

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

## Grado en Ingeniería Mecánica

### PROYECTO Fin de Grado

TÍTULO	Modelo de reparto de carga en engranajes rectos interiores incluyendo deformaciones de Hertz
AUTOR	Alejandro Casajús Grassi
DIRECTOR	Miryam Sánchez Sánchez
CODIRECTOR	José Ignacio Pedrero Moya
PONENTE	
DEPARTAMENTO	Mecánica

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

TÍTULO	Modelo de reparto de carga en engranajes rectos interiores incluyendo deformaciones de Hertz
AUTOR	Alejandro Casajús Grassi
DIRECTOR	Miryam Sánchez Sánchez
CODIRECTOR	José Ignacio Pedrero Moya
PONENTE	
DEPARTAMENTO	Mecánica

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



**TÍTULO DEL PROYECTO**

**MODELO DEL REPARTO DE CARGA EN ENGRANAJES RECTOS INTERIORES  
INCLUYENDO DEFORMACIONES DE HERTZ**

(A rellenar por el Tribunal Calificador)

**TRIBUNAL CALIFICADOR**

PRESIDENTE: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

VOCAL \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

SECRETARIO \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**FECHA DEFENSA** \_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

**CALIFICACIÓN** \_\_\_\_\_

Vocal

Presidente

Secretario

Fdo.: \_\_\_\_\_ Fdo.: \_\_\_\_\_ Fdo.: \_\_\_\_\_

**CÓDIGOS UNESCO**

--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--



## ÍNDICE

Lista de símbolos .....	vii
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. Historia .....	2
1.2. Aplicaciones .....	4
1.3. Tipos de engranajes .....	7
1.4. Engranajes cilíndricos de dientes rectos .....	9
1.5. Engranajes Interiores .....	11
1.6. Problemática de los engranajes .....	12
1.7. Modelo de cálculo actual .....	13
1.8. Objeto del TFG. Nuevo modelo de cálculo .....	15
<b>CAPÍTULO 2. GEOMETRÍA DEL PERFIL DE EVOLVENTE .....</b>	<b>17</b>
2.1 Engranajes de dentado exterior tallados con cremallera .....	18
2.1.1. Geometría de la cremallera .....	18
2.1.2. Geometría del piñón. Perfil de Evolvente .....	19
2.1.3. Geometría del piñón. Trocoide .....	21
2.2. Piñón cortador .....	22
2.3. Engranajes de dentado interior .....	24
2.3.1. Geometría de la corona. Perfil de Evolvente .....	24
2.3.2. Geometría de la corona. Trocoide .....	26
2.4. Engrane de ruedas interiores de perfil de evolvente .....	27
<b>CAPÍTULO 3. RESTRICCIONES GEOMÉTRICAS .....</b>	<b>31</b>
3.1 Apuntamiento .....	32
3.2 Penetración en el piñón .....	33
3.3 Engrane en vacío .....	34
3.4 Interferencia Primaria .....	36
3.4.1 Interferencia Primaria Piñón .....	36
3.4.2 Interferencia Primaria Corona .....	38
3.5 Interferencia Secundaria .....	39
3.6 Holgura .....	42
<b>CAPÍTULO 4. MODELO GENERAL DE DISTRIBUCIÓN DE CARGA .....</b>	<b>43</b>
4.2 Potencial de deformación de un diente de engranaje .....	44
4.3 Parámetros para el cálculo del potencial .....	52
4.3.1. Piñón .....	52
4.3.2. Corona .....	54
4.4 Potencial de deformación de una pareja de dientes en contacto .....	57
4.5 Potencial de deformación de varias parejas de dientes en contacto .....	58
4.6 Reparto de Carga .....	61

CAPÍTULO 5. POTENCIAL UNITARIO INVERSO APROXIMADO .....	63
5.1 Introducción .....	63
5.2 Determinación de los puntos característicos .....	64
5.3 Función aproximada Coseno .....	68
5.4 Función aproximada Coseno <sup>3</sup> .....	75
CAPÍTULO 6. ESTUDIO DE FIABILIDAD .....	79
6.1 Introducción .....	80
6.2 Análisis de la función “coseno” .....	81
6.2.1. Correlación $R^2$ potencial unitario inverso .....	81
6.2.2. Máximo error .....	83
6.2.3. Error en los extremos .....	87
6.2.4. Error localización del máximo .....	88
6.2.5. Máximo error en el reparto de carga .....	89
6.3 Análisis de la función “coseno <sup>3</sup> ” .....	90
6.3.1. Correlación $R^2$ potencial unitario inverso .....	90
6.3.2. Máximo error .....	92
6.3.3. Error en los extremos .....	95
6.3.4. Error localización del máximo .....	97
6.3.5. Máximo error en el reparto de carga .....	98
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES .....	99
7.1 Función “coseno” .....	100
7.2 Función “coseno <sup>3</sup> ” .....	103
BIBLIOGRAFÍA .....	107
APÉNDICE I. Programa Mathcad potencial unitario inverso .....	111
APÉNDICE II. Programa Mathcad reparto de carga .....	115
APÉNDICE III. Geometría del perfil de evolvente .....	121
<i>Curriculum Vitae</i> del autor .....	159



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres latinos

$a$	Adendo del engranaje, altura de cabeza
$b$	Dedendo del engranaje, altura de pie. Ancho de cara Coeficiente de la aproximación del potencial unitario inverso
$C$	Distancia entre centros nominal
$e(y)$	Espesor del diente
$E$	Módulo de elasticidad Punto de entronque entre evolvente y trocoide
$f$	Fuerza por unidad de longitud
$F$	Fuerza en dirección normal al perfil
$F_n$	Carga normal
$F_t$	Carga tangencial nominal
$G$	Módulo de elasticidad transversal
$h$	Holgura de paso
$h_a$	Altura de pie de la herramienta (ISO), adendo de la herramienta
$h_{a0}$	Altura de cabeza de la herramienta (ISO), dedendo de la herramienta
$k_h$	Rigidez de contacto de Hertz
$l$	Longitud de la línea de contacto
$m$	Módulo de la herramienta
$m_t$	Módulo equivalente de la sección frontal
$m_n$	Módulo equivalente de la sección normal
$M$	Momento flector
$n$	Relación de transmisión
$N$	Esfuerzo normal
$P$	Potencia transmitida
$r$	Coordenada polar de la evolvente o trocoide de circunferencia
$r_{a1}, r_{a2}$	Radio exterior del piñón y de la rueda
$r_{b1}, r_{b2}$	Radio de base del piñón y de la rueda
$r_{c1}, r_{c2}$	Radio en el punto de contacto del piñón y de la rueda

$r_E$	Radio de entronque evolvente-trocoide
$r_f$	Radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta
$r_p$	Radio primitivo de referencia
$r_r$	Radio de la circunferencia de rodadura
$r_{cus}$	Radio de contacto único superior
$r_{cui}$	Radio de contacto único inferior
$r_{fin}$	Radio de finalización del engrane
$R$	Reparto de carga
$R^2$	Coefficiente de determinación
$T$	Esfuerzo cortante
$u$	Potencial unitario
$U$	Potencial total de deformación de una pareja de dientes
$U_x$	Potencial de una pareja de dientes debido a flexión
$U_n$	Potencial de una pareja de dientes debido a compresión
$U_s$	Potencial de una pareja de dientes debido a cortadura
$U_{ev}$	Potencial de una pareja de dientes en el tramo de evolvente
$U_{tr}$	Potencial de una pareja de dientes en el tramo de trocoide
$U_T$	Potencial total de deformación
$v$	Potencial unitario inverso
$x_1, x_2$	Factor de desplazamiento de piñón y rueda
$z_1, z_2$	Número de dientes de piñón y rueda

#### Caracteres griegos

$\alpha_c$	Ángulo de carga
$\alpha_n$	Ángulo de presión normal
$\alpha_t$	Ángulo de presión transversal estándar
$\alpha'_t$	Ángulo de presión de funcionamiento en la sección transversal
$\beta$	Ángulo de hélice de referencia
$\gamma$	Espesor angular del diente a un radio $r$
$\gamma_b$	Espesor angular del diente en la circunferencia de base
$\gamma_p$	Espesor angular del diente en la circunferencia primitiva
$\varepsilon_\alpha$	Grado de recubrimiento transversal o en la sección frontal

$\varepsilon'_\alpha$	Grado de recubrimiento transversal ficticio
$\varepsilon_\beta$	Grado de recubrimiento en el salto
$\eta$	Coordenada angular relativa de evolvente
$\theta_1, \theta_2$	Ángulo de giro del piñón y de la rueda
$\theta_{E1}, \theta_{E2}$	Ángulo de giro del piñón/rueda correspondiente al punto de entronque
$\theta_{a1}, \theta_{a2}$	Ángulo de giro correspondiente al radio de cabeza del piñón/rueda
	Ángulo de giro para el punto más alto del engrane
$\theta_{inn}$	Ángulo de giro para el punto más bajo del engrane
$\rho$	Radio de curvatura relativo
$\omega$	Velocidad angular
$\xi$	Parámetro adimensional de la posición de giro
$\xi_a$	Parámetro adimensional para el punto más alto del engrane
$\xi_{inn}$	Parámetro adimensional para el punto más bajo del engrane
$\xi_m$	Parámetro adimensional para el valor máximo de la función $V(\xi)$
$\xi_{cui}$	Parámetro adimensional para el punto de contacto único inferior
$\xi_{cus}$	Parámetro adimensional para el punto de contacto único superior
$\varphi$	Parámetro de las ecuaciones del perfil en la base del diente
	Variable que determina el punto de la herramienta que talla la trocoide

## Subíndices

0	Piñón cortador
1	Piñón
2	Rueda
$h$	Herramienta de tallado
$a$	Cabeza del diente
$ev$	Evolvente
$f, t$	Plano frontal o transversal
$inn$	Punto más bajo del engrane
$n$	Plano normal
$tro$	Trocoide



# Capítulo 1

## Introducción

Se conoce como engranaje al mecanismo empleado para transmitir potencia de un componente a otro mediante ruedas dentadas. Los engranajes interiores están constituidos por dos ruedas dentadas, de las cuales la mayor se denomina corona y la menor, piñón. Un engranaje sirve para transmitir movimiento circular entre 2 ejes mediante el contacto de sus ruedas dentadas. Una de las aplicaciones más importantes de los engranajes es la transmisión del movimiento desde el eje de una fuente de energía, como puede ser un motor, hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo. La rueda que está conectada por la fuente de energía es conocida como engranaje motor o conductor y la otra que está conectada al eje que debe recibir el movimiento del eje motor se denomina engranaje conducido. Cuando el sistema está compuesto de más de un par de ruedas dentadas encadenadas, se denomina tren de engranajes.

Los engranajes se pueden emplear para la transmisión de movimiento de un punto a otro, para variar la dirección o el sentido del movimiento, para variar la velocidad del movimiento transmitido, etc.

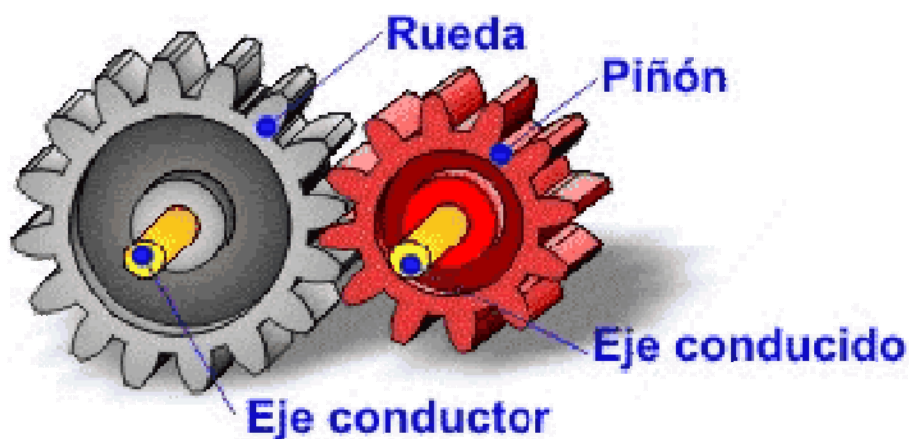


Figura 1.1. Engranaje.

La principal ventaja que tienen las transmisiones por engranaje es que debido a que la transmisión se realiza mediante dientes en contacto íntimo, éstos no patinan como las poleas, con lo que se obtiene exactitud en la relación de transmisión a nivel macroscópico.

## 1.1 Historia

Desde épocas muy remotas se han utilizado cuerdas y elementos fabricados en madera para solucionar los problemas de transporte, impulsión, elevación y movimiento. Nadie sabe a ciencia cierta dónde ni cuándo se inventaron los engranajes, en la literatura de la antigua China, Grecia, Turquía y Damasco ya se mencionan engranajes, pero no aportan muchos detalles de los mismos.

El mecanismo de engranajes más antiguo que ha llegado a nuestros días es el mecanismo de Anticitera. Dicho mecanismo consiste en una calculadora astronómica datada entre el año 150 y 100 a. C. y está compuesta por al menos 30 engranajes de bronce con dientes triangulares. Presenta características tecnológicas avanzadas como por ejemplo trenes de engranajes epicicloidales. Por otro lado, a Arquímedes se le suele considerar uno de los inventores de los engranajes porque diseñó un tornillo sin fin.



Figura 1.2. Fragmentos del mecanismo de Anticitera recuperados.

En China también se han conservado ejemplos muy antiguos de máquinas con engranajes. Un ejemplo es el llamado "carro que apunta hacia el Sur" (120-250 d. C.), un ingenioso mecanismo que mantenía el brazo de una figura humana apuntando siempre hacia el Sur gracias al uso de engranajes diferenciales epicicloidales.

En la era más reciente, se le atribuye al francés Phillipe de Lahire ser el primero en concebir el diente de perfil en evolvente hacia 1695, muy poco tiempo después de que Roemer concibiera el epicicloidal. Sin embargo, la primera aplicación práctica del diente en evolvente fue debida al suizo Leonhard Euler (1707). Por su parte, Robert Willis (1800-1875), considerado uno de los primeros ingenieros mecánicos, fue el que obtuvo la primera aplicación práctica de la epicicloide al emplearla en la construcción de una serie de engranajes intercambiables así como otras realizaciones prácticas como la creación del odontógrafo, aparato que sirve para el trazado simplificado del perfil del diente de evolvente.

En 1874, el norteamericano William Gleason inventó la primera fresadora de engranajes cónicos y gracias a la acción de sus hijos, convirtió a su empresa Gleason Works en una de los fabricantes de máquinas herramientas más importantes del mundo. De la misma forma, el inventor alemán Robert Hermann Pfauter (1854-1914), inventó y patentó una máquina universal de dentar engranajes rectos y helicoidales por fresa madre. A raíz de este invento y otros muchos inventos y aplicaciones que realizó sobre el mecanizado de engranajes, fundó la empresa Pfauter Company que, con el paso del tiempo, se ha convertido en una multinacional fabricante de todo tipo de máquinas-herramientas.

A finales del siglo XIX, coincidiendo con la época dorada del desarrollo de los engranajes, el inventor y fundador de la empresa Fellows Gear Shaper Company, Edwin R. Fellows, inventó un método revolucionario para mecanizar tornillos sin fin glóbulos tales como los que se montaban en las cajas de dirección de los vehículos antes de que fuesen hidráulicas.

## **1.2 Aplicaciones**

Existe una gran variedad de formas y tamaños de engranajes, desde los más pequeños usados en relojería e instrumentos científicos a los de grandes dimensiones, como los reductores de velocidad de las turbinas de vapor de los buques, en el accionamiento de los hornos y molinos de las fábricas de cemento, etc.

El campo de aplicación de los engranajes es prácticamente ilimitado. Los encontramos en las centrales de producción de energía eléctrica, en los elementos de transporte terrestre como locomotoras y automóviles; transporte marítimo, aviones, en la industria siderúrgica: (laminadores, transportadores, etc.), minas y astilleros, fábricas, máquinas-herramientas, etc., hasta los más simples movimientos de accionamiento manual.

Toda esta gran variedad de aplicaciones del engranaje puede decirse que tiene por única finalidad la transmisión de la rotación o giro de un eje a otro distinto, reduciendo o aumentando la velocidad del primero. Entre las aplicaciones más comunes encontramos:



- Bomba hidráulica.

Una bomba hidráulica es un dispositivo tal que recibiendo energía mecánica de una fuente exterior la transforma en una energía de presión transmisible de un lugar a otro de un sistema hidráulico a través de un líquido. Las bombas hidráulicas son los elementos encargados de impulsar el aceite o líquido hidráulico, transformando la energía mecánica rotatoria en energía hidráulica.

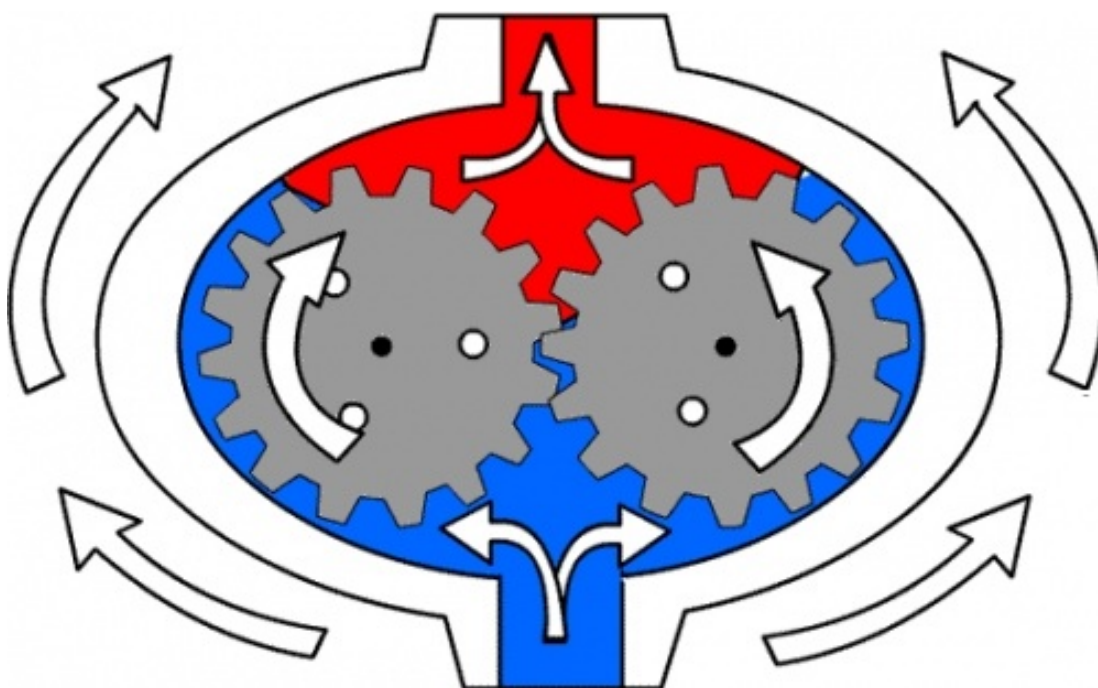


Figura 1.3. Bomba hidráulica.

- Mecanismo diferencial.

El mecanismo diferencial está constituido por una serie de engranajes dispuestos de tal forma que permite a las dos ruedas motrices de los vehículos girar a velocidad distinta cuando circulan por una curva. Así si el vehículo toma una curva a la derecha, las ruedas exteriores giran más rápido que las interiores, ya que los satélites encuentran mayor dificultad en mover los planetarios de los semiejes de la derecha porque empiezan a rotar alrededor de su eje haciendo girar los planetarios de la izquierda a una velocidad ligeramente superior. De esta forma provocan una rotación más rápida del semieje y de la rueda motriz izquierda.

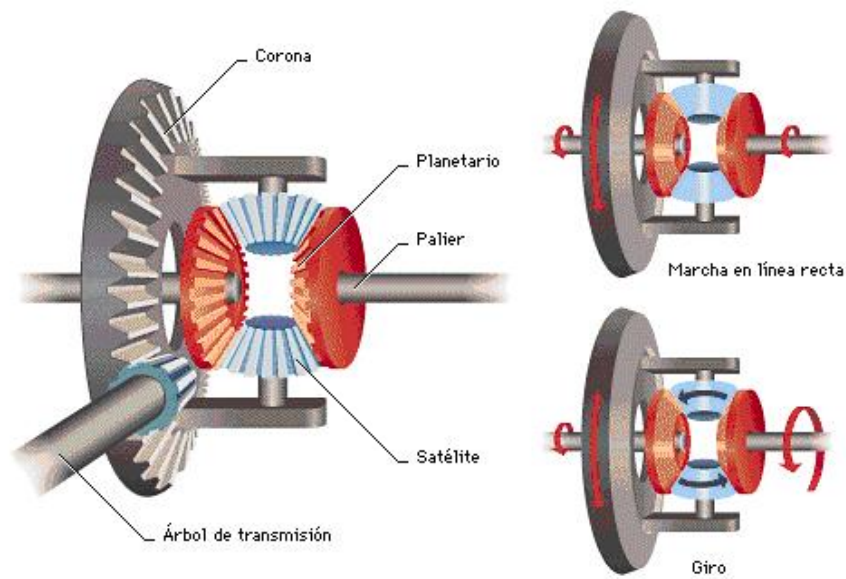


Figura 1.4. Mecanismo diferencial.

- Caja de velocidades

La caja de velocidades es un elemento común de los vehículos de motor de combustión. Un conjunto de engranajes permite amoldar el par ofrecido por el motor con la velocidad del vehículo.

Los dientes de los engranajes de las cajas de cambio son helicoidales y sus bordes están redondeados para no producir ruido o rechazo cuando se cambia de velocidad. La fabricación de los dientes de los engranajes es muy cuidada para que sean de gran duración. Los ejes del cambio están soportados por rodamientos de bolas y todo el mecanismo está sumergido en aceite denso para mantenerse continuamente lubricado.

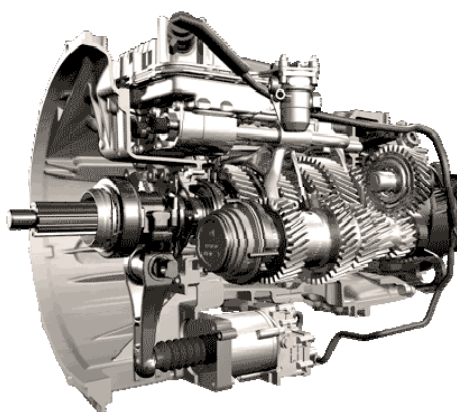


Figura 1.5. Caja de cambios.

- Reductores de velocidad

Los reductores de velocidad son mecanismos que transmiten movimiento entre un eje que rota a alta velocidad, generalmente un motor, y otro que rota a menor velocidad, por ejemplo una herramienta. Se componen de juegos de engranajes de diámetros diferentes o bien de un tornillo sin fin y corona. De la misma forma, también encontramos multiplicadores de velocidad.

### 1.3 Tipos de engranajes

La principal clasificación de los engranajes se efectúa según la disposición de sus ejes de rotación y según los tipos de dentado. Según estos criterios existen los siguientes tipos de engranajes:

- Ejes paralelos
  - o Cilíndricos de dientes rectos
  - o Cilíndricos de dientes helicoidales
  - o Doble helicoidales

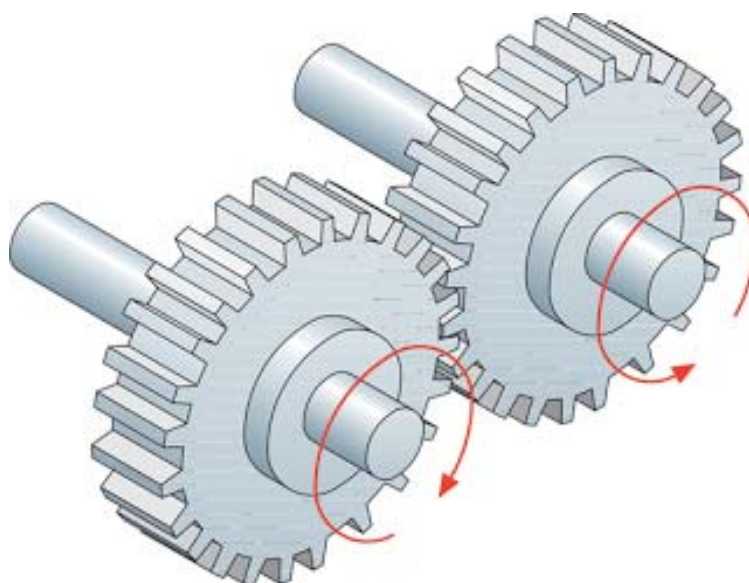


Figura 1.6. Engranaje de ejes paralelos.

- Ejes perpendiculares
  - o Helicoidales cruzados
  - o Cónicos de dientes rectos
  - o Cónicos de dientes helicoidales
  - o Cónicos hipoides
  - o De rueda y tornillo sin fin



Figura 1.7. Engranaje de ejes perpendiculares.

Por aplicaciones especiales se pueden citar:

- Planetarios
- Interiores de cremallera

Por la forma de transmitir el movimiento:

- Transmisión simple
- Transmisión con engranaje
- Transmisión compuesta.
- Transmisión mediante cadena o patea dentada
- Mecanismo piñón cadena

## 1.4 Engranajes cilíndricos de dientes rectos

Los engranajes cilíndricos rectos son el tipo de engranaje más simple que existe. Se utilizan generalmente para velocidades pequeñas y medias; a grandes velocidades, si no son rectificadas, o ha sido corregido su tallado, producen ruido cuyo nivel depende de la velocidad de giro que tengan. Principales definiciones de los engranajes rectos:

- Diente: son los que realizan el esfuerzo de empuje y transmiten la potencia desde los ejes motrices a los ejes conducidos. El perfil del diente, o sea la forma de sus flancos, está constituido por dos curvas evolventes de círculo, simétricas respecto al eje que pasa por el centro del mismo.
- Módulo: el módulo de un engranaje es una característica de magnitud que se define como la relación entre la medida del diámetro primitivo expresado en milímetros y el número de dientes. El valor del módulo se fija mediante cálculo de resistencia de materiales en virtud de la potencia a transmitir y en función de la relación de transmisión que se establezca. El tamaño de los dientes está normalizado. El módulo está indicado por números. Dos engranajes que engranen tienen que tener el mismo módulo.
- Circunferencia primitiva: Con relación a la circunferencia primitiva se determinan todas las características que definen los diferentes elementos de los dientes de los engranajes.
- Paso circular: es la longitud de la circunferencia primitiva correspondiente a un diente y un vano consecutivos.
- Espesor del diente: es el grosor del diente en la zona de contacto, o sea, del diámetro primitivo.
- Número de dientes: es el número de dientes que tiene el engranaje. Se simboliza como ( $Z$ ). Es fundamental para calcular la relación de transmisión.
- Diámetro exterior: es el diámetro de la circunferencia que limita la parte exterior del engranaje.
- Diámetro interior: es el diámetro de la circunferencia que limita el pie del diente.
- Pie del diente: también se conoce con el nombre de dedendum. Es la parte del diente comprendida entre la circunferencia interior y la circunferencia primitiva.

- Cabeza del diente: también se conoce con el nombre de addendum. Es la parte del diente comprendida entre el diámetro exterior y el diámetro primitivo.
- Flanco: es la cara interior del diente, es su zona de rozamiento.
- Altura del diente: es la suma de la altura de la cabeza (addendum) más la altura del pie (dedendum).
- Ángulo de presión: el que forma la línea de acción con la tangente a la circunferencia de paso.
- Largo del diente: es la longitud que tiene el diente del engranaje
- Distancia entre centro de dos engranajes: es la distancia que hay entre los centros de las circunferencias de los engranajes.
- Relación de transmisión: es la relación de giro que existe entre el piñón conductor y la rueda conducida. La relación de transmisión puede ser reductora de velocidad o multiplicadora de velocidad. La relación de transmisión recomendada tanto en caso de reducción como de multiplicación depende de la velocidad que tenga la transmisión con los datos orientativos que se indican:
- 

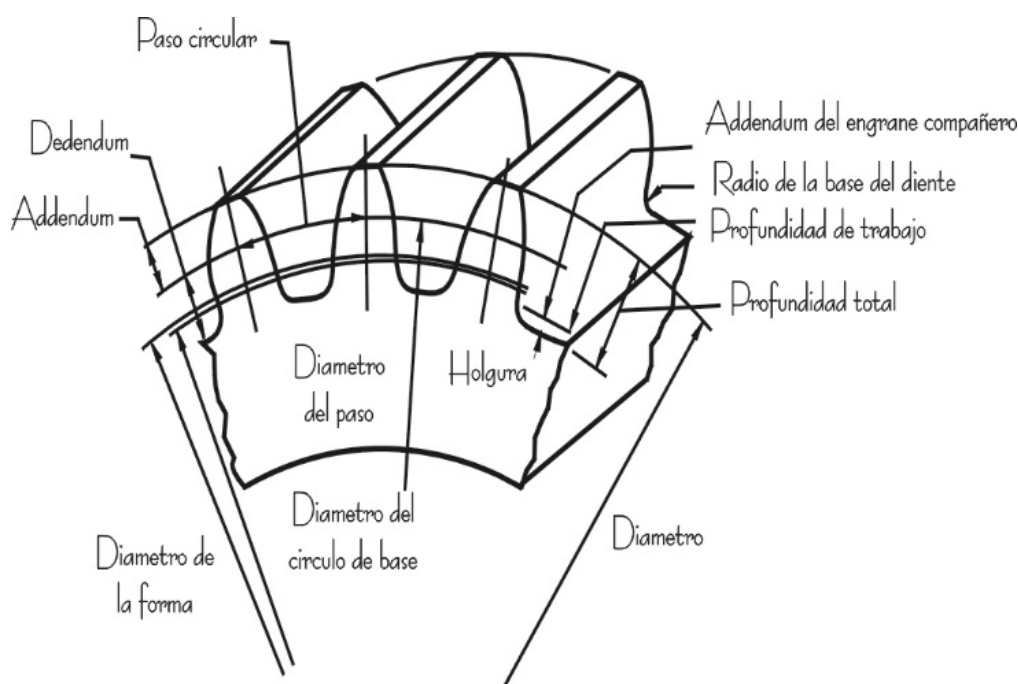


Figura 1.8. Engranaje cilíndrico de dientes rectos.

## 1.5 Engranajes Interiores

Los engranajes interiores o anulares son variaciones del engranaje recto en los que los dientes están tallados en la parte interior de un anillo o de una rueda con reborde, en vez de en el exterior. Los engranajes interiores suelen ser impulsados por un piñón, (también llamado piñón Sol, que es un engranaje pequeño con pocos dientes). Este tipo de engranaje mantiene el sentido de la velocidad angular.

Debido a que tienen más dientes en contacto que los otros tipos de reductores, son capaces de transferir / soportar más par por lo que su uso en la industria cada vez está más extendido.

Ventajas:

- Acción deslizante disminuida debido a la configuración interior del diente del engranaje.
- El deslizamiento disminuido se traduce en menos fricción y menos desgaste del diente.
- Los engranajes de dientes interiores podrían ser operados en una posición fija o una posición de rotación libre, con un piñón fijo.

