



## DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA A RESULTADOS PROVENIENTES DE LA SIMULACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE BOGIES DE FERROCARRIL

JOSÉ LUIS SAN ROMÁN GARCÍA, ALEJANDRO QUESADA GONZÁLEZ,  
SANTIAGO RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, CAROLINA ÁLVAREZ CALDAS,  
VICENTE DÍAZ LÓPEZ

Universidad Carlos III de Madrid, Área de Ingeniería Mecánica  
Av. Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, España

(Recibido 1 de abril de 2004, para publicación 4 de junio de 2004)

**Resumen** – En este trabajo afrontamos el problema que supone la asignación de incertidumbres a resultados provenientes de simulación numérica. Sin conocer el valor de la incertidumbre asociada, el resultado así encontrado pierde gran parte de su atractivo. Proponemos una metodología para evaluar esta incertidumbre en el caso de cálculo por el método de los elementos finitos de la distribución tensional en el seno de un elemento mecánico resistente. Por último, ofrecemos un ejemplo de aplicación a un modelo de bogie de ferrocarril de dos ejes MSP sometido a uno de los estados de carga que la normativa impone para su homologación.

### 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de distribuciones tensionales en el seno de elementos mecánicos resistentes es una de las más importantes necesidades que tiene el ingeniero mecánico. La mecánica de sólidos nos proporciona un potente modelo matemático para deducir analíticamente la distribución tensional a partir de la geometría de la pieza y de las cargas a que está sometida; este modelo está formado por las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad. Tenemos así un sistema de doce ecuaciones diferenciales cuyas condiciones de contorno vienen dadas por las acciones externas (cargas) y los apoyos de la estructura. Es sabido que para la mayoría de los dominios geométricos de interés no existe solución analítica al problema así planteado, por lo que habremos de buscar otros caminos para calcular los valores tensionales.

Una vía ampliamente explorada es la vía experimental, consistente en medir de alguna forma la tensión directamente sobre el elemento cargado. La extensometría eléctrica es una de las técnicas más empleadas en este campo. Los ensayos experimentales son por el momento un paso ineludible en el proceso de desarrollo de nuevos diseños en los que la integridad mecánica de la estructura juegue un papel importante. Pero para ensayar un diseño, es necesario construir previamente un prototipo, y preparar una instalación de ensayo (aplicación de cargas y toma de datos) adecuada. Estas etapas de *construcción del prototipo - ensayos - rediseño* provocan un consumo de recursos que encarece el producto y retrasa su lanzamiento.

Una alternativa que poco a poco se abre paso en este entorno es la simulación numérica. La principal ventaja que presenta es que resuelve el problema sin necesidad de recurrir a la experimentación, aplicando al aparentemente irresoluble problema matemático métodos numéricos de integración. Así, los diseños preliminares son 'ensayados' virtualmente con la ayuda de un ordenador y se pueden corregir errores sin necesidad de construir prototipos. La importancia de la simulación no acaba aquí; en algunos casos, la experimentación no es sólo desaconsejable, sino que puede llegar a ser absolutamente inviable por motivos físicos o económicos. En el campo de la determinación de distribuciones tensionales goza de gran popularidad el Método de los Elementos Finitos, implementado en numerosos códigos comerciales de cálculo.

No obstante, el empleo de valores provenientes de simulación introduce un problema importante; no

somos capaces de asociar al resultado arrojado por el ordenador una incertidumbre que nos proporcione una medida de su calidad y nos permita asignarle un nivel de confianza [1]. Cuando se analiza un modelo simplificador de la realidad se debe asumir que los resultados extraídos llevan consigo un error y tener un orden de magnitud de ese error resulta fundamental para decidir si el resultado es o no válido [2] y [3]. La utilización de la simulación como alternativa a los métodos experimentales clásicos requiere un adecuado control y conocimiento de las fuentes de error influyentes en los resultados y su evaluación numérica para conocer el alcance de la herramienta que estamos utilizando. Este escollo se sortea en la práctica mediante la validación experimental del modelo de elementos finitos, con lo que perdemos parte de las ventajas apuntadas anteriormente. La simulación ha demostrado ser una potente herramienta en las fases preliminares del diseño, pero en tanto no seamos capaces de cuantificar de una forma precisa y razonada la incertidumbre asociada no podremos prescindir del preceptivo ensayo de prototipos previo al lanzamiento del producto.

