



TRABAJO FIN DE MÁSTER:

MODELOS DE SEGREGACIÓN

Autor: Diego M. Ortega Hernández

Tutora: Elka Radoslavova Koroutcheva

Curso 2015/2016

ABSTRACT

Thomas Schelling introduced in the 1970's a model that has been considered as an archetype in the field of social sciences. In this master thesis a variant of Schelling's segregation model is analyzed by using several parameters: measure of segregation based on cluster geometry, analogue of energy in spin-1 models, changes per step and utility factor (discrete and continuous). Changes in tolerance and percentage agents in the model has reproduced several social realities: utility or satisfaction of the agents in majority is greater than the agents in minority, creation of «zero zones» where the agents don't want to be replaced and formation of «ghettos» when the tolerance suffers a steep descent. The change of population percentage in a sudden or smooth way is also studied. Finally, the effect of the vacancy percentage over these situations is analyzed. It has been concluded that small changes in tolerance and population percentage have far-reaching implications for social and economic policies aiming at fighting urban segregation.

Keywords: *Segregation - Schelling model - Blume Capel model - Social realities - Utility factor*

RESUMEN

Thomas Schelling introdujo en los 70 un modelo de segregación que ha sido considerado como un arquetipo en el campo de las ciencias sociales. En este trabajo de máster se analiza una variante de ese modelo mediante diversos parámetros: coeficientes de segregación basados en la geometría de los clusters, análogos de la energía de los modelos de spin-1, cambios por paso y factores de utilidad (discreto y continuo). Los cambios en la tolerancia y en el porcentaje de agentes han reproducido varias realidades sociales: la utilidad o satisfacción de los agentes que se encuentran en mayoría es más elevada que la de los minoritarios, la creación de «zonas cero» donde los agentes no quieren trasladarse y la formación de «ghettos» cuando la tolerancia sufre un brusco descenso. También se estudian los cambios de porcentaje en la población producidos de forma brusca o suave. Finalmente, es analizado el efecto del porcentaje de lugares vacantes sobre estas situaciones. Se concluye que pequeños cambios en la tolerancia o en el porcentaje de la población tienen profundas implicaciones para las políticas sociales y económicas que tienen por objetivo la lucha contra la segregación urbana.

Keywords: *Segregación - Modelo de Schelling - Modelo de Blume-Capel - Realidad social - Factor de utilidad*

Índice

1. <u>INTRODUCCIÓN</u>	3
1.1. ¿Qué es la Sociofísica?	3
1.2. Modelos Sociofísicos	4
1.2.1. Dinámica cultural: Modelo de Axelrod	4
1.2.2. Fenómeno de Huelga	5
1.2.3. Dinámicas de opinión: Modelo de Voter	6
1.2.4. Difusión de opiniones: modelo de Snajdz	7
1.2.5. Modelos de segregación: Schelling y Gauvin.	8
2. <u>MODELO</u>	15
2.1. Parámetros de entrada	15
2.2. Algoritmo	16
2.3. Medidas empleadas para caracterizar el sistema	16
3. <u>RESULTADOS</u>	20
3.1. Resultados para valores de T y ρ discretos	21
3.2. Porcentaje de agentes de cada color distintos y evolución continua de la tolerancia	26
3.3. Cambio brusco en la tolerancia del sistema	37
3.4. Cambio de color de agentes de forma suave y brusca	42
4. <u>CONCLUSIONES</u>	49
5. <u>BIBLIOGRAFÍA</u>	51

6. APÉNDICES	53
6.1. Modelo de Ising	53
6.2. Modelo de Blume-Emery-Griffths (BEG)	55
6.3. Modelo de Blume-Capel (BC).	56
6.4. Algoritmo de clusterización	57
6.5. Proceso de renormalización	59
6.6. Proceso de suavizado	61

En los años 70, Schelling introdujo un modelo basado en la interacción multiagente para describir la dinámica de segregación. Recientemente este modelo ha sido analizado haciendo hincapié en la relación con los modelos de la física estadística, como los modelos de Ising y de sus variantes (el modelo de Blume-Emery-Griffiths). Estos modelos servirán de base para analizar el comportamiento de un modelo de segregación, variando los parámetros u otras características relevantes. También el análisis hará referencia a modelos basados en datos empíricos, donde las reglas de decisión del agente tienen en cuenta factores socioeconómicos relevante.

Resulta imposible abordar este trabajo sin comenzar explicando algunos de los términos que en él emplearemos. Por eso, antes de encarar la explicación de qué es un «Modelo de segregación», debemos comentar que forma parte de una rama de la Física relativamente joven, que es la Sociofísica. Así, es de obligado cumplimiento comenzar con la pregunta del siguiente apartado.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. ¿Qué es la Sociofísica?

Siguiendo las palabras de [1], diremos que la Sociofísica es: «El análisis con herramientas propias de la Física de fenómenos sociales y psico-políticos». Por lo tanto, esta rama, trata uno de los temas más antiguos; la predicción del comportamiento humano. Para ello emplearemos herramientas propias de la Física Estadística, principalmente. También al igual que en ella, no podremos predecir lo que hará un sólo elemento, pero sí que podremos analizar el comportamiento global de un gran número de ellos.

Evidentemente, aunque esto podría dar pie a cuestiones éticas, nos centraremos en tratar de describir comportamientos humanos a partir de reglas simples que tienen en cuenta aspectos psicológicos, sociales, económicos y políticos. También, y esto es algo que tienen en común con sistemas físicos propios del magnetismo como de Ising, debemos dar cuenta en todos los modelos de que los seres humanos no están aislados, sino que interactúan con sus vecinos. Los siguientes apartados describen algunos de estos modelos de interacción y

las reglas que se esconden tras ellos.

1.2. Modelos Sociofísicos

Las cuestiones cubiertas por la sociofísica se están haciendo más numerosos cada día: redes sociales, evolución del lenguaje, dinámicas de población, terrorismo, votaciones, formación de coaliciones, dinámica de opiniones... De entre ellos seleccionaremos unos cuantos que dan cuenta de los logros que se han conseguido a la hora de comprender y modelar fenómenos sociales.

1.2.1. Dinámica cultural: Modelo de Axelrod

Este modelo [2] tiene como objetivo descubrir cuáles son los procesos fundamentales que guían la dinámica cultural de un grupo social. Consiste en un sistema de N agentes en un mallado bidimensional. Cada uno de estos agentes tiene F características (religión, lenguaje, nivel económico...) las cuales pueden tomar un número « q » de valores.

Posteriormente, se selecciona un agente al azar (agente-1) y uno de sus vecinos próximos (agente-2), también de modo aleatorio, y se calcula la proporción de cualidades que tienen en común. Si tienen alguna en común se les selecciona como agentes con posibilidad de interactuar. Según el número de cualidades que tengan en común, tendrá más o menos probabilidad de interactuar y de actuar de la misma manera. Hemos de aclarar que lo que hace el agente-1 es copiar el valor de una cualidad F en común con el agente-2. Cuando esta iteración se repite un número muy elevado de veces se observa que existe agrupación en pequeños clusters de uniformidad de opinión. Esta uniformidad será mayor cuantas más cualidades F se tomen en cuenta en el modelo, ya que se aumenta la posibilidad de que tengan una cualidad común, y menos valores tengamos de q . A partir de los resultados del modelo se pudo concluir que existe un determinado número crítico de atributos asociados a un agente por debajo del cual se alcanza la uniformidad y consenso cultural.

Posteriormente, se añadieron otros efectos como es la presencia de un nuevo «vecino» que llamamos cultura global [3], con el que se interactúa con cierta probabilidad, y que toma como valor q del atributo F el valor que más se repite entre los agentes del sistema (moda). También se incluyó el efecto de la cultura local [4], que lo hace con la moda de los vecinos más cercanos. E incluso se observó como evolucionaba el sistema cuando la cultura

se modelaba como un vecino cuyo valor era fijado externamente, y que no se modificaba nunca[5]. Una especie de «propaganda cultural». El primer y tercer caso se pueden ver en el orden descrito en la figura 1.1.

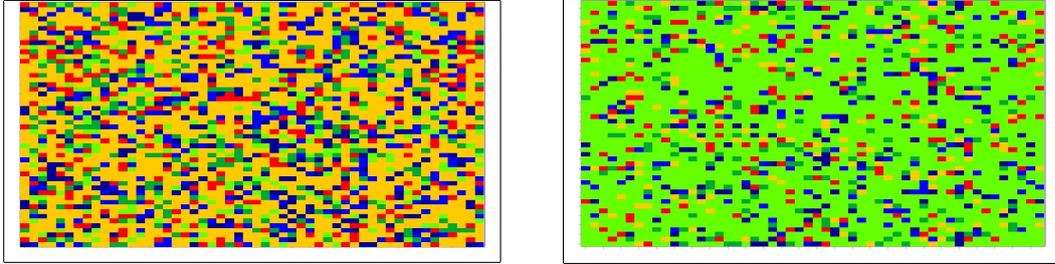


Fig.1.1a y 1.1b: Estados finales del modelo de Axelrod existiendo una «cultura global» generada por los agentes (1a.izda) y considerando una «propaganda cultural» independiente de ellos (1b.dcha). El color rojo significa «castellano», el azul «portugués», el verde «chino» y el amarillo «inglés», de la variable cultural estudiada «Lengua».

1.2.2. Fenómeno de Huelga

Galam en uno de sus primeros trabajos en el área, introdujo el fenómeno de la huelga [6]. Para ello parte de la base de que al agente le «gusta» estar de acuerdo con sus vecinos más cercanos (se siente satisfecho). Pero, a su misma vez, también está preocupado por la concepción que tiene del valor de su trabajo y de lo que percibe en concepto de sueldo por él.

Para modelar estos dos fenómenos emplea el modelo de Ising: el primer fenómeno da cuenta de su interacción con los vecinos, y el segundo de la existencia de un campo externo que puede modificar su estado. Si el agente trabaja, su espín toma el valor 1 y en el caso de que no lo haga, su espín tomará el valor -1.

Las interacciones entre los diferentes agentes son modeladas mediante una constante de acoplamiento J_{ij} de los agentes i y j , que se toma igual para todos los agentes en el modelo presentado. Este parámetro, modela la tendencia que tienen los agentes de la colectividad de adoptar una posición igual a la de sus vecinos.

El campo magnético externo H juega el papel desestabilizador y supone la introducción de la insatisfacción en cada uno de los agentes individualmente. También se introduce en factor $1/T$ como la permeabilidad social, siendo T el equivalente a la temperatura en

física clásica. El modelo planteó la existencia de una función F o función de insatisfacción (equivalente en física clásica a la energía libre). En el modelo también se introduce (como parámetro de orden) el valor de M , lo cual corresponde en la física clásica con la magnetización media por espín. Este modelo mostró la existencia de dos fases ordenadas con $0 < M \leq 1$ y $-1 \leq M < 0$ cuando nos encontramos por debajo de una determinada temperatura denominada “temperatura crítica”.

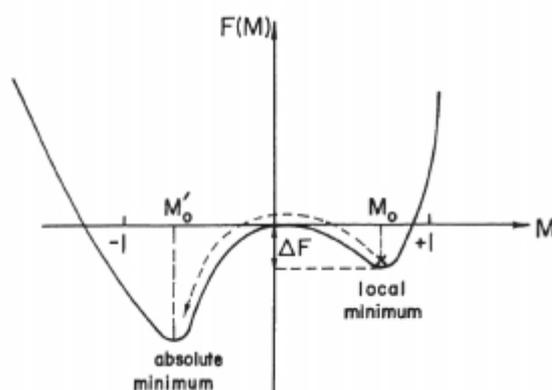


Fig.1.2: Caso metaestable con $H < 0$. La línea de puntos señala el salto al estado de huelga con respecto a la acción de un agente externo [6].

Este modelo encontró que evitar una huelga era más barato siempre que poner la empresa a funcionar de nuevo, lo que desde luego, reproduce una realidad social. También se encontró, como se indica en la Fig 1.2, que bajos ciertos estímulos leves se puede pasar de un estado de trabajo a uno de huelga. Por ejemplo, la acción de un pequeño grupo de sindicalistas puede terminar desencadenando una gran huelga.

1.2.3. Dinámicas de opinión: Modelo de Voter

Este modelo fue uno de los pioneros del área [7-8]. Se pretende modelar como varía la opinión en una colectividad cerrada. Para ello, partimos de un sistema «clásico»: agentes que pueden tomar respecto de una opinión valores ± 1 . Estos agentes se encuentran en el interior de una red bidimensional con cuatro vecinos próximos. Esto puede generalizarse para redes con más de dos dimensiones.

En cada iteración se escoge al azar un agente y un vecino, y se hace que la opinión del agente sea igual a la del vecino. El modelo nos demuestra que partiendo de un estado desordenado, se llega a un estado ordenado. El tiempo necesario para que el sistema alcance el estado ordenado o ferromagnético tiene una dependencia exponencial con el tamaño de la red. En la figura (Fig. 1.3) se presenta la coexistencia de dos clusters de opinión en un modelo de Voter.

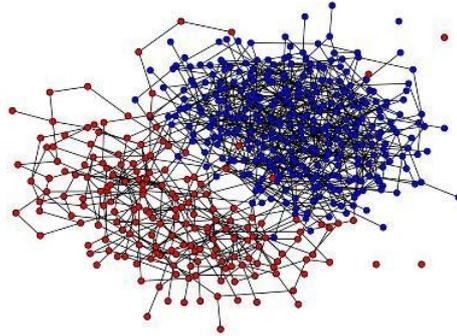


Fig.1.3: Modelo de Voter mostrando coexistencia de dos clusters de opiniones diferentes.

Para hacernos una idea de la importancia que ha supuesto el planteamiento de este modelo, podemos decir, que tal y como se muestra en la referencia [7], se han realizado estudios reales aplicando el modelo a las elecciones en EEUU.

1.2.4. Difusión de opiniones: modelo de Snajdz

Otro modelo de nuestro interés es el de la difusión de las opiniones, o lo que es lo mismo, como se puede expandir una idea u opinión a través de un grupo social [9-10]. Este modelo tiene en cuenta que la presión de grupo suele sobrepasar al individualismo.

De nuevo nos basamos en un sistema de espines bidimensional que pueden tomar los valores de ± 1 , donde cada pareja de agentes tiene seis vecinos.

Seleccionando una pareja de agentes $i, i+1$ al azar se determina la opinión de sus vecinos $i-1, i+2$ de acuerdo con lo siguiente:

- Si $s_i = s_{i+1}$, entonces $s_{i-1} = s_{i+1} = s_{i+2}$. Es decir, si los agentes de la pareja tienen la misma opinión, entonces la imponen a sus vecinos

- Si $s_i \neq s_{i+1}$, entonces $s_{i-1} = s_{i+1}$ y $s_i = s_{i+2}$, o lo que es lo mismo, si los agentes de la pareja tienen distinta opinión, cada agente impone su opinión en el vecino del otro agente.

Podemos ver el proceso de forma más clara en la siguiente figura (Fig. 1.4):

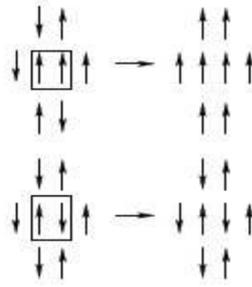


Fig. 1.4.: Modelo de iteración de Snajdz [9].

Partiendo de una distribución de opiniones al azar podemos llegar a una situación de consenso total (+1 o -1) con probabilidad de 0.25, o bien una configuración de desacuerdo total con una disposición de los espines según un tablero de damas.

Posteriormente se introdujeron al modelo agentes que nunca cambiaban de opinión, lo que da pie a pequeños clusters de desacuerdo alrededor de los mismos.

Este modelo ha tenido numerosas aplicaciones: modificaciones de este modelo han permitido reproducir la distribución del número de candidatos de acuerdo con el número de votos en India o Brasil [11], o bien ha respondido a la pregunta de cómo de fuerte tiene que ser la publicidad para que un producto que compite con otro se acabe quedando con todo el mercado [9].

1.2.5. Modelos de segregación: Schelling y Gauvin.

- ¿Qué es la segregación?

Según su segunda acepción en la RAE¹, segregar es separar y marginar a una persona o a un grupo de personas por motivos sociales, políticos o culturales. Su actuación queda patente en la sociedad actual tanto a través de estudios.

¹Real Academia Española

El fenómeno de la segregación es fundamental en la naturaleza y parece también estar presente en la sociedad humana a lo largo de la historia y de diferentes maneras. En una sociedad heterogénea como es la actual, con diferentes grupos raciales o culturales, suele darse el caso de que la gente prefiere vivir en vecindarios con características similares. Esta segregación puede darse por motivos económicos, culturales, religiosos...

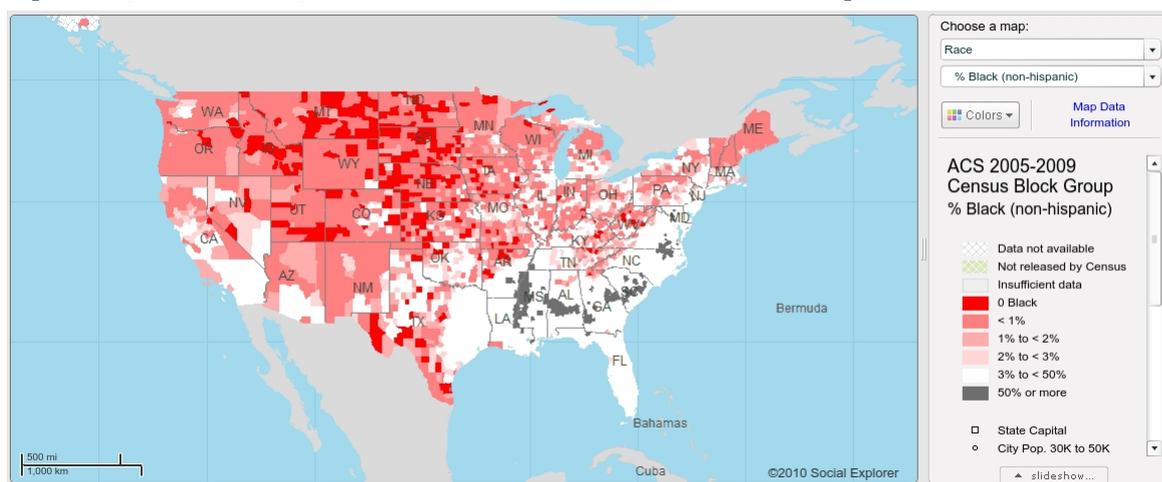


Fig. 1.5.: Mapa de segregación racial en USA (2010) [12].

