
TRABAJO FIN DE MÁSTER
ESTUDIO DE LAS INVERSIONES DE POLARIDAD DEL
CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE MEDIANTE DOS
MODELOS: LA DINAMO DE ROBBINS Y UNA ECUACIÓN
DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA



UNED

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Educación a Distancia
(UNED)

HELENA ALCOLEA RUIZ


TUTORAS:

Emilia Crespo del Arco
María del Mar Serrano Maestro

TRABAJO FIN DE MÁSTER:

Máster de Física de Sistemas Complejos

Córdoba, 13 de junio de 2023



RESUMEN

En este trabajo hemos propuesto un estudio de las inversiones de polaridad del campo geomagnético. Para ello, realizaremos simulaciones numéricas de dos modelos: La dinamo de Robbins y un fluido de Von Kármán.

En el modelo de la dinamo de Robbins hemos obtenido inversiones en las corrientes eléctricas que circulan por el sistema para dos de los cinco regímenes en los que se divide su comportamiento. Esto implica que el campo magnético autoinducido y creado por dichas corrientes experimentará, asimismo, cambios en su polaridad (tal y como ocurre con el campo geomagnético). Esto nos permitirá aplicar este modelo, de forma aproximada, al problema de las inversiones de polaridades magnéticas terrestres.

También hemos simulado la velocidad acimutal de un fluido de Von Kármán a través de dos ecuaciones diferenciales estocásticas, basándonos en el estudio experimental y numérico realizado por [1], [2] y [3]. En la primera ecuación aparece una distribución prácticamente simétrica entre velocidades levórigas o dextrórigas (generando un campo magnético con polaridades invertida y normal equiprobables, respectivamente). En la segunda ecuación detectamos una preferencia hacia uno de los sentidos de la velocidad. Esta última ecuación permitirá realizar una estimación aproximada del registro histórico de inversiones magnéticas, que presenta una ligera predominancia hacia polaridades magnéticas normales.

In this work, we propose a study of polarity inversions in the geomagnetic field. To do this, we will carry out numerical simulations of two models: the Robbins dynamo and a Von Kármán fluid.

In the Robbins dynamo model, we have obtained inversions in the electric currents circulating through the system for two out of the five regimes into which its behavior is divided. This implies that the self-induced magnetic field created by these currents will also experience changes in polarity (similar to what happens with the geomagnetic field). This will allow us to apply this model, in an approximate way, to the problem of terrestrial magnetic polarity inversions.

We have also simulated the azimuthal velocity of a Von Kármán fluid using two stochastic differential equations, based on the experimental and numerical study conducted by [1], [2] and [3]. In the first equation, there is a nearly symmetrical distribution between counterclockwise and clockwise velocities (generating a magnetic field with inverted and normal polarities equiprobable, respectively). In the second equation, we detect a preference towards one direction of the velocity. This latter equation will allow for an approximate estimation of the historical record of magnetic inversions, which shows a slight predominance towards normal magnetic polarities.

INTRODUCCIÓN

El magnetismo terrestre es un fenómeno que lleva intrigando a la sociedad humana desde hace siglos. Ya en la época romana, las propiedades de la magnetita fueron mencionadas por Plinio el Viejo en su *Historia Natural* y, en el siglo XI, la brújula fue creada en China con fines de navegación marítima.

Siglos después, en 1905, el físico francés Bernard Brunhes (1867-1910) observó, en una antigua colada de lava, que los estratos estaban magnetizados en una dirección distinta a la del campo magnético en esa época [4]. Unos años más tarde, el geólogo japonés Monotori Matsuyama (1884-1910) propuso, a partir de un análisis estratigráfico, una relación entre la edad de los estratos y su polaridad; es decir, hipotetizó que, durante ciertos períodos en la historia terrestre, la polaridad del campo magnético era opuesta a la del campo magnético actual ([5] y [6]).

Estos descubrimientos coincidieron prácticamente en el tiempo con las investigaciones del físico y matemático Joseph Larmor (1857-1942). Aupado por los enormes avances en el campo del electromagnetismo durante el siglo XIX, Larmor propuso el efecto dinamo como una hipótesis para explicar la aparición de las manchas solares, así como el origen del magnetismo en la Tierra ([7] y [8]). Dicha hipótesis contemplaba, además, la aparición de inversiones en el campo magnético.

En este sentido, a lo largo del siglo XX surgieron múltiples modelos experimentales que intentaron comprobar la hipótesis de la dinamo, consiguiendo Frank J. Lowes e I. Wilkinson, en 1963, crear una dinamo autoinducida en laboratorio a partir de materiales conductores [9].

A finales del siglo XX, dicho campo volvió a experimentar un gran auge gracias a la publicación de [10], en la que se mostraban, por primera vez, inversiones magnéticas obtenidas mediante la simulación de un modelo tridimensional con características similares a las terrestres. Posteriormente, los resultados del experimento VKS de Cadarache [11] mostraron inversiones en las tres componentes del campo magnético, así como una distribución de polaridades similar a la del registro histórico obtenido a partir de estudios geológicos.

Recientemente, el tema de las inversiones de polaridad del campo magnético terrestre ha vuelto a adquirir una vital importancia debido a dos hechos. El primero se trata de la anomalía del Atlántico Sur (frecuentemente nombrada en la literatura como SAA [South Atlantic Anomaly]); esto es, la disminución del valor del campo magnético en una zona situada al sur del Océano Atlántico y cercana a las costas americanas (mostrada en la Figura 1). Aunque actualmente la SAA no presenta ningún riesgo para la población humana (si bien ya ha causado ciertos daños en satélites que sobrevuelan dicha área, como ocurrió con el satélite japonés Hitomi [12]), una de las hipótesis que se bajaran como causa de esta anomalía es el comienzo del proceso de inversión de los polos magnéticos ([13] y [14]).

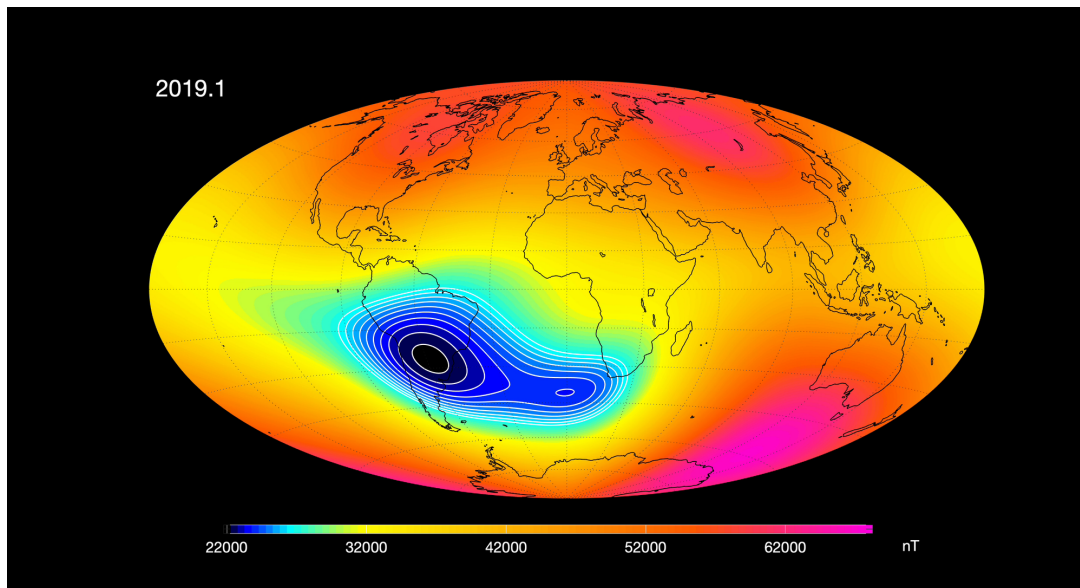


FIGURA 1 – Campo magnético en la superficie de la Tierra en enero de 2019. En la Anomalía del Atlántico Sur (color azul/ negro), el campo magnético es mucho más débil. Fuente: [15].

El segundo hecho es la aceleración que lleva experimentando el polo norte magnético desde finales del siglo pasado (Figura 2), pasando de una velocidad media de 0-15 km/año a una velocidad aproximada de 50-60 km/año [16]. Diversos grupos están investigando si existe la posibilidad de que vuelva gradualmente a la posición medida a finales del siglo XIX, situada en el Ártico Canadiense, o de que continúe su recorrido hacia el polo sur geográfico [17].

Estos hechos son una prueba de que aún estamos lejos de conocer por completo el mecanismo por el que se rige el campo magnético de la Tierra. El desconocimiento de la composición exacta del interior terrestre (concretamente, del núcleo), la imposibilidad de realizar mediciones in situ y las numerosas variables que juegan un papel en su comportamiento (entre ellos, los movimientos de convección en el núcleo, la rotación terrestre, y otros factores externos, como la propia Luna [18]) hacen que el estudio del geomagnetismo, especialmente el de las inversiones de polaridad magnética, tenga actualmente un fuerte interés. Con la puesta en marcha de nuevos experimentos de laboratorio (por ejemplo, el experimento de la dinamo de Dresde [19]), así como el lanzamiento de la misión SWARM [20] por parte de la Agencia Espacial Europea, es de esperar que se realicen, durante los próximos años, avances relevantes en el campo de la geofísica.

Dado este contexto, la finalidad de este trabajo es estudiar las inversiones de polaridad del campo magnético empleando dos modelos numéricos.

El primero de ellos es la dinamo de Robbins, una ampliación del modelo básico de dinamo autoinducida, conocida como *dinamo homopolar o de Bullard*. Mediante su simulación numérica a través de un método de Runge-Kutta de orden 5, es de esperar —bajo ciertos parámetros característicos en las ecuaciones que modelan dicho sistema— inversiones de la corriente eléctrica que circula por la dinamo. Por el propio funcionamiento del efecto dinamo, dichas inversiones tendrán una influencia directa en la orientación del campo magnético autoinducido.

El segundo modelo es la simulación de un fluido de Von Kármán a través de dos ecuaciones estocásticas, simuladas mediante el método de Euler-Maruyama. Estas ecuaciones han sido propuestas en las referencias [1], [2] y [3], basadas en el estudio del experimento VKS. Estas ecuaciones describen la evolución de la velocidad acimutal del fluido de Von Kármán a lo largo del tiempo. Una inversión en el sentido del movimiento de este fluido causará, de forma similar

al caso del modelo de dinamo de Robbins, un cambio en la polaridad del campo magnético inducido por el sistema.

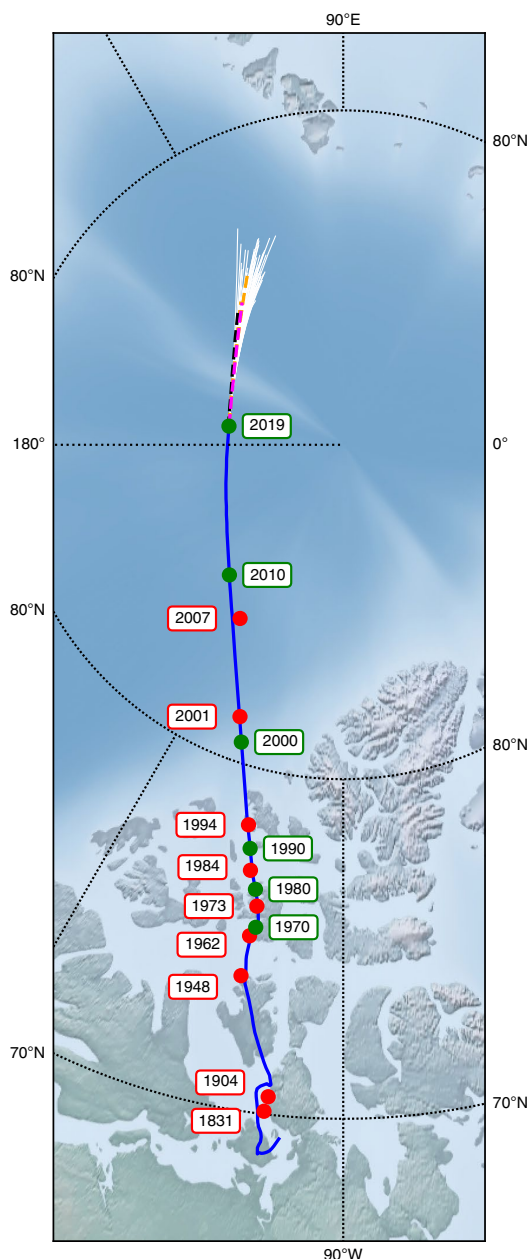


FIGURA 2 – Movimiento histórico y predicción del avance del polo norte magnético en proyección estereográfica. Línea azul continua: Evolución del polo de acuerdo con los modelos geomagnéticos COV-OBS.x1 (1840-1899) y CHAOS-6-X8 (1999-2019). Círculos verdes: Posiciones decenales recientes. Círculos rojos: Mediciones realizadas *in situ* (1831-2007). La línea Internacional del Cambio de Fecha viene marcada como una línea negra punteada en el meridiano 180°. A partir de 2019, y en líneas discontinuas, se indica la predicción para el período 2019-2029. Línea discontinua negra: Extrapolación de World Magnetic Model Version 2. Línea discontinua magenta: Extrapolación lineal de CHAOS-6-x8. Línea discontinua naranja: Extrapolación basada en un modelo puramente difusivo y basado en un ajuste de la variación secular geomagnética entre 2014-2019. Líneas blancas: Evolución del flujo congelado (en inglés, *frozen flux*) a partir de un conjunto de flujos medidos a gran escala. Imagen extraída de [16].

Este estudio se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se realizará una revisión bibliográfica de las características del campo magnético terrestre, la hipótesis de la dinamo y las ecuaciones MHD.

En el Capítulo 2 se explica el funcionamiento de algunos modelos de dinamo, entre ellos, el modelo de dinamo de Robbins, uno de los modelos que se analizarán en este trabajo.

En el Capítulo 3 se mencionarán las características principales de los experimentos de laboratorio y se resumirán brevemente los resultados obtenidos en los experimentos más relevantes de los últimos 20 años.

En los Capítulos 4 y 5 se realiza un análisis de los modelos de dinamo de Robbins y del fluido VK (respectivamente), así como una explicación en detalle de los resultados obtenidos. Además, se comparan dichos resultados con los publicados por otros autores y se aplican al

estudio de las inversiones de polaridad magnética.

Por último, en el Capítulo 6, se explicarán las conclusiones obtenidas a partir de este trabajo y se plantearán posibles vías de investigación en el campo del geomagnetismo para el futuro.

En los Anexos se incluyen los algoritmos empleados en la resolución de ambos modelos y un estudio de la convergencia del método de Euler-Maruyama.

OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es estudiar las inversiones de polaridad del campo magnético terrestre utilizando dos modelos: El modelo de la dinamo de Robbins (teórico) y un modelo basado en el comportamiento experimental de un fluido de Von Kármán (también llamado *fluido VK*), simulado numéricamente a través de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

Con ese fin, el trabajo ha sido organizado siguiendo unos objetivos específicos, agrupados a continuación según el capítulo del documento en el que se encuentren:

En el Capítulo 1 (*Introducción al magnetismo terrestre*):

- Realizar una revisión bibliográfica de las características más importantes de la estructura interna de la Tierra y su campo magnético.
- Plantear la hipótesis de la dinamo como posible explicación del geomagnetismo terrestre, así como mencionar la importancia que juega en ello el núcleo terrestre.
- Exponer las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (notadas habitualmente como MHD) como las usadas para simular un fluido conductor, como es el caso del núcleo externo de la Tierra.
- Incidir en la importancia de la componente poloidal del campo magnético, al ser la componente percibida desde la superficie terrestre y la empleada en la literatura para estudiar el geomagnetismo terrestre.
- Explicar brevemente la aparición de la componente poloidal del campo magnético a partir de corrientes o velocidades con movimiento acimutal; una corriente o velocidad en sentido negativo (dextrógiro) dará lugar a un campo magnético con una polaridad normal (actual) y, en sentido positivo (levógiro), creará un campo magnético con polaridad invertida.

En el Capítulo 2 (*Modelos para estudiar el efecto dinamo*), explicaremos algunos de los modelos de dinamo empleados usualmente en la literatura:

- Comprender la generación de un campo autoinducido mediante el efecto dinamo gracias al modelo de dinamo de Bullard (llamada también dinamo homopolar).
- Presentar la dinamo de Rikitake como un modelo teórico cuyas ecuaciones permiten la aparición de inversiones en las corrientes eléctricas que circulan por el sistema.
- Desarrollar de forma detallada la dinamo de Robbins mediante una descripción de su montaje y las ecuaciones que la describen.
- Describir brevemente algunos modelos de dinamos cinemáticas (dinamos de Ponomarenko y Roberts) como introducción a los experimentos de laboratorio y para facilitar una mejor comprensión de sus resultados.

En el Capítulo 3 (*Experimentos de laboratorio*):

- Enunciar las principales características de los experimentos de laboratorio realizados para crear campos magnéticos autoinducidos y resumir el estado del arte de los últimos experimentos con sodio líquido.
- Profundizar en los resultados obtenidos en el experimento VKS (Von Kármán Sodium) de Cadarache, al ser éste el experimento en el que basan las publicaciones que emplearemos para simular el fluido VK.

En el Capítulo 4 (*Estudio del modelo de la dinamo de Robbins*):

- Emplear un método de Runge Kutta de orden 5 y dos condiciones iniciales (en ocasiones puntuales, tres condiciones iniciales) para simular el modelo de la dinamo de Robbins.
- Realizar un estudio detallado del modelo de dinamo de Robbins a partir de las trayectorias en el espacio de fases y las evoluciones temporales del momento angular $\omega^*(t)$, la corriente $y(t)$ en el hilo y la corriente $z(t)$ en el disco.
- Comparar los resultados obtenidos con los presentados por la literatura.
- Graficar la función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para analizar las inversiones obtenidas y aplicar dicho resultado a las inversiones magnéticas terrestres.

En el Capítulo 5 (*Estudio de las inversiones de la velocidad en un flujo turbulento de Von Kármán*):

- Simular numéricamente un fluido de Von Kármán a partir de dos ecuaciones diferenciales estocásticas (presentadas por [1], [2] y [3]) y empleando el método de Euler-Maruyama.
- Presentar, dadas tres condiciones iniciales, los resultados obtenidos para la velocidad acimutal normalizada u_θ del fluido VK, representando gráficamente su evolución respecto del tiempo y las funciones de densidad de probabilidad.
- Comparar los resultados obtenidos en el modelo del fluido VK con otras publicaciones y aplicarlos al problema de las inversiones magnéticas terrestres.

Con todo lo anterior, introduciremos, como objetivo principal del trabajo y novedoso en la literatura, la estimación de las distribuciones (de las corrientes eléctricas y las velocidades de un fluido conductor) necesarias para reproducir —de forma aproximada— el registro histórico de inversiones magnéticas terrestres a partir del modelo de la dinamo de Robbins y un fluido turbulento de Von Kármán.

Con dicho fin, emplearemos las funciones de densidad de probabilidad (comúnmente abreviadas como FDP o PDF) obtenidas en la corriente $y(t)$ del hilo (en el caso del modelo de dinamo de Robbins) y en la velocidad acimutal normalizada u_θ (en el caso del fluido VK). Como ya se ha comentado, dichas variables, al presentar un movimiento acimutal, serán las que generen la componente poloidal en un campo magnético autoinducido por el efecto dinamo.

A la hora de buscar una distribución de corrientes o velocidades que se ajuste al patrón de inversiones magnéticas terrestres, tendremos en cuenta que, de acuerdo con la literatura, el registro de polaridades normales es mayor que el de polaridades invertidas. De este modo, en las FDP buscaremos distribuciones que favorezcan, ligeramente, corrientes $y(t)$ y velocidades acimutales normalizadas u_θ negativas (que giran en sentido dextrógiro).

Al realizar un estudio de todas las variables que aparecen en el modelo de la dinamo de Robbins, extenderemos el análisis de la dinamo de Robbins presentado por otras publicaciones.

Las referencias encontradas acerca de la dinamo de Robbins se suelen centrar únicamente en el comportamiento de la corriente $y(t)$ del hilo, al ser ésta la variable más importante en el estudio de la geodinamo.

Además, la simulación numérica del fluido de Von Kármán servirá como ampliación de las referencias [1], [2] y [3]. Dichas publicaciones están enfocadas en el estudio experimental del fluido VK y analizan de forma muy superficial las ecuaciones estocásticas que presentan.

Finalmente, concluiremos este trabajo mencionando algunos apuntes acerca de los resultados obtenidos para ambos modelos. Plantearemos, además, posibles nuevas vías de investigación en el campo de la Geofísica, y más concretamente, en el estudio de las inversiones magnéticas terrestres.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	III
INTRODUCCIÓN	V
OBJETIVOS	IX
ÍNDICE GENERAL	XII
ÍNDICE DE FIGURAS	XIV
1 INTRODUCCIÓN AL MAGNETISMO TERRESTRE	1
1.1. Estructura interna de la Tierra	1
1.2. Campo magnético terrestre	2
1.2.1. Descripción básica del campo magnético terrestre	2
1.2.2. Representación toroidal-poloidal (<i>torpol representation</i>)	4
1.2.3. Inversiones del campo magnético terrestre	4
1.3. Hipótesis de la dinamo	5
1.3.1. Introducción histórica y posibles causas	5
1.3.2. Teoría cinemática de la dinamo	6
1.3.3. Teorema de Alfvén	6
1.3.4. Teoremas antidinamo	7
1.4. Teoría MHD de la dinamo	7
1.4.1. Ecuaciones de la MHD	7
1.4.2. Teorema de Taylor-Proudman. Celdas de Taylor.	10
1.4.3. RMHD (Rotating Magnetohydrodynamics)	11
2 MODELOS PARA ESTUDIAR EL EFECTO DINAMO	15
2.1. Modelos de dinamo mecánica	15
2.1.1. Dinamo de Bullard (dinamo homopolar)	15
2.1.2. Dinamo de Rikitake	17
2.1.3. Dinamo de Robbins	18

2.2. Modelos de dinamo cinemática	19
3 EXPERIMENTOS DE LABORATORIO	21
3.1. Primeros experimentos y características generales de los últimos experimentos.	21
3.2. Experimento de la dinamo de Riga (1999-2000)	22
3.3. Experimento de la dinamo de Karlsruhe (1999-2000 aprox.)	23
3.4. Experimento VKS de Cadarache (2006)	24
3.5. Experimento de Dresde (2012-actualidad)	26
4 ESTUDIO DEL MODELO DE LA DINAMO DE ROBBINS	29
4.1. Ecuaciones adimensionales y regímenes del sistema	29
4.2. Método de Runge-Kutta	30
4.3. Resultados	30
4.3.1. Régimen I ($R < R_0$)	31
4.3.2. Régimen II ($R_0 < R < R_{SC}$)	33
4.3.3. Régimen III ($R_{SC} < R < R_{CC}$)	35
4.3.4. Régimen IV ($R_{CC} < R < R_C$)	39
4.3.5. Régimen V ($R > R_C$)	41
4.4. Interpretación de los resultados y aplicación a la geodinamo terrestre	44
5 ESTUDIO DE LAS INVERSIONES DE LA VELOCIDAD EN UN FLUJO TURBULENTO DE VON KÁRMÁN	47
5.1. Descripción del problema	47
5.2. Método de Euler-Maruyama	51
5.3. Resultados	52
5.3.1. Resultados para $\Delta = 0$ (Ecuación 5.8)	53
5.3.2. Resultados para $\Delta \neq 0$ (Ecuación 5.9)	54
5.4. Discusión de los resultados y aplicación a la geodinamo terrestre	59
6 CONCLUSIÓN	63
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
ANEXO	74
Algoritmo empleado para la resolución del modelo de dinamo de Robbins	74
Algoritmo empleado para el cálculo de la Ecuación 5.8	75
Algoritmo empleado para el cálculo de la Ecuación 5.9	76
Convergencia del método de Euler-Maruyama	77

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Campo magnético en la superficie de la Tierra en enero de 2019. En la Anomalía del Atlántico Sur (color azul/ negro), el campo magnético es mucho más débil. Fuente: [15].	VI
2.	Movimiento histórico y predicción del avance del polo norte magnético en proyección estereográfica. Línea azul continua: Evolución del polo de acuerdo con los modelos geomagnéticos COV-OBS.x1 (1840-1899) y CHAOS-6-X8 (1999-2019). Círculos verdes: Posiciones decenales recientes. Círculos rojos: Medidas realizadas <i>in situ</i> (1831-2007). La línea Internacional del Cambio de Fecha viene marcada como una línea negra punteada en el meridiano 180°. A partir de 2019, y en líneas discontinua, se indica la predicción para el período 2019-2029. Línea discontinua negra: Extrapolación de World Magnetic Model Version 2. Línea discontinua magenta: Extrapolación lineal de CHAOS-6-x8. Línea discontinua naranja: Extrapolación basada en un modelo puramente difusivo y basado en un ajuste de la variación secular geomagnética entre 2014-2019. Líneas blancas: Evolución del flujo congelado (en inglés, <i>frozen flux</i>) a partir de un conjunto de flujos medidos a gran escala. Imagen extraída de [16].	VII
1.1.	Esquema de la estructura interna terrestre. Imagen extraída de [21].	2
1.2.	Esquema simplificado del campo magnético terrestre. Nótese que la posición de los polos geográficos y magnéticos no coincide. La intensidad del campo magnético es máxima en los polos magnéticos y mínima en el ecuador magnético. Además, las líneas del campo magnético atraviesan la superficie de la Tierra en diferentes ángulos dependiendo de la latitud: 90° en el polo norte magnético (vector rojo), ≈ 67° en Alemania (vector amarillo), 0° en el ecuador magnético (vector azul), ≈ -64° en Sudáfrica (vector naranja) y -90° en el polo sur magnético (vector violeta). Fuente: [22].	3
1.3.	Representación gráfica de las componentes toroidal y poloidal del campo magnético en un cuerpo esférico. Imagen extraída de [23].	4
1.4.	Escala temporal con las polaridades en los últimos 160 millones de años. Negro: Polaridad normal (actual). Blanco: Polaridad invertida. Fuente: [24].	5
1.5.	Esquema de las coordenadas cilíndricas en el contexto del estudio de las ecuaciones MHD. En gris, contorno geostrófico. Imagen extraída de [25]	9
1.6.	Geometría básica del fluido situado entre el manto y el núcleo interno de la Tierra, rotando además con una velocidad angular Ω . Imagen extraída de [26].	9
1.7.	Fuente: Representación gráfica de los cilindros geostróficos situados alrededor del núcleo interno (izq.) y en el interior del cilindro tangente al núcleo interno (der.). Las fronteras esféricas que delimitan el núcleo externo e interno se encuentran ilustradas en gris claro. Fuente: [27].	11

1.8. Imagen (obtenida a partir de una simulación numérica) de las celdas de convección alineadas paralelamente respecto al eje de rotación. Las superficies amarillas y verdes representan las celdas con movimientos ciclónicos (con vorticidad $W_z > 0$) y anticiclónicos (con vorticidad $W_z < 0$), respectivamente. Fuente: [28].	12
1.9. Esquema (línea roja) de la posible trayectoria de una onda torsional (TW) a lo largo del núcleo externo y que parte desde la frontera ICB para dirigirse hacia la frontera CMB. La onda torsional se propaga de forma radial con oscilaciones en la dirección acimutal. La línea blanca muestra el cilindro geostrófico tangente al núcleo interno. Fuente: [29].	12
2.1. Esquema inicial de fuerzas en la dinamo homopolar. Fuente: [30].	16
2.2. Esquema de la dinamo homopolar incluyendo el campo autoinducido. Fuente: [30].	16
2.3. Esquema de la dinamo de Rikitake. Fuente: Wikipedia Commons.	17
2.4. (Izq.): Proyección del atractor de Rikitake en el plano (x, y, z) . (Der.): Proyección en el plano (x, y) . $\mu = 2$ y $\alpha = 5$. Fuente: [31].	18
2.5. Esquema de la dinamo de Robbins. Imagen tomada de [32].	19
2.6. (a) Movimiento del flujo en el modelo de dinamo de Ponomarenko. (b) Esquema del experimento de Riga. El fluido (sodio líquido) es impulsado hacia el recipiente por una hélice. Fuente: [33].	20
2.7. Movimiento del fluido en el modelo de dinamo de Roberts, indicado en las coordenadas x e y como líneas de corriente y, en la coordenada z con signos positivo (cruz en círculo) y negativo (punto en círculo). Fuente: [34].	20
3.1. Regiones en las que operan las simulaciones numéricas y los experimentos con sodio líquido y plasma en función del número de Reynolds hidrodinámico Re y magnético Rm . Imagen publicada en [35].	22
3.2. Montaje experimental del experimento de Riga y líneas del campo magnético simulado. Imagen extraída de [36].	23
3.3. Montaje experimental de la dinamo de Karlsruhe. (a) Estructura interna y distribución de velocidades. (b) Generador de vórtices (vortex generator). (c) Diseño técnico general. Fuente: [37].	24
3.4. Montaje del experimento VKS. Las estrellas azules marcan los puntos de medición. Para presentar los resultados del campo magnético \mathbf{B} obtenidos en dichos lugares, se emplean, o bien coordenadas cartesianas (B_x, B_y, B_z) (tal y como se indica en la figura), o coordenadas cilíndricas $-(B_r, B_\theta, B_x)-$. Fuente: [11].	24
3.5. (Imagen principal): Evolución temporal de las tres componentes de \mathbf{B} para unas frecuencias de los propulsores de $F_1 = 16$ Hz y $F_2 = 22$ Hz y el cilindro de cobre externo a una temperatura de $T = 123^\circ\text{C}$. Rojo: Componente acimutal B_θ . (Arriba): Cronología de la orientación del campo magnético para dos mediciones sucesivas de 900 s y 1800 s de duración, separadas por el área sombreada. La primera secuencia se corresponde con la mostrada en la imagen principal. Blanco: Orientación positiva. Negro: Orientación negativa. (Abajo): Evolución del valor de la potencia que genera el flujo. Fuente: [38].	25
3.6. Diseño del experimento de Dresde. Se intentará generar una dinamo a partir de un movimiento de precesión. El cilindro central rotante contendrá sodio líquido. Fuente: [19].	26
4.1. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$	32
4.2. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ para un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$	32

4.3. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ para un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$	32
4.4. Evolución de la corriente en el hilo $y(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	33
4.5. Evolución de la corriente en el disco $z(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	33
4.6. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	33
4.7. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	34
4.8. Evolución de la corriente en el hilo $y(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son: $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ (línea discontinua), $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ (línea continua) y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$ (línea punteada).	35
4.9. Evolución de la corriente en el disco $z(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son: $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ (línea discontinua), $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ (línea continua) y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$ (línea punteada).	35
4.10. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	35
4.11. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	36
4.12. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$	36
4.13. Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	36
4.14. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	37
4.15. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	37
4.16. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	38
4.17. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	38
4.18. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$	38
4.19. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	38
4.20. Diagrama de fase para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los detallados en la leyenda.	39
4.21. Diagrama de fase para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.75, 3.5, 3.5)$	39
4.22. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	40
4.23. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	40
4.24. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	40

4.25. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	40
4.26. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	41
4.27. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	41
4.28. Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.	41
4.29. Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	42
4.30. Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	42
4.31. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	42
4.32. Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	42
4.33. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	43
4.34. Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	43
4.35. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	43
4.36. Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	43
4.37. Evolución de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 100$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	44
4.38. Evolución de la corriente $z(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 100$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	44
4.39. Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	45
4.40. Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	45
4.41. Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.	46
4.42. Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.	46
5.1. Montaje experimental en los estudios [3], [1] y [2]. (a) Cilindro horizontal con propulsores, en el interior del tanque. El propulsor norte está situado en $z = H/2$, y el propulsor sur, en $z = -H/2$. (b) Fotografía del propulsor. (c) Esquema del propulsor sur visto desde el plano ecuatorial. El sentido de la rotación con el lado convexo fija una velocidad acimutal positiva. Imagen extraída de [2].	48
5.2. Esquema de (a) líneas de corriente, (b) campo vectorial medio y (c) vorticidad similares a las del flujo de Von Kármán que se genera en el montaje experimental. Imagen extraída de [39].	48

5.3. Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para tres valores $g = 1.5$, $g = 2$ (valor empleado en la simulación) y $g = 2.5$, empleando la Ecuación 5.4 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$ y $\epsilon = -0.05$ 50

5.4. Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para $\Delta = 0.0017$ y tres valores diferentes de κ , empleando la Ecuación 5.5 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$, $\epsilon = -0.05$ y $g = 2$ 51

5.5. Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ , empleando la Ecuación 5.5 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$, $\epsilon = -0.05$ y $g = 2$ 51

5.6. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta ini} = 0$ y $\Delta = 0$ 53

5.7. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta ini} = 1$ y $\Delta = 0$ 53

5.8. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t una velocidad inicial $u_{\theta ini} = -2$ y $\Delta = 0$ 54

5.9. Función de densidad de probabilidad con la frecuencia relativa de u_θ para $u_{\theta ini} = 0$, $u_{\theta ini} = 1$ y $u_{\theta ini} = -2$ con $\Delta = 0$ 54

5.10. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 20$ 55

5.11. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 200$ 55

5.12. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 500$ 55

5.13. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 20$ 56

5.14. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 200$ 56

5.15. Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 500$ 56

5.16. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ 58

5.17. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ 58

5.18. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 1$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ 58

5.19. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 1$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ 58

5.20. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = -2$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ 59

5.21. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = -2$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ 59

5.22. Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = -0.0017$ y cuatro valores diferentes de κ 61

1. Convergencia del error $e_i = \sup[|u_{\theta i}(h_i) - u_{\theta i}(h_{i+1})|]$ cometido por el método de Euler-Maruyama (empleado en la simulación del modelo estocástico en el Capítulo 5). 78

INTRODUCCIÓN AL MAGNETISMO TERRESTRE

En esta primera sección se realizará un resumen de las principales características del interior de la Tierra, concretamente del núcleo, y se mencionará de forma breve en qué consisten las inversiones de un campo magnético. Además, se explicarán los fundamentos de la hipótesis de la dinamo, la cual se cree que es el proceso responsable del origen y comportamiento del campo magnético terrestre. Dicha hipótesis se tratará, de una forma breve, mediante la teoría cinemática, y de forma más extensa, a través de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (ecuaciones MHD).

1.1 ESTRUCTURA INTERNA DE LA TIERRA

La Tierra es un cuerpo esférico con un radio medio de 6366 km, y cuya estructura interna, teniendo en cuenta su composición química y su profundidad, puede dividirse en las partes siguientes:

- Corteza (desde 0 km hasta $-30/-70$ km aprox.): Es la capa más externa y delgada, de espesor variable (dependiendo de si conforma un continente o se encuentra debajo del océano), y compuesta generalmente por rocas sedimentarias, magmáticas y metamórficas.
- Manto (desde $-30/-70$ km aprox. hasta -2900 km): Es la capa con el mayor volumen, compuesta por silicatos ricos en hierro y magnesio. Si bien las rocas en su interior se encuentran en estado sólido, las temperaturas que alcanzan son tan altas que pueden fluir en escalas de tiempo muy largas.
- Núcleo (desde -2900 km hasta -6366 km): La capa más densa, se cree que está compuesta en su mayor parte por hierro y níquel, con algunas trazas de sulfuros, silicatos y otros metales. Está dividida en dos zonas: Un *núcleo externo* (desde -2900 km hasta -5100 km) en estado líquido y un *núcleo interno* (desde -5100 km hasta -6366 km) en estado sólido.

