

Estabilidad y Caos en el Sistema Solar

Proyecto Fin de Máster en Física de Sistemas Complejos

07 de Junio de 2012

Autor: Jose Javier Arenas Ferrer

Director: Rafael Ortega Ríos

Tutor: Víctor Alberto Fairén Le Lay

... a la luz que se apaga...

... y a la luz que se enciende...

Agradecimientos

La tarea de los agradecimientos, aunque protocolaria, es la más importante de un trabajo, ya que es la que muestra gratitud, humildad, y calor. Sin estos tres ingredientes, el presente texto no mostraría su existencia, no habría querido mostrarla.

En primer lugar, no habría sido posible la hipótesis de partida que ha desembocado en estas palabras sin el ejemplo de constancia y la fe en mí de Rosa, quien con su amor sube, día a día, mi listón personal. Tampoco la evolución de mis acontecimientos habría seguido la trayectoria que me ha traído aquí sin mi madre, cuya alma científica fue raíz de toda curiosidad que alberga mi espíritu.

Y qué decir de Hugo...

Por otra parte, amigos cuyo término relacional les queda pequeño, como Ángel y Luis, son imprescindibles, no sólo por su hermanada amistad envuelta de eternidad, sino por su estima hacia un intelecto que no la merece.

También agradezco palabras que, sin saberlo, animan a investigar con intensidad y no desfallecer. Expresiones como: “cada vez que te escucho me dan deseos de volver a estudiar” que pertenecen al matemático, renacentista, músico, cómico bilingüe (si fuera menester) y amigo, Manolo.

Y qué no decir de Hugo...

Profesionalmente hablando (lo que no está exento de ciertos lazos afables), debo dar las gracias a Víctor Fairén, quien apoyó y matizó desinteresadamente mi idea inicial del proyecto, algo determinante en su nacimiento. Ricard Solé, coautor del interesantísimo texto “Orden y Caos en Sistemas Complejos”, también ha sido decisivo no sólo por la obra citada, sino por su colaboración en el ofrecimiento de referencias actuales sobre ejemplos de caos en el Sistema Solar.

Por último, agradezco a Rafael Ortega, director del proyecto, su previsibilidad; previsibilidad en exquisita educación, eficacia, humildad, brillantez, profesionalidad y amplios conocimientos. Dichas cualidades, aunque poco probables individualmente, rozan lo imposible en la convergencia en una misma persona. Sin embargo, aquel que conoce a Rafael, sabe que sí es posible. No cabe más que agradecer profundamente que haya dedicado parte de su tiempo y excelencia a ayudarme a desarrollar este trabajo.

... quien detiene la sangre de mis heridas...

Índice

Agradecimientos	4
0. Introducción	7
1. Leyes de la Mecánica Celeste: germen del problema	9
1.1 Johannes Kepler	9
1.2 Isaac Newton	10
1.3 Albert Einstein	12
2. Mecánica de Hamilton-Jacobi: problema de los dos cuerpos	14
3. Desarrollo Histórico del Problema	18
3.1 Primeros estudios	18
3.2 Análisis de Jacobi	19
3.3 El Concurso del Rey: Poincaré	25
4. Sistemas no Integrables	29
4.1 El Problema de la integrabilidad	29
4.2 El Problema de los 3 y los n cuerpos	32
5. Teoría de Perturbaciones: resonancias	37
5.1 El Problema de Júpiter y Saturno	39
6. El Problema de los Denominadores Pequeños: Teorema KAM	41
6.1 Aproximaciones Diofánticas	41
6.2 Números Algebraicos y Trascendentes	42
6.3 Teoría Geométrica de la Medida	46
6.4 Teoría KAM	48
7. Caos en el Sistema Solar	54
7.1 El Movimiento de Hiperión	54
7.2 El Cinturón de Asteroides	55
7.3 El Cometa Halley	57
7.4 Los Anillos de Saturno	58
7.5 Oblicuidad de los Planetas	62
8. Conclusiones Generales y Otros Análisis	67
8.1 Generalización del Análisis de Jacobi	67
8.2 Nuevas vías de investigación: Expansión Cosmológica	74
8.3 Predicciones	86
8.4 Síntesis Final	90
Referencias	92

Deseo fervientemente que usted resuelva en 1976 el problema de los 3 cuerpos

Felicitación de V. Szebehely (autor de textos sobre la estabilidad del Sistema Solar) a sus amigos y colegas en las Navidades de 1975

0. Introducción

La estabilidad de los sistemas dinámicos es una cuestión delicada, ya sea para escalas pequeñas, como la subatómica, ya sea para grandes escalas, como la cosmológica. Nosotros, en este trabajo, nos hemos interesado por una cuestión abierta de la Física: *¿Es estable el Sistema Solar?* Esta pregunta surgió de forma natural tras los trabajos sobre gravedad y órbitas planetarias de Kepler y Newton, ya que en estos no se incluía la interacción que los planetas ejercían entre sí. Estas interacciones aumentaban la complejidad en el cálculo de trayectorias, ya que se pasaba de *un problema de dos cuerpos* a un *problema de n cuerpos*. Por tanto, el Sistema Solar, en caso de no ser un sistema integrable, podría resultar caótico.

En nuestro estudio del problema ofreceremos una perspectiva matemáticamente clásica, es decir, sin métodos numéricos ni simulaciones por ordenador, siendo estas otras formas de analizar la cuestión. En un recorrido de siglos, trataremos de profundizar en el problema de la estabilidad de nuestro sistema planetario con el máximo rigor, acudiendo a las fuentes originales en muchos casos, como por ejemplo, los análisis o ideas de Kepler, Newton, Jacobi o Poincaré. Procuraremos, además, actualizar dicho estudio y establecer nuevas vías de investigación con comentarios y análisis personales que estarán presentes de forma transversal en todo el proyecto, especialmente en su parte final. Al final de cada bloque se encuentran notas que explican, aclaran, o matizan estudios y comentarios de otros autores o los míos propios.

En los bloques 1 y 2, presentaremos las leyes básicas de la mecánica celeste, haciendo un recorrido por tres grandes nombres como son Kepler, Newton y Einstein. Las leyes y principios expuestos los hemos obtenido directamente de las obras de los tres autores, así como sus comentarios. Se trata el problema como un sistema de dos cuerpos y se analiza con la mecánica de Hamilton-Jacobi.

En el bloque 3, se expone un primer estudio formal del problema (aunque se hacen referencias a los trabajos de Laplace y otros), como es el de Jacobi de 1842. Dicho análisis, lo hemos tomado de las lecciones sobre dinámica que este impartió en la Universidad de Königsberg en el semestre de invierno de 1842-1843. También se presenta el concurso de 1885 del Rey Óscar de Suecia y la pregunta textual de Weierstrass sobre el problema de los n cuerpos, que provocó la participación de Poincaré y los primeros indicios de caos en el problema de los 3 cuerpos.

En los bloques 4 y 5 se estudia la no integrabilidad de los sistemas de los 3 y n cuerpos y la Teoría de Perturbaciones con la que se afronta este tipo de sistemas no integrables. Se concluye con la posibilidad de divergencia en las series debido a *los pequeños denominadores*, así como con la posibilidad de resonancias y el caso de Júpiter y Saturno.

En el bloque 6 se analiza el *problema de los pequeños denominadores* mediante Teoría de Números, exhibiendo el problema de la estabilidad del sistema planetario una bonita conexión con esta rama de las matemáticas a través de las aproximaciones diofánticas. Se concluye con el célebre Teorema KAM de los años 60, que demostró que la mayoría de las órbitas son estables.

En el bloque 7 se ejemplifican algunos resultados sobre resonancias y caos en el Sistema Solar. Se exponen casos como el Cinturón de Asteroides, el movimiento de Hiperión o el Cometa Halley.

Por último, en el bloque 8, se amplían algunos estudios como el de Jacobi y se ofrecen nuevas vías de investigación, como la influencia de la expansión cosmológica en las órbitas planetarias. Se analiza su efecto como perturbación en el problema de los dos cuerpos y se presenta una cuestión no resuelta, como es la *anomalía Pioneer*. Nosotros, tratando ampliar el estudio, iniciamos un análisis nuevo como es la Ecuación de Binet sobre las órbitas incluyendo perturbaciones de la Relatividad General y la aceleración cosmológica, obteniendo que para distancias inferiores a 4448 UA, la perturbación relativista es superior a la cosmológica. Se deja constancia también de que, en nuestros cálculos, ha aparecido la *anomalía Pioneer* de forma natural al tener en cuenta ambas perturbaciones, lo que no creemos que sea una mera coincidencia. En cualquier caso, se deja un análisis más profundo de esta vía de estudio para futuras investigaciones. Finalmente, se exponen algunas predicciones por métodos de simulación de Laskar y se predice, como curiosidad especulativa, la duración del Sistema Solar a través del Principio de Mediocridad de Gott.

1. Leyes de la Mecánica Celeste: germen del problema

Para analizar matemática e históricamente la cuestión de la estabilidad y caos en el Sistema Solar, antes parece razonable establecer brevemente cuáles son las leyes físicas básicas que rigen el movimiento de los cuerpos en virtud de las fuerzas gravitatorias que ejercen sobre estos otros cuerpos celestes, esto es, la Mecánica Celeste. Matemáticamente diríamos que debemos fijar unos axiomas para luego aplicar el método deductivo.

Como el objetivo de nuestro trabajo no es un profundo desarrollo histórico sobre los modelos planetarios y las leyes gravitatorias que rigen en el Universo a gran escala, sólo nos centraremos en tres grandes saltos conceptuales (Kepler, Newton, Einstein), obviando a otros gigantes como Aristarco, Copérnico o Galileo, para luego concluir sobre qué leyes utilizaremos en nuestros análisis y porqué. Como nuestro trabajo, además de analítico, pretende ser rigurosamente histórico, en muchos casos expondremos las leyes o comentarios tales y como los autores las escribieron en las obras originales.

1.1 Johannes Kepler (1571-1630)

Kepler, como astrónomo y teólogo, mantuvo que la centralidad del Sol mantenía los planetas ordenados y en movimiento, a pesar de las implicaciones religiosas.

Entre 1609 y 1618, apoyado en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, estableció un modelo heliocéntrico sobre el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Las tres leyes enunciadas por Kepler se pueden resumir de la siguiente forma (entre paréntesis escribimos parte de las palabras textuales de Kepler del *Libro Quinto, Las Armonías del Mundo*):

1. Ley de las Elipses

Los planetas describen órbitas elípticas en su movimiento alrededor del Sol, estando este en uno de sus focos (*demostrado está también por mí, al mismo tiempo, ser elíptica la órbita del planeta, y estar el Sol, fuente del movimiento, en el otro foco de esa elipse*)

2. Ley de las áreas

El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales (*a supuestos tiempos iguales, pongamos un día natural en ambos casos, los correspondientes arcos diarios verdaderos de una órbita excéntrica mantienen entre sí proporción*).

3. Ley Armónica

Los cuadrados de los periodos T de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores a de la elipse, es decir, $T^2 = k \cdot a^3$. Siendo k una constante de proporcionalidad (*es cosa certísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera entre las distancias medias*).

Kepler, a lo largo de sus publicaciones previas sobre la no uniformidad de las separaciones entre los seis planetas conocidos (Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) ya mostraba seguridad en que sus teorías se mostrarían correctas, nos referimos a *Mysterium Cosmographicum* de 1596. Él declaró textualmente:

Nunca podré expresar con palabras cuan intenso fue mi placer al efectuar este descubrimiento. Ya no lamenté el tiempo que me había costado. Consumía días y noches en cálculos, para comprobar si esta idea concordaba con las órbitas copernicanas, o si mi alegría sería llevada por el viento. Al cabo de unos pocos días todo encajaba, y vi como un planeta tras otro se situaban con precisión en su lugar.

Las leyes de Kepler eran descriptivas, para la fundamentación hubo que esperar a otro genio...

1.2 Isaac Newton (1643-1727)

Newton se considera el padre del cálculo infinitesimal (con permiso de Leibniz), de la teoría de la luz y, en cuanto a los intereses de nuestro proyecto, de la mecánica y el movimiento planetario. En su gran obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, definió las leyes del movimiento y de la atracción gravitatoria, explicando que la gravedad predecía los movimientos de la Luna. En el libro primero de los tres que comprendían los Principia, estableció las tres famosas leyes del movimiento;

1. *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.*
2. *El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.*
3. *Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.*

En concreto, en la Sección XI (*Del Movimiento de Cuerpos que tienden unos a otros con Fuerzas Centrípetas*), Newton aborda con rigor el movimiento de los cuerpos en relación con las Leyes de Kepler. Así, en la Proposición LXV. Teorema XXV;

Varios cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros, pueden moverse entre sí en elipses, y describir mediante radios trazados a los focos áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos.

Seguidamente podemos leer un comentario que ya contiene el germen de la teoría de perturbaciones y el problema de los n cuerpos;

Se ha demostrado en la proposición anterior el caso en el cual los movimientos ocurren exactamente en elipses. Cuanto más se aparte la ley de las fuerzas de la ley allí propuesta, tanto más perturbarán los cuerpos sus mutuos movimientos; y tampoco es posible que los cuerpos, con atracción mutua según la ley aquí supuesta, se muevan en elipses exactas, salvo que mantengan entre sí determinada proporción de distancias(...) pero los cuerpos pequeños pueden disminuirse tanto que dicho desvío, con las interacciones mutuas, sean menores que unas dadas y, por tanto, hasta que las órbitas coincidan con elipses y las áreas respondan a los tiempos sin mayor error que uno dado.

En el Libro Tercero, *Sobre el Sistema del Mundo*, encontramos las extensiones de los teoremas y proposiciones de los dos primeros libros aplicados a nuestro Sistema Solar (bueno, el conocido en aquella época). En las Proposiciones I, II y VII (y sus correspondientes teoremas) encontramos la conocida Ley de Gravitación Universal;

Las fuerzas por las cuales los planetas primarios son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en sus órbitas se dirigen hacia el Sol y son inversamente proporcionales como los cuadrados de las distancias al centro del mismo. (...) La gravedad ocurre en todos los cuerpos y es proporcional a la cantidad de materia existente en cada uno.

Y ahora, en la Proposición X. Teorema X, encontramos por primera vez una idea relacionada con el movimiento perpetuo de los planetas, necesario para la estabilidad del sistema planetario;

El movimiento de los planetas en los cielos puede conservarse durante mucho tiempo.

Es muy revelador que Newton hiciera este comentario a modo de teorema, pero no dijera “el movimiento de los planetas en los cielos puede conservarse *indefinidamente*”. Nos centraremos en el último párrafo de su demostración dada la conexión con el tema del proyecto;

En los espacios próximos a la Tierra nada hay que produzca resistencia salvo vapores y exhalaciones del aire. Si estos son extraídos con todo cuidado de un vaso de cristal cilíndrico cerrado, los graves caen dentro del vaso con toda libertad y sin resistencia sensible alguna; el mismo oro y una pluma muy leve soltados a la vez caen con igual velocidad, y describiendo en su caída una altura de cuatro, seis, u ocho pies tocan el suelo a la vez, como se ha visto experimentalmente. Y, por tanto, si nos trasladamos a los cielos, vacíos de aire y de exhalaciones, los planetas y los cometas sin resistencia sensible alguna se moverán por esos espacios durante larguísimo tiempo.

Una nueva época, la mecánica newtoniana, basada en la razón humana y el poder para predecir los movimientos en la Tierra y en los Cielos estaba a punto de comenzar. El determinismo estaba servido, y era inquebrantable... ¿o no?

Por último, en el escolio general de la obra, Newton busca una explicación divina a la estabilidad de los sistemas planetarios;

Tan elegante combinación de Sol, planetas y cometas sólo pueden tener origen en la inteligencia y poder de un ente inteligente y poderoso. Y si las estrellas fijas fueren centros de sistemas semejantes, todos ellos contruidos con un esquema similar (...) para que los sistemas de las fijas no caigan por la gravedad uno sobre otro, él los habría colocado a inmensas distancias uno de otro.

Y evidencia que, a pesar de lo explicado en los *Principia*, no ha encontrado la respuesta a la pregunta más fundamental;

Hasta aquí he expuesto los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza de la gravedad, pero todavía no he asignado causa a la gravedad. (...) Pero no he podido todavía deducir a partir de los fenómenos la razón de estas propiedades de la gravedad y yo no imagino hipótesis.

Obviamente, la pregunta era “¿qué es la gravedad?” Para intentar contestar a esta pregunta y poner de manifiesto las *perturbaciones* en algunos movimientos celestes hubo que esperar más de doscientos años.

1.3 Albert Einstein (1879-1955)

El perihelio de Mercurio y su desplazamiento se conocía en el siglo XIX y era la perturbación más grande de la Mecánica Celeste Newtoniana. En 1850, Le-Verrier, codescubridor de Neptuno, calculó que la mayor parte del efecto se debía a Venus, aunque quedaba por explicar un residuo de 43” de arco por siglo. Pensó que se debía a un planeta interior a Mercurio (Vulcano), pero este jamás se encontró. Albert Einstein encontraría la respuesta.

En 1915, Einstein publicaría su obra cumbre, la Teoría de la Relatividad General, que explicaba la gravedad como un efecto de la deformación que las masas creaban en el espacio circundante, es decir, geometrizó la gravedad. Como la fundamentación de esta teoría queda fuera de las pretensiones del presente proyecto, sólo nos centraremos en uno de los tres test clásicos que el autor propuso para corroborar sus teorías. En el texto original, en el apartado del *Fundamento de la Teoría de la Relatividad General (Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik, 49, 1916)* se establece en el punto 22: (...) *Movimiento del Perihelio de una Órbita Planetaria;*

Si calculamos el campo gravitatorio en un grado de aproximación superior, y con una precisión correspondiente el movimiento orbital de un punto material de masa relativa infinitamente pequeña, encontramos una desviación del siguiente tipo de las leyes de Kepler-Newton del movimiento planetario. La elipse orbital de un planeta experimenta una lenta rotación en la dirección de movimiento, de valor:

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

por revolución. En esta fórmula a denota el semieje mayor, c la velocidad de la luz en la medida normal, e la excentricidad, T el tiempo de revolución en segundos.

Las correcciones relativistas de Einstein al potencial newtoniano eran de 42.98 ± 0.04 ” de arco por siglo, ¡lo que correspondía a las observaciones!

El formalismo relativista para llegar a esa conclusión consiste en calcular la nueva trayectoria como una suma de la solución newtoniana y una perturbación con un parámetro adimensional de la perturbación (este método se verá más adelante en la *Teoría de Perturbaciones*). Ese parámetro ofrece un valor del orden de 10^{-7} para Mercurio, y disminuye conforme más lejos esté el planeta del Sol y más excéntrica sea la órbita. *Los cálculos se pueden encontrar en los artículos originales: A. Einstein, Sitzungsber. D. Preuss. Akad. Wis, 1915, p.831, y K. Schwarzschild, ibid., 1916, p. 189.* Por tanto, aunque cualitativamente hablando es un salto de gigante, no lo es cuantitativamente, por lo que se despreciará de ahora en adelante en los análisis de estabilidad del Sistema Solar, valiéndonos, por tanto, de la mecánica newtoniana.

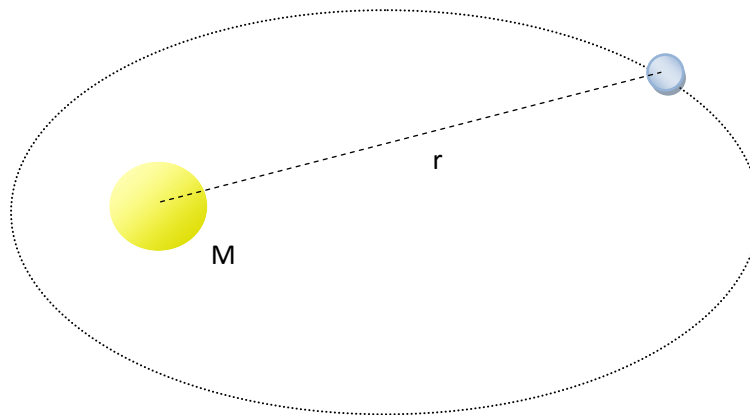
Sin embargo, hemos comentado al principio que el desplazamiento del perihelio de Mercurio se pensaba que era debido a la influencia de otros planetas, especialmente Venus, por lo que se deduce que las ecuaciones clásicas de la mecánica celeste predicen trayectorias elípticas de los planetas sin contar con las anomalías producidas por otros cuerpos celestes, es decir, ofrecen soluciones exactas para problemas de dos cuerpos que no tienen en cuenta otras interacciones. Trataremos esto en el siguiente punto con la Mecánica de Hamilton-Jacobi.

2. Mecánica de Hamilton-Jacobi: problema de los dos cuerpos

Aunque aparentemente regular y predecible, a priori, la evolución del Sistema Solar podría llevar a lo que conocemos como caos determinista (sistemas con trayectorias irregulares y no predecibles, pero de evolución determinista). Otra posibilidad es que haya casos concretos de movimientos caóticos en el Sistema Solar (oblicuidad de los planetas o rotación de satélites, por ejemplo), algo que estudiaremos en las secciones finales del presente proyecto, tras las investigaciones de Poincaré. Como ya adelantó Newton en la Proposición X, Teorema X, y cuya demostración hemos expuesto, el Sistema Solar es un sistema conservativo, formando parte de una variedad de sistemas que presentan conservación de la energía total y se pueden estudiar bajo la mecánica de Hamilton-Jacobi; los sistemas Hamiltonianos.

Aunque Hamilton y Jacobi vivieron a lo largo del siglo XIX, el formalismo matemático lo avanzamos ahora, ya que lo aplicaremos al problema de los dos cuerpos (predecesor por simplicidad del problema de los 3 y los n cuerpos) y será la mecánica que utilizaremos en el resto del trabajo.

Supongamos el caso simplificado en que uno de ellos, el de masa $M > m$, está fijo en un punto del espacio. Esta aproximación la podemos justificar en nuestro caso teniendo en cuenta que el Sol supone el 99.8% de la masa total del Sistema Solar, con lo que el centro de masas de este se encuentra en el interior de tal estrella.



El cuerpo de menor masa se moverá bajo el campo gravitatorio de M , en donde la energía cinética y potencial gravitatoria en coordenadas cartesianas serán:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Hemos considerado el movimiento en el plano X,Y ya que el potencial es central y el vector momento angular se conserva en ausencia de momentos de fuerzas exteriores. Como el momento angular representa el vector normal al plano de los movimientos, si es constante en

dirección, sentido, y módulo, una de las consecuencias es que el plano de la dinámica es también será estable. Llamando Z al eje del momento, el movimiento de m quedará confinado en el plano X,Y .

Por otra parte, dada la simetría del problema y la dependencia del momento angular con el ángulo (γ , por tanto, la coordenada cíclica buscada, como veremos), resulta recomendable el uso de coordenadas polares: $x = r \cos \phi$; $y = r \sin \phi$

Si derivamos ambas variables respecto al tiempo t , utilizando de nuevo la terminología newtoniana en las derivadas temporales;

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

Así, nuestro nuevo sistema de energías;

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

$$V = -G \frac{Mm}{r}$$

Hemos llegado, a partir de dos conjuntos de variables (posiciones y velocidades), al llamado lagrangiano L del sistema:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + G \frac{Mm}{r}$$

A partir de la función lagrangiana se pueden escribir las conocidas como *ecuaciones lagrangianas del movimiento*, que representarán la dinámica del sistema;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

En donde, de forma genérica, q y \dot{q}_i representan posiciones y velocidades, respectivamente.

La siguiente transformación permite llegar al Hamiltoniano H del sistema;

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Volviendo al caso particular del sistema de dos cuerpos y definiendo los momentos asociados a las variables como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Encontramos que dichos momentos son:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

En donde r y ϕ representan los **dos grados de libertad** (como veremos más adelante, el número de grados de libertad será determinante en el estudio de sistemas de más cuerpos).

Por tanto, nuestro hamiltoniano en el sistema de dos cuerpos será:

$$H = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - G \frac{Mm}{r}$$

El cual, escrito en función de coordenadas y momentos;

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right] - G \frac{Mm}{r}$$

Podemos observar que H no depende explícitamente del tiempo, es decir, si nuestro sistema es conservativo:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Esto implica que, sobre las trayectorias del sistema, existe una cantidad conservada, la energía E , ($H=E$).

El sistema de Hamilton representa las ecuaciones de movimiento del sistema, que de forma general;

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Suponiendo n grados de libertad, estas ecuaciones forman un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, en lugar de las n de segundo orden que proporcionan las de Newton. Aplicando dichas ecuaciones a nuestras variables, encontramos:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} = \dot{\phi}; \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r = \frac{GMm}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{mr^3}; \frac{\partial H}{\partial \phi} = -\dot{p}_\phi = 0$$

De esta última conclusión obtenemos que $mr^2\dot{\phi} = cte$, lo que demuestra la potencia del formalismo hamiltoniano, ya que si la función hamiltoniana no contiene explícitamente una coordenada, *el momento conjugado de ésta se conserva* sobre las trayectorias del sistema. En nuestro caso, desemboca en la conservación del momento angular (algo que ya sabíamos al considerar el movimiento en el plano X,Y). A la coordenada en cuestión, se le llama **coordenada cíclica**.

El objeto del trabajo no es realizar una exposición detallada y amplia de la mecánica de hamiltoniana, con las transformaciones canónicas oportunas y la obtención de la ecuación de Hamilton-Jacobi, así como la obtención de las soluciones de las ecuaciones de movimiento planetario en el problema de los dos cuerpos, para ello se pueden consultar textos clásicos de mecánica clásica como por ejemplo "*Classical Mechanics. H. Goldstein*", que hace un estudio profundo en el capítulo tres. Lo que sí forma parte del objeto del proyecto es presentar la mecánica hamiltoniana como recomendable para estudiar el problema de la estabilidad del Sistema Solar (frente a la newtoniana, debido a la reducción en un orden de las ecuaciones diferenciales), al igual que realizar la observación de que el problema de los dos cuerpos aquí expuesto tiene solución analítica, con lo que las trayectorias serán predecibles. Hemos de observar que las ecuaciones del sistema con dos grados de libertad (posición y ángulo), cuenta, al menos, con dos constantes de integración (energía y momento angular), lo que, como veremos más adelante resultará determinante en la resolución de sistemas hamiltonianos.

Al igual que el número de grados de libertad, las coordenadas cíclicas y, por tanto, los momentos y cantidades conservadas en un sistema dinámico, juegan un papel protagonista en la resolución analítica y predicciones sobre la estabilidad del Sistema Solar, como veremos.

3. Desarrollo histórico del problema.

De los puntos anteriores, podemos filtrar una conclusión común a ambos; la mecánica clásica describía a la perfección el movimiento planetario despreciando la interacción del resto de cuerpos del Sistema Solar entre sí, es decir, las órbitas teóricamente elípticas sólo eran una manifestación de la interacción Sol-planeta. Siendo conscientes de esto, la idea de que las órbitas planetarias podrían no ser estables a largo plazo fue germinando en los estudios y especulaciones de algunos grandes matemáticos y físicos de la época.

En este apartado describiremos las anomalías que motivaron a Laplace en sus investigaciones y conclusiones, así como el primer análisis matemático riguroso (Jacobi, 1842) sobre el problema de la estabilidad global. Terminaremos con la exposición textual del concurso matemático que alentó a Poincaré a estudiar el problema. Creemos conveniente apuntar que las series matemáticas que florecen en la mecánica determinista de Laplace las mostraremos y analizaremos en los siguientes puntos del proyecto desde el formalismo hamiltoniano, en donde estudiaremos las conclusiones de Poincaré con más rigor que en este apartado así como la convergencia o no de dichas series.

