



HOMOGENEIZAÇÃO DE PROPRIEDADES DE MATERIAIS COMPÓSITOS EM TERMOELASTICIDADE LINEAR

JOAQUIM PINHO-DA-CRUZ, PAULO SÉRGIO FERREIRA, JOÃO ALEXANDRE OLIVEIRA, FILIPE TEIXEIRA-DIAS

Universidade de Aveiro
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal

(Recibido 17 de noviembre de 2008, para publicación 1 de septiembre de 2009)

Resumo – A modelação numérica detalhada do comportamento termomecânico de componentes estruturais constituídos por materiais compósitos requer geralmente o conhecimento prévio das suas propriedades macroscópicas. Por um lado, através de modelos analíticos é possível obter estimativas para os valores das propriedades efectivas dos materiais, assim como majorantes e minorantes para esses mesmos valores. Por outro lado, é possível utilizar métodos de natureza numérica, de entre os quais se destaca a homogeneização por expansão assintótica. O recurso a metodologias de homogeneização pode trazer benefícios computacionais bastante significativos. Esta técnica permite a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, permitindo, assim, a obtenção de leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural. Neste trabalho procede-se a um estudo comparativo das propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assintótica e de modelos analíticos com resultados experimentais obtidos a partir de fontes bibliográficas.

Palavras-chave – Materiais compósitos, homogeneização, termoelasticidade linear, elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos têm vindo ao longo dos anos a ganhar grande expressão quanto à sua utilização, principalmente em engenharia. Estes materiais são constituídos por duas ou mais fases e caracterizam-se por apresentar heterogeneidades. Quando um destes materiais é sujeito a uma mudança de temperatura, a diferença entre os coeficientes de expansibilidade térmica das fases constituintes origina o aparecimento de tensões de ordem térmica, que resultam da referida heterogeneidade microestrutural. Não raras vezes a combinação das tensões de origem mecânica com as tensões de origem térmica pode levar, em situações de carregamento termomecânico, a fenómenos de cedência ou de ruptura do material. Nestas condições, torna-se indispensável conhecer as propriedades termomecânicas efectivas dos materiais constituintes. Estas podem ser determinadas recorrendo a modelos analíticos ou a simulação numérica. Os modelos analíticos são normalmente associados a materiais compósitos com geometrias simples, constituídos por inclusões esféricas ou cilíndricas, de onde se podem retirar não só as propriedades termomecânicas efectivas mas também minorantes/majorantes dessas mesmas propriedades. Para materiais compósitos com geometrias complexas é usual recorrer-se à simulação numérica e em particular à modelação por elementos finitos. Todavia, uma correcta definição dos detalhes microestruturais torna necessária a utilização não só de malhas não-estruturadas como de um grande número de elementos finitos. Mesmo em termos de termoelasticidade linear, a modelação numérica do comportamento termomecânico deste tipo de componentes estruturais fica de certa forma impossibilitada de se realizar, devido ao facto de ser necessário o uso de grande memória computacional e conseqüentemente de tempos de computação demasiado longos.

Deste modo, para se reduzir esses tempos e os elevados custos envolvidos na modelação numérica de componentes estruturais de materiais compósitos, pode recorrer-se a metodologias de homogeneização. Estas metodologias permitem a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalen-

te, dando origem a leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural. Em geral, os materiais compósitos apresentam heterogeneidades microestruturais cujas dimensões características se revelam bastante inferiores às dimensões características dos componentes estruturais em que são normalmente inseridos. Se a distribuição das heterogeneidades no seio da matriz se apresenta de uma forma equitativa, a morfologia dessas heterogeneidades pode ser geralmente aproximada pela repetição periódica de uma célula unitária, que representa os detalhes microestruturais do material compósito.

Desde o início do século XIX que a homogeneização de propriedades físicas é conhecida [1-3]. Mas é só na segunda metade do século XX que os primeiros trabalhos relativos à teoria matemática da homogeneização se tornaram conhecidos [4-6]. No caso de se ter presente um material compósito com microestrutura não-periódica podem utilizar-se diversas técnicas de homogeneização: para problemas simétricos e não-periódicos, a convergência-G [4], para problemas não-simétricos e não-periódicos, a convergência-H [7] e para problemas que admitem uma caracterização variacional, a convergência- Γ [8]. Contudo estas metodologias não permitem obter dados homogeneizados para as propriedades termomecânicas de um material compósito, mas apenas estimar limites inferiores e superiores para os valores homogeneizados das propriedades efectivas.

Por outro lado, se se tiver um material compósito com uma microestrutura periódica, pode aplicar-se o método de homogeneização por expansão assintótica (HEA), com ganhos significativos na redução do número de graus de liberdade associados à modelação do comportamento termomecânico destas estruturas e com a possibilidade da caracterização dos campos microestruturais. No que concerne à termoelasticidade e decorrendo desta metodologia, é possível obter equações explícitas que permitem a determinação dos níveis microestruturais de fluxo superficial de calor por condução, de tensão e de deformação. Na prática, este processo corresponde ao inverso da homogeneização, o qual se denomina localização. A HEA permite a obtenção de valores médios (homogeneizados) para as propriedades termomecânicas de um determinado material compósito. Esta técnica baseia-se em dois pressupostos: (i) os deslocamentos podem ser caracterizados por uma série assintótica e (ii) as características da microestrutura são definidas na célula unitária, representativa da periodicidade na microescala.

Neste contexto, neste trabalho procede-se a um estudo comparativo das propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos quer numéricos de homogeneização por expansão assintótica quer analíticos com resultados experimentais de fonte bibliográfica, ilustrando-se a aplicação de metodologias de homogeneização.

2. HOMOGENEIZAÇÃO POR EXPANSÃO ASSIMPTÓTICA EM TERMOELASTICIDADE

Na homogeneização por expansão assintótica procede-se à substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, o que, com base em dados relativos ao nível microestrutural, possibilita a obtenção de leis de comportamento macroestruturais. Neste contexto, considere-se um material heterogéneo linear termoelástico associado a um meio sólido $\Omega \in \mathbb{R}^3$, cuja microestrutura é constituída pela distribuição espacialmente periódica de uma célula unitária associada a uma região Y , conforme se representa na Fig. 1. Aquando da solicitação termomecânica dos materiais heterogéneos de microestrutura periódica surgem oscilações periódicas dos campos resultantes de temperaturas, deslocamentos, fluxos superficiais de calor por condução, tensões e deformações. A generalidade dos materiais heterogéneos de microestrutura periódica apresenta uma relação ε entre as dimensões características dos domínios da micro- e da macroestrutura reduzida ($\varepsilon \ll 1$). Este tipo de oscilações periódicas advém da periodicidade associada à heterogeneidade microestrutural e manifesta-se na vizinhança de dimensão ε de qualquer ponto de Ω . Desta forma, é natural assumir a existência de duas escalas distintas \mathbf{x} e \mathbf{y} , associadas, respectivamente, aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y , tal como ilustrado na Fig. 1. Assim, resulta que as variáveis associadas aos campos anteriormente referidos passam a depender funcionalmente de ambos os sistemas \mathbf{x} e \mathbf{y} , em que

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (1)$$

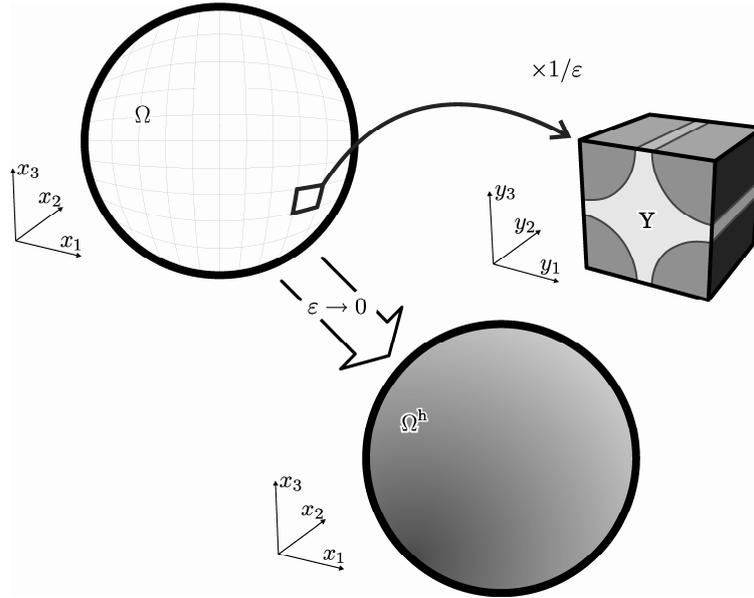


Fig. 1. Representação esquemática da célula unitária Y associada à microescala e do material termoelástico heterogêneo Ω , utilizados no processo de homogeneização assintótica, de que resulta o material homogêneo Ω^h , com $\varepsilon \rightarrow 0$.

Daqui, obtém-se uma característica formalmente designada por Y -periodicidade, sendo que a dependência funcional em \mathbf{y} é periódica no domínio Y .

