Whiteside en sus notas 10-12:

$$y = \int_0^X \frac{a}{x} dx = a \ln X - a \ln 0 = -\infty$$

La solución que se propone ahora es:

$$y = \int_0^X \frac{a}{c + x} dx = a \ln \frac{c + X}{c}$$

Es decir, alejarnos un poco del punto, siendo c conveniente, remitiéndonos de nuevo a las condiciones experimentales y al cálculo numérico. Pero ahora parece que no todos los puntos pueden ser “sistemas de referencia”, hay algunos que deben ser evitados según cuál sea la proporción de las velocidades y^t. Y esto no es un problema sólo de la función inversa, aunque en ésta la divergencia es una cuestión dramática porque como sumar una serie divergente en la que estamos obligados a considerar todos los términos, sino de cualquier cero del denominador de una proporción. Con lo cual los puntos desde los que no se pueden describir las trayectorias empiezan a multiplicarse peligrosamente. Esto nos remite de nuevo al cálculo complejo, en el que ahora los números son esencialmente parte de la superficie.

Como parte final del primer bloque del tratado, y antes de su parte demostrativa, que contiene aún así algunos ejemplos, Newton ofrece una lista de 36 integrales que, por un lado, ponen de manifiesto la sorprendente capacidad de Newton para el cálculo matemático, algo que conservó durante toda su vida, y por otro, reflejan su interés para formalizar la potencia resolutoria de problemas de las proposiciones, quizás, como argumento secundario para apoyar la validez de la teoría.

El criterio para organizar esta lista es la descomposición de una fracción de polinomios en fracciones lo más simples posibles, algo en profunda sintonía con el énfasis que pone en los análisis basados en las series de potencias como estructura general de “cualquier” expresión matemática, como veremos en los ejemplo que preceden a la parte demostrativa de este primer bloque. Por eso el uso que hace Newton del cambio de variables es una técnica imprescindible para llevar a cabo su objetivo, y también, por eso, los exponentes toman el papel de parámetros fundamentales para agrupar y valorar los diferentes grupos de ejemplos. Formando así la lista un verdadero entramado de relaciones, lo que por otra parte facilita su memorización y manejo.

But sometimes The last terme of y^e Denominator cannot bee taken away, (as if y^e Denomin^r bee $aa + xx$, or $a^4 + x^4$, or $a^4 + bxx + x^4$, &c) And then it will bee necessary to have in readinesse some examples wth such Denominators to w^{ch} all others cases of like denomination may bee by Division reduced.
[N. págs. 404-405.]

{Pero algunas veces el ultimo término [de la serie] y^edel denominador no puede ser descompuesto, (así si el y^e denominador fuera $aa + xx$, or $a^4 + x^4$, or $a^4 + bxx + x^4$, etc.) y entonces será necesario tener preparados algunos ejemplos con tales denominadores a los que todos los demás casos de denominadores análogos pudieran ser reducidos por división.}

$$\frac{cx}{a + bx^2} = \frac{p}{q}, tomando\ z = bx^2 \to y = \square \frac{c}{2ab + 2bz}$$

$$\frac{cx^2}{a + bx^3} = \frac{p}{q}, tomando\ z = bx^3 \to y = \square \frac{c}{3ab + 3bz}$$

$$\frac{cx^3}{a + bx^4} = \frac{p}{q}, tomando\ z = bx^4 \to y = \square \frac{c}{4ab + 4bz}$$

En general

$$\frac{cx^{n-1}}{a + bx^n} = \frac{p}{q}, tomando\ z = bx^n \to y = \square \frac{c}{nab + nbz}$$

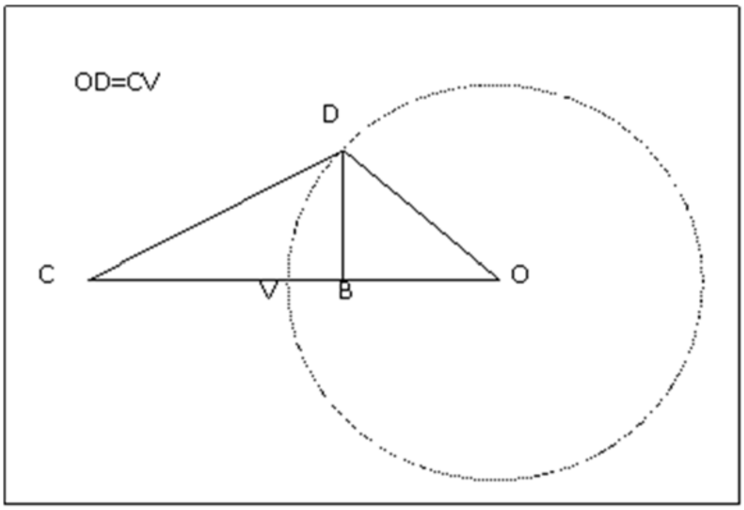
Whiteside enfatiza, en su nota 19, como, en el siguiente ejemplo de Newton, con el cambio de variables se conectan integrales aparentemente muy distintas.

$$\sqrt{\frac{c}{bx} - \frac{a}{b}} = \frac{p}{q}, tomando\ z = x^2 \to y = \square 2\sqrt{\frac{c}{b} - \frac{a}{b}z^2}$$

O también como la denominada “integral por partes” que no es más que un doble cambio de variable, se puede interpretar como la descomposición de un área en trozos. En la notación actual, la fórmula general es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

En el ejemplo, Newton toma en:



$$\frac{c}{a+bx^2}=\frac{p}{q}, tomando\ z=\sqrt{\frac{c}{a+bx^2}}\equiv CB$$

$$y\ llamando\ 2\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{a}{b}z^2}=v\equiv BD$$

Haciendo el cambio de variables:

$$u=z^2\rightarrow du=2zdz$$
$$dv=dx\rightarrow v=x$$

Entonces

$$y=\int z^2dx=z^2\,x-\int 2zxdz$$

Pero si tenemos en cuenta que

$$v=2\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{a}{b}z^2}=2\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\frac{c}{a+bx^2}}=2\sqrt{\frac{cx^2}{a+bx^2}}=2zx$$

tenemos

$$y=\frac{1}{2}vz-\int v\,dz$$

Es decir

$$y=área(CDB)-área(VDB)=área(CDV)$$

Vamos a ofrecer como muestra la tercera serie.

1. Si

$$\frac{cx^n}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Entonces

$$\frac{2c}{nb}\sqrt{a+bx^n}=y$$

2. Si

$$\frac{cx^{2n}}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Entonces

$$\frac{2bcx^n-4ac}{3nb^2}\sqrt{a+bx^n}=y$$

3. Si

$$\frac{cx^{3n}}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Entonces

$$\frac{2b^2cx^{2n}-8abcx^n+16a^2c}{15nb^3}\sqrt{a+bx^n}=y$$

4. Si

$$\frac{cx^{4n}}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Entonces

$$\frac{30b^3cx^{3n}-36ab^2cx^{2n}+48a^2bcx^n-96a^3c}{105nb^4}\sqrt{a+bx^n}=y$$

5. Si

$$\frac{cx^{5n}}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Entonces

$$\frac{210b^4cx^{4n}-240ab^3cx^{3n}+288a^2b^2cx^{2n}-384a^3bcx^n+768a^4c}{945nb^5}\sqrt{a+bx^n}=y$$

[N. págs. 406-407.]

A continuación ofrecemos unos cálculos que explican la ley de construcción de la serie a partir de la indicación dada en la nota 22

La primera integral es inmediata

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2c}{nb}\sqrt{a+bx^n}\right)=\frac{2c}{nb}\frac{1}{2}\frac{bnx^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}}=\frac{cx^n}{x\sqrt{a+bx^n}}=\frac{p}{q}$$

Para el segundo caso

$$\int cx^{2n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int x^n cx^{n-1}\,(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

integrando por partes con

$$dv = cx^{n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx \to v = \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}$$
$$u = x^n \to du = nx^{n-1}dx$$
$$= x^n \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - \frac{2c}{b}\int x^{n-1}\,(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}dx =$$

haciendo la sustitución $z = x^n\ y\ dz = nx^{n-1}dx$ se tiene

$$= x^n \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - \int (a+bz)^{\frac{1}{2}}dz = x^n \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - \frac{4c}{3nb^2}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= \left\{\frac{2cx^n}{nb} - \frac{4c}{3nb^2}(a+bx^n)\right\}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} = \frac{2bcx^n - 4ac}{3nb^2}\sqrt{a+bx^n}$$

que es el resultado de Newton. Y así sucesivamente

Pero también tomando

$$f(k) = \frac{c}{n}x^{kn}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} \quad y \quad F(k) = \int c\,x^{kn-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx$$

se tiene que

$$F(1) = \int c\,x^{n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2f(0)}{b}$$

se puede demostrar que

$$F(k+1) = \frac{2f(k) - 2kaF(k)}{(2k+1)b}$$

Para el caso $k = 2$ se tiene

$$F(2) = \frac{2f(1) - 2aF(1)}{3b} = \frac{2}{3b}\left\{\frac{cx^n}{n}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$= \frac{2bcx^n - 4ac}{3nb^2}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}$$

De nuevo el resultado de Newton.

Para la demostración de la ley de recurrencia es partimos:

$$F(k+1) = \int cx^{(k+1)n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx = \int cx^{kn}x^{n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

haciendo la integral por partes

$$v = cx^{n-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx \to v = \frac{2c}{nb}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}$$
$$u = x^{kn} \to du = knx^{kn-1}dx$$

Entonces

$$= \frac{2cx^{kn}}{bn}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} - \frac{2ck}{b}\int x^{kn-1}\,(a+bx^n)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{b}f(k) - \frac{2ck}{b}\int (a+bx^n)\,x^{kn-1}(a+bx^n)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{b} f(k) - \frac{2ka}{b} F(k) - 2k \int c x^{(k+1)n-1} (a + bx^n)^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= \frac{2}{b} f(k) - \frac{2ka}{b} F(k) - 2kF(k+1)$$

Reordenando términos se obtiene la ley de recurrencia.

$$F(k+1) = \frac{\frac{2}{b} f(k) - \frac{2ak}{b} F(k)}{2k+1} = \frac{2f(k) - 2kaF(k)}{(2k+1)b}$$

Newton ejercita esta ley, pero no la representa. Se limita al cálculo sucesivo hasta el caso $k = 5$.

Después de la lista de integrales, en gran medida arbitraria, y que refleja los intereses matemáticos de Newton, aparecen cinco ejemplos que tienen un marcado carácter sistemático. Se dividen en dos grupos, los tres primeros, y los dos últimos. Newton establece la resolución de ellos mediante el calificativo "mechanichally". Parece como si considerara a los primeros como una metodología exacta y a los segundos como aproximados, ya que recurren a series de potencias en la que no pueden, al parecer, considerarse los infinitos términos. Los tres primeros son casos de derivación que parten de la relación entre las variables, los dos últimos son casos de integración que parten de la relación entre las velocidades.

Con respecto a los tres primeros pretenden resolver el problema, que hoy resultaría extremadamente sencillo, de encontrar la derivada de una ecuación o función implícita de n variables con respecto a ellas. Se parte de:

$$F(x, y, z \dots) = 0$$

Y teniendo en cuenta que sus velocidades son respectivamente p, q, r ... obtendríamos:

$$p \frac{\partial F}{\partial x} + q \frac{\partial F}{\partial y} + r \frac{\partial F}{\partial z} + \cdots = 0$$

Que Newton interpreta como una ecuación de p, q, r ... en y^e entendido como un espacio de variables x, y, z ... Es decir, se obtiene una ecuación o función:

$$F'(x, y, z \dots p, q, r \dots) = 0$$

Esto es extremadamente importante para Newton porque supone la determinación del movimiento cuando se integra. Es decir, trata de demostrar, que para cualquier relación entre las variables de y^e, existe una relación entre las velocidades en y^e. Para ello destaca la distinción entre partes que suponen integrales que involucran cantidades racionales e irracionales o sordas, y pone ejemplos simples en los que aparecen mezcladas en la relación de las variables. Para enfatizar esta distinción utiliza cambios de variables auxiliares que las definan de manera separada y luego deriva deshaciendo el cambio, sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación original. Afirmando la generalización de dicho cálculo.

> How to proceede in other cases (as when there are cube rootes, surde denominators, rootes within rootes (as $\sqrt{ax+\sqrt{a^2-x^2}}$) &c: in the equation) may bee easily deduced from what [ha]th bee[n] already said. [N. pág. 413. Aclaraciones de Whiteside.]
> {Cómo proceder en otros casos (como cuando hay raíces cúbicas, denominadores sordos, raíces dentro de raíces (como $\sqrt{ax+\sqrt{a^2-x^2}}$) etc. en la ecuación) puede ser fácilmente deducido delo que ya ha sido dicho.}

Estos dos ejemplos colocados justo antes de la parte demostrativa de esta primera parte, comienzan con la afirmación un tanto ambigua, como luego veremos, de que el sistema de las ocho proposiciones siempre puede resolverse mecánicamente: “mechanichally”. Esto debe entenderse también en dos sentidos más, que la resolución es un proceso bien determinado, es decir, es un cálculo, y a que la naturaleza del problema se refiere al movimiento. Por otra parte esta expresión en serie de potencias es indispensable para comprender el alcance de la proposición siete y que será precisada en el lema de la última parte demostrativa de esta primera sección del tratado.

Ejemplo 1: si $\frac{a}{b+cx}=\frac{p}{q}$ entonces por división obtenemos

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}x+\frac{ac^2}{b^3}x^2-\frac{ac^3}{b^4}x^3+\frac{ac^4}{b^5}x^4-\cdots$$

y “consequently”

$$y=\frac{a}{b}x-\frac{ac}{2b^2}x^2+\frac{ac^2}{3b^3}x^3-\frac{ac^3}{4b^4}x^4+\frac{ac^4}{5b^5}x^5-\cdots$$

Ejemplo 2: si $\sqrt{a^2-x^2}=\frac{p}{q}$ entonces extrayendo sus raíces

$$\frac{p}{q}=a-\frac{1}{2a}x^2-\frac{1}{8a^3}x^4-\frac{1}{16a^5}x^6-\frac{5}{128a^7}x^8+\cdots$$

“therefore”

$$y=ax-\frac{1}{6a}x^3-\frac{1}{40a^3}x^5-\frac{1}{112a^5}x^7-\frac{5}{1152a^7}x^9+\cdots$$

Indica Newton que el desarrollo en serie puede continuarse tanto como se desee, y no sólo en la determinación de $^{p}/_{q}$, sino también, y de manera paralela, debido a la linealidad del proceso de integración, en la determinación de y.

Estos sencillos dos ejemplos están escogidos estratégicamente por Newton, pues ambos dan lugar de manera diferente a una serie infinita de potencias. El primero, —Newton menciona la resolución analítica de potencias de Vieta— nos remite a la función logaritmo, que es la única potencia racional que nos remite a partir de un monomio en grado -1 , entero, a una función trascendente, es decir, a los números irracionales trascendentes. Es importante señalar que la demostración de que el número $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ es trascendente —cosa en general muy difícil para cualquiera de ellos— no fue conseguida hasta 1873 por el matemático francés Charles Hermite, siguiendo trabajos anteriores de Joseph Lioville que introdujo los números trascendentes que llevan su nombre —por ejemplo: 0,1001000100001… ó también $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ — (6). El segundo, nos remite al caso más sencillo de irracionales, los llamados algebraicos que se obtiene mediante exponentes fraccionarios. Este caso nos conduce inmediatamente a las cónicas, cuya importancia en la historiografía matemática se remonta a los griegos, que se fundamenta en su íntima conexión con las ideas de distancia, espacios métricos y geometrías. Eso sin contar con su extraordinaria utilidad en la descripción del movimiento planetario, como desarrollará años después el propio Newton en sus *Principia Mathematica.* Newton aquí parece sugerir que mediante su cálculo infinitesimal es capaz de aglutinar toda el domino de la matemática, y en cierto modo, así es.

En el primer caso Whiteside nos remite a en su nota 41 a un extenso escrito de Newton al *De Numerosa Potestatum ad Exegesim Resolutione*, escrito que ofrece en su edición de los manuscritos matemáticos de Newton. En las dos notas siguientes, el propio Whiteside, nos indica muy certeramente que aquí es imprescindible la idea de convergencia, porque si no, llevando a cabo diversos reagrupamientos de los términos de la serie podríamos obtener expresiones matemáticas contradictorias para cualquier problema dado. Y lo hace mediante la expresión analítica —y esto no siempre es posible— de estas dos series. Para el primer ejemplo:

$$\int_0^X \frac{a}{b+cx}dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^X \sum_{0\le i\le n}\left[(-1)^i \frac{a}{b}\left(\frac{cx}{b}\right)^i\right]dx\right\} = \frac{a}{c}\ln\left(\frac{b+cX}{b}\right)$$

cuya condición de convergencia es

$$\left|\frac{cX}{b}\right| < 1$$

Para el segundo ejemplo:

$$\int_0^X \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^X \sum_{0\le i\le n}\left[\binom{\frac{1}{2}}{i}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^i\right]dx\right\} = \frac{a^2}{2}\left(X\sqrt{1-X^2} + \sin^{-1} X\right)$$

cuyo radio de convergencia es

$$\left|\frac{X}{a}\right| < 1$$

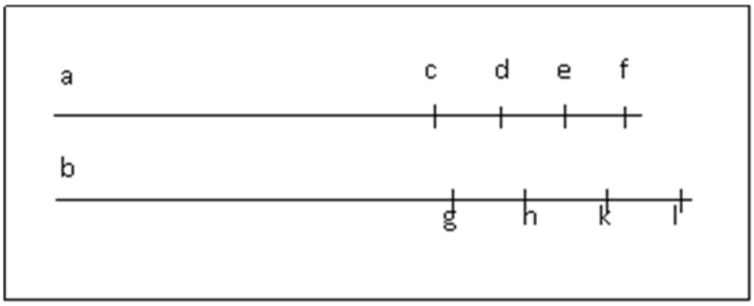
A Newton este problema de la convergencia no le molesta porque parte de proporciones $\frac{p}{q}$ siempre analíticas o que se aproximan, mediante cálculo numérico, empíricamente a ellas. No tenemos que perder de vista, aquí, la indistinción en Newton entre la matemática y la física. A pesar de ello los problemas pueden complicarse todavía mucho.