3.1 Primeros estudios

Los *Principia* redujeron la física conocida y dieron respuesta a todo un conjunto de planetas en movimiento, pero dejaron algunas preguntas abiertas;

Si todos los planetas giran alrededor del Sol en el mismo sentido y casi en el mismo plano, ¿es posible que el Sistema Solar se formara sólo por la acción de causas naturales a partir de una distribución inicial uniforme de materia, o fue consecuencia del diseño? ¿Por qué las órbitas de los dos planetas mayores, Júpiter y Saturno, a veces se retrasan y otras se adelantan respecto a sus predicciones teóricas?

La primera de estas cuestiones la presentó el reverendo Richard Bentley en 1687, y la segunda cuestión emana de las observaciones de TychoBrahe (en las que se basó Kepler para enunciar sus leyes) a lo largo del siglo XVI. La obra de Newton no respondía a ninguna de estas preguntas, ya que él mismo afirmó sobre la primera pregunta que su sistema no podía explicar de ningún modo tales regularidades, aunque sí que estaba convencido de que el origen no podía ser casual; la causa *“no puede ser fortuita, sino dotada de grandes dosis de Geometría y Mecánica”*. En cuanto a las perturbaciones en las órbitas de Júpiter y Saturno, Newton creía que eran acumulativas, con lo que, según él, Dios debería ajustar las órbitas periódicamente para mantener el equilibrio del Sistema Solar.

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) estudió estas cuestiones y otras a lo largo de numerosos artículos, publicando las conclusiones en *Exposition Du Systeme Du Monde* (1796) y en *Mécanique Céleste*, cuyo primer volumen apareció en 1799. A lo largo del siglo XVIII los astrónomos descubrieron el planeta Urano así como lunas adicionales de Saturno, con lo que los planetas y satélites conocidos sumaban 28, por tanto, si el movimiento común de 29 movimientos (incluyendo el Sol) era el resultado de la casualidad, la probabilidad de este evento sería extremadamente pequeña; 2^{-29} (partiendo de que el movimiento se da en un

mismo plano, ya que de no ser así, la probabilidad sería prácticamente cero), aproximadamente una entre 500 millones!. Laplace reconoció que la regularidad existente en los cielos debía tener una causa y la encontró, ya que demostró cómo el Sistema Solar podía haberse formado a partir del movimiento rotatorio de una atmósfera alrededor de una estrella central, cuyos planetas y lunas se habría formado como bolas de gas que se enfriaron y condensaron paulatinamente, y cuyo movimiento giratorio tenía que estar definido en el mismo sentido y casi en el mismo plano que la estrella central, en nuestro caso, el Sol. No profundizaremos en esta idea ni en su demostración ya que no es el objeto del proyecto.

En cuanto a la cuestión de Júpiter y Saturno, cuyas perturbaciones orbitales ya hacían temer sobre la posible inestabilidad del Sistema Solar, Laplace demostró que no eran acumulativas como temía Newton, sino que se repetían con un periodo de 929 años. Así, inspirado en un trabajo de Lagrange de 1766 (que no reproduciremos aquí), Laplace también demostró que la excentricidad de las órbitas planetarias está acotada inferior y superiormente. Con estos y otros estudios como la vinculación de aceleración media de la Luna con la disminución de la excentricidad terrestre quedó aparentemente zanjada la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar y la evidencia del determinismo newtoniano. En cualquier caso, contrariamente al pensamiento de Newton, Dios no debía intervenir para evitar el desequilibrio de los movimientos planetarios.

Podemos inferir de los estudios de Laplace que las demostraciones sobre la estabilidad de los desplazamientos planetarios y lunares se asienta sobre la consideración de dichos astros como un conjunto de cuerpos rígidos que se mueven en el vacío. Sin embargo, hemos de señalar que los análisis están basados en observaciones que parecían mostrar inestabilidades, con lo que queda fuera del estudio y, por tanto, de la demostración, cualquier perturbación no observada ni supuesta a largo plazo en alguna de las configuraciones que el Sistema Solar tomará a lo largo del tiempo. Como ya hemos adelantado al principio de este apartado, el primer análisis teórico riguroso de la cuestión lo realizó **Carl Gustav Jakob Jacobi** (1804-1851), en el cual sí que nos detendremos y analizaremos. El análisis de Jacobi lo hemos tomado directamente de *Jacobi, C. G. Jacobi's Lectures on Dynamics. Edited by A. Clebsch, Hindustan Book Agency 2009*, y son las lecciones que impartió en la Universidad de Königsberg en el semestre de invierno del curso 1842-1843.

3.2 Análisis de Jacobi

En las lecciones sobre dinámica que Jacobi impartió durante el curso 1842-43, se encontraba un capítulo (*Lectura 4, Principio de Conservación de la "Vis Viva"*) en que profundizaba en el teorema de las fuerzas vivas y su relación con el potencial. Tomando el potencial como una función homogénea de grado k y aplicando el teorema de Euler⁽¹⁾ sobre dichas funciones se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que, considerando las masas planetarias como puntuales, representa la segunda derivada del momento de inercia respecto al tiempo. A partir de dicha expresión, Jacobi realiza un análisis de las soluciones según los rangos de los parámetros y tomando la función potencial como el potencial gravitatorio con signo positivo.

Nosotros, reproduciremos y comentaremos parte de dicho capítulo, ya que nos centraremos principalmente en las referencias a la estabilidad del Sistema Solar (página 28 del texto que nosotros hemos manejado) con el objeto de no dispersar la atención con largos desarrollos analíticos válidos también para otros sistemas dinámicos.

Jacobi, tras integrar ecuaciones de movimiento para un sistema dinámico general bajo un potencial U (ver lectura 2 e inicios de la lectura 4 del texto) obtiene;

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\} = U + h$$

Siendo h una constante de integración, m_i las masas, y en donde se considera el movimiento de estas en los tres ejes cartesianos.

Sustituyendo las velocidades en los ejes por la velocidad total a lo largo de la trayectoria correspondiente;

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = U + h$$

Lo que adquiere la forma del teorema de la vis viva. En palabras de Jacobi: *“la mitad de la vis viva de un sistema es igual a la función-fuerza más una constante”*. La mayor importancia del teorema reside en que *“si un sistema se mueve de una posición a otra, entonces la diferencia de la vis viva del sistema entre el inicio y el final es igual a la diferencia entre los valores de la función fuerza en esos instantes”*. Hacemos notar que la constante h desaparece de dicho enunciado ya que al restar el miembro de la derecha de la ecuación en dos instantes diferentes, dicha constante queda eliminada tras dicha resta. Esta mitad de la diferencia entre los valores iniciales y finales de dicha suma es la medida del trabajo del sistema.

Continuando con las secciones del estudio que nos interesan, Jacobi aplica el teorema de Euler para funciones homogéneas (aunque lo menciona explícitamente);

$$\sum \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = kU$$

Bajo la simbología adecuada basada en los movimientos de las masas a lo largo del tiempo (ecuación 2.2, lectura 2) y añadiendo la ecuación de la que hemos partido, multiplicada por 2, Jacobi llega a la expresión:

$$\frac{d^2(\sum m_i r_i^2)}{dt^2} = (2k + 4)U + 4h$$

En donde hemos de tener en cuenta que las distancias r_i no se producen desde el origen, sino que debemos transformarlas en las distancias entre los puntos y la distancia del centro de gravedad desde el origen. Así, tras varios cálculos, se puede llegar a la expresión pretendida para nuestro análisis;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k + 4)U + 4h'$$

Siendo ρ_i los vectores radiales trazados desde el centro de gravedad y h' una nueva cantidad surgida de los desarrollos no explicitados.

Según el mismo Jacobi comenta (página 28 del texto, penúltimo párrafo), el Sistema Solar representa un ejemplo de este tipo de movimientos de cuerpos en torno a un centro de gravedad, aunque como en la época no había datos sobre el movimiento del centro de gravedad del Sistema Solar, Jacobi comenta que sólo se puede determinar el movimiento relativo del sistema alrededor de dicho centro. Sí señala que si se conociera el movimiento del centro de gravedad, se podría obtener el movimiento absoluto del sistema como una simple suma de dos movimientos ⁽²⁾.

Antes de comenzar con el análisis de las soluciones de la ecuación anterior, Jacobi hace una consideración digna de señalar, y es suponer que la atracción gravitatoria fuera de exponente cúbico en lugar de cuadrático. En este caso particular tendríamos $k = -2$, con lo que substituyéndolo en la expresión genérica anterior y llamando R al momento de inercia del sistema;

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4h'$$

Pero en tal caso el Sistema Solar se desharía, ya que una doble integración ofrece:

$$R = 2h't^2 + h''t + h'''$$

Con lo que R tiende a infinito al incrementarse el tiempo, por tanto, al menos un cuerpo del Sistema Solar debería desplazarse hacia una distancia infinita del centro de gravedad.

En realidad, observamos que si la única constante distinta de cero fuera h''' , el momento de inercia R sería constante y la estabilidad sería posible para órbitas circulares (algo que está de acuerdo con una de las soluciones de la ecuación de Binet del oscilador armónico para una fuerza de exponente cúbico). En cualquier caso vemos, ya en 1842, una primera demostración de un caso en que el Sistema Solar no sería estable en cuanto al sentido clásico de la pregunta, es decir, si colapsa o se escapa algún cuerpo del sistema planetario.

Volviendo a nuestro Sistema Solar con la ley de gravitación de exponente cuadrático, $k = -1$, con lo cual;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = 2U + 4h'$$

Tomando $U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}}$ (hacemos notar que Jacobi tomó la función U como el potencial gravitatorio total cambiado de signo, sin embargo, para ser fieles al texto histórico, mantendremos la notación del autor).

En este caso, la constante h' debería ser negativa para que el Sistema Solar sea estable, ya que la función \mathcal{U} , si consideramos sólo fuerzas atractivas, es una cantidad positiva. Recientemente Bessel ha formulado la hipótesis de que el Sol ejerce una fuerza repulsiva en contra de los cometas, relacionándose esta con observaciones de colas de cometas rechazadas por el Sol. Ya que aún no está confirmada tal hipótesis, nosotros pasaremos por alto dicha fuerza repulsiva en las consideraciones generales⁽³⁾. Asumiendo esto, obtenemos:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h'$$

Integrando entre 0 y t ;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' = \int_0^t (2U + 4h') dt$$

En donde R_0' es el valor de $\frac{dR}{dt}$ en $t = 0$.

Si α denota como el valor más pequeño de \mathcal{U} entre dichos límites;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' > (2\alpha + 4h')t$$

Una segunda integración entre 0 y t ofrece:

$$R - R_0 - R_0' t > (\alpha + 2h')t^2$$

O lo que es lo mismo:

$$R > R_0 + R_0' t + (\alpha + 2h')t^2$$

En donde R_0 es el valor de R en $t = 0$ y α , al igual que \mathcal{U} , es una cantidad positiva.

Si $2h'$ fuera positivo, también lo sería $\alpha + 2h'$, en cuyo caso R tendería al infinito con el incremento del tiempo, con lo que el Sistema Solar no sería estable. Concluimos así que $2h'$ debe ser negativo. Sin embargo, este valor numérico no debe ser más grande que el mayor valor de \mathcal{U} entre 0 y t , ya que de si no fuera así todos los elementos de la integral

$$2 \int_0^t (U + 2h') dt$$

serían negativos, con lo que se podría establecer:

$$\frac{dR}{dt} - R_0' < -2\beta t$$

En donde β es una cantidad positiva, concretamente el valor numérico más pequeño de $\mathcal{U} + 2h'$ entre 0 y t . Integrando;

$$R < R_0 + R_0' t - \beta t^2$$

En este caso, al incrementarse t , R se aproxima a menos infinito, lo que es absurdo ya que R representa la suma de cuadrados y, por tanto, es una cantidad positiva.

Se pueden combinar todas las consideraciones anteriores en la afirmación de que, entre dichos límites de integración, $U+2h'$ no puede tener valores estrictamente positivos ni estrictamente negativos, suponiendo la estabilidad del Sistema Solar. $U+2h'$ debe oscilar hacia adelante y atrás entre valores positivos y negativos, lo que quiere decir que U debe oscilar entre $-2h'$. Sin embargo, estas variaciones de U deben estar comprendidas entre límites finitos definidos, ya que si suponemos que U se convierte en una cantidad infinita, como $U = \sum \frac{m_i m_i'}{r_{ii'}}$, esto sólo puede ocurrir si dos cuerpos están infinitamente cerca. Entonces su atracción llegaría a ser infinitamente grande, no siendo capaz de separarse, así que desde ese instante en una $r_{ii'}=0$ definida, y por tanto, $U = \infty$, si uno integra más allá de ese tiempo, $\iint (U + 2h') dt^2$ (y con ello R) toma valores positivos infinitamente grandes, cualquiera que sea el valor de h' . Por tanto, para compensar esto, otros cuerpos del Sistema Solar deberían estar infinitamente lejanos, con lo que la estabilidad del sistema se perdería⁽⁴⁾. U debe entonces oscilar alrededor de $-2h'$ entre dos límites definidos. Para el movimiento elíptico $U=1/r$, $-2h'=1/a$, (cancelando términos constantes comunes a ambas cantidades), con lo que r debe oscilar alrededor de a , que de hecho es el caso; la expansión de $1/r$ en términos de la anomalía media debe contener el término constante $1/a$, que es lo que sucede en realidad. Para la atracción mutua de dos cuerpos los valores negativos de h' dan el movimiento elíptico, $h'=0$ corresponde al movimiento parabólico y valores positivos de h' al movimiento hiperbólico, lo que está de acuerdo con nuestros resultados.

El teorema de que U oscila alrededor de $-2h'$ ó $U+2h'$ alrededor de 0 se puede expresar como que $2U+2h'$ oscila alrededor de U , lo que está de acuerdo con la ecuación de la "vis viva" pero con la constante h en lugar de h' y movimiento relativo a un centro de gravedad. Así que el valor de la "vis viva" debe oscilar alrededor del valor de la función-fuerza. Si todas las distancias del sistema llegan a ser muy grandes, entonces la función-fuerza llegará a ser muy pequeña, y también la "vis viva", lo que concuerda con el respondiente teorema. Por tanto, las velocidades también llegarán a ser muy pequeñas, es decir, cuanto más aumentan las distancias, más pequeñas llegan a ser las velocidades. La estabilidad reside en ello. Consideraciones similares se encuentran en el núcleo de las investigaciones de Laplace, Lagrange y Poisson sobre la estabilidad del sistema planetario. Tenemos el teorema:

Si suponemos variables los elementos de una órbita planetaria y expandimos el eje mayor en términos del tiempo, ello se traduce únicamente como argumento de funciones periódicas, sin término proporcional al tiempo.

Este teorema fue probado por primera vez por Laplace sólo para pequeñas excentricidades y la primera potencia de las series. Lagrange lo amplió a excentricidades arbitrarias (Mem. De l'Institut, 1808) y Poisson finalmente demostró que también se mantiene cuando se tiene en cuenta la segunda potencia de las series (Journal de l'école polytechnique, cat. 15). Este

trabajo es uno de los mejores. Con la consideración de la tercera potencia de las series t queda fuera de las funciones periódicas, pero aún multiplica a estas. Si tomamos la cuarta potencia, entonces t aparece incluso sin multiplicar a funciones periódicas. El resultado para la tercera potencia aún ofrece oscilaciones alrededor de un valor medio, pero infinitamente grande para $t = \infty$. En el caso de la cuarta potencia dichas oscilaciones no se producen en absoluto. Se llega a similares resultados para pequeñas oscilaciones; al considerar potencias más altas de los desplazamientos se llega al resultado de que un pequeño impulso siempre conduce, con el incremento del tiempo, a grandes oscilaciones.

Sin embargo, como el mismo Jacobi concluye al final del capítulo 4 de las *Lecturas sobre Dinámica*, todos los resultados anteriores no demuestran nada; si se desprecian las potencias más altas de los desplazamientos, uno supone que el tiempo es pequeño, con lo que no puede inferir conclusión alguna para grandes valores de t . **Por tanto, se podría concluir erróneamente, contando con algunas potencias más altas, que el Sistema Solar es inestable.**

Como ya hemos visto, según los análisis de Jacobi, la predictibilidad a largo plazo y, por tanto, la precisión en el conocimiento de estabilidad del Sistema Solar, dependía de los desarrollos en serie que emanaban de las ecuaciones de Kepler y la mecánica newtoniana. Como ya hemos comentado, nosotros escribiremos y estudiaremos las series a través del formalismo hamiltoniano, que ofrece la ventaja de reducir las ecuaciones diferenciales newtonianas de segundo orden a otras de primer orden.

El contexto científico de los siglos XVIII-XIX era la creencia absoluta en el poder predictivo del ser humano, ya que la Ley de Gravitación de Newton asentó el conocimiento de las órbitas de los planetas. Desde que Halley (1656-1742) observó en 1682 el cometa que lleva su nombre y predijo acertadamente que regresaría en 1758 (desgraciadamente, como tantas veces en ciencia, no vivió para comprobar su logro), la mecánica newtoniana se había convertido en la manifestación del gran poder de la razón frente a la religión en cuanto a explicar las leyes de los cielos. Así, a pesar de algunos detalles como el hecho de despreciar términos de orden superior en las series de la mecánica celeste, se pensaba que todo sistema de n partículas con fuerzas de interacción definidas podría ser resuelto.

El problema sobre la predicción de la estabilidad del sistema planetario se podía encuadrar como un conjunto de n cuerpos con fuerzas conocidas de interacción. Así, dadas las condiciones iniciales de posición y velocidad, se creía que con el uso de las ecuaciones diferenciales y en virtud de la unicidad de su solución se podría determinar la posición y velocidad de las partículas para cualquier instante de tiempo. De acuerdo con el pensamiento general de la época, el Universo se suponía como un enorme sistema cuya dinámica podía ser resuelta completamente, con lo que el problema de los n cuerpos sería resuelto en cuanto llegara la persona con la voluntad e inteligencia adecuadas. Como ya hemos expuesto, algunos científicos como Laplace, Lagrange o Poisson habían intentado resolver el problema de la estabilidad del Sistema Solar pero, desgraciadamente, sin llegar a resultados totalmente concluyentes desde el punto de vista determinista.

Ludwig Boltzmann (1844-1906), desarrollando la mecánica estadística, puso de manifiesto que la visión mecanicista de la naturaleza tenía límites y que en el caso de sistemas de muchas partículas era necesario realizar un tratamiento estadístico de la información. Así, se comenzó a crear un clima entre los científicos sobre la necesidad de incorporar nuevos métodos en el estudio del sistema planetario. Llegamos así a un año clave, 1885.

3.3 El Concurso del Rey; Poincaré

Un año antes, en 1884, G. M. Leffer, profesor de matemáticas de la Universidad de Estocolmo, le propone al Rey Óscar II de Suecia y Noruega la realización de un concurso matemático, conmemorando así el futuro cumpleaños de su majestad. El monarca, aficionado a las matemáticas tras haber cursado algunas asignaturas de dicha disciplina en la Universidad de Uppsala, aceptó la propuesta. Aunque el premio equivalía a, tan sólo, varios meses de sueldo de un profesor universitario (2500 coronas), el prestigio era comparable al de los actuales premios Nobel.

El jurado estaba compuesto por tres matemáticos; el propio Leffer y sus antiguos profesores, Hermite y Weierstrass (1815-1897), quien representó un papel importante en la evolución de los acontecimientos.

El anuncio oficial del concurso fue publicado a mediados de 1885 en *Acta Mathematica* (de la que Leffer era el editor-jefe) y *Nature*. En dicha convocatoria se publicaron cuatro preguntas, siendo el plazo de entrega de tres años (es fácil imaginar la dificultad de las cuestiones). El problema propuesto por Weierstrass fue el que pasaría a la historia;

Dado un sistema formado por un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente de acuerdo con las leyes de Newton, se propone, bajo la hipótesis de que un choque entre dos o más partículas no tiene nunca lugar, desarrollar las coordenadas de cada partícula en una serie procedente de funciones conocidas en el tiempo y que sean uniformemente convergentes para cualquier valor de tiempo.

Parece ser que este problema, cuya solución ampliará nuestro conocimiento sobre el sistema del Universo, puede ser resuelto por medio de las herramientas analíticas de que se dispone actualmente; esto es al menos lo que cabe suponer, ya que poco antes de su muerte Lejeune-Dirichlet comunicó a un amigo suyo⁽⁵⁾, matemático, que había descubierto un método para integrar las ecuaciones diferenciales de la mecánica, y que él había tenido éxito, al aplicar este método, en demostrar la estabilidad de nuestro sistema planetario de manera totalmente rigurosa. Desafortunadamente no sabemos nada sobre este método, excepto que el punto de partida para este descubrimiento parece haber sido la teoría de las oscilaciones infinitesimales. Sin embargo, se puede suponer con toda certeza que este método no está basado en largos y complicados cálculos, sino en el desarrollo de una idea fundamental simple, que se espera razonablemente se pueda encontrar de nuevo por medio de un estudio más serio y perseverante.

Sin embargo, en caso de que nadie tenga éxito en resolver el problema propuesto dentro del plazo del concurso, el premio podría ser otorgado a un trabajo en el cual algún otro problema de la mecánica sea tratado en la forma indicada y sea resuelto completamente.

Del enunciado del problema se desprende el interés de Weierstrass por la cuestión como el respeto que le merecía Dirichlet, cuya reputación de matemático riguroso le indujo a creer que, efectivamente, se podía demostrar la convergencia de las soluciones para el problema de los n cuerpos.

Leffer envió una carta el 13 de Julio de 1887 a Poincaré (1854-1912) animándole a participar, cuyo hecho muestra que, con poco más de treinta años, Poincaré gozaba ya de una reputación de gran matemático⁽⁶⁾. Este respondió tres días después confirmando su participación e interés en resolver la cuestión de las n partículas en interacción. En dicha carta, Poincaré ya hace referencias a los resultados encontrados en el *problema restringido de los tres cuerpos*, en donde dos masas puntuales giran una alrededor de la otra describiendo una circunferencia, y cuyo problema reside en conocer el movimiento del tercer cuerpo de masa despreciable para que no afecte al movimiento de las masas principales.

A lo largo de los dos años transcurridos, Poincaré trabajó duramente en el *problema de los tres cuerpos*, profundizando en el estudio de órbitas periódicas y su estabilidad, condiciones de resonancia (ya tratadas en su tesis *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, de 1879), periodicidad de las órbitas en ausencia de pequeños divisores y divergencia si estos aparecían, así como en la integrabilidad de sistemas dinámicos y, más tarde, en lo que hoy conocemos como caos. Relaciona los resultados con el *problema de los n cuerpos* y la inestabilidad del Sistema Solar. La memoria (162 páginas), presentada en Mayo de 1888 como respuesta al concurso, representaba un salto de gigante en la teoría de ecuaciones diferenciales y en el estudio de la estabilidad planetaria. El 20 de Enero de 1889, día previo al sexagésimo cumpleaños del Rey, este aprobó el resultado propuesto por el tribunal del concurso, concediendo el premio como ganador a Henri Poincaré⁽⁷⁾. El matemático, ya conocido, saltó a la fama mundial⁽⁸⁾.

Algunos de los avances matemáticos de Poincaré se desprenderán de los siguientes apartados; sistemas no integrables, teoría de perturbaciones, y el problema de los divisores pequeños.

- (1) Sea $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/\text{si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in C$, con $\alpha > 0$;

Se dice que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función homogénea de grado k si para todo $\alpha > 0$ se cumple que $f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

El Teorema de Euler para funciones homogéneas_

Si f es una función homogénea de grado k , se cumple que:

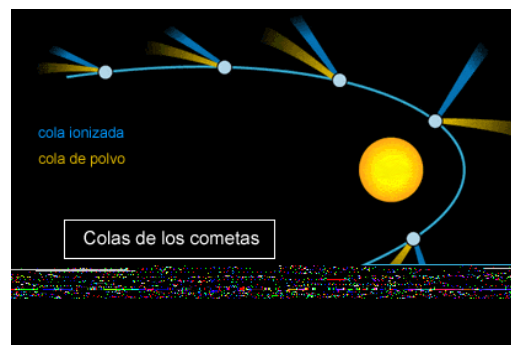
$$\sum_{i=1}^m x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = kf$$

Siendo m el número de parámetros independientes.

Estas definiciones y teoremas son fundamentales en el análisis de Jacobi, ya que de no cumplirse, el desarrollo genérico debe modificarse, algo que analizaremos al final del proyecto.

- (2) Según el Principio de Relatividad de Galileo el movimiento absoluto no se puede determinar por un experimento mecánico. Newton creía que el único sistema de referencia privilegiado es el propio espacio, al que clasificaba como absoluto y divino, al igual que el tiempo. Con la llegada de las Teorías de la Relatividad de Einstein de 1905 y 1915, se comprobó que el movimiento absoluto no existe, ya que ni el espacio ni el tiempo en sí mismos son magnitudes absolutas puesto que dependen de las velocidades y masas de los cuerpos, no habiendo, por tanto, marcos de referencia privilegiados.

- (3) Actualmente sabemos que los cometas tienen dos tipos de colas principalmente, una formada por polvo y otra por gas. La cola de gas es menos pesada que la de polvo y una fuerza relativamente pequeña puede superar la inercia orbital del cometa que la arrastra, por tanto, la misteriosa fuerza repulsiva a la que se refería Bessel era en realidad el viento solar (partículas y radiación emitida por el Sol) que interaccionan con las partículas del gas y las ionizan y desvían de la trayectoria del cometa.



<http://astronomia.cuatrineros.es/cometas.html>

- (4) Debemos observar que la atracción infinita para dos cuerpos infinitamente cerca, que analiza Jacobi, ocurre porque ha supuesto las masas como partículas puntuales. La aproximación de tomar los planetas como masas puntuales se puede considerar correcta si podemos despreciar su tamaño con respecto a las distancias que les separan, algo que no podemos hacer si las distancias son comparables o más pequeñas que los radios de los cuerpos. En realidad, si dos planetas se acercan hasta el límite de colisionar, $r_{ii'} \neq 0$, ya que la distancia entre dos cuerpos no puntuales se define como la que existe entre sus centros de gravedad, con lo que $r_{ii'} = R_i + R_{i'}$, siendo los

sumandos los radios de los planetas. Vemos así que la atracción no sería infinita, por lo que sí podrían separarse.

Observamos como consecuencia de ello que la deducción que hace Jacobi sobre el hecho de que para compensar la atracción infinita, otros cuerpos deben alejarse hasta el infinito para mantener la estabilidad del Sistema Solar, tampoco es correcta, ya que las colisiones binarias sí que pueden darse por los motivos expuestos en la primera parte de la argumentación.

- (5) Leopold Kronecker, estudiante de Dirichlet. Este último, entre sus muchas aportaciones, estableció criterios de convergencia de series y estudió el equilibrio de sistemas y el potencial newtoniano. Nació en 1805 y, en 1859, declaró haber descubierto como aproximación la solución de los n cuerpos. Desgraciadamente murió el 5 de mayo de ese mismo año, sin dejar escrita la demostración.
- (6) La correspondencia de Poincaré y su lista de publicaciones se pueden encontrar en los *Archives Henri Poincaré, Nancy-Université*: <http://poincare.univ-nancy2.fr/>
- (7) Cabe destacar que Poincaré ganó el concurso sin resolver el problema de la representación de las interacciones entre n partículas con desarrollos en serie que converjan. La representación de la solución con una serie lo resolvió en 1912 el astrónomo finlandés K. Sundmann para el problema restringido de los tres cuerpos, aunque, debido a la lenta convergencia de las series, se requieren programas informáticos para las aplicaciones. Sin embargo, debido a que no es relevante en el problema de la estabilidad del Sistema Solar, está casi olvidada y no nos referiremos más a ella.
- (8) Creemos justo comentar que el 16 de Julio de 1889, Mittag-Leffer, escribió a Poincaré solicitando algunas aclaraciones sobre convergencias en función de la razón entre las masas de los dos cuerpos principales. Poincaré, admite que hay un error, lo que hace tambalear la reputación del concurso y de él mismo, por lo que Leffer, el 5 de Diciembre del mismo año escribe de nuevo al francés comunicándole que está recuperando los ejemplares distribuidos de la memoria. Finalmente, en Enero de 1889 Poincaré envía una versión corregida de la memoria, la cual se publicaría a mediados de Noviembre de 1890. Gracias a la detección del error y su posterior corrección, Poincaré profundiza más en las trayectorias y la posible divergencia de las series, lo que le lleva al descubrimiento de lo que hoy llamamos caos.