Se, por um lado, a Y -periodicidade da heterogeneidade microestrutural se reflecte, em termos de propriedades lineares termoelásticas, no facto de os tensores de condutividade térmica \mathbf{k} , de expansibilidade térmica $\boldsymbol{\alpha}$ e de elasticidade \mathbf{D} serem Y -periódicos em \mathbf{y} , por outro lado, a homogeneidade do material ao nível da macroescala resulta na não-dependência directa destes tensores relativamente ao sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} . Neste contexto, em termos das componentes dos tensores de condutividade térmica, de expansibilidade térmica e de elasticidade, obtém-se

$$k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{y}) \quad (2)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad (3)$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}(\mathbf{y}), \quad (4)$$

respectivamente. Mas, no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , a heterogeneidade microestrutural manifesta-se num período ε^{-1} vezes menor que a dimensão característica do domínio Y . Sendo assim e de acordo com a equação (1), definem-se os tensores

$$k_{ij}^\varepsilon = k_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \quad (5)$$

$$\alpha_{ij}^\varepsilon = \alpha_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \quad \text{e} \quad (6)$$

$$D_{ijkl}^\varepsilon = D_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad (7)$$

em que o índice superior ε representa o facto de \mathbf{k} , $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{D} serem εY -periódicos no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , dependendo, assim, indirectamente de \mathbf{x} . Considerando a convenção de Einstein para a notação indicial das componentes das grandezas tensoriais, o problema térmico em regime estacionário é descrito por equações de equilíbrio e de Fourier para a condução de calor que correspondem, respectivamente, a [9]

$$\frac{\partial q_i^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (8)$$

$$q_i^\varepsilon = -k_{ij}^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} \quad \text{em } \Omega, \quad (9)$$

para $i, j=1, \dots, 3$. q_i são as componentes do vector de fluxos superficiais de calor por condução. Q representa a taxa temporal de geração de calor por unidade de volume e T é o campo de temperaturas. Uma vez mais, o índice superior ε evidencia a ε -Y-periodicidade de uma determinada variável no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} . Na fronteira Γ de Ω podem ser definidas condições de fronteira de Dirichlet, de Neumann e de Robin que correspondem a

$$T^\varepsilon = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_{\text{DT}}, \quad (10)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = -\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_{\text{NT}} \quad \text{e} \quad (11)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = h_c (T^\varepsilon - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{\text{RT}}, \quad (12)$$

respectivamente, com $\Gamma_{\text{DT}} \cup \Gamma_{\text{NT}} \cup \Gamma_{\text{RT}} = \Gamma$ e $\Gamma_{\text{DT}} \cap \Gamma_{\text{NT}} = \Gamma_{\text{DT}} \cap \Gamma_{\text{RT}} = \Gamma_{\text{NT}} \cap \Gamma_{\text{RT}} = \emptyset$. \bar{T} e \bar{q} são valores prescritos de temperatura e de fluxo de calor por condução por unidade de área, respectivamente. n_i são as componentes de um versor normal exterior às superfícies Γ_{NT} ou Γ_{RT} . h_c e T_∞ são o coeficiente de convecção e a temperatura do meio ambiente, respectivamente.

Por outro lado, o problema associado de termoelasticidade linear é descrito por equações de equilíbrio, relações deformações-deslocamentos linearizadas e relações constitutivas que, assumindo deformações infinitesimais associadas a um processo quase-estático, correspondem a [9]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (13)$$

$$e_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \right) \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}^\varepsilon - \Delta T^\varepsilon \beta_{ij}^\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \quad (15)$$

respectivamente, em que

$$\Delta T^\varepsilon = T^\varepsilon - T_0 \quad \text{e} \quad (16)$$

$$\beta_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon \alpha_{kl}^\varepsilon = \beta_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon). \quad (17)$$

σ_{ij} e e_{ij} são as componentes dos tensores das tensões e das deformações de Cauchy, respectivamente. f_i e u_i representam as componentes dos vectores de forças volúmicas e de deslocamentos, respectivamente. T_0 é a temperatura de referência e β_{ij} são as componentes do tensor dos módulos térmicos. Na fronteira Γ de Ω podem ser também definidas condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann, que correspondem a

$$u_i^\varepsilon = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_{\text{Du}} \quad \text{e} \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_{\text{Nu}}, \quad (19)$$

respectivamente, com $\Gamma_{\text{Du}} \cup \Gamma_{\text{Nu}} = \Gamma$ e $\Gamma_{\text{Du}} \cap \Gamma_{\text{Nu}} = \emptyset$. \bar{u}_i e \bar{t}_i são valores prescritos de deslocamento e de força superficial, respectivamente. n_j são as componentes de um versor normal exterior à superfície Γ_{Nu} .

Assim, com base no pressuposto da existência de duas escalas distintas associadas aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y , procede-se à aproximação dos campos de temperaturas e de deslocamentos (variáveis primárias) com base nas respectivas expansões assintóticas em ε :

$$T^\varepsilon(\mathbf{x}) = T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad \text{e} \quad (20)$$

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (21)$$

em que os termos $T^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $u_i^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, com $r \in \mathbb{N}_0$, correspondem a funções Y -periódicas em \mathbf{y} , designadas por correctores de ordem r dos campos de temperaturas e de deslocamentos, respectivamente. Atendendo à equação (1) tem-se, de acordo com a regra da cadeia utilizada na derivação de funções, que

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_i^\varepsilon} = \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \cdot}{\partial y_i}. \quad (22)$$

Neste contexto, a substituição da expansão assintótica do campo de temperaturas (equação (20)) nas equações de Fourier para a condução de calor (expressão (9)) e na lei de Duhamel-Neumann (expressão (15)), e a substituição da expansão assintótica do campo de deslocamentos (expressão (21)) nas relações de deformações-deslocamentos linearizadas (expressão (14)) permitem a obtenção do problema termoelástico homogeneizado. Deste modo, o campo de temperaturas $T^{(0)}$ corresponde à solução do problema térmico homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial x_i} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (23)$$

$$T^{(0)} = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_{Dt}, \quad (24)$$

$$\Xi_i n_i = -\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_{Nr}, \quad (25)$$

$$\Xi_i n_i = h_c (T^{(0)} - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{Rr}, \quad \text{com} \quad (26)$$

$$\Xi_i = -k_{ij}^h \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \quad \text{em } \Omega, \quad (27)$$

em que Ξ_i denota as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de fluxos superficiais de calor por condução e k_{ij}^h são as componentes do tensor homogeneizado de condutividade térmica, definidas por

$$k_{ik}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y k_{ij}(\mathbf{y}) \left(\mathbf{I}_j^k - \frac{\partial \Upsilon^k}{\partial y_j} \right) dY. \quad (28)$$

\mathbf{I}_j^k correspondem, num referencial cartesiano ortonormado, às componentes do tensor identidade de segunda ordem. Υ^k são as componentes do vector do campo de deslocamentos termocaracterísticos [10]. Por outro lado, o campo de deslocamentos $u_i^{(0)}$ corresponde à solução do problema de termoelasticidade homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (29)$$

$$u_i^{(0)} = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_{Du}, \quad (30)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_{Nu}, \quad \text{com} \quad (31)$$

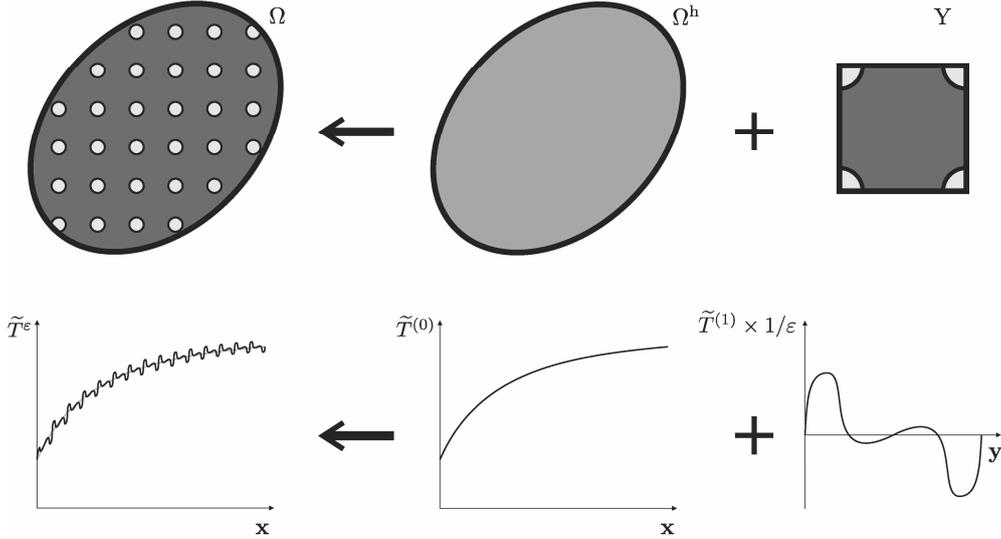


Fig. 2. Ilustração esquemática da aproximação de primeira ordem da expansão assintótica do campo de temperaturas, para um caso unidimensional - o campo de temperaturas, em Ω , é aproximado pela sobreposição do campo homogeneizado da macroescala, em Ω^h , com as flutuações de primeira ordem oriundas da Y -periodicidade do campo da microescala, em Y .

$$\Sigma_{ij} = D_{ijkl}^h \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} - (T^{(0)} - T_0) \beta_{ij}^h \quad \text{em } \Omega, \quad (32)$$

em que Σ_{ij} denota as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de tensões. D_{ijkl}^h e β_{ij}^h são as componentes dos tensores homogeneizados de elasticidade e dos módulos térmicos, respectivamente, definidas por

$$D_{ijmn}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl}(\mathbf{y}) \left(\Gamma_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) dY \quad e \quad (33)$$

$$\beta_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[\beta_{ij}(\mathbf{y}) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_l} \right] dY, \quad (34)$$

sendo $\Gamma_{kl}^{mn} = \delta_{km} \delta_{ln}$, em que δ_{ij} é o símbolo de delta de Kronecker. χ_k^{mn} e Ψ_k são as componentes dos tensores dos campos de deslocamentos característicos e de deslocamentos termocaracterísticos, respectivamente [10].

