



GALERKIN, PETROV-GALERKIN E MÍNIMOS QUADRADOS PARA A SOLUÇÃO DA CONVECÇÃO-DIFUSÃO TRANSIENTE

ESTANER CLARO ROMÃO¹, JAIRO APARECIDO MARTINS², JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA³, JOÃO BATISTA APARECIDO³

¹Federal University of Itajubá
Campus of Itabira

Rua Irmã Ivone Drumond, 200, Distrito Industrial II – CEP 35903-087– Itabira MG Brasil

²Departamento de Engenharia de Produto, Metso Minerals

Av. Independência, 2500, Iporanga, CEP – 18087-101 – Sorocaba SP Brasil

³Universidade Estadual Paulista

Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Brasil, Centro, 56, CEP – 15385-000 – Ilha Solteira SP Brasil

(Recibido 26 de septiembre de 2011, para publicación 25 de noviembre de 2011)

Resumo – O Método dos Elementos Finitos é um dos métodos mais conhecidos para discretização de equações diferenciais parciais, mais na sua forma padrão, conhecido como Galerkin, não apresenta um comportamento satisfatório quando aplicado a equações convectivas-difusivas com o coeficiente difusivo menor que o convectivo para malhas menos refinadas. Neste trabalho, um estudo de três variantes do Método dos Elementos Finitos (Galerkin, Petrov-Galerkin e Mínimos Quadrados (LSFEM – *Least Squares Finite Element Method*)) aplicados ao problema convectivo-difusivo é apresentado. A escolha destas três aproximações não é arbitrária, mas baseada nas relações entre elas. A formulação para cada método é apresentada, bem como a comparação dos resultados numéricos para quatro aplicações.

Palavras-Chave – Convecção-Difusão, Elementos Finitos, Galerkin, Petrov-Galerkin, Mínimos Quadrados.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, após mais de quatro décadas do desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, pode-se dizer que nenhuma aproximação universal para os diferentes problemas da Mecânica dos Fluidos e da Transferência de Calor foi encontrada, nem qualquer formulação específica tem apresentado bons resultados para um dado problema variando-se os parâmetros físicos. No caso particular dos problemas de transporte convectivo-difusivo, geralmente encontra-se bons resultados para problemas com termos difusivos predominantes, o que nem sempre ocorre em situações convectivo dominante.

Neste trabalho, um estudo de três formulações numéricas: Galerkin, Petrov-Galerkin e Mínimos Quadrados é aplicado para o problema convectivo-difusivo apresentado, destacando-se o caso de problemas com termos convectivos dominantes.

Primeiramente, será considerado o método de Galerkin. Este é um dos métodos de resíduos ponderados e tem sido usado com sucesso em muitas aplicações da engenharia, especialmente em Mecânica dos Sólidos. No entanto, este método torna-se instável e leva a soluções oscilatórias quando aplicado em problemas convectivos dominantes.

O método Petrov-Galerkin consiste em introduzir um termo adicional de estabilidade nas funções peso considerando a direção do vetor velocidade, resultando assim um método de boa estabilidade.

O método de Mínimos Quadrados é, geralmente, usado para obter soluções precisas a partir de operadores diferenciais de primeira ordem. Este método, independente do operador ser auto-adjunto ou não, conduz a matriz simétrica e positiva definida, o que é desejável do ponto de vista de soluções numéricas.

Um estudo da formulação e dos fundamentos teóricos dos três métodos é apresentado. Estas relações e o comportamento das três aproximações numéricas, em problemas de transporte convectivo dominante, são apresentados através de algumas aplicações numéricas. Finalmente, nas conclusões resumem-se as observações mais importantes analisadas neste trabalho.

2. EQUAÇÃO MODELO

Introduz-se aqui um estudo numérico da solução da equação diferencial parcial que modela o fenômeno convectivo-difusivo unidimensional genérico, definido no domínio $\Theta = \Omega \times \Xi \subset \mathfrak{R}^2$, $\Omega, \Xi \subset \mathfrak{R}$ (Ω e Ξ sendo domínios unidimensionais limitados e fechados), descrito como,

$$\Psi \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \phi T(x,t) + f(x) - \gamma \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

na qual assume-se Ψ, k, ϕ e γ sendo constantes reais, $x \in \Omega = [a, b]$ e $t \in \Xi = [t_i, t_f]$, sendo t_i o instante inicial de tempo e t_f o instante final de tempo. Essa equação está sujeita às condições de contorno de primeiro e segundo tipo bem como à condição inicial. Apenas por simplicidade define-se $T = T(x, t)$ e $f = f(x)$.

O primeiro passo adotado neste trabalho foi a discretização no tempo da equação (1), sendo adotado o Método Cranck-Nicolson (estável; $O(\Delta t^2)$; [1]), método este, pertencente a família de aproximação α como será apresentado posteriormente.

A seguir, serão apresentadas as formulações pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados. Ao final são apresentadas as quatro aplicações numéricas e suas respectivas conclusões.

3. DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

A equação unidimensional que será avaliada neste trabalho é uma equação parabólica, ou seja, uma equação de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço.

O método utilizado neste trabalho para discretização no tempo da equação (1), é um método da família de aproximação α , no qual uma média ponderada da derivada em relação ao tempo da variável dependente é aproximada por dois passos consecutivos no tempo, e através de uma interpolação linear dos valores da variável para os dois passos

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\{\tilde{u}\}^{s+1} - \{\tilde{u}\}^s}{\Delta t^{s+1}} = (1 - \alpha)\{\dot{u}\}^s + \alpha\{\dot{u}\}^{s+1}, \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2)$$

Sendo $\{\cdot\}^s$ referindo-se ao valor das variáveis no passo “s” e $\Delta t^{s+1} = t^{s+1} - t^s$ é o (s+1)-ésimo passo no tempo.

Para este trabalho será utilizado o Método de Crank-Nicolson onde $\alpha = 1/2$.

4. DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO

4.1. Método de Galerkin

Inicialmente fazendo-se a discretização no tempo da equação (1) obtém-se uma nova equação da seguinte forma,

$$\left[\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{T} + \alpha \left(k \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + \phi \tilde{T} - \gamma \frac{d \tilde{T}}{dx} \right) \right]^{s+1} + f + \left[\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{T} + (1 - \alpha) \left(k \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + \phi \tilde{T} - \gamma \frac{d \tilde{T}}{dx} \right) \right]^s \approx 0. \quad (3)$$

Nota-se que após a discretização no tempo a equação (3) trata-se de uma equação diferencial ordinária.

Após a discretização no tempo, deve-se iniciar a discretização no espaço, aproximando a função \hat{T} pela aproximação espacial \hat{T} , para o qual

$$\hat{T} \approx \hat{T}^e = \sum_{j=1}^{N_{\text{Nós}}} N_j \hat{T}_j^e \quad (4)$$

na qual $N_{\text{Nós}}$ é o número de nós em cada elemento.