Sin tener en cuenta la corteza externa, las divisiones entre distintas zonas (ilustradas en la [Figura 1.1](#)) se denominan:

- ICB (del inglés *Inner Core Boundary*): Límite entre el núcleo interno y el externo, situada a unos 5145 km de profundidad.
- CMB (del inglés *Core-Mantle Boundary*): Límite entre el manto y el núcleo externo, situado a 2886 km de profundidad.

A la hora de estudiar las inversiones del campo magnético terrestre, nos centraremos en la zona del núcleo, ya que es donde ocurren todos los fenómenos relacionados con la dinamo terrestre; asimismo, la frontera CMB jugará en ello un papel fundamental. Salvo que se indique lo contrario, el manto y la ICB no serán tenidas en cuenta.

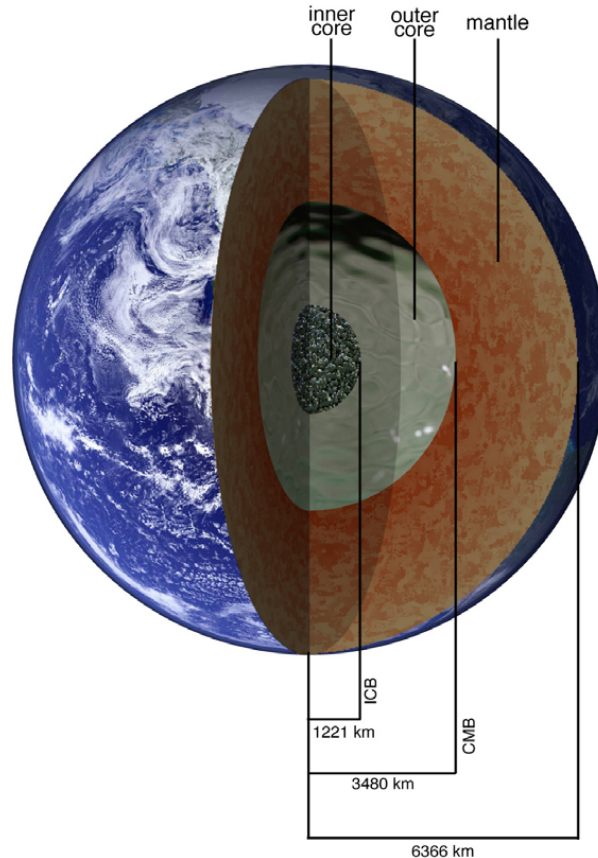


FIGURA 1.1 – Esquema de la estructura interna terrestre. Imagen extraída de [21].

1.2 CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

1.2.1 Descripción básica del campo magnético terrestre

El origen del magnetismo terrestre ha sido un campo de gran interés desde tiempos remotos, siendo Plinio el Viejo uno de los primeros en describir, en su obra *Enciclopedia*, el comportamiento atractor de la magnetita. No obstante, no fue hasta el siglo XIX cuando Gauss, a partir de descubrimientos previos como la Ley de Ampère y la inducción electromagnética, pudo realizar un primer análisis del campo magnético terrestre empleando armónicos esféricos.

Para ello, supuso a la Tierra como un cuerpo esférico de radio medio a y con una superficie mala conductora de corriente eléctrica. De este modo, el campo magnético $\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t)$ (expresado con coordenadas esféricas) en la posición $r = a$ cumple las siguientes condiciones:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

Por lo tanto, \mathbf{B} puede expresarse como el gradiente de un potencial escalar V que satisface la ecuación de Laplace:

$$\mathbf{B} = -\nabla V, \text{ para el que se cumple } \nabla^2 V = 0. \quad (1.2)$$

La solución general de la **Ecuación 1.2** en coordenadas esféricas es:

$$V(r, \theta, \phi, t) = V_{\text{int}} + V_{\text{ext}}, \quad (1.3)$$

siendo V_{int} el potencial creado por fuentes situadas por debajo de la superficie terrestre y V_{ext} el potencial creado por fuentes situadas por encima de la superficie —por ejemplo, las corrientes generadas en la ionosfera—.

Si nos situamos en la superficie terrestre, el comportamiento de \mathbf{B} es similar al que se produciría en la situación hipotética en la que se situase un dipolo magnético en el centro de la Tierra.

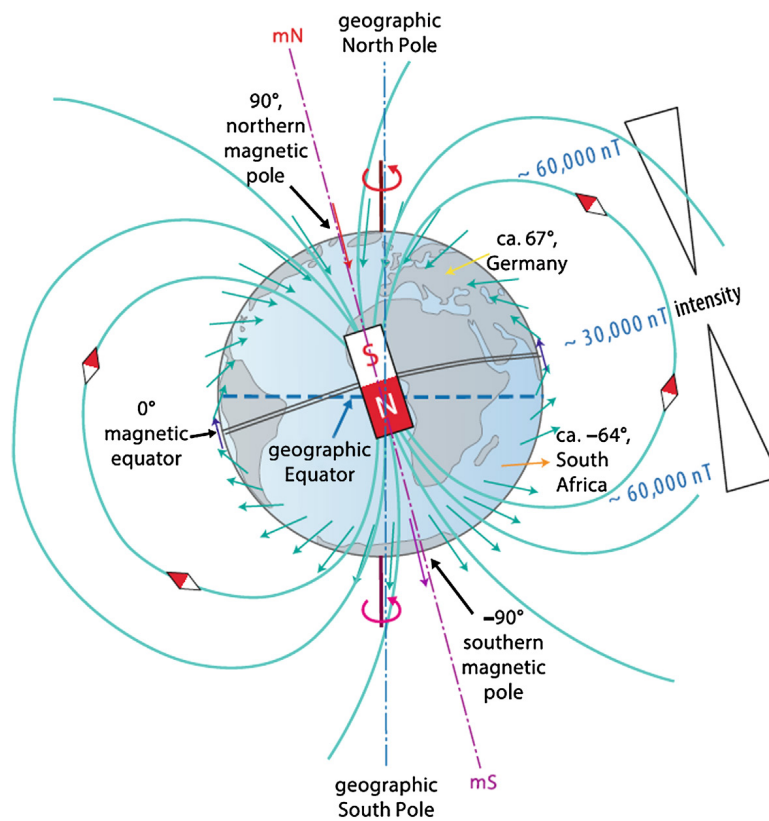


FIGURA 1.2 – Esquema simplificado del campo magnético terrestre. Nótese que la posición de los polos geográficos y magnéticos no coincide. La intensidad del campo magnético es máxima en los polos magnéticos y mínima en el ecuador magnético. Además, las líneas del campo magnético atraviesan la superficie de la Tierra en diferentes ángulos dependiendo de la latitud: 90° en el polo norte magnético (vector rojo), $\approx 67^\circ$ en Alemania (vector amarillo), 0° en el ecuador magnético (vector azul), $\approx -64^\circ$ en Sudáfrica (vector naranja) y -90° en el polo sur magnético (vector violeta). Fuente: [22].

Actualmente, el polo sur del dipolo se encuentra en las cercanías del polo norte geográfico, mientras que el polo norte del dipolo está cerca del polo sur geográfico (ver **Figura 1.2**). Cuando se produce una inversión del campo magnético terrestre (ver **Subsección 1.2.3**), el polo sur del dipolo pasa a estar cerca del polo sur geográfico, y viceversa.

Es importante mencionar para evitar confusiones que, por convenio, al polo sur del dipolo se le denomina *norte magnético* (por estar cerca del norte geográfico), mientras que al polo norte del dipolo se le llama *sur magnético*. A partir de ahora, seguiremos este convenio a la hora de tratar las polaridades magnéticas.

En la [Subsección 1.2.2](#), se explicará con más detalle la descomposición empleada para estudiar del campo magnético.

1.2.2 Representación toroidal-poloidal (*torpol representation*)

El artículo [40], a fin de caracterizar al campo magnético terrestre \mathbf{B} (y el de otros cuerpos estelares, p. ej. estrellas) de una forma más adecuada, propuso una representación toroidal-poloidal ([Figura 1.3](#)). Así, considerando a la Tierra como una esfera conductora, las expresiones de la componente toroidal y polar en las que se descompone el campo magnético \mathbf{B} son, respectivamente [41]:

$$\mathbf{B}_T = \nabla \times (T\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_S = \nabla \times [\nabla \times (S\mathbf{r})], \quad (1.4)$$

siendo $T(r, \theta, \phi, t)$ y $S(r, \theta, \phi, t)$ dos funciones escalares (toroidal y poloidal, resp.) arbitrarias. De este modo, y para mayor comodidad, podemos expresar el campo magnético terrestre total como la suma $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_S$ ([42]).

La parte toroidal \mathbf{B}_T del campo magnético presenta forma de anillo y no tiene componente radial [43]. Además, se encuentra confinada en el interior del núcleo terrestre —siendo las líneas del campo paralelas a la superficie del CMB—, por lo que no puede ser detectada en la superficie [44]. En cambio, el término poloidal \mathbf{B}_S sí presenta las tres componentes (radial, acimutal y colatitud) y puede ser detectada en la superficie terrestre. Este hecho tendrá un papel fundamental en el estudio del geomagnetismo, así como en el análisis que realizaremos, en los [Capítulos 4 y 5](#), de los resultados obtenidos en las simulaciones.

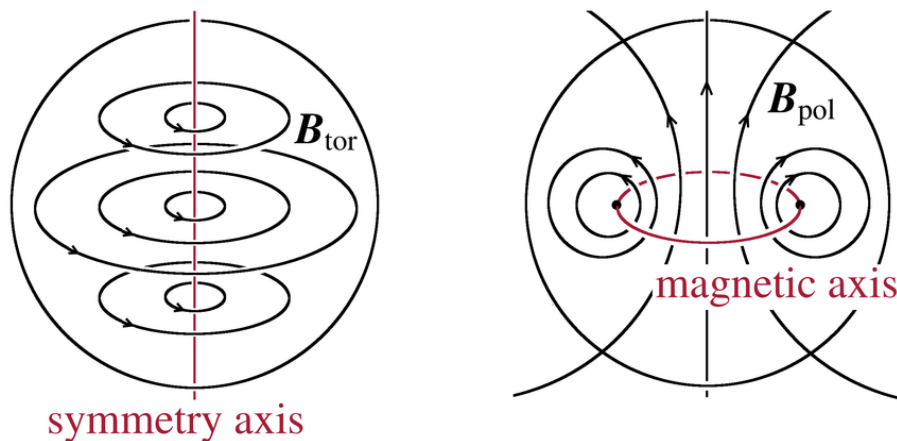


FIGURA 1.3 – Representación gráfica de las componentes toroidal y poloidal del campo magnético en un cuerpo esférico. Imagen extraída de [23].

1.2.3 Inversiones del campo magnético terrestre

Debido a los procesos geológicos que ocurren en la corteza, las rocas y los minerales situados cerca de o en la superficie terrestre —p. ej. la magnetita— pueden aportar información muy valiosa acerca del campo magnético en la época en la que estos elementos se crearon. Gracias al estudio de dichas rocas y minerales (y, en ocasiones, incluso con objetos arqueológicos), se puede obtener un registro de los cambios de polaridad a lo largo de la historia geológica de la Tierra, tal y como se observa en la [Figura 1.4](#).

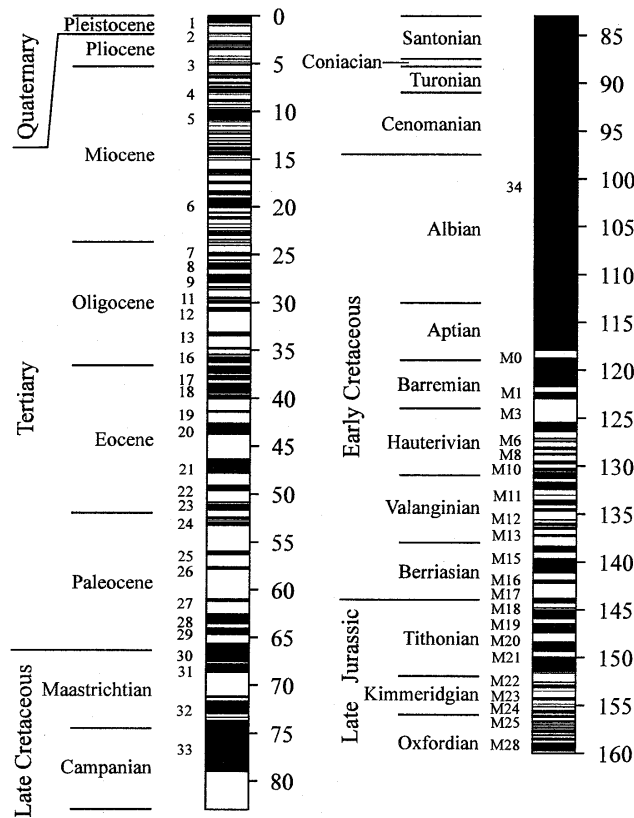


FIGURA 1.4 – Escala temporal con las polaridades en los últimos 160 millones de años. Negro: Polaridad normal (actual). Blanco: Polaridad invertida. Fuente: [24].

Se llama *polaridad normal* a la situación en la cual el norte magnético se encuentra en las cercanías del polo norte geográfico. Este estado de polaridad es el mostrado en la Figura 1.2 y el que presenta el campo magnético terrestre actualmente. Por el contrario, se denomina *polaridad invertida* al estado en el cual el polo norte magnético se encuentra en las cercanías del polo sur geográfico.

Los estados de polaridad —normal e invertido— pueden clasificarse principalmente, en función de su duración: En crones (una determinada polaridad dura aproximadamente 10^5 años, como el cron Matuyama durante el Pleistoceno) o en supercrones (una polaridad dura entre 10^7 y 10^8 años; por ejemplo, el supercrón del Cretácico con polaridad normal). En la Figura 1.4 se observa, además, que la polaridad normal (en color negro) ha sido la predominante a lo largo de la historia geológica de la Tierra.

Es importante mencionar también que las inversiones no se producen de forma espontánea, sino que tardan, según la referencia [21], un tiempo aproximado $t_{rev} = 1 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3$ años en producirse.

1.3 HIPÓTESIS DE LA DINAMO

1.3.1 Introducción histórica y posibles causas

Se conoce como "dinamo" a un instrumento que es capaz de generar electricidad, a partir de un flujo magnético, gracias al fenómeno de la inducción. Uno de los avances más importantes en el estudio de las dinamos fue realizado por el científico e inventor alemán Werner von Siemens (1816-1892), demostrando el funcionamiento y la viabilidad de una dinamo autoinducida [45]: Un sistema capaz de generar un campo magnético mediante las propias corrientes inducidas

que fueron creadas, en su origen, por un campo magnético externo inicial.

En 1919, Larmor propuso, en las publicaciones [8] y [7], el mecanismo de la dinamo como la solución al origen del campo magnético terrestre. Sin embargo, dicha teoría quedó durante un tiempo desestimada debido a la publicación del *Teorema de Cowling*, el cual dio lugar a la formulación de más teoremas antidinamo (ver [Subsección 1.3.4](#)). Posteriormente, se volvió a retomar la idea de Larmor ya que se consideraron dichos teoremas como no del todo aplicables al comportamiento físico y a la geometría de la Tierra.

El origen de la geodinamo, según las investigaciones más recientes, se cree causada por diversos movimientos de convección en el núcleo de la Tierra, explicados de forma breve en la referencia [25]. La convección térmica consiste en que, a medida que la Tierra va eliminando el calor acumulado en su núcleo, el fluido situado en las cercanías del núcleo interno es menos denso al estar a muy altas temperaturas, por lo que se vuelve inestable y asciende. De forma complementaria, mientras que el núcleo interno sólido va aumentando de tamaño por el enfriamiento progresivo del hierro líquido en el núcleo externo, los elementos más ligeros y menos densos ascienden (convección composicional). Por último, se produce también un proceso de enfriamiento adiabático: A medida que la presión sobre el hierro líquido disminuye con la ascensión, su volumen aumenta, bajando así también su temperatura.

1.3.2 Teoría cinemática de la dinamo

Para comenzar con un análisis sencillo de la dinamo terrestre, emplearemos la *teoría cinemática de la dinamo*, la cual consiste en, dada la velocidad \mathbf{u} de un fluido, calcular el campo magnético \mathbf{B} que genera dicho movimiento.

Para ello, consideramos, en primer lugar, la zona del núcleo terrestre. El hierro que la compone en su mayor parte, además de tratarse de un conductor con una conductividad eléctrica $\sigma = cte.$, se mueve con una velocidad \mathbf{u} muy inferior a la de la luz y presenta una permeabilidad magnética muy similar a la del vacío (por lo que se considerará $\mu = \mu_0$). De este modo, aplicando estas condiciones a las ecuaciones de las Leyes de Ampère y Faraday junto con la ecuación de la Ley de Ohm, obtenemos la *ecuación de inducción*:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (1.5)$$

siendo η la difusividad magnética.

Para simplificar la ecuación anterior, ignoraremos la solidez del núcleo interno y lo consideraremos únicamente compuesto por material fluido. Así, $\eta = cte$ y podemos reescribir la ecuación de la inducción alternativamente como:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

siendo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La ecuación muestra, por tanto, la variación de \mathbf{B} como un equilibrio entre la inducción electromagnética $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ y la difusión óhmica $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$.

1.3.3 Teorema de Alfvén

Si consideramos al fluido del núcleo como un conductor eléctrico perfecto, entonces el coeficiente de difusión es $\eta = 0$. Trasladando esto a la [Ecuación 1.6](#), la ecuación de inducción pasa a ser:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (1.7)$$

Ahora, consideremos una superficie $\Sigma(t)$ que corta todas las líneas de campo magnético encerradas en un volumen. Como consecuencia de la [Ecuación 1.7](#), se puede demostrar, de acuerdo con [\[46\]](#) y [\[47\]](#), que:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \eta = 0, \quad (1.8)$$

que quiere decir que el flujo magnético a través de la superficie $\Sigma(t)$ se mantiene constante en el tiempo.

En este sentido, el físico sueco Hannes Alfvén formuló el siguiente teorema, conocido como *Teorema de Alfvén* (ver referencias [\[48\]](#) y [\[49\]](#)):

Las líneas de campo magnético, en un fluido perfectamente conductor, permanecen congeladas y se mueven junto con dicho fluido.

Este teorema implica que un conductor perfecto no puede perder ni ganar flujo magnético (tal y como planteaba la [Ecuación 1.8](#)) y, además, que el campo magnético atrapado en un conductor perfecto nunca puede abandonarlo ([\[21\]](#) y [\[47\]](#)). Aunque el teorema no plantea cómo funciona la dinamo terrestre, resulta de gran ayuda a la hora de conocer el comportamiento del campo magnético, así como su origen y evolución en el fluido que compone el núcleo terrestre.

1.3.4 Teoremas antidinamo

A pesar de la aparente facilidad de modelar el magnetismo terrestre a través de una dinamo, existen varios teoremas que limitan el tipo y la forma de los campos magnéticos que pueden crear dichas dinamos.

El primero de los teoremas es el *Teorema de Cowling*, formulado en la publicación [\[50\]](#):

Un campo magnético axisimétrico no puede ser mantenido por el efecto dinamo.

A pesar de que este teorema planteó la posibilidad de que la teoría de la geodinamo fuese incorrecta, puede refutarse fácilmente al comprobarse numérica y experimentalmente que las dinamos automantidas en el tiempo nunca son perfectamente simétricas ([\[51\]](#)).

Otro de los principales teoremas antidinamo es el *Teorema de la velocidad toroidal* ([\[52\]](#) y [\[53\]](#)):

Un fluido incompresible que presenta un movimiento toroidal en una esfera conductora no puede mantener un campo magnético creado por efecto dinamo.

Un teorema relacionado con la componente toroidal es el presentado por [\[54\]](#), llamado *Teorema del campo toroidal* o *Teorema del campo invisible*:

No se puede mantener un campo magnético puramente toroidal mediante efecto dinamo.

En otras palabras, lo que expone este teorema es que el campo escalar toroidal $T(r, \theta, \phi, t)$, si satisface ciertas condiciones, decae con su norma en el caso de un volumen fluido esférico.

1.4 TEORÍA MHD DE LA DINAMO

1.4.1 Ecuaciones de la MHD

En la sección anterior hemos analizado la dinamo desde el punto de vista cinemático, donde la velocidad del fluido no se ve afectada por el campo magnético. En este apartado, por el contrario, analizaremos la dinamo mediante las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD), en las que se calculan el campo magnético \mathbf{B} y la velocidad \mathbf{u} dada una fuente de energía. Por supuesto, la teoría MHD engloba también la teoría cinemática de la dinamo, añadiendo, como veremos a continuación, la [Ecuación 1.5](#) a las ecuaciones MHD.

Aparte, recordando la **Sección 1.3** —en donde se resumían los procesos que generaban el efecto dinamo— consideraremos que la dinamo funciona únicamente mediante convección termal, sin tener en cuenta la convección composicional y el enfriamiento adiabático. Así, aplicaremos la aproximación de Boussinesq, que consiste en ignorar las variaciones de cualquier propiedad del fluido excepto la de la densidad. Además, de acuerdo con [55], la densidad se toma como una constante ($\rho = \text{cte.}$) salvo que aparezca en un término multiplicada por la gravedad g .

Con la aproximación de Boussinesq, y para un fluido en rotación, las ecuaciones MHD, expresadas en coordenadas cilíndricas (r, θ, z, t) —ver **Figura 1.5**—, son las siguientes [30]:

- Conservación de la masa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.9)$$

- Campo magnético no divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

- Ecuación de la inducción:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.11)$$

- Ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi + g_0\gamma T \frac{\mathbf{r}}{r_0} + \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.12)$$

- Ecuación de la energía

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + Q \quad (1.13)$$

En el lado izquierdo de la ecuación de Navier-Stokes (**Ecuación 1.12**), la derivada material $D\mathbf{u}/Dt$ representa la inercia y el término $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ es la fuerza de Coriolis, donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema en rotación. En el lado derecho, el primer término representa el efecto de la presión reducida Π :

$$\Pi = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2, \quad (1.14)$$

el segundo término está relacionado con la flotabilidad del fluido —siendo γ el coeficiente de expansión termal—, el tercer término se corresponde con las fuerzas de Lorenz y el cuarto representa el efecto de las fuerzas viscosas por unidad de masa —con un coeficiente de viscosidad ν —.

En cuanto a la ecuación de la energía (**Ecuación 1.13**), el coeficiente κ representa la difusividad termal, mientras que Q es un término que agrupa las tasas de disipación óhmica, por radiactividad y por viscosidad. De forma general, y de ahora en adelante, consideraremos $Q = 0$.

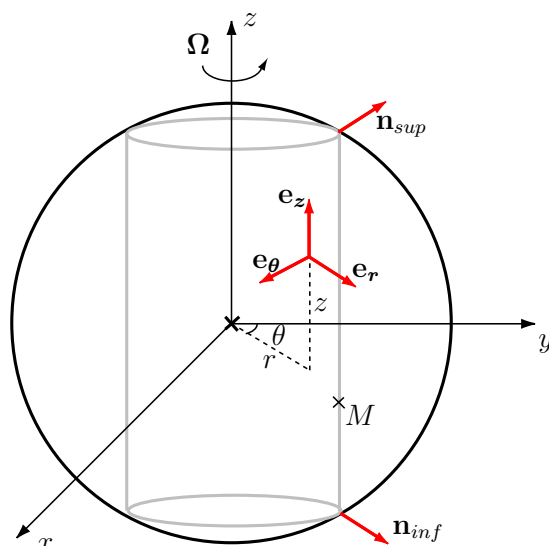


FIGURA 1.5 – Esquema de las coordenadas cilíndricas en el contexto del estudio de las ecuaciones MHD. En gris, contorno geostrófico. Imagen extraída de [25]

Muchos autores, como por ejemplo [25] y [26], prefieren trabajar con las ecuaciones MHD en su forma adimensional. Para ello, consideramos el fluido situado en la parte externa del núcleo terrestre, exactamente entre los límites CMB y ICB —tal y como se muestra en la Figura 1.6—. La frontera CMB se encuentra a una distancia r_0 y a una temperatura T_0 , mientras que la frontera ICB está a r_i y a una temperatura $T_i = T_0 + \Delta T$.

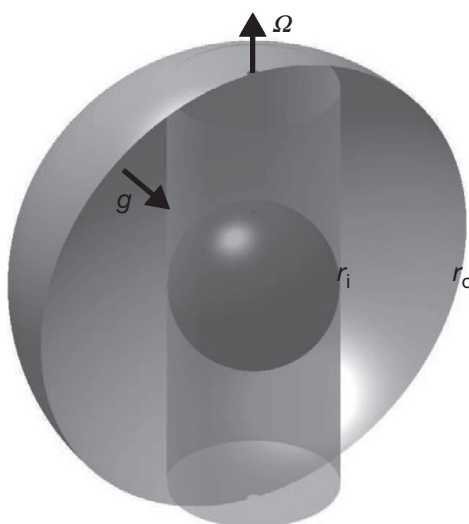


FIGURA 1.6 – Geometría básica del fluido situado entre el manto y el núcleo interno de la Tierra, rotando además con una velocidad angular Ω . Imagen extraída de [26].

Posteriormente, es necesario escalar las ecuaciones, para lo que tomaremos las siguientes escalas: $D = r_0 - r_i$ (escala de longitud), D^2/ν (escala temporal), ΔT (escala de temperatura) y $\sqrt{\rho\mu\eta\Omega}$ (escala de la inducción magnética). De este modo, las ecuaciones MHD adimensionales son:

- Ecuación de la inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\text{Pm}} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.15)$$

- Ecuación de la energía

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T \quad (1.16)$$

- Ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{2}{E} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\frac{1}{E} \nabla \Pi + \text{Ra} T \frac{\mathbf{r}}{r_0} + \frac{1}{\text{Pm}E} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.17)$$

Las ecuaciones de conservación de la masa y del campo magnético no divergente presentan las mismas expresiones. Las definiciones de cada una de las constantes y los parámetros se encuentran en las [Tablas 1.1](#) y [1.2](#).

Por último, las condiciones de contorno que deben cumplir las ecuaciones MHD son:

- El núcleo interno gira a la misma velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ que el manto, por lo que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en las fronteras CMB y ICB (condición de no deslizamiento).
- La temperatura en las fronteras CMB y ICB es constante ($T_0 = cte$ y $T_i = cte$, resp.). Además, $\Delta T = T_i - T_0 = cte$.

En las siguientes subsecciones, analizaremos algunas de las principales propiedades de los fluidos en rotación en base a simplificaciones de la ecuación de Navier-Stokes.

1.4.2 Teorema de Taylor-Proudman. Celdas de Taylor.

En primer lugar, suponemos que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e ignoramos también la flotabilidad, por lo que $g_0 = 0$. Aparte, al analizar los valores que presentan los números de Ekman y de Rossby en el núcleo terrestre, es notable su valor extremadamente bajo — $E = 10^{-15}$, $Ro = 10^{-6}$ según la referencia [\[21\]](#)—, lo que significa que el término de la fuerza de Coriolis en la [Ecuación 1.12](#) es dominante respecto de las fuerzas viscosas y de inercia. Con todo ello, si se toma también el modo geostrófico (para el cual el término restante en la ecuación de Navier-Stokes es $\partial_t \mathbf{u} = 0$), la [Ecuación 1.12](#) queda como:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi, \quad \text{con } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.18)$$

Lo que implica que $\partial_z \mathbf{u} = 0$ y, como consecuencia, dichos movimientos no pueden transmitir calor fuera del núcleo mediante convección. Esto es lo que se conoce como *Teorema de Taylor-Proudman*, enunciado en [\[56\]](#) y [\[57\]](#):

El movimiento lento que presenta un fluido rotante es bidimensional con respecto al eje de rotación.

Como consecuencia, el flujo sometido al modo geostrófico presenta un movimiento en forma de cilindro alrededor del eje de rotación, tal y como se aprecia en la [Figura 1.7](#).

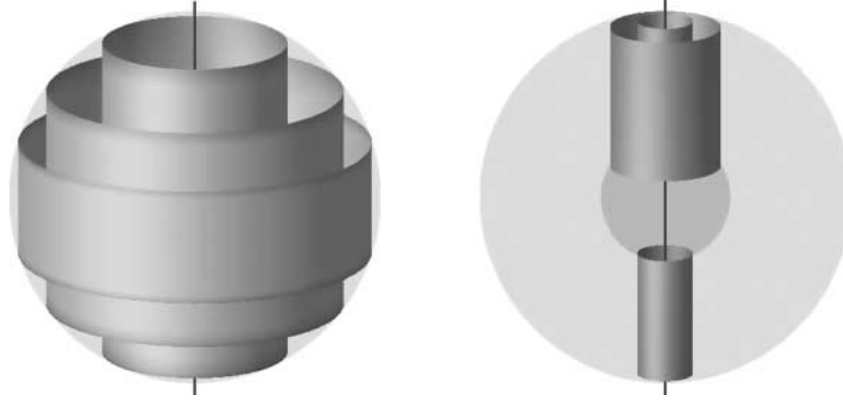


FIGURA 1.7 – Fuente: Representación gráfica de los cilindros geostróficos situados alrededor del núcleo interno (izq.) y en el interior del cilindro tangente al núcleo interno (der.). Las fronteras esféricas que delimitan el núcleo externo e interno se encuentran ilustradas en gris claro. Fuente: [27].

Para estudiar el movimiento convectivo, añadimos en la [Ecuación 1.18](#) el término relacionado con el viento termal, una medida de la flotabilidad del fluido que se puede expresar como una distribución de temperaturas:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi + g_0\gamma T \frac{\mathbf{r}}{r_0} \quad (1.19)$$

Cuando dicha distribución presenta un número de Rayleigh superior al crítico ($Ra > Ra_C$), la transmisión de calor a través del fluido vía convección supera a la transmisión por conducción. No obstante, ésta no es condición suficiente para que se produzca convección hacia fuera del núcleo: Como el movimiento geostrófico no presenta parte radial —recordando el *Teorema de Taylor-Proudman*— es imprescindible que las fuerzas viscosas deban ser lo suficientemente elevadas y poder eliminar así esta limitación en el movimiento. Se crean así las llamadas *celdas de Taylor* [58], formadas alrededor del eje de rotación y mostradas en la [Figura 1.8](#). Cuando son adyacentes, rotan en direcciones opuestas. En estas condiciones, $Ra_c = \mathcal{O}(E^{-4/3})$ y el número de celdas de Taylor es $\mathcal{O}(E^{-1/3})$.

1.4.3 RMHD (Rotating Magnetohydrodynamics)

Para obtener una ecuación similar a la [Ecuación 1.19](#), pero algo más parecida al comportamiento del fluido en el núcleo terrestre, debemos considerar la presencia de un campo magnético $\mathbf{B} \neq 0$ y el límite $E \rightarrow 0$, lo que se traduce en añadir el término correspondiente a la fuerza de Lorentz. Esta ecuación es la que gobernará el conocido como *flujo magnetostrófico*:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi + g_0\gamma T \frac{\mathbf{r}}{r_0} + \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} \quad (1.20)$$

Integrando la [Ecuación 1.20](#) en las superficies de los cilindros geostróficos C teniendo en cuenta que la velocidad en la frontera CMB no presenta componente radial, se obtiene que [59]:

$$\int_C (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_{\Phi} dS = 0. \quad (1.21)$$

Dicho resultado se conoce como la *condición de Taylor* (*Taylor's constraint*, enunciado por primera vez en [60]):

El torque magnético de cualquier superficie cilíndrica paralela al eje de rotación debe anularse. o, dicho en otras palabras, la componente acimutal de fuerza de Lorentz evaluada en una superficie cilíndrica paralela al eje de rotación desaparece.

Cuando el flujo deja de cumplir esta condición, surgen las llamadas *ondas torsionales*, las cuales se cree que tienen una cierta influencia en la duración de los días. Estas ondas tienden a disiparse gracias a las fuerzas de Lorentz, que restauran el flujo de nuevo al estado inicial (para mayor información, se recomienda consultar la referencia [61]). Un esquema básico de la trayectoria que sigue una onda torsional se encuentra en la **Figura 1.9**.

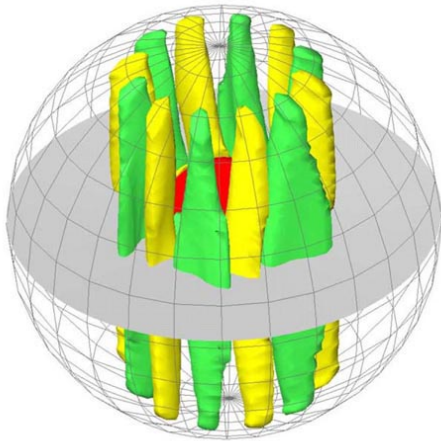


FIGURA 1.8 – Imagen (obtenida a partir de una simulación numérica) de las celdas de convección alineadas paralelamente respecto al eje de rotación. Las superficies amarillas y verdes representan las celdas con movimientos ciclónicos (con vorticidad $W_z > 0$) y anticiclónicos (con vorticidad $W_z < 0$), respectivamente. Fuente: [28].

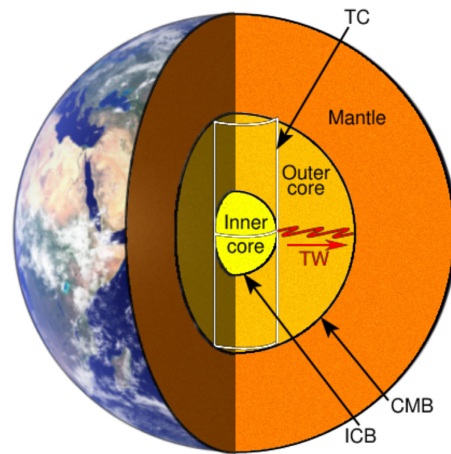


FIGURA 1.9 – Esquema (línea roja) de la posible trayectoria de una onda torsional (TW) a lo largo del núcleo externo y que parte desde la frontera ICB para dirigirse hacia la frontera CMB. La onda torsional se propaga de forma radial con oscilaciones en la dirección acimutal. La línea blanca muestra el cilindro geostrofico tangente al núcleo interno. Fuente: [29].

En este capítulo hemos explicado los fundamentos más básicos acerca del magnetismo y la estructura interna de la Tierra. Hemos realizado también una introducción a la hipótesis de la dinamo —que es la aceptada en la actualidad para justificar el comportamiento del campo magnético terrestre—, y cuyos fenómenos asociados ocurren en la zona del núcleo. Además, hemos presentado las ecuaciones MHD, encargadas de modelar el comportamiento de un fluido conductor de la electricidad (como es el caso del núcleo externo terrestre).