## 2. OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Identificación de fuentes de error en el proceso de modelización y simulación.
- Cuantificación razonada de la incertidumbre asociada a esas fuentes de error.
- Propagación de las incertidumbres determinadas hasta el resultado final de la simulación.

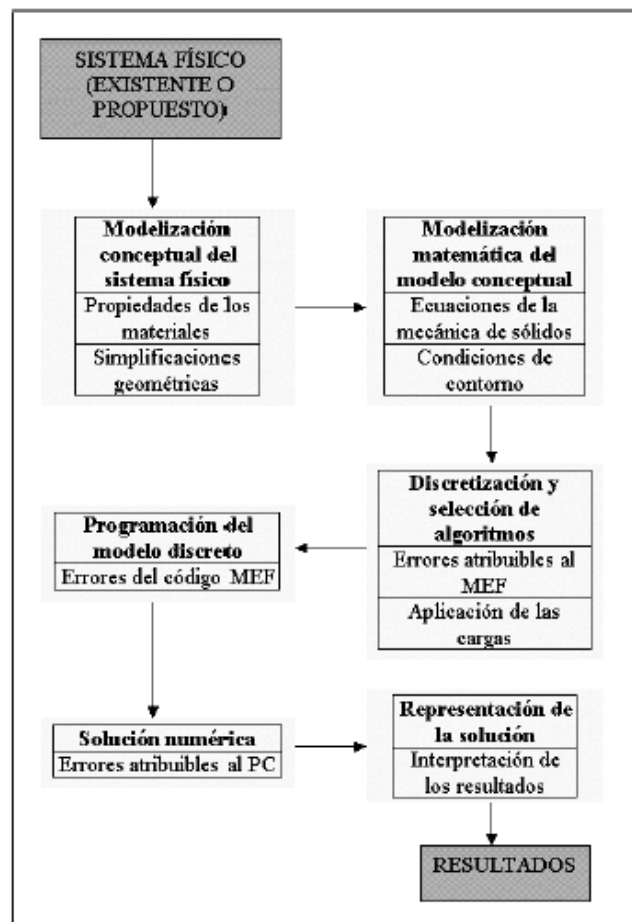


Fig. 1. Fases del proceso de modelización y simulación y fuentes de incertidumbre.

### 3. FASES DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN

Para identificar fuentes de incertidumbre en modelos de elementos finitos para el cálculo de distribuciones tensionales dividiremos el proceso de modelización y simulación en seis etapas básicas [4] (fig. 1).

*Modelización conceptual del sistema físico.* Consiste en la especificación del sistema a analizar y su entorno. En esta fase se decide qué eventos físicos serán considerados y cuáles serán obviados. También se asigna un valor a cada uno de los parámetros de influencia (geometría, propiedades de los materiales...).

*Modelización matemática del modelo conceptual.* Consiste en el desarrollo de un modelo matemático que represente las relaciones entre las magnitudes físicas de interés. El modelo consistirá en el caso más general en un conjunto de ecuaciones diferenciales, ecuaciones algebraicas auxiliares y las correspondientes condiciones de contorno para las ecuaciones diferenciales. En muchos casos tendremos que elegir un modelo matemático de entre varios que simulan los mismos aspectos del problema, pero nunca olvidaremos que un modelo simplificador necesariamente introduce desviaciones en el cálculo. Es importante remarcar que las condiciones iniciales y de frontera forman parte del modelo y que los posibles errores introducidos en esta fase no se deben exclusivamente al conjunto de ecuaciones diferenciales.