Atenda-se ao facto de que a consideração das duas escalas \mathbf{x} e \mathbf{y} – associadas, respectivamente, aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y – baseia-se na hipótese de existirem oscilações periódicas dos campos resultantes de temperaturas e de deslocamentos, conseqüentes da periodicidade associada à heterogeneidade microestrutural. Estas oscilações devem, supostamente, sobrepor-se a campos macroscópicos em que não se toma em consideração, pelo menos de modo directo, a influência de tais heterogeneidades microestruturais. Assim, para uma aproximação de primeira ordem da expansão assintótica do campo de temperaturas ou deslocamentos, as oscilações podem ser interpretadas como flutuações em torno de um valor médio macroscópico, tal como se ilustra na Fig. 2. Em termos práticos, constata-se que uma parte significativa das aplicações estruturais de engenharia baseadas em materiais heterogêneos de microestrutura periódica se encontra associada a valores de $\varepsilon \ll 1$.

3. MODELOS ANALÍTICOS DE HOMOGENEIZAÇÃO

3.1. Propriedades mecânicas

De um modo geral, verifica-se que as propriedades mecânicas efectivas de materiais compósitos não seguem a regra das misturas [11]. Por conseguinte, é imperativo proceder à criação de modelos que possam prever essas propriedades. Além disso, atendendo ao facto de as constantes elásticas de um material compósito dependerem da forma e da distribuição do material de reforço [12, 13], é desejável a definição de limites (analíticos) superiores e inferiores para os valores das propriedades mecânicas efectivas do material compósito, devendo estes limites serem o mais aproximados possível um do outro para que a previsão seja útil e precisa.

A maioria dos modelos teóricos é idealizada a partir do pressuposto de que existe uma ligação perfeita entre as fases constituintes do material, sendo, no entanto, geralmente negligenciada a interacção elástica entre partículas. De um modo geral, estes modelos baseiam-se em simplificações geométricas, de modo a se obterem expressões analíticas.

No presente trabalho efectua-se uma comparação entre os resultados da previsão numérica do módulo de elasticidade longitudinal do material compósito e os resultados de previsão analítica. Por um lado a previsão analítica do módulo de elasticidade é efectuada de acordo com as equações de Halpin-Tsai [14]. Considerando,

$$\xi_1 = \frac{2(1-2\nu_m)}{1+\nu_m}, \quad (35)$$

$$\eta_1 = \frac{\kappa_r - \kappa_m}{\kappa_r + \xi_1 E_m} \quad (36)$$

$$\xi_2 = \frac{7-5\nu_m}{8-10\nu_m} \quad \text{e} \quad (37)$$

$$\eta_2 = \frac{G_r - G_m}{G_r + \xi_2 E_m}, \quad (38)$$

podem ser obtidos os módulos de incompressibilidade e de corte (κ e G respectivamente),

$$\kappa = \kappa_m \frac{1 + \xi_1 \eta_1 f_r}{1 - \eta_1 f_r} \quad \text{e} \quad (39)$$

$$G = G_m \frac{1 + \xi_2 \eta_2 f_r}{1 - \eta_2 f_r}, \quad (40)$$

em que f_r é a fracção volúmica do reforço. Atendendo às relações

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad (41)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (42)$$

resulta que o módulo de elasticidade transversal corresponde a

$$E = \frac{9\kappa G}{3\kappa + G}. \quad (43)$$

No que concerne ao coeficiente de Poisson do material compósito, o seu valor pode ser obtido analiticamente com base nas equações anteriores de Halpin-Tsai, a que corresponde

$$\nu = \frac{3\kappa - 2G}{6\kappa + 2G}. \quad (44)$$

Por outro lado, foram ainda considerados os limites superior e inferior associados aos modelos micromecânicos de Voigt-Reuss [15,16], de Hashin-Shtrikman [17] e de Ravichandran [18].

A célula representativa unitária associada ao modelo de Voigt-Reuss pode sofrer dois tipos distintos de carregamento mecânico. Por um lado, considere-se um carregamento mecânico segundo a direcção paralela à interface das lâminas da matriz e do reforço. Deste modo, assumindo um estado de isodeformação, ou seja, um campo uniforme de deformação para a matriz e o reforço, e procedendo à minimização da energia potencial do material compósito, o módulo de elasticidade longitudinal do material compósito corresponde [15] a

$$E^V = E_r f_r + E_m (1 - f_r). \quad (45)$$

Por outro lado, considerando que o material compósito está sob um estado de isotensão, ou seja, o carregamento mecânico da célula representativa unitária é perpendicular à interface das lâminas da matriz e do reforço, o módulo de elasticidade longitudinal corresponde [16] a

$$E^R = \frac{E_r E_m}{(1 - f_r) E_r + f_r E_m}. \quad (46)$$

Estas equações correspondem ao limite superior de Voigt e ao limite inferior de Reuss, respectivamente, para o valor do módulo de elasticidade de um material compósito. No entanto, conforme referido por Hill [19], nem a suposição de estados de isodeformação nem de isotensão representam condições reais. De facto, as tracções na interface das lâminas da matriz e do reforço não estão em equilíbrio, segundo o modelo de Voigt, e a interface das lâminas da matriz e do reforço não se consegue manter, segundo o modelo de Reuss. Convém referir que não é aconselhável calcular os coeficientes de Poisson sob estados de isotensão ou de isodeformação [20]. De um modo geral, se os valores da rigidez dos materiais da matriz e do reforço forem muito diferentes, os limites de Voigt e Reuss definem intervalos muito amplos. Ao contrário de Voigt e Reuss, Hashin e Shtrikman (HS) consideram o material compósito como uma fase de partículas aleatoriamente distribuídas e uma fase contínua – a matriz. O modelo micromecânico de Hashin-Shtrikman requer a consideração de um único princípio variacional, com base num material de referência, providenciando limites para as constantes elásticas de um material compósito [17,21]. Com base no caso de um material compósito ser constituído por um material de reforço mais rígido que o material da matriz, podem retirar-se os limites superior (s) e inferior (i) dos módulos de incompressibilidade e de corte (κ e G respectivamente),

$$\kappa_s^{\text{HS}} = \kappa_r + \frac{1 - f_r}{\frac{1}{\kappa_m - \kappa_r} + \frac{3f_r}{3\kappa_r + 4G_r}}, \quad (47)$$

$$\kappa_i^{\text{HS}} = \kappa_m + \frac{f_r}{\frac{1}{\kappa_r - \kappa_m} + \frac{3(1 - f_r)}{3\kappa_m + 4G_m}}, \quad (48)$$

$$G_s^{\text{HS}} = G_r + \frac{1 - f_r}{\frac{1}{G_m - G_r} + \frac{6f_r(\kappa_r + 2G_r)}{5G_r(3\kappa_r + 4G_r)}} \quad \text{e} \quad (49)$$

$$G_i^{\text{HS}} = G_m + \frac{f_r}{\frac{1}{G_r - G_m} + \frac{6(1 - f_r)(\kappa_m + 2G_m)}{5G_m(3\kappa_m + 4G_m)}}. \quad (50)$$

Atendendo às equações (41) a (43), podem então obter-se o limite superior e o limite inferior de Hashin-Shtrikman para o módulo de elasticidade longitudinal, que correspondem, respectivamente, a

$$E_s^{\text{HS}} = \frac{9\kappa_s^{\text{HS}} G_s^{\text{HS}}}{3\kappa_s^{\text{HS}} + G_s^{\text{HS}}} \quad \text{e} \quad (51)$$

$$E_i^{\text{HS}} = \frac{9\kappa_i^{\text{HS}} G_i^{\text{HS}}}{3\kappa_i^{\text{HS}} + G_i^{\text{HS}}}. \quad (52)$$