En los siguientes capítulos veremos diferentes modelos de dinamo y se simularán dos de ellos (dinamo de Robbins y fluido VK). En concreto, aplicaremos los resultados obtenidos al problema de las inversiones magnéticas terrestres (**Subsección 1.2.3**) estudiando, para ello las corrientes eléctricas (dinamo de Robbins) y las velocidades de un fluido VK que presenten un movimiento acimutal, al ser las que generen la componente poloidal del campo magnético (**Subsección 1.2.2**). Como ya se ha comentado, la componente poloidal, al poder medirse desde la superficie terrestre, es la usualmente empleada por la literatura a la hora de estudiar el campo magnético.

Siguiendo un criterio de signos para el cual una variable es positiva al girar en sentido levógiro, y negativa cuando el movimiento sea en sentido dextrógiro, gracias a la Ley de Ampère, observamos que la polaridad magnética actual es similar a la creada por una corriente eléctrica (o fluido conductor) con signo negativo. Análogamente, un campo magnético con polaridad invertida será creado por una corriente eléctrica o velocidad con signo positivo. Por ello, para analizar los estados invertidos del campo magnético, se estudiarán las distribuciones que presentan las corrientes o velocidades con sentido positivo (con movimiento contrario al de las agujas del reloj).

Recordando de nuevo la [Subsección 1.2.3](#), se ha visto que el estado actual del campo magnético terrestre es el de polaridad normal, que coincide con el de mayor duración teniendo en cuenta el registro de polaridades. Por ello, para comparar los resultados obtenidos en los modelos de la dinamo de Robbins y en el fluido de Von Kármán con el historial de polaridades magnéticas terrestres, buscaremos distribuciones que presenten una ligera preferencia hacia corrientes eléctricas o velocidades negativas, es decir, que realicen un movimiento en sentido dextrógiro.

Símbolo	Nombre número	Definición	Balance fuerzas	Valor núcleo Tierra
Ra	Rayleigh	$(g_0 D \cdot \gamma \cdot \Delta T) / (\nu \kappa)$	Flotabilidad/difus.	10^9
E	Ekman	$\nu / \Omega D^2$	Viscosidad/ Coriolis	10^{-15}
Pr	Prandtl	ν / κ	Viscosidad/Difus. termal	0.1
Pm	Prandtl magnético	ν / η	Viscosidad/Difus. magnética	$1.7 \cdot 10^{-6}$
Re	Reynolds	uD / ν	Inercia/Viscosidad	$9 \cdot 10^8$
Rm	Reynolds magnético	ud / η	Inducción/Difus. magnética	1300
Ro	Rossby	$u / \Omega d$	Inercia/Coriolis	10^{-6}
Λ	Elsasser	$B^2 / \mu \rho \eta \Omega$	Lorentz/Coriolis	10

TABLA 1.1 – Parámetros adimensionales básicos y sus respectivos valores en el núcleo terrestre. Fuentes: [21] y [46].

Símbolo	Nombre	Valor	Unidades (SI)
D	Diferencia radios CMB-ICB	$2.26 \cdot 10^6$	m
r_0	Radio frontera CMB	$3.48 \cdot 10^6$	m
r_i	Radio frontera ICB	$1.22 \cdot 10^6$	m
u	Módulo velocidad típica fluido	$4 \cdot 10^{-4}$	$m s^{-1}$
Ω	Módulo velocidad angular terrestre	$7.29 \cdot 10^{-5}$	s^{-1}
η	Difusividad magnética	0.7	$m^2 s^{-1}$
ν	Viscosidad cinemática	10^{-6}	$m^2 s^{-1}$
κ	Difusividad termal	10^{-5}	$m^2 s^{-1}$
g_0	Aceleración gravitatoria en CMB	10,68	$m s^{-2}$
γ	Coefficiente expansión termal	10^{-5}	K^{-1}
ΔT	Diferencia temperaturas ICB-CMB	1300	K
B	Fuerza campo magnético típica	$3 \cdot 10^{-3}$	T
μ_0	Permeabilidad magnética	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$H m^{-1}$
ρ	Densidad núcleo	$1.1 \cdot 10^4$	$kg m^{-3}$

TABLA 1.2 – Propiedades físicas básicas y sus respectivos valores en el núcleo terrestre. Fuente: [21].

MODELOS PARA ESTUDIAR EL EFECTO DINAMO

En este capítulo explicaremos, primeramente, los modelos de dinamo mecánica más importantes, descritos a través de ecuaciones diferenciales: Las dinamos homopolar (o de Bullard), de Rikitake y de Robbins. Posteriormente, mencionaremos de forma breve algunos modelos de dinamo cinemáticas, cuya descripción es mucho más compleja al regirse por las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, y son los empleados en los dispositivos experimentales que estudian el campo magnético y el efecto dinamo.

2.1 MODELOS DE DINAMO MECÁNICA

En la [Sección 1.3](#) se explicó que la hipótesis de la dinamo estudia el proceso por el cual un fluido conductor (en el caso de la Tierra, el núcleo externo líquido), sometido a movimientos de rotación y convección, puede mantener un campo magnético autoinducido sin disiparse. Para estudiar el efecto dinamo terrestre, se deben emplear las ecuaciones MHD descritas en la [Subsección 1.4.1](#), siendo las variables la presión y los campos magnético, de temperatura y de velocidades.

Debido a que la resolución de las ecuaciones MHD es muy complicada, existen algunos modelos que aproximan dichas ecuaciones de forma teórica, llamados *dinamos mecánicas*. En esta sección, explicaremos algunos de los modelos de dinamos mecánicas más importantes, cuyo comportamiento es descrito a través de ecuaciones diferenciales y su resolución mediante simulaciones es más sencilla que la de las ecuaciones MHD.

2.1.1 *Dinamo de Bullard (dinamo homopolar)*

El primer modelo de dinamo que desarrollaremos será el de la *dinamo homopolar*, que, si bien no es el más adecuado para explicar el funcionamiento del campo magnético terrestre, al tratarse del modelo más simple nos ayudará a comprender la aparición del campo magnético autoinducido y como introducción a otros modelos más complejos.

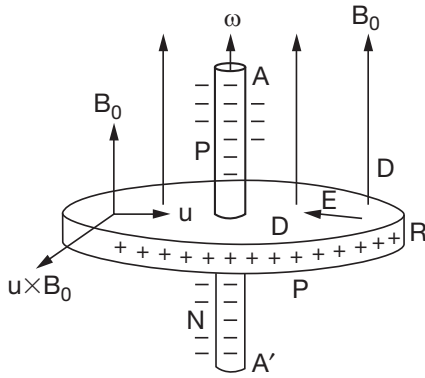


FIGURA 2.1 – Esquema inicial de fuerzas en la dinamo homopolar. Fuente: [30].

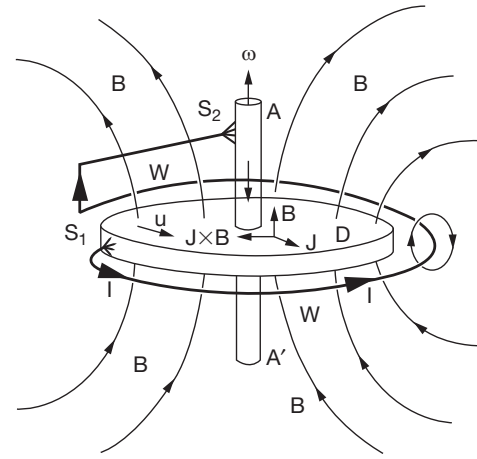


FIGURA 2.2 – Esquema de la dinamo homopolar incluyendo el campo autoinducido. Fuente: [30].

El planteamiento de la dinamo homopolar es el siguiente [30]. Se tiene un disco sólido conductor rotando, con una velocidad $\omega = \omega \mathbf{e}_z$, alrededor de un eje de simetría. En dicho eje de simetría se sitúa también una barra conductora, sobre la cual se aplica un campo magnético inicial \mathbf{B}_0 paralelo a ella —ver Figura 2.1—. Finalmente, conectamos la barra y el disco rotante entre sí con un hilo conductor cuyo plano se encuentra alrededor del disco. De acuerdo con la ley de Lenz-Faraday, al rotar el disco alrededor de \mathbf{B}_0 , y por la acción de las fuerzas de Lorentz ($\mathbf{F} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$) sobre las cargas de los dos conductores, se genera una corriente I hacia afuera del disco, y que discurre por el hilo conductor.

Por la Ley de Ampère, la corriente a lo largo del hilo crea, a su vez, un campo magnético \mathbf{B} en la misma dirección que \mathbf{B}_0 , reforzándolo, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.2. Si la velocidad de giro supera un valor crítico ω_C , la fuerza electromotriz generada por el campo inducido \mathbf{B} es suficiente para mantener el movimiento de las cargas y, por tanto, la circulación de la corriente I —pudiendo eliminar así el campo magnético inicial \mathbf{B}_0 del sistema—. En esta situación, hablaremos de una dinamo autoinducida.

No obstante, el desarrollo anterior presenta un problema: Si aumentamos ω por encima de su valor crítico, es de esperar que el campo inducido \mathbf{B} crezca indefinidamente ya que la energía magnética debido a la rotación del disco es mayor que la resistividad eléctrica del circuito. Sin embargo, esto no ocurre gracias a las fuerzas parasitarias de Lorentz, $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, las cuales se oponen a la dirección de rotación del disco \mathbf{u} . De este modo, cuando la velocidad de rotación es igual a la crítica, $\omega = \omega_C$, se crea un momento de fuerza Γ_B igual y opuesto al momento de fuerza Γ_D que mantiene al disco en rotación. Si aumentamos el valor de ω , el momento de fuerza del disco aumentará, pero también lo hará el campo magnético inducido \mathbf{B} , por lo que Γ_B también será mayor y acaba compensando a Γ_D .

Las ecuaciones diferenciales mediante las que se rige el modelo de dinamo de Bullard son las siguientes [47]:

$$C \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_D - MI^2 \quad (2.1)$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = M \frac{d\omega}{dt} \frac{dI}{dt}, \quad (2.2)$$

donde C y Γ_D son los módulos de los momentos de inercia y de fuerza del disco, ω es la velocidad angular, I es la corriente y $2\pi M$ es la inductancia mutua entre el disco y el hilo. L y R representan la inductancia y la resistencia del hilo, respectivamente.

2.1.2 *Dinamo de Rikitake*

Como se comentó en el apartado anterior, algunas de los inconvenientes que presenta la dinamo homopolar es su excesiva sencillez, que no permite aplicar geometrías ni condiciones de contorno similares a las del núcleo terrestre. Por ello, se emplean modelos más completos, como por ejemplo el modelo de dinamo de Rikitake ([62] y [63]). A pesar de ser algo más complejo que el modelo de la dinamo homopolar, el modelo de la dinamo de Rikitake permite, en cierto modo, simular las condiciones del núcleo gracias a los parámetros adicionales que incluyen sus ecuaciones.

La dinamo de Rikitake consiste en dos discos acoplados entre sí por hilos conductores, con velocidades Ω_1 y Ω_2 , que giran en torno a una barra conductora, de forma similar a la dinamo homopolar (ver Figura 2.3).

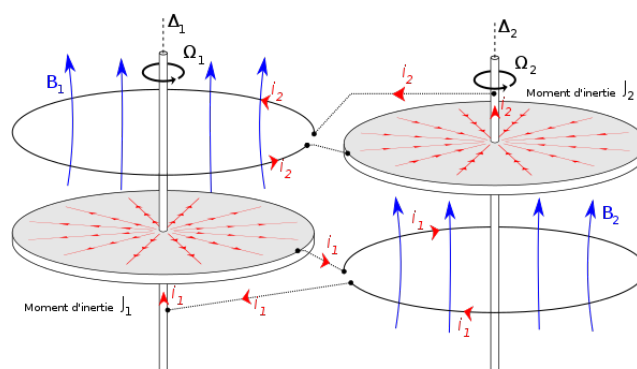


FIGURA 2.3 – Esquema de la dinamo de Rikitake. Fuente: Wikipedia Commons.

Sean las corrientes en los hilos conductores x y y , y notando los módulos de las velocidades angulares de cada uno de los discos (izq. y der., resp.) como $\Omega_1 = z$ y $\Omega_2 = z'$, las ecuaciones adimensionales que rigen este modelo de dinamo son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = -\mu x + zy, \quad \frac{dy}{dt} = -\mu y + z'x, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 1 - xy, \quad (2.3)$$

con $z' = z + \alpha$. μ es la disipación resistiva y α , la diferencia entre las velocidades angulares de los discos.

Dichas ecuaciones presentan un comportamiento caótico, oscilando en torno a valores positivos y negativos en los ejes x y y (Figura 2.4). Esto prueba que la dinamo de Rikitake es capaz, de forma simplificada, de reproducir las inversiones del campo magnético de la Tierra.

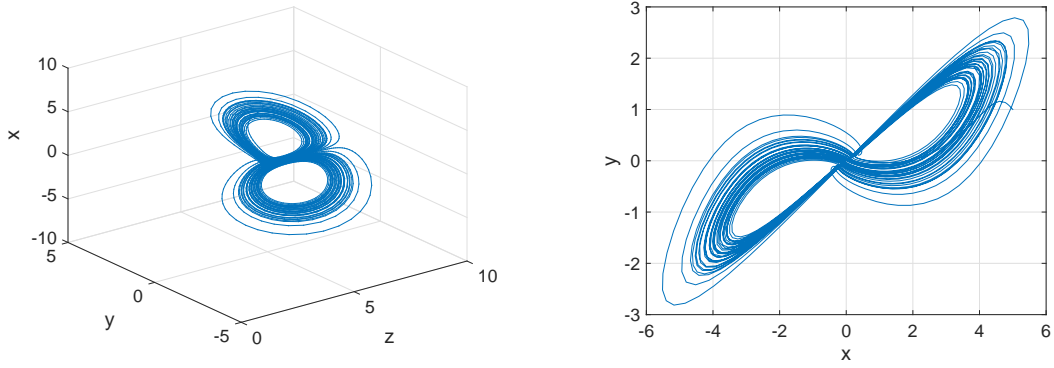


FIGURA 2.4 – (Izq.): Proyección del atractor de Rikitake en el plano (x, y, z) . (Der.): Proyección en el plano (x, y) . $\mu = 2$ y $\alpha = 5$. Fuente: [31].

2.1.3 Dinamo de Robbins

Uno de los modelos tridimensionales más conocidos de dinamo y mediante el cual se puede realizar una buena simplificación del comportamiento de la dinamo terrestre es el la dinamo de Robbins ([32] y [64]). Este modelo, de forma parecida a la dinamo de Rikitake, se construye a partir de pequeñas modificaciones en el diseño de la dinamo homopolar:

La corriente $z(t)$ en el disco conductor es eliminada conectando unas escobillas (*brush*, en inglés) —con una cierta inductancia y resistencia— y un hilo —también conductor— en el extremo. El hilo se encuentra alineado con respecto al disco de tal manera que la corriente $y(t)$ que circula por él es capaz de producir un campo magnético extra, el cual se suma al creado por el disco y al aplicado inicialmente. Cuando la corriente $y(t)$ cambie de dirección debido a la diferencia de fases entre $y(t)$ y $z(t)$ que causa la presencia de las escobillas, se producirá una inversión en el signo del campo magnético.

En relación a la descomposición del campo magnético vista en la Subsección 1.2.2, el campo creado por el hilo \mathbf{B}_H será la componente poloidal, mientras que el campo \mathbf{B}_D generado por la corriente en el eje será la componente toroidal.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la dinamo de Robbins en función de los diferentes elementos que la conforman se encuentran referenciadas en [64], y son las siguientes:

$$C \frac{d\omega}{dt} = T - Mzy - \xi\omega \quad (2.4)$$

$$L_E \frac{dz}{dt} = (M\omega + \rho_S)y - (\rho_E + \rho_S)z \quad (2.5)$$

$$L_H \frac{dy}{dt} = \rho_S z - (\rho_H + \rho_S)y, \quad (2.6)$$

donde $\omega(t)$ representa la velocidad angular del disco, $z(t)$ es la corriente en el disco conductor, $y(t)$ es la corriente en el hilo y T es el torque. En cuanto a los parámetros constantes, M es la inductancia mutua; C , el momento de inercia; ξ , el coeficiente de rozamiento; ρ , la resistividad y L , la inductancia. Los subíndices H , E y S se refieren al hilo, la escobilla y a un hilo que desvía la corriente (*shunt* en inglés), respectivamente. El esquema de la dinamo de Robbins se muestra en la Figura 2.5.

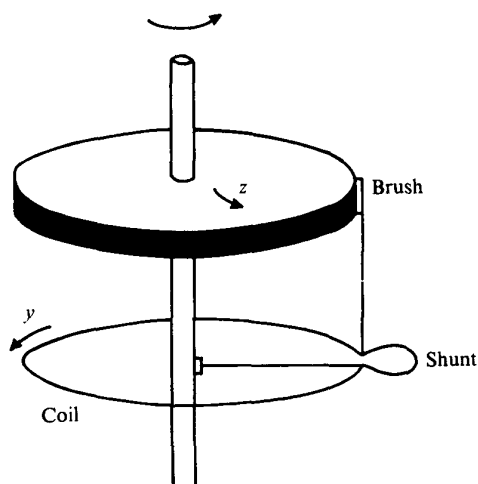


FIGURA 2.5 – Esquema de la dinamo de Robbins. Imagen tomada de [32].

Las dinamos homopolar, de Rikitake y de Robbins son algunos de los modelos más importantes de dinamos mecánicas. Existen, sin embargo, muchos más modelos de dinamos teóricas con esquemas similares y que también se describen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo, la dinamo de Chillingworth [65] y la dinamo de Hide-Skeldon-Acheson ([66] y [67]).

2.2 MODELOS DE DINAMO CINEMÁTICA

En la teoría cinemática de la dinamo (ver [Subsección 1.3.2](#)), el campo de velocidad se fija en las ecuaciones, en lugar de ser una variable dinámica. Aunque esta teoría no puede emplearse para describir el comportamiento de una dinamo caótica no lineal, resulta útil para estudiar la evolución del campo magnético.

Para aclarar esto último, propondremos como ejemplo un fluido con un determinado campo de velocidades al que se le aplica un campo magnético. Si el campo magnético aumenta en función del flujo, el sistema cumple las características de una dinamo. Si, por el contrario, el campo magnético no experimenta un crecimiento, no se ha producido el efecto dinamo.

Los modelos cinemáticos de dinamo son los empleados en los montajes experimentales que se encargan de estudiar el campo magnético de la Tierra. Por ejemplo, el experimento de Riga (explicado más detalladamente en la [Sección 3.2](#)) está basado en el modelo de dinamo de Ponomarenko [68]. Este modelo es el más simple dentro de las dinamos cinemáticas y consiste, básicamente, en un fluido confinado en un cilindro, tal y como se muestra en la [Figura 2.6](#). Dentro de un radio $r \leq a$, el fluido experimenta un movimiento helicoidal de la forma $\mathbf{u} = r\Omega\mathbf{e}_\theta + U\mathbf{e}_z$, mientras que, en una posición $r > a$, el fluido es estacionario.

Otro ejemplo de dinamo cinemática es el modelo de Roberts [34], en el cual el fluido se mueve con una velocidad $\mathbf{u} = (\cos(y) - \cos(z))\mathbf{e}_x + \sin(z)\mathbf{e}_y + \sin(y)\mathbf{e}_z$ y cuyo esquema se encuentra en la [Figura 2.7](#). Este modelo de dinamo fue el empleado en el experimento de Karlsruhe, detallado en la [Sección 3.3](#).

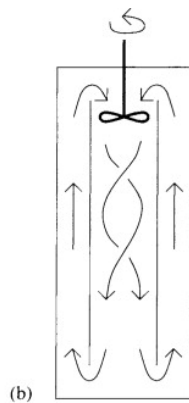
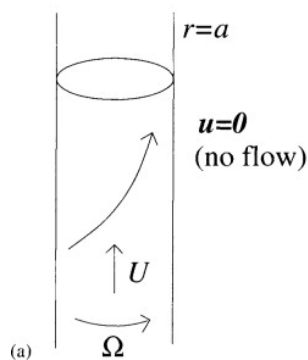


FIGURA 2.6 – (a) Movimiento del flujo en el modelo de dinamo de Ponomarenko. (b) Esquema del experimento de Riga. El fluido (sodio líquido) es impulsado hacia el recipiente por una hélice. Fuente: [33].

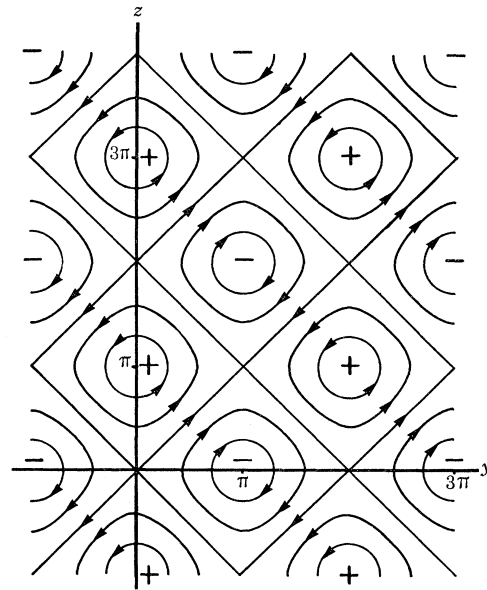


FIGURA 2.7 – Movimiento del fluido en el modelo de dinamo de Roberts, indicado en las coordenadas x e y como líneas de corriente y, en la coordenada z con signos positivo (cruz en círculo) y negativo (punto en círculo). Fuente: [34].

En este capítulo hemos explicado brevemente algunos de los modelos de dinamo más importantes. La dinamo homopolar (también llamada dinamo de Bullard) ha servido para comprender de forma sencilla la generación de un campo magnético inducido mediante el efecto dinamo. Después, hemos presentado la dinamo de Rikitake como un modelo sencillo desarrollado a partir de la dinamo homopolar, que, gracias a sus ecuaciones de movimiento (las cuales incluyen más parámetros respecto a la dinamo homopolar), es capaz de reproducir inversiones en las corrientes eléctricas que circulan por el sistema (dando así lugar a inversiones por parte del campo magnético inducido).

Posteriormente, hemos desarrollado de forma detallada el modelo de dinamo de Robbins, el cual reúne unas ecuaciones de complejidad similar a las del modelo de Rikitake y cuya geometría, al consistir en un sólo disco con el resto de elementos correspondientes, es más parecida a la de la Tierra que la geometría propuesta por Rikitake. En el [Capítulo 4](#) analizaremos los resultados obtenidos después de simular numéricamente este modelo y los aplicaremos al estudio de las inversiones magnéticas terrestres.

Hemos introducido, además, los modelos de dinamos cinemáticas de Ponomarenko y Roberts, que servirán como fundamento para comprender los resultados obtenidos en algunos experimentos de laboratorio, concretamente, los de Riga y de Karlsruhe. Dichos experimentos vienen explicados en el [Capítulo 3](#).

EXPERIMENTOS DE LABORATORIO

En este apartado realizaremos una revisión bibliográfica de los primeros experimentos realizados para intentar crear campos magnéticos autoinducidos, así como de las características, resultados y estado del arte de los experimentos más recientes, basados en el uso de sodio líquido.

3.1 PRIMEROS EXPERIMENTOS Y CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS ÚLTIMOS EXPERIMENTOS.

Los modelos de dinamo que surgieron a partir de los trabajos de Backus [69] y de Herzenberg [70] permitieron también comenzar a desarrollar algunos experimentos de laboratorio. El primero que consiguió crear una dinamo autoinducida a partir de materiales conductores fue el experimento de Lowes y Wilkinson [9]. Basado en la dinamo de Herzenberg, su montaje consistió en la rotación de dos cilindros idénticos de radio $a = 3.5$ cm, enfrentados entre sí, con ángulos de giro separados 90° . Además, los cilindros estaban situados dentro de un bloque del mismo material que ellos (aleación de hierro de permeabilidad $\mu = 25$). Con estas condiciones, se produjo una dinamo automantenida cuando la velocidad crítica de rotación de los cilindros superó las 1800 rpm.

A raíz de este experimento, Lowes y Wikinson realizaron otro estudio con un montaje muy similar ([71]), en el cual se logró volver a generar una dinamo con una velocidad crítica de 400 rpm. Adicionalmente, se comprobó que el sistema, bajo ciertas condiciones iniciales, presentaba un régimen estacionario y estable. Por otro lado, aparecieron varias inversiones del campo magnético, las cuales parecían espontáneas ya que no dependían ni de factores externos ni del tipo de material.

Los experimentos de nueva generación comenzaron a desarrollarse a finales del siglo XX para lograr una emulación del campo magnético terrestre a partir de la teoría MHD. Algunas de las características que tienen en común la mayoría de dichos experimentos es el uso de sodio líquido, debido a las siguientes razones [72]:

- Es el mayor conductor eléctrico entre todos los metales líquidos bajo condiciones de laboratorio.
- Los números de Prandtl magnético P_m y térmico Pr —siendo $P_m = 7.9 \cdot 10^{-6}$ y $Pr = 10^{-2}$ para una temperatura de 393 K— son muy bajos, de forma similar a los valores en el

núcleo terrestre (con $Pm = 1.7 \cdot 10^{-6}$ y $Pr = 0.1$ [21]).

- El tiempo de difusión magnético experimental, cuyo orden es de unos segundos, es muy largo comparado con la escala temporal dinámica, por lo que el hecho de que el campo magnético inducido se mantenga durante un período de tiempo muy corto (unos segundos) es suficiente para demostrar el efecto dinamo.

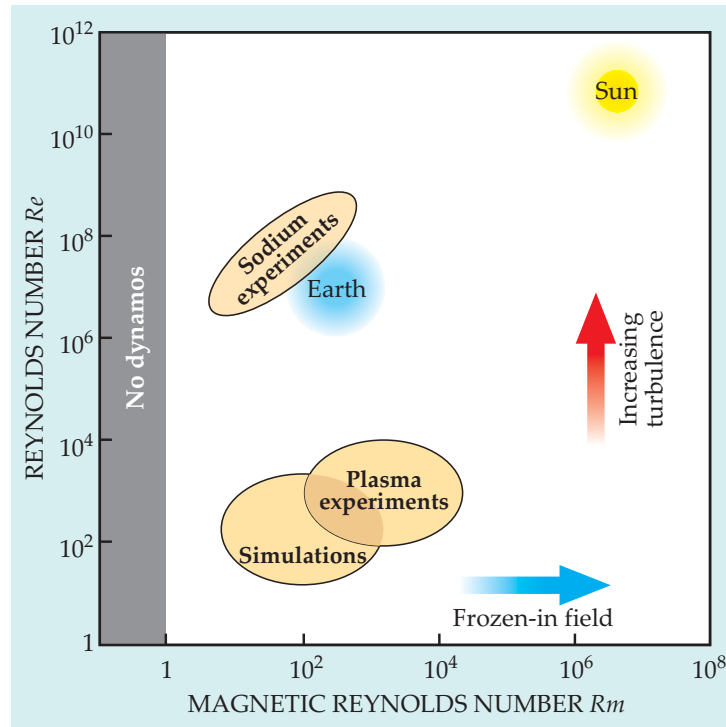


FIGURA 3.1 – Regiones en las que operan las simulaciones numéricas y los experimentos con sodio líquido y plasma en función del número de Reynolds hidrodinámico Re y magnético Rm . Imagen publicada en [35].

Es importante mencionar que, como los valores de Pm son muy bajos y se necesitan valores del número de Reynolds magnético del orden de $Rm = \mathcal{O}(10)$, a partir de la relación $Rm = Re \cdot Pm$ se tendrán valores muy altos para el número de Reynolds hidrodinámico ($Re \approx 10^7 - 10^8$), por lo que las dinamos experimentales se caracterizarán por poseer flujos muy turbulentos. Un esquema muy visual de los órdenes de magnitud de Re y Rm en los que operan los experimentos de sodio líquido se encuentra en la Figura 3.1.

3.2 EXPERIMENTO DE LA DINAMO DE RIGA (1999-2000)

El experimento de Riga [36] se construyó en base a la dinamo de Ponomarenko (ver [68] y Figura 2.6). En la primera parte del experimento, el fin era lograr la autoinducción del campo magnético sin un campo magnético inicial lo suficientemente elevado ([73]). A pesar de los fallos técnicos que surgieron, se observó, por primera vez —a una temperatura de $T = 150^\circ C$ y velocidades de rotación de $\omega = 1980$ rpm y $\omega = 2150$ rpm—, un campo magnético autoinducido en un experimento con metal líquido.

La segunda parte del estudio se centró en el régimen de saturación del campo magnético, observándose éste —aproximadamente— a $\omega = 1870$ rpm y a una temperatura de $T = 157^\circ C$ [74]. Es importante mencionar también que, a pesar de que en la saturación la tasa de crecimiento del campo magnético es nula, su frecuencia sigue aumentando con la velocidad de rotación,

lo que indica que el fluido ha modificado su estructura y movimiento debido a las fuerzas de Lorenz.

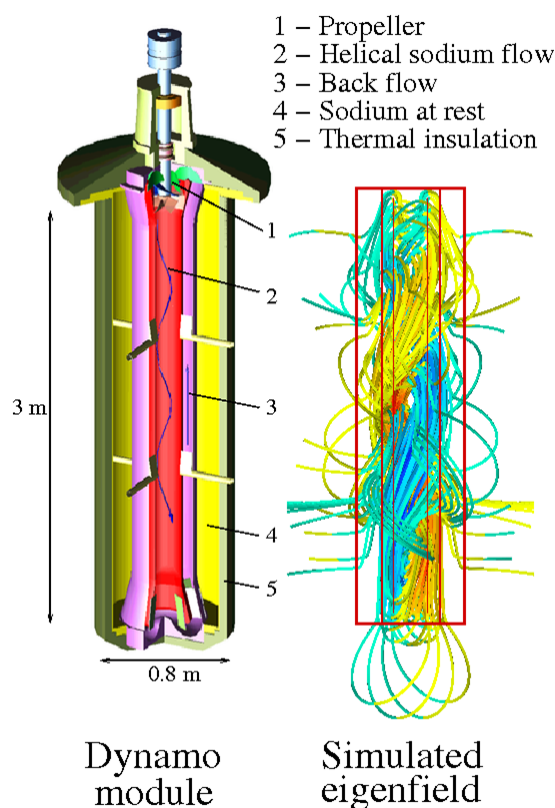


FIGURA 3.2 – Montaje experimental del experimento de Riga y líneas del campo magnético simulado. Imagen extraída de [36].

3.3 EXPERIMENTO DE LA DINAMO DE KARLSRUHE (1999-2000 APROX.)

El experimento de Karlsruhe [75] se basa en el modelo de Roberts. Está conformado por una serie de tuberías confinadas en el interior de un bloque cilíndrico. Cada tubería presenta unos surcos giratorios que le confieren al fluido un movimiento helicoidal. A su vez, las tuberías se encuentran interconectadas entre sí en los extremos superior e inferior. Este esquema, al igual que el planteamiento de la dinamo de Roberts, intenta imitar a la geometría de las celdas de Taylor, mostradas en la Figura 1.8.

Aplicando un campo magnético externo constante, se logró generar un campo magnético estacionario, autoinducido y saturado de varios Gauss de magnitud. Fijando un flujo constante en las tuberías, dicho campo oscilaba en torno a un determinado valor medio. Además, su distribución era casi dipolar, presentando dos direcciones opuestas, y consiguió automantenerse durante más de una hora.

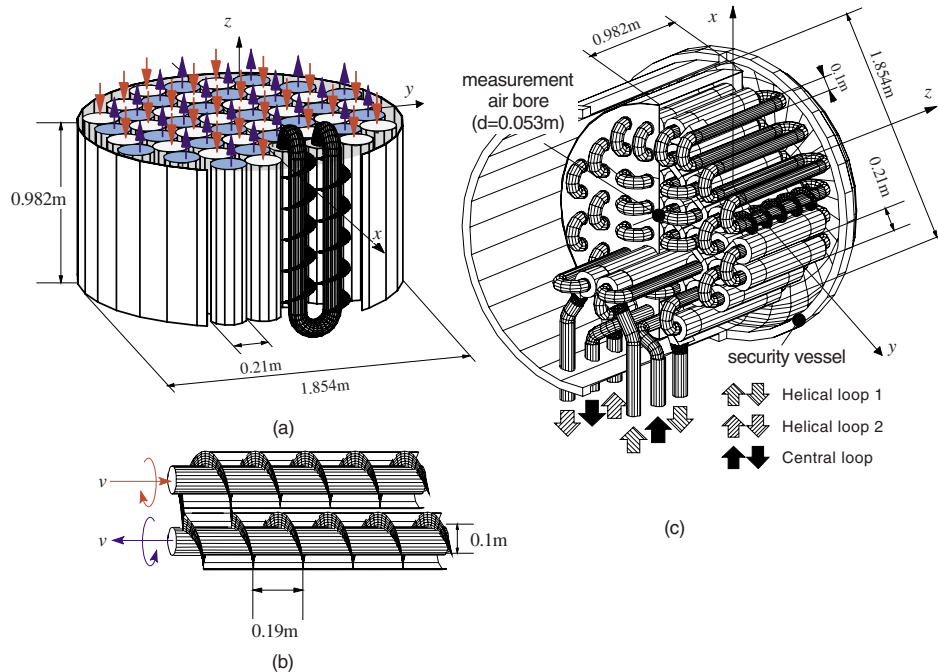


FIGURA 3.3 – Montaje experimental de la dinamo de Karlsruhe. (a) Estructura interna y distribución de velocidades. (b) Generador de vórtices (vortex generator). (c) Diseño técnico general. Fuente: [37].

3.4 EXPERIMENTO VKS DE CADARACHE (2006)

Unos años más tarde, el experimento VKS (siglas de *Von-Kármán-Sodium*) realizado en las instalaciones del CNRS en Cadarache (Francia) ([11] y [38]) consistió en una cavidad cilíndrica con dos propulsores en ambos extremos; en la parte central, una tubería circular eyecta sodio líquido radialmente. Los propulsores transforman, mediante su rotación, al sodio en un fluido turbulento con geometría de Von Kármán.

