



# VIBRACIONES LIBRES DE UNA TORRE DE SECCIÓN VARIABLE CON VÍNCULOS ELÁSTICOS EN SU BASE Y UNA MASA EXCÉNTRICA CON INERCIA ROTACIONAL EN EL EXTREMO SU- PERIOR

MARÍA ANNA DE ROSA<sup>1</sup>, HECTOR MARTÍN<sup>2</sup>, MARIO JOSÉ MAURIZI<sup>3</sup>,  
FRANCESCO VAIRO

<sup>1</sup>Faculty of Engineering  
Department of Structural Engineering (DiSGG)  
Viale dell'Ateneo Lucano, 10 – 85100 – Potenza, Italy

<sup>2</sup>Universidad Tecnológica Nacional  
Facultad Regional Reconquista  
Parque Industrial Reconquista, 3560 Reconquista – Santa Fe – Argentina

<sup>3</sup>Universidad Nacional del Sur  
Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería  
Avda. Alem 1253 – 8000 Bahía Blanca – Argentina

*(Recibido 16 de febrero de 2011, para publicación 21 de marzo de 2011)*

**Resumen** – En los últimos años, muchos autores han estudiado el comportamiento dinámico de las torres utilizadas en ingeniería de viento. En particular, una publicación de reciente data hace conocer el cálculo de las frecuencias naturales de vibración de una torre en alta mar, de sección constante y parcialmente sumergida en el agua, con vínculos elásticos en la base y una masa excéntrica con inercia rotacional en la parte superior. Como un avance de esa idea original, y con el fin de optimizar el proceso de cálculo, el objetivo del presente trabajo consiste en determinar las frecuencias naturales de una torre ubicada sobre la costa, de sección variable con directriz exponencial, tomando en cuenta la variación de los vínculos a rotación y traslación en la base, así como el valor de la masa excéntrica con su inercia rotacional en el extremo libre. El empleo de la metodología expuesta, en los ejemplos analizados, corroboran la aplicabilidad del procedimiento exacto para la solución de la ecuación diferencial gobernante. Específicamente, adquiere relevancia la coincidencia de los resultados obtenidos, con aquellos hechos conocer en estudios previos, para el caso de una torre de sección constante.

**Palabras clave** – Torre sobre la costa, vibraciones libres, sección variable, masa excéntrica.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las torres de conducción eléctrica, antenas y estructuras sobre la costa están sujetas a varias cargas dinámicas como el viento, las corrientes, las ondas, y por último, en regiones sísmicas, a la acción de los terremotos. El estudio de la respuesta dinámica a estas solicitaciones se basa en el análisis preliminar y posterior evaluación de las vibraciones libres y formas modales de vibración de los elementos mencionados.

Estos tipos estructurales pueden ser asimilados al esquema de viga Euler-Bernoulli o Timoshenko, de sección uniforme o variable con la altura, con vínculos perfectos o elásticos en la base, o también, sujeta a la acción de amortiguadores concentrados, con el aditamento de masas concentradas excéntricas, con o sin inercia rotacional, ubicadas en el extremo libre.

La literatura científica de esta tipología estructural es muy rica en trabajos. Se parte del análisis dinámico de una estructura en forma de ménsula de sección uniforme con una masa concentrada en el extremo libre [1-5], para después considerar en [6-18] que la ménsula es de sección variable en los distintos tipos estructurales.