Como podemos ver en el mapa [12] la segregación racial es un hecho. La leyenda del mapa usa el color rojo fuerte para una población de raza negra del 0%. Los tonos de rojo suave indican porcentajes de raza negra menores al 3%. Esto indica que hacia el Oeste de los USA la población tiende a estar más segregada. Encontramos estados de nivel cultural y económico inferior por lo general, y tradicionalmente más conservadores: Utah, Colorado, Kansas, Texas, Oklahoma... Hacia la costa Oeste este comportamiento descende, estados de California, Washington... No obstante, la población se encuentra más mezclada en el Este, especialmente hacia la costa, donde podemos comprobar que la mayoría del mapa es de color blanco. No obstante, aquí encontramos agrupaciones de color gris, que corresponden a lugares con una población negra superior al 50%, conocidos en el argot como «ghettos».

Además, incluso aunque a veces parezca que la segregación no es demasiado importante a nivel de estado, a nivel de ciudad estos llamados «ghettos» sí que se forman. Para demostrar esto presento dos figuras [13]: la de la izquierda de segregación a nivel estatal, de Minnesota, (Fig. 1.6a) y la de la derecha a nivel de ciudad, de Minneapolis y Saint-Paul (Fig. 1.6b).

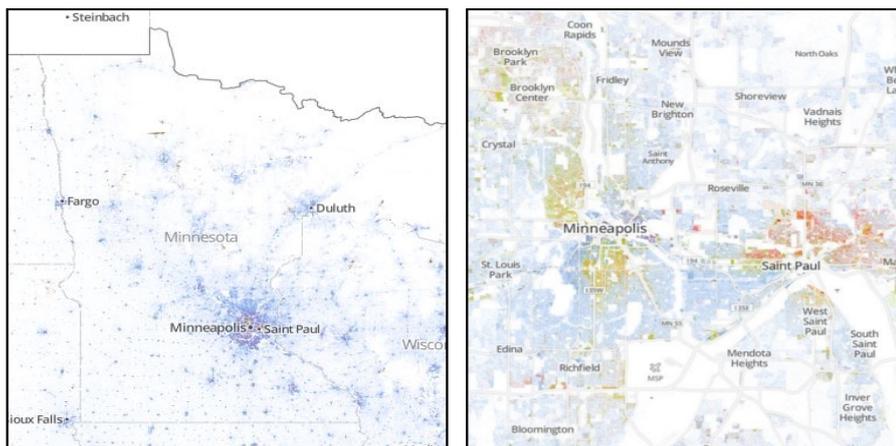


Fig. 1.6a y 1.6b: Mapa de segregación racial de Minnesota a nivel estatal (izqda.) y de ciudad (dcha.) [13].

El color morado indica que no hay segregación: en este mapa se le asigna un color a cada persona. Por eso en cada pixel, se muestra un promedio del color de las personas que habitan en él. El color morado aparece como mezcla de azules claros (raza blanca) y rojos (raza negra). Esto indica, en la figura 1.6a, que en Minneapolis y Saint Paul no existe segregación. Sin embargo, si nos fijamos bien en la ciudades, figura 1.6b, Saint-Paul es un ghetto de raza negra de la ciudad de Minneapolis, donde también aparece el color amarillo para representar a la raza asiática. Es decir, existe una segregación a nivel de formación de ghettos que permanecen cerrados con una mayoría de raza blanca alrededor.

También parece conveniente analizar otros factores propios de la economía (Fig. 1.7) [14] y de la cultura (Fig. 1.8) [15] para entender mejor el fenómeno de la segregación.

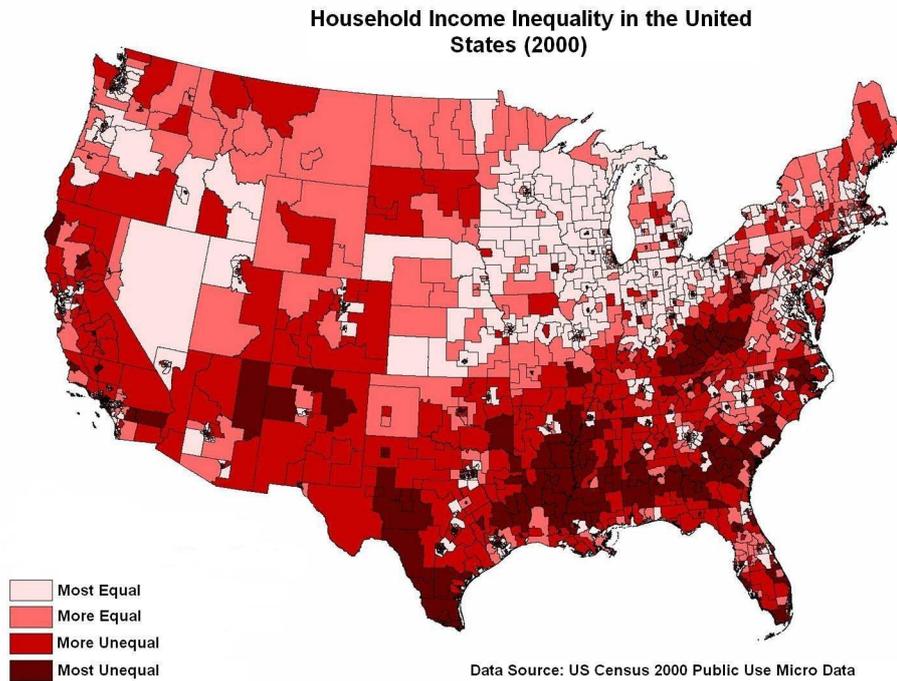


Fig. 1.7.: Mapa de USA sobre desigualdades en ingresos familiares USA(2000) [14].

En este mapa podemos visualizar como se distribuye la riqueza según las rentas familiares. El color blanco significa que los ingresos medios de las familias son parecidos a la renta media del estado. Conforme vamos oscureciendo el tono de rojo, significa que hay más desviación con respecto a la renta media. Es, por lo tanto, un mapa de la desigualdad económica del país.

Lo primero que llama la atención son las zonas en color rojo oscuro en el sureste del país. Si lo comparamos con la figura 4 encontramos que esas zonas se corresponden con los ghettos negros. Es decir, podríamos pensar que la segregación tiene una fuerte motivación económica. Además, en las zona central-derecha hay zonas de color claro que se corresponden, como puede verse en la figura 1.5 con zonas de poca población de color. Es decir, en zonas de cierta bonanza económica, no se forman ghettos de personas de color.

Respecto a la educación tenemos la siguiente figura (Fig. 1.8)[15]:

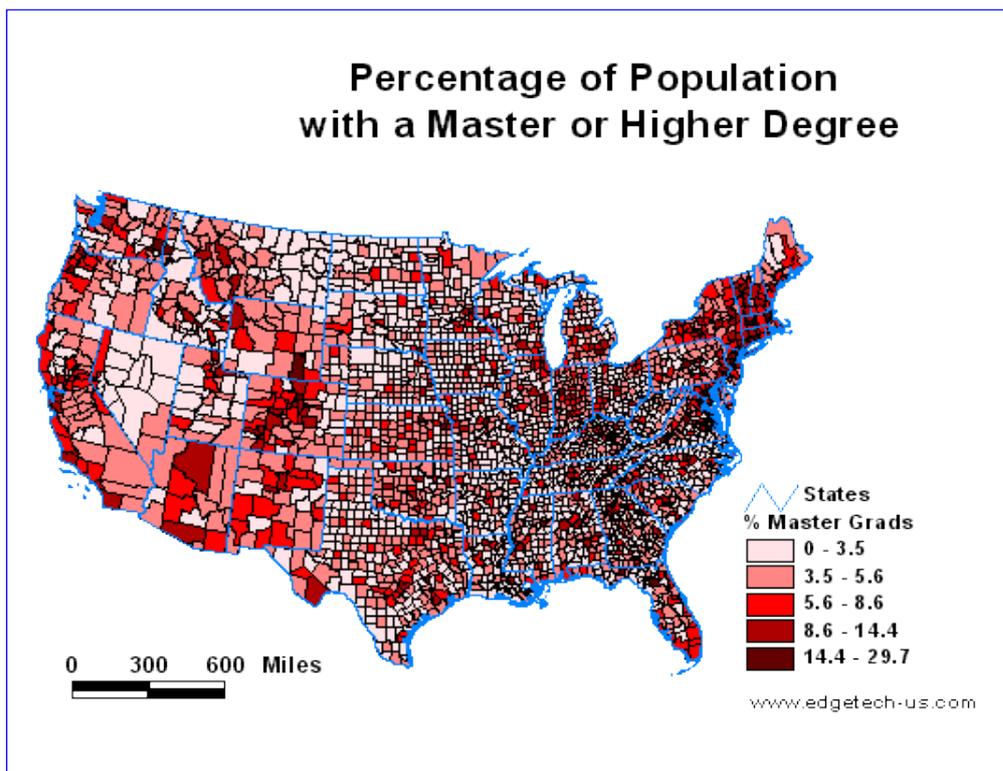


Fig. 1.8.: Mapa de USA sobre población con un nivel de máster o superior en USA(2000) [15].

El conocimiento superior se centra en el norte de la costa este, pero se comprueba una vez más con respecto a la figuras 1.5 y 1.7 que en los ghettos de raza negra (típicos del sureste del país) tampoco hay apenas personas con estudios de máster o doctores. Son personas que viven en grandes barrios, con pocos recursos económicos y que no tienen acceso a la educación superior. Además, hay que resaltar que en la parte central del país, donde se agrupan las personas de raza blanca, tampoco tienen estudios de esta índole. A pesar de que las rentas económicas sean altas, el nivel educacional superior es bajo y la segregación muy pronunciada.

■ Modelo de Schelling

Schelling introdujo en 1970 un modelo que hoy día es considerado paradigmático en la sociofísica [16]. Su éxito se debe a que es uno de los primeros sistemas capaz llegar a resultados complejos partiendo de una interacción simple entre los agentes, es muy fácil de

describir y permite llegar a conclusiones sobre la segregación urbana, lo cual es considerado muy importante en estos días.

Partimos de un modelo similar al modelo de Ising ² [17] bidimensional: espines en una red con estados ± 1 , a los que se les suele asignar colores complementarios: blanco/negro, rojo/azul... Una fracción de los sitios son espacios vacíos, y los agentes de ambos colores se puede mover a estas vacantes. Partiendo de una distribución inicial aleatoria, el proceso es como sigue:

- Se selecciona al azar a un agente.
- Si menos de $1/3$ de los vecinos de un agente (8 vecinos, vecindad de Moore) no pertenecen a su grupo, él está contento. En términos económicos, cuando no está contento, su utilidad es de 0, de lo contrario, su utilidad es 1.
- Se desplaza a los descontentos hacia las vacantes satisfactorias más cercanas.

Observó que en el sistema siempre se alcanza un estado segregado, donde grandes grupos de agentes del mismo color se forman. El punto clave es que la segregación aparece como un fenómeno emergente, en el sentido de que el efecto colectivo es mucho mayor del que cabría esperar aunque los agentes estén contentos (sean útiles) en un vecindario entremezclado.

▪ Modelo de Gauvin et al.

Este modelo [18] es una variante del modelo original: los agentes están satisfechos con su vecindario si está formado por un número de agentes de color contrario (N_d) inferior o igual a una proporción fija de valor T de todos los agentes en el vecindario. Este parámetro T es denominado tolerancia, y puede ser interpretado como el análogo de la temperatura. El otro parámetro de control del modelo será la densidad de vacantes (ρ).

Otro aspecto en el que el modelo difiere del de Schelling es que los agentes se pueden cambiar a cualquier vacante si esta es satisfactoria: esto es el análogo de la difusión de largo alcance en términos de física. Si ninguna vacante es satisfactoria para el agente, el movimiento no se produce.

²Ver apéndice 1

Este proceso se repite hasta que se llega a alcanzar una configuración relativamente estable, pero en esta variante los agentes satisfechos, no sólo los descontentos, pueden moverse. Esto introduce cierta cantidad de ruido (siendo esta proporcional a la tolerancia).

También se debe recalcar que la utilidad global puede decrecer en el tiempo durante el proceso, ya que, aunque el cambio se realice, el agente puede pasar a un vecindario peor que el que tenía en términos de vecinos no deseados.

Solo algunos de los valores de la tolerancia tienen sentido, ya que esta no es una variable continua: $T = 6/8...$ sería el equivalente a tolerar 6 vecinos de un color contrario sobre 8 posibles.

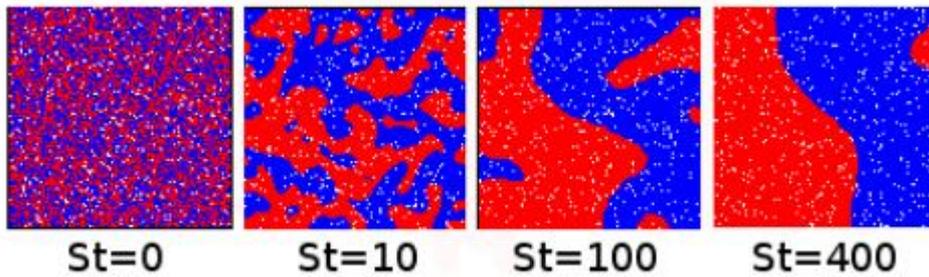


Fig.1.9: Evolución del modelo de Gauvin et al. para $T = 0,5$ y $\rho = 5\%$. 1 St son 10000 iteraciones en la figura.

Además, en este modelo se establece una conexión con los modelos de spin-1. Se demuestra que mantiene conexiones con el modelo Blume-Emery-Griffiths³ (BEG) y con el modelo de Blume-Capel⁴ (BC). El modelo BEG es una variante del modelo de Ising que se concibió para modelar el comportamiento de una mezcla de 3He y 4He [19], mientras que el de BC se puede considerar un caso particular de este último donde las interacciones entre componentes son equivalentes y se desprecia el término cuadrático [20].

Finalmente, muestran un diagrama de fase completo para todo el rango de porcentaje de vacantes y tolerancia, empleando técnicas de clusterización para estudiar la segregación del modelo y de renormalización cuando el porcentaje de vacantes es superior al 50 %.

³Ver apéndice 2

⁴Ver apéndice 3

2. MODELO

Esencialmente, el trabajo realizado amplia y profundiza el modelo [18]. Pretendemos partir de este modelo para analizar variantes del mismo y ver como, a partir de unas reglas simples, se pueden explicar fenómenos tales como la formación de ghettos, el descenso de la satisfacción o utilidad ciudadana con la venida de inmigrantes, dinámica de núcleos de población etc. Además, pretendemos conectarlos con modelos como el de BEG y el de BC.

Comenzamos haciendo una breve reseña de los parámetros del modelo y de las medidas que podemos obtener de él para caracterizar su comportamiento.

2.1. Parámetros de entrada

- Tolerancia: T . La tolerancia de un lugar es el cociente entre el número de vecinos no deseados, N_d , y la cantidad de vecinos que no son vacantes, N_v . Si el color del agente es diferente del de su vecino, este contará como vecino no deseado. Tomaremos el vecindario de Moore⁵, por lo que la tolerancia tendrá valores en el intervalo [0.125-0.875]. El valor de 0.125 viene de tomar en consideración que para valores inferiores el agente no aceptará ningún cambio, por lo que el sistema estará «congelado» y no evolucionará. Para tolerancias superiores a 0.875 el agente acepta todos.
- Densidad de vacantes: ρ . Número de espacios vacantes por cada 100 agentes.
- Tamaño del mallado en cada dimensión: L . En este caso tomaremos como medida $L = 50$, por lo que habrá 2500 elementos en la matriz, entre agentes y huecos.
- Porcentaje inicial de agentes de cada color.

⁵Ocho más cercanos

2.2. Algoritmo

Antes de comenzar con el algoritmo debemos decir que la distribución de los agentes y de las vacantes se realiza al azar, y que las condiciones de contorno son libres (free boundary condition). Además, comentaremos que hemos empleado un generador del tipo KISS⁶ [21] de periodo 10^{27} para asegurarnos de que no existe periodicidad.

Respecto al paso de tiempo utilizado será el paso de Montecarlo: un paso de de este tipo se compone, para nuestro modelo, de 50 x 50 iteraciones simples.

Un agente es útil o estará satisfecho en su vecindario si la tolerancia cumple:

$$T \geq N_d/N_v \quad (1)$$

En general, estará contento si tiene menos vecinos de color contrario al suyo de los que permite el cociente N_d / N_v (número de ocupados). De lo contrario, el agente estará insatisfecho.

Seleccionamos un agente al azar, independientemente de su estado. Le es ofrecida una vacante al azar y se calcula N_d y N_v ; si él la encuentra satisfactoria (cociente menor que tolerancia), el agente se trasladará. Si no, no se moverá. El proceso se repite indefinidamente.

El hecho de que el agente solo «mire» la vacante es un punto interesante, ya que no se alcanzan situaciones estáticas. Siempre tendremos fluctuaciones debidas a los cambios de posición de los agentes, en especial cuando la tolerancia es elevada. Estos efectos se discutirán dentro de la sección 3 de resultados, en especial, en las subsecciones 3.2 y 3.3.

