

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA



Trabajo Fin De Máster

Máster en Física de Sistemas Complejos

---

¿PODRÍA SER LA GRAVEDAD  
UNA FUERZA ENTRÓPICA?

---

Autora: Azucena Bonilla García

Tutor: Javier Rodríguez Laguna

Octubre 2019

# Resumen

La teoría de la Relatividad General explica la gravedad de una manera enormemente exitosa a nivel macroscópico. Sin embargo, su versión cuántica no ha podido aún ser formulada. En los últimos años va cobrando fuerza la idea de que la gravedad podría ser un fenómeno emergente.

Este Trabajo de Fin de Máster realiza un estudio bibliográfico crítico sobre la posibilidad de que la gravedad no sea una fuerza fundamental de la naturaleza, sino una interacción emergente, concretamente una fuerza entrópica.

Además, presentamos un modelo estadístico sencillo original que conduce a una fuerza entrópica atractiva entre partículas puntuales.

## **Abstract**

The General Theory of Relativity explains gravity in an enormously successful way at the macroscopic level. Yet, its quantum version has not been formulated. In the last few years, the idea that gravity might be an emergent phenomenon is gaining momentum.

This Master Thesis presents a critical bibliographical survey about the possibility that gravity might not be a fundamental force of Nature, but an emergent interaction, concretely an entropic force.

Moreover, we present an original simple statistical model leading to an attractive entropic force between point-like particles.

# Agradecimientos

Dios, tu apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y debilidad, me han permitido sonreír y alcanzar mis objetivos.

Agradezco a mi tutor, Javier Rodríguez Laguna, por su paciencia, orientación e incalculable ayuda en la elaboración de este Trabajo de Fin de Máster.

Gracias a mi esposo e hijos, quienes son mi motor y mi mayor inspiración.

Y, por supuesto, a mi madre por ser mi apoyo durante todo este proceso.

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. NATURALEZA ENTRÓPICA DE LA GRAVEDAD</b>	<b>3</b>
2.1. GRAVEDAD PARA NEWTON . . . . .	3
2.2. GRAVEDAD PARA EINSTEIN . . . . .	5
2.2.1. Agujeros Negros Clásicos . . . . .	6
2.3. GRAVEDAD VS TERMODINÁMICA . . . . .	8
2.3.1. Breve repaso de termodinámica y física estadística . . . . .	9
2.3.2. Termodinámica de agujeros negros . . . . .	11
2.4. GRAVEDAD COMO FUERZA ENTRÓPICA . . . . .	16
2.4.1. Conceptos clave . . . . .	16
2.4.2. Argumento de Jacobson . . . . .	19
2.4.3. Modelo de Verlinde . . . . .	20

<b>3. MODELO ESTADÍSTICO</b>	<b>23</b>
3.1. TEORÍA DE GRAFOS . . . . .	23
3.1.1. Tipos de Grafos . . . . .	25
3.1.2. Representación de Grafos . . . . .	26
3.1.3. Grafos Planos y Grafos Regulares . . . . .	27
3.1.4. Caminos en un Grafo . . . . .	28
3.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTADÍSTICO . . . . .	30
3.3. ANÁLISIS DEL MODELO . . . . .	31
3.3.1. Interacción entre partículas . . . . .	32
3.3.2. Estimación de la entropía . . . . .	33
3.3.3. Diagrama de flujo del cálculo . . . . .	34
3.4. RESULTADOS . . . . .	35
3.4.1. Red Cuadrada . . . . .	36
3.4.2. Red Hexagonal . . . . .	40
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
<b>5. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>49</b>
<b>6. ANEXOS</b>	<b>52</b>
Programacion C++ para la Red Cuadrada . . . . .	52

Programación C++ para la Red Hexagonal . . . . . 53

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En los años 70 del pasado siglo, Jacob Bekenstein [2] y Stephen Hawking [18] encontraron una fascinante relación entre las propiedades físicas de los agujeros negros y las leyes de la termodinámica. Quedó así abierta la posibilidad de que la gravedad resulte ser un fenómeno emergente, basado en grados de libertad desconocidos para nosotros, de la misma manera que lo eran los átomos para quienes desarrollaron la teoría de los gases en el siglo XVIII.

La interacción gravitatoria se explica, dentro de la Teoría General de la Relatividad, como una *curvatura del espacio-tiempo* causada por la presencia de masa-energía en el mismo. La materia dice al espacio cómo curvarse, y el espacio dice a la materia cómo moverse. Dentro de la aproximación newtoniana podemos afirmar que esta interacción depende únicamente de las masas de los cuerpos y de la distancia entre ellos.

Este documento consta de dos partes:

En la primera parte del documento, capítulo 2, haremos un estudio bibliográfico crítico sobre la posibilidad de que la gravedad sea una fuerza emergente, concretamente una fuerza entrópica.

En la segunda parte del documento, capítulo 3, describiremos un modelo estadístico sencillo que da lugar a una interacción atractiva emergente con algunas propiedades similares a las que debería tener una gravedad entrópica. Para poder simular el modelo se ha desarrollado un código

¿Podría ser la gravedad una fuerza entrópica?

---

en C++ que adjuntamos en los Anexos.

Finalmente ofrecemos algunas conclusiones en el capítulo 4.

## Capítulo 2

# NATURALEZA ENTRÓPICA DE LA GRAVEDAD

El objetivo de esta primera parte del trabajo es una discusión crítica de las ideas mas importantes en el área de la gravedad emergente.

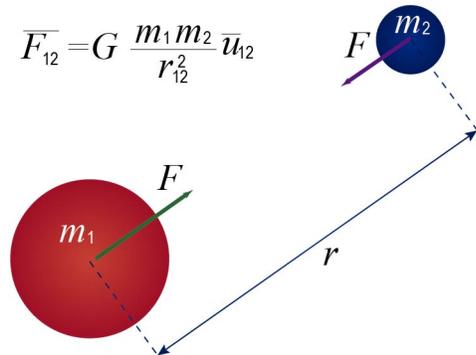
### 2.1. GRAVEDAD PARA NEWTON

La ley de Gravitación Universal de Isaac Newton es una de las leyes más importantes de la física. La perspicacia de Newton radica en darse cuenta que la interacción que hace que un objeto puntual caiga al suelo es la misma que hace posible que la Luna orbite a la Tierra y la Tierra orbite al Sol.

Newton asumió que la gravitación es una fuerza universal, activa en toda clase de materia. Entre 1685 y 1687 publicó su obra cumbre, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en la que establece una relación cuantitativa de la ley de gravitación universal: “dos cuerpos cualesquiera se atraen a razón directa del producto de sus masas y en razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa” [24].

### **LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON**

---



**Figura 2.1: Representación Gráfica de la Ley de Newton**

Usando la notación vectorial desarrollada con posterioridad, la ley de Gravitación Universal se escribe así:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \quad (2.1)$$

Donde  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  es la constante de Gravitación Universal,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos respectivamente,  $r_{12}$  es la distancia y  $\vec{u}_{12}$  es el vector unitario que une los dos cuerpos.

Por lo tanto, de las fuerzas gravitatorias (2.1) se puede decir:

- Son fuerzas únicamente atractivas.
- Tienen alcance infinito, es decir, la fuerza decae como una potencia de la distancia.
- No son apantallables, es decir, no existe ninguna manera (conocida) de reducir su intensidad, al revés de lo que sucede con la fuerza electromagnética.

A pesar de que Newton logró describir de manera casi perfecta la fuerza de gravedad, su explicación no estuvo exenta de críticas en su momento. La interacción *a distancia* resultaba extraña

en un ambiente intelectual mecanicista que le instaba a responder una pregunta que no estaba preparado para abordar: *¿qué es lo que causa la atracción?* [1].

## 2.2. GRAVEDAD PARA EINSTEIN

En la segunda década del siglo XX, Albert Einstein abordó alguna de las viejas preguntas sobre la gravedad, armado de los nuevos conocimientos sobre la luz.

En 1905, Einstein publicó su primer trabajo sobre la Teoría de la Relatividad Especial, en el que establecía que la velocidad de la luz en el vacío toma el mismo valor para cualquier observador inercial. Su trabajo dio lugar a que Hermann Minkowski considerara la conjunción de espacio y tiempo en un solo ente, que denominó *espacio-tiempo* [9], con propiedades geométricas únicas.

Einstein se preguntó: *¿qué sucedería si el Sol desapareciera de repente?* De acuerdo con el principio de Relatividad Especial, un observador en la Tierra no podría tener conocimiento de dicha desaparición hasta pasados ocho minutos, pues es el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia que separa ambos astros. Es decir: la gravedad *debería* estar sometida a las exigencias de la Teoría Especial de la Relatividad.

El intento de Einstein por incorporar la gravedad, sin contradecir la teoría de relatividad especial, lo llevó a plantear la *Teoría de la Relatividad General* en 1915. Para esta nueva teoría Einstein extendió el concepto de espacio-tiempo ideado por Minkowski para no ser un mero *escenario* para el desarrollo de la física, quedando convertido en uno de sus *protagonistas*. Einstein imaginó que el espacio-tiempo pudiera curvarse, y que los efectos de dicha curvatura son observados por nosotros como *gravedad*.

La distorsión del espacio tiempo, se describe a través de las ecuaciones de campo de la relatividad general [22, 21]. El objeto fundamental en su descripción matemática es el *tensor métrico*,  $g_{\mu\nu}$ , definido por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

donde  $ds^2$  es la *longitud del intervalo*,  $dx^\mu$  es un diferencial de movimiento en una de las coordenadas y hemos aplicado el convenio de suma de Einstein. A partir del tensor métrico y sus derivadas es posible definir el *tensor de curvatura de Ricci*,  $R_{\mu\nu}$ , desde el cual establecemos el tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde  $R$  es la curvatura escalar,  $R \equiv R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ , que nos permite escribir las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de *energía-impulso*, que describe el contenido energético de la materia. La ecuación (2.4) es válida en *unidades naturales*, en las que tanto la constante gravitacional  $G$  como la velocidad de la luz  $c$  valen la unidad.

Una discusión mínimamente completa del contenido físico de las ecuaciones (2.4) nos llevaría demasiado lejos del objetivo de este trabajo de fin de máster, y constituiría un curso sobre relatividad general en sí mismo. Sin embargo, es esencial destacar lo siguiente. El lado izquierdo de la ecuación (2.4) describe la geometría del espacio-tiempo. Es decir, cuantifica su curvatura. El lado derecho de la ecuación (2.4) describe la distribución de materia y energía. Es decir, cuantifica el origen físico de dicha curvatura.

### 2.2.1. Agujeros Negros Clásicos

Laplace hizo la observación de que un cuerpo suficientemente denso podría dar lugar a una *velocidad de escape* mayor que la de la luz, volviéndolo invisible. Combinado con el hecho de que la velocidad de la luz es la máxima posible, deducimos que *nada* podría escapar a su atracción

gravitatoria. John Archibald Wheeler bautizó tales objetos como *agujeros negros* [22].

Un agujero negro es una región donde la gravedad es tan intensa, y el espacio-tiempo se ha distorsionado tanto, que nada puede escapar de su atracción. Puede ser descrito totalmente en base a tan sólo tres parámetros: masa ( $M$ ), carga eléctrica ( $Q$ ) y momento angular ( $\vec{L}$ ) [14]. Por eso suele decirse que *un agujero negro no tiene pelo* [22].

Un agujero negro está siempre rodeado por una frontera u *horizonte de sucesos*, que sólo puede ser atravesado en una dirección, debido a que cruzarlo en la otra implicaría viajar a mayor velocidad que la luz. En muchos casos relevantes, el horizonte de sucesos es esférico, y su área define un radio característico  $A = 4\pi R^2$ .

