



MODELO ANALÍTICO DE RENDIMIENTO DE ENGRANAJES RECTOS CONVENCIONALES

MIGUEL PLEGUEZUELOS, JOSÉ IGNACIO PEDRERO

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Departamento de Mecánica

Juan del Rosal 12, 28040 Madrid, España

(Recibido 15 de octubre de 2008, para publicación 12 de enero de 2009)

Resumen – Muchos de los métodos tradicionales para el cálculo del rendimiento de engranajes cilíndricos se basan en las hipótesis de coeficiente de rozamiento constante y distribución uniforme de carga a lo largo de la línea de contacto. Sin embargo, es bien conocido que la rigidez de la pareja de dientes en contacto no es constante a lo largo del intervalo de engrane. Ello provoca una distribución no uniforme de la carga, que influye notablemente en las pérdidas por fricción, debido a la variación del deslizamiento relativo de las superficies en los distintos puntos de contacto. En este trabajo se estudia el rendimiento de engranajes rectos convencionales, con grado de recubrimiento entre 1 y 2, considerando un modelo de distribución de carga no uniforme obtenido a partir del principio de mínimo potencial de deformación, así como un modelo simplificado de coeficiente de fricción variable a lo largo de la línea de engrane. Se presentan expresiones analíticas de las pérdidas por fricción, la potencia transmitida y el rendimiento. Se presenta asimismo un estudio de la influencia de algunos parámetros geométricos de la transmisión en el rendimiento.

Palabras clave – Engranajes rectos, rendimiento, distribución de carga, pérdida de energía.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del rendimiento de las transmisiones por engranajes es un importante aspecto a considerar en el proceso de diseño, debido tanto al coste económico como al impacto medioambiental que las pérdidas mecánicas llevan consigo. Aunque el rendimiento de los engranajes rectos es siempre elevado, el calor producido por rozamiento puede provocar la aparición de defectos superficiales tras periodos de funcionamiento más cortos de los esperados.

Los modelos clásicos de rendimiento de engranajes disponibles en la literatura técnica [1-4] se basan en hipótesis de coeficiente de rozamiento constante y distribución uniforme de carga a lo largo de la línea de contacto. Ninguna de ellas es del todo precisa, pero el rendimiento de los engranajes rectos es siempre alto, y nunca hasta ahora fueron necesarios cálculos más ajustados. Sin embargo, en la actualidad la relación potencia/tamaño sigue creciendo día a día, lo que hace imprescindible disponer de modelos de cálculo cada vez más precisos.

Algunos estudios, como los de Michlin [5] o Höhn [6], utilizaron modelos empíricos de distribución de carga, considerando constante el coeficiente de fricción a lo largo del intervalo de engrane. Un estudio preliminar de los autores que utiliza un modelo de distribución de carga que minimiza el potencial de deformación se puede encontrar en [7]. Otros modelos, que consideran un coeficiente de fricción variable, son los que desarrollaron Anderson [8-10], Vaishya [11], Lehtovaara [12] y Diab [13]. Más complejos son los modelos que utilizan la teoría de la lubricación elastohidrodinámica para formular la variación del coeficiente de fricción sin necesidad de acudir a la experimentación, como los de Martin [14] y Wu [15]. Xu [16] presentó un modelo similar combinado con un modelo de distribución de carga que incluía validación experimental. Y muchos otros estudios sobre el cálculo de las pérdidas de potencia basados en datos experimentales se pueden encontrar en la literatura técnica [17-21]. En este trabajo se desarrolla un modelo de cálculo del rendimiento de engranajes rectos convencionales –con grado de recubrimiento entre 1 y 2– de perfil de evolvente, a partir de un modelo de distribución de carga de mínimo potencial de

deformación, así como de un modelo simplificado de coeficiente de fricción variable a lo largo de la línea de engrane.

2. MODELO DE DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Para caracterizar los puntos del perfil activo de los dientes, se define el parámetro adimensional ξ como:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{\xi 1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \quad (1)$$

donde r_{ξ} es el radio del punto del perfil, r_b el radio de base, Z el número de dientes y el subíndice 1 designa el piñón.

El potencial elástico de deformación U de una pareja de dientes rectos en contacto se puede calcular a partir de las ecuaciones de la teoría de la elasticidad, como la suma de los potenciales del piñón y de la rueda; los cuales, a su vez, se podrán expresar como la suma de los potenciales por flexión, por compresión y por cortadura. Todos ellos dependerán del punto de contacto, y consecuente vendrán dados en función de los parámetros ξ_1 y ξ_2 de los puntos de contacto de piñón y rueda. Pero dado que ambos parámetros están relacionados por la condición de engrane, si por simplicidad se designa por ξ , sin subíndice, el parámetro correspondiente al punto de contacto del piñón, el potencial de deformación de la pareja de dientes se podrá expresar en función de un único parámetro de contacto, $U = U(\xi)$. Si a continuación se define el potencial unitario inverso v como la inversa del potencial para carga y ancho de cara unidad, se tiene [22]:

$$v(\xi) = \frac{F^2}{b} \frac{1}{U(\xi)} \quad (2)$$

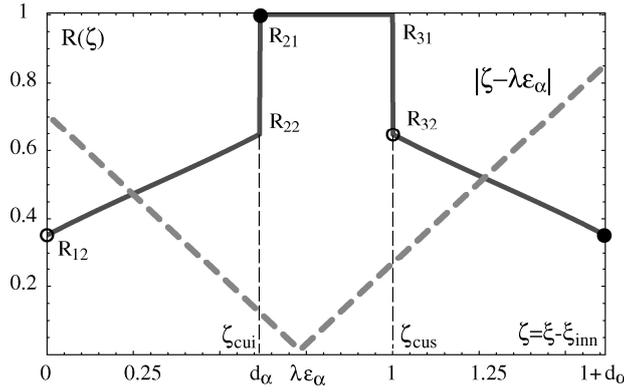
donde b es el ancho de cara y F la fuerza normal. Para engranajes rectos, el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo puede obtenerse mediante el empleo de métodos variacionales, que arrojan el siguiente resultado [22]:

$$F_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j} F = R(\xi) F \quad (3)$$

Un planteamiento parecido se puede aplicar a engranajes helicoidales, considerando el diente helicoidal como una sucesión de dientes rectos de espesor diferencial.

Con el fin de simplificar algunas expresiones, se puede definir un nuevo parámetro ζ de los puntos del perfil como $\zeta = \xi - \xi_{imn}$, donde ξ_{imn} corresponde al punto inferior del intervalo de contacto. De este modo, el intervalo desde que un diente empieza su contacto hasta que empieza el diente siguiente viene dado por $0 \leq \zeta \leq 1$, mientras que el intervalo de engrane, desde que un diente comienza a engranar hasta que termina, se representa por $0 \leq \zeta \leq \varepsilon_\alpha$, donde ε_α es el grado de recubrimiento.

La función $v(\zeta)$ solamente puede calcularse punto a punto mediante integración numérica. Sin embargo, la función $R(\zeta)$ de reparto de carga que se obtiene de la ecuación (3) tiene siempre –para grado de recubrimiento entre 1 y 2– la forma representada en la Fig. 1, en la que además, las ordenadas de los límites de cada intervalo toman valores prácticamente constantes, que no varían, al menos de manera significativa, con los parámetros geométricos de las ruedas. Estos valores –1/3 en los límites del intervalo de contacto y 2/3 en los límites del intervalo de contacto único– junto a la variación sensiblemente lineal de R con ζ , permite expresar el coeficiente de reparto para engranajes rectos como:


 Fig. 1. Coeficiente de reparto de carga $R(\zeta)$.

$$\begin{aligned}
 R(\zeta) &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\zeta}{\varepsilon_\alpha - 1} \right) & \text{for } 0 \leq \zeta \leq \varepsilon_\alpha - 1 \\
 R(\zeta) &= 1 & \text{for } \varepsilon_\alpha - 1 \leq \zeta \leq 1 \\
 R(\zeta) &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon_\alpha - \zeta}{\varepsilon_\alpha - 1} \right) & \text{for } 1 \leq \zeta \leq \varepsilon_\alpha
 \end{aligned} \tag{4}$$

3. MODELO SIMPLIFICADO DE ROZAMIENTO

Los métodos clásicos de cálculo del rendimiento consideran habitualmente que el coeficiente de fricción es constante a lo largo del engrane; no obstante, es muy conocido que depende de diversos factores, como el régimen de lubricación, las propiedades del lubricante (viscosidad dinámica y temperatura del aceite), rugosidad de las superficies, etc. La velocidad de deslizamiento en cada punto de contacto y la distribución de carga influyen de manera determinante en el régimen de lubricación. En la literatura se puede encontrar un gran número de fórmulas empíricas para el coeficiente de fricción, que toman en consideración todos estos factores [8-11]. Por lo general, dichas fórmulas se obtuvieron a partir de medidas directas de pérdidas de potencia o por ajuste de datos obtenidos de ensayos tipo *twin disc*.

Un modelo de cierta precisión para las pérdidas de potencia ha de tener en cuenta la variación del coeficiente de fricción a lo largo del intervalo de engrane. No resulta posible considerar todos los parámetros que intervienen en la formulación de un único modelo simple de fricción, pero resulta interesante observar ciertas tendencias generales de comportamiento. Puesto que el deslizamiento es nulo en el punto de rodadura, algunos modelos consideran una significativa reducción del coeficiente de fricción en las proximidades de dicho punto.

La Fig. 2 representa la forma en que los dos principales modelos de fricción toman en cuenta la variación del coeficiente de rozamiento a lo largo de la línea de engrane (μ_2 y μ_4), un modelo simplificado de μ_2 (μ_1) y el modelo de coeficiente constante (μ_3). El modelo representado por μ_4 se utilizó en las fórmulas empíricas de Drozdov y Gavrikov, O'Donoghue y Cameron, Benedict y Kelley o Misharin. El modelo representado por μ_2 se utilizó en algunas fórmulas experimentales, así como en recientes estudios basados en la teoría de la lubricación elastohidrodinámica EHL, publicados por Xu [16].

Un comportamiento típico que no se contempla en este trabajo es el de coeficiente de fricción creciente con la carga. La tensión cortante admisible del lubricante determina las características de la fricción, en especial durante el intervalo de contacto único. En las proximidades de los puntos de inicio y finalización de engrane la velocidad de deslizamiento son mayores, lo que produce importantes aumentos de temperatura con cargas elevadas.