2.3. Medidas empleadas para caracterizar el sistema

▪ Segregación

Aunque la presencia de segregación es fácil de identificar a nivel visual, se hace necesaria una vía analítica para medirla. Esta forma de medir implica realizar un proceso de clustering que ha tenido que ser desarrollado partiendo de cero y que puede ser consultado en el anexo⁷.

⁶Keep It Simple Stupid

⁷Ver apéndice 4

Baste decir que dos agentes del mismo color son considerados como del mismo cluster si forman parte de los cuatros vecinos más cercanos uno del otro. No empleamos por lo tanto la definición de vecindario de Moore, ya que los clusters serían masivos y no permitirían obtener medidas fiables.

Definiremos el número de agentes pertenecientes a un cluster como n_c , y llamaremos S al tamaño promedio de los clusters en una configuración dada. Por lo tanto:

$$S = \sum_c n_c p_c \quad (2)$$

donde $p_c = n_c/N$ es el peso del cluster, $N = L^2(1 - \rho)$ el número de agentes del sistema (no vacantes) y el sumatorio recorre a todos los clusters. Como el tamaño máximo de un cluster es $N/2$, podemos obtener el coeficiente de segregación normalizado (para poblaciones 50-50) a partir de [18]:

$$s = \frac{2}{N^2} \sum_c n_c^2, \quad (3)$$

donde el promedio de este valor una vez el sistema ha alcanzado el equilibrio será definido como $\langle s \rangle$, y nosotros definiremos este valor como coeficiente de segregación.

Uno de los parámetros de entrada es la densidad de vacantes ρ . Cuando este valor es demasiado alto, el proceso de identificación de clusters puede verse alterado: podemos tener zonas con una gran presencia del mismo color, pero el proceso de clusterización puede fallar al definirlos si encuentra vacantes en mitad del cluster. Para solventar ese problema se ha recurrido a un proceso de renormalización que es explicado en detalle en el anexo [6]⁸.

▪ Satisfacción o utilidad

Otra medida interesante es conocer si los agentes están satisfechos o son útiles en su vecindario.

Tal y como expresamos antes, un agente está satisfecho si se cumple la condición (1). Hallaremos la densidad de agentes satisfechos como la suma de todos los agentes satisfechos de un tipo dado entre el número total de agentes de esa clase.

⁸Ver apéndice 5

Estudio más recientes han tomado esta satisfacción a partir de la medida $T - N_d/N_v$, de manera que esta variable toma valores continuos [22]. Si el agente no está satisfecho, la utilidad que se le asigna sigue siendo nula. Después, la utilidad total se divide entre el número de agentes que se han tenido en cuenta en el sumatorio.

▪ Energía

La energía de este sistema viene descrita por la expresión:

$$E_S = - \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - (2T - 1) \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 \quad (4)$$

donde los agentes toman valores $S_i = \pm 1$, según el color o valor del spin que se le asigne, y $S_i = 0$ en el caso de las vacantes. Consideraremos como vecinos más cercanos a los ocho adyacentes a un agente dado. Se puede demostrar que esta energía coincide con la del modelo BEG si consideramos que el número de agentes y huecos permanece constante[19].

Si centramos nuestra atención en el segundo sumando de (4), podemos observar que $\sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2$ es una constante, ya que no se transforman huecos en agentes. Esto hace que $(2T - 1) \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2$ sea un término que depende linealmente de la tolerancia. Así que, para localizar más fácilmente las transiciones de fase, tendremos en cuenta solo el primer sumando, que coincide con la energía de Ising al despreciar las interacciones cuadráticas:

$$E_{BC} = - \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j. \quad (5)$$

Debemos aclarar que a esta energía se le ha puesto el subíndice BC para recordar que es igual a la de Blume Capel en el caso de $T = 1/2$, lo que ha sido empleado para modelar aleaciones metálicas [20]. Además, el hecho de hablar de término Ising cuando el espín puede ser nulo no parecía apropiado. En el caso de (5) los vecinos más cercanos considerados son los cuatro adyacentes.

Si en el modelo hubiésemos negado la posibilidad de movimiento de agentes satisfechos, la energía hubiera tendido a minimizarse y «paralizar» el sistema. Sin embargo, aunque nuestro sistema mantenga esta tendencia, el movimiento de agentes satisfechos está permitido, por lo que aparecerán fluctuaciones, especialmente cuando el valor de la tolerancia sea alto.

Esto hará necesario presentar las medidas con una técnica simple de suavizado, que se basa en tomar los promedios de 100 medidas⁹.

- **Cambios**

Se estudia el porcentaje de cambios no deseados, es decir, en cada iteración cuantos cambios a vacantes se han rechazado. Complementando a este estudio, también se analizan los cambios totales por paso de Montecarlo [23] y por tipo de agente. Se trabajará con el porcentaje normalizado, esto es, las cantidades anteriormente mencionadas deben sumar la unidad.

⁹Ver apéndice 6

3. RESULTADOS

Con respecto al modelo [18] hemos introducido:

- Variación del porcentaje de agentes: ya no está fijo en el 50-50. Además, estas proporciones pueden fijarse al principio del modelo o bien ir variando de manera gradual.
- Uso de una función que describe la tolerancia del sistema en función del tiempo. Esto supone una variación continua de la tolerancia: ya no nos ceñimos a valores discretos y podemos «barrer» el comportamiento del sistema para todo el rango de tolerancia de interés.
- Cambios bruscos de valores de tolerancia, estudiando como se adapta el sistema a una variación del valor de la misma.
- Análisis de la satisfacción de agentes tanto discreta como continua. En el trabajo original solo se presenta una gráfica a este respecto con una tolerancia y densidad de vacantes fijas, y se emplea para mostrar la convergencia del sistema. Aquí analizamos si el porcentaje de agentes influye en el grado de satisfacción de los mismos, y cubrimos todo el rango de tolerancias, entendiendo que es un parámetro de interés social.
- Comportamiento por tipo de agente ante el cambio a vacante: ya no solo interesa si la vacante es rechazada; interesa saber qué tipo de agente está interesado en el cambio.

Estas modificaciones del modelo original nos han permitido obtener los resultados para:

1. Valores de T y ρ discretos. Este apartado servirá para caracterizar los estados del sistema que esperamos encontrar y compararlos con los de [18], lo que servirá para validar el modelo desarrollado.
2. Números de agentes de cada color distintos y evolución continua de la tolerancia. ¿Qué ocurre cuando en el sistema el número de agentes con $S_i = +1$ es distinto que el $S_i = -1$? Este es un caso claramente social: una de los agentes suele estar es minoría.

3. Cambio brusco en la tolerancia del sistema: si tenemos un sistema con una tolerancia relativamente alta o intermedia analizamos lo que ocurre cuando la tolerancia disminuye bruscamente. Implicará el uso de una función de Heavyside.
4. Introducción de agentes de un determinado color de dos formas distintas: escalonada y «brusca». Mientras que el primero atiende a una llegada progresiva y suave, como ha sido el caso de la llegada de inmigrantes asiáticos o de origen sudamericano a España, el segundo responde a una llegada masiva y casi instantánea, como el caso de los refugiados en Grecia. El análogo físico sería imponer un campo magnético externo que hace que algunos espines se giren.

3.1. Resultados para valores de T y ρ discretos

Lo primero que debemos indicar es que el sistema tiene una variedad de comportamientos:

- Para valores bajos de ρ el sistema permanece en un estado mixto. Aunque fuese más satisfactorio para los agentes no se forman clusters. La tolerancia es baja y los espacios vacantes no terminan de convencer a los agentes, ya que soportan muy pocos vecinos no deseados a su alrededor. Podríamos hablar de que el sistema está «congelado», en la distribución aleatoria inicial.

- Cuando el valor de T es intermedio $\sim 0,5$ el sistema cambia de comportamiento: los agentes empiezan a «moverse» ya que la tolerancia empieza a ser mayor y los cambios a los lugares vacantes empiezan a «convencerles». Se forman grandes clusters y la segregación tiene lugar. Lógicamente, esto ocurre para un intervalo de tolerancia, que aumenta con el valor de ρ . La existencia de una vacante en lugar de un agente no deseado hace disminuir el cociente de (1). Por lo tanto, el tener vacantes cerca del hueco favorece el cambio¹⁰.

- Cuando el valor de T es alto los agentes aceptan casi todos los cambios del sistema, por lo que volvemos a un estado mixto donde no ocurre la segregación. Gráficamente, no se observa diferencia entre el estado del sistema a una tolerancia baja (si la distribución inicial es aleatoria) y alta.

¹⁰Se detallará en resultados posteriores

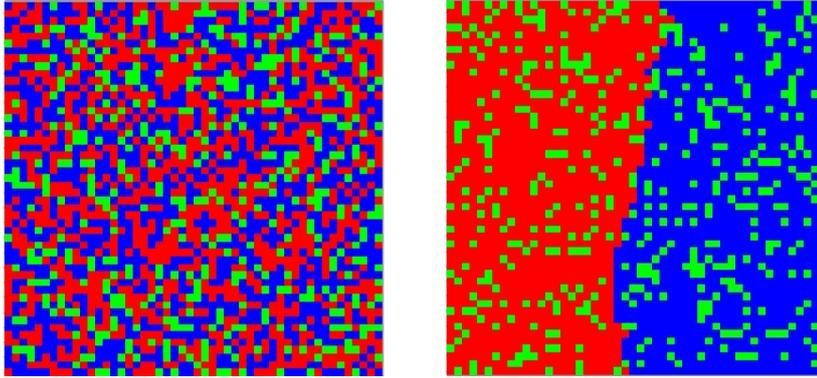


Fig.3.1a y 3.1b: Estado inicial (izqda.) y tras 1000 pasos de Montecarlo con $T = 0,5$ y $\rho = 18\%$.

Como podemos ver en la figura 3.1 partimos de un estado inicial sin segregación, y conforme va transcurriendo el tiempo se van formando dos grandes clusters de diferentes colores, es decir, se han segregado los agentes de ambos colores.

Otra forma de estudiar si el sistema está agrupado en clusters o no, y en qué grado es mediante el coeficiente de segregación (Fig. 3.2).

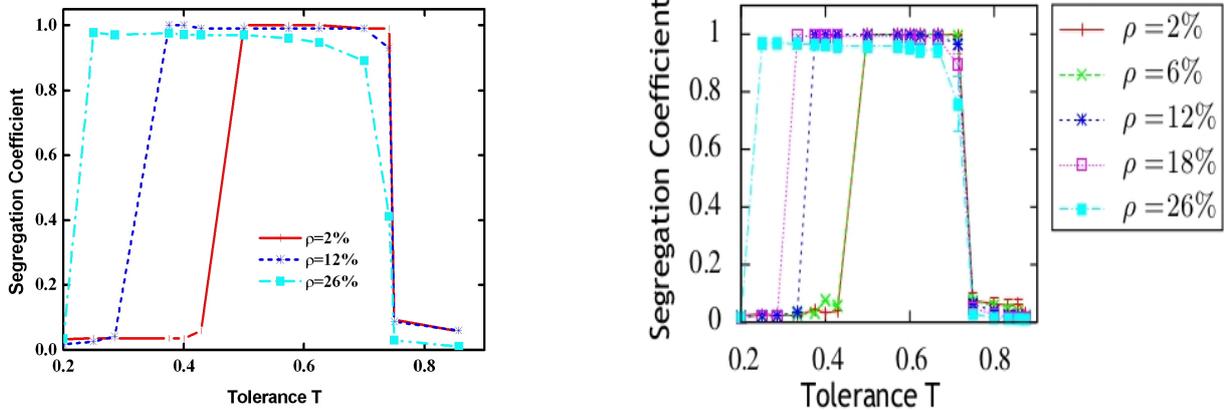


Fig.3.2a. y 3.2b.: Medidas del coeficiente de segregación para variasp. En la izqda. (a) resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b) resultados publicados[18].

En la figura 3.2a y 3.2b se observa que existe un intervalo de T para la que el modelo muestra segregación ($s \sim 1$), mientras que en el resto del intervalo su valor decae hasta

hacerse nulo. Conforme la densidad de vacantes aumenta, el rango de tolerancia para el que existe la segregación también lo hace, por los motivos anteriormente enunciados. Además, los resultados del modelo del TFM y los de [18] son prácticamente idénticos, exceptuando el cálculo para $\rho = 26\%$ y $T = 5/7$ que coincide con un cambio de fase. No es de extrañar que el resultado en este caso varíe, ya que hemos empleado otro algoritmo de clusterización.

En el apartado 2.2 se comentó que una densidad de vacantes altas podría hacer fallar el cálculo $\langle s \rangle$. Como ejemplo vamos a graficarlo para una densidad del 50% sin y con renormalización, comparándolo con [18] (Fig 3.3 y 3.4):

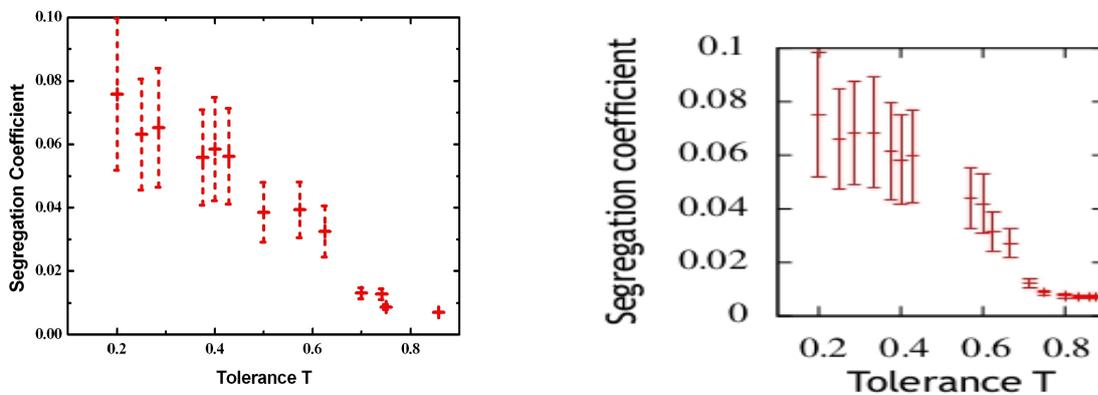


Fig.3.3a y 3.3b: Medidas del coeficiente de segregación $\langle s \rangle$ para $\rho = 50\%$. En la izqda., (a) resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b), resultados de [18].

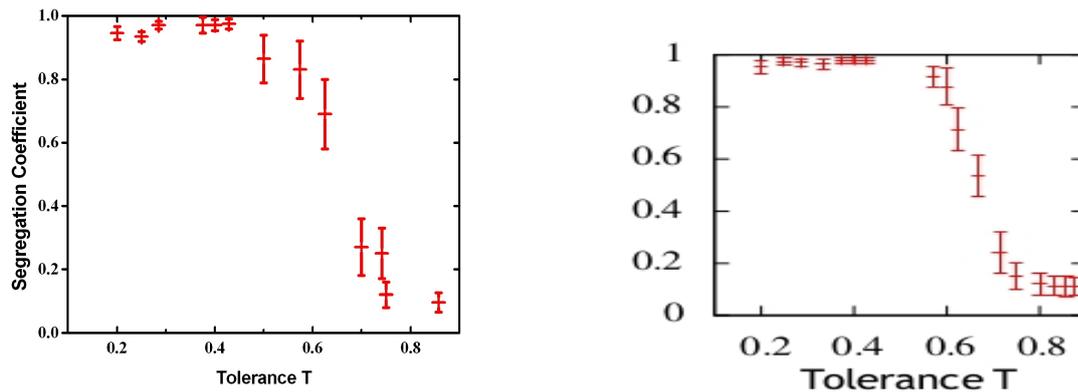


Fig.3.4a y 3.4b.: Medidas del coeficiente de segregación $\langle s \rangle$ para $\rho = 50\%$ tras el proceso de renormalización. En la izqda. (a) resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b) resultados de [18].

Aparte del hecho de que las medidas son de nuevo coincidentes entre a) y b) (Fig 3.3 y 3.4), podemos observar como, cuando el porcentaje de vacantes es muy elevado, $\langle s \rangle$ es muy bajo. Por eso, cuando $\rho \geq 50\%$ renormalizaremos¹¹ para saber si estamos en un estado diluido segregado, con unos clusters grandes pero con un elevado número de huecos en ellos.

También se presenta las gráficas de la energía asociada al modelo BEG (Fig. 3.5a y 3.5b) y al de BC (Fig. 3.6a y 3.6b):

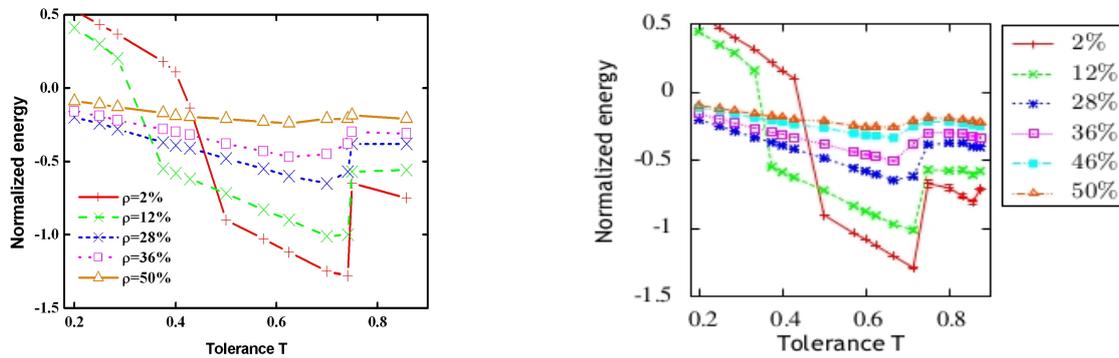


Fig.3.5a y 3.5b: Medidas de energía normalizada BEG para varios ρ . En la izqda. (a), resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b), resultados de [18].