Para a obtenção do limite superior e do limite inferior para o valor do coeficiente de Poisson, Zimmerman [22] propôs modificações simplificativas no seu cálculo, surgindo assim

$$\nu_s^{\text{HS}} = \frac{3\kappa_s^{\text{HS}} - 2G_i^{\text{HS}}}{6\kappa_s^{\text{HS}} + 2G_i^{\text{HS}}} \quad \text{e} \quad (53)$$

$$\nu_i^{\text{HS}} = \frac{3\kappa_i^{\text{HS}} - 2G_s^{\text{HS}}}{6\kappa_i^{\text{HS}} + 2G_s^{\text{HS}}}, \quad (54)$$

respectivamente. Ravichandran modificou a célula unitária associada aos estados de isodeformação e de isotensão, propondo uma célula representativa unitária composta por uma matriz contínua e partículas de reforço cúbicas [18]. Neste modelo é aplicado um carregamento unidimensional perpendicular a duas faces opostas da célula representativa unitária. Ravichandran sugeriu então que o limite superior e o limite inferior para o módulo de elasticidade longitudinal fossem determinados por

$$E_s^{\text{Ra}} = \frac{\left[E_r E_m + E_m^2 (1 + C_r)^2 - E_m^2 \right] (1 + C_r)}{(E_r - E_m) C_r + E_m (1 + C_r)^3} \quad \text{e} \quad (55)$$

$$E_i^{\text{Ra}} = \frac{(C_r E_r E_m + E_m^2) (1 + C_r)^2 - E_m^2 + E_r E_m}{(C_r E_r + E_m) (1 + C_r)^2}, \quad (56)$$

em que

$$C_r = f_r^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (57)$$

Os limites superior e inferior para o valor do coeficiente de Poisson correspondem a [20]

$$\nu_s^{\text{Ra}} = \frac{\nu_r E_m + C_r \nu_m E_r + E_m \nu_m (2C_r + 3C_r^2 + C_r^3)}{C_r E_r + E_m (1 + 2C_r + 3C_r^2 + C_r^3)} \quad \text{e} \quad (58)$$

$$\nu_i^{\text{Ra}} = \frac{1}{(1 + C_r)^2} \left[\frac{\nu_r E_m + C_r \nu_m E_r}{C_r E_r + E_m} + \nu_m (1 + C_r)^2 - \nu_m \right]. \quad (59)$$

3.2. Propriedades termoelásticas

O coeficiente de expansibilidade térmica de um material compósito depende fortemente das suas características microestruturais [23]. Quando um material compósito é sujeito a uma diferença de temperatura geram-se deformações. A deformação de uma das fases num material compósito é restringida pela rigidez da outra fase, dependendo a magnitude dessa deformação da transferência de corte na interface da matriz-reforço. A expressão mais simples para determinar o coeficiente de expansibilidade térmica de um material compósito é dada pela regra das misturas [23]

$$\alpha^{\text{RM}} = \alpha_m (1 - f_r) + \alpha_r f_r. \quad (60)$$

Turner foi o primeiro a considerar o módulo de elasticidade na equação para determinar o coeficiente de expansibilidade térmica [24], tendo a forma do reforço sido mais tarde considerada por Kerner [25]. Kerner assume que o material compósito é reforçado por partículas esféricas embebidas numa camada uniforme de material da matriz. O coeficiente de expansibilidade térmica, α^K , corresponde, de acordo com Kerner, a

$$\alpha^K = \alpha_m (1 - f_r) + \alpha_r f_r + (1 - f_r) f_r (\alpha_r - \alpha_m) \frac{\kappa_r - \kappa_m}{(1 - f_r) \kappa_m + f_r \kappa_r + \frac{3 \kappa_m \kappa_r}{4 G_m}}, \quad (61)$$

sendo κ_r e κ_m os módulos de incompressibilidade dos materiais do reforço e da matriz, respectivamente, e G_m o módulo de corte do material da matriz.

Schapery [26] também considerou o material de reforço como sendo constituído por partículas esféricas, mas utilizando unicamente os módulos de incompressibilidade da matriz e do reforço, obteve para o coeficiente de expansibilidade térmica do material compósito

$$\alpha^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{\kappa_r^{-1} - \kappa_m^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}}. \quad (62)$$

Não sendo o módulo de incompressibilidade do material compósito conhecido antecipadamente, a consideração dos limites de Hashin-Shtrikman, equações (47) e (48), permitem a obtenção de limites superior e inferior para o coeficiente de expansibilidade térmica que, segundo Schapery, correspondem, respectivamente, a

$$\alpha_s^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{(\kappa_i^{\text{HS}})^{-1} - \kappa_r^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}} \quad \text{e} \quad (63)$$

$$\alpha_i^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{(\kappa_s^{\text{HS}})^{-1} - \kappa_r^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}}. \quad (64)$$

Por outro lado, no modelo apresentado por Fahmy e Ragai [27] estabelece-se uma expressão para o coeficiente de expansibilidade térmica em função dos módulos de elasticidade longitudinal e dos coeficientes de Poisson de cada uma das duas fases constituintes do material compósito:

$$\alpha^{\text{FR}} = \alpha_m - \frac{3 f_r (1 - \nu_m) (\alpha_m - \alpha_r)}{\frac{2 E_m}{E_r} (1 - 2 \nu_r) (1 - f_r) + 2 f_r (1 - 2 \nu_m) + 1 + \nu_m}. \quad (65)$$

3.3. Propriedades térmicas

A condutividade térmica é uma propriedade bastante importante num material, principalmente em materiais de engenharia utilizados em processos que envolvam diferenças de temperatura elevadas. Para a previsão analítica do coeficiente de condutividade térmica de um material compósito podem ser utilizados os modelos de Maxwell [2], de Rayleigh [3] e de Landauer [28].

O modelo de Maxwell baseia-se no princípio de que uma partícula de reforço esférica se encontra embebida numa camada uniforme de material da matriz e negligencia-se qualquer interacção entre os campos térmicos associados a várias partículas de reforço. Desta forma Maxwell apresentou uma expressão para determinar o coeficiente de condutividade térmica, k^M , correspondente a

$$k^M = k_m \frac{k_r + 2 k_m + 2 f_r (k_r - k_m)}{k_r + 2 k_m - f_r (k_r - k_m)}. \quad (66)$$

Maxwell foi o primeiro a estudar o coeficiente de condutividade térmica de materiais heterogéneos, não tendo, no entanto, considerado o efeito de dispersão. Com efeito, o seu modelo tem tendência a prever baixos valores do coeficiente de condutividade térmica para elevadas concentrações de fracção volúmica de partículas de reforço [29].

No modelo de Rayleigh, os pressupostos do modelo anterior mantêm-se, mas neste caso é considerado um arranjo periódico cúbico de partículas esféricas com o mesmo diâmetro, que definem o material compósito. A expressão para o cálculo do coeficiente de condutividade térmica, k^R , é, segundo Rayleigh, idêntica à de Maxwell, correspondendo a

$$k^R = k_m \frac{k_r + k_m + f_r (k_r - k_m)}{k_r + k_m + f_r (k_m - k_r)}. \quad (67)$$

Landauer, por sua vez, considerou o efeito quer da distribuição das fases constituintes do material compósito quer dos contactos que se podem estabelecer entre as partículas de reforço. Estabeleceu, assim, uma expressão para determinar o coeficiente de condutividade térmica de um material compósito com reforço de partículas esféricas, correspondente a

$$k^L = \frac{1}{4} \left[k_r (3f_r - 1) + k_m (2 - 3f_r) + \sqrt{[k_r (3f_r - 1) + k_m (2 - 3f_r)]^2 + 8k_r k_m} \right]. \quad (68)$$

4. PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

No presente trabalho utilizou-se o programa COMMA3D [10]. Este é um programa de simulação numérica baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido em Fortran 90, que constitui a base de uma plataforma de modelação numérica do comportamento termomecânico de materiais compósitos e inclui o procedimento de homogeneização por expansão assintótica em termoelasticidade linear. Este programa permite a modelação de domínios sólidos utilizando elementos finitos tetraédricos e hexaédricos, quer lineares quer quadráticos.

As tarefas de pré- e pós-processamento foram realizadas com base na utilização do programa GiD[®]. Este programa é uma interface gráfica de modelação geométrica, com várias características que o tornam útil nas fases de pré- e pós-processamento de problemas de simulação numérica.

A modelação numérica de células representativas unitárias de materiais compósitos com geometrias complexas foi efectuada com base no programa SPHERECELL [30, 31]. Este programa permite o controlo rigoroso de alguns parâmetros geométricos, tais como, por exemplo, (i) a fracção volúmica dos materiais constituintes, (ii) a geometria e as dimensões do reforço, (iii) a distribuição do reforço e (iv) as condições de fronteira de periodicidade.

No contexto da aplicação do método de homogeneização por expansão assintótica à termoelasticidade, é necessário garantir a periodicidade não só da geometria das células representativas unitárias mas também dos campos dos deslocamentos característicos e dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, no problema termoelástico, e do campo de deslocamentos termocaracterísticos, no problema térmico. Neste contexto, foi utilizada a sub-rotina SLAVERY [30, 31] para se proceder, de modo expedito, à associação dos nós sujeitos a condições de periodicidade, bem como dos seus correspondentes graus de liberdade.