Logo em seguida usando a equação (3) definir um resíduo na forma

$$R = \left[\frac{\psi}{\Delta t} \hat{T} + \alpha \left(k \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + \phi \hat{T} - \gamma \frac{d\hat{T}}{dx} \right) \right]^{s+1} + f + \left[\frac{\psi}{\Delta t} \hat{T} + (1-\alpha) \left(k \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + \phi \hat{T} - \gamma \frac{d\hat{T}}{dx} \right) \right]^s \quad (5)$$

Sendo assim é possível iniciar a introdução da aproximação pelo Método de Galerkin, na qual é necessário definir a formulação variacional do problema genérico (6), como segue: Deve-se encontrar $\hat{T}^e \in V^e$ (no qual $V^e \in C^2(\Omega)$) tal que

$$\int_{\Omega^e} R v_i^e d\Omega = 0, \quad \forall v_i^e \in V^e, \quad i=1,2,\dots,N_{\text{Nós}}. \quad (6)$$

A equação (6) será válida para qualquer $v_i^e = N_i$, $i=1,2,\dots,N_{\text{Nós}}$, ou seja, no Método de Galerkin a função peso é assumida como igual a função de interpolação. Utilizando a equação (4), e fazendo-se as devidas integrações sabendo-se que as variáveis $\hat{T}^{e,s}$ já são conhecidas do passo de tempo s , sendo $\hat{T}^{e,s}$ o valor da função \hat{T} no elemento e para o passo de tempo s , obtém-se o seguinte sistema matricial

$$[K] \{ \hat{T}^{e,s+1} \} = \{ F \} - [B] \{ \hat{T}^{e,s} \} \quad (7)$$

na qual

$$K_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} \alpha \gamma N_i \frac{dN_j}{dx} d\Omega, \quad (8)$$

$$B_{ij} = - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) \phi \right) N_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) \gamma N_i \frac{dN_j}{dx} d\Omega, \quad (9)$$

$$F_i = - \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \text{contribuição do contorno}. \quad (10)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, N_{\text{Nós}}$.

4.2. Método Petrov-Galerkin

No Método de Galerkin, as funções peso são contínuas sobre o interior do elemento. Na formulação pelo Método Petrov-Galerkin, entretanto, são admitidas funções da forma [2],

$$W_i = N_i + \beta \tilde{W}_i \quad (11)$$

sendo que N_i as mesmas funções utilizadas em (6) e W_i é tal que

$$\int_{\Omega^e} \tilde{W}_i d\Omega = \pm \frac{h}{2} \quad (12)$$

sendo h a distância absoluta entre dois nós e o sinal de $\pm h/2$ depende do sinal de γ .

Algumas formas de W_i são possíveis, neste trabalho será utilizada a seguinte função descontínua,

$$\beta \cdot \tilde{W}_i = \theta \frac{h}{2} \frac{dN_i}{dx} \quad (\text{sinal de } \gamma) \quad (13)$$

No caso em que $\alpha = 0$, obtém-se o Método de Galerkin. Para $\theta \neq 0$, deve-se escolher um valor ótimo, dado por

$$|\theta| = \theta_{ot} = \coth |Pe| - \frac{1}{|Pe|} \quad (14)$$

com

$$Pe = \frac{h\gamma}{2k} \quad (15)$$

Neste trabalho não é feita qualquer análise sobre otimização ou adaptação de malha, assim, considera-se $h = h_i$, onde $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, N_{Nós} - 1$. O que implica em um único valor para Pe (constante de *Peclet*) e conseqüentemente um único valor para θ_{ot} .

Sabendo-se que na formulação o Método Petrov-Galerkin é análogo ao Método de Galerkin a menos da função peso, tem-se o seguinte sistema matricial

$$[H] \{ \hat{T}^{e,s+1} \} = \{ F \} - [P] \{ \hat{T}^{e,s} \} \quad (16)$$

na qual

$$H_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{dM_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) M_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} \alpha \gamma M_i \frac{dN_j}{dx} d\Omega, \quad (17)$$

$$P_{ij} = - \int_{\Omega^e} (1 - \alpha) k \frac{dM_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(\frac{\psi}{\Delta t} + (1 - \alpha) \phi \right) M_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} (1 - \alpha) \gamma M_i \frac{dN_j}{dx} d\Omega, \quad (18)$$

$$F_i = - \int_{\Omega^e} f M_i d\Omega + \text{contribuição do contorno.} \quad (19)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, N_{Nós}$.

4.3. Método de Mínimos Quadrados

O terceiro método de aproximação utilizado neste trabalho é o Método dos Mínimos Quadrados. Primeiramente, adiciona-se uma variável adicional no problema através da seguinte equação,

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (20)$$

com isso o problema deixa de ser representado por uma equação diferencial de segunda ordem, para ser representado por duas equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, substitui-se a equação (20) na equação (1), obtendo assim o seguinte sistema de duas equações diferenciais a duas incógnitas

$$\psi \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial q_x}{\partial x} + \phi T + f - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

$$q_x + k \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

Agora deve-se fazer a discretização no tempo da equação (21), resultando no seguinte sistema:

$$\left[\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{T} + \alpha \left(- \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \phi \tilde{T} - \gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) \right]^{s+1} + f + \left[\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{T} + (1 - \alpha) \left(- \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \phi \tilde{T} - \gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) \right]^s \approx 0 \quad (23)$$

$$\tilde{q}_x + k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \approx 0 \quad (24)$$

Sendo \hat{T} e \hat{q}_x aproximações espaciais respectivamente de \tilde{T} e \tilde{q}_x , pode-se escrever as seguintes equações residuais das equações (23) e (24),

$$R_1 = \left[\frac{\psi}{\Delta t} \hat{T} + \alpha \left(-\frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \phi \hat{T} - \gamma \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) \right]^{s+1} + f + \left[\frac{\psi}{\Delta t} \hat{T} + (1-\alpha) \left(-\frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \phi \hat{T} - \gamma \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) \right]^s \quad (25)$$

$$R_2 = \hat{q}_x + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \quad (26)$$

A idéia básica do Método dos Mínimos Quadrados é de determinar $\hat{T}^e \in V^e$ que seja um minimizador do funcional [3],

$$I(R_1, R_2) = \int_{\Omega} R_1^2 d\Omega + \int_{\Omega} R_2^2 d\Omega \quad (27)$$

ou seja, na primeira variação de \hat{T} obtém-se,

$$\delta I(R_1, R_2) = 2 \int_{\Omega} \delta R_1 \cdot R_1 d\Omega + 2 \int_{\Omega} \delta R_2 \cdot R_2 d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} \delta R_1 \cdot R_1 d\Omega + \int_{\Omega} \delta R_2 \cdot R_2 d\Omega = 0 \quad (28)$$