El sistema disminuye su energía cuando está en la fase de segregación (Fig. 3.2). En estos modelos cuando el sistema está ordenado y se forman clusters de gran tamaño, la energía del mismo tiende a hacerse mínima. Sin embargo, cuando el porcentaje de vacantes es elevado el sistema tiene menos posibilidades de minimizar su energía, por eso toma en promedio un valor más próximo a cero.

¹¹Ver apéndice 5

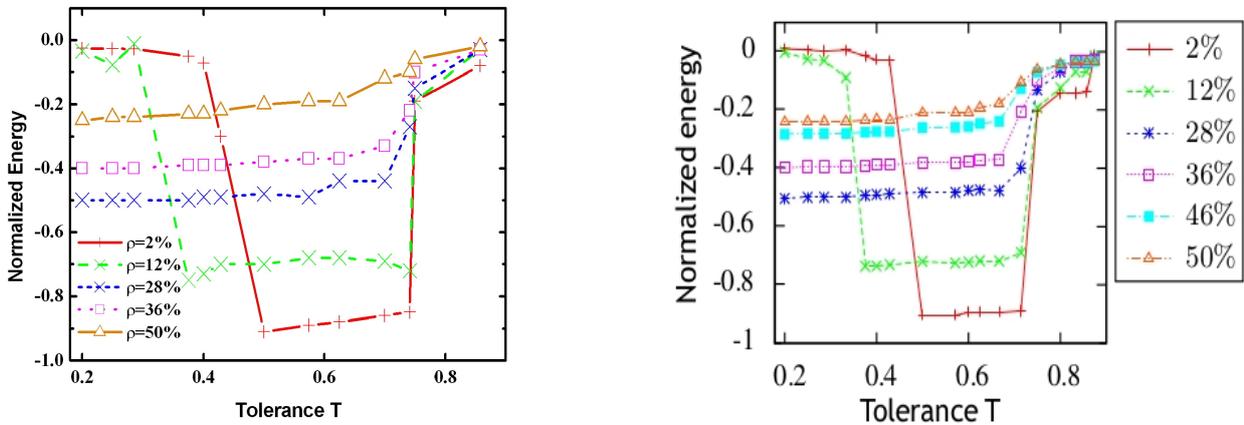


Fig. 3.6a y 3.6b: Medidas de energía normalizada del modelo BC para varios ρ . En la izqda. (a), resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b), resultados de [18].

La figura 3.6 muestra la energía dentro del modelo de BC y su comparación con el trabajo publicado. Aquí se observa más claramente lo anteriormente comentado: la segregación conlleva una disminución de la energía del modelo.

Además, el modelo del TFM reproduce con bastante precisión los resultados de [18]. Existen algunas diferencias entre ambos, en especial para $\rho = 2\%$, donde el «plateau» inferior parece más inclinado en nuestro modelo. Estas diferencias pueden deberse al elevado número de iteraciones necesarios para hallar el valor de la energía en ese trabajo (30000 MC steps tras equilibrio), lo que era un coste computacional muy elevado.

Por último, para cerrar los resultados del modelo, se ha estudiado como evoluciona la densidad de agentes satisfechos en el tiempo (Fig 3.7), para unos valores de $T = 0,5$ y $\rho = 50\%$:

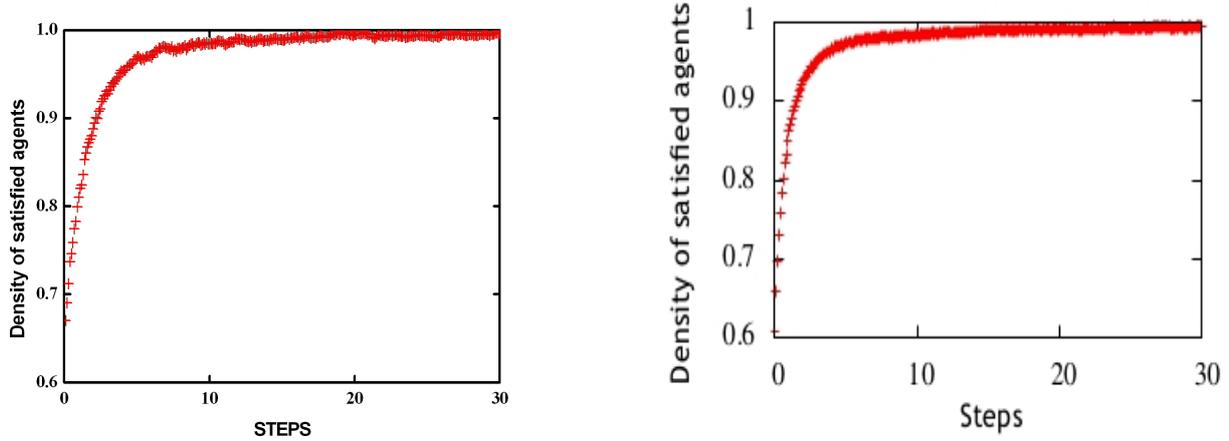


Fig. 3.7a y 3.7b: Densidad de agentes satisfechos frente al tiempo (MC steps). En la izqda. (a) resultados del modelo desarrollado, a la derecha (b) resultados de [18].

Esta magnitud es una buena medida de la convergencia del sistema hacia su estado estacionario, en la que la fracción de estos agentes es prácticamente constante. Como vemos, bajo las condiciones de la figura 3.7, se alcanza muy rápidamente un valor que indica que casi todos los agentes del sistema se encuentran satisfechos.

3.2. Porcentaje de agentes de cada color distintos y evolución continua de la tolerancia

El hecho de introducir una tolerancia continua en el modelo nos va a permitir hallar todos los valores del apartado anterior de una forma más eficaz, a la misma vez que nos va a indicar que ocurre en un sistema cuando vamos variando poco a poco la tolerancia. No obstante, observaremos como los saltos son discretos, ya que (1) lo es.

La tolerancia aumenta de la forma $T \sim \tanh(t)$ donde t es el tiempo en paso de Montecarlo. Cada 100 pasos incrementaremos el argumento de la función en 0.02. También ajustaremos la función para que los valores de tolerancia evaluados queden en el intervalo [0.1-0.9]. Por debajo del valor 0.1 el sistema se encuentra totalmente «estático», a ningún agente le convence el cambio a una vacante, ya que el valor más bajo que tiene sentido es 1.25 (1 vecino de cada 8 es no deseado). A partir del límite superior de 0.875 (7 vecinos de cada 8 son no deseados), el agente acepta todos los cambios en los que interviene.

Comenzaremos comparando que ocurre entre un modelo con un porcentaje de rojos y azules del 50 %-50 % primero, y después del 70 %-30 %. Se ha elegido este porcentaje ya que uno de los diferentes tipos de población suele ser una minoría étnica (ver figura 1.5). Para ver como cambia el comportamiento del sistema al variar el porcentaje de vacantes, primero, trabajaremos con un $\rho = 14\%$. Tras esto, compararemos, con un $\rho = 2\%$. Debemos reseñar que el porcentaje de vacantes se mantiene bajo para dar idea de ciudad densamente poblada, que es como suelen estarlo en la actualidad.

- **Comparativa de población 50-50 y 70-30 para $\rho = 14\%$.**

Para la energía se ha tomado la del modelo de Blume-Capel. Los resultados alcanzados se muestran en la figura (3.8):

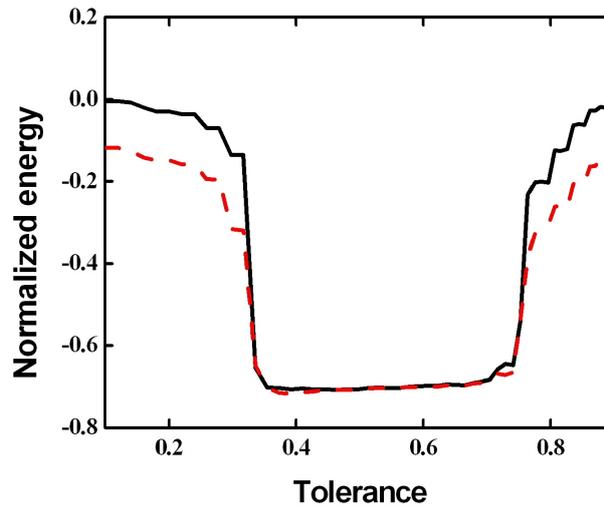


Fig.3.8: Energía de BC frente a T para $\rho = 14\%$ y porcentajes de población 50-50 (negro) y 70-30 (rojo discontinuo).

Visto de izquierda a derecha, la energía de ambos sistemas desciende al aumentar la tolerancia. De hecho, alcanza el mismo «plateau» a partir de $T \sim 0,37$, de valor aproximado $E \sim -0,7$, y después aumenta bruscamente en $T \sim 0,75$. Como el «plateau» alcanzado indica que el sistema se encuentra segregado, el valor mínimo de la energía, una vez se ha

alcanzado la segregación, se encuentra determinado por el número de vacantes del sistema. Como ambos tiene el porcentaje de $\rho = 14\%$, ambos alcanzan el mismo mínimo.

No obstante, vemos que la energía del sistema 70-30 es menor siempre. La respuesta es sencilla: como hay un porcentaje de rojos mayor (70 %) el sistema ya se encuentra parcialmente ordenado. Este sistema se podría asociar en su inicio con un «mar de rojos (70 %)» con algunos azules (30 %), de ahí que la energía no tenga un valor nulo al comienzo. Este hecho queda refrendado en el coeficiente de segregación (Fig 3.9):

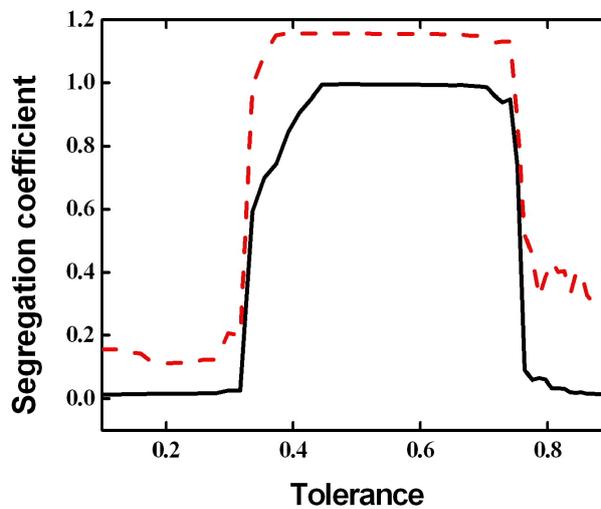


Fig. 3.9: Coeficiente de segregación frente a T para $\rho = 14\%$ y porcentajes de población 50-50 (negro) y 70-30 (rojo discontinuo).

Lo primero que llama la atención es que la línea roja discontinua supera el valor de la unidad en el «plateau»: esto es debido a que la normalización se realizó para porcentajes del 50 % (3). En cuanto al comportamiento con la tolerancia es idéntico: el cambio de porcentajes de la composición de la población no varía el comportamiento del sistema con la tolerancia. El efecto de segregación solo depende de la tolerancia del sistema, lo que es lógico teniendo en cuenta que las condiciones del cambio de sitio de un agente a un espacio vacante solo depende de la misma.

Además se observa que aunque la tolerancia sea muy baja, ya existe el efecto de segregación por ser superior la población de rojos, en este caso, frente a la de azules.

También se quiso evaluar que pasaba con la satisfacción o utilidad del sistema para cada componente del mismo, tanto en su vertiente discreta, como en la continua. Comenzamos por presentar la gráfica de la utilidad discreta (Fig 3.10). Esta era calculada como $+1$, si el agente verifica que $T \geq \text{Vecinos no deseados} / \text{Vecinos totales}$, y 0 en caso contrario. Después, se normaliza dividiendo entre el número de agentes para los que se ha evaluado la utilidad.

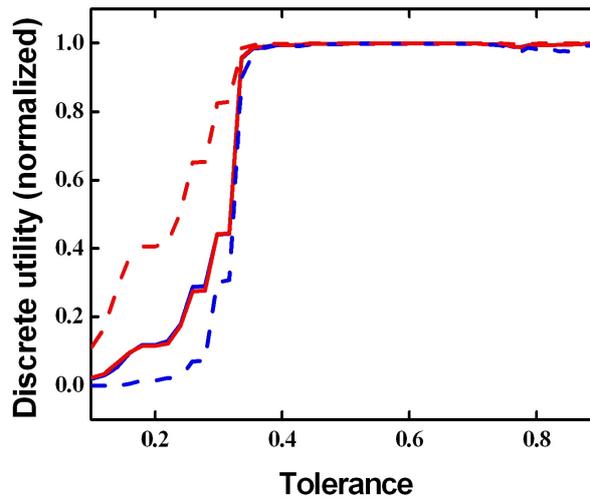


Fig.3.10: Utilidad discreta frente a tolerancia para $\rho = 14\%$. Las líneas continuas son del modelo 50-50 y las discontinuas del 70-30. Cada tipo de agente está representado por su propio color.

Partimos del sistema 50-50, representado por las líneas sólidas. Como vemos ambas especies solapan su satisfacción, y vemos como esta crece poco a poco al principio, para luego dispararse en $T \sim 0,37$, que es cuando ocurría la segregación. Es lógico, ya que decíamos que cuando un agente tenía menos agentes no deseados alrededor de los que permitía su tolerancia, estaba satisfecho ($+1$ de utilidad). Para $T \sim 0,75$ la segregación deja de ocurrir (Fig 3.9) y el agente sigue estando satisfecho, porque la tolerancia es muy elevada. Ya le da «igual» el tipo de agente a su alrededor.

Para la evaluación de la satisfacción continua tenemos el gráfico (Fig. 3.11). Para calcular la satisfacción continua cada agente útil aporta la cantidad $T - \text{Vecinos no deseados} / \text{Vecinos totales}$. Si el agente no es útil, se considera que no aporta nada. Después, se normaliza dividiendo entre el número de agentes para los que se ha evaluado la utilidad:

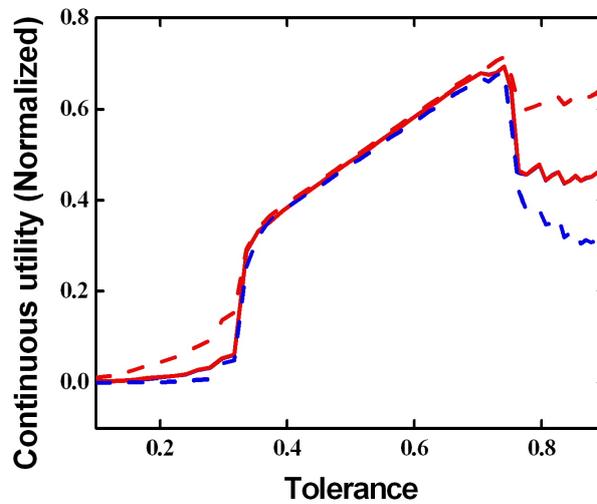


Fig.3.11: Utilidad continua frente a tolerancia para $\rho = 14\%$. Las líneas continuas son del modelo 50-50 y las discontinuas del 70-30. Cada tipo de agente está representado por su propio color.

Para el porcentaje del 50-50 las líneas se solapan, ya que no hay ningún tipo de agente predominante, por lo que la satisfacción de los dos evoluciona a la par. Sin embargo, la función de satisfacción continua no solo atiende a que el agente esté satisfecho o no, sino que va evaluando el número de agentes no deseados que tiene alrededor con respecto a los que tolera. Por eso, aunque la utilidad crece abruptamente en $T \sim 0,37$, sigue aumentando: aunque los agentes ya estén segregados, y rodeados de los de su color mayoritariamente, la diferencia $T - N_d/N_v$ sigue creciendo. Finalmente, cuando la tolerancia ha aumentado tanto que el sistema pierde la segregación, la utilidad continua de ambos agentes disminuye. Este valor se da alrededor de $T \sim 0,8$. Vemos que aparecen oscilaciones, debidas, como ya se explicó, a que los agentes satisfechos siguen aceptando nuevas vacantes aunque su utilidad disminuya.

Aún así, vemos que la satisfacción de la población de mayor porcentaje siempre es superior o igual que la de la minoría, lo cual es un hecho social comprobado. Además, el punto en el que ambas son iguales es el rango de temperaturas en el que ocurre la formación de clusters o «ghettos». Lo que implica que dada una tolerancia intermedia la sociedad forma ghettos para aumentar su satisfacción. Cuanto más tolerantes son dentro de estos barrios, mayor es su utilidad.

Por último, también resulta interesante saber qué ocurre con los cambios de lugar en el sistema. Para ello mostramos tres líneas en la figura (3.12) para cada tipo de población. La línea negra sólida muestra el porcentaje de cambios rechazados, cambios no deseados, por los agentes de los dos colores para la población del 50-50. La línea sólida azul y la roja muestran el porcentaje de cambios que sí realizan los agentes de ese color en el sistema 50-50. Las líneas discontinuas tienen un significado análogo, pero son del sistema 70-30.

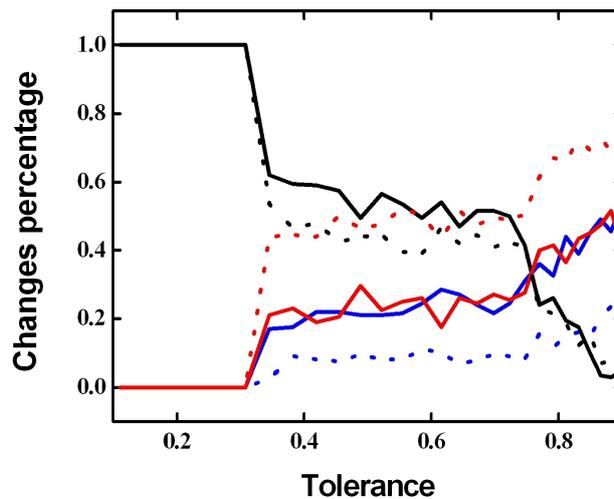


Fig.3.12: Porcentaje de cambios normalizado frente a tolerancia para $\rho = 14\%$. Las líneas continuas son para una población 50-50 y las discontinuas para una población 70-30. Cada tipo de agente está representado por su propio color. Las líneas negras indican los cambios rechazados por los agentes.

