



DETERMINACIÓN DEL RADIO DE CURVATURA DE LA LEVA DE UN MECANISMO PLANO¹

BORIS F. VORONIN², GUSTAVO VILLALOBOS HERNÁNDEZ³

²Institución Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara, División de Ingenierías
Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica

Blvd. Marcelino García Barragan 1421, esq. Calzada Olímpica, Guadalajara, Jalisco, México, C.P. 44430

³Institución Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara, División de Ingenierías
Departamento de Matemáticas

Blvd. Marcelino García Barragan 1421, esq. Calzada Olímpica, Guadalajara, Jalisco, México, C.P. 44430

(Recibido 15 de diciembre de 2009, para publicación 10 de febrero de 2010)

Resumen – El presente material está dedicado a la resolución de un problema de mecanismos planos de levas, a saber: a la determinación del radio de curvatura de la leva, ya que de la determinación correcta de éste depende la capacidad de trabajo del mecanismo. En el artículo se muestra el proceso de obtención de la ecuación de la curva de paso y de la determinación de la ecuación del radio de curvatura. Éstos se muestran para el caso común: para mecanismos con seguidor de movimiento lineal alternativo con excentricidad y no nula y para mecanismos con seguidor oscilante. En una forma muy clara y sencilla se muestra que la curva convexa recibe signo negativo y la cóncava, positivo. La definición analíticamente exacta de la magnitud y forma de la curvatura de una leva tiene mucha importancia, puesto que permite, usando métodos numéricos, diseñar un mecanismo con parámetros óptimos.

Palabras clave – Teoría de mecanismos y máquinas, mecanismos de leva, curvatura.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas de la síntesis y del análisis de mecanismos de levas, que resuelve la Teoría de Mecanismos y Máquinas, es la definición del radio de curvatura de la leva. De la magnitud de éste depende la elección del radio de rodillo y la magnitud de esfuerzos de contacto y, por consiguiente, la resistencia al desgaste. El presente trabajo está dedicado a la resolución de este problema, ya que su representación en la existente literatura técnica es bastante incompleta y en algunas partes no es clara. La resolución está limitada a mecanismos planos.

Para el mecanismo de un seguidor de cara plana el radio de curvatura del perfil de la leva se calcula por la fórmula de Herónimus [10]:

$$\rho = r_0 + s^{B2} + \left(s^{B2} \right)'' , \quad (1)$$

en donde r_0 es el radio primario de la leva; s^{B2} es el desplazamiento del punto B del seguidor y $\left(s^{B2} \right)''$ es la aceleración del mismo (en adelante con superíndices se indicarán la pertenencia de los vectores y de las coordenadas de los puntos a los eslabones concretos, y con subíndices la pertenencia de los mismos al sistema de coordenadas concreto).

¹ El tema presentado en el artículo fue discutido en XV Congreso Internacional Anual de la SOMIM (Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos), c. Obregón, Sonora, México, 2009.

Para el cálculo del radio de curvatura de la curva de paso para los mecanismos de un seguidor del movimiento lineal alternativo con la punta hecha en forma de cuña, de rodillo y de zapata curva en [6,7,14,15,18] se propone la siguiente fórmula:

$$\rho_{paso} = \frac{\left[(r_0 + s)^2 + (s')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(r_0 + s)^2 + 2(s')^2 - s''(r_0 + s)} \quad (2)$$

en donde $\rho_{paso} = \rho + r_r$ es el radio de curvatura de la curva de paso, en que ρ es el radio de la curvatura de la superficie de la leva en la línea de contacto y r_r es el radio de rodillo del seguidor; r_0 es el radio primario de la leva; s es el desplazamiento del seguidor; s' es el análogo de la velocidad del seguidor y s'' es el análogo de la aceleración del mismo. Sin embargo, la fórmula (2) no está completa ya que es obtenida para el caso particular cuando la excentricidad es nula ($e = 0$).

Solamente en [14] se representa la fórmula para el cálculo del radio de curvatura para los mecanismos con seguidor oscilante. Pero debido a la presentación del esquema del mecanismo en forma específica la fórmula resultó compleja.

En [1,2,5,11,16] no se demuestra la solución de este problema.

Seguidamente se muestra el proceso de la deducción de las ecuaciones para el cálculo del radio de curvatura para los mecanismos con el seguidor del movimiento lineal alternativo y para los que tienen el seguidor oscilante. Para los primeros, las ecuaciones se obtienen para el caso común, cuando la excentricidad no es igual a cero ($e \neq 0$), y para los segundos en forma más conveniente para el cálculo.