4. Sistemas no Integrables

Como ya hemos visto, el problema de las órbitas y su estabilidad había cobrado una relevancia creciente entre los siglos XVII y los albores del siglo XX. El concurso del Rey Óscar II y la fama otorgada a Poincaré al ganar el primer premio son buena muestra de ello. El tronco del problema era “¿es posible resolver analíticamente cualquier ecuación diferencial?” Llegamos así al problema de la integrabilidad, (ya existente en las décadas previas a Poincaré, lo que contextualiza con precisión la actualidad y relevancia de sus estudios) tanto de ecuaciones diferenciales como de sistemas Hamiltonianos.

Enfatizamos en el sutil hecho de que no es necesario que encontremos la solución, sino sólo demostrar su existencia. *Un sistema dinámico integrable no puede ser caótico* (término aún desconocido en las investigaciones de Poincaré). La dificultad no residía ya en encontrar las soluciones de un sistema dinámico como el Sistema Solar, sino en averiguar si estas existían.

4.1 El problema de la integrabilidad

Como ya hemos avanzado, el problema de la integrabilidad se puede seccionar en dos partes:

- Integrabilidad de Sistemas Hamiltonianos
- Integrabilidad de Ecuaciones Diferenciales

La que corresponde a nuestros desarrollos es la primera de ellas, aunque partiremos de la segunda para llegar progresivamente a nuestras definiciones y nociones de integrabilidad hamiltoniana, con Liouville como punto de encuentro entre ambas.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) demostró que toda ecuación polinómica irreducible de grado n con coeficientes racionales tiene n raíces. E. Galois (1811-1832) no llegó a trabajar en ecuaciones diferenciales, pero demostró que estas raíces se pueden calcular a partir de los coeficientes de la ecuación polinómica a través de números racionales, las cuatro operaciones con estos y las raíces de cualquier índice a condición de que la ecuación polinómica admita un *grupo resoluble*⁽¹⁾. Tras la muerte de Galois, sus artículos llegaron a J. Liouville (1809-1882)⁽²⁾.

Liouville publicó en Septiembre de 1846 la memoria de Galois, enunciando un teorema que lleva su nombre. Este teorema también es conocido como el *teorema de Liouville-Arnold*, ya que V. Arnold (1937-2010) lo formuló geoméricamente⁽³⁾. Antes de enunciarlo, recordamos dos “definiciones”:

1. Las ecuaciones de movimiento de la mecánica de Hamilton-Jacobi que escribimos al analizar el problema de los dos cuerpos, y que potencialmente representan trayectorias de un sistema dinámico;

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Estas ecuaciones forman un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que se denomina como Sistema *Hamiltoniano de n grados de libertad*.

2. Sean $f, g: U \rightarrow \mathbb{K}$, el paréntesis de Poisson de f y g . Se define

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

Si $\{f, g\}=0$, se dice que f y g están en *involución*.

Teorema de Liouville (1840);

Si existen $f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ independientes y en involución, donde $k = 1, \dots, n$, $f_1 = H$, entonces el sistema hamiltoniano (1) es integrable.

Un Sistema Hamiltoniano que cumpla este teorema se denomina integrable en el sentido de Liouville o completamente integrable.

Ejemplos de sistemas integrables son los que tienen un grado de libertad, como el oscilador armónico, el péndulo simple, o un campo central (problema de los dos cuerpos).

En definitiva, para que un sistema hamiltoniano sea integrable, debe haber n funciones en involución ó n constantes de movimiento, las cuales no siempre son sencillas de encontrar.

Hasta la llegada de Poincaré, varios matemáticos, como Kowalevskaya (1850-1891) y Painlevé (1863-1933) habían intentado resolver el problema de la integrabilidad de un sistema hamiltoniano⁽⁴⁾, pero no fue hasta *Métodos Nuevos de la Mecánica Celeste Tomo I* (Poincaré, 1892) cuando apareció por primera vez el método con el que terminaremos este apartado y comenzaremos el siguiente. Hasta ese momento, continuaremos analizando el problema de la integrabilidad hamiltoniana;

La clave para la integración del sistema hamiltoniano con n grados de libertad es el número de cantidades conservadas, en donde estas deben n funciones pueden interpretarse como los momentos conjugados. En este caso, las ecuaciones de Hamilton que dedujimos al presentar dicho formalismo en el problema de los dos cuerpos, pueden ser integradas directamente. Sin embargo, puede ser difícil encontrar las constantes de movimiento explícitamente, con lo que es necesario reconocer su existencia, al menos, por la geometría generada. Considerando un sistema hamiltoniano en que H es constante de movimiento, la conservación de la energía tiene consecuencias geométricas en el espacio de fases⁽⁵⁾.

Supongamos una variable dinámica (función diferenciable) $G(q, p)$ que determina una foliación⁽⁶⁾ con subvariedades de dimensión $2n - 1$ (codimensión 1) y un campo vectorial en el espacio de fases. Este campo vectorial X_G vendrá dado por:

$$X_G = \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \frac{\partial}{\partial p_j}$$

En donde:

- X_G es tangente a cada hoja de foliación, lo que implica que las curvas integrales de X_G se encuentran completamente confinadas en las subvariedades de foliación.
- La modificación δR que sufre una función $R(q, p)$ a lo largo de las curvas integrales de X_G vendrá dada bajo la acción de $X_G(R)$ de X_G sobre R ;

$$X_G(R) = \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial p_j} \right) \frac{\partial R}{\partial q_j} - \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \frac{\partial R}{\partial p_j}$$

Que ha resultado ser el paréntesis de Poisson de R con G ;

$$\delta R = \{R, G\}$$

Podemos establecer como caso particular cuando la función G es el Hamiltoniano H , caso en que el campo vectorial X_H equivale al campo dinámico y las hojas de foliación a las hipersuperficies de energía constante. Considerando F como una función independiente ($dF \wedge dH \neq 0$), la dimensión de la nueva foliación definida por la intersección de ambas foliaciones es $2n - 2$. Supongamos que H es integrable en el sentido de Liouville, y la intersección de las n foliaciones (correspondientes a las n funciones independientes) define una foliación n -dimensional ($2n - n$). En este caso, se deben cumplir las siguientes propiedades:

- Cada hoja de la foliación n -dimensional es una subvariedad invariante bajo el flujo generado por el Hamiltoniano H , lo que significa que cada curva integral de X_H que representa una posible evolución temporal del sistema, estará confinada en una subvariedad n -dimensional.
- Los n campos vectoriales linealmente independientes son tangentes a las hojas de foliación n -dimensionales, por lo que estas forman una base del correspondiente espacio tangente n -dimensional.
- Como las n funciones están en involución y, por tanto, los paréntesis de Poisson son nulos, las hojas de foliación n -dimensionales (si son subvariedades compactas y conexas) serán difeomorfas a un toro n -dimensional.
- Cada círculo en dicho toro puede describirse mediante una coordenada angular. El movimiento más general es el quasiperiódico o casiperiódico. Llamamos a este como el que posee n frecuencias, está desacoplado, las componentes del movimiento son periódicas, y las frecuencias son racionalmente independientes.

Si un movimiento es cuasiperiódico las trayectorias (curvas integrales en X_H que no intersecan) están contenidas en un toro y son densas en él.

Para finalizar los aspectos teóricos, diremos que si el movimiento no está acotado, las hojas no serán compactas, restringiendo las trayectorias a un toro $n - k$ dimensional. Si en lugar de las n constantes de movimiento encontramos, por ejemplo, k (incluyendo la energía), el movimiento se encontrará en una hipersuperficie $2n - k$ dimensional en el espacio de fases. Así, hemos comprobado que, en un sistema integrable en el sentido de Liouville, el movimiento del sistema tiene lugar sobre un toro n -dimensional (la mitad que el espacio de fases).

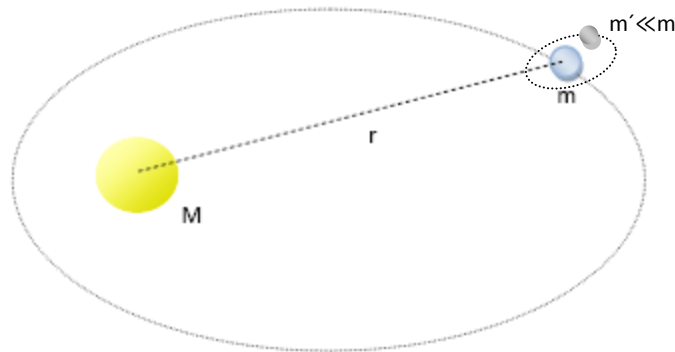
Como ya hemos comentado, Poincaré, motivado por el concurso del Rey de Suecia, se dedicó a los problemas de la Mecánica Celeste, en concreto a la dinámica de tres partículas masivas sometidas a sus fuerzas gravitatorias y su posible integrabilidad hamiltoniana, es decir;

4.2 El problema de los 3 y los n cuerpos

Supongamos el sistema Sol-Tierra-Luna y despreciemos la influencia de los demás planetas. El correspondiente hamiltoniano;

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}$$

En donde m_i representa las masas y, p_i el momento y r_{ij} la distancia entre la i -ésima partícula y la j -ésima.



Supongamos que el espacio en que se encuentran las partículas es el espacio euclídeo tridimensional, con lo que necesitamos tres variables que describan la posición de cada partícula y otras tres para los momentos, obtenemos así un total de 18 variables. Sin embargo, podemos reducir la dimensión del sistema y reconocer 10 constantes de movimiento;

- Como el centro de gravedad del sistema (o centro de masas) tiene un movimiento uniforme, lo podemos considerar como nuestro sistema de referencia en reposo. Eliminamos así seis dimensiones (posición y momento del centro de gravedad).
- Dado que el momento angular es constante, su dirección configura un plano de movimiento para los cuerpos, con lo que podemos eliminar otras tres dimensiones.
- Por último, la energía del sistema se conserva, lo que reduce en otra dimensión el sistema.

Así, el sistema Sol-Tierra-Luna queda con 8 variables. La pregunta oportuna es *¿hay más constantes de movimiento?* Ante la ausencia de respuestas por parte de matemáticos y físicos, los estudios precedentes de dicho sistema se habían realizado bajo ciertas aproximaciones y simetrías. Algunos de los avances en el problema habían llegado de la mano de Lagrange en 1772 y Delaunay entre 1860 y 1867⁽⁷⁾, pero el problema seguía abierto ya que no sólo no se resolvían las ecuaciones generales sino, lo que es peor, no se sabía si podían ser resueltas.

Supongamos, aunque no hallemos las ocho constantes de movimiento necesarias, que estas existen y el sistema es integrable en el sentido de Liouville. En este caso, el problema podría tratarse como un sistema hamiltoniano generalizado n-dimensional, cuyo tratamiento más adecuado es el uso de las variables acción-ángulo;

Estas magnitudes describen la posición del sistema sólo mediante un conjunto de ángulos (w_1, w_2, \dots, w_n) que representan las frecuencias v_i del sistema. Las variables de acción (I_1, I_2, \dots, I_n) representan a los momentos respecto a las variables w_i .

Imaginemos que encontramos una función S (*transformación canónica*) que nos permite transformar las coordenadas (p_i, q_i) en (w_i, I_i) , con lo que el hamiltoniano resultante será una función exclusivamente de los momentos;

$$H(q, p) \rightarrow H_0(I) = H_0' \left[q, \frac{\partial S(q, I)}{\partial q} \right]$$

En donde

$$p = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q}, w = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}$$

Por tanto, las ecuaciones de movimiento se simplifican en la forma

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial w_i} \equiv 0, \dot{w}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} \equiv w_i(I)$$

Pudiendo integrarse para obtener la solución completa del sistema dinámico;

$$I_i = ct$$

$$w_i = v_i t + \delta_i$$

Con δ_i como las fases iniciales de los valores angulares

Como $w(t)$ es una solución del campo, entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$w_i(t) = w_i \left(t + \frac{k}{w_i(I)} \right)$$

Lo que determina las trayectorias sobre un toro n-dimensional.

Debemos observar que si introducimos algún término de acoplamiento en el hamiltoniano, esto podría suponer el que las frecuencias dejaran de ser independientes. Los acoplamientos, al igual que en los osciladores, pueden producir *resonancias* y transformar las relaciones v_i/v_j en cocientes racionales. Como veremos, las resonancias en un sistema hamiltoniano pueden desestabilizar las trayectorias.

Sin embargo, como ya hemos avanzado, el problema no podría ser resuelto analíticamente si, en el problema de los tres cuerpos, no se encontraban las ocho constantes necesarias.

Este es el problema que estudió Poincaré⁽⁸⁾, y cuya solución llegó en 1892 en forma del...

Teorema de Bruns-Poincaré

No existe ninguna otra constante de movimiento que reduzca la dimensión del sistema

El problema de los 3 cuerpos fue el primero en mostrar al mundo todo un universo de dinámicas irregulares. Poincaré concluyó que la no integrabilidad del problema de los tres cuerpos podría implicar, generalizando a los n cuerpos, la inestabilidad del Sistema Solar (Peterson, 1994). En consecuencia, Poincaré obtuvo que el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar prácticamente no se repetía nunca, al menos con total exactitud. Así, el futuro, a pesar de ser determinista, era impredecible.

Por tanto, si los sistemas de 3 y n cuerpos no eran integrables, ¿el Sistema Solar estaba condenado a no ser predecible? ¿Significaba esto la inestabilidad del sistema planetario? Poincaré escribió en 1892, estudiando la periodicidad de las órbitas, las siguientes palabras sobre el *movimiento caótico* que había descubierto:

“Lo que otorga a estas órbitas periódicas valor, es que ofrecen la única vía por la que penetrar en esta fortaleza que tiene reputación de ser inabordable”

El gran enfoque de Poincaré se basó en la observación de que la mayoría de los problemas de la Mecánica Celeste se pueden clasificar como *sistemas hamiltonianos próximos a integrables*, lo que hoy conocemos como *Teoría de Perturbaciones*.

- (1) No entraremos en la biografía de Galois ni en sus trabajos, los cuales permitieron desarrollar en gran parte la Teoría de Grupos, pero para ello se puede consultar: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Galois.html>
- (2) Matemático relevante en nuestro trabajo, ya que volveremos a mencionarlo en el *problema de los divisores pequeños*.
- (3) Vladimir Arnold, al igual que Liouville, también seguirá presente en el proyecto, ya que una de las iniciales del Teorema KAM (“A”-Arnold) se debe a él.
- (4) Recientemente (2004), Adler Van y Moerbeke Mumdford han desarrollado el test de Kowalevskaya-Painlevé sobre sistemas algebraicamente integrables.
- (5) Construcción matemática, en mecánica clásica, bajo la cual se puede representar el conjunto de posiciones y momentos conjugados en un sistema dinámico. Cada punto del espacio fásico simboliza un estado del sistema. Cada hamiltoniano definido sobre el espacio de fases corresponde a un conjunto de trayectorias que evolucionan temporalmente, ya que la dimensión del espacio fásico es similar al número de grados de libertad. La posible intersección de las trayectorias, es lo que se analizará en este texto.
- (6) Recordamos algunas definiciones y nociones en que nos basaremos:
 - Variedad topológica de dimensión n Espacio topológico Hausdorff (T_2 , espacio topológico en que puntos distintos tienen entornos distintos) y de base numerable en que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo (aplicación biyectiva continua de inversa continua) a un abierto de \mathbb{R}^n . Trivialmente, todo abierto no vacío de \mathbb{R}^n es una variedad topológica de dimensión n.
 - Toro n-dimensional Variedad topológica T_n , definida por $T_n = S_1 \times \dots \times S_1$. Dicha variedad es compacta y de dimensión n, ya que el producto directo de un número finito de variedades topológicas es una variedad topológica de dimensión igual a la suma de las dimensiones de las variedades. Usualmente el término “toro” se usa para designar al toro 2-dimensional T_2 .
 - Foliación Variedad diferenciable formada como partición de subvariedades diferenciables. Todas las subvariedades que conforman la foliación son de la misma dimensión, siendo esta menor que la dimensión de la variedad original. Un ejemplo intuitivo y visual podría ser la foliación del espacio tridimensional euclídeo en infinitos planos “apilados” y paralelos entre sí.
 - Difeomorfismo Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable M en la variedad diferenciable N. Si f es diferenciable y biyectiva, y f^{-1} es también diferenciable, se dice que f es un difeomorfismo y que M y N son difeomorfas.
 - Subvariedad diferenciable Cualquier subconjunto de una variedad diferenciable que mantiene su misma estructura.
 - Conjunto conexo Subconjunto de un espacio topológico que no puede describirse como unión disjunta de dos conjuntos abiertos.
 - Conjunto compacto Subconjunto de un espacio topológico X que, dado un cubrimiento abierto de X cualquiera, existe un subcubrimiento finito del mismo.
 - Conjunto denso Es aquel subconjunto de un espacio topológico en que su clausura topológica es todo el espacio.

- Cubrimiento abierto Un cubrimiento abierto de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico es una familia de conjuntos abiertos $\{O_i\}_{i \in I}$ de X , tales que su unión cubre a A : $\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq A$
- (7) Lagrange sugirió la hipótesis del tercer cuerpo de masa despreciable que orbita alrededor de los otros dos cuerpos mayores que ya estuvieran girando en una órbita aproximadamente circular. Encontró cinco puntos clave en los que el tercer cuerpo podría estar en estado estacionario respecto a los dos más grandes. Estos puntos se conocen como puntos de libración o de Lagrange. El descubrimiento de los asteroides troyanos, ubicados en puntos de libración del sistema Sol-Júpiter, es una elegante confirmación de las soluciones de Lagrange.
- Por su parte, Charles Delaunay publicó dos volúmenes de 900 páginas sobre el sistema Sol-Tierra-Luna. En sus estudios ya se podían apreciar dinámicas irregulares y la aplicación de la teoría de perturbaciones que, como veremos más adelante, consiste en suponer el problema de los tres cuerpos como un problema de dos cuerpos en donde estos son perturbados por un tercero.
- (8) Bruns, en 1887, ya probó que no existía ninguna integral primera independiente de las diez conocidas y que fuera algebraica para algún valor de las masas.

5. Teoría de Perturbaciones: resonancias

Salvo los sistemas conservativos con un grado de libertad, la mayoría de sistemas dinámicos no son integrables. Como hemos visto, para un sistema integrable, se puede dar la solución en función de un conjunto de variables acción-ángulo, reduciendo la dinámica a una hipersuperficie topológicamente equivalente a un toro n-dimensional. Las dinámicas resultantes en estos casos son periódicas o casi periódicas, dependiendo de los cocientes entre algunas frecuencias. Como ya sabemos, nuestro Sistema Solar no representa un hamiltoniano integrable.

Poincaré identificó la mayoría de sistemas de la mecánica celeste como sistemas próximos a integrables, es decir, se pueden intentar resolver como perturbaciones del hamiltoniano resoluble con el término no integrable. Lo que permite esta aproximación es la *Teoría de Perturbaciones*. De esta forma, se pueden encontrar coordenadas de acción-ángulo en las que el hamiltoniano adopta la forma simplificada:

$$H(\mathbf{I}, \mathbf{w}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$$

En donde $H_0(\mathbf{I})$ es integrable y $\varepsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$ es pequeño. En nuestro caso, el planetario, $H_0(\mathbf{I})$ representa la energía de los planetas en órbita alrededor del Sol si despreciamos las interacciones entre ellos (movimiento kepleriano), y $\varepsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$ representa las interacciones de los planetas entre sí (mucho menor que la atracción ejercida por el Sol, ya que el pequeño parámetro ε es del orden de las masas planetarias). Los métodos de Henri Poincaré (desarrollado y publicado el de este en 1892) y el astrofísico sueco Edvard Hugo Von Zeipel (1916) consistían en encontrar unas nuevas coordenadas $(\mathbf{I}', \mathbf{w}')$ en forma de series en ε de la forma⁽¹⁾:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \varepsilon S_1(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \varepsilon^2 S_2(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \varepsilon^3 S_3(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \dots$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \varepsilon T_1(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \varepsilon^3 T_3(\mathbf{I}, \mathbf{w}) + \dots$$

Siendo S la función generadora (la nueva transformación canónica para el hamiltoniano perturbado H). Así, se verificará:

$$H \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{w}_i} \right), \mathbf{w}_i \right] = H'(\mathbf{I}_i')$$

Expresión que muestra la condición que se debe cumplir para la obtención de las constantes de movimiento I_i' y alcanzar la integración del sistema. De esta forma, la nueva función S se puede escribir como:

$$S(\mathbf{I}', \mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{I}' + \varepsilon S_1(\mathbf{I}', \mathbf{w})$$

Desarrollando el hamiltoniano en serie de potencias en ε ;

$$H'(\mathbf{I}') = H_0(\mathbf{I}') + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial S_1(\mathbf{I}', \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} + \varepsilon H_1(\mathbf{I}', \mathbf{w}) + O(\varepsilon^2)$$

Observamos que para que haya correspondencia con el hamiltoniano planteado inicialmente y que sólo haya dependencia con I' ;

$$\Omega \frac{\partial S_1(I', \omega)}{\partial \omega} = -H_1(I', \omega)$$

Recordamos asimismo que

$$\Omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$$

simbolizan las frecuencias características del sistema hamiltoniano no perturbado. Como asumimos que H_1 y, por lo tanto, S_1 , es una función periódica respecto a las componentes de los ángulos ω , se pueden desarrollar en series de Fourier de la siguiente forma:

$$H_1(I', \omega) = \sum_{m \neq 0} H_{1,m}(I') e^{im\omega}$$

$$S_1(I', \omega) = \sum_{m \neq 0} S_{1,m}(I') e^{im\omega}$$

En donde $m = 2\pi(m_1, m_2, \dots, m_n), \forall i/m_i \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo H_1 en $\Omega \frac{\partial S_1(I', \omega)}{\partial \omega} = -H_1(I', \omega)$ e integrando término a término;

$$S_1(I', \omega) = \omega I' + i\varepsilon \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1,m}(I') e^{im\omega}}{m\Omega}$$

Se podría pensar que con este desarrollo ya estaba resuelto el problema del movimiento de los planetas, ya que tomando cada vez más términos en las series se obtienen aproximaciones del movimiento cada vez más afinadas. Sin embargo, la serie debe converger, por lo que $m\Omega \neq 0$.

De tal forma, la serie diverge si:

$$m\Omega = m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + \dots + m_n \Omega_n = 0$$

Es decir, cuando haya resonancias entre las frecuencias.

Poincaré demostró que tomando un número creciente de términos en las series, a partir de un cierto momento, las soluciones se deterioran. Así, el francés, parecía indicar que ninguna órbita iba a ser eternamente estable, lo cual planteaba otra pregunta: si además, ha quedado demostrado que no hay más leyes de conservación ¿por qué se comportaban los planetas con tanta regularidad? Weierstrass no quedó convencido.

Hemos comentado que el denominador se anula en caso de resonancias, pero, ¿existen estas realmente en el Sistema Solar? Se puede pensar razonablemente que si escogemos al azar un valor de la recta real, la probabilidad de que sea racional es, a priori, nula⁽²⁾. Sin embargo, no hemos contado con...

5.1 El Problema de Júpiter y Saturno

Si dos planetas con movimientos independientes viajan alrededor del Sol, las ecuaciones de Newton permiten la existencia de órbitas estables con relaciones racionales entre frecuencias. Sin embargo, al considerar las interacciones entre ambos planetas ¿subsisten las órbitas bajo estas relaciones? Aparentemente, bajo el paraguas de la serie de Poincaré, la respuesta es que no.

El caso más inquietante es el de Júpiter-Saturno, cuyos años terrestres se encuentran en la relación 2/5 (mientras Saturno completa dos vueltas alrededor del Sol, Júpiter da cinco). Los dos planetas se encuentran periódicamente en la igual posición relativa, con lo que las perturbaciones debidas a sus atracciones se deberían acumular, modificando las órbitas. Jean-Baptiste Biot (1774-1862), predijo que debido a dicho cociente racional, una pequeña perturbación en cualquiera de las dos órbitas planetarias provocaría la expulsión de Saturno del Sistema Solar⁽³⁾. Como Júpiter tarda 12 años dar una vuelta alrededor del Sol y, Saturno, 30 años, cada 60 años se encontrarán en la misma posición relativa.

Como hemos avanzado, Karl Weierstrass, no estaba convencido de ello, objetando que la estabilidad no podía depender del carácter racional o irracional del cociente de los periodos de las órbitas; *¿cómo podríamos medir las órbitas con la precisión suficiente para que adquiera sentido esta diferencia entre racionalidad e irracionalidad?*⁽⁴⁾ De hecho, el ilustre matemático, exasperado, expuso que era igualmente posible que fuera Júpiter quien escapara, lo que *“simplificaría bastante la tarea de los astrónomos, ya que es este planeta el que provoca las mayores perturbaciones”*. Llegamos así a una situación peor que la probable anulación de los divisores en algunos términos de la serie (supuestamente formada, a priori, por términos pequeños que hacían converger la serie, dando verosimilitud a la teoría de perturbaciones), y es que incluso en el caso estricto en que $m\Omega \neq 0$, es decir, cuando las frecuencias sean inconmensurables, siempre se puede encontrar un conjunto de valores de m tales que:

$$m\Omega < \delta$$

con δ escogido arbitrariamente pequeño.

Tras analizarlo, la pregunta ahora era ¿qué sucede con un sistema que se perturba bajo el término εH_1 en el caso $m\Omega = \delta$, con δ pequeño? Surgió así *el gran problema de los denominadores pequeños*.

- (1) Como el tratamiento de los contenidos del proyecto abarcan varios siglos, al igual que en otros casos a lo largo del trabajo, no presentaremos los amplios desarrollos del método de Poincaré-Zeipel, sino una muestra de ellos. Para una consulta más profunda en las deducciones y demostraciones del método basado en la obra de Poincaré se puede leer el apartado “teoría de perturbaciones independientes del tiempo” del texto “Mecánica Clásica Avanzada”, de Jorge Mahecha Gómez, de la Universidad de Antioquía.
- (2) Cantor, de quien hablaremos más adelante, demostró que son infinitos más los números irracionales que los racionales.
- (3) Otro caso de resonancias celestes lo representa la Luna, ya que siempre nos ofrece la misma cara. Así, su frecuencia de rotación y la de traslación alrededor de la Tierra se encuentran en relación 1/1. La explicación a este fenómeno, conocido desde la antigüedad, la encontró Lagrange en 1764, y consiste en demostrar que el campo gravitatorio terrestre ha ido frenando progresivamente la velocidad rotacional del satélite (fuerzas de marea) hasta la situación actual. Sin embargo, este caso no es un ejemplo de divergencia de la serie de Poincaré, ya que no se trata de una resonancia entre dos cuerpos en que tenemos en cuenta las fuerzas de interacción mutuas.
- (4) De hecho, consultando los datos más actuales y precisos a través de la página de la NASA <http://solarsystem.nasa.gov/planets/>, los períodos medidos lo más exactamente posible son:
Júpiter: 11.862615 años terrestres
Saturno: 29.447498 años terrestres
Dividiendo ambos entre sí arrojan la cifra: 0.4028393686
Lo que no encaja con total precisión en la resonancia $2/5=0.4$

6. El problema de los denominadores pequeños: Teorema KAM

Como ya avanzó Weierstrass, la estabilidad no podía depender únicamente del carácter racional de las medidas del cociente de las frecuencias⁽¹⁾. Un ejemplo de ello es que, precisando al máximo, incluso los cocientes de las teóricas frecuencias resonantes de Júpiter y Saturno ofrecen el resultado de 0.4028393686, como ya mostramos en una de las notas de la "Teoría de Perturbaciones". Sin embargo, si le restamos la relación racional teórica (2/5), nos encontramos con el "pequeño" denominador: 0,0028393686, lo que muestra que la diferencia entre racionalidad e irracionalidad depende en gran medida de la precisión de los datos astronómicos recogidos y, por tanto, de las condiciones iniciales. Así, el carácter racional o irracional, difícil de discernir en la práctica observacional, provocaba comportamientos diferentes en las series de la Mecánica Celeste y, por tanto, una inquietante incertidumbre en las predicciones del Sistema Solar a largo plazo.