Com o intuito de proceder ao estudo numérico das propriedades elásticas, termoelásticas e térmicas (homogeneizadas) de materiais compósitos para fracções volúmicas de reforço, f_r , entre 10% e 50%, inclusive, procedeu-se à geração de cinco células representativas unitárias para as cinco fracções volúmicas de reforço consideradas. As geometrias das células representativas unitárias geradas encontram-se ilustradas na Fig. 3. Em seguida, com base em estudos de convergência quer das matrizes \mathbf{D}^h e \mathbf{k}^h quer dos vectores dos módulos térmicos β^h associados a cada uma das células representativas unitárias que definem o material compósito reforçado com partículas esféricas [10], foram obtidas as malhas de elementos finitos apresentadas na Fig. 4.

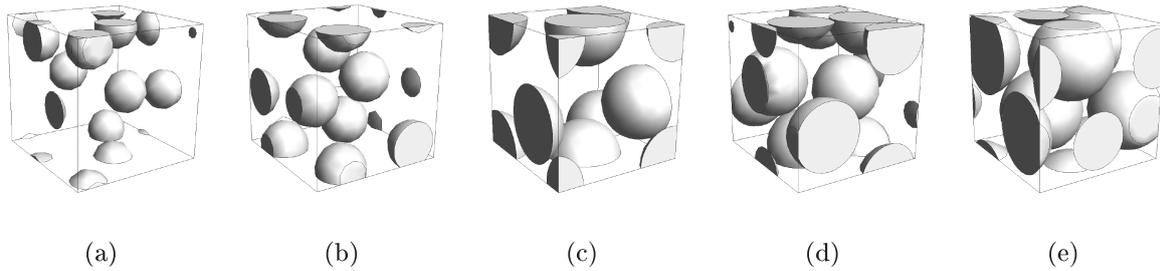


Fig. 3. Geometrias das células representativas unitárias geradas com partículas esféricas, para fracções volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.

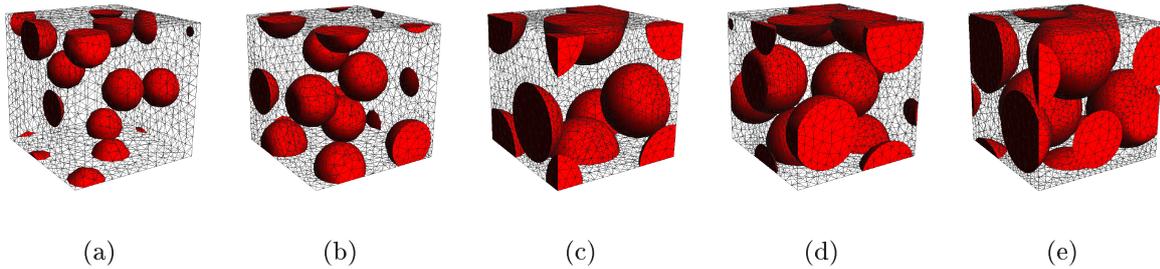


Fig. 4. Malhas de elementos finitos obtidas com base em estudos de convergência, para as células representativas unitárias com fracções volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.

5. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Na presente secção procede-se à aplicação numérica da técnica de homogeneização por expansão assintótica na determinação numérica de propriedades mecânicas, termoelásticas e térmicas de materiais compósitos, desenvolvendo-se o estudo da influência da fracção volúmica de reforço nos valores efectivos das referidas propriedades materiais compósitos de partículas esféricas. Os resultados numéricos são comparados com resultados quer de previsão analítica quer experimentais.

5.1. Propriedades elásticas

Os materiais da matriz e do reforço do material compósito são uma resina de epóxico e fibra de vidro, respectivamente. As propriedades termomecânicas destes materiais encontram-se indicadas na Tabela 1 [32-35].

Na Fig. 5 são apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de resina de epóxico com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro. Verifica-se que para as fracções volúmicas de reforço de 10% e 20% o material pode caracterizar-se como sendo cúbico, ou seja, apresenta as mesmas propriedades mecânicas segundo as três direcções de ortotropia. Isto significa que o comportamento mecânico do material compósito é descrito pelos parâmetros independentes E , ν e G . Para fracções volúmicas de reforço superiores a 30%, inclusive, as matrizes constitutivas apresentam um carácter nitidamente ortotrópico, embora não-cúbico.

Na Fig. 6 são ilustrados os resultados de previsão numérica, em conjunto com os de previsão analítica, os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, assim como os resultados experimentais [32], para o módulo de elasticidade longitudinal, considerando uma gama de fracções volúmicas de reforço até 60%.

Tabela 1. Propriedades termomecânicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r) para o material compósito de resina de epóxico reforçado com fibra de vidro.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade do material da matriz, E_m [GPa]	3,5
Coefficiente de Poisson do material da matriz, ν_m [-]	0,35
Coefficiente de condutividade térmica do material da matriz, k_m [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	0,195
Coefficiente de expansibilidade térmica do material da matriz, α_m [MK^{-1}]	65,26
Módulo de elasticidade do material do reforço, E_r [GPa]	78
Coefficiente de Poisson do material do reforço, ν_r [-]	0,21
Coefficiente de condutividade térmica do material do reforço, k_r [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	1,4
Coefficiente de expansibilidade térmica do material do reforço, α_r [MK^{-1}]	6,5

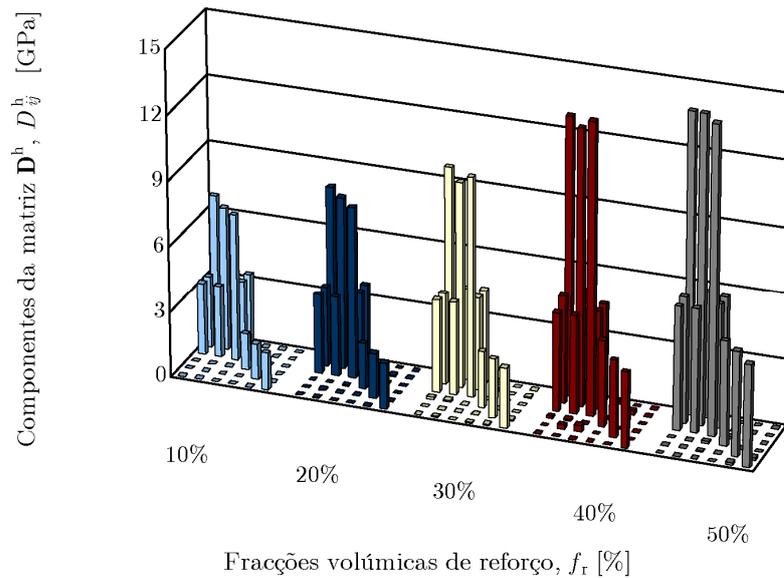
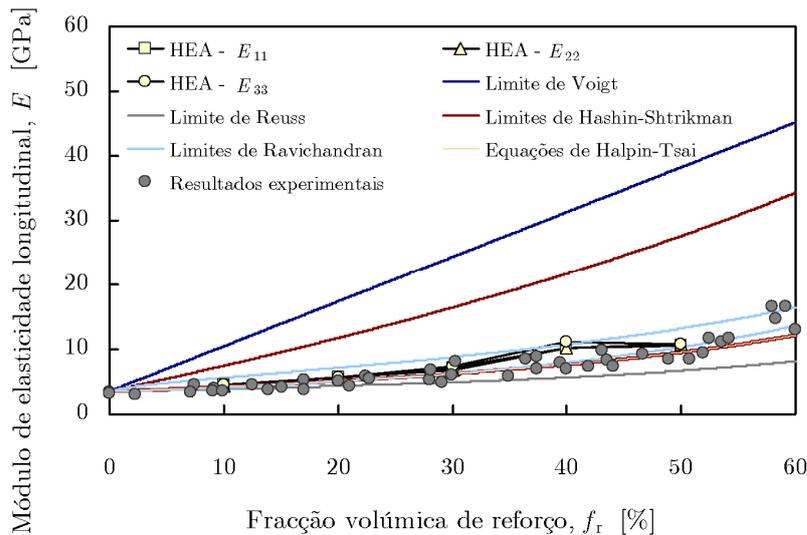
Fig. 5. Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de resina de epóxico com 10% a 50% de fração volumétrica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro.

Fig. 6. Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fração volumétrica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina de epóxico.

Constata-se que os resultados experimentais se encontram limitados superiormente pelo limite de Voigt, que por sua vez vai alargando a sua diferença em relação ao limite de Reuss. Este facto pode ser explicado pela grande diferença existente entre os módulos de elasticidade dos materiais constituintes do material compósito. Como seria de esperar, os limites de Hashin-Shtrikman revelam-se bastante estreitos e os de Ravichandran ainda mais, o que se deve ao facto de estes modelos micromecânicos considerarem uma matriz contínua a envolver as partículas isoladas de reforço. Grande parte dos resultados experimentais apresentam-se fora dos limites de Ravichandran, apesar de seguirem uma tendência em conformidade com os mesmos. Os resultados de previsão analítica coincidem com o limite inferior de Hashin-Shtrikman. No que concerne aos resultados numéricos, são apresentados os três módulos de elasticidade longitudinal, devido ao carácter ortotrópico do material compósito.