2. CONCEPTOS GENERALES DE LA DETERMINACIÓN DEL RADIO DE CURVATURA DE LA LEVA

La obtención de las fórmulas para el cálculo del radio de curvatura de la leva se basa en la interpretación matemática tradicional presentada en [4,8,9,17,19,20], etc:

$$k = \frac{d\phi}{ds} \quad (3)$$

en donde ds es el diferencial del arco de la curva en el punto en que se calcula el radio y $d\phi$ es el diferencial del ángulo del mismo arco.

Al aplicar la ecuación (3) a la curva de paso de los mecanismos de leva con el seguidor de cuña, de rodillo o de zapata curva, y luego multiplicar y dividir por $d\phi$, en donde ϕ es el ángulo de giro de la leva, ésta obtendrá la siguiente forma:

$$k_{paso} = \frac{d\phi}{ds} \frac{d\phi}{d\phi} = \frac{1}{s'} \left| \frac{d\phi}{d\phi} \right|. \quad (4)$$

En la ecuación (4), s' es el análogo de la velocidad de deslizamiento del punto que pertenece a la curva de paso sobre la propia y $\frac{d\phi}{d\phi}$ es el análogo de la velocidad de variación del ángulo de orientación del vector de esta velocidad, provocada por el deslizamiento del punto sobre la curva. Al presentar el mecanismo en un sistema de coordenadas $S(x, y)$ se obtiene:

$$\phi = \arctan \frac{y'}{x'}, \quad (5)$$

en donde x' e y' son las proyecciones del análogo de la velocidad de deslizamiento del punto sobre la curva de paso de la leva sobre los ejes del sistema de coordenadas S .

Con esto, la derivada de (5) tendrá la siguiente forma:

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2}, \quad (6)$$

en donde:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = s' \quad (7)$$

es el análogo de la velocidad de deslizamiento del punto sobre la curva de paso.

Así pues, la ecuación (4) obtendrá la siguiente forma:

$$k_{paso.} = \frac{x'y'' - x''y'}{(s')^3}, \quad (8)$$

y el radio de curvatura de la curva de paso, la siguiente:

$$\rho_{paso} = \frac{1}{k_{paso.}} = \frac{(s')^3}{x'y'' - x''y'}. \quad (9)$$

3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA CURVA DE PASO

Para utilizar la igualdad (9) se usa la ecuación de la curva de paso cuya obtención, en forma general, es posible presentar así. Se construyen dos sistemas de coordenadas con el inicio en el centro de rotación de la leva. Un sistema se considera inmóvil, unido rígidamente a la base en que se coloca el seguidor, y el otro móvil, unido rígidamente a la leva. En el sistema de coordenadas inmóvil se definen las coordenadas de un punto del seguidor, el que puede ser el centro de rotación de rodillo, la punta de la cuña u otro. Al proporcionar el movimiento giratorio al sistema de coordenadas móvil junto con la leva, en correspondencia con la ley de movimiento se trasladará el punto elegido del seguidor. Transfiriendo las coordenadas de este punto al sistema de coordenadas móvil se obtiene la ecuación de la curva de paso.

3.1. Para los mecanismos de seguidor del movimiento lineal alternativo

En la Fig. 1 se muestran dos sistemas de coordenadas: $S(x, y)$ es inmóvil y el $S_1(x_1, y_1)$ móvil. El inicio de éstos se ubica en el centro de rotación de la leva O_1 . La leva 1 se dispone en el sistema de coordenadas S_1 y se une rígidamente a éste y el seguidor 2 se dispone en el sistema S . La leva junto con el sistema de coordenadas S_1 realiza el movimiento giratorio con una velocidad angular ω_1 y el seguidor el movimiento de traslación en el sistema S correspondiente a la ley de movimiento. En la figura el punto B_0 es el de contacto del seguidor con la leva en el comienzo del movimiento del seguidor, pegado a la leva y expresado en el sistema de coordenadas S_1 , y B_0' es la posición del mismo punto expresado en el sistema de coordenadas S . Entonces el segmento $B_0'B$ corresponde al desplazamiento del punto B del seguidor al proporcionar a la leva el giro al ángulo φ_1 junto con el sistema de coordenadas S_1 .

