

# FLOTABILIDAD DE PEQUEÑOS OBJETOS EN INTERFASES LÍQUIDO-LÍQUIDO

Trabajo de Fin de Máster

Máster en Física de Sistemas Complejos  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA



Autor: Federico Ruau Asprela  
frua1@alumno.uned.es

Tutores: Dr. Javier Tajuelo Rodríguez  
jtajuelo@ccia.uned.es

Dr. Miguel Ángel Rubio Álvarez  
mar@fisfun.uned.es

## Índice

Extracto .....	1
Introducción al problema de referencia .....	1
Consideraciones físicas sobre las soluciones de referencia .....	8
Planteamiento del problema a tratar .....	13
Descripción de los estudios a realizar .....	19
Análisis de la Condición de Flotabilidad .....	21
Análisis del Estado de Flotación .....	33
Conclusiones .....	41
Agradecimientos .....	41
Referencias.....	42
Anexos.....	43
Anexo A: Deducción completa de las ecuaciones de equilibrio adimensionales con fuerza vertical añadida .....	43
Anexo B: Derivación de la altura del centro de masas a partir de $\phi$ .....	45
Anexo C: Programas utilizados para la simulación.....	47
Anexo D: Precisión de los métodos numéricos .....	49

## Extracto

En el presente trabajo se parte de un modelo de referencia [1] consistente en un sistema conformado por un cilindro de longitud indefinida en equilibrio de flotación en una interfase de dos fluidos que, asumiendo una longitud indefinidamente grande del cilindro, puede tratarse como un problema bidimensional. A partir de este esquema, se evoluciona el modelo mediante el añadido de una fuerza externa en la dirección vertical y se estudia el efecto de ésta sobre la capacidad de flotación, la densidad máxima posible y la geometría final de un sistema de este tipo, tanto para los casos en que la fuerza es ascendente como en los que es descendente. Los cálculos se realizan de forma numérica a partir de los datos de entrada de la densidad y radio del cilindro, así como las características de la interfase, en este caso de dos líquidos, y se exploran rangos para varios de los parámetros. Los resultados y el análisis presentados pretenden ser de utilidad para un dispositivo desarrollado en el Laboratorio de Sistemas Complejos de la UNED para medir las propiedades mecánicas de interfases fluido-fluido [5][6].

## Introducción al problema de referencia

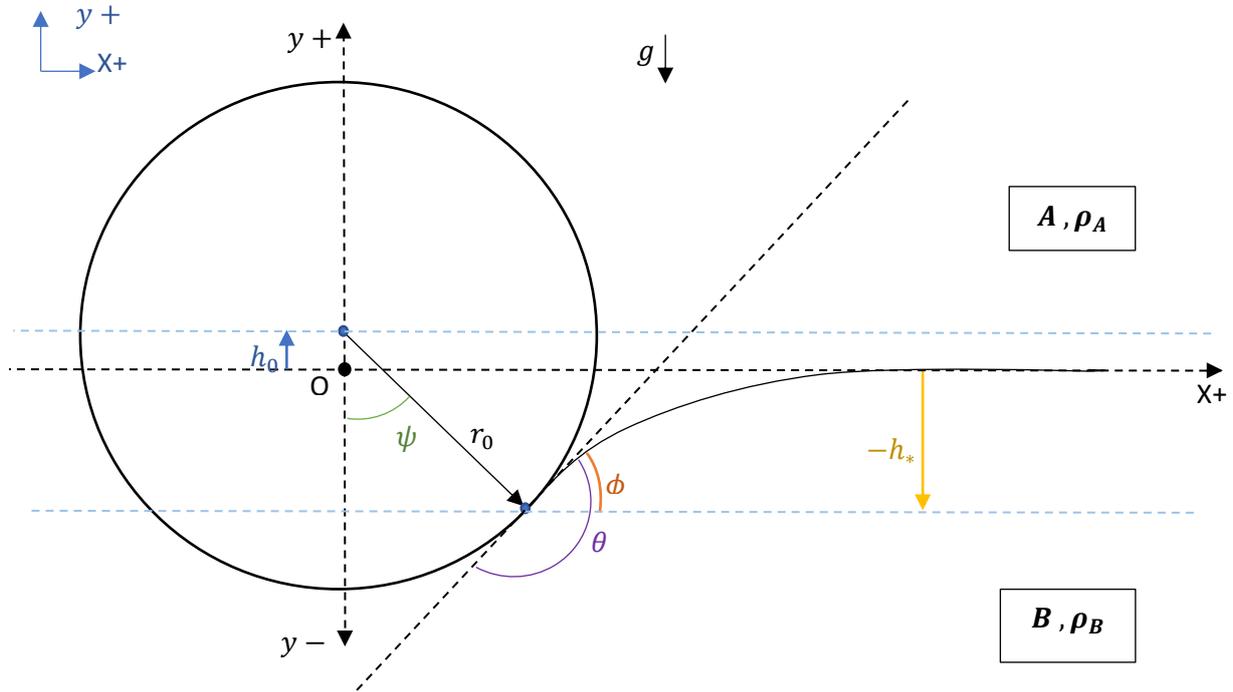
Existen casos conocidos de objetos pequeños y densos que son capaces de flotar debido al equilibrio entre el peso, las fuerzas capilares y el empuje derivado del principio de Arquímedes. Ejemplos de esto serían una aguja metálica magnetizada flotando sobre la superficie del agua formando una brújula casera o el caso de ciertos artrópodos como los guérridos o zapateros.



**Imagen 1:** Guérrido sobre la superficie de una interfase agua-aire. Fuente: [10].

Para el tipo de situaciones mencionadas, podemos suponer el objeto como un cilindro en posición horizontal sobre una interfase separando dos fluidos, de diámetro relativamente pequeño, pero de una longitud muy superior en comparación. De esta forma, puede modelarse el caso asumiendo dimensión longitudinal del cilindro como infinita, ignorando los efectos de borde en los dos extremos, lo cual permite tratar el equilibrio de fuerzas sobre una sección del

cilindro como un problema bidimensional tal y como el que se observa en la **Figura 1**. Este tipo de esquema ha sido estudiado por diversos autores [1][2][3].



**Figura 1:** Esquema de cilindro bidimensional en interfase de dos fluidos [1]. Se indican: radio del cilindro  $r_0$ ; altura del centro de masas del cilindro con respecto a la interfase sin deformar  $h_0$ ; altura del punto de contacto de la interfase con el cilindro con respecto a la altura de la interfase sin deformar  $h_*$ ; ángulo de la posición del punto de contacto con respecto a la vertical que pasa por el centro de masas  $\psi$ ; ángulo de contacto de la interfase  $\theta$ ; inclinación de la interfase  $\phi$ ; densidad del fluido A,  $\rho_A$ ; densidad del fluido B,  $\rho_B$ .

La **Figura 1** representa la interfase plana de dos fluidos, el fluido A de densidad  $\rho_A$ , y el fluido B de densidad  $\rho_B$ , tal que  $\rho_A < \rho_B$ , situados en el seno de un campo gravitatorio  $g$ . La tensión superficial asociada a la interfase entre los dos fluidos es  $\gamma_{AB}$ . Sobre esta interfase se encuentra un cilindro de diámetro  $2r_0$  y densidad  $\rho_S$ , para el cual asumimos longitud infinita. Para mantenerse a flote, el cilindro ha de satisfacer un cierto balance de fuerzas. En esta situación de equilibrio el centro del cilindro se encuentra a una altura  $h_0$  con respecto a la interfase sin deformar (a una distancia suficientemente grande del cilindro), y el punto de contacto entre la interfase y el cilindro se encuentra a una altura  $h_*$  con respecto a la misma referencia. Otras variables relevantes para describir el perfil de la interfase cerca del punto de contacto  $h(x)$ , y que permiten determinar la posición del punto de contacto, se indican también en la figura. Estas son: el ángulo de contacto  $\theta$ , la posición angular del punto de contacto  $\psi$  y el ángulo de inclinación de la interfase  $\phi$ .

Como ya se ha comentado, para que el cilindro permanezca a flote el balance de fuerzas verticales debe verse equilibrado. De esta forma, el peso del objeto debe ser contrarrestado por el peso del fluido que desplace, que depende de la diferencia de densidades de los fluidos y de la posición del punto de contacto con respecto a la interfase sin deformar y el centro del cilindro, así como por la tensión. Este balance puede describirse mediante la ecuación siguiente:

$$\pi(\rho_S - \rho_A)r_0^2g = 2\gamma_{AB} \sin \phi + (\rho_B - \rho_A)r_0^2g \left( -2\frac{h_*}{r_0} \sin \psi + \psi - \sin \psi \cos \psi \right). \quad (1)$$

En **(1)**, el término del lado izquierdo de la igualdad representa el peso (por unidad de longitud) del cilindro reducido por el peso de fluido A que este desplaza. En el lado derecho de la igualdad se encuentran los términos que contrarrestan este peso. El primer término del lado derecho de la igualdad es la componente vertical de la tensión superficial  $\gamma_{AB}$ , mientras que el segundo término representa el peso modificado de fluido B que habría llenado el área curvada de interfase en las cercanías del cilindro en la **Figura 1**.

Para realizar un estudio sistemático de las condiciones de flotabilidad resulta conveniente adimensionalizar **(1)**. Tal y como se describe en la referencia **[1]**, el resultado obtenido es el siguiente (el procedimiento algo más detallado es equivalente al presente en el **Anexo A**, asumiendo que no hay ninguna fuerza exterior sobre el cilindro):

$$\pi DB = 2 \sin \phi - 2H_* B^{1/2} \sin \psi + B(\psi - \sin \psi \cos \psi). \quad (2)$$

Donde las variables espaciales se hacen adimensionales con la longitud capilar  $l_c$  como

$$R_0 \equiv r_0 / l_c, \quad H_* \equiv h_* / l_c, \quad (3)$$

y donde la longitud capilar  $l_c$  se define como

$$l_c \equiv \sqrt{\frac{\gamma_{AB}}{(\rho_B - \rho_A)g}}, \quad (4)$$

y se introducen además el Numero de Bond  $B$

$$B \equiv (\rho_B - \rho_A)r_0^2 g / \gamma_{AB} = R_0^2, \quad (5)$$

y la densidad adimensional del cilindro medida relativa a la de los dos fluidos

$$D \equiv (\rho_S - \rho_A) / (\rho_B - \rho_A). \quad (6)$$

Merece la pena comentar en este punto el significado físico del número de Bond o número de Eötvös. Este número adimensional representa, tal y como se observa en **(5)**, el cociente entre las fuerzas gravitacionales y las fuerzas debidas a la tensión superficial. Es por tanto un indicativo de la importancia relativa de fuerzas inducidas por la gravedad y la tensión, un ratio entre estos dos tipos de fuerzas, de tal forma que un valor pequeño de  $B$  indica una predominancia de la fuerza de tensión, mientras que un valor más alto implica por el contrario una mayor importancia de la fuerza gravitacional. Esto se puede relacionar también con **(4)**, ya que, manteniendo el radio del objeto  $r_0$  constante, si  $l_c$  aumenta,  $B$  tendería a disminuir, indicando que en esta situación se da una predominancia de las fuerzas capilares cuando la longitud capilar es mayor. Ambos factores son de gran importancia para determinar si el sistema tratado se ve afectado o no por el efecto de la tensión superficial. En otras palabras, puesto que, en general,  $\rho_c > \rho_A, \rho_B$ , valores del número de Bond  $B \gg 1$  serían un primer predictor de que la condición de flotabilidad no se va a satisfacer.

El siguiente paso para el tratamiento de **(2)** es reducir las variables del problema, en concreto eliminar  $\psi$ , aplicando la relación entre ángulos **[1]**

$$\psi = \phi + \pi - \theta. \quad (7)$$

Del mismo modo, puede utilizarse la ecuación en dos dimensiones de Laplace-Young,

$$\frac{H_{xx}}{(1 + H_x^2)^{3/2}} = H, \quad (8)$$

donde el sufijo  $x$  indica la derivada parcial con respecto a esta variable. La ecuación (8) integrada utilizando el límite  $H(\pm\infty) = 0$  permite obtener [4]

$$1 - \frac{1}{2}H^2 = (H_x^2)^{1/2}. \quad (9)$$

Resolviendo (9) en el punto de contacto se obtiene la equivalencia [4]

$$H_* = -2 \sin(\phi/2), \quad (10)$$

que permite también simplificar (2), de forma que al final se obtiene

$$D(\phi) = \frac{2}{\pi B} \sin \phi - \frac{4}{\pi B^{1/2}} \sin \frac{\phi}{2} \sin(\phi - \theta) + \frac{1}{\pi} \left[ \phi + \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2(\phi - \theta) \right]. \quad (11)$$

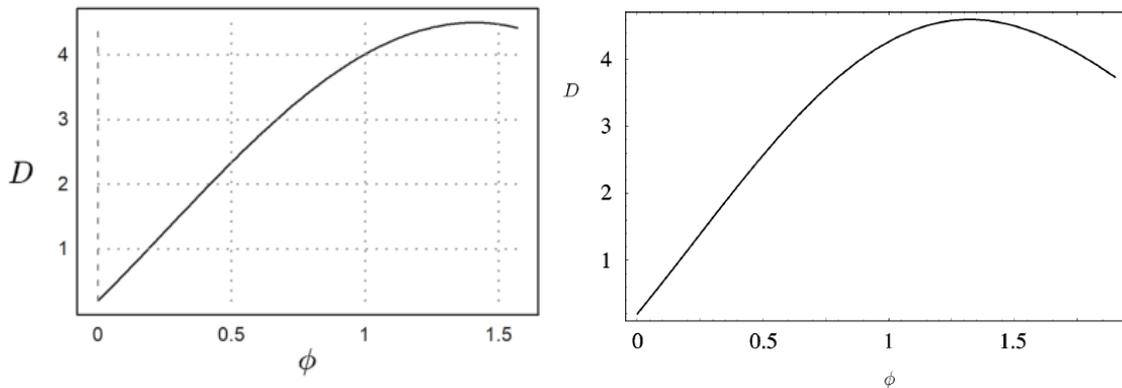
La ecuación (11) es la base para el tratamiento y estudio del sistema planteado en la Figura 1 [1], así como el planteamiento expandido planteado en posteriores apartados de la presente memoria. Esta ecuación nos da la densidad adimensional del cilindro  $D$  requerida para obtener una cierta inclinación de interfase en el punto de contacto  $\phi$  para unos valores dados de  $\theta$  y  $B$ .

Planteadas estas ecuaciones, merece también la pena describir dos conceptos alrededor de los cuales girará el análisis de posteriores apartados. Uno de estos conceptos es la *condición de flotabilidad*  $D_{max}(B)$ , que es el límite que determina el punto a partir del cual la situación de flotación deja de ser posible, el límite a partir del cual el cilindro se hunde. Por otro lado, tenemos lo que llamaremos *estado de flotación*  $\psi(B)$ , que es una medida directa de la superficie del cilindro en contacto con cada fluido para una configuración de sistema determinada.

En [1] se realiza un estudio de (11) para cilindros de dimensiones pequeñas, y se estudian las condiciones para la densidad y el radio del cilindro que aseguran la flotabilidad, es decir, la *condición de flotabilidad*. Para esto, es necesario tener claro los rangos a considerar para ciertos parámetros. En concreto, hay que puntualizar que consideramos  $\phi < \pi/2$  para los casos estudiados en esta memoria, tal y como se hace en [1], de forma que de la interfase  $h(x)$  considerar no se curve sobre sí misma (se comporte como una función biyectiva). Cabe destacar que esto no implica que la condición de flotabilidad no sea calculable en casos fuera de este rango. Para  $\theta \leq \pi/2$  el límite superior de  $\phi$  será menor que  $\pi/2$ , con lo cual se puede resolver la condición de flotabilidad como único requisito para asegurar que el objeto flota, y puede también obtenerse el perfil de la interfase. Cuando  $\theta > \pi/2$  el límite superior para  $\phi$  es mayor que  $\pi/2$  y al resolver la *condición de flotabilidad* puede darse el caso de que  $\phi > \pi/2$ . En esta situación resulta más complejo asegurar que el cilindro flote, y la *condición de flotabilidad* considerada hasta este punto deja de ser suficiente. En este caso sería necesario que la interfase a ambos lados del cilindro no llegase a entrar en contacto, y para asegurarlo sería necesario estudiar el perfil de esta con métodos algo diferentes de los utilizados en la presente memoria.

En este caso la densidad adimensional se maximiza ( $D(\phi_c) = D_{max}$ ) para un cierto valor de  $\phi = \phi_c$ , que es para el que las fuerzas capilares y de Arquímedes alcanzan su máximo. El procedimiento de obtención de  $D_{max}(B)$  se basa por tanto en la resolución numérica de la

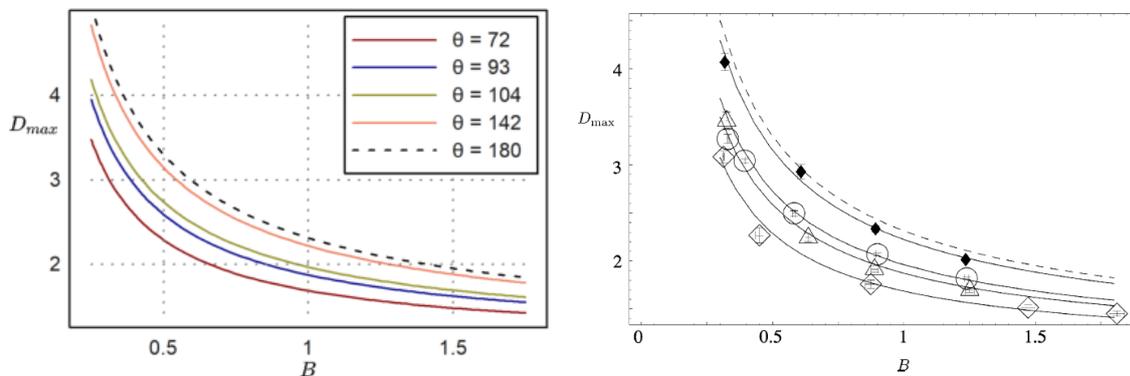
derivada  $\partial D/\partial\phi$ , la obtención de  $\phi_C$ , y finalmente el cálculo de  $D_{max} = D(\phi_C)$ , todo esto manteniendo valores de  $B$  y  $\theta$  constantes.



**Figura 2:** Reproducción de los resultados de la referencia [1] (izquierda) junto con el original (derecha) para la variación de  $D$  en función de la inclinación de la interfase en el punto de contacto  $\phi$ .

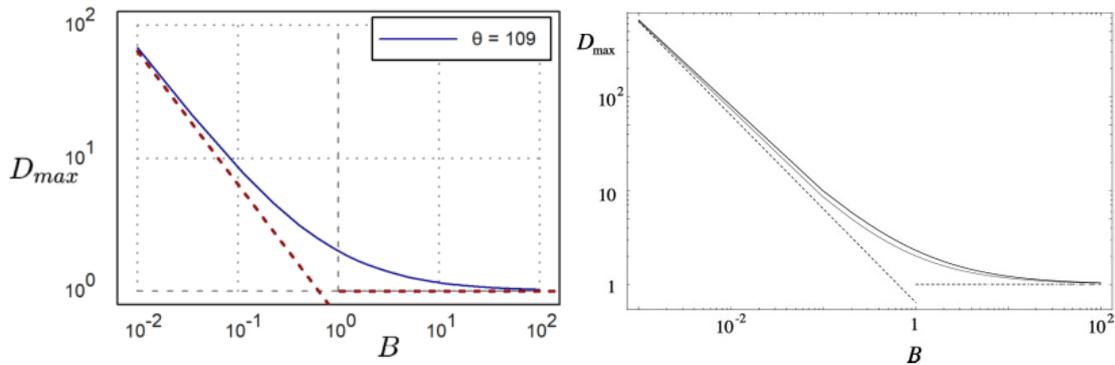
Los resultados numéricos de esta referencia se han reproducidos mediante los programas *VellaLangmuirResultsFig2.en*, *VellaLangmuirResultsFig3.en* y *VellaLangmuirResultsFig3.en* (más detalles en el **Anexo C** y **Anexo D**), que han servido como base para los desarrollos posteriores comentados en esta memoria, siendo la situación estudiada en la referencia un caso específico del esquema con fuerza añadida que se explica en *el siguiente apartado*, en el cual el valor de la fuerza es nulo.

En la **Figura 2** se aprecia, tanto para la referencia original como para la reproducción de resultados realizada, cómo la densidad se maximiza para un cierto valor de  $\phi_C$ . Considerando físicamente lo que ocurre tras la variación presentada en esta gráfica, hay que pensar que, a medida que  $\phi$  aumenta hacia  $\pi/2$ , el punto de contacto de la interfase con el cilindro se va moviendo a lo largo de la superficie del cilindro, ya que estamos aumentando  $\psi$  también como puede verse en (7). Esto también implica que  $|H_*|$  aumenta, pero  $R_0 \sin \psi$  disminuye (a partir de  $\psi = \pi/2$ ). Debido a esto, el segundo término en la parte derecha en (2) tiene un valor mínimo en algún punto, lo cual fuerza a  $D$  a tomar un valor máximo antes de que la inclinación de la interfase sea  $\pi/2$ , es decir, antes de que el menisco se vuelva vertical.



**Figura 3:** Reproducción de los resultados de la referencia [1] (izquierda) junto con el original (derecha) para la dependencia de  $D_{max}$  con el número de Bond  $B$  para diferentes valores del ángulo de contacto  $\theta$ .

La **Figura 3** muestra la variación de  $D_{max}$  en función del valor de  $B$  para varios valores fijos de  $\theta$ . Algo que se puede apreciar a primera vista es el efecto del incremento del ángulo  $\theta$ : para un valor fijo de  $B$ , el incremento de  $\theta$  se traduce en un incremento en la densidad máxima del cilindro que puede ser soportada por la interfase. Se puede observar también que  $D_{max}$  tiende a decrecer a medida que  $B$  aumenta para un  $\theta$  fijo. Esto tiene sentido físicamente si consideramos el significado del número de Bond comentado anteriormente, un ratio de la importancia relativa de fuerzas inducidas por la gravedad y la tensión, que ayuda a intuir también la predominancia de un tipo de fuerza sobre la otra. Visto así, una  $B$  mayor implica una predominancia de las fuerzas gravitatorias, es decir, el efecto del peso del cilindro cobra una mayor relevancia en el equilibrio final, y el efecto de la tensión tiende a hacerse menos relevante. Por otro lado, si  $B$  decrece, la fuerza derivada de la tensión de la interfase cobra mayor relevancia, y la tendencia de  $D_{max}$  es ascendente de forma bastante pronunciada. El comportamiento en ambos extremos es asintótico, tal y como puede observarse en la **Figura 4**.



**Figura 4:** Reproducción de los resultados de la referencia [1] (izquierda) junto con el original (derecha) para la dependencia de  $D_{max}$  con el número de Bond  $B$  para  $\theta$  fijo indicando las tendencias asintóticas.