Comenzamos analizando la figura (3.12) por los cambios no deseados para la población del 50-50 (línea negra sólida). Cuando la tolerancia es inferior a $T \sim 0,37$ casi el 100 % de los cambios ofrecidos son rechazados por los dos tipos de agente, por ser baja la tolerancia. Posteriormente, cuando comienza la segregación, $T > 0,37$, alrededor del 50 % de los cambios (0.5) son rechazados y, finalmente, cuando $T \geq 0,7$, son aceptados prácticamente en su totalidad. De ahí que la línea negra se ubique por debajo de 0.1.

Lógicamente, las líneas de colores, que son los cambios aceptados por los agentes de distinto color, mostrarán un comportamiento complementario a la línea de cambios rechazados. De hecho, en todo el gráfico se puede ver que por normalización, la suma del valor de las 3 líneas da 1 en cada valor de T .

Llama la atención como las líneas continuas rojas y azules (población 50-50) se superponen, mientras que las punteadas (población 70-30) se separan rápidamente. Las líneas continuas se solapan porque en el sistema los agentes están en la misma proporción; de ahí que a la hora de aceptar/rechazar vacantes el color no importe. Sin embargo, la línea de color rojo punteada es muy superior a la azul punteada, ya que existen más agentes rojos; es normal que los cambios que se producen provengan mayoritariamente de ellos. No obstante, la proporción entre los cambios aceptados por rojos y azules es mayor que una relación 70-30. Esto es debido a que al haber más agentes rojos, estos encuentran más fácilmente una vecindad con muchos agentes rojos y poco azules, por lo que aceptan más fácilmente los cambios. Los azules tienen la situación opuesta: intervienen en cambios con una proporción de 30-70 y la vacante ofertada suele estar rodeada de agentes no deseados, por lo que no suelen cambiar de sitio.

■ **Comparativa de población 70-30 para $\rho = 14\%$ y $\rho = 2\%$.**

Comenzamos por los resultados de la energía (Fig. 3.13), mostrando la línea roja discontinua el valor para $\rho = 14\%$, al igual que en el apartado anterior y la línea negra sólida el valor $\rho = 2\%$:

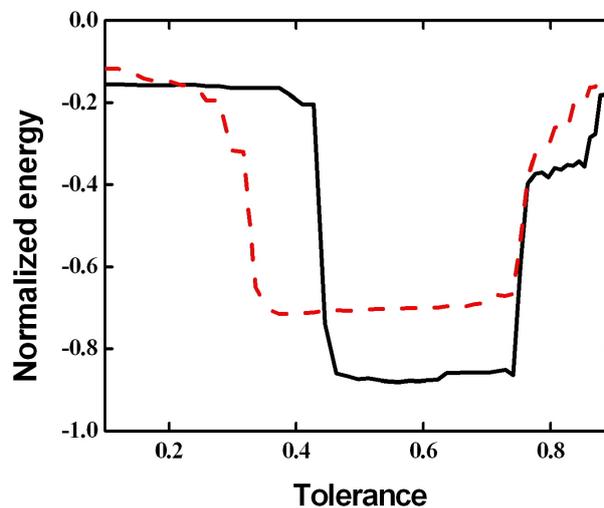


Fig. 3.13: Energía de BC frente a T para $\rho = 14\%$ (roja discontinua) y $\rho = 2\%$ (negra sólida) y poblaciones del 70-30.

Estos resultados recuerdan a los obtenidos en la Fig. 3.6, donde se constató que la energía depende del número de vacantes: cuantas más vacantes, el sistema se ordena con una menor tolerancia, disminuyendo así su energía. Por eso, el descenso brusco de la energía se produce para el sistema de $\rho = 14\%$ en $T \sim 0,37$ y para el sistema de $\rho = 2\%$ en $T \sim 0,45$. Sin embargo, el mínimo del «plateau» de $\rho = 2\%$ es inferior: cuanto menos vacantes tiene el sistema, tiene más agentes y por lo tanto más energía disponible para ser minimizada.

Ambos sistemas muestran un aumento de la energía para $T \sim 0,77$ tal y como ocurría con los sistemas de tolerancias discretas. Esto indicaba que la tolerancia era tan elevada que desaparecían los clusters.

Respecto al coeficiente de segregación (Fig. 3.9):

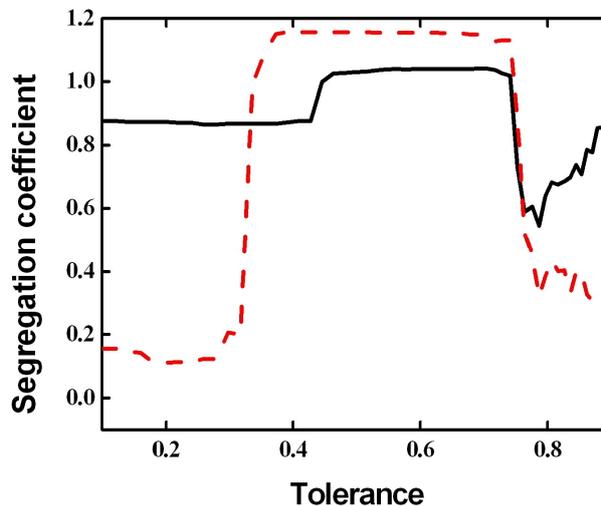


Fig.3.14: Coeficiente de segregación frente a T para $\rho = 14\%$ (roja discontinua) y $\rho = 2\%$ (negra sólida) y porcentajes de población 70-30.

Lo primero que llama la atención es el elevado valor del coeficiente de segregación para un elevado rango de tolerancias (línea negra sólida, $\rho = 2\%$). Esto se explica debido a un doble motivo: primero, el elevado porcentaje de agentes rojos que hace que exista segregación desde comienzo, y segundo, apenas hay vacantes. Este sistema tiene el mínimo del coeficiente de segregación en $T \sim 0,8$. Por lo tanto, podemos concluir que en un sistema con la población de agentes del 70-30, cuanto menor es el número de vacantes, más acusada la segregación.

Gráficamente, podemos ver el sistema en el estado de $T = 0,2$ (3.15a) y en el de $T=0.6$ (3.15b) para $\rho = 2\%$:

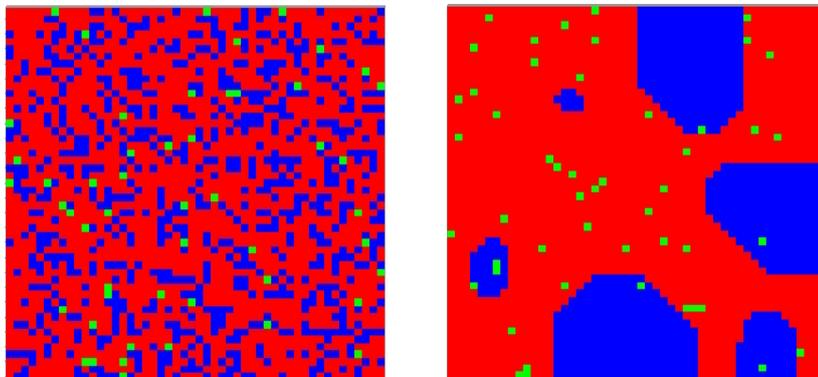


Fig.3.15a y 3.15b: Estado del sistema para $T=0.2$ (izqda.) y $T = 0,6$ ($\rho = 2\%$) y poblaciones 70-30.

Se puede observar como en la figura de la derecha se forman ghettos como los de la figura 1.5, correspondiente a Minneapolis o cualquier ciudad con una minoría segregada, ya sea por etnia, economía o religión.

Sobre la utilidad muestro las siguientes figuras, tanto en su forma discreta (Fig. 3.16) como continua (Fig. 3.17).

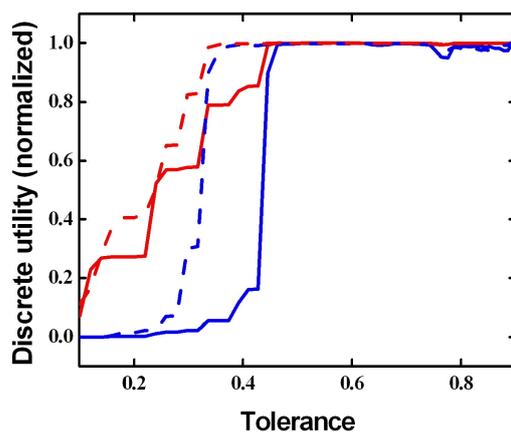


Fig.3.16: Utilidad discreta para población 70-30, $\rho = 2\%$ (continua) y $\rho = 14\%$ (discontinua). Cada tipo de agente está representado por su propio color.

Al haber menos vacantes (líneas sólidas) la tolerancia del sistema debe ser mayor para que los agentes del sistema sea útiles. Como ya no hay tantas vacantes disponibles como con $\rho = 14\%$, cualquier agente tiene en promedio más agentes a su alrededor.

Veamos que ocurre con solo un cambio de agente de un color por una vacante: sea un hueco rodeado, para un agente dado, de 5 vecinos no deseados y 3 deseados. Esto da un valor de $5/8=0.625$. Es decir, nuestra tolerancia debería tener, este valor por lo menos, para aceptar el cambio. Cambiemos un agente no deseado por una vacante: $4/7=0.57$. Es decir, tener vacantes favorece los cambios, y al cambiarse, se aumenta o iguala la utilidad (discreta). O lo que es mismo, debo aumentar la tolerancia, con pocas vacantes para que los agentes sean útiles.

Además, vemos en la figura 3.16 como los agentes que conforman la mayoría siempre son más útiles que los de la minoría (líneas rojas se elevan para una tolerancia menor que azules).

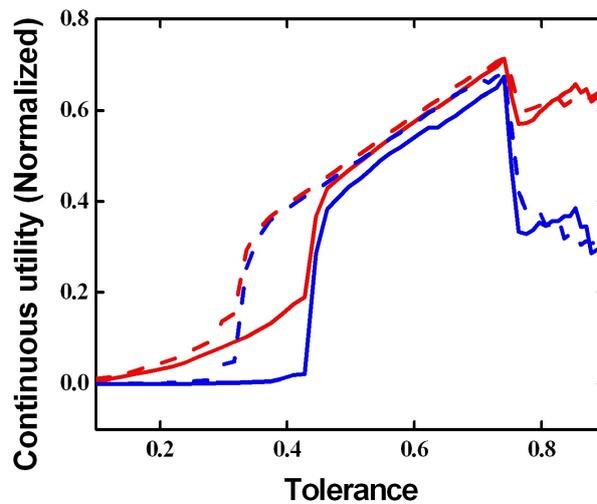


Fig.3.17: Utilidad continua para población 70-30, $\rho = 2\%$ (continua) y $\rho = 14\%$ (discontinua). Cada tipo de agente está representado por su propio color

A partir de la figura 3.17 se comprueba que la existencia de pocas vacantes hace la utilidad continua de ambas se separe: ya no se solapan tanto como en el caso de $\rho = 14\%$. Además, por los motivos explicados anteriormente (Fig. 3.15), la utilidad para $\rho = 2\%$

aumenta bruscamente alrededor de $T \sim 0,45$ lo que corresponde al sistema segregado. Para $T \sim 0,75$, se muestra que la utilidad de los agentes del 70 % es mayor que la de los agentes del 30 %, aunque la tolerancia del sistema sea elevada.

Llama la atención en las dos figuras anteriores como en la utilidad discreta (Fig. 3.16) la satisfacción de ambos tipos de agentes aparece diferenciada desde tolerancias bajas e intermedias y se solapan al final. Mientras tanto, la utilidad continua juega el rol contrario (Fig. 3.17): se separa según el color del agente con tolerancias elevadas y se solapa en tolerancias bajas e intermedias.

El apartado se dará por finalizado mostrando la Fig 3.18, que es análoga a la Fig. 3.12, pero estando asociadas las líneas sólidas a $\rho = 2\%$ y las punteadas a $\rho = 14\%$.

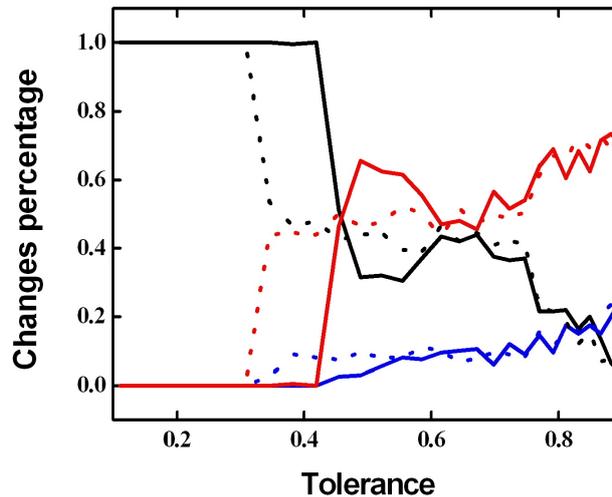


Fig.3.18: Porcentaje de cambios normalizado frente a tolerancia para población 70-30. Las líneas continuas indican $\rho = 2\%$ y las punteadas $\rho = 14\%$. Cada tipo de agente está representado por su propio color. La línea negra indica los cambios rechazados por los agentes.

Si nos fijamos en las líneas sólidas vemos de otra forma alternativa lo que hemos constatado en apartados anteriores: los cambios para el sistema con $\rho = 2\%$ tienen lugar para valores de tolerancia mayores que para el sistema $\rho = 14\%$, por los motivos anteriormente explicados. Llama la atención que para $T \geq 0,75$ el porcentaje de cambios de agentes rojos y azules para distinto números de vacantes se solape, lo cual sin duda, indica que los agentes

tienen un valor de tolerancia tan elevado que aceptan la mayoría de cambios, dando igual el porcentaje de vacantes en el sistema. Aunque esto se dará más pronunciadamente sobre los agentes rojos, que están en mayoría.

3.3. Cambio brusco en la tolerancia del sistema

Otro caso que nos llama la atención es el propiciado dado por una noticia, evento, movimiento económico o religioso que hace que aumente la intolerancia del sistema de una forma brusca. De este tipo de sucesos está plagado nuestra sociedad, debido, sobre todo, a la presencia masiva de medios de comunicación y redes sociales que transmiten este tipo de noticias o ideales.

- **Caso de $T = 0,75$ que desciende a $T = 0,5$ y caso de $T = 0,5$ que desciende a $T = 0,25$ ($\rho = 2\%$): formación de «ghettos» y «zonas cero».**

A continuación, vemos como el cambio brusco de la tolerancia del sistema, modelado como una función de heavyside, afecta a todas las magnitudes y medidas del mismo: energía, coeficiente de segregación... Esto ocurre para el caso en que una población tolerante sufre un bajón a un estado intermedio, de $T = 0,75$ a $T = 0,5$ (línea roja discontinua), y para una población que pasa de tener una tolerancia intermedia, $T = 0,5$, a muy poca $T = 0,25$ (línea sólida negra). Ambos cambios en la tolerancia ocurren durante 2000 pasos, comenzando en $t=2000$ pasos y acabando en $t=4000$ pasos.

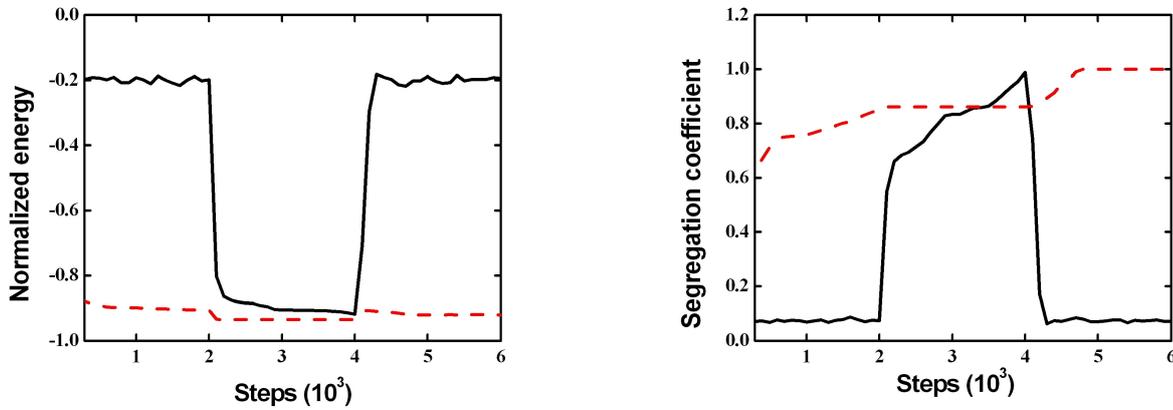


Fig. 3.18a y 3.18b: Energía normalizada (izda. a) y coeficiente de segregación (dcha. b) para población con $\rho = 2\%$. La línea negra sólida es de un sistema que pasa de $T=0.75$ a $T=0.5$, y la roja discontinua para $T=0.5$ a $T=0.25$. El descenso brusco en la tolerancia empieza en $t=2000$ pasos y acaba en $t=4000$ pasos.

El cambio repentino en los valores de la figura 3.18 se debe al cambio de tolerancia en $t=2000$ pasos. Como vemos en la figura 3.18a, para la línea negra la energía tiende a ser constante ($\sim -0,2$), excepto cuando actúa la función de Heavyside, que hace descender su valor. En esos momentos la energía se minimiza abruptamente, porque el sistema pasa de estar sin segregación, a formar clusters (Fig. 3.18b). Como vemos en esa figura, el coeficiente de segregación aumenta con el transcurrir del tiempo entre $t=2000$ pasos y $t=4000$ pasos, ya que el sistema sigue aumentando el tamaño de los clusters. El cambio es tan brusco que el sistema no tiene tiempo de adaptarse instantáneamente en $t=2000$ pasos, de ahí que vaya aumentando.