Como cualquier engranaje, los engranajes interiores son afectados por la tensión de contacto de Hertz y agotamiento de los dientes, (en inglés pitting y bending).



Figura 1.9. Engranaje interior.

## 1.6 Problemática de los engranajes

Las dos principales fuentes de fallo en un diente de engrane son por la tensión de contacto de Hertz y flexión, (llamados también pitting y bending en inglés), esto es debido a que las fuerzas lógicas durante la transferencia de la fuerza por el engranaje, la tensión de contacto de diente contra diente y la fuerza que deben de resistir los dientes, tanto el que transfiere como el que recibe.

Debido a la tensión de Hertz en la superficie de los dientes, esta área se despasiva, una de las cuales se vuelve anódica, mientras la otra se vuelve catódica, conduciendo esta zona a una corrosión galvánica localizada. Para minimizar el deterioro es necesario seleccionar el lubricante adecuado, tomando en cuenta no solo la potencia de la aplicación, así como la temperatura, ciclo de trabajo, etc.

La flexión solo puede minimizarse seleccionando los materiales adecuados y/o seleccionando más material para el diente, en otras palabras, seleccionando un engranaje más grande.

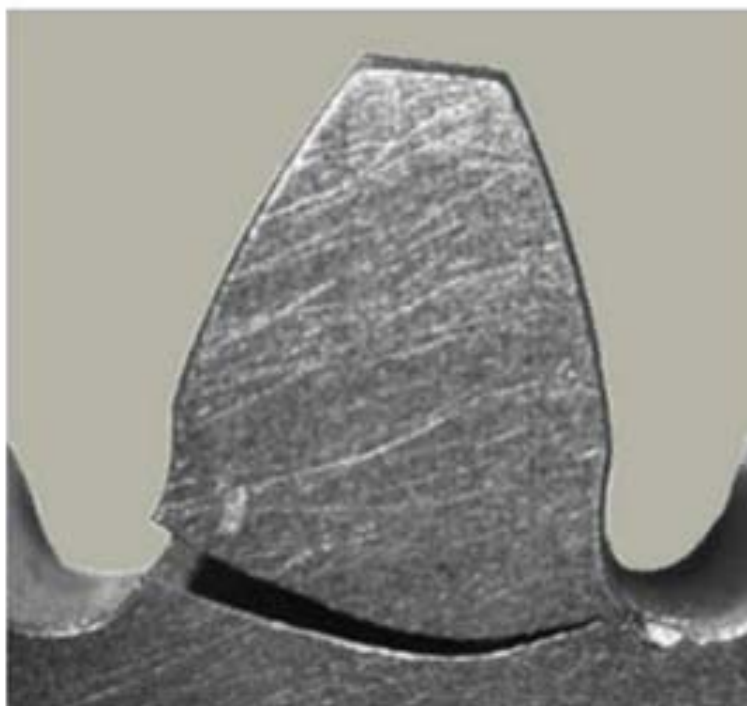


Figura 1.10. Fallo por flexión.



Como todo elemento técnico el primer fallo que puede tener un engranaje es que no haya sido calculado con los parámetros dimensionales y de resistencia adecuada, con lo cual no es capaz de soportar el esfuerzo al que está sometido y se deteriora o rompe con rapidez.

El segundo fallo que puede tener un engranaje es que el material con el que ha sido fabricado no reúne las especificaciones técnicas adecuadas principalmente las de resistencia y tenacidad.

También puede ser causa de deterioro o rotura si el engranaje no se ha fabricado con las cotas y tolerancias requeridas o no ha sido montado y ajustado en la forma adecuada dando lugar a las conocidas interferencias.

### **1.7 Modelo de cálculo actual**

Los sistemas de engranajes están normalizados y regulados por dos normativas internacionales que son: AGMA (American Gear Manufacturers Association) e ISO (International Organization for Standardization).

Para el cálculo del reparto de carga ambas se basan en modelos simples de la teoría de la elasticidad para obtener los esfuerzos (tensión de flexión y presión superficial) en los dientes para cada instante y parten de la hipótesis de reparto uniforme de la carga a lo largo de la línea de contacto. Esta hipótesis no tiene en cuenta que la rigidez de la pareja de dientes es diferente para cada punto de contacto por lo que se ven obligadas a introducir unos factores de corrección de forma que los valores calculados de la tensión en su punto más desfavorable se aproximen en mayor medida a los obtenidos experimentalmente.

Por otro lado, ambas normas discrepan en la longitud de la línea de contacto a considerar. Mientras que la AGMA considera la longitud mínima de contacto producida durante el engrane, ISO emplea una longitud efectiva de contacto que además es diferente para el cálculo a flexión y a presión superficial. Incluso, aunque ambas normas parten de las mismas hipótesis de

partida (contacto de Hertz y reparto uniforme de la carga), discrepan en la localización del punto de máxima presión superficial.

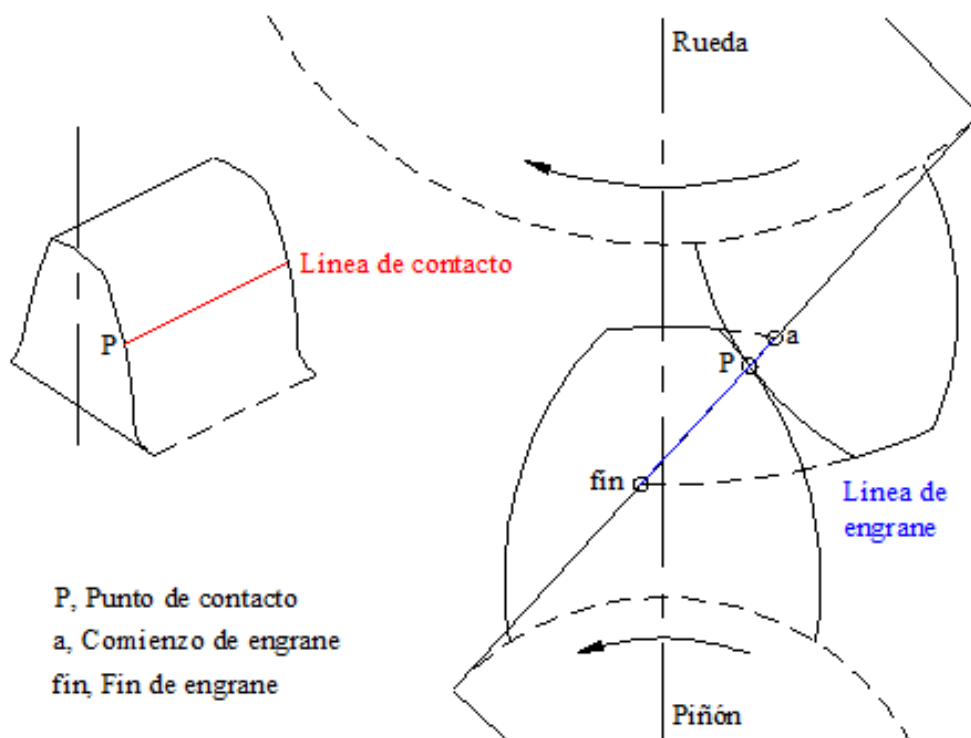


Figura 1.11. Engrane en una transmisión de engranajes cilíndricos de dientes rectos.

Del mismo modo, los modelos clásicos de cálculo del rendimiento suelen utilizar la hipótesis de reparto uniforme de la carga, en lugar del valor real de la carga en cada punto de contacto. Dicha hipótesis de reparto de carga uniforme, aunque ampliamente aceptada, se sabe que no es correcta y que es origen de fuentes de error, por ello, numerosos autores han estudiado las variaciones de la rigidez en función del punto de contacto del perfil del diente

Todo ello implica la necesidad de abordar un estudio detallado de la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto que sea más próximo a la realidad y, tomándolo como partida, plantear modelos de comportamiento frente a presión superficial y a rotura en la base, entre otros.

## **1.8 Objeto del TFG. Nuevo modelo de cálculo**

En trabajos previos [20], [31], [34] se ha desarrollado un modelo de distribución de carga más realista, que ha sido obtenido a partir de la condición de mínimo potencial de deformación elástica y es válido para dentado exterior. Este modelo, que ha sido contrastado mediante análisis por el método de los elementos finitos y del que se ha conseguido una formulación analítica sencilla muy aproximada, predice con elevada precisión las condiciones críticas de carga y elimina las discrepancias que surgen cuando la distribución se supone uniforme.

El objeto de este Trabajo de Fin de Grado consiste en la determinación y análisis de la curva de potencial unitario inverso para una pareja de dientes de engranaje interior y la propuesta de formulaciones aproximadas de fácil obtención y operación, así como el estudio de fiabilidad de las mismas ante la variación de los parámetros principales.

Para ello, se ha partido de las relaciones geométricas de los dientes de perfil de evolvente interior y exterior, resumidas en el capítulo 2, así como la formulación del potencial inverso, capítulo 4, de forma que se obtiene la curva del potencial unitario inverso mediante un programa de cálculo numérico como es Mathcad y se procede a su estudio y propuesta de alternativas aproximadas.



# Capítulo 2

## Geometría del perfil de evolvente

En el presente capítulo se presentan las relaciones geométricas de los dientes de perfil de evolvente. En concreto, se definen las principales relaciones para dentado exterior tallado con cremallera y dentado interior tallado con piñón cortador que se van a emplear para el cálculo del potencial de deformación.

El objeto de este Trabajo de Fin de Grado no es la definición y demostración de la geometría obtenida al tallar los engranajes, bien con cremallera, bien con piñón cortador, ya que está sobradamente explicado en trabajos anteriores como el “Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de dentado interior” de Silvia Aguiriano Sánchez, cuyo capítulo de geometría se incluye en el apéndice 3, con la corrección de algunas erratas encontradas, para su consulta por parte del lector. Por ello, con el ánimo de simplificar la lectura y entendimiento de este Trabajo, se expone a continuación un resumen la geometría del perfil de evolvente con

las principales relaciones geométricas para posteriormente analizar el potencial unitario inverso y las curvas aproximadas propuestas.

## 2.1. Engranajes de dentado exterior tallados con cremallera

En este apartado, se definen las ecuaciones de la geometría del piñón tallado a partir de los parámetros geométricos de la cremallera utilizada para tallarla. En este caso se trata de una cremallera con perfiles rectos, que genera un perfil de evolvente.

### 2.1.1. Geometría de la cremallera

Los parámetros dimensionales que definen la cremallera son:

- **Línea de referencia** (línea primitiva): Recta trazada siguiendo la dirección del eje longitudinal de la herramienta, a una altura tal, que su intersección con las rectas que forman los flancos de los dientes determina en ella segmentos que representan el espesor de los dientes y de los huecos, o intervalos entre dientes, de forma que el segmento correspondiente al espesor del diente sea igual al del hueco.
- **Ángulo de presión** ( $\alpha_n$ ): Ángulo que forman los flancos de los dientes con la perpendicular a la línea primitiva.
- **Paso circular** ( $p$ ): Distancia sobre la línea de referencia entre dos puntos semejantes de dos dientes consecutivos. Esta misma distancia se hace igual a  $\pi$  por el módulo, de forma que:

$$p = m\pi$$

- **Módulo** ( $m$ ): El módulo es una característica de magnitud, y representa la unidad del sistema de engranajes normalizados. Expresa el número de milímetros del diámetro primitivo, que corresponden a cada diente de la rueda.
- **Adendo** ( $mh_a$ ): Altura de pie de la cremallera. Distancia desde la línea primitiva al plano de pie de la cremallera. Se convertirá en la altura de cabeza del engranaje generado. ( $h_a$ : factor de adendo)

- **Dedendo** ( $mh_{a0}$ ): Altura de cabeza de la herramienta. Distancia desde la línea primitiva al plano de cabeza de la cremallera. Se convertirá en la altura de pie del engranaje generado. ( $h_{a0}$ : factor de dedendo)
- **Radio de acuerdo de cabeza** ( $mr_f$ ): También llamado radio de cabeza de la herramienta, está limitado por el ángulo de presión, adendo y dedendo.

### 2.1.2. Geometría del piñón. Perfil de Evolvente

El piñón generado por la cremallera corresponde a un piñón de dentado exterior cilíndrico. Sus principales relaciones geométricas son las siguientes.

- **Circunferencia primitiva**: circunferencia del piñón que rueda sin deslizar sobre el plano de la herramienta al que es tangente

$$r_{p1} = \frac{mz_1}{2}$$

- **Circunferencia base**: circunferencia tangente a la perpendicular de la tangente del perfil de evolvente en cada punto. También se puede definir como la circunferencia tangente a la línea de presión en el punto de contacto de la pareja de engranajes

$$r_{b1} = r_{p1} \cos \alpha_n$$

- **Engranajes helicoidales**: en ruedas helicoidales, la herramienta incide sobre el cilindro a tallar, de forma que sus caras frontales forman un ángulo  $\beta$ , con las generatrices de dicho cilindro, conocido como ángulo de hélice.

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{1}{\cos \beta} \operatorname{tg} \alpha_n$$

$$m_t = \frac{m}{\cos \beta}$$

Se puede hacer una generalización de las expresiones obtenidas para engranajes rectos referidas al radio primitivo y radio de base, así pues, en el caso de engranajes helicoidales tenemos:

$$r_{p1} = \frac{m_t z_1}{2} = \frac{m z_1}{2 \cos \beta}$$

$$r_{b1} = r_{p1} \cos \alpha_t = \frac{m z_1}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t$$

- **Desplazamiento:** distancia entre el plano primitivo de la herramienta y la circunferencia primitiva del piñón durante el tallado. El desplazamiento se expresa como un número de veces el módulo, el cual se representará por  $x$ .
- **Ecuaciones paramétricas del perfil de evolvente:** el perfil generado por el flanco recto de la herramienta de tallado es una evolvente de circunferencia.

$$r_{ev1} = r_{b1} \sqrt{\theta_1^2 + 1}$$

$$\eta_{ev1} = \theta_1 - \operatorname{arctg} \theta_1$$

- **Espesor del diente:** espesor del diente en cada punto. Se calcula el ángulo abarcado por el espesor del diente a un radio dado mediante:



$$\gamma_1 = \frac{\pi}{z_1} + \frac{4x_1}{z_1} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1} \right)$$

Radio primitivo

$$\gamma_{p1} = \frac{\pi}{z_1} + \frac{4x_1}{z_1} \operatorname{tg} \alpha_n$$

### 2.1.3. Geometría del piñón. Trocoide

Se llama trocoide a la curva descrita por los puntos del acuerdo de la cabeza de la herramienta, identificados por el parámetro  $\varphi$ , sobre la rueda generada.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse de cabeza son:

$$x = r_x \cos \varphi = \frac{r_f}{\cos \beta} \cos \varphi$$

$$y = r_y \operatorname{sen} \varphi = r_f \operatorname{sen} \varphi$$

El punto de acuerdo que se talla en un instante dado es aquél cuya normal a la elipse de cabeza pasa por el punto de rodadura:

$$r_{tro1} = \sqrt{(r_{p1} - B)^2 + \left( \frac{B \cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2}$$

Donde:

$$B = m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \operatorname{sen} \varphi)$$

El parámetro de la trocoide  $\varphi$  estará limitado por el valor del ángulo de presión  $\alpha_n$  y  $\pi/2$ , para los casos en los que no se produce penetración, que son los casos analizados.

El ángulo de la trocoide  $\eta_{tro}$ , es:

$$\eta_{tro1} = \theta^* - (\alpha_t - \varepsilon)$$

Donde:

$$\varepsilon = \text{atan} \left( \frac{B \cos \beta}{(r_{p1} - B) \tan \varphi} \right)$$

$$\theta^* = \tan \alpha_t + \frac{1}{r_{p1}} \left( mr_{f1} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} - A - \frac{B \cos \beta}{\tan \varphi} \right)$$

$$A = \frac{mr_f - \delta_0}{\cos \alpha_n \cos \beta} + m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1}) \tan \alpha_t$$

Finalmente, sustituyendo todos estos términos en las ecuaciones paramétricas de la trocoide se obtiene:

$$r_{tro1} = \sqrt{\left( r_{p1} - m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \sin \varphi) \right)^2 + \left( \frac{\cos \beta}{\tan \varphi} m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \sin \varphi) \right)^2}$$

## 2.2. Piñón cortador

La única diferencia entre la geometría de un engranaje de dentado exterior y un piñón cortador estriba en el acuerdo de cabeza de este último, que no existe en el primero.

La geometría del piñón cortador vendrá definida por los mismos parámetros que definen la geometría de las ruedas de perfil de evolvente, como son: el módulo  $m$ , el número de dientes  $z_0$ , el ángulo de presión  $\alpha_0$ , la altura de cabeza o adendo  $h_{a0}$ , el desplazamiento con que se talló el piñón cortador  $x_0$  y el radio de acuerdo de cabeza  $r_{f0}$ . Los restantes parámetros geométricos, radio de base  $rb_0$ , radio primitivo  $rp_0$ , espesor angular  $\gamma_0$ , etc., pueden extraerse de las

expresiones para engranajes tallados con cremallera. El subíndice  $O$  hace referencia al piñón cortador.

- **Circunferencia primitiva:**

$$r_{p0} = \frac{mz_0}{2}$$

- **Circunferencia base:**

$$r_{b0} = r_{p0} \cos \alpha_n$$

- **Radio de cabeza:**

$$r_{a0} = r_{p0} + mx_0 + mh_{a0}$$

Sin embargo, debido al acuerdo de cabeza, el punto más alto del perfil activo del diente del piñón cortador no estará situado a una distancia  $r_{a0}$  del centro, sino  $r_{A0}$  inferior. Si se designa por  $C$ , el centro de acuerdo, y por  $r_c$ , la distancia de  $C$  al centro del piñón cortador, siendo esta distancia igual a:

$$r_c = r_{a0} - mr_{f0}$$

se tiene que la distancia  $r_{A0}$  vale:

$$r_{A0} = \sqrt{r_{b0}^2 + \left( mr_{f0} + \sqrt{r_c^2 - r_{b0}^2} \right)^2} = \sqrt{r_c^2 + mr_{f0}^2 + 2mr_{f0} \sqrt{r_c^2 - r_{b0}^2}}$$

El ángulo  $\eta_{c0}$ , ángulo polar del punto  $C$  con respecto al origen de la evolvente y el ángulo  $\theta_{A0}$ :

$$\theta_{A0} = \frac{1}{r_{b0}} \left( mr_{f0} + \sqrt{r_c^2 - r_{b0}^2} \right) = \frac{mr_{f0}}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

$$\eta_{c0} = \theta_{A0} - \arccos \frac{r_{b0}}{r_c} = \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1} - \arctg \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

### 2.3. Engranajes de dentado interior

En engranes interiores, la rueda va dentada interiormente y sus dientes presentan el contacto por su parte cóncava. Estos engranajes son tallados no por una cremallera, sino por un piñón cortador, descrito en el epígrafe anterior.

#### 2.3.1. Geometría de la corona. Perfil de Evolvente

- **Angulo de presión de generación:**

Si se designa por  $C_g$  la distancia entre centros de generación:

$$\cos \alpha_g = \frac{r_{b2} - r_{b0}}{C_g} = \frac{m(z_2 - z_0)}{2C_g \cos \beta} \cos \alpha_t$$

La expresión de los radios de rodadura en función de la distancia entre centros de generación es:

$$r_{r0} = \frac{z_0 C_g}{z_2 - z_0} = \frac{r_{b0}}{\cos \alpha_g}$$

$$r_{r2} = \frac{z_2 C_g}{z_2 - z_0} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_g}$$

- **Perfil de evolvente:**

Las ecuaciones paramétricas del perfil generado por el piñón cortador:

$$r_{ev2} = r_{b2} \sqrt{\theta_2^2 + 1}$$

$$\eta_{ev2} = \theta_2 - \arctg \theta_2$$

- **Circunferencia primitiva:**

$$r_{p2} = \frac{mz_2}{2}$$

- **Circunferencia base:**

$$r_{b2} = r_{p2} \cos \alpha_g$$

- **Espesor del diente:** El espesor del diente de una rueda de dentado interior tallada por un piñón cortador que, a su vez, como se vio anteriormente, fue tallado por una cremallera.

Espesor del diente de la corona en el punto de rodadura:

$$\gamma_{r2} = \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g)$$

Con el espesor del diente en el punto de rodadura se obtiene la ecuación para obtener el ángulo de generación,  $\alpha_g$ , y posteriormente la distancia entre centros  $C_g$ :

$$(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) = (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + \frac{2(x_0 - x_2)}{(z_0 - z_2)} \operatorname{tg} \alpha_n$$

El espesor del diente en un punto cualquiera es:

$$\gamma_2 = \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2(\theta_2 - \operatorname{arctg} \theta_2)$$

### 2.3.2. Geometría de la corona. Trocoide

La parte activa de la herramienta genera un perfil de evolvente en la rueda, mientras que el acuerdo de la cabeza genera en la base del diente un perfil que no es de evolvente. El perfil generado en la base del diente se corresponderá con el de una trocoide.

$$r_{tro2} = \sqrt{\delta_2^2 + r_{r2}^2 + 2\delta_2 r_{r2} \operatorname{sen} \varphi}$$

El ángulo  $\eta_{tro2}$  respecto del origen de la evolvente, será:

$$\eta_{tro2} = \theta_2 - \alpha_g - \lambda_2$$

Donde:

$$\delta_2 = mr_f + \sqrt{r_c^2 - r_{r0}^2 \cos^2 \varphi} - r_{r0} \operatorname{sen} \varphi$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arcsen} \left( \frac{\delta_2}{r_{tro2}} \cos \varphi \right)$$

$$\theta_2 = \frac{r_{b0} \theta_0 + (r_{b2} - r_{b0}) \operatorname{tg} \alpha_g}{r_{b2}}$$

$$\theta_0 = \alpha_g + \eta_c + \varepsilon_2$$

$$\eta_c = \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

$$\varepsilon_2 = \arcsen\left(\frac{\delta_2 - mr_f}{r_c} \cos \varphi\right)$$

Finalmente:

$$\eta_{tro2} = \frac{1}{r_{b2}} [r_{b0}(\alpha_g + \eta_c + \varepsilon_2) + (r_{b2} - r_{b0}) \operatorname{tg} \alpha_g] - \alpha_g - \arcsen\left(\frac{\delta_2}{r_{tro2}} \cos \varphi\right)$$

En este caso el parámetro  $\varphi$  no determina por sí solo el punto de la herramienta que talla el punto de la trocoide caracterizado por  $\varphi$ , sino que es también función del ángulo de presión o de la distancia entre centros de generación. Por otro lado,  $\varphi$  varía entre  $\alpha_g$  y  $\pi/2$ .

## 2.4. Engrane de ruedas interiores de perfil de evolvente

Las propiedades funcionales son dependientes tanto de la rueda como del piñón que están engranando.

- **Radio de finalización de engrane:** el radio de finalización de engrane  $r_{fin}$ , será el que engrana con la cabeza de la rueda contraria.

$$r_{fin2}^2 = r_{b2}^2 + \left(C \operatorname{sen} \alpha'_t - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}\right)^2$$

Los radios de cabeza de piñón y rueda vienen definidos por:

$$r_{a2} = C + r_{p1} + mx_1 - mh_{a2}$$

$$r_{a1} = r_{p1} + mx_1 + mh_{a1}$$

Puesto que:

$$\theta = \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}$$

Se tiene:

$$\theta_{fin2} = \left(1 - \frac{r_{b1}}{r_{b2}}\right) tg \alpha'_t + \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \theta_{a1}$$

$$\theta_{fin1} = \left(1 - \frac{r_{b2}}{r_{b1}}\right) tg \alpha'_t + \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \theta_{a2}$$

- **Límites de intervalo de contacto:** ángulo de iniciación y finalización del contacto de una pareja de engranajes interiores.

$$\theta_c = [\theta_{inn}, \theta_{out}]$$

Donde:

$$\theta_{out} = \theta_a$$

Si no hay interferencia primaria ni penetración:

$$\theta_{inn} = \theta_{fin}$$

Si hay penetración en el piñón:

$$\theta_{inn1} = \theta_{SOI}$$

Nota: ver capítulo 3 para restricciones geométricas

- **Grado de recubrimiento:** el grado de recubrimiento de un par de engranajes se define como el número medio de dientes en contacto.

Grado de recubrimiento en la sección frontal,  $\epsilon_f$ :



$$\varepsilon_f = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02} = \frac{1}{2\pi} \left( z_1 \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - z_2 \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} + (z_2 - z_1) \operatorname{tg} \alpha'_t \right)$$

La componente correspondiente al recubrimiento en el salto es:

$$\Delta\varepsilon = \frac{F \operatorname{sen} \beta}{\pi m}$$

Grado de recubrimiento efectivo o total:

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \Delta\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left( z_1 \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - z_2 \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} + (z_2 - z_1) \operatorname{tg} \alpha_{wt} \right) + \frac{F \operatorname{sen} \beta}{\pi m}$$

- **Radio de contacto único superior e inferior:** el radio de contacto único es el punto en el cual un único diente soporta toda la carga transmitida por el engranaje.

$$\theta_{cui1} = \theta_{a1} - \frac{2\pi}{z_1}$$

$$\theta_{cui2} = \theta_{inn2} - \frac{2\pi}{z_2}$$

$$\theta_{cus1} = \theta_{inn1} + \frac{2\pi}{z_1}$$

$$\theta_{cus2} = \theta_{a2} + \frac{2\pi}{z_2}$$

En los casos nominales en los que no se producen restricciones geométricas (ver capítulo 3) se tiene que:

$$\theta_{inn} = \theta_{fin}$$



# Capítulo 3

## Restricciones geométricas

A la hora de diseñar una pareja de engranajes que van a trabajar de manera conjunta, es necesario asegurarse de que el diseño tanto del piñón como de la rueda es correcto y no se producen fenómenos indeseables como la penetración, el engrane en vacío o se produce algún tipo de interferencia que impide el correcto movimiento de los engranajes.

En este capítulo se presentan las restricciones geométricas que limitan el diseño de los engranajes interiores. Algunas de ellas, como la penetración, no impiden el funcionamiento del sistema pero pueden suponer la generación de planos de debilidad o comportamiento no lineal del contacto entre dientes. Otras en cambio, impiden totalmente el funcionamiento de los engranajes llegando a romper los dientes de los mismos si se fuerza el sistema.

Como ya se ha comentado anteriormente, el objeto del presente Trabajo es el análisis del potencial unitario inverso y la propuesta de funciones aproximadas sencillas. Para ello se han analizado cientos de casos diferentes desechando aquellos en los que se presentaba alguna de las restricciones geométricas que se detallan a continuación.

### 3.1 Apuntamiento

Para que no exista apuntamiento, el espesor angular en el radio de cabeza del piñón o la rueda (particularizando para  $r = r_a$ ) debe ser mayor que cero, es decir, los perfiles de evolvente de una cara y la otra de un mismo diente no se cortan:

$$\gamma_a > 0$$

- Apuntamiento en piñón:

$$\gamma_{a1} = \frac{\pi}{z_1} + \frac{4x_1}{z_1} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \right) > 0$$

- Apuntamiento en corona:

$$\gamma_{a2} = \frac{\pi}{z_2} + \frac{4x_0}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \frac{z_0}{z_2} - 2(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) + 2 \left( \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} \right) > 0$$

- Apuntamiento en piñón cortador:

En el caso del piñón cortador la condición de no apuntamiento es:

$$\frac{\gamma_{b0}}{2} \geq \eta_{c0}$$

Siendo:

$$\eta_{c0} = \theta_{A0} - \operatorname{arccos} \frac{r_{b0}}{r_{c0}} = \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_{c0}^2}{r_{b0}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{c0}^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

### 3.2 Penetración en el piñón

La penetración es un fenómeno que se produce durante el tallado de ruedas de dentado exterior cuando la herramienta penetra en la base del diente, reduciendo el espesor del mismo en ese punto y creando un punto débil. En los engranajes de perfil de evolvente, este fenómeno de la penetración del diente por la herramienta de tallado, está influenciado principalmente por el número de dientes, el ángulo de presión y el desplazamiento. Cabe mencionar que la penetración no es posible en dentado interior

Durante el tallado de los dientes del piñón, el filo recto de la herramienta va generando el perfil evolvente mientras que el filo circular de la herramienta genera el perfil de trocoide desde donde termina el perfil de evolvente hasta la circunferencia de pie, donde  $\varphi=\pi/2$ . El punto donde se unen evolvente y trocoide se denomina entronque.

El perfil del diente generado es continuo cuando el encuentro entre la evolvente y la trocoide se produce con una tangente común, de forma que no aparece ningún punto anguloso. En el caso de que se produzca penetración esto no ocurre, pues las dos envolventes se encuentran en un punto que no se talló simultáneamente, por tanto, se producirá penetración cuando el punto  $E_1$  (entronque) de la herramienta se encuentre por debajo del radio base del piñón.

La condición de no penetración viene dada por:

$$\theta_{E1} \geq 0$$

Siendo

$$\theta_{E1} = \tan(\alpha_t) - \frac{\delta}{r_{b1} \sin(\alpha_t)}$$

$$\delta = m(h_{a01} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \sin \alpha_n)$$

Teóricamente se deben diseñar los piñones de forma que no se produzca penetración en el diente puesto que debilita el mismo ante los esfuerzos transmitidos en los engranajes. Sin embargo, debido a las altas relaciones de transmisión que se desean conseguir, en la práctica es admisible una pequeña penetración, siempre que no se rebasen valores que debiliten en exceso el diente.

El fenómeno de la penetración, asociado a un debilitamiento de la sección en la base, puede llevar asociado otros efectos favorables mediante una conveniente selección de los parámetros de diseño, como el aumento del grado de recubrimiento mencionado. Un mayor grado de recubrimiento supone un aumento de la longitud de contacto efectiva y la consecuente disminución de las presiones, por lo que pueden existir casos particulares en que dicho fenómeno pueda ser tolerado.

### 3.3 Engrane en vacío

Como acabamos de comentar, en el caso de que no haya penetración, el entronque entre la trocoide y la evolvente se produce con la misma tangente mientras que en el caso de penetración esto no ocurre, pues las dos envolventes se encuentran en un punto que no se talló simultáneamente.

