



TRABAJO DE FIN DE MASTER

Efecto invernadero y variabilidad climática en *Daisyworld*

Autor:

Rafael Sánchez González

Tutor:

Víctor Fairén Le Lay

Septiembre de 2016

Resumen.

Desde su publicación en 1983 el modelo del “mundo de las margaritas” ha sido frecuentemente utilizado como base para la construcción de modelos climáticos de distintos grados de complejidad. El que se analiza en este trabajo es un modelo de balance de energía de dimensión cero en el que se incluyen dos parámetros adicionales a la versión original: uno de ellos representa la intensidad del efecto invernadero y el otro la capacidad calorífica del planeta. Su relativa simplicidad nos permitirá establecer con mayor claridad las relaciones entre las distintas variables implicadas.

En el modelo resultante, la vida en el planeta sigue teniendo la capacidad de reaccionar a cambios en la luminosidad de la estrella y mantener aproximadamente constante la temperatura del mismo. Además de esta capacidad de autorregulación, presenta otra importante característica: bajo ciertas condiciones el sistema genera por sí mismo oscilaciones en los valores de la temperatura y en la población de margaritas, reflejo de una variabilidad climática interna. Si en esas circunstancias añadimos un término periódico en la radiación recibida de la estrella, la variabilidad se vuelve ahora no estacionaria. Una característica que comparte con el clima terrestre pese a que nuestro modelo está lejos de ser una representación realista del mismo.

La relación entre las dos características que hemos señalado como más relevantes del nuevo modelo (autorregulación y variabilidad) se pone de manifiesto cuando se incrementa la intensidad del efecto invernadero en el planeta: la capacidad de autorregulación es capaz de neutralizar, dentro de cierto margen, el incremento de temperatura que cabría esperar de un mayor efecto invernadero, sin embargo, esta neutralización se lleva a cabo a costa de alterar propiedades fundamentales de la dinámica del sistema, como los periodos o las amplitudes características de la variabilidad climática.

Índice

- 1.- Introducción.
- 2.- Formulación del modelo *Daisyworld*.
 - 2.1.- Puntos de equilibrio.
- 3.- Modificaciones del modelo original.
 - 3.1.- Capacidad calorífica.
 - 3.2.- Efecto invernadero.
- 4.- Dinámica del modelo modificado.
 - 4.1.- Luminosidad constante.
 - 4.1.1.- Estudio del periodo de las oscilaciones.
 - 4.1.2.- Estudio de la amplitud de las oscilaciones.
 - 4.2.- Variación lineal de la luminosidad.
 - 4.2.1.- Variación del intervalo de luminosidad compatible con la vida.
 - 4.3.- Oscilaciones periódicas de la luminosidad.
 - 4.3.1.- Periodicidad del sistema.
- 5.- Conclusiones.
- 6.- Referencias.

Lista de figuras.

<i>Figura 1. a) Temperatura del planeta en función de L. b) Cobertura de margaritas blancas (línea azul), negras (línea roja) y total (línea verde) en función de L. Los gráficos se obtuvieron por simulación numérica con el parámetro L creciente.</i>	Página 13
<i>Figura 2. a) Temperatura del planeta en función de L. b) Cobertura de margaritas blancas (línea azul), negras (línea roja) y total (línea verde) en función de L. Los gráficos se obtuvieron por simulación numérica con el parámetro L decreciente.</i>	Página 14
<i>Figura 3. Variación de la traza y el discriminante de [13] en función de c para $\gamma = 0.3$ y $\varphi_\infty = 1$ con $L = 0.947$.</i>	Página 23
<i>Figura 4 a) Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 2000 intervalos de tiempo para $c = 25$, $\gamma = 0.3$, $\varphi_\infty = 1$ b) Id. $c = 150$, $\gamma = 0.3$, $\varphi_\infty = 1$ c) $c = 625$, $\gamma = 0.3$, $\varphi_\infty = 1$</i>	Página 26
<i>Figura 5 a) Variación del periodo de las oscilaciones permanentes e inicio de las mismas en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_∞. b) Id. $\gamma = 0.3$ c) $\gamma = 0.4$</i>	Página 28
<i>Figura 6 a) Variación de la amplitud de las oscilaciones (la línea superior representa los máximos de temperatura, la inferior los mínimos y la intermedia el promedio de la variable) en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_∞. b) Id. $\gamma = 0.3$ c) $\gamma = 0.4$</i>	Página 30
<i>Figura 7 a) Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 6000 intervalos de tiempo para $c = 150$, $\gamma = 0.3$ y $\varphi_\infty = 1$ con luminosidad creciente $L = 0.1 + \frac{t}{5000}$ b) Id. $c = 650$, $\gamma = 0.3$ y $\varphi_\infty = 1$</i>	Página 32
<i>Figura 8 a) Tiempo de vida de las margaritas en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L $L = 0.1 + \frac{t}{5000}$ b) Id. $\gamma = 0.3$ c) $\gamma = 0.4$ d) Instantes de inicio y final de la población de margaritas en función de c para $\gamma = 0.3$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L $L = 0.1 + \frac{t}{5000}$.</i>	Página 34
<i>Figura 9. Variación de la temperatura con el tiempo (línea amarilla) y trayectoria del sistema en el espacio (α_b, α_w), línea azul, entre los instantes de tiempo 5000 y 20000 para una radiación externa con $\tau = 900$ y distintos valores de l.</i>	Página 37
<i>Figura 10. Órbitas del sistema en el espacio (α_b, T), entre los instantes de tiempo 5000 y 20000 para una radiación externa con $\tau = 700$ y $l = 0.2275$ y línea $\alpha_b = 0.4$ utilizada para hallar el número de órbitas.</i>	Página 38
<i>Figura 11 a. Número de puntos de intersección de la trayectoria del sistema en el plano (α_b, T) en función de l con la $\alpha_b = 0.4$ para $\varphi_\infty = 1$, $c = 1000$, $\gamma = 0.3$ y distintos periodos.</i>	Página 42
<i>Figura 11 b. Número de puntos de intersección de la trayectoria del sistema en el plano (α_b, T) en función de l con la $\alpha_b = 0.4$ para $\varphi_\infty = 0.6$, $c = 1000$, $\gamma = 0.3$ y distintos periodos.</i>	Página 43

1.- Introducción.

El modelo del “mundo de las margaritas” fue propuesto en 1983 (Watson y Lovelock, 1983) como respuesta a las críticas que la hipótesis Gaia (Lovelock y Margulis, 1974) había recibido acerca de que la capacidad de la Tierra para mantener un ambiente apto para la vida parecía implicar un punto de vista teleológico y requerir una cierta “previsión” o “planificación” en el sistema. Sus autores lo plantearon con el objetivo de demostrar que la regulación necesaria puede surgir de la interacción entre la vida y el entorno, representada la primera por dos especies de margaritas y el segundo por la temperatura. En su primera formulación constaba de un planeta que recibe una radiación creciente desde la estrella alrededor de la cual orbita; sobre este planeta crecen dos tipos de margaritas, unas negras con un albedo próximo a cero y otras blancas con albedo cercano a la unidad. Se considera también una zona “desnuda” del planeta con un valor intermedio del albedo. Ambas especies son idénticas en cuanto a su desarrollo y, en particular, su tasa de nacimiento es función únicamente de la temperatura, con un valor óptimo de la misma alrededor del cual la tasa de crecimiento de cualquiera de las dos especies disminuye rápidamente. Se asume que cada mancha de margaritas, por pequeña que sea, es capaz de crear una temperatura local, inferior a la temperatura de equilibrio del planeta en el caso de las margaritas blancas y superior en el caso de las margaritas negras. Es esta temperatura local la que determina la función de crecimiento de cada especie. Por otro lado, la superficie del planeta limita la extensión posible de las margaritas y se supone que la tasa de nacimiento de ambas especies es proporcional al espacio disponible.

Si imaginamos una situación de partida con una cierta extensión de cada tipo de margaritas y hacemos disminuir lo suficiente la radiación exterior, las blancas, por su elevado albedo, van a sentir en mayor medida el enfriamiento del planeta, mientras que la zona ocupada por las margaritas negras presentará una temperatura local mayor, más cercana al óptimo y esta variedad se extenderá por una zona más amplia, reduciendo el albedo del planeta y compensando en cierta medida la pérdida de radiación incidente.

Del mismo modo, un aumento adecuado de la radiación incidente afectará negativamente a las margaritas negras, con mayor capacidad de absorción, que se verán rodeadas de un entorno cada vez menos favorable para su desarrollo, en tanto que las blancas, con mayor albedo, se mantendrán por más tiempo cerca del óptimo de crecimiento y se extenderán por una mayor superficie. El aumento del área ocupada por las margaritas blancas se traduce en un incremento del albedo planetario que contrarresta la mayor radiación exterior. Naturalmente, la capacidad de ambas especies de alterar el albedo está limitada puesto que la superficie del planeta es finita. Mientras los cambios de radiación se hallan dentro de ciertos límites, se tiende a un estado de equilibrio. Cuando la radiación se encuentra fuera de los extremos de ese intervalo, ambas especies de margaritas se extinguen y la temperatura crece, o decrece, ilimitadamente según la actividad de la estrella. El modelo del “mundo de las margaritas” es un ejemplo de cómo puede aparecer de forma natural un mecanismo autorregulador, capaz, en este caso, de mantener una temperatura constante frente a un continuo aumento de la radiación recibida del exterior. La sección 2 de este trabajo se dedica a la formulación original del modelo *Daisyworld* y a los puntos de equilibrio del mismo.

De acuerdo con Henderson y McGuffie (1987), los modelos climáticos pueden clasificarse en cuatro niveles en función de su resolución espacial. Los más sencillos, los modelos de balance de energía, únicamente obtienen la variación de temperatura en la superficie expresada en función de la latitud, se basan en relaciones simplificadas de balance de energía para cada área latitudinal considerada. Unidimensionales son también los modelos radiativo-convectivos, que facilitan un perfil vertical de temperaturas considerando explícitamente los procesos radiativos e introduciendo una corrección convectiva que permite mantener un gradiente térmico vertical fijado. Los modelos bidimensionales dinámico-estadísticos incluyen explícitamente procesos dinámicos y de superficie promediados zonalmente, con lo que proporcionan una descripción del clima tanto en latitud como en altitud. Los más complejos, los modelos de circulación general, tridimensionales, intentan incorporar la mayor parte de los procesos relevantes para el clima, no solo los atmosféricos, sino los correspondientes a los distintos subsistemas climáticos, incluyendo, por ejemplo, acoplamientos con la

circulación oceánica. El modelo con el que vamos a trabajar se sitúa dentro de los de balance de energía y, puesto que no incorpora ninguna dependencia de la latitud ni de la altitud, sino que proporciona únicamente un valor de temperatura promediado para todo el planeta, se incluiría dentro de los denominados de dimensión cero. La utilidad de estos modelos está en que la relativa sencillez de los mismos permite poner al descubierto las relaciones que se establecen entre sus diferentes componentes, que en un modelo más complejo podrían quedar enmascaradas. En este caso particular las relaciones más relevantes son las que se establecen entre la temperatura y el albedo, que permiten al sistema estabilizar la temperatura del planeta. En la atmósfera se encuentran ejemplos de mecanismos de realimentación entre la temperatura (de la atmósfera o del agua del mar) y el albedo, aunque aquí las variaciones de este último suelen vincularse fundamentalmente con la nubosidad (Stephens, 2005).

Para transformar el modelo *Daisyworld* en un verdadero modelo climático son necesarias algunas modificaciones que permitan obtener una mayor cercanía al sistema climático terrestre. Una característica esencial de este último, necesaria para el desarrollo de la vida en el caso de la Tierra, es el efecto invernadero. Gracias a él, la temperatura media de la superficie de la Tierra es de alrededor de 15 °C en lugar de la temperatura efectiva de radiación, la que equilibra la radiación solar incidente supuesto que la Tierra emite como un cuerpo negro, que se sitúa en unos -18 °C. Para tenerlo en cuenta se deberá modificar la emisividad del planeta como detallamos en la sección 3.1. La forma en que se introduce el efecto invernadero en el modelo supone incluir también un ciclo del carbono y dotar al planeta de una atmósfera que no estaba considerada en el modelo original. Esta atmósfera contará con una cierta capacidad calorífica, que también podremos atribuir a una superficie del planeta cuya naturaleza no hemos descrito, pero a la que le hemos supuesto otras propiedades como el albedo. En cualquier caso, si buscamos alguna similitud con un planeta como la Tierra en el que la mayor parte de la superficie es agua, resulta inevitable introducir en el modelo un parámetro como la capacidad calorífica. En el caso de la Tierra, Schwartz (2007) le atribuye, para escalas temporales del orden de varias décadas, una capacidad calorífica de $5 \cdot 10^8 \text{ JK}^{-1} \text{ m}^{-2}$, un valor determinado en buena medida por las capas superficiales del océano. En concreto este sería el valor correspondiente a, aproximadamente, los

primeros 100 metros de profundidad, mientras que la capacidad calorífica de toda la atmósfera terrestre sería del orden de $10^7 JK^{-1}m^{-2}$ (Hartmann, 1994). A las consecuencias de la introducción de este último parámetro dedicamos la sección 3.2.

Estas modificaciones (efecto invernadero y capacidad calorífica) conducen a un modelo climático que presenta, bajo ciertas condiciones que detallamos en la sección 4.1, una variabilidad interna periódica. Estas oscilaciones ya han sido descritas en diversos trabajos (Nevison et al., 1999; Viola et al., 2013; Rombouts y Ghil, 2015). En este añadimos un estudio más detallado de la dependencia de la frecuencia y amplitud de esta variabilidad respecto de diversos parámetros del modelo. Especialmente relevante en este apartado es el modo en que el sistema responde a variaciones en la intensidad del efecto invernadero cuando mantenemos constante la energía recibida de la estrella. Si es capaz de regular la temperatura compensando las variaciones de luminosidad, esperamos que también pueda hacerlo frente a cambios en la intensidad del efecto invernadero.