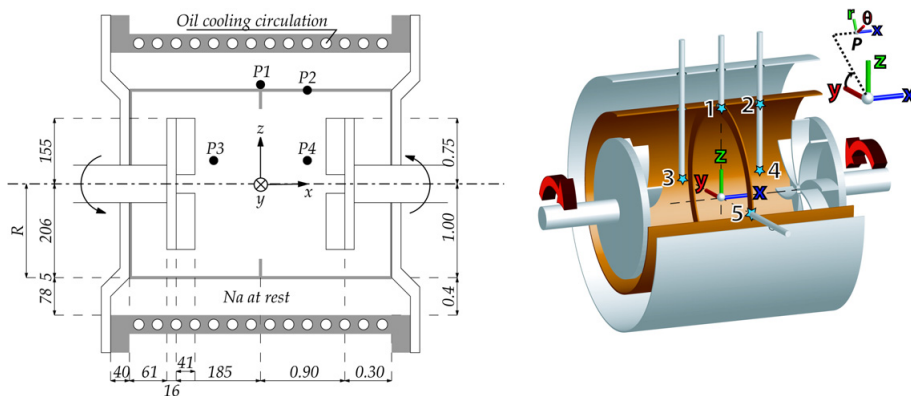


FIGURA 3.4 – Montaje del experimento VKS. Las estrellas azules marcan los puntos de medición. Para presentar los resultados del campo magnético \mathbf{B} obtenidos en dichos lugares, se emplean, o bien coordenadas cartesianas (B_x, B_y, B_z) (tal y como se indica en la figura), o coordenadas cilíndricas $-(B_r, B_\theta, B_x)-$. Fuente: [11].

Con una temperatura experimental de entre $T = 110^\circ\text{C}$ y $T = 160^\circ\text{C}$, se estudian dos casos. En el primero, donde las frecuencias de rotación de los propulsores son iguales $F_1 = F_2$ y en sentidos opuestos, se produce un efecto dinamo a partir de una frecuencia de $F = 17$ Hz, siendo

el módulo de la componente B_y mucho mayor que el de las otras componentes B_x y B_z . Este comportamiento se mantiene constante hasta $F = 26$ Hz (frecuencia máxima permitida por el experimento), y las turbulencias que se generan no son capaces de inducir un cambio de polaridad.

Por el contrario, el caso en el que $F_1 \neq F_2$ ofrece resultados mucho más interesantes. No solo se mantiene la dinamo, sino que a frecuencias $(F_1, F_2) = (16, 22)$ Hz aparecen inversiones de polaridad por parte de las tres componentes del campo magnético. El tiempo medio que tardan éstas en producirse es de, aproximadamente, $\tau \approx 5$ s, mayor que las escalas temporales de los fenómenos magnetohidrodinámicos. El campo presenta, además, grandes variaciones en su amplitud debido a las fuertes turbulencias. Es importante mencionar también que los dos estados de polaridad —positiva y negativa—, a pesar de ser similares a ojos de las ecuaciones MHD, no presentan la misma duración temporal: La polaridad positiva presenta una duración media de $\langle T_+ \rangle = 120$ s, mientras que para la polaridad negativa, el tiempo medio es de $\langle T_- \rangle = 50$ s, lo que es muy similar a los resultados obtenidos a partir de registros paleomagnéticos.

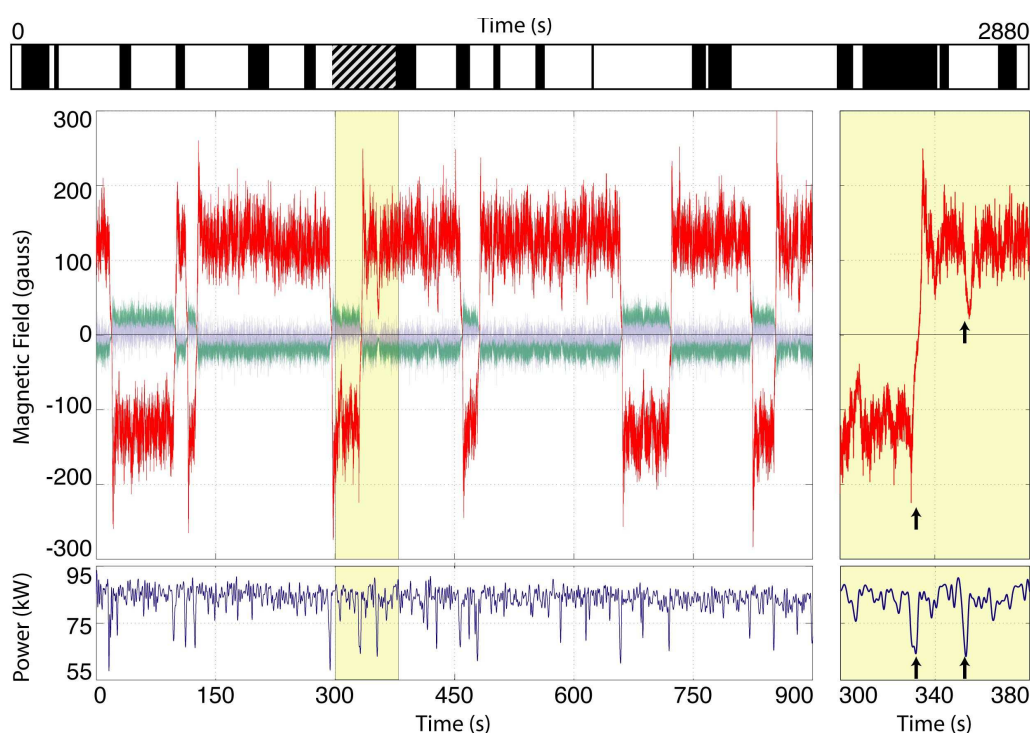


FIGURA 3.5 – (Imagen principal): Evolución temporal de las tres componentes de \mathbf{B} para unas frecuencias de los propulsores de $F_1 = 16$ Hz y $F_2 = 22$ Hz y el cilindro de cobre externo a una temperatura de $T = 123^\circ\text{C}$. Rojo: Componente acimutal B_θ . (Arriba): Cronología de la orientación del campo magnético para dos mediciones sucesivas de 900 s y 1800 s de duración, separadas por el área sombreada. La primera secuencia se corresponde con la mostrada en la imagen principal. Blanco: Orientación positiva. Negro: Orientación negativa. (Abajo): Evolución del valor de la potencia que genera el flujo. Fuente: [38].

No obstante, aunque dicho experimento diese como resultado la autoinducción de un campo magnético generado por las corrientes de sodio líquido, el efecto dinamo no se considera formalmente probado ya que los propulsores en el montaje experimental contenían hierro dulce (material con una alta permeabilidad magnética). Para más información acerca de la influencia del hierro dulce en el experimento VKS, se recomienda consultar la publicación [76].

3.5 EXPERIMENTO DE DRESDE (2012-ACTUALIDAD)

Una de las últimas investigaciones que se están llevando a cabo es la del centro de investigación HZDR en Dresde (*DRESHDYN*) [19]. En este experimento, el efecto dinamo se intenta generar a partir de un movimiento de precesión, lo que presenta numerosas ventajas frente a sus antecesores ya que carece de propulsores y de ensamblajes entre distintas tuberías, creando así un fluido mucho más homogéneo ([77]). Además, a través del movimiento de precesión, el montaje planteado elimina la axisimetría del sistema lo que, de acuerdo con el teorema de Cowling (Subsección 1.3.4), permite la creación de un campo magnético autoinducido.

Antes de comenzar con el experimento definitivo, se realizaron previamente simulaciones y pruebas con agua en un montaje similar al planeado. Los resultados previos obtenidos concluyeron con que sería posible crear un campo magnético autoinducido mediante un fluido sometido a precesión en el interior de un recipiente cilíndrico. Para ello, el mínimo valor crítico del número de Reynolds magnético debería ser $Rm_C \approx 430$ [78].

Futuras publicaciones del instituto HZDR confirmarán la creación de un campo magnético autoinducido, mencionando la importancia que ha tenido en ello el movimiento de precesión. Aparte, el experimento de Dresde espera también estudiar las turbulencias que generan los discos de acreción situados alrededor de sistemas protoplanetarios y agujeros negros.

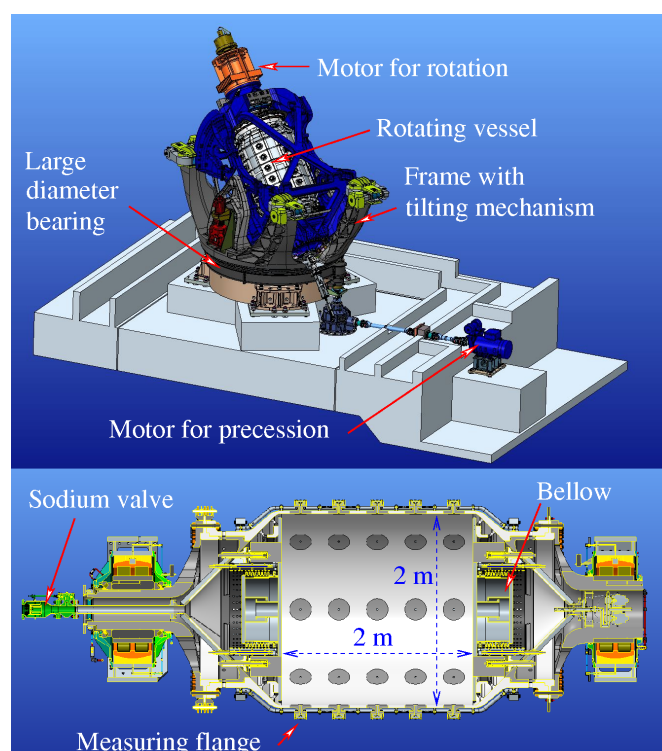


FIGURA 3.6 – Diseño del experimento de Dresde. Se intentará generar una dinamo a partir de un movimiento de precesión. El cilindro central rotante contendrá sodio líquido. Fuente: [19].

En este capítulo hemos repasado, además de los primeros experimentos realizados a mediados del siglo XX, las características y los resultados arrojados por los últimos experimentos que se han encargado de estudiar el campo magnético terrestre. Entre dichas pruebas, destacamos el experimento VKS por el motivo que exponemos a continuación.

Junto con el modelo de dinamo de Robbins, simularemos numéricamente un flujo turbulento de Von Kármán empleando, para ello, el modelo estocástico presentado por [1], [2] y [3]. Dichas publicaciones estudian un fluido VK similar al del experimento VKS; sustituyendo, no obstante,

el sodio líquido por agua. Como complemento a dicho estudio experimental, [1], [2] y [3] proponen dos ecuaciones estocásticas que permiten reproducir los resultados obtenidos en el laboratorio.

El experimento VKS de Cadarache, explicado en este capítulo, servirá, por lo tanto, como introducción al modelo estocástico con el que simularemos un fluido de Von Kármán. La descripción del sistema y los resultados obtenidos vienen detallados en el [Capítulo 5](#).

ESTUDIO DEL MODELO DE LA DINAMO DE ROBBINS

En esta parte se realizará un profundo análisis de la dinamo de Robbins, cuya descripción básica se encuentra en la [Subsección 2.1.3](#), estudiando el comportamiento que presenta dicho sistema en función de distintos valores del parámetro R y varias condiciones iniciales. Posteriormente, se tomarán aquellos regímenes en los que se hayan observado inversiones de la corriente $y(t)$ en el hilo, y se graficarán las funciones de densidad de probabilidad para aplicar estos resultados al problema de las inversiones magnéticas en la Tierra.

4.1 ECUACIONES ADIMENSIONALES Y REGÍMENES DEL SISTEMA

Para facilitar el estudio del modelo de la dinamo de Robbins —visto previamente en la [Subsección 2.1.3](#)— mediante simulaciones numéricas, se suele emplear la forma adimensional ([64] y [65]) de las [Ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6](#), que es la siguiente:

$$\frac{d\omega^*}{dt} = R - zy - \nu\omega^* \quad (4.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega^*y - z \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sigma(z - y), \quad (4.3)$$

siendo los valores de los parámetros ν , σ y R [64]:

$$\nu = \frac{\xi\tau}{C} \quad \sigma = \frac{(\rho_H + \rho_S)\tau}{L_C} \quad R = \frac{1}{\delta} \left(\frac{T}{\xi} + \frac{\rho_S}{M} \right).$$

Si tomamos como la causa de la geodinamo el movimiento convectivo en el núcleo externo (resumido en la [Sección 1.3](#)), las variables de las [Ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3](#) pueden interpretarse físicamente de forma adimensional como medidas de la velocidad del fluido (corriente $y(t)$ del hilo), distribución horizontal de temperatura (corriente $z(t)$) y momento angular ($\omega^*(t)$).

En cuanto al resto de parámetros (también adimensionales), ν es la disipación viscosa, σ es la relación entre el tiempo de decaimiento de las corrientes $z(t)$ y $y(t)$ y R es un parámetro

proporcional al gradiente de temperaturas que genera el movimiento convectivo en el núcleo ([65] y [79]).

Dejando fijos los parámetros ν y σ , si se analiza la evolución que experimenta la dinamo de Robbins en función de R , observamos que su comportamiento se ve modificado a partir de ciertos valores críticos de R , denominados R_0 , R_{SC} , R_{CC} y R_C . Estos puntos críticos determinarán los intervalos (régimenes) en los que se puede desglosar el comportamiento del sistema.

De esta forma, dependiendo del valor de R , se pueden distinguir cinco régimenes en el modelo de dinamo de Robbins ([80] y [65]):

- Régimen I: $R < R_0$, con $R_0 = \nu$.
Todas las soluciones tienden a un estado de equilibrio en el punto fijo $(\omega^*, z, y) = (R/\nu, 0, 0)$, independientemente del punto inicial.
- Régimen II: $R_0 < R < R_{SC}$.
El sistema evoluciona hacia uno de los dos puntos fijos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{R-\nu}, \sqrt{R-\nu})$ o $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{R-\nu}, -\sqrt{R-\nu})$, dependiendo de la condición inicial.
El punto de convergencia para el régimen I, $(\omega^*, z, y) = (R/\nu, 0, 0)$, se convierte ahora en un punto de silla, por lo que el sistema será solo estable si se toma un punto inicial de la forma $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (\omega^*, 0, 0)$.
- Régimen III: $R_{SC} < R < R_{CC}$.
Las corrientes $y(t)$ y $z(t)$ presentan una alternancia entre valores positivos y negativos, convergiendo el sistema, finalmente, en los mismos puntos fijos que en el régimen II.
- Régimen IV: $R_{CC} < R < R_C$, con $R_C = \nu\sigma(\nu + \sigma + 3)/(\sigma - \nu - 1)$.
Si el punto inicial se encuentra cerca de uno de los puntos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{R-\nu}, \sqrt{R-\nu})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{R-\nu}, -\sqrt{R-\nu})$, el sistema se estabilizará en torno a él.
Por el contrario, si el punto inicial se encuentra lejos de dichos atractores, $y(t)$ y $z(t)$ cambiarán de signo indefinidamente. La variable ω^* tampoco converge hacia ningún valor fijo.
- Régimen V: $R > R_C$.
El sistema se vuelve completamente inestable e irá oscilando de forma indefinida entre los puntos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{R-\nu}, \sqrt{R-\nu})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{R-\nu}, -\sqrt{R-\nu})$, independientemente de cuál sea el punto inicial.

4.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

A fin de simular numéricamente las Ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3, se ha empleado el comando *solve.ivp* de Python, el cual aplica el método de Runge-Kutta de orden 5 ($p = 5$) con el error del método de orden 4 ($q = 4$) [81]. El error cometido por el método de RK4 es del orden $\mathcal{O}(h^4)$ [82], siendo h el tamaño del paso en la simulación—. El algoritmo empleado en la resolución del modelo de la dinamo de Robbins mediante este método se encuentra en la Sección 6.

Debido a la longitud y a la complejidad de las ecuaciones del método RK5(4), se recomienda consultar las referencias [83] y [84], donde dichas ecuaciones vienen explicadas de forma detallada.

4.3 RESULTADOS

Con el fin de simular el modelo de dinamo de Robbins para los régimenes mencionados anteriormente, se ha empleado un algoritmo RK5(4) tomando, para todos los régimenes, las constantes fijas $\nu = 1$ y $\sigma = 5$ (con los mismos valores que [64]). A partir de dichas constantes,

dada la definición de los puntos críticos R_0 y R_C en función de ν y σ , su valor es de $R_0 = 1$ y $R_C = 15$. Los valores de R_{SC} y R_{CC} se proporcionan en [80], y son $R_{SC} = 7.26$ y $R_{CC} = 14.45$. El parámetro R para simular cada uno de los regímenes es escogido a criterio de la autora de acuerdo con los intervalos previamente definidos.

Los puntos iniciales considerados en cada caso han sido tomados de [85], y son $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$. En algún régimen en concreto, además, se han tomado adicionalmente otros puntos iniciales para poder analizar un comportamiento particular.

Tras realizar numerosas pruebas con distintos tiempos de simulación y pasos temporales, se ha observado que, en el caso del primer y segundo régimen, el sistema alcanza un estado de equilibrio en un tiempo muy rápido; en los regímenes III, IV y V, por otro lado, es necesario un mayor tiempo de simulación para observar la tendencia del sistema a alcanzar un punto fijo o a oscilar indefinidamente en torno a dos puntos atractores. Por tanto, para los regímenes I y II, el marco temporal total escogido es de $t = [0, 25]$ s, con un paso temporal de $h = 0.0025$ s. En los regímenes III, IV y V, el tiempo de simulación total es $t = [0, 125]$ s, con un paso de $h = 0.00125$ s.

Para el análisis de cada uno de los regímenes, se ha representado la trayectoria en el espacio de fases —donde viene reflejado el comportamiento del modelo de dinamo en función del momento angular $\omega^*(t)$ y las corrientes $y(t)$ y $z(t)$ — y la evoluciones con respecto al tiempo de dichas variables.

Si, por otro lado, se tiene en cuenta el campo magnético creado por la autoinducción de la dinamo (así como la respectiva descomposición de \mathbf{B} explicada en la [Subsección 1.2.2](#)), la corriente adimensional $y(t)$ en el hilo es el origen de la componente poloidal y la corriente adimensional $z(t)$ en el disco, el de la componente toroidal.

4.3.1 Régimen I ($R < R_0$)

Tomando un valor de $R = 0.5$, en la [Figura 4.1](#) se muestra cómo, para ambas condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, el sistema converge hacia el mismo punto fijo estable $(\omega^*, z, y) = (0.5, 0, 0)$. Para una mayor claridad, se muestra, en las [Figuras 4.2 y 4.3](#), la evolución individual de las trayectorias en el espacio de fases para los puntos $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

La convergencia de las corrientes $y(t)$ y $z(t)$ para estos dos puntos iniciales se ilustra de forma explícita en las [Figuras 4.4 y 4.5](#), respectivamente. En ambos casos, las corrientes tienden gradualmente hacia el valor $y = z = 0$. Asimismo, la evolución del momento angular $\omega^*(t)$ hacia $\omega^* = 0.5$ para ambos puntos iniciales está representada en la [Figura 4.6](#).

De este modo, se obtiene un sistema que evoluciona velozmente hacia un equilibrio en el punto fijo $(\omega^*, z, y) = (0.5, 0, 0)$. Por tanto, al ser este sistema completamente estable, no resulta útil para simular el comportamiento de la geodinamo.

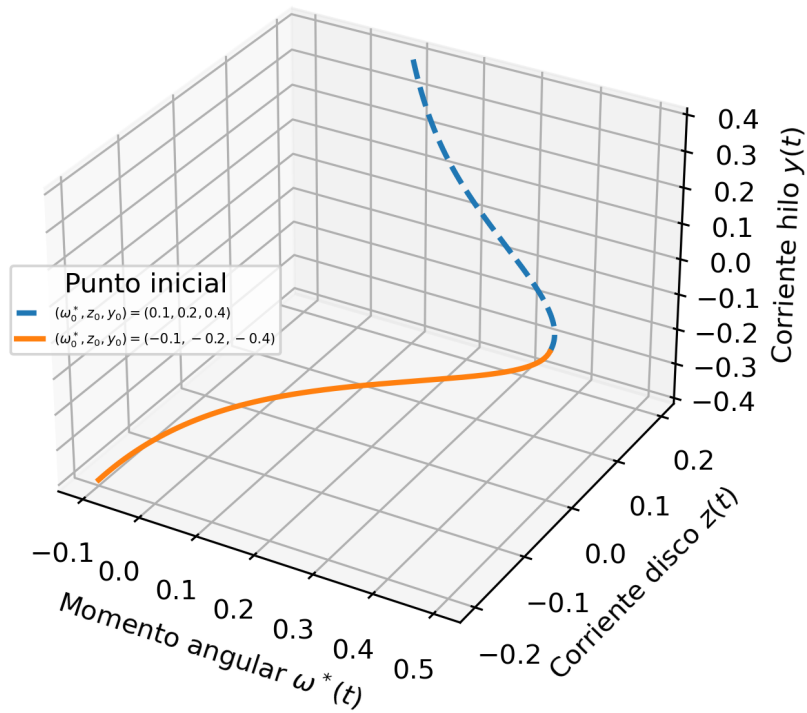
Trayectoria en espacio de fases con $R < R_0$ 

FIGURA 4.1 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$.

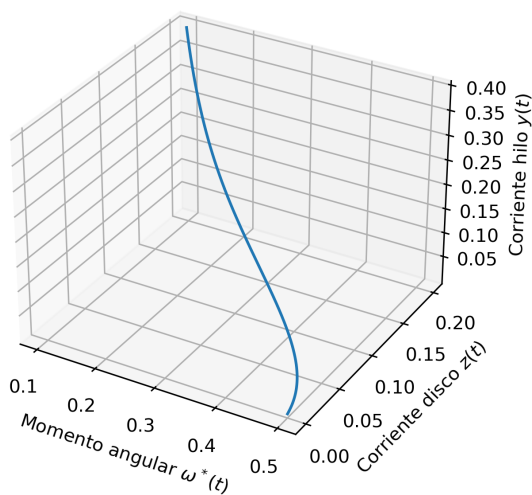
Trayectoria en espacio de fases con $R < R_0$ 

FIGURA 4.2 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ para un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

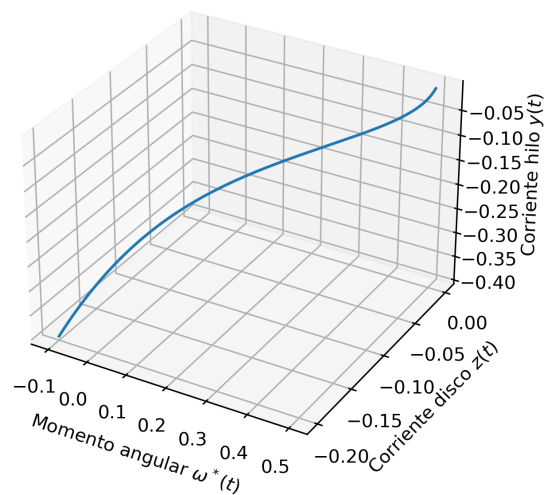
Trayectoria en espacio de fases con $R < R_0$ 

FIGURA 4.3 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ para un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

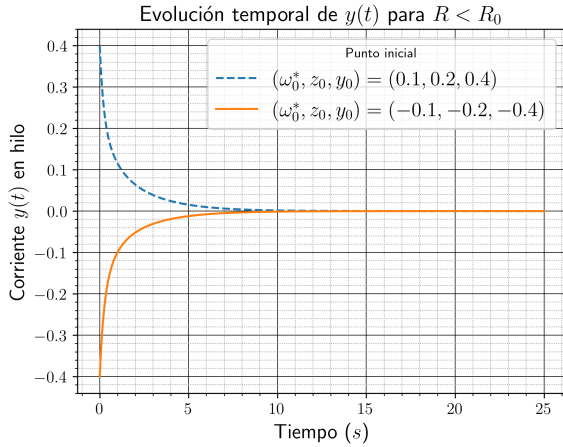


FIGURA 4.4 – Evolución de la corriente en el hilo $y(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

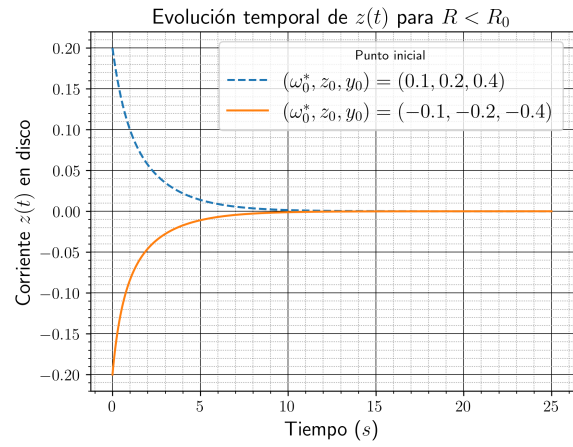


FIGURA 4.5 – Evolución de la corriente en el disco $z(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

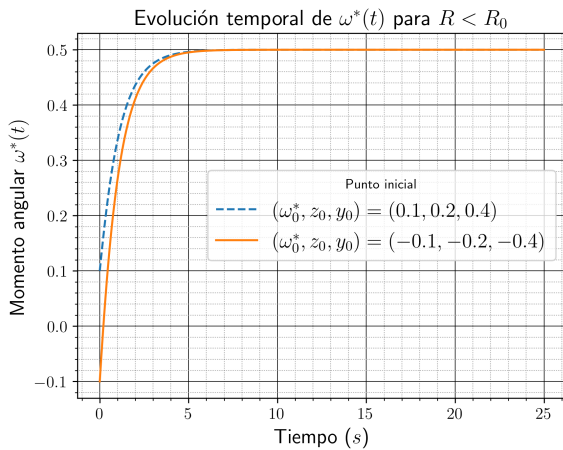


FIGURA 4.6 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen I del modelo de dinamo de Robbins con $R = 0.5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

4.3.2 Régimen II ($R_0 < R < R_{SC}$)

Para estudiar este régimen del modelo, se ha empleado un valor del parámetro R de $R = 5$, las dos condiciones iniciales usuales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, y el punto inicial adicional $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$. La trayectoria en el espacio de fases con los tres valores de (ω_0^*, z_0, y_0) se encuentra en la Figura 4.7, donde observamos cómo, dependiendo de la posición inicial, el sistema evoluciona hacia un determinado punto fijo.

Con el punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, el punto fijo hacia el que converge el sistema es $(\omega^*, z, y) = (1, 2, 2)$. Por otro lado, cuando consideramos la posición de partida $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, el punto para el cual el sistema se vuelve estable es $(\omega^*, z, y) = (1, -2, -2)$.

Además, atendiendo a las evoluciones temporales de $y(t)$, $z(t)$ y $\omega^*(t)$ (Figuras 4.8, 4.9 y 4.10) para $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, observamos que el modelo se comporta de forma análoga a un oscilador amortiguado. De esta manera, a partir de un tiempo aproximado de $t \approx 15$ s, si el punto inicial es $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, la dinamo converge hacia $\omega^* = 1$ y $y = z = 2$. Por otro lado, el sistema convergerá hacia $\omega^* = 1$ y $y = z = -2$ si la condición inicial es $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

El punto fijo $(\omega^*, z, y) = (5, 0, 0)$ es un tanto diferente comparado con los otros puntos de convergencia. Por tanto, para realizar un análisis de su estabilidad, simularemos el modelo de dinamo de Robbins para una condición inicial adicional, $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$.

Dado que el punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$ presenta los mismos valores $y = z = 0$ que dicho punto fijo (variando únicamente el valor de la coordenada ω^*), atendiendo a las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10, vemos claramente cómo el sistema tiende hacia $(\omega^*, z, y) = (5, 0, 0)$ en lugar de hacia los puntos fijos $(\omega^*, z, y) = (1, 2, 2)$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -2, -2)$ (tal y como ocurría con las otras dos condiciones iniciales empleadas en este régimen).

Si ahora empleamos otra punto inicial con $\omega_0^* = 0.1$, y modificamos ligeramente los valores iniciales y_0 y z_0 , el sistema convergerá ahora hacia una de los dos puntos $(\omega^*, z, y) = (1, 2, 2)$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -2, -2)$. Por lo tanto, $(\omega^*, z, y) = (5, 0, 0)$ se trata de un punto de silla, es decir, un punto de estabilidad únicamente cuando la condición inicial es de la forma $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (\omega^*, 0, 0)$.

Trayectoria en espacio de fases con $R_0 < R < R_{SC}$

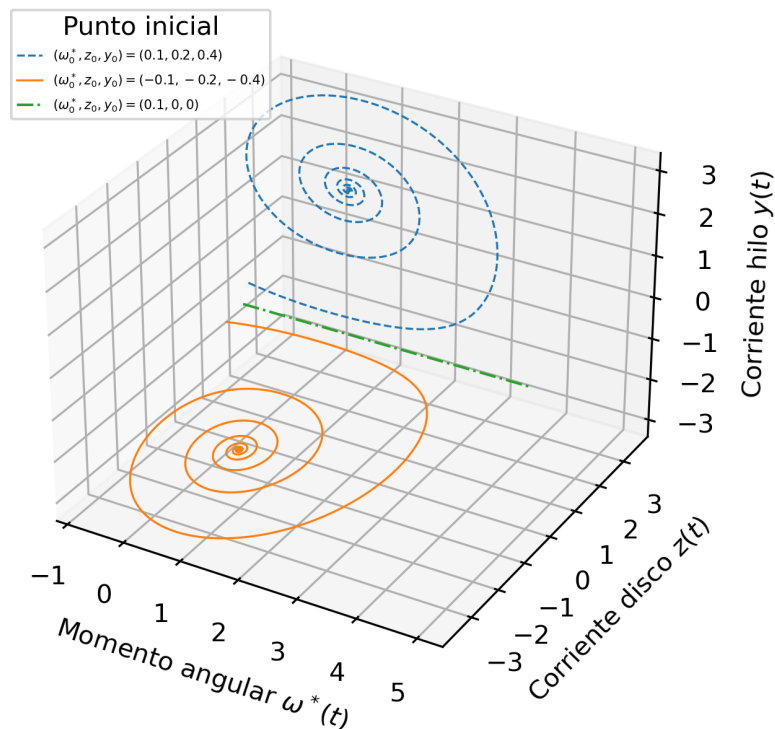


FIGURA 4.7 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

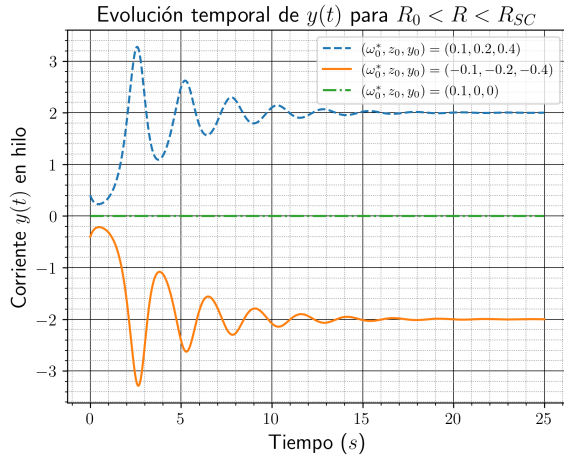


FIGURA 4.8 – Evolución de la corriente en el hilo $y(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son: $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ (línea discontinua), $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ (línea continua) y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$ (línea punteada).

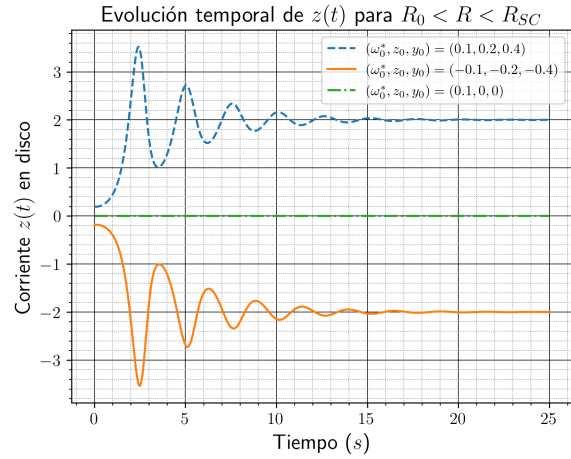


FIGURA 4.9 – Evolución de la corriente en el disco $z(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son: $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ (línea discontinua), $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ (línea continua) y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$ (línea punteada).

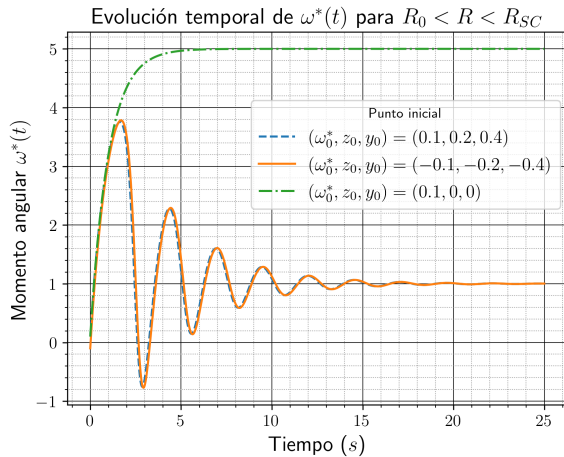


FIGURA 4.10 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen II del modelo de dinamo de Robbins con $R = 5$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

4.3.3 Régimen III ($R_{SC} < R < R_{CC}$)

Es este tercer régimen, emplearemos un valor de $R = 12$ y tres posiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$. El diagrama con la trayectoria en el espacio de fases se encuentra en la [Figura 4.11](#).

El primer aspecto que observamos en la [Figura 4.11](#) es que, cuando $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0, 0)$, el comportamiento del modelo es igual al del régimen II, por lo que dicho punto inicial se ignorará en el análisis de este régimen.