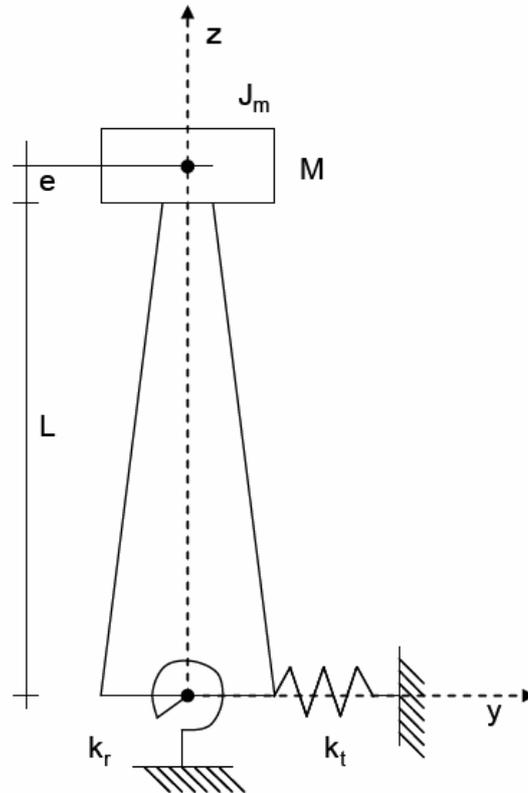


Fig. 1. Torre de sección variable.

Otros artículos han tratado a dichas estructuras como un sistema costa afuera (*offshore*), ésto es, como una torre total o parcialmente inmersa en un líquido "agua" y, en particular, Uscilowska y Kolodziej [19] han determinado las primeras cinco frecuencias naturales considerando a la torre como una columna en voladizo, en cuyo extremo superior libre aparece colocada una masa excéntrica. Posteriormente, estos resultados han sido verificados por Oz [20].

En realidad, como lo han observado Wu y Hsu [21], la vinculación de la torre en el suelo marino no puede considerarse como un empotramiento perfecto, dado que existen componentes elásticas a rotación y traslación. Por lo tanto, para tener en cuenta tales componentes ellos han estudiado el modelo propuesto en la referencia [19] en presencia de vínculos con conocida rigidez a rotación y traslación.

En el presente trabajo se expone el análisis dinámico de un esquema estructural de torre con sección variable que sigue una ley exponencial. La tarea comprende también la adopción de vínculos elásticos a rotación y traslación en la base, así como tener en cuenta una masa excéntrica con inercia rotacional en el extremo superior. El procedimiento analítico empleado es el exacto y el propósito del estudio, a través de ejemplos numéricos, es aquel de evaluar atentamente la influencia sobre las frecuencias libres de vibración de la forma variable de la estructura en función de los siguientes parámetros: rigidez a rotación y traslación, masa concentrada, excentricidad e inercia rotacional de la misma.

## 2. LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

La Fig. 1 muestra una torre de sección recta variable y de área  $A(z)$ , con inercia transversal  $I(z)$ , módulo de Young  $E$ , longitud  $L$  y densidad de masa  $\rho$ . Se asume un sistema de referencia  $y$ - $z$  positivo en sentido horario y con origen en la base de la torre. En  $z = 0$  aparecen colocados dos vínculos elásticos, uno a rotación y otro a traslación, con rigidez rotacional  $k_r$  y rigidez traslacional  $k_t$ , respectivamente. En el otro extremo aparece ubicada una masa  $M$  estrictamente vinculada con la torre, con inercia rotacional  $J_m$  y excentricidad "e".

Sea  $v(z, t)$  el desplazamiento en dirección perpendicular al eje de la viga, en función de la variable espacial  $z$  y la temporal  $t$ .

Para la deducción de las ecuaciones de movimiento son válidas las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli. La ecuación de movimiento de la torre es del tipo:

$$(EI(z) V''(z, t))'' + \rho A(z) \ddot{V}(z, t) = 0 \quad \text{para } 0 < z < L \quad (1)$$

El índice (') indica la derivada respecto a  $z$  y (.) indica la derivada respecto al tiempo  $t$ . El área  $A(z)$  y la inercia  $I(z)$  de la torre varían según las siguientes leyes exponenciales:

$$A(z) = A_0 e^{\beta z/L}, \quad I(z) = I_0 e^{\beta z/L} \quad (2a,b)$$

siendo  $\beta$  el coeficiente de conicidad.

A continuación se efectúa la separación de las variables:

$$V(z, t) = v(z) e^{i\omega t} \quad (3)$$

por lo cual la ecuación (1) se convierte en:

$$(EI(z) v''(z))'' - \rho \omega^2 A(z) v(z) = 0, \quad 0 < z < L \quad (4)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia natural de vibración.