Considerando el comportamiento de (11) cuando  $B \ll 1$ , el primer término del lado derecho de la igualdad se convierte en el dominante, y por tanto en ese límite

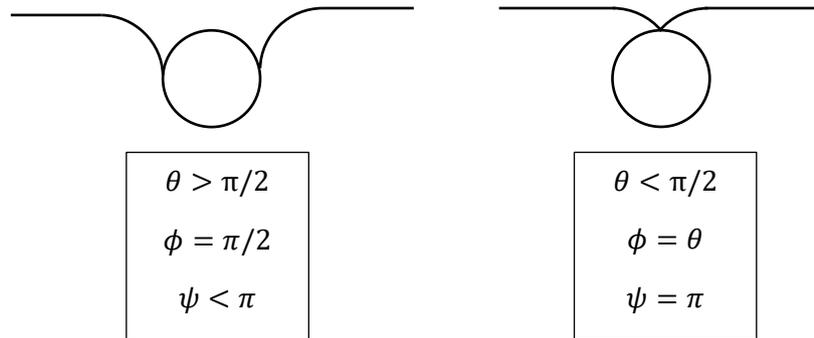
$$D_{max} \approx \frac{2}{\pi B},$$

siempre y cuando  $\theta > \pi/2$ , lo que representaría la asíntota decreciente que observamos en ambas gráficas en la **Figura 4**. Esto es independiente del valor exacto de  $\theta$  más allá de la condición mencionada y corresponde con la situación de dominancia de la fuerza de tensión, que se da en este caso cuando el menisco es vertical  $\phi = \pi/2$ . Además, en este caso es importante notar que el máximo  $D_{max}$  se dará antes de llegar al hundimiento del cilindro con  $\psi = \pi$ .

Por otro lado, para  $\theta < \pi/2$ , el límite se transforma en

$$D_{max} \approx \frac{2 \sin \phi}{\pi B} = \frac{2 \sin \theta}{\pi B},$$

dado que nos hallamos en el caso en que la máxima componente vertical de la tensión superficial se dará cuando el cilindro esté lo más hundido posible,  $\psi = \pi$ , lo que implica  $\phi = \theta$  (**Figura 5**).



**Figura 5:** Cilindros en flotación con  $\theta > \pi/2$ ,  $\phi = \pi/2$  y  $\psi < \pi$  a la izquierda; y  $\theta > \pi/2$ ,  $\phi = \theta$  y  $\psi = \pi$  a la derecha.

La otra asíntota que se observa en la figura es para  $B \gg 1$ , cuando tendemos a  $D_{max} \approx 1$ . En este rango predominan las fuerzas gravitatorias, y por tanto el equilibrio termina tendiendo hacia el principio de Arquímedes simple, el peso ha de ser contrarrestado por el empuje, de lo que se deduce que  $D_{max}$  ha de tender a la unidad.

Los resultados presentados encajan con los de la referencia [1]. Esto implica que los cálculos realizados son un buen punto de partida para la ampliación del modelo que se pretende en esta memoria, y sirve para sentar las bases de los desarrollos que se presentan en posteriores secciones.

## Consideraciones físicas sobre las soluciones de referencia

Hasta este punto se ha seguido el razonamiento planteado en la referencia [1] y se han reproducido los resultados tal y como se hiciera en ésta, pero es necesario añadir un último criterio que se omite en la bibliografía sobre el tema, y que afecta de forma directa a los resultados en ciertos rangos. Este factor es relevante tanto para el caso original, como para el que se plantea *más adelante*, y que es en esencia el foco de la presente memoria. En este caso se trata de una puntualización con respecto a la variable  $\phi_C$ .

Tal y como se ha explicado anteriormente, utilizando la Figura 2 como complemento,  $\phi_C$  es considerado el valor de  $\phi$  para el cual se maximiza (11) con un  $\theta$  y  $B$  dados, tal que  $D(\phi_C) = D_{max}$ . Esto es una solución que se obtiene mediante la resolución de la (12) en el rango considerado para  $\phi$  teniendo en cuenta la geometría del sistema (se busca el máximo para  $\phi > 0$ ).

$$\frac{\partial D}{\partial \phi}(\phi, \theta, B) = -\frac{2 \cos(\phi/2) \sin(\phi - \theta)}{\pi\sqrt{B}} - \frac{4 \sin(\phi/2) \cos(\phi - \theta)}{\pi\sqrt{B}} + \frac{2 \cos(\phi)}{\pi B} - \frac{\cos(2(\phi - \theta))}{\pi} + \frac{1}{\pi} . \quad (12)$$

Si consideramos la relación (7), podemos definir

$$\psi_C = \psi(\phi_C) \quad (13)$$

como el valor crítico de  $\psi$ , que se da cuando  $D(\phi) = D_{max}$ .

Si consideramos la Figura 1, resulta obvio que los resultados que tienen sentido para la física del sistema son los que cumplen

$$0 < \psi < \pi, \quad (14)$$

y que en el momento en que

$$\psi = \psi_{límite} = \pi, \quad (15)$$

situación en la cual tenemos

$$\phi = \theta, \quad (16)$$

la interfase se une por encima del cilindro, lo cual implica que éste se hunde. Este sería el límite físico para la situación planteada, más allá del cual los resultados pueden existir matemáticamente, pero no sirven para describir el sistema tratado en este caso. Partiendo de esto, es importante recordar que  $\phi_C$  tal y como se ha planteado hasta este punto es una solución matemática para el máximo de  $D(\phi)$ , pero en ningún momento se garantiza que dicha solución para máximo local  $\phi_C$  sea válida a nivel físico. Es, por lo tanto, necesario determinar en cada caso cuál es el límite físico para el sistema, en función de los parámetros que lo definen. Por comodidad adoptaremos en esta parte para diferenciar ambas soluciones la notación  $\phi_C$  *límite* para indicar el límite físico máximo, y  $\phi_C$  *derivada* para indicar el límite matemático obtenido resolviendo el límite local. En este caso, el valor crítico para el hundimiento del cilindro a considerar realmente será

$$\phi_C = \min(\phi_C \text{ límite}, \phi_C \text{ derivada}). \quad (17)$$

Además, para el caso del límite de la solución física tenemos que

$$D_{f \max} = D(\phi_{C \text{ límite}}) = \frac{2}{\pi B} \sin(\theta) + 1. \quad (18)$$

Es importante notar aquí el efecto de la dependencia de esta solución con  $\sin(\theta)$ , que se convierte en la pendiente de la recta  $D_{f \max}$ .

Lo verdaderamente interesante a nivel práctico es poder determinar qué solución es la que aplica para el sistema a tratar antes de tener que calcular el máximo resolviendo (12). Para esto debemos realizar algunas consideraciones con respecto a (12). En primer lugar, si observamos la región estudiada de  $D(\phi)$  en Figura 2, dado que la función es en este caso creciente hasta alcanzar el máximo en  $\phi_{C \text{ derivada}}$ , la derivada en este tramo ha de ser necesariamente positiva, hacerse nula en  $\phi_{C \text{ derivada}}$  y pasar a ser negativa más allá de este valor. Teniendo esto en cuenta, es fácil saber si  $\phi_{C \text{ límite}}$  es mayor o menor que  $\phi_{C \text{ derivada}}$  mediante el signo de  $\partial D / \partial \phi(\phi_{C \text{ límite}})$ .

Considerando (16) y (12) tenemos, que

$$\frac{\partial D}{\partial \phi}(\phi_{C \text{ límite}}, \theta, B) = \left( \frac{\partial D}{\partial \phi} \right)_{C \text{ límite}}(\theta, B) = -\frac{4 \cos(\theta/2)}{\pi \sqrt{B}} + \frac{2 \cos(\theta)}{\pi B}. \quad (19)$$

Igualando esto a cero y resolviendo podemos obtener que el caso en que ambos límites  $\phi_{C \text{ límite}}$  y  $\phi_{C \text{ derivada}}$  coinciden,

$$\left( \frac{\partial D}{\partial \phi} \right)_{C \text{ límite}}(\theta, B) = 0. \quad (20)$$

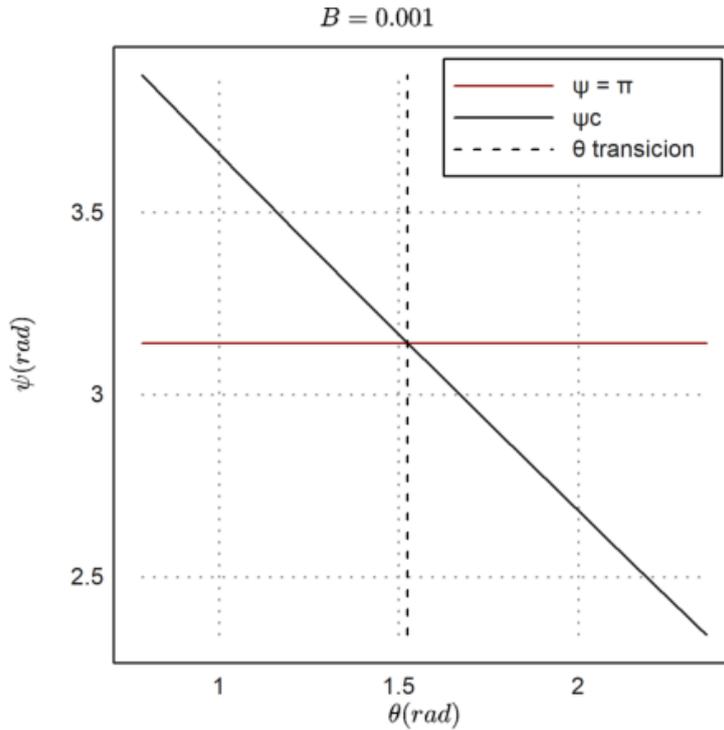
Que sería el punto en el cual se produce un cambio en la solución a considerar para el problema, debido a las consideraciones físicas mencionadas.

De todo esto se llega a la conclusión de que, para un sistema definido, podemos unificar ambos límites y redefinir  $\phi_C$  como:

$$\phi_C = \begin{cases} \theta, & \frac{\partial D}{\partial \phi}(\phi_{C \text{ límite}}, \theta, B) \geq 0 \\ \phi_{C \text{ derivada}}, & \frac{\partial D}{\partial \phi}(\phi_{C \text{ límite}}, \theta, B) < 0 \end{cases}. \quad (21)$$

A partir de las condiciones planteadas en (21), podemos determinar qué solución tomar antes de maximizar la derivada en cuestión, y decidir si debemos determinar  $D_{\max}$  tal como se hace en (18), o si debemos hacerlo mediante el máximo local. Con todo, el valor del límite de la densidad se determina del mismo modo que se planteaba anteriormente, mediante  $D(\phi_C) = D_{\max}$ , pero en este caso considerando la nueva definición (21).

Como complemento para visualizar este cambio de régimen de la solución para el límite físico del problema, se ha tratado el caso presentado en la Figura 6, en la cual se ha tomado un  $B$  fijo y se ha explorado la validez de las soluciones  $\phi_{C \text{ límite}}$  y  $\phi_{C \text{ derivada}}$ .



**Figura 6:** Soluciones de  $\psi_c(\theta)$  y  $\psi = \pi$  para un sistema con  $B = 0.001$ , con  $\theta_{transición}$  como referencia en forma de línea discontinua.

Para este caso se ha definido  $B = 0.001$ , y se ha explorado los valores de  $\psi$  obtenidos para ambos límites mencionados en un rango de  $\theta \in [45^\circ, 135^\circ]$ . Se puede observar claramente cómo existe un régimen en el cual  $\psi_c$  derivada (nótese que aplicamos el mismo subíndice para  $\psi$  que el utilizado para  $\phi$ ) se encuentra más allá del límite físico viable para la solución  $\psi_c$  límite, con lo cual no sería viable. Para la situación planteada, si resolvemos **(19)** **(20)** para  $\theta$  asumiendo  $B$  fijo obtenemos

$$\theta_{transición} \approx 1.52325 \text{ rad}, \quad (22)$$

y puede verse cómo este valor coincide en la **Figura 6** con el cambio de régimen de la solución para el límite de hundimiento. Es por esto por lo que se ha utilizado el subíndice *transición* en este caso, para indicar que este es el valor de  $\theta$  para un  $B$  dado en el cual se produce el cambio de régimen de dominancia de la solución límite física  $\psi_c$  límite al régimen de validez física de la solución matemática del problema  $\psi_c$  derivada.

Se puede además estudiar cómo se comporta **(19)** para un  $\theta$  dado en función de  $B$ , tal y como se hace en la **Figura 7**, en la cual se puede observar cómo hay una gama de valores de  $\theta$ , generalmente los que están por encima de  $\theta = \pi/2$  para los cuales predomina  $\phi_c$  derivada dado el signo de  $(\partial D / \partial \phi)_{c \text{ límite}}$ . Esto es importante sobre todo a la hora de determinar si es necesario aplicar esta revisión sobre la referencia **[1]**.

Si repetimos los cálculos de la referencia aplicando la corrección tal y como se ha comentado hasta ahora, puede verse que los resultados coinciden. Para visualizar la diferencia entre los resultados que podrían obtenerse tomando  $\phi_c$  límite o  $\phi_c$  derivada se ha creado la **Figura 9**. Gracias a lo observado en **Figura 7** y **Figura 8** sabemos que los resultados son válidos debido a que

los ángulos tomados se hallan en un rango en el que la solución a tomar es, en efecto  $\phi_C$  derivada.

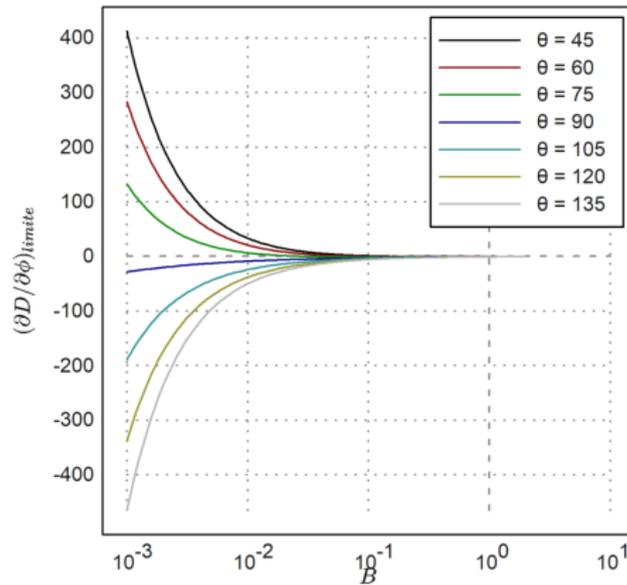


Figura 7: Comportamiento de  $(\partial D/\partial \phi)_{C \text{ límite}}$  en función de  $B$  para valores fijos de  $\theta$ .

Para el caso concreto de  $\theta = 72^\circ$ , se ha añadido la Figura 8, en la cual se observa el punto en el que la derivada cambia de signo, lo cual implica un cambio en la solución dominante. En la Figura 3 el rango graficado se encuentra precisamente pasada esta solución, y por eso los resultados finales coinciden con  $\phi_C$  derivada.

Es importante destacar que las deducciones con respecto al comportamiento de  $D_{max}(B)$  planteadas en la referencia siguen siendo aplicables, siempre y cuando sea en situaciones para las que no se topa con el límite físico de (15).

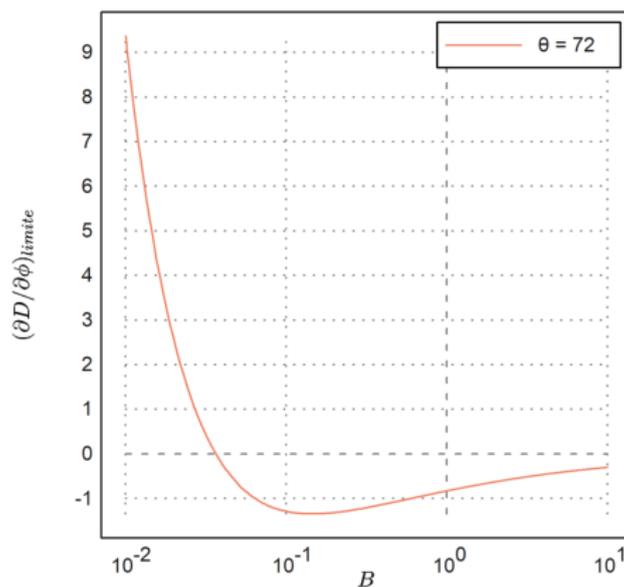
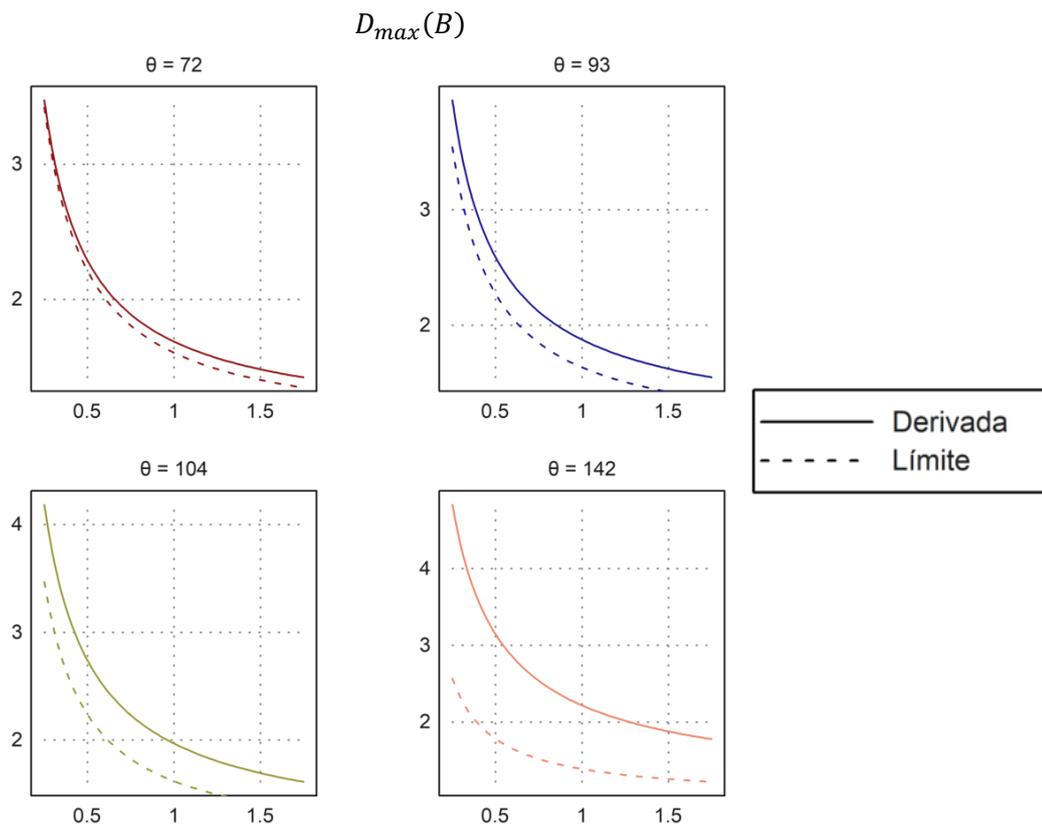


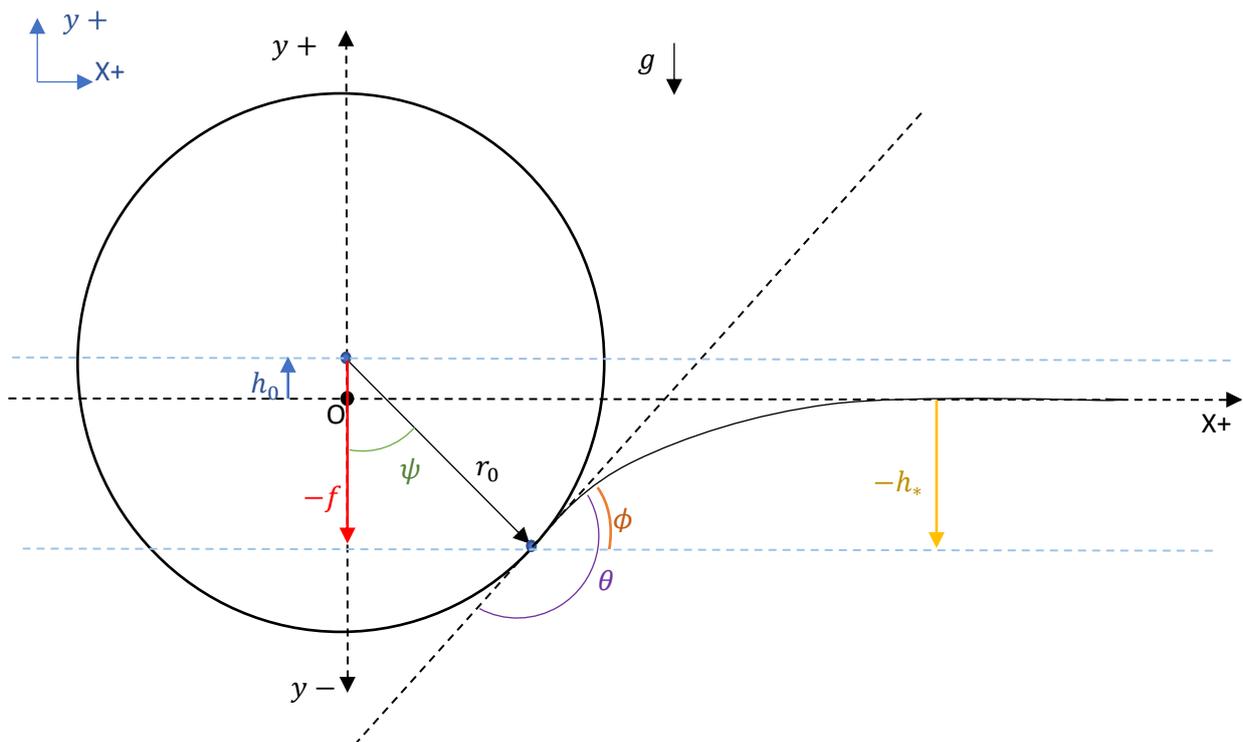
Figura 8: Comportamiento de  $(\partial D/\partial \phi)_{C \text{ límite}}$  en función de  $B$  para  $\theta = 72$ .



**Figura 9:** Reproducción de los resultados  $D_{max}(B)$  de la referencia [1] junto con la solución dada para el límite físico del sistema.

### Planteamiento del problema a tratar

El esquema del apartado anterior es un modelo simplificado, y considera una situación sin interacciones externas. Es por esto por lo que una evolución natural es la consideración de nuevos factores a introducir, como sería una fuerza en dirección vertical ejercida sobre el cilindro [3]. El estudio de este modelo ampliado es de interés especialmente como complemento a posibles pruebas experimentales [7]. En particular, el análisis de la flotabilidad de una aguja magnética empleada en el reómetro interfacial del Laboratorio de Sistemas Complejos de la UNED [5] para la realización de ciertas pruebas ha servido de motivación detrás del análisis presentado en esta memoria. En el dispositivo en cuestión, la acción externa sobre la aguja se debe a una pinza magnética que controla el desplazamiento de aquella sobre la interfase. Dicha pinza ejerce a su vez una fuerza vertical sobre la aguja [6], y es el efecto de dicha fuerza sobre el estado y la condición de flotación lo que se pretende estudiar en lo restante de este trabajo. Cabe destacar, que el modelo que se pretende estudiar englobaría el original, ya que el caso de referencia sería equivalente al esquema ampliado, pero con fuerza externa aplicada nula. Como comentario final, en el artículo de referencia [1] se asume que la interfase es aire-agua, pero en esta memoria se analizará tanto la interfase aire-agua como una interfase líquido-líquido.