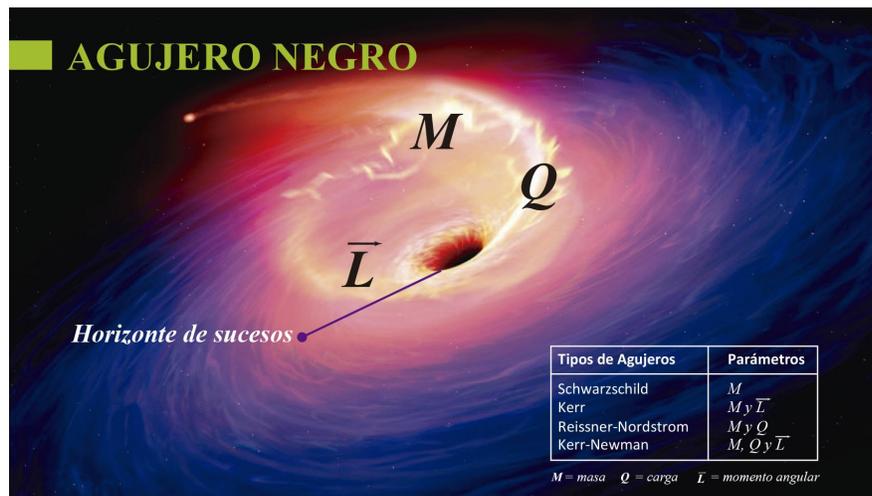


Figura 2.2: Representación Gráfica de un Agujero Negro [13]

Existen varios tipos de agujeros negros, siendo el más sencillo el *agujero de Schwarzschild*, que es estático, no tiene carga, y solo se caracteriza por su masa. Su radio viene dado por

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.5)$$

(donde  $G$  es la constante gravitacional y  $c$  es la velocidad de la luz). Por lo tanto el área del horizonte de sucesos de radio  $R_S$  es:

$$A = 4\pi \frac{4G^2 M^2}{c^4} = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4} \quad (2.6)$$

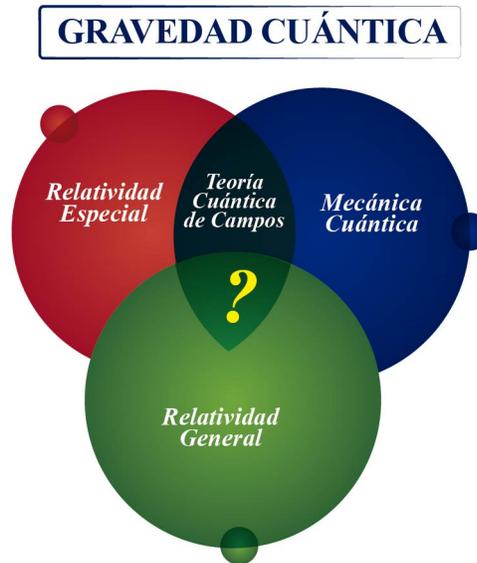
**El Teorema del área** nos dice que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro nunca decrece. Al caer materia sobre el agujero negro, tiende a crecer. Y cuando se produce un proceso de colisión entre agujeros, el horizonte de eventos final tiene un área igual o mayor a la suma de las áreas de los agujeros originales. Podemos escribir que la variación del área del horizonte de sucesos es siempre positiva,

$$dA \geq 0. \quad (2.7)$$

Esta ecuación recuerda enormemente al *segundo principio de la termodinámica*, y llevó a una serie de físicos, tales como Kerr, Bekenstein, Carter y Hawking [16] a postular un acercamiento entre ambas teorías físicas. Como veremos más adelante, la primera conclusión a la que llegaron es: los agujeros negros no son objetos fríos.

## 2.3. GRAVEDAD VS TERMODINÁMICA

La física teórica nos permite entender el funcionamiento del universo en base dos grandes pilares: La Teoría de la Relatividad General (RG), que explica el funcionamiento de la gravedad a nivel macroscópico, y la Teoría Cuántica de Campos (QFT), que da cuenta del mundo microscópico y explica todas las interacciones conocidas a excepción de la gravedad.



**Figura 2.3:** Áreas que contribuyen al desarrollo de la gravedad cuántica

Sin embargo, ambas teorías no funcionan bien conjuntamente. No disponemos de una teoría cuántica de la gravedad, a día de hoy, que dé cuenta de su origen microscópico, que sería una teoría microscópica del propio espacio-tiempo. El motivo podría ser, en el fondo, elemental: quizá *no importa* cuál sea la teoría microscópica de la gravedad a la hora de explicar su comportamiento macroscópico. El motivo sería el mismo por el que las interacciones entre los átomos son irrelevantes para explicar gran parte del comportamiento de los gases: la gravedad puede considerarse como un fenómeno emergente que involucra un número ingente de grados de libertad, y por tanto está regido por las *leyes de la termodinámica*. Concretamente, podría tratarse de una fuerza entrópica.

Nuestra exploración de esta posibilidad exige que repasemos unos cuantos conceptos clave.

### 2.3.1. Breve repaso de termodinámica y física estadística

**Ley Cero:** También se la conoce como Ley de Equilibrio Térmico. Si un cuerpo A y un cuerpo B están en equilibrio, y el cuerpo B está a su vez en equilibrio con un cuerpo C, el cuerpo A y el cuerpo C también están en equilibrio entre ellos.

**Primera Ley:** También se la conoce como la Ley de Conservación de la Energía, nos dice que la energía no puede crearse ni destruirse, solo transformarse. Para ejemplificar esta ley consideremos un pistón de volumen  $V$  lleno de gas, limitado por un émbolo móvil sometido a una presión  $p$ . Cualquier proceso dará lugar a un balance energético de la forma

vamos a imaginarnos que introducimos calor en un sistema cerrado, por ejemplo en un volumen lleno de gas. Si el volumen de gas viene delimitado por un émbolo móvil, este se moverá al dilatarse el gas proporcionando un trabajo  $W$ .

$$\Delta E = W + Q = p\Delta V + Q, \quad (2.8)$$

donde  $Q$  es el calor ganado por el gas y  $W$  el trabajo realizado sobre el mismo.

**Segunda Ley:** También se lo conoce a veces como Ley de la Entropía, pues esta ley describe y caracteriza esta magnitud. Como determinó Ludwig Boltzmann, la entropía puede definirse como el logaritmo del número de estados microscópicos compatibles con la información macroscópica disponible del sistema  $\Omega$ ,

$$S = k_B \log \Omega, \quad (2.9)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K, que puede tomarse como uno en unidades naturales. La entropía cuantifica el *desorden* de un sistema y tiende a incrementarse en el tiempo. Asimismo, el calor ganado por el sistema a lo largo de un proceso reversible vendrá dado por

$$Q = T\Delta S, \quad (2.10)$$

y, por tanto, la ley de la conservación de la energía, ecuación (2.8) puede complementarse en este caso:

$$\Delta E = T\Delta S + p\Delta V. \quad (2.11)$$

En la Naturaleza los procesos transcurren espontáneamente si con ello se aumenta la entropía, es decir, “un estado es tanto más probable cuanto de mas formas podamos llegar a él” [28].

La entropía de un sistema termodinámico que no está en equilibrio aumenta porque la información sobre la configuración interna del sistema se pierde durante la evolución. Sin embargo, es posible que existan factores externos que provoquen una disminución de la entropía del sistema. Por lo tanto, aunque la entropía del sistema disminuya, la entropía general del universo debe aumentar en el proceso.

¿Cómo medimos la información? La unidad de información convencional es el “bit”, que se puede definir como la información obtenida cuando se responde a una pregunta de tipo sí/no. Si un sistema puede estar en  $\Omega$  estados diferentes, el número de preguntas sí/no que debemos realizar para determinar con precisión el estado es  $\log_2 \Omega$ . En la práctica, la base usada para los logaritmos es irrelevante.

**Tercera Ley:** Nos dice que no se puede enfriar un sistema termodinámico al cero absoluto en un número finito de procesos físicos.

Las nociones de entropía y temperatura utilizadas en este documento pueden interpretarse tanto en el sentido termodinámico como en el de teoría de la información. La termodinámica y la teoría de la información nos hablan de la misma realidad.

### 2.3.2. Termodinámica de agujeros negros

A mediados de la década de 1970, los intentos de combinar la mecánica cuántica con la física de agujeros negros llevaron a Bekenstein, Unruh, Fulling, Davies y Hawking, entre otros, a predecir propiedades de los agujeros que los asimilaban a sistemas termodinámicos.

En 1972, Bekenstein, publico un artículo [4], titulado “Black Holes and Entropy”, el cual muestra una serie de similitudes entre la física de agujeros negros y la termodinámica, una de las similitudes base es la analogía del área del agujero negro con la entropía. Propuso que los agujeros negros tienen entropía, la cual se define como la medida de la información sobre el interior del

agujero negro que no es accesible para un observador externo.

Comienza expresando cualquier incremento en la masa-energía de un agujero negro en base a incrementos en otras magnitudes, tales como su área, su carga o su momento angular, en analogía con (2.11) (Ver detalles en [4]). En las unidades apropiadas,

$$dM = g dA + \vec{\Omega} d\vec{L} + \Phi dQ, \quad (2.12)$$

Donde:

- Los términos  $\vec{\Omega} d\vec{L}$  y  $\Phi dQ$  representan el trabajo realizado por un agujero negro por un agente externo que aumenta el momento angular y la carga del agujero negro por  $d\vec{L}$  y  $dQ$  respectivamente. Por lo tanto  $\vec{\Omega} d\vec{L} + \Phi dQ$  representa un análogo al trabajo realizado en un sistema termodinámico.
- El término  $g dA$  es el más relevante, puesto que dará la interpretación térmica. Por un lado,  $g$  es la aceleración de la gravedad en la superficie del agujero negro, y la medida de su área está dada por  $A$ . Como sabemos, cualquier evolución del agujero negro nos dará  $dA \geq 0$ , en analogía con el segundo principio.
- Por lo tanto,  $g$  juega el papel de una *temperatura*. En efecto, dos agujeros negros en contacto igualarán sus gravedades superficiales, cumpliendo así el principio cero.

Basándose en el comportamiento creciente de la entropía termodinámica de los sistemas cerrados, la cual se relaciona con el Teorema del área (2.7), propone la formula para la entropía de un agujero negro ( $S_{BH}$ ) [13, 15] es:

$$S_{BH} = \frac{1}{4\pi} \frac{k_B c^3 A}{\hbar G}. \quad (2.13)$$

Donde:  $A$  es el área de horizonte de eventos,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $c$  es la velocidad de la luz,  $G$  es la constante de gravedad de Newton y  $\hbar$  es la constante de Plank ( $\frac{h}{2\pi}$ ).

Dada una medida de la entropía del agujero negro, Bekenstein pudo definir una segunda ley generalizada de la termodinámica (GSL), la cual dice que la suma de la entropía del agujero negro  $S_{BH}$  y la entropía exterior  $S_c$  nunca disminuyen:

$$\Delta S_{BH} + \Delta S_c = \Delta(S_{BH} + S_c) \geq 0, \quad (2.14)$$

demostrando así Bekenstein que las leyes de la termodinámica se cumplen: la energía se conserva y la entropía siempre crece.

Las primeras ideas de Bekenstein fueron recibidas con suspicacia. Sin embargo, Stephen Hawking encontró en 1974 argumentos que las corroboraban en gran medida. En efecto, Hawking observó que, si  $A$  es un análogo de la entropía,  $g$  lo es de la temperatura. Por lo tanto, el agujero negro debería *radiar* calor hacia el exterior, como un cuerpo negro. Esta radiación propuesta teóricamente, y obtenida a través de cálculos independientes, se conoce como *radiación de Hawking*.

De esta manera, Hawking [10, 15] llegó a la conclusión de que los agujeros negros *no* son tan negros. La radiación que emiten les hará perder energía y, con el tiempo, tenderán a *evaporarse*. De manera destacable, eso nos lleva a una pregunta: ¿qué ocurre con la información contenida en la materia que cayó en el agujero negro? ¿Ha desaparecido para siempre? Esta pregunta es una de las cuestiones abiertas en física más intrigantes, y se conoce con el término *paradoja de la información*.

La radiación de Hawking se explica en términos de las fluctuaciones del vacío cuántico. Considero que un observador que esté fuera del agujero negro no puede “observar” lo que sucede en el interior, y eso causa una falta de información que puede ser interpretada como una temperatura.