La curva plana, en la teoría de engranajes, en forma general, se escribe como:

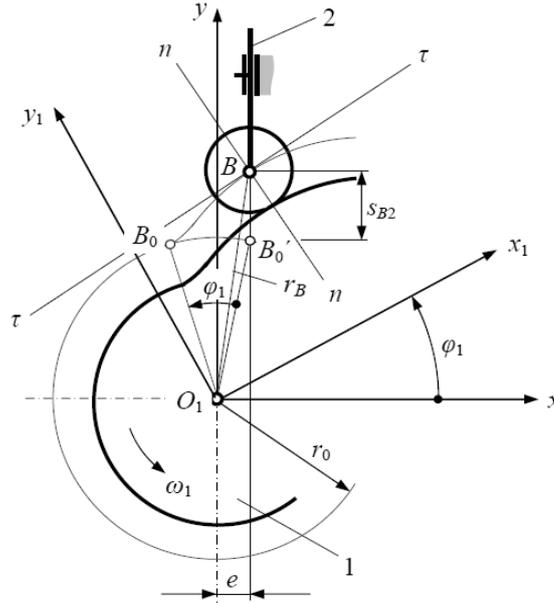


Fig. 1. Diagrama que ilustra la disposición de la leva 1 en el sistema de coordenadas $S_1(x_1, y_1)$ y del seguidor 2 en el $S(x, y)$.

$$r_1 = f(\varphi), \quad (11)$$

o, pasando a las proyecciones, en forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(\varphi) \\ y_1 &= \psi(\varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

Esto se obtiene mediante:

$$r_1 = M_{10} \cdot r, \quad (13)$$

en donde M_{10} es la matriz de transferencia al sistema de coordenadas S_1 del S y r es el radio vector del punto de la curva expresado en el sistema de coordenadas S .

Para el esquema representado en la Fig. 1 la matriz de transferencia se expresa en la siguiente forma:

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \text{sen } \varphi_1 & 0 \\ -\text{sen } \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

y el radio vector r , expresado en forma de las coordenadas del punto B del seguidor, escritas en el sistema de coordenadas S , en la siguiente:

$$\begin{aligned} x^{B2} &= e \\ y^{B2} &= s^{B2} + \sqrt{r_0^2 - e^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

en donde e es la excentricidad, r_0 es el radio primario de la leva y s^{B2} es el desplazamiento del punto B del seguidor.

Al multiplicar (14) por (15) se obtiene la ecuación de la curva de paso. Su forma es:

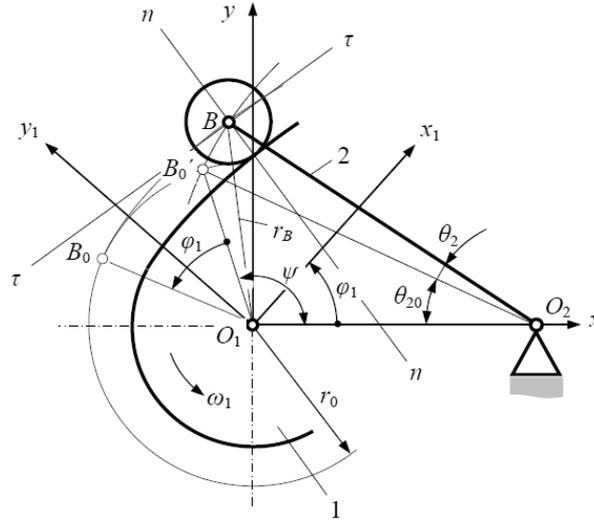


Fig. 2. Esquema para la obtención de las ecuaciones de la curva de paso, para el mecanismo de seguidor oscilante de rodillo.

$$\begin{aligned} x_1^{B1} &= e \cos \varphi_1 + \left(s_{B2} + \sqrt{r_0^2 - e^2} \right) \operatorname{sen} \varphi_1 \\ y_1^{B1} &= -e \operatorname{sen} \varphi_1 + \left(s_{B2} + \sqrt{r_0^2 - e^2} \right) \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (16)$$

3.2. Para mecanismos de seguidor oscilante

Para el mecanismo del seguidor oscilante de rodillo, mostrado en la Fig. 2, se consideran los datos siguientes: la ley del movimiento del seguidor, el radio primario de la leva r_0 , la longitud del seguidor L_2 y la longitud de la base $L_{O_1O_2}$ (si la longitud de la base no se conoce, entonces el centro de rotación de la leva se toma en la cuerda que pasa a través de los puntos extremos de la trayectoria del punto B). La leva gira en el par cinemático de rotación O_1 con la velocidad angular ω_1 .