**Figura 10:** Esquema de cilindro bidimensional en interfase de dos fluidos sobre el cual se ejerce una fuerza en dirección vertical,  $f$ . Se indican además: radio del cilindro  $r_0$ ; altura del centro de masa del cilindro con respecto a la interfase sin deformar  $h_0$ ; altura del punto de contacto de la interfase con el cilindro con respecto a la altura de la interfase sin deformar  $h_*$ ; ángulo de la posición del punto de contacto con respecto a la vertical que pasa por el centro de masas  $\psi$ ; ángulo de contacto de la interfase  $\theta$ ; inclinación de la interfase  $\phi$ ; densidad del fluido A,  $\rho_A$ ; densidad del fluido B,  $\rho_B$ .

En la **Figura 10** puede observarse el añadido de una fuerza vertical por unidad de longitud,  $f$ , que por conveniencia para el tratamiento consideramos aplicada directamente sobre el centro de masa de esta sección del cilindro. Considerando esta situación, se puede añadir este nuevo factor a la igualdad (2) del esquema original para obtener:

$$\begin{aligned} & \pi(\rho_S - \rho_A)r_0^2g + f \\ & = 2\gamma_{AB} \sin \phi + (\rho_B - \rho_A)r_0^2g \left( -2\frac{h_*}{r_0} \sin \psi + \psi - \sin \psi \cos \psi \right); \end{aligned} \quad (23)$$

Es importante aclarar en este punto el criterio de signos elegido para  $f$ . Del modo en que se plantean tanto la **Figura 10** como **(23)**, se considera que  $f > 0$  cuando la fuerza se ejerce en sentido  $y$  negativo, es decir, cuando tiene la misma dirección y sentido que el peso por unidad de longitud del cilindro tratado, sentido descendente. Por el contrario, cuando va en sentido inverso,  $f < 0$ .

Por otro lado, conviene darle a esta fuerza una forma que permita un tratamiento más cómodo a la hora de desarrollar las ecuaciones, y posteriormente obtener resultados mediante métodos numéricos. En este caso, una forma conveniente es la de expresar esta fuerza como un peso, de tal forma que:

$$f = \rho_f \pi r_0^2 g, \quad (24)$$

donde transformamos la fuerza en un peso añadido equivalente al de un cilindro de radio  $r_0$  y densidad  $\rho_f$ , que toma signo negativo cuando la fuerza externa es ascendente. En base a esto, se puede también definir una densidad adimensional para esta nueva fuerza en la forma siguiente:

$$D_f \equiv \frac{\rho_f}{\rho_B - \rho_A}. \quad (25)$$

Desarrollando **(23)** hasta llegar a la ecuación con variables adimensionales de forma similar a como se hizo para el apartado anterior (consultar **Anexo A** para más información acerca de la deducción) se llega a:

$$D'(\phi) = \frac{2}{\pi B} \sin \phi - \frac{4}{\pi B^{1/2}} \sin \frac{\phi}{2} \sin(\phi - \theta) + \frac{1}{\pi} \left[ \phi + \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2(\phi - \theta) \right]. \quad (26)$$

Donde se introduce  $D'$ , que se define como:

$$D' \equiv D + D_f = \frac{\rho_S + \rho_f - \rho_A}{\rho_B - \rho_A} = \frac{\rho'_S - \rho_A}{\rho_B - \rho_A}; \quad (27)$$

Resulta evidente que **(11)** y **(26)** tienen la misma forma, lo cual es debido precisamente a la introducción de la fuerza en la forma **(24)**. Como se puede observar, esto permite interpretar la fuerza como un incremento de  $\rho_f$  en la densidad del cilindro, lo cual resulta útil para el estudio del esquema en cuestión.

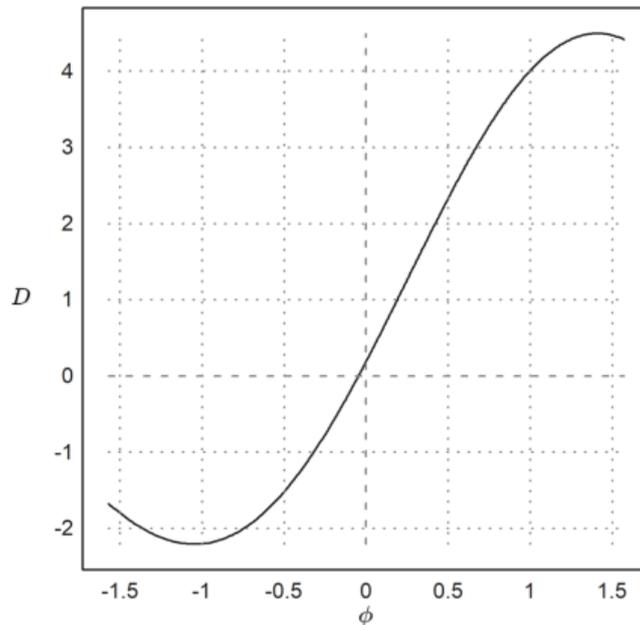
Con la adición de la fuerza, sigue siendo importante el estudio de la condición de flotabilidad, que ahora además de comprender  $D'_{\max}$  del mismo modo que se hizo para la referencia **[1]**, tendrá otro caso límite, dejando de ser un rango abierto como para el caso original. El mecanismo de obtención de este límite original antes comentado es equivalente al caso original, es decir, tendríamos que, para una interfase y geometría del cilindro dadas, el cilindro se hundirá cuando

$$D' > D'_{\max} = \frac{2}{\pi B} \sin \phi_c - \frac{4}{\pi B^{1/2}} \sin \frac{\phi_c}{2} \sin(\phi_c - \theta) + \frac{1}{\pi} \left[ \phi_c + \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2(\phi_c - \theta) \right], \quad (28)$$

donde  $\phi_c$  es el que se define en **(21)**. Después se puede determinar el valor máximo de la densidad del objeto o de la fuerza aplicada, para unas  $\theta$  y  $B$  dadas, mediante la relación **(27)**.

Tal y como se ha mencionado antes, el añadido de la fuerza hace necesaria la consideración de un segundo caso límite, no estudiado en la bibliografía de referencia, donde se asume siempre que la densidad del cilindro es superior a la de ambos fluidos  $\rho_S > \rho_B$ . Del modo en que se ha descrito, la imposición de una fuerza externa en sentido ascendente podría, a efectos prácticos, reducir la densidad efectiva del cilindro  $\rho'_S$  por debajo de las de los fluidos de la interfase  $\rho_A$  y  $\rho_B$ , incluso llegando a valores negativos  $\rho'_S < 0$ . Para estos casos, aparece un nuevo límite en la condición de flotabilidad, diferente del del hundimiento del cilindro debido a su peso, la situación de que las fuerzas capilares no puedan contrarrestar la acción del empuje y la fuerza ascendente, es decir, el caso en el que se levanta el cilindro.

La forma de resolver este nuevo límite es análoga a la utilizada para el caso del hundimiento del cilindro. En primer lugar, conviene observar el comportamiento de **(11)** para el rango que atañe a esta nueva condición límite a estudiar, de forma similar a como se hace en la **Figura 2**.



**Figura 11:** Reproducción de los resultados de la Figura 2 de la referencia **[1]** para la variación de  $D$  en función de la inclinación de la interfase en el punto de contacto  $\phi$ , ampliando el rango para valores negativos de  $\phi$ .

De forma similar al caso del hundimiento del cilindro, puede observarse que existe un mínimo local  $\phi_{C^* derivada}$  para  $D(\phi)$  en el rango  $\phi < 0$ , el cual determina el límite matemático para  $D'_{min}$  a partir del cual el cilindro sería levantado. Aquí podemos directamente sustituir  $D$  por  $D'$  y mantener las soluciones englobando el efecto de la fuerza junto con la densidad para no repetir los cálculos.

Por otro lado, para esta situación el límite físico viable sería

$$\psi = 0 \rightarrow \phi_{C^* \text{ límite}} = \theta - \pi, \quad (29)$$

cuando las líneas de interfase a ambos lados del cilindro se unen en la parte baja del cilindro, y el cilindro se separa de estas, dejando a efectos prácticos de estar atrapado en la interfase. En este caso, si observamos la forma que presenta  $D(\phi)$  podemos deducir que **(12)** es positiva por

encima de  $\phi_{C^* \text{ derivada}}$  y negativa por debajo, y tal y como se hiciera para el caso de  $\phi_C$  para el hundimiento del cilindro, podemos deducir cuándo deberíamos aplicar un límite u otro en función de si el valor de

$$\frac{\partial D}{\partial \phi} (\phi_{C^* \text{ limite}}, \theta, B) = \left( \frac{\partial D}{\partial \phi} \right)_{C^* \text{ limite}} (\theta, B) = -\frac{4 \cos(\theta/2)}{\pi\sqrt{B}} - \frac{2 \cos(\theta)}{\pi B} \quad (30)$$

es mayor o menor que cero.

Así, del mismo modo que antes podemos definir la solución para este límite en dos rangos de la forma siguiente:

$$\phi_{C^*} = \begin{cases} \theta - \pi, & \frac{\partial D}{\partial \phi} (\phi_{C^* \text{ limite}}, \theta, B) \geq 0 \\ \phi_{C^* \text{ derivada}}, & \frac{\partial D}{\partial \phi} (\phi_{C^* \text{ limite}}, \theta, B) < 0 \end{cases} \quad (31)$$

Con esto se puede definir el mínimo para la densidad adimensional directamente como

$$D'_{min} = D'(\phi_{C^*}), \quad (32)$$

siendo la condición de levantamiento del cilindro

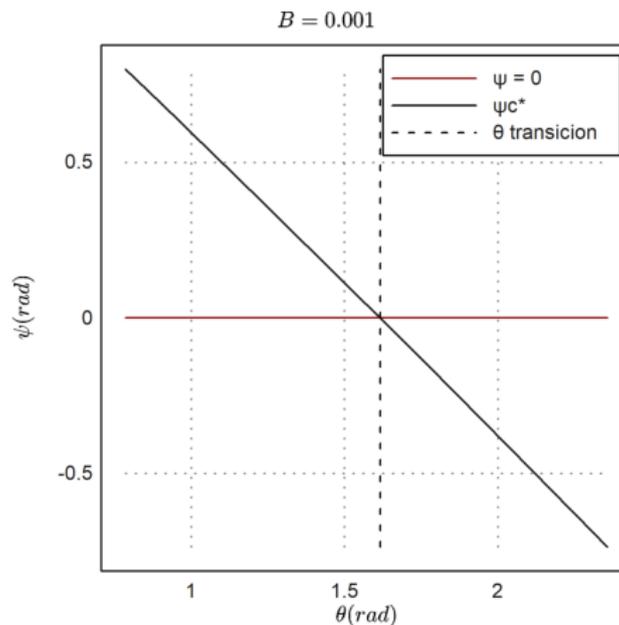
$$D < D'_{min} \quad (33)$$

Este límite pasaría a representar otra cota para el rango de la *condición de flotabilidad* antes definida, juntamente con (28).

Además, para el caso del límite físico para las soluciones, tendríamos

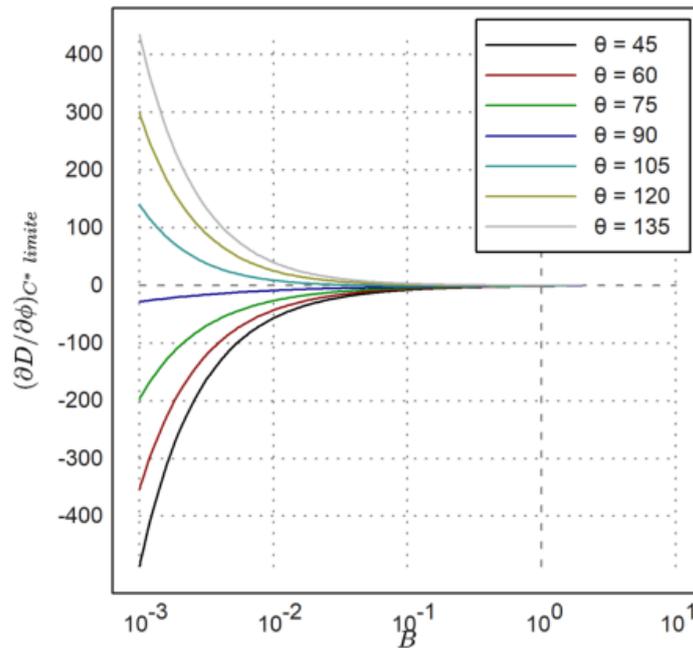
$$D(\phi_{C^* \text{ limite}}) = \frac{2}{\pi B} \sin(\theta - \pi) - D_f \rightarrow = \frac{2}{\pi B} \sin(\theta - \pi). \quad (34)$$

Se puede visualizar el régimen de soluciones de forma similar a **Figura 6**, pero en este caso para (31), en la **Figura 12**.



**Figura 12:** Soluciones de  $\psi_{c^*}(\theta)$  y  $\psi = \pi$  para un sistema con  $B = 0.001$ , con  $\theta_{transición} \approx 1.61617 \text{ rad}$  como referencia en forma de línea discontinua.

Se puede además estudiar cómo se comporta **(30)** para un  $\theta$  dado en función de  $B$ , como se hizo en la **Figura 7**, pero para este nuevo límite, obteniendo la **Figura 13** en la cual se puede observar cómo hay una gama de valores de  $\theta$ , generalmente los que están por encima de  $\theta = \theta_{transición}$ , para los cuales predominará  $\phi_C$  derivada dado el signo de  $(\partial D / \partial \phi)_{C^* \text{ límite}}$ . Lo curioso en este caso es que se invierte la dominancia de los regímenes si lo comparamos con el caso de  $\phi_C$  original, para el cual los valores por encima del límite  $\theta_t$  eran para los que predominaba la solución matemática resolviendo el máximo local.



**Figura 13:** Comportamiento de  $(\partial D / \partial \phi)_{C^* \text{ límite}}$  en función de  $B$  para valores fijos de  $\theta$ .

Dados unos datos para un sistema como el de la **Figura 10**, podemos determinar si el sistema puede alcanzar el equilibrio de flotación, o si por el contrario está más allá de los límites establecidos para el caso de hundimiento y levantamiento del cilindro. Esto es importante porque para estudiar el efecto de la fuerza sobre las dependencias de la densidad máxima y la geometría del sistema, necesitamos conocer en primera instancia a qué rango de datos queda acotado el espacio de fase de los parámetros a tratar para el problema.

Para determinar los límites de hundimiento **(28)** y levantamiento **(33)** del cilindro en función de un set de datos dados se ha elaborado el programa *InterfaceLine.en*. La utilidad de este programa va orientada no sólo al cálculo de estos límites, sino también a la realización de predicciones para pruebas experimentales, facilitando de antemano el conocer la existencia de equilibrio y el perfil teórico para la interfase tal y como se comentaba anteriormente. A continuación, se presentan los resultados obtenidos con este programa para un set de datos concretos.

Datos de entrada		Flotación Viable	Datos de salida	
$\rho_A(kg/m^3)$	1.00		Si	$\phi(rad)$
$\rho_B(kg/m^3)$	1000.00	$\psi(rad)$		$0,604\pi$
$\rho_S(kg/m^3)$	8000.00	$H_*$		-0.0121
$r_0(\mu m)$	90	$H_0$		-0.0227
$\gamma_{AB}(N/m)$	0,0728	$\rho_{s_{max}}(kg/m^3)$		555707,198
$\theta(rad)$	$0,4\pi$	$\rho_{f_{min}}$		$-75,005\rho_S$
$f(N/m)$	0			

Tabla 1: Resultados del programa *Interfaceline.en* para un set de datos dado.

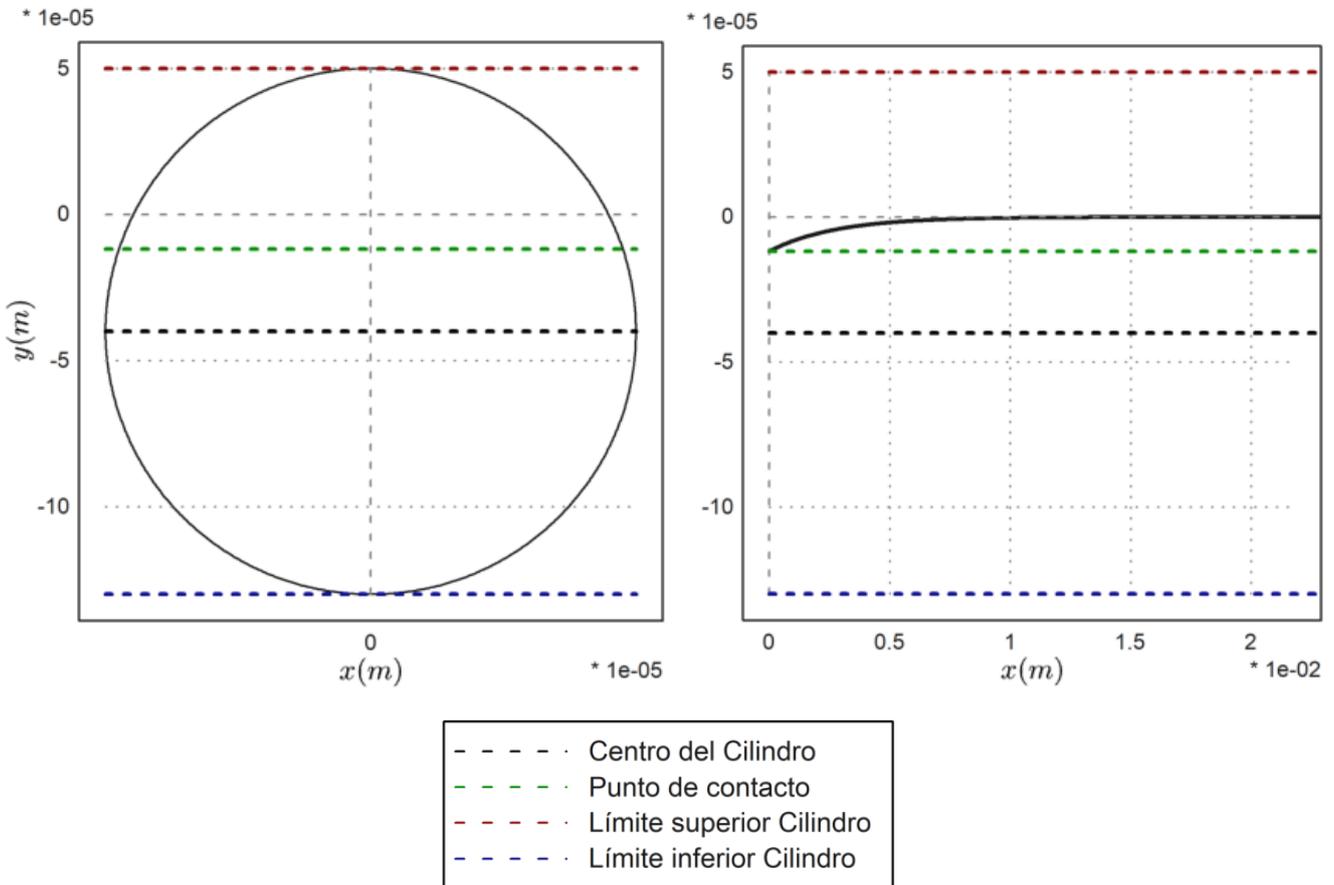


Figura 14: Resolución numérica del perfil de la interfase cerca del cilindro para los datos de la **Tabla 1**. Nótese que las escalas horizontal y vertical no son las mismas. Además, las escalas en  $x$  son diferentes en cada gráfica.

En la **Tabla 1** se muestran los resultados obtenidos para un set de datos tomados de la referencia **[3]**, para los cuales el cilindro no se hunde. Por otro lado, la **Figura 14** muestra el perfil de la interfase obtenido para ese mismo caso resolviendo de forma numérica **(9)**.

Finalmente merece la pena destacar que las referencias utilizan para sus cálculos interfases aire-agua, pero en el presente trabajo se desarrolla el concepto de forma genérica y se estudian numéricamente también casos de interfases líquido-líquido.

## Descripción de los estudios a realizar

Establecidas en el anterior apartado las ecuaciones que describen el sistema a tratar, así como los casos límite a nivel físico a considerar, se puede pasar a estudiar el sistema, en este caso mediante la resolución numérica de las ecuaciones planteadas de forma similar a como se hizo para la referencia [1]. En este estudio se explorarán casos de interés práctico en el contexto del trabajo realizado en el Laboratorio de Sistemas Complejos de la UNED.

En la **Tabla 2** pueden verse resumidos y diferenciados las diferentes variables de entrada y salida considerados a lo largo del estudio.

Variables de entrada		Variables de salida
Interfase	$\rho_A$	$D_{max}(B)$
	$\rho_B$	
	$\gamma_{AB}$	$D_{min}(B)$
Cilindro	$r_0$	
	$\rho_S$	$\psi(B)$
	$\theta$	
Fuerza externa	$f$	

**Tabla 2:** Esquema de datos de entrada y salida esperados para los estudios realizados.

La **Tabla 2** indica los elementos que consideramos en el sistema: Cilindro, Interfase y Fuerza externa; así como los componentes que definen cada uno de ellos. Para el estudio a realizar, se definen una serie de datos de entrada para dar forma a estos elementos del sistema, y se estudia la condición y el estado de flotación en ciertos rangos de datos para las variables del sistema.

En la presente memoria se van a estudiar dos tipos de cilindro cuyos radios y densidad se corresponden con agujas comerciales para el reómetro interfacial de aguja [7] y con microhilos magnéticos para el mismo dispositivo [5].

	Cilindro 1 (aguja comercial)	Cilindro 2 (microhilo)
$r_0$	$6.15 \mu m$	$200 \mu m$
$\rho_S$	$4.7\rho_B$	$3.3 \rho_B$
<i>longitud</i>	$3 cm$	$1 cm$

**Tabla 3:** Datos de los cilindros utilizados para la obtención de resultados.

Se tratarán también dos combinaciones de fase superior e inferior. En ambos casos la subfase estará formada por agua, siendo la fase superior aire o un fluido de densidad 80% la del agua

(por ejemplo, fluidos como el tolueno y el decano tienen densidades de 867 y 730  $kg/m^3$  respectivamente).

	Interfase 1	Interfase 2
$\rho_A (kg/m^3)$	$\rho_{aire} \sim 1$	$0.8\rho_{agua}$
$\rho_B (kg/m^3)$	$\rho_{agua} \sim 1000$	$\rho_{agua}$

**Tabla 4:** Datos de las interfaces utilizados para la obtención de resultados.

En cuanto a las propiedades de la interfase, se va a explorar valores de la tensión superficial entre el valor correspondiente a una interfase agua-aire limpia (72  $mN/m$ ) hasta valores similares a los presentes en la bibliografía sobre sistemas agua-tolueno y agua-decano en presencia de surfactante,  $\gamma_{AB} \sim 20 mN/m$  [8][9].

Variable	Rango	
$\gamma_{AB} (mN/m)$	20	72
$\theta (^{\circ})$	45	135
$\rho_f (\rho_S)$	$-10000 \rho_S$	$10000 \rho_S$

**Tabla 5:** Datos de las variables utilizados para la obtención de resultados.

Para el ángulo de contacto, teniendo en cuenta los diferentes materiales que pueden emplearse, los posibles tratamientos hidrófobos de sus superficies y las diferencias entre ángulos de contacto de avance y retroceso, se explorarán ángulos de entre 45° y 135°.