En este caso, el punto de entronque ya no corresponde al definido en el epígrafe anterior, si bien puede obtenerse mediante la siguiente expresión aproximada:

$$\theta_{E1} = 0,523191\zeta$$

donde  $\zeta$  debe expresarse en radianes y viene dado por:

$$\zeta = \arccos \left[ \frac{r_{p1} - m(h_{a0} - x_1 - r_f + r_f \operatorname{sen} \alpha_n)}{r_{b1}} \right] - \alpha_t$$

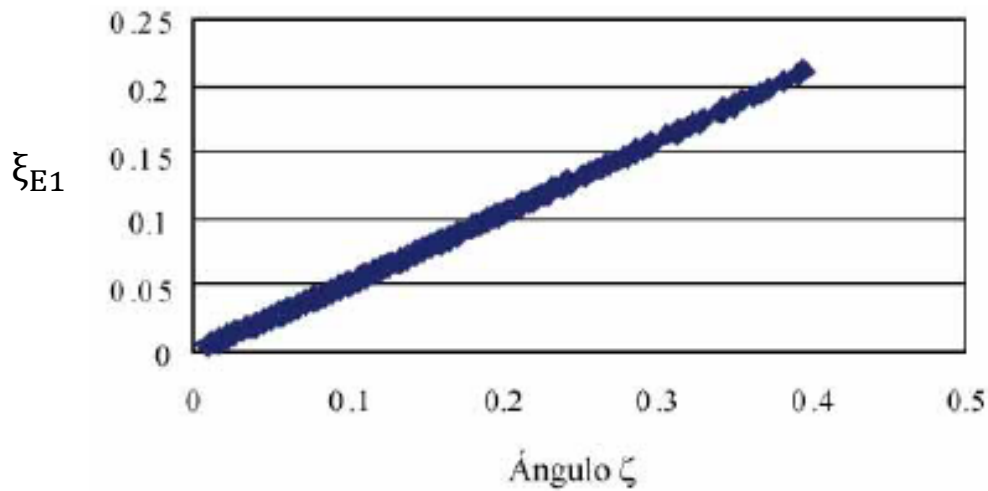


Figura 3.1: Parámetro  $\xi_{E1}$  en función del ángulo de rotación  $\zeta$

Donde:

$$\xi_{E1} = \frac{Z_1}{2\pi} \theta_{E1}$$

En piñones donde se ha producido penetración, puede ocurrir que los dientes de la corona intenten engranar por debajo del punto de entronque  $E_1$  donde no existe perfil de evolvente puesto que fue eliminado por la herramienta durante el tallado. En este caso, se produciría el fenómeno de engrane en vacío.

El fenómeno de engrane en vacío se produce si la cabeza del diente de la corona intenta engranar con un punto del piñón situado por debajo del punto de entronque cuando existe penetración en el piñón, es decir:

$$\theta_1(\theta_{a2}) \leq \theta_{E1}$$

Siendo:

$$\theta_1(\theta_{a2}) = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \theta_{a2} - \frac{r_{b2} - r_{b1}}{r_{b1}} \text{tg} \alpha'_t$$

Evidentemente, si no hay penetración no puede darse el engrane en vacío

### 3.4 Interferencia Primaria

La interferencia primaria se produce cuando en ruedas sin penetración, piñón o corona, la cabeza del diente conjugado intenta engranar por debajo del entronque entre la evolvente y la trocoide. Es decir, el diente de la otra rueda intentase penetrar o engranar en el perfil de la trocoide.

En este caso se puede dar el caso de interferencia primaria tanto en el piñón como en la corona.

#### 3.4.1 Interferencia Primaria Piñón

La interferencia primaria en la base del piñón puede darse con relativa facilidad en engranajes interiores. La forma más común de evitar este fenómeno consiste en aplicar un rebaje en el diente de la corona o, es decir, aplicar un factor reductor al adendo de la corona de forma que se acorta la altura de los dientes.

Para que no exista interferencia en la base del piñón es preciso asegurar que la cabeza de la corona engrana en el perfil de evolvente del piñón, es decir, en un punto superior al punto de entronque del piñón.

Por tanto, para que no exista interferencia en la base del piñón se ha de cumplir:

$$\theta_{a2} > \theta_2(\theta_{E1})$$

donde  $\theta_2(\theta_{E1})$  es el ángulo característico de la rueda cuando el engrane se produce en el punto de entronque del piñón, es decir, el ángulo de entronque del piñón referenciado a la rueda y  $\theta_{E1}$  ya se había definido con anterioridad y es igual a:

$$\theta_{E1} = \tan(\alpha_t) - \frac{\delta}{r_{b1} \sin(\alpha_t)}$$



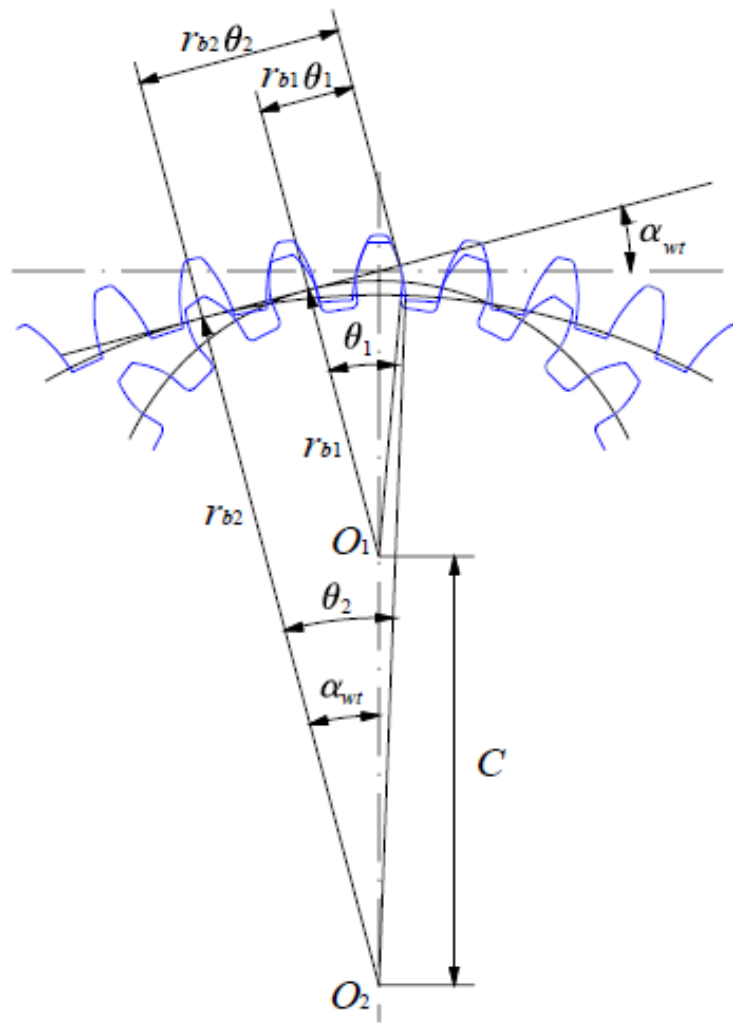


Figura 3.2: Relaciones angulares

Observando la Figura 3.2, se deducen las siguientes expresiones:

$$r_{b2}\theta_2 - r_{b1}\theta_{E1} = (r_{b2} - r_{b1})tg\alpha'_t$$

$$\theta_2(\theta_{E1}) = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)tg\alpha'_t + \frac{z_1}{z_2}\theta_{E1}$$

Por último, el ángulo de cabeza de la corona es:

$$\theta_{a2} = \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1}$$

### 3.4.2 Interferencia Primaria Corona

Razonando de igual manera se deduce la condición de no interferencia primaria en la base de la corona:

$$\theta_{a1} > \theta_1(\theta_{E2})$$

Donde  $\theta_1(\theta_{E2})$  es ahora el ángulo característico de la evolvente del piñón cuando se está engranando en el punto de entronque de la rueda. En esta condición se expresa que el radio de cabeza del piñón debe ser menor que el radio correspondiente al punto de entronque de la rueda.

$$\theta_1(\theta_{E2}) = \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \operatorname{tg} \alpha'_t + \frac{z_2}{z_1} \theta_{E2}$$

El ángulo de entronque  $\theta_{E2}$  de la rueda es:

$$\theta_{E2} = \tan \alpha_g - \frac{\delta_2}{r_{b2}}$$

Donde:

$$\delta_2 = mr_{f2} + \sqrt{r_c^2 - r_{b0}^2} - r_{b0} \tan \alpha_g$$

Por último, el ángulo de cabeza del piñón es:

$$\theta_{a1} = \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1}$$

### 3.5 Interferencia Secundaria

Una interferencia propia de los engranajes interiores es la conocida como interferencia secundaria. Cuando el número de dientes de las dos ruedas son próximos pueden tropezar las cabezas de los dientes fuera de la línea de engrane.

En la Figura 3.3, se comprueba que si el piñón tuviese un radio algo mayor (más dientes) al mismo tiempo que el engrane ocurre en *a*, los dientes *b* y *c* se tocarían interfiriendo el contacto anterior. Si se estuviera tallando existiría una cierta penetración en la cabeza del diente de la rueda. Si por el contrario se está engranando, existiría interferencia entre piñón y rueda, lo que haría imposible el engrane.

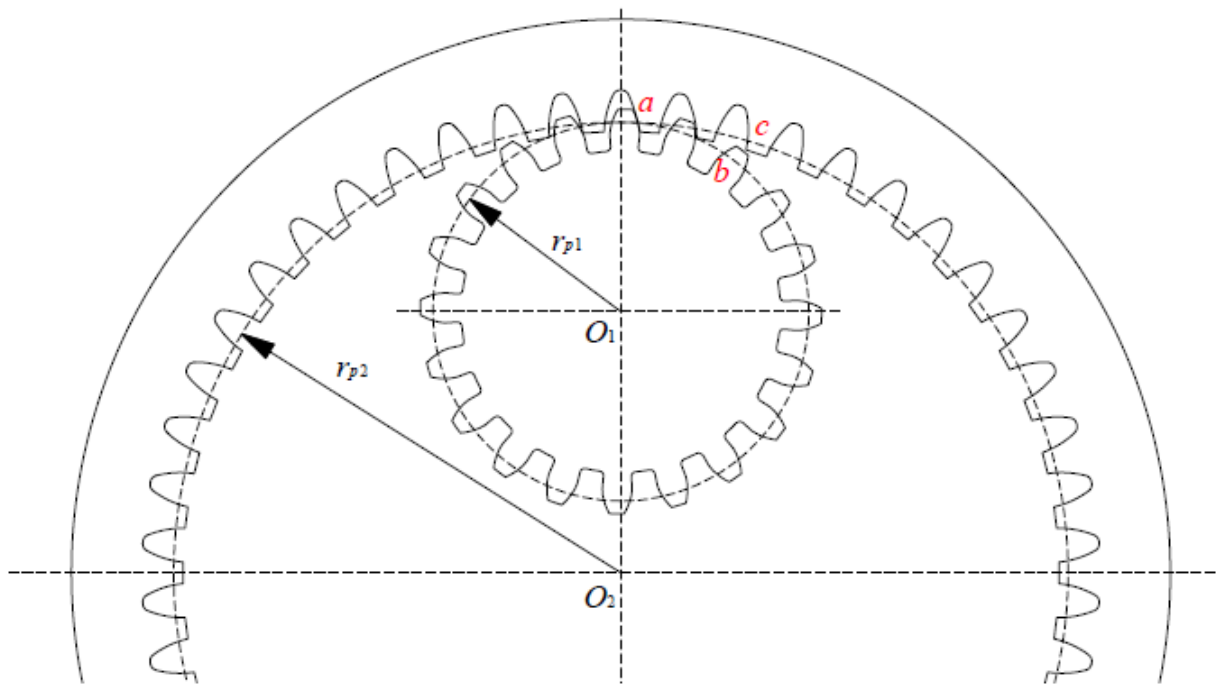


Figura 3.3: Interferencia secundaria

Se deducirá ahora la condición de no interferencia secundaria en engranajes de dentado interior, a la vista de la Figura 3.4.

En primer lugar, se determinarán los ángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que definen la posición de la rueda y el piñón en un momento cualquiera que se considerará como inicial.

$$r_{a1}^2 = r_{a2}^2 + C^2 - 2r_{a2}C \cos(\delta_2)$$

$$\delta_2 = \arccos\left(\frac{r_{a2}^2 + C^2 - r_{a1}^2}{2r_{a2}C}\right)$$

$$r_{a2}^2 = r_{a1}^2 + C^2 - 2r_{a1}C \cos(\pi - \delta_1)$$

$$r_{a2}^2 = r_{a1}^2 + C^2 + 2r_{a1}C \cos(\delta_1)$$

$$\delta_1 = \arccos\left(\frac{r_{a2}^2 - C^2 - r_{a1}^2}{2r_{a1}C}\right)$$

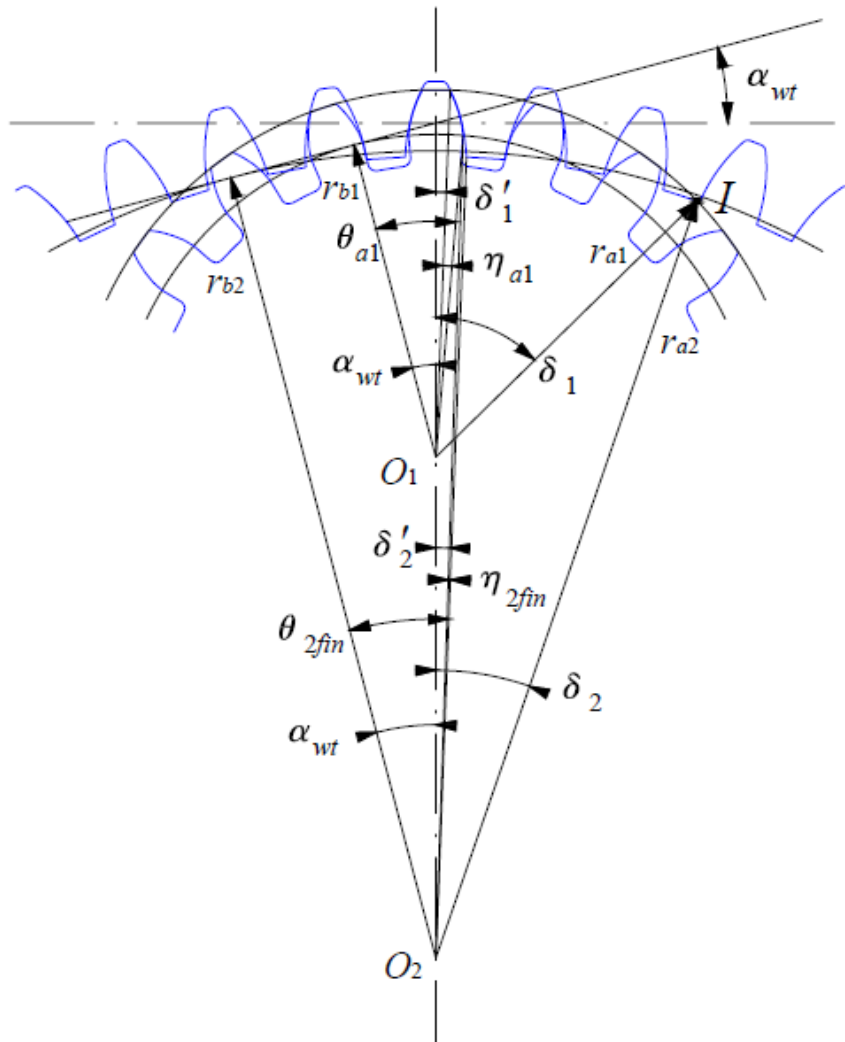


Figura 3.4: Condición de no interferencia secundaria

Se calculan los ángulos  $\delta_1'$  y  $\delta_2'$ , que definen la posición límite de interferencia secundaria de la rueda y el piñón en un momento posterior al inicial.

$$\delta_1' = \theta_{a1} - \alpha'_t - \eta_{a1}$$

$$\eta_{a1} = \theta_{a1} - \arctg(\theta_{a1})$$

$$\delta_2' = \theta_{fin2} - \alpha'_t - \eta_{fin2}$$

$$\theta_{fin2} = \left(1 - \frac{r_{b1}}{r_{b2}}\right) \operatorname{tg} \alpha'_t + \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \theta_{a1}$$

$$\eta_{fin2} = \theta_{fin2} - \arctg(\theta_{fin2})$$

La rueda y el piñón se habrán movido un ángulo igual al inicial menos el correspondiente a la situación límite.

$$\Delta\delta_1 = \delta_1 - \delta_1'$$

$$\Delta\delta_2 = \delta_2 - \delta_2'$$

La condición de no interferencia secundaria será la que asegure que la cabeza del piñón no tropieze con la cabeza de la rueda, dicho de otra forma, el piñón debe de haber girado un ángulo mayor que la rueda antes de llegar a la situación límite que se ha considerado:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \Delta\delta_1 > \Delta\delta_2$$

### 3.6 Holgura

La holgura es un factor importante en el funcionamiento correcto del engranaje. Todos los engranajes deben disponer de una serie de holguras para permitir las tolerancias de concentricidad y forma de los dientes. Una insuficiente holgura causa un rápido fallo debido a sobrecarga. Una holgura excesiva incrementara la fuerza de contacto reduciendo, también, la vida del engranaje.

Se conoce como holgura de paso, o simplemente holgura, a la diferencia entre el hueco entre dientes y el espesor del diente de la rueda contraria, medido sobre las circunferencias de rodadura.

La suma de los espesores de ambos dientes en la circunferencia de rodadura más la holgura ha de ser igual al arco entre los dos dientes en la misma circunferencia, en consecuencia, si se designa por  $h$  el factor de holgura, se verifica que:

$$e_{r1} + e_{r2} + mh = \frac{2\pi}{Z_1} r_{r1}$$

De esta forma queda:

$$h = \frac{1}{m} \left( \frac{2\pi}{Z_1} r_{r1} - r_{r1}\gamma_{r1} - r_{r2}\gamma_{r2} \right)$$

Para que no se produzca interferencia por holgura este debe ser superior a 0.

$$h > 0$$

# Capítulo 4

## Modelo general de distribución de carga

En este capítulo se presenta una metodología de cálculo de la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto entre dientes de engranajes cilíndricos basado en el principio de mínimo potencial de deformación. Esta metodología ya fue presentada para engranajes de dentado exterior [20] y se recoge en este capítulo añadiendo el potencial de contacto de Hertz. Una vez definida la geometría de los dientes, se determinan las fórmulas que definen el potencial de deformación y se calculan por integración numérica los valores de los potenciales debidos a flexión, compresión, cortadura y contacto de Hertz, en función del punto de contacto, la fuerza aplicada y los efectos Hertzianos de contacto. Finalmente, una vez obtenido el potencial interno total se determinan las distribuciones de carga que minimizan dicho potencial mediante el empleo de métodos variacionales.

### 4.1 Potencial de deformación de un diente de engranaje

La energía interna de un sistema, también llamada potencial elástico o potencial de deformación, es una función de estado asociada al trabajo realizado en el proceso de deformación debido a la carga y descarga, manteniendo las deformaciones en el dominio de comportamiento elástico del material. La variación de la energía interna teórica, despreciando pérdidas energéticas por calor u otros fenómenos, en un ciclo cerrado es nula. De esta forma, despreciando la generación de calor producida por el proceso de deformación, el campo de tensiones deriva de un potencial, denominado energía elástica, de manera que se cumple:

$$\vec{\sigma} = \frac{\partial U(\vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\varepsilon}}$$

y, recíprocamente, el campo de deformaciones  $\vec{\varepsilon}$  deriva de un potencial,  $W(\vec{\sigma})$ , denominado energía complementaria:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\partial W(\vec{\sigma})}{\partial \vec{\sigma}}$$

Así, el trabajo realizado sobre un cuerpo inicialmente no deformado, hasta un estado tensional determinado, se puede calcular como:

$$\tau = \int_0^A \vec{\sigma} \, d\vec{\varepsilon} = \int_0^A \frac{\partial U(\vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\varepsilon}} \, d\vec{\varepsilon} = \int_0^A dU = U_A$$

considerando que la energía elástica inicial es nula.

El potencial de deformación de un diente cargado,  $U$ , en un engranaje cilíndrico recto sometido a una fuerza normal a su superficie,  $F$ , como ocurre en el contacto entre una pareja de dientes de engranaje, puede expresarse como la suma del potencial debido a la flexión,  $U_x$ , a la compresión,  $U_n$ , a la cortadura,  $U_s$ , y los efectos hertzianos de contacto  $U_H$ . El signo  $\pm$  de las expresiones correspondientes a dichos potenciales hacen referencia al piñón y la rueda, respectivamente:



**Potencial por flexión:**

$$U_x = \pm \int_{y_p}^{y_c} \frac{M^2}{2EI} dy$$

donde  $M$  es el momento flector que produce la fuerza,  $E$  el módulo de elasticidad del material e  $I$  el momento de inercia geométrico de la sección.

Como se aprecia en las Figuras 4.1 y 4.2,  $y_p$  es el valor de  $y$  correspondiente a la sección de empotramiento, definida por los puntos de tangencia de los perfiles del diente con la circunferencia de pie e  $y_c$  el correspondiente al punto de aplicación de la carga.

**Potencial por compresión:**

$$U_n = \pm \int_{y_p}^{y_c} \frac{N^2}{2E\Omega} dy$$

siendo  $N$  el esfuerzo axial y  $\Omega$  el área de la sección rectangular

**Potencial por cortadura:**

$$U_s = \pm C_s \int_{y_p}^{y_c} \frac{T^2}{2G\Omega} dy$$

donde  $T$  es el esfuerzo cortante,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal del material y  $C_s$ , un factor de corrección del potencial debido a cortadura que tiene en consideración la distribución no uniforme de las tensiones de cortadura en la sección, de acuerdo con el teorema de Colignon. Para secciones rectangulares, dicho factor toma el valor  $C_s = 1,2$ .

Algunos parámetros, reflejados en las ecuaciones anteriores, dependen del punto de contacto:

$$M = F \left[ \cos \alpha_c (y_c - y) - r_c \operatorname{sen} \left( \frac{\gamma_c}{2} \right) \operatorname{sen} \alpha_c \right]$$

$$N = F \operatorname{sen} \alpha_c$$

$$T = F \cos \alpha_c$$

$$I = \frac{be^3(y)}{12}$$

$$\Omega = be(y)$$

sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones de los potenciales, obtenemos,

**Potencial por flexión:**

$$U_x = \pm 6 \frac{F^2}{Eb} \int_{y_p}^{y_c} \frac{((y_c - y) \cos \alpha_c - r_c \operatorname{sen} \left( \frac{y_c}{2} \right) \operatorname{sen} \alpha_c)^2}{e^3(y)} dy$$

**Potencial por compresión:**

$$U_n = \pm \frac{1}{2} \frac{F^2}{Eb} \int_{y_p}^{y_c} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

**Potencial por cortadura:**

$$U_s = \pm C_s \frac{1}{2} \frac{F^2}{Gb} \int_{y_p}^{y_c} \frac{\cos^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

donde  $\alpha_c$  es el ángulo de carga,  $b$  el ancho de la cara,  $e(y)$  el espesor del diente  $e$  y la coordenada media según el eje de simetría del diente a partir del centro de la rueda.

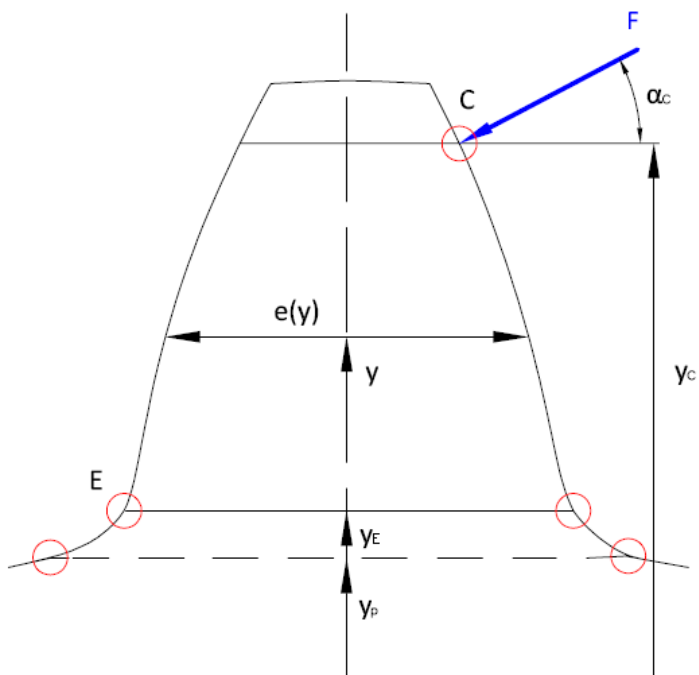


Figura 4.1. Parámetros geométricos para el cálculo del potencial de deformación (Piñón)

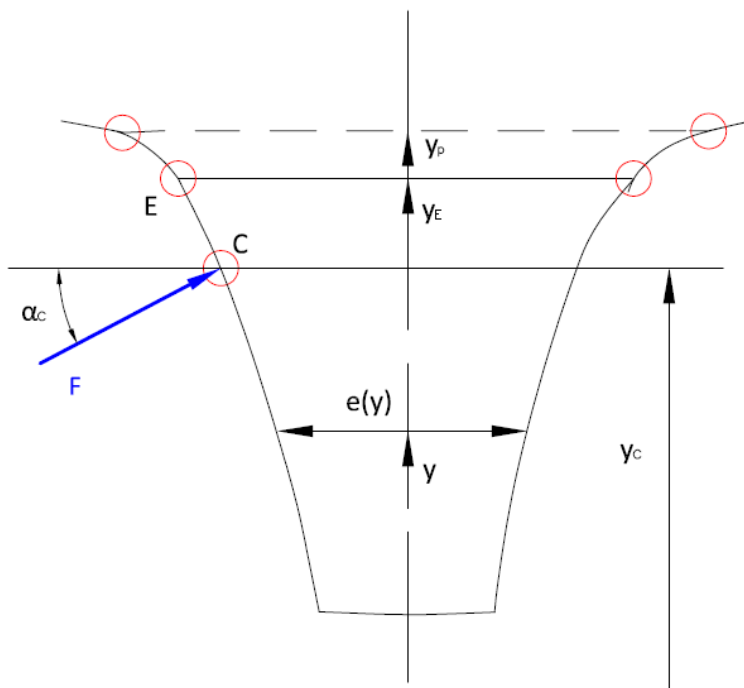


Figura 4.2. Parámetros geométricos para el cálculo del potencial de deformación (Corona)

Los ángulos de carga del piñón y la corona, señalados con subíndices 1 y 2, respectivamente, se pueden calcular con las expresiones:

**Piñón (engranaje exterior):**

$$\alpha_{c1} = \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - \frac{\gamma_{b1}}{2}$$

**Corona (engranaje interior):**

$$\alpha_{c2} = \sqrt{\frac{r_{c2}^2}{r_{b2}^2} - 1} + \frac{\gamma_{b2}}{2}$$

en las que  $r_b$  es el radio de base,  $\gamma_b$  el espesor angular del perfil activo en el radio de base y  $r_c$  la distancia al centro del punto del perfil sobre el que actúa la fuerza. El límite superior de integración  $y_c$ , tanto para el piñón como la corona, de acuerdo con las Figuras 4.3 y 4.4, vendrá dado por:

$$y_c = \frac{r_b}{\cos \alpha_c} + (r_b \theta_c - r_b \operatorname{tg} \alpha_c) \operatorname{sen} \alpha_c$$

mientras que el límite inferior  $y_p$  será, sencillamente,

$$y_p = r_p \cos \frac{\gamma_p}{2}$$

donde  $r_p$  es el radio de pie y  $\gamma_p$  el espesor angular en ese radio.

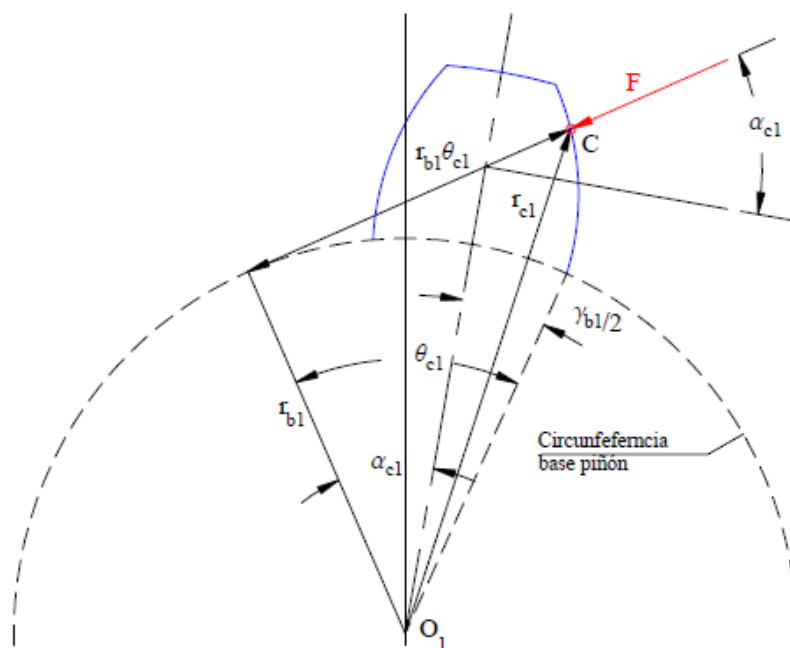


Figura 4.3. Ángulo de carga. Piñón. (Engranajes exteriores)

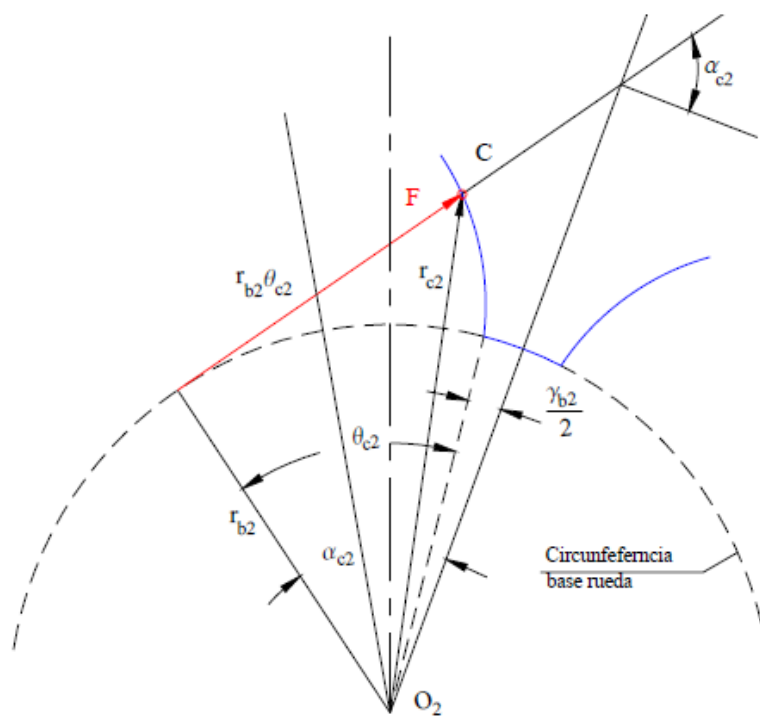


Figura 4.4. Ángulo de carga. Corona (Engranajes interiores)

La expresión del espesor del diente  $e(y)$  es diferente según  $y$  corresponda a secciones contenidas en la base del diente (y consecuentemente limitadas por las trocoides de ambos perfiles, izquierdo y derecho, del diente) o secciones de la parte activa, limitadas por los perfiles de evolvente. En consecuencia, para la resolución de las integrales, se habrá de descomponer el dominio de integración en dos intervalos, separados por el punto  $E$  de entronque de ambas curvas de evolvente y trocoide, los cuales aparecen representados en las Figuras 4.1 y 4.2, para el caso del piñón y corona respectivamente.