La ley del movimiento del seguidor se considera asignado en una forma $\theta_2 = f(\varphi_1)$ o en otra $s^{B2} = f(\varphi_1)$: en donde θ_2 es el desplazamiento angular del seguidor y s^{B2} es el desplazamiento circular de la punta del mismo. Si la ley del movimiento del seguidor está dada por $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1)$, $\theta_2' = \theta_2'(\varphi_1)$ y $\theta_2'' = \theta_2''(\varphi_1)$, en donde θ_2' es el análogo de la velocidad angular de éste y θ_2'' es el de la aceleración angular, entonces la velocidad angular y la velocidad circular del punto B se relacionan mediante $v^{B2} = L_2 \theta_2' \omega_1$ y la aceleración angular y la aceleración del mismo punto como $a^{B2} = L_2 \theta_2'' \omega_1$. Así pues, el análogo de la velocidad de la punta tendrá la siguiente forma $s'^{B2} = L_2 \theta_2'$ y el de la aceleración, la siguiente $s''^{B2} = L_2 \theta_2''$.

Igualmente, como en el ejemplo anterior, se toman los sistemas de coordenadas: $S(x, y)$ que es inmóvil y $S_1(x_1, y_1)$ que es móvil. Los inicios de éstos coinciden y se ubican en el centro de rotación de la leva O_1 . En la Fig. 2 se muestra el esquema de dicho mecanismo colocado en el sistema de coordenadas S de tal modo que la base O_1O_2 coincida con el eje x . El sistema de coordenadas S_1 está unido rígidamente a la leva y gira junto con ésta alrededor del punto O_1 , respecto al S . La posición de inicio del seguidor es O_2B_0' y su posición después del giro de la leva al ángulo φ_1 es O_2B .

Tabla 1. Sistema de ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas, para el mecanismo con el seguidor del movimiento lineal alternativo.

$x_1^{B1} = e \cos \varphi_1 + \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \text{sen } \varphi_1$ $y_1^{B1} = -e \text{sen } \varphi_1 + \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \cos \varphi_1$
$\left(x_1^{B1} \right)' = -e \text{sen } \varphi_1 + \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \cos \varphi_1 + \left(s^{B2} \right)' \text{sen } \varphi_1$ $\left(y_1^{B1} \right)' = -e \cos \varphi_1 - \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \text{sen } \varphi_1 + \left(s^{B2} \right)' \cos \varphi_1$
$\left(x_1^{B1} \right)'' = -e \cos \varphi_1 - \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \text{sen } \varphi_1 + 2 \left(s^{B2} \right)' \cos \varphi_1 + \left(s^{B2} \right)'' \text{sen } \varphi_1$ $\left(y_1^{B1} \right)'' = e \text{sen } \varphi_1 - \left(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2} \right) \cos \varphi_1 - 2 \left(s^{B2} \right)' \text{sen } \varphi_1 + \left(s^{B2} \right)'' \cos \varphi_1$

Tabla 2. Sistema de ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas para el mecanismo con el seguidor oscilante.

$x_1^{B1} = L_{O1O2} \cos \varphi_1 - L_2 \cos(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$ $y_1^{B1} = -L_{O1O2} \text{sen } \varphi_1 + L_2 \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$
$\left(x_1^{B1} \right)' = -L_{O1O2} \text{sen } \varphi_1 + L_2(1 + \theta_2') \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$ $\left(y_1^{B1} \right)' = -L_{O1O2} \cos \varphi_1 + L_2(1 + \theta_2') \cos(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$
$\left(x_1^{B1} \right)'' = -L_{O1O2} \cos \varphi_1 + L_2 \theta_2'' \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1) + L_2 \left(1 + \theta_2' \right)^2 \cos(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$ $\left(y_1^{B1} \right)'' = L_{O1O2} \text{sen } \varphi_1 + L_2 \theta_2'' \cos(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1) - L_2 \left(1 + \theta_2' \right)^2 \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2 + \varphi_1)$

Aceptando la ley de movimiento en la forma $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1)$, $\theta_2' = \theta_2'(\varphi_1)$ y $\theta_2'' = \theta_2''(\varphi_1)$, las coordenadas del punto B del seguidor en el sistema de coordenadas S se escribirán del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x^{B2} &= L_{O1O2} - L_2 \cos(\theta_{20} + \theta_2) \\ y^{B2} &= L_2 \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2) \end{aligned} \quad (17)$$

en donde el ángulo θ_{20} se determina por la fórmula:

$$\theta_{20} = \arccos \frac{L_2^2 + L_{O1O2}^2 - r_0^2}{2L_2 L_{O1O2}}. \quad (18)$$