La última parte de este primer bloque ligado a las ocho proposiciones termina con la parte demostrativa del mismo, que consiste en dos demostraciones, la de la proposición séptima corre a cargo de un lema, en el que se debe tener en cuenta la posibilidad de describir cualquier valor de ${}^{p}/_{q}$ como una serie de potencias que Newton a tratado de mostrar en los ejemplos inmediatamente anteriores, y la segunda que consiste en la equivalencia entre la proposición séptima y octava, estrechamente que incluye el teorema central del cálculo. Comienza este parte con una afirmación contundente sobre la importancia de las demostraciones:

> But y^e Demostracons of w[t] [what] hath beene said <u>must</u> not bee wholly omitted.
> [N. pág. 414. Resaltados nuestros.]

La organización del tratado por Newton es brillantísima y oscila acertadamente entre la expresión proposicional de la teoría, el uso de ejemplos para aclarar proposiciones complejas, indicar las posibilidades de desarrollo de la teoría, o señalar la naturaleza de los problemas fundamentales, así como para motivar finalmente el rigor deductivo de las demostraciones. En definitiva, conjuga el rigor con la pedagogía, aún a pesar, de que nos parece, que el texto tuviera un carácter principalmente privado. Y esto no es sólo una cuestión metodológica, sino que supone la necesaria articulación de la dimensión lógica —entendida como fusión o identidad entre la lógica formal y la matemática— de toda idea, dimensión ligada esencialmente a la precisión y claridad de su significado. Esencia que se basa filosóficamente en la distinción entre lo general y lo especial, y en el que los ejemplos son su fundamento, como si dijéramos, el anclaje material de las ideas. Y esto está ligado, según Newton, a y^e, es decir, su espacio, o el nuestro.

Lema



Si dos cuerpos A, B, que se mueven uniformemente en y^e $\begin{matrix} uno \\ otro \end{matrix}$ desde $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ a $\begin{matrix} c, d, e, f, \\ g, h, k, l, \end{matrix}$ etc.: en y^e al mismo tiempo, entonces existen las líneas de y^e $\begin{matrix} ac, \\ bg, \end{matrix}$ y $\begin{matrix} de, \\ hk, \end{matrix}$ y $\begin{matrix} ef, \\ kl, \end{matrix}$ etc.: como sus velocidades p/q. Y aunque ellos no se movieran uniformemente todavía son líneas infinitamente pequeñas de y^e las cuales describen en cada momento, así como tienen sus velocidades mientras describen y^t. Así si y^e del cuerpo A con velocidad p en y^e infinitamente pequeña $(cd =)\ p \times o$ en un momento, en el mismo momento y^t de y^e el cuerpo B en y^e con velocidad q describirá una línea y^e $(bg =)\ q \times o$. Así $p{:}\,q :: po{:}\,qo$. Si en cualquier y^t la línea y^e descrita es $(ac =)\ x$, y $(bg =)\ y$, en un momento dado, ellas serán $(ad =)\ x + po$, y $(bh =)\ y + qo$ de y^e en el siguiente.
[N. pág. 414.]

Para aclarar esto Newton pone un ejemplo que considera aplicable a cualquier caso. Si la y^e que relaciona x con y es:

$$x^3 - abx + a^3 - dyy = 0$$

se sustituye $x = x + po$ e $y = y + qo$, con lo que se obtiene:

$$x^3 + 3pox^2 + 3p^2o^2x + p^3o^3 - abx - abpo + a^3 - dy^2 - 2dqoy - dq^2o^2 = 0$$

eliminado la ecuación de partida

$$3pox^2 + 3p^2o^2x + p^3o^3 - abpo - 2dqoy - dq^2o^2 = 0$$

dividiendo por o

$$3px^2 + 3p^2ox + p^3o^2 - abp - 2dqy - dq^2o = 0$$

Eliminamos los términos dependientes de o por ser infinitamente pequeños frente a los independientes, por lo que nos queda:

$$3px^2 - abp - 2dqy = 0$$

Esta ecuación expresa la relación $^{p}/_{q}$ en y^e, es decir, se está suponiendo que la relación o ecuación entre A y B es estrictamente espacial. Es interesante notar aquí que el tiempo está actuando como una variable infinitesimal simultánea y sincrónica de los dos movimientos que resulta cancelada.

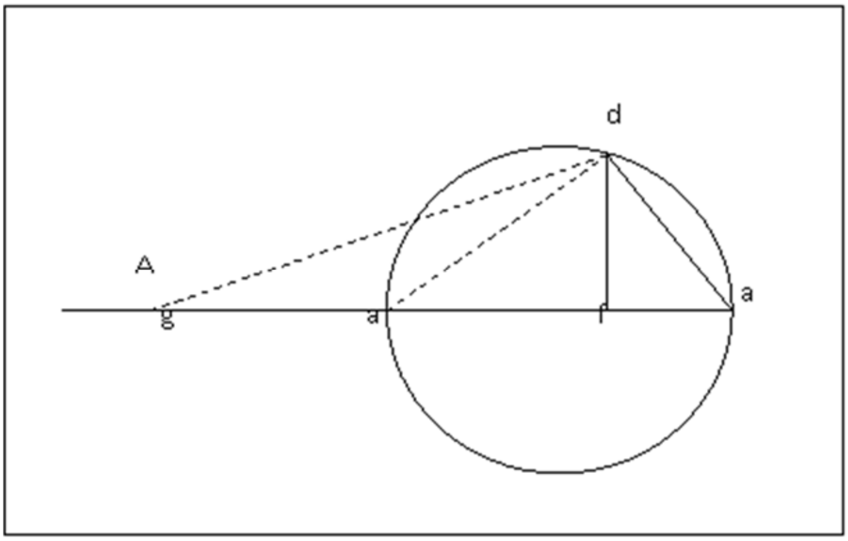
Después de esta demostración para la relación entre dos velocidades, Newton afirma que el caso de más variables es completamente análogo.

> After y^e same manner may this 7th Prop: bee demonstr: there being 3 or more unknowne quanittys x, y, z &c:
> [N. pág. 415. Subrayado nuestro.]

Para finalizar la primera parte del tratado con la equivalencia entre las proposiciones 7ª y 8ª, o teorema central del cáclulo.

Prop 8th is y^e Converse of this 7th Prop. & may bee therefore Anaytically demonstrated by it.
[N. pág. 415.]
{La proposición 8ª es y^eequivalente a la proposición 7ª, y puede ser por tanto analíticamente demostrada por ello.}

Prop 1st Demonstrated.

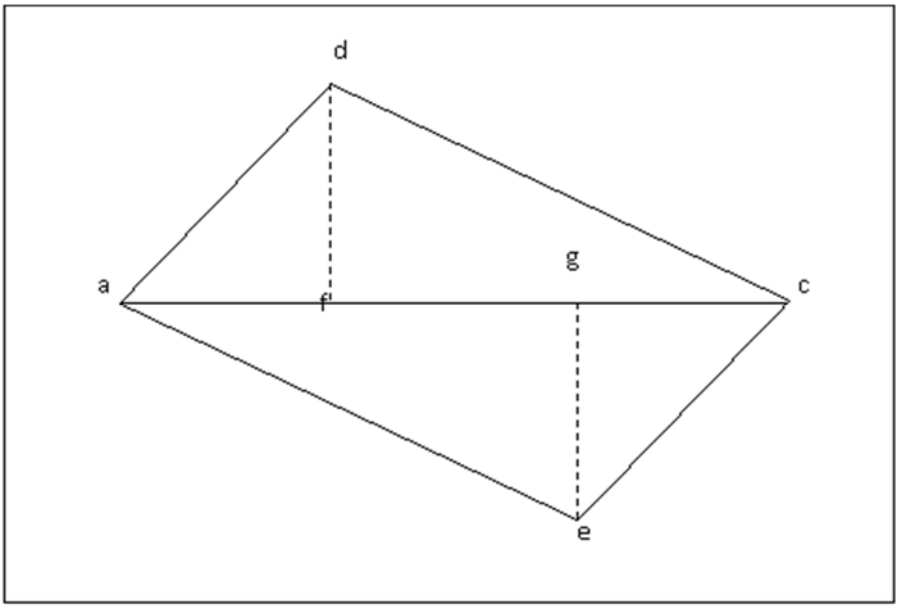


If some body A move in y^e right line $gafc$ from g towards c. From any point d draw $df \perp ac$. & call, $df = a$. $fg = x$. $dg = y$. Then is $aa + xx - yy = 0$. Now by Prop 7th, may y^e proportion of (p) y^e velocity of y^t body towards f, to (q) its velocity of y^t body towards f, to (q) its velocity towards d bee found viz[:] $2xp - 2yq = 0$. Or $x{:}y :: q{:}p$. That is $gf{:}gd ::$ its velocity to d: its velocity towards f or c. & when y^e body A is at a, y^t is when y^e points g&a are coincident then is $ac{:}ad :: ad{:}af ::$ velocity to c: velocity to d.

[N. pág. 415.]

{Si un cuerpo A se mueve en y^e en la línea recta $gafc$ desde g hasta c. Desde cualquier punto d dibujamos $df \perp ac$ y llamamos $df = a$, $fg = x$, $dg = y$. Entonces es $aa + xx - yy = 0$. Ahora por la proposición 7ª, puede y^e la proporción de (p) y^e velocidad y^tdel cuerpo hacia f, a (q) su velocidad hacia d ser encontrada, es decir: $2xp - 2yq = 0$. O $x: y :: q: p$. Eso es $gf: gd ::$ su velocidad a d: su velocidad hacia f o c, y cuando y^e del cuerpo A está en a, y^t es cuando los y^e puntos g y a son coincidente, entonces es $ac: ad :: ad: af ::$ velocidad a c: velocidad a d.}

Prop 2ᵈ, Demonstrated.



From y^e points d & e draw $df \perp ac \perp ge$. And let y^e first bodys velocity to d bee called ad, y^e seconds to e bee ae, & y^e 3ˢᵈ toward c bee ac. Then shall y^e first velocity towards c bee af (by Prop 1): & The seconds towards c is ag, (prop 1). But $af = gc$ (for $\triangle\, adc = \triangle\, aec$, & $\triangle\, adf = \triangle\, gec$, by sup). Therefore $ac = ag + gc = ag + af$. That is y^e velocity of y^e third body towards c is equall to y^e summ of the velocitys of y^e first & second body towards c.

[N. pág. 415.]

{Desde los y^e puntos d y e dibujamos $df \perp ac \perp ge$. Y dejemos la velocidad en y^e del primer cuerpo a d denominándola ad, la y^edel segundo a e sea ae, y la y^e del 3º hacia c sea ac. Entonces será la primera velocidad y^e hacia c: af (por la proposición 1): y la segunda hacia c es ag, (proposición1), pero $af = gc$ (ya que $\triangle\, adc = \triangle\, aec$, y $\triangle\, adf = \triangle\, gec$, por suposición). Por tanto $ac = ag + gc = ag + af$. Eso es la y^e velocidad del tercer y^e cuerpo hacia c que es igual a la y^esuma de las velocidades de y^e del primer y segundo cuerpo hacia c.}

Lo primero que resulta obligado comentar es el rigor lógico con el que procede Newton. El teorema: proposición 8ª⇄ proposición 7ª se compone de dos partes, o dicho de otro modo, hay que demostrar que la relación es necesaria (⟵) y suficiente (⟶). La primera demostración, supone que dada la proposición 8ª se obtiene la proposición 7ª. La segunda la contraria. Por otro lado, no es una casualidad que las dos figuras aquí utilizadas sean precisamente las de las dos primeras proposiciones.

Dado dos cuerpos describimos su movimiento a partir de las coordenadas de su trayectoria (proposición 8ª) por lo que pueden considerarse líneas rectas descritas a partir de su línea de intersección g. A partir de esta, por construcción, se establece la distancia con respecto al cuerpo A y partir de ella la relación entre las coordenadas y por derivación obtenemos el punto a en donde se cumplen la proporción de las velocidades y las coordenadas estipuladas por la proposición 7ª.

A la inversa, dada la descomposición de velocidades (proposición 7ª), la distancia recorrida o trayectoria es la suma de las componentes de sus velocidades (proposición 8ª). Con estas demostraciones las proposiciones 1ª y 2º adquieren un significado muy preciso.

En resumen, la concepción de Newton se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy}$$

Aunque la segunda igualdad no es evidente por sí misma, la verdadera limitación me parece que reside en concebir la relación entre las velocidades como una proporción cuando en realidad es una diferencia vectores tridimensionales.

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$$

Esto es debido, sin duda, a la importancia que tienen las proporciones en la racionalidad de la geometría tal como la formuló Euclides, y que permite una sinergia, como se aprecia claramente en la demostración anterior, muy especial entre el razonamiento matemático y el verbal, que tiene, por otro lado, una gran importancia filosófica.

Por otra parte, las limitaciones con que se encuentra Newton, son un indicio de las dificultades que tiene la unificación del campo de la física, y que desde luego no es evidente que sea un objetivo ni realizado ni fácilmente realizable. Es más, hay multitud de indicios, que nos inclinarían a suponer que éste es inalcanzable. Desde luego, desde la postura filosófica del pluralismo gnoseológico, apenas aquí esbozado, nosotros pensamos en su imposibilidad. Pero en cualquier caso, esto dependerá del análisis de la propia estructura del campo de la física, de la que brota cualquier postura filosófica aceptable sobre este tema, algo que ha quedado, por supuesto, fuera de la argumentación de este trabajo.

La parte segunda consiste en la aplicación de los teoremas de la parte primera a la resolución de un conjunto de problemas geométricos. No hay que olvidar, sin embargo, que la concepción general expresada en la parte primera no es de naturaleza estrictamente matemática. Aquí, para no demorarme demasiado, sólo voy a dar un pequeño esquema de esta parte que ocupa 25 páginas y es la más extensa del tratado. En total son 12 problemas numerados hasta el 13 porque hay una página y media en blanco para él, hoy perdido, como nos indica Whiteside en la nota 113. Los problemas en general se estructuran en dos partes un planteamiento general —a veces va acompañado de un lema— y algunos ejemplos que lo aclaran, excepto los tres últimos que sólo tienen un breve planteamiento general. El rótulo de esta segunda parte es:

The former Theorem Applyed to Resolving of Problems.
[N. pág. 416.]
{Los teoremas anteriores se aplican a la resolución de problemas}

1. To draw Tangents to crooked lines {Dibujar [en el sentido de construir o calcular] tangentes a líneas curvas.}. Este problema clasifica sus cuatro ejemplos en dos parejas: “Tangentes a líneas geométricas” y “Tangentes a líneas mecánicas”. El cuarto ejemplo es sólo un espacio en blanco. Whiteside nos indica que teniendo en cuenta sus trabajos anteriores, posiblemente se referiría a una espiral arquimedeana o a una cicloide en general. [N. págs. 416-418.]
2. To find y^e quantity of crookednesse of lines. {Encontrar la cantidad y^e de curvatura de una línea} Incluye el lema: “La curvatura de partes iguales de círculos son como los recíprocos de sus diámetros”, y un único ejemplo extenso donde usa la notación del punto para la fluxión ya sea de una variable o de otra, de primer o de segundo orden. Como corolario a este problema aparece el enunciado de un problema sin numeración: “Encontrar los puntos y^e de curvas que tengan una curvatura dada”. [N. págs. 419-424.]
3. To find y^e points distinguishing twixt y^e concave & convex portions of crooked lines. {Encontrar los puntos y^e que distinguen entre las porciones y^e cóncavas y convexas de la línea curva.} Con un ejemplo. Aquí también usa

la notación del punto. Este problema está estrechamente relacionado con el segundo. [N. 424-425.]

4. To find y^e points at w[ch] lines are most or least crooked. {Encontrar los puntos y^e en los cuales la línea es más o menos curvada.}, es decir, tenga mayor o menor curvatura. También aquí utiliza el punto. Con un ejemplo. [N. págs. 425-427.]

5. To find y^e nature of y^e crooked line whose area is expressed by any given equation. {Encontrar la naturaleza y^e de la línea curva y^e cuya área esté expresada por cualquier ecuación dada.}. Uso del punto y tres ejemplos. [N. págs. 427-428.]

6. The nature of any Crooked line being given, to find other lines whose areas may bee compared to y^e area of y^t given line. {Siendo dada la naturaleza de cualquier curva dada, encontrar otra línea cuya área pueda ser comparada al área y^e de la línea dada y^t.} Cuatro ejemplos. [N. págs. 428-430.]

7. The Nature of any Crooked line being given to find its area, when it may bee. Or more generally, two crooked lines being given to find the relation of their areas, when it may bee. {Dada la naturaleza de cualquier línea curva encontrar su area, cuando sea posible. O más generalmente, dadas dos líneas curvas encontrar la relación de sus áreas cuando ello sea posible.} Como indica Whiteside en su nota 107, el inverso de los dos problemas precedentes. Con dos ejemplos. [N. págs. 430-432.]

9. To find such crooked lines whose lengths may bee found. & also to find theire lengths. {Encontrar aquellas líneas curvas cuya longitud puede ser encontrad. Y también encontrar su longitud.} Lema y dos ejemplos. [N. págs. 432-434.]

10. Any curve line being given to find others lines whose lengths may be compared to its length or to its, & to compare y^m. {Dada cualquier línea, encontrar otras líneas cuya longitud pueda ser comparada a su longitud o a su área, y comparable a y^t.} Con tres ejemplos. [N. págs. 434-440.]