De acuerdo con ello, dichas ecuaciones se pueden escribir de la forma:

**Potencial por flexión:**

$$U_x = (U_{xtr} + U_{xev})$$

siendo,

$$U_{xtr} = \pm 6 \frac{F^2}{Eb} \int_{y_p}^{y_E} \frac{((y_c - y) \cos \alpha_c - r_c \operatorname{sen}(\frac{y_c}{2}) \operatorname{sen} \alpha_c)^2}{e^3(y)} dy$$

$$U_{xev} = \pm 6 \frac{F^2}{Eb} \int_{y_E}^{y_c} \frac{((y_c - y) \cos \alpha_c - r_c \operatorname{sen}(\frac{y_c}{2}) \operatorname{sen} \alpha_c)^2}{e^3(y)} dy$$

**Potencial por compresión:**

$$U_n = (U_{ntr} + U_{nev})$$

siendo,

$$U_{ntr} = \pm \frac{1}{2} \frac{F^2}{Eb} \int_{y_p}^{y_E} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

$$U_{nev} = \pm \frac{1}{2} \frac{F^2}{Eb} \int_{y_E}^{y_c} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

**Potencial por cortadura:**

$$U_s = (U_{str} + U_{sev})$$

siendo,

$$U_{str} = \pm C_s \frac{1}{2} \frac{F^2}{Gb} \int_{y_p}^{y_E} \frac{\cos^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

$$U_{sev} = \pm C_s \frac{1}{2} \frac{F^2}{Gb} \int_{y_E}^{y_c} \frac{\cos^2 \alpha_c}{e(y)} dy$$

Naturalmente, para la resolución de estas integrales se habrá de recurrir al empleo de métodos numéricos aproximados, debido a la complejidad de la expresión del espesor del diente  $e(y)$ , Figura 4.5, especialmente en las secciones de la base, como se presentó en el Capítulo 2.

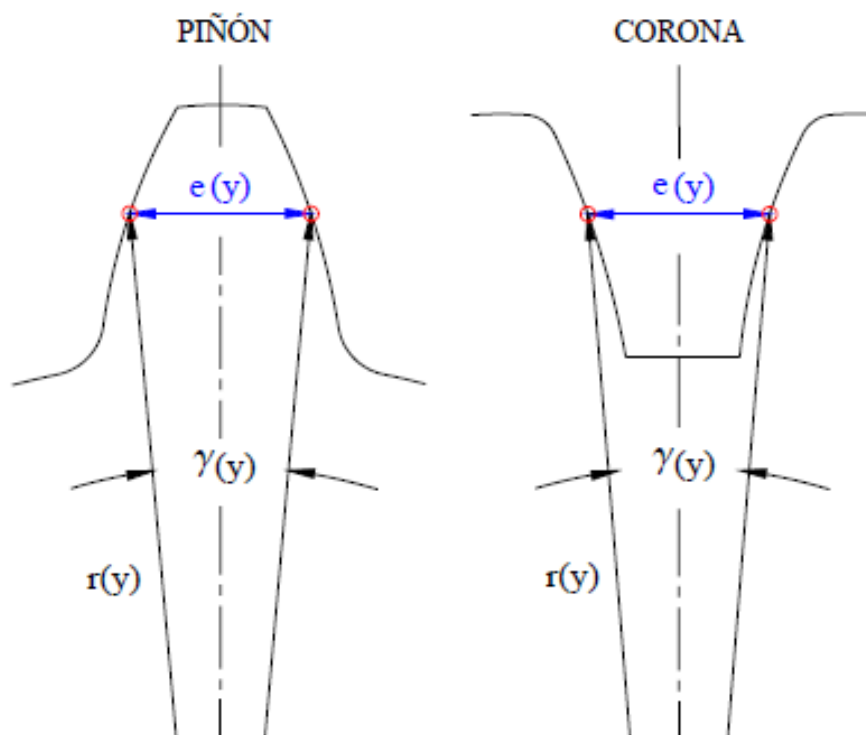


Figura 4.5. Espesor del diente

En las expresiones anteriores, tanto el valor de la ordenada  $y$ , como el espesor del diente,  $e(y)$ , dependen de la geometría del perfil del diente, por lo que se deberá diferenciar si están referidas a la parte del perfil de evolvente o a la parte del perfil constituida por la trocoide.

## 4.2 Parámetros para el cálculo del potencial

A continuación, se determinan las variables que toman parte en las integrales del potencial de deformación para su cálculo por métodos numéricos.

### 4.2.1. Piñón

#### Evolvente

En el caso del cálculo del potencial para el tramo de perfil de evolvente, se propone el cambio de variable por  $\theta$ , de forma que las expresiones quedarían de la siguiente forma:

Según la figura 4.1:

$$y_1 = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha} + (r_{b1}\theta_1 - r_{b1} \tan \alpha_1) \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \theta_1 - \frac{\gamma_{b1}}{2}$$

$$e(\theta_1) = 2(r_{b1}\theta_1 - r_{b1} \tan \alpha_1) \cos \alpha_1$$

$$r_{c1} \operatorname{sen} \frac{\gamma_{c1}}{2} = \frac{1}{2} e(\theta_1) = (r_{b1}\theta_{c1} - r_{b1} \tan \alpha_1) \cos \alpha_{c1}$$

Aplicando estas fórmulas en el punto de contacto tenemos:

$$y_{c1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_{c1}} + (r_{b1}\theta_{c1} - r_{b1} \tan \alpha_{c1}) \operatorname{sen} \alpha_{c1}$$

$$\alpha_{c1} = \theta_{c1} - \frac{\gamma_{b1}}{2}$$

Operando se deduce:

$$dy = r_{b1}\theta_1 \cos \alpha_1 d\theta_1$$



Como ejemplo,  $U_{nev}$  quedaría de la forma:

$$U_{nev} = \pm \frac{1}{2} \frac{F^2}{Eb} \int_{\theta_{E1}}^{\theta_{c1}} \frac{\text{sen}^2\left(\theta_{c1} - \frac{\gamma_{b1}}{2}\right)}{e(\theta_1)} r_{b1} \theta_1 \cos\left(\theta_1 - \frac{\gamma_{b1}}{2}\right) d\theta_1$$

Como ya se ha visto anteriormente, suponiendo que no hay penetración,  $\theta_{E1}$  es:

$$\theta_{E1} = \tan(\alpha_t) - \frac{\delta}{r_{b1} \text{sen}(\alpha_t)}$$

Por su parte,  $\theta_{c1}$  varía entre el valor de  $\theta$  de inicio del contacto y el de finalización:

$$\theta_{c1} = [\theta_{inn1}, \theta_{a1}]$$

En el caso de que no se produzcan interferencias ni restricciones geométricas se tiene que:

$$\theta_{inn1} = \theta_{inf1}$$

Recordemos que:

$$\theta_{inf1} = \frac{r_{b1} - r_{b2}}{r_{b1}} \tan \alpha'_t + \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \theta_{a2}$$

### **Trocoide**

Para el tramo de trocoide, se propone el cambio de variable por  $\varphi$ .

$$y_1(\varphi) = r_{tro1}(\varphi) \cos \frac{\gamma_{tro1}(\varphi)}{2}$$

$$e_1(\varphi) = 2 r_{tro1}(\varphi) \text{sen} \frac{\gamma_{tro1}(\varphi)}{2}$$

Donde:

$$\gamma_{tro1}(\varphi) = \gamma_{b1} - 2 \eta_{tro1}(\varphi)$$

$$\eta_{tro1}(\varphi) = v + \varepsilon - \alpha_t$$

$$r_{tro1}(\varphi) = \sqrt{(r_{p1} - B)^2 + \left(\frac{B \cos \beta}{\tan \varphi}\right)^2}$$

$$B = m(h_{ha0} - x_1 - r_f + r_f \sin \varphi)$$

$$v = \tan \alpha_t + \frac{1}{r_{p1}} \left( m r_f \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} - A - \frac{B \cos \beta}{\tan \varphi} \right)$$

$$A = \frac{m r_f}{\cos \alpha_n \cos \beta} + m(h_{ha0} - x_1 - r_f) \tan \alpha_t$$

$$\varepsilon = \operatorname{atan} \left( \frac{B \cos \beta}{(r_{p1} - B) \tan \varphi} \right)$$

Los límites de integración en el caso de que no se produzca penetración en el piñón son:

$$\varphi = \left[ \alpha_n, \frac{\pi}{2} \right]$$

#### 4.2.2. Corona

##### Evolvente

De la misma forma que para el caso del piñón, para el cálculo del potencial para el tramo de perfil de evolvente, se propone el cambio de variable por  $\theta$ .

$$y_2 = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha} + (r_{b2} \theta_2 - r_{b2} \tan \alpha_2) \sin \alpha_2$$

$$\alpha_2 = \theta_2 + \frac{\gamma_{b2}}{2}$$

$$e(\theta_2) = 2(r_{b2} \tan \alpha_2 - r_{b2} \theta_2) \cos \alpha_2$$

$$r_{c2} \sin \frac{\gamma_{c2}}{2} = \frac{1}{2} e(\theta_{c2}) = (r_{b2} \tan \alpha_2 - r_{b2} \theta_{c2}) \cos \alpha_{c2}$$

$$dy = r_{b2} \theta_2 \cos \alpha_2 d\theta_2$$

Aplicando estas fórmulas en el punto de contacto tenemos:

$$y_{c2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_{c2}} + (r_{b2} \theta_{c2} - r_{b2} \tan \alpha_{c2}) \operatorname{sen} \alpha_{c2}$$

$$\alpha_{c2} = \theta_{c2} + \frac{\gamma_{b2}}{2}$$

Como ya se ha visto anteriormente,  $\theta_{E2}$  es:

$$\theta_{E2} = \frac{r_{b2} - r_{b0}}{r_{b2}} \tan \alpha_g - \frac{r_{b0}}{r_{b2}} \theta_{EO10}$$

Por su parte,  $\theta_{c2}$  varía entre el valor de  $\theta$  de inicio del contacto y el de finalización en la corona:

$$\theta_{c2} = [\theta_{a2}, \theta_{inn2}]$$

En el caso de que no se produzcan interferencias ni restricciones geométricas se tiene que:

$$\theta_{inn2} = \theta_{inf2}$$

Recordemos que:

$$\theta_{inf2} = \frac{r_{b2} - r_{b1}}{r_{b2}} \tan \alpha'_t + \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \theta_{a1}$$

### **Trocoide**

Para el tramo de trocoide, se propone el cambio de variable por  $\varphi$ .

$$y_2(\varphi) = r_{tro2}(\varphi) \cos \frac{\gamma_{tro2}(\varphi)}{2}$$

$$e_2(\varphi) = 2 r_{tro2}(\varphi) \operatorname{sen} \frac{\gamma_{tro2}(\varphi)}{2}$$

Donde:

$$\gamma_{tro2}(\varphi) = \gamma_{b2} + 2 \eta_{tro2}(\varphi)$$

$$\eta_{tro2}(\varphi) = \theta_2 - \alpha_{g2} - \lambda_2$$

$$r_{tro2}(\varphi) = \sqrt{r_{r2}^2 + \delta(\varphi)^2 + 2r_{r2}\delta(\varphi) \operatorname{sen} \varphi}$$

$$\delta(\varphi) = \sqrt{r_{c0}^2 - r_{r0}^2 \cos^2 \varphi} - r_{r0} \operatorname{sen} \varphi + mr_f$$

$$\lambda_2 = \operatorname{asen} \left( \frac{\delta(\varphi)}{r_{tro2}(\varphi)} \cos \varphi \right)$$

$$\eta_{c0}(\varphi) = \theta_{EOI0} - \theta_{c0}$$

$$\theta_2 = \frac{r_{b2} - r_{b0}}{r_{b2}} \tan \alpha_g + \frac{r_{b0}}{r_{b2}} \theta_0$$

$$\theta_0 = \eta_{c0}(\varphi) + \varepsilon + \alpha_{g2}$$

$$\varepsilon = \operatorname{asen} \left( \frac{\delta(\varphi) - mr_f}{r_{c0}} \cos \varphi \right)$$

Los límites de integración son:

$$\varphi = \left[ \alpha_g, \frac{\pi}{2} \right]$$

### 4.3 Potencial de deformación de una pareja de dientes en contacto

Evidentemente, el potencial interno de una pareja de dientes en contacto se puede expresar como la suma del potencial de cada uno de los dientes, con la carga actuando en los respectivos puntos de contacto añadiendo el potencial por contacto de Hertz:

$$U = U_1 + U_2 + U_H$$

donde,

$$U_1 = U_{x1} + U_{n1} + U_{s1} = U_1(r_{c1})$$

$$U_2 = U_{x2} + U_{n2} + U_{s2} = U_2(r_{c2})$$

#### Potencial por contacto de Hertz:

Para el cálculo del potencial debido a la deformación de contacto de Hertz se adopta el modelo de línea de contacto entre dos cilindros de longitud infinita con carga constante por unidad de longitud en la generatriz de contacto. Según este modelo, la deformada de contacto es proporcional a la carga total por lo que la rigidez es independiente de la carga.

La rigidez de contacto de Hertz es:

$$k_H = \frac{\pi}{4} \frac{Eb}{1 - \mu^2}$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de Poisson.

Por tanto, el potencial de contacto de Hertz queda:

$$U_H = \frac{F^2}{2} \frac{1}{k_H}$$

En el Anexo 3 se demuestra que la suma de los radios de curvatura de los perfiles en el punto de contacto, medida sobre la tangente común a ambas circunferencias de base, es una cantidad constante, y se cumple:

$$\rho_2 - \rho_1 = (r_{b2} - r_{b1}) \tan \alpha'_t$$

donde  $\alpha'_t$  es el ángulo de presión de funcionamiento en la sección transversal y los subíndices 1 y 2 hacen referencia al piñón y rueda, respectivamente. En consecuencia, se puede expresar el radio de contacto de la rueda en función del radio de contacto del piñón, por lo que el potencial interno de la pareja de dientes también se podrá expresar en función del radio de contacto del piñón:

$$U = U_1(r_{c1}) + U_2(r_{c2}) + U_H = U_1(r_{c1}) + U_2(r_{c1}) + U_H = U(r_{c1})$$

#### 4.4 Potencial de deformación de varias parejas de dientes en contacto

Durante el intervalo de contacto y en función del grado de recubrimiento de la transmisión  $\varepsilon_\alpha$ , pudiera darse el caso, y así ocurre, que existiera más de una pareja de dientes en contacto simultáneo. Por lo que, en cada instante, el potencial total de la transmisión será la suma de los potenciales de todas las parejas en contacto simultáneo:

$$U_T = \sum_i U_i$$

Donde  $i$  corresponde a cada diente en contacto simultáneo para un instante dado.

De las ecuaciones generales de los potenciales descritas anteriormente, se deduce que el potencial interno  $U$  es proporcional al cuadrado de la fuerza  $F$ . De acuerdo con ello, si se define el potencial unitario  $u$  como el potencial de deformación por unidad de fuerza, el potencial interno de la pareja de dientes será:

$$U = F^2 u$$

donde  $u$  también será función de  $r_{c1}$ .

De acuerdo con lo expuesto en el epígrafe anterior, en cada instante el potencial total de la transmisión será:

$$U_T = \sum_i U_i = \sum_i F_i^2 u_i$$

Si  $P$  es la potencia transmitida y  $\omega$  la velocidad de rotación, se debe verificar:

$$\sum_i F_i = F = \frac{P}{\omega_1 r_{b1}}$$

La minimización de la función potencial interno de deformación, expuesta a la restricción dada, permite obtener la distribución de la carga a lo largo del intervalo de contacto. El problema puede resolverse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, obteniéndose la solución:

$$F_i = \frac{\frac{1}{u_i}}{\sum_i \frac{1}{u_i}} F$$

La solución anterior representa la distribución de carga a lo largo de la línea de engrane pues, como ya se ha visto, los respectivos potenciales dependen de la posición del punto de contacto. Dicha expresión muestra que la carga que está actuando en un instante en una pareja  $i$  es igual a la inversa de su potencial unitario dividida por la suma de las inversas de los potenciales unitarios de todas las parejas de dientes en contacto simultáneo en dicho instante, y multiplicado por la carga total transmitida.

Definiremos el potencial unitario inverso  $v$  como la función inversa de la función potencial unitario  $u$ :

$$v = \frac{1}{u}$$

Por otro lado, se define una nueva variable adimensional  $\xi$ , para definir el punto de contacto del piñón. Este variable se obtiene a partir del ángulo  $\theta_1$ , mediante una transformación que lo adimensionaliza.

$$\xi = \frac{z_1}{2\pi} \theta_1 = \frac{z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1}$$

De este modo puede definirse el potencial unitario inverso y los límites del intervalo de contacto como función de  $\xi$ . Para cada extremo se define la variable adimensional  $\xi$  con el valor del ángulo  $\theta_1$  correspondiente: para el punto más bajo de contacto,  $\xi_{inn}$ , y para el punto más alto de contacto, es decir, el punto de cabeza del piñón,  $\xi_a$ .

La figura 4.8 muestra el valor del potencial unitario inverso  $v$  en función del nuevo parámetro  $\xi$  definido.

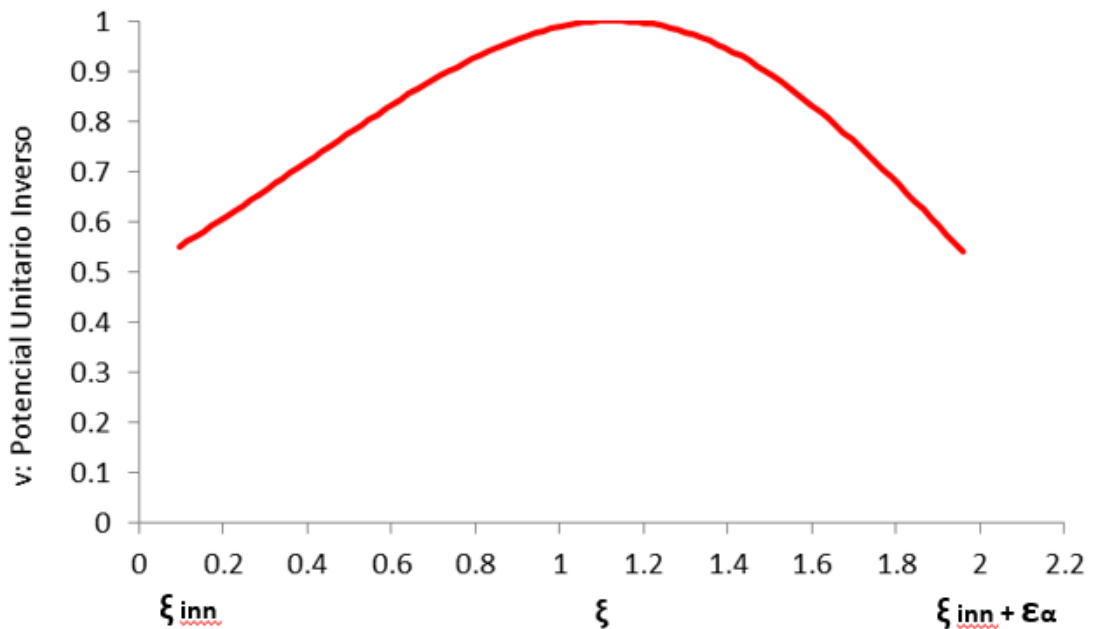


Figura 4.8. Función potencial unitario inverso de una pareja de dientes

La distribución de carga a lo largo de la línea de contacto queda de la forma:



$$F_i = \frac{v_i}{\sum_i v_i} F$$

### 4.5 Reparto de Carga

Si se representa el coeficiente de reparto de carga  $R$ , a lo largo de la línea de engrane, se obtiene una curva como la representada en la Figura 4.9, para un grado de recubrimiento transversal entre 1 y 2, es decir, que haya una o dos parejas de dientes en contacto a lo largo de dicho ciclo de engrane.

$$R(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{F}$$

donde la carga para cada punto de engrane  $F(\xi)$ , puede ser expresada como:

$$F(\xi) = F R(\xi)$$

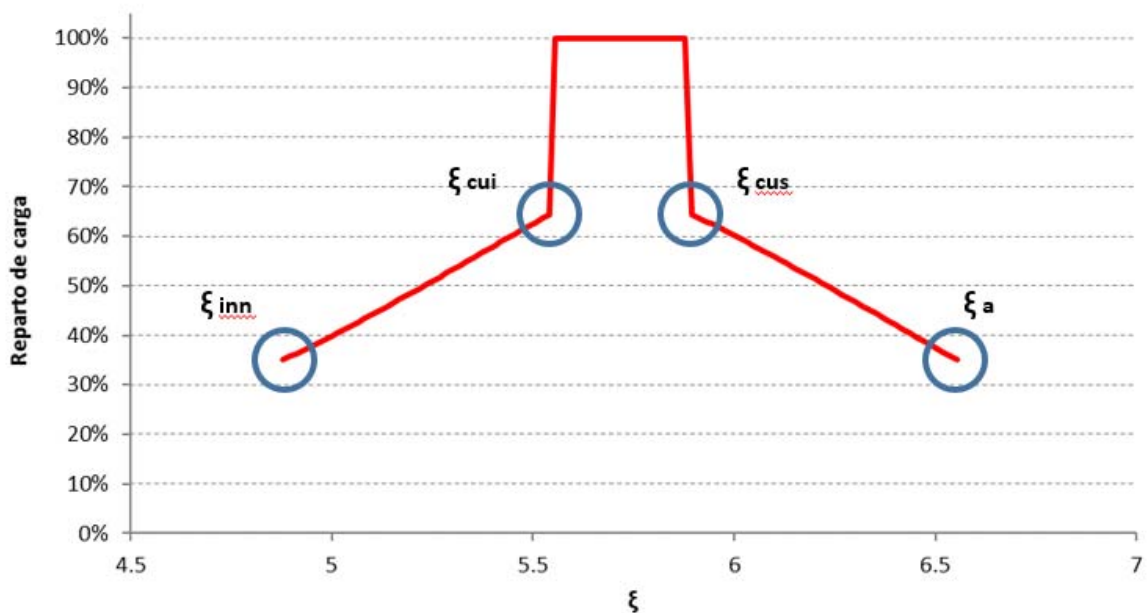


Figura 4.9. Coeficiente de reparto de carga en engranajes rectos de dentado interior con una o dos parejas de dientes en contacto simultáneo

Donde:

$\xi_{inn}$ : punto de contacto inferior

$\xi_{cui}$ : punto de contacto único inferior

$\xi_{cus}$ : punto de contacto único superior

$\xi_a$ : punto de contacto superior

La variación del coeficiente de carga a lo largo de la línea de contacto entre dientes rectos de dentado interior está representada en la Figura 4.9, para el caso de engranajes con grado de recubrimiento transversal entre 1 y 2.

La variación de  $R(\xi)$  a lo largo del intervalo de contacto de dos parejas de dientes, es bastante lineal. Tras el estudio de varios centenares de casos se ha comprobado que los puntos significativos que definen el contacto durante el engrane  $\xi_{inn}$ ,  $\xi_{cui}$ ,  $\xi_{cus}$  y  $\xi_a$ , toman valores prácticamente constantes para todos los casos.

En el próximo capítulo se demuestra que los puntos  $\xi_{inn}$ ,  $\xi_{cui}$ ,  $\xi_{cus}$  y  $\xi_a$ , que definen la curva de reparto de carga se corresponden con los valores de las ordenadas 0,35; 0,65; 0,65 y 0,35, respectivamente, dados de abscisa menor a mayor, Figura 4.9.

Todos los cálculos han sido obtenidos mediante la herramienta Mathcad, un programa de cálculo simbólico, en el cual, partiendo de la geometría de los engranajes de perfil de evolvente, se han formulado las correspondientes expresiones de los diversos potenciales así como las restricciones geométricas, cuyos casos han sido rechazados, hasta la obtención general del potencial inverso de cada pareja de dientes a lo largo de la línea de engrane y los valores de reparto de carga.

# Capítulo 5

## Potencial unitario inverso aproximado

### 5.1 Introducción

Las ecuaciones definidas en el capítulo anterior que permiten calcular el potencial de deformación de los dientes de los engranajes interiores, implican la resolución de varias integrales de gran complejidad lo que conlleva recurrir a programas de cálculo numérico y, además, es necesario realizar dicho cálculo para cada posición de engrane. Este cálculo consume un considerable tiempo de ejecución, incluso para programas específicos de cálculo numérico y conlleva un largo código de programación para insertar todas las variables y relaciones entre ellas, lo que hace que sea fácil y común cometer errores, los cuales son tediosos de encontrar y corregir.

Esta complejidad para obtener los valores del potencial de forma analítica hace que sea necesario buscar una función aproximada con la que poder trabajar y analizar el

comportamiento de los dientes de engranajes. El objetivo de la función aproximada es la de encontrar una formulación lo más sencilla posible con parámetros que se puedan obtener rápidamente para cada caso de engranaje y que los resultados sean lo suficientemente aproximados como para poder despreciar los errores cometidos.

Por otro lado, es necesario que la función obtenida sea lo más simple posible para poder utilizarla en otras operaciones que requerirán su integración o derivación de forma que no complique la operativa.

## 5.2 Determinación de los puntos característicos

Para la obtención de los parámetros de las funciones aproximadas, los cuales se obtienen mediante la resolución de un sistema de ecuaciones, se determinan una serie de puntos característicos de la curva como puntos coincidentes de la función aproximada. Obviamente, a mayor número de parámetros será necesario un mayor número de ecuaciones, es decir, puntos característicos, y mejor será la aproximación de la curva, si bien, la expresión será igualmente más compleja.

Se han obtenido las curvas del potencial unitario inverso, así como el reparto de carga para una serie de casos con la ayuda del programa Mathcad. La curva en cuestión que se desea aproximar es la del potencial unitario inverso en función del parámetro adimensional  $\xi$  definido en el capítulo anterior.

Como primera aproximación se determina rápidamente, como se puede observar en la figura 5.1, que la curva se ajusta perfectamente con una función polinómica de grado 5, si bien, el concepto de función sencilla para trabajar no contempla expresiones con tantos parámetros que, además, sería necesario determinar para cada caso lo que precisaría 6 puntos característicos para obtener 6 ecuaciones. Quizás podría plantearse una función polinómica de grado 2 ó 3 sin embargo, éstas no se ajustan todo lo bien que se desea y siguen exigiendo demasiadas variables que sería necesario generalizar para todos los casos.

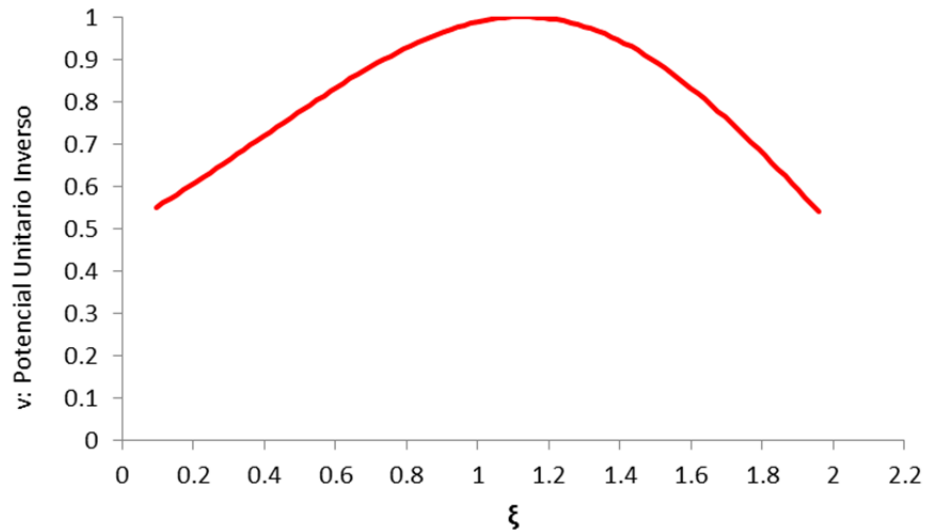


Figura 5.1: Función Potencial Unitario Inverso según  $\xi$

Sin embargo, tras el análisis de numerosas funciones de distinto tipo, se determina que, debido a la forma acampanada que presenta la curva, una función senoidal parece la opción más lógica. Para este tipo de solución se ha seguido la metodología presentada por [20] para engranajes de dentado exterior. La función que se propone es del tipo:

$$\cos(b(\xi - \xi_m))$$

Esta función presenta dos parámetros,  $b$  y  $\xi_m$ , que es preciso determinar. Para ello será necesario determinar dos puntos característicos de la curva que aporten las dos ecuaciones necesarias. Al tratarse de una función normalizada, se descarta el parámetro de amplitud.

Obtener estos dos puntos característicos en la función del potencial unitario inverso no es sencillo ya que, a primera vista, los puntos rápidamente identificables serían los extremos de la curva e incluso se podría considerar el máximo de la misma. Sin embargo, la posición de estos puntos presenta una gran variación entre unos casos y otros. Esto hace que no sea posible determinar un valor medio para estos puntos ya que el error cometido sería demasiado grande por lo que sería necesario obtener los mismos para cada caso concreto, lo que contradice uno

de los objetivos marcados que era la obtención sencilla de los parámetros de la curva aproximada.

Por otro lado, analizando en detalle la curva del reparto de carga, existen cuatro puntos claramente identificables,  $\xi_{inn}$ ,  $\xi_{cui}$ ,  $\xi_{cus}$  y  $\xi_a$ . El análisis de la curva del reparto de carga para distintos casos determina que sí aparece un valor relativamente constante de estos puntos, por lo que se pueden emplear en la determinación de los parámetros  $b$  y  $\xi_m$ .

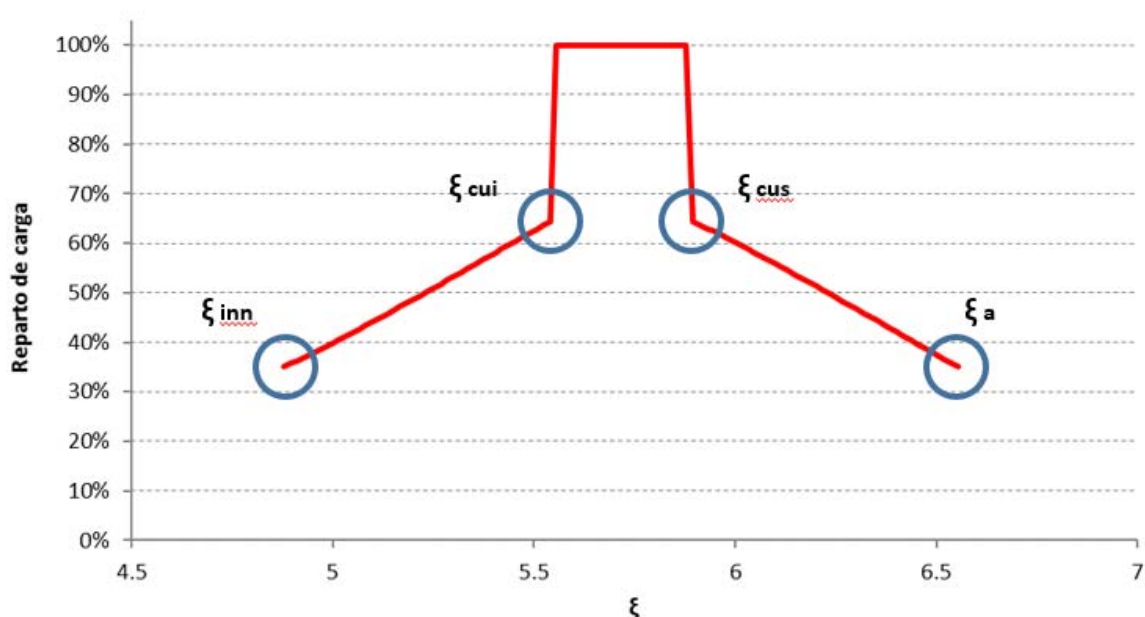


Figura 5.2: Reparto de carga según  $\xi$

Como ya se ha comentado, sólo son necesarias dos ecuaciones para obtener los parámetros buscados, es decir, se necesitan identificar dos puntos característicos de la curva de reparto de carga. Los puntos seleccionados son  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{cui}$ , los cuales se denominarán  $R(1)$  y  $R(2)$  en los apartados sucesivos.