Na Fig. 7 apresenta-se a globalidade dos resultados experimentais, em conjunto com os resultados de previsão analítica e os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal. Constata-se que para as fracções volúmicas de reforço mais elevadas os resultados experimentais seguem, em termos de curva média, a mesma tendência

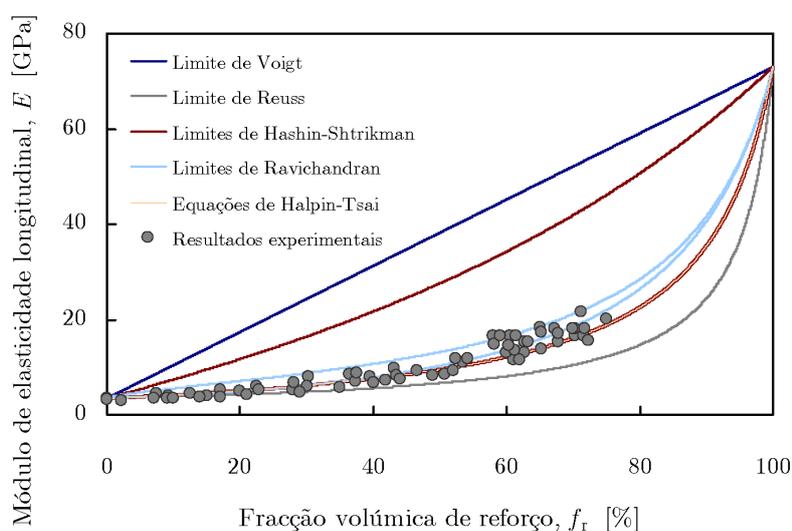


Fig. 7. Resultados experimentais e de previsão analítica, com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal de um material compósito de resina de epóxico com partículas esféricas de fibra de vidro.

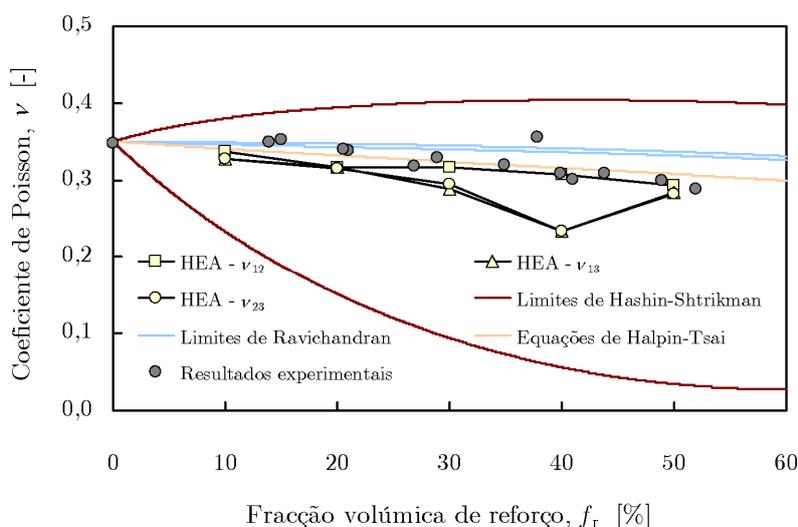


Fig. 8. Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina de epóxico.

dos resultados de previsão analítica.

Os resultados numéricos do coeficiente de Poisson do material compósito considerado são apresentados na Fig. 8, em conjunto com os resultados de previsão analítica e os experimentais [32], bem como os limites superiores e inferiores de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran. Verifica-se que, apesar de apresentarem grandes variações, os resultados experimentais se encontram dentro dos limites de Hashin-Shtrikman. Por outro lado, os limites de Ravichandran definem um intervalo bastante estreito e tanto os resultados de previsão numérica como os experimentais saem fora desse intervalo. Além disso, à excepção do que ocorre para a fracção volúmica de 40%, os resultados numéricos parecem seguir aproximadamente a tendência dos resultados experimentais.

Por fim, na Fig. 9 e na Fig. 10 apresentam-se, respectivamente, os deslocamentos característicos, χ , e os vectores das solitações mecânicas características, \mathbf{F}^D , da célula representativa unitária de material compósito de resina de epóxico com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro (vd. Fig. 3(c)).

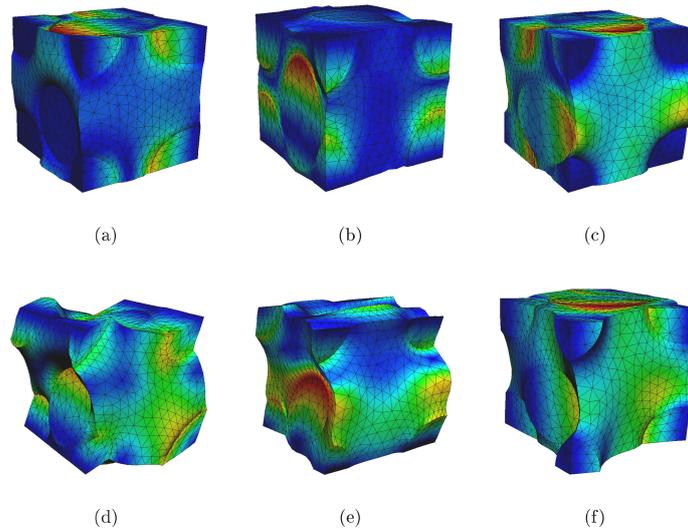


Fig. 9. Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de resina de epóxico com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro – modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .

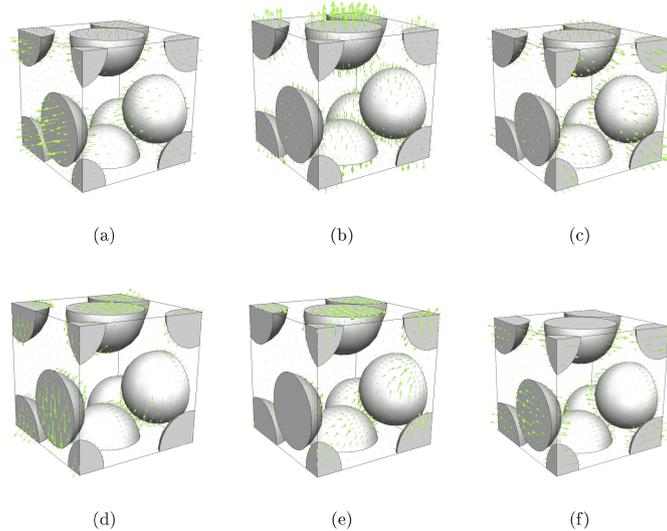


Fig. 10. Vectores das solitações mecânicas características da célula representativa unitária de material compósito de resina de epóxico com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro – modos normais (a) \mathbf{F}_{11}^D , (b) \mathbf{F}_{22}^D e (c) \mathbf{F}_{33}^D , e modos de corte (d) \mathbf{F}_{12}^D , (e) \mathbf{F}_{23}^D e (f) \mathbf{F}_{13}^D .

Tabela 2. Propriedades termomecânicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r) para o material compósito de nitrato de alumínio reforçado com partículas esféricas de alumina.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade do material da matriz, E_m [GPa]	186
Coefficiente de Poisson do material da matriz, ν_m [-]	0,31
Coefficiente de condutividade térmica do material da matriz, k_m [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	92
Coefficiente de expansibilidade térmica do material da matriz, α_m [MK^{-1}]	14
Módulo de elasticidade do material do reforço, E_r [GPa]	401
Coefficiente de Poisson do material do reforço, ν_r [-]	0,24
Coefficiente de condutividade térmica do material do reforço, k_r [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	34
Coefficiente de expansibilidade térmica do material do reforço, α_r [MK^{-1}]	7,3

5.2. Propriedades termoelásticas

Considera-se um material compósito de nitrato de alumínio reforçado com partículas esféricas de alumina. As propriedades termomecânicas dos materiais da matriz e do reforço do material compósito encontram-se indicadas na Tabela 2 [23, 35, 36].

As componentes dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h , são apresentadas na Fig. 11. Verifica-se que estes valores são idênticos para uma mesma percentagem de fracção volúmica de reforço e que o aumento dessa percentagem induz um decréscimo no valor dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h . A multiplicação do vector homogeneizado dos módulos térmicos, β^h pela inversa da matriz constitutiva \mathbf{D}^h dá origem ao vector homogeneizado de coeficientes de expansibilidade térmica, α^h . Na Fig. 12 estes resultados são comparados com os resultados de previsão analítica e os resultados experimentais [23]. Os valores numéricos correspondem aos três coeficientes de expansibilidade térmica normal, sendo os restantes numericamente insignificantes, com ordens de grandeza 3 a 5 vezes inferiores. Constata-se que os intervalos são muito estreitos, o que se deve ao facto de o módulo de elasticidade (coeficiente de expansibilidade térmica) do material da matriz ser cerca de duas vezes inferior (superior) ao do material de reforço. Por outro lado, verifica-se que os valores experimentais não se encontram acima dos previstos pelo modelo de Kerner, o que sugere que este modelo possa ser usado para estimar um majorante para o coeficiente de expansibilidade térmica do material compósito [23].