Las condiciones de contorno en  $z = 0$  y en  $z = L$  son:

$$(EI(z) v''(z, t))' + k_t v(z, t) = 0, \quad z = 0 \quad (5)$$

$$EI(z) v''(z, t) - k_r v'(z, t) = 0, \quad z = 0 \quad (6)$$

$$(EI(z) v''(z, t))' - M \ddot{v}(z, t) - M e \ddot{v}'(z, t) = 0, \quad z = L \quad (7)$$

$$-EI(z) v''(z, t) - J_m \ddot{v}(z, t) - M e^2 \ddot{v}'(z, t) - M e \ddot{v}(z, t) = 0, \quad z = L \quad (8)$$

Efectuando el desarrollo de las derivadas de la ecuación (4) se arriba a la expresión:

$$EI(z) v''''(z) + 2EI'(z) v'''(z) + EI''(z) v''(z) - \rho A(z) \omega^2 v(z) = 0, \quad 0 < z < L \quad (9)$$

Y a las siguientes condiciones de borde, luego de la separación de variables (3):

$$EI'(z) v''(z, t) + EI(z) v'''(z, t) + k_t v(z, t) = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

$$EI(z) v''(z, t) - k_r v'(z, t) = 0, \quad z = 0 \quad (11)$$

$$EI'(z) v''(z, t) + EI(z) v'''(z, t) + M \omega^2 v(z, t) + M \omega^2 e v'(z, t) = 0, \quad z = L \quad (12)$$

$$-EI(z) v''(z, t) + J_m \omega^2 v'(z, t) + M \omega^2 e^2 v'(z, t) + M \omega^2 e v(z, t) = 0, \quad z = L \quad (13)$$

Reemplazando, debidamente derivadas, las (2a, b) en la ecuación (9):

$$EI_0 e^{\beta z/L} v''''(z) + \frac{2\beta EI_0 e^{\beta z/L}}{L} v'''(z) + \frac{\beta^2 EI_0 e^{\beta z/L}}{L^2} v''(z) - \rho A_0 e^{\beta z/L} \omega^2 v(z) = 0, \quad 0 < z < L \quad (14)$$

y se efectúa el cambio de variable, escribiendo:

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad (15)$$

la (14) asume la siguiente forma:

$$v''''(\zeta) + 2\beta v'''(\zeta) + \beta^2 v''(\zeta) - \Omega^4 v(\zeta) = 0, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (16)$$

donde 
$$\Omega^4 = \frac{\rho A_0 \omega^2 L^4}{EI_0} \quad (17)$$

mientras las condiciones de contorno (10 -13) se convierten en:

$$\beta v''(0) + v'''(0) + k_T v(0) = 0 \quad (18)$$

$$v''(0) - k_R v'(0) = 0 \quad (19)$$

$$\beta e^\beta v''(1) + e^\beta v'''(1) + M_3 \omega^2 v(1) + M_2 e \omega^2 v'(1) = 0 \quad (20)$$

$$-e^\beta v''(1) + J_R \omega^2 v(1) + M_1 e^2 \omega^2 v'(1) + M_2 e \omega^2 v(1) = 0 \quad (21)$$

habiendo designado:

$$k_R = \frac{k_r L}{EI_0}, \quad k_T = \frac{k_t L^3}{EI_0} \quad (22a,b)$$

$$J_R = \frac{J_m L}{EI_0}, \quad M_1 = \frac{M L}{EI_0}, \quad M_2 = \frac{M L^2}{EI_0}, \quad M_3 = \frac{M L^3}{EI_0} \quad (23a-d)$$

### 3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Al tomar en consideración la ecuación diferencial (16), la solución puede ser expresada de la siguiente manera:

$$v(\zeta) = e^{\frac{\beta}{2}\zeta} (C_1 \cos(\lambda_1 \zeta) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda_1 \zeta) + C_3 \cosh(\lambda_2 \zeta) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda_2 \zeta)) \quad 0 < \zeta < 1 \quad (24)$$

donde 
$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4\Omega^2 - \beta^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{4\Omega^2 + \beta^2}}{2} \quad (25a,b)$$

Las cuatro constantes de integración  $C_1 - C_4$  se determinan imponiendo las condiciones de contorno (18 a 21).