Al multiplicar (14) por (17) se obtiene la ecuación de la curva de paso de la leva:

$$\begin{aligned} x_1^{B1} &= \left[L_{O1O2} - L_2 \cos(\theta_{20} + \theta_2) \right] \cdot \cos \varphi_1 + L_2 \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2) \text{sen } \varphi_1 \\ y_1^{B1} &= - \left[L_{O1O2} - L_2 \cos(\theta_{20} + \theta_2) \right] \cdot \text{sen } \varphi_1 + L_2 \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2) \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (19)$$

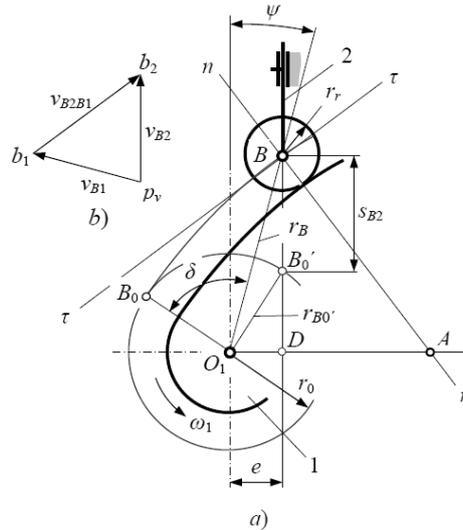


Fig. 3. Diagrama que ilustra la correlación entre el polígono vectorial de velocidades y la construcción geométrica del esquema del mecanismo.

4. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL RADIO DE CURVATURA

Para esto se toma la ecuación (9). En la Tabla 1 se muestran las ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas para el mecanismo con el seguidor del movimiento lineal alternativo y en la Tabla 2 con el seguidor oscilante.

En el numerador de la ecuación (9), la velocidad de deslizamiento del punto de la curva de paso sobre la propia se puede obtener utilizando la fórmula (7). Pero es más fácil obtenerla mediante los siguientes razonamientos. Si se toma en cuenta que el seguidor intercepta a la curva de paso en un solo punto, para los mecanismos de rodillo en el centro de rotación B de éste, la velocidad relativa v^{B2B1} de la punta del seguidor con respecto a la curva de paso será la del deslizamiento del punto de la curva sobre la propia. Para encontrarla se formula la ecuación vectorial de velocidades:

$$\frac{-B2}{v} = \frac{-B1}{v} + \frac{-B2B1}{v} \quad (20)$$

y como resolución de ésta se construye polígono vectorial.

En la Fig. 3(a) se muestra el esquema de un mecanismo de leva con seguidor del movimiento lineal alternativo de rodillo, en que O_1B es el radio vector del punto B del seguidor y $n-n$ es la normal común, y en la Fig. 3(b) la solución de la ecuación (20) presentada en forma de polígono vectorial de velocidades. Al analizar el polígono vectorial y el esquema del mecanismo se llega a la conclusión de que el triángulo $\Delta p_v b_1 b_2$ de éste es semejante al O_1BA . Esto establece correlación entre los análogos de las velocidades y los segmentos del esquema del mecanismo: en donde el segmento AO_1 por la magnitud es igual al análogo de la velocidad $(s^{B2})'$, el radio vector $\overset{-B}{r}$ al $(s^{B1})'$ y el segmento AB al análogo de la velocidad relativa $(s^{B2B1})'$ diseñados a escala del mecanismo μ_L .

Así pues, utilizando dicha igualdad, en la Fig. 3a se determina el análogo de la velocidad de movimiento del punto B_2 del seguidor con respecto al B_1 de la leva. Éste tiene la siguiente forma:

$$(s^{B2B1})' = AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} \quad (21)$$