Por fim, na Fig. 13 apresenta-se o campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, Ψ , para a célula representativa unitária de nitrato de alumínio constituída por 30% de partículas esféricas de alumina (vd. Fig. 3(c)).

5.3. Propriedades térmicas

Adopta-se um material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com partículas esféricas de alumina. As propriedades termomecânicas dos materiais da matriz e do reforço do material compósito encontram-se indicadas na Tabela 3 [23, 35, 37-39].

Na Fig. 14, pode observar-se a evolução dos valores de condutividade térmica para um material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com partículas esféricas de alumina. Constata-se que com o aumento da fracção volúmica do reforço os valores dos coeficientes de condutividade térmica normal também aumentam, o que se deve ao facto da condutividade térmica da alumina ser superior à do polietileno de alta densidade. Para valores acima de 20% de fracção volúmica de reforço manifesta-se o aparecimento de componentes de condutividade térmica não-normal, o que revela a existência uma percentagem de anisotropia do material compósito, mas com percentagens bastante diminutas em relação aos valores das componentes de condutividade térmica normal, a diagonal de \mathbf{k}^h . Isto não invalida que, na prática, o material compósito se possa considerar ortotrópico.

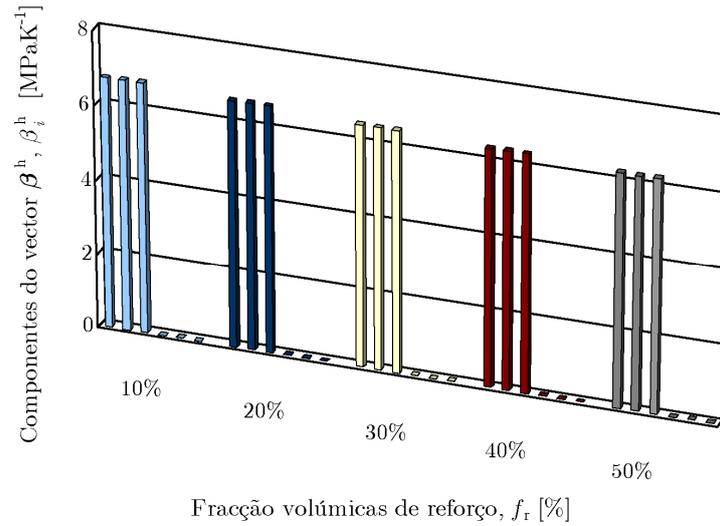


Fig. 11. Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , para células unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

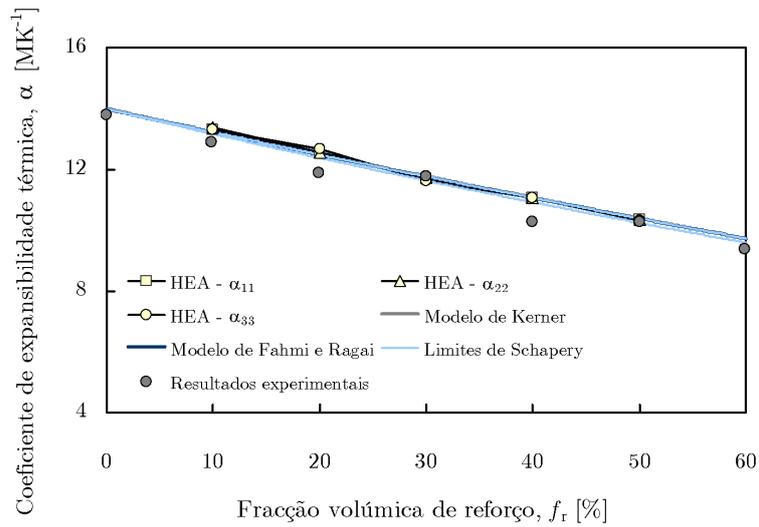


Fig. 12. Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.

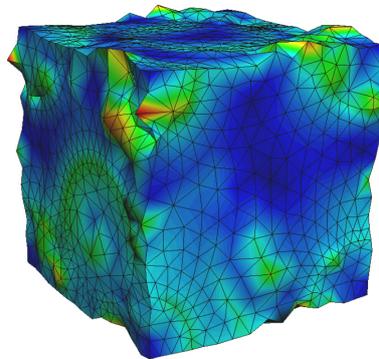


Fig. 13. Campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, Ψ , de uma célula representativa unitária de material compósito de nitrato de alumínio com 30% de partículas esféricas de alumina – representação da configuração deformada da célula representativa unitária.

Tabela 3. Propriedades termomecânicas dos materiais da matriz (m) e do reforço (r) para o material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com partículas esféricas de alumina.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade do material da matriz, E_m [GPa]	1,07
Coefficiente de Poisson do material da matriz, ν_m [-]	0,46
Coefficiente de condutividade térmica do material da matriz, k_m [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	0,545
Coefficiente de expansibilidade térmica do material da matriz, α_m [MK^{-1}]	210
Módulo de elasticidade do material do reforço, E_r [GPa]	401
Coefficiente de Poisson do material do reforço, ν_r [-]	0,24
Coefficiente de condutividade térmica do material do reforço, k_r [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	34
Coefficiente de expansibilidade térmica do material do reforço, α_r [MK^{-1}]	7,3

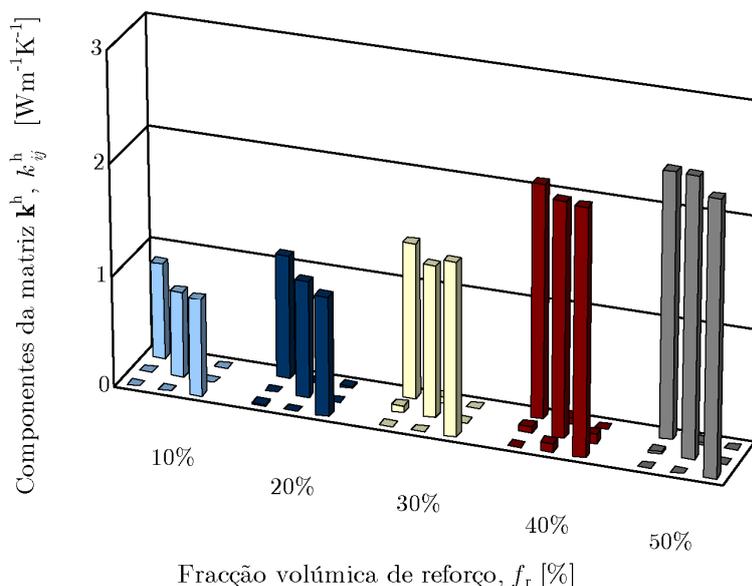


Fig. 14. Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade com 10% a 50% de fração volumétrica de reforço de partículas esféricas de alumina.

Os resultados numéricos são comparados com os resultados de previsão analítica, os limites de Hashin-Shtrikman e os resultados experimentais [38] na Fig. 15. Verifica-se que os resultados do modelo de Maxwell coincidem com os do limite inferior de Hashin-Strikman. Por outro lado, são as previsões de Landauer as que mais se aproximam dos resultados experimentais. Com o aumento da fração volumétrica de reforço os resultados do limite superior de Hashin-Strikman tendem a divergir dos resultados experimentais e numéricos. No que concerne aos resultados numéricos, apresentam-se os valores correspondentes aos três coeficientes de condutividade térmica normal, como anteriormente referido, verificando-se que estes tendem a subestimar os valores do coeficiente de condutividade térmica para as frações volumétricas de reforço mais elevadas.

Por fim, o campo de deslocamentos termocaracterísticos, \mathbf{Y} , é ilustrado na Fig. 16, para a célula representativa unitária de polietileno de alta densidade constituída por 30% de partículas esféricas de alumina (vd. Fig. 3(c)).

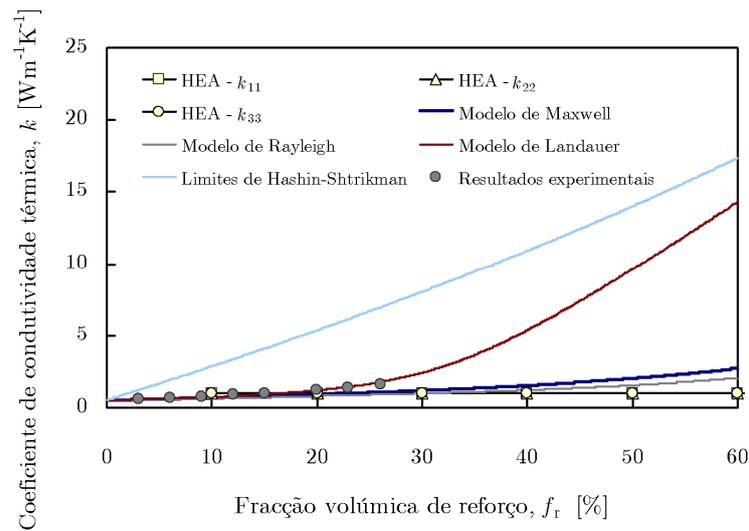


Fig. 15. Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fração volumétrica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de polietileno de alta densidade.