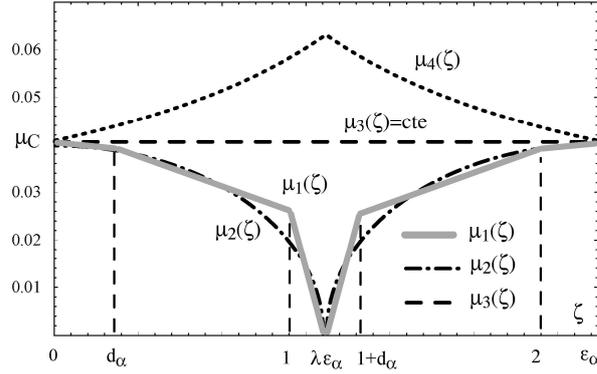


Fig. 2. Modelos no uniformes de coeficiente de fricción.

Una fórmula simplificada para aproximar el modelo EHL μ_2 , que se puede utilizar en los cálculos, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_1(\zeta) &= \left(1 - \frac{0,05}{d_\alpha} \zeta\right) \mu & \text{para } 0 \leq \zeta \leq d_\alpha \\ \mu_1(\zeta) &= -\frac{0,95(\zeta - \lambda - \lambda d_\alpha)}{\lambda + \lambda d_\alpha - d_\alpha} \mu & \text{para } d_\alpha \leq \zeta \leq \lambda \varepsilon_\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

donde d_α designa la parte decimal del grado de recubrimiento.

4. MODELO DE RENDIMIENTO

La energía W_u transmitida desde el inicio del contacto de un diente hasta el inicio del contacto del diente siguiente –es decir, $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$ – viene dada por:

$$W_u = F r_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \quad (6)$$

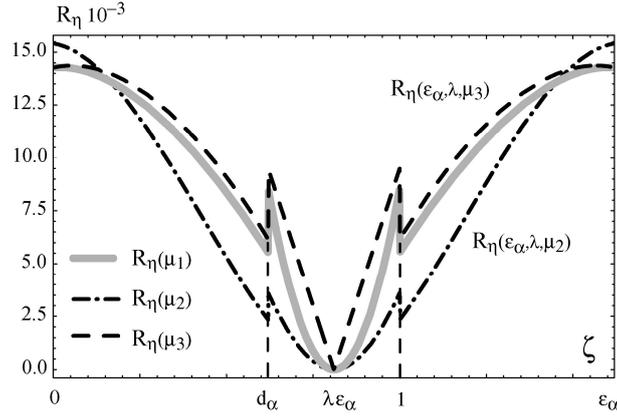
Análogamente, la energía perdida durante un giro elemental del piñón puede expresarse como el coeficiente de fricción multiplicado por la carga normal y el deslizamiento relativo elemental. Todos esos parámetros dependen del punto de contacto y por lo tanto se pueden expresar en función de ξ . Tras algunas simplificaciones se llega a que la pérdida de energía elemental dW_s viene dada por la expresión:

$$dW_s = \mu(\xi) F R(\xi) \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \frac{2\pi}{Z_1} \left| \tan\alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \quad (7)$$

en la que α'_t es el ángulo de presión de funcionamiento. Integrando a lo largo de un ciclo de engrane completo, y teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción no es constante a lo largo del mismo, se tiene:

$$W_s = F \frac{r_{b1}}{r_{b2}} (r_{b1} + r_{b2}) \frac{2\pi}{Z_1} \int_{\xi_{\text{min}}}^{\xi_{\text{min}} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi) R(\xi) \left| \tan\alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \quad (8)$$

A partir de las ecuaciones (6) y (8), el rendimiento se puede expresar como:


 Fig. 3. Aspecto típico de la función $R_\eta(\varepsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu)$.

$$\eta = 1 - \frac{W_s}{W_u} = 1 - \frac{r_{b1} + r_{b2}}{r_{b2}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\min} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi) R(\xi) \left| \tan \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \quad (9)$$

que se puede expresar en función de la relación de transmisión n como:

$$\eta = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\min} + \varepsilon_\alpha} \mu(\xi) R(\xi) \left| \tan \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right| d\xi \quad (10)$$

La ecuación anterior se puede simplificar si se expresa en función de ζ . Incluso, si $\varepsilon_{\alpha 1}$ es la contribución del intervalo de acercamiento al grado de recubrimiento, y λ la relación entre $\varepsilon_{\alpha 1}$ y ε_α , se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 1} &= \frac{Z_1}{2\pi} \tan \alpha'_t - \xi_{\min} \\ \lambda &= \frac{\varepsilon_{\alpha 1}}{\varepsilon_\alpha} \end{aligned} \quad (11)$$

con lo que el rendimiento resulta ser:

$$\eta = 1 - 2\pi \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \int_0^{\varepsilon_\alpha} \mu(\zeta) R(\zeta) |\zeta - \lambda \varepsilon_\alpha| d\zeta \quad (12)$$