El ejemplo de Júpiter y Saturno hace pensar que, aunque las relaciones no sean exactamente racionales, si se aproximan mucho a estas, los divisores de las series pueden tender a cero rápidamente y provocar la divergencia de los desarrollos, exponiendo de nuevo al Sistema Solar a la inestabilidad. Surge así la gran pregunta:

¿Hasta qué punto los números irracionales se pueden aproximar a racionales?

A estas alturas de nuestro estudio, hemos encontrado en la anterior pregunta una bonita conexión entre la Teoría de Números y la Estabilidad del Sistema Planetario.

6.1 Aproximaciones Diofánticas

Sabemos desde Pitágoras (570-490 a.c.), que podemos representar algunos números mediante el cociente de dos enteros, lo que no es posible para otros como $\sqrt{2}$, los conocidos como irracionales. George Cantor (1845-1918) demostró que, aunque ambos infinitos, es mayor el conjunto de los números irracionales que el de los racionales (motivo por el que ya comentamos en apartados anteriores que, si escogemos al azar un punto de la recta real, la probabilidad de que sea racional es "cero").

Siempre podemos encontrar aproximaciones racionales para un número irracional, como por ejemplo 7/5 para $\sqrt{2}$. De igual forma, podemos aproximar un número irracional "tanto como queramos" si usamos números racionales con denominadores grandes. Sin embargo, de todo ello se abre una cuestión sutil:

¿Se puede calificar a un irracional de mal aproximable o bien aproximable, en el sentido de que a los irracionales bien aproximables podemos acercarnos con lentitud, a través de números racionales de denominadores pequeños?

La idea inicial es que, ya que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , cualquier número irracional puede ser aproximado con la precisión deseada por un racional adecuado. Sin embargo, las aproximaciones serán “malas” si el denominador es muy grande. Por ejemplo, cualquier número irracional se puede aproximar a través de una fracción con denominador 100, lo que se consideraría mala aproximación ($314/100=3.14\approx\pi$). En cambio, una muy buena aproximación de π sería:

$$355/113= 3,14159292$$

Ya que con un divisor del orden de 100 hemos aproximado con 7 cifras exactas.

La generalización del anterior caso particular se resume en:

Teorema 1_ *Si α es un número irracional y p/q es un convergente de la fracción continua⁽²⁾ de α , entonces:*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2},$$

luego existen infinitas aproximaciones de α (con precisión arbitraria) en estas condiciones.

Joseph Liouville, a quien ya nombramos al estudiar la integrabilidad de sistemas Hamiltonianos, se valió de esta desigualdad para demostrar que el exponente 2 del anterior teorema no puede incrementarse indefinidamente y así construir ciertos números llamados *trascendentes*.

6.2 Números algebraicos y trascendentes

Aunque las siguientes definiciones se generalizan para número reales y complejos, en cuanto a los números irracionales, que son los que nos interesan en nuestro análisis, diremos que;

Definición 2_ *Un número irracional α se dice algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros,*

$$f(\alpha) = 0, \quad f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico ya que es raíz de $f(x) = x^2 - 2$.

Definición 3_ *Los números irracionales no algebraicos se llaman trascendentes.*

En 1844, Liouville descubrió los primeros trascendentes que se conocen gracias a la pregunta:

¿En qué medida es pequeña la diferencia entre un número irracional α y su aproximación racional p/q ?

Liouville utiliza la idea de que esta diferencia es menor cuanto mayor es el denominador q . Así, gracias a la siguiente definición:

Definición 4_ *Se dice que un número α es algebraico de grado n si α es raíz de un polinomio con coeficientes enteros y de grado n , pero no es raíz de ningún polinomio de grado menor que n con coeficientes enteros*

Llegamos al

Teorema 5 (Liouville)_ *Para cada algebraico α de grado $n > 1$, existe una constante $A(\alpha) > 0$, tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^n}$$

se cumple para todos los números racionales p/q .

Definición 6_ *A la anterior desigualdad la llamaremos condición diofántica.*

Definición 7_ *Un número irracional α es diofántico de exponente n si existe una constante positiva, A , tal que se cumpla la condición diofántica.*

Por tanto, cualquiera que sea el número racional p/q , su distancia a α será al menos de $\frac{A}{q^n}$

Podemos observar que es posible eliminar la constante A del enunciado a cambio de incluir un número finito de contraejemplos;

Teorema 8_ *Para cada algebraico α de grado n , existe como máximo una cantidad finita de números racionales p/q que cumplen*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Liouville utilizó su teorema para encontrar números trascendentes, sin más que buscar irracionales no diofánticos. Un ejemplo clásico es:

Teorema 9 (Liouville)_ *El número*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} 10^{-n!}$$

es trascendente.

En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,1 + 0,01 + 0,000001 + 0,000000000000000000000001 + \dots \\ &= 0.110001000000000000000000010 \dots, \end{aligned}$$

no es algebraico, es trascendente. No cumple la condición diofántica para ningún exponente, mostrándose extraordinariamente bien aproximable hasta 23 decimales.

Hasta ahora, para resumir, tenemos que cualquier número α irracional se puede aproximar arbitrariamente bien por números racionales p/q con un error menor que $1/q^2$, sin embargo, si α es algebraico de grado n , no es posible conseguir aproximaciones arbitrariamente buenas con error menor que $1/q^n$. Esto provocó a lo largo del siglo XX la pregunta de si el exponente 2 es el menor posible, es decir,

¿Podemos conseguir aproximaciones arbitrariamente buenas con exponente $2 < e < n$?

Esto ha sido objeto de multitud de trabajos, de los que expondremos los teoremas de forma simplificada refiriéndonos al Teorema de Liouville. Aunque, para el asunto que tratamos, sería suficiente con tratar dicho teorema, esbozaremos los resultados de otros matemáticos con la idea de llegar al que verdaderamente nos interesa (Teorema de Roth), ya que a este sí que volveremos a hacer mención cuando tratemos el Teorema KAM.

En 1909,

Teorema 10 (Thue)_ *El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente*

$$\frac{n}{2} + 1 + e, \forall e > 0$$

En 1921,

Teorema 11 (Siegel)_ *El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente*

$$2\sqrt{n} + e, \forall e > 0$$

Y en 1947, por separado

Teorema 12 (Gelfond y Dyson)_ *El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente*

$$\sqrt{2n} + e, \forall e > 0$$

Finalmente, en 1955

Teorema 13 (Roth)_ *El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente*

$$2 + e, \forall e > 0$$

Con lo cual, el exponente 2, para números algebraicos, no se puede mejorar.

Klaus Roth (1925-) obtuvo la medalla Fields por este teorema.

Llegamos así a la conclusión de que todos los números algebraicos no se dejan aproximar bien por racionales, lo que ofrece cierta convergencia a los desarrollos de la Mecánica Celeste. Sin embargo, hemos comprobado que existen números (trascendentes) que sí se dejan aproximar bien por racionales, lo que puede poner en peligro la estabilidad del Sistema Solar si aparecen estos números en los denominadores de las series. Por tanto, es necesario saber si la cantidad de números trascendentes es menor que la de los algebraicos, lo que ofrecería cierta “probabilidad” de estabilidad. La comparación entre el tamaño de ambos conjuntos era algo complicado, ya que ambos se podían considerar de infinitos elementos.

Georg Cantor (1845-1918) desarrolló la Teoría de Conjuntos junto a Dedekind y Frege. En 1874 propuso el concepto de cardinalidad de un conjunto A ($|A|$), llamando cardinalidad de un conjunto al número de elementos de este. Como para conjuntos finitos el concepto es trivial, Cantor lo amplió ingeniosamente a conjuntos infinitos (transfinitos), permitiendo ello comparar la cantidad de elementos de conjuntos infinitos.

Definición 14 (Cantor) *A y B tienen el mismo cardinal si existe una biyección*

$$f: A \rightarrow B \quad (A \sim B).$$

Teorema 15 (Cantor-Bernstein) *$A \sim B$ si y sólo si existen $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ inyectivas*

Ejemplos: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$

Definición 16 (Cantor) *A se dice numerable si es finito o tiene el mismo cardinal que \mathbb{N}*

Teorema 17 (Cantor) *\mathbb{R} no es numerable*

Teorema 18 (Cantor) *Los números algebraicos son numerables*

Corolario 19 (Cantor) *Los números trascendentes son no numerables*

Así, Cantor demostró de manera alternativa la existencia de los números trascendentes teniendo en cuenta que el conjunto de todos los números algebraicos tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales, mientras que el conjunto de todos los números reales no es numerable. De ello se deduce que *casi todo número real es trascendente*. Por tanto, nos encontramos con el hecho de que la convergencia de las series vuelve a ser incierta, ya que la mala aproximación de números irracionales mediante racionales sólo está demostrada para los números algebraicos, no para los trascendentes, los cuales, desafortunadamente, resultaban ser “más frecuentes” que los algebraicos en la recta real.

Anteriormente hemos comprobado que algunos números trascendentes, como

$$\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} 10^{-n!}$$

Se dejan aproximar bien por los racionales ¿tendrán esta propiedad la mayoría de los números trascendentes? A los números que no cumplían la condición diofántica se les denominó *números de Liouville*. Para medirlos, eran necesarias nuevas teorías.

6.3 Teoría Geométrica de la Medida

La idea de definir una medida que pueda extender la noción de longitud de un intervalo para conjuntos infinitos comenzó hacerse necesaria a principios del siglo XX, tras las revolucionarias teorías de conjuntos de Cantor y las dificultades para medir el tamaño del conjunto de los números de Liouville.

Constantin Carathéodory (1873-1950) se interesó por la siguiente cuestión:

¿Cuál es la "medida" natural de un conjunto de \mathbb{R}^n ?

introduciendo estas ideas en 1914;

Definición 20_ Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. El diámetro de E se define como

$$|E| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Definición 21_ Para $\delta > 0$ definimos la δ -aproximación de la medida de un conjunto E de \mathbb{R}^n por:

$$H_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_i |E_i| : E \subset \bigcup_{i \geq 1} E_i / |E_i| < \delta \right\}$$

En donde $|E|$ simboliza en este caso el diámetro de E ($E \subset \mathbb{R}^n$), no su cardinalidad. El significado de la definición es que miramos todos los cubrimientos de E por conjuntos de diámetro menor que δ y minimizamos la suma de sus diámetros. Así, la longitud o medida en \mathbb{R} vendrá dada por:

$$H(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta(E)$$

Felix Hausdorff (1868-1942) extendió la idea al caso m -dimensional en 1919. Basó la medida m -dimensional en la suma:

$$\sum_i |E_i|^m,$$

de diámetros de los conjuntos E_i a la m -ésima potencia.

Definición 22_ La δ -aproximación de la medida de Hausdorff t -dimensional $H_\delta^t(E)$ de E se define por:

$$H_\delta^t(E) = \inf \{ \sum_i |E_i|^t : E \subset \bigcup_{i \geq 1} E_i / |E_i| < \delta \},$$

con $t \in \mathbb{R}_0^+$, $E \subset X$, $\delta > 0$. Siendo X un espacio métrico.

Definición 23_ La medida de Hausdorff t -dimensional $H^t(E)$ de E se define por:

$$H^t(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^t(E)$$

Podemos observar que para cada conjunto E existe un único valor $t = \dim(E)$ para el que la medida de Hausdorff “salta” de infinito a cero;

$$H^t(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < \dim(E) \\ 0 & \text{si } t > \dim(E) \end{cases}$$

Definición 24_ Al número $\dim(E)$ le llamamos *dimensión de Hausdorff de E*

De entre los teoremas y propiedades relacionados con la medida de Hausdorff, señalamos dos por la posible relación con los números de Liouville;

Teorema 25_ Si E es un conjunto numerable de \mathbb{R}^n , entonces $\dim(E) = 0$

Teorema 26_ En el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n , la medida de Hausdorff n -dimensional es proporcional a la medida de Lebesgue⁽³⁾ n -dimensional

Para no profundizar en demostraciones y ejemplos sobre estos conceptos (para ello se pueden leer textos como “conjuntos inconmensurables”, de Carolina Alejandra Mosquera, Marzo de 2009), exponemos a continuación dos resultados determinantes;

Teorema 27_ Todo número de Liouville es trascendente

Teorema 28_ El conjunto \mathcal{L} de los números de Liouville tiene medida Hausdorff s -dimensional cero, para todo $s > 0$

Con el anterior resultado, podríamos sentirnos tentados a establecer la siguiente conclusión final:

Como los números irracionales son infinitos más que los racionales (Cantor), la probabilidad de que un número al azar sea racional es cero. Por otra parte, como los irracionales algebraicos no se dejan aproximar bien por los racionales (Liouville) y, los números trascendentes que no cumplen la condición diofántica (números de Liouville) son de medida nula, la convergencia de las series está “asegurada” y, por tanto, la estabilidad del Sistema Solar.

Sin embargo, aunque es cierto que existen muchos números trascendentes diofánticos, no sólo suelen ser difíciles de calcular, sino que, los no diofánticos (los que ponen en peligro la convergencia de las series de la Mecánica Celeste), cumplen algunas propiedades destacables;

Teorema 29_ El conjunto \mathcal{L} de los números de Liouville es invariante por traslaciones

En efecto, si $x \in \mathcal{L} + m$, ($\forall m \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow x = y + m$ para algún “ y ” de Liouville. Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, existen números enteros p y q con $q > 1$ tales que $\left| y - \frac{p}{q} \right| < 1/q^n$. Por tanto, obtenemos que:

$$\left| y - \frac{p}{q} \right| = \left| y + m - \frac{p}{q} - m \right| = \left| (y + m) - \left(\frac{p + mq}{q} \right) \right| = \left| x - \left(\frac{p + mq}{q} \right) \right| < \frac{1}{q^n}$$

Con lo cual, como $\frac{p+mq}{q}$ es un número racional, $x \in \mathcal{L}$.

Hemos demostrado así que si a todo número de Liouville le sumamos cualquier número entero, el resultado es otro número de Liouville.

Así, la periodicidad de los números de Liouville siguen posibilitando la inestabilidad del sistema planetario, por poco probable que sea que nos aparezcan estos términos en las series.

El resultado fundamental que combinaba las nociones de Teoría de Números con los Sistemas Hamiltonianos próximos a integrables llegó con Kolmogorov (1903-1987), Arnol'd (1937-2010) y Moser (1928-1999).

6.4 Teoría KAM

El matemático ruso Andrei Kolmogorov, en 1954, esbozó las primeras ideas de una demostración que pretendía indicar que en el sistema planetario no sólo podían existir órbitas estables en ausencia de más leyes de conservación, sino que la mayoría de estas eran estables.

El método de perturbaciones superconvergente propuesto por Kolmogorov parecía superar el problema de los denominadores pequeños. La clave de se hallaba en la rápida convergencia cuando se hace un desarrollo a órdenes superiores a ε en el hamiltoniano perturbado: $H(\mathbf{I}, \mathbf{w}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$. En la Teoría de Perturbaciones ya descrita, el hamiltoniano H se puede transformar sucesivamente mediante transformaciones canónicas que incrementan el orden de la perturbación en una potencia de ε en cada paso. Si H_n es la parte aún sin transformar del hamiltoniano después de la n -ésima transformación;

$$H_1 \rightarrow \varepsilon^2 H_2 \rightarrow \varepsilon^3 H_3 \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon^n H_n$$

Kolmogorov observó que se pueden escoger transformaciones canónicas sucesivas de tal manera que, en cada paso, el orden de la transformación se incremente por el cuadrado del orden anterior;

$$H_1 \rightarrow \varepsilon^2 H_2 \rightarrow \varepsilon^4 H_3 \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon^{2^{n-1}} H_n$$

Así, tras la n -ésima transformación, quedaba resuelto el problema de la convergencia hasta el orden 2^{n-1} . Para una mayor profundización sobre el procedimiento de Kolmogorov se pueden consultar textos como: *Elementos de Teoría de Perturbaciones para Sistemas Hamiltonianos. Cervantes de la Torre F., Hernández R.T., Fernández Chapou J.L., Vargas C.A.. Universidad Autónoma Metropolitana. 1992.*

En 1961, Vladimir Arnold, estudió la convergencia ocupándose tan sólo de las perturbaciones analíticas, pero su demostración era válida para un número arbitrario de dimensiones. Para una lectura detallada sobre la demostración, se puede consultar. *Fèjoz, J. Démonstration du "théoreme d'Arnold" sur stabilité du système planétaire (d'après Michael Herman), Ergod. Th. And Dynam. Sys. 24 (2004) 1-62*

Por último, en 1963, Jürgen Moser, analizó resultados similares para dos dimensiones. En el enunciado del matemático alemán se cambió la analiticidad del Hamiltoniano por la diferenciabilidad hasta cierto orden. Concretamente, no se admitían más que perturbaciones 333 veces derivables. Más recientemente, se ha probado que son suficientes tres derivadas. Moser escribió:

“La idea básica consiste en inventar una técnica de iteración cuya convergencia sea tan rápida que se pueda controlar el efecto acumulativo de los divisores pequeños”

Al igual que en los casos anteriores, para más información sobre la estabilidad de Moser se puede consultar: *Moser, J. Is the Solar System Stable?. The Mathematical Inteligencer (1978) 65-71.*

Como las ecuaciones de movimiento son analíticas y el Sistema Solar no sólo genera toros bisimensionales, el Teorema de Arnold se aplica mejor a la Mecánica Celeste.

Así, llegados a este punto del trabajo, tras presentar las mecánicas celestes de Kepler, Newton y Einstein, exponer el formalismo hamiltoniano, sondear los primeros estudios de estabilidad del Sistema Solar de Laplace o Jacobi, mostrar el problema de los 3 y los n cuerpos, analizar la integrabilidad o no de Sistemas Hamiltonianos en el sentido de Liouville, aplicar la Teoría de Perturbaciones, y profundizar en la Teoría de Números en el análisis de la condición diofántica, es decir, después de un recorrido histórico-matemático de casi 360 años, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema (en uno de sus múltiples formatos):

Teorema 30 (KAM) *Dado el hamiltoniano $H(\mathbf{I}, \mathbf{w}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, con ε suficientemente pequeña cumpliendo una de las dos condiciones:*

- a) H_0 es integrable no degenerado
- b) H_0 es isoenergéticamente no degenerado,

para todas las Ω satisfaciendo la condición diofántica:

$$|(m, \Omega)| \geq \frac{A(\varepsilon)}{|m|^r}, \text{ con } r > (n + 1), |m| = \sum_{i=1}^n |m_i|,$$

existe \tilde{T}_Ω , toro invariante del hamiltoniano $H(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, cercano al toro invariante T_Ω del sistema no perturbado, sobre el que el flujo es conjugado del que se tenía en T_w . Dado un compacto foliado por toros de H_0 , el conjunto de puntos de él no pertenecientes a algún \tilde{T}_w tiene medida relativa que tiende a cero si ε lo hace.

Si se cumple la condición a), significa que toda variación del punto I provoca una variación de la frecuencia Ω . En caso de cumplirse la condición b), significaría que sobre toda variedad H_0 , una variación del punto I provoca una variación de la relación de frecuencias.

Los resultados finales de los tres científicos (Kolmogorov, Arnold, Moser) se fusionaron en el anterior teorema, acrónimo de sus nombres. En este caso sí que se puede decir que, para

llegar este teorema, se subieron a hombros de gigantes (Newton, Jacobi, Hamilton, Lagrange, Laplace, Liouville, Cantor, Poincaré, etc)⁽⁴⁾.

Las condiciones a) y b) vienen a decir que toda variación de I provoca una variación de la frecuencia Ω y que sobre la variedad $H_0 = E$ una variación de I provoca una variación de la relación de frecuencias, respectivamente.

Dada la longitud de la demostración, no la escribiremos, pero si la esbozaremos. La idea es que, en lugar de modificar la frecuencia en las sucesivas aproximaciones a la solución (teoría clásica de perturbaciones), se busca un toro invariante manteniendo fijas las frecuencias que verifican la condición diofántica. Para ello se utiliza una sucesión de cambios de variable de convergencia rápida (similares al método de Newton-Raphson para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real) variando de toro en cada paso gracias a la condición de no degeneración. Los dominios en que la sucesión es convergente se va estrechando hasta reducirse al propio toro invariante. Es decir, el cambio de variables global pasa del toro invariante de H_0 al de H con la misma Ω y sólo es válida en dicho toro. Sobre las demostraciones del teorema se pueden leer el anteriormente citado artículo de Arnold y otros de Kolmogorov o Moser.

Nosotros, para una adecuada exposición del teorema, lo trataremos de aplicar al caso 2-dimensional, en cuyo caso;

$$|(m, \Omega)| > \frac{A(r, \varepsilon)}{|m|^r}, \text{ con } r > (n + 1), |m| = m_1 + m_2$$

Asumimos que $\Omega_1 < \Omega_2$, ya que si se diera la igualdad tendríamos una resonancia que sería objeto de Teorema de Poincaré-Birkhoff (relaciones racionales entre frecuencias) y no sería *el problema de los denominadores pequeños*. Si el cociente entre frecuencias cumple la condición diofántica en el formato escrito en las Teorías de Números:

$$\left| \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A(\varepsilon)}{|q|^n}$$

El toro definido por ambas frecuencias no se destruirá, sino que únicamente sufrirá una deformación topológica. El valor de \mathcal{A} verifica que $A(\varepsilon \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Los toros que sí se destruyen tras la perturbación son los que satisfacen

$$\left| \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{A(\varepsilon)}{|q|^n}$$

para algún valor de p,q entero.

El conjunto de valores de $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ que cumplen la anterior desigualdad es no vacío (números de Liouville) pero, ¿cuántos toros se destruyen aproximadamente en el intervalo total de frecuencias tras la perturbación? Tratemos calcularlo.

El intervalo de frecuencias está acotado entre 0 y 1, es decir, $0 < \frac{\Omega_1}{\Omega_2} < 1$. Si suprimimos un intervalo de longitud $\frac{A(\varepsilon)}{|q|^n}$ alrededor de cada número racional p/q en el intervalo (0,1), la longitud total destruida será:

$$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{A(\varepsilon)}{|q|^n} q = A(\varepsilon) \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{|q|^{n-1}}$$

En donde cada longitud eliminada la hemos multiplicado por su correspondiente “q”, ya que para un mismo denominador la longitud equivalente corresponde a un número similar de numeradores. Por ejemplo, si suprimimos la longitud en torno al racional (con denominador fijado) 1/3, hemos de suprimirla también para los racionales 2/3 y 3/3 (aunque 3/3=1 no forma parte del intervalo, sí debemos destruir la correspondiente longitud que se acerca a 1), con lo que hemos de suprimir tres longitudes iguales, y así sucesivamente para todos los racionales.

La cuestión ahora, es saber si la serie converge o no. Como la función $\frac{1}{|q|^{n-1}}$ es monótona decreciente y positiva, podemos aplicar la *Prueba de la Integral*, que dice que la sumatoria convergerá si lo hace la integral $\int_1^L f(x) dx$ en $L \rightarrow \infty$. Así,

$$\int_1^L f(x) = \int_1^L \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{2-n} \left[\frac{1}{x^{n-2}} \right]_1^L = \frac{-1}{n-2} \left[\frac{1}{L^{n-2}} - \left[\frac{1}{1^{n-2}} \right] \right]$$

Al pasar al límite,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-1}{n-2} \left[\frac{1}{L^{n-2}} - \left[\frac{1}{1^{n-2}} \right] \right] \right\}$$

Lo que converge a $\frac{1}{n-2}$ si el exponente de L es positivo, es decir, $n > 2$, condición que impone el *Teorema de Roth*. Así, hemos demostrado la convergencia de la serie, con lo que hay un límite superior a la cantidad de toros destruidos. Como, además, $A(\varepsilon \rightarrow 0) \rightarrow 0$, el número total de toros que se destruyen tiende a cero para perturbaciones pequeñas. Cabe decir que el exponente concreto para los toros bidimensionales que debe cumplir la condición diofántica es:

$$\left| \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A(\varepsilon)}{|q|^{2.5}}$$

Pero hemos considerado más elegante enfrentarnos a la demostración para un exponente genérico “n”. Esta deducción, generalizada y enunciada para toros n-dimensionales (problema de los n cuerpos) representa el Teorema KAM.

En conclusión diremos que en un sistema perturbado la mayor parte de las órbitas se encuentran sobre toros en el espacio fásico. Aquellas que no se localizan sobre estos toros constituyen un conjunto finito y pequeño, distribuido este sobre en el espacio de fases cerca

de cada toro no perturbado que soporta órbitas cerradas o parcialmente cerradas (periódicas o casi-periódicas).

Físicamente hablando, aquellos intervalos correspondientes a grandes valores de “ q ” son complejos de analizar, ya que son muy estrechos y pequeñas perturbaciones aleatorias (además de ε) podrían desplazar al sistema fuera del intervalo y ubicarlo en el dominio de un toro vecino. Sin embargo, como veremos en el siguiente punto, los intervalos de menor orden (“ q ” pequeño) que resultan de resonancias de bajo orden entre las frecuencias no perturbadas son más amplios, ocasionando efectos observables.

Como hemos visto, el Teorema KAM sobre la estabilidad de las órbitas ha sido el resultado analítico más importante desde que las Leyes de Kepler en 1609 trazaron las trayectorias planetarias sobre los cielos, lo que parece poner fin al debate sobre la estabilidad del Sistema Solar. Sin embargo, debemos remarcar una idea, y es que desde el punto de vista físico el Teorema KAM es una demostración de probabilidad, es decir, con una probabilidad $1 - O(\varepsilon)$ una órbita escogida aleatoriamente se encontrará en un toro invariante y, por tanto, esta será “eternamente” estable.

Aún en la década de 1960 había astrónomos convencidos de la existencia de leyes de conservación suplementarias como única explicación posible de la estabilidad del Sistema Solar. El Teorema KAM responde a cuestiones de Mecánica Celeste de forma misteriosa, mediante Teorías de Números y probabilidades. El teorema pone de relieve que los sistemas dinámicos de Mecánica Clásica se comportan de manera desconcertante, ya que si se nos presenta uno de estos sistemas como una batalla entre orden y desorden, resulta que el orden es más poderoso de lo que se creía, a pesar de la aparente contradicción con las leyes de la entropía.

Una de las grandes aplicaciones de KAM son los aceleradores de partículas, en los que partículas como protones son aceleradas a velocidades relativistas en grandes órbitas (el famoso LHC de Ginebra mide 27 km de diámetro), con el objeto de que las colisiones finales produzcan nuevas partículas. Un gran problema hasta hace unas décadas era garantizar la estabilidad de las órbitas, de forma que las interacciones entre las propias partículas del haz acelerado no destruyeran las trayectorias. Con KAM, la estabilidad del haz de protones resulta inherente al sistema, lo que orienta a los físicos e ingenieros sobre la construcción de los aceleradores. Si tenemos en cuenta que los protones describen 10^{11} vueltas en torno al anillo de forma rutinaria, estableciendo la equivalencia con nuestro sistema planetario, ello equivaldría a 100000 millones de años de órbitas estables.

Tras los estudios y comentarios presentes a lo largo de todo el proyecto sobre posibles comportamientos irregulares en el Sistema Solar, nos podríamos preguntar: ¿Existen en realidad los toros estables, las zonas caóticas, o las resonancias destructivas? Trataremos de dar respuesta a continuación.