Sustituyendo la ecuación (24), oportunamente derivada, en las condiciones de borde citadas, se obtiene un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones en las cuatro incógnitas  $C_1$  a  $C_4$ .

Sea  $\mathbf{K}=[K_{ij}]$  la matriz 4x4 de los coeficientes de las incógnitas, y  $\mathbf{C}=\{C_i\}^T$  el vector de incógnitas. En este caso se tiene:

$$\mathbf{K} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (26)$$

donde los  $K_{ij}$  están dados por:

$$K_{11} = \frac{1}{8}(8k_T + \beta^3 + 4\beta\lambda_1^2) \quad K_{12} = -\frac{1}{4}\lambda_1(\beta^2 + 4\lambda_1^2) \quad K_{13} = \frac{1}{8}(8k_T + \beta^3 - 4\beta\lambda_2^2) \quad (27a-c)$$

$$K_{14} = (-\frac{\beta^2\lambda_2}{4} + \lambda_2^3) \quad K_{21} = \frac{1}{4}(-2k_R\beta - \beta^2 + 4\lambda_1^2) \quad K_{22} = (k_R + \beta)\lambda_1 \quad (27d-f)$$

$$K_{23} = \frac{1}{4}(-2k_R\beta - \beta^2 - 4\lambda_2^2) \quad K_{24} = (k_R + \beta)\lambda_2 \quad (27g-h)$$

$$K_{31} = \frac{1}{8}e^{-\beta/2}((e^\beta\beta(\beta^2 + 4\lambda_1^2) + 4(2M_3 - eM_2\beta)\omega^2) \cos(\lambda_1) + 2\lambda_1(e^\beta(\beta^2 + 4\lambda_1^2) - 4eM_2\omega^2) \sin(\lambda_1)) \quad (27i)$$

$$\begin{aligned} K_{32} = & \frac{1}{8} e^{-\beta/2} (-2\lambda_1 (e^\beta (\beta^2 + 4\lambda_1^2) - 4eM_2\omega^2) \cos(\lambda_1) + \\ & + (e^\beta \beta (\beta^2 + 4\lambda_1^2) + 4(2M_3 - eM_2\beta)\omega^2) \sin(\lambda_1)) \end{aligned} \quad (27j)$$

$$\begin{aligned} K_{33} = & \frac{1}{8} e^{-\beta/2} ((e^\beta \beta (\beta^2 - 4\lambda_2^2) + 4(2M_3 - eM_2\beta)\omega^2) \cosh(\lambda_2) + \\ & + 2\lambda_2 (-e^\beta (\beta^2 - 4\lambda_2^2) + 4eM_2\omega^2) \sinh(\lambda_2)) \end{aligned} \quad (27k)$$

$$\begin{aligned} K_{34} = & \frac{1}{8} e^{-\beta/2} ((-2e^\beta \lambda_2 (\beta^2 - 4\lambda_2^2) + 8eM_2\lambda_2\omega^2) \cosh(\lambda_2) + \\ & + (e^\beta \beta (\beta^2 - 4\lambda_2^2) + 4(2M_2 - eM_2\beta)\omega^2) \sinh(\lambda_2)) \end{aligned} \quad (27l)$$

$$\begin{aligned} K_{41} = & \frac{1}{4} e^{-\beta/2} ((e^\beta (\beta^2 - 4\lambda_1^2) + 2(-2eM_2 + J_R\beta + e^2M_1\beta)\omega^2) \cos(\lambda_1) + \\ & + 4\lambda_1 (e^\beta \beta + (J_R + e^2M_1)\omega^2) \sin(\lambda_1)) \end{aligned} \quad (27m)$$

$$\begin{aligned} K_{42} = & \frac{1}{4} e^{-\beta/2} (-4\lambda_1 (e^\beta \beta + (J_R + e^2M_1)\omega^2) \cos(\lambda_1) + (e^\beta (\beta^2 - 4\lambda_1^2) + \\ & + 2(-2eM_2 + J_R\beta + e^2M_1\beta)\omega^2) \sin(\lambda_1)) \end{aligned} \quad (27n)$$