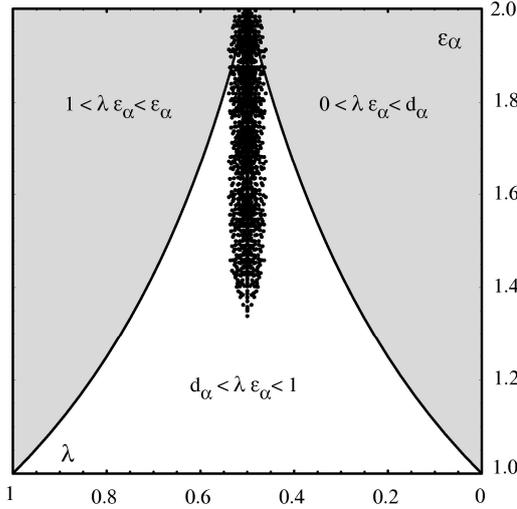
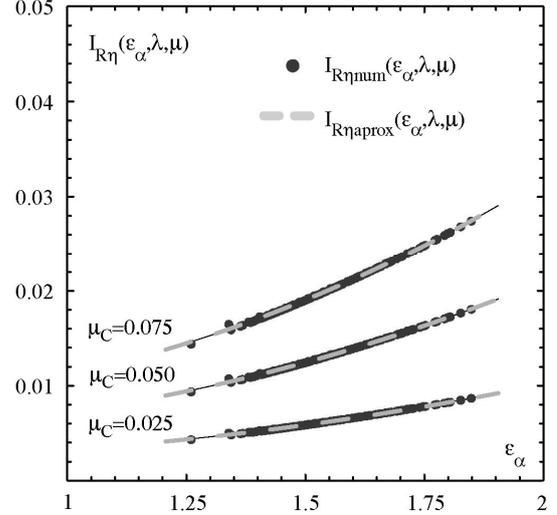
Por simplicidad, se designará por R_η a la función subintegral:

$$R_\eta(\varepsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu) = \mu(\zeta) R(\zeta) |\zeta - \lambda \varepsilon_\alpha| \quad (13)$$

R_η depende de un valor característico del coeficiente de fricción y tres parámetros adimensionales, y tiene la forma representada en la Fig. 3. La integral de R_η se designará por I_{R_η} , y dependerá de dos variables adimensionales:

$$I_{R_\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu) = \int_0^{\varepsilon_\alpha} R_\eta(\varepsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu) d\zeta \quad (14)$$

De acuerdo con ello, el rendimiento en engranajes rectos se puede expresar mediante la ecuación:

Fig. 4. Dominios de existencia de la función $R_\eta(\varepsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu)$.Fig. 5. Valores numéricos de la función $I_{R_\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu)$.

$$\eta = 1 - 2\pi \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) I_{R_\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu) \quad (15)$$

I_{R_η} es el área bajo la curva R_η en la Fig. 3, y su cálculo analítico es el principal objetivo de este trabajo. Como se aprecia en la Fig. 1, los intervalos de integración serán diferentes según el punto $\zeta = \lambda \varepsilon_\alpha$ pertenezca o no al intervalo de contacto único. En todo caso, la integral de la ecuación (14) es complicada, por lo que será conveniente encontrar una expresión aproximada de la suficiente precisión.

5. ECUACIÓN APROXIMADA PARA LA FUNCIÓN $I_{R_\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu)$

La ecuación (4) proporciona los valores del coeficiente de reparto $R(\zeta)$ en cualquier punto del dominio de contacto $[0, \varepsilon_\alpha]$. Para la integración numérica de R_η , el intervalo de contacto se ha de dividir en tres subintervalos, de acuerdo con los tres segmentos de la función $R(\zeta)$, uno de los cuales se ha de subdividir en dos, según la posición de $\lambda \varepsilon_\alpha$, que puede caer dentro o fuera del intervalo de contacto único, lo que ha de ser tenido en cuenta en la integración. Sin embargo, puesto que la función I_{R_η} es simétrica respecto de $\lambda = 0,5$, bastará con extender el estudio a $0 \leq \lambda \varepsilon_\alpha \leq 0,5$.

La Fig. 4 representa los tres dominios de existencia mencionados más arriba, para rangos teóricos de valores de λ y d_α . También aparecen representados los valores de I_{R_η} calculados por integración numérica de más de un millar de casos, variando los parámetros de diseño dentro de un rango considerablemente amplio. Se puede apreciar que en todos los casos, los valores de λ obtenidos están contenidos siempre en el intervalo $\lambda = 0,5 \pm 0,05$, lo que significa que en la inmensa mayoría de los casos $\lambda \varepsilon_\alpha$ va a estar contenido en el intervalo de contacto único. Sólo para valores de ε_α cercanos a 2, $\lambda \varepsilon_\alpha$ podría desplazarse a uno de los intervalos de carga compartida, pero se trata de una situación muy poco frecuente. En consecuencia, el desarrollo del modelo se restringirá al estudio del caso $d_\alpha \leq \lambda \varepsilon_\alpha \leq 1$.

Una vez conocidos los intervalos de integración y los valores de la función $R_\eta(\varepsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu)$ en cada uno de ellos, sustituyendo en la ecuación (14) se obtiene:

$$I_{R_\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda) / \mu_C = 0,015 + (0,0264 + 0,0136 d\alpha) d\alpha - 0,0328(0,9153 + d\alpha)(1 + d\alpha)\lambda + 0,03(1 + d\alpha)^2 \lambda^2 \quad (16)$$