La temperatura de un agujero negro, con las unidades apropiadas, se convierte en

$$T_{BH} = \frac{g\hbar}{2\pi ck_B}. \quad (2.15)$$

Donde:  $g$  es la aceleración gravitacional en el horizonte de eventos de un agujero negro,  $\hbar$  es la

constante de Plack,  $c$  es la velocidad de la luz y  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

Si consideramos un agujero negro de Schwarzschild de masa  $m$ , la temperatura se convierte en:

$$T_{SBH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi m G k_B} \quad (2.16)$$

William Unruh en 1976 predijo que la expresión (2.15) puede generalizarse de una manera muy interesante: el vacío es percibido como más caliente por *cualquier* observador acelerado. La temperatura efectiva de Unruh viene dada por:

$$T_U = \frac{a \hbar}{2\pi c k_B}. \quad (2.17)$$

Donde:  $a$  es la aceleración del observador,  $\hbar$  es la constante de Plack,  $c$  es la velocidad de la luz y  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

Al hablar de gravedad vs termodinámica, se puede concluir que:

- Bekenstein propuso que un agujero negro tiene asociado una entropía y una temperatura. La temperatura será proporcional a la aceleración de la gravedad en su superficie y la entropía a su área. De esta manera las leyes de la termodinámica tienen una relación en el comportamiento de los agujeros negros.
- La entropía (medida del desorden) se encuentra directamente relacionada con la información perdida en su interior, por lo que el hecho que la entropía de un agujero negro sea proporcional al área del agujero negro implica que la cantidad de información del mismo está relacionada directamente a dicha área. La entropía entonces se puede cuantificar en bits, la cantidad total de bits se relaciona con el total de grados de libertad de la materia caída en él.
- De esta manera, vemos que la cantidad de información que se puede contener en alguna región depende directamente del área. Este concepto novedoso condujo a formular el Principio Holográfico.

## Principio Holográfico

En la década de 1990, los físicos Gerard 't Hooft y Leonard Susskind postularon el Principio Holográfico, inspirado en la termodinámica de un agujero negro.

Cuando un objeto cae en un agujero negro, éste desaparece. A medida que el objeto va desapareciendo por el agujero negro, una especie de copia de toda la información que contiene el objeto parece almacenarse en el agujero.

Finalmente, el objeto existe en 2 lugares:

- Una versión tridimensional que se pierde dentro del agujero negro.
- Una versión bidimensional que permanece en la superficie del horizonte de eventos como información.

Para un agujero negro, el principio holográfico establece que la descripción de los objetos que caen en el agujero negro se encuentra contenida en la superficie del horizonte de eventos. Al igual que un holograma permite la representación de figuras tridimensionales en una placa bidimensional, el principio holográfico permite conjeturar que la física del interior de una región está, en ocasiones, contenida en su borde.

El principio holográfico resultó una mera conjetura hasta que el físico de origen argentino Juan Maldacena encontró la llamada correspondencia AdS/CFT, entre una teoría de la gravedad cuántica en un espacio curvado de tipo hiperbólico (anti-de Sitter o AdS) y una teoría de campos conformes (CFT) que vive en su borde. Hoy en día, esta correspondencia se considera una de las rutas más prometedoras para explorar las predicciones físicas de la gravedad cuántica, aún por construir.

## 2.4. GRAVEDAD COMO FUERZA ENTRÓPICA

Antes de explicar los dos modelos restantes de la posibilidad de la existencia de la gravedad como interacción emergente es importante definir algunos conceptos relevantes.

### 2.4.1. Conceptos clave

#### **Emergencia:**

Se dice que una teoría es “emergente” cuando no es fundamental, sino que es el resultado a escalas grandes de fenómenos que ocurren a escalas menores. Así, por ejemplo, la mecánica de fluidos es una teoría emergente a partir de la física cuántica.

Un ejemplo más cercano a nuestro propósito es la propuesta de Erik Verlinde, en el año 2010, de que la gravedad no es una fuerza fundamental de la naturaleza sino un fenómeno emergente debido al movimiento colectivo de una gran cantidad de grados de libertad ocultos. Es decir, la gravedad emerge de la dinámica de una cantidad ingente de información almacenada en la estructura del espacio-tiempo [8].

La gravedad puede surgir de los grados de libertad microscópicos ocultos de varias maneras diferentes. En este documento, nos concentramos en la entropía como una medida de estos grados de libertad ocultos.

#### **Fuerza Entrópica:**

Se trata de una fuerza emergente debida al hecho de que todo sistema evoluciona naturalmente buscando maximizar su entropía. La energía libre de Helmholtz de un sistema a temperatura finita se puede escribir como

$$F = E - TS. \quad (2.18)$$

Consideremos un sistema a temperatura  $T$  constante, en el que la energía está fijada,  $E = 0$ . La evolución natural del sistema llevará a la minimización de su energía libre, es decir, la maximización de la entropía  $S$ . Esta tendencia natural sólo podrá ser evitada mediante la acción de una fuerza externa que compense el incremento en entropía esperado,  $TdS$ , con un incremento de energía asociado.

El ejemplo más simple de fuerza entrópica se da cuando consideramos un polímero sumergido en un baño térmico (una temperatura  $T$ ). Un polímero se puede modelar como una cadena de monómeros que pueden rotar libremente con respecto a los puntos de conexión entre ellos. Sucede que, cuando un polímero no está estirado, éste tiende a retorcerse de varias maneras. Sin embargo, cuando se le aplica una fuerza, la cantidad de configuraciones en las que este puede retorcerse es claramente menor al caso cuando no se le trataba de estirar. El caso no estirado implica una entropía mayor al caso estirado, por lo que el sistema tiene la tendencia estadística de retornar a su estado de mayor entropía, esta tendencia se traduce en lo que se conoce como fuerza elástica (Ley de Hooke), en este sentido la fuerza elástica efectiva del polímero es una fuerza entrópica [1].

### **Entrelazamiento:**

El entrelazamiento es un fenómeno cuántico que permite que una partícula inflencie el estado de otra instantáneamente aunque estén a años luz de distancia, aun sin violar el principio de relatividad especial. Este fenómeno fue denominado por Einstein como “*acción Fantasmal a distancia*”.

La descripción cuántica de un sistema de muchas partículas no es, en general, equivalente a una suma de descripciones de cada partícula por separado. En realidad, el estado cuántico puede involucrar una conexión entre las distintas partículas mucho más fuerte de la que permite la física clásica. Así, por ejemplo, podemos tener dos partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , en las que su estado total venga dado por

$$|\text{arriba,abajo}\rangle + |\text{abajo,arriba}\rangle. \quad (2.19)$$

Es decir: si un spin está hacia arriba, el otro está hacia abajo. No sabemos en qué estado está cada uno, pero sabemos que el otro está siempre en el estado opuesto. Si medimos sobre uno, el otro “elige” inmediatamente el estado correspondiente, aunque quizá estén a años-luz de distancia. Sin embargo, debido a la aleatoricidad de los resultados de las medidas, este mecanismo no puede utilizarse para transmitir información a mayor velocidad que la luz. Este efecto se conoce como paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR).

### Entropía de Entrelazamiento:

La entropía de entrelazamiento, o entropía de von Neumann, entre dos sistemas cuánticos nos indica la información que perdemos cuando observamos solo uno de los sistemas olvidando el otro sistema. Aunque la información cuántica se mide en “qubits”, el análogo cuántico del bit, la entropía de entrelazamiento se mide en bits usuales. Si  $\rho$  es la matriz densidad que describe el sistema cuántico en el que nos fijamos, la entropía de entrelazamiento se calcula como

$$S = -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (2.20)$$

que en la práctica se obtiene diagonalizando la matriz densidad, obteniendo sus autovalores,  $\{\lambda_k\}$ . Como  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , tenemos que

$$\sum_k \lambda_k = 1, \quad (2.21)$$

y, por tanto, estos autovalores se pueden entender como una distribución de probabilidad. Ahora sólo debemos calcular la *entropía de Shannon* asociada a dichos valores:

$$S = -\sum_k \lambda_k \log \lambda_k. \quad (2.22)$$

Con frecuencia, la entropía de entrelazamiento puede ser descrita por la ley del área: es proporcional a la medida de la frontera física entre los dos sistemas. En 1994, Ted Jacobson propuso que la entropía de un agujero negro podría interpretarse como entropía de entrelazamiento entre el interior y el exterior de horizonte de sucesos, resultando entonces proporcional al área de dicho horizonte.

En conclusión, lo que se ha sugerido es que es posible explicar la naturaleza de la gravedad en base a *información*, dicha información podemos codificarla en bits, y un bit es la información disponible que se tiene cuando se sabe con certeza la respuesta a una pregunta del tipo “*si / no*”, que llamamos *entropía*.

A continuación, presentaremos 2 modelos adicionales, con el objetivo de tener una visión general del tema.

### 2.4.2. Argumento de Jacobson

En 1995, Jacobson, publicó un artículo [20], titulado “Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State”, el cual muestra como la ecuación de Einstein puede emerger de la termodinámica en forma de ecuación de estado. En ese mismo artículo afirma: *esta perspectiva sugiere que cuantizar las ecuaciones de Einstein no tiene más sentido que cuantizar la ecuación de ondas para el sonido en el aire.*

Supongamos conocida la expresión para la entropía del sistema  $S(E, V)$ , que viene dada en función de la energía y el volumen. A través de ella se puede deducir la ecuación de estado (2.10). Asumamos que el flujo de calor viene dado por  $Q = T\Delta S$ . Usando la primera ley de la termodinámica (2.8), llegamos a

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV. \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.10) e iguala a (2.8) tenemos

$$T \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right) dE + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right) dV \right] = dE + pdV, \quad (2.24)$$

llegando a la expresión de la *ecuación de estado*:

$$p = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right). \quad (2.25)$$

Así, por ejemplo, en un gas ideal  $S \propto \log V$  y eso nos lleva a  $p \propto T/V$ .

Jacobson, sin embargo, aplicó la ecuación de estado (2.25) a un sistema gravitatorio, en el que el calor es la energía que atraviesa un horizonte. Asumiendo que la entropía escala con el área, en lugar de con el logaritmo del volumen, y que la temperatura es proporcional a la aceleración de la gravedad sobre la superficie del mismo, Jacobson fue capaz de demostrar la ecuación de Einstein (2.4).

Finalmente concluye diciendo: “si la relación termodinámica de equilibrio (2.10) es válida para cualquier horizonte casual, las ecuaciones de Einstein deben cumplirse”.

### 2.4.3. Modelo de Verlinde

En el 2011, Erik Verlinde publicó un artículo [27] titulado “*On the origin of gravity and the laws of Newton*”, el cual da argumentos heurísticos en favor de la tesis de que la gravedad es una fuerza entrópica causada por cambios en la información disponible.

El artículo de Verlinde [27] empieza definiendo fuerza entrópica como una fuerza macroscópica que se origina en un sistema con muchos grados de libertad debido a la tendencia natural a aumentar su entropía. Continúa explicando, en un entorno no relativista, cómo aparecen las leyes de Newton. Consideremos una partícula de masa  $m$  que atraviesa una superficie holográfica (es decir, cuya entropía sea proporcional al área), y aceptemos que el incremento de la entropía es proporcional al desplazamiento de la misma y a su masa.

$$\Delta S \propto m\Delta x, \quad (2.26)$$

Asume, además, una constante de proporcionalidad que le resulta conveniente para el cálculo futuro:

$$\Delta S = \frac{2\pi k_B m c}{\hbar} \Delta x, \quad (2.27)$$

De aquí, la naturaleza de fuerza entrópica dice que  $F\Delta x = T\Delta S$ . Asumiendo, además, la temperatura de Unruh  $k_B T = \hbar a / 2\pi c$ , se obtiene

$$F = \frac{T\Delta S}{\Delta x} = ma. \quad (2.28)$$

A continuación, Verlinde regresa al principio holográfico y asume que la cantidad de información (en bits) en una superficie es proporcional a su área  $A$ :

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}. \quad (2.29)$$

Supone que existe un total de energía presente en el sistema, que cumple el principio de equipartición:

$$E = \frac{1}{2} N k_B T. \quad (2.30)$$

Esta energía (2.30) se corresponde a una cierta masa, dividiendo por  $c^2$ ,

$$M = \frac{1}{2} N k_B T / c^2. \quad (2.31)$$

Y de esta manera, sustituyendo en (2.27) obtenemos

$$F\Delta x = \left(\frac{2GM\hbar}{Ack_B}\right) \left(\frac{2\pi k_B mc\Delta x}{\hbar}\right) = \frac{4\pi GMm\Delta x}{A} \quad (2.32)$$

Donde:  $A = 4\pi R^2$ , entonces obtiene (2.33) una ley familiar, La ley de Gravitación de Newton.

$$F = \frac{GMm}{R^2}. \quad (2.33)$$

Vemos que, de manera heurística, Verlinde fue capaz de deducir la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal postulando el carácter entrópico de la gravedad. ¿Podemos considerar rigurosos estos cálculos? En realidad, a diferencia de la deducción de Jacobson [20], la discusión de Verlinde se queda en el terreno de la sugerencia.