$$\begin{aligned} K_{43} = & \frac{1}{4} e^{-\beta/2} ((e^\beta (\beta^2 + 4\lambda_2^2) + 2(-2eM_2 + J_R\beta + e^2M_1\beta)\omega^2) \cosh(\lambda_2) - \\ & - 4\lambda_2 (e^\beta \beta + (J_R + e^2M_1)\omega^2) \sinh(\lambda_2)) \end{aligned} \quad (27o)$$

$$\begin{aligned} K_{44} = & \frac{1}{4} e^{-\beta/2} (-4\lambda_2 (e^\beta \beta + (J_R + e^2M_1)\omega^2) \cosh(\lambda_2) + (e^\beta (\beta^2 + 4\lambda_2^2) + \\ & + 2(-2eM_2 + J_R\beta + e^2M_1\beta)\omega^2) \sinh(\lambda_2)) \end{aligned} \quad (27p)$$

Para que el sistema admita solución distinta de la trivial, el determinante constituido por los coeficientes de las incógnitas debe ser nulo, y su resolución da lugar a una ecuación trascendente en la incógnita  $\omega$ , frecuencia natural del sistema. El subíndice  $i$  indica la sucesión de las primeras  $n$  frecuencias.

#### 4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Las aplicaciones numéricas tienen como agregado particular una comparación de resultados con los proporcionados para un caso analizado en la referencia [21]. Con ese fin han sido adoptadas las características físicas y geométricas de la misma torre:  $L=15$  m, diámetro de la base  $d=0.3$  m, área de la sección transversal en la base  $A_0 = \pi d^2/4 = 7.06858 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup>, momento de inercia en la base  $I_0 = \pi d^4/64 = 3.9761 \times 10^{-4}$  m<sup>4</sup>, módulo de Young  $E = 2.068 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> y densidad de masa de la torre  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Se emplearon además los siguientes parámetros adimensionales: relación de la inercia rotacional  $J_R^* = J_R / (\rho A_0 L^3)$ , relación de la masa concentrada en el extremo libre  $M^* = M / (\rho A_0 L)$ , mientras las rigideces traslacional y rotacional son  $k_T$  y  $k_R$ , como han sido dimensionalizadas en (22a,b).

##### 4.1. Influencia de las rigideces traslacional y rotacional, al variar $\beta$ , sobre las primeras tres frecuencias adimensionalizadas $i \Omega$ .

Como se ha visto, al escribir las condiciones de borde (18-21), se ha tomado en cuenta la existencia de dos resortes elásticos con rigidez traslacional  $k_T$  y rigidez rotacional  $k_R$ , respectivamente. Se puede deducir naturalmente que cuando tales rigideces son nulas la torre no está vinculada a la base (caso fuera de la realidad), y cuando dichas rigideces tienden a infinito, la torre se puede considerar empotrada a la base. La elección de los coeficientes  $k_R$  y  $k_T$  está motivada en el hecho que la torre en su extremo inferior

Tabla 1. Primeras tres frecuencias de vibración libre adimensionalizadas en función de las rigideces a rotación y traslación y del coeficiente de forma (comparación con los valores numéricos de [21]).

$\beta$	$K_T=K_R$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	
-0.1	1	0.89962	1.42001	2.86151	
	$10^2$	1.48469	2.46224	4.20076	
	$10^4$	1.49926	2.59444	5.32133	
	$10^8$	1.49940	2.59584	5.33592	
	$10^{16}$	1.49940	2.59584	5.33592	
0	1	0.88911	1.42232	2.89262	
		[21] 0.88911	1.42231	2.89260	
	$10^2$	1.48478	2.47398	4.20233	
		[21] 1.48478	2.47398	4.20231	
	$10^4$	1.50061	2.61147	5.33157	
		[21] 1.50061	2.61146	5.33156	
	$10^8$	1.50077	2.61293	5.34654	
		[21] 1.50077	2.61293	5.34653	
	$10^{16}$	1.50077	2.61293	5.34654	
		[21] 1.50077	2.61293	5.34653	
	0.1	1	0.87846	1.42410	2.92470
		$10^2$	1.48347	2.48656	4.20433
$10^4$		1.50059	2.62966	5.34154	
$10^8$		1.50077	2.63119	5.35689	
$10^{16}$		1.50077	2.63119	5.35690	

culmina en una placa metálica, circular o cuadrada, que con bulones o pernos está fijada a una base o platea de fundación. De aquí se infiere que la vinculación mencionada no constituye un empotramiento perfecto.