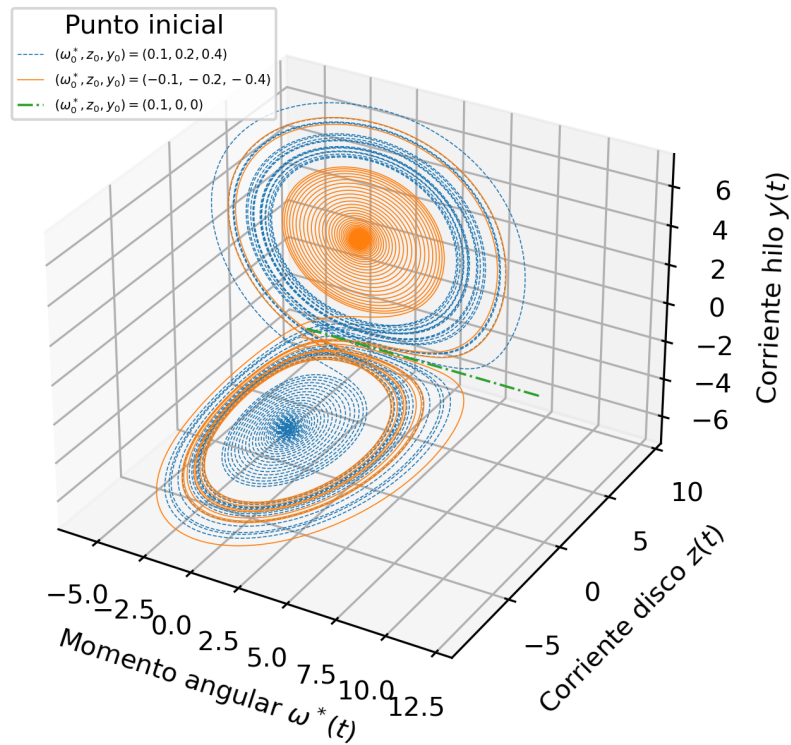
Trayectoria en espacio fases con $R_{SC} < R < R_{CC}$ 

FIGURA 4.11 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

Trayectoria en espacio de fases con $R_{SC} < R < R_{CC}$

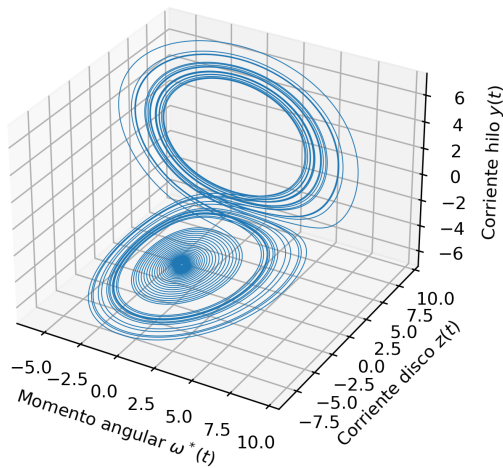


FIGURA 4.12 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

Trayectoria en espacio de fases con $R_{SC} < R < R_{CC}$

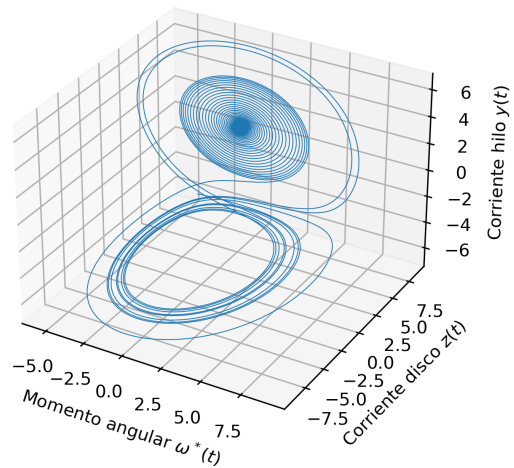


FIGURA 4.13 – Trayectoria en el espacio de fases para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

Yendo ahora al análisis con los puntos de partida $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, si bien el comportamiento del modelo es muy similar al del régimen II, la estabilidad en los puntos fijos ocurre de forma opuesta. Esto es, si se parte de la condición inicial

$(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, el sistema comienza a realizar oscilaciones en torno a los puntos fijos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{11}, \sqrt{11})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{11}, -\sqrt{11})$ para, finalmente, estabilizarse en $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{11}, -\sqrt{11})$ (ver Figura 4.12). Si, por otro lado, la condición inicial es $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, el sistema orbita alrededor de los mismos puntos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{11}, \sqrt{11})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{11}, -\sqrt{11})$, convergiendo finalmente en el punto fijo $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{11}, \sqrt{11})$ —Figura 4.13—.

Atendiendo a las evoluciones de las corrientes $y(t)$ (Figuras 4.14 y 4.15) y $z(t)$ (Figuras 4.16 y 4.17) para los dos puntos de partida, estas corrientes presentan, al igual que en el régimen II, un comportamiento similar al de un oscilador amortiguado.

No obstante, el lugar de converger directamente hacia los valores $y = z = -\sqrt{11}$ —en el caso de $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ — y hacia $y = z = \sqrt{11}$ —en el caso de $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ —, las corrientes experimentan previamente algunas inversiones. En otras palabras, la amplitud de $y(t)$ y $z(t)$ aumenta para alcanzar un estado de igual magnitud pero de diferente signo. El momento angular $\omega^*(t)$ no realiza dichas inversiones, sino que oscila hasta converger, para ambas condiciones iniciales, en $\omega^* = 1$, tal y como reflejan las Figuras 4.18 y 4.19.

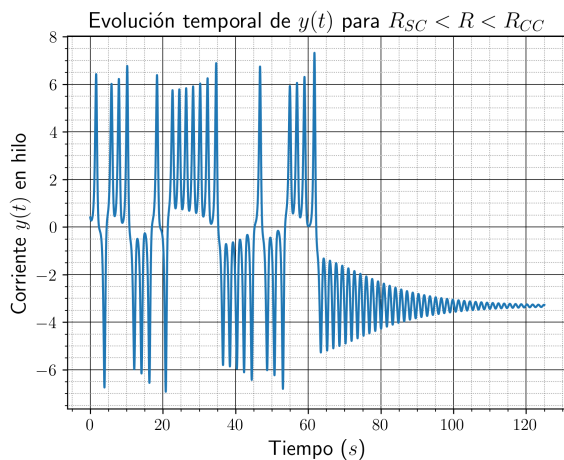


FIGURA 4.14 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

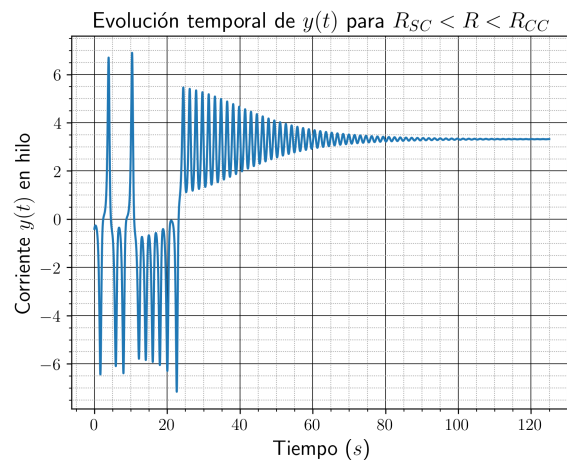


FIGURA 4.15 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

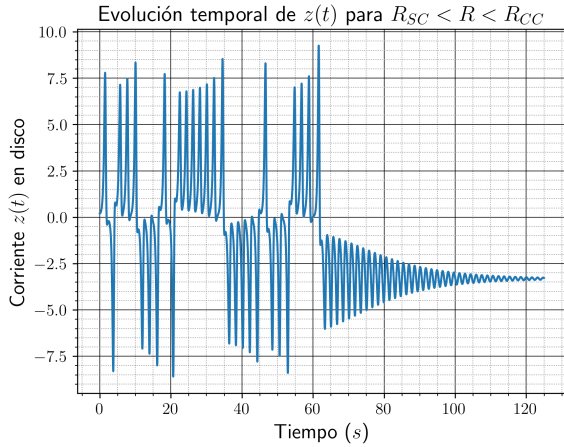


FIGURA 4.16 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

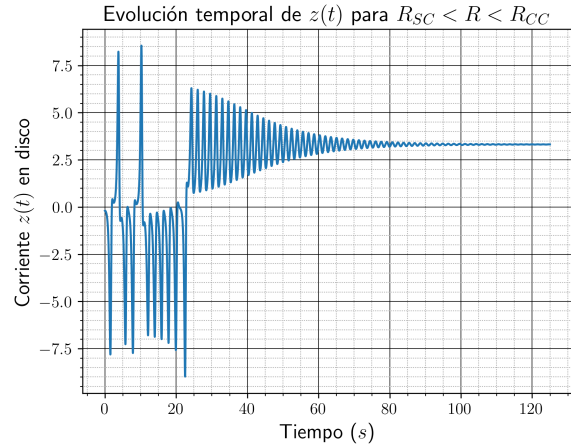


FIGURA 4.17 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

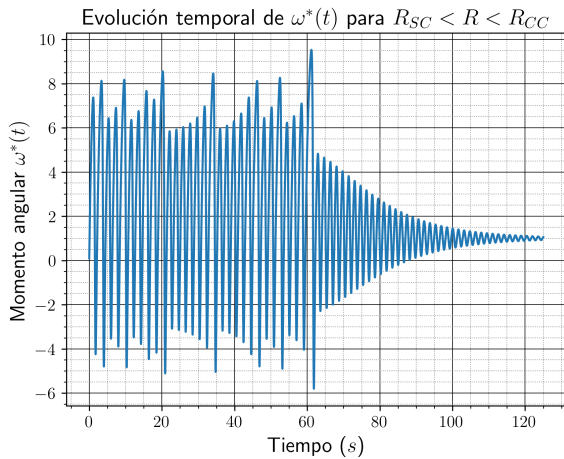


FIGURA 4.18 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

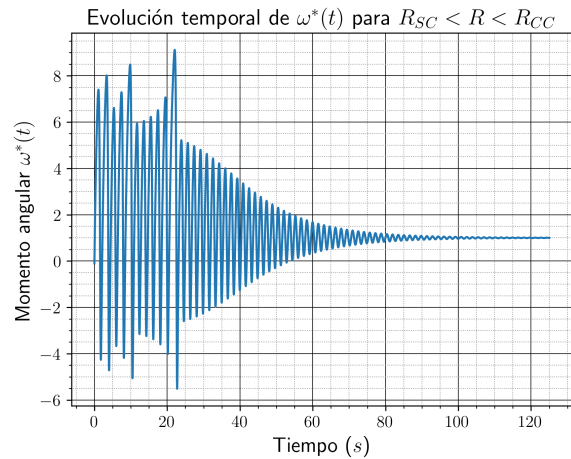


FIGURA 4.19 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen III del modelo de dinamo de Robbins con $R = 12$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, con un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

Un apunte importante observado en este régimen es que, aunque la convergencia para ambas condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ debería producirse prácticamente a la vez, no ocurre así.

En las trayectorias en el espacio de fases (Figuras 4.12 y 4.13), se ilustra claramente cómo, dada la condición inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, el sistema realiza menos órbitas alrededor de los puntos fijos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{11}, \sqrt{11})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{11}, -\sqrt{11})$ en comparación con la situación donde la condición inicial es $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$. En las evoluciones temporales del momento angular $\omega^*(t)$ y las corrientes $y(t)$ y $z(t)$, vemos que el sistema, si parte de $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, se vuelve estable en un tiempo aproximado $t \approx 120$ s; si el sistema se inicia desde $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, la estabilidad se produce, aproximadamente, en un tiempo $t \approx 80$ s.

Como las diferencia de las distancias entre los puntos iniciales y sus respectivos puntos de convergencia es la misma en las variables $y(t)$, $z(t)$, y mínima en la variable $\omega^*(t)$, la cuestión de por qué, para una condición inicial, el sistema se estabiliza antes que empleando otro punto inicial, puede dar lugar a nuevos estudios del modelo de la dinamo de Robbins.

4.3.4 Régimen IV ($R_{CC} < R < R_C$)

Para estudiar el régimen IV, partimos de un $R = 14.75$ y tres condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.75, 3.5, 3.5)$ (siendo esta última un punto inicial adicional), y registramos dos posibles situaciones.

De acuerdo con la Figura 4.20, si la condición inicial se encuentra muy cerca de uno de los dos puntos fijos $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{13.75}, -\sqrt{13.75})$, el sistema se estabiliza en el punto fijo vecino. Para ilustrar este ejemplo, se ha escogido el punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.75, 3.5, 3.5)$, cercano a $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$.

Así, en la trayectoria en el espacio de fases (Figura 4.20) se ilustra cómo el modelo no realiza ninguna órbita previa alrededor de los dos atractores $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{13.75}, -\sqrt{13.75})$, sino que, directamente, va convergiendo poco a poco en torno al punto fijo $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$ al ser el más cercano a él. Aunque dicha convergencia se muestra de forma más detallada y clara en la Figura 4.21, si deseamos observar cómo el sistema llega, finalmente, al punto de estabilidad $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$, es necesario un tiempo de simulación mayor. Como este comportamiento del modelo de dinamo, en este régimen y con $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.75, 3.5, 3.5)$, es similar al de anteriores regímenes, no será tratado con mayor profundidad.

Trayectoria en espacio de fases con $R_{CC} < R < R_C$

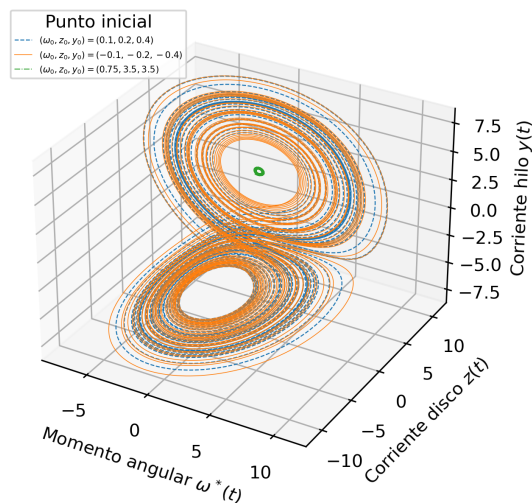


FIGURA 4.20 – Diagrama de fase para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los detallados en la leyenda.

Trayectoria en espacio de fases con $R_{CC} < R < R_C$

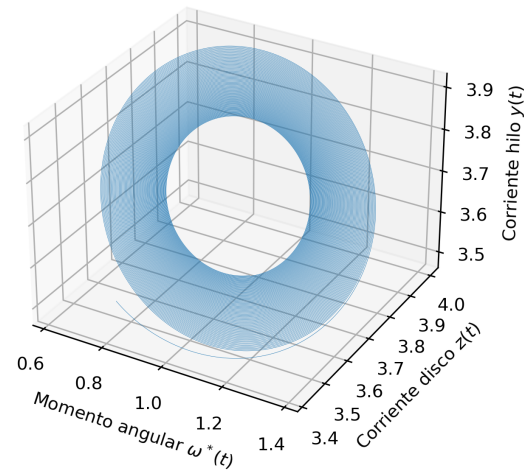


FIGURA 4.21 – Diagrama de fase para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.75, 3.5, 3.5)$.

Por el contrario, si tomamos los dos puntos de partida $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ —los cuales están lejos de $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{13.75}, \sqrt{13.75})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{13.75}, -\sqrt{13.75})$ — el sistema orbitará en torno a dichos puntos de forma indefinida y no alcanzará un estado

estable. En este caso, además, las trayectorias en el espacio de fases, para estos dos puntos iniciales, presentarán una forma muy similar, tal y como se observa en la [Figura 4.20](#).

Las corrientes $y(t)$ ([Figuras 4.22 y 4.23](#)) y $z(t)$ ([Figuras 4.24 y 4.25](#)) muestran un comportamiento muy parecido al del régimen III, con la salvedad de que el sistema no converge a ningún punto, sino que oscila de forma indefinida en torno a $y = z = \pm\sqrt{13.75}$. La variación respecto del tiempo del momento angular $\omega^*(t)$ ([Figuras 4.26 y 4.27](#)) es —para ambos puntos iniciales— muy similar. La variación temporal de $\omega^*(t)$ es también parecida a la del régimen III, exceptuando el hecho de que, en este régimen, $\omega^*(t)$ no converge a ningún punto.

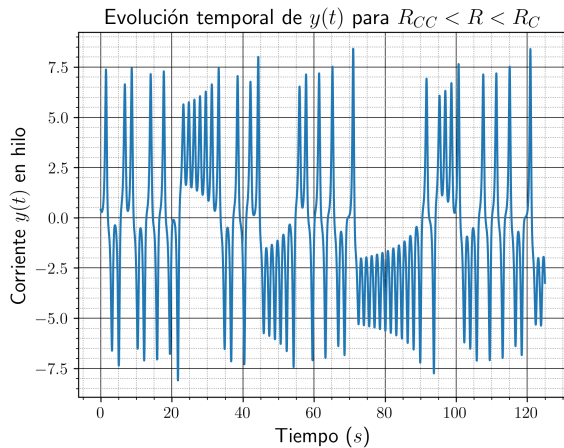


FIGURA 4.22 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

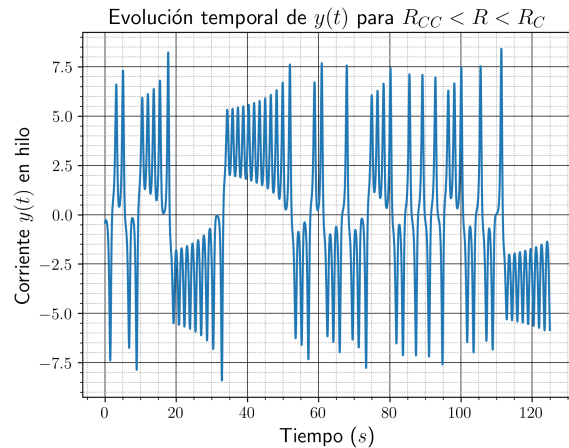


FIGURA 4.23 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

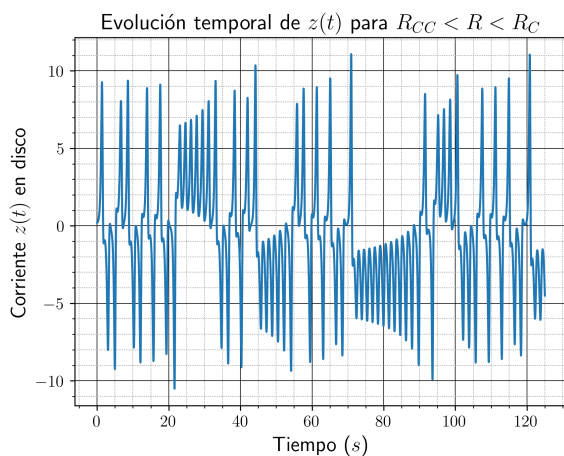


FIGURA 4.24 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

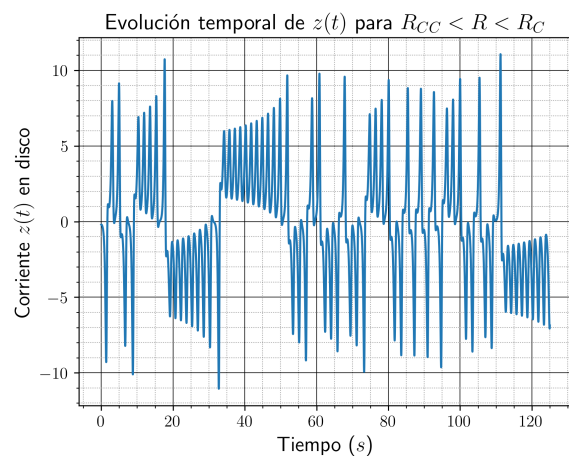


FIGURA 4.25 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

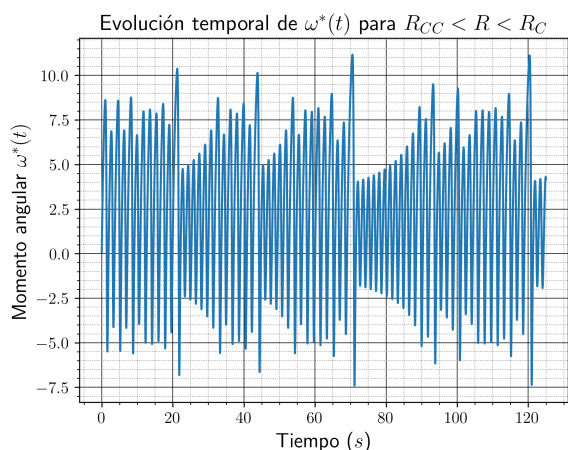


FIGURA 4.26 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

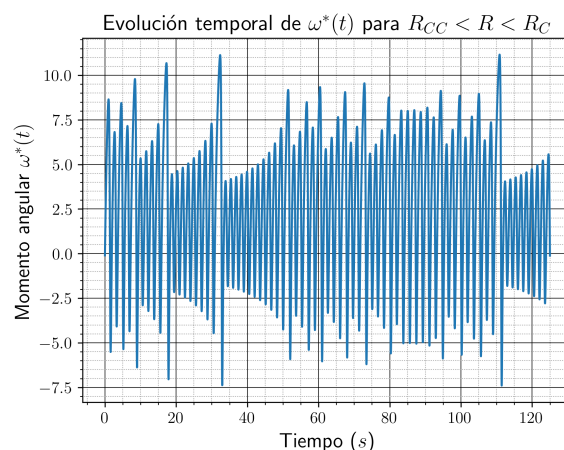


FIGURA 4.27 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

4.3.5 Régimen V ($R > R_C$)

Trayectoria en espacio de fases con $R > R_C$

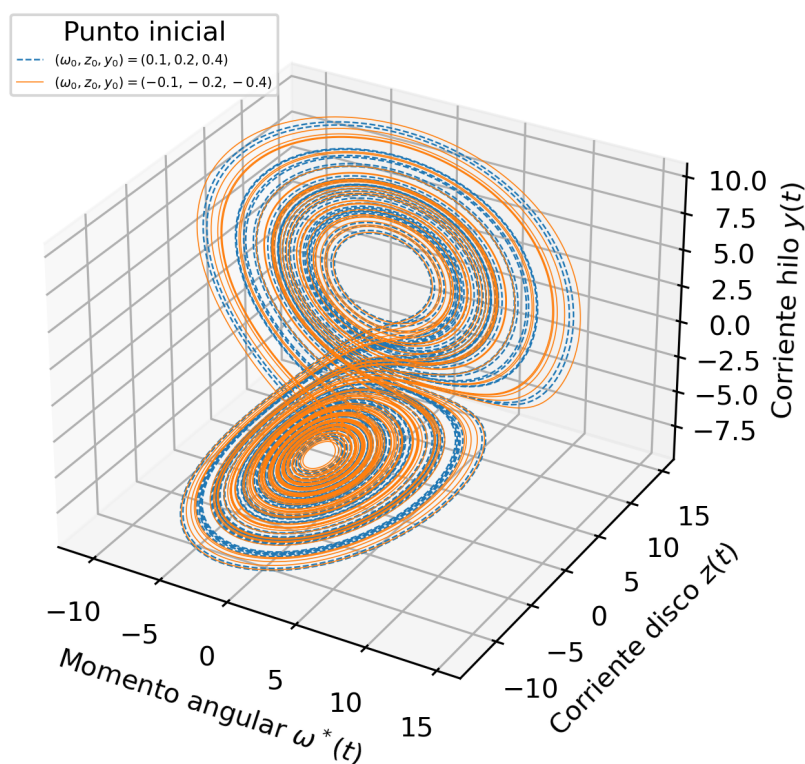


FIGURA 4.28 – Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$. Los puntos iniciales son los señalados en la leyenda.

Para finalizar el estudio de los regímenes de la dinamo de Robbins, se han tomado un valor de $R = 20$ y las dos condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$. De este modo, tal y como se observa en la trayectoria en el espacio de fases de la [Figura 4.28](#)

(graficada individualmente para cada uno de los puntos iniciales en las Figuras 4.29 y 4.30), el sistema oscila sin fin alrededor de dos puntos atractores $(\omega^*, z, y) = (1, \sqrt{19}, \sqrt{19})$ y $(\omega^*, z, y) = (1, -\sqrt{19}, -\sqrt{19})$.

En el caso de los dos puntos iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, la corriente en el hilo $y(t)$ —Figuras 4.31 y 4.32, respectivamente— y la corriente en el disco $z(t)$ —Figuras 4.33 y 4.34, respectivamente— presentan una alternancia entre valores positivos y negativos, al igual que ocurría en el régimen IV cuando éste se inicializaba lejos de los puntos fijos. Asimismo, la evolución temporal del momento angular $\omega^*(t)$ (Figuras 4.35 y 4.36) es también, para ambos puntos iniciales, muy similar a la del régimen IV.

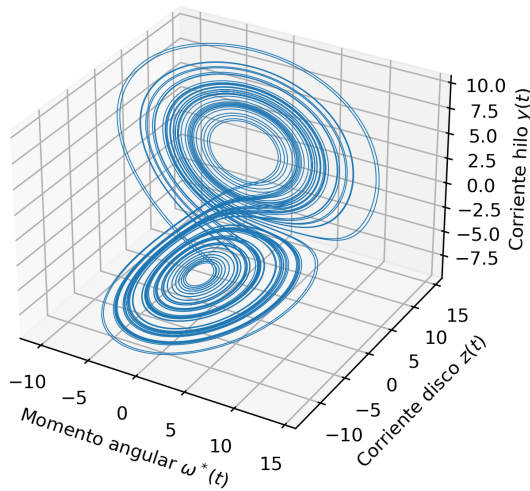
Trayectoria en espacio de fases con $R > R_C$ 

FIGURA 4.29 – Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

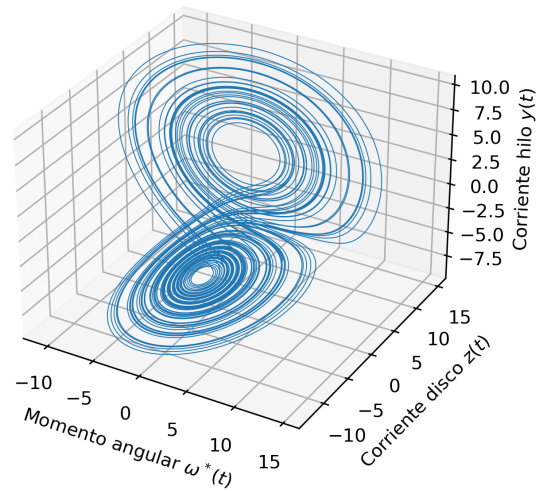
Trayectoria en espacio de fases con $R > R_C$ 

FIGURA 4.30 – Diagrama de fase para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

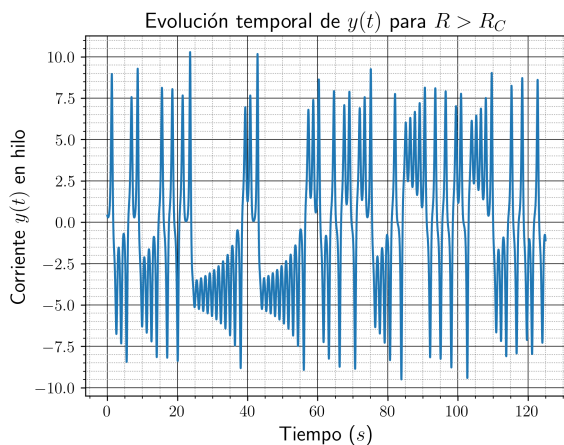


FIGURA 4.31 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

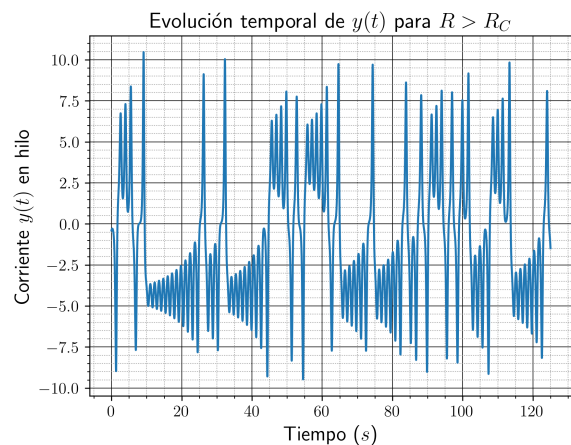


FIGURA 4.32 – Evolución de la corriente $y(t)$ en el hilo para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

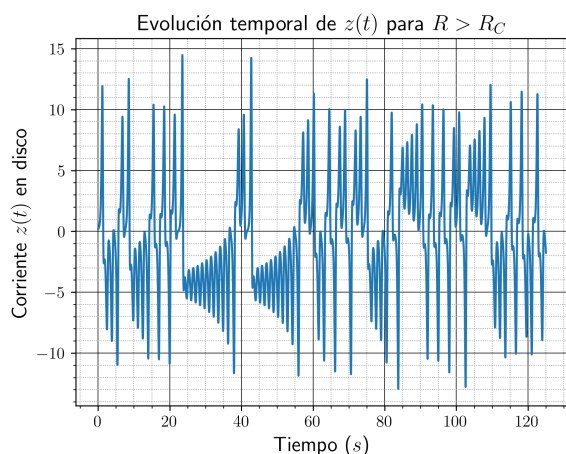


FIGURA 4.33 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

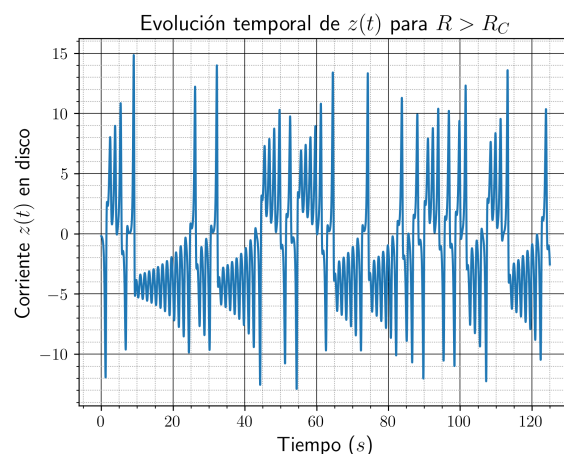


FIGURA 4.34 – Evolución de la corriente $z(t)$ en el disco para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

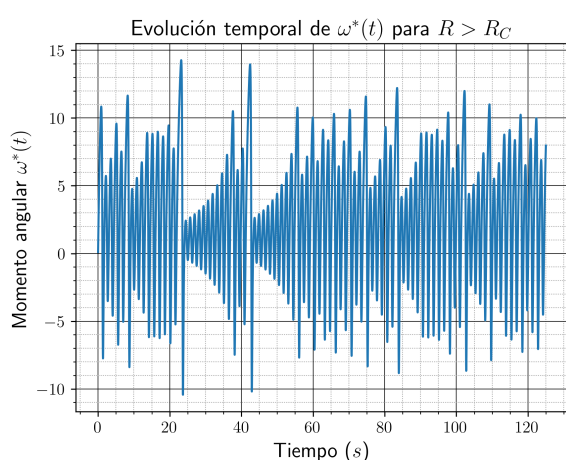


FIGURA 4.35 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

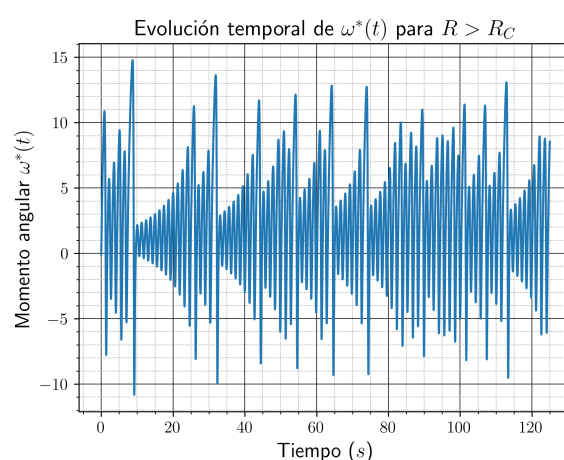


FIGURA 4.36 – Evolución del momento angular $\omega^*(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

Por último, para completar el análisis del régimen V de la dinamo de Robbins, veremos qué ocurre cuando se toma un R mayor — por ejemplo, de $R = 100$ — y el punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$. En este caso, existe un patrón de alternancias, prácticamente regular, entre valores positivos y negativos de las corrientes $y(t)$ y $z(t)$. Las representaciones gráficas para esta situación se encuentran en las Figuras 4.37 y 4.38, respectivamente.

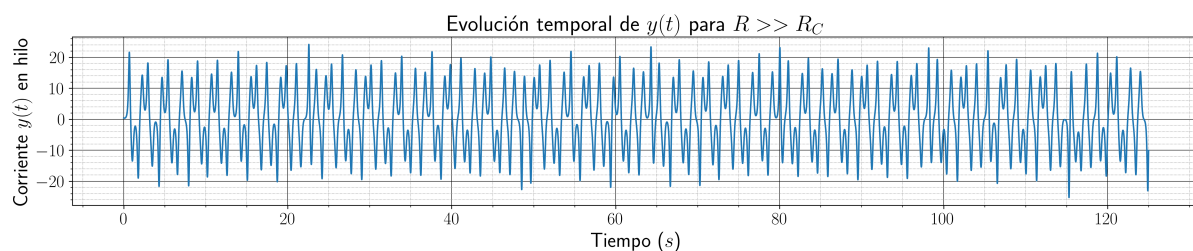


FIGURA 4.37 – Evolución de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 100$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

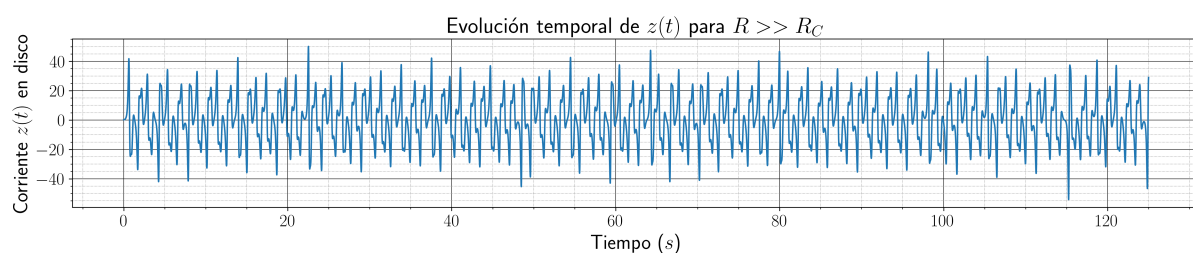


FIGURA 4.38 – Evolución de la corriente $z(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 100$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

4.4 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS Y APLICACIÓN A LA GEODINAMO TERRESTRE

En el apartado anterior se ha realizado un análisis exhaustivo del comportamiento del modelo de la dinamo de Robbins en función del valor de R —con $\nu = 1$ y $\sigma = 5$ fijos— a través de las variables $\omega^*(t)$ (momento angular), $y(t)$ (corriente en el hilo) y $z(t)$ (corriente en el disco), dadas dos o tres condiciones iniciales. Debido a que la dinamo de Robbins se utiliza usualmente en la literatura como base para elaborar modelos más complejos, no se ha encontrado ninguna referencia que muestre con detalle las evoluciones temporales de $\omega^*(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en los distintos regímenes.

Por lo tanto, las únicas referencias que podemos emplear para comparar los resultados obtenidos son [65] (que se limita a realizar un esbozo de las trayectorias en el espacio de fases para los regímenes II, IV y V) y [32] (que realiza una gráfica de la corriente $y(t)$ respecto del tiempo para los regímenes IV y III, siendo $\nu = 1$ y $\sigma = 5$). En ambos casos, los resultados obtenidos concuerdan con los mostrados por estas dos publicaciones.

Para poder aplicar los resultados obtenidos en el modelo de la dinamo de Robbins al registro de inversiones de polaridad de la Figura 1.4, realizaremos una representación de las funciones de densidad de probabilidad (nombradas también como FDP y PDF) de la corriente en el hilo $y(t)$ para los regímenes IV y V. En dichos regímenes, el sistema no convergía y aparecían inversiones de $y(t)$. Como ya se comentó al final del Capítulo 1, estudiaremos la corriente $y(t)$ porque, al presentar un movimiento acimutal, creará la componente poloidal del campo magnético autoinducido en la dinamo.

Dado que en la literatura no se han encontrado gráficas que representen la distribución de corrientes $y(t)$ positivas y negativas en el modelo de la dinamo de Robbins, se han simulado, de nuevo, los regímenes IV y V con las condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$. En el caso del régimen V, debe emplearse un valor bajo de R

dentro del intervalo establecido, escogiendo, por tanto, $R = 20$ (el mismo valor de la [Subsección 4.3.5](#)). Para una mayor precisión en dicha distribución, se ha tomado un marco temporal total de $[t_0, t_{fin}] = [0, 1000]$ s y un paso temporal $h = 0.0001$ s. Las gráficas de la FDP para el régimen IV se muestran en las [Figuras 4.39 y 4.40](#); las FDP del régimen V se corresponden con las [Figuras 4.41 y 4.42](#).