Para la obtención de los puntos característicos se han analizado numerosos casos en los que se han ido variando distintos parámetros tanto del piñón como de la rueda desechando aquellos en los que se producía algunas de las restricciones geométricas comentadas en el capítulo 3.

Con el objetivo de determinar aquellos parámetros geométricos que mayor variación producen en las curvas del potencial unitario inverso, se han ido variando los mismos y analizando las curvas obtenidas. Tras este análisis, se ha llegado a la conclusión que los parámetros que mayor impacto tienen en la curva del potencial son:

- $z_1$ : Dientes del piñón.
- $z_2$ : Dientes de la corona.
- $\alpha_n$ : Ángulo de presión.
- $x$ : Desplazamiento.

Una vez obtenidos los parámetros principales que se van a variar para determinar cada caso independiente, se han obtenido los rangos de los mismos en los que no se presentan restricciones geométricas o, al menos, se producen menos. De esta forma, se obtienen una gran número de curvas para analizar.

La siguiente tabla muestra los rangos de valores de los principales parámetros geométricos:

Parámetros	Mínimo	Máximo
$z_1$	20	80
$z_2$	60	210
$\alpha_n$	$19^\circ$	$24^\circ$
$x$	-0.1	0.1

Tabla 5.1: Rango de variación de los parámetros geométricos principales

Cabe destacar que, si bien el máximo valor de  $z_1$  es mayor que el menor valor de  $z_2$ , no se han considerado los casos en los que  $z_1$  es mayor que  $z_2$  puesto que se trataría de casos físicamente imposibles.

Una vez determinados todos los casos de los que se van a obtener las curvas del potencial unitario inverso y el reparto de carga, se extraen los valores de  $R(1)$  y  $R(2)$  y se analizan.

Como se observa en la figura 5.3, los valores de  $R(1)$  y  $R(2)$  son prácticamente constantes para todos los casos analizados pudiendo despreciar la pequeña variación que se produce al variar los parámetros geométricos de los dientes escogidos.

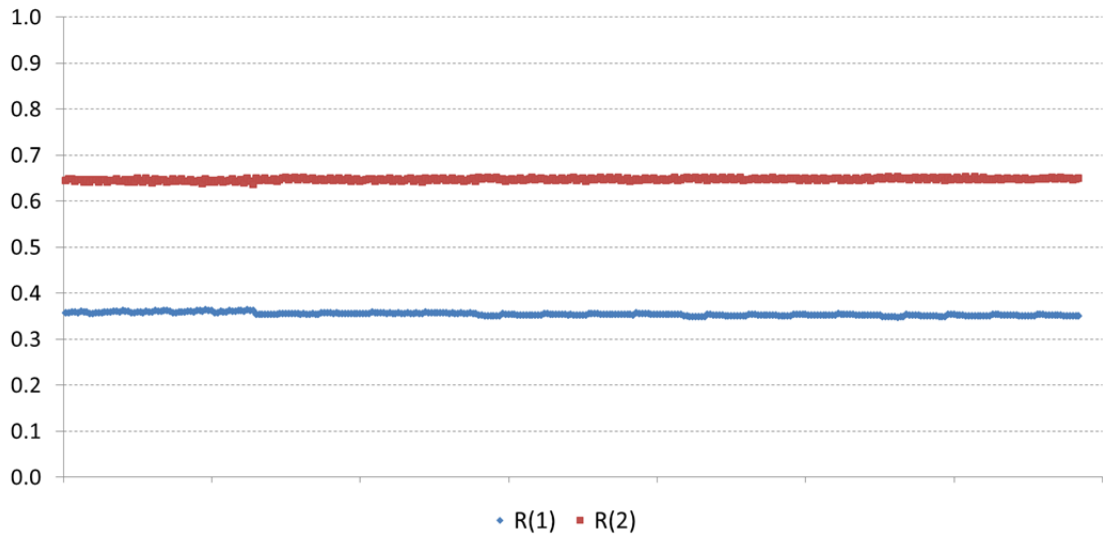


Figura 5.3: Valores de  $R(1)$  y  $R(2)$  para los múltiples casos modelados

Los valores medios de  $R(1)$  y  $R(2)$  que se consideran para la determinación de los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  de la función aproximada son:

- $R(1) = 0.35$
- $R(2) = 0.65$

### 5.3 Función aproximada “Coseno”

Como se ha comentado, se intenta aproximar la curva del potencial unitario inverso mediante una función del tipo:

$$v = \cos(b(\xi - \xi_m))$$



Los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  se determinan con los valores del reparto de carga de la misma forma que se ha explicado anteriormente. Esto es:

Para  $\xi = \xi_{in}$

$$\frac{\cos[b(\xi_{in} - \xi_m)]}{\cos[b(\xi_{in} - \xi_m)] + \cos[b(\xi_{in} - \xi_m + 1)]} = 0,35 = R(1)$$

Para  $\xi = \xi_{cui}$

$$\frac{\cos[b(\xi_{cui} - \xi_m)]}{\cos[b(\xi_{cui} - \xi_m)] + \cos[b(\xi_{cui} - \xi_m + 1)]} = 0,65 = R(2)$$

Para la obtención analítica de los parámetros se ha seguido el procedimiento que se detalla a continuación ajustando los valores de  $R(1)$  y  $R(2)$  a los obtenidos para engranajes interiores.

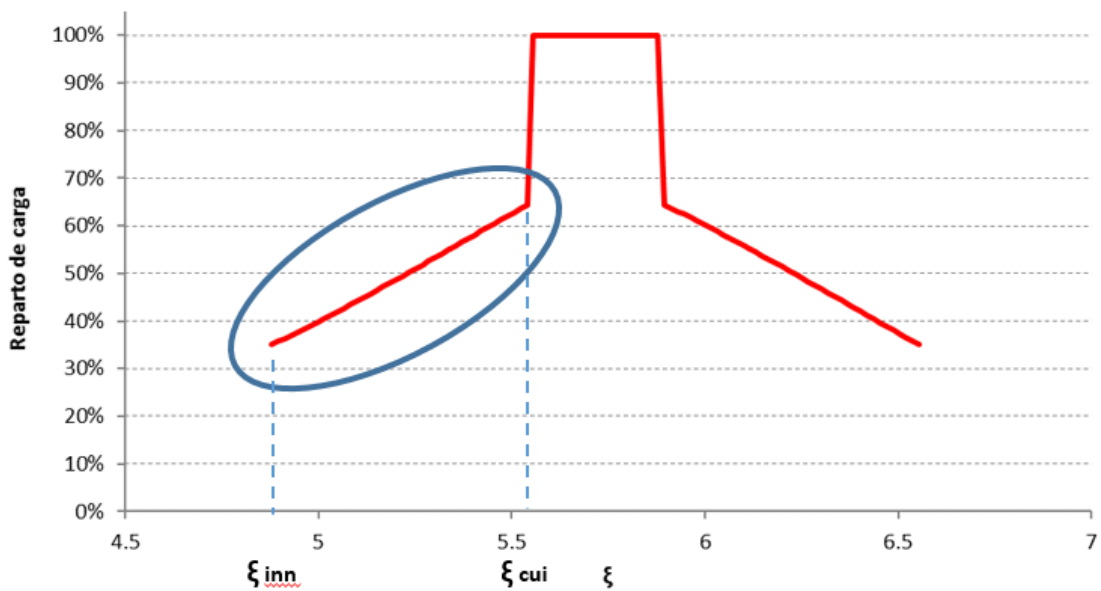


Figura 5.4: Rama de reparto ascendente

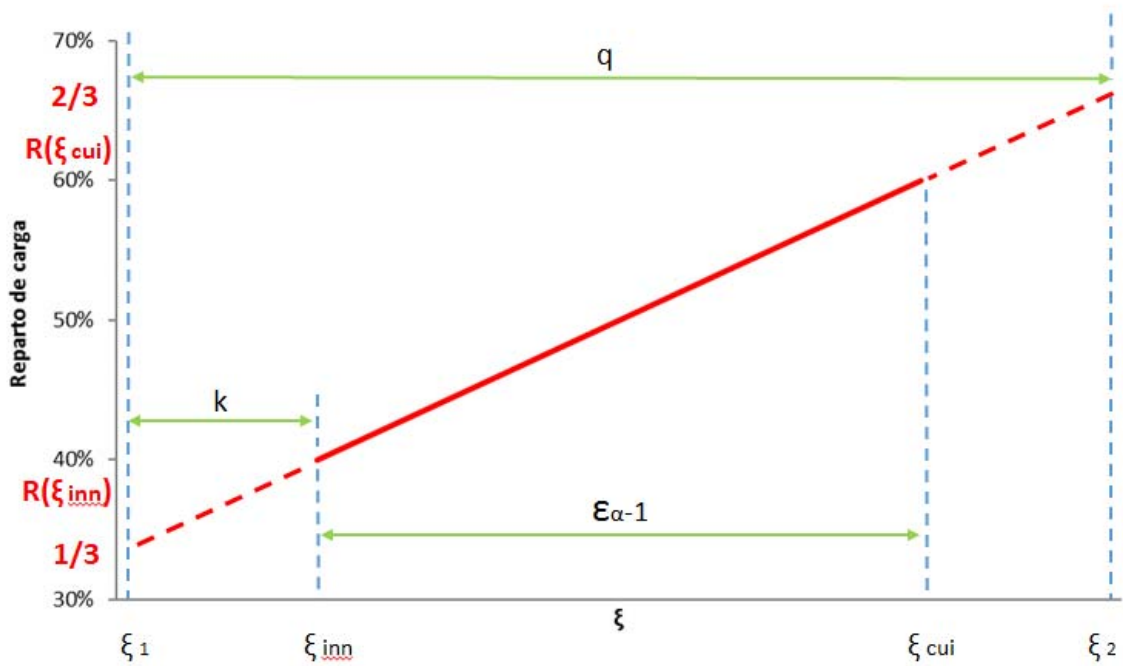


Figura 5.5: Valores de reparto en comparación a los engranajes de dentado exterior

De acuerdo a la figura 5.5 se tiene:

$$q = \frac{\epsilon_{\alpha} - 1}{3[R(\xi_{cui}) - R(\xi_{inn})]}$$

$$k = \frac{R(\xi_{inn}) - \frac{1}{3}}{\frac{R(\xi_{cui}) - R(\xi_{inn})}{\epsilon_{\alpha} - 1}}$$

Se define la variable C como:

$$C = \frac{1}{3[R(\xi_{cui}) - R(\xi_{inn})]}$$

Por lo que  $q$  queda:

$$q = C(\epsilon_{\alpha} - 1)$$

La relación entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$  es:

$$\xi_1 = \xi_2 - C(\varepsilon_\alpha - 1)$$

El valor del reparto de carga en los puntos  $\xi_1$  y  $\xi_2$  para la función coseno aproximada es:

$$\frac{\cos[b(\xi_1 - \xi_m)]}{\cos[b(\xi_1 - \xi_m)] + \cos[b(\xi_1 - \xi_m + 1)]} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cos[b(\xi_2 - \xi_m)]}{\cos[b(\xi_2 - \xi_m)] + \cos[b(\xi_2 - \xi_m + 1)]} = \frac{2}{3}$$

Desarrollando la función coseno en serie de Taylor y aproximándola a los dos primeros términos:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

Operando ambas expresiones con la aproximación del coseno en serie de Taylor:

$$\frac{1}{2}b^2[(\xi_1 - \xi_m - 1)^2 - 2] = 1$$

$$\frac{1}{2}b^2[(\xi_2 - \xi_m + 1)^2 + 2(\xi_2 - \xi_m) + 1] = 1$$

Igualando ambas expresiones:

$$(\xi_1 - \xi_m - 1)^2 - 2 = (\xi_2 - \xi_m + 1)^2 + 2(\xi_2 - \xi_m) + 1$$

Sustituyendo  $\xi_1$  por  $\xi_2 - C(\varepsilon_\alpha - 1)$

$$(\xi_2 - C(\varepsilon_\alpha - 1) - \xi_m - 1)^2 - 2 = (\xi_2 - \xi_m + 1)^2 + 2(\xi_2 - \xi_m) + 1$$

Operando:

$$(\xi_2 - \xi_m)[4 + 2(C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1)] = (C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1)^2 - 4$$

La expresión se reduce a:

$$\xi_2 - \xi_m = \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) - 1}{2}$$

Por tanto:

$$\xi_m = \xi_2 - \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) - 1}{2} = \xi_1 + \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2}$$

Como  $\xi_1 = \xi_{inn} - k$

$$\xi_m = \xi_{inn} - k + \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2}$$

Por otro lado, para el cálculo de b se tiene:

$$\frac{1}{2}b^2[(\xi_1 - \xi_m - 1)^2 - 2] = 1$$

Sabiendo que

$$\xi_m = \xi_1 + \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2}$$

Queda:

$$\frac{1}{2}b^2 \left[ \left( \xi_1 - \xi_1 - \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2} - 1 \right)^2 - 2 \right] = 1$$

Despejando  $b$ :

$$b = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{C(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2} \right)^2 - 1}}$$

Sabiendo que los valores de  $R(1)$  y  $R(2)$  de los engranajes interiores son 0,35 y 0,65 respectivamente:

$$C = \frac{1}{3[R(\xi_{cui}) - R(\xi_{inn})]} = \frac{1}{3(0,65 - 0,35)} = 1,11$$

$$k = \frac{R(\xi_{inn}) - \frac{1}{3}}{\frac{R(\xi_{cui}) - R(\xi_{inn})}{\varepsilon_\alpha - 1}} = \frac{0,35 - \frac{1}{3}}{\frac{0,65 - 0,35}{\varepsilon_\alpha - 1}} = \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{18}$$

Finalmente queda:

$$\xi_m \cong \xi_{inn} + \frac{\varepsilon_\alpha}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1,11(\varepsilon_\alpha - 1) + 1}{2} \right)^2 - 1}}$$

Con estos parámetros así obtenidos se consiguen curvas aproximadas como las que se muestran a continuación.

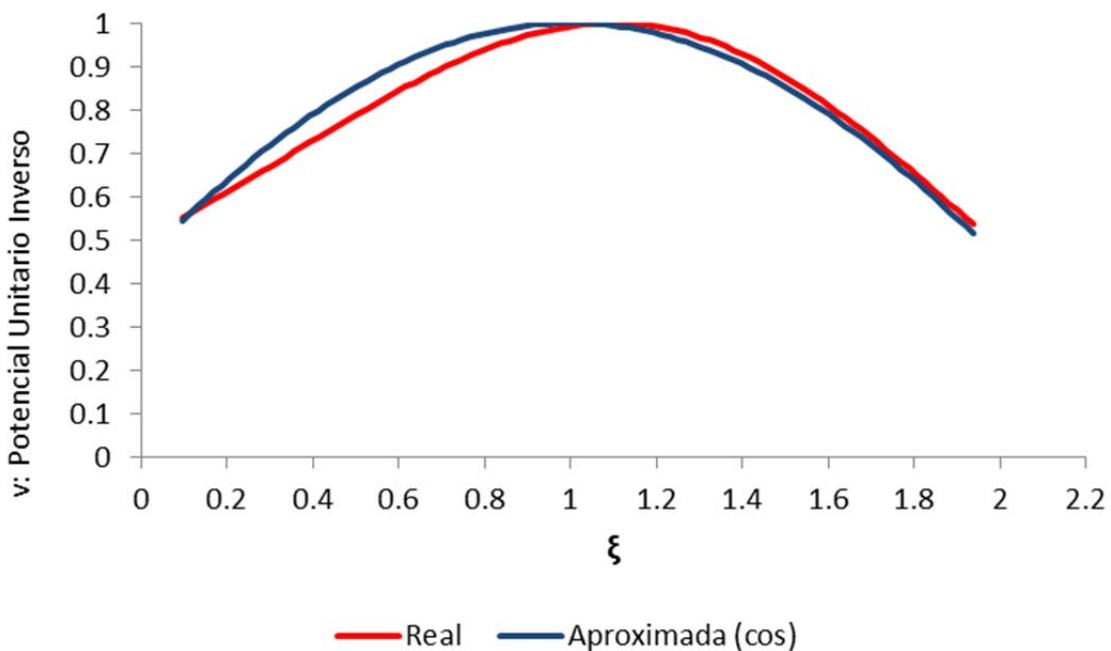


Figura 5.6: Función Real y Aproximación con coseno

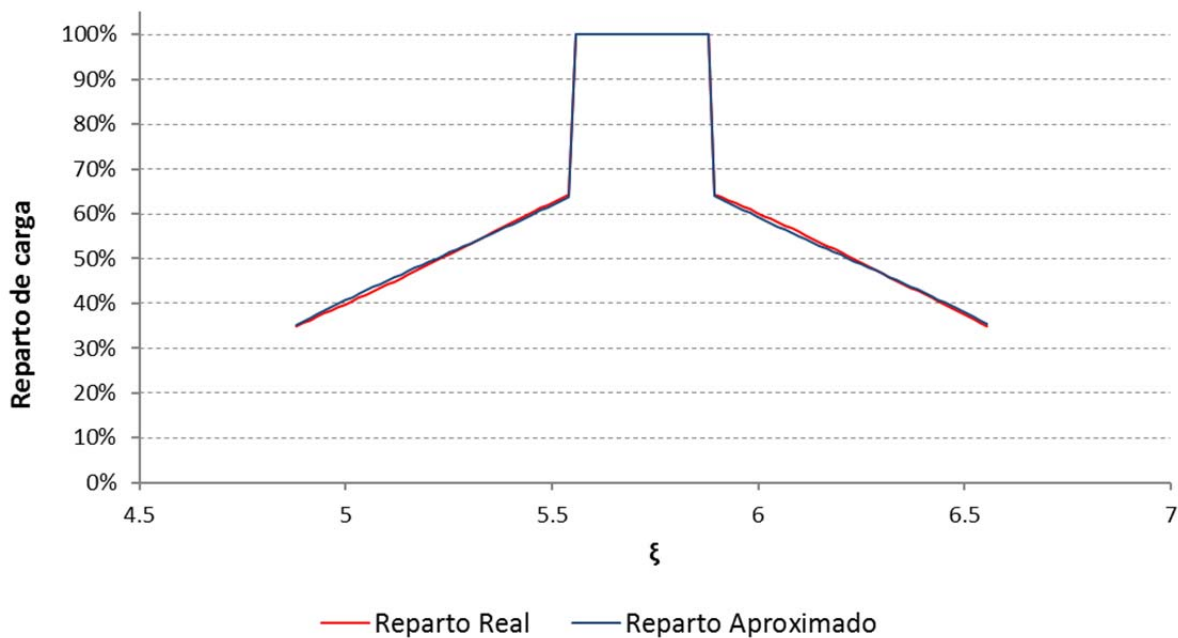


Figura 5.7: Curva de Reparto Real y Aproximada con coseno

### 5.4 Función aproximada “Coseno<sup>3</sup>”

Si bien la aproximación realizada mediante la función del coseno se ajusta lo suficientemente bien como para poder ser empleada en otros cálculos, en este trabajo se ha buscado afinar un poco más con otras expresiones que, si bien no son tan sencillas como la del coseno, consigan reducir el error de aproximación.

Tras múltiples pruebas con distintas curvas se comprueba que la función senoidal elevada al cubo se ajusta aún mejor, consiguiendo correlaciones superiores al 99%. En este caso la función es la siguiente:

$$v = \cos(b(\xi - \xi_m))^3$$

La obtención de los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  se consigue mediante la evaluación de la función aproximada con la función del reparto de carga de la misma forma que se ha realizado para la función coseno. Si bien, en este caso la determinación analítica de dichos parámetros se vuelve muy compleja al tener polinomios de alto grado. Esto hace que el desglose de la función en serie de Fourier lejos de simplificarse, se va complicando hasta obtener expresiones de gran longitud que poco ayudan a la simplicidad buscada.

Por tanto, debido a que la función aproximada consta de tan solo dos parámetros y que el sistema de ecuaciones no es tedioso ni complejo, se propone la resolución del mismo por métodos numéricos con la ayuda de un “solver” de ecuaciones no lineales. Es cierto que esta solución implica el empleo de métodos numéricos, si bien, en este caso se trata de la simple resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que cualquier programa de cálculo numérico resuelve inmediatamente. Por ello, se considera que se mantiene la sencillez buscada y permite mantener la precisión en la determinación de los parámetros.

Los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  se determinan con los valores del reparto de carga de la misma forma que se ha explicado anteriormente. Esto es:

Para  $\xi = \xi_{in}$

$$\frac{\cos[b(\xi_{in} - \xi_m)]^3}{\cos[b(\xi_{in} - \xi_m)]^3 + \cos[b(\xi_{in} - \xi_m + 1)]^3} = 0,35 = R(1)$$

Para  $\xi = \xi_{cui}$

$$\frac{\cos[b(\xi_{cui} - \xi_m)]^3}{\cos[b(\xi_{cui} - \xi_m)]^3 + \cos[b(\xi_{cui} - \xi_m + 1)]^3} = 0,645 = R(2)$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con cualquier programa de resolución se sistemas de ecuaciones no lineales nos da los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  buscados. Debido al carácter cíclico de las funciones senoidales, la solución al sistema de ecuaciones no es única y conviene determinar el punto de comienzo de iteración en el intervalo en el que se encuentra la solución válida:

$$b = 0,7 \quad ; \quad \xi_m = \frac{\xi_a - \xi_{inn}}{2}$$

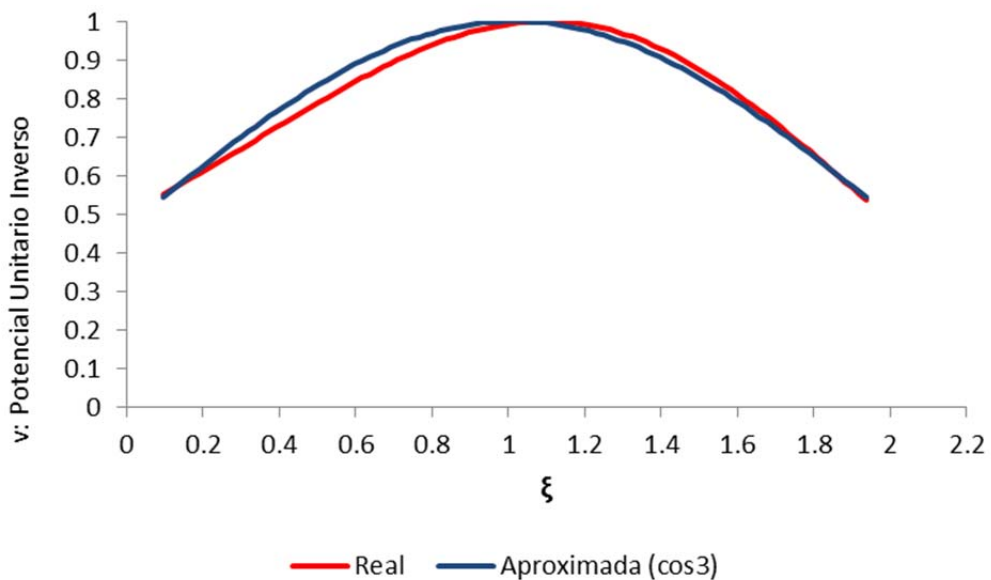


Figura 5.8: Función Real y Aproximación con “coseno<sup>3</sup>”



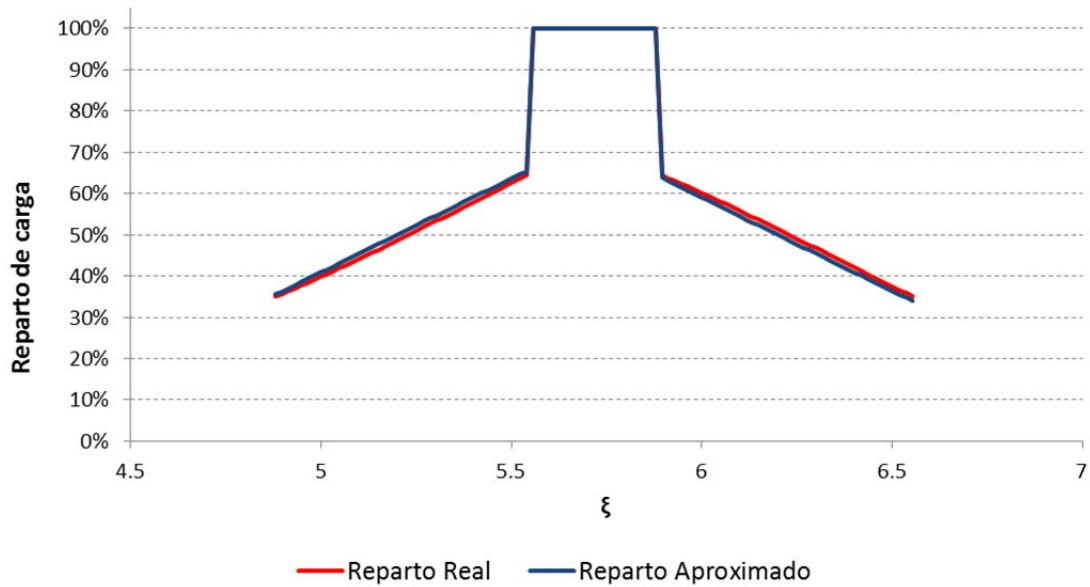


Figura 5.9: Reparto de carga Real y Aproximación con “coseno<sup>3</sup>”

En el siguiente capítulo se estudia la validez de las aproximaciones propuestas, tanto la función “coseno” como la función “coseno<sup>3</sup>” comprobándose, para los rangos de variación habituales de las variables de diseño, un extraordinario ajuste global de la función aproximada a la real calculada numéricamente en cada caso, así como semejante validez en la localización del valor máximo de la función  $v(\xi)$  y el estimado  $\xi_m$ .



# Capítulo 6

## Estudio de fiabilidad

En el capítulo anterior se han presentado dos propuestas de función aproximada para el potencial unitario inverso de engranajes interiores, cuyos parámetros se han obtenido ajustando el punto de contacto inicial y el punto de contacto único inferior de la curva de reparto de carga.

En objeto del presente capítulo es el análisis de la bondad de estas funciones aproximadas. Para ello se ha determinado el error máximo cometido, presentado como error relativo entre el valor aproximado y el valor real, la posición relativa del mismo, los errores cometidos en los extremos de la curva, el valor de correlación  $R^2$  obtenido entre la curva original y la aproximada, así como la desviación en la determinación del punto de máximo potencial.

## 6.1 Introducción

Como se ha visto anteriormente, es necesario conseguir una función aproximada que sea sencilla de obtener y al mismo tiempo se ajuste lo suficientemente bien a la realidad de forma que el error cometido sea despreciable para los cálculos posteriores. En este sentido y sabiendo que dicha función será empleada posteriormente en otros cálculos asociados a los engranajes, las funciones senoidales presentan la ventaja de su fácil derivación e integración sin complicar excesivamente las expresiones.

Si bien las funciones propuestas: “coseno” y “coseno<sup>3</sup>”, a primera vista parecen ajustarse suficientemente bien a la curva del potencial unitario inverso y presentar un error prácticamente despreciable al obtener el reparto de carga en los engranajes, es necesario llevar a cabo un análisis en profundidad que detalle el comportamiento para diferentes casos de engranajes determinando su grado de ajuste los errores cometidos.

Como se ha comentado en el capítulo anterior, se han definido los principales parámetros geométricos de los dientes y el rango de valores que, siendo suficientemente amplio como aportar generalidad al estudio, presenta pocos casos con restricciones geométricas. De esta forma, se recuerda los parámetros definidos y su rango de valores:

- $z_1$ : Dientes del piñón. Los valores considerados varían entre 20 y 80
- $z_2$ : Dientes de la corona. Los valores considerados varían entre 60 y 210
- $\alpha_n$ : Ángulo de presión. Se han considerado ángulos entre  $19^\circ$  y  $24^\circ$
- $x$ : Desplazamiento. Los valores considerados varían entre -0,1 y 0,1

*donde:  $x_1 = -x_2 = -x_0$*

El resto de parámetros geométricos toma los siguientes valores:

- |               |                   |
|---------------|-------------------|
| - $z_0$ : 40  | - $h_{a0}$ : 1.25 |
| - $m$ : 0.001 | - $r_f$ : 0.25    |
| - $b$ : 0.003 | - $\beta$ : 0     |
| - $h_a$ : 1   |                   |

Esta selección de parámetros da lugar a casos con grado de recubrimiento entre 1 y 2.

Desechando los casos que producían algún tipo de restricción geométrica de las definidas en el capítulo 3, se han analizado en total más de 700 casos distintos de engranajes interiores. A continuación, se muestran los casos extremos para cada tipo de análisis efectuado y las curvas (real y aproximada) que resultan para dicho caso.

## 6.2 Análisis de la función “coseno”

La principal ventaja de trabajar con una función de tipo coseno es que mantiene constante el grado de la función cuando se deriva o integra lo que la hace muy útil para poder operar con ella sin complicar las expresiones y los cálculos.

### 6.2.1. Correlación $R^2$ potencial unitario inverso

El coeficiente de correlación  $r$  de Pearson es una medida de la relación lineal entre dos variables cuantitativas aleatorias y es independiente de la escala de medida de las mismas. Este coeficiente se emplea para medir el grado de relación de dos variables y se calcula como:

$$r_{xy} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

La regresión lineal  $R^2$  es el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson:

$$R^2 = r_{xy}^2$$

El promedio del valor de la correlación para la aproximación mediante el coseno es superior a 0,99 lo que supone unos resultados muy buenos.

Como se puede observar en la figura 6.1., la correlación para los distintos parámetros es en general cercana al valor unitario con algunos casos que quedan justo por debajo de 0,98. En efecto, el menor valor de  $R^2$  encontrado en todos los casos analizados es de 0,976, siendo el promedio de 0,994 y la mejor aproximación 0,998.