Para explicar la naturaleza de la gravedad se necesita información de un objeto, dicha información se puede codificar en superficies holográficas en bits. De acuerdo con el principio holográfico, la cantidad de información es proporcional al área y esta cantidad de información en física se mide en términos de entropía.

Por lo tanto, partiendo del principio holográfico, Verlinde dedujo las leyes de Newton y las ecuaciones de Einstein, concluyendo que los cambios de entropía (cambios de información) dan origen a una fuerza de naturaleza entrópica como es la gravedad emergente, que actualmente no está probado.

Al hablar de gravedad como fuerza entrópica, se puede concluir que Jacobson demostró que las ecuaciones de campo de Einstein son una consecuencia de la termodinámica de Bekenstein. Esta idea fue complementada por Verlinde, cuando propuso que la gravedad podría ser una fuerza entrópica. Conjeturó que la gravedad resultaría ser un fenómeno emergente, es decir, producto de la complejidad de una serie de interacciones subyacentes que quedarían sin especificar. Este enfoque es similar a la termodinámica de gases ideales, que no necesita conocer cuáles son las interacciones específicas entre las moléculas para poder hacer predicciones sobre el comportamiento macroscópico.

# Capítulo 3

## MODELO ESTADÍSTICO

Esta segunda parte del trabajo consiste en el estudio de un modelo sencillo de interacción que conduce a una fuerza entrópica atractiva entre partículas puntuales. El modelo ha sido diseñado por mí y por mi tutor, y constituye una contribución original, si bien bastante moderada, al análisis de las fuerzas entrópicas y su posible relación con la gravedad. El objetivo del capítulo es la descripción y análisis de las propiedades físicas del modelo, así como la extracción de conclusiones a partir de él, considerando que el modelo no tiene por qué reproducir las características que requeriría una teoría de la gravedad.

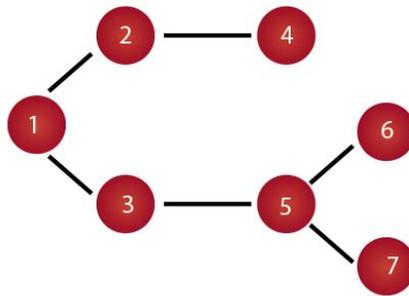
Antes de describir formalmente el Modelo Estadístico de Fuerza Entrópica, es importante que presentemos los fundamentos más relevantes del estudio de grafos (redes). Los mismos que serán cruciales para el análisis del modelo estadístico.

### 3.1. TEORÍA DE GRAFOS

Existe una gran cantidad de sistemas naturales cuyo comportamiento emergente es el resultado de la interacción de un gran número de componentes que, por diversas influencias, interaccionan entre sí. De esta forma, su estructura puede ser descrita en términos de una red de nodos con cierto tipo de uniones entre ellos [6]. Esta red puede tener una estructura compleja, cuyas

propiedades pueden inducir cierto comportamiento emergente en el sistema.

Leonhard Euler en 1736, fue el primero en estudiar los grafos como tales al resolver el problema conocido como “*Los Siete Puentes de Königsberg*” [6]. Un grafo es una representación gráfica formada por un conjunto de nodos (vértices) conectados mediante aristas (enlaces) (Ver figura (3.1)).



**Figura 3.1: Representación gráfica de un Grafo, donde los nodos están representados por puntos numerados (sitios) y las uniones mediante líneas (enlaces)**

Un grafo presenta las siguientes características:

- Un grafo tiene nodos  $N$  y aristas  $L$ .
- Cada vértice o nodo  $n_i$  viene determinado por su orden  $i$  en el conjunto  $N$ .
- El enlace entre los vértices  $n_i$  y  $n_j$  se denota por  $l_k = (i, j) = (n_i, n_j) = l_{ij}$ .
- Si dos nodos están enlazados, se llaman adyacentes.
- Una arista de la forma  $l_k = (i, i)$ , es decir, conecta el nodo  $i$  consigo mismo se denomina auto-uni6n. No consideraremos grafos que contengan este tipo de aristas.
- Dos aristas que unen dos mismos vértices se llaman aristas paralelas. Tampoco serán consideradas en este trabajo.
- Aristas que tienen en com6n un vértice se llaman aristas adyacentes.

### 3.1.1. Tipos de Grafos

De acuerdo a su orientación los grafos pueden clasificarse en:

#### Grafos Dirigidos

Llamado también digrafo, Son grafos en los cuales cada vértice tiene una dirección apuntada de un vértice a otro. De forma que no se cumple necesariamente que  $l_{ij} = l_{ji}$ . Estos grafos forman matrices posiblemente asimétricas.

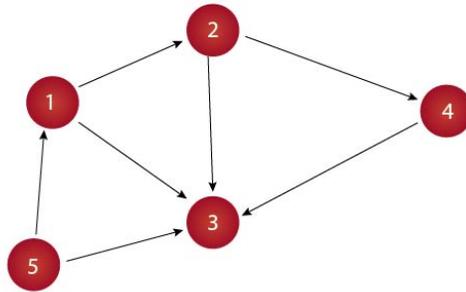
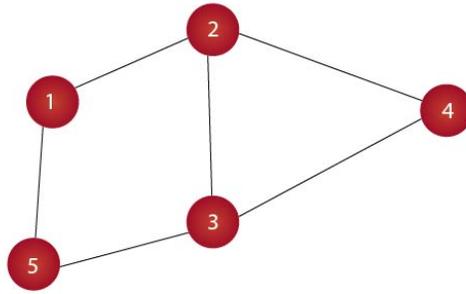


Figura 3.2: Grafo Dirigido

#### Grafos no Dirigidos

Son grafos en los cuales las aristas son relaciones simétricas y no apuntan en ningún sentido en particular. De forma que se cumple  $l_{ij} = l_{ji}$ . Estos grafos forman matrices simétricas.



**Figura 3.3: Grafo no Dirigido**

El grafo que utilizaremos para representar nuestro modelo estadístico será el grafo no dirigido. A lo largo de este documento nos centraremos en las características solo de este tipo de grafo.

### 3.1.2. Representación de Grafos

Sea dirigido o no dirigido, una manera conveniente de describir un grafo es a través de una matriz cuadrada  $N \times N$  llamada *matriz de adyacencia*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe un enlace entre los nodos,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Por ejemplo, la matriz de adyacencia de la figura (3.3) es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

De la matriz adyacencia se debe tener en cuenta dos aspectos:

- Que es una matriz simétrica ( $A_{ij} = A_{ji}$ ).
- Los elementos de la diagonal principal son ceros (sin auto-conexiones)

### 3.1.3. Grafos Planos y Grafos Regulares

#### Grafo Plano

Son grafos que se pueden dibujar en un plano, sin que dos segmentos se corten, es decir sin tener bordes cruzados [23], como se muestra en la figura.

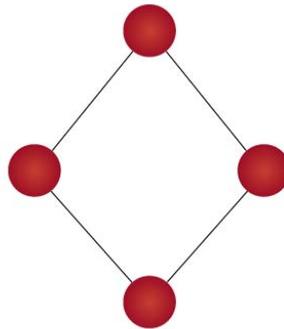


Figura 3.4: Grafo Plano

#### Grado de un Grafo

En una red no dirigida el grado de un nodo  $i$  se define como el numero de bordes conectados a él [23], denotado por  $k$

$$k_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{ji} \quad (3.3)$$

## Grafo Regular

Los grafos regulares son redes en las que todos sus vértices tienen el mismo grado ( $k$ ). Un ejemplo de este tipo de grafos son las redes periódicas [23], como se muestra a continuación.

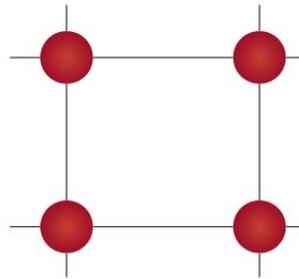


Figura 3.5: Red Regular de Grado 4

### 3.1.4. Caminos en un Grafo

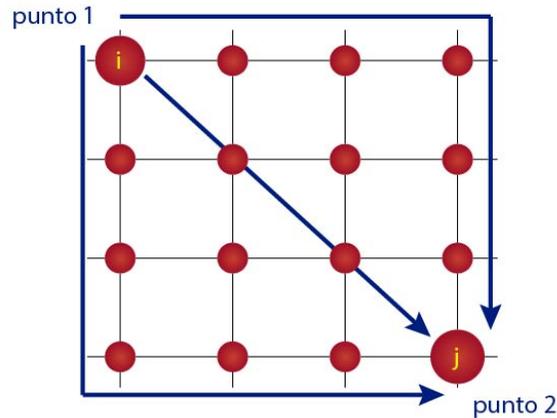
Un camino es una trayectoria a través de la red que va de un vértice a otro vértice a lo largo de los bordes del grafo (Ver Figura 3.6). En un grafo no dirigido los bordes pueden atravesarse en cualquier dirección.

Existen caminos de un tipo especial, denominados de *auto-evitación*, que no se cruzan a sí mismos. Dentro de ellos encontramos:

**Caminos Hamiltonianos:** Es la ruta que visita cada vértice exactamente una vez.

**Caminos Geodésicos:** Es la ruta más corta, entre dos vértices específicos.

Una pregunta que aparece con frecuencia es la que pide averiguar el *número* de caminos entre dos nodos, en un número de pasos  $m$ . La manera más sencilla es darse cuenta de que este número  $N_{ij}(m)$  viene dado por la entrada  $(i, j)$  de la matriz de adyacencia elevada a la potencia  $m$ :



**Figura 3.6:** Caminos en un Grafo entre el punto 1 y punto 2, donde las flechas de color azul representan dos posibles caminos que se pueden tomar para llegar de  $i$  (punto 1) a  $j$  (punto 2)

$$\# \text{ Caminos entre } i \text{ y } j \text{ en } m \text{ pasos} = (A^m)_{ij}. \quad (3.4)$$

Obtener potencias de una matriz es una tarea fácil cuando ésta puede ser diagonalizada. Una matriz cuadrada y simétrica  $A$  es diagonalizable si existe una matriz  $U$  regular y una matriz  $D$  diagonal, ambas de la misma dimensión, de modo que se cumple:

$$A = U \times D \times U^T. \quad (3.5)$$

La matriz  $D$  contiene en su diagonal los autovalores,  $U$  es una matriz cuyas columnas son los autovectores de  $A$  y  $U^T = U^{-1}$  es decir, la matriz de los autovectores es ortogonal, debido a que  $A$  es una matriz simétrica, para un grafo no dirigido. Todas las matrices simétricas con coeficientes reales son diagonalizables.

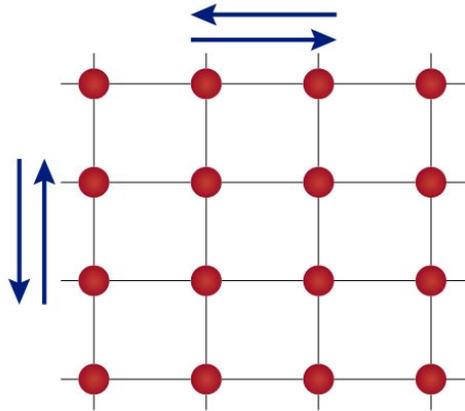
Las potencias de  $A$  son triviales de obtener a partir de la diagonalización, haciendo uso de la expresión

$$A^m = U \times D^m \times U^T. \quad (3.6)$$

Es decir: basta con elevar los autovalores de  $A$  a la potencia deseada.

## 3.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTADÍSTICO

Partamos de una red, es decir, un conjunto de  $N$  nodos unidos entre ellos mediante  $N_L$  enlaces. Todos los nodos son equivalentes, así como todos los enlaces, que pueden ser recorridos en ambos sentidos. Supusimos que la red es plana y regular por sencillez. Por ejemplo, una red cuadrada de tamaño  $L_x \times L_y$ .