La versión original del modelo *Daisyworld* consideraba una variación lineal en el tiempo de la luminosidad de la estrella y parece oportuno comparar la respuesta que se obtenía allí con la que proporciona nuestro modelo climático modificado. Cambios en la constante solar de largo periodo, comparado con el característico de la variabilidad interna del sistema, pueden aproximarse mediante estas dependencias lineales. Esta situación se estudia en la sección 4.2. El resultado más llamativo de la respuesta del modelo modificado frente a la del *Daisyworld* original (descrita en el capítulo 2) es que la autorregulación se lleva a cabo ahora mediante oscilaciones de la temperatura (Viola et al., 2013; Paiva et al., 2014), siempre y cuando los parámetros del modelo se mantengan dentro de los rangos que permiten la existencia de la variabilidad interna mencionada en el párrafo anterior. En este trabajo se aporta un análisis del modo en que las variaciones de la intensidad del efecto invernadero, para distintos valores de capacidad calorífica del planeta y diversas vidas medias de las margaritas, altera el rango de luminosidades en el que se observa el efecto regulador de la vida sobre el entorno.

La sección 4.3 se dedica a analizar la respuesta del sistema a una variación periódica de la radiación recibida. Superponemos ahora a la variabilidad interna una variabilidad externa, de modo análogo a lo que se observa en el clima de la Tierra donde coexisten una variabilidad interna debida a mecanismos de realimentación del propio sistema (como la que reflejan, por ejemplo, índices como la NAO, el fenómeno ENSO o la oscilación cuasi bienal de la estratosfera) con otra asociada a forzamientos externos (además de la sucesión de estaciones, puede citarse el ciclo aproximado de 11 años asociado a las manchas solares o con una periodicidad mucho mayor, del orden de decenas de miles de años, los derivados de cambios en la excentricidad de la órbita o en la inclinación del eje de rotación de la Tierra). En función del periodo y amplitud de la radiación incidente se obtienen una gran variedad de comportamientos, desde movimientos periódicos a otros de naturaleza caótica (Viola et al., 2013; Paiva et al., 2014). En este trabajo mostramos el modo en que la intensificación del efecto invernadero altera la respuesta del sistema climático frente a perturbaciones periódicas en la radiación exterior y, en concreto, las condiciones bajo las que aparece una variabilidad no estacionaria así como la forma en que esta se ve afectada por el aumento del efecto invernadero.

Por último, resumimos las conclusiones más relevantes en la sección 5.

2.- Formulación del modelo *Daisyworld*.

En la versión original del modelo *Daisyworld* (Watson y Lovelock, 1983), se considera que la capacidad calorífica del planeta es nula y tampoco se incluye ningún efecto invernadero. En estas condiciones, la temperatura del planeta se adapta de forma instantánea a las alteraciones que puedan producirse en la radiación incidente o en el albedo del planeta. Por tanto, el sistema tiene realmente dos variables independientes: la cobertura de ambos tipos de margaritas. Dados los valores de la extensión ocupada por las margaritas, la temperatura queda determinada por el equilibrio que debe verificarse entre la radiación entrante y la emitida por el planeta. Las ecuaciones que gobiernan el sistema son

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_w}{dt} &= \alpha_w(\alpha_g\beta(T_w) - \gamma) \\ \frac{d\alpha_b}{dt} &= \alpha_b(\alpha_g\beta(T_b) - \gamma) \\ 0 &= SL(1 - A) - \sigma T^4\end{aligned}\quad [1]$$

donde α_w , α_b y T representan, respectivamente, la extensión de suelo cubierta de margaritas blancas (a las que asignaremos un albedo $\alpha_w = 0.75$), el área ocupada por las margaritas negras (de albedo $\alpha_b = 0.25$) y la temperatura media del planeta. La fracción de suelo no utilizado por ninguna de las dos especies lo representamos por $\alpha_g = 1 - \alpha_w - \alpha_b$ y le asignamos un albedo $\alpha_g = 0.50$.

La energía incidente sobre el planeta es SL . Siguiendo, como en el resto de los valores que se indican en este apartado para las diferentes constantes, la formulación original de Watson y Lovelock, a S le asignamos el valor de 917 Wm^{-2} y a través de L , cuyo rango de variación se situará en el entorno de 1, podremos modificar la energía recibida de la estrella. El parámetro σ es la constante de Stefan-Boltzmann: $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Por T_w y T_b representamos la temperatura de las zonas ocupadas por las margaritas. De estas dos variables depende la tasa de crecimiento de

las mismas, nula salvo en un entorno de 35 K alrededor de una temperatura óptima donde alcanza un máximo igual a 1, de acuerdo con la expresión:

$$\beta(T) = \begin{cases} 1 - k(T - T_{opt})^2 & |T - T_{opt}| < k^{-1/2} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad [2]$$

Los valores asignados en la formulación inicial del modelo fueron $k = 17.5^{-2} K^{-2}$ y $T_{opt} = 295.5 K$. A su vez, la temperatura de cada zona del planeta está relacionada con la temperatura media del mismo por

$$\begin{aligned} T_w^4 &= q(A - a_w) + T^4 \\ T_b^4 &= q(A - a_b) + T^4 \\ T_g^4 &= q(A - a_g) + T^4 \end{aligned} \quad [3]$$

donde $A = \alpha_w a_w + \alpha_b a_b + \alpha_g a_g$ es el albedo del planeta y q una constante de valor $2.06 \cdot 10^9 K^4$. En las zonas de mayor albedo (margaritas blancas), el término $q(A - a_w)$ de [3] es negativo. Supongamos que $a_w = 1$, entonces, debe ser $|q(A - 1)| < T^4$, lo que combinado con la tercera ecuación de [1] nos lleva a la condición

$$q < \frac{SL}{\sigma}. \quad [4]$$

La constante γ representa la tasa de muerte de las margaritas, que supondremos independiente de la temperatura.

Puede formularse una versión del modelo en la que se modifica la ecuación de Stefan-Boltzmann para obtener una dependencia lineal con la temperatura, así como en las ecuaciones [3], aprovechando que el rango de variación de la temperatura es pequeño respecto de su valor promedio. El modelo resultante (véase por ejemplo Wood et al., 2008) muestra el mismo comportamiento cualitativo que el original, si bien se observan algunas diferencias, especialmente en lo relativo al rango de luminosidades en las cuales sobrevive un único tipo de margaritas.

Zeng et al. (1990), añaden una constante multiplicativa a la ecuación [2], de modo que el modelo de Watson y Lovelock sería un caso particular con dicha constante igual a la unidad y muestran que valores suficientemente altos de este parámetro conducen a un comportamiento caótico. Sin embargo, Jascourt y Raimond (1992) atribuyen tal comportamiento caótico al hecho de que el modelo de Zeng es, en realidad, una versión discreta del modelo de Lovelock y muestran que, incluso para este modelo discreto, los valores promedio de temperatura se mantienen próximos a los de equilibrio del sistema original, de modo que el carácter caótico de las soluciones no impide que el efecto de autorregulación esté presente.

Tal como lo hemos planteado, estaríamos ante un modelo de dimensión cero. Podemos extenderlo a una dimensión admitiendo una cierta curvatura del planeta, lo que nos permite estudiar la existencia de efectos estacionales (Biton y Gildor, 2010), o a dos dimensiones, con lo que podríamos analizar la distribución espacial de las diferentes manchas de margaritas y analizar la posible formación de patrones (Ackland y Wood, 2010). Señalamos, por último, que el modelo que acabamos de describir ha encontrado aplicaciones en otros ámbitos distintos de la interacción de la vida con el entorno, como en la ingeniería según puede verse, por ejemplo, en Dyke y Harvey, 2005.

2.1.- Puntos de equilibrio.

En función de los valores de luminosidad, el sistema [1]-[3] presenta, a lo sumo, cuatro puntos fijos (Saunders, 1994). El número de los mismos y su carácter estable o inestable dependerá de los tipos de margaritas que puedan estar presentes. La opción más elemental es descartar ambos tipos de margaritas: la tercera ecuación de [1] establece un estado de equilibrio para cualquier valor de L . Si ahora admitimos que únicamente existen margaritas negras, para luminosidades muy bajas el equilibrio es el mismo del caso anterior, pero a partir de cierta L conviven dos puntos estables: uno con ausencia de cualquier tipo de margaritas y otro con una cierta cantidad de margaritas negras. Un poco más adelante, el único equilibrio posible es el de margaritas negras, hasta que L es

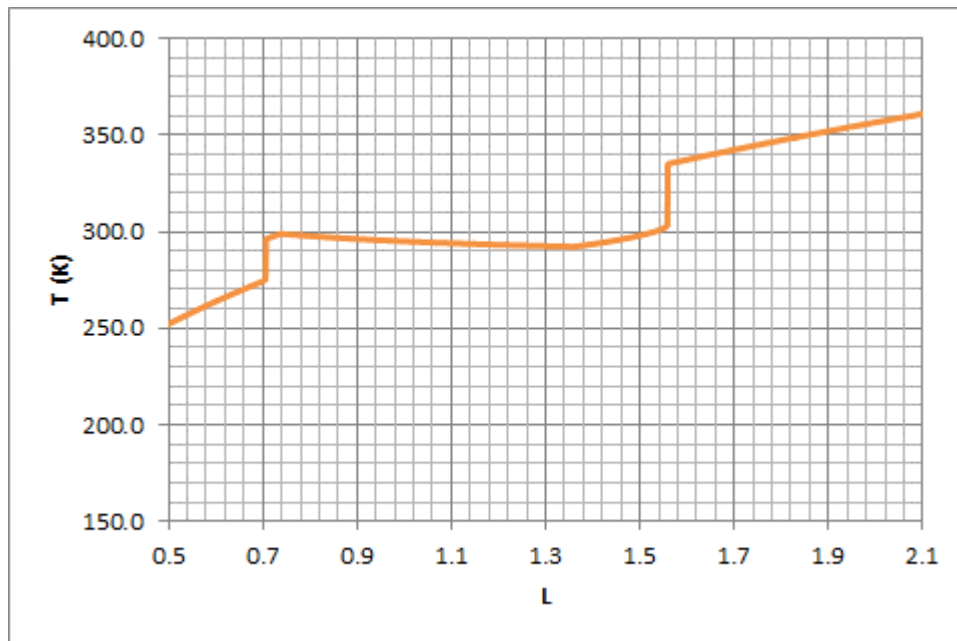
lo suficientemente grande para que la vida sea imposible y se retorne a los valores de equilibrio dados por el simple balance de energía. El caso de margaritas blancas es enteramente análogo al de margaritas negras, si bien ahora la coexistencia de dos estados estables, con y sin margaritas, se encuentran para valores elevados de L , justo antes de que la excesiva luminosidad haga imposible la vida en el planeta.

Una parte del rango de luminosidades donde el único estado estable era el de margaritas blancas o negras se vuelve inestable cuando las dos especies pueden coexistir. En presencia de ambas especies, en el tramo comprendido entre $L = 0.7$ y $L = 1.3$, aproximadamente, la temperatura de equilibrio se mantiene cercana al valor óptimo para el crecimiento de las margaritas y además disminuye levemente a medida que crece la luminosidad. Es importante señalar que en la región de coexistencia de ambos tipos de margaritas, la suma de las extensiones ocupadas por las dos variedades permanece constante e igual a 0.673.

Las figuras 1 y 2 ilustran estos resultados a través de simulaciones numéricas. En ellas se representa, para el caso en que se admite la existencia de las dos variedades de margaritas, el área ocupada por cada una y la suma de ambas, así como la evolución de la temperatura del planeta cuando el parámetro L crece, figura 1, o decrece, figura 2.

Para el primer valor de L se establecieron unas condiciones iniciales de cobertura de cada tipo de margarita de 0.01 y, por tanto, se supuso que el 98 % del suelo no está ocupado por ningún tipo de vegetación. Se realizaron las iteraciones necesarias hasta que las modificaciones de las variables en dos pasos consecutivos eran inferiores a un cierto valor. La cobertura de margaritas obtenida en cada paso servía de punto de partida para los cálculos con el siguiente valor de L . De este modo el sistema se desplaza a través de estados muy cercanos al de equilibrio.

a



b

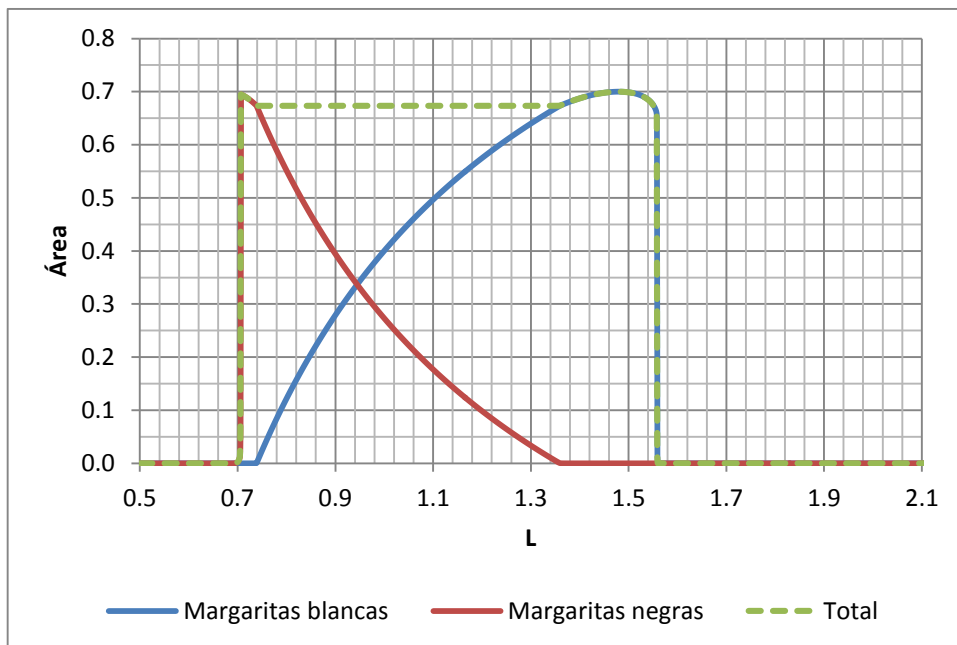
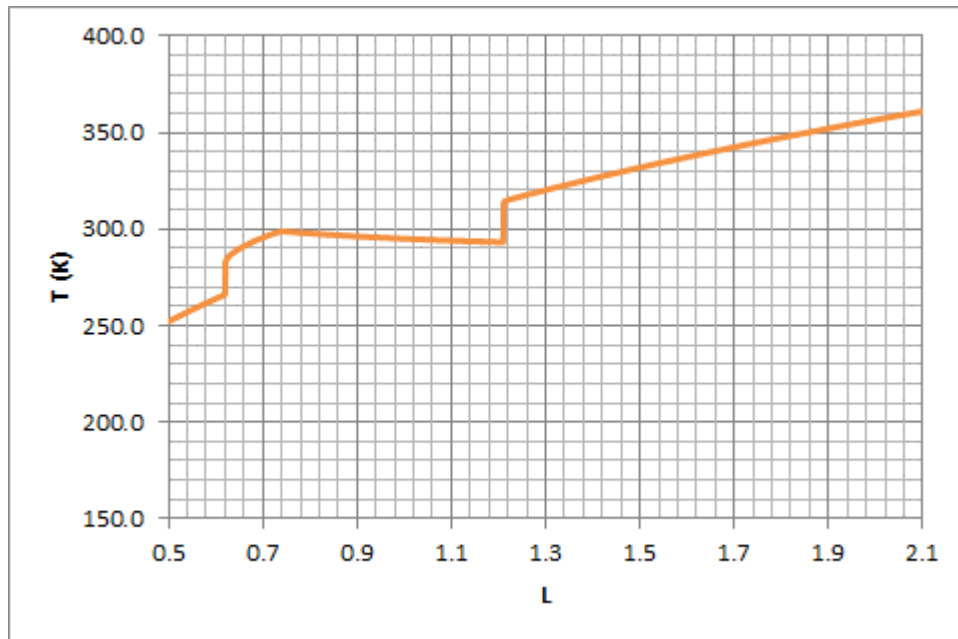