11. To find curve lines whose Areas shall bee Equall (or have any others given relation) to y^e length of any given Curve line drawn into a given right line. {Encontrar las líneas curvas cuyas areas sean iguales (o tengan cualquier otra relación dada) a la longitud y^e de cualquier curva dada construida sobre una línea recta dada.} [N. pág. 440.]

12. To find y^e Length of any given crooked line, when it may bee. {Encontrar la longitud y^e de cualquier línea curva dad, cuando ello sea posible.}. [N. págs. 440-441.]
13. To find y^e nature of a Crooked line whose length is expressed by any given Equation, (when it may be done). {Encontrar la naturaleza y^e de una línea curva cuya longitud es expresada por cualquier ecuación dada, (cuando pueda ser hecho).} [N. pág. 441.]

Antes de pasar a la parte tercera, voy hacer un breve comentario sobre el problema 7 que nos volverá a aparecer en la tercera parte. En este problema se asocia y de y^e con el área bajo la curva ${}^{p}/_{q}$ en y^e. De este modo en el ejemplo uno del problema parte de la naturaleza y^e de la línea y^e:

$$\frac{p}{q} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Usando el ejemplo de la lista

$$\frac{cx^n}{x\sqrt{a + bx^n}} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{2c}{nb}\sqrt{a + bx^n} = y$$

que comentamos antes, particularizando los valores $c = a, a = a^2, b = -1$ y $n = 2$, obtenemos para el área:

$$-a\sqrt{a^2 - x^2} = y$$

¿Pero, por qué Newton la denomina naturaleza? Si suponemos que para cada ecuación de ${}^{p}/_{q}$ hay una familia de curvas integrales paralelas según el eje de ordenadas, este concepto de ${}^{p}/_{q}$ es idénticamente común a todas ellas. Por otra parte, la integral definida, para un mismo intervalo, de cada una de estas curvas paralelas, es propio de cada una de ellas y recorre todos los valores posibles, y por tanto, de algún modo, es adecuado decir que su ${}^{p}/_{q}$ es la esencia de todas ellas, y si suponemos que la realidad tiene carácter matemático, también de la naturaleza. De este modo, el hombre de ciencia, es capaz de verdad, unas verdades que desde el pluralismo científico son siempre parciales e incompletas. En esta línea, la utilización del verbo ", draw: dibujar" del problema 1, no sólo refleja la dualidad aritmético geométrica de la matemática, sino que convierte a ésta en prototipo de la racionalidad humana, ligada en este caso a las operaciones manuales de los utensilios de dibujar, algo, que quizás, no aparece de modo tan evidente cuando empleamos el verbo calcular, que enfatiza sobre todo el resultado, destacando así su carácter material.

Esta tercera parte que ocupa apenas 7 páginas en la edición de Whiteside, la más breve de las tres, y que sigue, como dijimos, la numeración de los problemas de la parte segunda, trata sobre la gravedad. El texto de Newton podría interpretarse, y quizás debería interpretarse desde las coordenadas actuales, como si en la primera parte, física y matemática estuvieran fundidas en una concepción con tintes claramente filosóficos, pero a la hora de abordar los problemas ambas disciplinas fueran adquiriendo progresivamente su ámbito propio, es decir, fueran adquiriendo su propia autonomía. Y es importante constatar que este proceso adquirió relativamente pronto claridad suficiente: los años que Newton se dedicó a su desarrollo o investigación. La cumbre de este proceso estaría nos parece en su principal obra sobre física, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, que aunque como su propio título indica arrastrara todavía un gran lastre de la tradición anterior, más por cuestiones coyunturales que por la naturaleza de los conceptos que involucraban.

Esta parte en cierto modo reproduce la estructura general del tratado, lo que nosotros interpretamos como un indicio de que estamos construyendo un campo nuevo. Comienza con dos definiciones y dos lemas, y luego le siguen cuatro problemas con cuatro ejemplos asociados al primer problema y dos al segundo. Los dos últimos, consecutivos entre sí, tienen un carácter muy general, por lo que podría decirse que establecen o cierran las posibilidades de las definiciones iniciales. En realidad el problema 14 está compuesto por dos, con un sitio vacío para poner un número, nosotros los llamaremos como hace Whiteside problemas 14_1 y 14_2.

Aunque esta parte se aleja un poco del aspecto matemático que es el relevante para este trabajo, tiene un gran interés, porque estamos asistiendo a los primeros trabajos sobre la gravitación de Newton, en dónde se pone de manifiesto además la proximidad que él mantenía entre la matemática y la física, cuestión ésta que es central en la concepción matemática de Newton, como se manifiesta en la primera parte del tratado, que es la parte central de nuestra explicación. Por eso nos vamos a detener un poco más ella que en la segunda parte.

Definición 1.

> I call y^t point y^e center of Motion in any Body, w^ch always rests when or howsoever y^t body circulates w^th out progressive motion. It would always bee y^e same w^th y^ecenter of Gravity were y^e Rays of Gravity parallel & not converging towards y^e center of y^e Earth. [N. págs. 441-442.]
> {Llamo al punto y^t centro y^e del movimiento de un cuerpo cualquiera, el cuál siempre está en reposo cuando o a pesar de que el cuerpo y^t gire sin movimiento

de traslación. Debería ser siempre el mismo y^e con centro y^e de gravedad mientras los rayos y^e de gravedad fueran paralelos y no convergieran hacia un y^ecentro y^e de la Tierra.}

Definición 2.

And y^eright lines passing through y^t point I call y^e axes of Motion or Gravity. [N. pág. 442.]
{Y a cualquier línea recta que pase a través del punto y^t lo llamaremos eje y^e del movimiento o de gravedad.}

Lema 1.

The place & distance of Bodys is determined by their centers of Gravity. Which is y^e middle point of a right line, circle or Parallelogram: [N. pág.442.]
{El lugar y la distancia de los cuerpos es determinada por sus centros de gravedad, el cual es el punto y^e medio de una línea recta, un círculo o un paralelogramo.}

Lema 2.

Those weights doe equiponderate whose quantitys are reciprocally proportionall to their distances from the common axis of Gravity, supposing their centers of Gravity to bee in y^e same plaine wth y^t common axis of Gravity. [N. pág. 442.]
{Aquellos pesos se equiponderan a aquellas cantidades que son recíprocamente proporcionales a sus distancias desde el común eje de gravedad, suponiendo que su centro de gravedad se encuentre en el mismo plano y^e que el eje común y^tde gravedad.}

Newton en la definición 1, como dice Whiteside en la nota 151, probablemente pretende una definición estricta del centro de gravedad de un cuerpo.

Vamos a comprobar la afirmación de Newton para un sistema de masas puntuales. El razonamiento para masas extensas es similar sin más que transformar la masa por la función densidad como función de la posición en el cuerpo y el sumatorio de masas por la integral al espacio ocupado por el cuerpo.

Considerando el espacio físico como espacio vectorial tridimensional, suponemos n partículas de masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ con vectores de posición respectivamente $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots\ \overrightarrow{r_n}$ y con pesos $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots\ \overrightarrow{p_n}$ entonces la posición del centro de gravedad se define como

$$\overrightarrow{C_g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}}{g_{cg} \sum_{i=1}^{n} m_i} =$$

si estamos en un campo gravitacional constante en módulo y sentido g, entonces se cumple que

$$\overrightarrow{p_i} = m_i g \overrightarrow{r_i} \quad i = 1, \dots n$$

entonces sustituyendo obtenemos

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \overrightarrow{r_i}}{g \sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \overrightarrow{C_m}$$

Es decir, el centro de gravedad y el centro de masas son el mismo punto.

La importancia del centro de masas reside en que el movimiento de sólidos rígidos libres se puede describir cómodamente como una traslación del centro de masas y un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas.

El concepto de centro de movimiento de Newton es, sin embargo, más amplio, porque supone una descomposición general del movimiento, ya sea de traslación, rotación [angularly] de sí mismo y de giro [circularly] alrededor de otro. Esto supone un análisis general de todo tipo de movimientos sin más que especificar los centros de movimiento adecuados. En cierto modo es una ley de composición de los movimientos, en el que se especifica como varían las velocidades de un cuerpo en cada una de las situaciones. Esto sería el contenido de las proposiciones tercera y cuarta.

Es muy importante destacar aquí que en la proporcionalidad de la velocidad con respecto al eje, que se afirma en la proposición cuarta, se da por sentado que el cuerpo sigue efectivamente esa trayectoria circular —sin buscar las causas de tales trayectorias—, ignorando además, las tendencias centrífugas debidas a la curvatura de esa trayectoria del movimiento. Por esta vía se hace necesario, supuesto el movimiento aproximadamente circular, en todo caso curvo —como compuesto de rectilíneos y circulares—, de por ejemplo, los planetas, de postular una atracción gravitatoria para que su trayectoria se consistente dinámicamente. De este modo sólo son necesarias las componentes tangenciales, que se deducen directamente como derivadas de la trayectoria. Pero así, la trayectoria de un cuerpo cualquiera adquiere un cierto carácter sustantivo. Y ésta no es más que una cierta región del espacio.

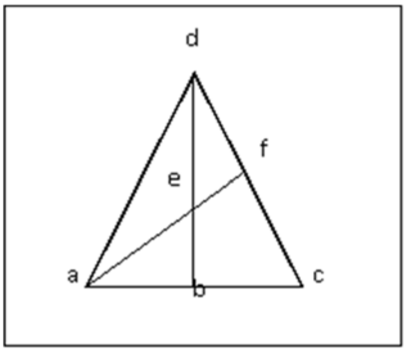
Además Whiteside en la misma nota 151 ofrece un extenso y muy precisa explicación sobre esta salvedad en la definición del centro de gravedad que ya había sido suscitada por Descartes en una Mersenne que tuvo bastante repercusión, en particular en Johann Hudde y que fue debidamente copiada por Schooten en 1657 en *Exercitationes Mathematicae* y que es casi seguro que Newton la conociera.

Nosotros añadiríamos que la mención de la Tierra tiene una gran importancia gnoseológica porque nos sitúa inmediatamente en una configuración sobre cuyos contextos posteriormente se construirán ciertas determinaciones de la física newtoniana cuyas verdades nos conducirán a las leyes del movimiento y a la ley de la gravitación universal.

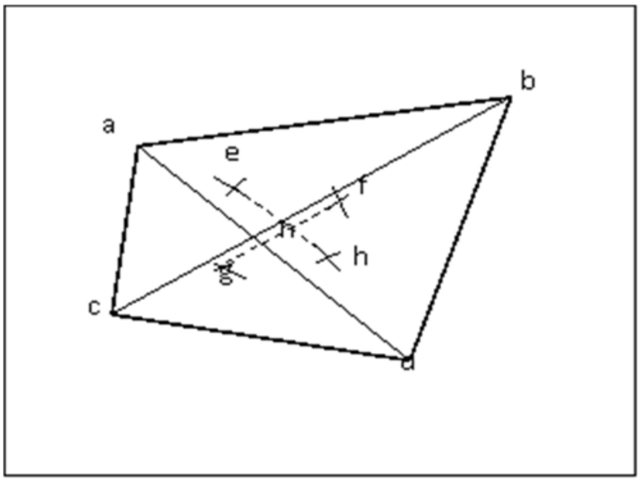
Problema 14_1.

> To find y^e center of Gravity in rectilinear plaine figures.
> [N. pág. 443.]
> {Encontrar los centros y^e de gravedad de figures planas rectilíneas.}

En el triángulo de y^e acb hacemos $ab = bc$ y $cf = fd$, y dibujamos db y af, el punto de intersección e es su centro de gravedad.



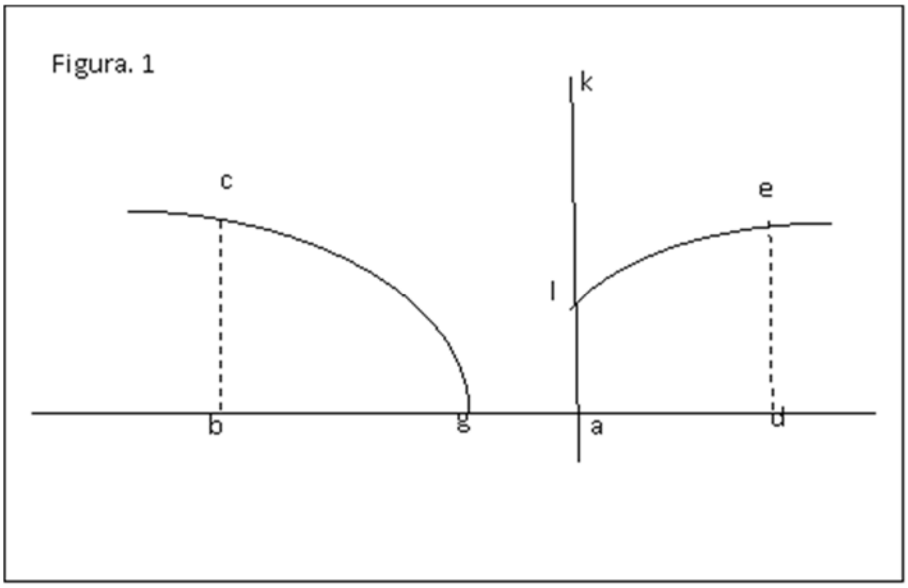
> En el trapecio de y^e abdc, dibujamos ad y cb. Unimos los centros y^e de gravedad e y h, f y g de los triángulos y^e opuestos acb y dcb, bad y adc con las líneas y^e eh, fg. Su punto de intersección n es el centro y^e de gravedad del trapecio y^e. (Y así para pentágonos, hexágonos etc.) [N. pág. 443.]



En la nota 152 Whiteside, a parte de sus inmediatas influencias en trabajos de Wallis, nos informa de que los lemas sintetizan la teoría elemental de Arquímedes, la cual circulaba por Europa desde la mitad del s.XVI, y en las notas 154 y 155 que el caso del triángulo no es más que la proposición 13 del libro I de Arquímides *Sobre el equilibrio de los planos*, y el caso del trapecio es una generalización de las proposiciones 10 y 15 del mismo libro. Me parece que esta información tiene una gran importancia, porque nos confirma dos cosas, primero, que la matemática moderna no supuso una ruptura de la tradición matemática griega, en el que la geometría clásica se conjugó definitivamente con la aritmética, lo que provocó como hecho más notable el establecimiento del cálculo infinitesimal, y segundo, que en tal tradición la física y la geometría no estaban diferenciadas, cosa que sólo ocurrió con el desarrollo moderno de las ciencias y que en tal desarrollo el uso de este cálculo jugó un papel principal. Aquí es dónde se sitúan las fundamentales investigaciones de Newton, y como su primer gran paso: este tratado de 1666.

Problema 14_2.

> To find such plaine figures w^ch^ are equiponderate to any given plaine figure in respect of an axis of Gravity in any given position.
> [N. pág. 443.]
> {Encontrar una figura plana tal que sea equiponderada a cualquier figura plana dada con respecto a un eje de gravedad con una posición dada cualquiera.}



Dada la naturaleza y^e y las posiciones y^e de la curva plana (gbc) buscamos que el plano (del) sea tal y^t que pueda equiponderar con respecto del eje y^e (ak); Supongo $x = ab \perp bc = z$ e $y = ad \perp de = v$ para que sea perpendicular, paralelo o coincidente y^e a dicho eje ak; y los y^e movimientos por medio del incremento o decremento de x o y (es decir, y^e movimientos de bc y de hacia o desde el y^e punto a). Denomino p y q. Ahora las y^e ordenadamente aplicadas a las líneas $bc = z$ y $de = v$, multiplicadas respectivamente por sus movimientos p y q (y^t es pz y qv) pueden significar las infinitamente pequeñas partes y^e de esas áreas (gcb y led) en el cual cada momento que ellas describen, en el cual cada infinitamente pequeña parte es equiponderado (por los lemas 1 y 2), si ellos son multiplicados por sus distancias y^e desde el eje ak haciendo iguales sus productos. (y^t es $pxz = qyv$ de la figura 1) Y si todas las respectivas y^e partes infinitamente pequeñas son equiponderadas, las superficies y^e deben serlo también.

Ahora, por tanto, (la relación y^e de x y z es dada por la naturaleza y^e de la y^e línea curva cg,) tomo cualquier ecuación que desee para la relación y^e que medie entre x e y, de tal modo (por la proposición 7) encuentro p y q, y así por el y^e teorema precedente encuentro la relación y^e que media entre y y v para la naturaleza en y^e del plano y^e buscado led. [N. págs. 443-444.]

La condición para equiponderar las dos curvas en notación actual será:

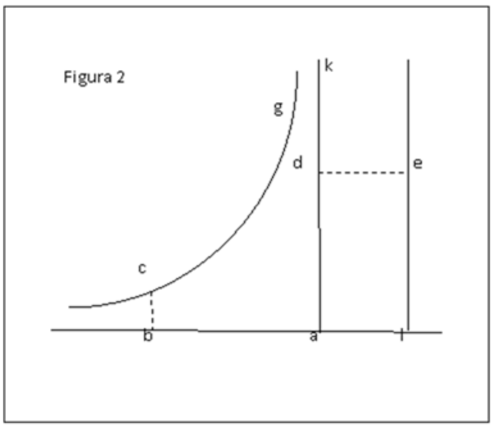
$$\int xzdz = \int yvdy$$

Es necesario decir que en todos estos razonamientos, no sólo estamos suponiendo que el campo gravitatorio es constante, sino que además la masa de los cuerpos es homogénea e idéntica. Esto sólo nos obligaría a delimitar las zonas homogéneas y a introducir las correspondientes densidades constantes. Esto en realidad está subsumido por la arbitrariedad de la relación entre x e y, que según nuestro deslinde físico-matemático deberían ser siempre iguales. Aquí aparece una cuestión muy importante para entender la concepción de Newton, y es que, motivado, quizás, por la descomposición galileana de los tiros parabólicos en dos movimientos —horizontal y vertical— Newton distingue entre la trayectoria o carril espacial, y la rapidez con que un punto la construye al recorrerla, desconectando o ignorando la conexión entre las cuestiones cinemáticas y sus causas dinámicas, lo que le facilita el paso, e incluso la confusión, entre la física y la matemática. Pero con los movimientos planetarios esta cuestión no puede ser eludida. Podría parecer, así, que estamos muy cerca del ideal clásico griego en el que la forma o figura de los cuerpos, aunque fuese en sus partes minúsculas, determinaría su naturaleza compositiva y reactiva. Pero en la época de Newton las investigaciones alquímicas, de carácter más bien técnico o protocientíficas o pre-químicas, tenían tal grado de desarrollo que ese ideal geométrico es imposible. Estas investigaciones se aprecian muy bien en la *Óptica* del propio Newton.