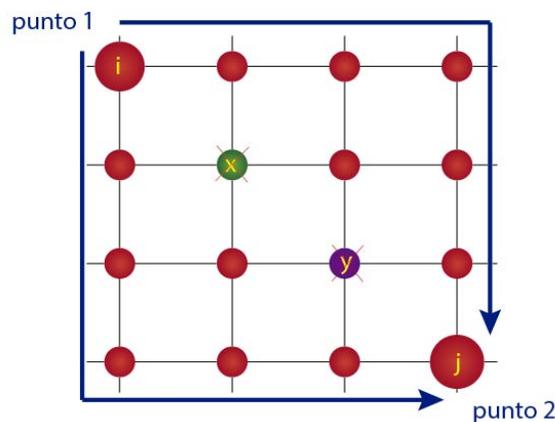
**Figura 3.7:** Red Plana y Regular de tamaño  $4 \times 4$  con enlaces que pueden ser recorridos en ambos sentidos como lo indican las flechas de color azul

Consideramos dos puntos de la red cualesquiera, y busquemos un camino de longitud mínima entre ellos (Ver figura (3.7)). Es decir, un conjunto mínimo de enlaces de la red que conecte ambos puntos. Llamamos a tal camino mínimo una geodésica. Para algunos pares de puntos la geodésica es única. Por ejemplo, cuando dos puntos están en la misma línea vertical de una red cuadrada. En cambio, en otros casos la geodésica será fuertemente degenerada, como cuando dos puntos están situados a lo largo de una diagonal. El número de pasos de una geodésica nos define la distancia entre los dos nodos de la red.

Imaginamos que nuestro sistema físico es una geodésica de  $L$  pasos que va fluctuando. En otras palabras, el espacio de configuración está formado por todas las geodésicas de longitud  $L$ , y el

sistema va saltando aleatoriamente de una a otra, siendo todas equiprobables. El ritmo al que fluctúan estará dado por una cierta temperatura, que no nos interesa.

Conjeturamos que dos partículas entran en nuestra red (Ver figura 3.8), y que solo pueden situarse en sendos nodos (diferentes). Los dos nodos utilizados por ellas desaparecen de manera efectiva de nuestra red: las geodésicas no pueden pasar por ellos, ni empezar ni terminar allí. El número de geodésicas posibles de longitud  $L$  será ahora menor. Si las partículas están juntas, obstaculizarán un menor número de geodésicas que si están separadas.



**Figura 3.8:** Red Cuadrada ocupada por un par de partículas  $x, y$

Imaginemos que las posiciones de las partículas también están sometidas a fluctuaciones aleatorias, tal como las geodésicas. Y nos preguntamos, ¿qué sucederá al cabo del tiempo? El sistema pasará mucho más tiempo en las configuraciones macroscópicas a las que corresponde un mayor número de configuraciones microscópicas. Por tanto, el sistema pasará más tiempo con las partículas juntas que separadas. En otras palabras: las partículas *parecerán atraerse*.

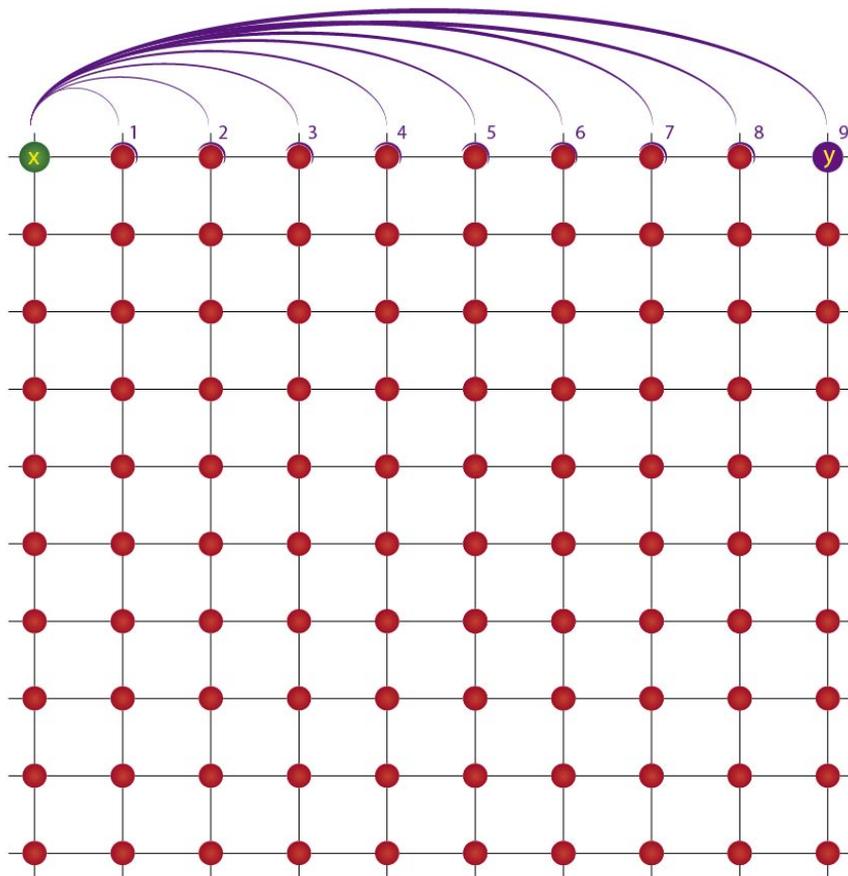
### 3.3. ANÁLISIS DEL MODELO

Existen diferentes formas de representar un grafo para almacenarlo en una computadora. La estructura de los datos depende del grafo y del algoritmo deseado. Debido a que los cálculos no pudieron ser realizados analíticamente, se ha utilizado un sistema de cálculo que en este caso

es C++. A continuación, se detallarán los pasos que se han seguido para la caracterización de este modelo.

### 3.3.1. Interacción entre partículas

1. Elegimos la red básica cuadrada y la longitud de las geodésicas que vamos a considerar  $L$ , (Ver figura 3.9).



**Figura 3.9:** Red Cuadrada de tamaño  $10 \times 10$  ocupada por un par de partículas  $x$  e  $y$ , donde  $x$  permanece fija en el sitio 1 mientras que  $y$  recorre a lo largo de toda la fila, dicho recorrido esta representado por las líneas de color morado)

2. Elegimos dos posiciones cualesquiera para las partículas,  $x$  e  $y$ . “Bloqueamos” esas dos posicio-

nes y calculamos el número de geodésicas existentes,  $N(x, y)$ , para los tres casos anteriormente mencionados (Ver figura 3.9).

3. La entropía ( $S(x, y) = \log N(x, y)$ ) será entonces función de dichas posiciones.

4. La energía libre será  $F = -TS$ , de manera que la fuerza se puede obtener derivando dicha energía libre con respecto a las posiciones de cada una de las partículas.

### 3.3.2. Estimación de la entropía

Para estimar la entropía aplicaremos el siguiente razonamiento. Consideramos un grafo arbitrario no dirigido,  $A$ , caracterizado por una matriz de adyacencia. Entonces sabemos que:

$$(A^2)_{ij} = \sum_k A_{ik}A_{kj}. \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) representa el número de maneras en las que se puede ir de  $i$  a  $j$  en exactamente dos pasos. De la misma manera,  $(A^n)_{ij}$  es el número de maneras en las que se puede ir de  $i$  a  $j$  en exactamente  $n$  pasos.

Para estimar el número de caminos de manera eficiente vamos a suponer que una vez diagonalizada la matriz de adyacencia (Ver (3.5)). Tenemos:

$$(A^n)_{ij} = [(UDU^T)^n]_{ij} = [UDU^T \dots UDU^T]_{ij} = [UD^nU^T]_{ij} \quad (3.8)$$

Es decir: el número de caminos entre los sitios  $i$  a  $j$  está determinado por los autovalores (elevados a la  $n$ -ésima potencia) y los autovectores correspondientes. Podemos especificar un poco más, asumiendo que los autovalores son  $\lambda_k$ :

$$(A^n)_{ij} = \sum_k U_{ik}\lambda_k^n \bar{U}_{jk}. \quad (3.9)$$

Donde  $k$  es un índice que recorre los autovalores, y  $\bar{U}_{kj}$  es el complejo conjugado de  $U_{kj}$ , en caso de que la matriz fuera compleja (no es nuestro caso).

El número de caminos tras  $n$  pasos entre dos sitios  $i$  y  $j$  puede depender fuertemente de la elección de dichos sitios. Podemos, sin embargo, definir un número de caminos promedio, si sumamos para todas las parejas  $i$  y  $j$  y dividimos entre el número de ellas.

Si  $N$  es el número de sitios en nuestro grafo, tenemos:

$$\# \text{ Caminos promedio}(n) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j,k} U_{ik} \lambda_k^n \bar{U}_{kj}, \quad (3.10)$$

Consideramos los autovalores ordenados de manera ascendente:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ . Entonces, (3.10) estará dominada por el autovalor mayor (que podemos suponer único):

$$\# \text{ Caminos promedio}(n) = \frac{1}{N^2} \lambda_N^n \sum_{i,j,k} U_{ik} \left( \frac{\lambda_k^n}{\lambda_N^n} \right) \bar{U}_{kj} \approx \frac{\lambda_N^n}{N^2} \quad (3.11)$$

Como cada columna de  $U$  es un vector normalizado, quiere decir que  $\lambda_N$ , el autovalor más alto, es el que domina el número de caminos promedio. El logaritmo de dicho número de caminos promedio viene dado por:

$$\log(\# \text{ Caminos promedio}(n)) \approx n \log(\lambda_N) - \log(N^2) \quad (3.12)$$

Es decir, que salvo una constante inocua, es proporcional a  $n$ , y la constante de proporcionalidad es  $\log \lambda_N$ . Es por eso que podemos afirmar que  $\log \lambda_N$  se comporta como una *densidad de entropía*.

### 3.3.3. Diagrama de flujo del cálculo

- Generamos un grafo cuadrado de tamaño  $L \times L$ , donde  $L = 10, 30, 60$  respectivamente.

- Consideráramos para todos los valores de  $i$  entre 2 y 1.
- Generamos un segundo grafo que es igual al primero, pero eliminando dos sitios elegidos estratégicamente.
- Evaluamos la matriz de adyacencia, la diagonalizamos.
- Finalmente escribimos el autovalor más alto, que corresponde al valor de la **Densidad de Entropía**.

### 3.4. RESULTADOS

Esta sección discute los resultados numéricos obtenidos a partir de nuestro Modelo Estadístico de Fuerza Entrópica Gravitatoria. Utilizamos una teoría de campos estadística, controlada únicamente por una entropía, donde las partículas jugarán el papel de *fronteras*, que afectan la entropía.

El modelo intenta capturar al menos una las siguientes propiedades, que se espera que estén presentes en cualquier modelo de cómo puede surgir la gravitación:

- El estado de vacío del espacio-tiempo contiene grados de libertad desconocidos.
- Los grados de libertad conducen a diferentes probabilidades para diferentes estados de vacío, a partir de los cuales podemos definir una entropía.
- El ingreso de las partículas perturba el vacío.
- El acercamiento de las partículas tenderá a aumentar la entropía.
- La fuerza de atracción varía suavemente cuando se varía la distancia entre las dos partículas.

### 3.4.1. Red Cuadrada

Entre las opciones que consideramos para testear nuestro modelo, observamos mejores resultados en 2 casos particularmente debido a que los cálculos realizados no solo se aplicaron a una Red Cuadrada sino también a una Red Hexagonal, cuyo detalle se encuentra más adelante.

#### Caso 1: Las dos partículas sobre la misma fila de una red cuadrada L x L

Para L= 10

Generamos una red cuadrada de  $10 \times 10$  e introducimos dos partículas, donde una de ellas la mantuvimos fija en una esquina (Ver Figura 3.9), y la otra partícula la movimos horizontalmente a lo largo de la misma fila, obteniendo así los resultados descritos en la tabla 3.1, cuya representación gráfica está dada en la figura 3.10.