Evidentemente, se nos indica en estas dos gráficas que el sistema, cuyo valor era de $T = 0,75$ al principio, «mezclado» ha pasado a segregarse rápidamente en cuanto se ha impuesto $T = 0,5$. Se han formado «ghettos» rápidamente en cuanto ha ocurrido un brusco bajón de la tolerancia social.

Mientras tanto, para la línea roja discontinua en Fig 3.18a, (desde $T = 0,5$ cae hasta $T = 0,25$) la energía es prácticamente constante y muy cercana al mínimo absoluto. Si miramos a la gráfica de la derecha (Fig 3.18b), se nos indica que el sistema se ha sido segregando con el transcurrir del tiempo, pero ya desde casi el principio se habían formado «ghettos» como

corresponde a una situación de $T = 0,5$. Sin embargo, cuando la tolerancia ha disminuido con la función Heavyside, vemos que la energía ha aumentado (3.18a) mientras que el coeficiente de segregación se mantenía constante (3.18b). Para explicar qué ha pasado debemos acudir a la siguiente figura (Fig.3.19):

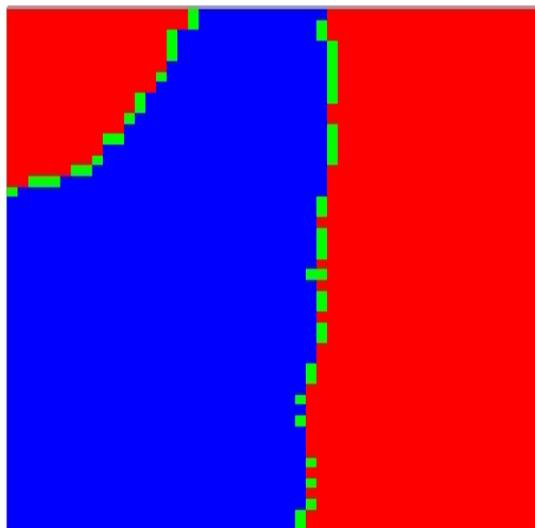


Fig.3.19: Creación de una «zona cero» para $\rho = 2\%$ en sistema que pasa de tener $T = 0,5$ a cambio brusco de $T = 0,25$ durante 2000 pasos.

Lo que ha ocurrido es que se ha generado una zona de frontera donde ningún agente acepta el cambio. Es una zona que, a efectos prácticos recuerda a un sitio destruido, en el que nadie quiere habitar. Por eso la denominaremos «zona cero». Parece que todos los agentes piensan que este sitio está demasiado cerca del otro bando. Por lo tanto, la energía del sistema es mínima, ya que se tiende a aumentar la energía del sistema cuando tenemos mezclados los agentes.

Para comprobar esta teoría graficaremos el porcentaje de cambios normalizado (Fig. 3.20).

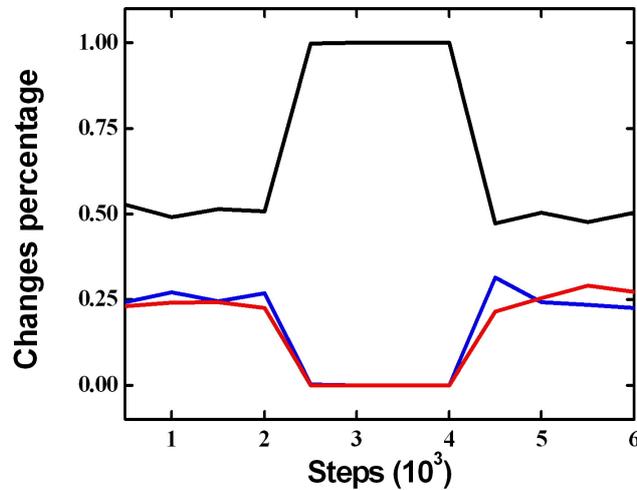


Fig. 3.20: Porcentaje de cambios en un sistema que pasa de tener un valor de $T = 0,5$ a $T = 0,25$ desde los 2000 hasta los 4000 pasos. El porcentaje de vacantes es del 2%. La línea negra son los cambios rechazados, y las de colores los llevados a cabo agentes de dicho color.

Viendo la fig. 3.20 comprobamos nuestra teoría (línea negra de cambios rechazados o no deseados): los agentes rechazan el 50 % de las vacantes cuando la tolerancia es intermedia, pero al descender la tolerancia (desde $t=2000$ hasta $t=4000$ pasos) hasta $T = 0,25$, son rechazadas el 100 % de las vacantes (plateau de la línea negra). Ningún tipo de agente acepta el cambio a la zona cero. Por eso los cambios para los agentes de color rojo y azul (líneas rojas y azules) decaen desde $t=2000$ hasta $t=4000$ hasta el 0 %.

Respecto a la utilidad discreta del sistema, comentar que en todo momento está muy cercana la unidad. Ya que las tolerancias de partida en ambos casos son altas, la utilidad de los agentes también lo es. Cuando llegan los escalones de tolerancia, si el sistema no se segrega, es porque ya lo estaba, de manera que la utilidad sigue siendo muy elevada.

La utilidad continua se discutirá en el siguiente apartado cuando tratemos un número de vacantes diferentes.

- **Caso de $T = 0,5$ que desciende a $T = 0,25$ para $\rho = 2\%$ y $\rho = 14\%$.**

Ahora pretendemos estudiar la relación de esta «zona cero» con el porcentaje de vacantes en el sistema. Mantendremos la línea roja discontinua para el sistema con $\rho = 2\%$ y la línea

negra sólida para el de $\rho = 14\%$:

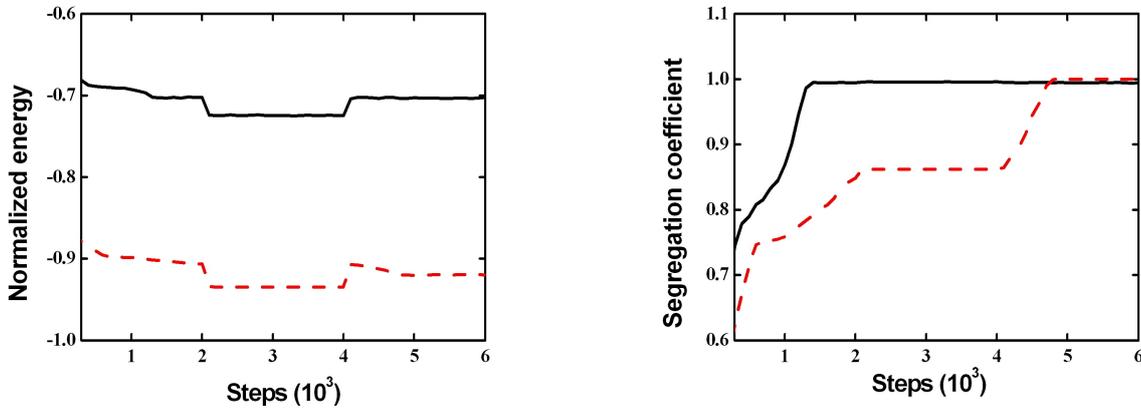


Fig.3.21a y 3.21b: Energía normalizada (izda.) y coeficiente de segregación (dcha.) para población con $\rho = 2\%$ (línea roja discontinua) y $\rho = 14\%$ (línea negra sólida). Sistema que pasa de $T=0.5$ a $T=0.25$ (durante 2000 pasos).

En cuanto a la energía (Fig. 3.21a) el sistema con $\rho = 14\%$ (negra) reproduce el comportamiento del de $\rho = 2\%$, pero dos décimas de energía normalizada por encima de éste. En la figura de la derecha (Fig. 3.21b) ocurre lo que hemos observado en más de un caso: la existencia de un mayor número de vacantes hace que la segregación comience para una menor tolerancia. Además, en esta figura, vemos que para $t \sim 1,5 \cdot 10^3$ pasos el sistema ya está segregado (línea negra), así que cuando disminuye T , lo que impide la movilidad de los agentes, la segregación ya es total.

A continuación estudiamos como afecta sobre la utilidad continua la variación del número de vacantes (Fig. 3.22):

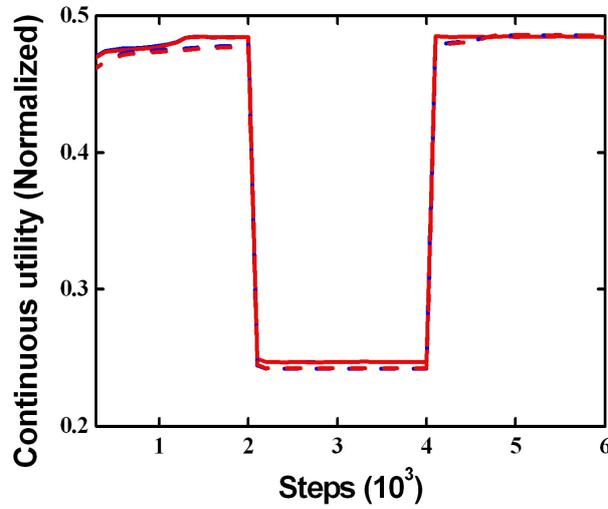


Fig.3.22: Utilidad continua para población con $\rho = 14\%$ (discontinua) y $\rho = 2\%$ (continua).

Como podemos observar en 3.22 debido a la definición de utilidad continua, esta varía débilmente con respecto al número de vacantes. Solo disminuye fuertemente mientras ocurre el bajón de tolerancia. Era de esperar ya que se ha «congelado» un sistema que se encontraba segregado. Como la definición de tolerancia continua se basa en la diferencia $T - N_d/N_v$ y la tolerancia es de 0.25, tendremos que cada agente en promedio contribuye con $0,25 - 0 \approx 0,25$.

3.4. Cambio de color de agentes de forma suave y brusca

En esta apartado abordamos la siguiente cuestión: ¿qué ocurre en el sistema cuando los agentes de un determinado color cambian de bando? Puede entenderse como una retirada de los de un color que favorece la llegada de los de otro. Existen grupos sociales que cuando comprenden que empiezan a estar en minoría, o que la zona es «mala», se marcha, y solo encuentran personas de la mayoría a la que alquilar o traspasar su vivienda.

Para estudiar este efecto cambiaremos de color a 490 agentes rojos. Esto permitirá obtener el caso de 70-30 con $\rho = 2\%$, que ya ha sido estudiado dentro de 3.2. Posteriormente, lo repetiremos con $\rho = 14\%$. Esto hará que el porcentaje, comenzando en 50-50, llegue hasta $\sim 75 - 25$.

Para implementarlo, a partir de $t=2000$ pasos, a cada agente de color rojo, seleccionado al azar, se le dará una probabilidad de cambio de color. Para el cambio suave se ha hecho esta probabilidad menor que 10^{-3} y para el cambio brusco 10^{-1} . Cuando se ha cambiado a 490 agentes rojos a azules, el proceso cesa.

Como tolerancia se ha tomado 0.5, ya que es cuando se forman clusters, que es el caso de mayor interés. Si la sociedad es muy tolerante no existiría segregación, y si su tolerancia es muy baja el sistema quedaría estático.

■ **Cambio de color suave para $\rho = 2\%$ y $\rho = 14\%$ con $T = 0,5$.**

Comenzamos por la energía de BC (Fig. 3.23.), donde la línea roja discontinua es la de $\rho = 2\%$ y la sólida negra es la del $\rho = 14\%$:

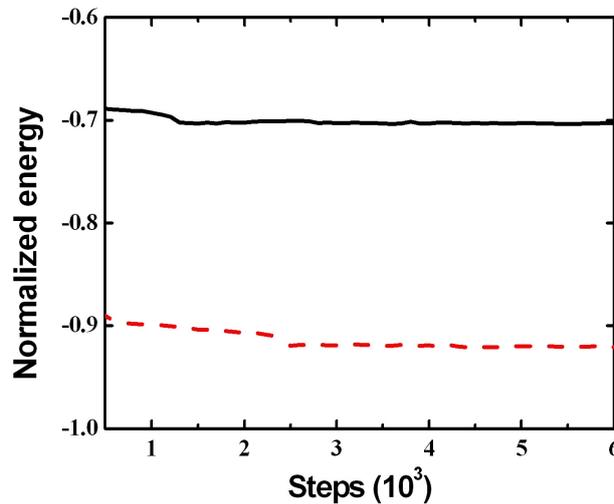


Fig.3.23: Energía BC frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinua) y $\rho = 14\%$ (continua).

Las energías son prácticamente constantes, siendo inferior la del sistema con $\rho = 2\%$. Recordemos que a menor número de vacantes más energía disponible para ser minimizada. Vemos como existe un suave descenso de la energía a partir de $t = 2000$ para las dos líneas, siendo para $\rho = 2\%$ algo más acusado. Esto indica que los recién llegados entran de forma muy gradual, como queríamos conseguir, y que el sistema con menor número de vacantes lo nota más. Para estar seguro de este efecto veamos lo acontecido con el coeficiente de segregación (Fig. 3.24):

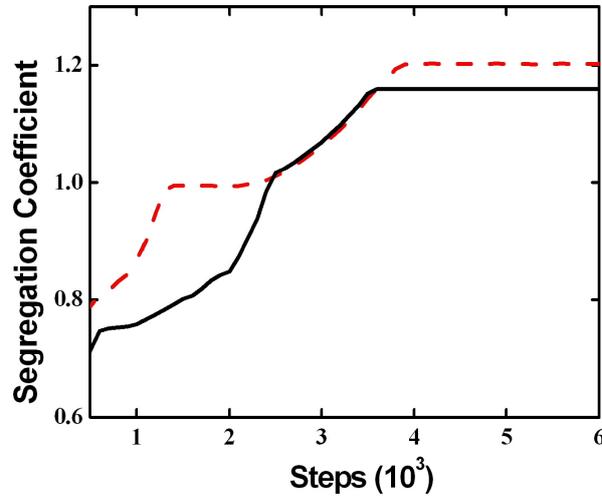


Fig. 3.23: Coeficiente de segregación frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (roja discontinua) y $\rho = 14\%$ (negra continua).

Mientras que para el sistema mayor número de vacantes (línea negra) la absorción de los agentes cambiados y su posterior clusterización se han terminado en aproximadamente ~ 1800 pasos, el sistema con un $\rho = 2\%$ no ha sido capaz de asimilar a estos agentes en ese tiempo, y tarda en integrarlos en los clusters ~ 2000 pasos. El valor del coeficiente de segregación es mayor cuando el sistema tiene menos vacantes, ya que los clusters a formar pueden ser más grandes.

De esto podemos extraer que un sistema con más vacantes absorbe más rápidamente a una mayoría de agentes que cambia de color que uno con menos vacantes. Esto se puede ver como un hecho que favorece la inmigración. A pesar de esto, tenemos que ver que ocurre con la utilidad de la sociedad, tanto la discreta (Fig. 3.24), recordemos que a cada agente útil se le asignaba $+1$ y después se normalizaba al número de agentes de ese tipo, como a la continua (Fig. 3.25), donde la cantidad sumada era la diferencia entre la tolerancia y el cociente N_d/N_v y después se realizaba la misma normalización.

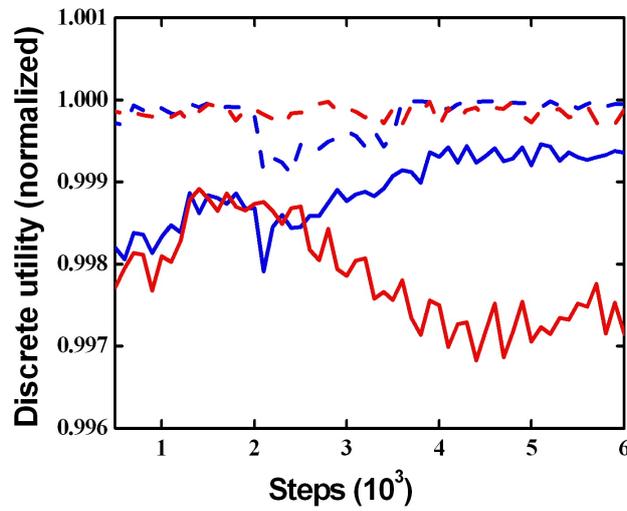


Fig.3.24: Utilidad discreta frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinuas) y $\rho = 14\%$ (continuas). Cada tipo de agente luce su color.

Lo primero que se debe señalar es lo elevado del valor de la utilidad del sistema, que se halla entre 0.996-1.000 gran parte del tiempo. Si nos fijamos en las líneas azules, vemos que, cuando los agentes empiezan a cambiar de color ($t=2000$) se produce un pequeño descenso de su utilidad. El motivo es que los azules aparecen dentro de clusters rojos, ya que eran agentes de este color. No obstante, el sistema vuelve a una utilidad cercana a la unidad rápidamente, tardando algo más el sistema con pocas vacantes. Para $t=6000$ pasos, la utilidad de los agentes rojos es inferior a los azules en ambos casos, siendo mucho más acusada para $\rho = 14\%$. Podemos concluir que cuando los agentes se van cambiando poco a poco la mayoría de elementos siguen estando satisfechos.

El comportamiento oscilatorio de las curvas en la Fig. 3.24 es debido a la escala: si nos fijamos bien estamos empleando las milésimas. Esto hace que casi cualquier cambio de sitio que se produzca puede producir una de esas oscilaciones. En realidad estaban presentes en todas las gráficas de este tipo, pero la escala era muy superior.