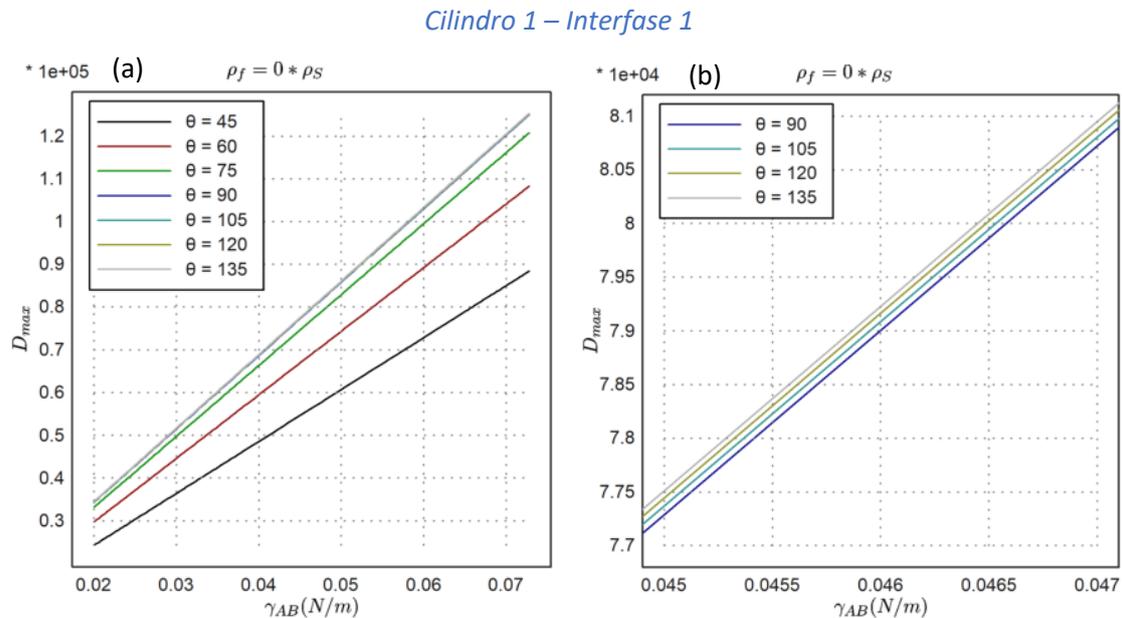
Finalmente, la fuerza externa se definirá usando como referencia los datos aportados en [6] sobre la fuerza vertical generada por la trampa magnética sobre la sonda.

Todo lo anterior queda resumido en las tablas **Tabla 1**, **Tabla 2** y **Tabla 3**. Nótese que para la fuerza se determina el ratio de relación entre la densidad asociada a la fuerza  $\rho_f$  y la densidad del cilindro  $\rho_S$ .

Para las diversas combinaciones de datos para Cilindro, Interfase, tensión superficial, ángulo de contacto y fuerza externa aplicada, se estudiarán tanto la *condición de flotabilidad* como el *estado de flotación*. El procedimiento a seguir es el de estudiar para cada cilindro en ambas interfaces, resolviendo para los diferentes rangos de  $\theta$ ,  $\gamma_{AB}$  y  $f$ . Por lo general se graficará estableciendo un rango de  $\gamma_{AB}$  y se presentarán diferentes curvas para diferentes valores de  $\theta$ , esto se repetirá en diferentes gráficas para diferentes valores de  $f$ , graficando siempre un caso  $f = 0$  como referencia. La intención es elegir valores discretos para todas las variables, pero especialmente para  $\gamma_{AB}$ , que determina  $B$ , se utilizará una mayor cantidad de puntos. Para más información con respecto a los métodos utilizados consultar **Anexo C** y **Anexo D**.

## Análisis de la Condición de Flotabilidad

En este apartado se presentan los resultados y el análisis de la *Condición de Flotabilidad* para ambos cilindros y ambas interfases utilizando los valores propuestos en el apartado anterior. Los resultados de este apartado se han obtenido con los programas *Dmax\_min\_vs\_Gamma\_given\_Theta\_with\_Force.en* y *PhaseDiagram\_F\_vs\_Gamma\_given\_Theta.en* (Anexo C, Anexo D).



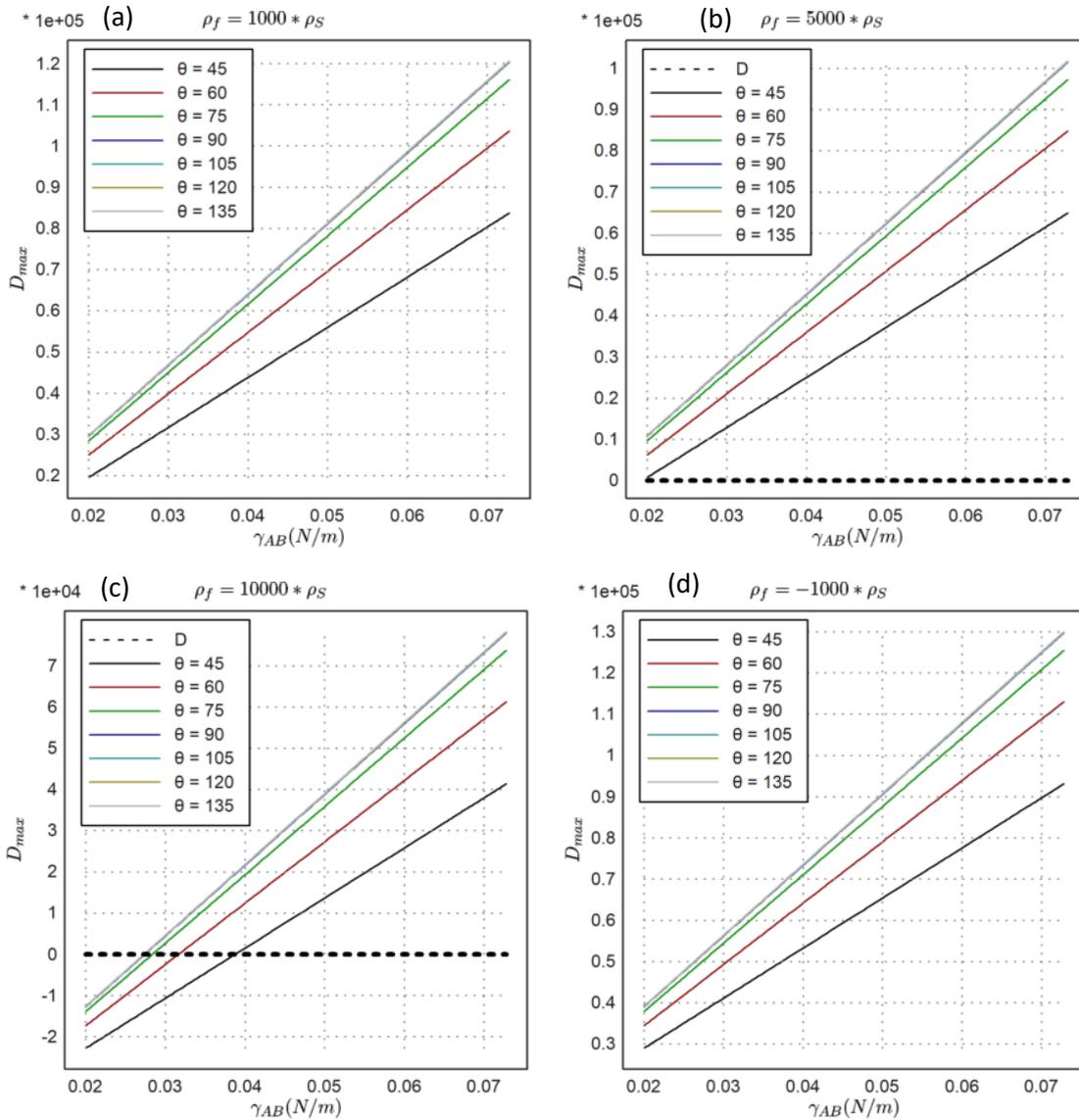
**Figura 15:** Densidad máxima para el Cilindro 1 en la Interfase 1 sin fuerza aplicada. A la derecha, gráfica ampliada sobre las soluciones del régimen  $\phi_C$  derivada.

Resulta fácil notar, dado lo comentado más atrás con la **Figura 7**, que para ambos cilindros tenemos una serie de valores de  $\theta$  para los que la  $D_{max}$  viene determinada por  $\phi_C$  derivada,  $\theta = [90, 105, 120, 135]^\circ > \theta_t$ , mientras que tenemos otros en los que la  $D_{max}$  viene determinada por  $\phi_C$  límite,  $\theta = [45, 60, 75]^\circ < \theta_t$ .

Para el *Cilindro 1* es importante destacar que en ambas *Interfases* la variación en función de  $\theta > \theta_t$  para la  $D_{max}$  es difícilmente distinguible en los rangos estudiados, debido principalmente a la mayor sensibilidad de ésta con el parámetro  $\gamma_{AB}$  (a través de  $B$  en **(15)**) en el rango explorado. Por este motivo se ha añadido una versión ampliada en **Figura 15** y **Figura 17** para que se pueda diferenciar las distintas soluciones al menos en la situación base.

El resultado se alinea para ambos Cilindros y ambas Interfases con lo visto en la referencia **[1]**: aumento en  $\theta$  equivale a un incremento en la carga máxima  $D_{max}$  que puede soportar la geometría elegida para el cilindro. La diferencia radica en que la dependencia de  $D_{max}$  con  $\gamma_{AB}$  en este caso varía en función del régimen de solución aplicable a  $\phi_C$ . Cuando la solución está determinada por  $\phi_C$  derivada, se observa claramente cómo  $\sin(\theta)$  determina de forma directa la pendiente de esta dependencia lineal.

### Cilindro 1 – Interfase 1



**Figura 16:** Densidad máxima para el Cilindro 1 en la Interfase 1 en presencia de fuerza externa con  $\rho_f = 1000\rho_S$ ,  $\rho_f = 5000\rho_S$ ,  $\rho_f = 10000\rho_S$ ,  $\rho_f = -1000\rho_S$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

Al observar el comportamiento para un mismo cilindro en ambas interfases, puede observarse en **Figura 19** y **Figura 20** cómo la *Interfase 2* tiende a valores considerablemente más elevados de la condición de flotación  $D_{max}$  en el rango de datos estudiado. Esto puede deberse en parte a que, precisamente, el rango obtenido para  $B$  dados los datos de entrada definidos para cilindro, interfase y tensión de superficial para la *Interfase 2* son un orden de magnitud menor que los obtenidos para la *Interfase 1*, lo cual hace ganar mayor peso y dominancia a los términos dependientes de  $1/B$  en **(11)**. Si bien este efecto es considerablemente más notable con el *Cilindro 1*, **Figura 16** y **Figura 18**, especialmente debido a las dimensiones de este, es visible para ambos cilindros. El hecho de que sea algo más notable para el cilindro más pequeño destaca la

diferencia en la aportación de cada factor de  $B$  tal y como se define en (5), con el cambio en el orden de magnitud del radio, al ser su aportación cuadrática, teniendo mayor peso que el de la diferencia de densidades, que no varía en orden de magnitud entre ambas interfases.

### Cilindro 1 – Interfase 2

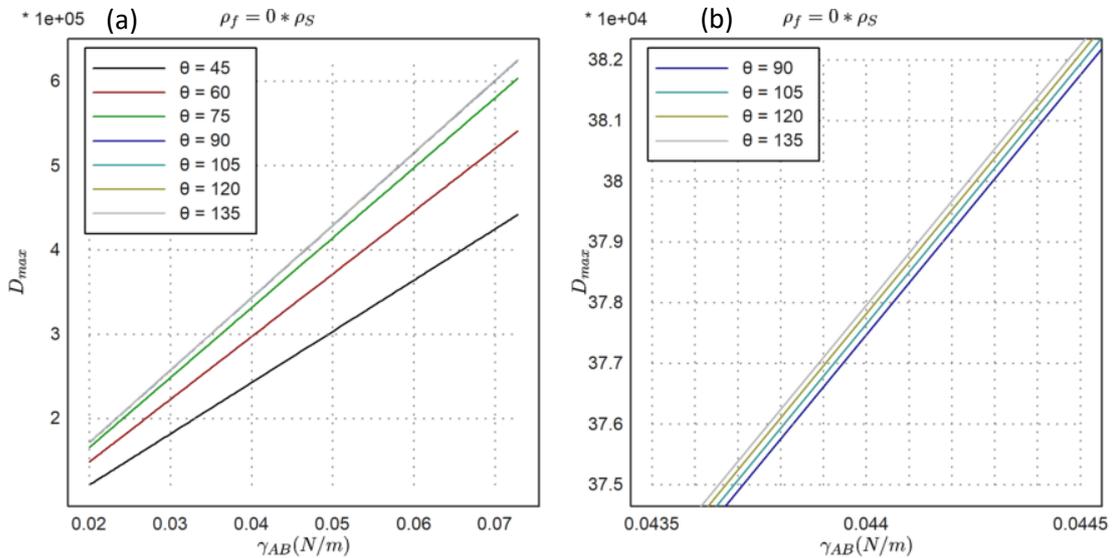
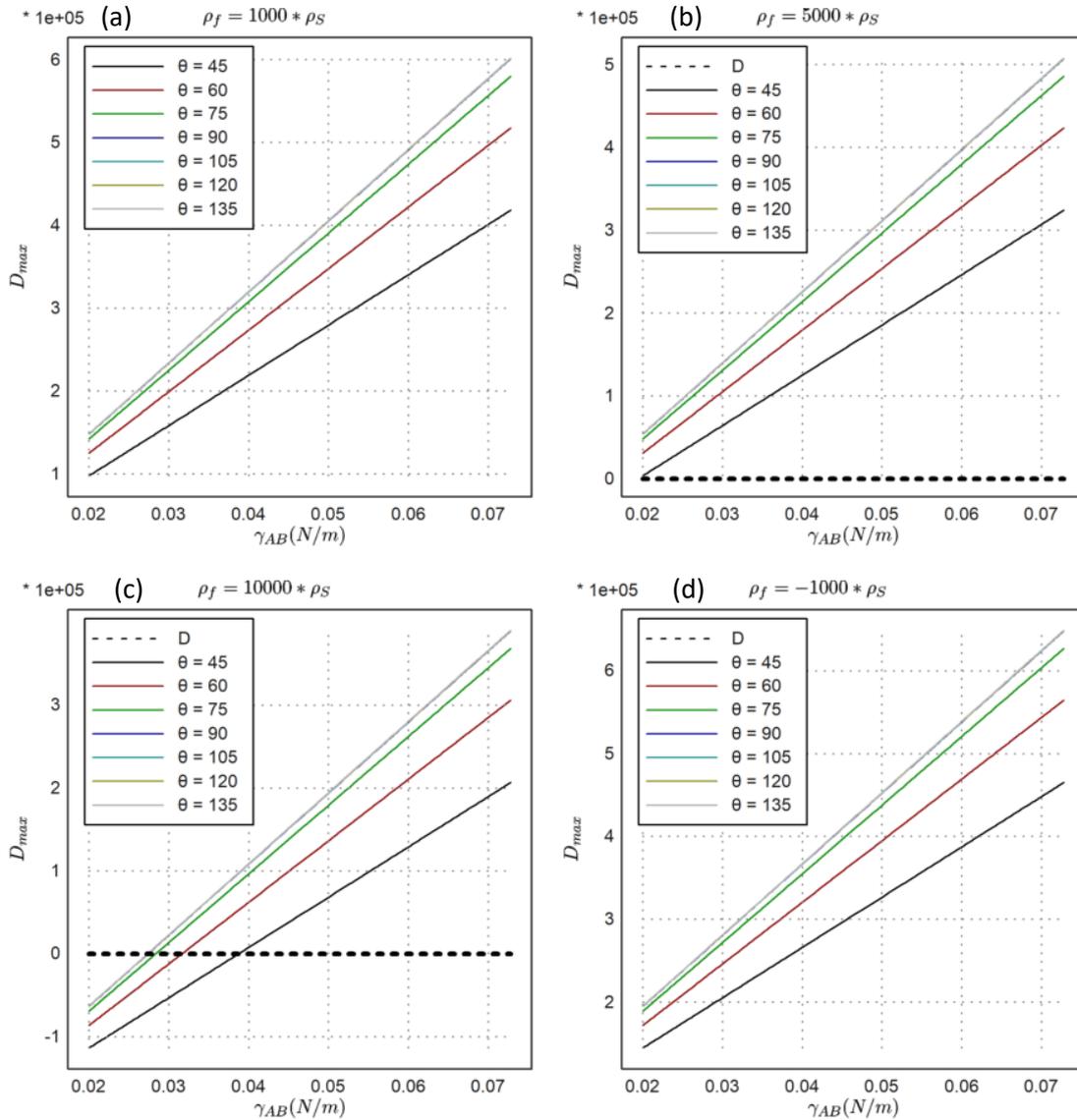


Figura 17: Densidad máxima para el Cilindro 1 en la Interfase 2 sin fuerza aplicada.

Lo comentado hasta ahora es observable sin necesidad de tener en cuenta la fuerza aplicada. En este caso ha de considerarse una distinción importante entre el caso del sentido de fuerza ascendente y descendente en el estudio de  $D_{max}$ . Esta distinción es el hecho de que la fuerza en sentido descendente puede llevar a un caso límite en el que  $D_{max}$  se haga negativa, como puede observarse por ejemplo en Figura 16 (c) y Figura 19 (c) para los valores más bajos de  $\gamma_{AB}$  (valores altos de  $B$ ) en el rango elegido. En este caso la implicación es que a partir de ese punto la solución no tiene interés físico, dado que estamos en el caso en que el cilindro se hunde siempre.

En algunas de las gráficas puede observarse la línea de  $D$ , que representa el valor real de la densidad adimensional para las condiciones definidas de cilindro, interfase y fuerza. El tener este valor ayuda a visualizar de forma directa el punto a partir del cual el cilindro real considerado se hundiría para los valores de  $\gamma_{AB}$ ,  $\theta$  y  $f$  dados. El hecho de que el valor no esté presente en todas las gráficas es principalmente debido a que (sobre todo para el Cilindro 1) hay situaciones en las cuales el valor está muy lejos de los valores para  $D_{max}$  resultantes, con lo cual resulta poco relevante. Por el contrario, para el Cilindro 2, esto suele resultar ser de mayor interés, dado que por sus propiedades el equilibrio que presenta está mucho más restringido.

Cilindro 1 – Interfase 2



**Figura 18:** Densidad máxima para el Cilindro 1 en la Interfase 2 con  $\rho_f = 1000\rho_S$ ,  $\rho_f = 5000\rho_S$ ,  $\rho_f = 10000\rho_S$ ,  $\rho_f = -1000\rho_S$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

Dicho esto, en base a lo que puede observarse en los resultados y figuras de este apartado, la fuerza tiene influencia directa sobre el valor final de  $D_{max}$ , aumentando este valor para el caso de fuerzas ascendentes, y disminuyéndolo para el caso de fuerzas descendentes, tal como cabría esperar dados (26) y (27). Además, para fuerzas negativas aparece el límite de la  $D_{min}$ , que ha de considerarse para evitar el caso del levantamiento del cilindro.

Cilindro 2 – Interfase 1

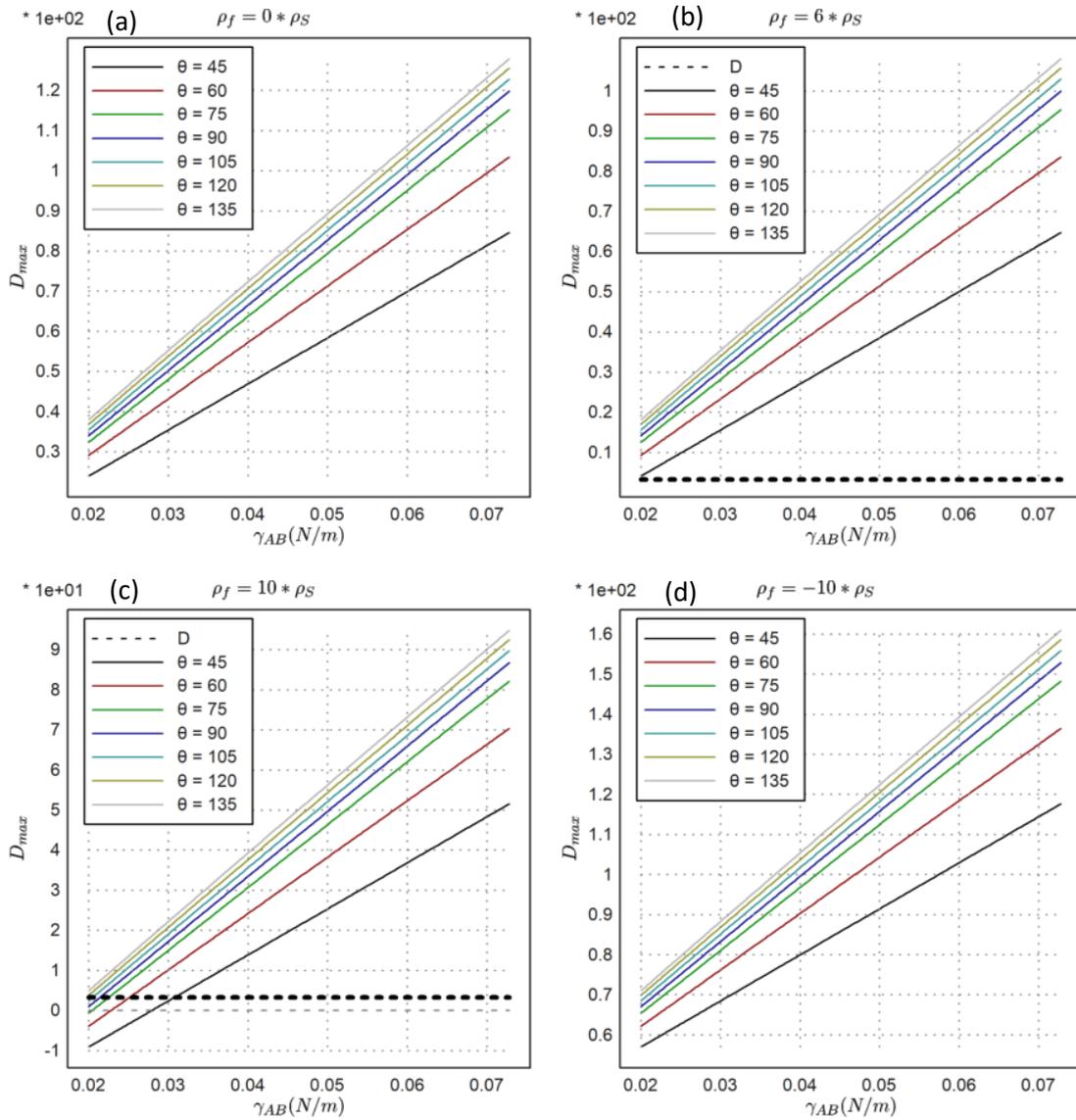
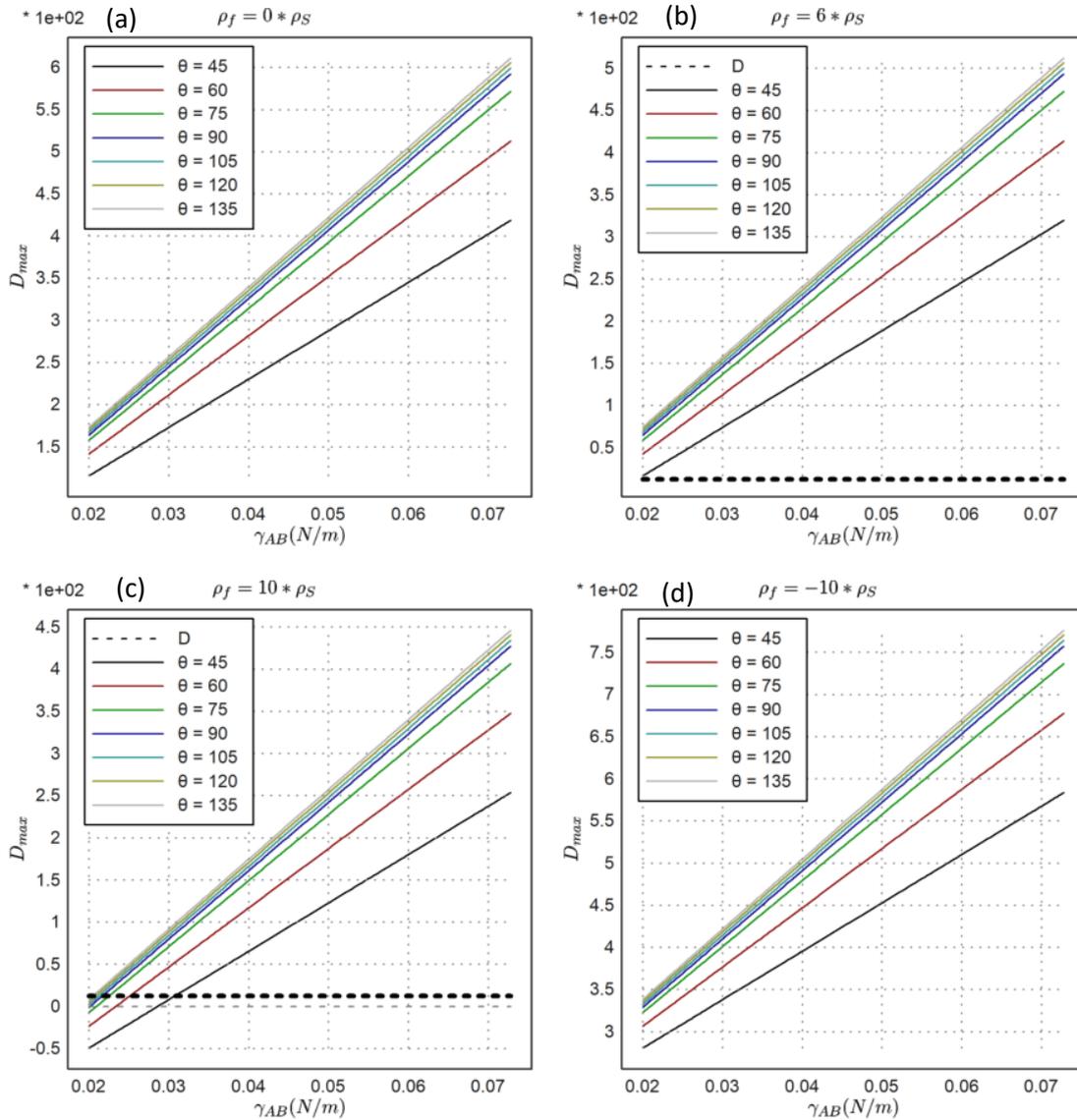