Considerando-se as seguintes aproximações em cada elemento

$$\hat{T} \approx \hat{T}^e = \sum_{j=1}^{N_{\text{Nós}}} N_j \hat{T}_j^e \quad \text{e} \quad \hat{q}_x \approx \hat{q}_x^e = \sum_{j=1}^{N_{\text{Nós}}} N_j \hat{q}_{xj}^e, \quad (29)$$

fazendo-se todos os algebrismos necessários e tendo como conhecido todos os $\hat{T}^{e,s}$ e $\hat{q}_x^{e,s}$, obtém-se o seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{T}^{e,s+1} \\ \hat{q}_x^{e,s+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} D & E \\ H & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{T}^{e,s} \\ \hat{q}_x^{e,s} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

no qual

$$A_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_j - \alpha \gamma \frac{dN_j}{dx} \right] + k^2 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right\} d\Omega \quad (31)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[-\alpha \frac{dN_j}{dx} \right] + k \frac{dN_i}{dx} N_j \right\} d\Omega \quad (32)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[\alpha^2 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j \right] d\Omega \quad (33)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[\left(-\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) N_j - (1-\alpha)\gamma \frac{dN_j}{dx} \right] \right\} d\Omega \quad (34)$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[-(1-\alpha) \frac{dN_j}{dx} \right] \right\} d\Omega \quad (35)$$

$$G_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\alpha \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[-(1-\alpha) \frac{dN_j}{dx} \right] \right\} d\Omega \quad (36)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\alpha \frac{dN_i}{dx} \right] \times \left[\left(-\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) N_j - (1-\alpha)\gamma \frac{dN_j}{dx} \right] \right\} d\Omega \quad (37)$$

$$F_{1i} = - \int_{\Omega^e} f \times \left[\left(\frac{\psi}{\Delta t} + \alpha\phi \right) N_i - \alpha\gamma \frac{dN_i}{dx} \right] d\Omega \quad (38)$$

$$F_{2i} = \int_{\Omega^e} f \times \alpha \frac{dN_i}{dx} d\Omega \quad (39)$$

Com $A_{ii} > 0$ e $C_{ii} > 0$, a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ é simétrica e positiva definida.

5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES

Todos os coeficientes envolvidos nos sistemas matriciais (7), (16) e (30), estão descritos em função da coordenada espacial x . Neste trabalho será utilizado o método de Quadratura de Gauss [4] para calcular as integrais encontradas nos sistemas matriciais, para isso, é necessário reescrever as integrais nos termos das coordenadas locais ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$). Serão utilizadas funções de interpolação para elementos com dois e três nós (elementos de Lagrange), as mesmas podem ser encontradas em [5].

Para análise do erro cometido na solução numérica serão utilizadas as normas L_2 e L_∞ do erro na solução de T e de $\partial T/\partial x$ onde a norma L_2 fornece uma medida global do erro em todo o domínio, enquanto que a norma L_∞ fornece uma medida pontual, ou seja, fornece o maior erro em todo o domínio.

Aplicação 1: Convecção-Difusão com condições de contorno do primeiro tipo e com solução analítica representada por uma função exponencial

Nesta primeira aplicação um caso em regime permanente será estudado. Para isto, nos sistemas matriciais (7), (16) e (30), basta considerar $\psi = 0$ e $\alpha = 1$ para a formulação ser compatível com um problema convectivo-difusivo em regime permanente. A seguir, a equação governante, as condições de contorno e a solução analítica para esta aplicação:

Equação Governante: $10 \frac{dT}{dx} - 10^{-1} \frac{d^2T}{dx^2} = 0$

Domínio: $0 \leq x \leq 1$ **Condições de Contorno:** $T(0) = 0$ e $T(1) = 1$

Solução Analítica: $T(x) = \frac{c}{100} \exp(100x) + d$ e $\frac{dT(x)}{dx} = c \exp(100x)$

no qual $c = \frac{10}{\exp(100) - 1}$ e $d = -\frac{c}{100}$.

Nesta aplicação, tem-se um problema convectivo-difusivo, no qual o coeficiente que acompanha o termo convectivo é 100 vezes maior que o que acompanha o termo difusivo. Primeiramente, apresenta-se as soluções numéricas de T e dT/dx para $h = 0,1$ até $h = 0,001$. Logo em seguida apresenta-se uma avaliação das normas L_2 e L_∞ do erro no cômputo de T e dT/dx para alguns valores de h .

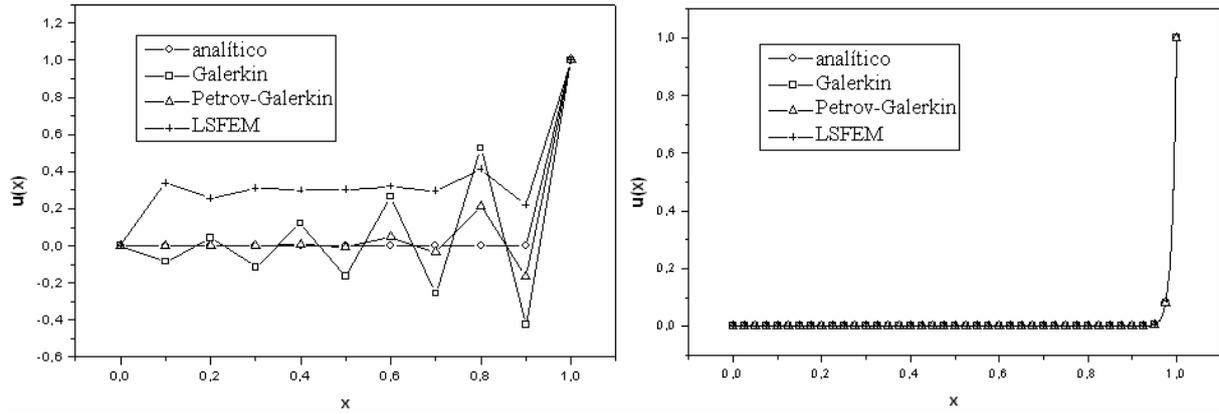


Fig. 1a-b. Soluções numéricas de T para $h = 0,1$ (à esquerda) e $h = 0,001$ (à direita).

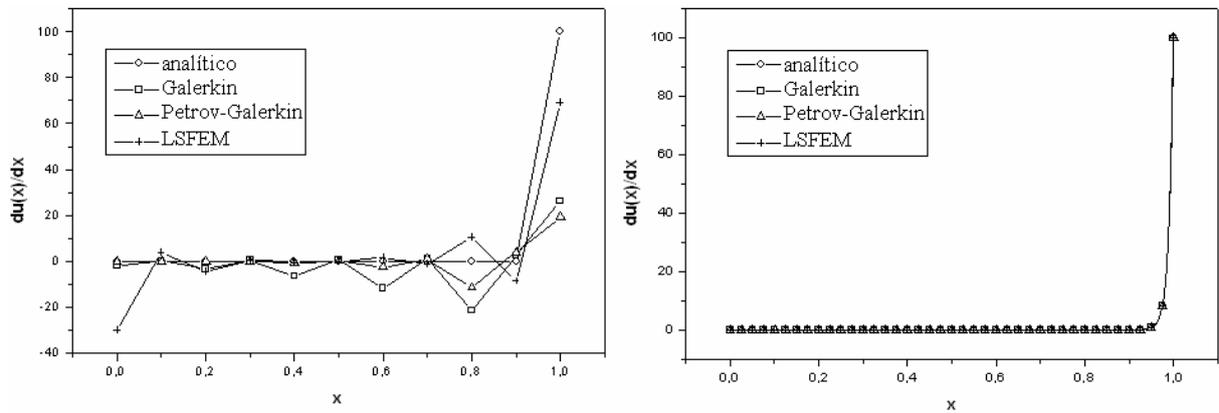


Fig. 2a-b. Soluções numéricas de $\partial T/\partial x$ para $h = 0,1$ (à esquerda) e $h = 0,001$ (à direita).