- (1) En cualquier caso, el *Teorema de Poincaré-Birkhoff* ofrece una respuesta para sistemas con relaciones racionales entre sus frecuencias. Si esa relación se diera, el toro original se descompondría en toros más pequeños, algunos de los cuales tendrían divisores pequeños (volviendo al problema de la inestabilidad que trataremos en este apartado) y, el resto, seguirían descomponiéndose. Incluso en los toros estables habrá una dinámica irregular. Si las órbitas regulares sobre toros de un sistema integrable se perturban con un término no integrable, sería posible obtener dinámicas regulares o irregulares, dependiendo de las condiciones iniciales. Es decir, un cambio pequeño y arbitrario en las condiciones iniciales conduciría a comportamientos a largo plazo completamente distintos. Así, la sensibilidad de algunos sistemas hamiltonianos a las condiciones iniciales puede llevar al sistema al caos. Veremos algunos ejemplos de caos en el Sistema Solar en el siguiente punto del presente trabajo.

Para más información sobre el Teorema de Poincaré-Birkhoff se puede consultar el texto "*Orden y Caos en Sistemas Complejos. Caos Hamiltoniano. 17.5*", en donde se realiza un análisis y exposición más profunda.

- (2) Se dice fracción continua a una expresión de la forma:

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{\ddots}}}}$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Las fracciones continuas dan buenas aproximaciones racionales a los números irracionales. Los convergentes p_n/q_n son las fracciones de la forma:

$$p_n/q_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = L$, entonces se dice que la fracción continua es convergente y converge a L .

- (3) La medida de Lebesgue asigna tamaño a los subconjuntos del espacio euclídeo. Los conjuntos de medida cero son aquellos que, para toda constante positiva, se pueden cubrir con la unión numerable de intervalos, siendo el tamaño total menor que dicha constante. Todos los conjuntos numerables son de medida cero. Henri Léon Lebesgue (1875-1941) desarrolló esta medida en 1901.
- (4) A esta lista podríamos añadir a Siegel, quien resolvió un problema de variable compleja en el que aparecían *pequeños divisores*, siendo esta la primera vez, a principios de los años cuarenta del siglo XX, que se denominaron así. Ello lo consiguió encontrándose exiliado.

7 Caos en el Sistema Solar

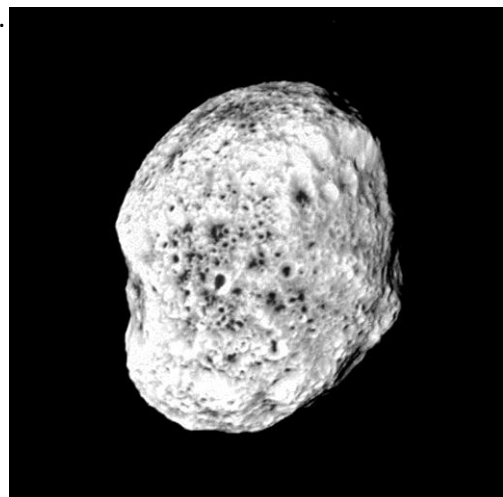
La mecánica newtoniana describía el sistema planetario como un reloj, armónico y estable, ejemplo clásico de regularidad. Sin embargo, como ya hemos visto, Poincaré puso contra las cuerdas el determinismo laplaciano al demostrar la no integrabilidad en el problema de los tres cuerpos y, por extensión, del Sistema Solar. Actualmente, se conocen diversos casos de movimientos caóticos en los cuerpos celestes que os rodean, lo que limita las predicciones sobre el futuro de los movimientos planetarios y permite obtener explicaciones sobre distribuciones de cometas y asteroides. A continuación, presentaremos algunos casos reales de caos en el Sistema Solar, así como los avances en algunos de dichos ejemplos como muestra de las líneas de investigación actuales.

7.1 El movimiento de Hiperión

Hiperión es uno de los satélites de Saturno, de forma muy alargada e irregular. Su diámetro menor es de 200 km. Su textura es similar a la de una esponja y su masa es unas 1000 menor que la de la Luna. El satélite presenta dos particularidades:

- 1) Su rotación es caótica, es decir, la duración del día en Hiperión es impredecible.
- 2) Sufre aislamiento orbital; no se encuentra ningún otro cuerpo en sus cercanías, lo que resulta sorprendente ya que Hiperión ha sido golpeado por multitud de cuerpos celestes.

Estas extrañas propiedades son debidas a las resonancias y a su forma irregular; Hiperión está en resonancia 4:3 con Titán (otro satélite de Saturno que orbita cuatro veces alrededor del planeta por cada tres de Hiperión). R. Bevilacqua et al. han demostrado (1980) que hay una zona de caos próxima a la órbita de Hiperión, lo que provoca la expulsión de los pequeños fragmentos que viajan cerca del satélite o impactan con este, impidiendo su reagrupación. Wisdom⁽¹⁾ ha demostrado que todos los satélites de forma irregular han tenido a lo largo de su evolución un comportamiento caótico cuando estaban a punto de ser capturados en una resonancia orbital-rotacional. Como J. Wisdom, S. Peale y F. Mignard ya demostraron en 1984, Hiperión se encuentra en resonancia orbital-rotacional 3:2. B. V. Chirikov, describió un criterio en el que el solapamiento de resonancias provoca caos. Efectivamente, esto es lo que predicen Wisdom y sus colegas, que la dirección del eje de rotación y la velocidad angular de Hiperión fluctúan aleatoriamente en una escala de tiempo de algunos periodos orbitales (21 días). Las observaciones parecen corroborar estos resultados⁽³⁾.



http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/image/0507/hyperion_cassini_big.jpg

7.2 El Cinturón de Asteroides

Los asteroides, cometas, meteoritos y otros cuerpos pequeños han sido despreciados durante mucho tiempo por los astrónomos, sin embargo, en las últimas décadas, estos cuerpos se han analizado en profundidad con el objetivo de comprender los procesos de formación de los planetas. El caso de los asteroides es muy ilustrativo;

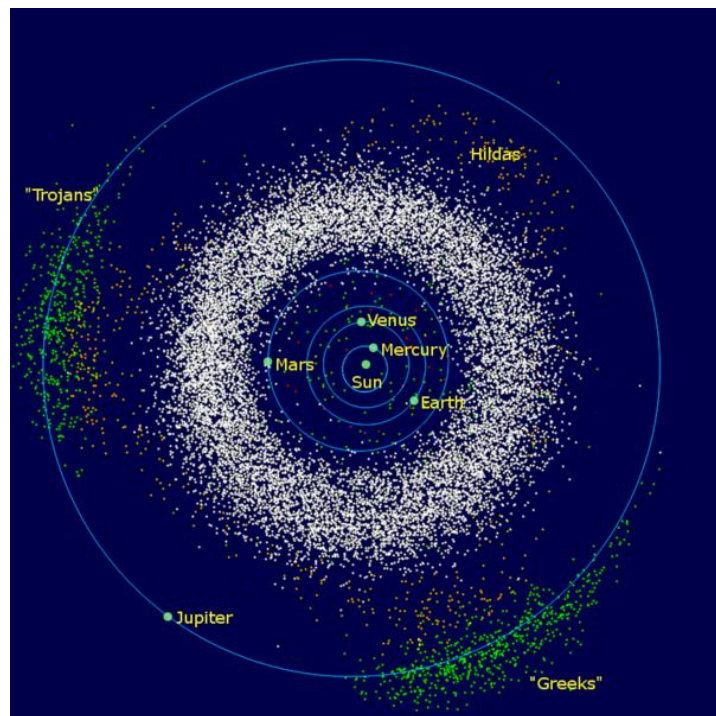
Según algunas teorías sobre la formación de planetas, las coagulaciones de gas y polvo interestelar formó objetos pequeños (planetesimales) de unos cien kilómetros, los cuales se podrían fusionar a lo largo de sus órbitas para construir planetas. En concreto se reunían todas las condiciones para la creación de otro planeta entre Marte y Júpiter. Sin embargo, otros planetesimales enviados por Júpiter, o bien eran expulsados de la supuesta zona en donde podría construirse un planeta, o bien sufrían fragmentaciones por colisiones. Así, en lugar de aglomerarse para formar un planeta, los fragmentos resultantes de las colisiones formaron, según el modelo de V. F. Safronov⁽⁴⁾, un disco: El Cinturón de Asteroides, ubicado a una distancia del Sol de entre 2 y 5 U.A.. Cabría suponer, ya que el proceso de colisión de planetesimales se puede considerar aleatorio debido a lo numerosos que son, que la distribución de órbitas fuera uniforme, pero las observaciones muestran que esto no es así; en el cinturón principal (entre 2 y 3 U.A.), que está muy poblado, nos encontramos zonas estrechas en que apenas hay asteroides, las llamadas *lagunas de Kirkwood*. De forma inversa, la zona exterior del cinturón (desde 3.3 U.A. hasta la órbita de Júpiter a 5.2 U.A.) está prácticamente despoblada, con excepciones de algunas concentraciones de asteroides muy localizadas. Si, además, asociamos a cada órbita su periodo orbital, nos encontramos resultados sorprendentes: todas las anomalías en la distribución de las órbitas corresponden a periodos que mantienen una sencilla relación con el periodo de Júpiter: 1/1, 1/2, 2/3, etc. Sin embargo, bajo la luz de los resultados expuestos en el presente trabajo ¿Realmente deben sorprendernos las anteriores relaciones numéricas?

Supongamos un pequeño cuerpo viajando alrededor del Sol (de masa M), como puede ser un asteroide de masa μ . Es posible interpretar este sistema como el problema de los dos cuerpos, cuya solución ya vimos que se puede encontrar gracias a la mecánica hamiltoniana, por ejemplo. Sin embargo, aparece un elemento perturbador en el sistema, y es Júpiter (de masa m), el mayor planeta del Sistema Solar. Ahora tenemos el problema de los tres cuerpos, cuyos problemas de integrabilidad ya hemos analizado. Por tanto, el movimiento del asteroide podría desestabilizarse si la relación entre la frecuencia de Júpiter Ω_1 y la frecuencia no perturbada del asteroide Ω_2 , fuese racional, o casi racional. Como ya hemos avanzado en el anterior párrafo, existen casos de relaciones racionales, aun así, la existencia de órbitas estables representa una confirmación del Teorema KAM.

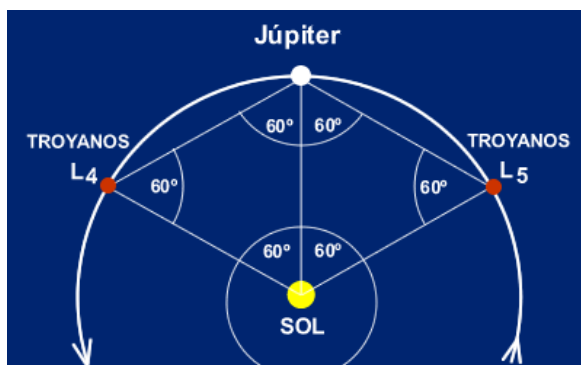
La carencia de asteroides con periodos que presenten cocientes respecto al de Júpiter fue observada por Kirkwood en 1857 (dando nombre a las lagunas antes mencionadas), gracias a un estudio de los 50 asteroides conocidos en aquella fecha. Las resonancias entre los asteroides que debían encontrarse en esas posiciones son importantes porque significan que esos asteroides debieran localizarse en la misma posición relativa respecto a Júpiter, a intervalos regulares. Dichas coincidencias se acumularían de forma similar a un movimiento perturbado por una fuerza externa, con lo que los asteroides en esas condiciones podrían ser

expulsados de sus posiciones originales, llegando incluso a cruzar la órbita de Saturno y escapar de nuestro sistema planetario.

Resulta conveniente decir que existe un grupo de asteroides, *los Troyanos*, que aparentemente violan la escasez de asteroides de relaciones racionales. Los Troyanos se sitúan en la misma órbita de Júpiter, con lo que la relación de frecuencias es 1/1. Sin embargo, a pesar de la apariencia de contradicción con las teorías expuestas, estos grupos de asteroides presentan una particularidad que ya comentamos en una de las notas del apartado “sistemas no integrables”, y es que forman vértices de un triángulo equilátero con el Sol y Júpiter, lo que encaja con los puntos de libración calculados por Lagrange. A pesar de que este consideraba estas soluciones como una curiosidad, en 1906, como ya avanzamos, fue descubierto el primer asteroide del grupo de los Troyanos.



<http://eltamiz.com/images/2009/July/asteroides.png>

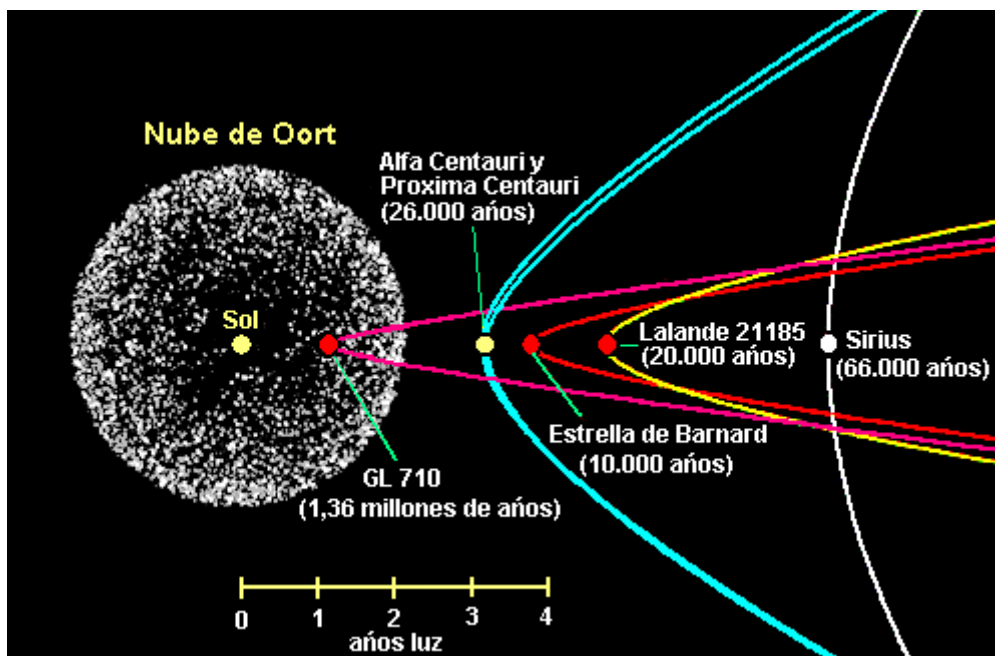


http://www.mallorcaplanetarium.com/img-asteroides/esq_troyanos.gif

7.3 El Cometa Halley

Es lógico pensar que las perturbaciones causadas por los planetas afectan intensamente al movimiento de los cometas. El más conocido de todos ellos es, sin duda, Halley, que apareció por última vez en 1985⁽⁵⁾. Predecir las apariciones del cometa resulta todo un reto para los astrónomos desde que Edmund Halley calculó por primera vez, en 1705, el regreso del cometa en 1759. Actualmente se sabe que el cometa vuelve por las inmediaciones terrestres cada 75-80 años, pero el tiempo exacto depende de las perturbaciones ejercidas por diversos planetas. Los cálculos numéricos desarrollados predicen el movimiento del cometa, pero, a partir de cierto tiempo, las diferencias respecto a las condiciones iniciales son elevadas. Estas diferencias fueron explicadas por T.Y. Petrosky, L.B.V. Chirikov y V.V. Vecheslavov⁽⁶⁾. Gracias a un modelo simple, formado únicamente por Júpiter en órbita y el cometa, han conseguido demostrar que el movimiento del cometa Halley es caótico. En el modelo, cuando el sistema es perturbado por la gravedad de Júpiter, se generan movimientos inestables. Los resultados se han corroborado numéricamente por Cl. Froeschlé y R. Gonczi⁽⁷⁾.

El caos no sólo afecta el cometa Halley, sino que el resto de cometas sólo soportan un número limitado de pasos cerca del Sol. Nos preguntamos entonces, ¿por qué se les observa aún? La conclusión es que debe existir un flujo permanente de cometas que procede de los confines del sistema planetario, la llamada Nube de Oort⁽⁸⁾. Las simulaciones numéricas sugieren que los cometas, tras interactuar con los planetas exteriores, se propagan de forma aleatoria a través del Sistema Solar.



http://www.astrogea.org/asteroides/aprox_oort.gif

7.4 Los Anillos de Saturno

Saturno conduce a un gran número de pequeños cuerpos que orbitan al planeta en órbitas cercanas al ecuador. Los anillos son muy finos en comparación con el radio de estos, ya que el diámetro es superior a 250000km y el espesor de menos de 1.5km, lo que supone que el grosor es casi 167000 veces menor. Las partículas que los forman tienen tamaños que oscilan entre los micrómetros y algunos metros, constituidas estas por hielo y agua, principalmente. Este sistema también se puede incluir en el problema de los 3 cuerpos, puesto que Saturno guía el movimiento de las partículas, pero sus satélites perturban sus órbitas. Mimas, debido a su mayor masa, es el principal satélite perturbador de las órbitas.

Similarmente a los huecos en el Cinturón de Asteroides, entre los aros concéntricos también encontramos brechas⁽⁹⁾. La mayor de ellas se conoce como *División de Cassini*, ya que Giovanni Cassini la descubrió en 1675. La imagen que muestra claramente dicho hueco ha sido tomada por la sonda que lleva su nombre.

A continuación, presentaremos las líneas generales de un modelo que explican Pablo Santamaría⁽¹⁰⁾ en 2011 y Solé- Manrubia en *Orden y Caos en Sistemas Complejos* (del que ya hemos hecho referencias) algo antes, en 2001. Ambos reproducen, al menos cualitativamente, la estructura de los anillos de Saturno. El modelo básico en que se basan dichos análisis fue desarrollado por Fröyland⁽¹¹⁾ en 1992. En este modelo, la interacción con Saturno se presenta como expondremos;

El sistema consiste en el planeta Saturno y su satélite Mimas, junto con un grupo de partículas de masa despreciable respecto a la de los dos anteriores, y que orbitan entre Mimas y la superficie de Saturno. La órbita del satélite la asumimos fija y circular con un radio igual a su distancia media $r_0=185.7 \times 10^3$ km. El resto de partículas se suponen de igual masa y en órbitas coplanarias con la de Mimas y cuasi-circulares a diferentes distancias radiales r del centro de Saturno. Así, igualando la fuerza gravitatoria de Saturno a la fuerza centrípeta, las partículas se encontrarían en en órbitas circulares en torno al planeta, pero el radio orbital sufrirá aceleraciones debidas a la perturbación gravitatoria del satélite. De esta forma, la órbita circular de Mimas, de radio r_0 y periodo T_0 se toma como órbita de referencia, lo que significa que el tiempo del satélite en completar una revolución orbital se toma como unidad de tiempo, siendo esta la discretización del tiempo que utiliza el modelo. Sea θ_n el ángulo formado por el radio vector de una partícula respecto a una dirección fija, en el instante n . Dicho ángulo se incrementará 2π en cada paso temporal para la órbita de Mimas, mientras que para una partícula en su órbita circular, este ángulo, en el instante $n+1$, vendrá dado por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \left(\frac{T_{r_0}}{T_n} \right)$$

En donde T_n es el periodo de la partícula en la n -ésima revolución orbital de Mimas. Por otra parte, según la 3ª Ley de Kepler (Ley Armónica);

$$\frac{T_{r_0}^2}{T_n^2} = \frac{r_0^3}{r_n^3}$$

Siendo r_n la distancia de la partícula al centro de Saturno en el instante n . Sustituyendo en la ecuación que relaciona los ángulos;

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{r_n^3}}$$

Para actualizar la distancia radial en cada tiempo, tendremos en cuenta que el efecto perturbador de Mimas crea aceleraciones radiales de la forma:

$$\ddot{r} = \frac{F_r}{m}$$

En donde F_r es la componente radial de la fuerza gravitatoria entre el satélite y la partícula de masa m . Esta ecuación diferencial puede transformarse en una ecuación de diferencias finitas en la que la aproximación de diferencia centrada para la segunda derivada temporal;

$$\ddot{r} \approx \frac{r(t + \Delta t) - 2r(t) + r(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

Siendo Δt un cierto intervalo temporal. Así, promediando sobre un periodo completo de Mimas ($\Delta t = T_{r_0}$) y evaluando \ddot{r} en el tiempo n , se obtiene:

$$r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1} = f(r_n, \theta_n)$$

En donde la función

$$f(r_n, \theta_n) \equiv \frac{T_{r_0}^2 F_r(r_n, \theta_n)}{m}$$

Representa una especie de promedio de la interacción gravitatoria de Mimas sobre la distancia radial de la partícula.

Así, tenemos finalmente el sistema del modelo definido por las ecuaciones:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{r_n^3}}$$

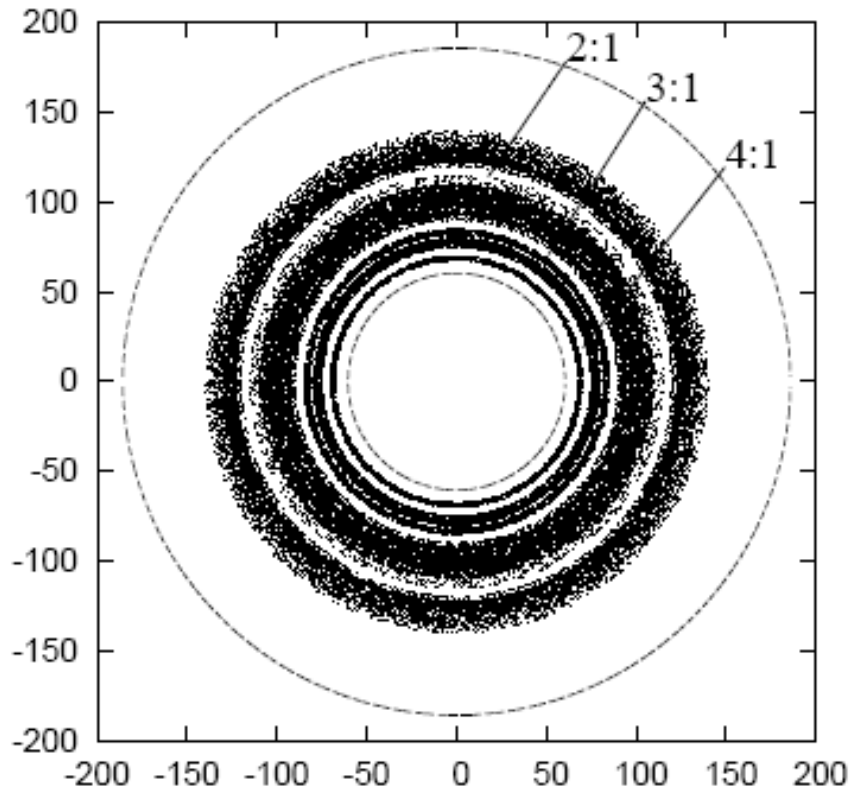
$$r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} + f(r_n, \theta_n)$$

Exigiendo que la órbita de referencia de Mimas sea conservativa, introduciendo de nuevo la Ley Armónica de Kepler y la Ley de Gravitación Universal de Newton, y simplificando el desarrollo en serie de la dependencia con el ángulo al coseno del mismo (véase la bibliografía a la que se ha hecho referencia);

$$r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} + \frac{A \cos \theta_n}{(r_n - r_0)^2}$$

En donde la constante $A \equiv GM_{r_0} T_{r_0}^2 = 4\pi^2 r_0^3 \left(\frac{M_{r_0}}{M_S}\right)$ (siendo G la Constante de Gravitación Universal y M_S la masa de Saturno) se puede calcular. Esta constante determina la estructura y estabilidad de los anillos en las simulaciones realizadas por el autor. Expresando las distancias en 10^3 km y con las masas de Mimas y Saturno, respectivamente, $3.84 \cdot 10^{19}$ kg y $5.68 \cdot 10^{26}$ kg: $A=17.09 \approx 17$

En una primera simulación para $A=15$ se obtiene la siguiente figura:

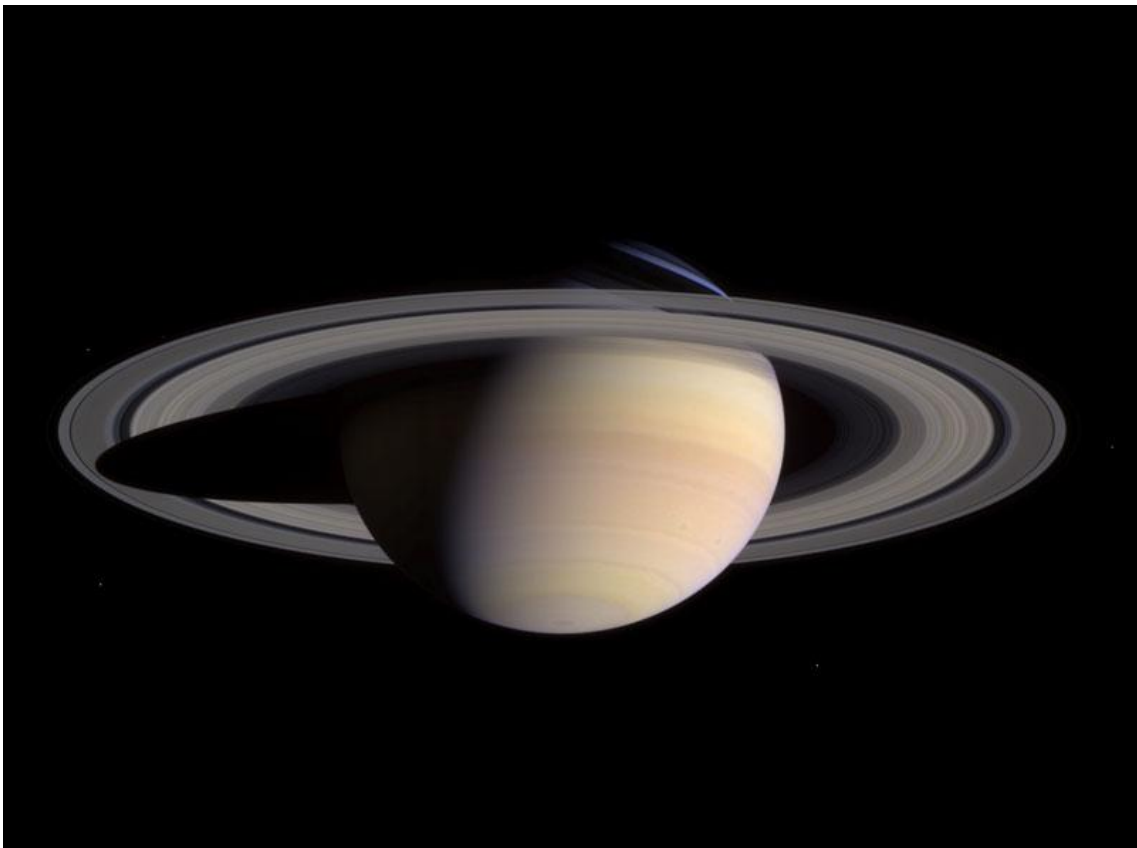


Representación tomada directamente del artículo de Pablo Santamaría.