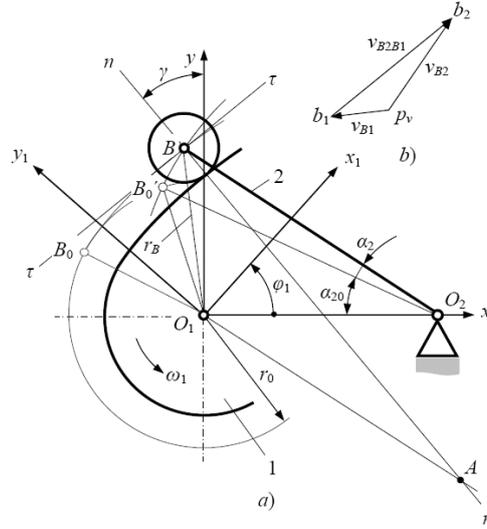


Fig. 4. Esquema para la obtención de ecuación de velocidad de deslizamiento del punto B del seguidor sobre la curva de paso.

en donde $AD = AO_1 - O_1D$ y $DB = DB_0' + B_0'B$. Puesto que AO_1 es $(s^{B2})'$, O_1D es la excentricidad e , $DB_0' = \sqrt{r_0^2 - e^2}$ y $B_0'B$ es s^{B2} , resulta:

$$(s^{B2B1})' = \sqrt{(\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2})^2 + ((s^{B2})' - e)^2}. \quad (22)$$

Al sustituir en (9) el numerador (la velocidad de deslizamiento) por (22) y los términos del denominador, por sus valores de la Tabla 1, se obtiene la ecuación del radio de curvatura de la curva de paso para el mecanismo con el seguidor lineal alternativo:

$$\rho_{paso} = \frac{\left[f(s^{B2})^2 + f((s^{B2})')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(s^{B2})'' \times f(s^{B2}) - f(s^{B2})^2 - 2((s^{B2})')^2 + C}, \quad (23)$$

en donde: $f(s^{B2}) = \sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B2}$, $f((s^{B2})') = (s^{B2})' - e$ y $C = 3e(s^{B2})' - e^2$.

Igualmente, para un mecanismo con seguidor oscilante presentado en la figura 4a, en que la línea O_1A está trazada paralelamente al seguidor O_2B , el polígono vectorial de velocidades $\Delta p_v b_1 b_2$ presentado en la Fig. 4b será semejante al ΔO_1BA del esquema del mecanismo. Con esto se tiene:

$$(s^{B2B1})' = \sqrt{L_{O_1O_2}^2 + L_2^2 A^2 - 2L_{O_1O_2}L_2AB}, \quad (24)$$

en donde L_2 es la longitud del seguidor; $L_{O_1O_2}$ es la longitud de la base del mecanismo; $A = (1 + \theta_2')$ y $B = \cos(\theta_{20} + \theta_2)$.

Sustituyendo en (9) el numerador por (23) y el denominador por sus valores en la Tabla 2 se obtiene:

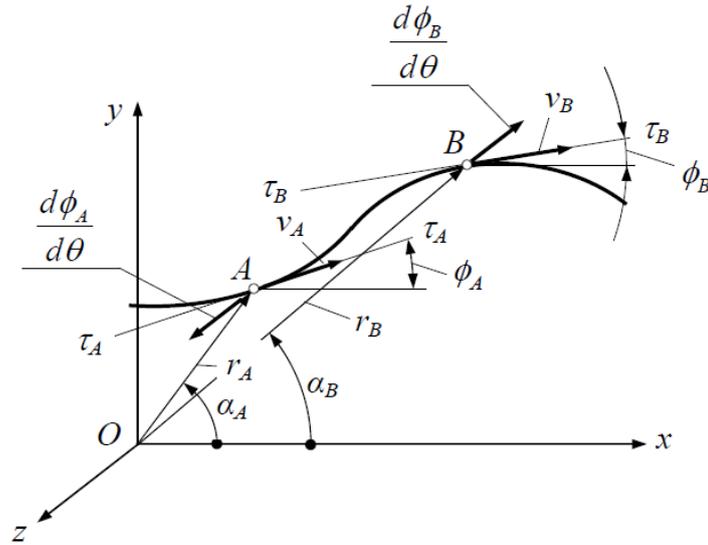


Fig. 5. Para la definición del signo del radio de curvatura.

$$\rho_{\text{paso}} = \frac{\left[L_{O_1O_2}^2 + L_2^2 A^2 - 2L_{O_1O_2}L_2AB \right]^{\frac{3}{2}}}{-L_{O_1O_2}^2 - L_2^2 A^2 - L_{O_1O_2}L_2\alpha_2'' D + L_{O_1O_2}L_2ABE}, \quad (25)$$

en donde: $D = \text{sen}(\theta_{20} + \theta_2)$ y $E = 2 + \theta_2'$.