*Discretización y selección de algoritmos para el modelo matemático.* Consiste en las operaciones que transforman el problema planteado (cuya solución analítica no existe) desde la matemática continua hasta la matemática discreta. Dependiendo del método numérico seleccionado, discretizaremos el espacio, el tiempo, las variables, las ecuaciones o las soluciones. También deberemos decidir aquí el valor de algunos parámetros propios del método, como por ejemplo el tamaño de la malla.

*Programación del modelo discreto.* Consiste en la elaboración del programa de ordenador que resuelve el sistema algebraico construido en la anterior fase.

*Solución numérica.* Tras ejecutar el programa en un ordenador obtenemos una solución discretizada. Tan sólo obtenemos valores de la función solución en los nodos del modelo y con una precisión finita debido a problemas de convergencia, redondeo...

*Representación de la solución.* En esta fase se acometen las importantes tareas de postprocesado e interpretación de la solución obtenida.

### 4. FUENTES DE INCERTIDUMBRE

Expondremos aquí todas las fuentes de incertidumbre que proponemos evaluar para el caso de cálculos a partir de modelos de Elementos Finitos de componentes mecánicos. Agruparemos las fuentes de incertidumbre en función de la fase del proceso, de las anteriormente mencionadas, a la que corresponda (ver fig. 1).

*Propiedades de los materiales.* Éste es un dato de partida de nuestro modelo y todas las propiedades mecánicas que tengan influencia en la solución deberán proporcionarse con la mejor estimación posible de su valor acompañada de una incertidumbre típica perfectamente evaluada.

*Simplificaciones geométricas.* El modo en que consideraremos su influencia sobre el resultado será el mismo empleado en el cálculo de la incertidumbre debida a la forma de aplicación de las cargas, por lo que la descripción hecha en ese caso vale también para éste.

*Ecuaciones de la mecánica de sólidos.* Las ecuaciones de equilibrio interno, equilibrio en el contorno y de compatibilidad constituyen un modelo sobradamente contrastado a lo largo de mucho tiempo. Resultan de una deducción matemática a partir de hipótesis muy suaves. Asumiremos que no introducen error, o bien que la incertidumbre asociada a su empleo es despreciable en comparación con el resto de incertidumbres presentes. Mención aparte merecen las ecuaciones constitutivas del material de que se trate, que tratan de modelizar su comportamiento mecánico; en cada caso en particular habrá que elegir un modelo de comportamiento del material y evaluar la medida en que el material real es representado por este modelo.

*Condiciones de contorno.* En el caso de la simulación del comportamiento de un elemento mecánico en una situación dada, las cargas a las que está sometido, así como sus condiciones de apoyo, constituyen también un dato para el cálculo, pero en numerosas ocasiones no resulta evidente determinar estas condi-

ciones de contorno. La medida en que la solución adoptada se corresponde con la realidad nos dará información acerca de la incertidumbre introducida.

*Errores atribuibles al MEF.* El Método de los Elementos Finitos propone una forma de salvar el problema que plantea el modelo matemático de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales analíticamente irresoluble. Lo hace discretizando el espacio vectorial de las posibles funciones solución, para construir una matriz de rigidez que determina un sistema algebraico lineal que sustituye al sistema de ecuaciones diferenciales. La medida en que este sistema representa al original determinará la magnitud de la incertidumbre introducida. También deberemos considerar la posibilidad de que el grado de convergencia de la solución (a la que generalmente se llega a través de métodos iterativos) no sea el adecuado.

*Aplicación de las cargas.* La más importante de las componentes de la incertidumbre asociada a la estimación de la distribución tensional presente en un elemento mecánico resistente mediante el MEF es la propiamente debida a la actividad de modelización, según la cual el sistema real complejo se sustituye por un modelo simplificado, cuyos resultados diferirán en mayor o menor medida de las soluciones reales. En el entorno de cálculo de que se trate (en nuestro caso hemos empleado el código comercial ANSYS) el modelo asume siempre simplificaciones en la geometría, así como en la aplicación de las condiciones de contorno: apoyos y cargas. Para la estimación de esta incertidumbre haremos uso del Teorema de Saint-Venant, que limita el efecto de estas simplificaciones a la región cercana al lugar en que la simplificación ha tenido lugar, siempre y cuando las simplificaciones sean razonables. Podemos sustituir un sistema de cargas por otro equivalente (misma resultante y mismo momento) y las condiciones globales de apoyo de la estructura deben corresponderse con las reales.