Figura 19: Densidad máxima para el Cilindro 2 en la Interfase 1 sin fuerza aplicada,  $\rho_f = 6$ ,  $\rho_f = 10\rho_S$  y  $\rho_f = -10\rho_S$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

Cilindro 2 – Interfase 2



**Figura 20:** Densidad máxima para el Cilindro 2 en la Interfase 2 sin fuerza aplicada,  $\rho_f = 6\rho_S$ ,  $\rho_f = 10\rho_S$  y  $\rho_f = -10\rho_S$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

El estudio de la  $D_{min}$  en este caso se puede hacer de forma similar al de la  $D_{max}$ , estudiando cómo varía en el rango de  $\gamma_{AB}$ . Es importante notar que en general la  $D_{min}$  no es algo que pueda calcularse de forma exclusiva para casos de fuerza ascendente, sino que es la única situación en la que tiene sentido físico hacerlo. Como se ha comentado, este es un límite inferior para el valor de la densidad adimensional a partir del cual se da el levantamiento del cilindro, con lo cual no tiene sentido físico en el momento en que la fuerza es nula o descendente, y es por esto por lo que en esas situaciones el valor obtenido para  $D_{min}$  es negativo. Como aclaración, un valor negativo para  $D_{min}$  ha de entenderse como que con la fuerza aplicada no es posible levantar el cilindro para la tensión superficial considerada.

Cilindro 1 – Interfase 1

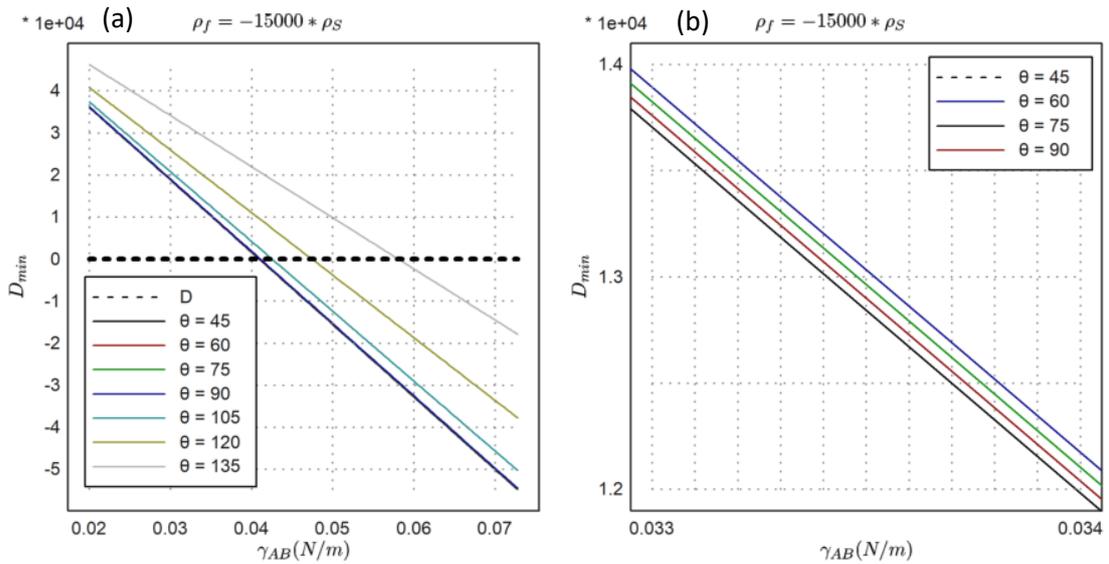


Figura 21: Densidad mínima para el Cilindro 1 en la Interfase 1 con  $\rho_f = -15000\rho_s$ . A la derecha se aprecia una versión ampliada de los mismos resultados. Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

Tal y como cabría esperar, para el *Cilindro 1*, incluso para fuerzas muy elevadas, hay ciertos valores de la tensión superficial para el rango tratado que impiden que se dé el caso del levantamiento de la aguja (Figura 21). Para el *Cilindro 2* es relativamente más sencillo que suceda el caso del levantamiento incluso con fuerzas aplicadas no tan elevadas (Figura 22).

Cilindro 2 – Interfase 1

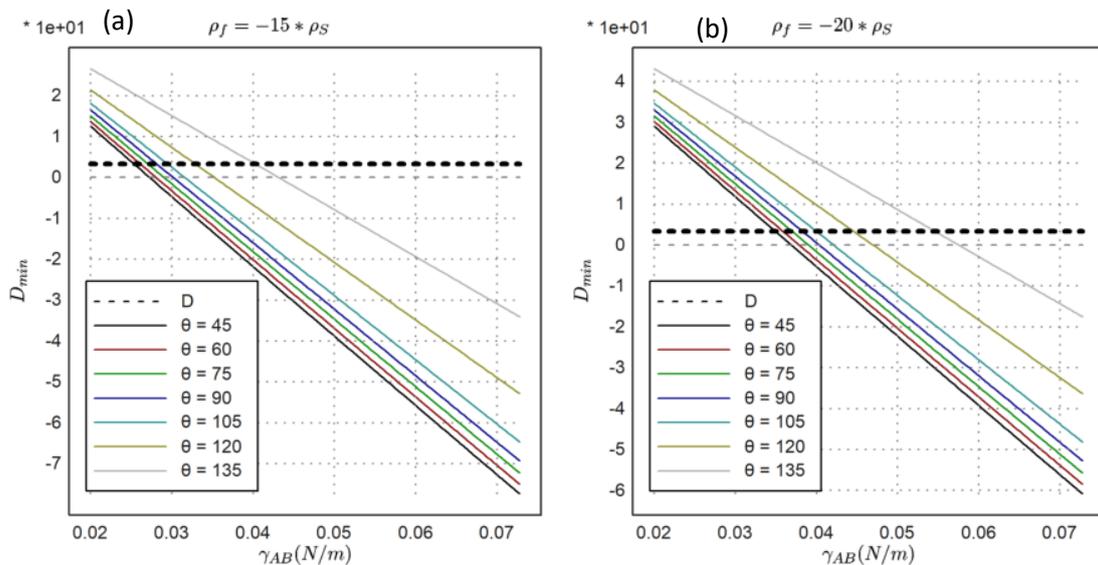
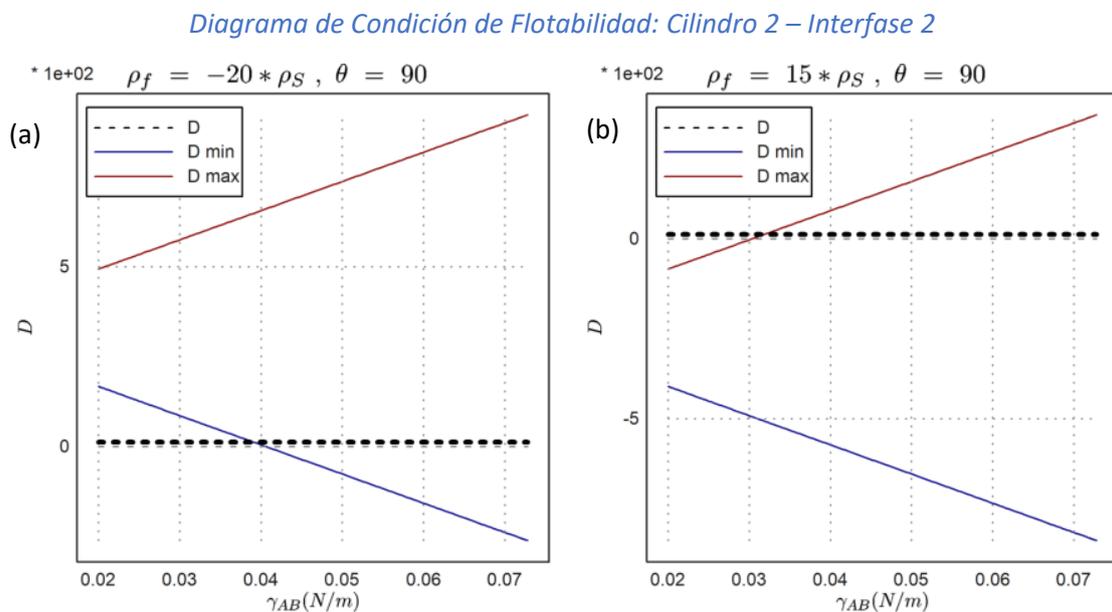


Figura 22: Densidad mínima para el Cilindro 2 en la Interfase 1 con  $\rho_f = -15 \rho_s$  y  $\rho_f = -20 \rho_s$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado.

Se puede observar cómo para el caso de  $D_{min}$  la carga mínima tiende a ser mayor cuanto más grande es  $\theta$ , del mismo modo que sucedía para de  $D_{max}$ , claro que en este caso lo que esto implica es que a mayor  $\theta$ , hace falta menor fuerza para llegar al límite del levantamiento del cilindro. Por otro lado, se puede apreciar también los dos regímenes de solución aplicable al caso  $D_{min}$ , invertidos con respecto al caso de  $D_{max}$ . Tenemos pues una serie de valores de  $\theta$  para los que la  $D_{min}$  viene determinada por  $\phi_C^*$  límite,  $\theta = [105, 120, 135]^\circ > \theta_t$ , mientras que tenemos otros que utilizan la solución  $\phi_C^*$  derivada,  $\theta = [90, 45, 60, 75]^\circ < \theta_t$ .

Habiendo explorado el comportamiento del sistema con rangos de datos variados, puede pasarse ahora a combinar los límites explorados en una misma gráfica, a la que denominaremos propiamente como *Diagrama de Condición de Flotabilidad*, para tener una referencia visual completa de la condición de flotabilidad en una situación dada. Para esto se ha elaborado la **Figura 23** para el *Cilindro 2* en la *Interfase 2*. Se ha elegido esta combinación porque es la que permite representar de forma más sencilla para los rangos tratados todos los límites de la condición de flotabilidad.



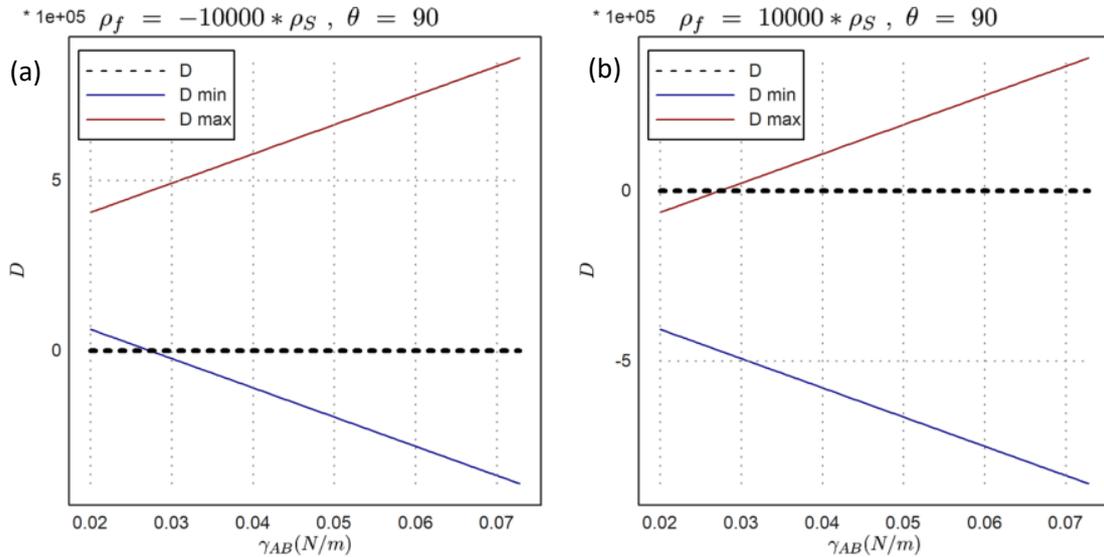
**Figura 23:** Diagrama de Condición de flotabilidad para el Cilindro 2 en la Interfase 2 con **(a)**  $\rho_f = -20 \rho_s$  y **(b)**  $\rho_f = 15 \rho_s$ . Se indica con una línea discontinua el valor real de  $D$  para el cilindro considerado, en rojo  $D_{max}$  el límite de hundimiento y en azul  $D_{min}$  el límite de levantamiento. Con  $\theta = 90^\circ$ .

La interpretación del diagrama completo en este caso es bastante directa: *el cilindro se hunde en el rango en que la recta de densidad adimensional del cilindro  $D$  queda por encima de la de  $D_{max}$  (rojo), y es levantado cuando está por debajo del  $D_{min}$  (azul), siendo la flotabilidad garantizada solamente en el espacio entre estas dos curvas.*

Puede verse en la **Figura 23** cómo para las situaciones planteadas para el *Cilindro 2* en la *Interfase 2*, en el caso de fuerza ascendente hay un rango para el cual el cilindro es levantado, y cómo para el caso de fuerza en sentido descendente existe un rango para el que el cilindro se hunde. Por otro lado, en la **Figura 24** puede observarse de forma similar el diagrama para dos situaciones

diferentes del *Cilindro 1* en la *Interfase 2*, dónde además se aprecia de nuevo la diferencia en el orden de los valores obtenidos para los límites en comparación con el caso del *Cilindro 2*.

*Diagrama de Condición de Flotabilidad: Cilindro 1 – Interfase 2*

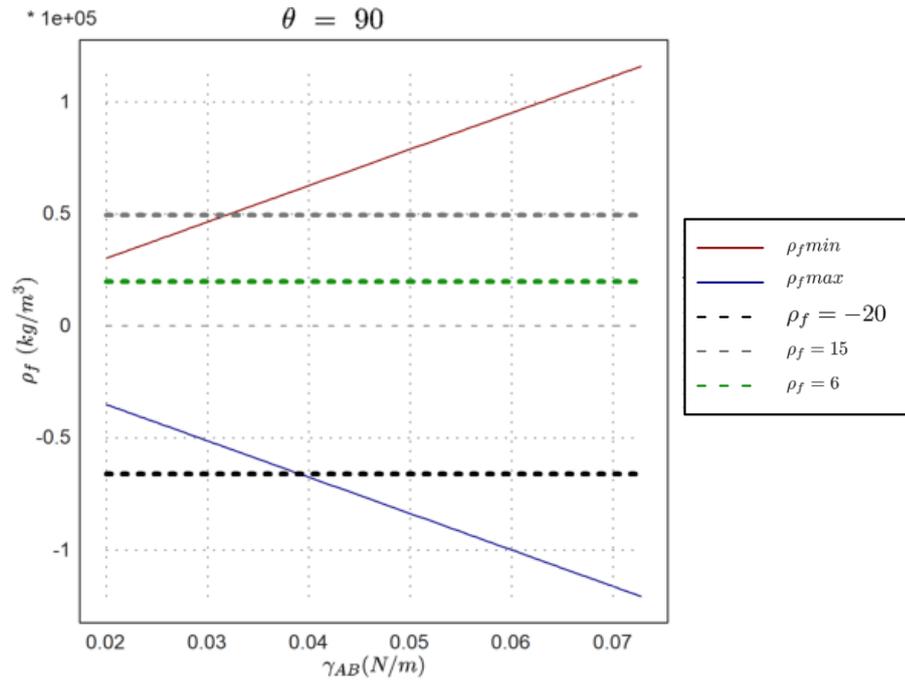


**Figura 24:** Condición de flotabilidad para el Cilindro 1 en la Interfase 2 con (a)  $\rho_f = -10000 \rho_s$  y (b)  $\rho_f = 10000 \rho_s$ , en rojo  $D_{max}$  el límite de hundimiento y en azul  $D_{min}$  el límite de levantamiento. Con  $\theta = 90^\circ$ .

Otro factor destacable que puede observarse a partir de la **Figura 23** y **Figura 24** es el hecho de que las curvas  $D_{max}$  y  $D_{min}$  no alteran su forma cuando varía la fuerza externa, sino que únicamente se desplazan hacia arriba o hacia abajo en el espacio de fases. Esto está relacionado directamente con el hecho de que la fuerza aplicada es equivalente a un cambio en la densidad efectiva del cilindro.

Con un enfoque similar, pero centrándonos en los límites de la fuerza aplicada, se puede plantear un *Diagrama de Condición de Flotabilidad Alternativo* sobre el cual visualizar los límites de la fuerza aplicada. En este caso, para el límite de hundimiento aislaríamos nuestra fuerza aplicada de (28), teniendo en cuenta (27). Para el límite de levantamiento, partiríamos de (33) directamente, aplicando de antemano (31). Los cálculos en este caso no difieren de lo practicado para el estudio centrado en  $D$ , y permiten de forma alternativa visualizar sobre el espacio de fases las diferentes regiones correspondientes a cada uno de los tres casos: hundimiento, levantamiento y flotación. De este modo se pueden situar diferentes valores para la fuerza aplicada (en este caso se ha graficado utilizando como referencia la densidad  $\rho_f$ ), y observar dónde se sitúan en el espacio de fases cada uno de los casos planteados. Un ejemplo de esto puede observarse en la **Figura 25** para el *Cilindro 2* en la *Interfase 2*. Sobre este ejemplo se han plasmado los mismos casos tratados en la **Figura 23** para el mismo cilindro en la misma interfase, para que se pueda apreciar cómo encajan en este espacio de fases.

Diagrama de Condición de Flotabilidad Alternativo: Cilindro 2 – Interfase 2



**Figura 25:** Diagrama de Condición de Flotabilidad Alternativo para el Cilindro 2 en la Interfase 2, en rojo  $\rho_{f \max}$  el límite de hundimiento y en azul  $\rho_{f \min}$  el límite de levantamiento. Se indican también en línea discontinua las rectas que representan las situaciones para  $\rho_f = -20$ ,  $\rho_f = 6$ ,  $\rho_f = 15$ . Con  $\theta = 90^\circ$ .

Para concluir este apartado, dado que hemos explorado valores de  $f$  definidos en función de la densidad del cilindro mediante la relación

$$\rho_f \propto \alpha \rho_s, \quad (35)$$

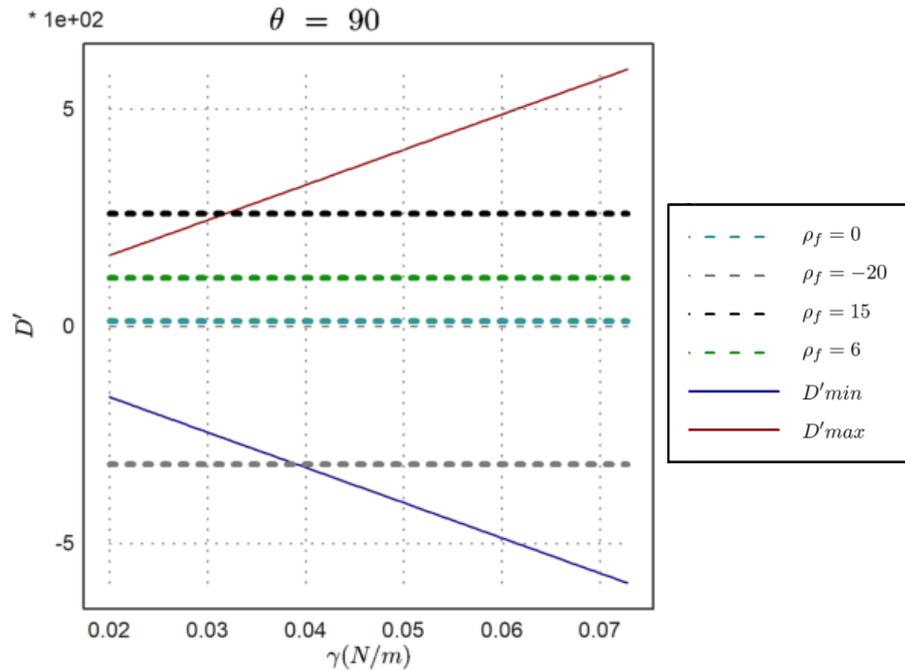
se ha de destacar que para poder vislumbrar variaciones significativas en el caso del *Cilindro 1* ha hecho falta utilizar valores mucho mayores de ese multiplicador  $\alpha$  que para el *Cilindro 2*. Esto se puede entender de forma intuitiva considerando  $\rho_f$  como una variación de la densidad del cilindro, tal y como se aprecia en  $\rho'_s$  en (27), y considerando la dependencia cuadrática con el radio que existe en el número de Bond (5), que lleva a que por lógica el cilindro de radio más pequeño tienda a un estado de mayor dominancia de la fuerza de tensión superficial. La condición de flotación (28) para el límite de  $D'_{\max}$  tiene la misma forma que para el caso sin fuerza, al quedar esta englobada en  $D'$ , lo cual hace que el aporte  $D_f$  se traduzca en una variación directa sobre el valor posible de  $D_{\max}$ . Como ejemplo, para el caso de la Figura 16 (b) para el *Cilindro 1* en la *Interfase 1* tenemos una variación de  $\rho_f = 5000\rho_s$ , lo cual implica que estamos desplazando  $D_{\max}$  en aproximadamente

$$D_f = \frac{5000 \cdot 4,3 \cdot 1000}{1000 - 1} \approx 21500 \text{ unidades}, \quad (36)$$

lo cual puede observarse directamente sobre la gráfica. Este cálculo puede hacerse para todos los casos presentados en este apartado, y ayuda a dejar patente esta ya mencionada interpretación de la fuerza como una variación de densidad en el cilindro.