Para comprobar lo obtenido, se toma la ecuación (24). Tomando la magnitud de excentricidad $e=0$, ésta obtiene forma:

$$\rho_{\text{paso}} = \frac{\left[(r_0 + s^{B2})^2 + \left((s^{B2})' \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(s^{B2})'' (r_0 + s^{B2}) - (r_0 + s^{B2})^2 - 2 \left((s^{B2})' \right)^2}, \quad (26)$$

que coincide con la fórmula (2) indicada en [6], [14], [15], [18]. Pero la coincidencia no es completa ya que hay diferencia en el signo del denominador y por supuesto en el signo del radio de curvatura. Al hacer cálculo mediante la fórmula (2) el radio de curva convexa obtiene signo positivo (+) y el radio de curva cóncava, negativo (-), aplicando la fórmula (26) los signos resultan contrarios. Esta diferencia obliga buscar la resolución de este problema ya que la solución correcta determina el tipo de la curva.

En [12] y [13] se dice “el signo positivo (de la curvatura) significa que el sentido del radio de curvatura coincide con la dirección positiva de la normal”. Pero esto no expresa claramente qué tipo de curva es, cóncava o convexa, cuando tiene signo positivo o negativo.

En [4,9,8,17,19] en la fórmula de curvatura (9) el denominador se toma por módulo, es decir, el signo de la curvatura no se toma en cuenta.

Por supuesto, en el cálculo a mano esto no tiene mucha importancia. Pero con el cálculo mediante la programación, esto puede conducir a un error ya que en el par cinemático superior, para el cálculo de esfuerzos de contacto, se necesita calcular el radio de curvatura equivalente de las superficies conjugadas, una de las cuales es convexa y la otra puede ser cóncava o convexa. Por eso los autores encuentran la necesidad de definir la forma exacta de la curva.

Se toma el ejemplo de una curva de paso de la leva, mostrada en la Fig. 5, que tiene dos partes: una cóncava, en el punto A, el centro de curvatura está fuera de la curva, fuera del espacio limitado por los

planos del sistema de coordenadas $S(x, y, z)$ de un lado y la curva del otro; y otra convexa, en el punto B , el centro de curvatura está dentro de la curva, dentro del espacio indicado. Si el sentido de giro de la leva contrario al de las manecillas del reloj se acepta como positivo, ya que el sentido del vector de la velocidad angular coincide con el sentido del eje Oz del sistema de coordenadas; entonces el vector \vec{v}^{-A} de la velocidad de deslizamiento de la punta del seguidor con respecto a la leva en el punto A y \vec{v}^{-B} en el punto B tendrán el mismo sentido, como se muestra en la Fig. 5. Pero el sentido del vector $\frac{d\phi_A}{d\theta}$ de la variación del ángulo ϕ_A de la orientación de la tangente $\tau_A - \tau_A$, provocada por el movimiento del punto A sobre la curva es positivo, ya que está dirigido en el sentido coincidente con el eje Oz , y el sentido del vector $\frac{d\phi_B}{d\theta}$ de la variación del ángulo ϕ_B de la orientación de la tangente $\tau_B - \tau_B$, provocada por el movimiento del punto B es negativo, ya que está dirigido en sentido contrario al del eje Oz . Entonces, en el primer caso $k_A = \frac{d\phi}{ds}$ es positivo y en el segundo $k_B = \frac{d\phi}{ds}$ es negativo. Así pues, resulta que el tipo de la curva de paso define solamente el sentido del vector de la velocidad de la variación del ángulo de la orientación de la tangente, provocado por deslizamiento del punto de la curva sobre la propia. Esto permite llegar a la siguiente conclusión, el radio de curvatura de la curva convexa tiene signo negativo y de la cóncava, positivo.

De lo anterior resulta que las ecuaciones (24) y (25) de una sola manera definen la magnitud del radio de curvatura de la curva de paso y el tipo de ésta.

Sería importante determinar el radio mínimo de la curva de paso, ya que de la magnitud de éste depende la elección del radio de rodillo. Para esto se necesita derivar las ecuaciones (24) y (25) e igualarlas a cero, con esto se calcularía el ángulo de la posición de la leva φ cuando el radio de curvatura sería mínimo. Sin embargo, realizar esto es difícil ya que las ecuaciones resultan muy complejas. Se considera más fácil realizar esto utilizando programación y los modernos medios numéricos de cálculo.