Distancia	Densidad de Entropía
2	3.96718621909
3	3.96031205129
4	3.95534523912
5	3.95219168489
6	3.95109152915
7	3.95219168489
8	3.95534523912
9	3.96031205129
10	3.96718621909

Tabla 3.1: Densidad de Entropía de una Red Cuadrada de  $10 \times 10$

Posteriormente procedimos ajustar la curva a la función

$$f(x) = a|x - b|^c + d, \tag{3.13}$$

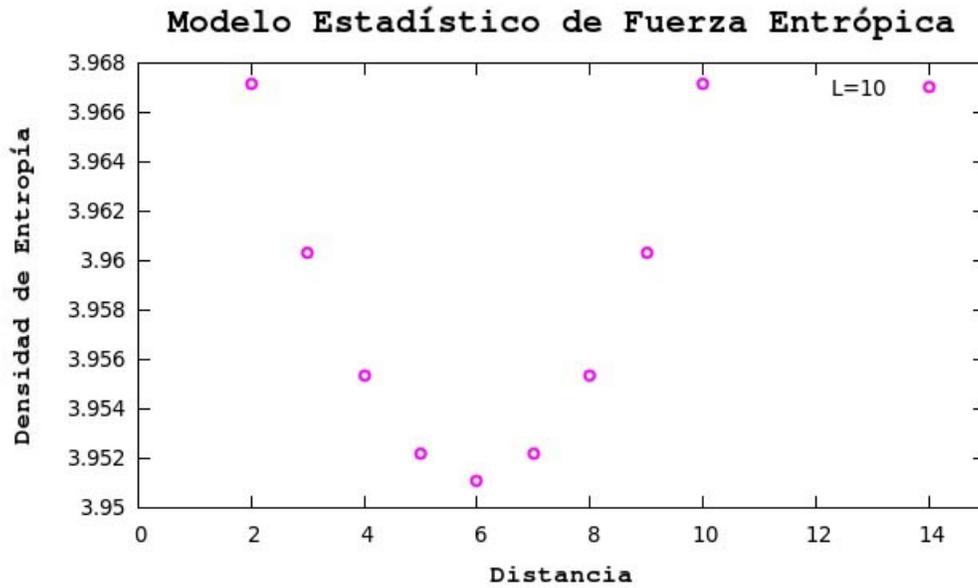


Figura 3.10: **Red Cuadrada de  $10 \times 10$**

donde  $a$  es la amplitud de la perturbación,  $d$  es el valor mínimo en el eje  $y$ ,  $b$  es el valor mínimo en el eje  $x$  (en este caso es  $b = 6$ ) y  $c$  es un exponente característico, cuyo valor más probable es  $c = 2$ . Los valores de los parámetros resultantes son:

$$a = 0,001001, d = 3,95123. \quad (3.14)$$

Después de 5 iteraciones del algoritmo de ajuste no lineal de Gnuplot, el ajuste converge, como se puede observar en la gráfica 3.11.

Por lo tanto, tratamos la entropía como un potencial y definimos a la fuerza entrópica como:

$$F_x = -\nabla S = \frac{dS}{dx}, \quad (3.15)$$

$$F_x = -2a(x - b), \quad (3.16)$$

obteniendo así la energía libre (3.17):

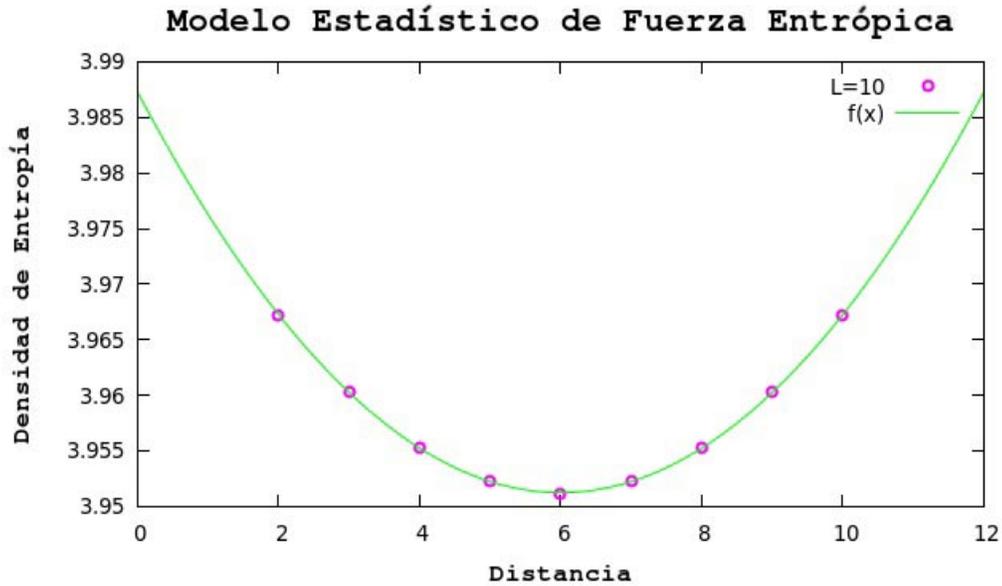


Figura 3.11: Red Cuadrada de  $10 \times 10$

$$F = 2a(x - b). \quad (3.17)$$

Observamos que, como se predijo, cuanto más cerca estén las partículas mayor es la entropía.

A continuación presentamos la representación gráfica de los valores obtenidos para la Densidad de Entropía para una red cuadrada con  $L = 30, 60$  respectivamente.

**Para  $L = 30$**

Los valores de los parámetros resultantes son, tras seis iteraciones del algoritmo de ajuste no-lineal de Gnuplot,

$$a = 7,30027 \cdot 10^{-6}, d = 3,99611. \quad (3.18)$$

Los resultados pueden observarse en la figura 3.12.

**Para  $L = 60$**

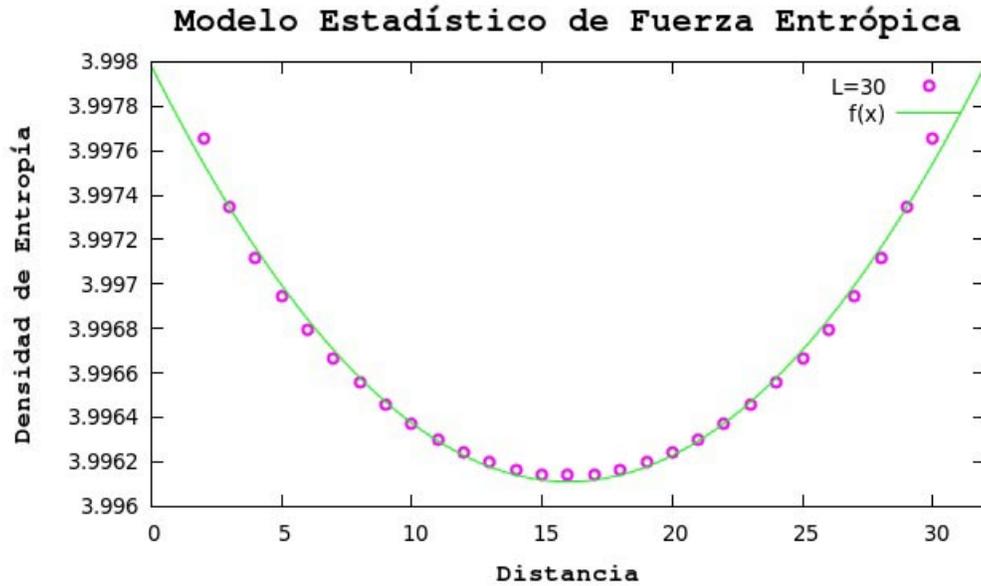


Figura 3.12: Red Cuadrada de  $30 \times 30$

Los valores de los parámetros resultantes son:

$$a = 3,51042 \cdot 10^{-7}, d = 3,99918. \quad (3.19)$$

Y la gráfica asociada es 3.13. Nótese que los valores de  $a$  decrecen rápidamente con  $L$ , mientras que los de  $d$  se acercan rápidamente a 4. No hemos hecho un análisis de tamaño finito de dichos valores, aunque resultaría muy conveniente realizarlo.

### Caso 2: Una de las partículas en el extremo superior y la otra partícula recorriendo toda la red cuadrada (horizontalmente)

En este caso, para una mejor visualización de los datos, realizaremos las representaciones gráficas en 3D. Por lo tanto, los datos están estructurados como una matriz. Sea  $A_{ij}$  el autovalor más alto de la red en la que hemos arrancado el sitio central y el sitio de coordenadas  $(i, j)$ . El resultado lo podemos ver, para  $L = 10$  y  $L = 30$ , en la figura 3.14.

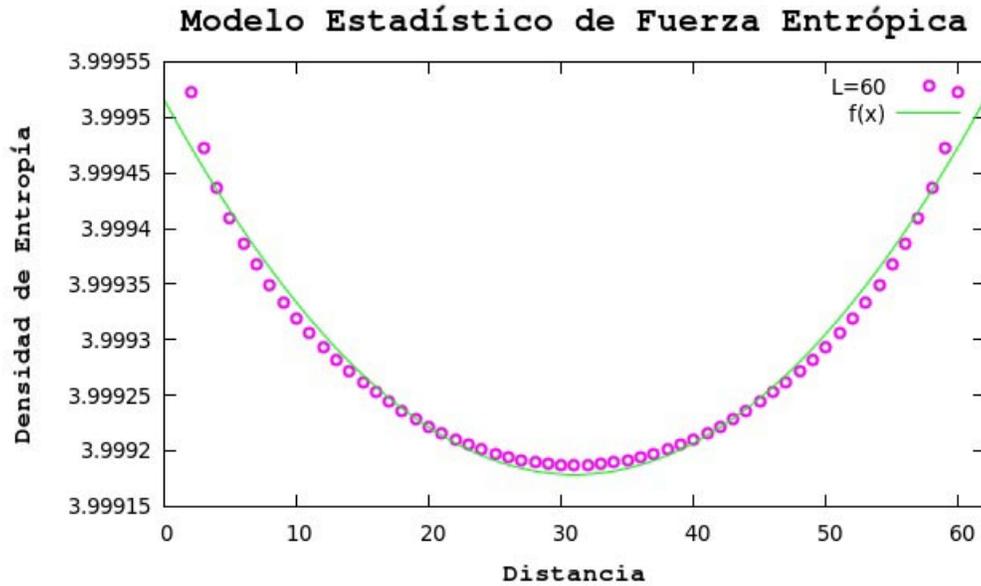


Figura 3.13: Red Cuadrada de  $60 \times 60$

### 3.4.2. Red Hexagonal

Consideramos que la red hexagonal (panal de abejas) se transforma en una “red de ladrillos” (brick lattice), como se muestra en la Figura 3.15.

Entonces creamos una red hexagonal, usando como base una red cuadrada subyacente, sobre la que dibujamos los enlaces en forma de ladrillos (Ver Anexos). Esta red hexagonal presenta condiciones de contorno periódicas, de tal manera que los resultados obtenidos sean parecidos al de la red cuadrada. Por lo tanto, bajo las mismas consideraciones y siguiendo el mismo algoritmo de la red cuadrada procedimos a trabajar con la red hexagonal con el objetivo de comparar resultados y obtener conclusiones a partir de ello.

#### Caso 1: Las dos partículas sobre la misma fila de una red hexagonal $L \times L$

Comencemos generando una cuadrada  $10 \times 10$  e introducimos dos partículas, donde una de ellas la mantuvimos fija en una esquina, y la otra partícula la movimos horizontalmente a lo largo de la misma fila, obteniendo así los siguientes resultados de la tabla 3.2. La representación gráfica