Con el fin de evaluar las primeras tres frecuencias de vibración libre, en la Tabla 1 varían el factor de forma o de conicidad  $\beta$  (-0.1, 0, 0.1) y las rigideces a traslación y rotación  $K_T=K_R$ . Se han fijado además  $M^*=J_R^*=0.1$  y la excentricidad  $e=0,5$  m.

Es lógico esperar que al aumentar las rigideces crecerán las frecuencias de vibración libre, tal que podamos asumir, que con el valor  $K_T=K_R=10^{16}$  estamos en presencia de una torre perfectamente empotrada en la base. Para  $\beta=0$  (caso de una torre con sección transversal constante) se han podido efectuar comparaciones numéricas con las obtenidas en [21], para la condición no inmersa. En el caso en que  $\beta=-0.1$  el área y la inercia poseen variación exponencial con exponente negativo, vale decir que la sección recta decrece, mientras que  $\beta=0.1$  proporciona un crecimiento exponencial tanto del área como de la inercia.

En la Tabla 2, siempre para tres valores del coeficiente  $\beta$ , se han calculado las primeras tres frecuencias de vibración libre variando la excentricidad de la masa ubicada en la cima de la torre. Se fijaron valores  $M^*=J_R^*=0.1$  para una torre perfectamente empotrada en la base. También en este caso se ha efectuado la comparación numérica con los ejemplos correspondientes a la publicación que aparece como referencia [21]. Como se puede observar, a medida que crece el valor de la excentricidad disminuye el primer autovalor, mientras crecen el segundo y el tercero.

En la Tabla 3, siempre para tres valores del coeficiente de forma  $\beta$ , se han calculado las tres primeras frecuencias de vibración libre variando el coeficiente adimensionalizado de masa  $M^*$ .

Tabla 2. Primeras tres frecuencias de vibración libre adimensionalizadas para diferentes excentricidades y coeficientes de forma (comparación numérica con la nota [21]).

$\beta$	e	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
-0.1	0	1.50671	2.58876	5.33046
	0.5	1.49940	2.59584	5.33592
	1	1.49188	2.60235	5.34159
	1.5	1.48415	2.60830	5.34742
0	0	1.50783	2.60635	5.34105
		[21] 1.50783	2.60635	5.34104
	0.5	1.50077	2.61293	5.34654
		[21] 1.50077	2.61293	5.34653
	1	1.49350	2.61890	5.35221
		[21] 1.49350	2.61890	5.35220
	1.5	1.48604	2.62427	5.35802
		[21] 1.48603	2.62427	5.35801
0.1	0	1.50756	2.62513	5.35138
	0.5	1.50077	2.63119	5.35690
	1	1.49377	2.63660	5.36255
	1.5	1.48659	2.64137	5.36832

Tabla 3. Primeras tres frecuencias de vibración libre adimensionalizadas en función de los coeficientes de masa y de forma (comparación con lo obtenido en [21]).

$\beta$	$M^*$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
-0.1	1	1.19122	2.47026	4.95883
	2	1.04539	2.44613	4.89528
	3	0.95974	2.43658	4.87176
	4	0.90058	2.43148	4.85906
0	1	1.19567	2.50506	4.97510
		[21] 1.19567	2.50506	4.97509
	2	1.05035	2.48350	4.90957
		[21] 1.05034	2.48347	4.90956
	3	0.96471	2.47486	4.88426
		[21] 0.96471	2.47486	4.88425
	4	0.90547	2.47022	4.87084
		[21] 0.90547	2.47021	4.87083
0.1	1	1.19964	2.53974	4.99250
	2	1.05502	2.52072	4.92459
	3	0.96948	2.51301	4.89805
	4	0.91020	2.50883	4.88391

Tabla 4. Primeras tres frecuencias adimensionalizadas de vibración libre variando el coeficiente adimensionalizado de la inercia rotacional de la masa  $M$  y del coeficiente de forma  $\beta$ . (comparación numérica con los resultados de [21]).