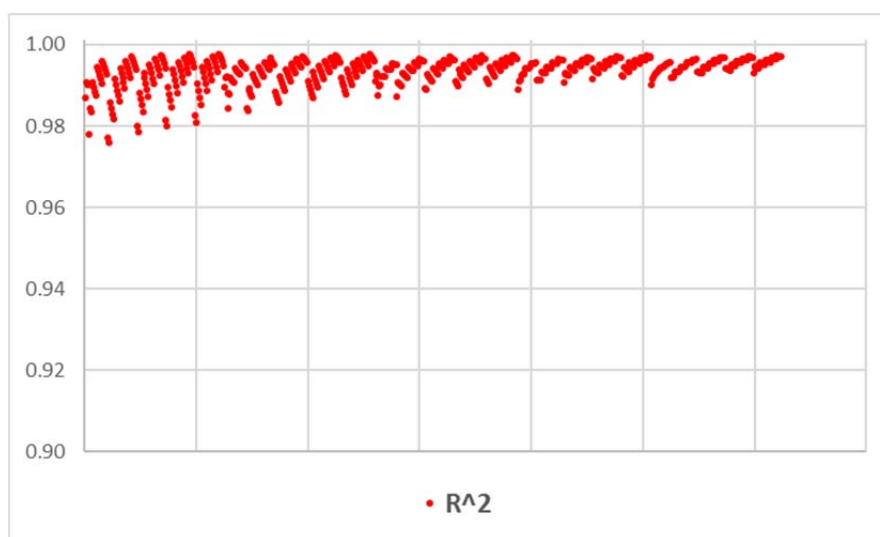


Figura 6.1: Valores de la correlación  $R^2$  para la función coseno

La figura 6.2. muestra la curva real y la aproximada para el caso con peor correlación.

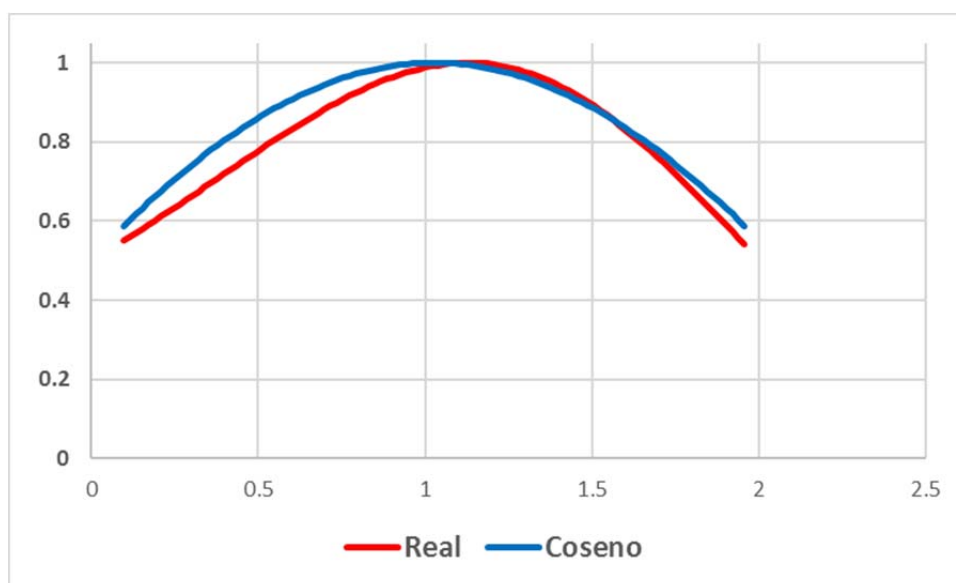


Figura 6.2: Curva real y aproximada para el caso con peor correlación

En la figura 6.2 se observa que la curva aproximada se aleja de la real en la parte izquierda de la misma presentando valores superiores. Una vez alcanzado el máximo, ambas curvas se ajustan mejor.

Como se ha comentado, la figura anterior muestra el peor caso de todos los analizados. En general la curva aproximada se ajusta más a la real como se observa en la figura 6.3. la cual muestra la mejor correlación.

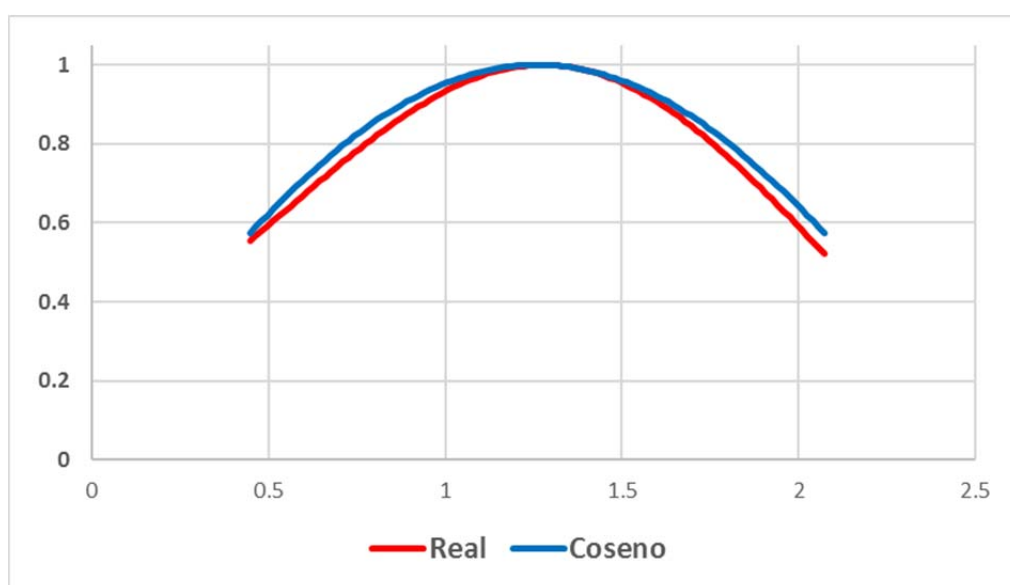


Figura 6.3: Curva real y aproximada para el caso con mejor correlación

### 6.2.2. Máximo error

Así mismo, se ha determinado la diferencia máxima entre ambas curvas diferenciando los casos en los que el error es positivo (llamado superior), es decir, la curva aproximada toma valores superiores a la real y, por tanto, se encuentra por encima de ésta y los casos con error “inferior” máximo donde la curva aproximada está por debajo de la real. El error máximo se presenta como error relativo al valor real:

$$error = \frac{v_{aprox}(\xi) - v_{real}(\xi)}{v_{real}(\xi)}$$

La figura 6.4. muestra el error relativo máximo para valores de la curva aproximada que se encuentran por encima de la curva real. El error máximo está acotado entre 7 y 13% siendo el máximo error encontrado de 12,7%, el menor 7,8% y el promedio de todos los casos presenta un error máximo de 10,5%.



Figura 6.4: Diferencia relativa con valores aproximados por encima

La figura 6.5. muestra las curvas para el caso con el error superior máximo.

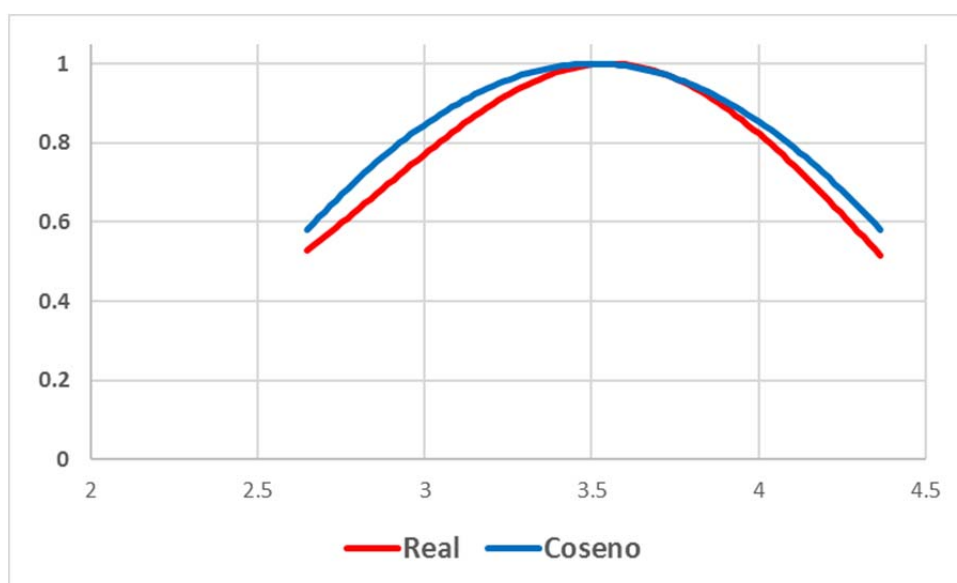


Figura 6.5: Curva real y aproximada para el caso con mayor error superior



En la siguiente figura se puede ver dónde se produce el máximo error superior. Se observa que éste se produce bien el punto último de contacto  $\xi_{inn+\epsilon_\alpha}$  o en el entorno del 13% del rango de contacto, es decir, en la parte izquierda de la curva.

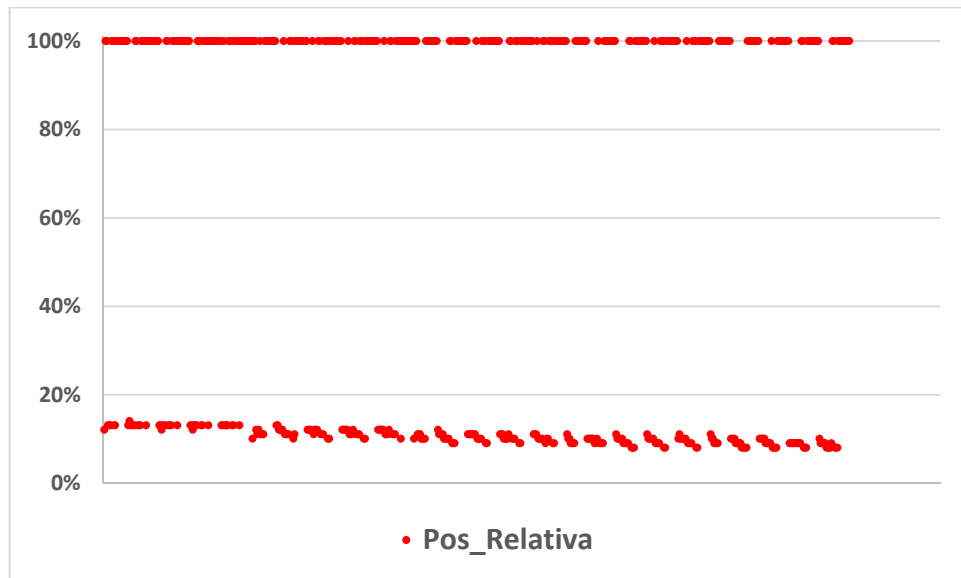


Figura 6.6: Posición relativa del error máximo superior

Del mismo modo se ha realizado el análisis para el caso de valores aproximados por debajo de los reales.

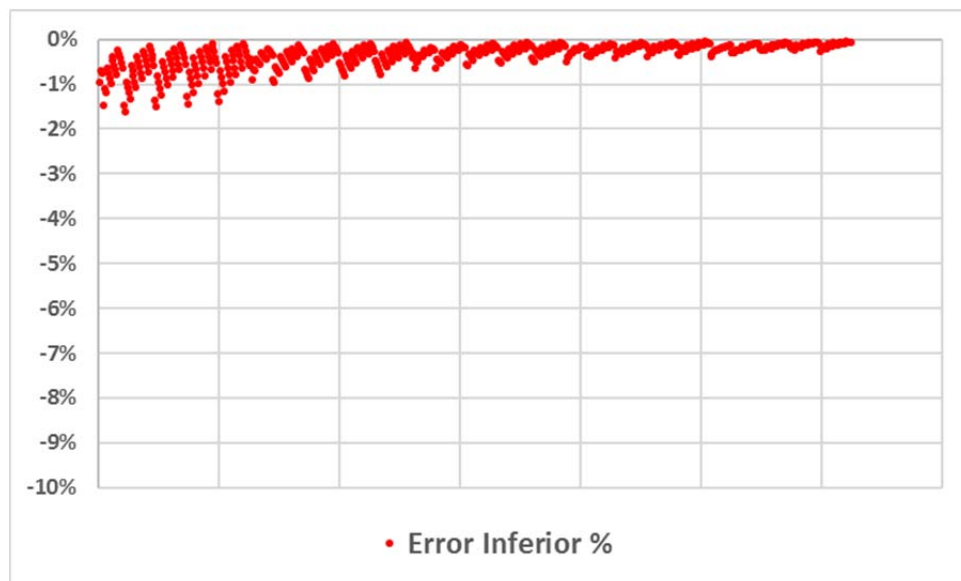


Figura 6.7: Diferencia relativa con valores aproximados por debajo

Como se puede observar en la figura 6.7., el error inferior es muy reducido siendo del entorno del 1%. En concreto, el máximo cometido es del 1,6% presentando un promedio del 0,3%.

Comparando estos valores con los del error superior, se puede extraer que la aproximación del potencial unitario inverso mediante una función coseno resulta en una curva aproximada que, en general, se encuentra por encima de la curva real.

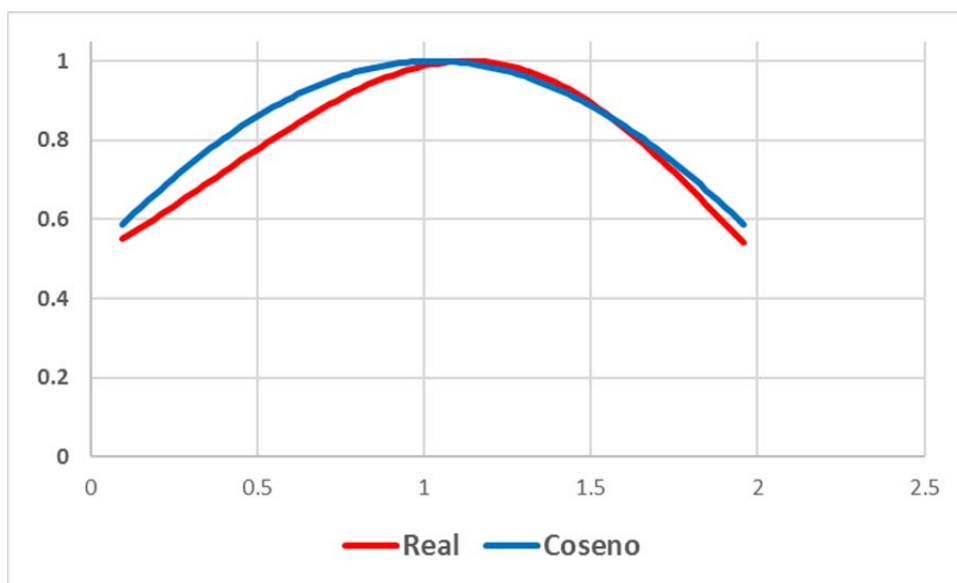


Figura 6.8: Curva real y aproximada para el caso con mayor error inferior

La localización del máximo error inferior está entre el 66% y el 52% con un promedio del 57%, es decir, ligeramente a la derecha de la curva cerca del máximo

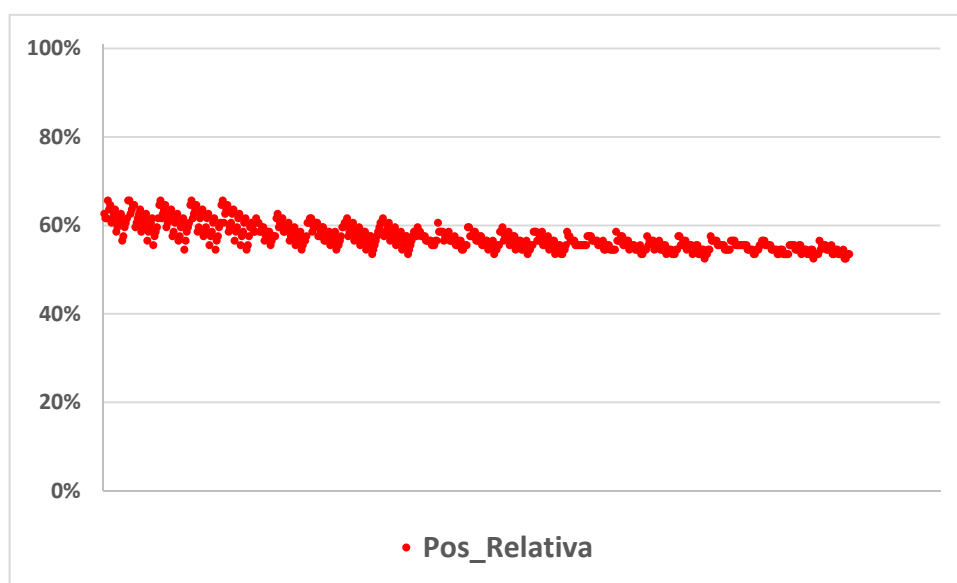


Figura 6.9: Posición relativa del error máximo inferior

### 6.2.3. Error en los extremos

Observando que el error en los extremos puede llegar a ser el error máximo cometido, se analiza en detalle el error en el punto de contacto de entrada  $\xi_{inn}$  y el de salida  $\xi_{inn+\epsilon\alpha}$ .

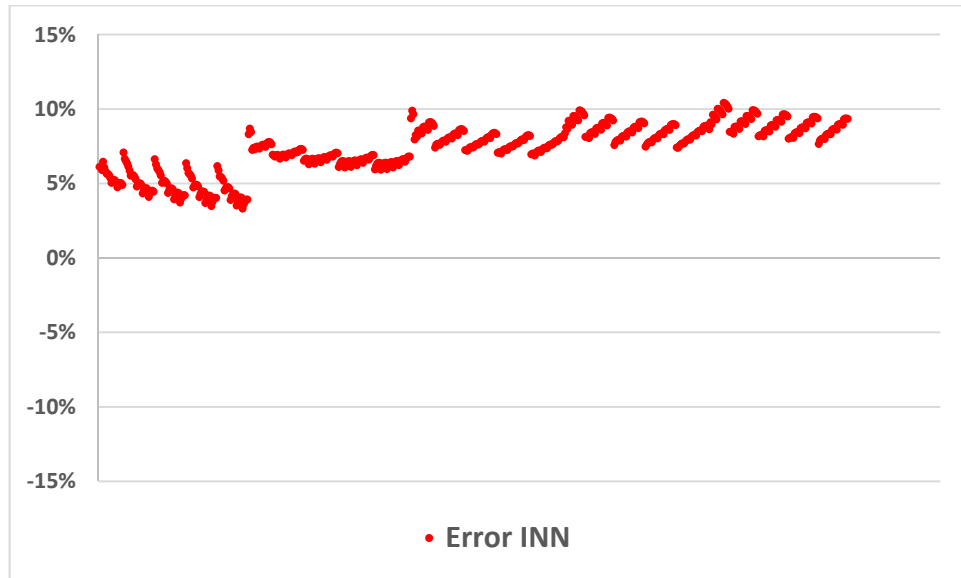


Figura 6.10: Error en el punto de contacto inicial  $\xi_{inn}$

El error cometido en el punto inicial varía entre el 3% y el 10% con un valor promedio del 7,5%. En el caso del error en el punto de salida (extremo derecho de la curva) los valores varían entre el 7% y el 13% con un valor promedio del 10%.

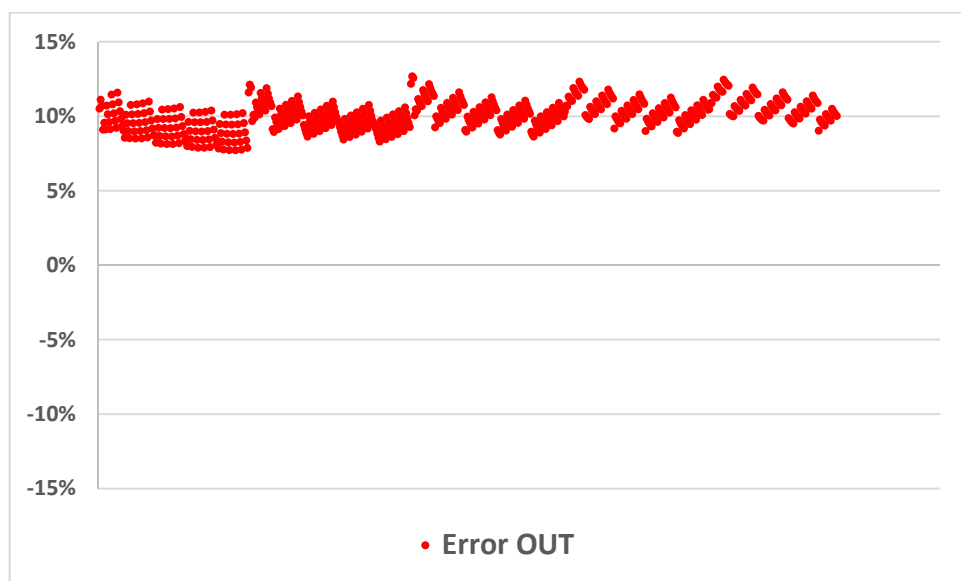


Figura 6.11: Error en el punto de contacto final  $\xi_{inn+\epsilon\alpha}$

### 6.2.4. Error localización del máximo

Otra de las diferencias analizadas entre la curva real y aproximada es el error de localización del máximo del potencial unitario inverso calculado como el error relativo al intervalo de  $\xi$ . En todos los casos analizados, el máximo real se encuentra ligeramente a la derecha del máximo de la función coseno el cual se encuentra en el punto medio de la curva. Si bien, las diferencias son pequeñas.

$$Error = (\xi_{Max\_aprox} - \xi_{Max\_real}) / \epsilon_\alpha$$

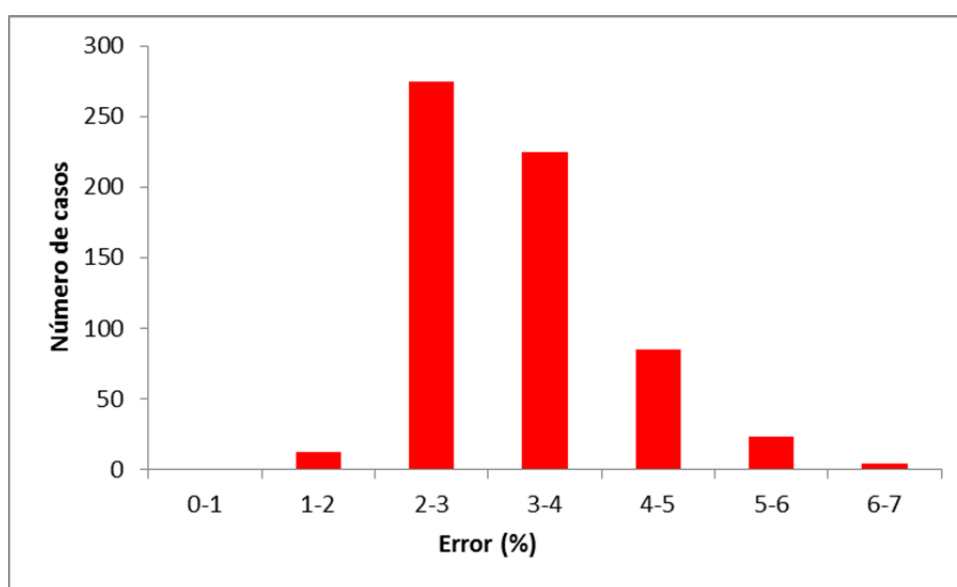


Figura 6.12: Distribución del error relativo en la localización del máximo

Se observa que el error máximo es del 6-7%, siendo la mayoría del entorno 2-4%.

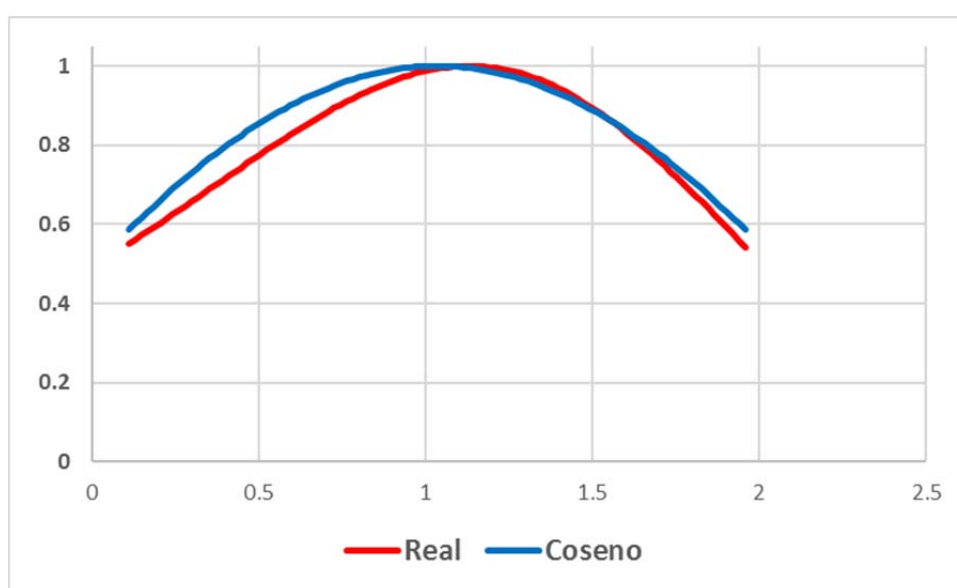


Figura 6.13: Curva real y aproximada para el caso con mayor error de localización

### 6.2.5. Máximo error en el reparto de carga

Por último, el análisis del reparto de carga con la función aproximada muestra que los errores son más reducidos que al comparar el potencial unitario inverso.

En el caso de usar la función coseno como función aproximación, se observa que la correlación mínima es de 0,988 siendo el promedio igual a 0,997. En cuanto a los errores, el máximo error es del 7,7% siendo la media del máximo error de cada caso del 6%.

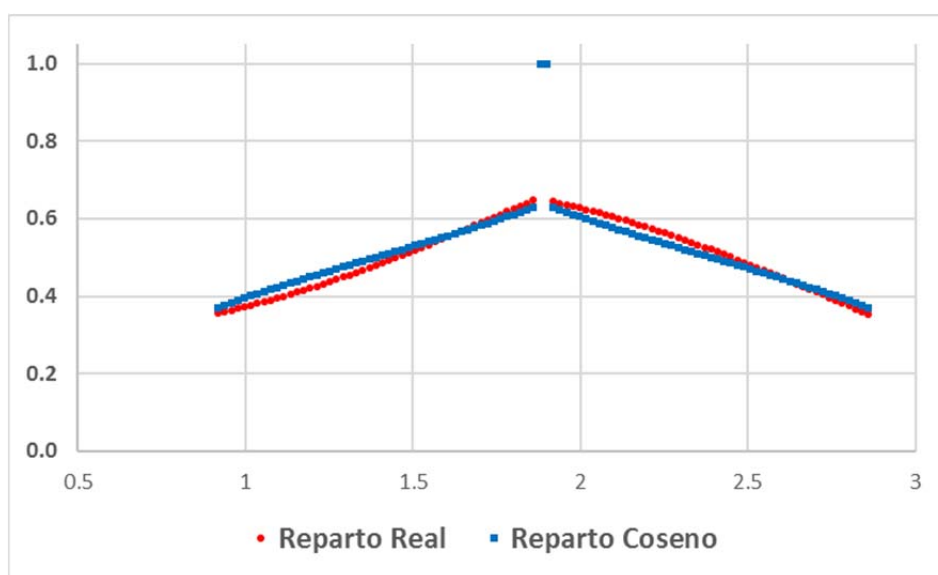


Figura 6.14: Reparto de carga real y aproximado para el caso con menor correlación

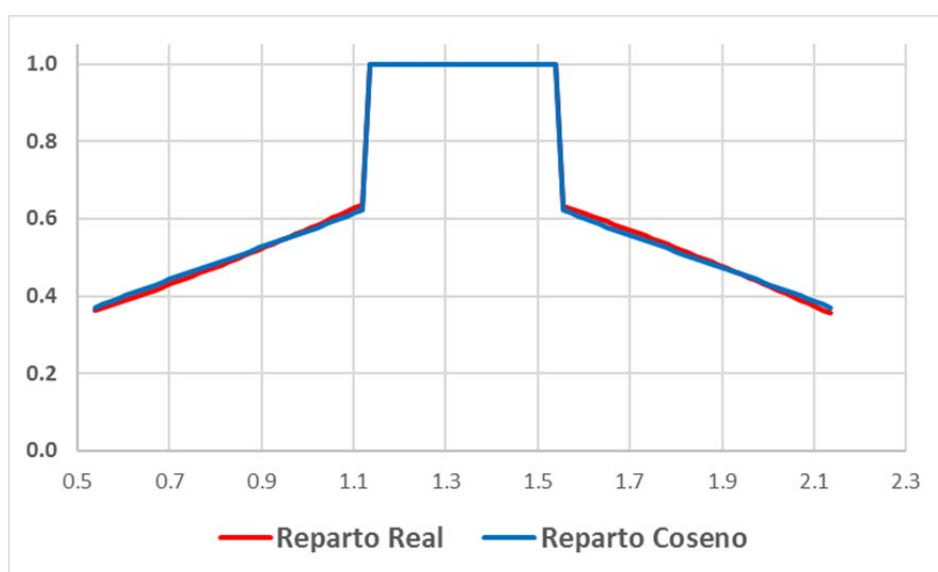


Figura 6.15: Reparto de carga real y aproximado para el caso con mayor correlación

### 6.3 Análisis de la función “coseno<sup>3</sup>”

Con objetivo de lograr aún mejores resultados en la correlación de la función aproximada con la real, se analiza función coseno<sup>3</sup>.

Esta función, como se verá más adelante, se ajusta más a los valores reales repartiendo de una forma más uniforme las diferencias, es decir, el error superior es del mismo orden que el inferior, al contrario de los que ocurría con la función coseno.

Por otro lado, si bien se sigue trabajando con una función de tipo coseno, al estar elevada al cubo, no presenta las ventajas que presentaba la función coseno en cuanto a la simplicidad para operar con ella, especialmente en casos en los que se requiera su integración.

#### 6.3.1. Correlación $R^2$ potencial unitario inverso

En el caso del coseno<sup>3</sup>, todos los casos presentan valores de  $R^2$  superior a 0,98 lo que indica un ajuste de la curva muy bueno. En efecto, el peor ajuste presenta una correlación de 0,982 siendo el promedio de 0,997.

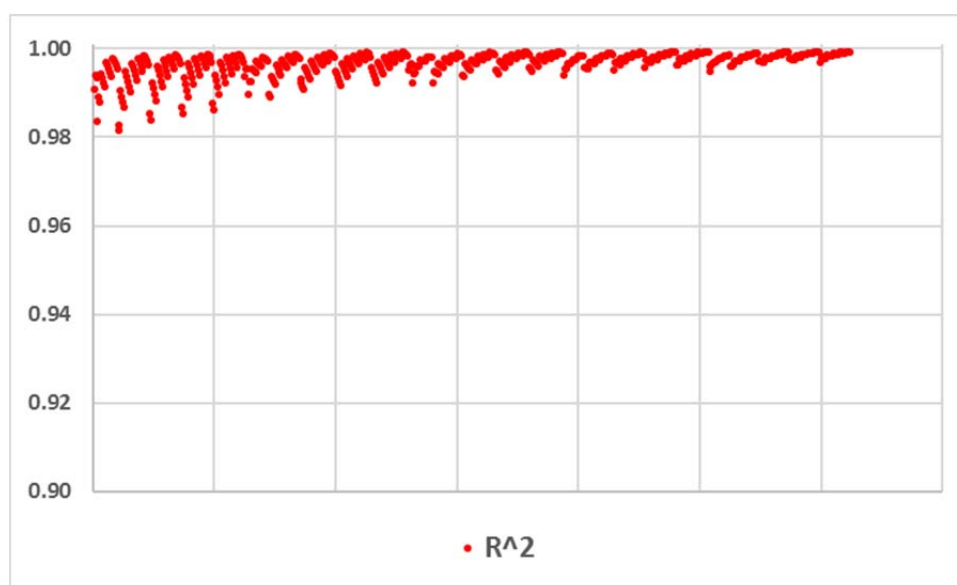


Figura 6.16: Valores de la correlación  $R^2$  para la función coseno<sup>3</sup>

A continuación, se presentan las curvas para los casos con peor y mejor correlación.