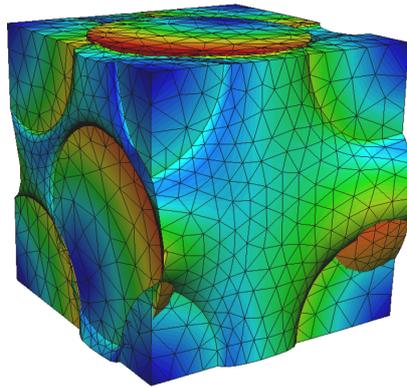


Fig. 16. Ilustração do campo de deslocamentos termocaracterísticos, \mathbf{Y} , da célula representativa unitária associada ao material compósito de polietileno de alta densidade com 30% de partículas esféricas de alumina.

6. NOTAS CONCLUSIVAS

Neste trabalho procedeu-se ao estudo comparativo de propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assintótica e de métodos de previsão analítica com resultados experimentais obtidos a partir de fontes bibliográficas. Em termos gerais, constatou-se que os resultados numéricos obtidos com base no método de homogeneização por expansão assintótica aproximam adequadamente os resultados experimentais obtidos, fornecendo, de um modo geral, valores mais precisos do que os dos restantes métodos analíticos. Assim, pode afirmar-se que a técnica de homogeneização por expansão assintótica se revela bastante eficaz para a determinação dos valores efectivos das propriedades termoelásticas de materiais compósitos com partículas esféricas, permitindo ainda uma análise expedita da influência da geometria da microestrutura nas referidas propriedades.

REFERÊNCIAS

- [1] Poisson, S.D., “Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme”, *Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **5**, 488-533 (1824)
- [2] Maxwell, J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford (1873)
- [3] Rayleigh, J.W., “On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium”, *Philosophical Magazine*, **34**, 481-502 (1892)
- [4] Spagnolo, S., “Sulla Convergenza di Soluzioni di Equazioni Paraboliche ed Ellittiche”, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **22**, 571-597 (1968)
- [5] Sanchez-Palencia, E., “Solutions Périodiques par Rapport aux Variables d'Espace Applications”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Série A*, **271**, 1129-1132 (1970)
- [6] De Giorgi, E., Spagnolo, S., “Sulla Convergenza degli Integrali dell'Energia per Operatori Ellittici del Secondo Ordine”, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, **8**, 391-411 (1973)
- [7] Murat, F., Tartar, L., *H-Convergence*, Birkhäuser, Boston (1997)
- [8] Dal Maso, G., *An Introduction to Γ -Convergence*, Birkhäuser, Boston (1993)
- [9] Cioranescu, D., Donato, P., *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, Oxford (1999)
- [10] Pinho-da-Cruz, J., “Caracterização Termomecânica de Materiais Multifásicos Utilizando Procedimentos de Homogeneização”, Dissertação de Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro (2007)
- [11] Hashin, Z., “Analysis of Composite Materials: A Survey”, *Journal of Applied Mechanics*, **50**, 481-505 (1983)
- [12] Hale, D.K., “The Physical Properties of Composite Materials”, *Journal of Materials Science*, **11**, 2105-2141 (1976)
- [13] Fan, Z., Tsakiroopoulos, P., Miodownik, A.P., “Prediction of Young's Modulus of Particulate Two Phase Composites”, *Materials Science Technology*, **8**, 922-929 (1992)
- [14] Halpin, J.C., Kardos, J.L., “The Halpin-Tsai Equations: A Review”, *Polymer Engineering and Science*, **16**, 344-352 (1976)
- [15] Voigt, W., “Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper”, *Annalen der Physik und Chemie*, **38**, 573-587 (1889)
- [16] Reuss, A., “Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **9**, 49-58 (1929)
- [17] Hashin, Z., Shtrikman, S., “A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**, 127-140 (1963)
- [18] Ravichandran, K.S., “Elastic Properties of Two-Phase Composites”, *Journal of the American Ceramic Society*, **77**, 1178-1184 (1994)
- [19] Hill, R., “Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**, 357-372 (1963)
- [20] Hsieh, C.L., Tuan, W.H., “Elastic Properties of Ceramic-Metal Particulate Composites”, *Materials Science and Engineering A*, **393**, 133-139 (2005)
- [21] Hashin, Z., Shtrikman, S., “On Some Variational Principles in Anisotropic and Nonhomogeneous Elasticity”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **10**, 335-342 (1962)
- [22] Zimmerman, R.W., “Hashin-Shtrikman Bounds on the Poisson Ratio of a Composite Material”, *Mechanics Research Communications*, **19**, 563-569 (1992)
- [23] Hsieh, C.L., Tuan, W.H., “Thermal Expansion Behavior of a Model Ceramic-Metal Composite”, *Materials Science and Engineering A*, **460-461**, 453-458 (2007)
- [24] Turner, P.S., “Thermal Expansion Stresses in Reinforced Plastics”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **37**, 239-250 (1946)
- [25] Kerner, E.H., “The Elastic and Thermo-Elastic Properties of Composite Media”, *Proceedings of the Physical Society – Section B*, **69**, 808-813 (1956)
- [26] Schapery, R.A., “Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles”, *Journal of Composite Materials*, **2**, 380-404 (1968)
- [27] Fahmy, A.A., Ragai, A.N., “Thermal-Expansion Behavior of Two-Phase Solids”, *Journal of Applied Physics*, **41**, 5108-5111 (1970)

- [28] Landauer, R., “The Electrical Resistance of Binary Metallic Mixtures”, *Journal of Applied Physics*, **23**, 779-784 (1952)
- [29] Cai, W.-Z., Tu, S.-T., Tao, G.-L., “Thermal Conductivity of PTFE Composites with Three-Dimensional Randomly Distributed Fillers”, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **18**, 241-253 (2005)
- [30] Oliveira, J.A., Pinho-da-Cruz, J., Andrade-Campos, A., Teixeira-Dias, F., “On the Modelling of Representative Unit-Cell Geometries with GiD”, *Proceedings of 2nd Conference on Advances and Applications of GiD – GiD 2004*, 181-184, Barcelona (2004)
- [31] Oliveira, J.A., “Modelação Micromecânica do Comportamento de Materiais Compósitos de Matriz de Alumínio”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro (2006)
- [32] Hsieh, C.L., Tuan, W.H., “Elastic and Thermal Expansion Behaviour of Two-Phase Composites”, *Materials Science and Engineering A*, **425**, 349-260 (2006)
- [33] Sideridis, E., Kytopoulos, V.N., Kyriazi, E., Bourkas, G., “Determination of Thermal Expansion Coefficient of Particulate Composites by the use of a Triphase Model”, *Composites Science and Technology*, **65**, 909-919 (2005)
- [34] Lim, T.C., “Unified Practical Bounds for the Thermal Conductivity of Composite Materials”, *Materials Letters*, **54**, 152-157 (2002)
- [35] Tessier-Doyen, N., “Étude Expérimentale et Numérique du Comportement Thermomécanique de Matériaux Réfractaires Modèles”, Dissertação de Tese de Doutoramento, Universidade de Limoges, Limoges (2003)
- [36] Terada, Y., Ohkubo, K., Nakagawa, K., Mohri, T., Suzuki, T., “Thermal Conductivity of B2-Type Aluminides and Titanides”, *Intermetallics*, **3**, 347-355 (1995)
- [37] Moysey, P.A., Thompson, M.R., “Determining the Collision Properties of Semi-Crystalline and Amorphous Thermoplastics for DEM Simulations of Solids Transport in a Extruder”, *Chemical Engineering Science*, **62**, 3699-3709 (2007)
- [38] Tavman, I.H., “Thermal Conductivity of Particle Reinforced Polymer Composites”, *Proceedings of NATO Advanced Study Institute (ASI) on Nanoengineered Nanofibrous Materials Conference*, 449-455, Antalya (2003)
- [39] Mark, J.E., *Polymer Data Handbook*, Oxford University Press, Inc., Nova Iorque (1999)

HOMOGENISATION OF COMPOSITE MATERIALS’ PROPERTIES IN LINEAR THERMOELASTICITY

Abstract – The detailed numerical modelling of the thermomechanical behaviour of structural components built from composite materials requires, in general, the previous knowledge of their macroscopic properties. With analytical models it is possible to estimate effective properties of materials, as well their upper and lower bounds. On the other hand, numerical methods can also be used in this task, being the asymptotic expansion homogenisation method one of the most relevant ones. The use of homogenisation methodologies may lead to significant computational benefits. This technique permits the replacement of a heterogeneous medium by an equivalent homogeneous medium, leading to macrostructural behaviour models based on the information available from microstructural level. In this work, numerical asymptotic expansion homogenisation procedures are used to obtain the effective values of thermomechanical properties of composite materials. These values are compared with the ones obtained with analytical models and with experimental values obtained from bibliography.

Keywords – Composite materials, Homogenisation, Linear thermoelasticity, Finite elements.