Es importante señalar también que dada esta teoría sobre como equiponderar las superficies, el paso al tratamiento de los sólidos es sencillo, sin más que considerar a cualquier sólido dado como una superficie infinitesimal según un orden adecuado a la figura de ese sólido.

Para abreviar y para fijar las ideas sólo vamos a comentar un ejemplo, el primero, el más sencillo.

Ejemplo 1.



Si suponemos una hipérbola $s^2 = xz$ y un cuadrado de lado $v = y = de$ para equiponderar, y la ecuación $2x = y$ o $2p = q$ (por la proposición 7) entonces la condición de balance es

$$pxz = \frac{1}{2}qv^2$$

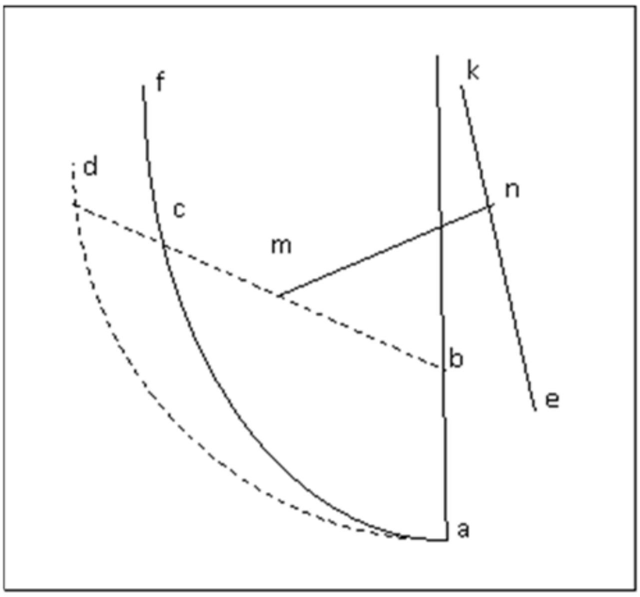
o en notación actual

$$\int xzdx = \frac{1}{2}\int v^2\, dy$$

Si tenemos en cuenta la ecuación de la hipérbola: $v = s$ y para cada punto: $ab \times bc = al \times al$. [N. pág. 444.]

Problema 15.

To find y^e Gravity of any given plaine in respect of any given axis, given in position, when it may bee done.
[N. pág. 446.]
{Encontrar la y^e gravitatoria de cualquier plano [figura plana o superficie plana] dado con respecto a cualquier eje, dado como posición, cuando pueda ser hecho.}

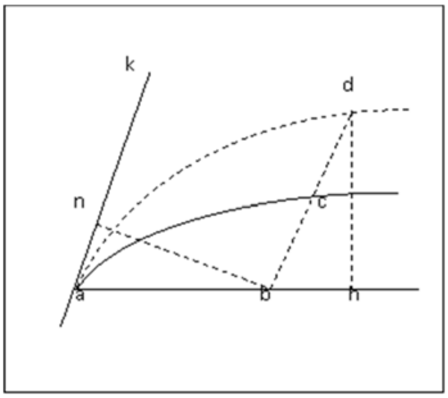


Supongamos que ek sea el eje y^e de gravedad, abc el plano dado, $cb = y$, y sea $db = z$ ordenadamente aplicada con algún ángulo a $ab = x$. cb es bisectado en m y dibujamos $mn \perp ek$. Ahora, ya que $(cb \times mn)$ es la y^e de gravedad correspondiente a la línea de y^e (cb), (por el lema 1 y 2); si hacemos $cb \times mn = db = z$ cada línea bd designará la y^e de gravedad de la y^e superficie acb. En cualquier caso, encontrando y^t de la

> cantidad y^e de la y^t superficie abd (por el problema 7), encuentro la y^e de gravedad de la y^e superficie acb.
> [N. pág. 446.]

Hay que señalar como la una propiedad gravitatoria se asocia a una característica del espacio y como su resolución se concibe como una transformación de un y^t apropiado a su determinación como y^e. Newton asocia a este problema dos ejemplos y resuelve sólo el primero que es el que adaptamos.

Ejemplo 1.



Suponemos la parábola ac dada por la ecuación $rx = y^2$ que es y^t sobre la que calcularé el eje y^e de gravedad ak que es ‖ a dcb y $nb \perp ak$. Por construcción

$$\frac{x'}{x} \equiv \frac{nb}{ab} = \frac{dh}{db} \equiv \frac{e}{d}$$

Por la definición de eje de gravedad:

$$z = bc \times nb = y \times \frac{e \times ab}{d} = y\frac{e \cdot x}{d} = \frac{e}{d}x\sqrt{rx} = \frac{e}{d}r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

La y^e de gravedad del área acb con respecto al eje ak será la integral:

$$\int z\,dx' = \frac{e}{d}\int zdx = \frac{e}{d}\int \frac{e}{d}r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2e^2}{5d^2}r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$$

[N. pág. 447.]

El planteamiento de este problema y su resolución es muy interesante ya que se basa en que dada una propiedad, en este caso la y^e gravitatoria, se define unas coordenadas que faciliten el cálculo de esa propiedad y luego se retorna a las coordenadas general que referencian el problema. Hoy este procedimiento se ha sistematizado completamente y está en la base de multitud de análisis que de otro modo serían mucho más difíciles de resolver, en términos más abstractos, consistiría en adecuar el cálculo al problema que se quiere resolver. Aquí las configuraciones geométricas ayudan a establecer, y posteriormente resolver, el contexto constructivo del problema.

Problema 16.

> To find y^e Axes of Gravity of any Plaines.
> [N. pág. 447.]
> {Encontrar un eje y^e de gravedad de cualquier plano [superficie plana].}
>
> Se encuentra la y^e cantidad del plano y^e (por el problema 7) al cual llamamos A, y la y^e cantidad de su gravedad con respecto a algún eje (por el problema 15) al cual llamamos B y paralelo al eje y^t dibujamos una línea cuya distancia a él sea B/A. Esa línea será un eje de gravedad de y^e del plano dado. [N. pág. 447.]

Transcribo la nota 168 de Whiteside porque es muy aclaratoria de lo que está haciendo Newton.

La área "gravedad" del área

$$A = \int ydx$$

alrededor de la ordenada ($x = 0$) en el origen es el momento del área, alrededor de él

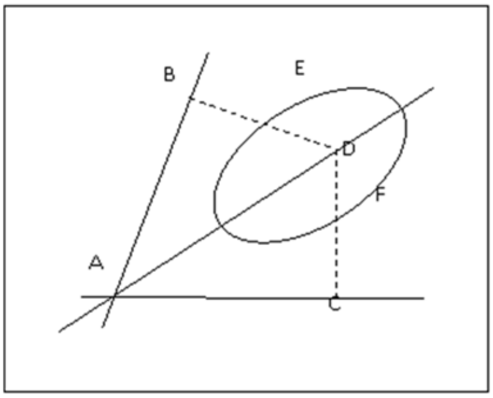
$$B = \int xydx$$

y la condición para que $\bar{x} = x$ sea un "eje de gravedad" del área es que

$$\int (x - \bar{x})ydx = 0$$

o que

$$D = \frac{\int xydx}{\int ydx} = \frac{A}{B}$$



O si no puede encontrarse la cantidad y^e del plano: entonces se encuentra su gravedad con respecto a dos ejes distintos (AB y AC) a la gravedad de los cuales llamaremos B y C, y de parte a parte (A) la intersección y^e de esos ejes, dibujo una línea AD con la condición de que la distancia $y^t y^e$ (DB; DC) de alguno de sus puntos (D) desde dicho ejes (AB y AC) tenga la proporción como (C a D) del plano de gravedad. Esa línea (AD) será un eje de gravedad y^e del plano dicho EF.

Problema 17.

To find y^e Center of Gravity of any Plaine, when it may bee.
[N. pág. 448.]
{Encontrar el centro y^e de gravedad de cualquier plano [superficie plana], cuando ello pueda ser.}

Se encuentran dos ejes de gravedad por la proposición precedente, y su intersección es el centro y^e de gravedad deseado. Si la figura tiene algún diámetro conocido podría ser tomado como uno de sus ejes de gravedad.

EXPLICACIONES AL TEXTO DE LEIBNIZ

El texto *Historia y origen del Cálculo diferencial*, cuyo título original es *Historia et Origo Calculii Differentialis*, está fechado en torno a 1713-1714, aunque se halle influido por la polémica con Newton que a nosotros para este trabajo nos interesa muy secundariamente. Para nuestra explicación usaremos la traducción de José Luis Arántegui que figura en el libro de Antonio J. Durán antes mencionado, págs. 231-264., que las citaremos como [L. págs. Xi-Xf.].

En la sesión del 8 de enero de 1713 de la *Royal Society* se publicó el dictamen sobre la invención del cálculo infinitesimal con el nombre *Commercium Epistolicum, D. Johannis Collins, et aliorum de analysi promota,* lo cual generó más o menos inmediatamente “los tres escritos a los que estas páginas sirven de estudio preliminar; por orden cronológico en que fueron compuestos: la *Carta volans* de Leibniz, el *Account* de Newton y la *Hisotira y origo* de Leibniz. Las dos primeras provocaron, por lo demás los años más duros de la polémica”. (7)

> *La* ***Historia et origo calculi differentialis*** *no se publicó durante la polémica y, de hecho, tardó un siglo y tres décadas en ver la luz, pues hasta 1846 no se imprimió; lo editó Gerhardt en Hannover bajo el título* ***Historia et origo calculi differentialis, a G.G Leibnizio conscripta****. Gerhardt encontró el texto entre los documentos de Leibniz, a quien puede ser atribuido con seguridad. La* ***Historia et origo*** *no tuvo por tanto influencia ni repercusión en la disputa, aunque fue la versión más completa que sobre ella redactó Leibniz.* (8)

La naturaleza del escrito queda muy bien reflejada en estas palabras.

> *La* ***Historia et origo*** *es pues más fruto de la memoria de Leibniz de lo que lo fue el* ***Account****, además de estar exento de la abrumadora cantidad de citas y contracitas de cartas, documentos y publicaciones, con que Newton* ***adornó*** *el* ***Account****. Es además un escrito más breve y más técnico que el de Newton, pero quizá más didáctico: en él vemos crecer* ***conceptualmente*** *el método diferencial de Leibniz desde sus orígenes aritméticos hasta englobar en sí la geometría de las curvas. Tal vez Leibniz tuviera pensado ampliar y completar la* ***Historia et origo****, ya fuera con más detalles histórico-técnicos, o tal vez apoyándolo más decididamente en documentos y cartas, el caso es que su muerte, en noviembre de 1716 la dejó tal y como aquí se publica.* (9)

De este carácter doble del escrito de Leibniz a nosotros para este trabajo, reitero, sólo nos interesa lo referente al desarrollo conceptual del método diferencial, aunque seguramente se haya producido cierto sesgo o infravaloración de los logros de Newton de los que Leibniz era muy consciente, pero por el contrario aparezcan muy resaltadas las diferencias o mejoras respecto a aquél, supuesta la doble paternidad, que por otra parte necesitará el paso del tiempo y las contribuciones de otros matemáticos para adquirir mayor precisión a la luz, tal vez, de nuevos desarrollos.

Para nuestro comentario, que sólo pretende mostrar la amplitud y profundidad matemática de Leibniz, dividimos el texto en siete partes consecutivas. En la primera a modo de introducción Leibniz plantea la finalidad del texto [L. págs. 231-235.] En la segunda se mencionan los orígenes numéricos del cálculo diferencial [L. págs. 235-240.] En la tercera, como raíz de estas primeras investigaciones se vio en la necesidad de profundizar en su estudio de las matemáticas, hasta llegar a formular el teorema central del cálculo [L. págs. 240-247.] Luego, en cuarto lugar, aplica esto al estudio de la cuadratura del círculo, retrotrayéndose a sus primeras investigaciones, en donde se pone de manifiesto la potencia sistemática de los nuevos conceptos [L. págs. 247-253.] Pasa luego a ofrecer, quinta parte según nuestro análisis, una visión general de su recorrido intelectual, en dónde se ponen de manifiesto algunos problemas sin resolver [L. págs. 253-258.] Para en la sexta parte, ofrecer una concepción general que motiva la notación leibniciana del cálculo [L. págs. 258-262.]. Y finalmente establecer una conclusión general del significado del cálculo tanto con respecto a su desarrollo histórico como a sus posibilidades futuras, reiterándose en la originalidad y exclusividad de sus resultados frente a Newton [L. págs. 262-264.]

El texto comienza con las siguientes palabras que sitúan el tema y la importancia que tiene no tanto, que también, en lo alcanzado por él, sino en las inmensas posibilidades que proporciona.

> *De suma utilidad es conocer los orígenes verdaderos de invenciones memorables, señaladamente de aquellas con que no se diera por acaso sino a fuerza de meditar. No tan sólo porque la historia de las letras tribute sus alabanzas a alguno e, invite a los demás a ganarlas semejantes, sino también porque cobre auge el arte de la invención, conocida por vía de ejemplos ilustres. Cuéntase entre los más nobles de estos tiempos un nuevo género de análisis matemático, conocido por el nombre de cálculo diferencial, cuya constitución se tiene ya por suficientemente explicada, pese a no tenerse aún pública noticia de su origen ni de por cuáles razones viniera a dar con él.* [L. pág. 231.]

Este cálculo supone una nueva fundación de las matemáticas griegas, según nuestro parecer al establecimiento de su verdadera dualidad aritmético-geométrica, que nosotros situamos principalmente en Descartes y que a través del cálculo diferencial llegará al núcleo de la matemática, el concepto de función.

> *Y en verdad a nadie antes de Leibniz habíasele venido en mente establecer algoritmo alguno para un cálculo nuevo merced al cual se librara la imaginación de una perpetua atención a las figuras, lo que hicieran Vieta y Descartes en la geometría común o de Apolonio, pero de tal suerte que Descartes excluyera expresamente de su cálculo extremos más elevados pertenecientes a la geometría de Arquímedes, y las líneas que llamara mecánicas. Más en el cálculo nuevo de Leibniz todo cuanto es geometría queda sujeto a cálculo analítico, y aquellas*

> *líneas mecánicas de Descartes, idénticas a las trascendentes, son asimismo reducidas a ecuaciones locales considerando funciones de* x *las diferencias* $dx,\ ddx,\ etc.$*, y las inversas de las sumas de éstas, e introduciéndolas así en el cálculo, cuando antes no se aplicaran otras funciones de cantidades que* $x,\ xx,\ x^3,\ \sqrt{x},\ etc.$*, o potencias y raíces. De donde puédese entender que quien expresare esas cantidades mediante* o*, como Fermat, Descartes, y ese mismo émulo de Leibniz en sus Principia editados en 16…, hallaríase lejísimos del cálculo diferencial, comoquiera que así no pueden discernirse ni grados de diferencia ni funciones diferenciales de diversas cantidades.*
> [L. pág. 233.]

Poniendo de manifiesto Leibniz la radicalidad de toda su producción matemática, científica y filosófica, ya desde sus orígenes juveniles.

> *Y que a vueltas con la lógica advirtiera, mozo aún, ir a parar la última verdad del análisis dependiente de la razón en estas dos solas cosas, las únicas primitivas e indemostrables entre las necesarias, a saber, definiciones y verdades idénticas; y como se le objetara ser tales verdades inútiles perogrulladas, mostraba él lo contrario con experimentos, y entre otras cosas demostraba aquel magno axioma, ser el todo mayor que parte suya, mediante un silogismo cuya mayor fuera una definición, y cuya menor , una proposición idéntica. Pues si de dos cosas una es igual a parte de la otra, llámase a aquélla menor, mayor a ésta, sea ésta la definición. Por ende, si a esta definición juntamos este axioma idéntico e indemostrable, que todo lo dotado de magnitud es igual a sí mismo, como* $A = A$*, nace el silogismo como éste: aquello que es igual a parte de otro, es menor que eso otro —por la definición—; la parte es igual a parte del todo —y a sí misma claro está, por verdad idéntica—, luego la parte es menor que el todo. Q.E.D.* [L. pág. 236.]

Del estudio de la identidad como diferencia entronca su estudio de los números combinatorios y el avance de su interés por las matemáticas.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

[L. pág. 238.]

O expresado en forma de triangulo.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Y a partir de aquí como a partir de una sucesión se establecen las diferencias y a partir de ellas, el cálculo de su suma, o serie, ya sea respetando el orden de las diferencias o de manera transversal.

Términos	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	Etc.						
Diferencias 1ª		**f**	**g**	**h**	**i**	**k**	Etc.					
Diferencias 2ª			**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	Etc.				
Diferencias 3ª				**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	Etc.			
Diferencias 4ª					**β**	**γ**	**δ**	**ε**	**v**	Etc.		

a-w=1f+1g+1b+1i+1k+etc.
a-w=1l+2m+3n+4o+5p+etc.
a-w=1q+3r+6s+10t+15u+etc.
a-w=1β+4γ+10δ+20ε+35v+etc.

$$
a\text{-}w = \left\{
\begin{array}{lllllll}
+1f & & & & & & \\
 & -1l & & & & & \\
+1f & & +1q & & & & \\
 & -2l & & -1\beta & & & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda & & \\
 & -3l & & -4\beta & & & \\
+1f & & +6q & & \text{Etc.} & &
\end{array}
\right.
$$

-4l Etc.
+1f Etc.
Etc.
Etc.