$\beta$	$J_R^*$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
-0.1	1	0.97080	2.28065	5.29158
	2	0.82332	2.26250	5.28944
	3	0.74607	2.25648	5.28873
	4	0.69528	2.25347	5.28837
0	1	0.98146	2.27460	5.29900
		[21] 0.98146	2.27459	5.29899
	2	0.83305	2.25470	5.29669
		[21] 0.83305	2.25470	5.29668
	3	0.75510	2.24809	5.29592
		[21] 0.75510	2.24809	5.29591
	4	0.70380	2.24479	5.29553
		[21] 0.70380	2.24479	5.29553
0.1	1	0.991841	2.26843	5.30587
	2	0.84265	2.24660	5.30337
	3	0.76404	2.23935	5.30254
	4	0.71224	2.23573	5.30212

Se fijan los valores  $J_R^*=0.1$  y  $e=0$  para una torre perfectamente empotrada en la base. La masa tiene un papel fundamental sobre la primera frecuencia de vibración libre, porque al aumentarla disminuye esta última, en los tres casos analizados en que se varió  $\beta$ .

Finalmente, en la Tabla 4 y para tres valores del coeficiente  $\beta$ , se han calculado las primeras tres frecuencias de vibración libre teniendo en cuenta la variación del coeficiente adimensionalizado de inercia rotacional de la masa  $J_R^*$ . Se establecieron valores de  $M^*=0.1$  y  $e=0$  para una torre perfectamente empotrada en su base. También en este caso se ha efectuado la comparación numérica con los ejemplos de la referencia [21]. El aumento de la inercia rotacional reduce, como en el ejemplo precedente, las primeras tres frecuencias adimensionalizadas de vibración libre.

Todos los ejemplos hechos conocer y muchos otros, así como la fundamentación teórica completa, forman parte de la tesis desarrollada en la referencia [22].

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha estudiado el análisis dinámico de un sistema estructural consistente en una torre de sección variable con directriz exponencial. Comprende además, la incorporación en su base de vínculos elásticos a rotación y traslación, a la par que contempla la existencia de una masa excéntrica con inercia rotacional en el extremo libre. El procedimiento analítico adoptado es el correspondiente a la solución exacta de la ecuación diferencial vía separación de variables. Se llevaron a cabo varios ejemplos numéricos con el fin de evaluar atentamente la influencia, sobre las frecuencias de vibración libre, de la forma de la estructura en función de los siguientes parámetros: rigidez a rotación y traslación, masa concentrada, excentricidad e inercia rotacional de la masa.

Los objetivos del presente estudio son susceptibles de ser ampliados y se orientan actualmente a otros temas relacionados, como por ejemplo, el interesante caso de estructuras "costa afuera" (*offshore*).