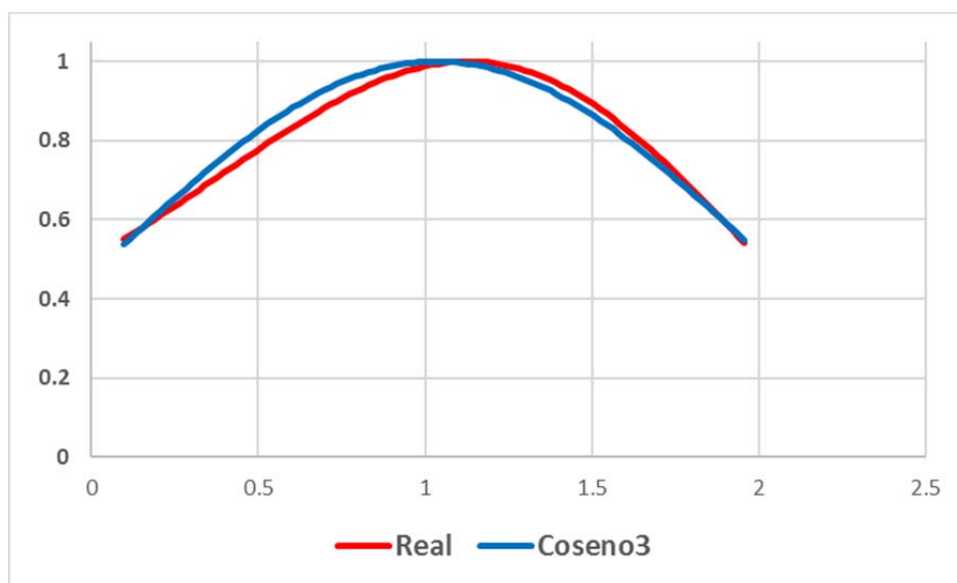


Figura 6.17: Curva real y aproximada para el caso con peor correlación

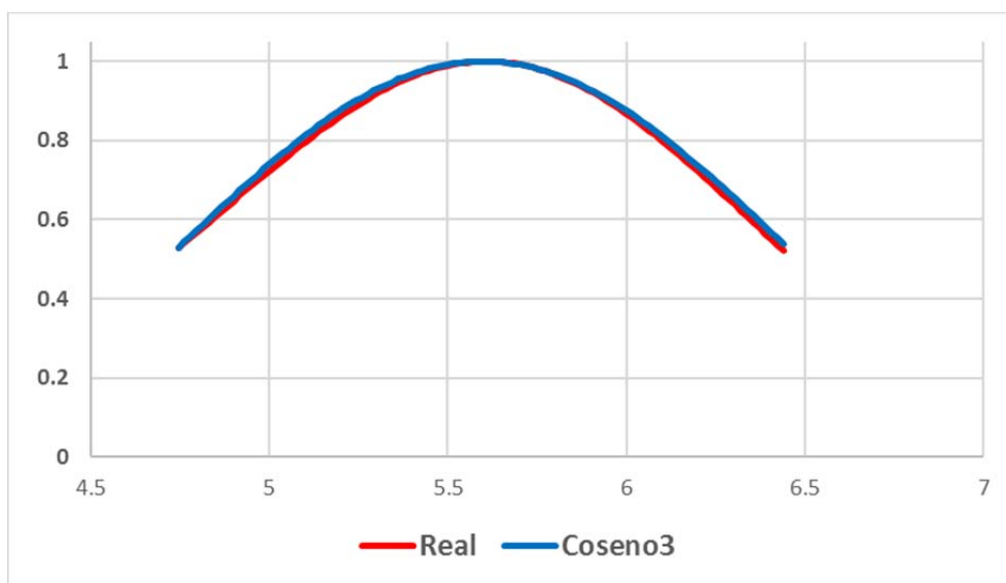


Figura 6.18: Curva real y aproximada para el caso con mejor correlación

Como se observa en las figuras 6.17. y 6.18., el ajuste que se consigue es francamente bueno, siendo prácticamente coincidente en los casos con más alta correlación.

### 6.3.2. Máximo error

Como se ha hecho con la función coseno, se ha determinado la diferencia máxima entre ambas curvas tanto para valores aproximados por encima de los reales como para valores aproximados por debajo.

La figura 6.19. muestra el error relativo máximo para valores de la curva aproximada que se encuentran por encima de la curva real. El error máximo está acotado entre 1 y 7% siendo el máximo error encontrado de 6,3%, el menor 1,1% y el promedio de todos los casos presenta un error máximo de 3,5%.

Se aprecia cómo se ha reducido claramente el error máximo superior con respecto a la función coseno siendo ahora del orden de la tercera parte.

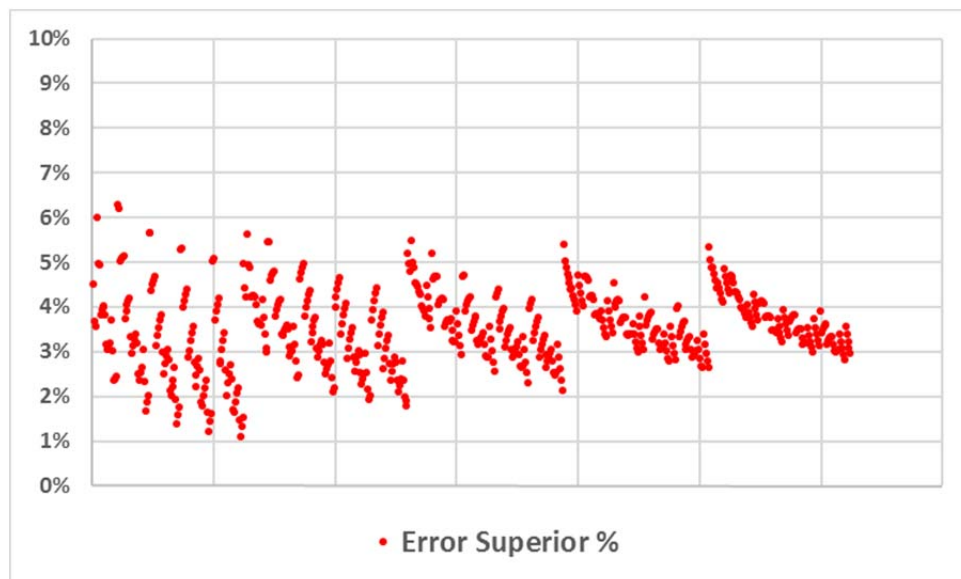


Figura 6.19: Diferencia relativa con valores aproximados por encima

La figura 6.20. muestra las curvas para el caso con el error superior máximo.



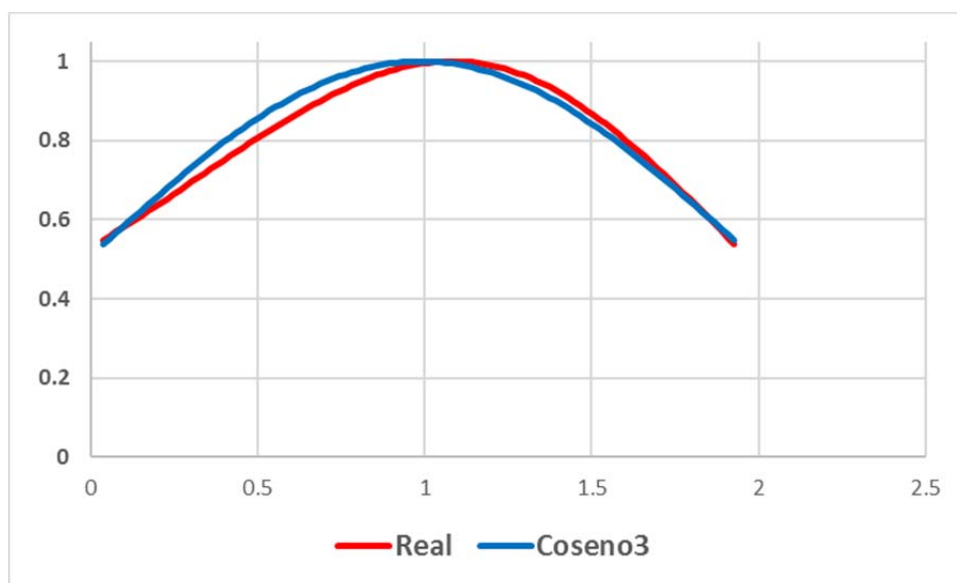


Figura 6.20: Curva real y aproximada para el caso con mayor error superior

El error superior siendo encontrándose en la parte izquierda de la curva como ocurría con la función coseno, si bien, la diferencia con los valores reales es ahora mucho menor. Se muestra a continuación la posición relativa del error máximo superior encontrado. En la figura 6.21 se puede ver cómo este error se encuentra en el extremo de contacto último en algunos casos o en el entorno del 22%. Por lo tanto, descartando el error cometido en los extremos, que será estudiado a continuación, la curva aproximada se “despega” de la real por encima con su máxima diferencia en la parte intermedia del lado izquierdo.

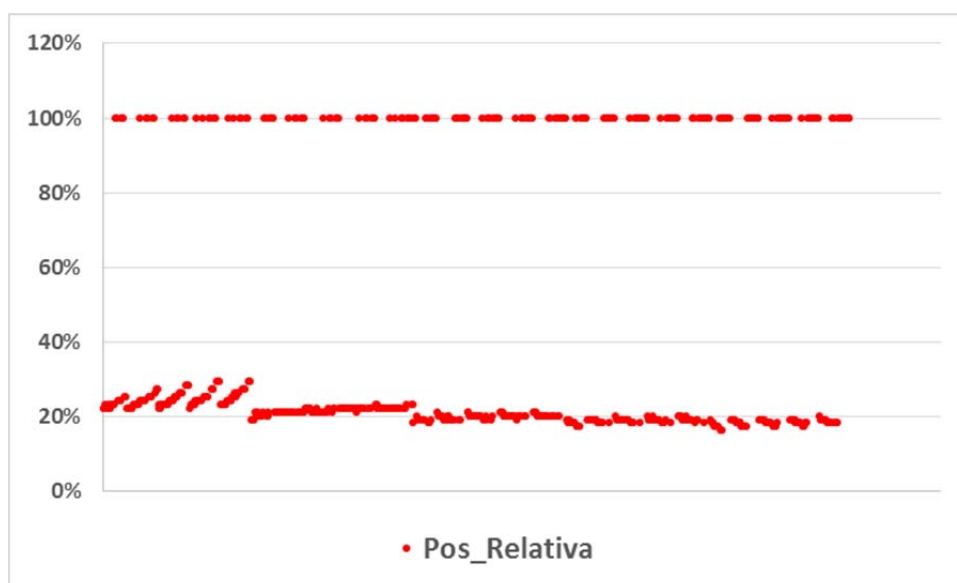


Figura 6.21: Posición relativa del error máximo superior

Del mismo modo se ha realizado el análisis para el caso de valores aproximados por debajo de los reales.

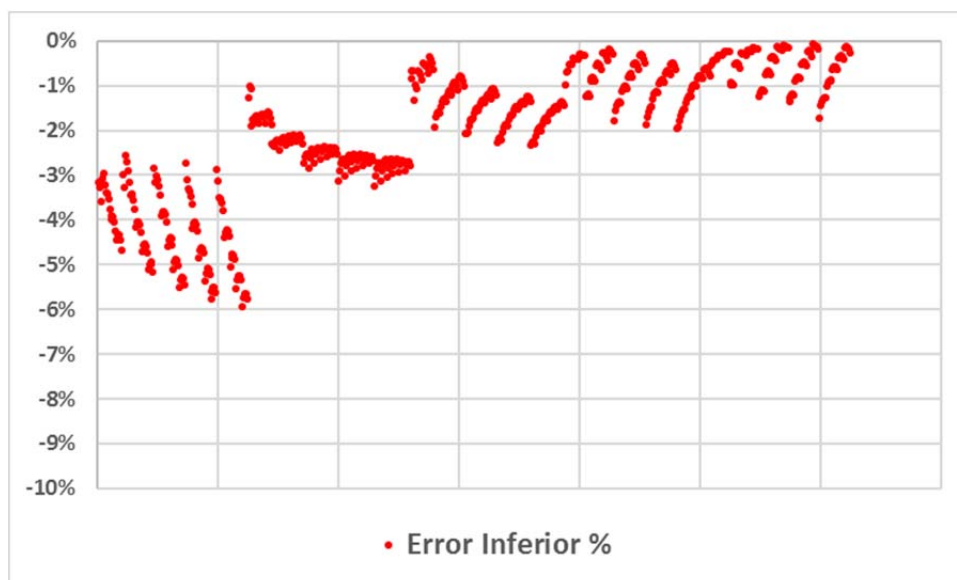


Figura 6.22: Diferencia relativa con valores aproximados por debajo

Como se puede observar en la figura 6.22., el error inferior del mismo orden de magnitud del superior. En concreto, el máximo cometido es del 5,9% presentando un promedio del 1,9%.

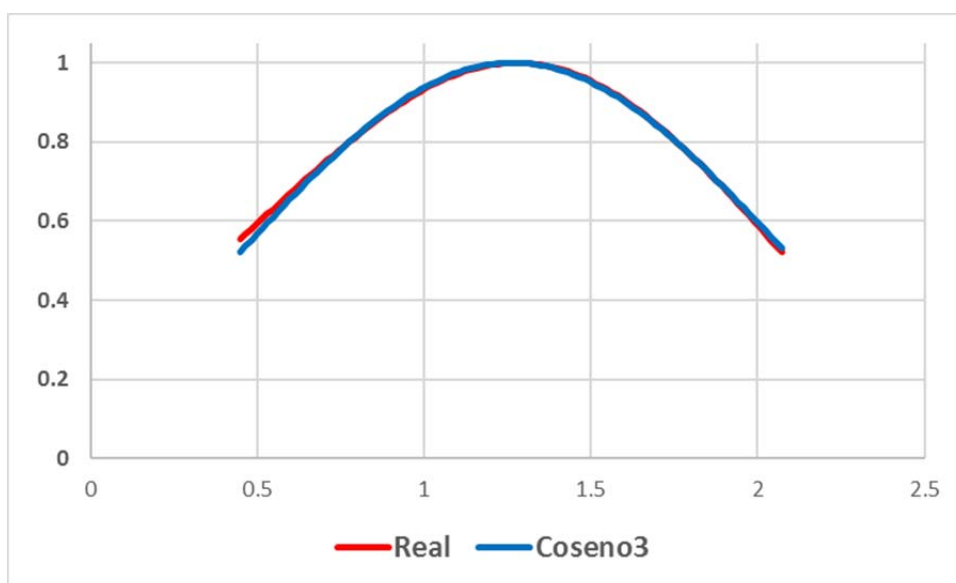


Figura 6.23: Curva real y aproximada para el caso con mayor error inferior

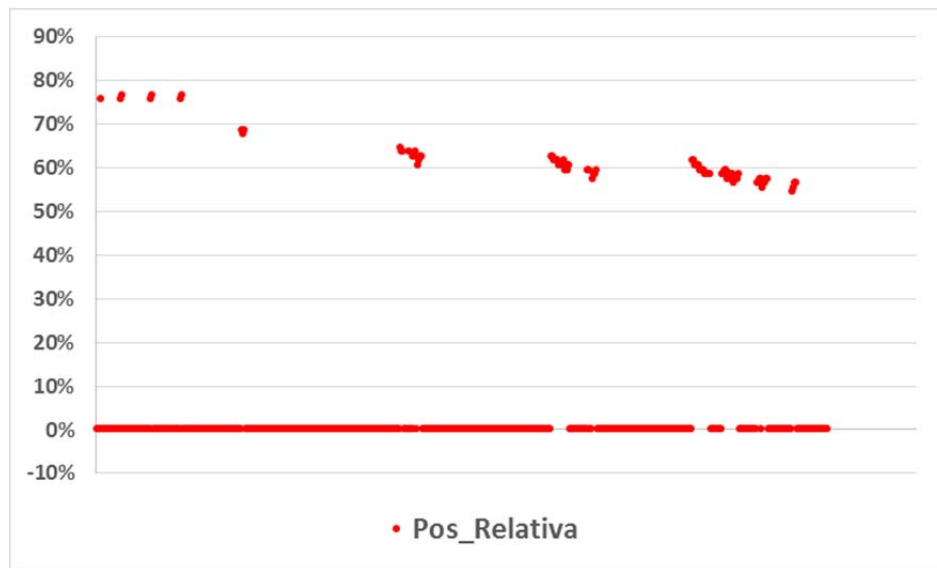


Figura 6.24: Posición relativa del error máximo inferior

En el caso del error máximo inferior, la posición de este último se encuentra en la mayoría de los casos en el extremo derecho de la curva (punto último de contacto). Cuando esto no ocurre, el error se encuentra entre el 50% y el 80% del intervalo de la curva, es decir, a la derecha del máximo.

### 6.3.3. Error en los extremos

Observando que el error en los extremos puede llegar a ser el error máximo cometido, se analiza en detalle el error en el punto de contacto de entrada  $\xi_{inn}$  y el de salida  $\xi_{inn} + \epsilon_{\alpha}$ .

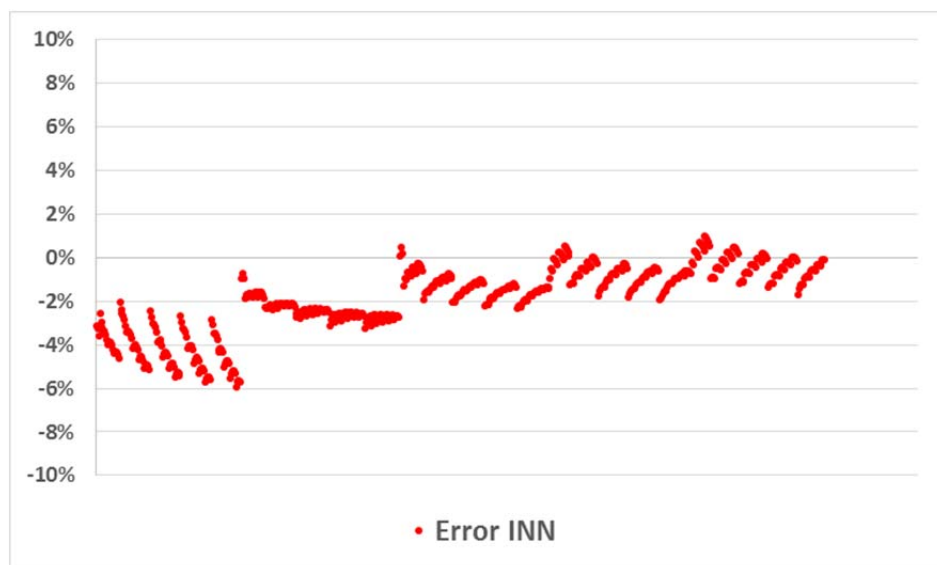


Figura 6.25: Error en el punto de contacto inicial  $\xi_{inn}$

El error cometido en el punto inicial para la aproximación  $\cos^3$  varía entre el -6% y el 1% con un valor promedio del -2%.

En el caso del error en el punto de salida (extremo derecho de la curva) los valores varían entre el -0,5% y el 6% con un valor promedio del 2,5%.

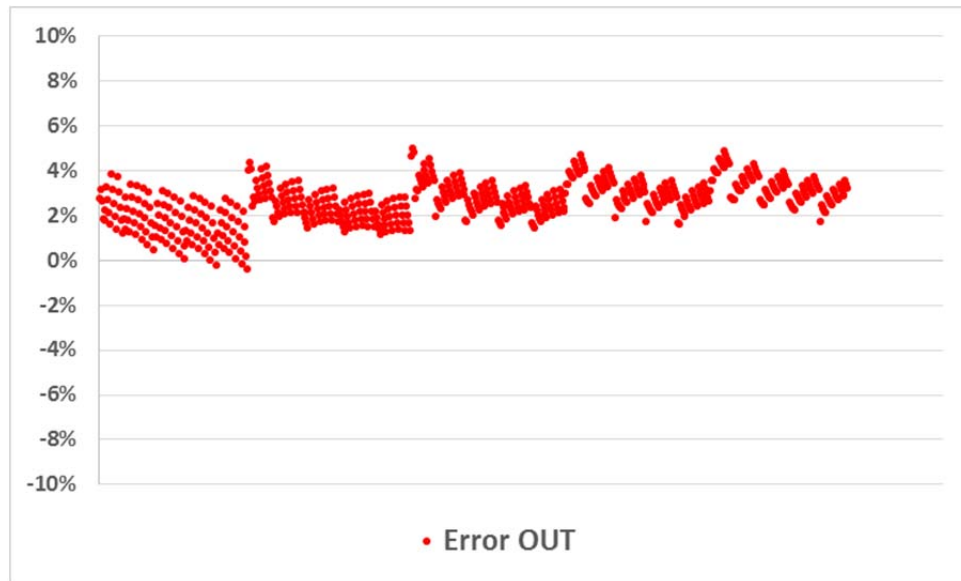


Figura 6.26: Error en el punto de contacto final  $\xi_{inn} + \epsilon_\alpha$

Comparando los resultados del error de aproximación en los extremos entre la función coseno y la función  $\cos^3$ , se puede decir que la función  $\cos^3$  ajusta bastante mejor en los valores extremos lo que, combinado con una correlación más alta, da a lugar a una curva más precisa.

Por último, destacar que en el error cometido en el extremo izquierdo (inicial) es generalmente negativo, es decir, la curva de la función aproximada  $\cos^3$  comienza ligeramente por debajo de la curva real, mientras que para el otro extremo el valor es casi siempre positivo, por tanto, la curva de la función aproximada queda ligeramente por encima de la curva real en el extremo derecho.

### 6.3.4. Error localización del máximo

De la misma forma que ocurría en el caso de la función coseno, en todos los casos analizados, el máximo real se encuentra ligeramente a la derecha del máximo de la función coseno. En este caso también se reducen las diferencias con respecto a la función coseno, si bien esta reducción es mínima.

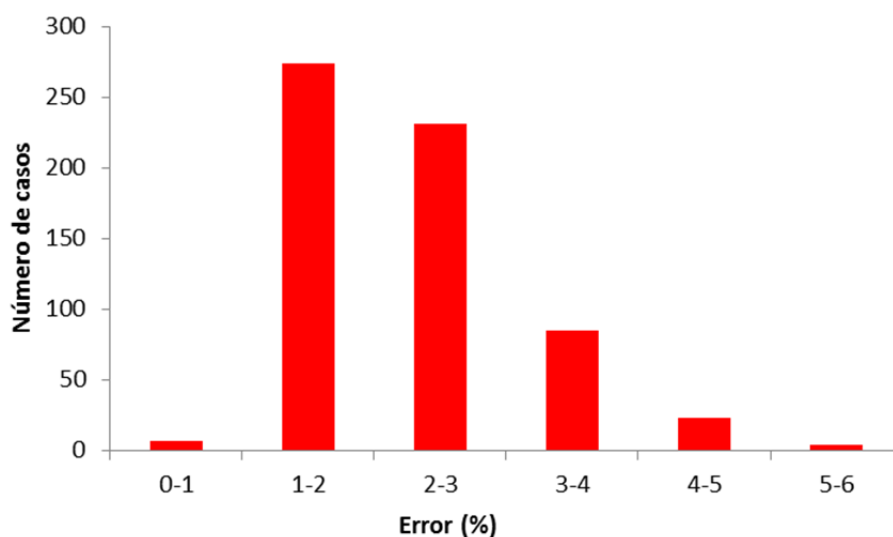


Figura 6.27: Distribución del error relativo en la localización del máximo

Se observa que el error máximo es del 5-6%, siendo la mayoría del entorno 1-3%.

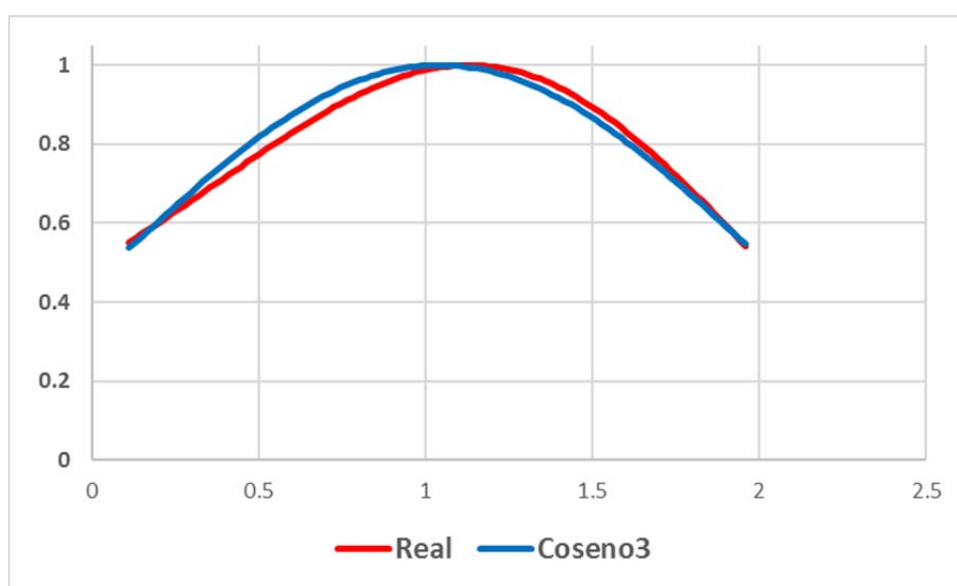


Figura 6.28: Curva real y aproximada para el caso con mayor error de localización

### 6.3.5. Máximo error en el reparto de carga

El análisis del reparto de carga de la función coseno<sup>3</sup> muestra que ésta también tiene un mejor ajuste para las curvas de reparto de carga, aunque la diferencia es menos notable.

En el caso de usar la función coseno<sup>3</sup>, se observa que la correlación mínima es de 0,994 siendo el promedio igual a 0,999. En cuanto a los errores, el máximo error es del 5% siendo la media del máximo error de cada caso del 2%.

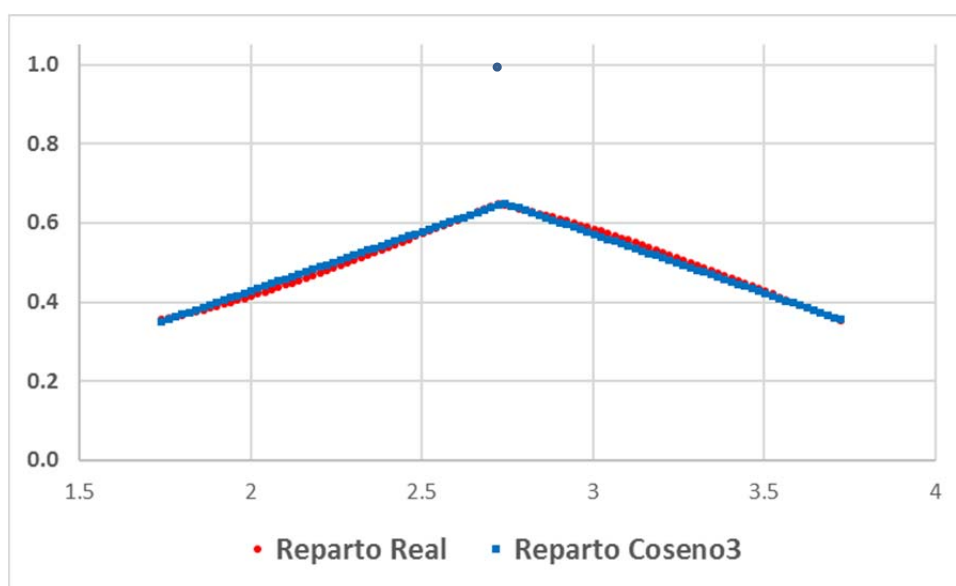


Figura 6.29: Reparto de carga real y aproximado para el caso con menor correlación

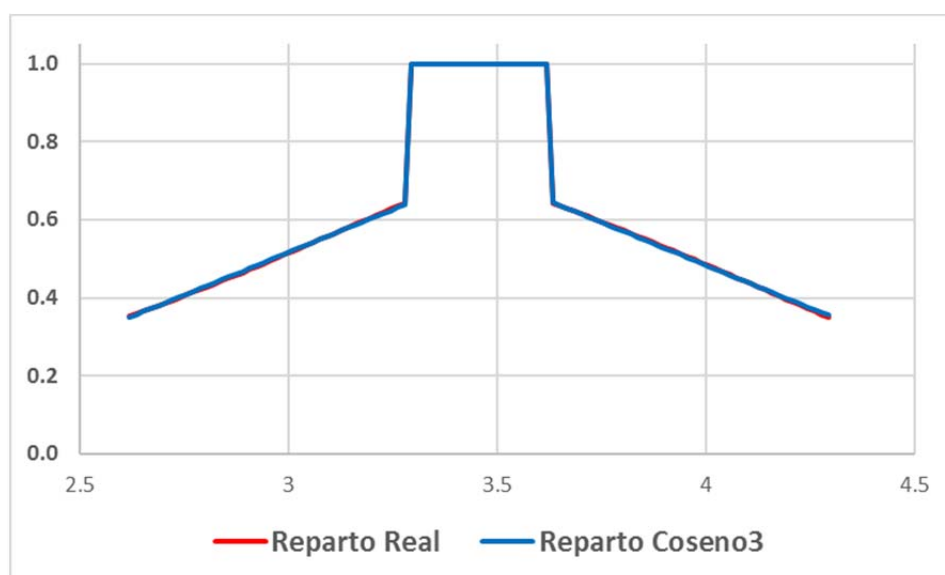


Figura 6.30: Reparto de carga real y aproximado para el caso con mayor correlación

De la figura 6.30. se observa que ambas curvas de reparto son coincidentes siendo prácticamente imposible diferenciar una de la otra con lo que el ajuste en este caso es perfecto.

# Capítulo 7

## Conclusiones

El objetivo de este Proyecto Fin de Carrera es el análisis de la función potencial unitario inverso de una pareja de engranajes interiores, así como la búsqueda de una función aproximada que sea sencilla de aplicar sin perder precisión.

Para la realización del análisis de la función potencial unitario inverso, se han obtenido las curvas de cientos de casos diferentes de engranajes interiores cilíndricos rectos de perfil de evolvente con grado de recubrimiento entre 1 y 2. Los distintos casos se han obtenido variando: el número de dientes del piñón ( $z_1$ ), el número de dientes de la corona ( $z_2$ ), el ángulo de presión ( $\alpha_n$ ) y el desplazamiento ( $x$ ).