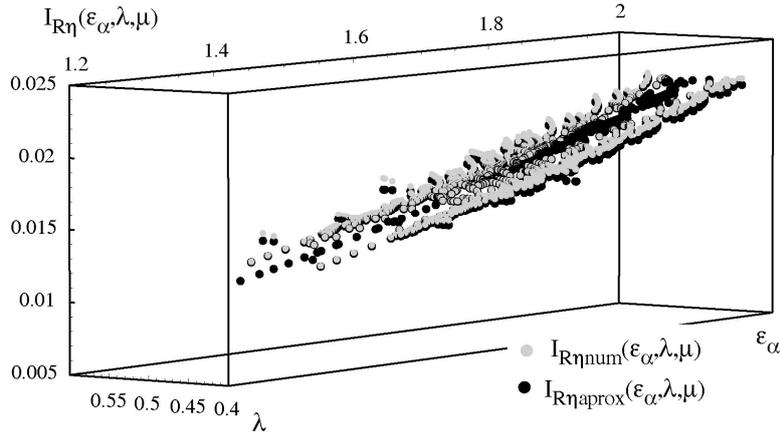


Fig. 6. Valores numéricos y aproximados de la función $I_{R\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu)$.

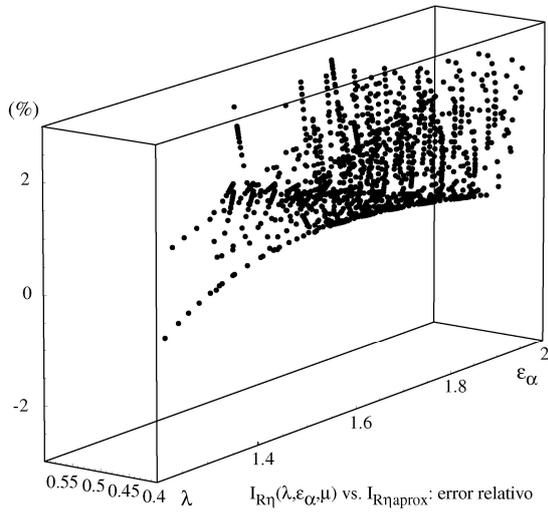


Fig. 7. Error relativo de la aproximación de $I_{R\eta}(\varepsilon_\alpha, \lambda, \mu)$.

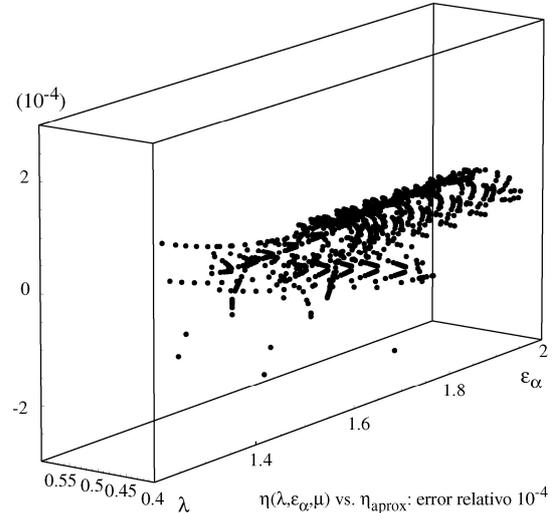


Fig. 8. Error relativo en el cálculo de $\eta(\varepsilon_\alpha)$.

La Fig. 5 muestra algunos resultados obtenidos con la ecuación (16). De las Figuras 4 y 5 se puede concluir que la función $I_{R\eta}$ varía con μ_C y con ε_α , mientras que, por el contrario, el parámetro λ no influye apenas en su valor. De acuerdo con ello, se encontró una ecuación aproximada, obtenida por regresión lineal, que no depende de λ y que arrojó un coeficiente de correlación superior al 99,6%:

$$I_{R\eta\text{aprox}}(\varepsilon_\alpha, \mu) = C_0(\mu_C) + C_1(\mu_C)\varepsilon_\alpha + C_2(\mu_C)\varepsilon_\alpha^2 \quad (17)$$

con:

$$\begin{aligned} C_0(\mu_C) &= 0.1465 \mu_C \\ C_1(\mu_C) &= -0.1201 \mu_C \\ C_2(\mu_C) &= 0.1327 \mu_C \end{aligned} \quad (18)$$

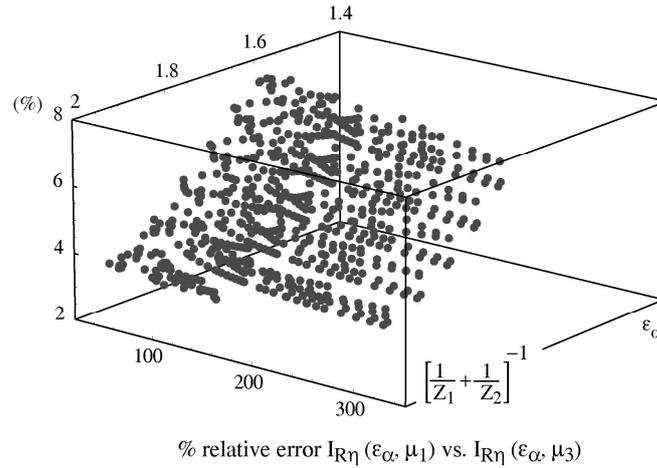


Fig. 9. Diferencia relativa en el cálculo de la función $I_{R\eta}(\epsilon_\alpha, \lambda, \zeta, \mu)$ con $\mu_1(\zeta)$ o con $\mu_3 = \text{cte}$.