En ella vemos las órbitas en el plano de 15 partículas iteradas independientemente. Las unidades del eje X se expresan en 10^3 km. La órbita de Mimas es descrita por la circunferencia exterior punteada, mientras que la interior también punteada, corresponde a Saturno. Se pueden observar que, efectivamente, el modelo reproduce la estructura de anillos con brechas. Como se indica en la figura, tales brechas corresponden a las regiones correspondientes a las resonancias de las frecuencias con Mimas. Dichas localizaciones se encuentran en:

$117.0 \cdot 10^3$ km	resonancia 2/1
$89.2 \cdot 10^3$ km	resonancia 3/1
$73.7 \cdot 10^3$ km	resonancia 4/1

Variando el valor del parámetro A la estructura de anillos es similar, pero a partir de $A \approx 3000$ el anillo exterior desaparece (recordemos que dicho parámetro es proporcional a la razón de la masa de Mimas respecto a la de Saturno). Aunque la estructura de los anillos es más compleja, el aspecto básico sí que es reproducido por el modelo de Froyland. También hemos de decir que las oscilaciones del valor de la distancia radial al centro de Saturno para una partícula situada en los anillos más cercanos al planeta pueden parecer periódicas, pero ello es sólo una apariencia, en realidad no siguen pauta alguna.



<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saturn-cassini-March-27-2004.jpg?uselang=es>

7.5 Oblicuidad de los Planetas

La sucesión de las estaciones, algo tan rutinario que quizá no sea fruto de reflexiones frecuentes, es el resultado de la inclinación del plano del ecuador respecto al plano de la eclíptica. Esta inclinación es de $23^{\circ} 27'$, y se conoce astronómicamente como *oblicuidad*.

La oblicuidad es la responsable de los círculos polares y de la distribución de calor que llega a la Tierra proveniente del Sol. Hace ya muchos años (aproximadamente en el año 120 a.c.) Hiparco descubrió que la dirección del eje de rotación de la Tierra describe un movimiento de precesión cuyo periodo es de 26000 años. El motivo de ello es el ensanchamiento ecuatorial terrestre y las fuerzas gravitatorias de la Luna y del Sol. Por otra parte, si la oblicuidad influye en el clima, parece razonable preguntarse ¿es esta constante? Laskar y Robutel lo analizaron en un artículo en Nature en 1993, estudio que, junto con otras referencias, utilizaremos para responder a la pregunta y las consecuencias de la respuesta⁽¹²⁾.

Como en casos descritos anteriormente, el efecto perturbador de otros planetas del Sistema Solar hace que la órbita de la Tierra no sea la regular y elegante elipse kepleriana, sino que puede aproximarse a un conjunto de rotaciones cuyos periodos se encuentran entre 40000 y varios millones de años. Cada rotación proviene del efecto de uno de los planetas. Esta influencia, válida para todos los planetas del sistema celeste, causa oscilaciones en la oblicuidad. Las diferencias entre unos y otros planetas residen en la magnitud de estos vaivenes y en las consecuencias de ello. Si la frecuencia de la oscilación debida a las perturbaciones se aproxima a la frecuencia de precesión del eje, interviene de nuevo el fenómeno de la *resonancia*. Ya que todos los periodos de precesión son muy lentos, la unidad empleada es el segundo de arco por año, lo que equivale a un periodo de $3600 \text{ seg/grado} \times 360 \text{ grados/revolución} = 1296000 \text{ seg/rev}$, o lo que es lo mismo, 1.296.000 años. Con esta notación, diremos que la frecuencia de precesión de la Tierra es de 50.47 segundos por año (25679 años). Como las frecuencias fundamentales de los movimientos orbitales van desde 0.67 hasta los 26.33 (segundos por año), la posibilidad de resonancia queda lejos, lo que encaja con las pequeñas variaciones de la oblicuidad observadas. Sin embargo, en otros planetas como Marte, en el que sí se dan resonancias seculares⁽¹³⁾, William Ward, del Laboratorio Propulsión a Chorro de Pasadena, hizo notar que mostraba variaciones de la oblicuidad de hasta 10° .

En la Oficina de Longitudes de París, Laskar y Robutel (1994) estudiaron la oblicuidad de los planetas mediante métodos numéricos, basándose en la solución de movimiento orbital de los planetas que el de ellos (Laskar 1989) calculó para un periodo de 400 millones de años. Dicha solución mostró que las órbitas de los planetas interiores (Mercurio, Venus, la Tierra y Marte) eran caóticas. Así, los métodos numéricos referenciados, pretendían estudiar los cambios de orientación axial de la Tierra a causa de sus propias variaciones orbitales (para tiempos muy largos). Dichas simulaciones muestran, por ejemplo, que Mercurio y Venus podrían haber sido objeto de grandes y caóticos cambios en su oblicuidad, desde 0° hasta 90° , antes de que los efectos disipativos debidos a las fuerzas de marea los condujeran a su actual inclinación del eje. Aún así, la oblicuidad de Marte es caótica en la actualidad, con posibles variaciones desde 0° hasta 60° . En cuanto a los planetas exteriores, sus inclinaciones axiales son estables, pero deben haber pasado por procesos similares en etapas tempranas de la formación del Sistema

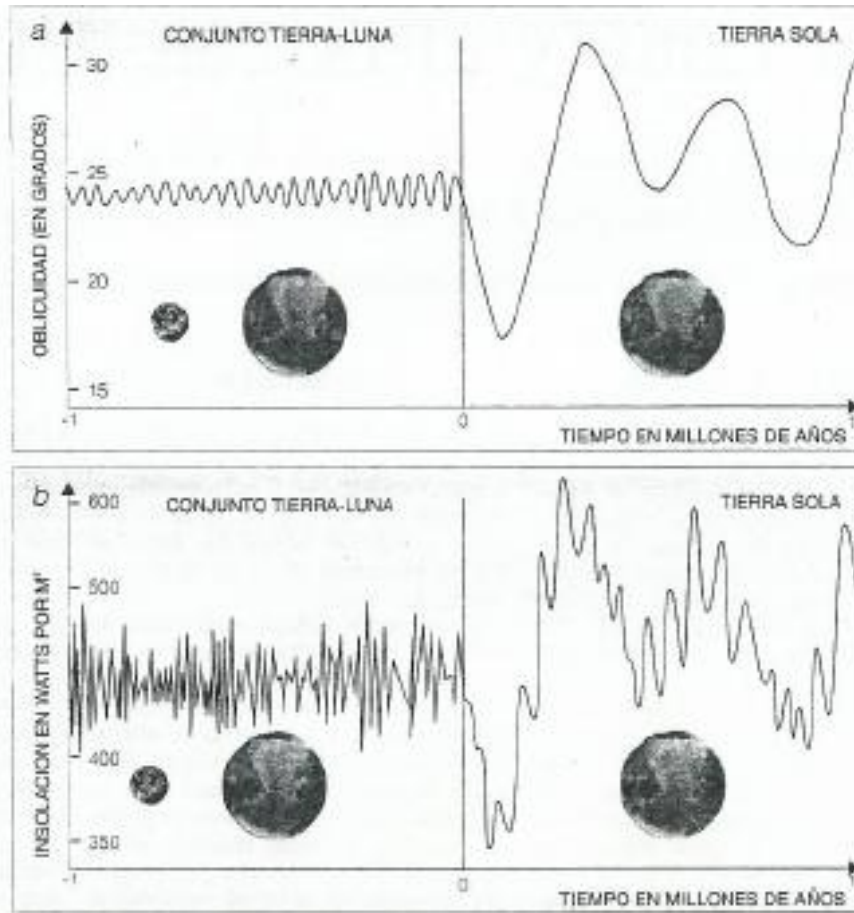
Solar. Hemos de destacar la extremadamente alta oblicuidad de Urano, que alcanza los 98° , y que estos modelos no pueden explicar. En cuanto a la Tierra, su actual oblicuidad se pudo haber alcanzado durante una fase caótica hasta la captura de la Luna⁽¹⁴⁾ (Laskar, Joutel y Robutel, 1993). Por tanto, nos podemos hacer la siguiente pregunta:

¿Y si la Luna no estuviera ahí?

El par de fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre el ensanchamiento ecuatorial provienen principalmente por la Luna (2/3) y, el tercio restante, por el Sol. Sin la Luna, la frecuencia de precesión de la Tierra pasaría de 50.47 segundos por año a unos 15.6. De esta forma, la nueva frecuencia se aproximaría a las frecuencias orbitales de la Tierra (ya avanzadas antes, y de las que 18.85 y 17.75 segundos por año son las más importantes). Ahora sí, la resonancia es posible.

En las simulaciones, se induce una brusca desaparición de la Luna y se analizan los efectos en la oblicuidad terrestre durante periodos cortos en que los efectos caóticos orbitales no son apreciables, como puede ser un millón de años. Los resultados en las variaciones axiales son de hasta 15° , un número elevado si tenemos en cuenta que bajo las perturbaciones planetarias y en presencia de la Luna, las variaciones son de unos 1.3° respecto a su valor medio de 23.3° , siendo estas últimas suficientes para inducir modificaciones de casi un 20% el calor recibido del Sol a 65° de latitud norte. Estas variaciones provocan, como es lógico pensar, cambios de temperatura importantes. La cuestión es saber hasta qué punto influyen estos en los seres vivos.

Milutin Milankovitch postuló en 1941 que las glaciaciones del Cuaternario se debían a variaciones de la insolación en las altas latitudes, siendo estas diferencias inducidas por variaciones seculares de la órbita de la Tierra y de su oblicuidad. Así, la pequeñez de las oscilaciones de la oblicuidad terrestre ha sido un factor importante en la regulación climática de los últimos millones de años. Sin la Luna, la Tierra presentaría variaciones en su inclinación axial de hasta 85° a lo largo de varios millones de años, abarcando zonas caóticas, por lo que los efectos climáticos serían amplios. En el caso más extremo de 85° de inclinación, la Tierra estaría recostada sobre su órbita al igual que Urano, experimentando casi la totalidad de la Tierra días y noches de unos seis meses, como ocurre actualmente en los polos. Por tanto, bajo la luz de las simulaciones de Laskar y Robutel, y bajo la Teoría Astronómica de los Paleoclimas de Milankovitch, la ausencia de la Luna habría dificultado, sino imposibilitado, el desarrollo de la vida en la Tierra. Este hecho, pone de relieve la casi necesidad de un satélite que regule la oblicuidad de los planeta para que pueda albergar vida, lo que influye directamente en ciertos proyectos de la NASA en la búsqueda de vida extraterrestre, como SETI (búsqueda de inteligencia extraterrestre) o TPF (buscador de planetas terrestres).



Simulación de los efectos que la supresión de la Luna en el instante $t=0$ provocaría en la oblicuidad terrestre y la insolación recibida a 65° de latitud norte. La Imagen de la simulación numérica de Laskar y Robutel, ha sido tomada de “La Luna y el origen del hombre”, Laskar J., Investigación y Ciencia, Julio de 1994.

- 1) J. Wisdom, *Astron. J.*, 94 (5), 1350, 1987
- 2) J. Wisdom, S. Peale y F. Mignard, *Icarus*, 58, 137, 1984
- 3) J. J. Klavert *Astron. J.*, 97 (2), 5701 1989.
- 4) V.S. Safronov, in *Asteroids*, T. Gehreis (ed.), University of Arizona Press, 1979.
- 5) "El cometa Halley", *Mundo Científico*, 49, Julio-Agosto, 1985.
- 6) T.Y. Petrosky, *Phys. Lett. A*, 117, 328, 1986; L.B.V. Chirikov y V.V. Vecheslavov, *Astron. Astrophys.*, 221, 146, 1989.
- 7) Cl. Froeschlé y R. Gonczi, *Celest. Mech.*, 49, 325, 1988.
- 8) En 1950 el astrónomo holandés, Jan Oort, formuló esta hipótesis basada en cálculos estadísticos de las trayectorias de los cometas. La suposición postula que los núcleos de los cometas de periodos largos proceden de una nube esférica que rodea a nuestro sistema planetario más allá de la órbita de Plutón, desde 30000UA hasta 3 años luz, aproximadamente. Estos cuerpos se habrían constituido en las fases iniciales de acreción del Sistema Solar, en las inmediaciones del Sol, pero habrían sido expulsados hacia el exterior por las fuerzas gravitatorias. Aquellos objetos que no lograron escapar totalmente formaron la nube de Oort. Algunos de estos cuerpos, motivados por la interacción de alguna estrella cercana, serían impulsados ocasionalmente hacia el Sol en un viaje de miles de años hasta que planetas como Júpiter o Saturno perturbaran sus órbitas, transformando a estos cuerpos en cometas de largo periodo. Las estimaciones muestran que debe haber más de un billón de cuerpos de pequeño diámetro, cuya masa podría ser similar a la de Júpiter. Aunque esta hipótesis está universalmente aceptada, no existen datos que la corroboren.
- 9) Las brechas no están completamente vacías, sino que su densidad de objetos es inferior a sus zonas próximas.
- 10) Pablo Javier Santamaría, Jefe de Trabajos Prácticos del Grupo de Ciencias Planetarias de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de la Plata, "Un mapa conservativo que modela cualitativamente la estructura de anillos de Saturno", v.02, Noviembre de 2011.
- 11) Jan Fröyland, *Introduction to Chaos and Coherence*, Institute of Physics Publishing, 1992
- 12) Principalmente, los textos seguidos serán:
 - J. Laskar and P. Robutel, The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, 361, 608-612, 18 February 1993.
 - J. Laskar, F. Joutel and P. Robutel, Stabilization of the Earth's obliquity by de Moon, *Nature*, 361, 615-617, 18 February 1993.
 - J. Laskar, La Luna y el Origen del Hombre, *Investigación y Ciencia*, Julio, 1994.
- 13) Ocurre cuando el periodo de precesión de un nodo (cualquiera de los dos puntos en que una [órbita](#) corta a un plano de referencia, como por ejemplo la eclíptica) es una pequeña fracción racional de un periodo similar de un planeta mayor. Recordamos que las llamadas variaciones seculares miden las variaciones de las excentricidades planetarias, algo que ya calculó Le Verrier (célebre por descubrir Neptuno en 1864, gracias a las perturbaciones de Urano).
- 14) Cabe decir que el origen de la Luna como satélite terrestre es aún fruto de diversas teorías, entre las que se encuentra la de la captura de esta por la gravedad de la Tierra.

Otra hipótesis es que la Luna se habría formado a la vez que la Tierra por acumulación de materia en la órbita terrestre.

Aunque la hipótesis de captura plantea problemas como la pequeña probabilidad del suceso, Laskar acude al Principio de Mediocridad (al que haremos referencia en la parte final del proyecto) para afirmar que tal hecho debe ser genérico y, por tanto, confirmar así las simulaciones. Nosotros, sin embargo, pensamos que es un error el uso de dicho Principio para confirmar una hipótesis, ya que sólo debe emplearse para hechos observados, y la captura lunar no es uno de ellos.

8 Conclusiones generales y otros análisis

Tras un largo proceso histórico y físico-matemático, que hemos tratado de presentar con la mayor precisión y análisis (aunque es inevitable obviar algunos hechos y demostraciones, de las que sí dejamos referencias) hemos llegado de forma natural al último punto del proyecto. En esta última parte trataremos de realizar un análisis general del problema de la estabilidad del Sistema Solar; matizando alguno de los estudios presentados, dejando constancia de nuevas vías de investigación, tratando el problema desde otros puntos de vista, y haciendo alusiones finales a comentarios de alguno de los científicos implicados en la solución del problema. Todo ello lo expondremos con aportes bibliográficos y algunos análisis personales, desde la libertad especulativa que ofrece el cierre de un trabajo.

8.1 Generalización del análisis de Jacobi

El primer estudio presentado con rigor sobre la estabilidad global ha sido el de Jacobi en 1842-1843, tomado directamente de las lecciones sobre dinámica que este impartió en la Universidad de Königsberg. Mediante el Teorema de las Fuerzas Vivas y tomando el potencial como una función homogénea de grado k , el autor llegó a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k + 4)U + 4h'$$

Siendo ρ_i los vectores radiales trazados desde el centro de gravedad y h' una constante de integración. Jacobi identifica $\sum m_i \rho_i^2$ con el momento de inercia (R) del Sistema Solar tomando los planetas como partículas puntuales. En ese momento, el matemático hace una interesante observación, y es aplicar la ecuación a un hipotético sistema planetario en que la Ley de Gravitación Universal fuera de exponente cúbico, en lugar de cuadrático. Así, como ya vimos, llega a la conclusión de que en el primer caso el Sistema Solar no sería estable ya que el momento de inercia crecería indefinidamente con el tiempo. La ecuación correspondiente tras integrar;

$$R = 2h't^2 + h''t + h'''$$

En donde la ecuación diferencial se ha simplificado gracias a que $k = -2$.

En cuanto a la fuerza de gravitación tal y como la conocemos, con el exponente cuadrático ($k = -1$), Jacobi no llega a conclusiones definitivas. Estos análisis nos hacen preguntarnos de forma natural:

¿Qué ocurriría para atracciones gravitatorias con otros exponentes?

Entendiendo la ley newtoniana para la gravedad como un campo de fuerzas que se dispersan en el espacio euclídeo tridimensional, parece lógico que siga la ley inversa del cuadrado en la disminución de su intensidad (válida para campos centrales y fenómenos ondulatorios como luz y sonido). En cuanto al campo gravitatorio, que es el que nos ocupa, la generalización n -dimensional sería;

Sea $U(r)$ un campo central generado por una masa puntual que satisface la Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 U(r) = 0$$

Así, para grandes distancias a la fuente (asegurándonos de que el tamaño de la masa generadora del campo no influye en las ecuaciones y, por tanto, se pueda considerar como puntual);

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

Escrita en coordenadas esféricas.

Dada la simetría esférica del problema anulamos las dependencias angulares, y generalizando el exponente a un espacio euclídeo n -dimensional;

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0 \\ \Rightarrow r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r} &= C \end{aligned}$$

Siendo C una constante de integración.

Así, integrando (excepto para $n - 1 = 1$, es decir, para $n = 2$);

$$U = \frac{C}{r^{n-2}} + C'$$

En donde la nueva constante debe ser $C' = 0$ ya que a una distancia infinita el potencial debe despreciarse (salvo para $n = 1$, caso en que el potencial no decrece con la distancia). Obtenemos por tanto:

$$U = \frac{C}{r^{n-2}}$$

Para mostrar una coherencia con la notación de Jacobi, para el caso tridimensional $n=3$;

$$U = \frac{C}{r}$$

Llamando a la constante C como el producto de las masas, y extendiendo el potencial a la totalidad de planetas del Sistema Solar;

$$U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}}$$

Que es la función que Jacobi utilizó en sus desarrollos ya expuestos en este trabajo.

Volviendo al caso n -dimensional para i cuerpos, la expresión final sería:

$$U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{n-2}}$$

Siendo esta la función a emplear en el método de Jacobi. Sin embargo, debemos tener en cuenta un matiz, y es que en los desarrollos de *Lecciones sobre Dinámica* de 1842 se supone la función U homogénea, algo que no tiene porqué cumplirse para todos los exponentes. Recordamos la definición de función homogénea;

Sea $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/\text{si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in C, \text{ con } \alpha > 0$;

Se dice que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función homogénea de grado k si para todo $\alpha > 0$ se cumple que $f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Analizando si la función U en un espacio \mathbb{R}^n es homogénea de grado k ;

$$U(\alpha r_{ii'}) = \sum \frac{m_i m_{i'}}{(\alpha r_{ii'})^{n-2}} = \sum \frac{m_i m_{i'}}{\alpha^{n-2} r_{ii'}^{n-2}} = \alpha^{2-n} \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{n-2}} = \alpha^{2-n} U(r_{ii'})$$

Siendo el grado de la función homogénea $k = 2 - n$. Se puede corroborar que en un espacio $n = 3$, $k = -1$, y en un espacio $n = 4$, $k = -2$, lo que corresponde a los valores que Jacobi analiza. Generalizando la expresión de este en función del número de dimensiones;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2(2 - n) + 4)U + 4h'$$

Es decir:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (8 - 2n)U + 4h'$$

Comprobando de nuevo que para $n = 4$, obtenemos la expresión del momento de inercia R de Jacobi;

$$R = 2h't^2 + h''t + h'''$$

Si pretendemos aplicar el método jacobiano a espacios de dimensiones diferentes a $n = 3, 4$, podemos separarlos en dos grupos, $n < 3$ y $n > 4$.

$n < 3$;

Incluimos, lógicamente, sólo dos posibles casos, como son $n = 1$ y $n = 2$. Si sustituimos ambos valores en la función potencial;

- $n = 1$; $U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{-1}} + C' = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} + C'$
- $n = 2$; la integral realizada antes para polinomios no sería correcta, con lo que en este caso:

$$r \frac{\partial U}{\partial r} = C$$

$$U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C'$$

Si obtenemos la fuerza de atracción gravitatoria derivando el potencial;

- $n = 1$; $F = \sum m_i m_{i'}$
- $n = 2$; $F = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}}$

en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Para $n = 1$ el potencial $U = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} + C'$ es una función homogénea sólo en el caso $C' = 0$, en cuyo caso sería válida en la ecuación de Jacobi del momento de inercia. En caso de $C' \neq 0$;

$$\sum_{i=1}^m x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} = U - C'$$

Lo que se sustituiría en el desarrollo de Jacobi para llegar a la expresión:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k + 4)U + 4h' = 2(U - C') + 4U + 4h' = 6U + 4h' - 2C'$$

En cualquier caso, $4h' - 2C'$ se puede identificar con una nueva constante de integración h'' . Haciendo un análisis físico de la situación, vemos que la solución para $n = 1$ tiene sentido físico, ya que en un espacio unidimensional, el campo de fuerzas newtoniano no podría dispersarse, con lo que la fuerza gravitatoria entre masas no debe depender de la distancia, siendo, por tanto, constante, como hemos obtenido. En este caso los cuerpos sólo podrían moverse en \mathbb{R} , con lo que no podrían orbitar para que la gravedad actúe como fuerza centrípeta y evitar así las colisiones. Además, al ser la fuerza gravitatoria constante, por muy lejos que estuvieran los cuerpos entre sí, el campo no disminuiría, con lo que no existiría distancia alguna bajo la cual pueda despreciarse la atracción gravitatoria. Por todo ello, en este caso los cuerpos terminarían colisionando entre sí y el Sistema Solar sería inestable.

Haciendo lo propio para $n = 2$, parece lógico que el campo de fuerzas se disperse y siga una ley inversa de la distancia. En cuanto a si este caso susceptible de ser analizado con el método de Jacobi, es algo que se puede comprobar estudiando si el potencial es una función homogénea para $n = 2$;

$$\begin{aligned} U(\alpha r_{ii'}) &= \sum m_i m_{i'} \ln(\alpha r_{ii'}) + C' = \\ &= \sum m_i m_{i'} \ln \alpha + \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C' = \sum m_i m_{i'} \ln \alpha + U(r_{ii'}) \end{aligned}$$

Con lo que vemos que no se cumple la condición general:

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Y, por tanto, U no es homogénea para $n = 2$, de forma que no se podría aplicar en este caso el Teorema de Euler para funciones homogéneas. Así, los desarrollos del método de Jacobi no se puede generalizar a \mathbb{R}^n , ya que vemos en \mathbb{R}^2 no se puede aplicar con estricta similitud. Sin embargo, con algunas modificaciones, se puede realizar un análisis equivalente. En efecto, aunque al potencial no se le puede aplicar el Teorema de Euler:

$$\sum_{i=1}^m x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] = kU$$

ya que este no es homogéneo de grado k , sí podemos hacer el cálculo nosotros al igual que para $n = 1$. Así, obtendríamos:

$$\sum_{i=1}^m x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] = \sum m_i m_i'$$

Insertando esta diferencia en los desarrollos 4.2 y 4.4 de *Lecciones sobre Dinámica* a los que ya hicimos referencia, terminaríamos obteniendo la ecuación:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = 2 \sum m_i m_i' + 4(U + h')$$

Cuya similitud con la ecuación de Jacobi;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k + 4)U + 4h' = 2kU + 4(U + h')$$

es evidente, ya que se ha sustituido la función kU por la constante $\sum m_i m_i'$. Siguiendo ahora con un análisis análogo al jacobiano, e identificando la constante positiva $\sum m_i m_i' = 2\delta$, tendríamos:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4(\delta + U + h')$$

Integrando entre 0 y t ;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' = \int_0^t 4(\delta + U + h') dt$$

En donde R_0' es el valor de $\frac{dR}{dt}$ en $t = 0$.

Si α denota el valor más pequeño de U entre dichos límites;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' > 4(\delta + \alpha + h')t$$

Una segunda integración entre 0 y t ofrece:

$$R - R_0 - R_0' t > 2(\delta + \alpha + h')t^2$$

Es decir:

$$R > R_0 + R_0' t + 2(\delta + \alpha + h')t^2$$

En donde R_0 es el valor de R en $t = 0$, y α una constante que en este caso no tiene porqué ser positiva, ya que $U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C'$ puede tomar valores positivos y negativos.

Vemos que si $(\delta + h')$ fuera una cantidad positiva mayor que $|\alpha|$, R crecería indefinidamente con el tiempo, con lo que el Sistema Solar sería inestable. Por otra parte, si $(\delta + h')$ fuera una cantidad negativa más grande que el mayor valor de U en valor absoluto entre 0 y t , los elementos de la integral:

$$4 \int_0^t (\delta + U + h') dt$$

serían negativos, con lo cual:

$$\frac{dR}{dt} - R_0' < -4\beta t$$

En donde β es una cantidad positiva. Integrando de nuevo;

$$R < R_0 + R_0' t - 2\beta t^2$$

En este caso, al incrementarse t , R se aproxima a menos infinito, lo que es absurdo ya que R representa la suma de cuadrados y, por tanto, es una cantidad positiva.

Así, con todo lo anterior deducimos que $\delta + U + h'$ no puede tener valores estrictamente positivos ni estrictamente negativos, para que el Sistema Solar sea estable. $\delta + U + h'$ debe oscilar hacia adelante y atrás entre valores positivos y negativos, lo que quiere decir que U debe oscilar entre $-h' - \delta$. Si asumimos la siguiente identificación:

$$U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C' \text{ oscila alrededor de } \sum m_i m_{i'} \ln a - \delta$$

Encontramos así la constante $C' = -\delta = -\frac{\sum m_i m_{i'}}{2}$ y que r debe oscilar alrededor de a . En cualquier caso, al igual que Jacobi comenta sobre su propio método, este análisis no ofrece soluciones para grandes valores de t .

Como curiosidad, simplificaremos al sistema a un problema de dos cuerpos. En este caso, si quisiéramos calcular la velocidad orbital que debe llevar un planeta para que, a una determinada distancia, se mantenga estable en su órbita, sólo debemos considerar que la fuerza gravitatoria debe actuar también como fuerza centrípeta;

$$\frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}} = \frac{m_{i'} v^2}{r_{ii'}}$$

Independientemente de constantes de gravitación y en donde la expresión de la fuerza centrípeta no cambia por el hecho de que la trayectoria se produzca en un plano perteneciente a \mathbb{R}^2 . Despejando la velocidad:

$$v = \sqrt{m_i}$$

Con lo cual, si el planeta viaja a esa velocidad, su órbita será estable independientemente de la distancia al Sol.

En cuanto a la ecuación de Jacobi para estudiar la estabilidad del Sistema Solar en función del momento de inercia, hemos tratado de demostrar su validez y ampliación a \mathbb{R}^n . Así, podríamos enunciar la siguiente generalización;

Supongamos el Sistema Solar formado por i masas puntuales y que el potencial gravitatorio total U del sistema cumple el Principio de Superposición en \mathbb{R}^n . Siendo R el momento de inercia total del sistema planetario, la correspondencia entre dichas magnitudes cumple la siguiente relación en función del número de dimensiones n del espacio euclídeo:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = (8 - 2n)U + 4h'$$

en \mathbb{R}^n , $\forall n \neq 2 \Leftrightarrow C' = 0$ para $n = 1$ en $\frac{d^2(R)}{dt^2} = 6U + 4h' - 2C'$,

y

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4(\delta + U + h')$$

en \mathbb{R}^2 , siendo $\delta = \frac{\sum m_i m_i'}{2}$ y h', C' constantes de integración.