Para la utilidad continua (Fig. 3.25) tenemos una valores de aproximadamente la mitad que la figura anterior (Fig. 3.24):

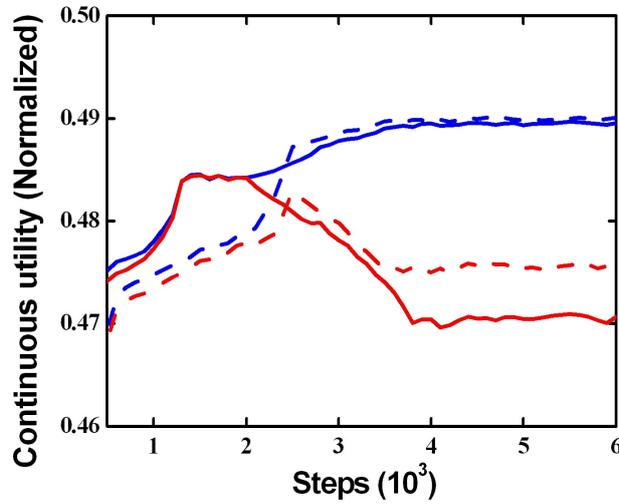


Fig. 3.25: Utilidad continua frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinuas) y $\rho = 14\%$ (continuas). Cada tipo de agente luce su color.

Al comienzo, la satisfacción de los dos tipos de agentes es similar. Sin embargo, cuando empieza a aumentar el número de agentes azules, las líneas comienzan a separarse. En las líneas discontinuas, de (Fig. 3.25) recuperamos un resultado que ya obtuvimos en la Fig. 3.17: para $T=0.5$ los agentes con del sistema con menor número de vacantes tienden a tener un nivel de utilidad continua más cercano entre ellos que los agentes de un sistema con un número de vacantes más elevado. Por eso las líneas continuas de agentes rojos y azules se abren más. Para $t \geq 4000$ pasos, los niveles de utilidad continua permanecen constantes. Al final, los agentes azules están más satisfechos que los rojos.

Hay que destacar que el valor de las líneas de la utilidad continua es prácticamente la mitad que los de la discreta. Este gráfico se entiende con respecto a la Fig. 3.17, donde el valor de utilidad continuo cuando $T = 0,5$ para ambas especies es de aproximadamente $\sim 0,5$. Recordemos que para esta T existe segregación, por lo que el cociente $N_a/N_v \sim 0$. Si tenemos en cuenta $T = 0,5$, la diferencia $0,5 - 0 \approx 0,5$ para cada agente, por lo que las utilidades continuas rondarán ese valor.

■ **Cambio de color brusco para $\rho = 2\%$ y $\rho = 14\%$ con $T = 0,5$.**

Los resultados de este apartado son muy similares a los del apartado anterior (Fig. 3.23-3.25), lo que es lógico ya que las condiciones del sistema son las mismas. Esto hace que el sistema se reponga rápidamente a un cambio brusco de color de sus agentes. Este comportamiento se puede ver en las siguientes figuras (3.26-3.28), con una clave análoga a las anteriores.

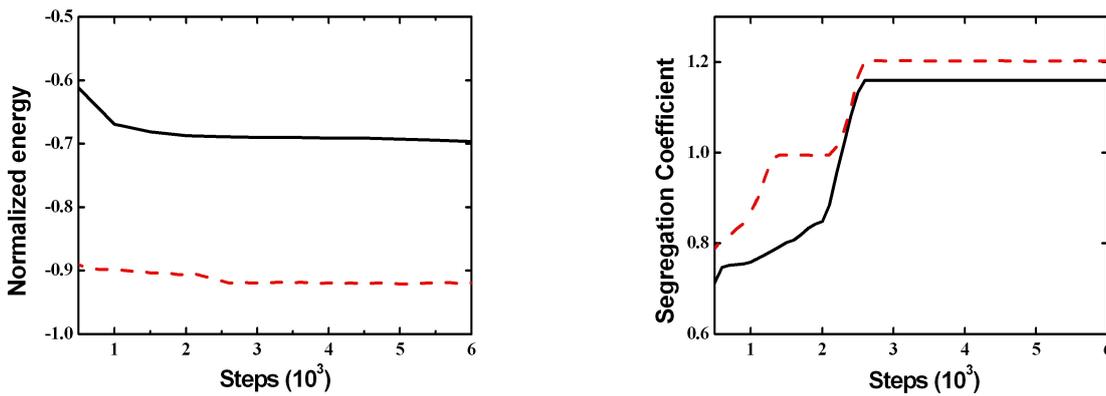


Fig.3.26.a y 3.26.b: Energía BC y coeficiente de segregación frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinua) y $\rho = 14\%$ (continua).

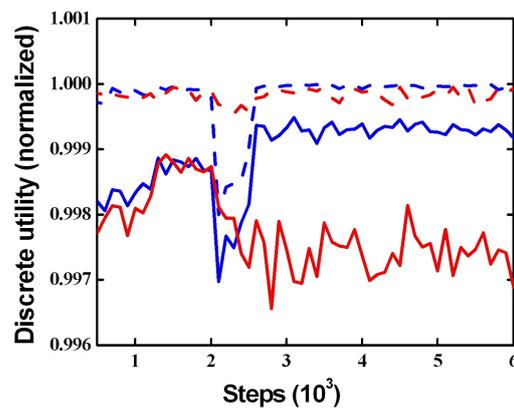


Fig.3.27: Utilidad discreta frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinuas) y $\rho = 14\%$ (continuas). Cada tipo de agente luce su color.

Para explicarnos este comportamiento, tan similar al caso anterior, tenemos que recordar que el sistema para $T = 0,5$ está segregado (Fig. 3.2). Esto hace que los agentes que invierten su color de rojo a azul, cambien rápidamente su posición dentro un cluster rojo a un cluster de su nuevo color. Por definición de paso de Montecarlo, en promedio a cada agente se le ofrece cambiar de sitio una vez, por lo que está reubicación será rápida. Además, conforme va aumentando el número de agentes azules, la probabilidad de que la vacante ofertada sea en un cluster azul es aún mayor. Con lo que aumenta la velocidad de asimilación. Esto ocurre también con la sociedad, si nos mudamos a un sitio donde hay mayoría de nuestro tipo de población, en principio, no deberíamos tener mucho problema para reubicarnos en esta ciudad.

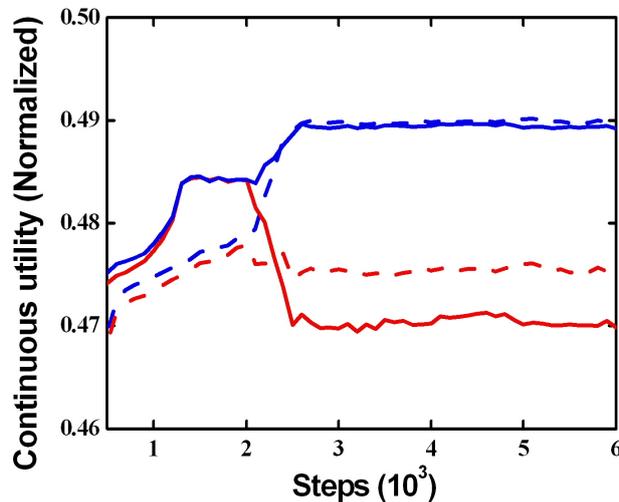


Fig.3.28: Utilidad continua frente a tiempo con $T=0.5$. Para $\rho = 2\%$ (discontinuas) y $\rho = 14\%$ (continuas). Cada tipo de agente luce su color.

En este apartado hemos visto como responde una sociedad a un cambio de tipo de agentes, provocando que un sistema que estaba equilibrado 50-50, pasé a tener un 70-30 ($\rho = 2\%$) ó 75-25 ($\rho = 14\%$). Hemos demostrado que el sistema, en un estado segregado con $T = 0,5$, es capaz de reubicar rápidamente a los agentes cuyo color se ha invertido. Esta rápida reubicación mantiene el grado de utilidad discreta muy elevado, mientras que el grado de utilidad continua es de aproximadamente, la mitad. No hemos encontrado diferencias significativas entre el cambio de color «brusco» y suave de los agentes.

4. CONCLUSIONES

El trabajo realizado se engloba dentro del área de la Sociofísica. Dentro de ella, uno de los campos que despierta más interés es el de la segregación, debido a la problemática social del mismo. En este trabajo se han reproducido y ampliado los resultados del modelo [18], que es uno de los que más impacto ha tenido en el área¹². A éste se le han añadido variantes en cuanto al porcentaje de población, uso de una función cambiante en el tiempo para la tolerancia, estudio de los cambios a vacantes por tipo de agentes y análisis de la satisfacción discreta y continua. Además, también se han empleado medidas como la energía de BC o el coeficiente de segregación. Posteriormente, estas variantes nos han permitido comprobar que ocurriría con la segregación ante diversos eventos que ocurren en la sociedad actual.

Más detalladamente:

- Se ha realizado una revisión bibliográfica sobre sociofísica y segregación, estudiándose los diversos factores que pueden influir en ella. Para ello se ha tomado el ejemplo de USA con datos estadísticos actuales. Se ha encontrado que por lo general, existen «ghettos» de bajo nivel cultural y económico aún cuando a nivel estatal la segregación no parece ser importante.
- Se ha ampliado y profundizado en artículos recientes sobre modelos de segregación. El trabajo ha comenzado reproduciendo los resultados de un trabajo «base» para tolerancias y temperaturas discretas, y porcentajes de población 50-50. Los resultados son coincidentes con los mostrados por ese grupo. Ha sido necesario desarrollar un programa de clusterización, partiendo desde cero, que se puede consultar en el apéndice.
- Posteriormente, como lo que suele estar segregado es una minoría, se ha trabajado con poblaciones de 70-30, y tolerancia que evolucionaban de forma continua. Se ha encontrado una variación en los resultados debida a que al ser el porcentaje de una de ellas más elevado, el sistema ya está ordenado desde el principio. Además, la introducción de la función de utilidad continua ha permitido encontrar que la

¹²57 referencias desde 2009 según Google Scholar Index

población que está en mayoría está más satisfecha que la minoría. Finalmente, se han comparado estos mismos resultados para una ciudad muy densamente poblada ($\rho = 2\%$) y una con algo menos de población ($\rho = 14\%$).

- También se ha trabajado en la situación en que la sociedad tiene un descenso brusco en su tolerancia. Noticias o eventos actuales o nuevas ideas político-religiosas que se expanden rápidamente puede hacer que esto suceda. El modelo reproduce una población tolerante ($T = 0,75$) que pasa a tener durante un tiempo una tolerancia intermedia ($T = 0,5$) y una población con tolerancia intermedia que pasa a tener durante un tiempo una tolerancia baja ($T = 0,25$). Para el primer caso se encuentra que en el sistema se forman «ghettos» similares a los de las ciudades USA. Para el segundo caso se ha introducido el concepto de «zona cero», que es una zona de vacantes que rodea la frontera entre clusters, encontrándose que ningún agente acepta el cambio a esa zona. Esto recuerda el comportamiento en zonas conflictivas (Israel-Palestina, límites entre barrios con índice de criminalidad baja-alta en diversas ciudades, barrios clase baja-alta...).
- Por último se ha abordado la temática actual de la inmigración (ante una llegada escalonada o brusca) que hace que uno de los tipos de agentes quede en mayoría. Esto se ha estudiado con un porcentaje de vacantes de $\rho = 2\%$ y $\rho = 14\%$ y con una tolerancia intermedia, lo que implica la existencia de segregación antes de la llegada. Se ha encontrado que en sistemas con mayor índice de vacantes el cambio del tipo de población de manera escalonada mantiene el nivel de satisfacción más elevado (aunque la población tiene valores de utilidad discreta cercanos a la unidad). En cuanto a la utilidad continua, los agentes que quedan en mayoría acaban siendo más útiles que los de la minoría, siendo este aumento progresivo con el cambio del tipo de población. Finalmente, se ha demostrado que el sistema es capaz de reubicar a los agentes que invierten su color rápidamente, por lo que los resultados no varían demasiado independientemente de la forma en la que se cambie de color a los agentes, ya sea esta brusca o suave.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Galam, S. A Physicist's modelling of Phsico-Social Phenomena. Springer. 2012.
- [2] Axelrod, R. (1997). The dissemination for Culture: A model with local convergence and global polarization. The Journal of Conflict Resolution. Volume 41. Issue 2.
- [3] Klemm K, Eguíluz V., Toral R. y San Miguel M. (2003). Global culture: A noise-induced transition in finite systems. Phys. Rev. E 67. 045101R.
- [4] González-Avellá J.C., Cosenza M.G. y Tucci K. (2006). Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: A model of social dynamics. Phys. Rev. E 73.046119.
- [5] González-Avella J.C., Eguíluz V. M., Cosenza M. G., Klemm K., Herrera J.L., y San Miguel M. (2005). Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. Phys. Rev. E 72. 065102R.
- [6] Galam, S. (2008). A review of Galam models. Computational Physics and Physical Computation. Volume 19. Issue 2. P 409.
- [7] Fernández-Gracia J., Krzysztof S., Ramasco J. J., San Miguel M. y Eguíluz V. M. (2014). Is the Voter Model a model for voters? Phys. Rev. Lett. 112. p 158701.
- [8] Takaguchi T. y Masuda N. (2011). Voter model with non-Poissonian interevent intervals. Phys. Rev. E 84, p 036115.
- [9] Sznajd-Weron K. y Sznaj D. (2005). Who is left, who is right? Physica A 351 Issue 2-4. P 593.
- [10] Timpanaro A. M. y Prado C. (2011). Coexistence of Interacting Opinions in a Generalized Sznajd Model. Phys. Rev. E 84 (2). 027101.
- [11] Bernardes, A. T., Stauffer D. y Kertesz J. (2002). Election Results and de Sznajd model on Barbase Network. Eur. Phys. J. B. 25. Pp 123.

- [12] www.utne.com
- [13] www.coopercenter.org/demographics
- [14] www.visualizingeconomics.com
- [15] www.edgetech-us.com
- [16] Schelling, T.C. (1971). Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*. Vol 1. p 143.
- [17] Kittel C. (2004) *Introduction to Solid State Physics*. NY John Wiley & Sons. 8 edition.
- [18] Gauvin L. , Vannimenus J. y Nadal J.P. (2009). Phase diagram of a Schelling segregation model. *The European Physical Journal B* 70 (2), 293-304.
- [19] Blume M, Emery V J and Griffiths R B.(1971). Ising model for the λ transition and phase separation in He 3 -He 4 mixtures. *Phys Rev A* 4:1071–1077.
- [20] Capel H W (1966). On the possibility of first-order phase transitions in Ising systems of triplet ions with zero-field splitting. *Physica* 32:966–987.
- [21] Marsaglia J. (1981). *Computer Studies of the Anderson-Darling Statistic*. Washington State University.
- [22] Roy P. y Parongama S. (2016). Continuous utility factor in segregation models. *Phys. Rev. E* 93. 022310.
- [23] Landau D. y Binder K. *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge University Press. 2015

6. APÉNDICES

A lo largo del trabajo hemos ido nombrando diferentes técnicas o modelos que requerían de una mayor explicación, en caso de que el lector lo requiriese.

6.1. Modelo de Ising

El modelo de Ising es uno de los más importantes de la física moderna: un sistema simple que exhibe un comportamiento no trivial e interesante. El modelo consiste en N sitios en un mallado con d dimensionaes. En cada uno de los nodos del mallado existe un spin, que puede apuntar hacia arriba (\uparrow , $s_i = +1$) o hacia abajo (\downarrow , $s_i = -1$). El subíndice i denota al nodo referido dentro de la red. Consideramos la presencia de un campo magnético B , y extendiéndose el sumatorio sobre los N nodos, la energía del sistema viene dada por:

$$E = -B \sum_i s_i \quad (6)$$

No obstante, el modelo de Ising contiene una complicación adicional: la interacción entre espines vecinos, con una constante de acoplamiento J . En este caso, la energía del sistema de Ising, E_{ISING} , viene dada por:

$$E_{ISING} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i \quad (7)$$

Donde la notación $\langle i, j \rangle$ indica suma sobre los vecinos más próximos en el mallado. Este número de pende de la dimensión d del mallado considerado. Si llamamos q al número de vecinos más próximos en una dimensión $q = 2$, en 2D $q = 4$...

Como podemos ver en (2), compiten dos efectos: el efecto del campo magnético global, que afecta a todos los espines por igual, y el del campo local, generado por los espines vecinos. Si $J > 0$ los espines vecinos prefieren estar alineados ($\uparrow\uparrow$ ó $\downarrow\downarrow$) y en el contexto del

magnetismo decimos que el modelo es ferromagnético. Si $J < 0$ los espines prefieren estar anti-paralelos ($\uparrow\downarrow$). Este es el modelo anti-ferromagnético. Lo normal en el modelo de Ising, es tomar $J > 0$.

Respecto a la función de partición del sistema, esta se escribe:

$$Z_{ISING} = \sum \exp \left[\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + \beta B \sum_i s_i \right], \quad (8)$$

con $\beta = 1/k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura. Por consiguiente, si tenemos un espín $\uparrow (+1)$ rodeado de espines $\downarrow (-1)$ existe una penalización energética ($\exp(-8\beta J)$). Como vemos, el espín en el modelo ferromagnético tiende a estar alineado con su entorno, lo cual tiene claras reminiscencias con el comportamiento social de las personas.

Si anulamos el campo magnético $B = 0$, el modelo tiene dos comportamientos claramente diferenciados: el ferromagnético, en el que todos los espines tienden a estar alineados ya sea (\uparrow o \downarrow) y el paramagnético, en el que no lo están. Sin embargo, y por lo anteriormente enunciado de la temperatura, cuanto mayor es la temperatura menos le cuesta al espín invertirse con respecto a sus vecinos. Por eso, es de esperar, que los estados alcanzados por el sistema cambien dependiendo de la temperatura. Existirá una temperatura en la que el sistema cambie su comportamiento, que es la temperatura crítica. Si $T < T_C$ el sistema estará en la fase ferromagnética, y si $T > T_C$ en la fase paramagnética. Al fenómeno de paso de un tipo de comportamiento a otro se le denomina transición de fase.