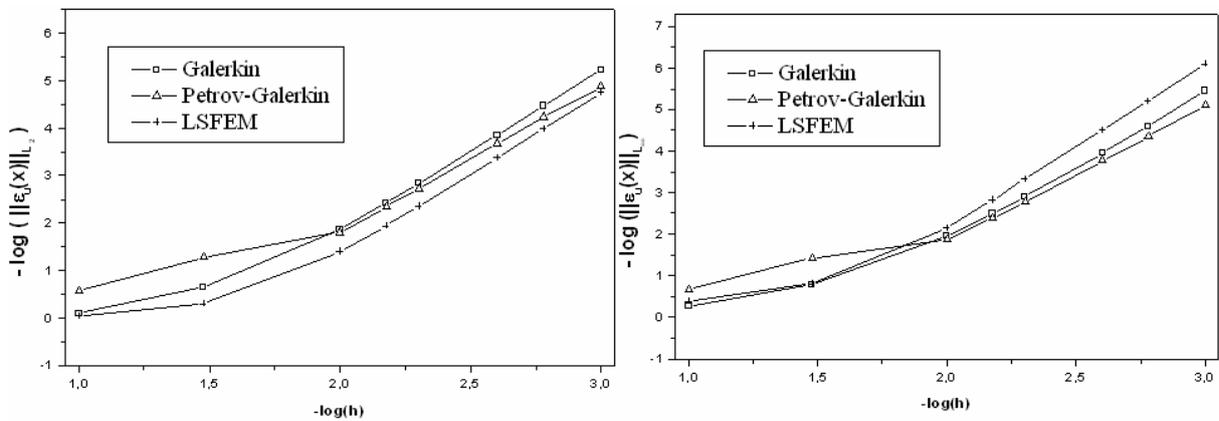


Fig. 3a-b. Normas L_2 (à esquerda) e L_∞ (à direita) do erro na solução numérica de T .

Analisando as Figuras 1a-b e 2a-b, é possível perceber que para o caso no qual $h = 0,1$, Fig. 1a e Fig. 2a a solução numérica apresenta grandes oscilações para os três métodos, enquanto que para $h = 0,001$, Fig. 1b e Fig. 2b, os três métodos propostos fornecem bons resultados.

A partir das Figuras 3a-b e 4a-b nota-se que o Método dos Mínimos Quadrados só não apresenta melhores resultados que os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin na avaliação da norma L_2 do erro na aproximação de T . Nota-se também que o Método Petrov Galerkin dá melhores resultados para $-\log(h) < 2$, depois perde eficiência.

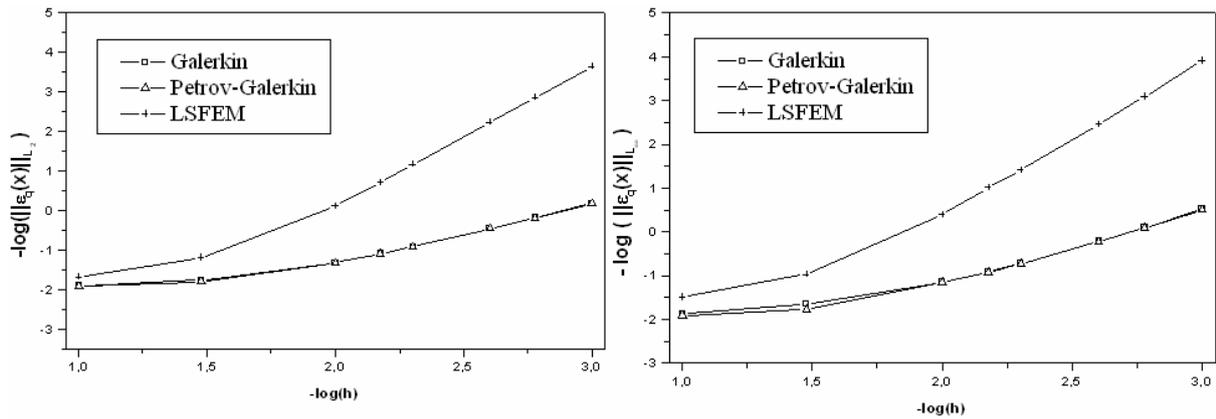


Fig. 4a-b. Normas L_2 (a esquerda) e L_∞ (a direita) do erro na solução numérica de dT/dx .

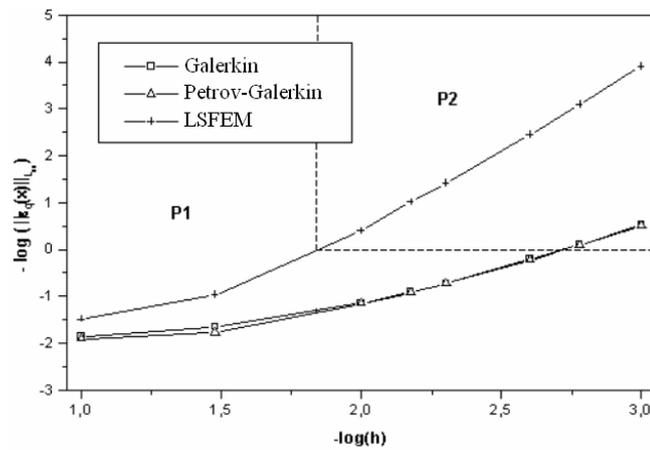


Fig. 5. Análise da convergência da solução numérica.

Na Fig. 5, procura-se ilustrar a análise que deve ser feita nas figuras de normas de erro apresentadas neste trabalho.

A Fig. 4b foi dividida em duas partes, Fig. 5. Na parte 1, **P1**, os resultados demonstram que o logaritmo negativo da norma do erro é menor que zero, o que implica que o erro propriamente dito é maior que 1. Já na parte 2, **P2**, localizam-se os pontos no qual o erro é menor que 1. Portanto, quanto menor for o erro, maior será o logaritmo negativo deste erro. Em outras palavras: a convergência da solução será melhor para as curvas mais ao alto na figura, bem como aquelas com maiores coeficientes angulares. Na Fig. 4b, por exemplo, pode-se concluir que já no terceiro ponto da análise, $h = 10^{-2}$, o Método dos Mínimos Quadrados já apresenta um bom resultado, além disso, quanto mais refina-se a malha menor é o erro, ou maior é o logaritmo negativo do erro. O mesmo não acontece com os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin, que só apresentam resultados minimamente razoáveis nos dois últimos pontos, $h = 1,66 \times 10^{-3}$ e $h = 10^{-3}$.