Se puede apreciar, por tanto, que la función $I_{R\eta}$ se ajusta a una parábola de segundo grado en ϵ_α , cuyos coeficientes son función del coeficiente de fricción. Pese a que el coeficiente de fricción considerado no es constante a lo largo del intervalo de engrane, según el modelo simplificado que se presentó en el epígrafe 3, todos los coeficientes del polinomio de la función $I_{R\eta}$ varían linealmente con el coeficiente de fricción (lo que no significa que el rendimiento se vea linealmente afectado por el coeficiente de fricción). Este coeficiente de fricción viene definido por un valor característico μ_C , correspondiente al valor asintótico que alcanza en puntos alejados del punto de rodadura. Los coeficientes C_0 , C_1 y C_2 se ajustan con mucha precisión a una función lineal de μ_C .

En general, y sin tener en cuenta el coeficiente de fricción, todos los valores de la función $I_{R\eta}(\epsilon_\alpha, \lambda, \mu)$ están situados en un intervalo muy estrecho de valores de λ , por lo que se podrán encontrar aproximaciones precisas de $I_{R\eta}$ en función únicamente de ϵ_α . Se puede apreciar en la Fig. 6, que muestra cómo para valores dados de μ_C y ϵ_α , el intervalo de variación de $I_{R\eta}$, que corresponde a la variación de λ , es muy estrecho. En dicha figura se muestra también la comparación entre los valores numéricos de $I_{R\eta}$, calculados por integración numérica, y los valores obtenidos mediante la aproximación lineal de las ecuaciones (17) y (18). Los errores relativos en la estimación por la aproximación lineal están siempre en el intervalo $\pm 3\%$, como se muestra en la Fig. 7. Y los errores son aún menores si se calculan en términos de rendimiento. La Fig. 8 muestra el error relativo en la estimación del rendimiento, calculado con la aproximación parabólica de $I_{R\eta}$. En todos los casos el error está contenido en el intervalo $\pm 2 \cdot 10^{-4}$.

6. RESULTADOS

Se ha estudiado la influencia en las pérdidas por fricción y el rendimiento de los números de dientes de piñón y rueda, así como del ángulo de presión normal. La Fig. 9 muestra la influencia de utilizar para el cálculo de $I_{R\eta}$ un modelo de fricción uniforme ($\mu_3 = \text{cte}$) o un modelo de fricción dependiente de la posición (μ_1). El error relativo en la estimación de $I_{R\eta}$ está siempre entre el 2% y el 8%, y toma siempre el mismo signo.

La influencia del grado de recubrimiento se puede deducir de la propia definición de la función $I_{R\eta}$. Aunque $I_{R\eta}$ aumenta con el grado de recubrimiento debido al aumento del deslizamiento, como muestra la Fig. 5, para valores menores del grado de recubrimiento la diferencia entre los valores de $I_{R\eta}$ calculados con coeficiente de fricción constante y variable, aumenta. Los valores del rendimiento calculados con el modelo analítico presentado están muy próximos a los calculados por métodos numéricos, con un error en todos los casos del orden de 10^{-4} .

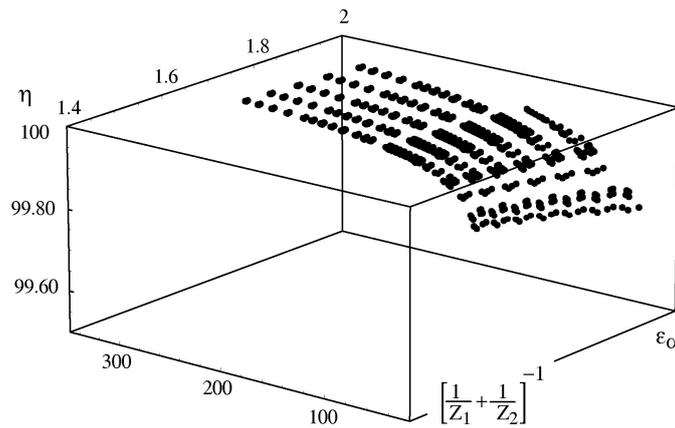
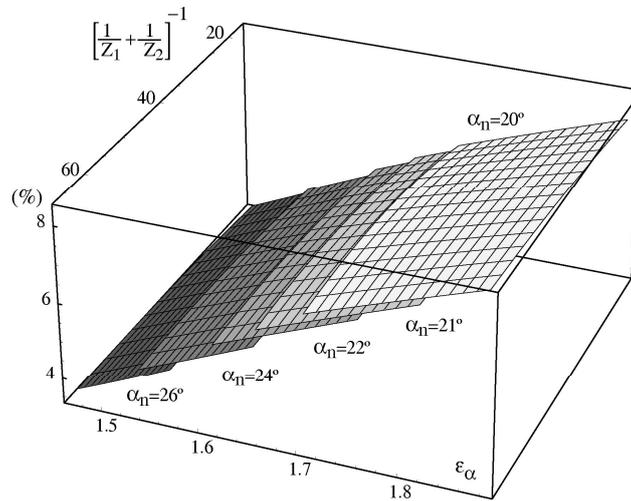


Fig. 10. Valores numéricos del rendimiento $\eta(\varepsilon_\alpha)$.



Energía perdida, $W_s(v=cte, \mu=cte)$ vs. $W_s(v \neq cte, \mu=cte)$: error relativo

Fig. 11. Error relativo en el cálculo de W_s (distribución de carga uniforme frente a no uniforme) para μ constante.