Figura 1. a) Temperatura del planeta en función de L. b) Cobertura de margaritas blancas (línea azul), negras (línea roja) y total (línea verde) en función de L. Los gráficos se obtuvieron por simulación numérica con el parámetro L creciente y permitiendo la presencia de ambos tipos de margaritas.

a



b

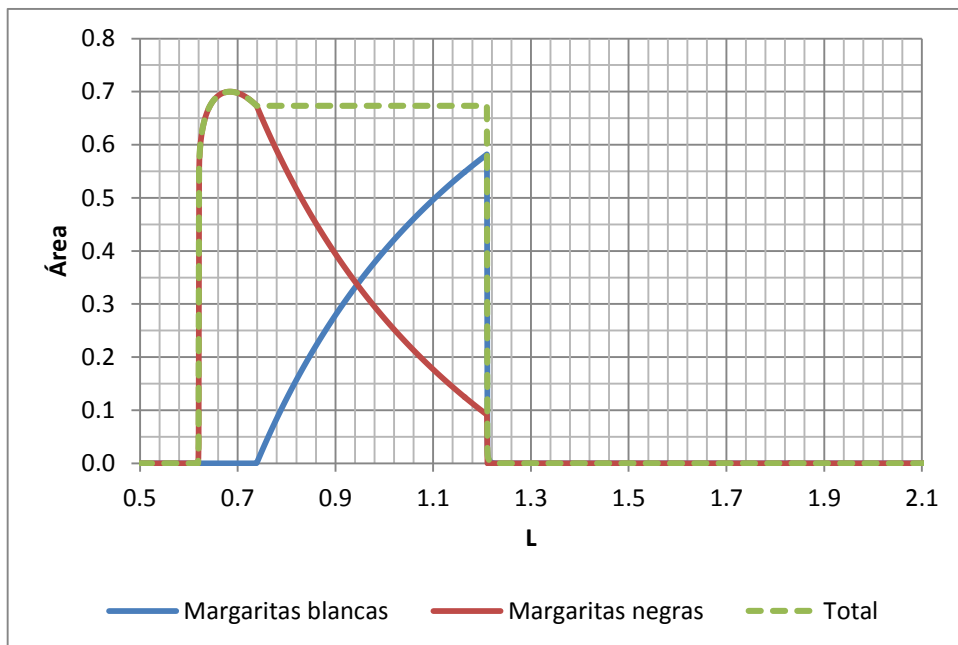


Figura 2. a) Temperatura del planeta en función de L. b) Cobertura de margaritas blancas (línea azul), negras (línea roja) y total (línea verde) en función de L. Los gráficos se obtuvieron por simulación numérica con el parámetro L decreciente y permitiendo la presencia de ambos tipos de margaritas.

Puede observarse que las dos figuras no son iguales y, en particular, el intervalo de coexistencia de los dos tipos de margaritas que muestra el caso de L decreciente es apreciablemente menor que el que se observa en el caso de L creciente. La razón está en que en este último caso nos movemos por los extremos de la gráfica con una población importante de margaritas que contribuyen de forma significativa a modificar la temperatura del planeta y en el primero estamos en las condiciones de la población de partida, tan pequeña que no puede imponer las condiciones necesarias para su crecimiento. Como consecuencia de ello, si recorremos la figura 1 hasta luminosidades próximas a 2, de modo que hagamos desaparecer la vida del planeta, cuando queramos recorrer el camino en sentido inverso, hacia luminosidades menores, lo haremos según la gráfica 2 y ni la temperatura ni la población de margaritas seguirán durante el camino de vuelta el mismo recorrido que en el de ida. En este sentido se dice que el modelo presenta histéresis.

Si superponemos ambas gráficas, el intervalo de luminosidades en el que coinciden representa la zona de un único punto estable, sea con ambos tipos de margaritas presentes o, en el caso de la región situada más a la izquierda, únicamente con margaritas negras (véase, por ejemplo, Wood et al., 2008). Las zonas no comunes representan los valores de L para los cuales coexisten puntos estables con y sin margaritas. Para los valores más altos de luminosidad compatibles con la vida en el planeta se alcanza un equilibrio con margaritas (ambos tipos o solo blancas) si las condiciones iniciales de temperatura y extensión de margaritas son las adecuadas, de lo contrario se llega al equilibrio sin vegetación. En el lado izquierdo, para valores de L algo inferiores a 0.7, también existe una zona de dobles puntos fijos asociados a la histéresis, aunque dentro de un rango de luminosidad más limitado. Finalmente, fuera del rango aproximado 0.5 – 1.6, la luminosidad es incompatible con la vida y el único punto fijo posible es el que marca el equilibrio entre la energía incidente, descontando el albedo medio del planeta, y la radiación emitida por el mismo. Las dos formas de vida se extinguen y la temperatura crece (o disminuye) siguiendo únicamente las variaciones de energía procedentes de la estrella.

En cualquiera de las dos gráficas podemos ver que el incremento (o descenso) de la temperatura media del planeta que seguiría a un incremento (o disminución) de la constante solar se interrumpe por la variación de área ocupada por las margaritas, situando el valor de esta temperatura media en el entorno de la temperatura óptima de crecimiento. Este es el efecto de autorregulación característico del modelo.

3.- Modificación del modelo original.

Tal como lo hemos planteado hasta ahora, el modelo sirve para su propósito mostrando la capacidad, dentro de cierto margen, de regular la temperatura del planeta de modo que se obtengan condiciones favorables para la vida. Entre las muchas extensiones que se han ideado para ampliar las aplicaciones del modelo Daisyworld destacan aquellas en las que sirve de base para realizar simulaciones climáticas. Para tal finalidad parece evidente que se necesita incorporar, al menos, dos parámetros al sistema: un efecto invernadero que represente la presencia de una atmósfera y de un ciclo del carbono en nuestro modelo y una capacidad calorífica (Nevison et al., 1999; Viola et al., 2013; Paiva et al., 2014). La inclusión de la atmósfera y de un ciclo de carbono nos sugiere que nuestro planeta no es ya únicamente un contenedor de margaritas dotado de un cierto albedo, sino que puede ser capaz de almacenar parte de la energía recibida de la estrella, lo que representaremos mediante una capacidad calorífica finita, frente a la capacidad nula y a los cambios inmediatos de la temperatura provocados por las variaciones en el albedo o en la energía recibida que se suponía en la formulación original del modelo. Esta última situación se correspondería con el caso en que los tiempos característicos asociados al equilibrio térmico son mucho menores que los asociados a los cambios en la proporción de margaritas. Veremos en la sección 5 que la relación entre estos dos tiempos característicos determina en buena medida la dinámica del sistema. Modelos climáticos más complejos se podrían obtener añadiendo, por ejemplo, un ciclo hidrológico que, en particular, implica la presencia de nubes en nuestra atmósfera (Salazar y Poveda, 2006).

3.1.- Efecto invernadero.

La introducción del efecto invernadero implica una modificación del término correspondiente a la energía emitida por el planeta en la tercera ecuación de [1] con objeto de alterar el balance que esta ecuación representa, del mismo modo que la atmósfera de la Tierra modifica el ajuste entre la energía recibida del sol y la emitida por la superficie terrestre en onda larga provocando que tal emisión se realice a una temperatura superior a fin de restablecer el equilibrio. Así, Ghil y Childress (1987) llevan a cabo esta modificación en la forma

$$\sigma T^4 [1 - m \cdot \tanh((T/T_0)^6)], \quad [5]$$

con $m = 0.4$ y $T_0^{-6} = 1.9 \cdot 10^{-15} K^{-6}$, de modo que la intensidad del efecto invernadero no se relaciona con ninguna variable distinta de la propia temperatura. En un modelo construido también a partir de *Daisyworld*, Viola et al. (2013) incorporan una variable $G(t)$ relacionada con los gases de efecto invernadero, que actúa sobre el sistema disminuyendo el albedo y la ocupación del suelo, de modo que viene a ser equivalente a añadir una cantidad extra de margaritas negras. La serie temporal se construye de modo que ajuste los valores observados de incremento de CO_2 en la Tierra. En un modelo similar a este último, Paiva et al. (2014) introducen el efecto invernadero en la forma $\sigma T^4(1 - E)$, con E , que representa la intensidad del mismo, dado por la expresión

$$\frac{dE}{dt} = a - bE(\alpha_w + \alpha_b) \quad [6]$$

En esta ecuación a representa la emisión de gases de efecto invernadero, mientras el último término de la ecuación corresponde a la tasa de absorción, que se hace depender de una constante, b , de la presencia de gases en la atmósfera y de la extensión ocupada por las margaritas.

Siguiendo esta idea de representar el intercambio de CO_2 entre la biosfera y la atmósfera, para introducir en el modelo un sencillo ciclo del carbono, en este trabajo utilizaremos la parametrización de Svirezhev y Bloh (1997), en la que el término σT^4 se multiplica por un factor

$$\varphi(C) = \frac{k_c + \varphi_\infty C}{k_c + C}, \quad [7]$$

donde C es el contenido total de carbono de la atmósfera y tanto k_c como φ_∞ son parámetros de la ecuación. El último de ellos representa la intensidad del efecto invernadero. Expresado en términos de la cantidad de carbono total en el planeta, B , que estará libre en la atmósfera o almacenado en los únicos seres vivos presentes (las margaritas) y si asumimos que cuando las margaritas cubren por completo el planeta no hay carbono en la atmósfera, resulta

$$\varphi(\alpha_w, \alpha_b) = \frac{k_c + \varphi_\infty B(1 - \alpha_w - \alpha_b)}{k_c + B(1 - \alpha_w - \alpha_b)} \quad [8]$$

Tomaremos $k_c = 750 \text{ Gt}$ y $B = 1360 \text{ Gt}$ de acuerdo con Svirezhev y Bloh (1997). Mediante la variación de φ_∞ alteraremos la intensidad del efecto invernadero. Fijado este parámetro, la mayor o menor presencia de carbono en la atmósfera está ligado a la extensión de suelo cubierta de margaritas, con lo que estamos introduciendo una nueva fuente de realimentación en el modelo. A diferencia del modelo de Paiva, no existe una tasa fija de incorporación de gases de efecto invernadero a la atmósfera.

3.2.- Capacidad calorífica.

La tercera ecuación de [1] cuando se incluye una capacidad calorífica queda

$$c \frac{dT}{dt} = SL(1 - A) - \sigma T^4. \quad [9]$$

Los puntos fijos con $c \neq 0$ son los mismos que se obtienen para el modelo inicial descrito por el sistema [1], pues la condición $dT/dt = 0$ elimina cualquier influencia de c en los cálculos posteriores, pero cambia la naturaleza de los mismos. Dentro de un rango de luminosidades que coincide aproximadamente con la zona de coexistencia de ambos tipos de margaritas en la figura 1 y para valores de c suficientemente grandes (el umbral exacto depende como veremos en la sección 5.1 de los otros parámetros que definen el modelo) el sistema no evoluciona hacia un punto fijo, sino que su temperatura y la población de margaritas presentan un comportamiento periódico con el tiempo (Nevison et al., 1999). Para ilustrarlo vamos a analizar con detalle un caso especialmente simple: el punto de equilibrio de las figuras 1 o 2 donde las extensiones de ambos tipos de margaritas son iguales, lo que ocurre para $L = 0.947$. En el apartado 5.1 comprobaremos numéricamente que las conclusiones que obtenemos para este caso particular se pueden generalizar.