$n > 4$;

Por otra parte, hemos de decir que, para Einstein, la gravedad nace de la curvatura en el espacio-tiempo provocada por la masa, por tanto, para espacios de dimensiones $n < 3$ la gravedad no existiría, lo que provocaría que los planetas no pudieran orbitar y el Sistema Solar no estaría ligado (*Richard Gott, Time Travel in Einstein's Universe: the physical possibilities of through time, 2002*). En el caso de haber más de tres dimensiones espaciales, las órbitas se volverían inestables (*Ehrenfest, Which roles does the tree-dimensionality of area play in the basic laws of physics? Annalen der Physik, 1920*) como por ejemplo para $n = 4$, ya estudiado por Jacobi. Aunque la últimas teorías de unificación sugieren la posibilidad de un Universo de 11 dimensiones (Teoría de Cuerdas), ello no debe suponer un problema para la estabilidad del Sistema Solar, ya que de las 10 dimensiones espaciales que propone la Teoría, 7 de ellas se suponen microscópicas. Por tanto, sólo 3 de las 11 son macroscópicas y espaciales.

Curiosamente, la única posibilidad de estabilidad del Sistema Solar reside en \mathbb{R}^3 .

8.2 Nuevas vías de investigación: expansión cosmológica

En un campo tan abierto aún como la estabilidad del Sistema Solar se pueden encontrar diversos modos de afrontar el problema; numéricos, computacionales, analíticos, etc. Como la perspectiva que estamos tratando en el trabajo es la analítica, seguiremos en esa línea por coherencia histórica y la propia compacidad del trabajo. Desde ese punto de vista, reflexionando sobre el problema y sobre los avances físicos en el conocimiento del Universo y la mejora de la mecánica newtoniana, nos hemos formulado la siguiente pregunta:

¿Influye la expansión cosmológica en la estabilidad de nuestro sistema planetario?

Bajo el contexto de la revolución científica iniciada por la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad (General y Especial) a principios del siglo XX, Edwin Powell Hubble (1889-1953) demostró bajo el método observacional la expansión del Universo en 1929⁽¹⁾. Según la Ley de Hubble las galaxias se alejan unas de otras a una velocidad v proporcional a su distancia R ;

$$v = HR$$

En donde H es la llamada constante de Hubble, cuyas medidas recientes⁽²⁾ arrojan un valor de $67.0 \pm 3.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Sin embargo, los modelos cosmológicos basados en la Teoría del Big Bang parecían sugerir que H podría variar lentamente a lo largo del tiempo. Así, a esta “constante” se le ha ido llamando progresivamente parámetro de Hubble. El valor de dicho parámetro depende del tiempo en la forma:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1 + q)$$

Por tanto, el parámetro de Hubble aumenta o disminuye según el signo del *parámetro de deceleración* q . En un principio se pensaba que $q \geq -1$, lo que implicaría $\dot{H} \leq 0$, ya que ello implicaría que la expansión decelera o permanece constante debido a la fuerza gravitatoria que gobierna el Universo. Sin embargo, el descubrimiento de un valor $q < -1$ en algunas observaciones de supernovas, revolucionó la Cosmología en 1998 al implicar que la expansión cosmológica se estaría acelerando.

Por tanto, de acuerdo con lo anterior, queda patente que la expansión afecta a la mecánica de las galaxias, pero también, aunque en menor grado, a escalas más pequeñas (Anderson 1995). La pregunta que surge es si la expansión se debe despreciar en la escala del Sistema Solar, en donde se tienen en cuenta fuerzas gravitatorias incluso entre cuerpos poco masivos y alejados del Sol (cometas de la nube de Oort, por ejemplo) como perturbaciones en el problema de los dos cuerpos, o si debemos considerarla como una corrección de la ley de gravitación newtoniana e incluirla en nuestros análisis de estabilidad. Investigando sobre esta posibilidad hemos encontrado que, efectivamente, existen estudios actuales sobre esta cuestión, es decir, la influencia de la expansión cosmológica en sistemas locales como nuestro sistema planetario⁽³⁾.

Algunos estudios sobre la influencia de la expansión a escalas galácticas o planetarias son: McVittie (1933), Järnefelt (1940), Callan et al. (1965), Anderson (1995), Cooperstock et al. (1998), Domínguez & Gaité (2001), Carrera & Giulini (2009).

La base teórica del análisis que expondremos es el factor de escala cósmica $a(t)$, que representa la expansión relativa del Universo. Este factor relaciona la distancia propia entre dos objetos en un instante t con su distancia en un tiempo de referencia t_0 , es decir:

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}$$

Así, el parámetro de Hubble y, por tanto, el parámetro de deceleración se puede definir como:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}; \quad q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a}H^{-2}$$

La aceleración que resulta de la ley de Hubble estará dada entonces por:

$$\dot{v} = \ddot{R} = \dot{H}R + H\dot{R} = \frac{\ddot{a}}{a}R = qH^2R$$

Observamos que, desde la perspectiva de la Relatividad General, un cuerpo en co-movimiento con la expansión cosmológica se desplaza en una trayectoria inercial, es decir, libre de fuerzas. Desde el punto de vista newtoniano, la fuerza es por definición la causa de las desviaciones del movimiento inercial. En el contexto de nuestro estudio podemos añadir \ddot{R} a las ecuaciones de movimiento clásicas como una perturbación de la ley de gravitación newtoniana.

Cooperstock et al., en 1998, analizó la influencia de la expansión cosmológica en sistemas locales para una métrica Friedman-Robertson-Walker (FRW) en Relatividad General, es decir, intrínsecamente dinámica con el cambio de distancias propias. Para un Universo Einstein-de Sitter⁽⁴⁾, la ecuación de movimiento escrita en la forma newtoniana;

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{\ddot{a}}{a}R$$

Identificando esta ecuación como la ecuación newtoniana corregida al movimiento de los dos cuerpos, y con la restricción por simplicidad a órbitas circulares. Todo ello supuesto en un sistema de referencia inercial. Asumiendo la corrección $+\frac{\ddot{a}}{a}R$ como una perturbación de la fuerza central que también es central, con lo que el plano de la órbita se mantiene. Considerando la expresión de las coordenadas radial y angular de la órbita;

$$R(t) = R_0 + \delta R(t)$$

$$\theta(t) = w_0 t + \delta\theta(t)$$

Cooperstock obtiene las expresiones finales:

$$\delta\dot{\theta} = \frac{4}{9t^2w_0}; \quad \delta\ddot{R} = -\frac{4R_0}{3t^4w_0^2}$$

En donde podemos comprobar que la velocidad angular decrece con el tiempo, con lo que w se aproxima a w_0 .

Para un valor de la edad del Universo de $t = 6.3 \cdot 10^{17} s$, una distancia media Tierra-Sol de $R_0 = 1.5 \cdot 10^{11} m$, y una frecuencia orbital terrestre de $w_0 = 2 \cdot 10^{-7} s^{-1}$ se obtiene que la corrección de la aceleración debido a la expansión cosmológica es:

$$\delta\ddot{R} = -3.17 \cdot 10^{-47} m/s^2$$

Lo que comparado con la aceleración de la gravedad provocada por el Sol en la Tierra (G corresponde a la Constante de Gravitación Universal newtoniana):

$$g = \frac{GM_S}{R_0^2} = 6 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

Arroja un resultado 44 órdenes de magnitud inferior, lo que parece despreciable.

Sin embargo, el artículo en que se basan los resultados anteriores fue anterior al gran descubrimiento de 1998 sobre la aceleración de la expansión, con lo que la suposición del Universo Einstein- de Sitter dominado por la materia y, por tanto, la estimación de la edad del Universo utilizada en los desarrollos y cálculos, no es precisa.

Aunque los resultados anteriores parezcan representativos, conviene realizar el análisis de la influencia de la expansión en las órbitas keplerianas con los valores del parámetro de deceleración más utilizado por los teóricos actuales, y que no es el correspondiente al del Universo Einstein-de Sitter ($q = 1/2$). Además, hemos de tener en cuenta que el valor de la perturbación de la aceleración obtenido, aunque pequeño, podría suponer perturbaciones importantes a largo plazo, al igual que en el problema de los n cuerpos analizado con la mecánica hamiltoniana clásica, puede ocurrir con ciertas resonancias entre cuerpos.

Por tanto, analicemos el problema bajo la luz de los nuevos resultados de la última década.

Sereno & Jetzer (2007) analizaron el efecto de $\frac{\ddot{a}}{a}$ en la estabilidad de un sistema planetario similar al nuestro y en el movimiento medio y precesión del periastro de un planeta;

Continuando con la aproximación newtoniana y escribiendo de nuevo la ecuación de movimiento $\ddot{R} = -GM/R^2 + (\ddot{a}/a) R$ en coordenadas polares para una partícula alrededor de un cuerpo central:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + R\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) R$$

En donde $R^2\dot{\varphi} = L$ representa el momento angular (conservado) por unidad de masa.

Considerando la perturbación estrictamente radial, las órbitas keplerianas se encuentran confinadas en un plano no perturbado. Así, suponiendo las variaciones orbitales como perturbaciones de órbitas circulares, al igual que Cooperstock et al.;

$$R(t) = R_0 + \delta R(t)$$

$$\theta(t) = w_0 t + \delta \theta(t)$$

Siendo $R_0, w_0 = \sqrt{GM/R_0^3}$ las coordenadas de movimiento no perturbadas.

Considerando hasta variaciones seculares, la perturbación en la aceleración ($\delta \ddot{R}$) se puede despreciar ya que el periodo de las órbitas es mucho menor que la edad del Universo (Cooperstock et al, 1998), con lo que la aceleración centrípeta en un movimiento circular sería:

$$R\dot{\phi}^2 = \frac{GM}{R^2} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) R$$

Como consideramos constante el momento angular, podemos escribir:

$$R^2 \dot{\phi} = L = R_0^2 w_0$$

Con lo cual,

$$1 = \frac{R}{R_0} - \frac{1}{w_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{R}{R_0}\right)^4$$

Insertando la expansión $R(t) = R_0 + \delta R(t)$ en la anterior expresión, y con un modelo Λ CDM de referencia (que se analiza con y sin la influencia de energía oscura) ⁽⁵⁾ la contracción o expansión de un sistema gravitatoriamente ligado dependerá de si:

$$\frac{d\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)}{dt} \geq 0$$

En un escenario pesimista, el radio orbital divergería, pero este movimiento dinámico del radio se puede ver como determinado por un potencial efectivo:

$$U_{efectivo} = -R_0^2 \left\{ \frac{w_0^2}{\frac{R}{R_0}} - \frac{w_0^2}{\left(2\frac{R}{R_0}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a}(t) \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \right\}$$

El mínimo de potencial respecto a R en un tiempo t sólo existe para (Nesseris & Perivolaropoulos, 2004):

$$\frac{1}{w_0^2} \frac{\ddot{a}}{a}(t) \leq \frac{27}{256}$$

En donde la igualdad se escoge para el instante en que el mínimo desaparece y el sistema llega a desligarse. Este tiempo de disociación depende casi exclusivamente del comportamiento de la energía oscura a lo largo del tiempo.

Es posible encontrar una solución aproximada por desplazamiento al rojo ⁽⁶⁾ para la disociación (despreciando la materia oscura);

$$\Delta t_{dis} = \int_{z_{dis}}^0 \frac{dz}{(1+z)H(z)}$$

En donde, recordamos que,

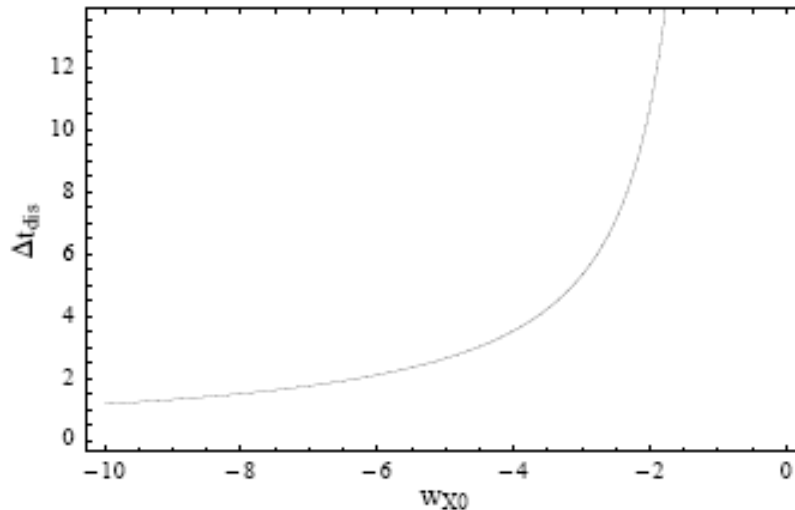
$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

y el factor de escala $a(t)$ se encuentra en función de z ;

$$a = \frac{1}{1+z}$$

Hacemos notar que, por primera vez en todo el trabajo, se ha expuesto una solución particular (temporal) al problema de la estabilidad del Sistema Solar en \mathbb{R}^3 .

Representando la solución en función de la ecuación de estado de la energía oscura w_{X0} (considerando esta como un parámetro cosmológico constante)⁽⁷⁾;



Tiempo (en unidades de 10^9 años) necesario para la disociación de un sistema planetario como el Sistema Solar en función de la ecuación de estado de la energía oscura en un Universo en que $\frac{d(\ddot{a}/a)}{dt} > 0$. Gráfica tomada del artículo de Sereno & Jetzer (2007).

Considerando ahora las órbitas elípticas, las variaciones seculares del semieje mayor (A), la excentricidad (e), y la velocidad angular (w) medias de un planeta también se modifican debido a la perturbación que ejerce la expansión cosmológica. Exponiendo sólo los resultados finales directamente;

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_t = \frac{a}{w^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \Big|_t \{1 - 2e + O(e^2)\}; \quad \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2a} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle; \quad \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{3}{2w} \sqrt{1-e^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

Al igual que las interacciones entre planetas, las anteriores expresiones suponen desviaciones de la 3ª Ley de Kepler. Cuanto mayor sea $\ddot{a}/a = qH^2$, mayores serán las perturbaciones orbitales y, por tanto, la probabilidad de destrucción de las órbitas planetarias.

Los resultados numéricos dependerán del tipo de expansión que consideremos y, por tanto, de sus valores en el parámetro de deceleración q . El principal problema para detectar empíricamente estas desviaciones es que, aunque mayores que las obtenidas por Cooperstock en 1998 al considerar la energía oscura, siguen siendo muy pequeñas en comparación con las medidas que ofrece la tecnología actual (10^{-1} m para planetas interiores; E. V. Pitjeva, *Solar System Research* **39**, 176 (2005)). Sin embargo, creemos que este es un camino que amplía y mejora el estudio de la estabilidad del Sistema Solar analizada con la mecánica newtoniana, ya que tiene en cuenta descubrimientos recientes en el campo de la Cosmología y su aplicación a pequeñas escalas. Aunque debemos esperar a generaciones futuras de tecnología para verificar o falsar las predicciones teóricas, la influencia de la expansión del Universo en las órbitas planetarias está demostrada cualitativamente, con lo que cerraremos este capítulo con otro estudio más actual que analiza el problema de la influencia de la expansión cosmológica en el Sistema Solar y, por tanto, de su estabilidad.

Carrera & Giulini (2010), reformulan las preguntas clásicas sobre la estabilidad planetaria desde la perspectiva cosmológica: ¿Se expande el Sistema Solar con el Universo? ¿Se expande sólo parcialmente? ¿O no se expande en absoluto? Mediante la aproximación newtoniana analiza el problema de los dos cuerpos en un Universo en expansión.

Con las estimaciones de los parámetros H y q_0 de verano de 2009 (aproximadamente $70\text{Kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ y -0.6 respectivamente);

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx 3 \cdot 10^{-36} \text{s}^{-2}$$

lo que, a la distancia de Plutón de 40UA, produce una aceleración de $2 \cdot 10^{-23} \text{ms}^{-2}$.

Si se considera un planeta del Sistema Solar, la escala de tiempo relevante del problema es el periodo de las órbitas alrededor del Sol. Si tratamos \ddot{a}/a como constante durante una órbita, el error relativo en la perturbación es menor que 10^{-9} . Aunque para tiempos variables qH^2 , como ya hemos visto, provoca cambios en el semieje mayor y en la excentricidad de las órbitas keplerianas, se despreciará la dependencia temporal de la ecuación:

$$\ddot{R} = \dot{H}R + H\dot{R} = \frac{\ddot{a}}{a}R = qH^2R$$

Y se establecerá \ddot{a}/a como una constante $A = q_0H_0^2$. Así, la ecuación:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{L^2}{R^3} + \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)R, (R^2\dot{\phi} = L)$$

puede integrarse;

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + U(R) = E$$

Siendo E la energía mecánica (cantidad conservada) y el potencial efectivo:

$$U(R) = \frac{L^2}{2R^2} - \frac{C}{R} - \frac{AR^2}{2}$$

Y en donde $C = GM$.

La discusión sobre el comportamiento de R se podría realizar en términos del potencial efectivo (en este sentido el estudio guarda cierto parecido con el análisis de Jacobi, con lo que podríamos insertar este nuevo potencial $U(R)$ en los desarrollos jacobianos y reelaborar los pasos y conclusiones, algo que dejaremos para futuros estudios).

Si queremos conocer el radio crítico al partir del cual la aceleración cosmológica supera a la aceleración gravitatoria que un cuerpo crea a la distancia en que se encuentra el otro;

$$\frac{GM}{R^2} = \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)R = AR_c \Rightarrow R_c = \sqrt[3]{\frac{C}{|A|}}$$

Lo que nos dice que para $R < R_c$ la atracción entre los dos cuerpos es dominante, y que para $R > R_c$ domina el efecto de la expansión cosmológica. Cuanto mayor sea el parámetro $|A| = |q|H^2$, menor será el radio crítico.

Aunque Carrera & Giulini utilizan parámetros adimensionales, algunos cambios de variable, y la 3ª ley de Kepler para hacer una discusión de casos del potencial efectivo que evalúa la estabilidad de las órbitas, nosotros trataremos de obtener las mismas conclusiones utilizando directamente la expresión del potencial efectivo en función de la distancia;

Derivando la expresión del potencial respecto a la distancia e igualando a cero obtenemos los extremos de la función:

$$\frac{dU(R)}{dR} = -\frac{L^2}{R^3} + \frac{C}{R^2} - AR = 0$$

Y que podemos expresar de forma simplificada con las condiciones:

$$L^2 = CR - AR^4 \geq 0 \Rightarrow A \leq \frac{C}{R^3}$$

Las órbitas circulares serán estables si consideramos el extremo como un verdadero mínimo, es decir, si la 2ª derivada del potencial evaluada en dicho punto crítico es positiva, se dará la estabilidad. Esto es;

$$\frac{d^2U(R)}{dR^2} = \frac{3L^2}{R^4} - \frac{2C}{R^3} - A > 0$$

Y sustituyendo la condición de extremo de la 1ª derivada, obtenemos la expresión sin la aparición explícita del momento angular:

$$CR - 4AR^4 > 0; R^3 < C/4A;$$

$$\Rightarrow R < \sqrt[3]{1/4} R_c \approx 0.63R_c$$

Lo que coincide con el resultado de Carrera & Giulini, y que implica la condición de estabilidad para órbitas circulares. Identificando el radicando con un parámetro (α), encontramos tres regiones:

1. $\alpha < \frac{1}{4}$, existen órbitas circulares y son estables
2. $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$, existen las órbitas circulares pero no son estables
3. $\alpha > 1$, no existen órbitas circulares

Tras este análisis, que consideramos más sencillo que el original, exponemos la representación de los resultados de Carrera & Giulini, mostrando así la equivalencia:

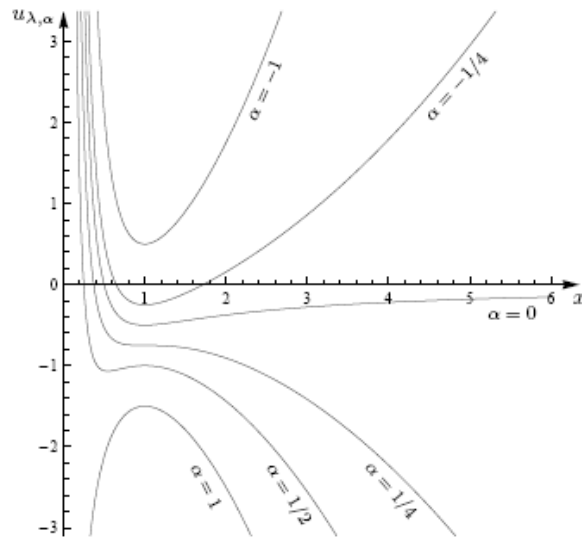


Imagen tomada del artículo de Carrera & Giulini (2010), que muestra la correspondencia con nuestros resultados. En el trabajo de los autores, el potencial depende de parámetros adimensionales en su ecuación general, llamando x al cociente entre distancias tomando una de referencia ($x(t) = R(t)/R_0$). α corresponde al caso newtoniano.

En general, no existen órbitas ligadas que se extiendan más allá del Radio crítico R_c , ya que, por ejemplo, para la Tierra y en la época actual:

$$\frac{R_0}{R_c} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{C}{|A|}}} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{GM_S}{|q_0 H_0^2|}}} = 4.2 \cdot 10^{-8} \ll 0.63 = \frac{R}{R_c}$$

Sin embargo, si nos vamos a los límites del Sistema Solar (Carrera & Giulini no realizan dichos cálculos), como la capa exterior de la nube de Oort (150000UA), obtenemos;

$$\frac{R_0}{R_c} = 0.0063$$

Lo que se acerca mucho más al radio crítico de inestabilidad (casualmente las cifras no nulas coinciden con el parámetro límite de estabilidad $R_0/R_c = 0.63$).

Existen estudios de esta discusión de casos teniendo en cuenta la dependencia de A con el tiempo (Faraoni and Jacques, 2007).

Escribiendo la expresión de velocidad angular para órbitas circulares con la condición de estabilidad:

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_K} \sqrt{1 - \frac{AR_0^3}{C}}$$

En donde T_K corresponde al periodo de la 3ª Ley de Kepler.

Observamos que para $R_0 \ll R_C$ obtenemos el límite kepleriano. Sin embargo, cuando $R_0 \sim R_C$ la perturbación de la ley de Kepler se hace considerable.

En el caso límite en que $R_0^3 = R_C^3 = C/A$; $w_0 = 0$, lo que es lógico ya que desaparecen las órbitas circulares al llegar al umbral del radio crítico.

Por otra parte, hemos comprobado que las condiciones de estabilidad en los mínimos de potencial dependen de la distancia elevada a la cuarta potencia (R^4). A partir de esta condición (aunque no entraremos en detalles), los autores concluyen que la desviación en el radio orbital de una hipotética sonda espacial que viaja alrededor del Sol a 100UA podría ser tan sólo de 1 mm, pero que como dicha desviación crece con la cuarta potencia de la distancia, si la nave viajara a 1000UA, esta sería del orden de 10 metros, y así sucesivamente.

Aunque, como hemos comprobado hasta ahora, la acción de la expansión cosmológica en la estabilidad del Sistema Solar está analizada y demostrada (en cuanto a su existencia al menos), también se desprende que la influencia es pequeña. La verdadera pregunta es ¿debe despreciarse? Esta respuesta no la consideramos trivial ya que el efecto de la aceleración cósmica es acumulativo y, a tenor de los recientes descubrimientos y análisis posteriores a 1998, podría crecer con el tiempo y la distancia. El hecho de que los parámetros de deceleración y de Hubble (q y H respectivamente) no sean del todo conocidos, así como la influencia de la materia oscura, hace que la respuesta a la pregunta esté abierta.

Por otra parte, aunque la aceleración cosmológica para Plutón es ínfima ($2 \cdot 10^{-23} ms^{-2}$), también lo son otras influencias gravitatorias, aunque en menor grado, que hemos tenido en cuenta en la Teoría de Perturbaciones (por ejemplo, la gravedad de Ceres a la distancia de Plutón es del orden de $10^{-15} ms^{-2}$). Si las perturbaciones gravitatorias entre cuerpos del Sistema Solar, aunque sean débiles, podrían desestabilizar a este al producirse resonancias, creemos que la aceleración cósmica, que toma su valor máximo "periódicamente" en el afastro, también se puede considerar como una perturbación en resonancia de un sistema integrable como el de los dos cuerpos.

Como los mismos autores (Carrera & Giulini, 2010) reconocen al inicio de su estudio, el entendimiento de la influencia de la dinámica cosmológica en sistemas locales como el Sistema Solar, es aún una cuestión abierta. Nosotros creemos que la cuestión de la Estabilidad del Sistema Solar no se cerrará hasta que se conozca mejor este nuevo campo de estudio, por lo que creemos que las nuevas vías de investigación deben incorporarlo. Un ejemplo de que la mecánica celeste no está aún completada, es problema conocido como la *aceleración anómala de las Pioneer 10 y 11*;

En Noviembre de 2004 la sonda espacial se encontraba a una distancia de 86.83 UA y velocidad de 12173km/s respecto al Sol. Sin embargo, para sorpresa de la comunidad científica, las Pioneer no se encontraban exactamente donde deberían, ya que algo estaba frenando a las sondas y las apartaba de las trayectorias que predecía la mecánica newtoniana. La aceleración se dirigía hacia el centro del Sistema Solar y era del orden de 10^{-9} ms^{-2} . Desde 1998 se han publicado multitud de artículos y teorías sobre el origen de esta extraña aceleración (Anderson et al., 1998; Rosales & Sánchez Gómez, 1999; Turyshev et al., 2005; Kagramanova et al., 2006; Fahr & Siewert, 2008; Carrera & Giulini, 2010, etc), sin que aún haya una explicación definitiva. Las explicaciones son tan variadas como perturbaciones provocadas por el Cinturón de Kuiper, fuerzas gravitatorias ocasionadas por materia oscura, modificación de coordenadas por la expansión cosmológica, etc. En cualquier caso, esta anomalía ha provocado una desviación de 500km en la trayectoria de la Pioneer a lo largo de diez años. La improbable coincidencia de la magnitud de la aceleración ($8.6 \pm 1.34 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$) con el producto:

$$H_0 c \approx 67 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ kms}^{-1} = 6.7 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$$

ha provocado amplias reflexiones sobre el replanteamiento de las Teorías de la expansión cosmológica.

El problema de la *anomalía Pioneer*, al ser este un satélite que viaja por nuestro sistema planetario con una trayectoria no prevista por la mecánica celeste, coloca límites a las Teorías Gravitatorias y Cosmológicas actuales, provocando que permanezca abierto el problema de la Estabilidad del Sistema Solar.

Proponemos, para estudios futuros, incluir la aceleración cosmológica en la ecuación de Binet para fuerzas centrales que, en su forma general;

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = -\frac{R^2}{L^2} f(r)$$

Clásicamente $f(r)$ se toma como $-\frac{GM}{R^2}$ (Kepler, problema de los dos cuerpos) para el campo gravitatorio, lo que en nuestro caso, determina la órbita de un planeta;

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = \frac{GM}{L^2}$$

Sin embargo, si incluimos también la aceleración cosmológica;

$$f(r) = -\frac{GM}{R^2} + \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)R$$

Tomando $\ddot{a}/a = q_0 H_0^2$ como constante (Carrera y Giulini, 2010), la expresión queda:

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = \frac{GM}{L^2} - \frac{q_0 H_0^2 R^3}{L^2}$$

Lo que representaría una perturbación a la ecuación de Binet.

Además, dado que los valores de la aceleración cosmológica son pequeños a escalas locales como el Sistema Solar, sería recomendable no despreciar tampoco en la ecuación anterior los efectos de la Relatividad General (especialmente observados en el perihelio de Mercurio y ya comentados en "Leyes de la Mecánica Celeste: germen del problema"). Como la ecuación de Binet Relativista (Janssen B., *Teoría de la Relatividad General, Dpto. de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2011*) es:

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{c^2 R^2}$$

La ecuación final de Binet, con las perturbaciones cosmológicas y relativistas sería:

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{c^2 R^2} - \frac{q_0 H_0^2 R^3}{L^2}$$

Apareciendo la constante c como la velocidad de la luz en el vacío.