Las ecuaciones (15), (17) y (18) proporcionan valores muy precisos del rendimiento de la transmisión. La Fig. 9 muestra el error relativo en el cálculo de $I_{R\eta}(\varepsilon_\alpha, \mu)$ con $\mu_1(\zeta)$ o con $\mu_3 = cte.$, para un amplio conjunto de engranajes rectos con grado de recubrimiento entre 1 y 2. Para el estudio se consideró el ángulo de presión normal variando entre 14° y 26° , el número de dientes del piñón entre 20 y 60, y la relación de transmisión entre 1 y 10. Las alturas de cabeza y pie del diente tomaron siempre los valores de las herramientas normalizadas ISO y AGMA.

En cualquier caso, como muestra la Fig. 10, la influencia del valor de $I_{R\eta}$ en el rendimiento absoluto no es muy significativa, pero puede ser bastante considerable en la estimación de las pérdidas. El estudio comparativo de la energía perdida por fricción refleja la precisión del estudio llevado a cabo.

Los resultados obtenidos mediante el método analítico presentado (en el que la distribución de carga no es uniforme y el coeficiente de fricción no es constante) se han comparado también con los que se obtendrían suponiendo el coeficiente de fricción constante y la carga uniformemente distribuida a lo largo de la línea de contacto (esto es, considerando el 50% de la fuerza actuando sobre cada pareja de dientes en el

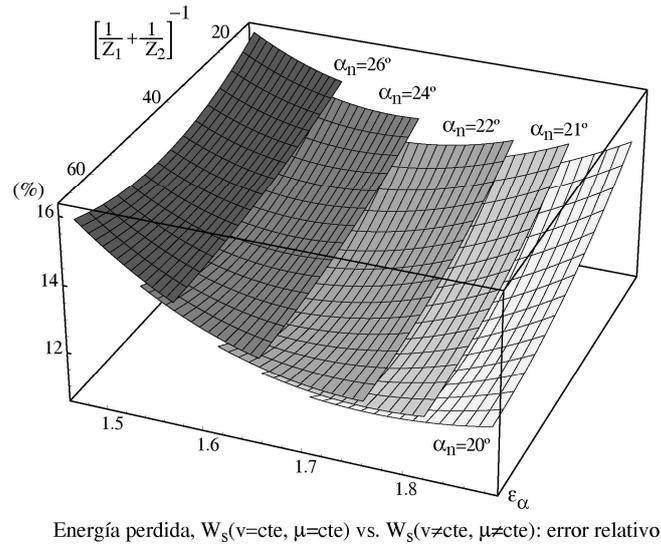


Fig. 12. Error relativo en el cálculo de W_s (distribución de carga uniforme y μ constante frente a distribución de carga no uniforme y μ variable).

intervalo de carga compartida, y el 100% de la carga sobre la única pareja en contacto en el intervalo de contacto único). El método propuesto proporciona valores del rendimiento ligeramente mayores. Esto es debido a que el deslizamiento relativo es mayor en puntos alejados del círculo primitivo, mientras que la carga es significativamente más pequeña en esos puntos, por lo que las pérdidas por fricción son menores. Como antes, aunque las diferencias no son importantes cuando se calculan en términos de rendimiento, aumentan considerablemente cuando se expresan en términos de pérdidas, como se representa en la Fig. 11.

Las diferencias son mayores si las pérdidas, calculadas con modelos clásicos (distribución de carga uniforme y coeficiente de fricción constante) se comparan con las calculadas con la distribución de carga no uniforme definida por $v(\zeta)$ y el modelo simplificado de fricción descrito por la función μ_2 . En este caso las diferencias crecen desde valores menores del 10% hasta valores entre el 12% y el 20%, dependiendo del grado de recubrimiento, del ángulo de presión normal y del número de dientes en piñón y rueda, que son los parámetros geométricos que más influencia tienen en las pérdidas de potencia. La Fig. 12 muestra el efecto relativo de estas variables.

7. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo refinado de rendimiento para engranajes rectos de perfil de evolvente a partir de un modelo de distribución de carga no uniforme, basado en el principio de mínimo potencial de deformación, y un modelo simple de fricción, variable a lo largo del intervalo de engrane. De acuerdo con el coeficiente de reparto de carga obtenido, el rendimiento se expresa mediante una ecuación analítica simple, función de un valor característico del coeficiente de fricción, del número de dientes en piñón y rueda, y del grado de recubrimiento. A pesar de su simplicidad, la ecuación presentada proporciona valores de las pérdidas por fricción y del rendimiento muy similares a las obtenidas por procedimientos experimentales, para un amplio rango de valores de los parámetros geométricos y de operación.

Se han desarrollado algunos estudios de la influencia en el rendimiento del coeficiente de fricción, así como de varios parámetros de diseño. Se puede comprobar que el rendimiento aumenta con el ángulo de presión, para dientes con deslizamiento específico equilibrado en rueda y piñón, y también si la relación de transmisión disminuye por el aumento del número de dientes en el piñón. Las expresiones propuestas permiten calcular el rendimiento con errores muy pequeños, siempre por debajo del 0,02%, si se comparan con los calculados por técnicas de integración numérica.

El estudio considera engranajes rectos con grado de recubrimiento entre 1 y 2, y completa trabajos anteriores, en que se considero el coeficiente de fricción constante a lo largo del intervalo de engrane. El método propuesto y las expresiones finales tienen interés para diseños preliminares y normalización, así como con finalidad académica.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dirección General de Ciencia y Tecnología la financiación del proyecto DPI2008-05787, “Modelos de Cálculo de Engranajes Cilíndricos Especiales”.