Aplicação 2: Difusão Pura Transiente

Nesta aplicação apresenta-se um problema transiente puramente difusivo governado pela seguinte equação diferencial,

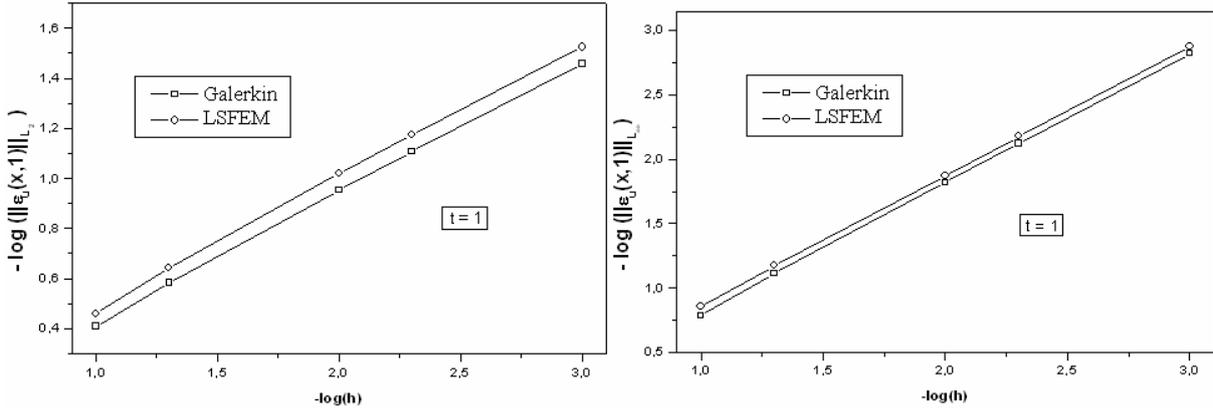


Fig. 6a-b. Normas L_2 (à esquerda) e L_∞ (à direita) do erro na solução numérica de T .

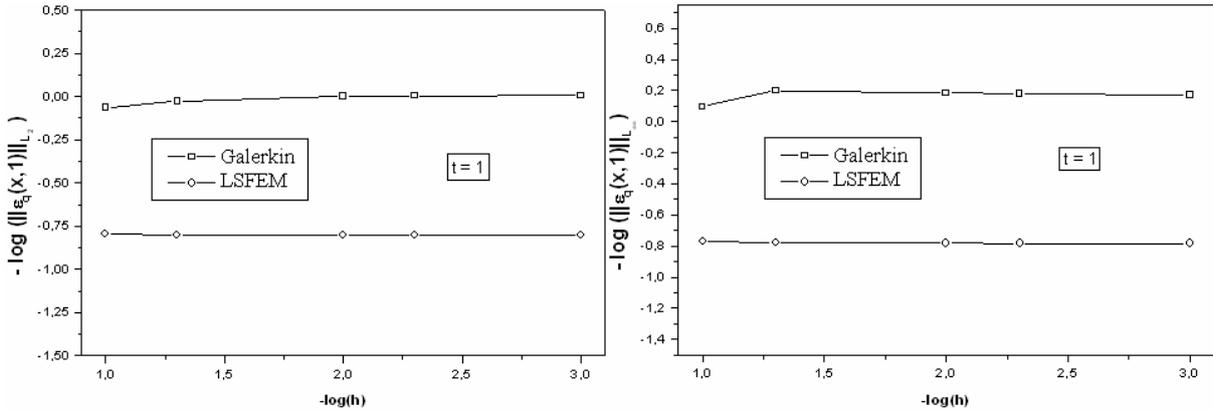


Fig. 7a-b. Normas L_2 (à esquerda) e L_∞ (à direita) do erro na solução numérica de $\partial T/\partial x$.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

com $x \in [0,1]$ e $t > 0$, e as seguintes condições de contorno e inicial,

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T(1,t) = 0 \quad \text{e} \quad T(x,0) = -10.$$

A solução analítica deste problema é dada por,

$$T(x,t) = -20 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n} e^{-\beta_n^2 t} \cos(\beta_n x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 20 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\beta_n^2 t} \text{sen}(\beta_n x),$$

na qual $\beta_n = \frac{(2n+1)}{2} \pi$ com $n = 1,2,3,\dots,\infty$. Esta solução analítica pode ser encontrada em Arpaci (1966), página 273.

Com o intuito de analisar as normas L_2 e L_∞ do erro das soluções numéricas dos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados comparados com a solução analítica da equação diferencial, serão considerados h e Δt no intervalo $10^{-1} \leq h = \Delta t \leq 10^{-3}$. As figuras a seguir apresentam resultados da análise das normas do erro nas simulações numéricas pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos

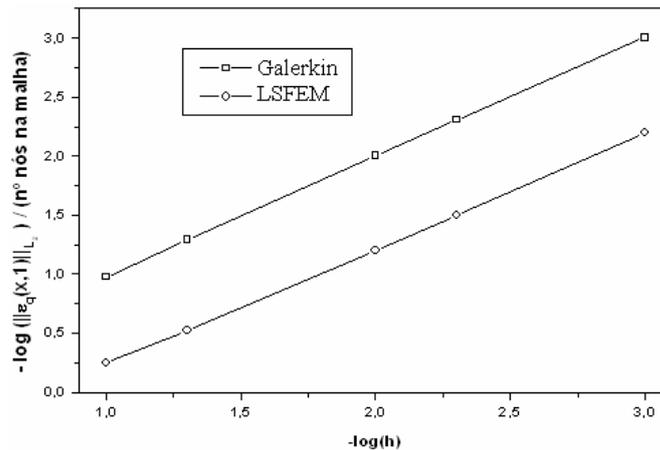


Fig. 8. Norma L_2 do erro/(nº total de nós na malha) para $\partial T/\partial x$.

Quadrados. Não foi feita a simulação numérica pelo Método Petrov-Galerkin pois no fenômeno de difusão pura este método é idêntico ao de Galerkin, visto que $\gamma = 0$.