Como complemento visual adicional, resulta muy intuitivo situar sobre un *Diagrama de Condición de Flotabilidad* los diferentes valores de  $D'$  para apreciar el efecto de la variación de la fuerza aplicada, tal y como se hace en la **Figura 26**, donde se han tomado además los mismos valores de  $\rho_f$  utilizados en **Figura 25**. Se puede observar cómo la aplicación de la fuerza equivale a subir o bajar la línea que representa  $D'$ , haciendo que el corte de esta con  $D'_{min}$  y  $D'_{max}$  se desplace.

*Diagrama de Condición de Flotabilidad con  $D'$ : Cilindro 2 – Interfase 2*



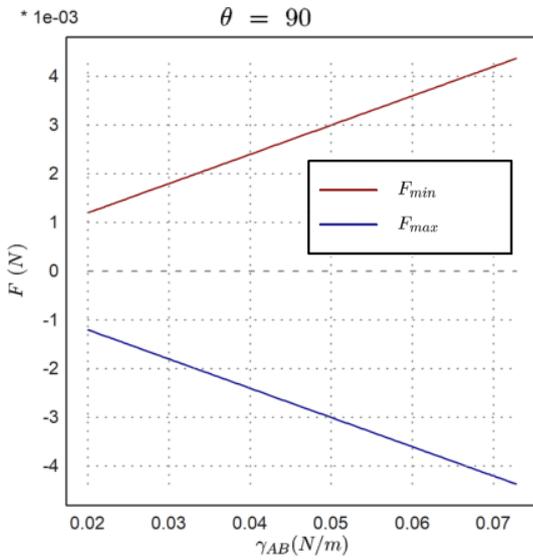
**Figura 26:** Diagrama de Condición de Flotabilidad para  $D'$  para el Cilindro 2 en la Interfase 2, en rojo  $D'_{max}$  el límite de hundimiento y en azul  $D'_{min}$  el límite de levantamiento, se indican también en línea discontinua las rectas que representan las situaciones para  $\rho_f = 0, \rho_f = -20, \rho_f = 6, \rho_f = 15$ . Con  $\theta = 90^\circ$ .

Finalmente, si pasamos a considerar el caso real, y tener en cuenta la longitud del cilindro (**Tabla 3**). Este último diagrama de fases es equivalente al de **Figura 25**, con la diferencia de que aquí se está pasando al valor real de la fuerza aplicada mediante **(24)** y considerando la longitud del cilindro,  $l_{cilindro}$

$$F = f \cdot l_{cilindro} = \rho_f \pi r_0^2 g \cdot l_{cilindro} \quad (37)$$

De esta forma se han obtenido los diagramas de fase hundimiento-flotabilidad-levantamiento para las combinaciones de *Cilindros e Interfases* de la **Figura 27** y **Figura 28**, para los que se observa los límites reales de la fuerza aplicada para los cilindros considerados en los medios tratados.

Cilindro 1 – Interfase 1



Cilindro 1 – Interfase 2

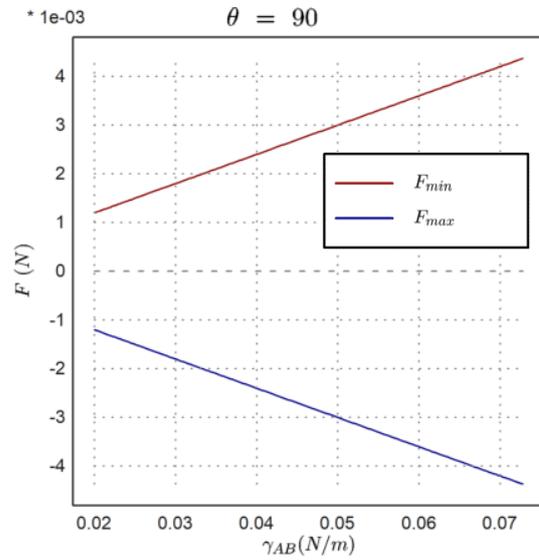
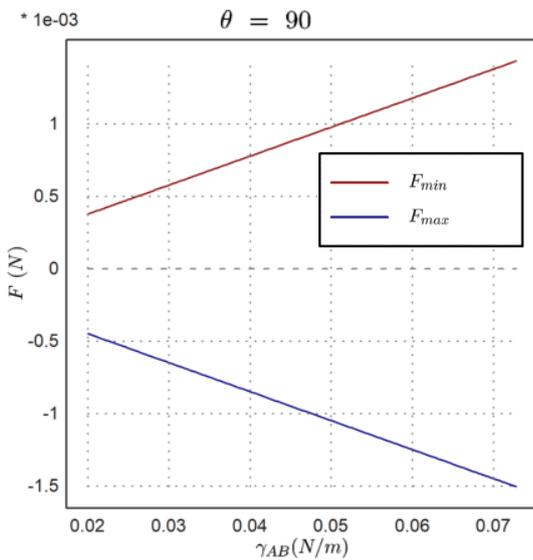


Figura 27: Diagramas de Condición de Flotabilidad para la fuerza  $F$  para el Cilindro 1 en ambas Interfases, en rojo  $F_{max}$  el límite de hundimiento y en azul  $F_{min}$  el límite de levantamiento. Con  $\theta = 90^\circ$ .

Cilindro 2 – Interfase 1



Cilindro 2 – Interfase 2

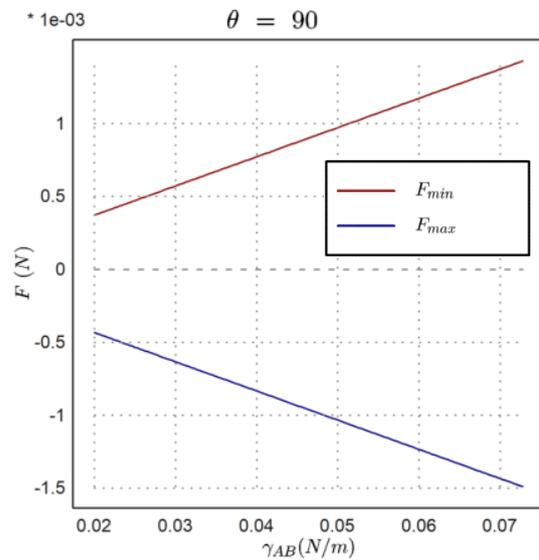
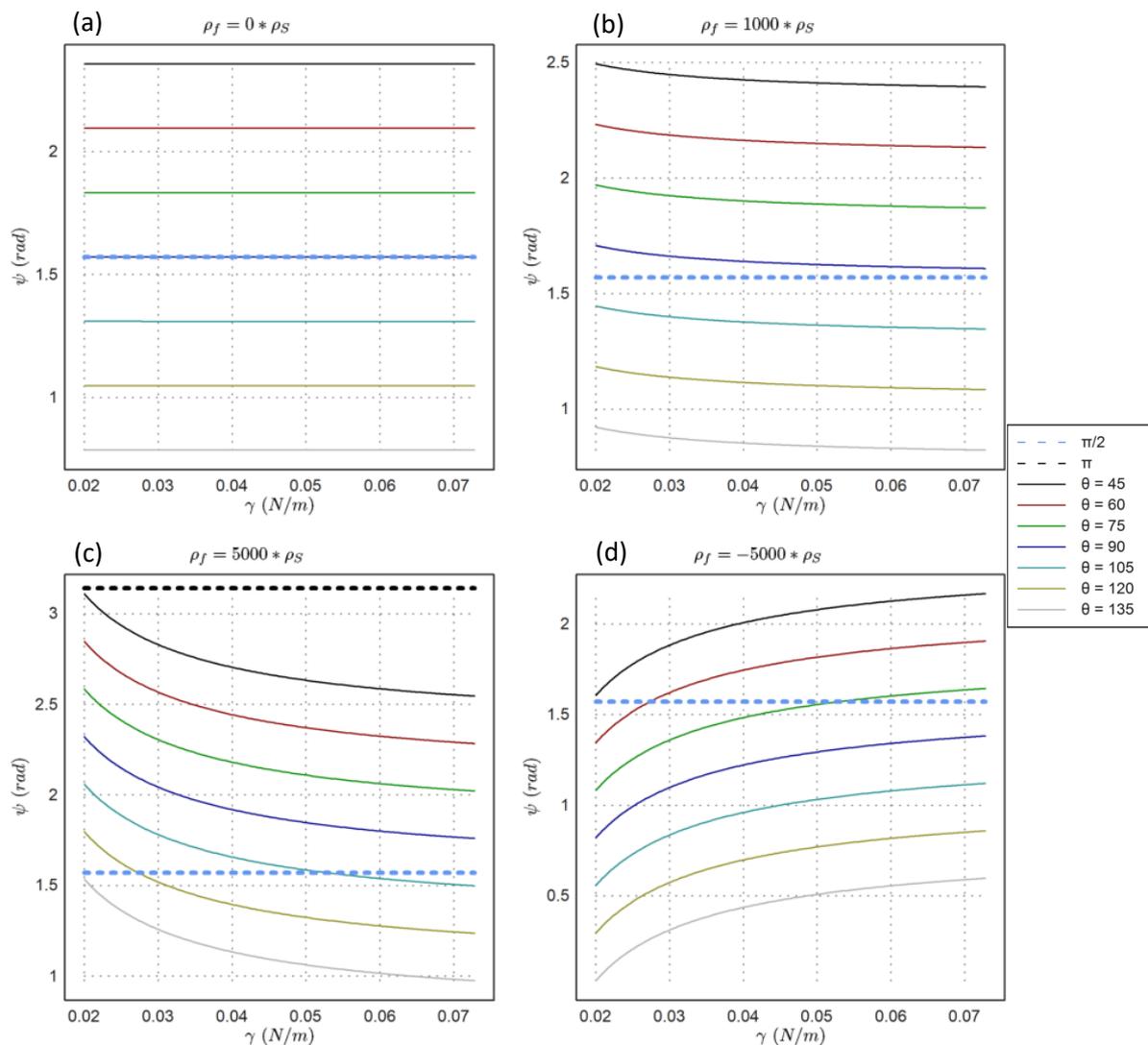


Figura 28: Diagramas de Condición de Flotabilidad para la fuerza  $F$  para el Cilindro 2 en ambas Interfases, en rojo  $F_{max}$  el límite de hundimiento y en azul  $F_{min}$  el límite de levantamiento. Con  $\theta = 90^\circ$ .

## Análisis del Estado de Flotación

En este apartado se presentan los resultados y el análisis del Estado de Flotación para ambos cilindros y ambas interfases utilizando los valores propuestos en el apartado anterior. Como complemento para algunos casos significativos se han presentado también las geometrías finales de la interfase del mismo modo que se hace en **Figura 14**. Los resultados de este apartado se han obtenido con los programas *Psi\_vs\_gamma\_given\_Theta\_and\_Dprime.en* y *InterfaceLine.en* (**Anexo C, Anexo D**). Nótese que, aunque en este caso se estudien rangos completos de resultados, sería necesario garantizar la Condición de Flotabilidad antes de pasar a estudiar el Estado de Flotación final del sistema, en caso de que exista.

### Cilindro 1 – Interfase 1

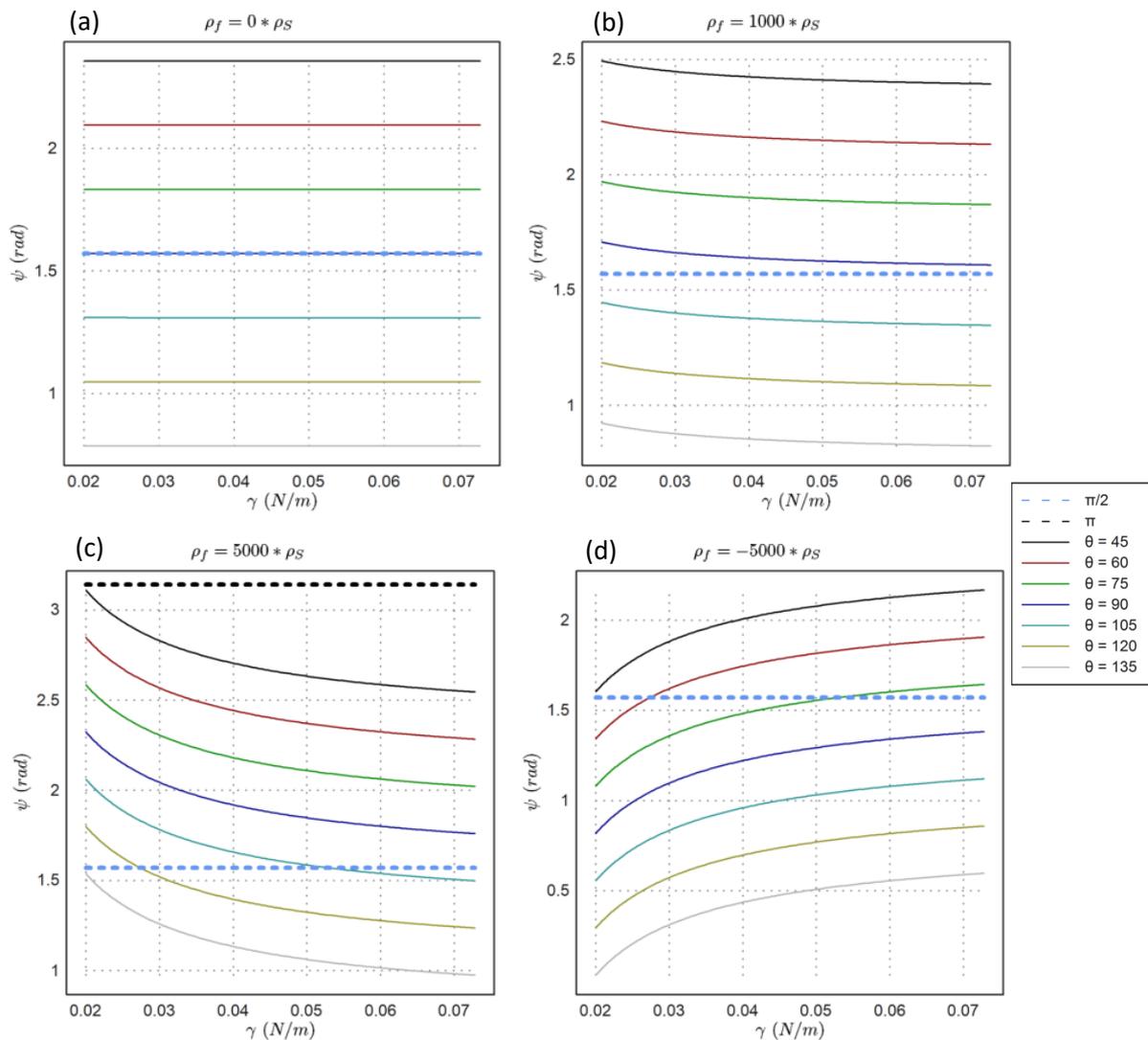


**Figura 29:** Estado de flotación en radianes para el Cilindro 1 en la Interfase 1 sin fuerza aplicada, con  $\rho_f = 1000\rho_s$ , con  $\rho_f = 5000\rho_s$  y con  $\rho_f = -5000\rho_s$ .

Es importante recordar que los valores que consideramos como válidos físicamente para  $\psi$  son  $\psi \in [0, \pi]$  (ya que para un extremo del intervalo tendríamos el caso de levantamiento del cilindro  $\psi = 0$  y para el otro lo consideraríamos hundido  $\psi = \pi$ ) pese a que en alguna curva

graficada se observe alguna región fuera de estos valores porque la solución matemática existe. Por otro lado, cabe destacar que, de forma similar a lo observado en el apartado anterior para la condición de flotación, es necesario aplicar fuerzas notablemente mayores para el caso del *Cilindro 1*, debido a las consideraciones ya mencionadas con respecto a los rangos utilizados. Es por esto que es más sencillo apreciar mejor la tendencia para el caso sin fuerza con **Figura 32** y **Figura 34** para el *Cilindro 2* en ambas *Interfases*. Para ayudar a la interpretación física de los resultados se han graficado cuando mereciese la pena considerarse los valores  $\pi/2$  y  $\pi$ , para poder tener una referencia de la situación del punto de contacto con respecto al centro de masas del cilindro.

### Cilindro 1 – Interfase 2

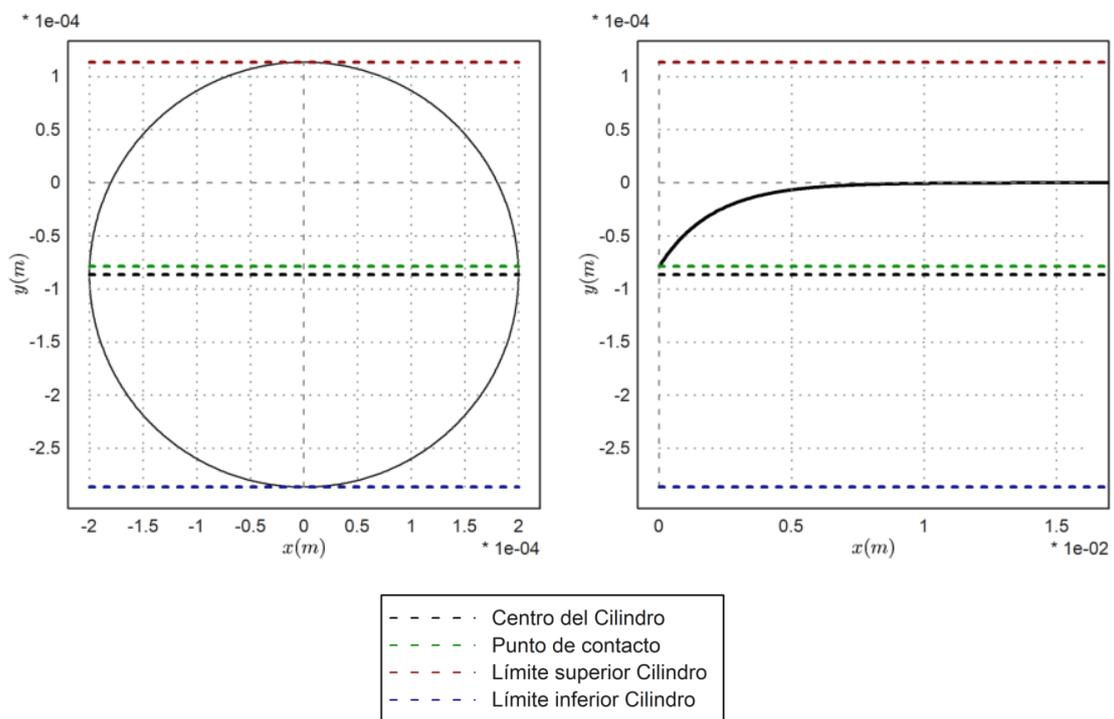


**Figura 30:** Estado de flotación en radianes para el Cilindro 1 en la Interfase 2 sin fuerza aplicada, con  $\rho_f = 1000\rho_s$ , con  $\rho_f = 5000\rho_s$  y con  $\rho_f = -5000\rho_s$ .

Si consideramos las gráficas de **Figura 29** a **Figura 34**, podemos notar que para el caso sin fuerza aplicada el ángulo del punto de contacto  $\psi$  tiende a disminuir a medida que aumenta la tensión superficial  $\gamma_{AB}$ . En situaciones sin fuerza externa sobre el cilindro [1] como puede verse por los casos (a) de las figuras **Figura 29** a **Figura 34**. Como detalle, puede verse en casos como el de la

Figura 29 (a) o Figura 30 (a) para el *Cilindro 1* la curva tiende a aplanarse, a diferencia de lo que ocurre para la Figura 32 y la Figura 34 para el *Cilindro 2*. En este caso hay que puntualizar que no es que no se de variación en los casos del *Cilindro 1*, sino que el orden de magnitud de esta variación de  $\partial\psi/\partial\gamma$  es mucho menor que la que se da en  $\theta$ , y es por esto que no se distingue. Con todo, llama la atención a su vez la diferencia tan notable en la magnitud de la variación en  $\psi$  con  $\gamma$  para ambos cilindros en esta situación. De nuevo aquí podemos hallar explicación en la relación entre las fuerzas de empuje y las de tensión, mediante el número de Bond. En el caso del *Cilindro 1* en los rangos estudiados se está tratando con valores pequeños de  $B$ , lo cual implica una mayor dominancia de las fuerzas de tensión superficial. Lo que parece sugerir esto es que el rango de variación tratado en este caso para  $\gamma_{AB}$  no es suficiente para desplazarnos a valores de  $B$  lo suficientemente elevados como para que la competencia de fuerzas lleve a una variación más notable del perfil de la interfase.

### Cilindro 2 – Interfase 1



**Figura 31:** Resolución numérica del perfil de la interfase cerca del cilindro para el *Cilindro 2* en la *Interfase 1* con fuerza aplicada nula  $\rho_f = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$  y asumiendo una tensión superficial de  $\gamma_{AB} = 0.4 \text{ mN/m}$ . La línea de interfase (derecha) tiene una escala en  $x$  diferente a la de la gráfica del cilindro (derecha) para apreciar su evolución. Nótese que las escalas horizontal y vertical no son las mismas.

La explicación física de este comportamiento observado para la tendencia decreciente de  $\psi(\gamma_{AB})$  para el caso sin fuerza es relativamente sencilla, y resulta aparente si observamos Figura 31, donde hemos de fijarnos especialmente en el punto de contacto y en el ángulo  $\phi$  de la interfase (véase Figura 10). Como nota, la línea de interfase ha tenido que graficarse con una escala diferente en el eje de las  $x$  a la utilizada para graficar el cilindro, para poder observar el efecto de forma apreciable. En este caso [i], el vector de fuerza de la tensión superficial seguirá la línea de la interfase, lo cual se traduce en un aporte de fuerza en sentido ascendente, que contrarresta el peso del cilindro. Por tanto, si la tensión aumenta, existe mayor oposición al peso del cilindro, lo cual evita que este penetre más en el fluido B, es decir,  $\psi$  disminuye.