De acuerdo al registro de inversiones magnéticas, en las condiciones actuales que presenta la Tierra, el régimen que modele su campo magnético no debe converger a una situación de estabilidad en un tiempo lo suficientemente amplio (caso correspondiente a los regímenes IV y V). Además, tal y como se explicó en la [Subsección 1.2.3](#), la historia magnética terrestre favorece el estado de polaridad normal frente al invertido, por lo que el régimen que más se asemeje a este registro debe priorizar corrientes $y(t)$ negativas, es decir, corrientes $y(t)$ que giren en sentido dextrógiro.

Por consiguiente, el caso de la [Figura 4.40](#) puede ser descartado ya que se aprecia una ligera preferencia por corrientes $y(t)$ positivas (hecho que implica un mayor número de polaridades invertidas en el campo magnético autoinducido por el sistema). El resto de funciones de densidad de probabilidad, por el contrario, muestran una ligera preferencia hacia $y(t)$ negativas. Esta tendencia es mayor en las [Figuras 4.39 y 4.42](#), mientras que la curva de la [Figura 4.41](#) presenta una mayor simetría en torno a $y = 0$ que el resto de FDP.

A falta de referencias que presenten de forma muy detallada las distribución de polaridades magnéticas terrestres concluimos, por tanto, que, empleando el modelo de la dinamo de Robbins, los casos mostrados por la [Figura 4.39](#) (régimen IV con $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, $R = 14.75$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$), la [Figura 4.41](#) (régimen V con $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, $R = 20$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$) y la [Figura 4.42](#) (régimen V con $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$, $R = 20$, $\nu = 1$ y $\sigma = 5$) pueden servir como estimación de las condiciones del núcleo que generan el campo magnético terrestre.

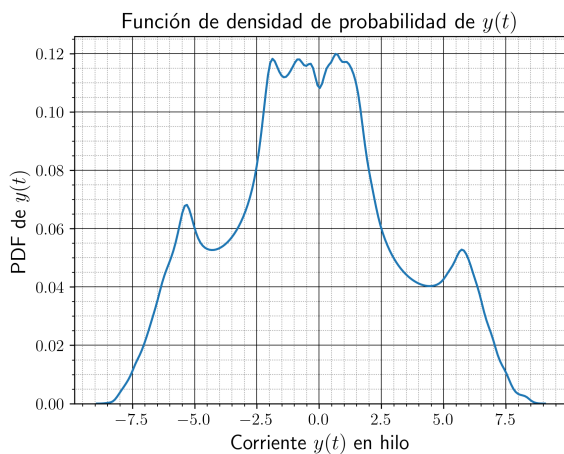


FIGURA 4.39 – Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

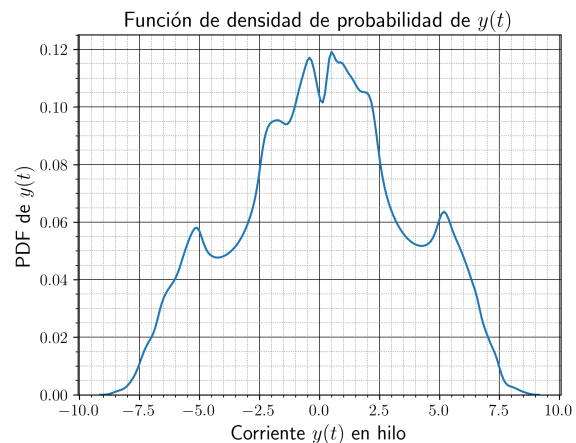


FIGURA 4.40 – Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen IV del modelo de dinamo de Robbins con $R = 14.75$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

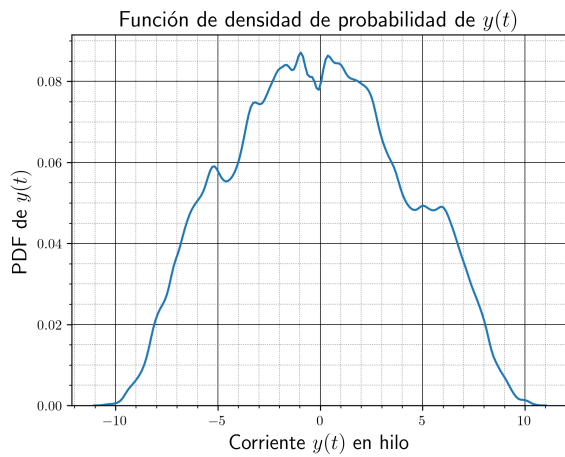


FIGURA 4.41 – Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

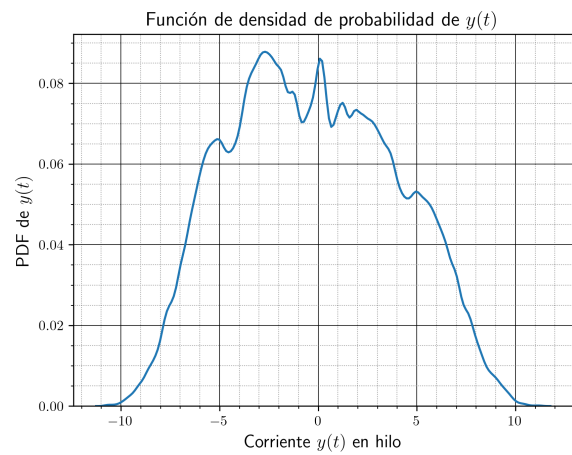


FIGURA 4.42 – Función de densidad de probabilidad de la corriente $y(t)$ para el régimen V del modelo de dinamo de Robbins con $R = 20$, $\nu = 1$, $\sigma = 5$ y un punto inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$.

ESTUDIO DE LAS INVERSIONES DE LA VELOCIDAD EN UN FLUJO TURBULENTO DE VON KÁRMÁN

En este capítulo, culminaremos el estudio de las inversiones magnéticas mediante las simulaciones numéricas de dos ecuaciones diferenciales estocásticas y comparando los resultados obtenidos con los publicados por [1], [2], [3] y otros autores.

5.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El planteamiento del experimento VKS (Sección 3.4) consistía en demostrar experimentalmente la transformación de la energía cinética —generada por el movimiento de un fluido conductor— en energía magnética y, como consecuencia, que dicho proceso fuese el germen del efecto dinamo en planetas y otro tipo de cuerpos celestes.

Basándose en dicho experimento, [1], [2] y [3], para estudiar el comportamiento de un flujo turbulento de Von Kármán similar al de VKS, realizan un montaje experimental consistente en un cilindro de $D = 2R = 20$ cm de diámetro relleno de agua y dos propulsores circulares —situados en los extremos $z = -H/2$ (propulsor SUR) y $z = +H/2$ (propulsor NORTE), siendo H la altura del cilindro— que harán modificar el número de Reynolds Re del fluido según su velocidad de rotación $V_{prop} = 2\pi R_{prop} f_{prop}$. Dichos propulsores rotan individualmente en sentido antihorario y, al encontrarse enfrentados entre sí, los sentidos de rotación son opuestos uno con respecto al otro. Los esquemas de dicho montaje experimental y del movimiento del fluido contenido en su interior se encuentran en las Figuras 5.1 y 5.2, respectivamente.

En este caso, estudiaremos de forma numérica la velocidad acimutal normalizada u_θ del fluido —definida de forma experimental como $u_\theta = v_\theta/V_{prop}$ — en un punto $r = 0.9R$, $z = 0$ en el interior del dispositivo experimental y con un número de Reynolds del orden $Re = \mathcal{O}(10^5)$, empleando para ello la ecuación diferencial estocástica propuesta en [1]:

$$\frac{du_\theta}{dt} = \epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \sqrt{2B}\xi(t), \quad (5.1)$$

donde g es un parámetro de control de la profundidad del potencial empleado, ϵ es un parámetro relacionado con el número de Reynolds (Re) que adquiere valores en el intervalo $-g^2/4 < \epsilon < 0$ y $\xi(t)$ es un parámetro estocástico de ruido blanco gaussiano con un nivel B —que puede interpretarse como la tasa de turbulencia—. Para estudiar el fluido de acuerdo con las condiciones mencionadas anteriormente, los valores de dichos parámetros serán $g = 2$, $\epsilon = -0.05$ y $B = 1$ (los empleados en [2]).

El punto $r = 0.9R$, $z = 0$ presenta una gran ventaja a la hora de simular las condiciones del fluido porque, al encontrarse cercano a las paredes del cilindro, evita las turbulencias que genera el movimiento de los propulsores en el centro del sistema (ver Figura 5.2). Además, una posición en el ecuador del cilindro permite estudiar de forma igualitaria el fluido situado en sus partes norte y sur. Las Ecuaciones 5.1 y 5.2 simularán la velocidad acimutal del fluido únicamente en dicho punto.

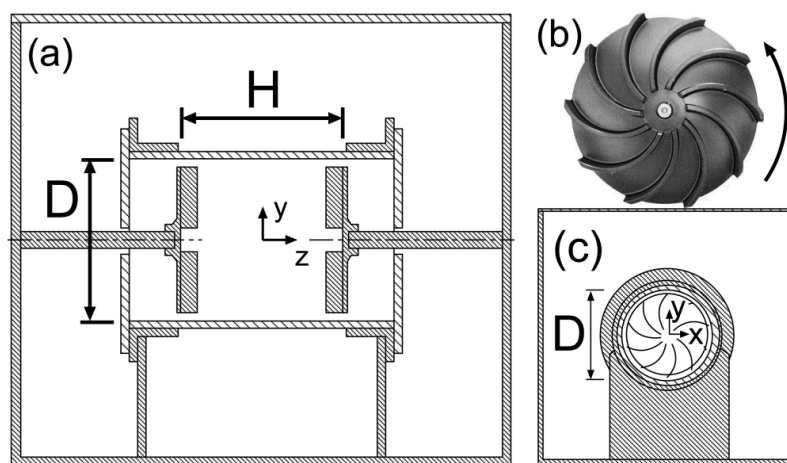


FIGURA 5.1 – Montaje experimental en los estudios [3], [1] y [2]. (a) Cilindro horizontal con propulsores, en el interior del tanque. El propulsor norte está situado en $z = H/2$, y el propulsor sur, en $z = -H/2$. (b) Fotografía del propulsor. (c) Esquema del propulsor sur visto desde el plano ecuatorial. El sentido de la rotación con el lado convexo fija una velocidad acimutal positiva. Imagen extraída de [2].

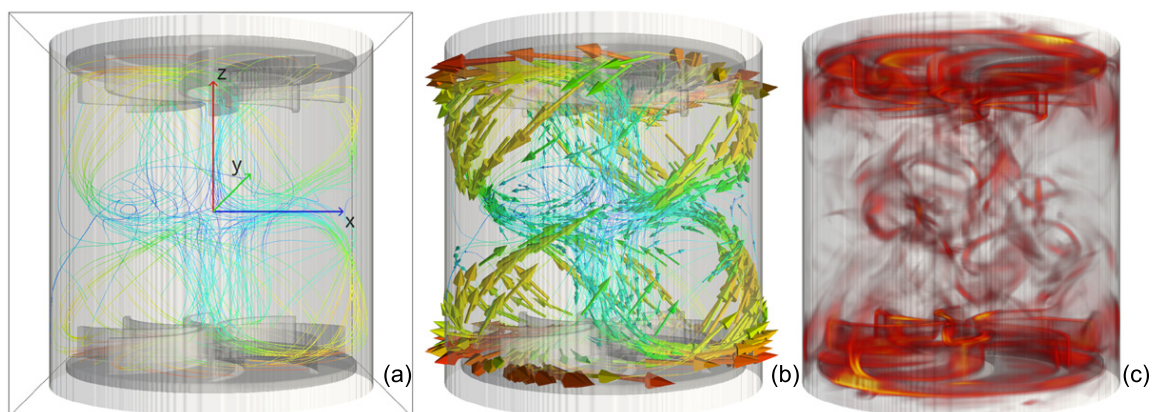


FIGURA 5.2 – Esquema de (a) líneas de corriente, (b) campo vectorial medio y (c) vorticidad similares a las del flujo de Von Kármán que se genera en el montaje experimental. Imagen extraída de [39].

Posteriormente, analizaremos una extensión de la **Ecuación 5.1**, propuesta en [1], y que consiste en añadir un término $\kappa\Delta$ en la parte no estocástica de la ecuación y que sirve para forzar dos estados de simetría en el sistema:

$$\frac{du_\theta}{dt} = \epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \kappa\Delta + \sqrt{2B}\xi(t). \quad (5.2)$$

A la hora de simular la **Ecuación 5.2**, se utilizarán los mismos valores de g , ϵ y B que en el caso anterior. Δ es un parámetro que define la diferencia entre las frecuencias de rotación f_N y f_S entre los propulsores norte y sur [3]:

$$\Delta = \frac{f_S - f_N}{f_S + f_N}. \quad (5.3)$$

Los valores de Δ para la **Ecuación 5.2** serán los empleados por [1], es decir, $\Delta = 0.0017$ ($\Delta = -0.0017$) para favorecer una tendencia a velocidades acimutales $u_\theta > 0$ ($u_\theta < 0$, resp.).

En cuanto al dato de κ en la **Ecuación 5.2**, dado que [1] únicamente menciona que $\kappa > 0$ pero no especifica ningún valor en concreto, se ha decidido utilizar, a criterio de la autora, $\kappa = 20$, $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$.

Si bien el parámetro $\kappa\Delta$ es una constante que podía haberse unificado como un solo parámetro, se ha decidido emplear valores diferenciados para Δ y κ para que nuestro estudio sea más similar al de la publicación [1].

Las **Ecuaciones 5.1** y **5.2** surgen a partir de un potencial V , pudiéndose expresar de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial V}{\partial u_\theta} = \frac{du_\theta}{dt} = \epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \sqrt{2B}\xi(t), \quad (5.4)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial u_\theta} = \frac{du_\theta}{dt} = \epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \kappa\Delta + \sqrt{2B}\xi(t). \quad (5.5)$$

En las **Figura 5.3** se ilustra cómo varía el potencial V (según la **Ecuación 5.4**) para varios valores de g que, como se ha mencionado previamente, es un parámetro del control de la profundidad del potencial. Así, a mayor valor de g , mayor es la profundidad de estos pozos. En las **Figuras 5.4** y **5.5** se encuentra representado el potencial V para dos valores $\Delta = \pm 0.0017$ y, para cada Δ , tres parámetros $\kappa = 20$, $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$. Cuanto mayor sea κ , la profundidad de uno de los pozos aumenta, mientras que la del otro, disminuye.

Con la **Ecuación 5.4** y la **Figura 5.3**, los mínimos del potencial V determinarán, dependiendo de los valores ϵ y g , el número de pozos y las velocidades u_θ donde se encuentran. Ignorando el término estocástico (tomando $\xi(t) = 0$) para una mayor facilidad de cálculo, los mínimos del potencial V en la **Ecuación 5.4** serán:

$$u_\theta = \pm \left(\frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4\epsilon}}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Gracias a la relación $-\partial V/\partial u_\theta = du_\theta/dt$, se pueden calcular los máximos de u_θ ; estos proporcionarán las soluciones estables hacia las que tiende el sistema en un marco temporal elevado, que son las siguientes:

$$u_{\theta 0} = 0, \quad u_{\theta N} = - \left(\frac{g + (g^2 + 4\epsilon)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}, \quad u_{\theta S} = \left(\frac{g + (g^2 + 4\epsilon)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

De acuerdo con [3], la solución $u_{\theta 0} = 0$ existe para cualquier g y ϵ , pero será solamente estable si $\epsilon < 0$. En cuanto a $u_{\theta N}$ y $u_{\theta S}$, sólo existirán si $-g^2/4 < \epsilon$. En el análisis posterior de los resultados obtenidos en la simulación, la velocidad $u_{\theta 0}$ se corresponderá con un máximo local en la función de densidad de probabilidad (abreviada, recordemos, como FDP o PDF). Los puntos $u_{\theta N}$ y $u_{\theta S}$ serán los máximos de la función FDP en los estados *norte* y *sur*, respectivamente.

La Ecuación 5.5, que incluye el término extra $\kappa\Delta$, no presenta solución analítica, por lo que los puntos $u_{\theta N}$, $u_{\theta S}$ y $u_{\theta 0}$ se estudiarán únicamente a partir de las gráficas FDP en la Subsección 5.3.2.

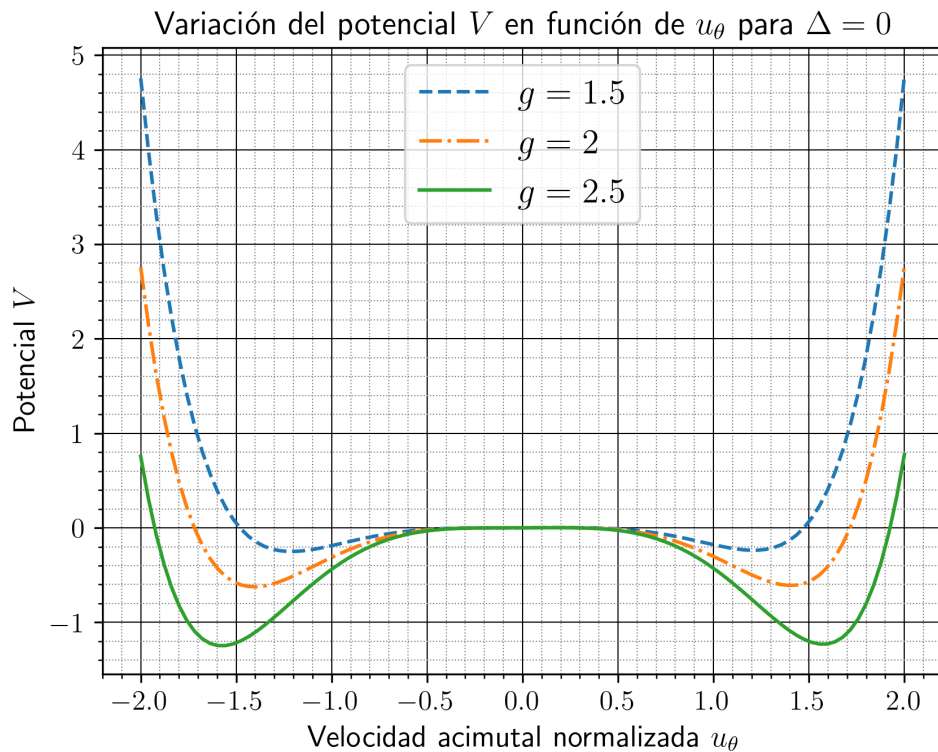


FIGURA 5.3 – Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para tres valores $g = 1.5$, $g = 2$ (valor empleado en la simulación) y $g = 2.5$, empleando la Ecuación 5.4 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$ y $\epsilon = -0.05$.

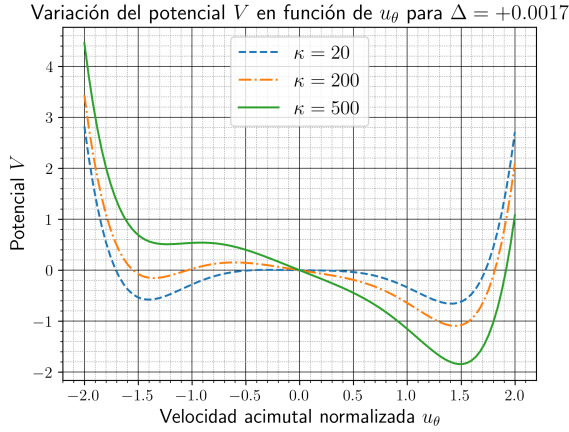


FIGURA 5.4 – Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para $\Delta = 0.0017$ y tres valores diferentes de κ , empleando la Ecuación 5.5 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$, $\epsilon = -0.05$ y $g = 2$.

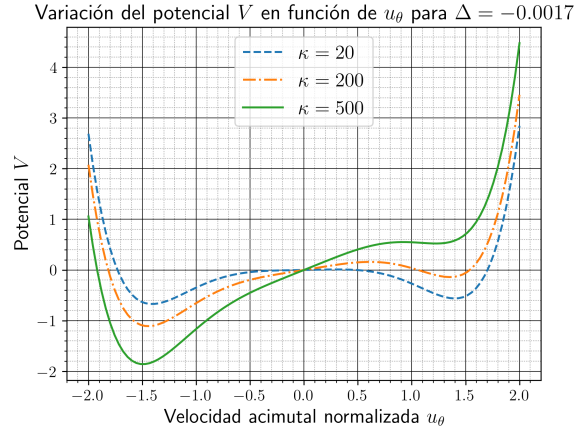


FIGURA 5.5 – Variación del potencial V en función de la velocidad acimutal normalizada para $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ , empleando la Ecuación 5.5 (con $\xi(t) = 0$). El resto de parámetros presentan los valores utilizados en este estudio: $B = 1$, $\epsilon = -0.05$ y $g = 2$.

Por último, si definimos el ruido blanco como la derivada temporal del proceso de Wiener en la forma $\xi(t) = \frac{dW_t}{dt}$, las Ecuaciones 5.1 y 5.2 pueden reescribirse como:

$$du_\theta = (\epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5) dt + \sqrt{2B} dW_t. \quad (5.8)$$

y

$$du_\theta = (\epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \kappa \Delta) dt + \sqrt{2B} dW_t, \quad (5.9)$$

respectivamente. Estas serán las ecuaciones que se usarán para simular el flujo turbulento de Von Kármán.

5.2 MÉTODO DE EULER-MARUYAMA

Para simular el sistema se emplearán las Ecuaciones 5.8 y 5.9, dos SDEs interpretadas en el sentido de Ito. Por lo tanto, aplicaremos un método de diferencias finitas conocido como *método de Euler-Maruyama*, y cuyo esquema básico, dada una ecuación diferencial estocástica

$$dx = f(x) dt + g(x) dW_t, \quad (5.10)$$

es el siguiente [86]:

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i)h + g(x_i)\mu_i(h)^{1/2}, \quad (5.11)$$

donde el intervalo de definición $[t_0, t_{\text{fin}}]$ ha sido discretizado de tal manera que $h = (t_{\text{fin}} - t_0)/N = t_{i+1} - t_i$ y $\mu_i = \xi_i(h)^{1/2}$. Este último término presenta una distribución normal con media 0 y varianza 1, pudiéndose aproximar como $\mu_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ξ_i es el término estocástico seleccionado en cada paso temporal h . Además, en la Ecuación 5.11, el término $h^{1/2}$ es un factor de normalización que aparece debido a que el paso infinitesimal dW en un proceso de Wiener presenta una desviación estándar de $h^{1/2}$ ([87]). Para más información acerca del método numérico, se recomienda consultar la referencia [88].

Por último, estudiaremos la convergencia del método de Euler-Maruyama mediante la condición de convergencia fuerte. Así, dada la solución analítica general de la Ecuación 5.10:

$$X(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s)) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(X(s)) dW_s, \quad (5.12)$$

y su solución por el método E-M expresada en función de la variable W_t :

$$X_{i+1} = X_i + f(X_i)h + g(X_i)\Delta W_i, \quad (5.13)$$

si se realiza la siguiente proposición:

Proposición: *Los coeficientes $f(x)$ y $g(x)$ son globalmente Lipschitz y satisfacen la condición de crecimiento lineal, entonces existe una K para la cual, para todo $x, x' \in \mathbb{R}$:*

$$|f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| \leq K|x - x'| \quad y \quad (5.14)$$

$$|f(x)| + |g(x)| \leq K(1 + |x|), \quad (5.15)$$

la convergencia fuerte del método E-M establece que:

$$\sup_{t_0 \leq t_i \leq t_{\text{fin}}} \mathbb{E}[|X_i - X(t_i)|] \leq K(h)^p \quad (5.16)$$

De manera general, el orden p de convergencia de Euler-Maruyama es de $p = \frac{1}{2}$; no obstante, si $g(x) = \text{cte}$, entonces el orden de convergencia es $p = 1$ ([89]).

El estudio de la convergencia del método de Euler-Maruyama se realizará a partir de los resultados obtenidos en la [Ecuación 5.8](#), y se muestra en la [Sección 6](#).

5.3 RESULTADOS

Como ya se ha comentado previamente, para calcular la velocidad acimutal normalizada u_θ de las [Ecuaciones 5.8](#) y [5.9](#), emplearemos el método de Euler Maruyama partiendo de un tiempo inicial $t_0 = 0$ s hasta un $t_{\text{fin}} = 50000$ s con un paso de $h = 0.005$ s. Como parámetros fijos, se tomarán $g = 2$, $\epsilon = -0.05$ y $B = 1$ (tomados de [2]). Como valores iniciales en la simulación, se tomarán las velocidades $u_{\theta \text{ ini}} = 0$, $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$.

La velocidad $u_{\theta \text{ ini}} = 0$ es la mencionada por la publicación [2]. Las otras velocidades iniciales, $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$, han sido escogidas por la autora, después de realizar varias pruebas numéricas, para ampliar el estudio numérico realizado por [1], [2] y [3].

Recordando lo mencionado al principio de la sección, experimentalmente se define la velocidad acimutal normalizada como $u_\theta = v_\theta/V_{\text{prop}}$. De este modo, los valores iniciales para la velocidad considerados en el algoritmo presentan tres situaciones distintas. Cuando $u_{\theta \text{ ini}} = 0$, el fluido confinado parte desde el reposo; si $u_{\theta \text{ ini}} = 1$, el módulo de la velocidad inicial del fluido es igual a la de los propulsores y gira en sentido antihorario (levógiro). Por último, si $u_{\theta \text{ ini}} = -2$, la velocidad es el doble de la de los propulsores y en sentido horario (dextrógiro).

Después, para realizar el análisis de los resultados, graficaremos primero la variación de u_θ con respecto al tiempo. Posteriormente, se obtendrá la función de densidad de probabilidad (abreviada como *función PDF* o *función FDP*) a fin de visualizar la probabilidad relativa de que u_θ adquiera distintos valores dentro del recorrido de la función. Es importante mencionar que, debido a los numerosos datos obtenidos numéricamente, las gráficas $t-u_\theta$ se han representado tomando un punto de cada cien, con lo que se consigue una mejor visualización sin pérdida de información acerca del comportamiento del sistema.

5.3.1 Resultados para $\Delta = 0$ (Ecuación 5.8)

Realizando la simulación de la Ecuación 5.8 para los puntos iniciales $u_{\theta \text{ ini}} = 0$ —Figura 5.6—, $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ —Figura 5.7— y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$ —Figura 5.8— se puede observar, de acuerdo con los resultados experimentales de [1], [2] y [3], una alternancia espontánea (debido al parámetro estocástico de la ecuación) entre valores positivos y negativos de la velocidad u_{θ} . Como se ha explicado anteriormente, las velocidades positivas (en su mayoría) se asocian físicamente con un mayor movimiento del fluido cerca del propulsor situado en $z = -H/2$ —que denominaremos estado *sur*—, mientras que las velocidades negativas (igualmente en su mayoría) ocurrirán cuando el fluido presente una preferencia al movimiento alrededor del propulsor $z = H/2$ —estado *norte*—. El código de Python correspondiente se encuentra en la Sección 6.

Para realizar una comparativa visual de las distribuciones que presenta la velocidad u_{θ} en función de la condición inicial de la simulación, en la Figura 5.9 viene representada la gráfica FDP para los tres puntos $u_{\theta} = 0$, $u_{\theta} = 1$ y $u_{\theta} = -2$. Es importante notar que se aprecian dos máximos simétricos de la función, a los que llamaremos $u_{\theta N}$ —correspondiente al máximo para el estado norte— y $u_{\theta S}$ —máximo en el estado sur—. También existe una cierta probabilidad de que aparezcan velocidades nulas, denominadas *estado cero*.

Los datos de los máximos obtenidos para los estados norte y sur, así como los valores de la función de densidad de probabilidad correspondientes a dichos estados y al estado cero se encuentran en la Tabla 5.1.

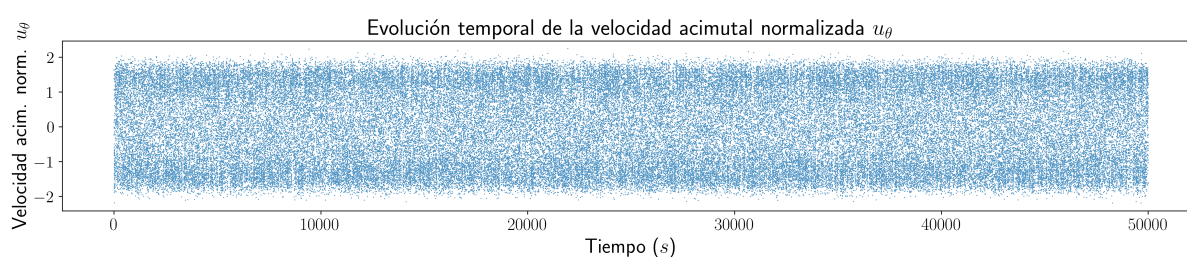


FIGURA 5.6 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta \text{ ini}} = 0$ y $\Delta = 0$.

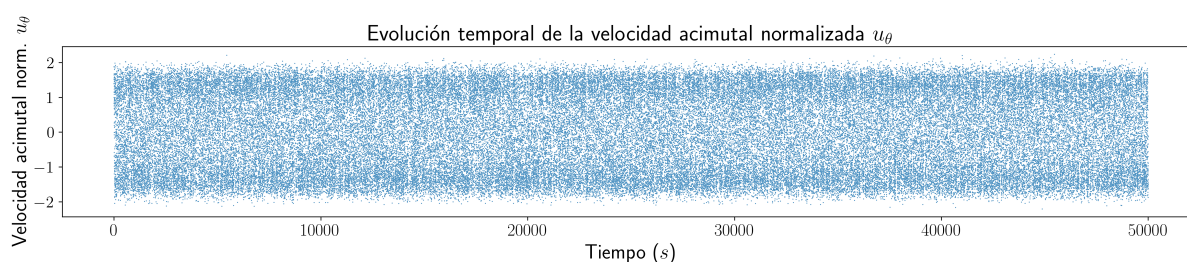


FIGURA 5.7 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $\Delta = 0$.

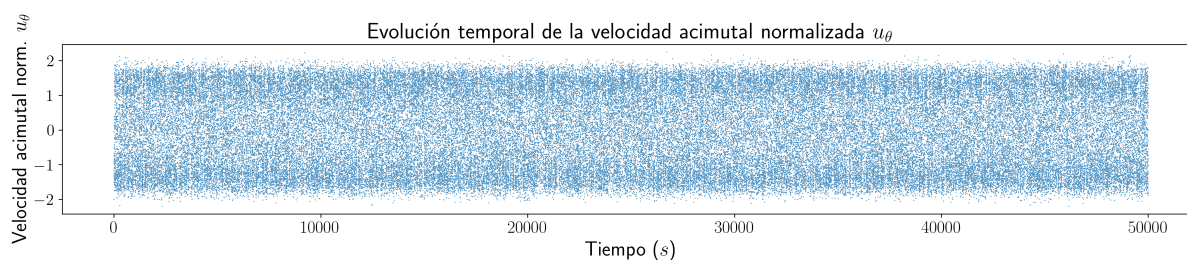


FIGURA 5.8 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t una velocidad inicial $u_{\theta ini} = -2$ y $\Delta = 0$.

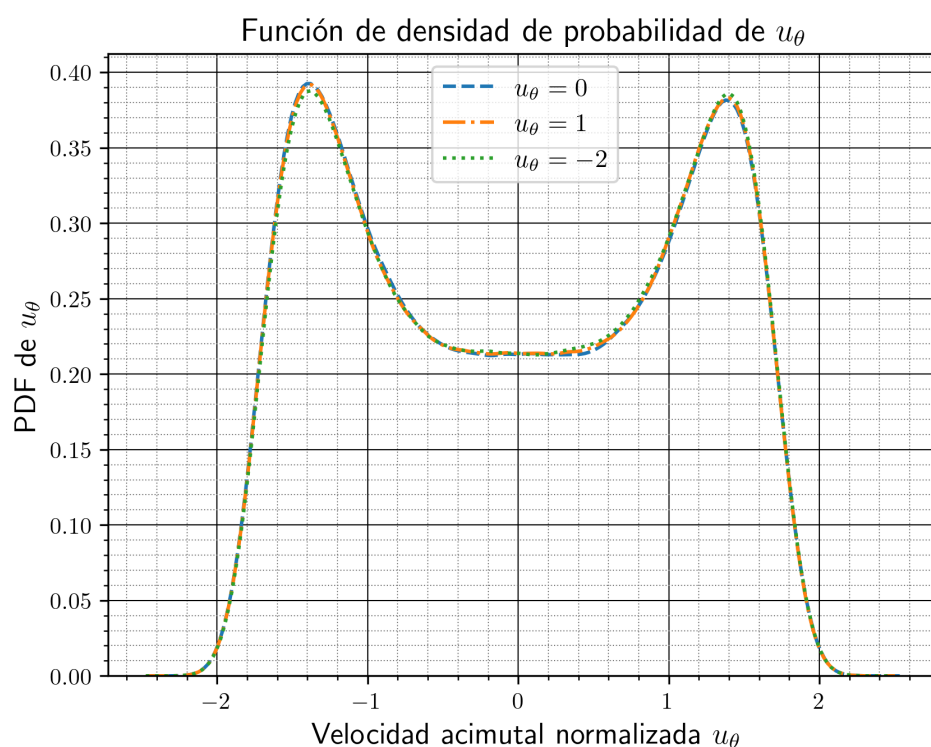


FIGURA 5.9 – Función de densidad de probabilidad con la frecuencia relativa de u_θ para $u_{\theta ini} = 0$, $u_{\theta ini} = 1$ y $u_{\theta ini} = -2$ con $\Delta = 0$.

	Máx. norte $u_{\theta N}$	PDF $u_{\theta N}$	Máx. sur $u_{\theta S}$	PDF $u_{\theta S}$	PDF $u_\theta = 0$
$u_\theta = 0$	-1.3796	0.3925	1.3771	0.3816	0.2172
$u_\theta = 1$	-1.3974	0.3919	1.4026	0.3829	0.2205
$u_\theta = -2$	-1.3797	0.3878	1.4049	0.3858	0.2190

TABLA 5.1 – Tabla con los máximos de la velocidad acimutal normalizada u_θ y los valores correspondientes a la función de densidad de probabilidad para las tres condiciones iniciales $u_{\theta ini} = 0$, $u_{\theta ini} = 1$, $u_{\theta ini} = -2$ y el estado cero $u_\theta = 0$.

5.3.2 Resultados para $\Delta \neq 0$ (Ecuación 5.9)

Si se fija una diferencia de $|\Delta| = 0.0017$ entre las frecuencias de rotación f_N y f_S de los propulsores y se multiplica dicha diferencia por varios valores del parámetro κ , el sistema

comenzará a presentar una tendencia hacia uno de los estados sur o norte. El algoritmo utilizado en esta parte se muestra en la [Sección 6](#).