Definimos $\Delta\alpha$ (diferencia entre la extensión de margaritas blancas y la de negras) y a (diferencia entre los albedos de las margaritas y el del suelo) mediante

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha_w - \alpha_b \\ a &= a_w - a_g = a_g - a_b = 0.25\end{aligned}\tag{10}$$

y tenemos para el albedo $A = \alpha_w a_w + \alpha_b a_b + \alpha_g a_g = \alpha_w(a_g + a) + \alpha_b(a_g - a) + \alpha_g a_g = a_g + a\Delta\alpha$ con lo que [9] puede escribirse en la forma

$$c \frac{dT}{dt} = SL(1 - a_g - a\Delta\alpha) - \sigma T^4.\tag{11}$$

Vamos a llamar a la extensión de margaritas blancas o negras (idéntica en este caso particular) $\bar{\alpha}$. La temperatura de equilibrio la representaremos por \bar{T} , que corresponde a unas temperaturas locales $\bar{T}_w^4 = -qa + \bar{T}^4$ y $\bar{T}_b^4 = qa + \bar{T}^4$, pues $\overline{\Delta\alpha} = 0$. Supongamos ahora que perturbamos ese estado de equilibrio con una pequeña variación de la temperatura ΔT y de la cobertura de margaritas $\Delta\alpha$. Asumamos que la extensión total de margaritas (y, por tanto, α_g) permanece constante como ocurre en

todos los puntos de equilibrio con coexistencia de ambas especies (figuras 1 y 2), es decir, que $\Delta\alpha_\omega = -\Delta\alpha_b = \Delta\alpha/2$. En estas condiciones [11] se transforma en

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{4\sigma\bar{T}^3}{c}\Delta T - \frac{SLa}{c}\Delta\alpha \quad [12]$$

mientras que, de [1], tenemos para $\Delta\alpha$,

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = \alpha_g(\alpha_\omega\beta(T_\omega) - \alpha_b\beta(T_b)) - \gamma\Delta\alpha \quad [13]$$

Y, simplificando un poco la notación ($\beta(\bar{T}_i) \equiv \bar{\beta}_i, i = \omega, b$),

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = \alpha_g \left((\bar{\alpha}_\omega + \Delta\alpha_\omega)(\bar{\beta}_\omega + \Delta\beta_\omega) - (\bar{\alpha}_b + \Delta\alpha_b)(\bar{\beta}_b + \Delta\beta_b) \right) - \gamma\Delta\alpha \quad [14]$$

En el equilibrio siempre se cumple $\bar{\beta}_\omega = \bar{\beta}_b = \gamma/\alpha_g$, como se deduce fácilmente de las dos primeras ecuaciones de [1] y además estamos suponiendo $\bar{\alpha}_\omega = \bar{\alpha}_b$ con lo que $\bar{\alpha}_\omega\bar{\beta}_\omega - \bar{\alpha}_b\bar{\beta}_b = 0$. Si despreciamos los productos de dos perturbaciones, la ecuación [14] queda reducida a

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = \alpha_g\bar{\alpha}(\Delta\beta_\omega - \Delta\beta_b) \quad [15]$$

Ahora, de [2], $\Delta\beta_\omega = -2k(\bar{T}_\omega - T_{opt})\Delta T_\omega$ y una expresión análoga se obtiene para $\Delta\beta_b$. Por otro lado, de la ecuación [3], $4\bar{T}_\omega^3\Delta T_\omega = qa\Delta\alpha + 4\bar{T}^3\Delta T$ y $4\bar{T}_b^3\Delta T_b = qa\Delta\alpha + 4\bar{T}^3\Delta T$, con lo que

$$\begin{aligned} \Delta\beta_\omega &= -\frac{kqa}{2\bar{T}_\omega^3}(\bar{T}_\omega - T_{opt})\Delta\alpha - \frac{2k\bar{T}^3}{\bar{T}_\omega^3}(\bar{T}_\omega - T_{opt})\Delta T \\ \Delta\beta_b &= -\frac{kqa}{2\bar{T}_b^3}(\bar{T}_b - T_{opt})\Delta\alpha - \frac{2k\bar{T}^3}{\bar{T}_b^3}(\bar{T}_b - T_{opt})\Delta T \end{aligned} \quad [16]$$

Puesto que en el equilibrio $\bar{T}_b - T_{opt} = -(\bar{T}_\omega - T_{opt}) \equiv \epsilon > 0$ y poniendo $(1/\bar{T}_\omega^3 + 1/\bar{T}_b^3) \equiv \mu > 0$ tenemos

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = \frac{\alpha_g \bar{\alpha} k q a \epsilon \mu}{2} \Delta\alpha + 2\alpha_g \bar{\alpha} k \bar{T}^3 \epsilon \mu \Delta T \quad [17]$$

Las ecuaciones [12] y [17] constituyen un sistema lineal homogéneo cuyas soluciones presentarán unas propiedades determinadas por la matriz

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{4\sigma\bar{T}^3}{c} & -\frac{SLa}{c} \\ 2\alpha_g \bar{\alpha} k \bar{T}^3 \epsilon \mu & \frac{\alpha_g \bar{\alpha} k q a \epsilon \mu}{2} \end{pmatrix} \quad [18]$$

y, en concreto por su traza

$$Tr\mathcal{L} = -\frac{4\sigma\bar{T}^3}{c} + \frac{\alpha_g \bar{\alpha} k q a \epsilon \mu}{2} \quad [19]$$

y su discriminante

$$D = (Tr\mathcal{L})^2 - 4det\mathcal{L} = \left(\frac{4\sigma\bar{T}^3}{c} + \frac{\alpha_g \bar{\alpha} k q a \epsilon \mu}{2}\right)^2 - 8\frac{SLa\alpha_g \bar{\alpha} k \bar{T}^3 \epsilon \mu}{c} \quad [20]$$

La figura 3 muestra, para $\gamma = 0.3$, la evolución de la traza y el discriminante en función de c en el entorno del punto de equilibrio en que la población de margaritas de ambos tipos coincide. Puede verse que el discriminante permanece siempre negativo, con lo que los valores propios de [18] serán dos complejos conjugados. Mientras la traza es negativa, para valores pequeños de c , la parte real será negativa y las soluciones del sistema representan un movimiento amortiguado. A partir de cierto punto, en este caso alrededor de $c = 150 JK^{-1}m^{-2}$, la traza es positiva y el punto de equilibrio ya no es estable.

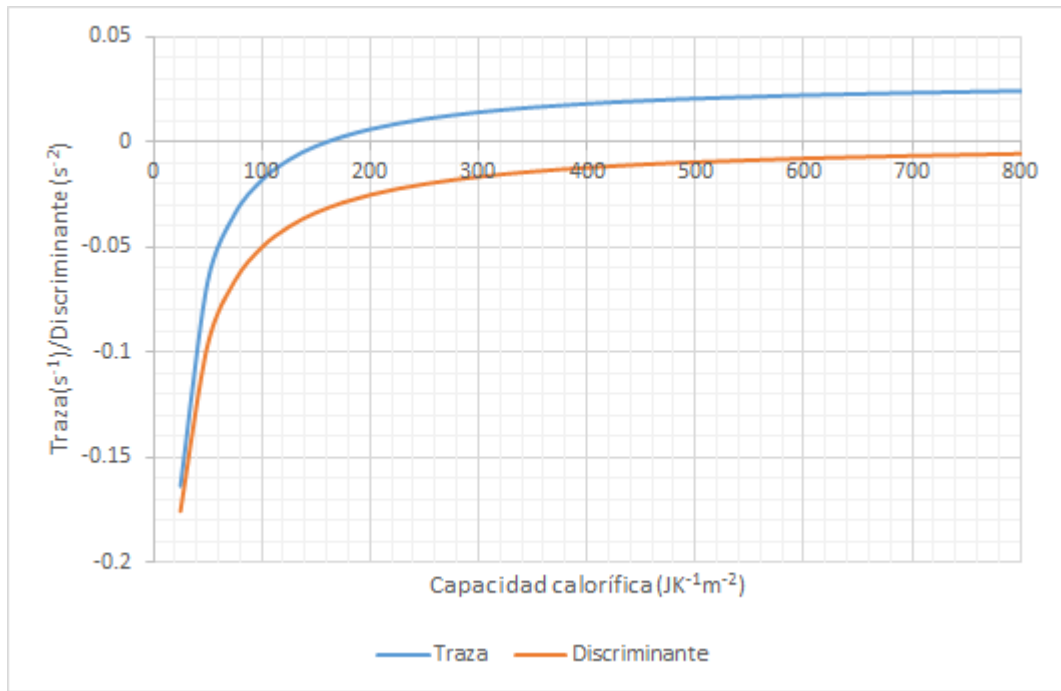


Figura 3. Variación de la traza y el discriminante de [18] en función de c para $\gamma = 0.3$ y $L = 0.947$.

4.- Dinámica del modelo modificado.

Con las modificaciones introducidas, el sistema completo de ecuaciones con las que trabajaremos en adelante es

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_w}{dt} &= \alpha_w(\alpha_g\beta(T_w) - \gamma) \\ \frac{d\alpha_b}{dt} &= \alpha_b(\alpha_g\beta(T_b) - \gamma) \\ c \frac{dT}{dt} &= SL(1 - A) - \varphi\sigma T^4\end{aligned}\tag{12}$$

Suponemos, además, que siempre hay una cantidad mínima de cada tipo de margaritas del 1%, de manera que haya suficientes “semillas” de cada variedad para asegurar su desarrollo si las condiciones son favorables.

En los análisis sucesivos vamos a variar tres parámetros: la capacidad calorífica c del planeta, la vida media de las margaritas (a través de γ) y la intensidad del efecto invernadero mediante φ_∞ .

Habitualmente se supone que γ se expresa en años^{-1} , mientras que la unidad de tiempo presente en los parámetros de radiación es el s^{-1} . Podemos expresar la tercera ecuación de [12] en años^{-1} , lo que nos obligará a tomar valores de c del orden de $10^{10} JK^{-1}m^{-2}$ para hallar efectos interesantes en el modelo o podemos incorporar en c el factor de cambio de unidades y trabajar con valores de, como mucho, alrededor de $10^3 JK^{-1}m^{-2}$. Será este último el criterio que sigamos. Mantendremos la denominación de “año” para la unidad de tiempo, aunque podría ser más preciso hablar de ciclo medio de vida de las margaritas o de “generaciones de margaritas”.

Por lo que respecta los parámetros γ y φ_∞ , le asignaremos a cada uno de ellos tres niveles: $\gamma = 0.2$, $\gamma = 0.3$ y $\gamma = 0.4$ (de mayor a menor vida media de las margaritas) y

$\varphi_{\infty} = 1$ (sin efecto invernadero), $\varphi_{\infty} = 0.8$ y $\varphi_{\infty} = 0.6$. En ausencia de margaritas, un valor de $\varphi_{\infty} = 0.6$ reduce la energía emitida por el planeta alrededor del 25 % respecto de la que emitiría en ausencia de efecto invernadero.

Las condiciones iniciales serán siempre de un 10 % de cobertura tanto para las margaritas blancas como para las negras y una temperatura de 300 K. Se llevará a cabo la integración de las ecuaciones, salvo que se indique lo contrario, para las primeras 20000 unidades de tiempo.

4.1- Luminosidad constante.

Vamos a analizar, en primer lugar, la dinámica del modelo *Daisyworld* modificado cuando la luminosidad de la estrella permanece constante. Para ello, asumimos ahora que L se mantiene igual a 1. La figura 4 recoge tres formas de evolución de la temperatura en función del parámetro c . Las dos primeras muestran un periodo transitorio más o menos largo, al cabo del cual se estabiliza la temperatura (y la extensión de los dos tipos de margaritas) en un punto fijo del modelo. En nuestro ejemplo coexisten las dos especies, pero podríamos llegar a situaciones en las que solo una especie sobrevive o en la que no hay vida en el planeta. La figura 4 c, en cambio, corresponde a una oscilación que se mantiene en el tiempo y afecta tanto a la temperatura como a la extensión de margaritas. Estas oscilaciones corresponden a las descritas por Nevison et al. (1999) y pueden interpretarse como una representación de la variabilidad climática interna de nuestro modelo. Como se señala en el mencionado artículo y comprobaremos en el siguiente apartado, la existencia de tales oscilaciones requieren que las condiciones de luminosidad permitan la coexistencia de ambos tipos de margaritas, lo que supone que están presentes para valores de luminosidad situadas, aproximadamente, entre $L = 0.7$ y $L = 1.3$.

Figura 4a. Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 2000 intervalos de tiempo para

$$\begin{aligned} L &= 1 \\ c &= 25 \\ \gamma &= 0.3 \\ \varphi_{\infty} &= 1 \end{aligned}$$

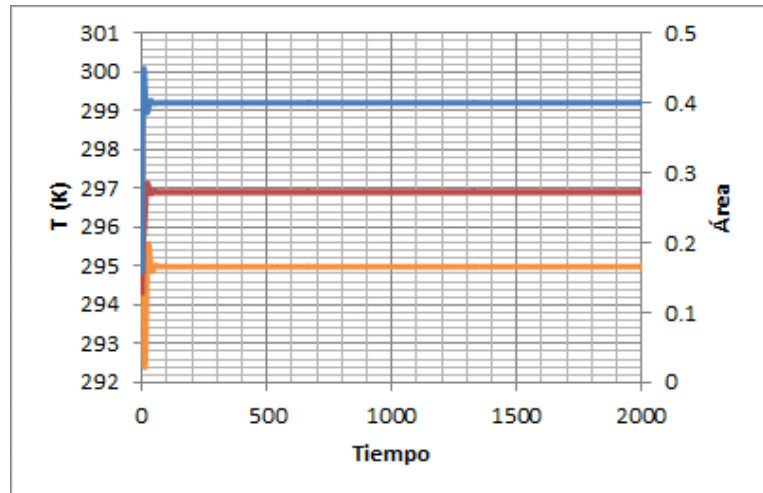


Figura 4b. Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 2000 intervalos de tiempo para

$$\begin{aligned} L &= 1 \\ c &= 150 \\ \gamma &= 0.3 \\ \varphi_{\infty} &= 1 \end{aligned}$$

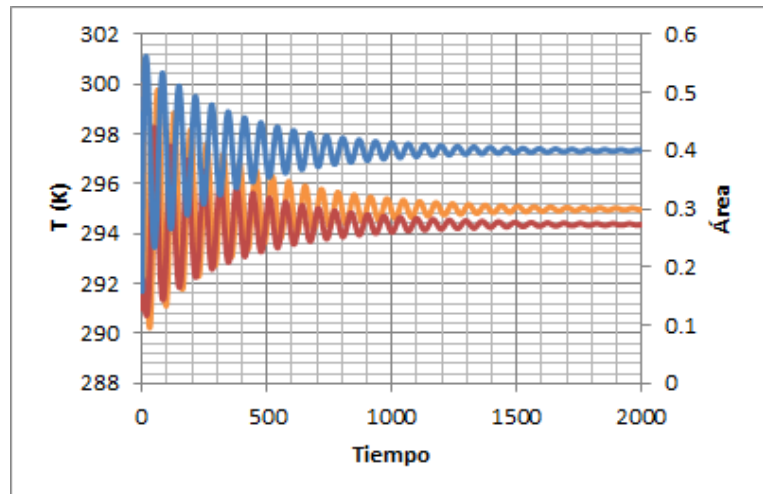
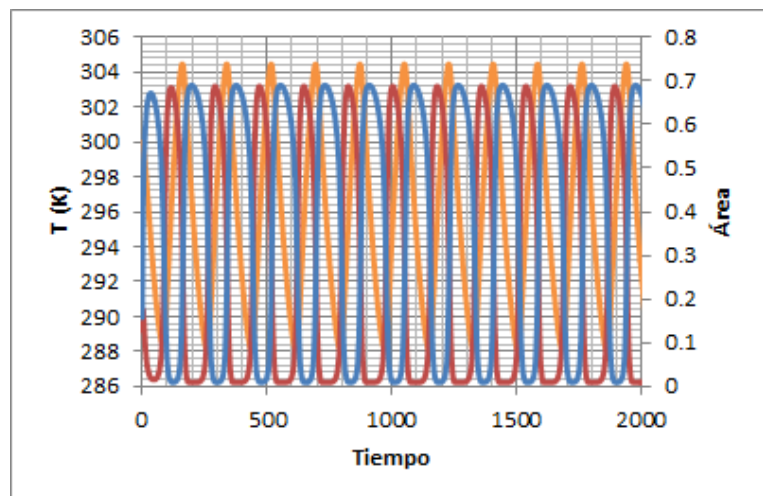


Figura 4c. Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 2000 intervalos de tiempo para

$$\begin{aligned} L &= 1 \\ c &= 625 \\ \gamma &= 0.3 \\ \varphi_{\infty} &= 1 \end{aligned}$$



La razón de que estas aparezcan a partir de cierto valor de c está en la existencia de dos tiempos de respuesta: tiempo de respuesta climático, vinculado a c , y tiempo de desarrollo de la población de margaritas, parámetro que podemos estimar por $1/\gamma$ (Nevison et al., 1999; Viola et al., 2013; Rombouts y Ghil, 2015). Cuando el tiempo de respuesta de la temperatura del planeta es suficientemente lento, las señales térmicas que reciben las margaritas y que guían su crecimiento están desfasadas y las alteraciones en su población van más allá de las que deberían llevar al equilibrio, lo que, a su vez, genera un desplazamiento de la temperatura de su posición de equilibrio. De este razonamiento se deduce que las características de las oscilaciones deben depender de c y de γ . Nuestro objetivo es encontrar, para distintos valores de γ y φ_∞ , el valor de c a partir del cual se producen las oscilaciones permanentes, así como el modo en que cada uno de los tres parámetros mencionados afecta al periodo y la amplitud de las mismas. Para ello, en cada simulación descartamos los 2000 primeros puntos para evitar en lo posible el régimen transitorio antes de efectuar los correspondientes cálculos. Los resultados se muestran en la figura 5.