5. CONCLUSIONES

En el material presentado se mostró el modo de la obtención de las ecuaciones de la curva de paso para los mecanismos de leva del seguidor oscilante y del seguidor del movimiento lineal alternativo con la punta hecha en forma de cuña, de rodillo y de zapata curva. Con el uso de éstas son obtenidas las ecuaciones para el cálculo del radio de curvatura de la leva. Para los mecanismos con el seguidor del movimiento lineal alternativo la ecuación del radio de curvatura se obtuvo para el caso común $e \neq 0$. Fue comprobada la validez de estas ecuaciones.

En forma muy clara y sencilla se comprobó que en el cálculo analítico el radio de curvatura de la curva convexa obtiene signo negativo y de la cóncava, positivo. Entonces, las ecuaciones obtenidas para el cálculo de la curvatura de la curva de paso de una sola manera definen tanto la magnitud, como el tipo de la curva.

REFERENCIAS

- [1] Artobolevskiy, I.I., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Nauka, Moscú, Rusia (1988)
- [2] Baranov, G.G., *Curso de la Teoría de Mecanismos y Maquinas*, Mir, Moscú (1985)
- [3] Edwards, C.H., Penny, D.E., *Calculus with Analytic Geometry*, Prentice Hall, New Jersey (1994)
- [4] Erdman, A.G., Sandor, G., *Diseño de mecanismos. Análisis y Síntesis*, Prentice, México (1998)
- [5] Faires, V.M., *Diseño de Elementos de Máquinas*, Limusa S.A. de C.V., México (2001)
- [6] Foix Cardona, S., Costa Clos, D., *Teoría de máquinas*, Ediciones de la Universidad Politécnica de Catalunya, Catalunya, España (2001)

- [7] George, B.T.Jr., *Cálculo. Varias Variables*, Pearson Educación, México (2006)
- [8] Bradley, G.L., Smith, K.J., *Cálculo de varias variables*. Volumen II. Prentice Hall Iberia, Madrid, España (1998)
- [9] Grupo de autores, Bajo la redacción de K.V. Frolov, *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Edición de MGTU de nombre N.E. Bauman, Moscú, Rusia (2002)
- [10] Herónimus, J.L., *Determinación del perfil de la leva por el movimiento dado del seguidor*, Técnica del Flota Aérea, No 3, Rusia (1933)
- [11] Litvin, F.L., *Teoría de engranajes*, Nauka, Moscú, Rusia (1968)
- [12] Litvin, F.L., *Gear Geometry and Applied Theory*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs (1994)
- [13] Mabie, H.H., Reinoldz, C.F., *Mecanismos y Dinámica de Máquinas*, Limusa S.A. de C.V. México (2001)
- [14] Norton, R.L., *Diseño de Maquinaria. Una introducción a la Síntesis y al Análisis de Mecanismos y Máquinas*, McGraw-Hill (2005)
- [15] Calero Pérez, R., Carta González, J.A., *Fundamentos de Mecanismos y Máquinas para Ingenieros*, McGraw-Hill / Interamericana de España, Madrid, España (1999)
- [16] Ramírez-Galarza, A.I., Kurí, J.S., *Introducción a la Geometría Avanzada*, Facultad de Ciencias, UNAM, México (2002)
- [17] Shigley, J.E., Uicker, Jr.J.J., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, McGraw-Hill (1990)
- [18] Simmons, F.G., *Cálculo y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México (2002)
- [19] Velasco, O.A.P., Reyes Victoria, J.G., *Curso de geometría diferencial. Parte I. Curvas y Superficies*, UNAM, México (2005)

DETERMINATION OF THE RADIUS OF CURVATURE OF THE CAM A MECHANISM PLANE

Abstract – The presented material is dedicated to resolution of a problem of flat mechanisms of cams, namely: to determination of the radio of curvature of the cam, as working capacity of the mechanism depends on correct definition of it. In the paper, the process of deducing of the equation of a curve of a step and definition of the equation of radio of a curvature are shown. They are shown for the common case: for mechanisms with pusher of linear alternative movement with eccentricity not zero and for mechanisms with oscillating pusher. In a very clear and simple form is shown that the convex curve receives a negative sign and concave, positive. Analytically exact definition of size and the form of a curvature of a fist has greater importance, as it allows using numerical methods to project the mechanism with optimum parameters.

Keywords – Theory of Mechanisms and Machines, Mechanisms of cam, Curvature.