Por ejemplo, considerando que el fluido se encuentra inicialmente en reposo ($u_{\theta \text{ ini}} = 0$) y con un parámetro fijo de Δ , si el valor de κ es muy bajo —por ejemplo, $\kappa = 20$ —, la diferencia entre dicha situación y la que se presenta cuando $\Delta = 0$ es apenas imperceptible. Para observar este hecho, basta con comparar las evoluciones temporales mostradas en las [Figuras 5.6 y 5.10](#).

Si tomamos ahora un valor positivo de Δ ($\Delta = 0.0017$), a medida que aumentamos κ ([Figuras 5.11 y 5.12](#)), el número de puntos con velocidades positivas es cada vez mayor, alcanzando finalmente un predominio casi absoluto del estado sur cuando $\kappa = 500$. En el caso opuesto, donde $\Delta = -0.0017$, se da la situación inversa: El sistema presenta una tendencia progresiva hacia velocidades negativas hasta el dominio del estado norte cuando $\kappa = 500$ —[Figuras 5.13, 5.14 Y 5.15](#)—.

Para una mayor facilidad, continuaremos el análisis de los resultados empleando las funciones de densidad de probabilidad, explicando también el comportamiento obtenido para los otros puntos iniciales $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$ considerados.

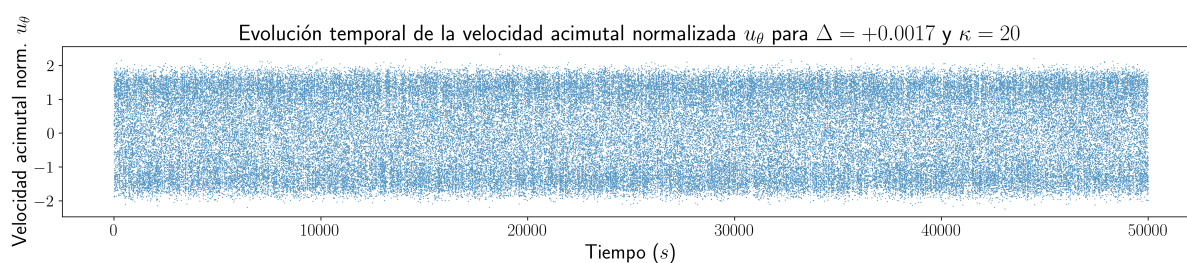


FIGURA 5.10 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta} = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 20$.

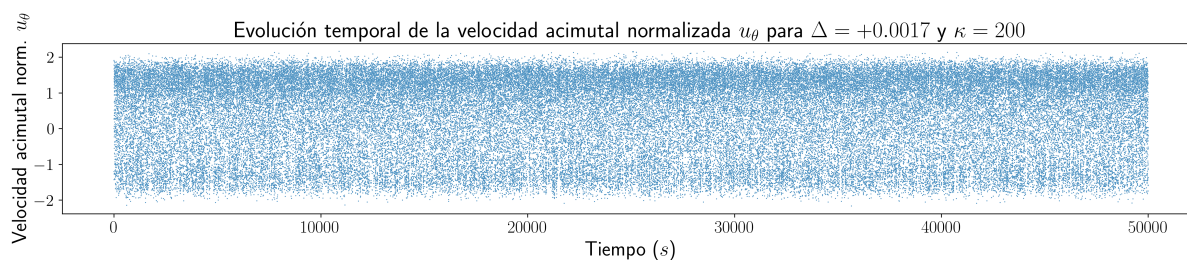


FIGURA 5.11 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta} = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 200$.

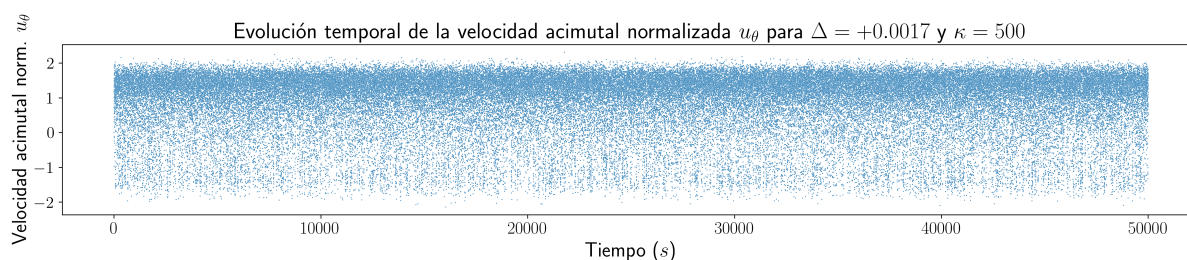


FIGURA 5.12 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_{\theta} = 0$ y parámetros $\Delta = 0.0017$ y $\kappa = 500$.

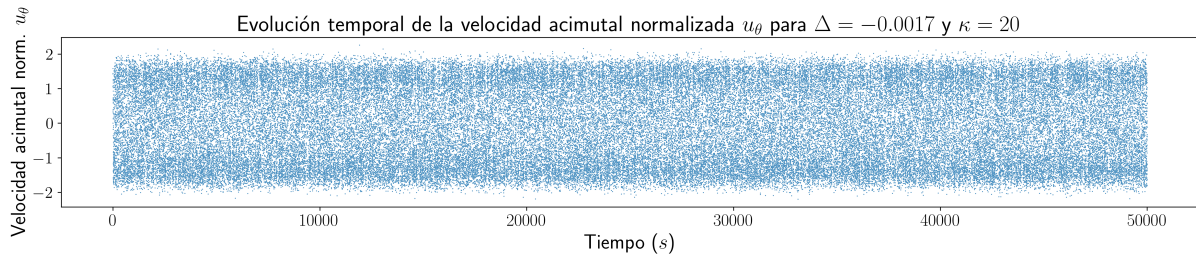


FIGURA 5.13 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 20$.

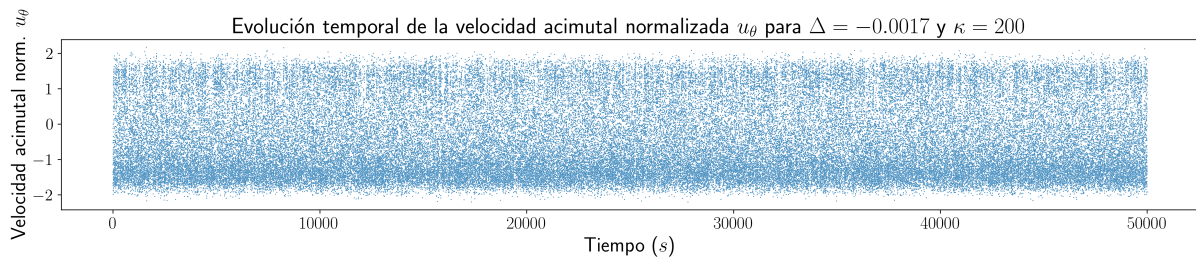


FIGURA 5.14 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 200$.

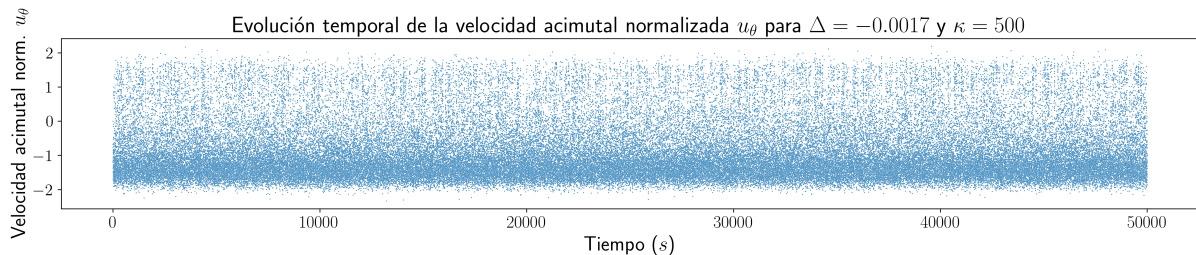


FIGURA 5.15 – Variación del valor de la velocidad acimutal normalizada u_θ respecto del tiempo t para una velocidad inicial $u_\theta = 0$ y parámetros $\Delta = -0.0017$ y $\kappa = 500$.

Atendiendo ahora a las gráficas FDP, tomando una velocidad acimutal normalizada inicial de $u_{\theta \text{ ini}} = 0$, las funciones de densidad de probabilidad se encuentran representadas en las Figuras 5.16 (caso $\Delta > 0$) y 5.17 (caso $\Delta < 0$). Igualmente, las gráficas FDP con $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ son las Figuras 5.18 y 5.19 (para $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$, respectivamente); para $u_{\theta \text{ ini}} = -2$, éstas son las Figuras 5.20 ($\Delta > 0$) y 5.21 ($\Delta < 0$). Además, los datos obtenidos para los máximos de u_θ y sus densidades de probabilidad correspondientes se muestran en las Tablas 5.2 y 5.3.

Continuando con el análisis de los resultados, se puede observar que el predominio de uno u otro estado se traduce (como es lógico) en una mayor densidad de probabilidad en las gráficas FDP. Por tanto, mientras que en el caso $\kappa = 20$ uno de los dos máximos es ligeramente más probable que su simétrico, cuando $\kappa = 200$, el dominio de uno de los estados norte o sur es más explícito. Así, dependiendo de si $\Delta > 0$ o $\Delta < 0$, el punto máximo $u_{\theta \text{ max}} < 0$ o $u_{\theta \text{ max}} > 0$ (respectivamente) de los dos que aparecían resolviendo la Ecuación 5.8 (es decir, cuando $\Delta = 0$) deja ahora de serlo. Finalmente, si $\kappa = 500$, la presencia prácticamente total de un solo estado hace que la curva FDP deje de tener la llamada forma de doble joroba.

Por otro lado, otra de las observaciones que se tienen a raíz de los datos en las Tablas 5.2 y 5.3 es que las velocidades acimutales normalizadas u_θ correspondientes a los máximos son

ligeramente mayores (estado sur) o menores (estado norte) cuanto más alto sea el valor de κ . Dicho de otra manera, los máximos en su conjunto, cuando $\kappa = 20$, tienen un valor aproximado de $u_{\theta \max} \approx \pm 1.40$. Si $\kappa = 200$, los máximos se encuentran en unas posiciones $|u_{\theta}|$ algo superiores con respecto a $\kappa = 20$ y, si $\kappa = 500$, las velocidades máximas son $u_{\theta} \approx \pm 1.50$.

		$\Delta = +0.0017$	$\Delta = -0.0017$
$u_{\theta} = 0$	$k = 20$	1.4006	-1.3932
	$k = 200$	1.4175	-1.4267
	$k = 500$	1.4856	-1.4843
$u_{\theta} = 1$	$k = 20$	1.3848	-1.3987
	$k = 200$	1.4392	-1.4270
	$k = 500$	1.4874	-1.4940
$u_{\theta} = -2$	$k = 20$	1.4032	-1.3939
	$k = 200$	1.4233	-1.4191
	$k = 500$	1.4757	-1.4925

TABLA 5.2 – Tabla con los máximos globales de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} para las tres condiciones iniciales $u_{\theta \text{ ini}} = 0$, $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$, $\Delta = \pm 0.0017$ y tres valores positivos $\kappa = 20$, $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$.

		$\Delta = +0.0017$	$\Delta = -0.0017$
$u_{\theta} = 0$	$k = 20$	0.4099	0.4097
	$k = 200$	0.5767	0.5891
	$k = 500$	0.8706	0.8768
$u_{\theta} = 1$	$k = 20$	0.4038	0.4029
	$k = 200$	0.5778	0.5744
	$k = 500$	0.8799	0.8709
$u_{\theta} = -2$	$k = 20$	0.4089	0.3979
	$k = 200$	0.5714	0.5799
	$k = 500$	0.8710	0.8737

TABLA 5.3 – Tabla con las densidades de probabilidad correspondientes a los máximos globales de la velocidad acimutal normalizada u_{θ} (Tabla 5.2) para las tres condiciones iniciales $u_{\theta \text{ ini}} = 0$, $u_{\theta \text{ ini}} = 1$ y $u_{\theta \text{ ini}} = -2$, $\Delta = \pm 0.0017$ y tres valores positivos $\kappa = 20$, $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$.

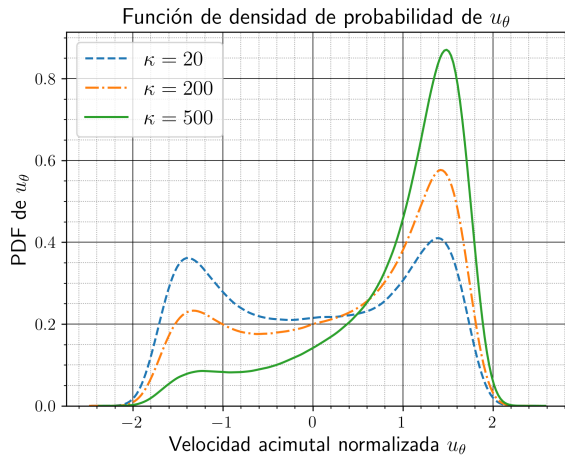


FIGURA 5.16 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

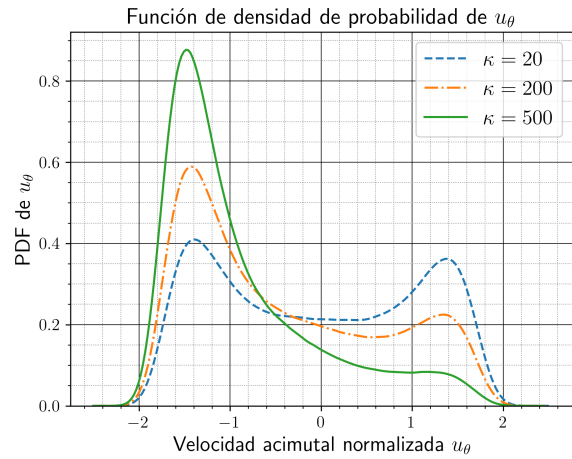


FIGURA 5.17 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

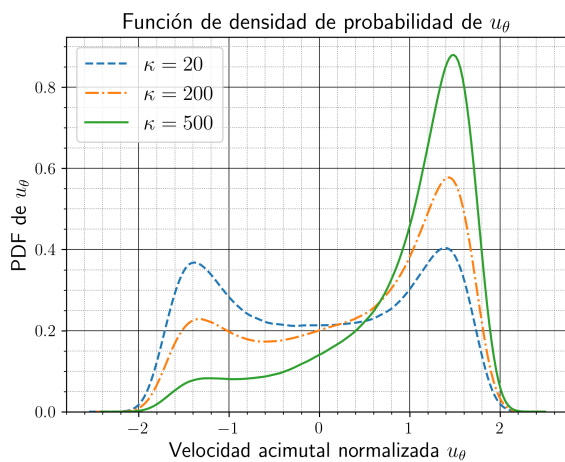


FIGURA 5.18 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 1$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

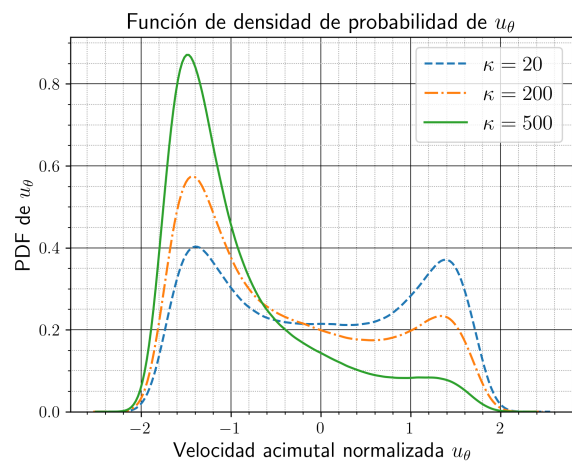


FIGURA 5.19 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 1$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

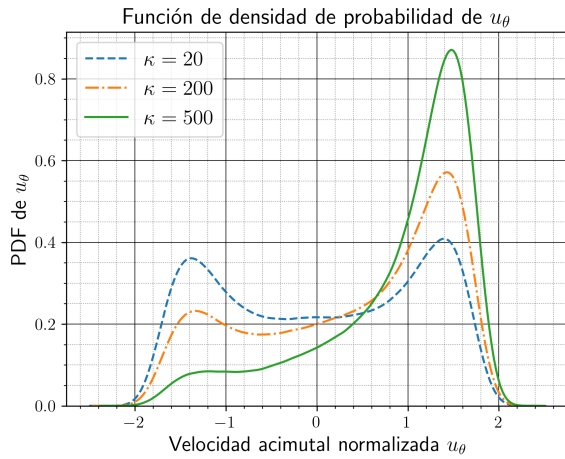


FIGURA 5.20 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = -2$, con $\Delta = +0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

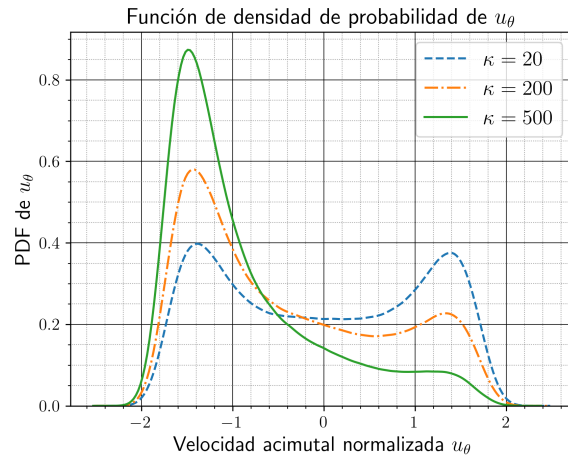


FIGURA 5.21 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = -2$, con $\Delta = -0.0017$ y tres valores diferentes de κ .

5.4 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y APLICACIÓN A LA GEODINAMO TERRESTRE

A la luz de los resultados obtenidos tomando tres puntos iniciales distintos, cabe mencionar un aspecto importante acerca de las gráficas FDP correspondientes a la [Subsección 5.3.1](#) ($\Delta = 0$). Aunque las densidades de probabilidad para el estado sur sean ligeramente superiores a las del estado norte, hay que tener en cuenta que, debido al término estocástico $\xi(t)$ en la [Ecuación 5.1](#), la evolución del sistema varía cada vez que la simulación se inicia. Por tanto, puede darse también el caso en el que el estado norte presente una mayor probabilidad que el estado sur (y viceversa), e incluso que esta diferencia sea mucho más notable. En esta última situación, aunque el parámetro Δ presente un valor nulo, las gráficas FDP pueden llegar a ser muy similares al del caso con $\Delta = \pm 0.0017$ y $\kappa = 20$.

Con los parámetros fijos $\epsilon = -0.05$ y $g = 2$, la [Ecuación 5.7](#) proporciona, para los estados norte y sur, unos puntos estables teóricos en las velocidades $u_{\theta N} = -1.40$, $u_{\theta S} = +1.40$. Estos valores son cercanos a los obtenidos numéricamente en los máximos de las funciones FDP (ver [Tabla 5.1](#)). Se demuestra también que la posición de estos puntos estables, así como la forma curva en las FDP, apenas se ve modificada en función del punto inicial tomado (tal y como se aprecia en la [Figura 5.9](#)), por lo que podemos concluir con que el comportamiento del sistema es independiente de la velocidad inicial del fluido.

Aparte, en el caso cuando $\Delta = 0$, donde las velocidades acimutales u_θ muestran una distribución prácticamente simétrica con forma de doble joroba, los resultados son similares a los conseguidos experimentalmente por [\[90\]](#). Sin embargo, hay que tener presente la salvedad de que, en [\[90\]](#), el número de Reynolds empleado es menor ($Re = 2.5 \cdot 10^3 - 6.5 \cdot 10^3$) que el del fluido simulado en este estudio y que los propulsores en los extremos giran en sentido negativo (sentido horario). Debido al Re inferior, el estado cero $u_{\theta 0}$ en la gráfica FDP publicada por [\[90\]](#) presenta una densidad de probabilidad más cercana a la de los dos máximos simétricos de la función, por lo que la forma de doble joroba de la curva FDP deja de ser tan explícita.

En relación a los resultados que se acaban de explicar, [\[3\]](#) menciona justamente dicho fenómeno. Si ϵ es cercano a -1 , el fluido simulado presenta un número de Reynolds de $Re = 1500$; por el contrario, si ϵ es cercano a 0 , el fluido tiene un Re muy alto, de aproximadamente $Re = 5 \cdot 10^5$. Por extensión, volviendo a compilar la simulación con los mismos parámetros y modificando ϵ para unas turbulencias bajas del fluido (por ejemplo, con $\epsilon = -0.9$), la función

de densidad de probabilidad resultante sería parecida a la gráfica FDP de la velocidad toroidal publicada por [39] para un fluido con $Re = 2430$, es decir, con un máximo en $u_\theta = 0$ y un ligero aumento de la densidad de probabilidad en torno a los puntos $u_{\theta N}$ y $u_{\theta S}$ de la Ecuación 5.7.

Es importante tener en cuenta, eso sí, que los valores numéricos de la densidad de probabilidad difieren entre los mostrados en la Subsección 5.3.1 y los de [90] y [39] debido a las diferentes configuraciones del montaje experimental cilíndrico y las características del fluido analizado.

Comparando la evolución de la velocidad u_θ de las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 con los resultados obtenidos por [3], [1] y [2], vemos que la mayor similitud se presenta con [1] ya que u_θ adquiere valores entre $u_\theta = -2$ y $u_\theta = 2$. No obstante, a diferencia de [1], los estados norte y sur no se observan de forma tan clara, sino que, en nuestro caso, es necesario realizar una gráfica de la FDP para un análisis más extenso —Figura 5.9—. Por desgracia, debido a la presentación poco explicativa de la función de densidad de probabilidad en [1], no se puede llevar a cabo una comparación directa entre los datos de dicha FDP y las obtenidas en este estudio (si bien cabe mencionar que también aparecen dos máximos simétricos). Esto ocurre también con los resultados en [2]: A pesar de que los parámetros numéricos B , g y ϵ para este análisis se han basado en los de dicha publicación, [2] muestra únicamente la función FDP de la simulación para el estado sur.

Pasando ahora a la Subsección 5.3.2 ($\Delta \neq 0$), la evolución temporal de u_θ se comporta similarmente a [1], es decir, existe un predominio del estado sur (velocidades mayoritariamente positivas) cuando $\Delta = +0.0017$ y, por el contrario, un predominio del estado norte (velocidades mayoritariamente negativas) cuando $\Delta = -0.0017$. No obstante, al igual que ocurría en el caso anterior, las inversiones entre estados no son tan explícitos como en [1], sino que se observan gracias a la densidad de puntos en las representaciones de la evolución temporal de u_θ ; dicho de otra forma, el estado preferente (norte o sur) estará determinado por la zona del eje donde esté la mayor concentración de velocidades (negativas o positivas, resp.).

Un artículo donde se demuestra mediante métodos numéricos el comportamiento de la velocidad acimutal en función de la diferencia entre las velocidades de rotación Ω_N y Ω_S de los propulsores norte y sur es [91]. Considerando un fluido con una turbulencia característica de $Re = 2 \cdot 10^5$ (del mismo orden que el de este estudio), y definiendo la relación entre estas velocidades como $\Gamma = -\Omega_N/\Omega_S$, cuando $\Gamma = -1$ —equivalente al caso $\Delta = 0$ —, ambos propulsores giran con la misma velocidad, por lo que las líneas de corriente del fluido son simétricas respecto a ambas celdas en el interior del cilindro. Por el contrario, si $\Gamma = -0.8$, se tendría un caso parecido a $\Delta = +0.0017$ con $\kappa = 200$, es decir, con mayor influencia general del estado sur y la aparición —todavía— de algunas velocidades acimutales negativas en las cercanías del propulsor norte. Finalmente, se muestra un comportamiento similar a $\Delta = +0.0017$ y $\kappa = 500$ cuando $\Gamma = -0.6$, donde existe un predominio prácticamente absoluto del estado sur.

Si trasladamos la discusión de nuestros resultados al comportamiento de la polaridad terrestre histórica, la comparativa es muy parecida a la comentada en la Sección 4.4, es decir, la función de distribución de densidad debe presentar una ligera preferencia hacia velocidades acimutales negativas. Quedan descartados, por lo tanto, los casos para los que $\Delta > 0$, así como valores de κ excesivamente elevados (los cuales, teniendo en cuenta este análisis, serían $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$). Como en la situación $\Delta = 0$ ambas velocidades —positiva y negativa— presentan una distribución de la densidad de probabilidad simétrica, dicha opción también debe ser descartada.

Con esto, si tomamos el otro valor del parámetro Δ empleado en este análisis, $\Delta = -0.0017$, y la velocidad inicial $u_{\theta \text{ ini}} = 0$ (recordemos que el comportamiento del sistema no cambia con el punto inicial), podemos observar en la Figura 5.22 que, escogiendo κ del orden $\kappa = \mathcal{O}(10)$, el sistema presenta una ligera tendencia hacia valores negativos de u_θ , que es justamente lo que se

está buscando. Hay que tener también en cuenta que, como ya se ha explicado, cuando $\kappa = 20$, la tendencia hacia el estado norte es demasiado débil, e, incluso, puede darse la situación de que la función de densidad de probabilidad, con $\kappa = 20$, presente la misma distribución que en el caso $\Delta = 0$. Con valores $\kappa < 20$, la tendencia hacia $u_\theta < 0$ se atenuaría más todavía. Por lo tanto, descartaremos valores $\kappa \leq 20$.

Contrariamente, si se aumenta dicho parámetro hasta $\kappa = 100$, se puede considerar que la probabilidad de velocidades acimutales u_θ negativas es demasiado elevada comparada con la probabilidad de velocidades u_θ positivas, por lo que un valor $\kappa \geq 100$ tampoco se consideraría acertado para este propósito.

Así, se concluye con que, dadas las Ecuaciones 5.8 y 5.9, la Ecuación 5.9 es la más adecuada para reproducir el registro de inversiones de polaridad terrestre. En concreto, dado el parámetro $\Delta\kappa$ y un valor de $\Delta = -0.0017$, se estima que los valores de κ más adecuados para este fin se encuentran en el intervalo $20 < \kappa < 100$.

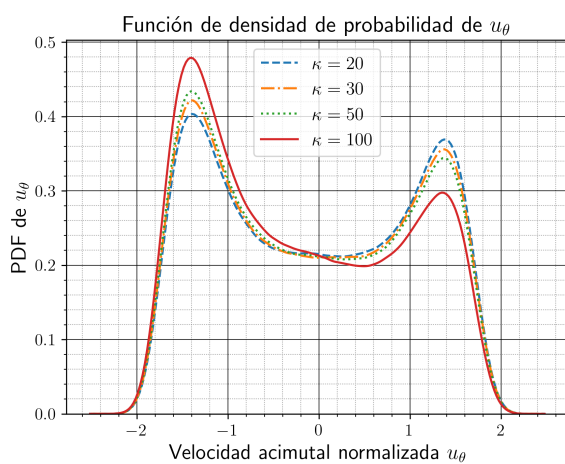


FIGURA 5.22 – Función de densidad de probabilidad para una velocidad inicial de $u_\theta = 0$, con $\Delta = -0.0017$ y cuatro valores diferentes de κ .

CONCLUSIÓN

La finalidad de este trabajo ha sido la de estudiar las inversiones de los polos magnéticos terrestres empleando un modelo puramente teórico, el modelo de la dinamo de Robbins, y un modelo estocástico, basado en el experimento VKS de Cadarache y en las referencias [1], [2] y [3], que simula un fluido de Von Kármán.

Para comenzar este estudio, en el [Capítulo 1](#) hemos resumido las principales características de la estructura interna terrestre y su campo magnético. Hemos mencionado también la hipótesis de la dinamo como la causa que explica el origen del campo magnético terrestre—autoinducido a partir del movimiento del núcleo externo fluido—. Posteriormente, hemos expuesto las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD), las cuales rigen el comportamiento de un fluido conductor de la electricidad, como es el caso del núcleo externo de la Tierra.

Hemos mencionado también, en esta primera parte, la importancia de la componente poloidal del campo magnético, ya que es la percibida en la superficie terrestre y la empleada usualmente en la literatura para estudiar el geomagnetismo. Dicha componente se genera a partir de un movimiento acimutal por parte de una corriente eléctrica o de un fluido conductor. Recordemos que una corriente eléctrica o fluido conductor de la electricidad tiene sentido positivo si su movimiento es levógiro, y negativo si su movimiento es dextrógiro. Por lo tanto, una corriente (o fluido conductor) negativa creará un campo magnético poloidal con polaridad normal (el norte magnético coincide con el norte geográfico); por el contrario, una corriente positiva creará un campo magnético con polaridad invertida (el polo norte magnético se sitúa en el polo sur geográfico).

Por esta razón, debido a que el historial de polaridades magnéticas terrestres muestra un mayor registro de las polaridades normales, en los estudios realizados de los modelos de dinamo de Robbins y del fluido VK hemos buscado una cierta preferencia por corrientes o fluidos con movimiento dextrógiro (es decir, con signo negativo).

En el [Capítulo 2](#) hemos realizado una revisión bibliográfica de algunos modelos empleados para estudiar el efecto dinamo. Las dinamos de Bullard (también llamada homopolar), de Rikitake y de Robbins son modelos teóricos que han permitido comprender el funcionamiento básico del efecto dinamo. Además, al ser modelados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias, son sencillos de simular numéricamente. Los modelos cinemáticos de las dinamos de Ponomarenko y de Roberts se describen a través de las ecuaciones MHD y han servido como introducción al funcionamiento de los experimentos de laboratorio.

En el **Capítulo 3**, hemos mencionado brevemente los primeros experimentos realizados para estudiar el campo magnético, así como las principales características de los experimentos actuales y un resumen de los resultados obtenidos. Se ha hecho hincapié en el experimento VKS (siglas de Von-Kármán Sodium) de Cadarache al ser en el que se basa el modelo estocástico estudiado en este trabajo.

En el **Capítulo 4** hemos estudiado en detalle el modelo de dinamo de Robbins a partir de tres ecuaciones diferenciales, las cuales describen al sistema mediante la corriente $y(t)$ en el hilo (medida de la velocidad del fluido en el núcleo), la corriente $z(t)$ en el disco (medida de la distribución horizontal de temperaturas en el interior de la Tierra) y el momento angular $\omega(t)^*$ (medida de la velocidad de rotación terrestre).

En estas ecuaciones, además, hemos empleado los parámetros fijos $\nu = 1$ y $\sigma = 5$ (donde ν es la disipación viscosa y σ es el tiempo de decaimiento de las corrientes $y(t)$ y $z(t)$). Tanto los parámetros ν y σ como las variables $y(t)$, $z(t)$ y $\omega^*(t)$ son adimensionales. El comportamiento del sistema se ha estudiado en función de los cinco regímenes que aparecen al modificar el valor del parámetro R (interpretado como una medida del gradiente de temperaturas en el núcleo), empleando, para ello, un método de Runge-Kutta de orden 5 y error de orden 4. En la simulación se han empleado dos condiciones iniciales, $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$ (tomadas de la referencia [85]), para estudiar todos los regímenes; en algunos casos en concreto, se han incluido condiciones iniciales adicionales.

Hemos realizado, para los cinco regímenes del sistema, un análisis detallado de las evoluciones temporales de las variables $y(t)$, $z(t)$ y $\omega^*(t)$, así como la relación que existe entre ellas a partir de las trayectorias en el espacio de fases. Un análisis tan exhaustivo del modelo de dinamo de Robbins como el realizado en este estudio no ha sido encontrado en la literatura.

Para aplicar el modelo de la dinamo de Robbins al problema de las inversiones magnéticas terrestres, hemos graficado las funciones de densidad de probabilidad (nombradas usualmente mediante sus siglas FDP y PDF) de la corriente en el hilo $y(t)$ (cuyo movimiento es acimutal) para los regímenes IV y V, en los cuales $y(t)$ realizó inversiones. A falta de referencias que muestren de forma detallada la distribución de polaridades del campo magnético terrestre, estimamos que, con los parámetros fijos $\nu = 1$ y $\sigma = 5$, los regímenes que más se ajustan al registro de inversiones son el IV (siendo $R = 14.75$ con la condición inicial $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$) y V (siendo $R = 20$ y las condiciones iniciales $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ y $(\omega_0^*, z_0, y_0) = (-0.1, -0.2, -0.4)$). En ambos casos, y dadas las gráficas FDP, aparecen ligeras preferencias hacia valores de la corriente $y(t)$ negativas, que crean estados de polaridad normales.

No obstante, si bien hemos demostrado que la dinamo de Robbins es un modelo en el cual el efecto dinamo logra autoinducirse y permite la aparición de inversiones en las corrientes (dando lugar así a inversiones de polaridad en el campo magnético), éste presenta un gran problema a la hora de aplicarse al geomagnetismo. Al tratarse de un modelo puramente teórico, donde las componentes que lo conforman son simples e ideales, no es lo suficientemente preciso como para simular la geometría, las propiedades y el movimiento del núcleo fluido externo terrestre, así como las turbulencias que éste genera y que juegan un papel fundamental en el estudio del efecto dinamo en la Tierra.

Por esta razón, para estudiar las inversiones de polaridad mediante sistemas con cualidades más similares a las del núcleo de la Tierra, se comenzaron a desarrollar modelos de dinamos cinemáticas. Dichos modelos, como ya se ha comentado, dieron lugar, posteriormente, a experimentos con los que lograr dinamos autoinducidas. Entre ellos, nos encontramos con el experimento VKS de Cadarache ([11]), en el cual se basan [1], [2] y [3] y siendo este trabajo una extensión de estas tres últimas referencias.

En el **Capítulo 5** hemos realizado la simulación de un flujo de Von Kármán (también llamado *fluido VK*) a través de la evolución de la velocidad acimutal normalizada u_θ . Esta

velocidad se define como $u_\theta = v_\theta/V_{prop}$, donde v_θ es la velocidad acimutal del fluido y V_{prop} es la velocidad de los propulsores, los cuales generan el movimiento del fluido VK en el dispositivo experimental.

Con este fin, se ha empleado el método de Euler-Maruyama aplicado a dos ecuaciones diferenciales estocásticas: Una que describe un potencial triestable y otra ecuación derivada de la anterior, la cual incluye un término extra $\Delta\kappa$ que sirve para forzar dos estados de simetría. Δ representa la relación entre las velocidades de los propulsores, y κ es una constante empleada para aumentar la magnitud de la relación Δ .