REFERENCIAS

- [1] Merritt, H.E., *Gears*, Sir Isaac Pitman & Sons (1946)
- [2] Buckingham, E., *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill (1949)
- [3] Niemman, G., Winter, H., *Maschineelement*, vol. 2, Springer (1989)
- [4] Henriot, G., *Engrenages. Conception, Fabrication, Mise en Oeuvre*, 7^e edition, Dunod, Paris (1999)
- [5] Michlin, Y., Myunster, V., “Determination of Power Losses in Gear Transmissions with Rolling and Sliding Friction Incorporated”, *Mechanism and Machine Theory*, **37** (2002)
- [6] Höhn, B.-R., Michaelis, K., Wimmer, A., “Low Loss Gears”, AGMA Technical Paper 05FTM11 (2005)
- [7] Pedrero, J., Estrems, M., Fuentes, A., “Determination of the Efficiency of Cylindric Gear Sets”, Proc. IV World Congress on Gearing and Power Transmissions, vol. 1, Paris (France) (1999)
- [8] Anderson, N.E., Loewental, S.H., “Effect of Geometry and Operating Conditions on Spur Gear System Power Loss”, *Journal of Mechanical Design*, **107** (1985)
- [9] Anderson, N.E., Loewental, S.H., Black, J.D., “An Analytical Method to Predict Efficiency of Aircraft Gearboxes”, NASA Technical Memorandum 83716 (1984)
- [10] Anderson, N.E., Loewental, S.H., “Efficiency of Non-standard and High Contact Ratio Involute Spur Gears”, *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, **108** (1986)
- [11] Vaishya, M., Houser, D.R., Modeling and Measurement of Sliding Friction for Gear Analysis, AGMA Technical Paper 99FTMS1 (1999)
- [12] Lehtovaara, A., “Calculation of Sliding Power Loss in Spur Gear Contacts”, *Tribotest Journal*, **9-1** (2002)
- [13] Diab, Y., Velex, F., “Prediction of Power Losses Due to Tooth Friction in Gears”, *Tribology Transactions*, **49** (2006)
- [14] Martin, K.F., “The Efficiency of Involute Spur Gears”, *Journal of Mechanical Design*, **103** (1981)
- [15] Wu, S., Cheng, H.S., “A Friction Model of Partial EHL Contacts and its Application to Power Loss in Spur Gears”, *Tribology Transactions*, **34** (1991)
- [16] Xu, H., “Development of a Generalized Mechanical Efficiency Prediction Methodology for Gear Pairs”, MS Thesis, The Ohio State University (2005)
- [17] Coy, J., Mitchell, A., Hamrock, B., “Transmission Efficiency Measurements and Correlations with Physical Characteristics of the Lubricant”, NASA Technical Memorandum ADA149179 (1984)
- [18] Naruse, C., Haizuka, S., Nemoto, R., Kurokawa, K., “Studies on Frictional Loss, Temperature Rise and Limiting Load for Scoring of Spur Gear”, *Bulletin of JSME*, **29** (1986)
- [19] Yoshizaki, M., Naruse, C., Haizuka, S., “Study on Frictional Loss of Spur Gears (Concerning the Influence of Tooth Form, Load, Tooth Surface Roughness and Lubricating Oil)”, *Tribology Transactions*, **34** (1991)
- [20] Petry-Johnson, T.T., “Experimental Investigation of Spur Gear Efficiency”, MS Thesis, The Ohio State University (2007)
- [21] Chase, D.R., Kahraman, A., Anderson, N.E., Petry-Johnson, T.T., “An Experimental Investigation of Spur Gear Efficiency”, *Journal of Mechanical Design*, **130** (2008)
- [22] Pedrero, J., Artés, M., Fuentes, A., “Modelo de Distribución de Carga en Engranajes Cilíndricos de Perfil de Evolvente”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, **3** (1999)

- [23] Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Modelo de Reparto de Carga en Engranajes Rectos con Interferencia de Tallado”, *Actas XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Gijón (España) (2008)
- [24] Pleguezuelos, M., “Modelo de Distribución de Carga en Engranajes Cilíndricos de Perfil de Evolvente, Capítulo 6: Modelo de Rendimiento”, Tesis Doctoral, UNED, Madrid (2006)

ANALYTIC MODEL FOR THE EFFICIENCY OF CONVENTIONAL SPUR GEARS

Abstract –The traditional methods for computation of the efficiency of cylindrical gear transmissions are based on the hypotheses of constant friction coefficient and uniform load distribution along the line of contact. However, the changing rigidity of the pair of teeth along the path of contact produces a non-uniform load distribution, which has significant influence on the friction losses, due to the different relative sliding at any contact point. In this work, a study of the efficiency of conventional spur gears, with transverse contact ratio between 1 and 2, is carried out considering a non-uniform model of load distribution, obtained from the minimum elastic potential criterion, and a simplified non-uniform model of the friction coefficient along the path of contact. Analytical expressions for the power losses due to friction, for the transmitted power and for the efficiency are presented. A study of the influence of some transmission parameters on the efficiency is also presented.

Keywords – Spur gear, Efficiency, Load distribution, Energy loss.