*Errores del código empleado.* Consideraremos que los códigos comerciales están lo suficientemente depurados como para asumir que la solución que proponen se corresponde con la solución que propone el MEF, sin desviaciones, y que no se introduce incertidumbre en esta etapa.

*Errores de precisión en los cálculos del PC.* Consideraremos aquí la magnitud de la influencia que pueda tener en la solución el hecho de que el equipo trabaja con precisión limitada, acarreando errores de redondeo.

*Interpretación de los resultados.* Una vez resuelto el problema, obtenemos del ordenador numerosos resultados, en forma de listados, gráficos, valores en nodos, en elementos, así como diversas magnitudes solución. La última tarea que nos queda es extraer de entre tal cantidad de información la solución al problema planteado inicialmente. En contra de lo que pudiera parecer esto no se hace de manera evidente en numerosas ocasiones, constituyendo la última aportación al valor final de la incertidumbre a asociar al resultado de la simulación.

## 5. EJEMPLO DE APLICACIÓN: DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA A RESULTADOS PROVENIENTES DE LA SIMULACIÓN MEF DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE UN BOGIE

Evaluaremos las fuentes de incertidumbre identificadas para los resultados obtenidos a partir de un modelo 3D de bogie de ferrocarril de dos ejes, modelo MSP de vía métrica, construido con chapas y mallado con elementos Shell63. El modelo original para el que se emplearon 25.000 elementos de tamaño característico 20 mm, fue validado por extensometría satisfactoriamente.

Un aspecto importante de este trabajo es que pretendemos dar una medida de la incertidumbre compatible con la definición adoptada en el documento [5], publicado por ISO y otras seis organizaciones internacionales de normalización y metrología. De acuerdo a lo anterior, definimos la **incertidumbre típica asociada a una estimación** como la desviación típica del conjunto de valores que razonablemente pueden ser atribuidos a la variable buscada en función del procedimiento de cálculo y de su resultado.

La guía aconseja evaluar todas las fuentes de incertidumbre mediante procedimientos que agrupa en dos clases: evaluaciones de tipo A y evaluaciones de tipo B. Posteriormente las incertidumbres así evaluadas se repercuten en la incertidumbre de la estimación de salida mediante el cálculo de unos pesos que dan idea de la influencia que los distintos efectos tienen en el resultado final.

En el caso que nos ocupa, las incertidumbres tipo B pueden ser evaluadas basándose en toda la información disponible acerca de la variabilidad que el efecto de que se trate pueda provocar en el resultado, al