Analisando as Figuras 6a-b e 7a-b, pode-se concluir que quanto menor o Δt , menor são as normas L_2 e L_∞ do erro para a função T , na qual o Método dos Mínimos Quadrados apresenta resultados ligeiramente melhores em ambas as normas. Já com relação as normas L_2 e L_∞ do erro para $\partial T/\partial x$, ambos os métodos apresentam resultados praticamente inalteráveis conforme o refinamento da malha, com a ressalva que, para este caso o Método de Galerkin apresentou melhores resultados. Este fato é freqüente em algumas aplicações, na qual o “ganho” com o refinamento da malha não é suficiente para apresentar melhora significativa nas normas L_2 e L_∞ , visto que com o refinamento da malha ocorre o aumento do número de nós. Para ilustrar de maneira mais clara este fato, a seguir, apresenta-se uma figura onde divide-se o valor da norma L_2 pela quantidade de nós em cada malha. Por exemplo, malhas com 50 elementos de 3 nós cada, implica em um total de 101 nós, logo divide-se o valor da norma L_2 desta malha por 101 nós. Os resultados são apresentados na figura a seguir (Fig. 8).

Aplicação 3: Convecção-Difusão Transiente com condições de contorno de primeiro tipo

Nesta aplicação apresenta-se um problema convectivo-difusivo com termo convectivo dominante, governado pela seguinte equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 10^{-1} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

com $x \in [0,1]$ e $t > 0$, e as seguintes condições inicial e de contorno,

$$T(x,0) = 1, T(0,t) = 0 \text{ e } T(1,t) = 1.$$

Com o objetivo de analisar o comportamento da solução numérica de T e $\partial T/\partial x$ ao longo do tempo, nesta aplicação será adotado $h = \Delta t = 10^{-3}$ (500 elementos com 3 nós cada e 1000 passos no tempo, visto que o último instante no tempo adotado será $t = 1$). As figuras a seguir apresentam resultados das simulações numéricas pelas três formulações de Métodos dos Elementos Finitos propostas neste trabalho.

A partir das Figuras 9a-b à 12a-b observa-se que as soluções numéricas de T e de $\partial T/\partial x$ dos três métodos adotados tendem a solução analítica no regime permanente ao longo do tempo para a malha adotada, a menos da solução de $\partial T/\partial x$ pelo Método dos Mínimos Quadrados, que no ponto $x = 0$, produz um resultado divergente da solução analítica.

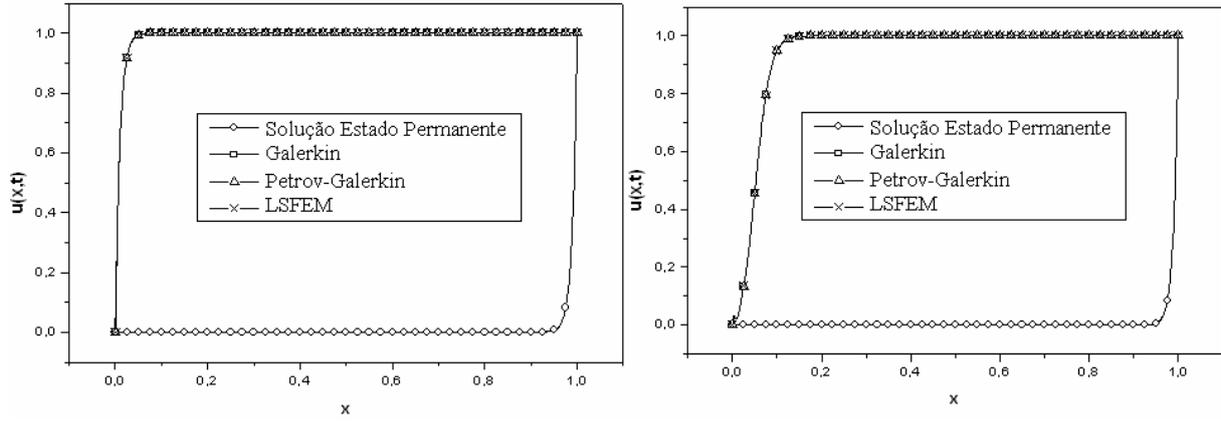


Fig. 9a-b. Soluções Numéricas de T para $t = 10^{-3}$ (à esquerda) e $t = 0,005$ (à direita).

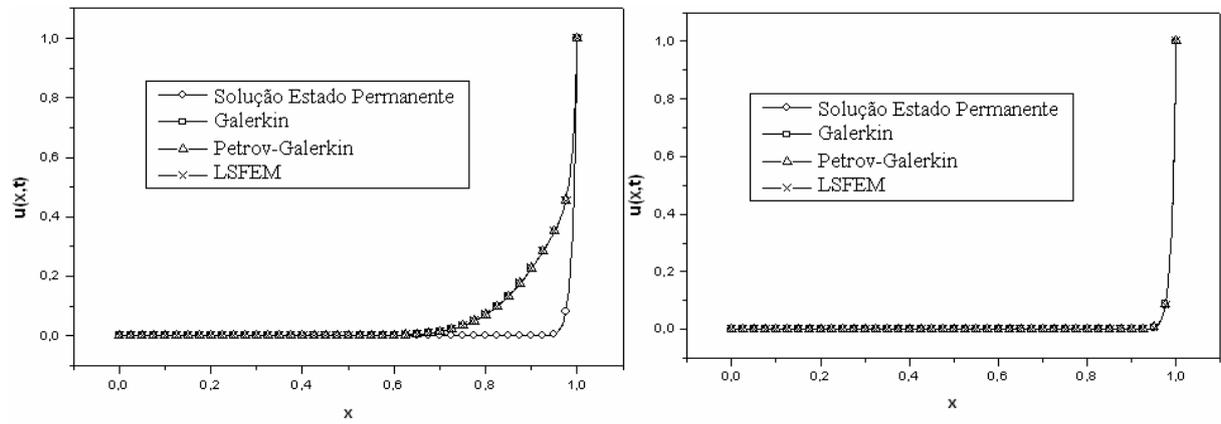


Fig. 10a-b. Soluções Numéricas de T para $t = 0,01$ (à esquerda) e $t = 1$ (à direita).

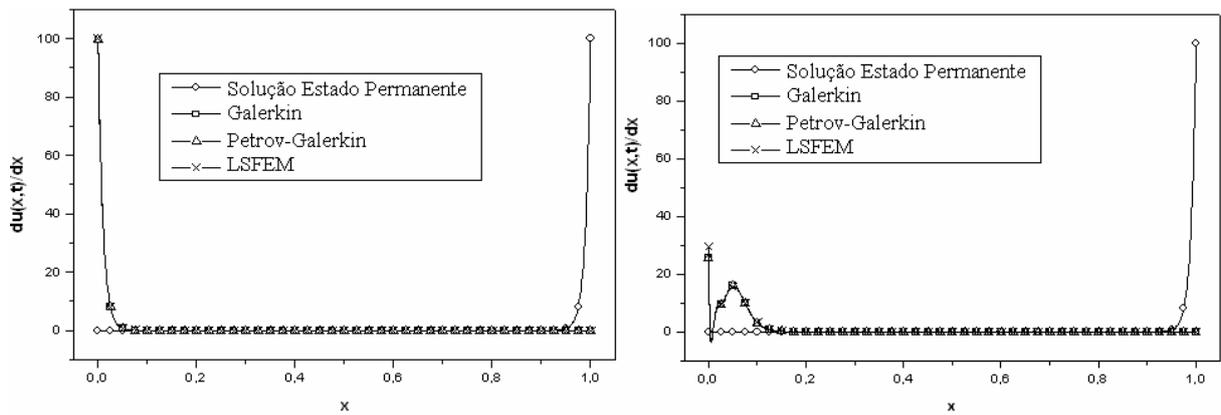


Fig. 11a-b. Soluções Numéricas de $\partial T/\partial x$ para $t = 10^{-3}$ (à esquerda) e $t = 0,005$ (à direita).