## REFERENCIAS

- [1] Laura, P.A.A., Pombo, J.L., Susemihl, E.A., "A note on the vibration of a clamped-free beam with a mass at the free end", *Journal of Sound and Vibration*, **37**(2), 161-168 (1974)
- [2] de Rosa, M.A., Ascoli, S., Nicastro, S., "Exact dynamic analysis of beam-mass systems", *Journal of Sound and Vibration*, **196**(4), 529-533 (1996)
- [3] Laura, P.A.A., Filipich, C.P., Cortinez, V.H., "Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses", *Journal of Sound and Vibration*, **112**, 177-182 (1987)
- [4] Rossi, R.E., Laura, P.A.A., Avalos, D.R., Larrondo, H.A., "Free vibration of Timoshenko beams carrying elastically mounted concentrated masses", *Journal of Sound and Vibration*, **165**, 209-223 (1993)
- [5] White, M.W.D., Heppler, G.R., "Vibration modes and frequencies of Timoshenko beams with attached rigid bodies", *Journal of Applied Mechanics*, **62**, 193-199 (1995)
- [6] Goel, R.P., "Transverse vibration of tapered beams", *Journal of Sound and Vibration*, **47**(1), 1-7 (1976)
- [7] Abrate, S., "Vibration of non-uniform rods and beams", *Journal of Sound and Vibration*, **185**, 703-716 (1995)
- [8] Mabie, H.H., Rogers, C.B., "Transverse vibrations of double-tapered beams with end support and with end mass", *Journal of the Acoustical Society of America*, **55**, 986-991 (1974)
- [9] Laura, P.A.A., Maurizi, M.J., Pombo, J.L., "A note on the dynamic analysis of an elastically restrained free beam with a mass at the free end", *Journal of Sound and Vibration*, **41**(4), 397-405 (1975)
- [10] Lau, J.H., "Vibration frequencies of tapered bars with end mass", *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 179-181 (1984)
- [11] Gurgoze, M., "A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses", *Journal of Sound and Vibration*, **96**(4), 461-468 (1984)
- [12] Gurgoze, M., "On the approximate determination of the fundamental frequency of a restrained cantilever beam carrying a tip heavy body", *Journal of Sound and Vibration*, **105**, 443-449 (1986)
- [13] Craver Jr., L., Jampala, P., "Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs", *Journal of Sound and Vibration*, **166**, 521-529 (1993)
- [14] Gurgoze, M., "On the eigen frequencies of a cantilever beam with attached tip and a spring-mass system", *Journal of Sound and Vibration*, **190**(2), 149-162 (1996)
- [15] Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H., "Vibration of an elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length", *Journal of Sound and Vibration*, **108**, 123-131 (1986)
- [16] Maurizi, M.J., Belles, P., Rosales, M., "A note on free vibrations of a constrained cantilever beam with a tip mass of finite length", *Journal of Sound and Vibration*, **138**, 170-172 (1990)
- [17] Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V., "Vibration of a variable cross-section beams", *Mechanical Research Communications*, **34**, 78-84 (2007)
- [18] de Rosa, M.A., Lippiello, M., "Natural vibration frequencies of tapered beams", *Engineering Transactions*, **57**(1) 45-66 (2009)
- [19] Uscilowska, A., Kolodziej, N., "Free vibration of immersed column carrying a tip mass", *Journal of Sound and Vibration*, **216**(1), 147-157 (1998)
- [20] Oz, H.R., "Natural frequencies of an immersed beam carrying a tip mass with rotatory inertia", *Journal of Sound and Vibration*, **266**, 1099-1108 (2003)
- [21] Wu, J.-S., Hsu, S.-H., "A unified approach for the free vibration analysis of an elastically supported immersed uniform beam carrying an eccentric tip mass with rotary inertia", *Journal of Sound and Vibration*, **291**, 1122-1147 (2006)
- [22] Vairo, F., *Vibrazioni libere di torri onshore ed offshore*, Tesi di laurea in progress (2010)

**FREE VIBRATIONS OF BEAM WITH VARIABLE CROSS SECTION, IN THE PRESENCE OF ELASTIC BASE CONSTRAINTS AND ECCENTRIC MASS WITH ROTARY INERTIA AT THE TIP**

**Abstract** – Quite recently, dynamic behaviour of wind towers has been investigated by many authors. For example, a detailed study of an offshore tower with constant cross section has been offered in [1], and its free vibration frequencies have been detected, for a partially immersed structure with flexible base constraints and eccentric mass with rotary inertia at the tip. On the same footsteps, in this paper the free frequencies of an onshore tower have been calculated, the cross section is supposed to vary according to an exponential law, the base constraints are supposed to be both axially and rotationally flexible, and at the tip an eccentric mass with rotary inertia is taken into account. The solution method can be considered “exact”, as long as the differential equation of motion is deduced and solved, and various numerical examples are discussed.

**Keywords** – Onshore Tower, Free vibrations, Variable cross section, Eccentric mass.