Para definir cuando el sistema está en un estado u en otro, se definen los parámetros de orden, que generalmente, toman valor nulo para uno de los dos estados, y finito para el otro. Para el caso del modelo de Ising se define como parámetro de orden la magnetización o su valor absoluto:

$$m = \frac{1}{N} \left\langle \sum s_i \right\rangle. \quad (9)$$

Finalmente, muestro una gráfica de creación propia del valor de la magnetización frente a la temperatura (Fig A.1). En ellas se puede observar un cambio en el comportamiento

del sistema para $T_c \sim 2,4$, que es la temperatura para la que el sistema pasa de ser ferromagnético a paramagnético.

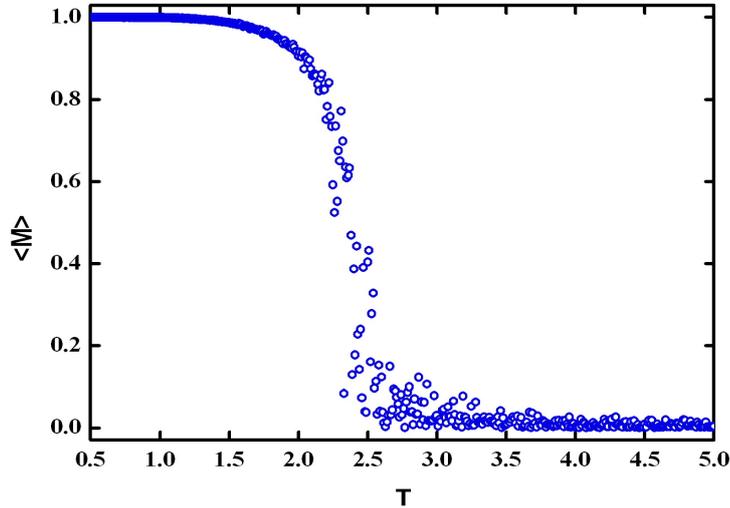


Fig.A.1: Magnetización frente a T para un sistema de 50×50 .

6.2. Modelo de Blume-Emery-Griffths (BEG)

El modelo Blume-Emery-Griffths se concibió originalmente para explicar el comportamiento de una mezcla de 3He y 4He , y desde entonces se ha aplicado en múltiples campos, desde redes hasta aleaciones de metales. Es un modelo clásico de gas que podríamos englobar como una variante del modelo de Ising[12].

El modelo considera dos especies de átomos 3He con $S_i = 0$ y 4He con $S_i = \pm 1$. El parámetro de orden se define de manera análoga a la ecuación (4), ya que la existencia de una especie con valor de espín ± 1 hace que cobre sentido el analizar el valor total de espín, mientras que el valor nulo del otro hace que no le afecte.

También definiremos el número de átomos de 3He como $N_3 = \sum_1^N (1 - S_i)^2$ y el de 4He como $N_4 = \sum_1^N S_i^2$, mientras que definimos la fracción de átomos de 3He con respecto a los átomos totales como $x = \langle N_3 \rangle / N$.

Dentro del Hamiltoniano del sistema encontramos varias contribuciones:

- $\sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$ donde el sumatorio se extiende sobre los vecinos más cercanos.
- $-K_{33} \sum_{\langle i,j \rangle} (1-S_i^2)(1-S_j^2) - K_{44} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - K_{34} \sum_{\langle i,j \rangle} [S_i^2(1-S_j^2) + S_j^2(1-S_i^2)]$ donde $K_{\alpha\beta}$ es la constante de interacción entre las partículas correspondientes a los subíndice 3 y 4. Reorganizando tenemos la fórmula siguiente:

$$-(K_{33} + K_{44} - 2K_{34}) \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - 2q(K_{34} - K_{33}) \sum_1^N S_i^2 - qNK_{33}, \quad (10)$$

aquí q es el número de vecinos más cercanos.

- $-\mu_3 N_3 - \mu_4 N_4$ para contar con las transformaciones de una especie en otra, por lo que μ_α es el potencial químico de la especie.
- $B(t) \sum S_i$ Este término para contar con la influencia de un campo externo que reorienta los espines.

De esta forma, el Hamiltoniano completo puede escribirse como:

$$H_{BEG} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 + \Delta \sum_i S_i^2 - N(zK_{33} + \mu_3) - B(t) \sum_i S_i, \quad (11)$$

con $K = K_{33} + K_{44} - K_{34}$ y $\Delta = \mu_3 - \mu_4 + 2z(K_{33} - K_{44})$ el término de anisotropía que define un campo cristalino.

6.3. Modelo de Blume-Capel (BC).

Partiendo del modelo BEG en el contexto en que surgió si las interacciones entre componentes son equivalentes, el término bicuadrático puede despreciarse y estamos en una versión simplificada conocida como modelo de Blume-Capel [14,15]. En este caso, el Hamiltoniano nos quedaría:

$$H_{BC} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \Delta \sum_i S_i^2 - B(t) \sum_i S_i \quad (12)$$

donde el comportamiento e interpretación de todos los términos puede verse mejor en el apartado anterior.

6.4. Algoritmo de clusterización

El cálculo del coeficiente de segregación $\langle s \rangle$ requería de la creación de un algoritmo de clusterización que tuvo que desarrollarse desde cero. Según la definición dada: «dos agentes pertenecen al mismo clúster si son vecinos próximos», esto es, ocupan uno de los cuatro espacios de su vecindad.

A partir de dos matrices de números enteros, el funcionamiento del mismo se basa en los siguientes pasos:

- Para contar los clusters de rojos (+1) se les asigna a todos los agentes números superiores a 1. Se recorre la matriz del sistema haciendo esto: al primer agente de valor (+1, rojo) se le hace valer 2, al segundo 3, y así sucesivamente, de izquierda a derecha y de abajo a arriba. Gráficamente nos parecerá que hemos pintado de color por líneas a estos agentes. En la Fig A.4.1 mostramos la apariencia inicial del sistema, y en la Fig A.4.2 mostramos como queda la matriz una vez se ha aplicado este proceso.

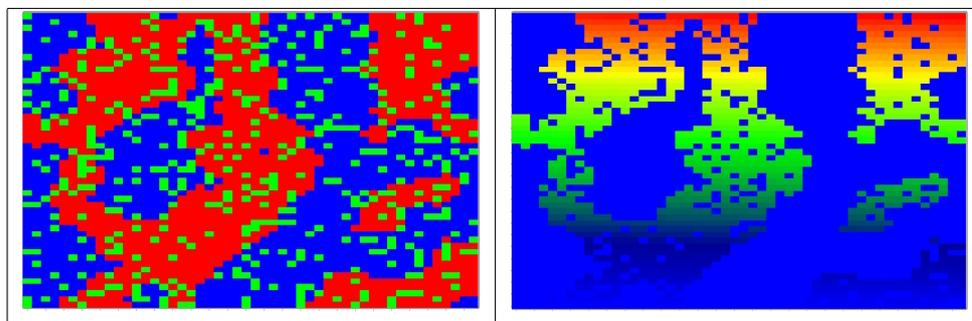


Fig.A.4.1.a. y Fig.A.4.1.b: Matriz inicial y primer paso del algoritmo de clusterización en el que se asigna a los agentes +1 una serie de números naturales sucesivos.

- Consideramos que aparte de esta matriz de colores, trabajamos con una matriz numérica en el que los agentes solo pueden tomar los valores 0, 1 y 2. Al principio todos los agentes de la matriz numérica toman valor 0. Nos ubicamos en el primer agente de la matriz de colores, el «2», que tiene valor en la matriz numérica «0». Se le pone 1 en

la matriz numérica y los cuatro vecinos más cercanos a este en la matriz de colores toman su valor de color «2»; se les pone «1» en la matriz numérica, en vez del «0» que tenían.

- En la siguiente iteración a este agente que ya ha pintado a sus cuatro vecinos más cercanos se le pone valor 2 en la matriz numérica, lo que indica que ya ha sido usado. Los cuatro vecinos que tenían color «2» y en la matriz numérica tenían valor 1 expanden su valor de color a sus cuatro vecinos más cercanos cada uno. Pasan a valer en la numérica «2», y así sucesivamente hasta que ya no se pueden expandir más. En este momento hemos etiquetado el primer cluster.
- Se repite el proceso buscando nuevos «colores» de tonos cada vez más altos, que están en otros clusters.

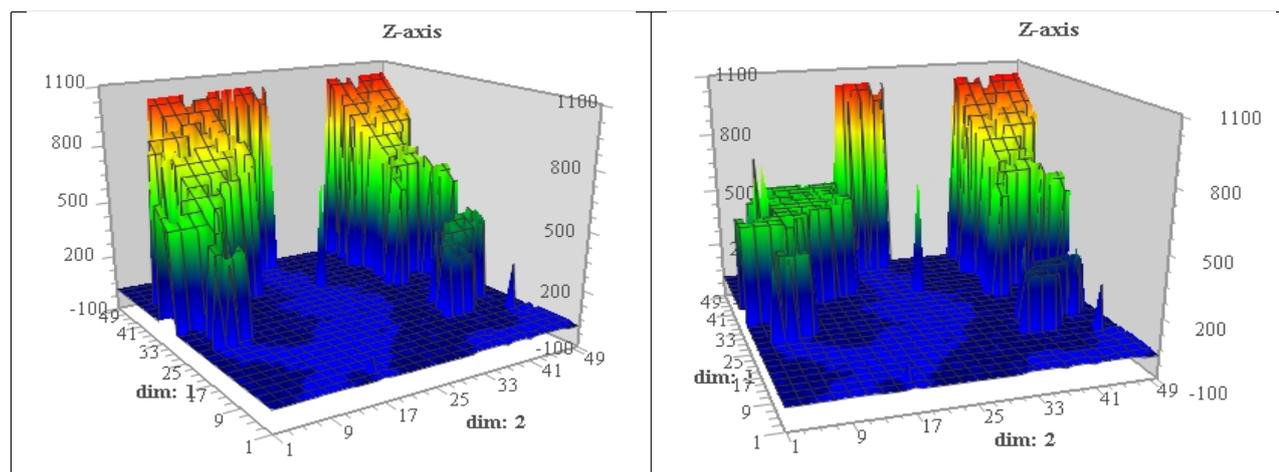


Fig.A.4.2a. y Fig.A.4.2b: Pasos intermedios del algoritmo de clusterización. Los ejes x e y indican posición en la matriz. El eje z es la altura, asignando un valor de color creciente de azul (0) hasta rojo (1000).

- Finalmente, cuando el proceso ha terminado, tenemos cada clúster de un color, y el programa ha contado el número de elementos pertenecientes a él (Fig A.4.3):

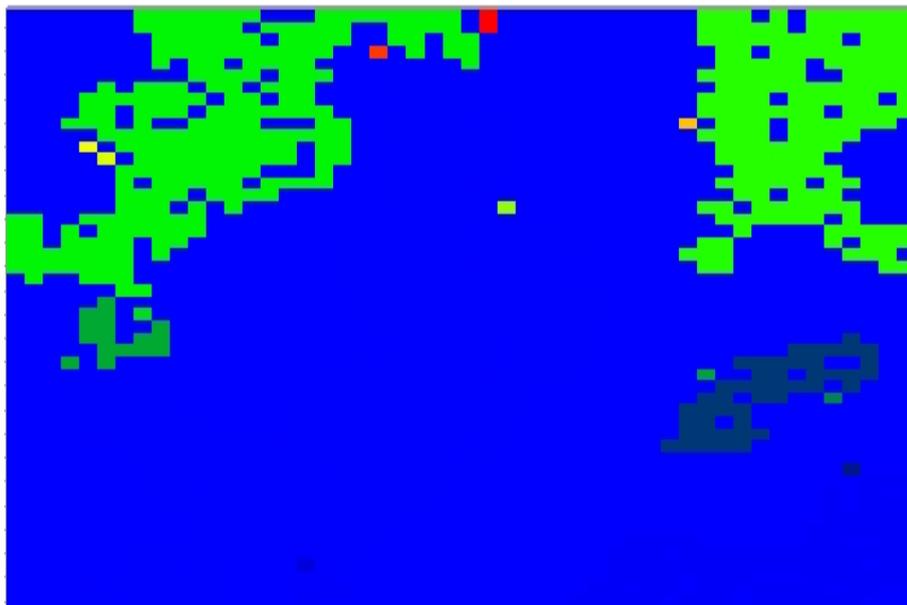


Fig.A.4.3: Estado final del algoritmo de clusterización.

6.5. Proceso de renormalización

Uno de los parámetros de entrada en el código es la densidad de vacantes (sitios vacíos de cada 100 lugares). Cuando este valor es elevado (a partir del 50 %, o incluso del 20 %, dependiendo de la magnitud que queramos medir) podemos realizar erróneamente el proceso de clusterización, visto en el apartado anterior. Esto correspondería a un lugar en el que hay mayoría de un solo color, pero la presencia de vacantes impide que se forme un cluster de gran tamaño, y encontraría varios pequeños. Esto conllevaría el no detectar la existencia de un estado de «segregación diluida».

En este tipo de casos conviene emplear la siguiente renormalización [20], descrita en [18]:

- Dividimos el mallado en cuadrados de 4 lugares
- En cada uno de estos cuadrados de 2x2, nos fijamos en el cuadrado inferior derecha.
- Si este sitio y su vecindario tiene una mayoría de agentes de un color, el cuadrado 2x2 queda sustituido por un solo lugar con el color de la mayoría. Si la mayoría es de sitios vacíos, el cuadrado 2x2 se sustituye por un lugar vacío.

- Si no hay mayoría, el cuadrado 2x2 es sustituido por un lugar del mismo color (o vacante) que el lugar inferior derecha original.

Gráficamente, pondremos poner dos ejemplos (Fig. A.5.1) del proceso de renormalización y del resultado que se logra [Gauvin et al].

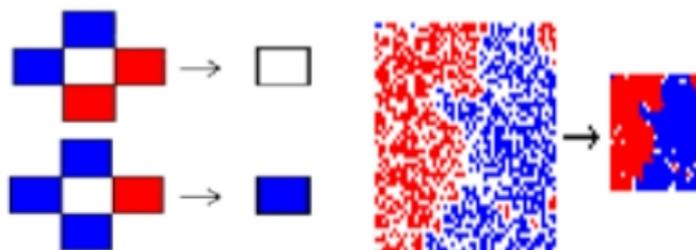


Fig.A.5.1: Ejemplos del proceso de renormalización y de los resultados que se logran.

En esta figura muestro los resultados alcanzados con este proceso para nuestro modelo desarrollado con $\rho = 51\%$ y $T = 3/7$.

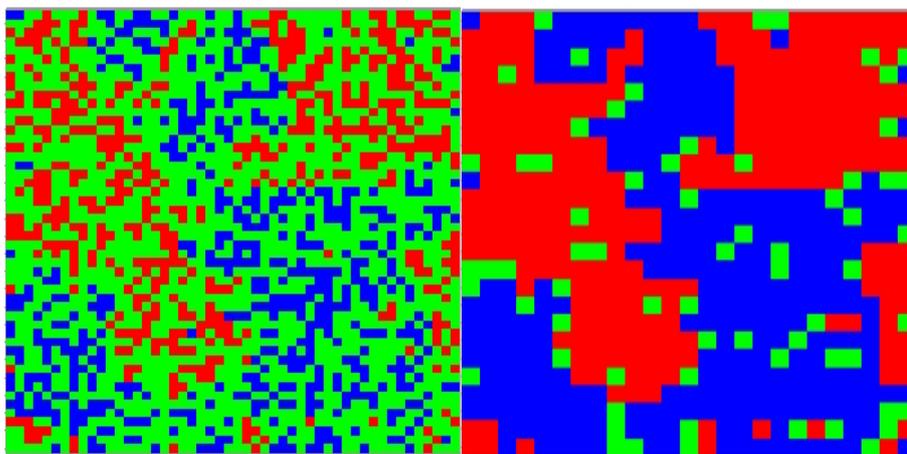


Fig.A.5.2.a y A.5.2.b: A la izda. (a) matriz del sistema con $\rho = 51\%$ antes del proceso de renormalización. Después de la renormalización queda la figura de la dcha. (b) que ha sido ampliada cuatro veces para comparar en detalle.

Los resultados son similares a los de la figura anterior, ya que se ha seguido el mismo proceso de renormalización. Esto confirma que el proceso realizado está bien hecho.

6.6. Proceso de suavizado

Como ya se ha comentado, cuando la tolerancia es alta, los agente se siguen moviendo. Esto dificulta la obtención de medidas fiables, ya que existe fluctuación en las mismas. Para solventarlas hemos realizado una simple técnica de suavizado que consiste en promediar cada 100 medidas. Esto hace que las fluctuaciones se amortigüen, como se observa en la figura A.6.2.a y A.6.2.b:

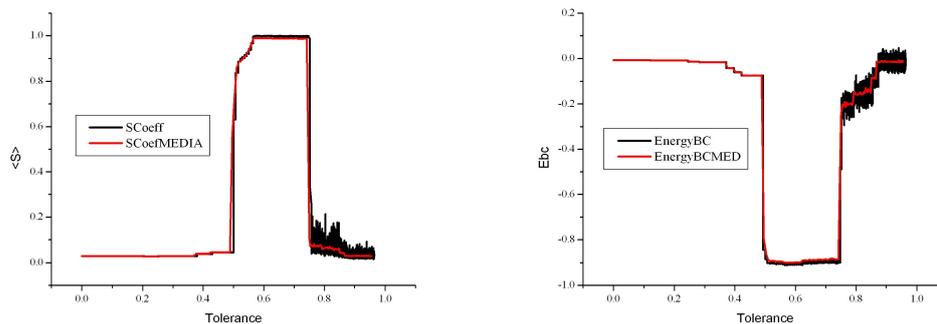


Fig.A.6.2.a y A.6.2.b: Ejemplo de suavizado para la energía y para el coeficiente de segregación normalizados, respectivamente.