[L. págs. 238-239.]

Nosotros, para fijar ideas hemos desarrollado un caso concreto a modo de ejemplo.

Términos	**25**		**16**		**9**		**4**		**1**		**0**				
Diferencias 1ª		**9**		**7**		**5**		**3**		**1**		**0**			
Diferencias 2ª			**2**		**2**		**2**		**2**		**1**		**0**		
Diferencias 3ª				**0**		**0**		**0**		**1**		**1**		**0**	
Diferencias 4ª					**0**		**0**		**-1**		**0**		**1**		**0**

$$a - w = 25 - 0 = 25$$

$$25 = 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$
$$25 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$$
$$25 = 10 + 15$$
$$25 = -10 + 35$$

$$25 = \left\{ \begin{array}{llll} \mathbf{+9} & & & \\ & \mathbf{-1\bullet 2} & & \\ \mathbf{+9} & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{-2\bullet 2} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{+9} & & \mathbf{0} & \quad \mathbf{0} \\ & \mathbf{-3\bullet 2} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{+9} & & \mathbf{0} & \quad \mathbf{0} \\ & \mathbf{-4\bullet 2} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{+9} & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & & & \end{array} \right.$$

$$25 = 9 \cdot 5 - 10 \cdot 2$$

En donde ahora se establece el símbolo integral, como suma de una serie, con respecto al orden de la misma. Hay que tener en cuenta, que la explicación de Leibniz, reinterpreta a partir de lo alcanzado en toda su trayectoria matemática sus primeras investigaciones, para poner de manifiesto la naturaleza o importancia de los conceptos.

$$1+1+1+1+etc.=x$$
$$1+2+3+4+\ etc.=\int x$$
$$1+3+6+10+etc.=\iint x$$
$$1+4+10+20+etc.=\int^{3} x$$
$$1+5+15+35+etc.=\int^{4} x$$

Estableciendo, por fin, la conexión entre la sumas y las diferencias.

$$y-w=dy\cdot x-ddy\cdot\int x+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+etc.$$

Ecuación que si se supone que la suma se continúa hasta el infinito, o se hace $w=0$, tendremos.

$$\int y=y\cdot x-dy\cdot\int x+ddy\cdot\iint x-d^3\,y\cdot\int^3 x+etc.$$

Esto no es sólo una versión “truculenta”, como dice Antonio J. Durán en la nota 11 de su traducción, de la fórmula de Taylor, sino que refleja la íntima conexión entre el cálculo numérico y el análisis funcional. Y esta relación es el verdadero motor del pensamiento matemático de Leibniz.

> *Teoremas que tienen de egregio haber lugar por igual en uno y otro cálculo diferencial, tanto en el numérico como en el infinitesimal, de cuya distinción diremos más abajo.*
> *Pero la aplicación de verdades numéricas a la geometría y también la consideración de series infinitas eran a la sazón totalmente ignotas para nuestro mozo, quién dábase por satisfecho con observar complacido cosas tales en series de números.* [L. pág. 240.]

No hay que olvidar que toda sucesión finita de números reales tiene un orden polinómico.

Dada una sucesión de números reales cualquiera $u_0, u_1, \dots\ u_i\ \dots\ u_n$ finita definimos tres operadores:

(a) El operador multiplicación por un número: $Ku_i = ku_i$
(b) El operador elemento siguiente de la sucesión: $Eu_i = u_{i+1}$

(c) El operador diferencia i-ésima: $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$

Se puede demostrar que estos operadores forman un cuerpo sobre los elementos de la sucesión y los reales. Se comprueba entonces que:

$$(E-1)u_i = u_{i+1} - u_i = \Delta\,, y\ por\ tanto, E^n = (1+\Delta)^n$$

pero $E^n u_0 = u_n$, y aplicando el teorema del binomio a la igualdad anterior, obtenemos la ley general o término general —si tenemos en cuenta los resultados de Leibniz al ligar sumas con diferencias, como la suma es finita, ya que el número de términos es finito, entonces las diferencias están limitadas, es decir, como mucho $\Delta^m(u_0) = 0\ para\ todo\ m > n$—de esa sucesión:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta(u_0) + \binom{n}{2}\Delta^2(u_0) + \cdots + \binom{n}{n}\Delta^n(u_0).$$

Es decir, para cualquier sucesión finita y para cualquier orden de sucesión, existe un polinomio de grado n, como mucho, y de coeficientes reales, que pasa por los términos de esa sucesión. Esto es una propiedad debida al orden estricto de los números naturales y reales, cosa que no sucede, evidentemente, con los complejos.

Es un resultado de análisis de variable compleja que cualquier polinomio de grado n tiene n soluciones, que pueden repetirse. Además se demuestra que la función que relaciona los coeficientes con las raíces es continua, es decir, que se pueden utilizar todos los procedimientos aproximativos de cálculo numérico. No todas las relaciones matemáticas son de esta naturaleza. Por ejemplo, el cálculo de los valores propios de una aplicación lineal —lo que permite diagonalizarla—, no es continuo y por tanto no se pueden aplicar los cálculos aproximativos. Este cálculo de valores propios está en la base para lograr el desacoplamiento de ecuaciones diferenciales de varias variables. (10)

La relación de Leibniz con Huygens fue clave como se demuestra en una carta a Tschirnhaus de 1679, que cita Antonio J. Durán en la nota 12.

> *Huygens, tan pronto como publicó su libro sobre el péndulo me dio un ejemplar. En esa época yo era bastante ignorante del álgebra de Descartes y también del método de los indivisibles, y no conocía la definición correcta de centro de gravedad.*
> *(…)*
> *Entonces leí por primera vez a Descartes y a Schooten cuidadosamente, siguiendo los consejos de Huygens, quien me dijo que el método de calcular adoptado por estos autores era muy conveniente.*
> [L. págs. 241-242.]

Así que Leibniz se decidió a profundizar en el estudio de las matemáticas.

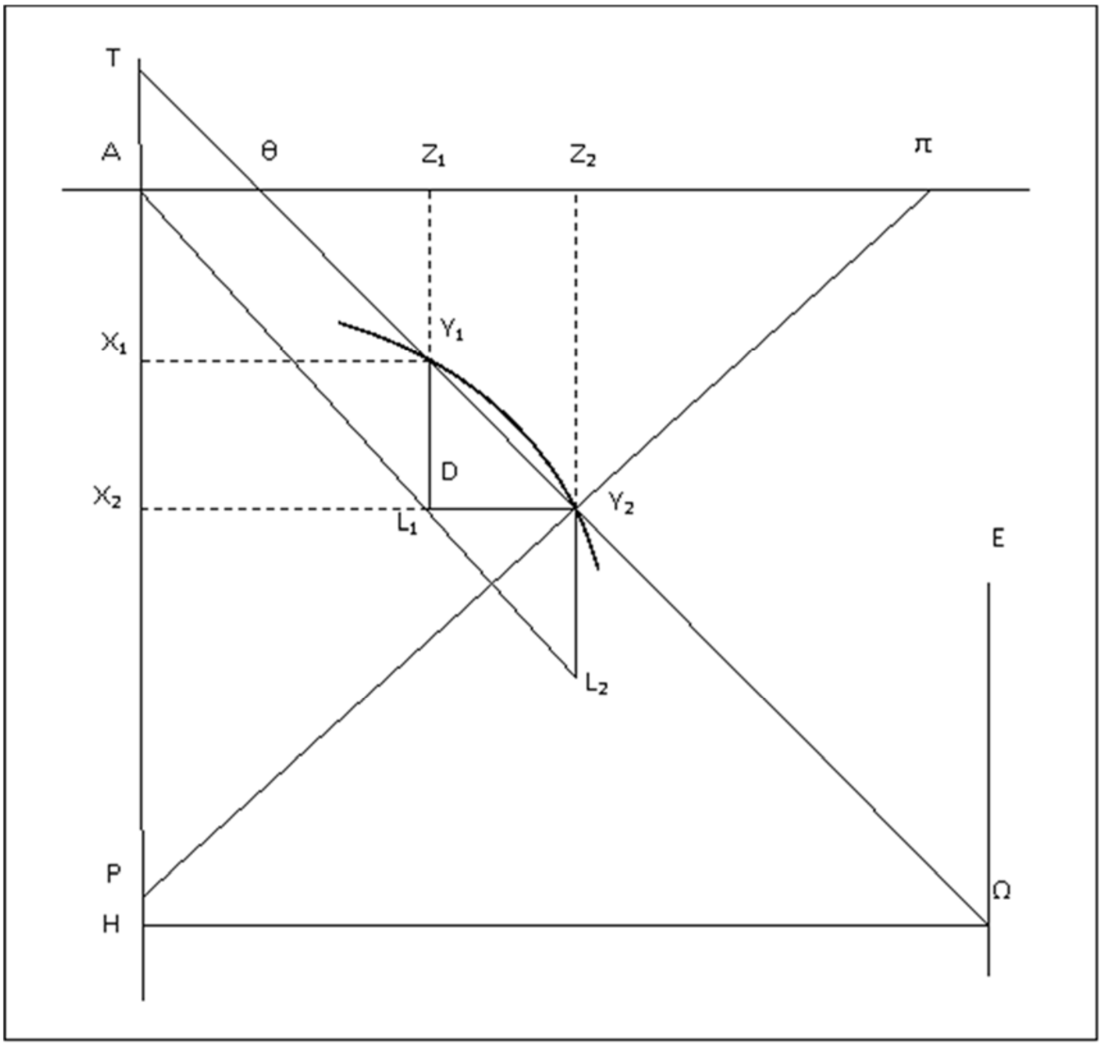
> *Pero vuelto de Inglaterra a la Galia en el año del señor de 1673 (…) empezó a instancias a Huygens a tratar el análisis de Descartes —antes apenas saludado desde lejos—, y por introducirse en la geometría de las cuadraturas consultó la* ***Synopsis Geometriae*** *de Honorato Fabri, Gregorio de Saint Vicent, y un librito de Dettonville —esto es, de Pascal—. Más adelante, de un cierto ejemplo de Detonville despuntó de súbito la luz que el propio Pascal, cosa admirable, no sacara de él. Pues cuando demuestra el teorema de Arquímedes de la superficie de una esfera, o partes suyas a medir, usa un método por el que la superficie toda de un sólido descrito por rotación en torno a un eje puede reducires a una figura plana equivalente.*
> [L. págs. 243-244. Resaltado en el original.]

Leibniz reiteró en varias ocasiones la importancia del triángulo de Pascal en su inspiración de lo que luego él llamaría triángulo característico. Puede consultarse para ello la nota 15 de Antonio J. Durán en la página 244.

> *El triángulo característico es un triángulo rectángulo infinitesimal cuya hipotenusa es la propia curva —o la tangente a la curva— y los catetos son las diferencias de abcisas dx y ordenadas dy, respectivamente. El identificar a nivel infinitesimal un trozo de curva con la tangente a la curva muestra cabalmente la forma de entender las curvas que se tenía, en general, en aquella época —sobre todo en el continente—. Según expuso Leibniz en su primer artículo sobre el cálculo (1684): "Trazar la recta que una dos puntos de una curva que estén a distancia infinitamente pequeña o el lado prolongado de un polígono de un polígono de infinitos ángulos, que para nosotros equivale a la curva".* [L. pág. 245, nota 16.]

El artículo a que se refiere el comentador es *Nova Methodus pro maximis et minimis, itimque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, escrito III-5, *Nuevo Método para los Máximos y los Mínimos*, págs. 311-320, *G.W. Leibniz. Obras filosóficas y científicas. Escritos matemáticos*, volumen 7A, editora Mary sol de Mora Charles, Comares (2014).

> *Animado nuestro autor por esto, y advertida la fecundidad de estas meditaciones, cuando antes hubiese considerado los infinitamente pequeños tan sólo como intervalos de ordenadas a la manera de Cavalieri, discurrió el triángulo característico Y_1DY_2.*
> [L. págs. 244-245.]



[L. pág. 246.]

El procedimiento general para demostrar el teorema central del cálculo, que se particularizará luego al caso interesantísimo de la cuadratura del círculo, consiste en primer lugar, en establecer relaciones entre triángulos similares que involucren al triángulo característico, dentro de un espacio geométrico.

> *Y para este triángulo, vale que sea indefinido o infinitamente pequeño, siempre podían aparecer triángulos similares definidos. Sean en efecto AXX, AZZ rectas formando ángulo recto entre sí; coabcisas, AX_1, AX_2; coordenadas,Y_1Z, Y_2Z;tangente $T\theta Y$; subtangentes, $XT, Z\theta$; subnormales, $XP, Z\Pi$, y llévese luego EF paralela al eje AX; y concurra con ella la tangente TY en Ω, de donde se traza ΩH normal al eje y se harán así los triángulos similares* [L. págs. 245-246. He cambiado ligerísimamente la notación.]

$$Y_1DY_2 \sim TXY \sim YZ\theta \sim TA\theta \sim YXP \sim \Pi ZY \sim \Pi AP \sim TH\Omega$$

Tenemos así:

$$Y_1DY_2 \sim Y_2X_2P \Rightarrow \frac{Y_1Y_2}{Y_1D} = \frac{PY_2}{Y_2X_2} \Rightarrow PY_2 \cdot Y_1D = Y_2X_2 \cdot Y_1Y_2$$

> *Esto es, la aplicada de PY_2 en Y_1D, o el elemento del ejeX_1X_2, igualan a las ordenadas Y_2X_2 llevadas a elemento de la curva Y_1Y_2, esto es al momento del elemento de la curva sobre el eje. De dónde se obtendrá todo el momento de la curva por suma de las aplicadas al eje.*
> [L. pág. 246.]

Es decir, la integral: $\int ydx$. Por otra parte, tomando

$$Y_1DY_2 \sim \mathrm{TH}\Omega \Rightarrow \frac{Y_1Y_2}{Y_2D} = \frac{T\Omega}{\Omega H} \Rightarrow \ \Omega H \cdot Y_1Y_2 = T\Omega \cdot Y_2D$$

> *Esto es, la constante ΩH llevada al elemento de la curva Y_1Y_2 iguala a $T\Omega$ llevada a Y_2D, o al elemento de coabcisa Z_1Z_2. Y de aquí que la figura plana nacida por su orden según la normal a AZ en ZZ iguala al rectángulo contenido bajo la curva <u>rectificada</u> y la constante ΩH.*
> [L. pág. 246. Subrayado nuestro.]

Aquí se habla de constante, porque la demostración está suponiendo una integral definida. Aunque para cada X_i la tangente desde T supondrá un nuevo punto de la curva rectificada. Tomando de nuevo la primera pareja de triángulos similares, pero estableciendo una proporción distinta tenemos

$$Y_1DY_2 \sim Y_2X_2P \Rightarrow \frac{Y_1D}{Y_2D} = \frac{Y_2X_2}{X_2P} \Rightarrow X_2P \cdot Y_1D = Y_2X_2 \cdot Y_2D$$

> *Es decir, las <u>subnormales</u> X_2P aplicadas por su orden al eje, esto es, a Y_1D o X_1X_2, igualan a la suma de productos de las ordenadas Y_2X_2 multiplicadas por su elemento Y_2D tomadas por su orden. Más rectas continuamente crecientes desde cero, multiplicadas cada cual por su elemento conforman un triángulo. Sea pues AZ siempre igual a ZL, y se hará el triángulo rectángulo AZL, que es mitad del cuadrado en AZ, y así la figura nacida de las <u>subnormales</u> aplicadas al eje por su orden y en perpendicular igualará siempre la mitad del cuadrado de las ordenadas.*
> [L. págs. 246-247. Subrayado nuestro.]

Para cuadrar la figura a través de una cierta curva rectificada, por determinar, obliga a apelar a las subnormales, lo que duplica el valor de la integral de la función de partida, sobre todo el dominio y el recorrido de variación de la integral definida. Este proceso se realiza, repito, punto a punto como indica la figura En definitiva:

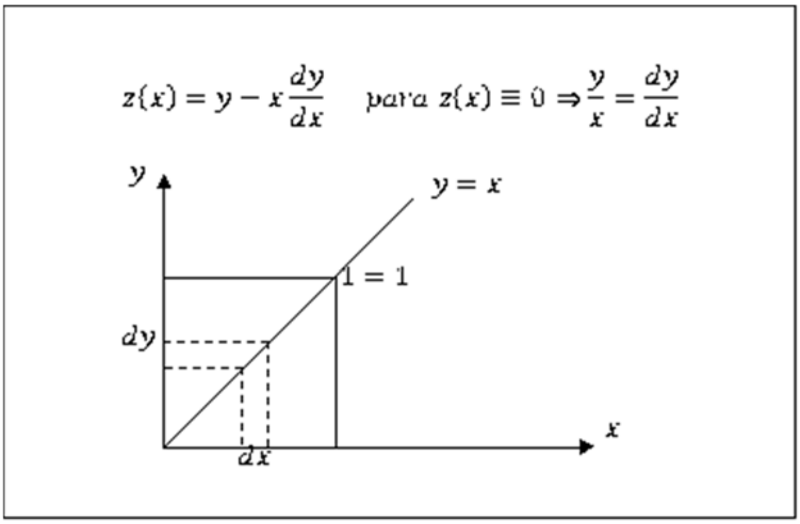
$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2}\left\{(b-a)[y(b)-y(a)] + \int_a^b z dx\right\}$$

¿Pero cuál debe ser la función rectificada o cuadratiz?

> *Y por ende, dada una figura a cuadrar, búsquese la figura cuyas subnormales igualen respectivamente a las ordenadas de la figura dada, y ésta será la cuadratiz de aquella dada.* [L. pág. 247.]