Cilindro 2 - Interfase 1

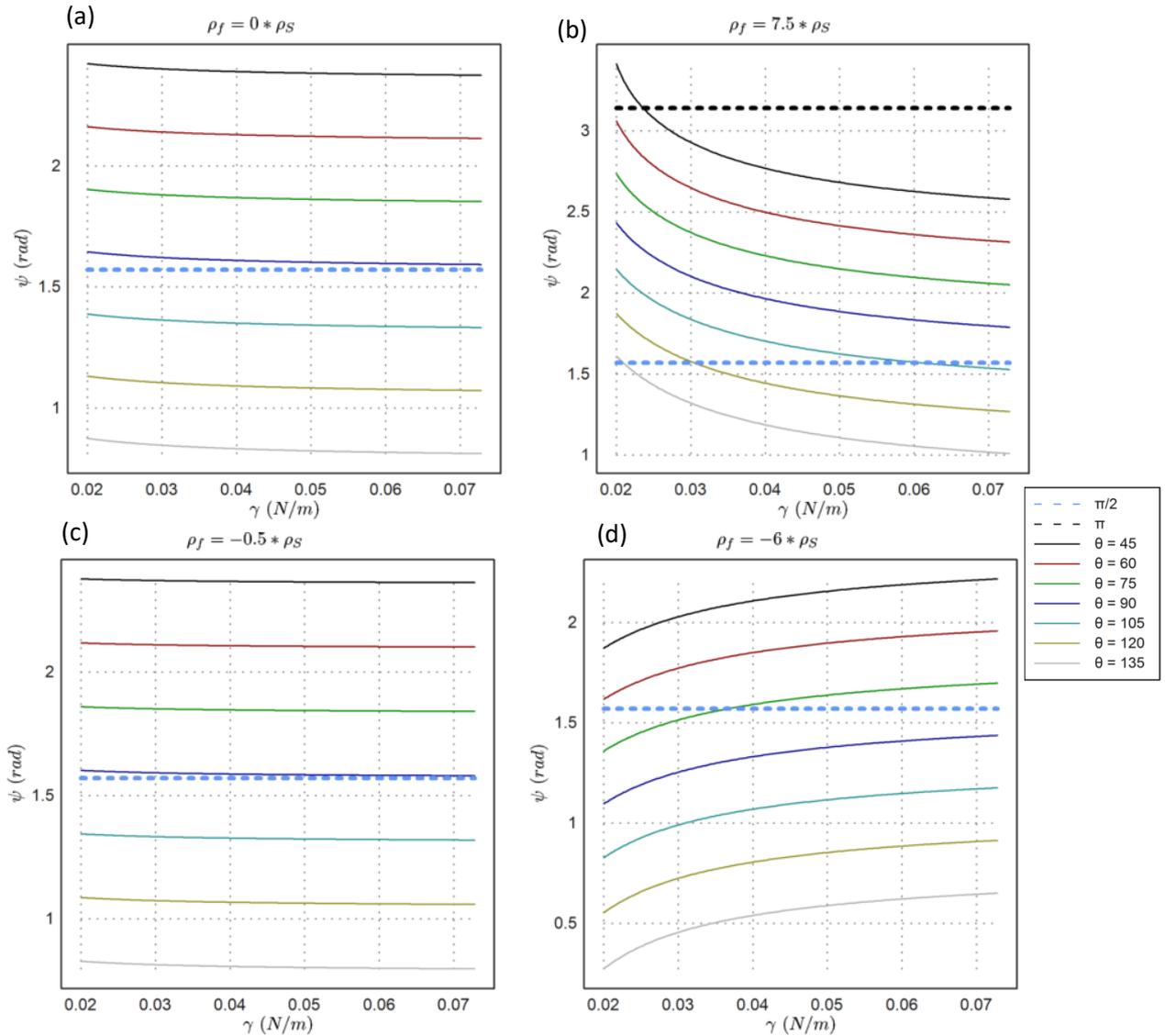


Figura 32: Estado de flotación en radianes para el Cilindro 2 en la Interfase 1 sin fuerza aplicada, con  $\rho_f = 7,5\rho_s$ , con  $\rho_f = -0.5\rho_s$  y con  $\rho_f = -6\rho_s$ .

Ahora bien, si ahora consideramos que hay una fuerza aplicada sobre el cilindro  $\rho_f \neq 0$ , se pueden observar tres situaciones diferentes, en función del sentido de la fuerza aplicada y la tendencia de  $\psi$  resultante, resumidas en **Tabla 6**.

Caso	Fuerza aplicada	Tendencia $\psi(\gamma_{AB})$
[i]	$\rho_f = 0$ (nula)	Decreciente
[ii]	$\rho_f > 0$ (sentido descendente)	Decreciente
[iii]	$\rho_f < 0$ (sentido ascendente)	Decreciente
[iv]	$\rho_f < 0$ (sentido ascendente)	Creciente

Tabla 6: Resumen de las tendencias observadas de  $\psi(\gamma_{AB})$  para los resultados con ambos cilindros y ambas interfaces para diferentes rangos de valor de la fuerza aplicada.

En primer lugar, para los casos de fuerza aplicada no nula, tenemos la situación en que la fuerza aplicada es en sentido descendente [ii], como por ejemplo veríamos en **Figura 32 (b)**. En este caso

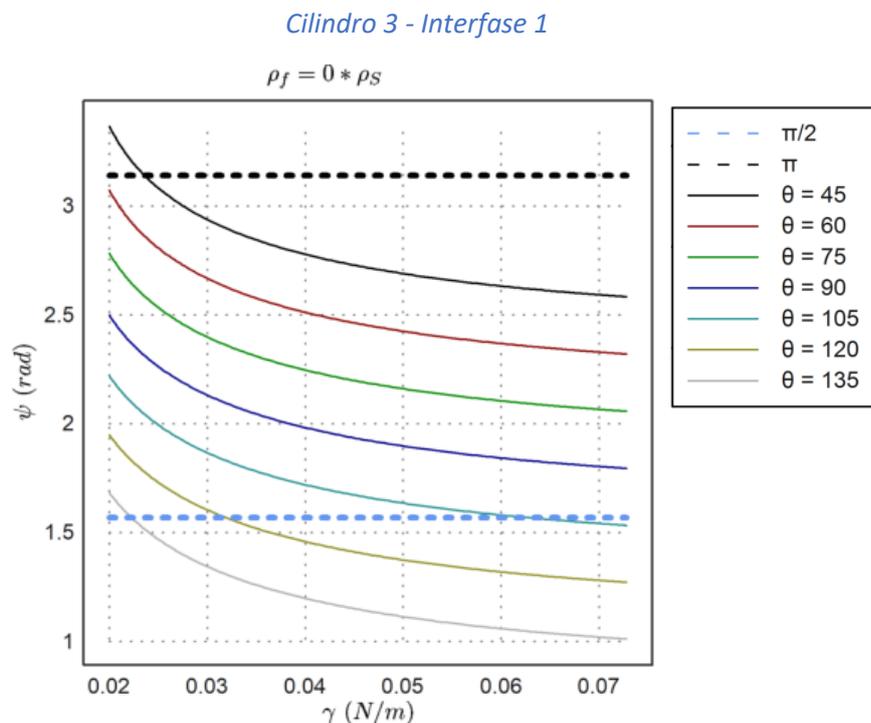
volvemos a ver una tendencia similar a la del caso sin fuerza aplicada, para la cual a medida que aumenta  $\gamma_{AB}$ , el ángulo del punto de contacto  $\psi$  tiende a disminuir. El razonamiento en este caso es el mismo que se hizo para [i], el aumento de la tensión superficial representa en este caso una mayor fuerza oponiéndose al peso y la fuerza aplicada en sentido descendente, con lo cual el cilindro tiende a penetrar menos en el fluido B, y por tanto tenemos una tendencia decreciente del ángulo del punto de contacto  $\psi$ .

En este punto merece la pena volver a destacar el hecho de que la fuerza aplicada sobre el cilindro se traduce en una variación de la densidad del objeto, tal y como se ha mencionado con anterioridad. En el caso de la fuerza descendente, esto se traduce en un cilindro  $D' > D$ , con la imposibilidad de alcanzar el límite de levantamiento, de ahí que tengamos el mismo comportamiento (en cuanto a forma al menos) que en el caso sin fuerza aplicada. Para observar esta equivalencia se ha elaborado la **Figura 33**, para la cual se ha definido una fuerza vertical nula y se ha utilizado la misma, pero se ha variado el cilindro por el definido en la **Tabla 7**. Esto equivale a resolver el sistema englobando directamente la fuerza en  $D'$  (27).

Cilindro 3	
$r_0$	200 $\mu m$
$\rho_S$	$(7.5 \cdot 3.3 + 3.3) \cdot \rho_B$

**Tabla 7:** Datos del cilindro utilizado para los resultados de la **Figura 33**.

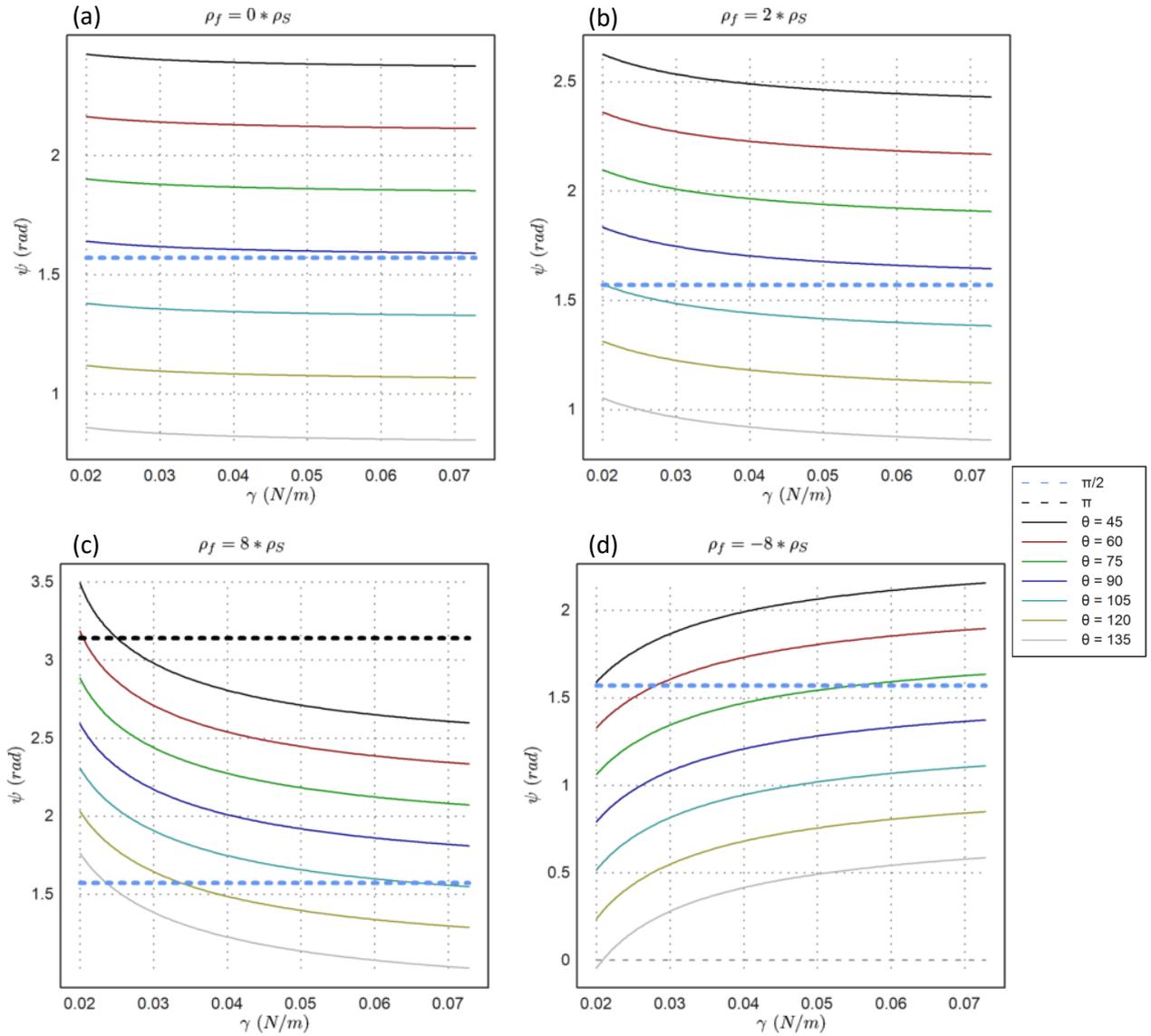
En este caso la gráfica de la **Figura 33** es equivalente y presenta los mismos valores que la **Figura 32 (b)**, siendo la única diferencia que en el caso de la **Figura 32 (b)** se ha considerado una fuerza aplicada no nula, mientras que en la **Figura 33** se ha variado la densidad del cilindro en la cantidad equivalente a la fuerza del caso original y se ha considerado nula la fuerza externa.



**Figura 33:** Estado de flotación en radianes para el *Cilindro 3* en la *Interfase 1* sin fuerza aplicada.

Ahora puede pasarse a considerar los casos en los que la fuerza aplicada es ascendente, **[iii]** y **[iv]**. Para **[iii]** tenemos una situación muy similar a la mencionada anteriormente. En este caso, el efecto de la fuerza ascendente es equivalente a una disminución de la densidad del cilindro, con este caso equivale a considerar un cilindro con  $D' < D$ .

### Cilindro 2 - Interfase 2

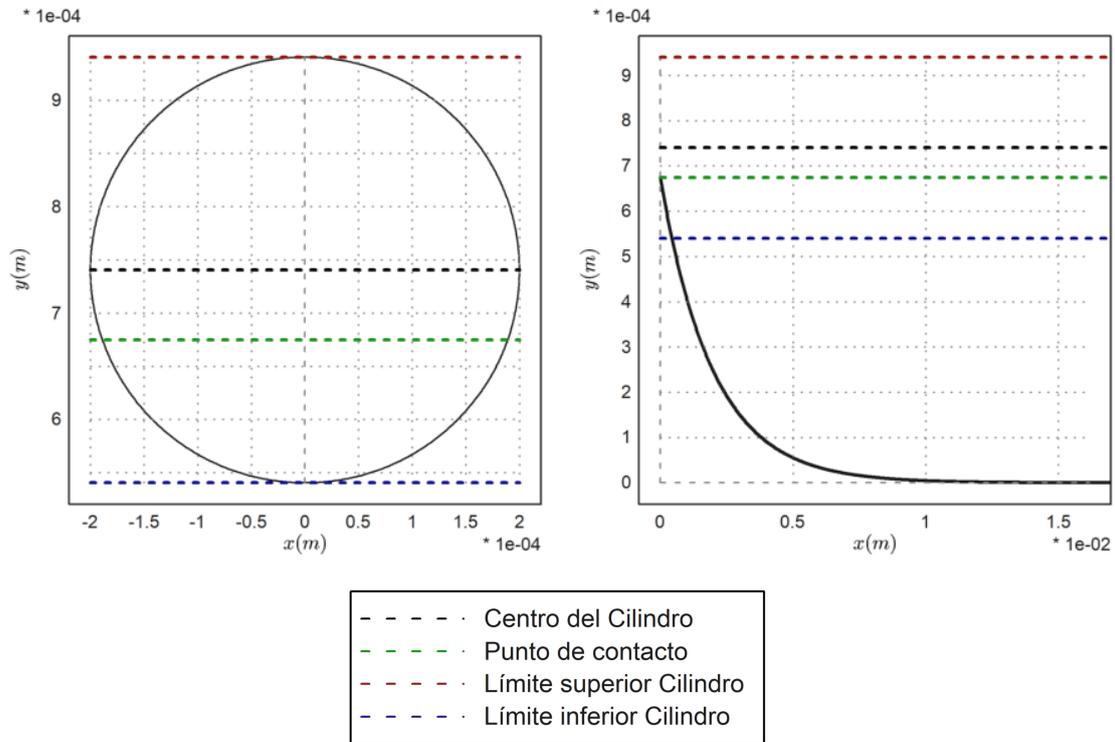


**Figura 34:** Estado de flotación en radianes para el Cilindro 2 en la Interfase 2 sin fuerza aplicada, con  $\rho_f = 2\rho_s$ , con  $\rho_f = 8\rho_s$  y con  $\rho_f = -8\rho_s$ .

Finalmente tenemos el caso **[iv]**, para el cual la tendencia de  $\psi$  con  $\gamma_{AB}$  se hace creciente, lo cual implica que a mayor es la fuerza de tensión, más grande el ángulo del punto de contacto de la interfase con el cilindro. Para analizar esta situación resulta útil representar el estado de equilibrio que se obtiene, para alguno de los casos tratados, a partir de la resolución numérica del sistema y observar de nuevo el punto de contacto y en el ángulo  $\phi$  de la interfase, razón por la cual se ha creado la **Figura 35**. Nótese en la figura la necesidad de utilizar escalas diferentes

tanto en  $x$  como en  $y$  a la hora de graficar la línea de interfase, con respecto a la gráfica del cilindro.

### Cilindro 2 - Interfase 1



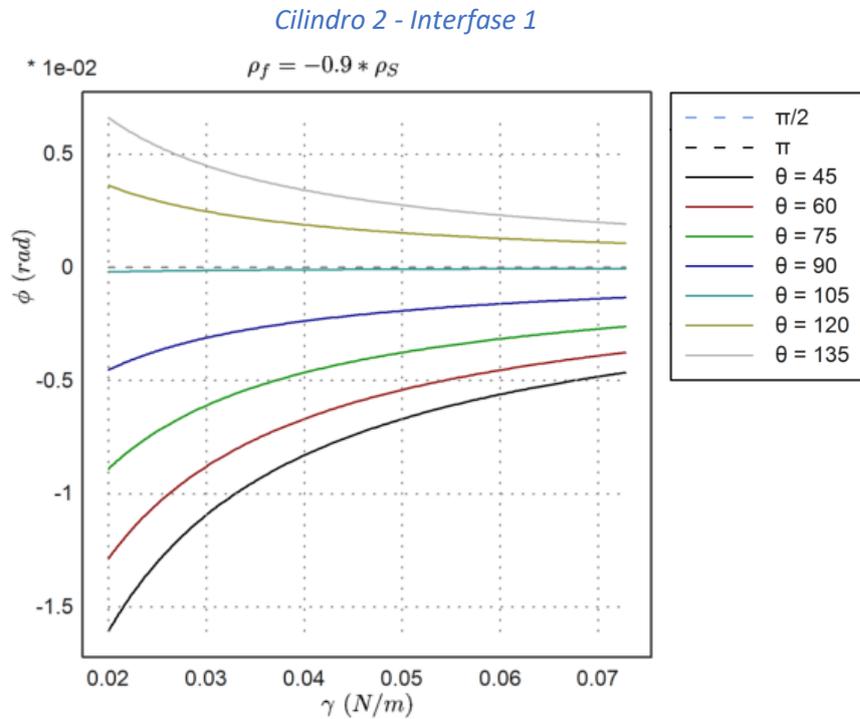
**Figura 35** Resolución numérica del perfil de la interfase cerca del cilindro para el *Cilindro 2* en la *Interfase 1* con fuerza aplicada nula  $\rho_f = -8$ ,  $\theta = 90^\circ$  y asumiendo una tensión superficial de  $\gamma_{AB} = 40 \text{ mN/m}$ . La línea de interfase (derecha) tiene una escala en  $x$ , y en este caso también en  $y$ , diferente a la de la gráfica del cilindro (derecha) para apreciar su evolución. Nótese que las escalas horizontal y vertical no son las mismas. Además, las escalas en  $x$  son diferentes en cada gráfica.

Una de las cosas más llamativas que se pueden observar en primera instancia en **Figura 35** es la inversión del menisco, lo cual implica un cambio de  $\phi > 0$  como se tenía en todos los casos antes comentados en este apartado, a  $\phi < 0$  en la situación **[iv]**. La explicación física de esta inversión de la tendencia de  $\psi(\gamma_{AB})$  con respecto a lo visto para los otros casos se basa en el mismo principio que para estos, viene dada por el signo del ángulo de inclinación de la interfase. Cuando este ángulo es positivo, la curvatura es igual a la de la **Figura 10**, mientras que cuando se da el cambio de signo para este ángulo, la curvatura del menisco se invierte, lo cual implica que el sentido de la aportación al equilibrio de flotación por parte de la tensión superficial también se invierte, ahora la tensión superficial “tira” del cilindro hacia abajo. Por lo tanto, si la tensión superficial disminuye en esta situación, el ángulo de contacto tiende a disminuir también, porque existe menor oposición a la fuerza vertical ascendente, y se tiende hacia el levantamiento del cilindro. Conociendo esto, las situaciones observadas se resumen en **Tabla 8**.

Caso	Fuerza aplicada	Menisco	Tendencia $\psi(\gamma_{AB})$
[i]	$\rho_f = 0$ (nula)	$\phi > 0$	Decreciente
[ii]	$\rho_f > 0$ (sentido descendente)	$\phi > 0$	Decreciente
[iii]	$\rho_f < 0$ (sentido ascendente)	$\phi > 0$	Decreciente
[iv]	$\rho_f < 0$ (sentido ascendente)	$\phi < 0$ (invertido)	Creciente

**Tabla 8:** Resumen de las tendencias observadas de  $\psi(\gamma_{AB})$  para los resultados con ambos cilindros y ambas interfases para diferentes rangos de valor de la fuerza aplicada.

Es importante destacar en este punto que dado que en este caso la tendencia depende de la situación del menisco  $\phi$ , el valor del ángulo de contacto cobra mayor relevancia, ya que puede llevar a un sistema a pasar de una situación de menisco como el de la **Figura 10** a una situación de menisco invertido como la de **Figura 35**. Un ejemplo de esto puede observarse fácilmente en la **Figura 36**, donde se puede ver cómo para ciertos valores de  $\theta$  el sistema se halla en el caso de menisco normal y para otros en el caso invertido.



**Figura 36:**  $\phi(\gamma_{AB})$  en radianes para el Cilindro 2 en la Interfase 1 con  $\rho_f = -0.9\rho_S$ .

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha podido estudiar el esquema planteado en la **Figura 10** para modelar el caso de un cilindro de longitud infinita en una interfase de dos líquidos sobre el cual se aplica una fuerza vertical, como extensión al caso de referencia planteado en **[1]**. Ha sido necesario señalar una consideración añadida **(21)** con respecto a la física del sistema no comentada en la referencia **[1]**, cuyos resultados no afecta debido al rango de datos elegidos, pero sí debe tenerse en cuenta en la ampliación que supone este trabajo.

Comentada esta consideración, se ha demostrado que incorporar una fuerza vertical externa es análogo a modificar la densidad efectiva del cilindro, que para fuerzas ascendentes puede tomar valores inferiores a la densidad de los fluidos que forman la interfase o incluso valores negativos.

A partir de la ecuación de equilibrio **(26)** se ha podido obtener para una serie de datos de entrada la geometría final y el equilibrio del sistema en caso de ser viable, y graficar dicha geometría para poder observarla.