Observamos, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 4.2, que hay un valor mínimo de c para que se produzcan las oscilaciones y que este umbral crece apreciablemente con γ en el caso de que el efecto invernadero sea intenso. Para valores menos importantes de efecto invernadero apenas se percibe variación.

Por lo que respecta a los periodos, aumentan con c y disminuyen con φ_∞ (crecen con el efecto invernadero), a la vez que disminuyen con γ para valores débiles de efecto invernadero y crecen para un efecto invernadero más intenso. El aumento de los periodos de oscilación con c era previsible de acuerdo con la expresión del discriminante dado por la ecuación [20]. Más relevante resulta el hecho de que la respuesta del sistema a las variaciones de γ cambie con la mayor o menor intensidad del efecto invernadero. Es un ejemplo de cómo el crecimiento del efecto invernadero puede provocar resultados que van más allá del que cabía esperar: un aumento de temperatura.

Figura 5 a. Variación del periodo de las oscilaciones permanentes e inicio de las mismas en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_{∞} .

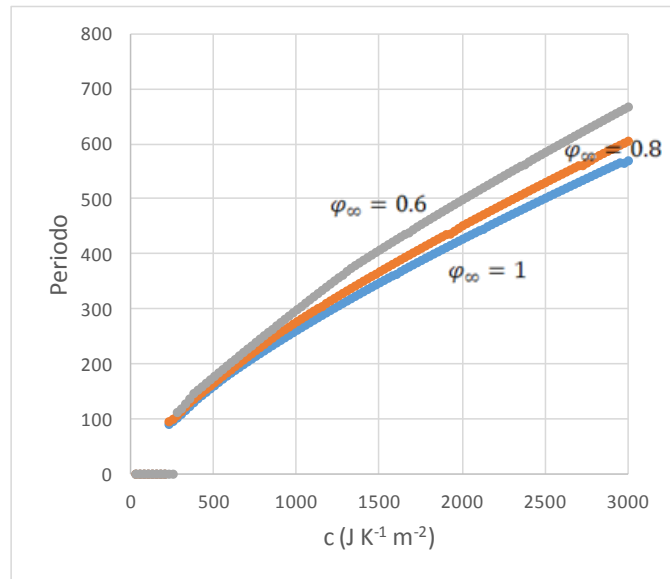


Figura 5 b. Variación del periodo de las oscilaciones permanentes e inicio de las mismas en función de c para $\gamma = 0.3$ y distintos valores de φ_{∞} .

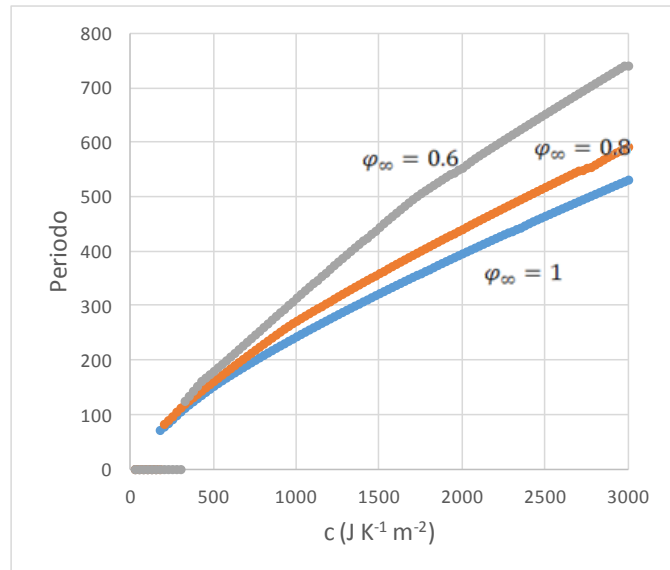
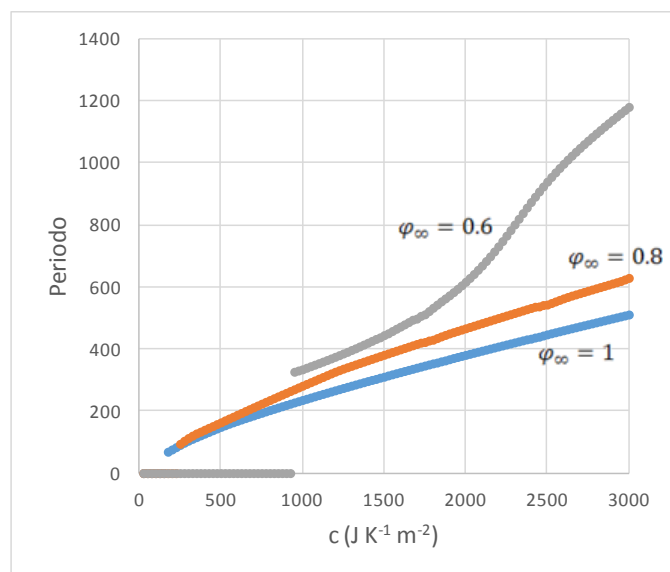


Figura 5 c. Variación del periodo de las oscilaciones permanentes e inicio de las mismas en función de c para $\gamma = 0.4$ y distintos valores de φ_{∞} .



La figura 6 representa las amplitudes de las oscilaciones (valores máximos, mínimos y medios de la temperatura, cuando se han estabilizado) en función de c y para los mismos valores anteriores de γ y φ_{∞} . Observamos que las amplitudes decrecen con γ y tienden a ser independientes de φ_{∞} para valores altos de c . Sin embargo, para valores pequeños de la capacidad calorífica del planeta, las amplitudes aumentan con φ_{∞} , es decir, a medida que el efecto invernadero es menos intenso. Además, en esta región las temperaturas medias son tanto más bajas cuanto mayor es el efecto invernadero. El efecto regulador de las margaritas que puede apreciarse en la zona de convivencia de ambos tipos (figura1) se traduce ahora en una disminución de la temperatura al aumentar el efecto invernadero, del mismo modo que allí un incremento de la luminosidad se traducía en un enfriamiento del planeta. Vemos también que la disminución de la amplitud de las oscilaciones a medida que el efecto invernadero crece es especialmente importante cuando la vida media de las margaritas es muy corta.

De las figuras 5 y 6 deducimos que un efecto invernadero suficientemente intenso es capaz de aumentar el periodo de las oscilaciones y, al menos para valores pequeños de c , disminuir su amplitud, es decir, reduce la variabilidad interna del sistema. Es importante remarcar que la existencia de esta variabilidad no implica que la propiedad de autorregulación del modelo original se haya perdido. Vemos que la temperatura media se mantiene alrededor de la temperatura óptima de desarrollo de las margaritas, aunque con oscilaciones del orden de $20 K$.

Figura 6 a. Variación de la amplitud de las oscilaciones (la línea superior representa los máximos de temperatura, la inferior los mínimos y la intermedia el promedio de la variable) en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_∞ .

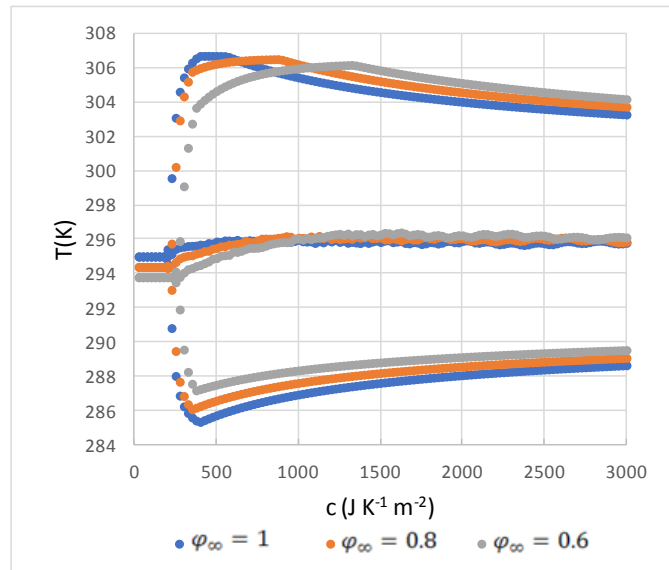


Figura 6 b. Variación de la amplitud de las oscilaciones (la línea superior representa los máximos de temperatura, la inferior los mínimos y la intermedia el promedio de la variable) en función de c para $\gamma = 0.3$ y distintos valores de φ_∞ .

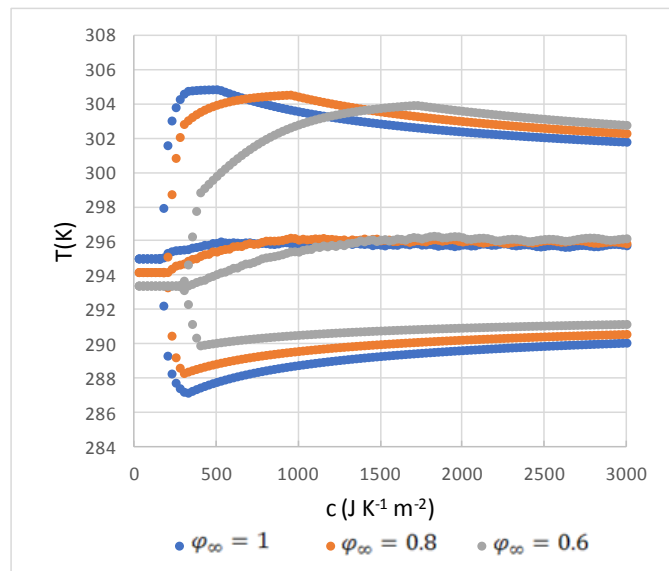
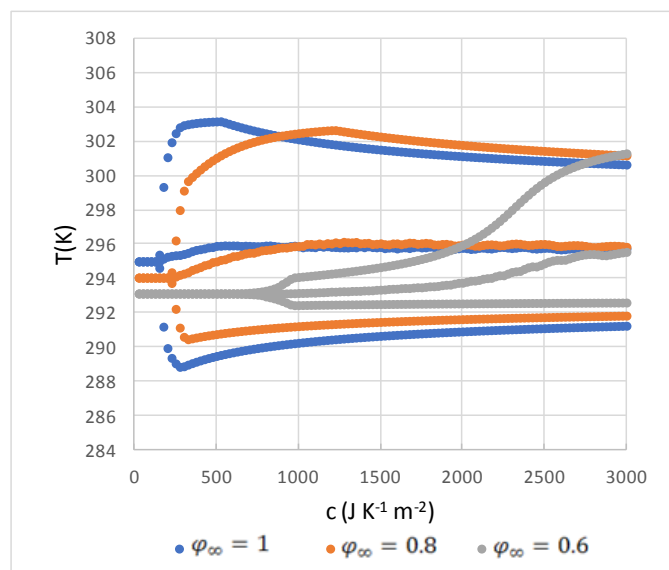


Figura 6 c. Variación de la amplitud de las oscilaciones (la línea superior representa los máximos de temperatura, la inferior los mínimos y la intermedia el promedio de la variable) en función de c para $\gamma = 0.4$ y distintos valores de φ_∞ .



4.2.- Variación lineal de la luminosidad.

En la versión original del modelo *Daisyworld* se suponía que la luminosidad de la estrella variaba de forma lineal con el tiempo para poner de manifiesto la capacidad de las margaritas para estabilizar la temperatura del planeta. En el caso de la Tierra, variaciones en la radiación recibida de periodo suficiente largo en comparación con la escala temporal que estemos analizando, como las derivadas de cambios en los parámetros de la órbita cuando estudiamos periodos climáticos de algunos miles de años, podrían representarse de este modo. En este apartado analizaremos el modo en que el modelo modificado reacciona a una dependencia entre la luminosidad y el tiempo de la forma

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000} \quad [13]$$

Con un intervalo de integración de 0 a 10000, la energía recibida de la estrella varía desde $0.1S$ hasta $2.1S$, donde S es la constante solar (ecuación [1]), rango suficiente para abarcar todo el intervalo donde es posible la vida de las margaritas. La pendiente de la recta [13] se eligió de modo que la variación de L con t sea suficientemente lenta como para mantenernos cerca del equilibrio (aunque este puede estar ahora representado por oscilaciones periódicas y no por puntos fijos). En particular, para valores pequeños de c , la ecuación [13] permite reproducir las curvas de las figuras 1 y 2.

La figura 7 muestra la evolución de la temperatura y de la cobertura de ambos tipos de margaritas para dos valores de c : 150 y $650 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-2}$. En estos dos ejemplos no consideramos efecto invernadero y fijamos el valor de γ en 0.3 . Igual que ocurría en el modelo *Daisyworld* original (en un planeta sin capacidad calorífica), el primer ejemplo (figura 7 a) presenta un intervalo en que la temperatura no crece con la luminosidad e incluso llega a decrecer ligeramente. El segundo caso (figura 7b), en cambio, muestra oscilaciones de temperatura, que no abarcan todo el intervalo en el que existe vida en el planeta. Las oscilaciones aparecen en un rango de luminosidad situado, aproximadamente, entre $L = 0.7$ y $L = 1.3$ como mencionábamos antes y como indican Nevison et al. (1999).