Esto significa un cuadrado para cada punto, y por tanto su diferencia debe construir la cuadratura ideal. Vemos de nuevo como la suma está ligada de algún modo a una diferencia.

$$\frac{y-z}{x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow z = y - x\frac{dy}{dx}$$



Veamos que esto es consistente sustituyendo la expresión de la cuadratiz:

$$\frac{(b-a)[y(b)-y(a)]}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx$$

Desarrollado el segundo sumando.

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{1}{2}\int_a^b y dx - \frac{1}{2}\int_a^b x\frac{dy}{dx} dx =$$

Integrando por partes el segundo sumando, con $u = x$ y $dv = \frac{dy}{dx}dx$, tenemos que $du = dx$ y $v = y$.

$$\frac{1}{2}\int_a^b y dx - \frac{(b-a)[y(b)-y(a)]}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b y dx$$

Sustituyendo obtenemos lo buscado

$$\frac{(b-a)[y(b)-y(a)]}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)dx=\int_a^b ydx$$

Ahora bien el análisis de la cuadratura o integración se ha hecho a partir de un análisis del triángulo característico, y por tanto, referido a la derivada. Dejando de lado el interés práctico del cálculo integral para la determinación de volúmenes entre otras cosas, esto condujo a Leibniz a la formulación del teorema central del cálculo.

> *Y así, de esta facilísima meditación tenemos reducidas a cuadraturas planas las superficies generadas por rotación, y rectificadas las curvas, y simultáneamente reducimos las cuadraturas de esas figuras a problema inverso de tangentes.* [L. pág. 247.]

Para los detalles técnicos Antonio J. Durán nos remite en su nota 17 a: *Leibniz, G* (1987): *Análisis infinitesimal*, con un estudio preliminar de Javier de Lorenzo, Tecnos, Madrid; y a *The historical development of the calculus*, Edwards C.H. (1979) Springer-Verlag, Nueva York.

Hay que tener en cuenta que el concepto de función no está establecido completamente, y que todavía no se asocia una función a un espacio de coordenadas estrictamente cartesianas o de otro tipo. Por eso, me parece, se ve obligado al uso de una curva rectificada, lo que aumenta innecesariamente el número de variables en juego. Esto quizás se vea más claro en este planteamiento general del problema del cálculo.

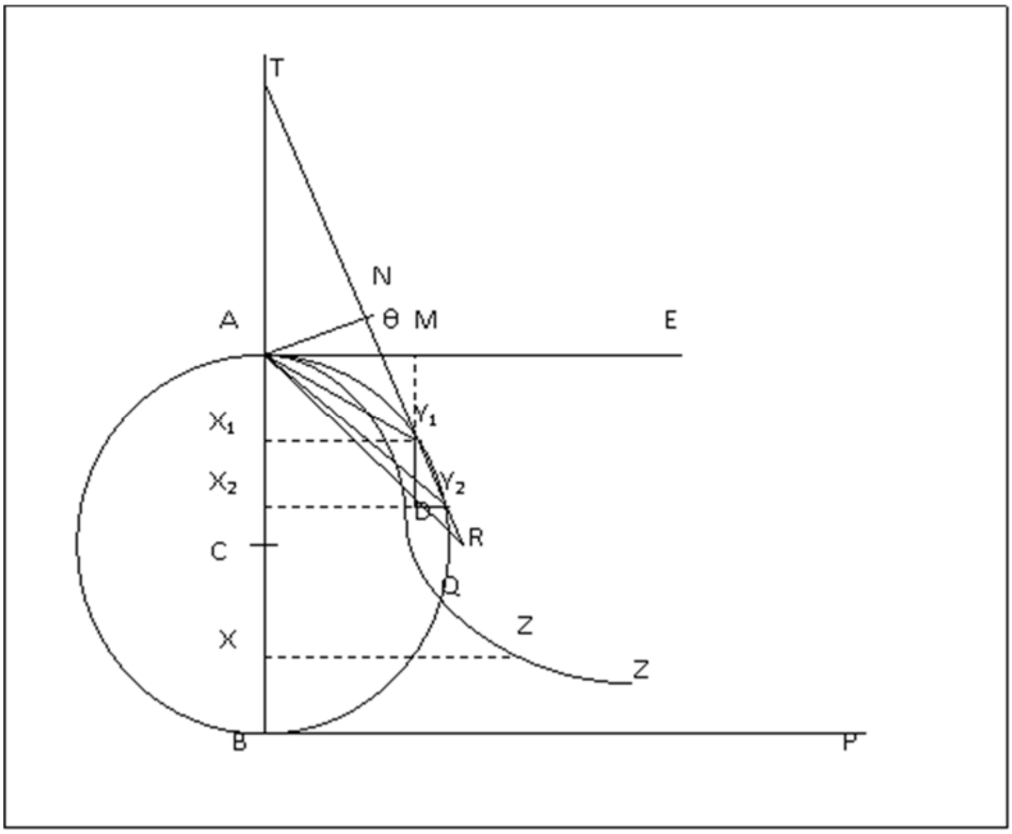
> *Sean la ordenada x, la abcisa y, el intervalo entre perpendicular y ordenada, como dijimos, sea p, mi método establece inmediatamente que es $pdy = xdx$, como ya lo observa el señor Craig; esta ecuación diferencial una vez convertida en sumatriz será $\int pdy = \int xdx$. Pero de aquí, según mostré en mi método de tangentes, se evidencia que es $d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = xdx$; luego recíprocamente,*
>
> $$\frac{1}{2}x^2=\int xdx$$
>
> *(pues como las potencias y raíces en el cálculo ordinario, así en el mío sumas y diferencias, o sea $\int$ y d, son recíprocas). Luego tenemos $\int pdy = \frac{1}{2}x^2$ como queríamos demostrar. Pues prefiero utilizar dx y otros semejantes, antes que otras letras, porque dx es una modificación del mismo x.* (11)

No quiero dejar pasar la ocasión, que aún a pesar de ello, el cálculo de derivadas fue establecido de manera muy clara por Leibniz al referirlo a las operaciones aritméticas usuales, así como su utilidad para el estudio de variación de las funciones, máximos, mínimos, puntos de inflexión.

> *Sea* a *una cantidad dada constante, entonces* da *sería igual a* 0, $d\overline{ax}$ *sería igual a* adx. *(…) Ahora la ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN: si fuera* $z - y + w + x$ *igual a* v, *sería* $d\overline{z - y + w + x}$, *o sea,* dv, *igual a* $dz - dy + dw + dx$. *MULTIPLICACIÓN:* $d\overline{xv}$ *igual a* $xdv + vdx$ *(…) Por otra parte, la DIVISIÓN:* $d\frac{v}{y}$ *(…) es igual a* $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$. *Con respecto a los Signos, se debe tener bien en cuenta que cuando en el cálculo se sustituye por la letra más simple, su diferencial, se conserva su signo, cualquiera que éste sea (…) POTENCIAS:* $dx^a = a \cdot x^{a-1}dx$ *(…) RAÍCES:* $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$ *(…) en ese momento las* v *ni crecen ni decrecen, sino que están estacionarias, y por lo tanto será* $dv = 0$, *en dónde nada importa si la cantidad es de signo positivo o negativo, puesto que* $+0$ *es igual a* -0; *y en ese punto la propia* v *(…) es MÁXIMA (o bien si se invierte la convexidad del arco, mínima).*
> *(…)*
> *Esto permite que, propuesta cualquier ecuación, se pueda escribir su ecuación diferencial (…); así pues es evidente que nuestro método se extiende hasta las líneas trascendentes, las cuales no pueden reducirse al cálculo algebraico, o sea que no son de ningún grado dado, y ello de un modo universalísimo.* (12)

Ahora pasa Leibniz a explicar la cuadratura del círculo, aplicando los resultados anteriores a uno de sus primeros estudios (13) para poner de manifiesto, me parece, las ventajas del nuevo cálculo. Sería muy interesante abordar ese estudio mucho más detallado de lo que presenta aquí. Aquí Leibniz lo que pretende es además mostrar la potencia generalizadora de las nuevas ideas aplicadas a un caso concreto.

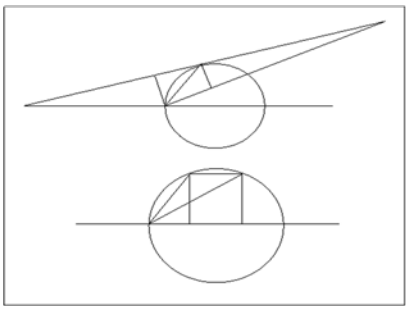
> *Solían los geómetras resolver figuras en rectángulos mediante paralelas tendidas por su orden; ofrecida por azar la ocasión, él mismo las resolvió en triángulos mediante rectas concurrentes en un punto, y alcanzó a ver de qué modo pudiera deducirse con comodidad algo nuevo.*
> [L. pág. 248.]



[L. pág. 248.]

Sea la línea AYR, tiéndase rectas AY cuantas plazca, tiéndase un eje cualquiera AC, y la normal a éste, o coaxial, AE, y corte a uno y otra en T y θ la tangente en Y a esa curva. Llévese hasta ella desde A la normal AN, y es manifiesto que el triángulo de elementos AY_1Y_2 es igual a la mitad del rectángulo comprendido bajo la curva Y_1Y_2 y la misma AN.
[L. págs. 248-249.]

Ahora se abordan propiedades geométricas de la circunferencia. Con respecto primero a la normal AN y segundo con respecto al rectángulo generado por el arco asociado a la tangente Y_1Y_2.



Una vez establecidas las particularidades geométricas de la circunferencia que permiten una construcción análoga a la del teorema central del cálculo, procede a buscar los triángulos similares con respecto al triángulo característico y sacar las proporciones adecuadas.

$$Y_1DY_2 \sim AN\theta \Rightarrow \frac{Y_1Y_2}{Y_1D} = \frac{A\theta}{AN} \Rightarrow Y_1D \cdot A\theta = AN \cdot Y_1Y_2$$

pero $Y_1D = X_1X_2$, y por tanto, $X_1X_2 \cdot A\theta = 2 \cdot \widehat{AY_1Y_2}$.

> *Y de esta suerte, si se entiende cualquier $A\theta$ trasladado a XY extendiéndolo si es menester de modo que se tome en él AZ, de ahí se hará la figura trilineal $AXZA$, igual al doble del segmento $A\widehat{YA}$ comprendido entre la recta AY y el arco $\widehat{AY}$. Y se obtienen las que llaman figuras de segmentos, o proporcionales de los segmentos.*
> *(…)*
> *Basta a nuestro examen considerar figuras de segmentos, y sólo en el círculo, donde si se pone el punto A en el inicio del primer cuadrante AYQ, la curva $AZQZ$ cortará al círculo en el final del cuadrante Q, y descendiendo de ahí será asíntota a la base BP —normal al diámetro en el otro extremo B—; y no obstante la figura toda, de longitud infinita, comprendida entre el diámetro AB, la base BP, etc., y la curva $AZQZ$, asíntota a la base, será igual al círculo en torno al diámetro AB. Más por venir al asunto, puesto por radio la unidad: por AX o θZ, x; y por $A\theta$ o AZ, z se hará*
>
> $$x = \frac{2z^2}{1+z^2}$$
>
> *ahora bien, la suma de las x aplicadas $A\theta$, o como hoy se dice*
>
> $$\int xdz$$
>
> *es la figura trilineal $A\theta ZA$, complemento de la figura trilineal $AXZA$ que ya demostramos igual al doble del segmento circular.*
> [L. págs. 249-250. Hay un ligerísimo cambio de notación.]

Se parte de la ecuación de una semicircunferencia:

$$y(x) = \sqrt{2x - x^2}$$

Se calcula entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{y}$$

La cuadratiz será:

$$z(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Rightarrow x(z) = \frac{2z}{1+z^2}$$

Teniendo en cuenta la simetría:

$$\int z dx = -\int x dz$$

Entonces

$$\int_0^z y dx = \frac{(1-0)(2z-0)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{2z^2}{1+z^2} dz$$

Pero haciendo la división larga e integrando el segundo sumando:

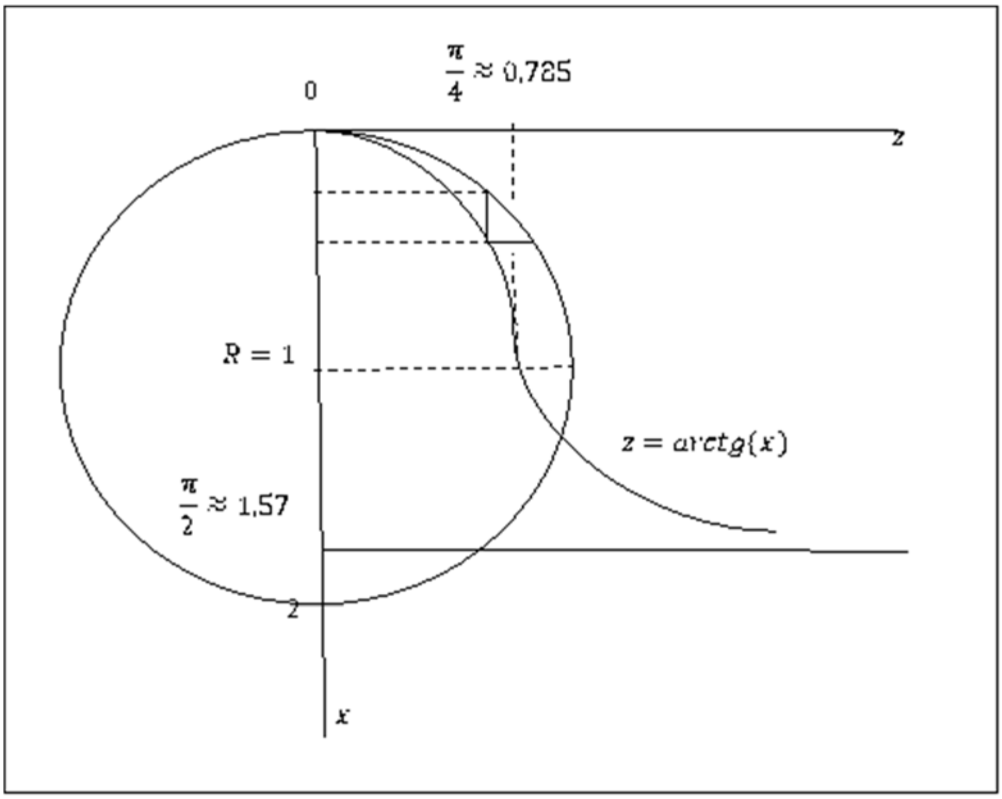
$$\frac{-1}{2}\int_0^z \frac{2z^2}{1+z^2} dz = -\int_0^z \{z^2 - z^4 + z^6 - z^8 +\} dz = -\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}$$

Ahora bien para $z = 1$

$$\int_0^1 y dx = \frac{\pi}{4}$$

Con lo que se obtiene la famosa fórmula de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$



De lo anterior aparecía inmediatamente que con el método por que Nicolás Mercator dedujera mediante serie infinita el tetragonismo [cuadratura] *aritmético de la hipérbola daríase también el del círculo, suprimida la asimetría y dividiendo por* $1 + zz$ *como dividiera aquél por* $1 + z$. [L. pág. 251.]

Esta referencia a Mercator tiene un gran interés para la historiografía de las matemáticas y para la constitución del propio dominio de las matemáticas.

El nombre de Leibniz ha quedado asociado también a la serie infinita

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

cuya suma constituyó uno de sus primeros descubrimientos matemáticos. Esta serie, que aparece en su cuadratura del círculo, es sólo un caso particular del desarrollo del arco tangente que había sido desarrollado anteriormente por Gregory.

(…)

En 1668 Gregory publicó dos libros, en los que reunía resultados procedentes de Francia, Italia, Holanda e Inglaterra, así como descubrimientos originales suyos.

(…)

Gregory pudo haber aprendido en Italia que el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$*, desde* $x = 0$ *hasta* $x = x$*, es igual al* $arctg(x)$*; ahora bien, una simple "división larga" transforma* $\frac{1}{1+x^2}$ *en la serie* $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$*, y por lo tanto, aplicando la fórmula de Cavalieri* $\left[\text{en notación actual } \int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}\right]$ *se obtiene inmediatamente el resultado*

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Resultado que aún se conoce hoy con el nombre de "serie de Gregory"

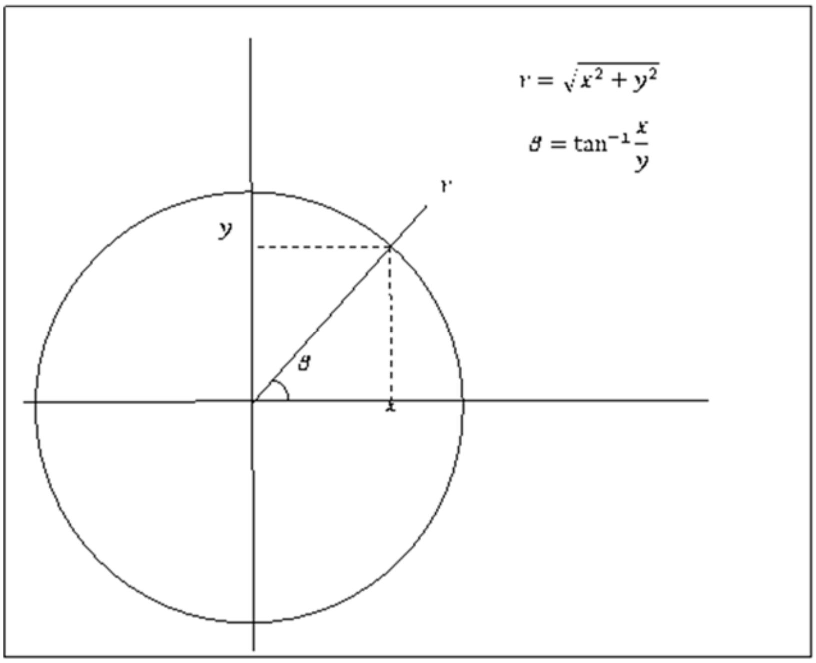
(…)

Se sabía ya, gracias a la obra de Gregory de St. Vincent, que el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$*, desde* $x = 0$ *a* $x = x$*, es igual a* $Ln(1 + x)$*. Por lo tanto, utilizando el mismo método de Gregory de la división larga, seguida de integración término a término, tenemos*

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = Ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Mercator tomó de Mengoli el nombre de "logaritmos naturales" para los valores que se obtienen de esta serie. Aunque la serie lleve el nombre de Mercator, parece que la conocían ya antes que él tanto Hudde como Newton, pero no la publicaron. (14)



A continuación de esta referencia a Mercator, Leibniz establece una generalización sobre ciertas propiedades de las cónicas.