Se ha analizado la *Condición de Flotabilidad* para diferentes valores de las variables  $(\gamma, \theta, \rho_f)$  y determinando el límite a partir del cual el cilindro se hunde **(28)** y el límite a partir del cual el cilindro es levantado **(33)**, obteniendo al final dos variantes para el *Diagrama de Condición de Flotabilidad*, uno para la densidad adimensional  $D$  y otro para la densidad de fuerza  $\rho_f$ , que representan el espacio de fases y permiten visualizar de forma directa los rangos en que el sistema se encuentra en una de las tres situaciones: equilibrio, hundimiento o levantamiento. Se ha observado también cómo la geometría y las características del cilindro y de las interfases influyen sobre los resultados para esta condición. En especial cómo el aumento del radio del cilindro es un factor de peso en las ecuaciones de equilibrio, lo cual se observa al comparar los resultados entre el *Cilindro 1*, para el cual era necesario variar en mucha mayor medida la densidad del cilindro para observar alteraciones, y el *Cilindro 2*, para el que era relativamente más sencillo obtenerlas. Este efecto se puede explicar de forma directa considerando el significado y definición del número de Bond, **(5)**. En esta medida de importancia relativa de la fuerza de empuje con respecto a la de tensión superficial, puede verse cómo la geometría del objeto (en este caso el cilindro), mediante el factor  $r_0^2$ , es en este caso la que está provocando una diferencia tan sustancial en los equilibrios alcanzados y los órdenes de magnitud de las fuerzas manejadas para ambos cilindros.

A continuación, se ha estudiado el *Estado de Flotación* y se ha determinado, de forma similar que, para la condición anterior, la fuerza vertical en sentido descendente equivale a un aumento de la densidad del cilindro, y que para ciertos valores esto puede llevar al hundimiento del mismo. Por otro lado, se ha observado que, en caso de aplicar una fuerza ascendente, el efecto de la variación del valor de la tensión superficial sobre el estado de flotación dependerá de si para la fuerza dada el signo del ángulo de inclinación de la interfase se invierte (menisco invertido), convirtiendo la tensión en una fuerza con sentido descendente. Se ha podido además observar la geometría final para algunos de los casos tratados y observar la inversión del menisco que produce este cambio de tendencia.

## Agradecimientos

Agradecimientos al Doctor Miguel Ángel Rubio Álvarez y al Doctor Javier Tajuelo Rodríguez por su guía y ayuda, así como por sus cruciales correcciones, observaciones y aportaciones en la realización de este trabajo y su memoria.

## Referencias

- [1] Dominic Vella, Duck-Gyu Lee, Ho-Young Kim, «The Load Supported by Small Floating Objects», *Langmuir* 2006, 22, 14, 5979-5981
- [2] Dominic Vella, Duck-Gyu Lee, Ho-Young Kim, «Sinking of a Horizontal Cylinder», *Langmuir* 2006, 22, 7, 2972-2974
- [3] Dominic Joseph Robert Vella, «The Fluid Mechanics of Floating and Sinking», Trinity College, A dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy, August 2007
- [4] E. H. Mansfield, H.R. Sepangi, E.A. Eastwood, «Equilibrium and mutual attraction or repulsion of objects supported by surface tension », *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 1997, 335, 869-919
- [5] J. Tajuelo, J.M. Pastor, F. Martínez-Pedrero, M. Vázquez, F. Ortega, R.G. Rubio, M.A. Rubio, «Magnetic Microwire Probes for the Magnetic Rod Interfacial Stress Rheometer», *Langmuir* 2015, 31, 1410-1420
- [6] J. Tajuelo, J.M. Pastor, M.A. Rubio, «A magnetic rod interfacial shear rheometer driven by a mobile magnetic trap», *J. Rheol.* 2016, 60, 1095
- [7] C.F. Brooks, G.G. Fuller, C.W. Frank, C.R. Robertson, «An interfacial Stress Rheometer To Study Rheological Transitions in Monolayers at the Air-Water Interface», *Langmuir* 1999, 15, 2450-2459
- [8] A. Georgiadis, G. Maitland, J.P. Martin Trusler, A. Bismark, «Interfacial Tension Measurements of the ( $H_2O + n - Decane + CO_2$ ) Ternary System at Elevated Pressures and Temperatures», *J. Chem. Eng. Data* 2011, 56, 4900-1908
- [9] J. Saien, S. Akbari, «Interfacial Tension of Toluene + Water + Sodium Dodecyl Sulfate from (20 to 50) °C and pH between 4 and 9», *J. Chem. Eng. Data* 2016, 51, 1832-1835
- [10] <https://docplayer.es/61036761-Comportamiento-y-evolucion.html>

## Anexos

Anexo A: Deducción completa de las ecuaciones de equilibrio adimensionales con fuerza vertical añadida

Para la obtención de la ecuación adimensionalizada de equilibrio de fuerzas para la flotabilidad de un cilindro de longitud infinita se parte de **(1)**, añadiendo una fuerza  $f$  de dirección vertical aplicada sobre el cilindro:

$$\pi(\rho_S - \rho_A)r_0^2 g + f = 2\gamma_{AB} \sin \phi + (\rho_B - \rho_A)r_0^2 g \left( -2 \frac{h_*}{r_0} \sin \psi + \psi - \sin \psi \cos \psi \right); \quad \text{(A1)}$$

En este caso, la fuerza se asume en el mismo sentido que el peso del cilindro, con lo cual una fuerza en sentido opuesto tendría un signo negativo en esta ecuación. Con el fin de facilitar el cálculo, se define la fuerza por unidad de longitud  $f$  como un peso añadido, tal que:

$$f \equiv \rho_f \pi r_0^2 g \quad \text{(A2)}$$

Esta definición permitirá más adelante el tratamiento de la fuerza como un incremento en la densidad del cilindro.

Así pues, se puede introducir **(A2)** y reordenar **(A1)** para obtener:

$$\begin{aligned} & \pi(\rho_S - \rho_A)r_0^2 g \cdot \frac{1}{\gamma_{AB}} \cdot \frac{(\rho_B - \rho_A)}{(\rho_B - \rho_A)} + \pi\rho_f r_0^2 g \cdot \frac{1}{\gamma_{AB}} \cdot \frac{(\rho_B - \rho_A)}{(\rho_B - \rho_A)} \\ & = 2 \sin \phi + \left( \frac{(\rho_B - \rho_A)gr_0^2}{\gamma_{AB}} \right) \left( -2 \frac{h_*}{r_0} \sin \psi + \psi - \sin \psi \cos \psi \right); \end{aligned} \quad \text{(A3)}$$

Ahora es posible introducir **(3)**, **(5)** y **(6)** para obtener:

$$\pi(D + D_f)B = 2 \sin \phi - B \left( -2 \frac{H_*}{R_0} \sin \psi + \psi - \sin \psi \cos \psi \right); \quad \text{(A4)}$$

Donde:

$$D_f \equiv \frac{\rho_f}{(\rho_B - \rho_A)}; \quad \text{(A5)}$$

Ahora aprovechamos la relación  $B = R_0^2$  establecida en **(5)** se puede obtener:

$$\pi(D + D_f)B = 2 \sin \phi - 2H_* B^{1/2} \sin \psi + B(\psi - \sin \psi \cos \psi); \quad \text{(A6)}$$

Finalmente, realizando los mismos cambios comentados con **(7)**, **(8)**, **(9)**, **(10)** se obtiene:

$$D^{(\phi)} = \frac{2}{\pi B} \sin \phi - \frac{4}{\pi B^{1/2}} \sin \frac{\phi}{2} \sin(\phi - \theta) + \frac{1}{\pi} \left[ \phi + \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2(\phi - \theta) \right]; \quad \text{(A7)}$$

Donde se establece la equivalencia con **(11)**:

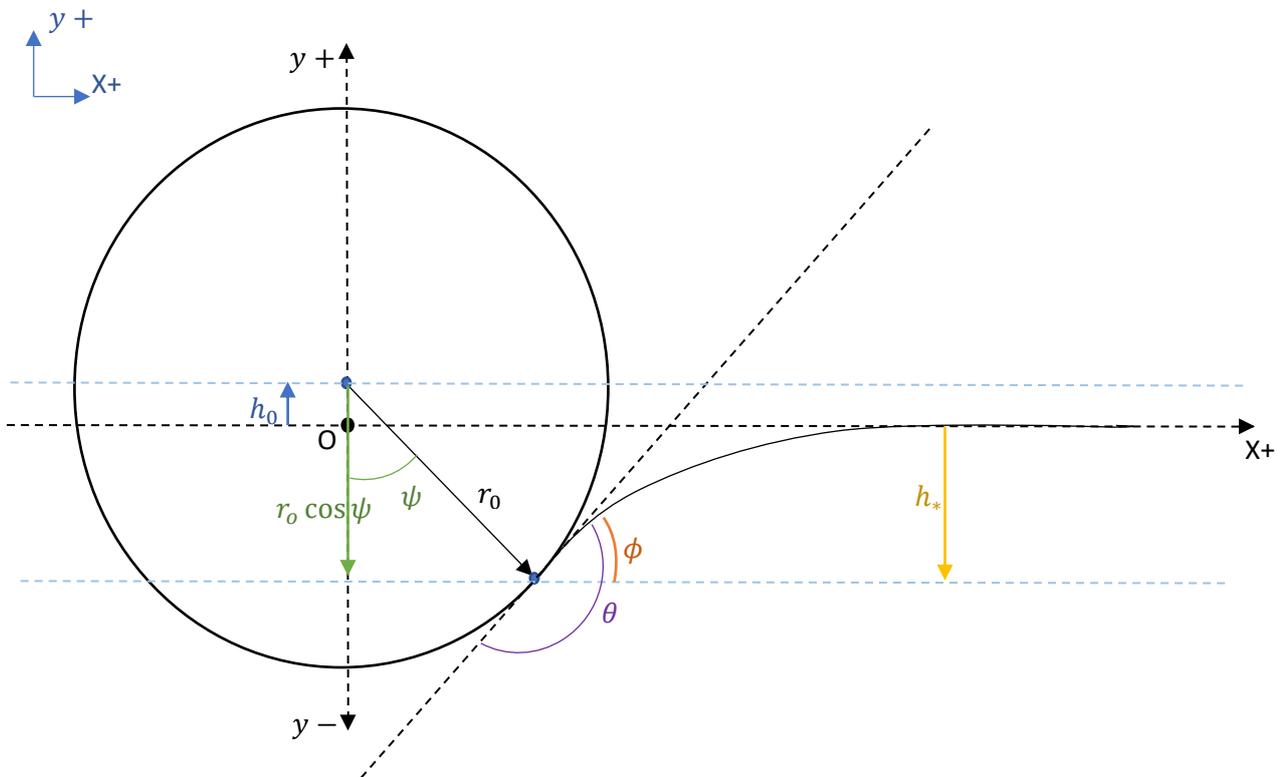
$$D'(\phi) \equiv D(\phi) + D_f ; \quad (\text{A8})$$

$$\rho'_s \equiv \rho_s + \rho_f ; \quad (\text{A9})$$

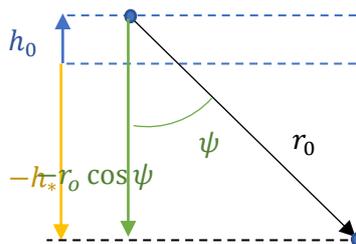
Anexo B: Derivación de la altura del centro de masas a partir de  $\phi$

Asumiendo un sistema como el de la **Figura 10** para el cual se ha definido la geometría y propiedades del cilindro ( $\rho_s, r_0, \theta$ ), las de la interfase ( $\rho_A, \rho_B$ ) y la fuerza ( $f(\rho_f)$ ), puede resolverse numéricamente **(A7)** y obtener el valor de  $\phi$ .

Una vez obtenido  $\phi$  es relativamente inmediato obtener  $H_*$  a partir de **(7)** y  $\psi$  a partir de **(10)**. Obtenidos estos datos, se puede hallar la relación para encontrar  $H_0$  de forma sencilla mediante equivalencias geométricas tal y como se plantean en la **Figura 1B** y la **Figura 2B**. Es importante notar que, en estos esquemas, el eje  $x$  está sobre la horizontal que determina la línea de la interfase lejos del cilindro, mientras que el eje  $y$  lo determina la línea perpendicular a esta que pasa por el centro de masas del cilindro.



**Figura 1B:** Esquema geométrico basado en el sistema de la referencia **[1]**. El Origen de coordenadas se considera situado en el corte entre la línea paralela a la interfase en el infinito y la perpendicular a esta que pasa por el centro de masas del cilindro. Se indican: radio del cilindro  $r_0$ ; altura del centro de masa del cilindro con respecto a la interfase sin deformar  $h_0$ ; altura del punto de contacto de la interfase con el cilindro con respecto a la altura de la interfase sin deformar  $h_*$ ; ángulo de la posición del punto de contacto con respecto a la vertical que pasa por el centro de masas  $\psi$ ; ángulo de contacto de la interfase  $\theta$ ; inclinación de la interfase  $\phi$



**Figura 2B:** Esquema geométrico basado en el sistema de la referencia simplificado **[1]**.

A partir de estas figuras se puede deducir la relación:

$$h_0 = r_0 \cos \psi - h_*; \quad \text{(B1)}$$

Lo cual puede adimensionalizarse para obtener:

$$H_0 = R_0 \cos \psi - H_* = \sqrt{B} \cos \psi - H_*; \quad \text{(B2)}$$

Es importante notar que en este caso las soluciones **(B1)** y **(B2)** son aplicables tal y cómo están incluso aunque  $\psi > \pi/2$  o  $r_0 \cos \psi - h_* < 0$ , ya que  $h_0 < 0$  es una solución viable que implica que el centro de masas del cilindro está por debajo de la línea de interfase.

## Anexo C: Programas utilizados para la simulación

Los programas utilizados durante la realización de este trabajo han elaborados con *Euler Math Toolbox x64 versión 2021-04-30* para Windows y utilizando la extensión de LaTeX proveída mediante *MIKTeX v21.2-x64* y son listados a continuación:

- *VellaLangmuirResultsFig2.en:*  
Utilizado para reproducir la Figura 2 del artículo [1]. Los resultados se han obtenido mediante sustitución directa de valores de  $\phi$  en (2), y a continuación graficando estos resultados de  $D(\phi)$ .
- *VellaLangmuirResultsFig3.en:*  
Utilizado para reproducir la Figura 3 del artículo [1]. El programa resuelve numéricamente el máximo  $\phi_c$  de  $D(\phi)$  mediante el método de la secante, y a continuación obtiene  $D_{max} = D(\phi_c)$ . Este proceso se reproduce para todos los valores de  $B$  dentro del rango definido y finalmente se grafican los resultados en el rango de  $B$  utilizado en la referencia.
- *VellaLangmuirResultsFig4.en:*  
Utilizado para reproducir la Figura 4 del artículo [1]. El procedimiento es el mismo que el utilizado para *VellaLangmuirResultsFig3.en*, pero se utiliza un rango mayor de  $B$ . Al elaborar la gráfica final se añaden las asíntotas teóricas tal y como se definen en [1].
- *InterfaceLine.en:*  
Permite verificar la condición de flotabilidad de un cilindro flotando sobre una interfase de dos líquidos a partir de unos datos de entrada, y obtener el estado de flotación en caso de que los datos sean viables, representando la línea de la interfase y el cilindro para proveer una referencia visual de los resultados.  
El proceso que se sigue consiste en resolver primero numéricamente el valor de  $\phi$  en (26), y a partir de este obtener  $\psi$  mediante (7) y  $H_*$  mediante (10). Finalmente se puede obtener  $H_0$  tal y como se describe en el Anexo B. A continuación, se obtienen resultados para la interfase desde el punto de contacto a partir de (9) y mediante el *método de Runge-Kutta* (la precisión utilizada es la definida internamente por Euler, pero puede configurarse), que son graficados. En este último paso se dimensionan las variables multiplicándolas por la longitud capilar. Se grafica también el cilindro para proporcionar referencia de su posición con respecto a la interfase.  
Este programa utiliza el *método de la secante* (la precisión utilizada es la definida internamente por Euler, pero puede configurarse) para hallar la solución de  $\phi$  en la ecuación (26) dados los de parámetros que definen el sistema (interfases y cilindro).
- *Dmax\_min\_vs\_Gamma\_given\_Theta\_with\_Force.en:*  
Permite graficar la *condición de flotabilidad* para unos datos de entrada dados que definen el cilindro, las interfases y los rangos a testear para la tensión superficial, la fuerza y los ángulos de contacto. Se generan gráficas para  $D_{max}(\gamma_{AB})$  y  $D_{min}(\gamma_{AB})$  por separado, y finalmente se combinan ambas en una misma gráfica para marcar las diferentes regiones en el espacio de fases, en las gráficas se añade además el valor de  $D$  para los datos reales del cilindro como referencia.

El procedimiento es similar al de *VellaLangmuirResultsFig3.en*: Para todo un rango de  $\gamma_{AB}$ , se resuelve  $D_{max} = D(\phi_c)$  **(28)** y  $D_{min}(\phi)$  **(33)**, y se grafican ambos resultados por separado y conjuntamente, añadiendo la referencia de  $D$  con la  $\rho_s$  real del cilindro. Esto se reproduce para todos los valores de  $\theta$  definidos.

Este programa utiliza el *método de búsqueda de la sección dorada*, también llamado "Golden cut" o "Golden section search", (la precisión utilizada es la definida internamente por Euler, pero puede configurarse) para hallar la solución de  $\phi_c$  en **(28)** y poder después obtener el resto de los resultados a partir de este.

- PhaseDiagram\_F\_vs\_Gamma\_given\_Theta.en*:  
 Permite graficar el espacio de fases ( $\rho_f, \gamma_{AB}$ ) para la condición de flotabilidad para unos datos de entrada dados que definen el cilindro, las interfases y los rangos a testear para la tensión superficial, la fuerza y los ángulos de contacto. El procedimiento es muy similar al utilizado en *Dmax\_min\_vs\_Gamma\_given\_Theta\_with\_Force.en*. El diagrama de fases se genera tanto para  $\rho_f$  como para el valor real de la fuerza  $F$ .  
 Se resuelven los límites para  $D_f$  mediante **(28)** y **(33)**, para todo un rango dado de  $\gamma_{AB}$ , y a continuación se grafican estos resultados.  
 Este programa utiliza el *método de búsqueda de la sección dorada*, también llamado "Golden cut" o "Golden section search", (la precisión utilizada es la definida internamente por Euler, pero puede configurarse) para hallar la solución de  $\phi_c$  en **(28)** y poder después obtener el resto de los resultados a partir de este.
- Psi\_vs\_gamma\_given\_Theta\_and\_Dprime.en*:  
 Permite graficar el *estado de flotación*  $\psi(\gamma_{AB})$  para unos datos de entrada dados que definen el cilindro, las interfases, los rangos a testear para la tensión superficial, la fuerza y los ángulos de contacto.  
 Se resuelve primero  $\phi$  en **(11)** para el sistema dado, y a partir de este se obtiene el valor de  $\psi$ . Finalmente se grafica  $\psi(\gamma_{AB})$  para el rango de entrada definido, añadiendo el valor de  $\psi = \pi$  como referencia para determinar si el centro de masas del cilindro se encuentra por encima o por debajo del punto de contacto.  
 Este programa utiliza el *método de la secante* (la precisión utilizada es la definida internamente por Euler, pero puede configurarse) para hallar la solución de  $\phi$  en la ecuación **(26)** y poder después obtener el resto de los resultados a partir de este.

Aclaraciones con respecto a la precisión en los métodos numéricos utilizados puede encontrarse en el **Anexo D**.

## Anexo D: Precisión de los métodos numéricos

Los resultados obtenidos dentro de este trabajo han utilizado tres métodos numéricos de resolución diferentes:

- Método de Búsqueda de la sección dorada, “Golden cut” o “Golden section search”.
- Método de la secante.
- Método de Runge-Kutta (RK4).

Los programas utilizados permiten definir la precisión hasta la cual se pretende resolver numéricamente con cada uno de estos métodos. En este caso se ha optado por definir aparte el error por defecto de Euler Math Toolbox para que todos los métodos utilicen este valor fijo. El valor fijado ha sido

$$\varepsilon = 0.00001 u . \quad (\text{C1})$$

En **(C1)**,  $u$  representa la unidad de la variable para la que se está resolviendo.

Para el caso de  $\phi$ , tendríamos la precisión definida para el método de la secante y el método de la sección dorada:

$$\varepsilon_{\phi} = 0.00001 \text{ rad} . \quad (\text{C2})$$

Mientras que para las variables adimensionales utilizadas para la resolución de la línea de interfase (**Anexo C**),  $y = H(x)$ , se ha utilizado la precisión definida para el método de Runge-Kutta (hay que contemplar aquí que esto además dependerá del valor utilizado para  $H_*$ , y por tanto de su precisión):

$$\varepsilon_H = 0.00001 . \quad (\text{C3})$$

Lo cual implica que para los resultados finales de la interfase con valores dimensionales se tiene:

$$\varepsilon_h = 0.00001 \cdot l_c . \quad (\text{C4})$$

Teniendo esto como punto de partida podemos determinar la propagación de estos errores derivados de los métodos numéricos utilizados sobre las variables cuyos resultados numéricos son, en parte, el foco de esta memoria, o bien son necesarias como paso intermedio para la obtención otros valores:

$\phi$

Tal y como ya se comentó anteriormente, el error en este caso viene determinado **(C2)**.

$D_{\min/\max}$   $D'_{\min/\max}$

En este caso el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $\phi$ . Dada la relación **(11)** y **(12)**, podemos determinar el error propagado en este caso:

$$\varepsilon_D = \left| \left( -\frac{2 \cos(\phi/2) \sin(\phi - \theta)}{\pi \sqrt{B}} - \frac{4 \sin(\phi/2) \cos(\phi - \theta)}{\pi \sqrt{B}} + \frac{2 \cos(\phi)}{\pi B} - \frac{\cos(2(\phi - \theta))}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \right| \varepsilon_{\phi} . \quad (\text{C5})$$

$\psi$

En este caso el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $\phi$ . Considerando **(7)**, tenemos:

$$\varepsilon_{\psi} = \cos(\phi/2) \varepsilon_{\phi} . \quad (\text{C6})$$

$H_*$

Para esta variable el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $\phi$ . Dada la relación **(10)**, tenemos:

$$\varepsilon_{H_*} = \cos(\phi/2) \varepsilon_{\phi} . \quad (\text{C7})$$

$H_0$

Para esta variable el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $\psi$  y de  $H_*$ . Considerando **(B2)** tenemos:

$$\varepsilon_{H_0} = R_0 \sin(\psi) \varepsilon_{\psi} + \varepsilon_{H_*} . \quad (\text{C8})$$

$\rho_S \text{ min/max}$

Para esta variable el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $D$ . Considerando **(6)** y **(11)** tenemos:

$$\varepsilon_{\rho_S} = (\rho_B - \rho_A) \varepsilon_D . \quad (\text{C8})$$

$\rho_f \text{ min/max}$

Para esta variable el error propagado asociado a los métodos numéricos viene determinado por la variable  $D$ . Considerando **(25)**, **(26)** y **(27)** tenemos:

$$\varepsilon_{\rho_f} = (\rho_B - \rho_A) \varepsilon_D . \quad (\text{C8})$$