Figura 7 a. Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 6000 intervalos de tiempo para

$c = 150 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-2}$,
 $\gamma = 0.3$ y $\varphi_{\infty} = 1$
 con luminosidad creciente

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$

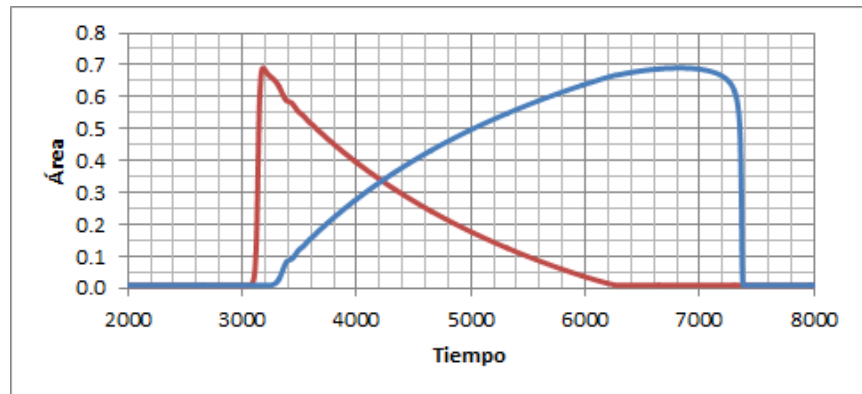
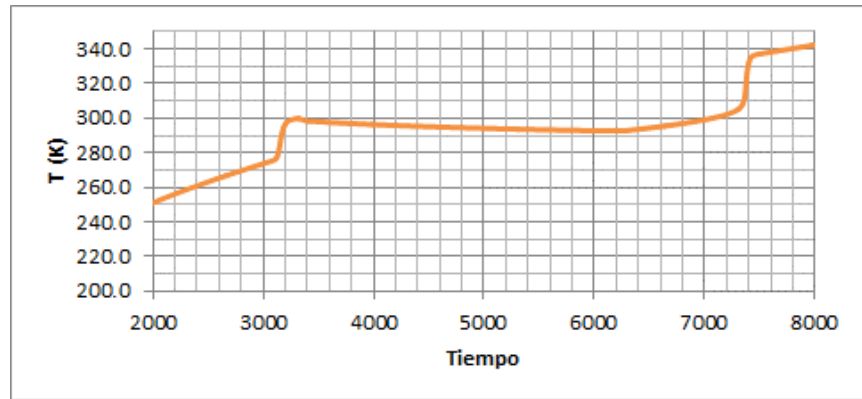
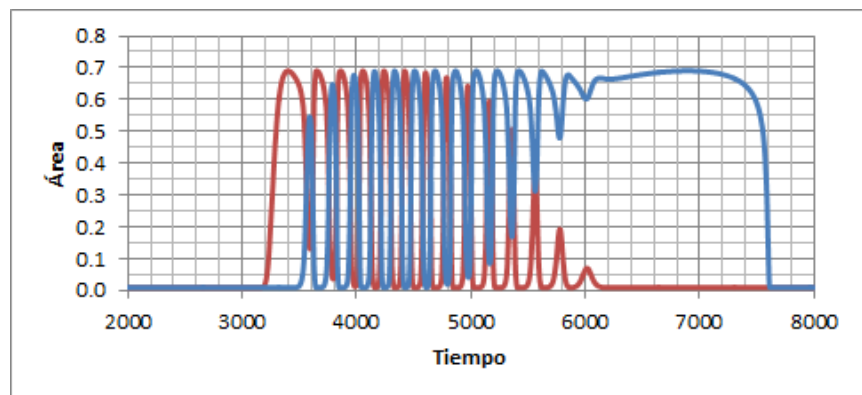
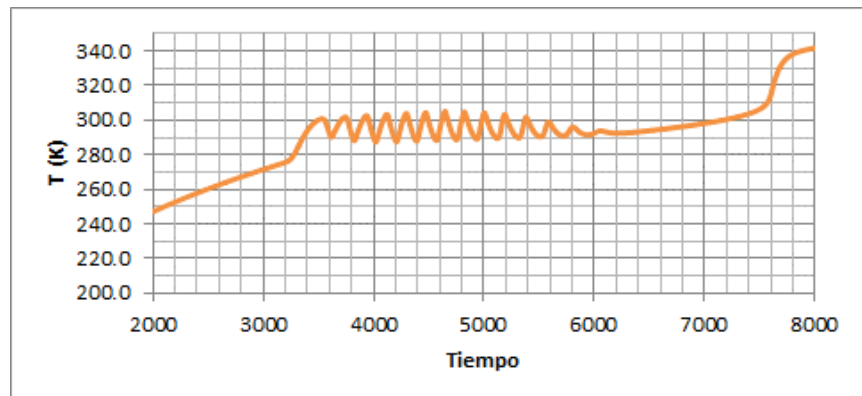


Figura 7 b. Evolución de la temperatura (línea amarilla), de la extensión de las margaritas blancas (línea azul) y negras (línea roja) en 6000 intervalos de tiempo para

$c = 650 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-2}$,
 $\gamma = 0.3$ y $\varphi_{\infty} = 1$
 con luminosidad creciente

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$



Sigue siendo cierto que necesitamos un valor mínimo de capacidad calorífica del planeta para que las oscilaciones tengan lugar y puede observarse también que su amplitud alcanza un máximo para valores cercanos a $L = 1$, en tanto que disminuye hacia los extremos del intervalo donde son posibles. Vemos ahora más claramente cómo la existencia de oscilaciones autosostenidas no altera la capacidad reguladora del sistema. La presencia de una capacidad calorífica en el planeta cambia el modo en que tal regulación se lleva a cabo, pero la temperatura se mantiene próxima al valor óptimo que se obtenía en el modelo sin capacidad calorífica allí donde son posibles las oscilaciones y sigue la curva habitual fuera de esta zona, es decir fuera, aproximadamente, de la región de luminosidades donde pueden coexistir ambos tipos de margaritas.

Que la respuesta del sistema modificado sea similar al original en lo que se refiere a su capacidad para regular la temperatura del planeta, no supone que no existan ciertos cambios en los valores numéricos. Nevison et al. (1999) mencionan que el intervalo donde se producen oscilaciones depende del valor de la capacidad calorífica y de la vida media de las margaritas. Además, parece lógico que tanto el efecto invernadero como la vida media de las margaritas afecten al intervalo de luminosidad de la estrella en el cual es posible la vida.

Las figuras 8 *a*, *b* y *c*, representan, para los tres valores considerados de vida media de las margaritas y de efecto invernadero, la longitud del intervalo de luminosidades durante el cual están presentes las margaritas, con oscilaciones en su población o no. Puede verse como, para cada valor de γ , este intervalo crece con el calor específico y disminuye con el efecto invernadero. La capacidad de las margaritas para estabilizar la temperatura tiene que hacer frente ahora no solo al incremento de la radiación incidente, también al efecto invernadero. Aunque la regulación sigue existiendo, el crecimiento de la intensidad del efecto invernadero la vuelve menos eficaz en el sentido de que se reduce el intervalo de luminosidades en que resulta efectiva. El aumento de la inercia térmica del planeta, de la capacidad de absorber calor sin generar un aumento de temperatura, compensa parcialmente esta reducción.

Figura 8 a. Longitud de intervalo de luminosidad (ΔL) en el que existe al menos una de las especies de margaritas en función de c para $\gamma = 0.2$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$

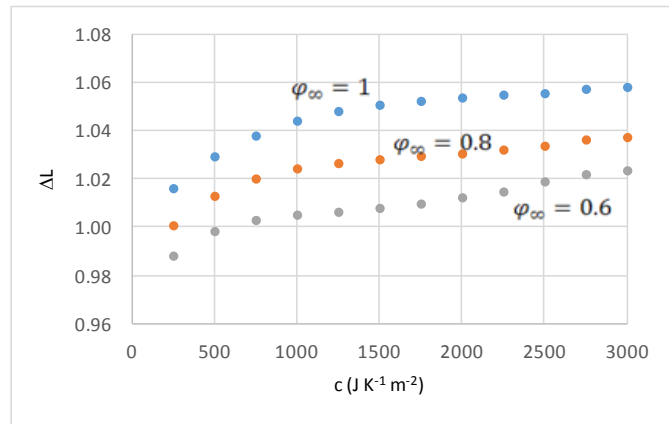


Figura 8 b. Longitud de intervalo de luminosidad (ΔL) en el que existe al menos una de las especies de margaritas en función de c para $\gamma = 0.3$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$

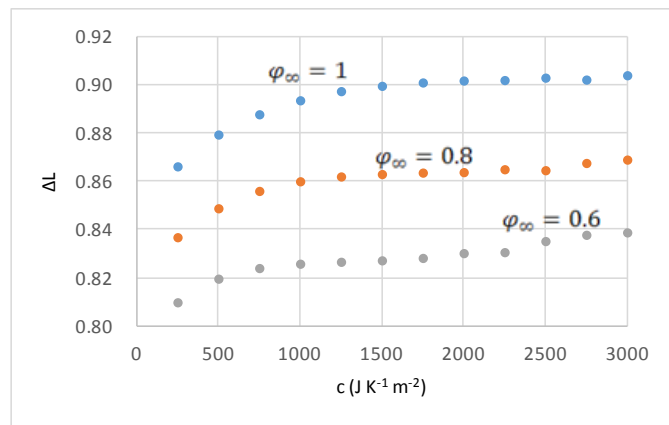


Figura 8 c. Longitud de intervalo de luminosidad (ΔL) en el que existe al menos una de las especies de margaritas en función de c para $\gamma = 0.4$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$

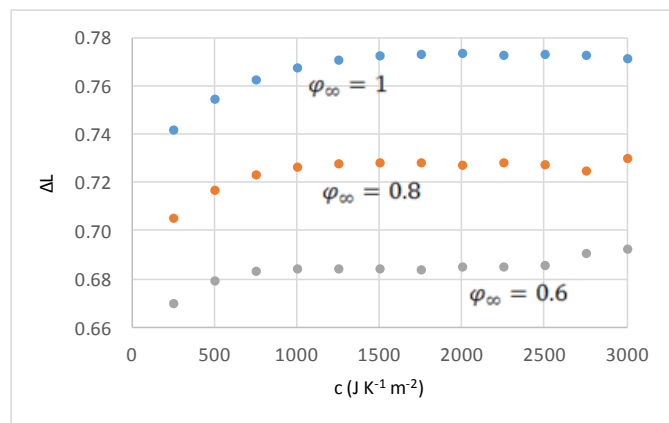
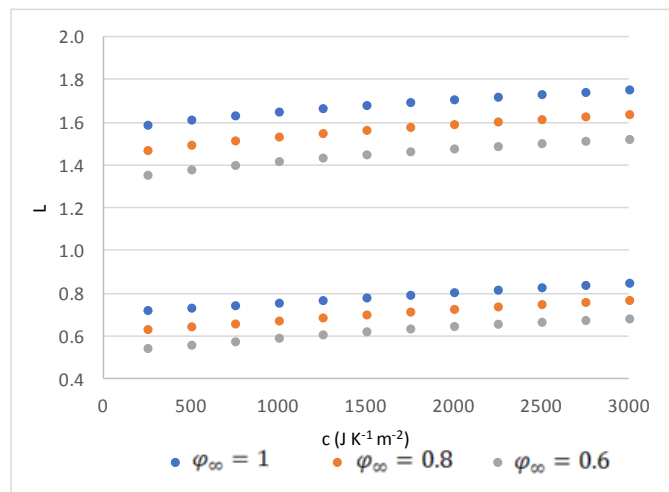


Figura 8 d. Valores de L correspondientes al inicio y final de la población de margaritas en función de c para $\gamma = 0.3$ y distintos valores de φ_∞ con una variación lineal de L

$$L = 0.1 + \frac{t}{5000}$$



La figura 8 *d* nos muestra con algo más de detalle la influencia del efecto invernadero y de la capacidad calorífica sobre el intervalo de luminosidades en el que existen margaritas. Representa, para $\gamma = 0.3$, los instantes de inicio y extinción de la vida. Se observa que la zona de existencia de las margaritas se desplaza hacia valores menores de luminosidad a medida que aumenta el efecto invernadero y lo hace en mayor medida en su límite superior, de modo que se acorta el intervalo. La respuesta del sistema a un aumento de intensidad de efecto invernadero es la esperada: favorece la aparición de vida cuando la luminosidad es baja, pues eleva la temperatura hasta hacer viables las margaritas negras y dificulta la existencia de vida para luminosidades altas desplazando la temperatura hacia valores donde incluso las margaritas blancas tienen problemas para sobrevivir. Por otro lado, un aumento de la capacidad calorífica del planeta eleva muy levemente el intervalo de vida de las margaritas. La inercia térmica del planeta retrasa el inicio de la vida y retrasa también, en una cantidad ligeramente mayor, su final, como consecuencia ambas cosas de la atenuación que supone tanto para el incremento como para la disminución de la temperatura media del planeta.

4.3.- Oscilaciones periódicas de la luminosidad.

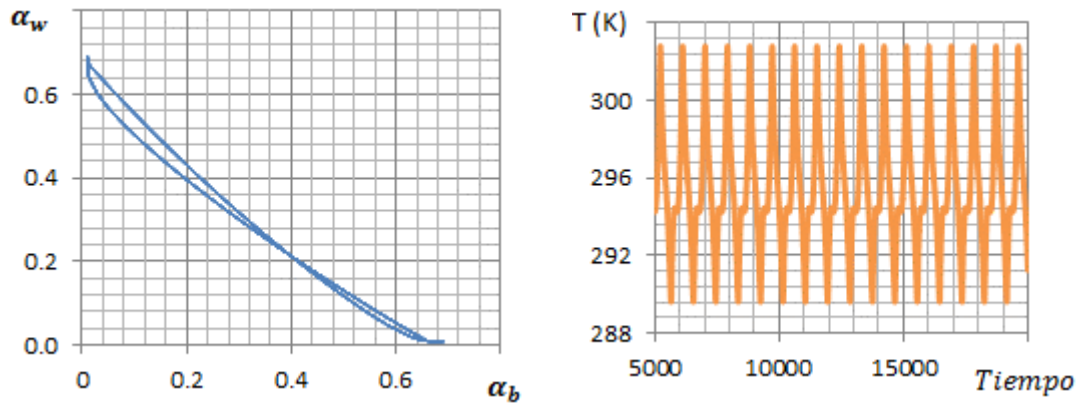
Hemos visto como la introducción de una capacidad calorífica genera oscilaciones periódicas tanto en las variables del entorno, la temperatura, como en la población de ambos tipos de margaritas. Puesto que nuestro modelo es capaz de producir esta variabilidad interna, podemos plantearnos qué ocurriría si añadimos algún tipo de oscilación externa al sistema. En el caso del clima de la Tierra, la variabilidad interna derivada de la interacción entre sus componentes se superpone con la externa asociada fundamentalmente a factores astronómicos, desde la sucesión de días y noches o las oscilaciones estacionales hasta otras perturbaciones de periodos más largos debidas a periodicidades en los parámetros orbitales.