Y de allí a poco, nuestro autor dio con un teorema general para el área de figuras cónicas dotadas de centro. Pues en verdad el sector comprendido por el arco de una sección cónica que arranca del vértice y dos rectas llevadas desde el centro a sus extremos es igual al rectángulo contenido bajo el semieje transversal y una recta

$$t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7\ etc.$$

supuesto ser t aquella porción de la tangente en el vértice interceptada entre éste y la tangente en el otro extremo del arco, y ser unidad el cuadrado en el semieje conjugado o el rectángulo contenido por las mitades de los ejes recto y transverso, y significar $\pm$ en la hipérbola $+$, pero $-$ en círculo y elipse. [L. pág. 251.]

Con esto llegamos a la parte cinco, según nuestro análisis, en el que Leibniz una vez ha mostrado la potencia del cálculo, procede a una recapitulación, mostrando ciertos problemas abiertos, para, en la sexta parte, proponer una fundamentación del mismo, a través de una investigación sobre la notación más adecuada para este cálculo.

> *En adelante se ha de exponer ya cómo viniera paulatinamente nuestro autor a un nuevo género de notación que llamó cálculo diferencial.*
> [L. pág. 253.]

Sería conveniente antes de entrar en esta parte, hacer una consideración, más allá de las polémicas y rencillas, como Leibniz era muy consciente de que el desarrollo de las matemáticas, y a pesar del gran valor que otorgaba a sus hallazgos, es fundamentalmente un trabajo colectivo.

> *Para terminar, sin que parezca atribuirme nada ni detraérselo a otros, diré brevemente lo que deben mis propuestas a los matemáticos insignes de nuestro siglo en este género de Geometría. En primer lugar Galileo y Cavalieri comenzaron a descubrir las intrincadísimas artes de Conón y Arquímedes. Pero la* ***Geometría de los Indivisibles*** *de Cavalieri, sólo fue la infancia de una ciencia que renacía. De mayor audacia fueron los célebres triunvirus, Fermat con su invento del método de máximos y mínimos, Descartes mostrando la forma de poner en ecuaciones las curvas de la Geometría ordinaria (excluyendo las trascencentes), y el Padre Grégoire de Saint Vincent con sus muchas y brillantes invenciones. A los cuales añado la notable regla de Guldin sobre el movimiento del centro de gravedad. Pero estos hombres se habían atrincherado dentro de ciertos límites, y los que los atravesaron, añadiendo nuevas áreas, fueron los ilustres geómetras Huygens y Wallis. Pues es muy probable que Heurat encontrase en los escritos de Huygens, y Neile y Wren, los primeros que establecieron la igualdad entre curvas y rectas, en los de Wallis, la ocasión de sus magníficos descubrimientos, lo cual no obstante nada resta a la alabanza de sus meritorias invenciones. A estos les siguieron el escocés James Gregory y el inglés Isaac Barrow, cuyos preclaros teoremas en este dominio han multiplicado maravillosamente nuestros conocimientos. Entretanto, Nicolas Mercator de Holstein, el más eminente de los matemáticos, fue el primero, que yo sepa, en realizar una cuadratura por una serie infinita. Pero el profundísimo ingenio del geómetra Isaac Newton no sólo alcanzó este mismo invento con sus propias fuerzas, sino que lo llevó a cabo mediante un razonamiento universal y, si publicase sus reflexiones, que por lo que yo sé se amontonan en él, sin duda nos abrirían nuevas perspectivas para incrementar y compendiar las ciencias.* (15)

Habla ahora Leibniz de manera directa de la suma de series.

> *Ya en el año d.S. de 1672, conversando acerca de las propiedades de los números, había propuesto Huygens este problema: dar con la suma de una serie decreciente de fracciones cuyos numeradores sean*

> *unidades, los denominadores, empero, números triangulares, con cuya suma decía haber dado confrontando papeles con los de Hudde acerca la estimación de la probabilidad. Halló nuestro autor ser tal suma 2, coincidente con la proposición de Huygens.* [L. págs. 253-254.]

Confronta luego el triángulo aritmético de Pascal, cuya serie fundamental es la serie armónica: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, que vimos anteriormente, con el triángulo armónico cuya serie es la progresión armónica: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

> *Como viera más tarde el triángulo aritmético de Pascal, concertó a tal ejemplo su triángulo armónico.* [L. pág. 254.]

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

[L. pág. 254.]

Establece primero la ley general de paso de una a la otra, estableciendo una propiedad de los dos triángulos así generados.

> *Si los denominadores de cualquier serie que descienda oblicuamente hacia infinito, y también de cualesquiera series finitas paralelas, divídense por un denominador que sea el término correspondiente de la serie primera, prodúcense números combinatorios idénticos a aquellos que se tienen en el triángulo aritmético. Uno y otro triángulo es común esto, que las series oblicuas son sumatrices o diferenciales una de otra. En el triángulo aritmético la serie dada es sumatriz de la próxima precedente, y diferencial de la próxima siguiente; y en el triángulo armónico, por el contrario, la serie dada es sumatoria de la próxima siguiente y diferencial de la próxima antecedente.* [L. pág. 255.]

Refiriéndose luego al triángulo de Pascal, cuyas filas son los correspondientes coeficientes del binomio de Newton, establece la ley de la suma de los inversos de los términos de sus lados diagonales del triángulo aritmético.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ etc.=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\ etc.=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\ etc.=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\ etc.=\frac{4}{3}$$

[L. pág. 255.]

La segunda fila es el problema propuesto por Huygens.

Comenta luego la importancia de Descartes, que supone en definitiva para Leibniz el camino hacia el cálculo diferencial, y según nuestro criterio la necesidad del concepto de función. Así para sumar la serie asociada a una sucesión, el primer paso imprescindible es conocer la ley general de dicha sucesión, y después el de la suma de un número finito de términos de dicha sucesión, que transforma la serie en una sucesión de sumas consecutivas. Es importante, por tanto, distinguir entre sucesión y la serie asociada, aunque Leibniz hable de serie y suma de la serie.

$$sucesión\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$$
$$serie\ como\ suma\ de\ los\ términos\ de\ la\ sucesión\ S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$sucesión\ asociada\ a\ la\ serie\ \{S_n\}_{n=1}^{\infty} = S_1, S_2, S_3, \dots S_n \dots$$

Aquí también es importante distinguir entre las series de un número finito de términos, que siempre son convergentes, de las que tienen un número infinito —al que se aplica normalmente el nombre serie, en tanto que distinto de suma, aunque a veces sea muy útil calcular su ley—, que la mayoría de las veces son divergentes o no sumables.

> *Y nuestro autor ya tenía en su haber estas cosas cuando aún no estaba versado en análisis cartesiano; más, como se aplicara a éste, consideró poder designarse un término de la serie la mayor parte de las veces por alguna notación general, por la cual quedara referido a alguna serie simple.* [L. pág. 255.]

Referido al triángulo aritmético.

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots x \dots$$
$$0, 1, 3, 6, 10, \dots \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} \dots$$

$$0, 4, 10, 20, \dots \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$
$$y \text{ así } sucesivamente.$$

[L. pág. 255. Cambiando ligeramente la notación.]

Desde aquí es de dónde arrancó el cálculo diferencial de Leibniz.

> *Y consideró asimismo poderse a venir de aquí a dar por cálculo general con la serie diferencial de una serie dada, y* <u>*de cuando en cuando*</u> *también con la sumatoria, cuando esté expresada numéricamente.*
> [L. págs. 255-256. Subrayado nuestro.]

Pone un ejemplo.

> Por dar un ejemplo, el cuadrado es xx, el próximo cuadrado mayor, $xx + 2x + 1$, la diferencia entre ellos, $2x + 1$, esto es, la serie de los números impares es la serie diferencial de los cuadrados. Pues si x fuera $0, 1, 2, 3, 4, etc.$, $2x + 1$ son $1, 3, 5, 7, 9$.
> [L. pág. 256.]

Trata luego de generalizar el resultado.

> *Siguiendo adelante, si el valor del término de la serie propuesta puede expresarse así por la variable x, de suerte que no entre la variable ni el denominador ni en exponente alguno, parecía poder hallarse siempre la serie sumatriz de la dada.* [L. pág. 256.]

Lo aplica al caso concreto de la sumatriz finita de los cuadrados. Supone entonces:

$$\sum x^2 = lx^3 + mx^2 + nx = z$$

La idea es expresar la sumatriz como una diferencia: $dz = x^2$. Aplica entonces el concepto de diferencial de una sucesión, y la linealidad de la misma.

$$dz = ld(x^3) + md(x^2) + nd(x)$$
$$d(x) = x + 1 - x = 1$$
$$d(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$
$$d(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Sustituyendo e igualando coeficientes.

$$en\ x^2{:}\ 3l = 1$$
$$en\ x{:}\ 3l + 2m = 0$$
$$ctes.{:}\ l + m + n = 0$$

De aquí se obtienen los valores: $l = \frac{1}{3}; m = -\frac{1}{2}; y\ n = \frac{1}{6}$. Por lo que se obtiene:

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

Inmediatamente lo particulariza para unos valores concretos.

> *A modo de ejemplo, si alguno quisiera la suma de los nueve o diez primeros cuadrados, de* 1 *a hasta* 81 *o de* 1 *hasta* 100*, asuma ser* x 10 *u* 11*, el número próximo mayor a la raíz del último cuadrado, y* $(2x^3 - 3x^2 + x)/6$ *será* $(2000 - 300 + 1)\frac{1}{6} = 285$*, o (*$21.331 - 3.121 + 11)\frac{1}{6} = 385$*. Y no es mucho más difícil sumar por este atajo cien o mil cuadrados.* [L. pág. 256. Ligerísima modificación en la notación.]

Pero aquí es donde aparecen los problemas.

> *Y el mismo método procede con cualesquiera potencias aritméticas, o en fórmulas que dellas se componen, que es fácil ver podrán sumarse siempre cuantos quiera términos de tal serie por esta atajo. Mas nuestro autor veía sin dificultad no ser siempre procedente, que entre la variable* x *en el denominador, fácil se entiende no poder hallarse entonces la serie numérica; prosiguiendo, ello no obstante, con este análisis, vino a dar que en general, y así lo mostró también en las Actas de los Eruditos de Leipzig, puede siempre darse con serie sumatriz o reducirse la cuestión a sumar cierto número de simples términos fraccionarios, como* $1/_{x}$*, ó* $1/_{xx}$*, ó* $1/_{x^3}$*, etc. que pueden sumarse, puesto un número finito de términos, más no siempre con brevedad bastante; y si se tratare de un número infinito de términos, no podrán en absoluto sumarse términos cual* $1/_{x}$*, porque el total de serie con tal número infinito de términos es cantidad infinita, pero términos cual* $1/_{xx}$ *ó* $1/_{x^3}$ *o en número infinito, aun si juntos hacen una cantidad finita, pese a ello no pueden sumarse hasta el presente, de no suponerse cuadraturas.* [L. págs. 256-257.]

Es muy interesante el comentario que hace Antonio J. Durán a este texto en su nota 24, en el que nos vamos a detener, porque a partir de él vamos a calibrar el proceso constructivo del dominio de las matemáticas a partir de la resolución de ciertos problemas. Además nos servirá para mostrar la importancia de Euler en esta línea de desarrollo.

> *Toda esta información sobre sumas de un número finito e infinito de términos de una serie corresponde al intercambio epistolar que Leibniz mantuvo con Olderburg —e, indirectamente con Collins— en 1673 y del que ya se dio noticia en el estudio preliminar. Sí añadiré aquí un*

> *comentario sobre las series $\sum \frac{1}{x}, \sum \frac{1}{x^2}, \sum \frac{1}{x^3}$. Una vez Leibniz logró sumar la serie $\sum \frac{1}{x(x+1)}$, su optimismo a ultranza le hizo pensar que su método le iba a permitir sumar casi cualquier otra serie. Pronto recibió de Inglaterra una propuesta de Collins, enviada por Olderburg, proponiéndole el problema de la suma de estas series. A pesar del parecido de estas series $\sum \frac{1}{x(x+1)}$, y $\sum \frac{1}{x^2}$, el problema de calcular su suma difiere bastante: la primera se puede sumar* ***elementalmente*** *usando el artificio leibniciano de convertir cada término en diferencia de otros dos, mientras que la segunda necesita de ideas más profundas. Lo único que pudo hacer Leibniz —como dice arriba— fue establecer la divergencia de la serie $\sum \frac{1}{x}$ —cosa que ya había establecido muy elegantemente Pietro Mengoli en 1650, como Collins no dejó de recordarle—. El caso es que Leibniz intentó durante toda su vida sumar la serie $\sum \frac{1}{x^2}$, sin éxito. El problema lo heredaron los hermanos Bernoulli, que a su vez lo transmitieron a Leonard Euler quien, usando su genio y la magia de los infinitos, logró en 1736 encontrar que $\sum \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ —véase para más detalle, Euler, L. (2000): Introductio in Analysin Infinitorum, edición facsimilar y crítica con traducción al castellano de J. L. Arantegui y notas de Antonio J. Durán, Real Sociedad Matemática Española y SAEM Thales, Sevilla.* [L. pág. 257.]

La divergencia de la serie armónica es un problema de larga tradición matemática.

> *Mengoli* [1625-1686] *(…) redescubrió el resultado de Oresme* [¿1323?-1382], *obtenido asociando términos de que la serie armónica usual no es convergente, teorema que se suele atribuir a Jaques Bernoulli en 1689.* (16)

Veamos el planteamiento de Oresme.

> *Entre otras contribuciones de Oresme al estudio de las series numéricas infinitas está su bella demostración, y la primera de este tipo evidentemente en toda la historia de la matemática, de que la serie armónica es divergente: Oresme agrupó los sucesivos términos de la serie*
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$
>
> *colocando el primer término en el primer grupo, los dos términos siguientes en el segundo grupo, los cuatro términos siguientes en el*

> *tercer grupo, y así sucesivamente, de manera que el grupo m-$ésimo$ incluye 2^{m-1} términos de la serie. Entonces es obvio que tenemos infinitos grupos de términos y que la suma de los términos dentro de cada grupo es mayor o igual que $1/2$, y por lo tanto, sumando una cantidad suficiente de términos, en su orden, podemos superar cualquier número dado.* (17)

Precisando este planteamiento dado que tiene un gran interés. Dada la serie, los primeros términos de cada agrupamiento son:

$$1 \to \frac{1}{2}$$
$$2 \to \frac{1}{3}$$
$$3 \to \frac{1}{5}$$
$$4 \to \frac{1}{9}$$
$$\dots$$
$$n \to \frac{1}{2^{n-1}+1}$$

Por lo tanto la suma de cada agrupamiento es acotado inferiormente por:

$$\sum_{n=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n-1}+1} > \sum_{n=1}^{2^n} \frac{1}{2^n}$$

Esta última serie es una progresión geométrica de razón $1/2$, cuya suma de los n primeros términos vale

$$S_n = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2}$$

Por tanto, para cualquier número dado N tan grande como queramos, es suficiente coger $2N$ agrupamientos para que la suma de la serie sea mayor que él, y por tanto la serie es divergente.

Sin embargo, Leibniz percibía por simple inspección que la serie de los inversos de los cuadrados era sumable, es decir, convergente. ¿Pero cómo sumarla?

Euler parte de la conocida serie

$$sen\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

y considera la ecuación $sen\, z = 0$ *como una ecuación polinómica infinita*

$$0 = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

obtenida dividiendo por z*, eliminando así la raíz* $z = 0$*, o bien, reemplazando* z^2

por w*, la ecuación*

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \cdots$$

De la teoría de ecuaciones se sabe que, si el término constante es igual a 1, entonces la suma de los inversos de las raíces es igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo,

---

Supongamos un polinomio de grado n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con raíces $x_1, x_2 \ldots x_n$, por lo que podemos escribirlo como

$$x_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

Además suponemos que el término constante es 1 entonces

$$(-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n = 1 = a_0$$

El término de grado uno es

$$a_1 = (-1)^{n-1}[x_0 x_2 \ldots x_n + x_0 x_1 x_3 \ldots x_n + \cdots + x_0 x_1 \ldots x_{n-1}]$$

multiplicando y dividiendo por el término que falta en cada sumando y por -1 obtenemos

$$a_1 = -\left[\frac{(-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n}{x_1} + \frac{(-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n}{x_2} + \cdots + \frac{(-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n}{x_n}\right]$$

y sustituyendo el valor de a_0 obtenemos el resultado buscado

$$a_1 = -\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right]$$

---

en este caso $^1/_{3!}$*. Por otra parte, como las raíces de la ecuación en* z *son* $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$*, las raíces de la ecuación en* w *serán* $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$ *Por lo tanto,*

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots \quad \text{ó} \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Así pues, por medio de esta aplicación injustificada a polinomios de grado infinito de reglas válidas para el caso finito, consigue Euler un resultado correcto (…) La suma de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos parece datar de 1736. (…) Publicados en la ***Introductio*** *de 1748, incluidas las sumas de los inversos de las potencias $n-\acute{e}simas$ pares de los números naturales, desde $n = 2$ hasta $n = 26$. Las series de los inversos de las potencias impares son tan intratables que no se sabe aún hoy si la suma de los inversos de los cubos de los enteros positivos es o no un múltiplo racional de π^3 mientras que Euler sabía ya que, por ejemplo, para las potencias de exponente 26 la suma de los inversos es*

$$\frac{2^{24} \cdot 76.977.927 \cdot \pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 27}$$

(18)

Vemos que este tratamiento de Euler no es del todo sistemático. Un tratamiento más preciso se obtiene recurriendo al análisis complejo.