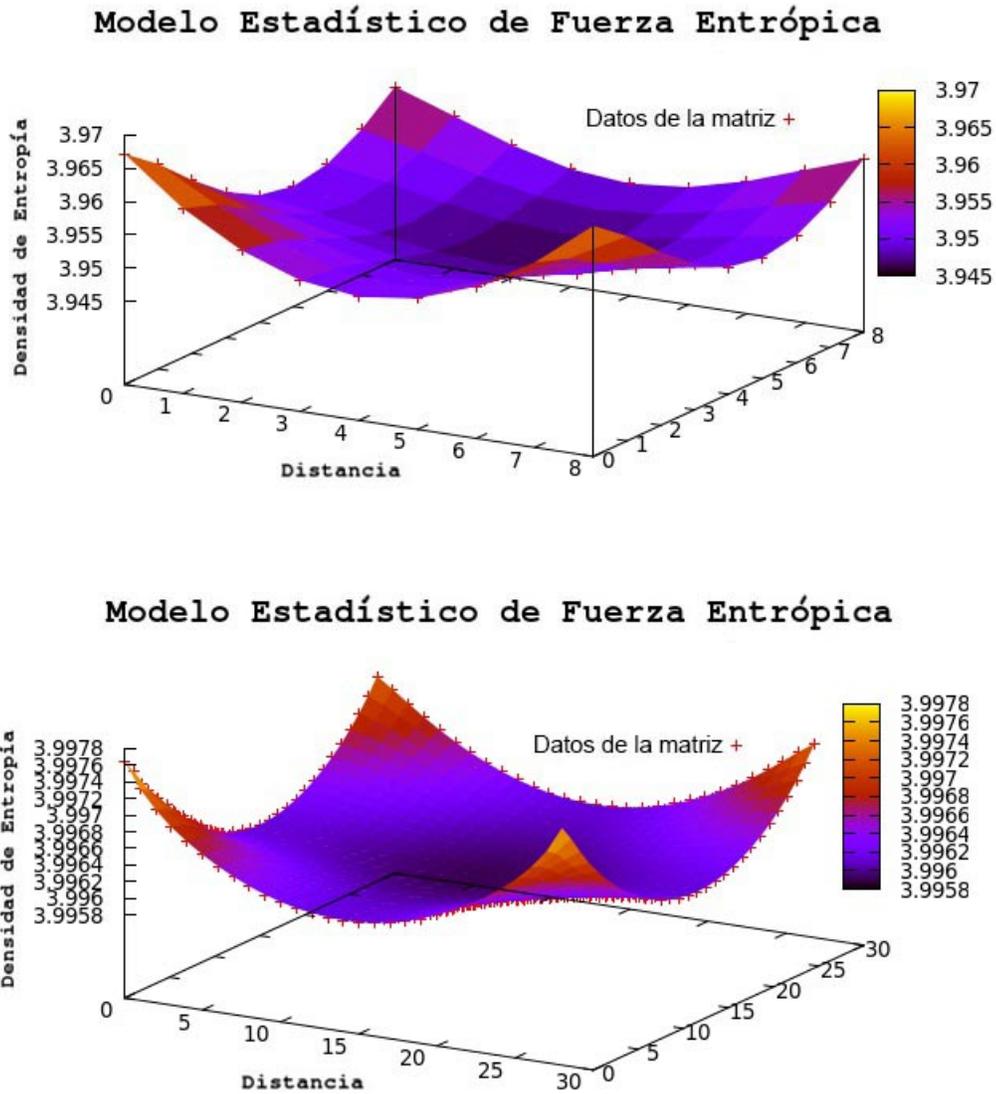


Figura 3.14: Arriba: Red Cuadrada de  $10 \times 10$ . Abajo: red cuadrada de  $30 \times 30$ .

de los datos de la tabla 3.2 está dada en la figura 3.16

Posteriormente, procedimos ajustar la curva a la función (3.13). Los valores de los parámetros resultantes son:

$$a = 0,000395589, d = 2,97573 \quad (3.20)$$

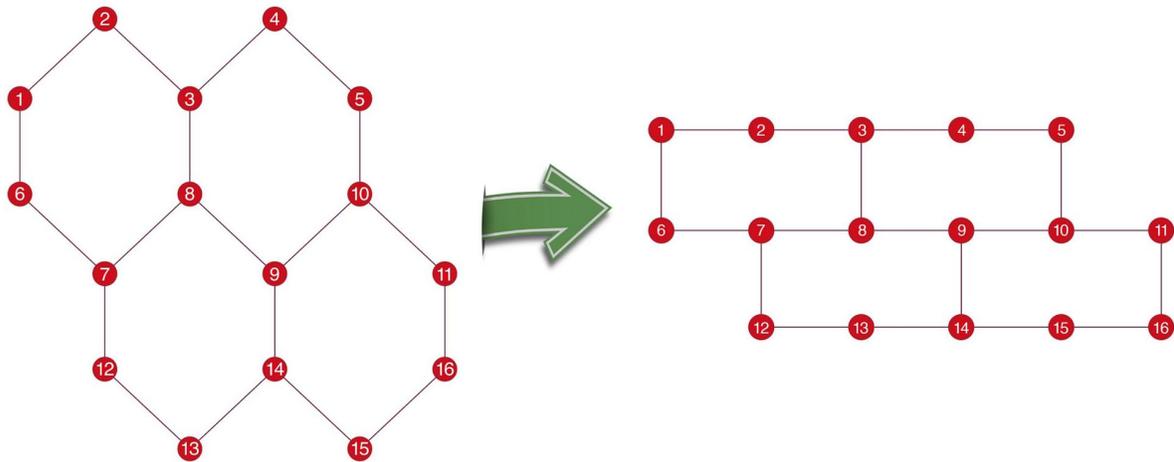


Figura 3.15: Red Hexagonal

Distancia	Densidad de Entropía
2	2.98204515654
3	2.97934382974
4	2.97726013381
5	2.97616934958
6	2.97569492791
7	2.97616934958
8	2.97726013381
9	2.97934382974
10	2.98204515654

Tabla 3.2: Densidad de Entropía de una Red Hexagonal de  $10 \times 10$

Después de 5 iteraciones, el ajuste del algoritmo de ajuste no-lineal de Gnuplot converge, como se puede observar en la siguiente gráfica, 3.17.

De nuevo, tratamos la entropía como un potencial y definimos a la fuerza entrópica como (3.15). Obteniendo la misma Energía Libre de la red cuadrada (3.17). A continuación presentamos la representación gráfica de los valores obtenidos para la Densidad de Entropía para una red hexagonal con  $L = 30, 60$  respectivamente, en la figura 3.18

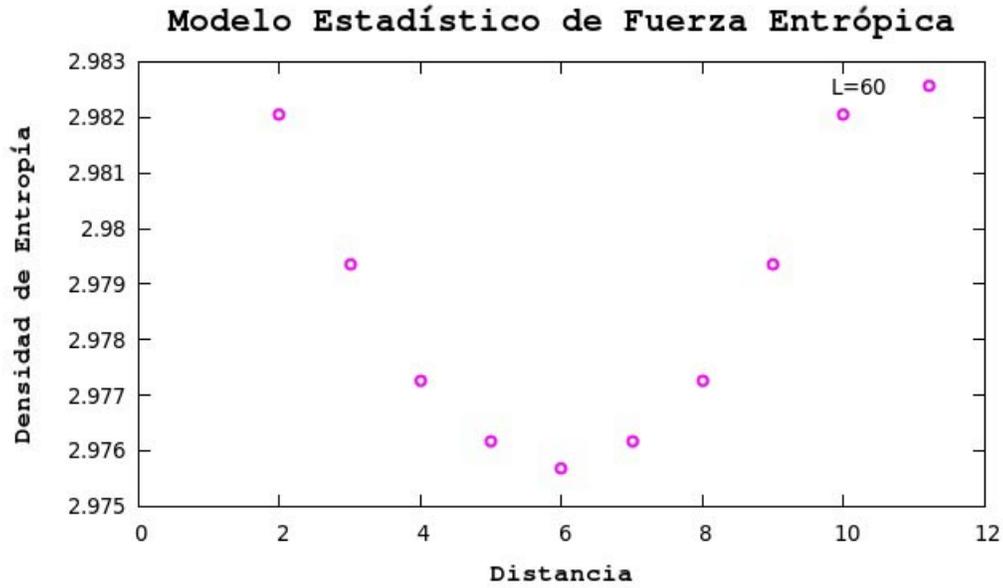


Figura 3.16: Red Hexagonal de  $10 \times 10$

**Caso 2: Una de las partículas en el extremo superior y la otra partícula recorriendo toda la red hexagonal (horizontalmente)**

En este caso, las figuras asociadas a los tamaños  $L = 10$  y  $L = 30$  son la figura 3.19.

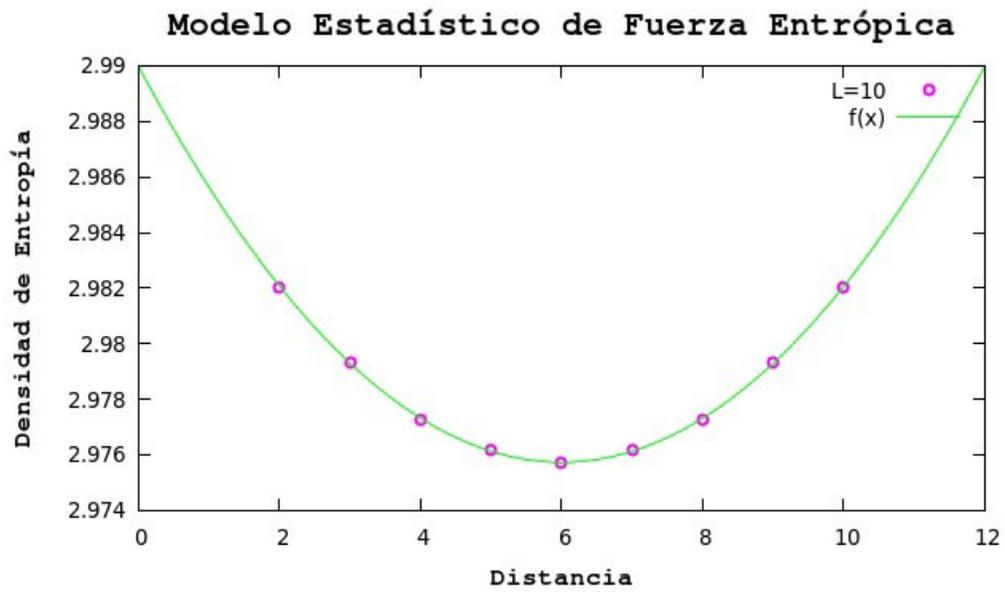


Figura 3.17: Red Hexagonal de  $10 \times 10$

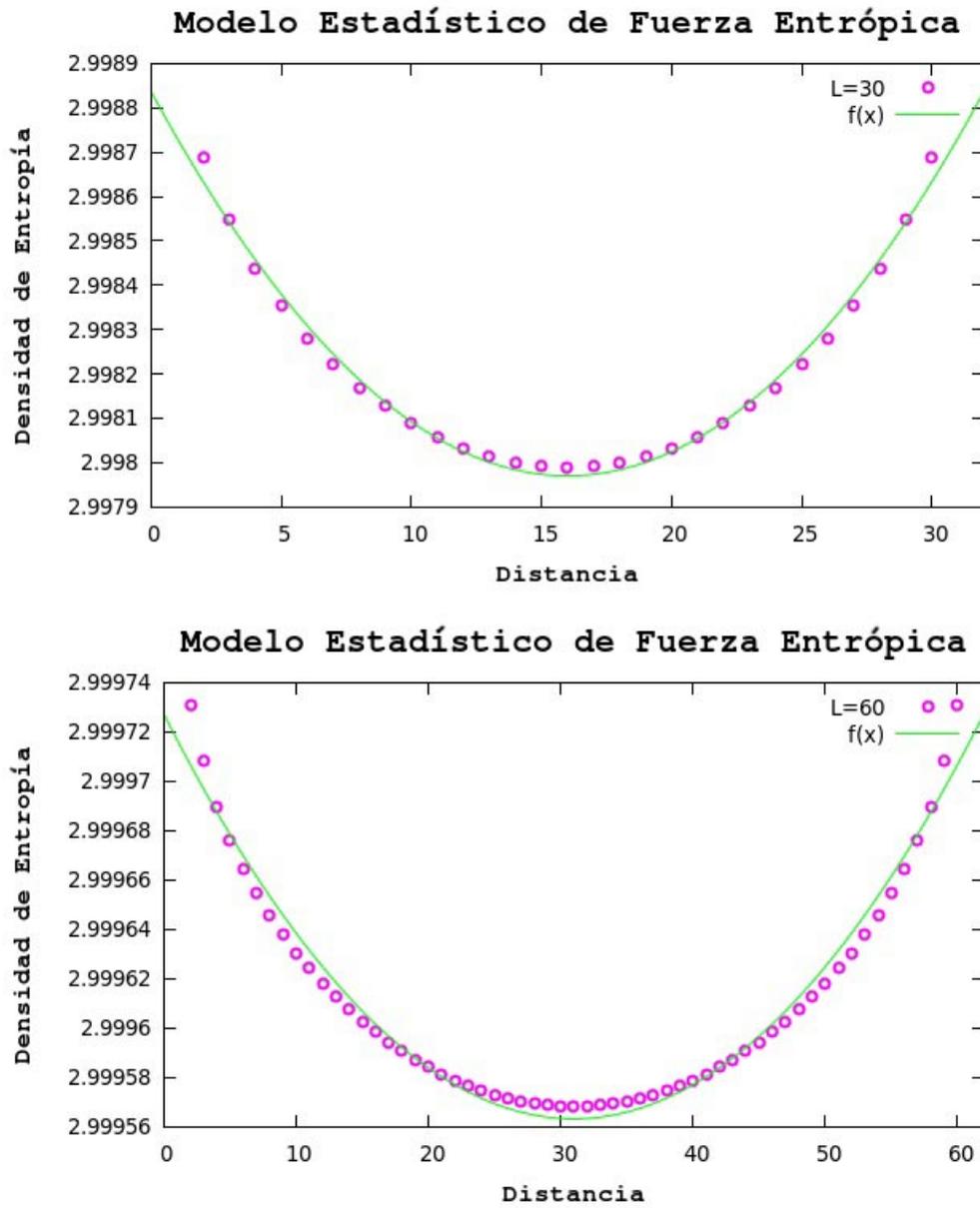


Figura 3.18: Arriba: Red Hexagonal de  $30 \times 30$ . Abajo: red hexagonal de tamaño  $60 \times 60$ .