En este apartado, salvo en la figura 9, fijamos el valor de c en 1000 y el de γ en 0.3. En estas condiciones el modelo genera los movimientos periódicos que describimos en el apartado 5.1. Vamos a estudiar la respuesta del sistema a valores de la luminosidad dados por una expresión de la forma

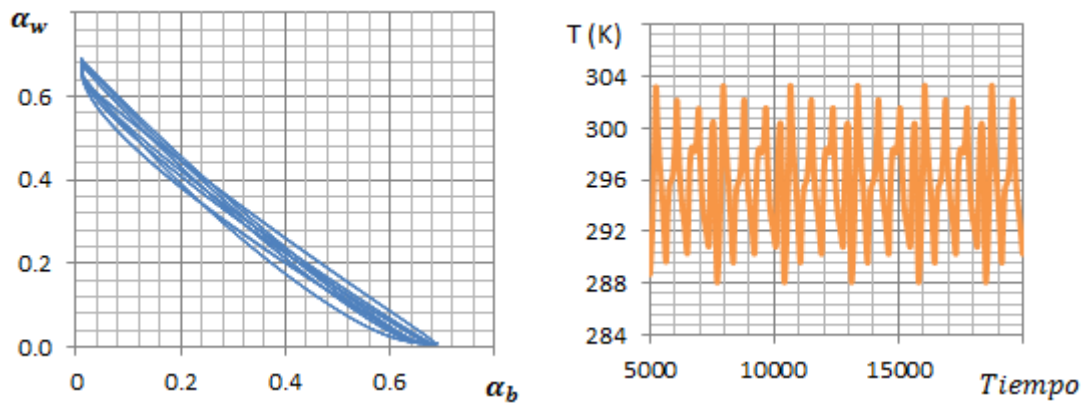
$$L = 1 + l \cos \frac{2\pi}{\tau} t \quad [14]$$

Introducimos así un término oscilatorio en la energía recibida de la estrella cuya amplitud será l y cuyo periodo está representado por τ . Trataremos de determinar cómo influyen en la dinámica del sistema los distintos parámetros implicados, fundamentalmente el efecto invernadero, así como la amplitud y frecuencia de la radiación recibida.

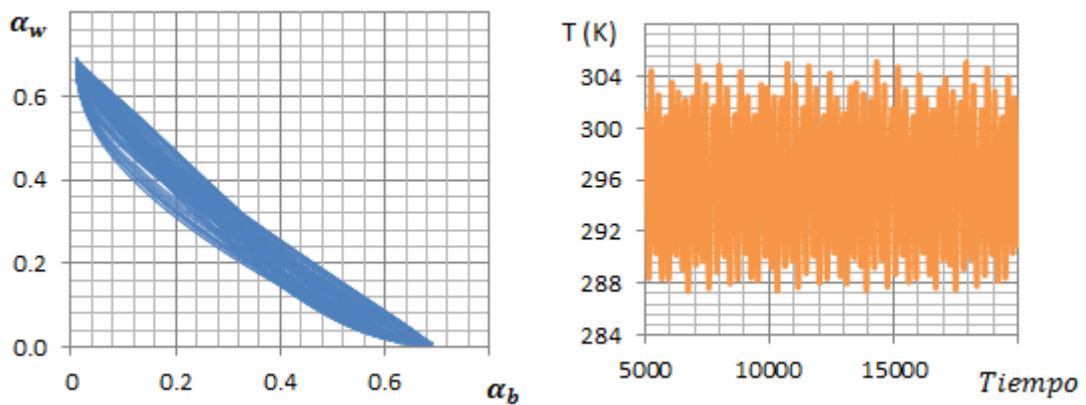
En la figura 9 se incluye un ejemplo de la variedad de comportamientos observados. Se representa la variación de la temperatura a lo largo del tiempo y la trayectoria del sistema en el espacio (α_b, α_w) . En este ejemplo concreto hemos tomado $c = 2000$, $\gamma = 0.3$ y $\varphi_\infty = 1$.



$$\tau = 900, l = 0.32, c = 2000, \gamma = 0.3 \text{ y } \varphi_\infty = 1$$



$$\tau = 900, l = 0.28, c = 2000, \gamma = 0.3 \text{ y } \varphi_\infty = 1$$



$$\tau = 900, l = 0.18, c = 2000, \gamma = 0.3 \text{ y } \varphi_\infty = 1$$

Figura 9. Variación de la temperatura con el tiempo (línea amarilla) y trayectoria del sistema en el espacio (α_b, α_w) , línea azul, entre los instantes de tiempo 5000 y 20000 para una radiación externa con $\tau = 900$ y distintos valores de l .

Puede verse que para $l = 0.32$ el movimiento es periódico y sigue siéndolo para $l = 0.28$, si bien en este caso la periodicidad es más compleja y la trayectoria en el espacio (α_b, α_w) presenta varios bucles. Finalmente, para $l = 0.18$ ambas gráficas muestran un movimiento aún más complejo en el que, al menos dentro del intervalo representado, no se observa una periodicidad exacta. Tanto la temperatura como la cobertura de ambos tipos de margaritas muestran una variabilidad no estacionaria, una característica fundamental del sistema climático real que hemos reproducido con un modelo muy elemental.

Un planteamiento análogo se muestra en Viola et al. (2013), donde, además de incorporar al mundo de las margaritas el efecto invernadero, se investiga el efecto de una variación periódica de la energía incidente superpuesta a un incremento lineal de la luminosidad. Con una amplitud del término oscilante del orden de la décima parte del valor de la luminosidad se observa la existencia de valores de este parámetro en los que el sistema muestra un comportamiento caótico, junto con otros intervalos de luminosidad en que presenta una evolución periódica.

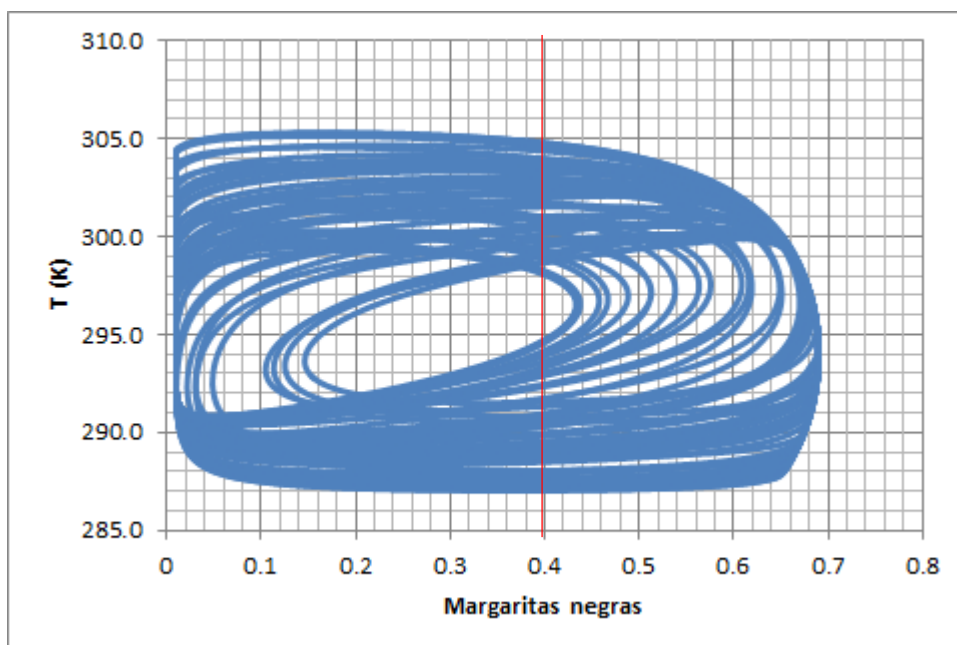


Figura 10. Órbitas del sistema en el espacio (α_b, T) , entre los instantes de tiempo 5000 y 20000 para una radiación externa con $\tau = 700$ y $l = 0.2275$ y línea $\alpha_b = 0.4$ utilizada para hallar el número de órbitas.

Para centrar nuestro análisis en la temperatura del sistema vamos a trabajar, además de con su evolución temporal, con la dependencia de la misma respecto de la población de margaritas negras. Obviamente, conclusiones análogas tendríamos si consideráramos la población de margaritas blancas. En concreto consideramos la intersección de las órbitas del sistema en el espacio (α_b, T) con la recta $\alpha_b = 0.4$ (figura 10 a). Nos centramos en los 20000 primeros intervalos de tiempo, un intervalo grande en comparación con el periodo de las oscilaciones naturales del sistema, que para los parámetros elegidos es de alrededor de 250 unidades de tiempo, y también mucho mayor que el periodo que hemos asignado a las oscilaciones externas. Es posible que las características del movimiento varíen más allá de nuestro límite de integración, pero nuestro objetivo es ver cómo afecta el efecto invernadero a la variabilidad climática de nuestro planeta y lo estudiamos en esta región temporal. Un movimiento periódico presentará únicamente dos puntos de intersección, un movimiento irregular mostrará tantos puntos de intersección como órbitas estén incluidas en el intervalo temporal de integración. Otras opciones intermedias presentarán un pequeño número de puntos de intersección, superior a dos, mostrando algún tipo de periodicidad compleja. Como es natural y puesto que trabajamos con una precisión de una décima de K , no podremos apreciar diferencias entre órbitas separadas por menos de esta cantidad. También es posible que el movimiento sea lo suficientemente complejo para que ciertos bucles de la trayectoria queden fuera de la recta $\alpha_b = 0.4$, de modo que el número de puntos de intersección obtenidos no refleje exactamente la complejidad del movimiento. Una recta más centrada, por otro lado, se situaría en la región donde las órbitas más se solapan, con lo que los resultados perderían precisión. La colocación de la recta de eligió después de múltiples ensayos, aunque en la interpretación de los resultados no hay que perder de vista el verdadero significado de los mismos y el modo en que fueron obtenidos. No se pretende hacer una caracterización detallada y rigurosa del movimiento complejo del sistema, sino obtener un parámetro que nos permita establecer comparaciones de forma sencilla y fácil de interpretar.

El análisis de los siguientes apartados se llevará a cabo haciendo variar el valor de l entre 0.0125 y 0.5 en incrementos de 0.0025. No se ha ido más allá de 0.5 para que la perturbación exterior no sea exageradamente grande respecto de la radiación media

incidente. El periodo τ se ha hecho variar entre 200 y 1000 años, en intervalos de 50 años. Nos mantenemos dentro de valores de periodo comparables a los de la variabilidad interna del modelo.

Para evaluar la influencia del efecto invernadero en la dinámica del mundo de las margaritas sometido a una insolación periódica de han considerado dos valores del parámetro φ_∞ : ausencia de efecto invernadero ($\varphi_\infty = 1$) y $\varphi_\infty = 0.6$.

4.3.1.- Periodicidad del sistema.

De acuerdo con la caracterización del movimiento que explicamos en el apartado anterior, las figuras 11 a y b recogen para cuatro valores de τ (200, 250, 300, 500 y 800) el número de veces que en el plano (T, α_b) la trayectoria del sistema corta a la recta $\alpha_b = 0.4$.

Observamos que a partir de cierto valor de la amplitud l , el movimiento se vuelve periódico. Por debajo de esta amplitud el sistema presenta un comportamiento irregular, con un decrecimiento del número de orbitas a medida que la amplitud de la perturbación de la radiación exterior tiende a cero. En el caso de que el periodo impuesto sea muy similar al natural del sistema ($\tau = 250$ en ausencia de efecto invernadero y $\tau = 300$ con $\varphi_\infty = 0.6$), presenta siempre un movimiento perfectamente regular. La amplitud que delimita el inicio del comportamiento periódico crece con τ . A partir de ese umbral de amplitud es la oscilación de la radiación externa la que determina la evolución del clima del planeta: las margaritas han perdido la capacidad de regular el clima. Como puede observarse en la figura 9, la frecuencia de las oscilaciones es la de la oscilación exterior cuando la amplitud de esta es de 0.32, mientras que aumenta a medida que l decrece y el sistema evoluciona hacia un comportamiento completamente irregular.

La introducción del efecto invernadero no cambia el aspecto general de las curvas, pero la transición hacia movimientos periódicos ocurre para valores de l más pequeños, lo

que sugiere que la capacidad del sistema para contrarrestar las variaciones de la energía externa ha disminuido. Como consecuencia de ello, puede decirse que en las nuevas condiciones, con un intenso efecto invernadero, se amortigua la respuesta caótica del sistema.

Para periodos altos observamos que tras un intervalo relativamente largo de movimiento periódico, aparece un intervalo de amplitudes en el que vuelve a aumentar el número de puntos de corte. No lo hacen tanto como para pensar en movimientos caóticos, pero sí reflejan la existencia de movimientos periódicos complejos, con varios bucles en el espacio (α_b, T) . En realidad, esto ocurre también en la figura 11 a), pero no se muestra en ella porque son necesarios valores de l mayores de 0.5. Con estas amplitudes tan grandes en la oscilación de la radiación exterior, la luminosidad recorre todo el intervalo donde la vida es posible, rebasándolo por ambos lados y cuando el periodo es muy grande, la evolución es lo suficientemente lenta para que las margaritas puedan tener alguna influencia sobre el sistema.