Teorema de sumación. Sea f analítica en $\mathbb{C}$ salvo un número de singularidades aisladas. Sea C_N un cuadrado con vértices en $\left(N + \frac{1}{2}\right) \times (\pm 1 \pm i), N = 1, 2, 3, \ldots$ Supongamos que

$$\int_{C_N} (\pi cotg(\pi z) f(z) dz \to 0 \ \ cuando\ N \to \infty$$

entonces tenemos la fórmula de sumación

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} (f(n) \ / \ n\ no\ es\ singularidad\ de\ f) = - \sum_{\substack{singularidades \\ de\ f(z)}} Res\{\pi \text{cotg}(\pi z) f(z)\}$$

Si ninguna de las singularidades de f son enteros, entonces el

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n)$$

existe, es finito y

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{\substack{singularidades \\ de\ f(z)}} Res\{\pi \text{cotg}(\pi z) f(z)\}$$

Proposición.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Aplicando el teorema de sumación con $f(z) = 1/z^2$. Ya que $tg(z)$ tiene un cero simple en $z = 0$, cotg(z) tiene un polo simple. Si el desarrollo de Laurent de

$$cotg(z) = \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

entonces

$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(\frac{b_1}{z}+a_0+a_1 z+\cdots\right)$$

multiplicando, agrupando términos y comparando coeficientes, encontramos que $b_1 = 1,\ a_0 = 0\ \ y\ \ a_1 = -1/3$. Entonces

$$\frac{\pi cotg(\pi z)}{z^2}=\frac{\pi(1/\pi z-\pi z/3+\cdots)}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{\pi^2}{z}\cdot\frac{1}{3}+\cdots$$

Por lo tanto

$$Res\left\{\frac{\pi cotg(\pi z)}{z^2},0\right\}=\frac{-\pi^2}{3}$$

como la única singularidad de f está en $z = 0$, la fórmula se sumación se convierte en

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{3}$$

y, como ${}^{1}/_{(-n)^2} = {}^{1}/_{n^2}$, obtenemos

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Para más detalles se puede consultar, por ejemplo, *Basic Complex Analysis*, Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman, W.H. Freeman and Company (1987), págs. 330-335, de donde esta copiada esta demostración y donde además viene la demostración del teorema.

Pero volviendo al texto de Leibniz, pone algún ejemplo en el que los términos del denominador se expresan como producto de dos, generados a partir de sus respectivos términos generales, y a partir de aquí construye nuevamente una diferencia, y de aquí calcula la suma. E incluso aventura una forma de empezar a tratar casos en el que la variable aparece como exponente. Pero al final hubo de concluir, que aunque existe cierta conexión entre el cálculo numérico y cálculo diferencial, los resultados no son extrapolables sin más.

> *Ahora bien, fácilmente advirtió nuestro autor ser el cálculo diferencial con figuras maravillosamente fácil frente al ejercicio con números, que no puede en las figuras compararse las diferencias con los diferentes.* [L. págs. 258-259.]

Aún más.

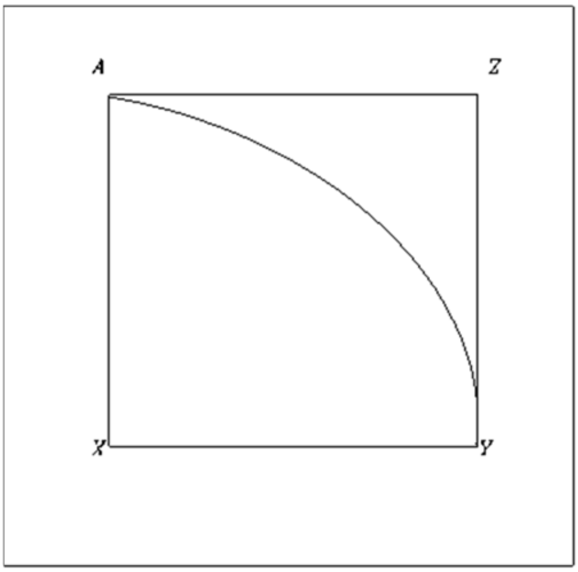
> *Observaba asimismo no ser las líneas infinitamente pequeñas que se dan en las figuras otra cosa sino diferencias momentáneas de las líneas variables. Y al modo en que las cantidades hasta ahora consideradas simplemente entre los analistas tuvieran sus funciones, a saber, potencias y raíces, tendrán así estas cantidades en cuanto variables nuevas funciones, a saber diferencias. Y como hubimos hasta ahora* $x, x^2, x^3, etc.$*,* $y, y^2, y^3, etc.$*, así también poderse emplear* $dx, d^2x, d^3x, etc.$*,* $dy, d^2y, d^3y, etc.$*, del mismo modo en que ya pueden expresarse por ecuaciones locales las curvas que Descartes excluyó de la geometría por cuanto mecánicas, y tratarse mediante cálculo, y liberarse el ánimo de su continua atención a las figuras.* [L. pág.259.]

Pero esto no supone romper el carácter dual aritmético geométrico de las matemáticas.

> *Pues siendo* $\sqrt{(dxdx + dydy)}$ *elemento de la curva y* ydx *elemento del área, ser mutuamente complementarias* $\int ydx$ *y* $\int xdy$ *se desprende al punto de que sea* $d(xy) = xdy + ydx$*, o viceversa,* $xy = \int xdy + \int ydx$*, aun cuando de tanto en tanto varíen los signos; y de que sea* $xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$ *también se echa de ver al punto tratarse de tres sólidos que son mutuo complemento. Y no es menester haber conocido ese teorema que hemos deducido arriba del triángulo característico, que para explicar verbigracia el momento de una curva*

> *basta $x\int\sqrt{dxdx+dydy}$. Y las cosas que tieneGregorio de Saint Vicent acerca de **ductus**, o aquellas de Pascal de uñas y cuñas, todas surgen al punto de tal cálculo.* [L. pág. 261.]

Como aplicación de esto Leibniz pone un ejemplo, en el que se manifiesta también la naturaleza del teorema central, y en el que además se ve muy bien como se está fraguando el concepto de función, y en como tal concepto refleja, de nuevo y a su modo, la naturaleza aritmético geométrica.



> *Por dar un ejemplo, el momento de la figura $AXYA$ respecto al eje AXes $\frac{1}{2}\int yydx$; respecto a la tangente a los vértices, $\int xydx$; el de la figura trilienal complementario $AZYA$ respecto a la misma tangente, $\frac{1}{2}\int xxdy$; pero estos dos últimos tomados juntos componen el momento del rectángulo circunscrito $AXYZ$ respecto a la tangente a los vértices, con que son mutuamente complemento, que es $\frac{1}{2}xxy$. Pero sin consideración alguna de la figura muestra eso mismo también el cálculo, pues $\frac{1}{2}d(xxy)=xydx+\frac{1}{2}xxdy$, de suerte que ya no es menester en la geometría arquimedeana de tantos de los teoremas preclaros de egregios varones, sino de aquellos solamente dados por Euclides en el libro 2 o en otras partes para la Geometría común.* [L. págs. 261-262.]

Concluye con una concepción general del cálculo diferencial, y por tanto, de la matemática, basada en una sencilla e interesantísima ecuación diferencial.

> *Para mayor pulcritud, resultó que alguna vez el cálculo de cantidades trascendentes lleva a ordinarias, que satisfacía a Huygens sobre todo.*

> *Como si se encontrare* $2\int\frac{dx}{x} = 3\int\frac{dy}{y}$*, con que será* $yy = x^3$*, por la naturaleza de los logaritmos combinada con el cálculo diferencial, derivada también ella de ese cálculo; sea en efecto* $x^m = y$*, hágase* $mx^{m-1}dx = dy$*, luego dividiendo ambos por igual será* $m\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$*; y lo mismo una vez más, de la ecuación* $m\log x = \log y$*, luego* $\log x{:}\log y = \int\frac{dx}{x}{:}\int\frac{dy}{y}$. [L. pág. 262.]

Porque ahora, la inconmensurabilidad de los irracionales, que suponían la ruptura de la racionalidad matemática griega, se ha convertido en su posibilidad de desarrollo.

CONCLUSIONES

Newton parte de la simbiosis de la geometría de Euclides, fundamentada de manera más profunda por Descartes, como espacio físico, con el plano del papel, en el que la variación matemática es un movimiento. De hecho, me parece, que el objetivo principal de las seis primeras proposiciones está encaminado a explicar esta trasformación del espacio físico tridimensional en un espacio plano. Leibniz, en cambio, partió de las propiedades de las sucesiones que se expresan como diferencias y que son fácilmente sumables, e intentó generalizar el resultado. Podríamos decir que Newton partía de un enfoque más geométrico y Leibniz de un enfoque más aritmético, pero, sin embargo, en la demostración del teorema central del cálculo, Newton se vio obligado a introducir una cantidad aritmética infinitesimalmente pequeña para establecer la identidad entre la relación o proporción entre las variables y entre las velocidades. De aquí la importancia del lema que precede a la demostración de la equivalencia entre las proposiciones 7ª y 8ª —teorema central del cálculo—, y sin el cual no se entiende el alcance matemático —la derivación— de la figura 1 que se reitera aproximadamente en la primera parte del teorema. Leibniz por el contrario necesitó recurrir al concepto geométrico de las subnormales para alcanzar la cuadratura —la integración— de una curva arbitraria a partir de las proporciones o relaciones de su triángulo característico. Así las adherencias filosóficas aunque pudieran generar desarrollos matemáticos distintos, la demostración del teorema central del cálculo borraba esas diferencias en las formulaciones equivalentes de Newton y Leibniz, al menos de momento, y suponían la determinación de una parte del dominio de las matemáticas como saber autónomo, en tanto que relacionaba la derivación con la integración.

A parte de esto, el interés del texto de Newton lo sitúo en el nacimiento de la mecánica newtoniana, ligado al desarrollo del cálculo infinitesimal, pero que acabaría de modo muy rápido, por obra del propio Newton, alcanzando la autonomía o delimitación de su campo a través de las famosas leyes de los *Principia.* En otro sentido, el interés del texto de Leibniz lo situaría, en que por partir de las operaciones con números enmarcado en un interés general por los lenguajes bien construidos alcanzó una notación mucho más rigurosa que es la que ha prevalecido finalmente. En este contexto se sitúa el interés que tuvo Leibniz por establecer la derivación de las operaciones aritméticas que la clarifican conceptualmente. En ambos casos, los textos nos llevan a momentos constituyentes de las matemáticas, el teorema central del cálculo, y por tanto, a la cuestión de la génesis y delimitación de los saberes en general, y de las ciencias en particular. Y al problema mucho más difícil de la consideración o no de las matemáticas como ciencia.

Dada la importancia y ubicuidad filosófica de la idea de relación —pueden consultarse las tres conferencias de Gustavo Bueno tituladas *Filosofía de las relaciones* en www.fgbueno.es/act/efo009.htm—, podemos usarla como índice para distinguir los saberes —y precisar esto supone sin ninguna exageración establecer un sistema filosófico completo— ya que cada saber establece en su dominio una clase particular de relaciones. (No voy a entrar en mi propuesta de que el dominio de las ciencias son campos y el de que cada sistema filosófico conforma un espacio propio. Esto ha ido apareciendo en el curso de la investigación más amplia mencionada al principio, aunque no he alcanzado una fundamentación adecuada de la misma.). Una vez hecho esto hay que estudiar los dominios particulares y buscar las configuraciones que los determinan hasta alcanzar la valoración completa de las ideas de ese dominio, campo o espacio. Me parece que las categorías fundamentales de los saberes principales no establecen ideas megáricas separadas entre sí, sino que cada saber, de modo indirecto nos conduce a una dimensión obligada de toda idea. Por ejemplo, en un automóvil, las relaciones que se establecen entre sus piezas hacen posible su finalidad como medio de transporte. Un automóvil es una máquina y pertenece por tanto a los saberes tecnológicos. Hablaríamos así de la industria del automóvil y en general de la ingeniería mecánica. Dimensión técnica de la idea. Por ejemplo, en un cuadro artístico, los elementos materiales del mismo, oleosos si utiliza esta técnica, se relacionan componiendo una imagen artística. El saber artístico, me parece que tiene un carácter completamente distinto del uso tecnológico de una máquina, y que se caracterizaría por su componente ritual en la contemplación, para este arte visual. Las obras de un autor conforma un estilo que junto con el de otros grandes artistas marca las grandes corrientes artísticas de cada época. Dimensión ritual. Por ejemplo, también, en la ciencia química, la relación entre productos y reactivos mediante sus coeficientes estequiométricos determinan este campo. Pero hoy en día creo que nadie duraría en afirmar que la química está completamente integrada en la física mediante la fundamentación mecánico cuántica de la tabla periódica. Dimensión científica. Las relaciones entre estos diversos dominios y campos pueden, y creo que deben, conformar un sistema filosófico, por ejemplo, el sustancialismo hilemórfico aristotélico, el materialismo filosófico… Dimensión teórica de segundo grado. Pues bien, las relaciones matemáticas se establecen mediante funciones caracterizando a este dominio. Dimensión teórica de primer grado. El interés del cálculo infinitesimal moderno es que hace inevitable la introducción de la idea de función matemática. Dicho de otro modo, la diferenciación y la integración, no dejan de ser la transformación de una función en otra. Además la función matemática mantiene la dualidad aritmético geométrica de Descartes, dada su formulación mediante las operaciones aritméticas y su conformación como lugar geométrico, estableciendo su naturaleza material. Me parece que el dominio matemático se estructura en diversos cálculos cerrados, que pueden ser incluso contradictorios, o simplemente distintos, entre sí. Es muy sugerente indicar que la integral definida supone la transformación de una función en un número, y a esto se lo denomina teoría de la medida, y esto nos encamina, según mi criterio, al número como núcleo generador de las matemáticas

BIBLIOGRAFÍA CITADA.

(1) *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden*, Isaac Newton, Real Sociedad Matemática Española (2003), precedido de tres estudios: *Newton, el grande entre los grandes*, de José Manuel Sánchez Ron; *Valores contrapuestos en la controversia Newton-Leibniz*, de Javier Echevarría; y *Newton y el Analysis*, por Antonio J. Durán Guardeño. Pág. LII. Segundo estudio. Resaltado en el original.

(2) *Historia de las matemáticas*, Carl B. Boyer (1969), Alianza Editorial (2016), sexta reimpresión, pág. 427.

(3) *Reglas para la dirección del espíritu*, René Descartes, introducción, traducción y notas, Juan Manuel Navarro Cordón, Alianza Editorial (2010), Regla IV, pág. 90.

(4) *Historia de las matemáticas*, Carl B Boyer (1969), Alianza Editorial (2016), sexta reimpresión, pág. 428. En los comentarios a esta construcción geométrica seguimos puntualmente las indicaciones dadas en este libro y en general todo lo referente a Descartes. Para la sección aurea ver las págs. 107-108; para el pentagrama pitagórico págs. 79-82.

(5) *Reglas para la dirección del espíritu*, René Descartes, introducción, traducción y notas, Juan Manuel Navarro Cordón, Alianza Editorial (2010), págs. 85-86.

(6) *Historia de las matemáticas*, Carl B Boyer (1969), Alianza Editorial (2016), sexta reimpresión, págs. 689-690.

(7) *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos*, Edición de Antonio J. Durán, Editorial Crítica (2006), págs. 120, 124.

(8) *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos*, Edición de Antonio J. Durán, Editorial Crítica (2006), pág. 137.

(9) *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos*, Edición de Antonio J. Durán, Editorial Crítica (2006), pág. 139.

(10) Se puede consultar, por ejemplo, para más detalles *Basic Complex Analysis*, Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman, W.H. Freeman and Company (1987), pág. 429, proposición 6.2.14.

(11) *De Geometria recóndita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686), —*De Geometría Recóndita*—, G.W. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas. Escritos matemáticos,* volumen 7A, Editora Mary Sol de Mora Charles, Comares (2014), texto III-6, págs. 321-329.

(12) *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, G.W. Leibniz, *Acta Eruditorum,* octubre de 1684, traducción de M.S. de Mora Charles, escrito III-5, *Nuevo método para los Máximos y Mínimos*, págs. 311-320, presente en el volumen 7A, *G.W. Leibniz. Obras filosóficas y científicas. Escritos matemáticos*, Editora Mary Sol de Mora Charles, Comares (2014), págs. 312-315. Resaltado en el original.

(13) *Quadrature Arithmétique*, (1674) —*Cuadratura aritmética*—, G.W. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas. Escritos matemáticos,* volumen 7A, Editora Mary Sol de Mora Charles, Comares (2014), texto III-1, págs. 93-105. Extractos de las cartas de Leibniz a Huygens y contestación de Huygens.

(14) *Historia de la matemática*, Carl B. Boyer (1969), Alianza Editorial (2016), págs. 508; 484-486.

(15) *G.W. Leibniz. Obras filosóficas y científicas. Escritos matemáticos*, volumen 7ª, Editora Mary Sol de Mora Charles, Comares (2014), escrito III6, *De Geometría Recóndita* (*De Geometría recóndita et analysi indivisibilium atque* infinitorum), págs. 327-328.

(16) *Historia de la matemática*, Carl B. Boyer, Alianza Editorial (2016), pág. 467.

(17) *Historia de la matemática*, Carl B. Boyer, Alianza Editorial (2016), pág. 342.

(18) *Historia de la matemática*, Carl B. Boyer, Alianza Editorial (2016), págs. 559-561.