Como la perturbación relativista crece al acercarnos al Sol, pero la perturbación cosmológica crece al alejarnos de este, sería interesante calcular en qué regiones se puede despreciar una u otra perturbación desembocando en unas u otras trayectorias orbitales. De hecho, como al aumentar R , una perturbación disminuye y la otra crece, habrá un valor de la distancia en que ambas se cancelen mutuamente;

$$\frac{3GM}{c^2 R_{CB}^2} = \frac{q_0 H_0^2 R_{CB}^3}{L^2}$$

Como el momento angular L es una cantidad conservada, podemos dejarla en función de parámetros conocidos. Teniendo en cuenta que en radio orbital R_{CB} tenemos de nuevo el problema clásico de los dos cuerpos ya que ambas perturbaciones se anulan, la aceleración centrípeta coincidiría con la gravitatoria, con lo cual:

$$\dot{\varphi}^2 R_{CB} = \frac{GM}{R_{CB}^2} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 R_{CB}^4 = GM R_{CB} = L^2$$

Y sustituyendo en expresión de R_{CB} ;

$$\Rightarrow R_{CB} = \sqrt[4]{\frac{3}{q_0} \left(\frac{GM}{cH_0}\right)^2}$$

$$\Rightarrow R_{CB} = 6.67 \cdot 10^{14} m \cong 4448 \text{ UA}$$

En donde hemos llamado R_{CB} a la distancia en que se obtiene la ecuación clásica de Binet.

Por tanto, como en la región que se extiende entre el Sol y R_{CB} la perturbación relativista vence a la cosmológica, creemos que los estudios realizados hasta la fecha sobre la influencia de la aceleración cosmológica a escalas locales (como el Sistema Solar) debería incluir la perturbación de la Relatividad General en las ecuaciones newtonianas. Observamos que la aceleración cosmológica sólo comenzaría a tener efectos superiores a la relativista a 4448 UA, es decir, más allá de la Nube de Oort interior (que se extiende desde las 2000 UA hasta las 20000 UA).

Concluimos así que todos los planetas del Sistema Solar sufren una mayor perturbación en sus órbitas por los efectos de la Relatividad General en las ecuaciones newtonianas que por la influencia de la aceleración cosmológica en dichas ecuaciones.

Observamos también que la mencionada coincidencia de la *anomalía Pioneer* (A_P) con parámetros fundamentales, y que ha provocado amplias reflexiones;

$$A_P = H_0 c \approx 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1} = 6.7 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$$

ha florecido de manera natural en nuestra distancia límite R_{CB} , pudiendo escribirla, por tanto:

$$R_{CB} = \sqrt[4]{\frac{3}{q_0} \left(\frac{GM}{A_P}\right)^2}$$

Con lo que todo parece indicar que, efectivamente, no se trata de una mera coincidencia.

Como ya hemos comentado al principio de estos análisis, dejaremos esta vía de estudio sobre la Ecuación de Binet con las perturbaciones relativistas-cosmológicas y su posible relación con la *anomalía Pioneer*, para más adelante.

8.3 Predicciones

Aunque el trabajo que hemos desarrollado y expuesto aquí, ha tomado en todo momento una perspectiva analítica, existen otros métodos que tratan de resolver el problema de los cuerpos y la estabilidad del Sistema Solar (métodos numéricos y computacionales, por ejemplo). Aunque no forma parte de nuestro objetivo tratarlos, sí que expondremos algunos resultados sobre predicciones, lo que puede ser significativo en cuanto al futuro del Sistema Solar y las dudas que nos ofrece su posible inestabilidad o/y caos.

El astrónomo francés Jacques Laskar, del Instituto de Mecánica Celeste de París lleva décadas investigando sobre la estabilidad del Sistema Solar. Hasta 1988 todas las integraciones numéricas sobre el movimiento de los planetas (principalmente los exteriores) durante periodos que alcanzaban las decenas de millones de años, reforzaban la idea de las órbitas casi-periódicas. El determinismo laplaciano parecía consolidarse. Sin embargo, al continuar los cálculos para intervalos temporales mayores (845 millones de años) gracias a un ordenador especialmente construido para ello (Orrery) se descubrió un comportamiento caótico para Plutón (Sussman & Wisdom, 1988); la distancia que separa dos órbitas inicialmente próximas se multiplica por tres cada veinte millones de años (exponente de Lyapunov), lo que ponía de manifiesto una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Laskar, en 1989⁽⁸⁾, extendió el estudio a todos los planetas mediante el ordenador VP 200 del CNRS, con lo que pudo integrar numéricamente el movimiento de los ocho planetas del Sistema Solar durante 200 millones de años (seis horas de cálculos). Los resultados fueron sorprendentes, ya que indicaban que planetas como Mercurio, Venus, La Tierra y Marte, tenían un comportamiento de las trayectorias caótico; las distancias entre dos órbitas inicialmente próximas se multiplicaban por tres cada cinco millones de años (exponente de Lyapunov). Por tanto, ello hacía imposible cualquier predicción más allá de **100 millones de años**, ya que un error del 0.00000001% en la medida de las condiciones iniciales conducía a un error del 100% (un error igual a la medida) tras 100 millones de años.

El origen de tales movimientos caóticos provenía de las resonancias entre los periodos de precesión (resonancias seculares) de las órbitas de Marte y de la Tierra por un lado, y de Mercurio, Venus y Júpiter por otro. Se demostró también (Laskar, 1990) que la zona caótica es lo suficientemente amplia como para permitir que el resultado de los 10^8 años sea correcto aunque haya pequeños cambios en las condiciones iniciales o en el modelo. Las integraciones y simulaciones posteriores para la evolución de las órbitas planetarias muestran una gran estabilidad en planetas similares a la Tierra para periodos de tiempo de hasta **10^9 años** (Lissauer, 1999). Simulaciones más recientes (Laskar, 2009) recrean los movimientos orbitales con pequeñas variaciones de las condiciones iniciales que dan lugar a 2500 dinámicas posibles para los próximos miles de millones de años; en un 1% de los casos, Venus, Mercurio, La Tierra o Marte colisionaban entre sí o con el Sol.

Aunque el Teorema KAM propone un Sistema Solar relativamente (o probablemente) estable, la existencia de resonancias seculares en los movimientos de precesión de las órbitas planetarias puede provocar nuevas divergencias en los desarrollos de la mecánica celeste. En el caso de un movimiento casi-periódico con pequeñas perturbaciones, las trayectorias permanecen en toros invariantes, pero la dinámica caótica motivada por otras resonancias no

incluidas en la Teoría de Perturbaciones, puede desembocar en trayectorias que incursionan en otros espacios topológicos.

El astrofísico y cosmólogo Richard Gott, profesor de la Universidad de Princeton, diseñó un ingenioso método para estimar la duración de sucesos difíciles de predecir; *El Principio de Mediocridad*⁽⁹⁾, que surge como una extensión del *Principio Copernicano*. Este último Principio afirma que no hay observadores privilegiados para un fenómeno dado. Según el Principio Copernicano, no estamos en un lugar privilegiado del Universo, por lo que un observado en un lugar al azar verá el mismo Universo que nosotros. La versión cosmológica moderna lo recoge como *El Principio Cosmológico*, que a su vez afirma que, a escalas suficientemente grandes, el Universo es isótropo y homogéneo.

El origen de tal método de Gott se remonta a una visita de este al Muro de Berlín, en 1969. Cuando se le preguntó al científico por la duración del Muro, éste razonó, aproximadamente, como sigue:

Si mi visita no tiene nada de especial, existe un 50% de probabilidad de que el Muro se encuentre en los 2/4 centrales del periodo observable. Por tanto, existe un 50% de probabilidad de que el futuro dure entre 1/3 y el triple de lo que duró en el pasado. Como en el instante de observación el Muro tiene una vida de 8 años, el tiempo restante debe encontrarse entre los 2.67 y los 24 años.

Cuando el Muro de Berlín cayó en 1989 (20 años después, es decir, dentro del intervalo predicho), Richard Gott se decidió a publicar el llamado Principio de Mediocridad y algunas aplicaciones de este en Nature⁽¹⁰⁾. La expresión general que predice la duración es:

$$\frac{t_{actual}}{\left| \frac{(f+1)}{f-1} \right|} < t_{restante} < t_{actual} \left| \frac{(f+1)}{f-1} \right|$$

Siendo f el factor de fiabilidad, que se encontrará entre 0 y 1, y asumiendo que el observador contempla el cuerpo o sistema en un instante al azar.

El Principio de Mediocridad, como ya hemos comentado, es una versión temporal del Principio Copernicano; si no estamos en un lugar privilegiado en el Universo, tampoco debemos estar en un instante privilegiado en el mismo. En su libro *Los Viajes en el Tiempo y el Universo de Einstein* (2002), el astrofísico explica el método y lo aplica para hacer predicciones sobre la duración de la especie humana o, por ejemplo, la duración de un determinado gobierno. Según Gott, la fórmula no sirve para predecir la longevidad del Universo ya que los observadores inteligentes no estaban en un principio y, probablemente, desaparecerán mucho antes que el Universo. Para el cosmólogo, los observadores inteligentes viven en una época habitable y, por tanto, especial de la Historia (Principio Antrópico Débil). Sin embargo, para nosotros, esta argumentación puede dar lugar a paradojas:

Como estamos en una época habitable \Rightarrow estamos en una época especial

Por tanto:

Como estamos en un lugar habitable \Rightarrow estamos en un lugar especial \Rightarrow

⇒ El Principio Copernicano no es válido ⇒ El Principio de Mediocridad no es válido

Es decir, si aceptamos el Principio Copernicano y, por tanto, el de Mediocridad, debemos aceptar también que podemos hacer predicciones sobre la duración del Universo y, por tanto, del Sistema Solar. Nosotros aplicaremos este método tanto para estimar la duración probable del Sistema Solar entendiendo que la aparición de vida no es un fenómeno especial a gran escala (lo que llamaremos Principio de Mediocridad Fuerte), como para calcular el tiempo restante del sistema Sol-Tierra-Luna suponiendo que la aparición de vida es un fenómeno aleatorio sólo si se cumplen unas condiciones definidas (lo que llamaremos Principio de Mediocridad Débil). Ambas estimaciones la realizaremos con una fiabilidad del 95% ($f = 0.95$), que es un valor para el parámetro usual en los trabajos científicos.

Establecemos así:

1. Principio de Mediocridad Fuerte Supongamos que la aparición de vida y las condiciones necesarias para que esta se dé son relativamente comunes en el Universo. Entonces, el momento y la persona que se pregunta por la duración del Sistema Solar (en este caso, yo) no deben tener nada de especial.

Aunque es difícil ser precisos en la edad del Sistema Solar, una cifra bastante aceptada es 4650 millones de años. Al principio no había orden ni armonía, ya que millones de objetos colisionaban violentamente y se desfragmentaban mientras que otros, se unían por la acción de la gravedad. Pasados 100 millones de años, el sistema planetario cobró la estabilidad y la estructura actual⁽¹¹⁾. Según estas datos, la edad del actual Sistema Solar (t_{actual}) es de 4550 millones de años. Sustituyendo este valor en la expresión de Gott, obtenemos, al 95% de probabilidad:

$$116.67 < t_{restante} < 177450$$

(millones de años)

Observando que el tiempo restante mínimo ($\sim 1.17 \cdot 10^8$ años) coincide en orden de magnitud con el resultado de Laskar ($\sim 10^8$ años) como límite predictivo. Si invertimos los cálculos para conocer la probabilidad de que el Sistema Solar se desestabilice antes de los 10^8 años de Laskar, obtenemos que existe un 4.3% de probabilidades de que el Sistema Solar se desestabilice antes de ese instante (y después de $2 \cdot 10^{11}$ años). Así, por simetría de intervalos y la equiprobabilidad de sucesos aleatorios, la probabilidad de que el sistema planetario deje de ser estable antes del tiempo de Laskar es de un 2.15%, aproximadamente.

Comprobamos también, por otra parte, que el orden del tiempo de disociación calculado por Sereno & Jetzer debido a la aceleración cosmológica (10^9 años), se encuentra dentro del intervalo estimado por nosotros ($t_{restante} \in (10^8, 10^{11})$ años).

2. Principio de Mediocridad Débil Suponemos que la aparición de vida es un suceso aleatorio pero no lo son las condiciones necesarias para que esta se dé. Entonces, el

momento en que me realizo esta pregunta no es especial si contabilizamos el tiempo a partir de instante en que se dieron las condiciones para que la vida exista y se desarrolle.

La configuración del Sistema Solar que permite y favorece el desarrollo de la vida se basa en un sistema Sol-Tierra-Luna (STL) estable. El intervalo temporal de estabilidad del STL debe ser mayor o igual que el intervalo temporal de estabilidad del Sistema Solar, ya que si algunas órbitas de este desaparecen o intersecan, el sistema STL puede permanecer, pero no así a la inversa, por propia definición clásica de la estabilidad del sistema planetario.

Supuestamente, el sistema STL es estable y favorece el desarrollo de la vida hace 4400 millones de años (t_{actual}), cuando el vapor de agua pudo condensarse por primera vez. Por otro lado, las teorías más actuales sitúan los primeros indicios de vida en torno a 3800 millones de años⁽¹²⁾. Así, con la misma fiabilidad de antes (0.95), obtenemos:

$$112.8 < t_{restante} < 171600$$

(millones de años)

Si relajamos aún más el Principio de Mediocridad Débil y suponemos que la aparición de la vida hace 3800 millones de años no fue aleatoria, es decir, consideramos ese tiempo como t_{actual} , obtenemos:

$$97.4 < t_{restante} < 148200$$

(millones de años)

Lo que correspondería al periodo probable del sistema STL que favorece literalmente el desarrollo de la vida.

8.4 Síntesis final

En definitiva, la pregunta clásica sobre la Estabilidad del Sistema Solar sigue abierta a pesar del Teorema KAM (años 60), ya que este sólo establece su estabilidad como una probabilidad que depende de perturbaciones pequeñas. El carácter no integrable y caótico del Sistema Solar (Bruns-Poincaré, 1887), hace que sean necesarios métodos numéricos y simulaciones que sólo realizan predicciones válidas hasta un tiempo de 10^8 años (Laskar, 1990, 2009) o 10^9 años (Lissauer, 1999). Estas cifras son de un orden de magnitud similar a los resultados mediante otros métodos de aplicación cosmológica (Serenó & Jetzer, 2007) y de raíz especulativa como el Principio de Mediocridad, que nosotros hemos aplicado al estudio de este problema.

Por otra parte, la Ley de Hubble (1929), que también influye a pequeñas escalas (Anderson, 1995) y los últimos descubrimientos sobre la aceleración cósmica (Riess, 1998), parecen indicar que se deben tener en cuenta parámetros cosmológicos en la búsqueda de una solución definitiva al problema; la *anomalía Pioneer* (Anderson, Laing y otros, 1990) es un contraejemplo que demuestra que la mecánica celeste no es un campo cerrado. Nosotros, como aportación, hemos introducido las perturbaciones cosmológicas y relativistas en la ecuación de Binet, obteniendo que sólo a partir de las 4448 UA la perturbación cosmológica supera a la relativista, con lo que esta última tiene mayor influencia en las órbitas planetarias keplerianas. Consideramos este último método como una nueva vía de estudio sobre la estabilidad del Sistema Solar tratada como perturbaciones en el problema de los dos cuerpos, ya que incorpora además la *anomalía Pioneer* de forma natural.

Por otra parte, se ha generalizado el método de Jacobi a \mathbb{R}^n , obteniendo que el Sistema Solar sólo puede ser estable en \mathbb{R}^3 .

- 1) Realmente hay cierta controversia sobre el origen del descubrimiento. En Noviembre de 2011, la revista Nature publicó el hallazgo de una carta en los archivos de la Royal Society of London, fechada en 1931. De ella, al parecer, se desprende que Georges Lemaitre, en 1927, fue quien realmente descubrió la expansión del Universo. Para más información sobre la autoría del descubrimiento se puede consultar: <http://www.nature.com/nature/journal/v479/n7372/full/479150a.html>
- 2) 25 Julio de 2011; http://www.icrar.org/news/news_items/media-releases/a-new-way-to-measure-the-expansion-of-the-universe
- 3) Para ser más precisos, algunos ejemplos ordenados cronológicamente:
 - Cooperstock, F.I. et al. *The influence of the cosmological expansion on local systems*, University of Victoria, 1998
 - Domínguez A. and Gaité J., *Influence of the cosmological expansion on small systems*, Ludwig-Maximilians-Universität, Germany, e Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, Spain, Europhysics Letters, 2001.
 - Sereno, M & Jetzer, P., *Evolution of Gravitational Orbits in the Expanding Universe*, Physical Review D, 75 (6) 064031, 2007
 - Carrera M and Giulini, D., University of Freiburg, Germany, University of Hannover, Germany, Reviews of Modern Physics, 82, 2010.
- 4) Modelo de Universo en que, enunciado de forma muy simplificada, la tendencia a la expansión se equilibra con las fuerzas gravitatorias.
- 5) Modelo Λ CDM es una abreviación de “Lambda-Cold Dark Matter”, conocido frecuentemente como el modelo estándar de la cosmología del Big Bang. Para más información sobre el modelo y sus parámetros, remitimos a lector al artículo de Sereno & Jetzer (2007).
- 6) Radiación electromagnética desplazada hacia el rojo, hecho que viene motivado por un alejamiento de la fuente respecto al observador (incrementándose la longitud de onda). Este efecto Doppler se mide mediante el parámetro $1 + z = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitada}}$
- 7) La relación entre la ecuación de estado w_{X0} y otros parámetros de energía oscura Ω_{X0} y materia oscura Ω_{M0} viene dada por el parámetro de deceleración q_0 en la época actual:

$$q_0 = \frac{1}{2} \{ \Omega_{M0} + (1 + 3w_{X0}) \Omega_{X0} \}$$
 En modelo Λ CDM de referencia, equivale a $q_0 = -0.55$. Para leer una discusión sobre los posibles valores de los parámetros, remitimos al lector al artículo de referencia.
- 8) Laskar, J., Nature, 338, 237, 1989.
- 9) Este Principio ya lo hemos avanzado en los trabajos de Laskar en relación con la estabilidad que la Luna provoca en la Tierra.
- 10) Gott, J. Richard, *Implications of the Copernican Principle for our future prospects*, Nature, 363, 1993.
- 11) Datos recogidos principalmente de: <http://www.cyberastronomo.org/SistemaSolar/Planetas/Formaciónde los Planetas/tabid/97/Default.aspx>
- 12) Entre otras webs, estos datos se han recogido de Origen e Historia Evolutiva de la Tierra, www.biologia.edu.ar/introduccion/origen.htm

Referencias

1. Arnol'd V., Small Denominators and problems of stability motion in classical and celestial mechanics, *Russ. Math. Surv.*, Vol. 18, nº 6, 1963.
2. Baker G. A., Bound system in an expanding universo, *Physical Review D*, June 12, 2000.
3. Balanzario Eugenio P., *Números Algebraicos Trascendentes*, Instituto de Matemáticas, UNAM-Morelia, 2003
4. Benito M. B. y Borondo F., Caos y orden en Sistemas Hamiltonianos, I: Estudio clásico, *Revista Española de Física*, 8 (4), 1994
5. Broer H. W., KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 41, nº4, 507-521, 2004
6. Campos D., Determinismo, caos e impredecibilidad, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.: vol XXVI*, nº 98, ; marzo de 2002
7. Carrera M & Giulini D., Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics, *Rev. Mod. Phys.* 82, 169-208, 2010
8. Carrillo Torres S. A., Integrabilidad de Sistemas Hamiltonianos lineales no-autónomos a través de la teoría de Galois diferencial, Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas de la UNC, 2011.
9. Celletti A. & Chierchia L., KAM Stability for a three-body problem of the Solar System, *Math. Phys.* 57, 33-41, (2006),
10. Chirikov & Vecheslavov V. V., Chaotic dynamics of comet Halley, *Astron. Astrophys.* 221, 146-154 (1989)
11. Cooperstock F. I., Faraoni V., & Vollick N., The influence of the cosmological expansion on local system, *Astrophysical Journal*, 503, 61-66, 1998
12. Cordero A., Cadenas de órbitas periódicas en la variedad $S^2 \times S^1$, Tesis Doctoral, 2003
13. De la Calle Ysern B., Aproximación constructiva: números irracionales y racionales, Dpto. de Matemática Aplicada, ETS Ingenieros Industriales, UPM, Encuentro Iberoamericano, 2010.
14. De Orús Navarro J. J., Catalá Poch M. A., Núñez de Murga J., *Astronomía Esférica y Mecánica Celeste*, Universitat de Barcelona, 2007, http://www.publicacions.ub.es/liberweb/astronomia_esferica/material/version_html/Tomo_2/index.htm
15. Delshams A., Poincaré, Creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste, Departament de Matemàtica Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya.
16. Deprit A. y Moratalla T. D., Estabilidad orbital de satélites estacionarios, *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, vol 9, nº 2, 1996
17. Domínguez A., & Gaité J., Influence of the cosmological expansion on small system, *European Physics Letters*, vol. 55, nº 4, 2001.
18. Ehrenfest P., Which roles does the three-dimensionality of area play in the basic laws of physics?, *Annalen der Physik*, 1920.
19. Féjóz J., Démonstration du "théoreme d'Arnold" sur stabilité du système planétaire (d'après Michael Herman), *Ergod. Th. And Dynam. Sys.* 24,1-62, 2004
20. Gallardo T., Algunos aspectos dinámicos del Sistema Solar, Departamento de Astronomía, Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Noviembre de 1999

21. Gott J. R., *Los viajes en el tiempo y el Universo de Einstein*, Círculo de Lectores, 2003
22. Gott J. R., *Implications of the Copernican Principle for our future prospects*, Nature 363, 1993
23. Hawking S., *A Hombros de Gigantes*, Crítica, 2010
24. Hawking S., *Dios Creó los Números*, Crítica, 2010
25. Iborra A., *La Anomalía Pioner*, RUISE, Enero 2005.
26. Introducción a los Sistemas Dinámicos, DMA, Universidad Politécnica de Madrid, <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/sistdin/>
27. Ivorra Castillo C., *Curvas Elípticas*, <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Elipticas.pdf>
28. Ivorra Catillo C., *Topología Algebraica con aplicaciones a la geometría diferencial*, www.uv.es/ivorra/Libros/Topalg.pdf
29. Jacobi, *Jacobi's Lectures on Dynamics*, Delivered at the University of Königsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt, 2009.
30. Janssen B., *Teoría de la Relatividad General*, Dpto. de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2011, <http://www.ugr.es/~bjanssen/text/relatividad.pdf>
31. Kreinovich V, Bernat A., *Is Solar System Stable?*, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, USA, 1994
32. Laskar J., Joutel F., & Robutel P., *Stabilization of the Earth's obliquity by de Moon*, Letters to Nature, vol 361, 18 de Febrero de 1993
33. Laskar J., Nature 459, 817-819 (11 June 2009)
34. Laskar, J. *La Luna y el Origen del Hombre*. Investigación y Ciencia, Julio de 1994
35. Laskar, J., Froeschlé, C., *El Caos en el Sistema Solar*. Mundo Científico. 115-11, 732
36. Laskar, J., Joutel, F. and Robutel P., *Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon*. Letters to Nature, 1993
37. Lissauer J. J., *Chaotic motion in the Solar System*, Rev. Mod. Phys., vol. 71, nº 3, Abril de 1999
38. Luca F., *Aproximaciones Diofánticas*, Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, 15 de Abril de 2012.
39. Luz-Burgoa K., Nogales J. A. C., & Ticona A., *Caos en sistemas dinámicos tipo Henón y Heiles*, Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia.
40. Madrid Casado C. M., *Historia de la Teoría del caos contada para escépticos*, Dpto. Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Complutense de Madrid.
41. Martín-Martín C., *Campos con Simetría Esférica*, Dpto. de Física Fundamental de la Universidad de Salamanca, http://web.usal.es/~chmm/relatividad_general/GRG5_SimEsf%e9rica.pdf
42. Maza Sancho J., *Los grandes mecanicistas del siglo XVIII*, Departamento de Astronomía de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, Junio 2004
43. Molina Fernández R. A., *Caos Cuántico en Sistemas Hamiltonianos de muchos cuerpos*, Memoria, 2001.
44. *Montesinos Amilibia A., Variedades Diferenciales*, Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia, 2005
45. Moser J, *Is the Solar System Stable?*, The Mathematical Intelligencer, 1, 65-71, (1978)
46. Mosquera C.A., *Conjuntos Inconmensurables*, Tesis Doctoral, 2009.

47. Notas del Primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat Politècnica de Catalunya, Editor: Primitivo B. Acosta Humánez, 29 y 30 de Marzo de 2005
48. Ortega R., Introducción a la Mecánica Celeste, Universidad de Granada, 2010
49. Ortega R., La Mecánica, una fuente de problemas. Notas dentro del curso "Matemáticas: vínculo interdisciplinar". 2006
50. Parker M. W., Undecidability in \mathbb{R}^n : Riddled Basins, the KAM Tori, and the Stability of the Solar System, *Philosophy of Science*, 70, 359-382, 2003
51. Pascual Lería A. I., Sobre la estabilidad de sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad bajo resonancias, Tesis Doctoral, Universidad de la Rioja, 2005.
52. Pérez Chavela E., Caos en el Sistema Solar, *Miscelánea Matemática* 26, 59-669, (1997)
53. Pinasco J. P., El Número, Departamento de Matemáticas, FCEyN-UBA, 2007.
54. Poincaré, *Livre II: Les Approximations de la Mécanique Céleste*, Chapitre V: Sur la Stabilité du Systeme Solaire, 1898.
55. Pöschel J., A Lecture on the Classical KAM Theorem, *Proc. Symp. Pure Math.*, 69, 707-732, 2001
56. Qiu-Dong W., The global solution of the n-body problem, Department of Mathematical Science, University of Cincinnati, 1991
57. Rañada M. F., Diez lecciones sobre Sistemas Hamiltonianos, Integrabilidad y Separabilidad, Curso impartido en la Facultad de Matemáticas, UPC, 2008.
58. Rosales J. L., & Sánchez-Gómez J. L., The "Pioneer effect" as a manifestation of the cosmic expansion in the Solar System, eprint arXiv:gr-qc/99810085, 1999
59. Rotstein N., Equilibrio y caos en el Sistema Solar,
60. Saavedra Alvear J., Sistemas Dinámicos Degenerados, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Chile, 2002.
61. Santamaría P., Un mapa conservativo que modela cualitativamente la estructura de anillos de Saturno, Noviembre de 2011
62. Sereno M. & Jetzer P., Evolution of gravitational orbits in the expanding universe, *Physical Review D*, 6 Mar 2007.
63. Simó C., Difusión de Arnol'D, Actas II, Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, UAB, 1979.
64. Simó C., El problema de los n cuerpos,
<http://ddd.uab.cat/pub/pubsecmat/02102978v2/02102978v2p38.pdf>
65. Small Denominators. *Encyclopedia of Mathematics*,
http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Small_denominators&oldid=14339
66. Solé V., Manrubia S. C., Orden y Caos en Sistemas Complejos, Fundamentos y Aplicaciones, UPC, 2001
67. Szebehely V. G., *Stability of the Solar System and its minor natural and artificial bodies*, Kluwer, 1985
68. Torres del Castillo G. F., La ecuación de Hamilton-Jacobi para sistemas Hamiltonianos, *Revista Mexicana de Física* 36, 3, 478-493, 1990
69. Vargas C. A., Fernández J. L., Hernández R. T., *Elementos de Teoría de Perturbaciones para Sistemas Hamiltonianos*, UAM, Casa Abierta del Tiempo, 289, 1992.
70. Vázquez Abeledo M., Estabilidad de los sistemas planetarios, Curso Interuniversitario, sctm, 2005.