Los parámetros incluidos en estas ecuaciones son $\epsilon = -0.05$ (relacionado con el número de Reynolds Re), $g = 2$ (control de la profundidad del potencial [a partir del cual se han obtenido las ecuaciones estocásticas]) y $B = 1$ (tasa de turbulencia del fluido). En cuanto a la segunda ecuación, el término $\Delta\kappa$ presenta los valores $\Delta = 0.0017$ (para favorecer velocidades u_θ positivas, denominado como *preferencia del estado sur*) y $\Delta = -0.0017$ (para favorecer velocidades u_θ negativas, denominado como *preferencia del estado norte*). Para cada valor de Δ , los valores de κ han sido $\kappa = 20$, $\kappa = 200$ y $\kappa = 500$. Los valores de ϵ , g , B y Δ son los empleados por las referencias [1], [2] y [3], mientras que los tres valores del parámetro κ han sido escogidos por la autora de acuerdo con las indicaciones realizadas por [1] (la cual menciona que $\kappa > 0$, pero no especifica ningún valor en concreto).

En el caso de ambas ecuaciones diferenciales estocásticas, hemos partido de las condiciones iniciales $u_\theta = 0$ (mencionada en [2], en la cual el fluido se encuentra inicialmente en reposo), $u_\theta = 1$ (el fluido comienza girando en sentido levógiro y con la misma velocidad que los propulsores) y $u_\theta = -2$ (el fluido gira inicialmente en sentido dextrógiro y con el doble de velocidad que los propulsores). Las velocidades iniciales $u_\theta = 1$ y $u_\theta = -2$ han sido elegidas por la autora, tras realizar diversas pruebas, con el fin de extender el estudio numérico de [1], [2] y [3]. A partir de las gráficas de la función de densidad de probabilidad hemos observado que, en ambas ecuaciones estocásticas, el comportamiento del sistema no se ve modificado en función de la velocidad inicial.

La simulación numérica del flujo de Von Kármán, aun siendo de una enorme simplicidad, ha logrado, además, reproducir los resultados experimentales de diversas publicaciones. Para ello, ha sido imprescindible aplicar un tiempo de simulación muy largo y un paso temporal pequeño. Métodos estocásticos muy similares han sido utilizados en otras publicaciones que estudian la geodinamo terrestre, por ejemplo, en [92], en el que también se logran inversiones gracias a la simulación de un potencial biestable.

La simulación numérica del fluido VK realizada en este trabajo ha servido como ampliación de las publicaciones [1], [2] y [3]. En dichas referencias, el autor se enfoca en el análisis de los datos experimentales y realiza un análisis muy escueto de las ecuaciones diferenciales estocásticas que propone.

Aparte, a la hora de aplicar este modelo a las inversiones magnéticas terrestres, se nos vuelve a presentar el problema ya comentado anteriormente: No se han encontrado referencias con una distribución detallada de las polaridades magnéticas en la Tierra. Por lo tanto, al igual que ocurrió con el modelo de dinamo de Robbins, se ha representado gráficamente la función FDP de la velocidad acimutal normalizada u_θ para realizar una estimación de las condiciones del núcleo con las que reproducir el historial de inversiones geomagnéticas. Hemos concluido con que la ecuación más adecuada para reproducir las polaridades magnéticas terrestres es la que incluye el término $\Delta\kappa$. Más concretamente, dado un valor $\Delta = -0.0017$, los valores de κ que se han estimado para lograr una ligera preferencia hacia velocidades u_θ negativas se encuentran en el intervalo $20 < \kappa < 100$.

Teniendo en cuenta el análisis de los modelos de la dinamo de Robbins y estocástico, comentamos que una ligera preferencia hacia corrientes $v(t)$ (en el caso del modelo de la

dinamo de Robbins) y velocidades u_θ (en el caso del modelo estocástico) negativas sería la más adecuada para simular las polaridades históricas del magnetismo terrestre. No obstante, se debe tener en cuenta que dicho registro se ha logrado —mayormente— mediante el análisis de estratos en la corteza terrestre. Por lo tanto, puede darse la posibilidad de que futuros hallazgos e investigaciones hagan modificar el registro de polaridades del campo magnético, dejando obsoleta, por tanto, nuestra interpretación de los resultados obtenidos.

Por último, el análisis de las inversiones magnéticas puede dar lugar a nuevas investigaciones dentro de la propia geofísica o en otros campos científicos. Estos campos pueden ser la biología (estudio de la orientación de animales mediante el campo magnético), la climatología (posible variación del clima durante un proceso de inversión del campo magnético), e incluso en otras ramas diversas como la historia, la arqueología y la antropología (evolución y adaptación de una civilización tecnológica a lo largo de una inversión). Existen ya, de hecho, algunos estudios que relacionan la disminución del campo magnético en ciertos períodos históricos con una variación climática [93], siendo incluso capaz de provocar la decadencia de algunas civilizaciones [94].

Además, es de esperar que, en las próximas décadas, se creen nuevos grupos de investigación que traten la evolución de la Anomalía del Atlántico Sur y de la aceleración del polo magnético norte, así como un anticipo de sus implicaciones y la toma de medidas de adaptación. En este contexto, el desarrollo de nuevas simulaciones que describiesen con mayor fidelidad el comportamiento del campo magnético terrestre —ya sea empleando métodos numéricos más avanzados, nuevas ecuaciones para modelar el fluido dentro de núcleo externo terrestre u ordenadores con una mayor capacidad de computación— podría servir como apoyo a dichas investigaciones y ser capaz de detectar las señales previas a una posible inversión de los polos magnéticos (tal y como muestra, por ejemplo, la simulación realizada por [10]).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. Burguete and A. D. la Torre, “Hysteresis and vortices dynamics in a turbulent flow,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 19, 11 2011.
- [2] A. D. la Torre and J. Burguete, “Slow dynamics in a turbulent von Kármán swirling flow,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 054101, 09 2007.
- [3] A. de la Torre Monguió, *Sobre los efectos de las escalas lentas en la magnetohidrodinámica de un flujo de Von Kármán*. PhD thesis, Universidad de Navarra, 9 2009.
- [4] B. Brunhes, “Recherches sur la direction d’aimantation des roches volcaniques,” *J. Phys. Theor. Appl.*, vol. 5, no. 1, pp. 705–724, 1906.
- [5] M. Matsuyama, “On some physical properties of ice,” *The Journal of Geology*, vol. 28, no. 7, pp. 607–631, 1920.
- [6] D. P. Stern, “A Millenium of Geomagnetism,” *Reviews of Geophysics*, vol. 40, no. 3, pp. 1–1–1–30, 2002.
- [7] J. Larmor, “How could a rotating body such as the Sun become a magnet?,” in *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*, pp. 106–107, Harvard University Press, 1979.
- [8] J. Larmor and S. Joseph, “Possible rotational origin of magnetic fields of Sun and Earth,” *Elec. Rev.*, vol. 85, p. 412, 1919.
- [9] E. J. Lowes and I. Wilkinson, “Geomagnetic dynamo: a laboratory model,” *Nature (London)*, vol. 198, 6 1963.
- [10] G. Glatzmaier and P. Olson, “Probing the Geodynamo,” *Scientific American*, vol. 292, pp. 32–9, 05 2005.
- [11] S. Aumaître, M. Berhanu, M. Bourgoïn, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, S. Fauve, L. Marié, R. Monchaux, N. Mordant, P. Odier, F. Pétrélis, J.-F. Pinton, N. Plihon, F. Ravelet, and R. Volk, “The VKS experiment: turbulent dynamical dynamos,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 9, no. 7, pp. 689–701, 2008. Dynamo effect: experimental progress and geo- and astro-physical challenges / Effet dynamo : avancées expérimentales et défis géo- et astrophysiques.
- [12] A. Witze, “Software error doomed Japanese Hitomi spacecraft,” *Nature*, vol. 533, 04 2016.
- [13] C. Finlay, C. Kloss, N. Olsen, M. Hammer, L. Tøffner-Clausen, A. Grayver, and A. Kuvshinov, “The CHAOS-7 geomagnetic field model and observed changes in the South Atlantic Anomaly,” *Earth, Planets and Space*, vol. 72, 12 2020.

- [14] F. J. Pavón-Carrasco and A. D. Santis, "The South Atlantic Anomaly: The Key for a Possible Geomagnetic Reversal," *Frontiers in Earth Science*, vol. 4, p. 40, 2016.
- [15] "SWARM probes weakening of Earth's magnetic field." https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/FutureEO/Swarm/Swarm_probes_weakening_of_Earth_s_magnetic_field, 20-05-2020. Último acceso: 10/06/2023.
- [16] P. Livermore, C. Finlay, and M. Bayliff, "Recent north magnetic pole acceleration towards Siberia caused by flux lobe elongation," *Nature Geoscience*, vol. 13, pp. 1–5, 05 2020.
- [17] D. Byrd, "Why is Earth's magnetic north pole drifting so rapidly?." <https://earthsky.org/earth/magnetic-north-rapid-drift-blobs-flux/>, 19-05-2020. Último acceso: 10/06/2023.
- [18] D. Andraut, J. Monteux, M. Le Bars, and H. Samuel, "The deep Earth may not be cooling down," *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 443, 03 2016.
- [19] "The DREsden Sodium facility for DYNamo and thermohydraulic studies - Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, HZDR." <https://www.hzdr.de/db/Cms?pOid=40412&pNid=3163>. Último acceso: 23/03/2023.
- [20] "SWARM. ESA's magnetic field mission." https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/FutureEO/Swarm. Último acceso: 10/06/2023.
- [21] P. H. Roberts and E. M. King, "On the genesis of the Earth's magnetism," *Reports on Progress in Physics*, vol. 76, p. 096801, sep 2013.
- [22] H. Mouritsen, *Magnetoreception in Birds and Its Use for Long-Distance Migration*, pp. 113–133. 07 2015.
- [23] M. Herbrink and K. Kokkotas, "Stability Analysis of Magnetised Neutron Stars - A Semi-analytic Approach," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 466, 11 2015.
- [24] M. McElhinny and P. L. McFadden, *The magnetic field of the Earth: paleomagnetism, the core, and the deep mantle*, vol. 63. Academic Press, 1998.
- [25] J. Aubert, *Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre*. PhD thesis, 2001. Thesis de doctorado dirigida por Cardin, Philippe. Géophysique Université Joseph Fourier (Grenoble ; 1971-2015) 2001.
- [26] U. Christensen and J. Wicht, "Chapter 10 - Numerical Dynamo Simulations," in *Treatise on Geophysics : Volume 8 Core Dynamics 8* (G. Schubert, ed.), Elsevier Science, 2 ed., 2015.
- [27] P. Livermore, G. Ierley, and A. Jackson, "The structure of Taylor's constraint in three dimensions," *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 464, pp. 3149–3174, 12 2008.
- [28] A. Kageyama and T. Sato, "Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo," *Phys. Rev. E*, vol. 55, pp. 4617–4626, Apr 1997.
- [29] R. J. Teed, C. A. Jones, and S. M. Tobias, "Torsional waves driven by convection and jets in Earth's liquid core," *Geophysical Journal International*, vol. 216, pp. 123–129, 10 2018.
- [30] P. H. Roberts, "Chapter 3 - Theory of the Geodynamo," in *Treatise on Geophysics : Volume 8 Core Dynamics* (G. Schubert, ed.), Elsevier Science, 2 ed., 2015.
- [31] W. Pang, Z. Wu, Y. Xiao, and C. Jiang, "Chaos control and synchronization of a complex Rikitake dynamo model," *Entropy*, vol. 22, no. 6, 2020.

- [32] K. Robbins, "A new approach to subcritical instability and turbulent transitions in a simple dynamo," in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 82, pp. 309–325, Cambridge University Press, 1977.
- [33] "Chapter 9 - Dynamo Theory," vol. 2 of *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, pp. 355–441, North-Holland, 2003.
- [34] G. O. Roberts, "Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 271, pp. 411 – 454, 1972.
- [35] D. P. Lathrop and C. B. Forest, "Magnetic dynamos in the lab," *Physics Today*, vol. 64, pp. 40–45, 2011.
- [36] "The Riga Dynamo Experiment - Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, HZDR." <https://www.hzdr.de/db/Cms?p0id=14142&pNid=0>. Último acceso: 22/03/2023.
- [37] U. Müller and R. Stieglitz, "The response of a two-scale kinematic dynamo to periodic flow forcing," *Physics of Fluids*, vol. 21, no. 3, p. 034108, 2009.
- [38] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, L. Marié, F. Ravelet, M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, and R. Volk, "Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo," *Europhysics Letters (EPL)*, vol. 77, p. 59001, mar 2007.
- [39] S. Kreuzahler, D. Schulz, H. Homann, Y. Ponty, and R. Grauer, "Numerical study of impeller-driven von Kármán flows via a volume penalization method," *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 10, p. 103001, 2014.
- [40] W. M. Elsasser, "Induction effects in terrestrial magnetism. Part I: Theory," *Phys. Rev.*, vol. 69, pp. 106–116, Feb 1946.
- [41] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, 1961.
- [42] S. Yi and G. S. Choe, "The toroidal field surfaces in the standard poloidal-toroidal representation of magnetic field," 2022.
- [43] S. Childress, "Dynamo theory and gfd." <https://www.who.i.edu/fileserver.do?id=136284&pt=10&p=85733>, 16-06-2008. Último acceso: 10/06/2023.
- [44] P. Olson, "Chapter 1 - Core Dynamics: An Introduction and Overview," in *Treatise on Geophysics : Volume 8 Core Dynamics 8* (G. Schubert, ed.), Elsevier Science, 2 ed., 2015.
- [45] W. von Siemens, "Über die Umwandlung von Arbeitskraft in elektrischen Strom ohne Anwendung permanenter Magnete.," *Monatsberichte König*, pp. 55–58, 1867.
- [46] D. Schmitt, "Introduction to Hydromagnetic Dynamo Theory with Applications to the Sun and the Earth." University Lecture, Max Planck Institute for Solar System Research, <https://www.mps.mpg.de/phd/dynamo-theory-lecture-2008>, 2008. Último acceso: 11/05/2023.
- [47] D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Encyclopedia of Earth Sciences Series, Springer, 1 ed., 2007.
- [48] H. Alfven, "Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves," *Nature*, vol. 150, pp. 405–406, oct 1942.

- [49] H. Alfvén, “On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves,” *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, vol. 29B, pp. 1–7, jan 1943.
- [50] T. G. Cowling, “The Magnetic Field of Sunspots,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 94, pp. 39–48, 11 1933.
- [51] N. Murphy, “Astrophysical Dynamos.” University Lecture, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, https://lweb.cfa.harvard.edu/~namurphy/Lectures/Ay253_09_Dynamos.pdf, 2014.
- [52] W. M. Elsasser, “Induction effects in terrestrial magnetism. Part III. Electric modes,” *Phys. Rev.*, vol. 72, pp. 821–833, Nov 1947.
- [53] E. C. Bullard and H. Gellman, “Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 247, no. 928, pp. 213–278, 1954.
- [54] R. Kaiser, B. J. Schmitt, and F. H. Busse, “On the invisible dynamo,” *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 77, no. 1-4, pp. 93–109, 1994.
- [55] D. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publ, Clarendon Press, 1988.
- [56] J. Proudman, “On the motion of solids in a liquid possessing vorticity,” *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 92, pp. 408–424, 1916.
- [57] G. I. S. Taylor, “Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational,” *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 93, pp. 99–113, 1917.
- [58] P. Roberts and G. Glatzmaier, “Geodynamo theory and simulations,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 72, pp. 1081–1123, October 2000.
- [59] M. Dumberry, “Taylor constraint and torsional oscillations,” in *Dynamos* (P. Cardin and L. C. (Eds.), eds.), Les Houches 88, Elsevier Science, 2008.
- [60] J. Taylor, “The magneto-hydrodynamics of a rotating fluid and the Earths dynamo problem,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 274, no. 1357, pp. 274–283, 1963.
- [61] R. J. Teed, C. A. Jones, and S. M. Tobias, “The dynamics and excitation of torsional waves in geodynamo simulations,” *Geophysical Journal International*, vol. 196, pp. 724–735, 11 2013.
- [62] T. Rikitake, “Oscillations of a system of disk dynamos,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 54, no. 1, p. 89105, 1958.
- [63] K. Ito, “Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system,” *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 51, no. 2, pp. 451–456, 1980.
- [64] K. Robbins, “A moment equation description of magnetic reversals in the Earth,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 73, no. 12, pp. 4297–4301, 1976.
- [65] D. Chillingworth and P. Holmes, “Dynamical systems and models for reversals of the Earth’s magnetic field,” *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, vol. 12, pp. 41–59, 1980.

- [66] R. Hide, A. C. Skeldon, and D. J. Acheson, "A study of two novel self-exciting single-disk homopolar dynamos: theory," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 452, no. 1949, pp. 1369–1395, 1996.
- [67] I. Moroz, "The Hide, Skeldon, Acheson dynamo revisited," *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, pp. 113–130, 01 2007.
- [68] Y. B. Ponomarenko, "Theory of the hydromagnetic generator," *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 14, no. 6, pp. 775–778, 1973.
- [69] G. Backus, "A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos," *Annals of Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 372–447, 1958.
- [70] A. Herzenberg, "Geomagnetic dynamos," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 250, no. 986, pp. 543–583, 1958.
- [71] F. Lowes and I. Wilkinson, "Geomagnetic dynamo: an improved laboratory model," *Nature*, vol. 219, pp. 717–718, 1968.
- [72] P. Cardin and D. Brito, "Chapter 8 - Survey of experimental results," in *Mathematical aspects of natural dynamos* (E. Dormy and A. M. Soward, eds.), The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Chapman and Hall, 1 ed., 2007.
- [73] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, E. Platacis, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, and G. Will, "Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 4365–4368, May 2000.
- [74] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dementev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, and G. Will, "Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment," *Physical Review Letters*, vol. 86, p. 30243027, Apr 2001.
- [75] U. Müller and R. Stieglitz, "The Karlsruhe Dynamo Experiment," *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 9, no. 3/4, pp. 165–170, 2002.
- [76] A. Giesecke, F. Stefani, and G. Gerbeth, "Role of soft-iron impellers on the mode selection in the von Kármán–sodium dynamo experiment," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 044503, Jan 2010.
- [77] F. Stefani, S. Eckert, G. Gerbeth, A. Giesecke, T. Gundrum, C. Steglich, T. Weier, and B. Wustmann, "Dresdyn - a new facility for MHD experiments with liquid sodium," *arXiv: Fluid Dynamics*, 2012.
- [78] A. Giesecke, T. Vogt, T. Gundrum, and F. Stefani, "Nonlinear large scale flow in a precessing cylinder and its ability to drive dynamo action," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 024502, Jan 2018.
- [79] J. A. Jacobs, *Reversals of the Earth's Magnetic Field, Second Edition*. Cambridge University Press, 2 ed., 1995.
- [80] D. Crossley, O. Jensen, and J. Jacobs, "The stochastic excitation of reversals in simple dynamos," *Physics of the earth and planetary interiors*, vol. 42, no. 3, pp. 143–153, 1986.
- [81] "scipy.integrate.solve_ivp scipy v1.10.1 manual." https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html#r179348322575-2. Último acceso: 18/04/2023.
- [82] M. Marín Beltrán, *Apuntes de la asignatura Métodos Numéricos y Simulación*. Universidad de Córdoba, 2012.

- [83] L. F. Shampine, "Some practical Runge-Kutta formulas," *Mathematics of computation*, vol. 46, no. 173, pp. 135–150, 1986.
- [84] J. R. Dormand and P. J. Prince, "A family of embedded Runge-Kutta formulae," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 19–26, 1980.
- [85] J. Ayub, M. Aqeel, S. Ahmad, and Z. Rana, "Absolute control of chaotic responses in Robbins disc dynamo," *The European Physical Journal Plus*, vol. 135, pp. 1–15, 2020.
- [86] J. De la Rubia Sánchez, *Apuntes de la asignatura Fluctuaciones en Sistemas Dinámicos*. UNED.
- [87] "Simulating a stochastic differential equation." <https://ipython-books.github.io/134-simulating-a-stochastic-differential-equation/>. Último acceso: 10/06/2023.
- [88] P. E. Kloeden and E. a. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Applications of Mathematics 23, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 ed., 1992.
- [89] D. Dinham, "Numerical simulation of stochastic differential equations: Lecture 2, part 1." <https://www.sfu.ca/~pft3/days/m3.pdf>, February 2006.
- [90] F. Ravelet, *Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Karman turbulent*. Theses, Ecole Polytechnique X, Sept. 2005.
- [91] S. Poncet, R. Schiestel, and R. Monchaux, "Turbulent Von Karman flow between two counter-rotating disks," 07 2007.
- [92] D. Schmitt, M. Ossendrijver, and P. Hoyng, "Magnetic field reversals and secular variation in a bistable geodynamo model," *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 125, no. 1, pp. 119–124, 2001.
- [93] A. Cooper, C. Turney, J. Palmer, A. Hogg, M. Mcglone, J. Wilmshurst, A. Lorrey, T. Heaton, J. Russell, K. McCracken, J. G. Anet, E. Rozanov, M. Friedel, I. Suter, T. Peter, R. Muscheler, F. Adolphi, A. Dosseto, T. Faith, and R. Zech, "A global environmental crisis 42,000 years ago," *Science*, vol. 371, pp. 811–818, 02 2021.
- [94] V. Courtillot, Y. Gallet, J.-L. Le Mouel, F. Fluteau, and A. Genevey, "Are there connections between the Earth's magnetic field and climate?," *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 253, pp. 328–339, 01 2007.
- [95] "How to test the convergence of a scheme of a PDE without knowing the exact solution?." <https://math.stackexchange.com/questions/2364568/how-to-test-the-convergence-of-a-scheme-of-a-pde-without-knowing-the-exact-solut>. Último acceso: 11-06-2023.
- [96] R. Olof, "Verifying Numerical Convergence Rates." <https://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2255/ndiff13/ConvRate.pdf>, 19-05-2020. KTH: Kungliga Tekniska högskolan. Último acceso: 10/06/2023.

ANEXO

ALGORITMO EMPLEADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL MODELO DE DINAMO DE ROBBINS

```

1  import numpy as np
2  from scipy.integrate import solve_ivp
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  import pandas as pd
5  import seaborn as sns
6  plt.rcParams["figure.dpi"] = 300
7  plt.rcParams["savefig.dpi"] = 300
8  IPython_default = plt.rcParams.copy()
9
10 #PARÁMETROS DINAMO DE ROBBINS
11 alpha = 5
12 R = 0.5 #Valor para Régimen I; cambiar para otros regímenes
13 nu = 1
14
15 #INTERVALO TEMPORAL
16 a = 0
17 b = 25 #Valor para regímenes I y II; cambiar a b=125 para resto de
    regímenes
18 n = 10000 #Valor para regímenes I y II; cambiar a n=100000 para resto
    de regímenes
19
20 # DEFINICIÓN ECUACIONES MODELO DE ROBBINS
21 def fun(t, X):
22     return np.array([R - X[1]*X[2] - nu*X[0], X[0]*X[2] - X[1],
        alpha*(X[1] - X[2])])
23
24 #RÉGIMEN I (con R=0.5)
25 t_eval=np.linspace(a, b, n)
26
27 #1er punto inicial
28 X0 = np.array([0.1, 0.2, 0.4]) #Resolver también para X0 = -np.array
    ([0.1, 0.2, 0.4]) y otros
29 #Resolución mediante RK5(4)
30 sol1 = solve_ivp(fun, (a, b), X0, t_eval=np.linspace(a, b, n), rtol=1e
    -8, atol=1e-8)
31
32 #Guardar los datos calculados en un DataFrame
33 dataReg1 = pd.DataFrame({'Tiempo': t_eval,
34     'Reg1_PtoIniPos_omega':sol1.y[0,:],
35     'Reg1_PtoIniPos_z':sol1.y[1,:],
36     'Reg1_PtoIniPos_y':sol1.y[2,:]}
37 )
38 #Guardar el DataFrame en un archivo .csv
39 dataReg1.to_csv('Data_Reg1.csv')

```

ALGORITMO EMPLEADO PARA EL CÁLCULO DE LA ECUACIÓN 5.8

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import pandas as pd
4  plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
5  plt.rcParams['savefig.dpi'] = 300
6  plt.rcParams['text.usetex'] = True
7  IPython_default = plt.rcParams.copy()
8
9  #Generación de un número aleatorio perteneciente a la distribución
   normal.
10 def dW(delta_t: float) -> float:
11     return np.random.normal(loc=0.0, scale=np.sqrt(delta_t))
12
13 #Intervalo temporal y 1er punto valor inicial de la velocidad acimutal
14 Y_INI = 0 #Velocidad inicial; presenta también los valores Y_INI=1 y
   Y_INI=-2
15 T_INI = 0
16 T_FIN = 50000
17 N = 10000000
18 #Paso temporal
19 DT = float(T_FIN - T_INI) / N
20 TS = np.arange(T_INI, T_FIN + DT, DT)
21 assert TS.size == N + 1
22
23 #PARÁMETROS DE LA SDE
24 epsilon = -0.05
25 g = 2
26 B = 1
27
28 #Prelocalización de vectores
29 ys7 = np.zeros(TS.size)
30 t = np.zeros(TS.size)
31 ys7[0] = Y_INI
32 t[0] = T_INI
33
34 #Resolución mediante Euler-Maruyama
35 for i in range(1, TS.size):
36     t[i] = T_INI + (i - 1) * DT
37     y = ys7[i - 1]
38     ys7[i] = y + (epsilon * y + g * y ** 3 - y ** 5)*DT + ((2 * B)
   ** 0.5) * dW(DT)
39
40 data2 = {'Tiempo': t,
41         'U0_delta0':ys7
42         }
43
44 #Guardar datos calculados en un DataFrame
45 df_data2 = pd.DataFrame(data2)
46
47 #Guardar el DataFrame en un archivo .csv
48 df_data2.to_csv('evol_delta0.csv')

```

ALGORITMO EMPLEADO PARA EL CÁLCULO DE LA ECUACIÓN 5.9

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import pandas as pd
4  plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
5  plt.rcParams['savefig.dpi'] = 300
6  plt.rcParams['text.usetex'] = True
7  IPython_default = plt.rcParams.copy()
8
9  #Generación de un número aleatorio perteneciente a la distribución
   normal
10 def dW(delta_t: float) -> float:
11     return np.random.normal(loc=0.0, scale=np.sqrt(delta_t))
12
13 #Intervalo temporal y valor inicial
14 Y_INI = -2 #Velocidad acimutal inicial. Adquiere también valores Y_INI
   =0 y Y_INI=1.
15 T_INI = 0
16 T_FIN = 50000
17 N = 10000000
18 #Paso temporal
19 DT = float(T_FIN - T_INI) / N
20 TS = np.arange(T_INI, T_FIN + DT, DT)
21 assert TS.size == N + 1
22
23 #Parametros caracteristicos de la SDE
24 epsilon = -0.05
25 g = 2
26 B = 1
27 k = 20 #Adquiere también los valores k=200 y k=500
28 delta = 0.0017 #Adquiere también el valor delta = -0.0017
29
30 #Prelocalización de vectores
31 ys1 = np.zeros(TS.size)
32 t = np.zeros(TS.size)
33 ys1[0] = Y_INI
34 t[0]= T_INI
35
36 #Algoritmo de Euler-Maruyama
37 for i in range(1, TS.size):
38     t[i] = T_INI + (i - 1) * DT
39     y = ys1[i - 1]
40     ys1[i] = y + (epsilon * y + g * y ** 3 - y ** 5 + k*delta)*DT
   + ((2 * B) ** 0.5) * dW(DT)
41
42 #Guardar datos calculados en un DataFrame
43 data = {'Tiempo': t,
44        'k20_delta+':ys1
45        }
46
47 df_data = pd.DataFrame(data)
48
49 #Guardar el DataFrame en un archivo .csv
50 df_data.to_csv('u-2_delta.csv')

```

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE EULER-MARUYAMA

A fin de estudiar la convergencia del método numérico de Euler-Maruyama, empleado en el [Capítulo 5](#) para calcular la evolución temporal de la velocidad acimutal normalizada u_θ , y para justificar el uso de un paso $h = 0.005$ s en las simulaciones de la [Sección 6](#), se ha seguido la condición de convergencia fuerte en la [Ecuación 5.16](#):

$$\sup_{t_0 \leq t_i \leq t_{\text{fin}}} \mathbb{E}[|X_i - X(t_i)|] \leq K(h)^p$$

A partir de la [Ecuación 5.16](#), se define el *error fuerte* (en inglés, *strong error*) como [\[89\]](#):

$$e_h^{\text{fuerte}} = \sup_{t_0 \leq t_i \leq t_{\text{fin}}} \mathbb{E}[|X_i - X(t_i)|]. \quad (6.1)$$

Lo que quiere decir que la solución numérica X_i para cada punto de la solución analítica $X(t_i)$ convergerá fuertemente si:

$$e_h^{\text{fuerte}} \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } h \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

Para comprobar la convergencia fuerte del método, de acuerdo con la [Ecuación 6.2](#), emplearemos diferentes pasos temporales h , siendo el valor de un paso la mitad del anterior ($h_{i+1} = h_i/2$, siguiendo así las recomendaciones de [\[95\]](#), [\[82\]](#) y [\[96\]](#)).

Los pasos h_i empleados en este estudio serán los siguientes:

$$h_1 = 0.16 \text{ s}, h_2 = 0.08 \text{ s}, h_3 = 0.04 \text{ s}, h_4 = 0.02 \text{ s}, h_5 = 0.01 \text{ s y } h_6 = 0.005 \text{ s}.$$

Es importante mencionar que, dado que no se conoce la solución analítica de la [Ecuación 5.8](#), calcularemos el error en la [Ecuación 5.16](#) restando los valores de $u_{\theta i}$ obtenidos para dos pasos h_i y h_{i+1} consecutivos en el mismo instante temporal t_i . Posteriormente, calcularemos el máximo de los valores absolutos de dichas restas.

En la [Figura 1](#) viene representada la disminución de $\mathbb{E}[|X_i - X(t_i)|]$ a medida que la resta de dos pasos paso temporal h es, cada vez, más baja. En el eje de abscisas, e , vienen representadas las siguientes restas:

$$e_1 = \sup[|u_{\theta i}(h_1) - u_{\theta i}(h_2)|] \quad (6.3)$$

$$e_2 = \sup[|u_{\theta i}(h_2) - u_{\theta i}(h_3)|] \quad (6.4)$$

$$e_3 = \sup[|u_{\theta i}(h_3) - u_{\theta i}(h_4)|] \quad (6.5)$$

$$e_4 = \sup[|u_{\theta i}(h_4) - u_{\theta i}(h_5)|] \quad (6.6)$$

$$e_5 = \sup[|u_{\theta i}(h_5) - u_{\theta i}(h_6)|] \quad (6.7)$$

Así, empleando un paso $h_6 = 0.005$ s, si comparamos los resultados obtenidos en el modelo estocástico (más concretamente, los máximos de la velocidad acimutal normalizada u_θ mostrados en la [Tabla 5.1](#)) con los valores teóricos $u_{\theta N} = -1.40$ y $u_{\theta S} = 1.40$, se tiene, en los resultados numéricos del modelo, un porcentaje de error de menos del 1.5%. Esta tolerancia es lo suficientemente baja como para considerar nuestros resultados satisfactorios.

Convergencia del error cometido por el método de Euler-Maruyama

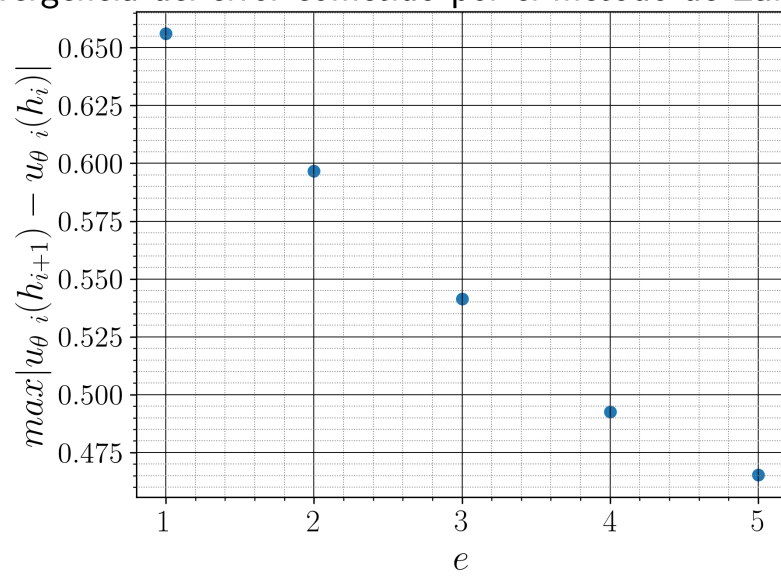


FIGURA 1 – Convergencia del error $e_i = \sup[|u_{\theta_i}(h_i) - u_{\theta_i}(h_{i+1})|]$ cometido por el método de Euler-Maruyama (empleado en la simulación del modelo estocástico en el [Capítulo 5](#)).


```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
5 plt.rcParams['savefig.dpi'] = 300
6 plt.rcParams['text.usetex'] = True
7 IPython_default = plt.rcParams.copy()
8
9 def dW(delta_t: float) -> float:
10     #Generacion de numero aleatorio perteneciente a la
11     #distribución normal.
12     np.random.seed(seed=21)
13     return np.random.normal(loc=0.0, scale=np.sqrt(delta_t))
14
15 # Parámetros iniciales
16 Y_INI = 0
17 T_INI = 0
18 T_FIN = 50000
19 # Prelocalizar un DataFrame vacío para almacenar los resultados
20 df_concat = pd.DataFrame({'t': []})
21
22 # Parámetros característicos de la SDE
23 epsilon = -0.05
24 g = 2
25 B = 1
26
27 # Iterar sobre los diferentes valores de N
28 TDT = [0.16, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01, 0.005]
29 for DT in TDT:
30     # Paso temporal
31     TS = np.arange(T_INI, T_FIN + DT, DT)
32
33     ys = np.empty(len(TS))
34     t = np.empty(len(TS))
35
36     ys[:] = np.nan
37     t[:] = np.nan
38
39     ys[0] = Y_INI
40     t[0] = T_INI
41
42     print(t.size, ys.size)
43     # Algoritmo de Euler-Maruyama
44     for i in range(1, TS.size):
45         t[i] = T_INI + (i - 1) * DT
46         y = ys[i - 1]
47         ys[i] = y + (epsilon * y + g * y ** 3 - y ** 5) * DT + ((2 * B
48             ) ** 0.5) * dW(DT)
49
50 # Crear un DataFrame con los resultados para el valor actual de N
51 df = pd.DataFrame({'t': t, f'{DT}': ys})
52
53 # Concatenar el DataFrame actual al DataFrame general
54 df_concat = pd.merge(df_concat, df, on='t', how='right')
```

```
1 df2 = df_concat.copy()
2 df2.drop(df2.index[:62], inplace=True)
3 f2.dropna(inplace=True)
4
5 e1 = max(abs(df2['0.16']-df2['0.08']))
6 e2 = max(abs(df2['0.08']-df2['0.04']))
7 e3 = max(abs(df2['0.04']-df2['0.02']))
8 e4 = max(abs(df2['0.02']-df2['0.01']))
9 e5 = max(abs(df2['0.01']-df2['0.005']))
10
11 e =[e1, e2, e3, e4, e5]
```