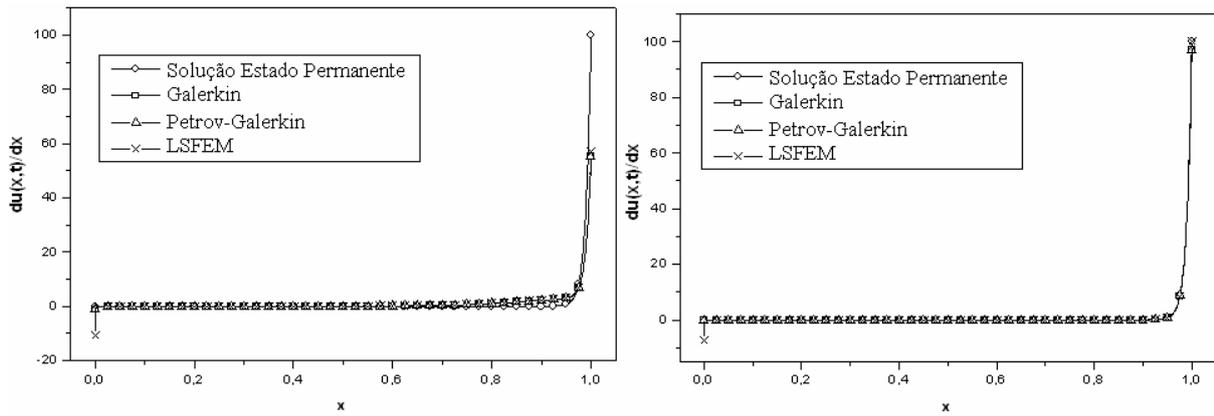


Fig. 12a-b. Soluções Numéricas de $\partial T/\partial x$ para $t = 0,01$ (à esquerda) e $t = 1$ (à direita).

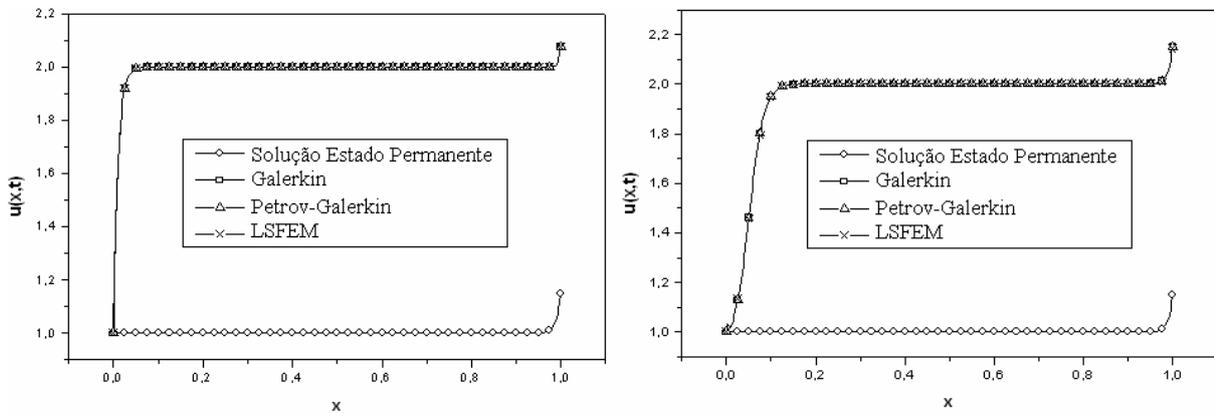


Fig. 13a-b. Soluções Numéricas de T para $t = 10^{-3}$ (à esquerda) e $t = 0,005$ (à direita).

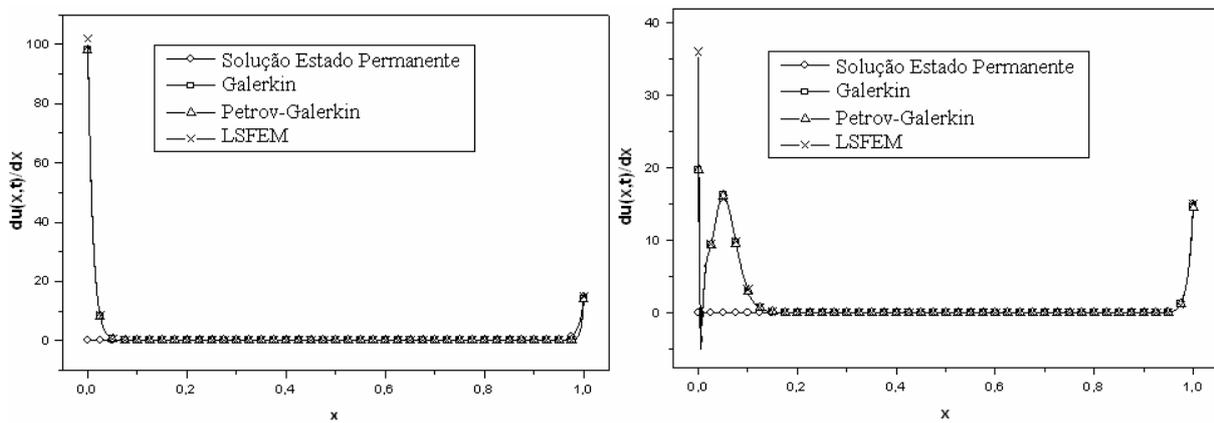


Fig. 14a-b. Soluções Numéricas de T para $t = 0,01$ (à esquerda) e $t = 1$ (à direita).