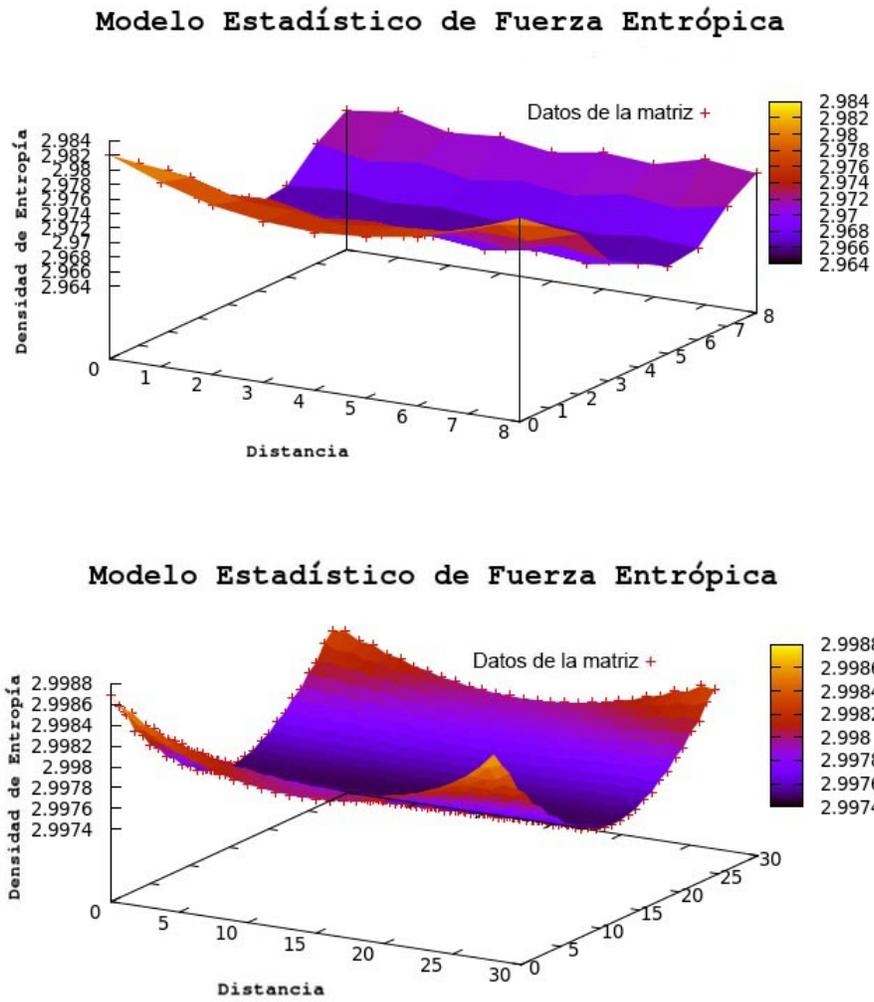


Figura 3.19: Arriba: red hexagonal de  $10 \times 10$ . Abajo: red hexagonal de tamaño  $30 \times 30$ .

# Capítulo 4

## CONCLUSIONES

Bekenstein propuso en 1972 que la temperatura de un agujero negro es proporcional a la aceleración de la gravedad en su superficie, y la entropía a su área. En 1995, Jacobson mostró cómo derivar las ecuaciones de Einstein termodinámicamente mediante la variación de la entropía en una superficie nula. En 2011, Verlinde hizo una atrevida propuesta, que generó un gran interés en el ámbito de la física teórica. Quizá la gravedad pudiera ser considerada como un fenómeno emergente, es decir, producto de la complejidad de una serie de interacciones subyacentes que quedaron sin especificar.

Entonces, si consideramos la pregunta: ¿Podría ser la gravedad una fuerza entrópica? Hay muchos argumentos para responder tentativamente *sí* a esta pregunta, aunque ninguno es definitivo. En efecto, la gravedad no combina bien con la mecánica cuántica. Asimismo, la gravedad puede recibir una interpretación termodinámica con facilidad, pudiendo ser mostrado que las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a una *ecuación de estado* termodinámica, una vez asumido el comportamiento de la entropía y la temperatura que dictó Bekenstein. Es muy probable que la gravedad no sea una interacción fundamental, pero no tenemos pruebas definitivas de este hecho.

La noción de emergencia nos dice que jamás podremos estar seguros de que una teoría concreta es fundamental, puesto que para ello hay que testearla a distancias infinitamente pequeñas. De

esta manera, todas las teorías tienen su “rango de validez” en escalas.

Finalmente, presentamos un modelo de juguete de fuerza entrópica. Muestra cómo se puede generar la atracción entre partículas en un simple espacio-tiempo, controlado únicamente por una entropía. Donde la entropía en base a los resultados obtenidos resulta ser proporcional al tamaño del sistema, y a la distancia que existe entre las partículas. Cuant más entropía produzca un proceso más probable es.

Sin embargo, nuestros resultados no son compatibles con el comportamiento de la gravedad. Así, nuestro modelo predice una fuerza efectiva de atracción entre las partículas proporcional a la distancia entre éstas, mientras que la gravedad en dos dimensiones debería caer con la distancia.

Estos resultados, sin embargo, no nos desaniman de la búsqueda. Es preciso generar intuición respecto a los fenómenos estadísticos asociados a las fuerzas entrópicas con el fin de determinar posibles mecanismos microscópicos de interacciones elementales que pudieran dar origen a la gravedad.

# Bibliografía

- [1] Anónimo. (27 de 08 de 2011). *Sobre la Naturaleza Entrópica de la Gravedad*. Obtenido de <https://norenormalizable.wordpress.com/2011/08/27/sobre-la-naturaleza-entropica-de-la-gravedad/>
- [2] Bekenstein, J. D. (1972). *Black holes and the second law*. *Lettere Al Nuovo Cimento* (1971–1985), 737-740.
- [3] Bekenstein, J. *Bekenstein Bound*. *Scholarpedia*, 3(10):7374, 2008. revisión 135542.
- [4] Bekenstein, J. D. (1973). *Black Holes and Entropy*. *PhysRevD*.7.2333, 2333-2333–2346.
- [5] Bekenstein, J. D. (2008). *Bekenstein-Hawking Entropy*. *Scholarpedia*,3(10), 7375.
- [6] Calderón, M. R. (2007). *Euler y la teoría de números*. UNIVERSIDAD IA, p. 91.
- [7] Carroll, S. M. y Remmen, G. N. (2016). *What is the entropy in entropic gravity?*. *Physical Review D*, 93(12), 124052.
- [8] Crowther, K. (2014). *Appearing out of nowhere: the emergence of spacetime in quantum gravity*. arXiv preprint arXiv:1410.0345.
- [9] Einstein, A. a. (2005). *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*. Alianza Editorial.
- [10] Fernández Cristóbal, J. (2010). *Radiación de Hawking*. *Revista mexicana de física E*, 56(2), 213-226.
- [11] Fulling, S. A. y Matsas, G. E. (2014). *Unruh effect*. *Scholarpedia*, 9(10), 31789.

- [12] García Doncel, M. (1989). *El Tiempo en la Física de Newton a Einstein*. Enrahonar: quaderns de filosofia, 39-59.
- [13] Garlick, M. (2019). *Todo sobre los agujeros negros: ¿Qué son, dónde están, qué pasaría si caemos dentro?* [Foto]. Recuperado de <https://actualidad.rt.com/actualidad/312138-donde-originar-agujeros-negros-pasar-ver-dentro>.
- [14] Hacyan, S. (1988). *Los Hoyos Negros y la Curvatura del Espacio-Tiempo*. México.
- [15] Hawking, S. W. (1976). *Black Holes and Thermodynamics*. Physical Review D, 13(2), 191.
- [16] Hawking, S. (1987). *Historia del tiempo: del big bang a los agujeros negros*. Ithaca, Nueva York.
- [17] Hawking, S. W. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Vol.1). Cambridge university press.
- [18] Hawking, S. W. (1975). *Particle Creation by Black Holes*. Commun. math. Phys. 43, 199–220, 199-220.
- [19] Iqbal, N. (2016). *Entanglement Entropy in Field Theory and Gravity*. PoS, 002.
- [20] Jacobson, T. (1995). *Thermodynamics of spacetime: the Einstein equation of state*. Physical Review Letters, 75(7), 1260.
- [21] López, C. T. (27 de 03 de 2018). *Las Ecuaciones de Campo de la Relatividad General*. Obtenido de <https://culturacientifica.com/2018/03/27/las-ecuaciones-de-campo-de-la-relatividad-general/>.
- [22] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., *Gravitation*, Freeman & Sons (1973).
- [23] Newman, M. (2018). *Networks*. Oxford university press, 107-167.
- [24] Oller, E. L. D. (1985). *Universo de Newton y de Einstein. Introducción a la filosofía de la naturaleza*. El. Herder.
- [25] Parentani, Renaud, and Philippe Spindel. *Hawking radiation*. Scholarpedia 6.12 (2011): 6958.

- [26] Susskind, L. (2009). *La guerra de los agujeros negros: una controversia científica sobre las leyes últimas de la naturaleza*. Grupo Planeta (GBS).
- [27] Verlinde, E. (2011). *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*. *Journal of High Energy Physics*, 2011(4), 29.
- [28] Wolfgang, P. y Wolfgang, L. (1976). *Biofísica*. Barcelona: Ediciones Omega.

# Anexos

## Programacion C++ para la Red Cuadrada

Con el fin de obtener los valores numéricos de las entropías hemos hecho uso del lenguaje de programación C++ complementado con las librerías HVB, desarrolladas por el equipo de investigación de mi tutor, y disponibles libremente en internet bajo licencia GPL:

<http://github.com/jvrlag/hvb>.

Estas librerías, a su vez, trabajan sobre los algoritmos desarrollados por BLAS-LAPACK. Pasamos a citar el código mínimo necesario para la obtención de los valores descritos en este trabajo de fin de máster.

```
// Entropic gravity from largest lattice eigenvalues
#include"Graph.h"
#include"Matrix.h"

int main()
{
    long L=10;
    Graph G=Square_Graph_PBC(L,L);
    printf("# Modelo Estadistico Entropico, L: %ld\n",L);
    printf("# d lambda_max\n");
```

```
for (long i=2;i<=L ;i++)
{
    Graph G2(G);
    G2.Remove_Site(i);
    G2.Remove_Site(1);
    Matrix A=G2.Adjacency_Matrix();
    Vector Eigen;
    A.Spectrum(Eigen);
    printf("%ld %16.12g \n",i,Eigen.Max());
}
}
```

## Programación C++ para la Red Hexagonal

```
// Entropic gravity from largest lattice eigenvalues
#include"Graph.h"
#include"Matrix.h"

int main()
{
    long Lx=10,Ly=10;
    Graph G=Square_Graph_PBC(Lx,Ly);
    for (long fila=1;fila<=Ly;fila++)
        for (long columna=1;columna<=Lx;columna++)
        {
long indice = (fila-1) * Lx + columna;

if(fila==Ly)
{
```

```
if(!(fila%2 == 0))
{ if(columna%2==0)
G.Remove_Link(indice,columna);
}
else
{
if( !(columna%2==0))
G.Remove_Link(indice,columna);
}
continue;
}
if(!(fila%2 == 0))
{ if(columna%2==0)
G.Remove_Link(indice,indice+Lx);
}
else
{
if( !(columna%2==0))
G.Remove_Link(indice,indice+Lx);
}
}

printf("# Modelo Estadistico Entropico, L: %ld\n",L);
printf("# d lambda_max\n");
for (long i=2;i<=Lx ;i++)
{
    Graph G2(G);
    G2.Remove_Site(i);
    G2.Remove_Site(1);
    Matrix A=G2.Adjacency_Matrix();
```

```
    Vector Eigen;  
    A.Spectrum(Eigen);  
    printf("%ld %16.12g \n",i,Eigen.Max());  
}  
}
```