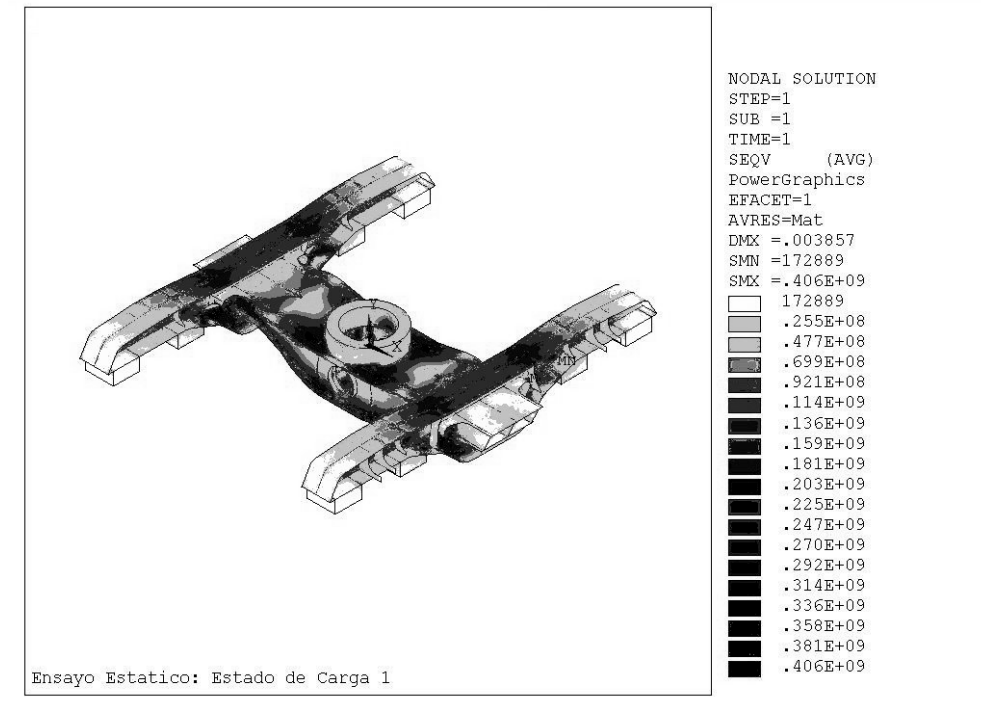


Fig. 2. Resultado de la simulación.

igual que se hace con el cálculo de incertidumbres de medida. El problema nos lo encontramos al intentar efectuar evaluaciones tipo A, que se obtienen mediante el tratamiento estadístico de una serie de valores independientes. La repetibilidad de un cálculo por elementos finitos es absoluta hasta el punto de que el resultado de la estimación será siempre el mismo por muchas veces que lo repitamos. Esto nos impide obtener observaciones independientes y aplicar a éstas un tratamiento convencional. Para salvar esta contrariedad construiremos distintos modelos que sólo se diferencien en los valores que tome el parámetro cuya influencia estemos valorando en ese momento, y probaremos a considerar los resultados obtenidos como "medidas" independientes del mismo fenómeno.

Haremos una breve descripción de la metodología seguida para asignar incertidumbre a las fuentes anteriormente referidas cuando efectuamos el cálculo de la tensión equivalente de Von Mises en los puntos del bogie identificados como 10 y 17. El valor resultante de la simulación para estos dos puntos es de 113,08 MPa y 38,47 MPa, respectivamente.

*Propiedades de los materiales.* En el caso de cálculos tensionales, las propiedades de los materiales no intervienen en el problema, ya que la distribución tensional es función exclusiva de la geometría y las cargas (todos los puntos de medida se encuentran en zonas en las que se puede asumir la hipótesis de tensión plana).

*Condiciones de contorno.* Estamos simulando el comportamiento de un bogie de ferrocarril sometido a las cargas que las normas UIC imponen para la aceptación del diseño, por lo que las condiciones de contorno nos vienen impuestas y carecen de incertidumbre.

*Simplificaciones en la geometría y en la aplicación de las condiciones de contorno.* Para el cálculo de la incertidumbre que caracteriza la magnitud de las desviaciones que estas simplificaciones han podido introducir en el resultado nos valdremos de la experiencia acumulada por nuestro equipo de trabajo en modelización de elementos mecánicos similares con la herramienta ANSYS. De esta experiencia, deducimos que la incertidumbre a asignar al valor calculado en el punto 10 debe estar en el entorno del 1% del resultado, ya que no tiene cerca de sí ninguna zona de aplicación de cargas, apoyo o simplificación geométrica. Asignaremos al valor calculado para el punto 17 una incertidumbre del 10% del resultado, por

estar en una zona conflictiva en la que se introdujeron simplificaciones geométricas en la construcción del modelo.