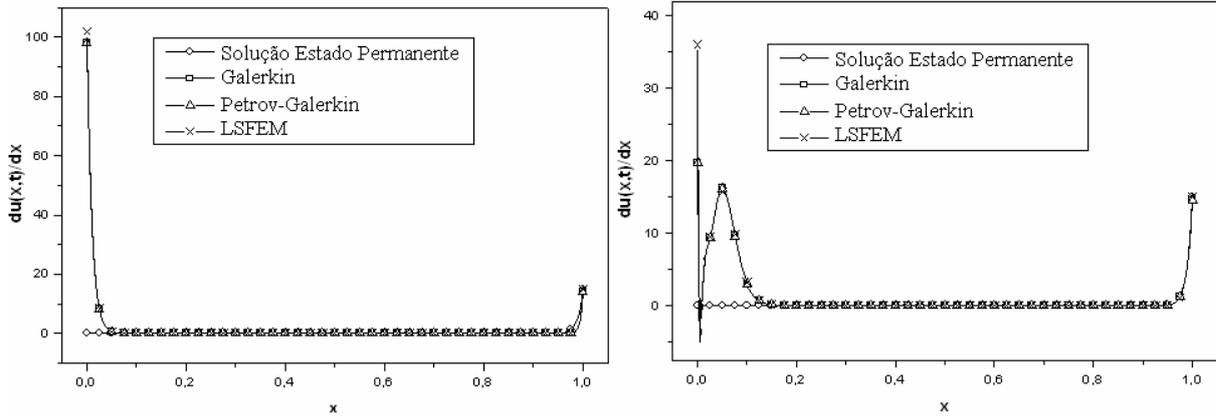


Fig. 15a-b. Soluções Numéricas de $\partial T/\partial x$ para $t = 10^{-3}$ (à esquerda) e $t = 0,005$ (à direita).

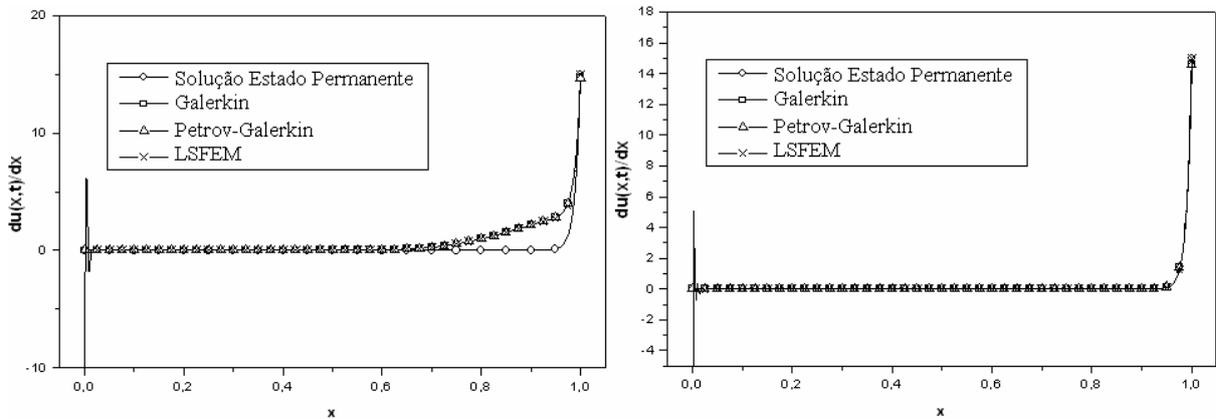


Fig. 16a-b. Soluções Numéricas de $\partial T/\partial x$ para $t = 0,01$ (à esquerda) e $t = 1$ (à direita).

Aplicação 4: Convecção-Difusão Transiente com condições de contorno de primeiro e segundo tipo

Nesta aplicação apresentam-se soluções numéricas ao longo do tempo do problema com a mesma equação governante da aplicação 3, mas com as seguintes condições de contorno e inicial,

$$T(0,t) = 1, \quad \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 15 \quad \text{e} \quad T(x,0) = 2$$

na qual $x \in [0,1]$ e $t > 0$.

O objetivo desta aplicação é analisar o comportamento da solução numérica pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados ao longo do tempo para um problema com uma das condições de contorno sendo de fluxo prescrito. Para esta aplicação será adotado $h = 2,5 \times 10^{-3}$ e $\Delta t = 10^{-3}$ (200 elementos com 3 nós cada e 1000 passos no tempo, visto que o último instante no tempo adotado também será $t = 1$)

Assim como na aplicação 3, as soluções numéricas de T dos três métodos tendem ao longo do tempo à solução analítica no seu estado permanente (Figuras 13a-b à 16a-b). O mesmo acontece com as soluções numéricas de $\partial T/\partial x$ pelos Método de Galerkin e Petrov-Galerkin, entretanto, o Método dos Mínimos Quadrados apresenta oscilações numéricas localizadas próximas a extremidade $x = 0$, Fig. 16a-b.

6. CONCLUSÕES

O Método de Galerkin apresentou bons resultados para as duas aplicações apresentadas neste trabalho, visto que a malha adotada foi refinada o suficiente para amenizar as oscilações que o método normalmente apresenta. Mas quando o problema deixa de ser unidimensional e passa à bidimensional (ou até mesmo tridimensional), o refinamento da malha nem sempre será possível, dificultando assim o uso do método para a solução de problemas convectivo dominantes. Para isso, uma alternativa é o uso do Método Petrov-Galerkin que nada mais é que uma melhoria do Método de Galerkin, na qual este método consiste em introduzir um termo adicional de estabilidade na direção do vetor velocidade nas funções peso (*upwind*). Em todas as aplicações, o Método Petrov-Galerkin obtém bons resultados, porém, possui um alto custo, pois quando aplica-se o termo adicional de estabilidade este deverá ser analisado elemento a elemento. Neste trabalho o método Petrov-Galerkin não apresentou grandes custos, por ser utilizada uma malha homogênea, ou seja, nós equidistantes, e o problema sendo unidimensional. Por fim, o Método dos Mínimos Quadrados (LSFEM) mostra-se uma ferramenta muito satisfatória, pois o mesmo apresenta soluções suaves, sua matriz global tem como característica ser simétrica e positiva-definida, facilitando assim o cálculo do sistema linear e a partir da alternativa de inserir uma variável adicional, q_x , é possível obter imediatamente o valor do fluxo, visto que $q_x = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$, enquanto que para os outros dois métodos seria necessário uma recuperação do fluxo.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – Brasil.

REFERÊNCIAS

- [1] Chung, T.J., *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (2002)
- [2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, fourth edition, Vol II. Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity, McGraw Hill (1991)
- [3] Jiang, B.-N., *The Least-Squares Finite Element Method. Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Springer (1998)
- [4] Reddy, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, Second Edition, McGraw-Hill (1993)
- [5] Dhatt, G., Touzot, G., *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons (1984)

GALERKIN, PETROK-GALERKIN AND LEAST SQUARES FOR SOLUTION OF TRANSIENT CONVECTION-DIFFUSION

Abstract – The Finite Element Method is one of the most known methods for discretization of partial derivatives, however in its standard form, known as Galerkin. This last does not present a satisfactory behavior when applied on convection-diffusion equations with the diffusion coefficient smaller than the convective for less refined meshes. In this work, a study of three variants of the Finite Element Method (Galerkin, Petrov-Galerkin and Minimum Squares - LSFEM -Least Squares Finite Element Method) are presented to the application at a convective-diffusive problem. The chosen approximations are not arbitrary, but due the relations among them. The formulation of each method, is presented, as well as the comparison among the numerical results for the four applications.

Keywords – Convection-Diffusion, Finite Element, Galerkin, Petrov-Galerkin, Least Squares.