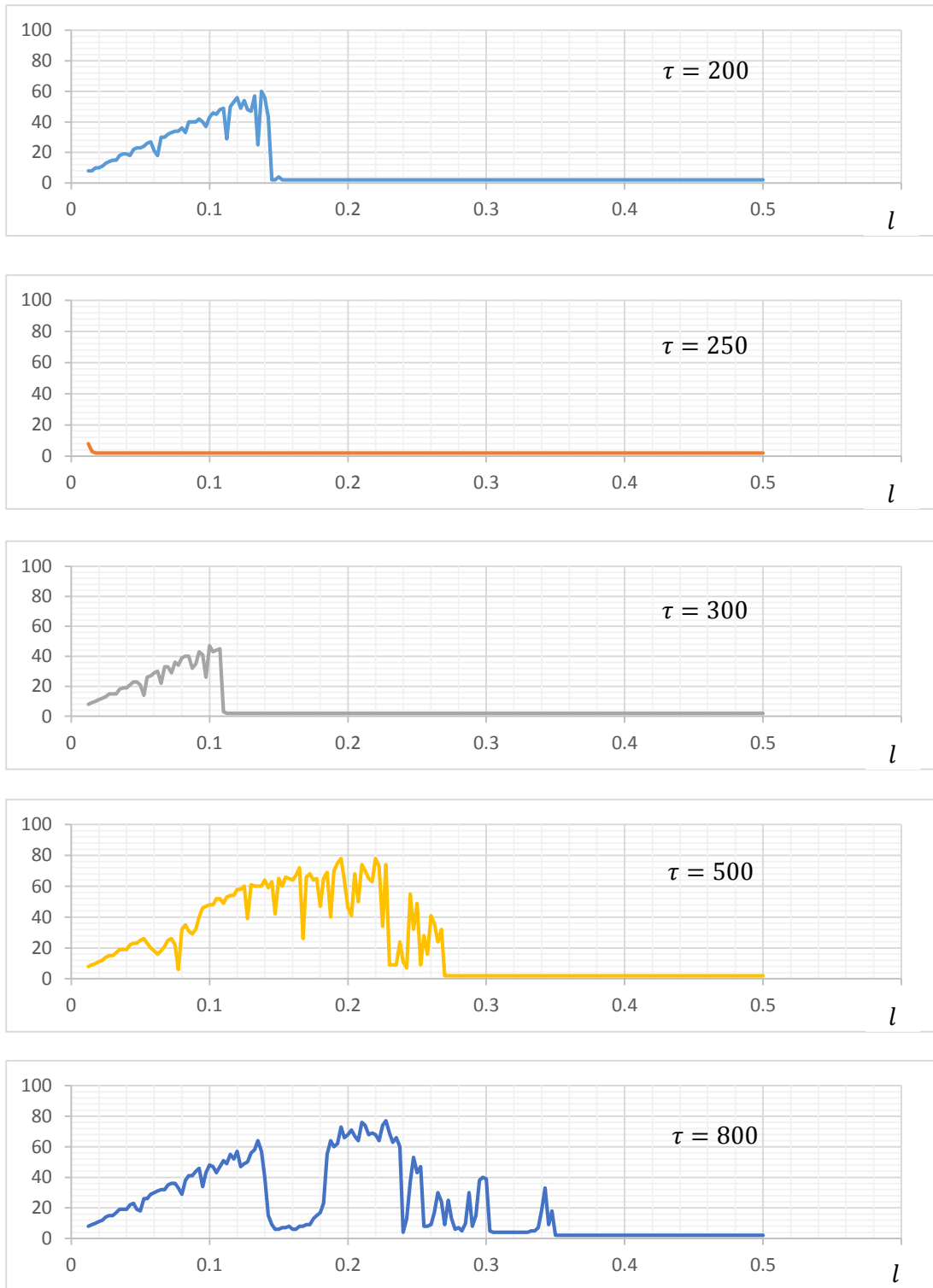


Figura 11 a. Número de puntos de intersección de la trayectoria del sistema en el plano (α_b, T) en función de l con la $\alpha_b = 0.4$ para $\varphi_\infty = 1$, $c = 1000$, $\gamma = 0.3$ y distintos periodos.

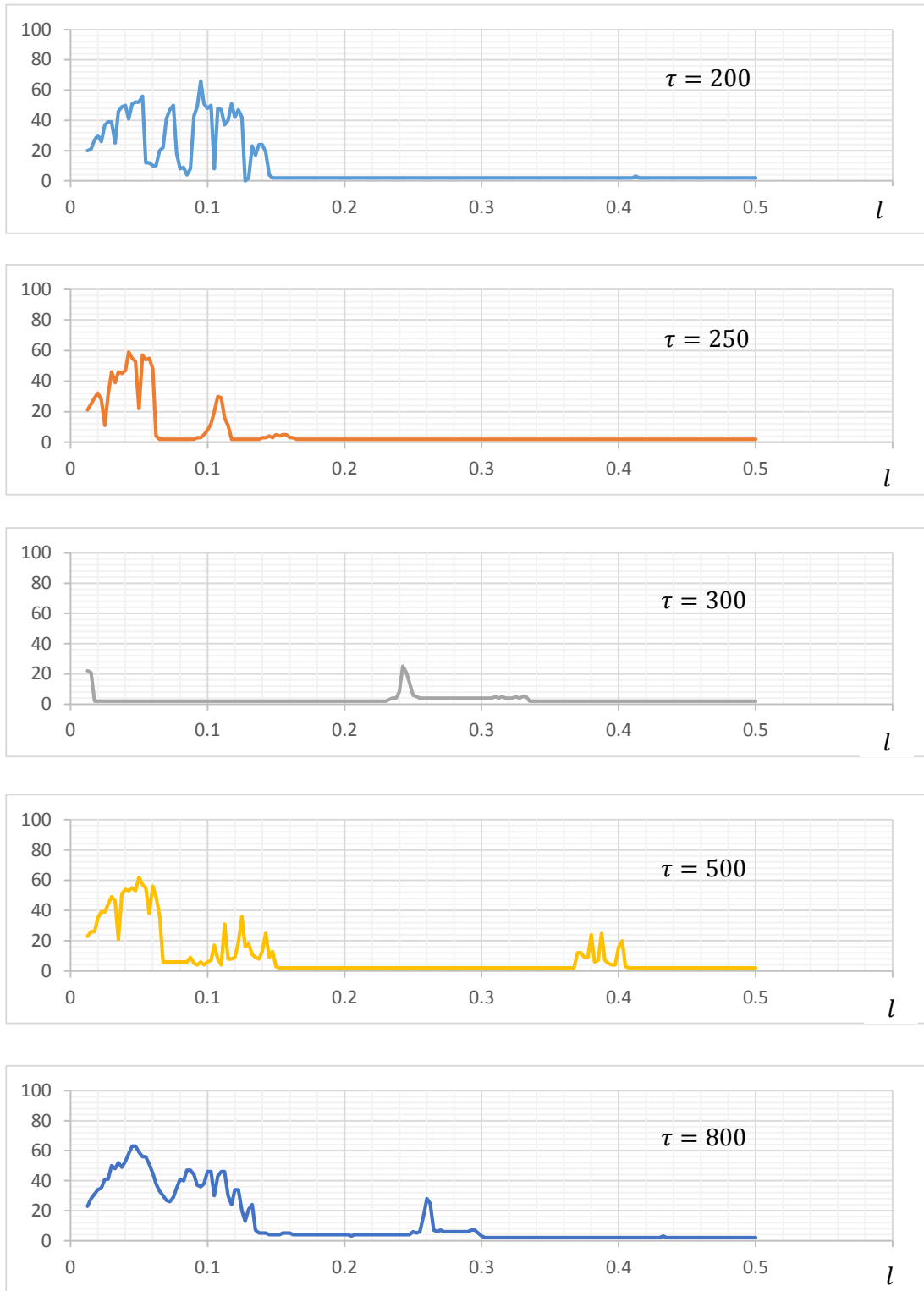


Figura 11 b. Número de puntos de intersección de la trayectoria del sistema en el plano (α_b, T) en función de l con la $\alpha_b = 0.4$ para $\varphi_\infty = 0.6$, $c = 1000$, $\gamma = 0.3$ y distintos periodos.

5.- Conclusiones.

- i) El modelo del mundo de las margaritas sirvió para mostrar cómo un sistema biológico muy sencillo, pero con unas características razonables desde el punto de vista de su desarrollo, es capaz de mantener estable la temperatura del planeta dentro de un cierto rango de variación de constante solar. La idea original del modelo no era la simulación de un sistema tan complejo como el clima de la Tierra y, aunque hemos añadido elementos fundamentales del sistema climático terrestre como la capacidad calorífica y el efecto invernadero, resulta difícil saber si los resultados obtenidos pueden resultar útiles para comprender algún aspecto del clima terrestre. Sin perder de vista estas limitaciones, podemos decir, sin embargo, que el modelo *Daisyworld* modificado comparte con el clima de nuestro planeta algunas características. Por un lado, presenta una variabilidad interna generada a partir de la interacción de sus componentes e independiente de las perturbaciones exteriores y, por otro, reproduce en determinadas condiciones la variabilidad no estacionaria presente en cualquier serie de datos climáticos.
- ii) La existencia de oscilaciones, tanto en la temperatura como en la población de margaritas, requiere un valor mínimo para la capacidad calorífica del planeta. Por debajo de ese umbral el comportamiento del modelo modificado no difiere del *Daisyworld* original. Tanto en un caso como en otro sigue existiendo un efecto de autorregulación de la temperatura del planeta.
- iii) La interacción de la capacidad de autorregulación del sistema con las variaciones en la intensidad del efecto invernadero genera algunos resultados destacados:
 - La capacidad del modelo para estabilizar la temperatura frente a variaciones en la intensidad de la radiación recibida se manifiesta también frente al efecto invernadero, de modo que un aumento en la

intensidad del mismo no siempre se traduce en un incremento de la temperatura media del planeta. El empleo de parte de la capacidad de autorregulación de las margaritas en contrarrestar el efecto invernadero implica una menor eficacia al oponerse a variaciones en la constante solar. Como consecuencia de ello, el aumento del efecto invernadero reduce los intervalos de luminosidad en los que la vida resulta posible.

- Cuando el control de la temperatura se manifiesta en oscilaciones periódicas, el incremento del efecto invernadero aumenta el periodo de las mismas y reduce su amplitud. En este sentido, podemos decir que reduce la variabilidad climática.
- iv) Cuando se introducen oscilaciones forzadas en la radiación incidente la evolución de la temperatura no se ajusta necesariamente a una función periódica. Como norma general, cuando la amplitud de la perturbación es pequeña, la variabilidad se vuelve no estacionaria y su periodo se mantiene próximo al “natural” del modelo (el de las oscilaciones internas). La excepción se produce cuando el periodo de las oscilaciones impuestas es múltiplo este periodo “natural”, pues el sistema recupera entonces una cierta periodicidad más o menos compleja. Lo mismo ocurre al aumentar la amplitud de la perturbación superpuesta; aunque en este caso el periodo de las oscilaciones en la temperatura y en la población de margaritas está determinado por la radiación exterior.
- v) En las condiciones del apartado anterior, incrementar el efecto invernadero se traduce en una reducción del rango de amplitudes para las que se observa un régimen caótico. Si, como hemos señalado, el paso de un régimen no estacionario a uno estacionario es un signo de la pérdida de control de la variabilidad del clima del planeta por parte de las margaritas, resulta que, de nuevo, un aumento del efecto invernadero limita la capacidad de respuesta del sistema frente a perturbaciones externas.

6.- Referencias.

Ackland, G. J., Wood, A. J. (2010). Emergent patterns in space and time from Daisyworld: a simple evolving coupled biosphere–climate model. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1910), 161-179.

Biton, E., Gildor, H. (2012). The seasonal effect in one-dimensional Daisyworld. *Journal of Theoretical Biology* 314 (2012) 145–156.

Dyke, J., Harvey, I. (2005). Hysteresis and the limits of homeostasis: from Daisyworld to phototaxis. In *Advances in Artificial Life* (pp. 241-251). Springer Berlin Heidelberg.

Ghil, M., Childress, S. (1987). *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer-Verlag.

Hartmann D.L., (1994). *Global physical climatology*. International Geophysics series, volume 56. Academic Press, 412 pp.

Henderson-Sellers, A., McGuffie, K. (1987). *Introducción a los modelos climáticos*. Ediciones Omega. Barcelona.

Jascourt, S. D., Raymond, W. H. (1992), Comments on “Chaos in Daisyworld” by X. Zeng et al. *Tellus B*, 44: 243–246. doi: 10.1034/j.1600-0889.1992.t01-1-00007.x

Lovelock, J. E., Margulis, L. (1974). Atmospheric homeostasis by and for the biosphere: the Gaia hypothesis. *Tellus*, 26(1-2), 2-10.

Nevison, B. C., Gupta, V., Klinger, L. (1999). Self-sustained temperature oscillations on Daisyworld. *Tellus B*, 51, 806–814.

Paiva, S. L. D., Savi, M. a, Viola, F. M., Leiroz, A. J. K. (2014). Global warming description using Daisyworld model with greenhouse gases. *Bio Systems*, 125, 1–15. doi:10.1016/j.biosystems.2014.09.008

Rombouts, J., Ghil, M. (2015). Oscillations in a simple climate–vegetation model. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 22(3), 275-288.

Salazar, J., Poveda, G. (2006). Ciclo hidrológico en "El mundo de las margaritas". *Meteorol. Colomb.* 10, 76-85.

Saunders, P. (1994). Evolution without natural selection: further implications of the Daisyworld parable. *Journal of Theoretical Biology*, 166, 4, 365-373.

Schwartz, S. E. (2007). Heat capacity, time constant, and sensitivity of Earth's climate system. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 112(D24).

Stephens, G. L. (2005). Cloud feedbacks in the climate system: A critical review. *Journal of climate*, 18(2), 237-273.

Svirezhev, Y. M., von Bloh, W. (1997). Climate, vegetation, and global carbon cycle: the simplest zero-dimensional model. *Ecological Modelling*, 101(1), 79-95.

Viola, F.M., Savi, M.A., Paiva, S.L.D., Brasil, A.C.P., (2010), Nonlinear dynamics of the Daisyworld. VI national congress of mechanical engineering. Campina Grande, Paraíba (Brazil).

Viola, F.M., Savi, M.A., Paiva, S.L.D., Brasil, A.C.P., (2013), Nonlinear dynamics and chaos of the Daisyworld. *Applied ecology and environmental research* 11(3): 463-490.

Watson, A., Lovelock, J. (1983). Biological homeostasis of the global environment: the parable of Daisyworld. *Tellus B*, 35, 284-289.

Wood, A. J., G. J. Ackland, J. G. Dyke, H. T. P. Williams, and T. M. Lenton (2008), Daisyworld: A review, *Rev. Geophys.*, 46, RG1001, doi: 10.1029/2006RG000217.

Zeng, X., Pielke, R. A. and Eykholt, R. (1990), Chaos in Daisyworld. *Tellus B*, 42: 309–318.
doi: 10.1034/j.1600-0889.1990.t01-2-00001.x