*Interpretación de los resultados.* Parece claro que las diferencias encontradas a la hora de evaluar la tensión de Von Mises entre los diversos nodos y elementos presentes en la zona a estudio van a estar muy relacionadas con el tamaño de la malla y con el valor que el gradiente de tensiones tome en el entorno del punto de interés. En el entorno del punto 10 el gradiente de tensiones es prácticamente nulo, mientras que en el entorno del punto 17 ronda los 0,56 MPa/mm. De este modo, no consideraremos contribución a la incertidumbre por este motivo en el primer caso y consideraremos una incertidumbre típica en el segundo de 11 MPa.

El resto de fuentes de incertidumbre se han evaluado mediante un procedimiento tipo A, construyendo 6 modelos del mismo problema pero con mallas diferentes. Tres de los modelos se mallaron con elementos cuadrados de tamaños característicos 20, 15 y 10 mm, y los otros tres con elementos triangulares de los mismos tamaños característicos. Supondremos que la variabilidad encontrada en los resultados de debe a efectos como los errores atribuibles al MEF (que en cada caso tendrán un valor distinto) y los errores de redondeo de la máquina. Los cálculos efectuados aconsejan asociar una incertidumbre de 0,4 MPa al punto 10 y 5 MPa al punto 17.

Todas las componentes calculadas se refieren a incertidumbres relativas a la variabilidad del resultado final, por lo que para propagarlas bastará con sumarlas conforme a la ley de propagación de varianzas.

De este modo, el resultado final queda:

- Tensión equivalente de Von Mises para el punto 10:  $\sigma_{VM} = (113,1 \pm 1,2)$  MPa (1,1%)
- Tensión equivalente de Von Mises para el punto 17:  $\sigma_{VM} = (38 \pm 13)$  MPa (30%)

Nota: Se indica la incertidumbre típica y no la incertidumbre expandida.

## 6. CONCLUSIONES

Tras la realización de este trabajo podemos afirmar:

- Es posible asociar al resultado de una simulación por el método de los elementos finitos un valor de incertidumbre que caracterice la calidad de la estimación.
- Para obtener un valor final de la incertidumbre del cálculo hay que determinar razonadamente todas las posibles contribuciones que hayan podido afectar a la misma de manera independiente.
- No es razonable caracterizar la bondad del modelo mediante un único valor, sino que es frecuente que de los muchos resultados que se pueden obtener de un modelo, unos sean más precisos y otros menos.
- Bajo ciertas condiciones, los resultados provenientes de un modelo de elementos finitos de un sistema real complejo pueden tener una calidad más que aceptable.
- Para evaluar la incertidumbre con una precisión tal que nos permita sustituir los ensayos sobre prototipos reales por ensayos virtuales hemos de depurar los métodos de evaluación de las componentes particulares de la incertidumbre.

## REFERENCIAS

- [1] Xiaoping Du, Wei Chen, "A Methodology for Managing the effect of Uncertainty in Simulation-Based Design", Integration & Design Engineering Laboratory (IDEL). Department of Mechanical Engineering. University of Illinois at Chicago.
- [2] C. Pinto Cámara, "Análisis de las componentes del error de discretización del MEF en problemas estructurales no lineales", Tesis doctoral de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales e Ingenieros de Telecomunicación de Bilbao.

- [3] G. Bugada, "Estimación y corrección del error en el análisis estructural por el MEF", *Centro internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería* (1991) 100 pp.
- [4] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, K. V. Diegert, K. F. Alvin, "Error and uncertainty in modelling and simulation", *Reliability Engineering and System Safety* **75** (2002) 333-357.
- [5] "Guide to the expression of uncertainty in measurement", ISO, 1995.

**DETERMINATION OF THE UNCERTAINTY FOR RESULTS ABOUT THE  
STRUCTURAL BEHAVIOUR OF A RAILWAY BOGIE COMING  
FROM THE SIMULATION BY FINITE ELEMENTS METHOD**

**Abstract** – In this paper we consider the problem of assigning uncertainty to results coming from numerical simulation. These results lose great part of their attractiveness without the value of the associated uncertainty. We propose a methodology to evaluate this uncertainty in calculating stress distributions using the finite elements method. For ending, we show an example of the application to a railroad bogie model.