Finalmente, se han propuesto dos funciones aproximadas. La primera solución está basada en la propuesta de función aproximada para los engranajes exteriores presentada por [20] en la que la función potencial unitario inverso se aproxima mediante una función del tipo:

$$v(\xi) = \cos(b(\xi - \xi_m))$$

Esta función presenta un ajuste suficientemente bueno para considerarse sustitutoria del potencial unitario inverso ella al mismo tiempo que conlleva una gran simplicidad tanto para su cálculo como para operar con ella en la obtención de otras curvas.

Por otro lado, con objetivo de afinar aún más la curva aproximada y reducir el error cometido, se propone una función del tipo:

$$v(\xi) = \cos(b(\xi - \xi_m))^3$$

Esta función que denominamos “coseno<sup>3</sup>” presenta un altísimo grado de correlación con la función potencial unitario inverso, reduciendo en gran medida los errores de ajuste. Si bien, no presenta la misma sencillez que la función “coseno” y la obtención de los parámetros  $b$  y  $\xi_m$  no es directa, siendo necesaria la resolución de un sistema de dos ecuaciones no lineal de poca complejidad.

### **7.1 Función “coseno”**

El análisis del grado de aproximación de la función coseno se realiza en profundidad en el capítulo 6 obteniendo el mejor y peor ajuste de todos los casos analizados, así como el máximo error cometido tanto positivo como negativo, la posición relativa de dicho error, el error en los extremos de la curva, el error en la localización del máximo de la función y, por último, el error cometido al aplicar la función aproximada en la obtención del reparto de carga.

Destacamos de nuevo los principales resultados obtenidos de dicho análisis.



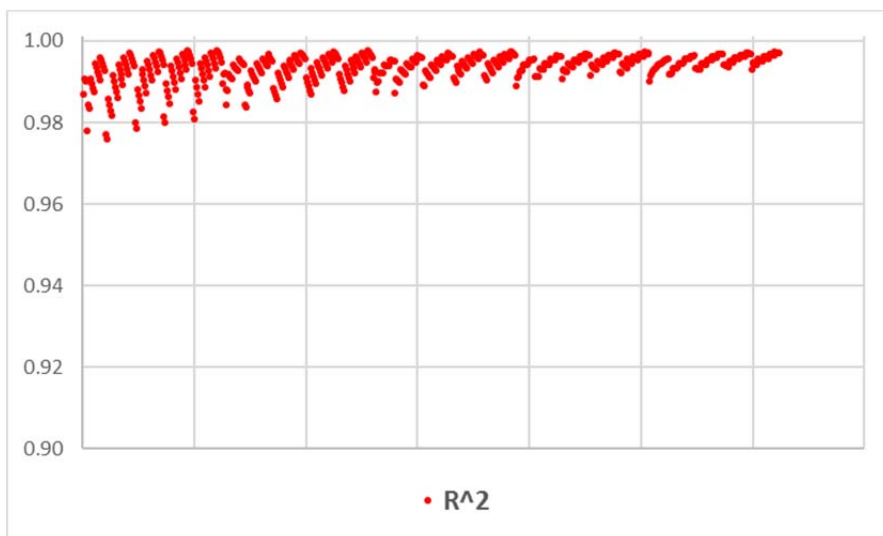


Figura 7.1: Valores de la correlación  $R^2$  para la función coseno

El grado de correlación obtenido para la función coseno es bastante alto, lo que sugiere una buena aproximación.



Figura 7.2: Diferencia relativa con valores aproximados por encima

El error máximo cometido está acotado y es asumible.

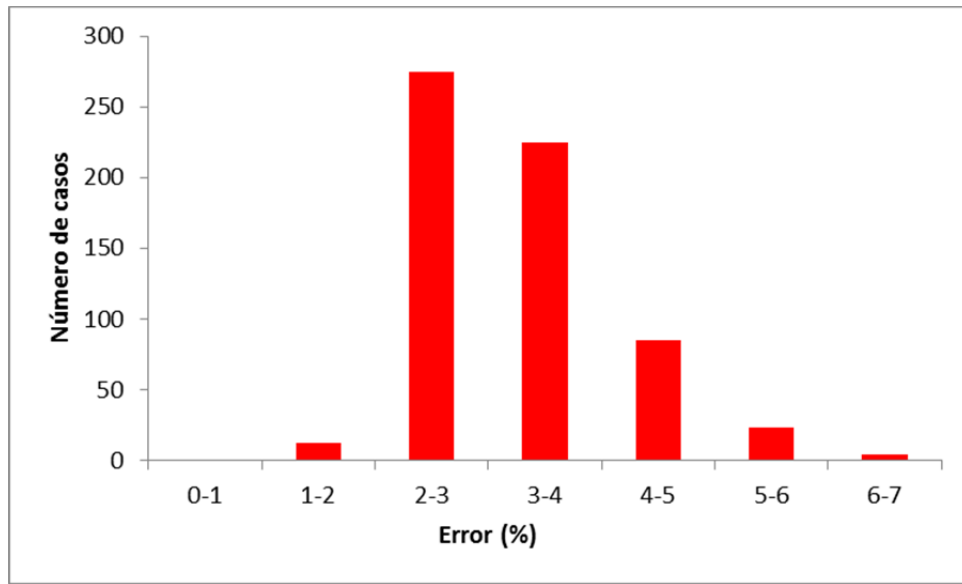


Figura 7.3: Distribución del error relativo en la localización del máximo

Lo mismo ocurre con el error en la localización del máximo, el cual es del entorno del 2-4%.

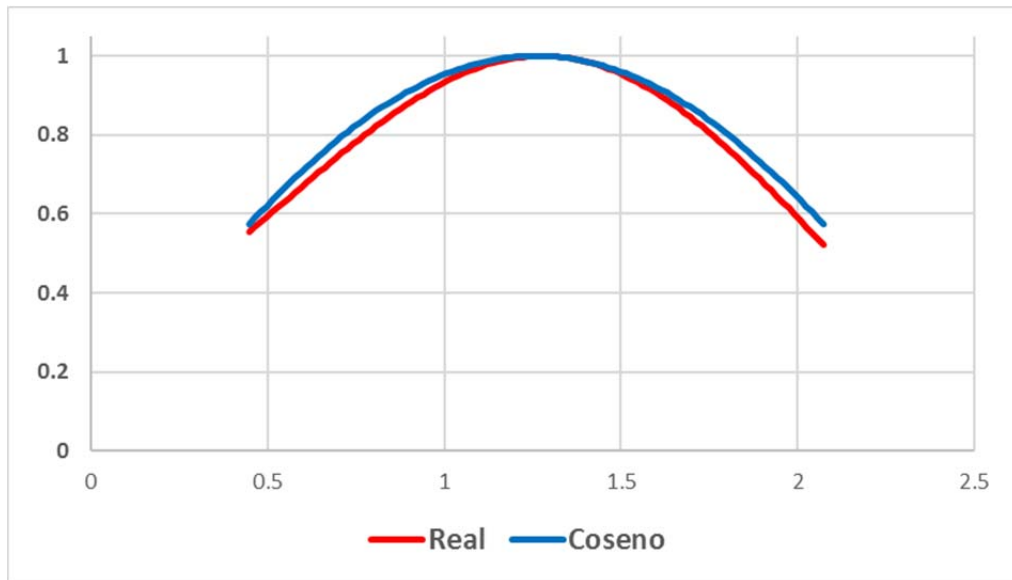


Figura 7.4: Curva real y aproximada

Como se puede observar, la aproximación puede llegar a ser muy buena.

## 7.2 Función “coseno<sup>3</sup>”

Como se ha definido al comienzo del presente capítulo, el objetivo de este Proyecto Fin de Carrera es la obtención de una función aproximada para la función potencial unitario inverso que se ajuste lo mejor posible sin perder “sencillez”.

Ha sido de gran interés por parte del autor la búsqueda de la mejor aproximación posible que sea estable para todos los casos analizados y no pierda generalidad. En la búsqueda de una función que se ajuste de forma casi perfecta a la función potencial unitario inverso se han probado múltiples funciones, obteniendo finalmente lo que se ha denominado como función “coseno<sup>3</sup>”

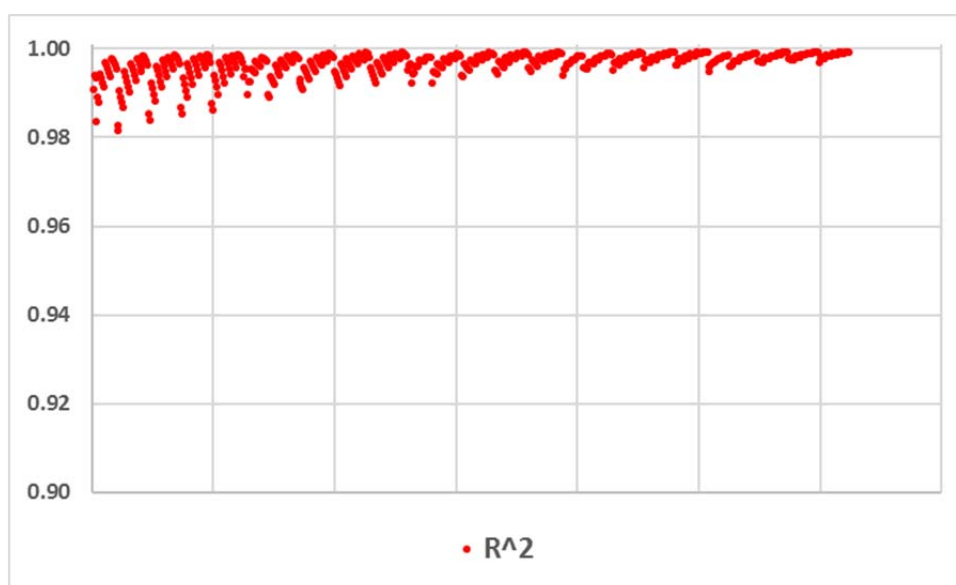


Figura 7.5: Valores de la correlación  $R^2$  para la función coseno<sup>3</sup>

Esta función presenta una correlación en todos los casos superior al 98%, siendo del 99,7% el promedio de todos ellos con muchos casos por encima del 99,9%.

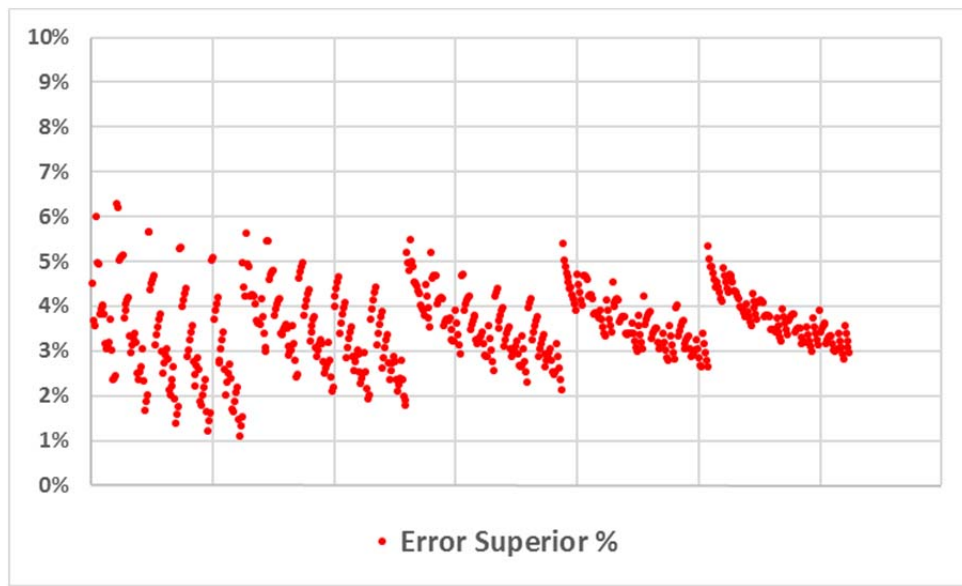


Figura 7.6: Diferencia relativa con valores aproximados por encima

El error máximo se ha reducido considerablemente con respecto a la función “coseno” siendo el promedio del mismo del 3,5%.

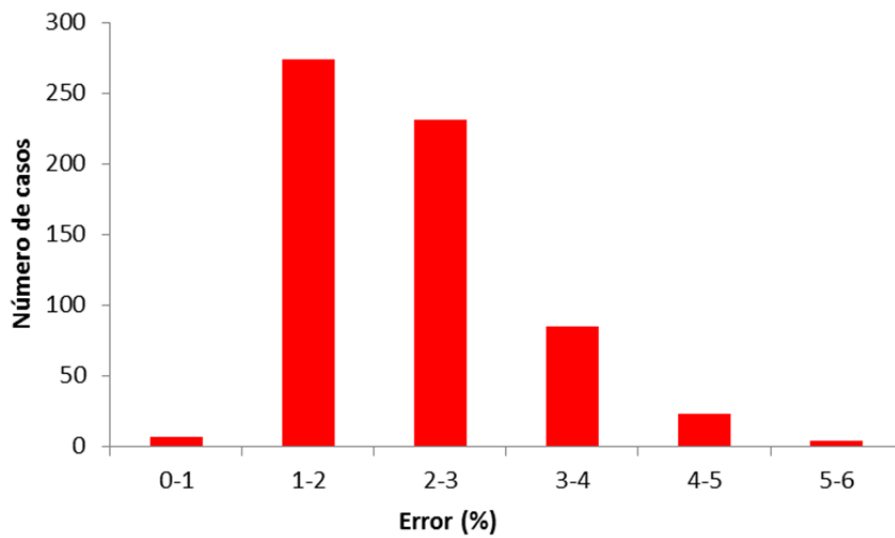


Figura 7.7: Diferencia relativa en la localización del máximo

Lo mismo ocurre con el error de localización del máximo de la función, el cual se ha reducido al entorno del 1-3%.

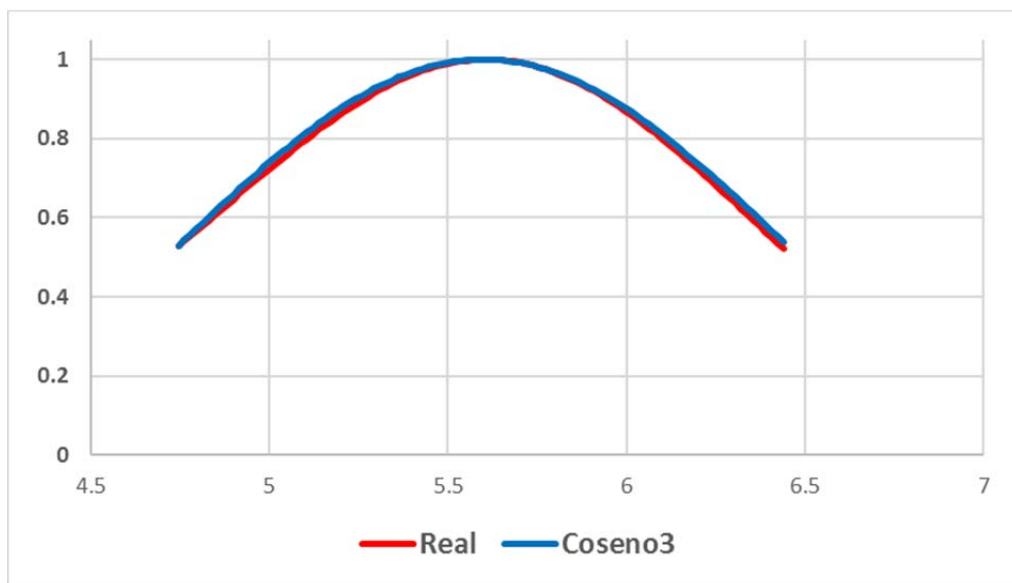


Figura 7.8: Curva real y aproximada

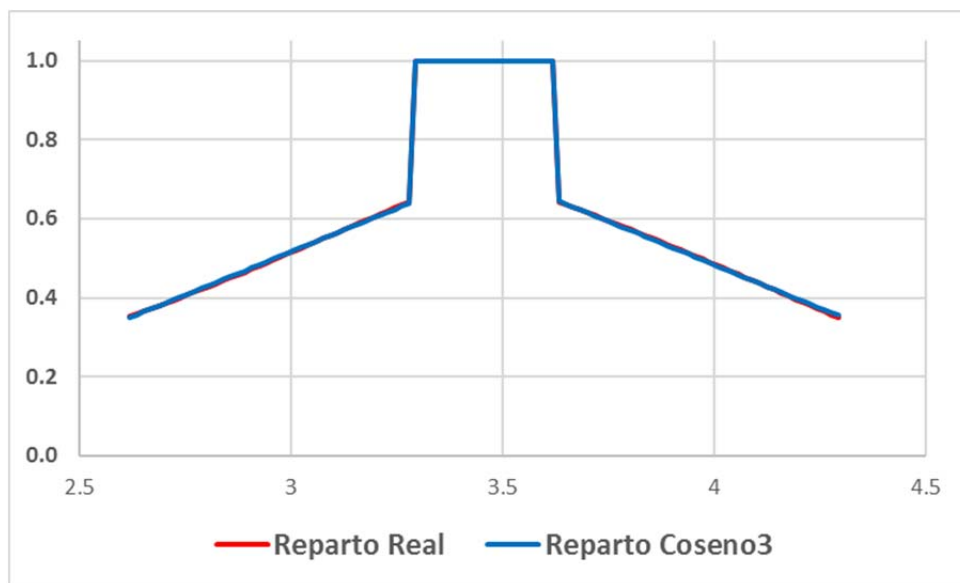


Figura 7.9: Reparto de carga real y aproximado

Como se aprecia en las figuras 7.8. y 7.9., la función aproximada del potencial unitario inverso y la curva de reparto de carga son en muchos casos prácticamente coincidentes con la curva real.



## Bibliografía

- [1] AGMA Information Sheet 908–B89, Geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth, American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA, 1989.
- [2] AGMA Standard 2001–D04, Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth, American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA, 2004.
- [3] Antona J. A., Modelo del potencial elástico de deformación en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, Proyecto Fin de Carrera, UNED, Madrid, 2007.
- [4] Beltrán J. R., Método de cálculo del factor geométrico a flexión de engranajes cilíndricos de dentado interior, Proyecto Fin de Carrera, UNED, Madrid, 2006.
- [5] Estrems M., Modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, Cartagena, Murcia, 1998.
- [6] Fuentes A., Modelo de cálculo a flexión de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, Tesis Doctoral, UNED, Madrid, 1996.
- [7] Hertz J., On the contact of elastic solids, *Miscellaneous Papers*, Macmillan, 1896
- [8] ISO Standard 6336–1:1996, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1996.
- [9] ISO Standard 6336–2:1996, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1996.

- [10] ISO Standard 6336–3:1996, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1996.
- [11] ISO/CD 6336–2, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2002.
- [12] ISO/CD 6336–2.2, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2003.
- [13] ISO/CD 6336–3, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2002.
- [14] ISO/CD 6336–3.2, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2003.
- [15] ISO/DIS 6336–2, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2004.
- [16] ISO/DIS 6336–3, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2004.
- [17] ISO/FDIS 6336–2, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [18] ISO/FDIS 6336–3, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [19] ISO/TC60/SC2/WG6 DOC. No. 858 Start of involute, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2001.



- [20] Pedrero J. I., Artés M., Fuentes A., "Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente", *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* 3(1), pp. 31–43, 1999.
- [21] Pedrero J. I., Artés M., García-Masiá C., "Influence of undercut on the load capacity for involute teeth with small pressure angle", *ASME Paper PTG-48061*, 2003.
- [22] Pedrero J. I., Artés M., García-Masiá C., "Determination of the effective path of contact of undercut involute gear teeth", *Journal of Mechanical Engineering Science* 218 (C7), pp. 751–760, 2004.
- [23] Pedrero J. I., Artés M., Pleguezuelos M., García-Masiá C., Fuentes A., "Theoretical model for load distribution on cylindric gears: application to contact stress analysis", *AGMA Paper 99FTM15*, 1999.
- [24] Pedrero J. I., Rueda A., Fuentes A., "Determination of the ISO tooth form factor for involute spur and helical gears", *Mechanism and Machine Theory* 34(1), pp. 89–103, 1999.
- [25] Pedrero J. I., Vallejo I. I., "Determinant bending load conditions on high transverse contact ratio spur and helical gear drives", *Journal of Mechanical Engineering Design* 9(1), pp. 29–37, 2006.
- [26] Pedrero J. I., Vallejo I. I., Pleguezuelos M., "Calculation of tooth bending strength and surface durability of high transverse contact ratio spur and helical gear drives", *Journal of Mechanical Design* 129(1), pp. 69–74, 2007.
- [27] Pedrero J. I., "Análisis dinámico de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente", UNED, Madrid, 1996.
- [28] Pedrero, J. I.; Pleguezuelos, M.; Aguiriano, S.; "Modelo de cálculo a rotura en la base de engranajes cilíndricos de dentado interior", XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Gijón, España, 2008.
- [29] Pedrero, J. I.; Pleguezuelos, M.; Aguiriano, S.; "Load distribution model for involute internal gear sets", X ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas, Nevada 2007.
- [30] Pedrero, J. I.; Pleguezuelos, M.; Aguiriano, S.; "Load distribution model of minimum elastic potential for involute internal gears", in *Machine Design Fundamentals*, Faculty of Technical Sciences in Novi Sad, 2007.

- 
- [31] Pleguezuelos M., Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, Tesis Doctoral, UNED, Madrid, 2006.
- [32] Wolfram, S., The Mathematica Book, Wolfram Media/Cambridge University Press, 4th ed., 1999.
- [33] Shigley, J.E., Diseño de Ingeniería Mecánica. 5 Ed., McGraw-Hill Inter-americana de México, 1992.
- [34] Sánchez, M.; “Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento”

INPUTS  
 $z1_0 := 20$     $z1_f := 80$     $z2_0 := 60$     $z2_f := 210$     $z0 := 40$     $alphan_0 := 19$     $alphan_f := 24$     $n_pot := 100$     $xc := 0$     $R1 := 0.3535$     $R2 := 0.6455$   
 $x1_0 := -0.1$     $x1_f := 0.1$     $m := 0.001$     $E := 2.1 \cdot 10^{11}$     $\mu := 0.3$     $b := 0.003$     $ha1 := 1$     $ha2 := 1$   
 $ha0_1 := 1.25$     $ha0_2 := 1.25$     $rf1 := 0.25$     $rf2 := 0.25$     $rf0 := 0.25$     $\beta := 0$     $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$     $s := 0$     $s2 := 0$     $s3 := 0$     $s4 := 0$

RESOLUCION ECUACIONES DIFERENCIALES

Restricciones prueba

$$\frac{\cos(b \cdot (Chi_{in} - m))^3}{\cos(b \cdot (Chi_{in} - m))^3 + \cos(b \cdot (Chi_{in} - m + 1))^3} = 0.35$$

$$\frac{\cos(b \cdot (Chi_{cul} - m))^3}{\cos(b \cdot (Chi_{cul} - m))^3 + \cos(b \cdot (Chi_{cul} - m + 1))^3} = 0.645$$

Solver  
 Parametros (b, m, Chi\_in, Chi\_cul) := find (b, m)

BUCLE

```
Matrix := for z1 ∈ z1_0..z1_0 + 15..z1_f
for z2 ∈ z2_0..z2_0 + 30..z2_f
for alphan ∈ alphan_0..alphan_0 + 1..alphan_f
for x1 ∈ x1_0..x1_0 + 0.05..x1_f
x2 ← x1
x0 ← x1
alphan ← atan( tan( alphan · π / 180 ) / cos( beta ) )
rp1 ← m · z1 / 2
rp2 ← m · z2 / 2
rp0 ← m · z0 / 2
rb1 ← rp1 · cos( alphan )
rb2 ← rp2 · cos( alphan )
rb0 ← rp0 · cos( alphan )
ra1 ← rp1 + m · ( x1 + ha1 )
ra2 ← rp2 + m · ( x2 - ha2 )
ra0 ← rp0 + m · ( x0 + ha0_2 )
rc0 ← ra0 - m · rf0
tetha_a1 ← √( ra1² - rb1² ) / rb1
tetha_a2 ← √( ra2² - rb2² ) / rb2
tetha_a0 ← ( m · rf0 + √( rc0² - rb0² ) ) / rb0
C ← rp2 - rp1 + m · ( x2 - x1 )
alpha_g ← alphan - arccos( rb2 - rb0 / C )
alpha_pt ← arccos( ( rb2 - rb1 ) / C )
delta ← m · ( ha0_1 - x1 - rf1 + rf1 · sin( alphan · π / 180 ) )
gamma_b1 ← 2 · ( π / ( 2 · z1 ) + x1 · tan( alphan · π / 180 ) + tan( alphan ) - alphan )
gamma_b2 ← π / ( 2 · z2 ) + x2 · tan( alphan · π / 180 ) - 2 · ( tan( alphan ) - alphan )
tetha_eoi0 ← √( rc0² / rb0² - 1 + m · rf0 / rb0 )
tetha_eoi ← arccos( rb0 / rc0 )
eps_alpha1 ← 1 / ( 2 · π ) · ( z1 · √( ra1² / rb1² - 1 - z2 · √( ra2² / rb2² - 1 + ( z2 - z1 ) · tan( alpha_pt ) ) )
tetha_e1 ← tan( alphan ) - delta / ( rb1 · sin( alphan ) )
tetha_e2 ← ( rb2 - rb0 ) / rb2 · tan( alpha_g ) + rb0 / rb2 · tetha_eoi0
r_e1 ← √( rb1² + ( rb1 · tetha_e1 )² )
r_e2 ← √( rb2² + ( rb2 · tetha_e2 )² )
tetha_inf1 ← rb2 / rb1 · tetha_a2 - ( rb2 - rb1 ) / rb1 · tan( alpha_pt )
tetha_inf2 ← rb1 / rb2 · tetha_a1 + ( rb2 - rb1 ) / rb2 · tan( alpha_pt )
tetha_sup1 ← rb2 / rb1 · tetha_inf2 - ( rb2 - rb1 ) / rb1 · tan( alpha_pt )
tetha_sup2 ← rb1 / rb2 · tetha_inf1 + ( rb2 - rb1 ) / rb2 · tan( alpha_pt )
GR ← 1 / ( 2 · π ) · ( z1 · √( ra1² / rb1² - 1 - z2 · √( ra2² / rb2² - 1 + ( z2 - z1 ) · tan( alpha_pt ) ) )
GO ← 0
if GR < 2
```

```

ii 300 < 4
GO - GO + 1
if z2 > z1 + 4
GO - GO + 1
if GO > 1
for n ∈ 1, 2, .. n_pot
  DifPot1 ←  $\frac{tetha\_sup1 - tetha\_inf1}{n\_pot - 1}$ 
  DifPot2 ←  $\frac{tetha\_inf2 - tetha\_sup2}{n\_pot - 1}$ 
  tethac1 ← tetha\_inf1 + (n - 1) · DifPot1
  tethac2 ← tetha\_sup2 + (n - 1) · DifPot2
  chi ←  $\frac{tethac1 \cdot z1}{2 \cdot \pi}$ 
  alpha1(tetha1) ←  $tetha1 - \frac{\gamma_{b1}}{2}$ 
  alphac1 ←  $tethac1 - \frac{\gamma_{b1}}{2}$ 
  y1(tetha1) ←  $\frac{rb1}{\cos(\alpha1(tetha1))} + (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan(\alpha1(tetha1))) \cdot \sin(\alpha1(tetha1))$ 
  yc1 ←  $\frac{rb1}{\cos(\alpha1(tetha1))} + (rb1 \cdot tethac1 - rb1 \cdot \tan(\alpha1(tetha1))) \cdot \sin(\alpha1(tetha1))$ 
  e1(tetha1) ←  $2 \cdot (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan(\alpha1(tetha1))) \cdot \cos(\alpha1(tetha1))$ 
  N0 ←  $\frac{6}{E \cdot b} \int_{tetha_{e1}}^{tetha_{e2}} \frac{((y1 - y1(tetha1)) \cdot \cos(\alpha1(tetha1)) - (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan(\alpha1(tetha1))) \cdot \cos(\alpha1(tetha1)))^2}{e1(tetha1)^3} \cdot rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos(\alpha1(tetha1)) \cdot dtetha1$ 
  N1 ←  $\frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{tetha_{e1}}^{tetha_{e2}} \frac{\sin(\alpha1(tetha1))^2}{e1(tetha1)} \cdot rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos(\alpha1(tetha1)) \cdot dtetha1$ 
  N2 ←  $\frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{tetha_{e1}}^{tetha_{e2}} \frac{\cos(\alpha1(tetha1))^2}{e1(tetha1)} \cdot rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos(\alpha1(tetha1)) \cdot dtetha1$ 
  A1 ←  $\frac{m \cdot rf1}{\cos(\alpha1(tetha1))} + m \cdot (ha0\_1 - x1 - rf1) \cdot \tan(\alpha1(tetha1))$ 
  B1(phi1) ←  $m \cdot (ha0\_1 - x1 - rf1 + rf1 \cdot \sin(\phi1))$ 
  epsilon1(phi1) ←  $\arctan\left(\frac{B1(phi1) \cdot \cos(\beta)}{r1 - B1(phi1)} \cdot \tan(\phi1)\right)$ 
  nu1(phi1) ←  $\tan(\alpha1(tetha1)) + \frac{1}{r1} \cdot \left(m \cdot rf1 \cdot \frac{\cos(\phi1)}{\cos(\beta)} - A1 - B1(phi1) \cdot \frac{\cos(\beta)}{\tan(\phi1)}\right)$ 
  ntro1(phi1) ←  $\nu1(phi1) + \epsilon1(phi1) - \alpha1(tetha1)$ 
  rtro1(phi1) ←  $\sqrt{(r1 - B1(phi1))^2 + \left(\frac{B1(phi1) \cdot \cos(\beta)}{\tan(\phi1)}\right)^2}$ 
  gammatro1(phi1) ←  $\gamma_{b1} - 2 \cdot ntro1(phi1)$ 
  ytro1(phi1) ←  $rtro1(phi1) \cdot \cos\left(\frac{\text{gammatro1}(phi1)}{2}\right)$ 
  etro1(phi1) ←  $2 \cdot rtro1(phi1) \cdot \sin\left(\frac{\text{gammatro1}(phi1)}{2}\right)$ 
  dytro1(phi1) ←  $\frac{d}{d\phi1}$ 
  N3 ←  $\frac{6}{E \cdot b} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{((y1 - ytro1(phi1)) \cdot \cos(\alpha1(tetha1)) - (rb1 \cdot tethac1 - rb1 \cdot \tan(\alpha1(tetha1))) \cdot \cos(\alpha1(tetha1)))^2}{etro1(phi1)^3} \cdot dytro1(phi1) \cdot d\phi1$ 
  N4 ←  $\frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(\alpha1(tetha1))^2}{etro1(phi1)} \cdot dytro1(phi1) \cdot d\phi1$ 
  N5 ←  $\frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\cos(\alpha1(tetha1))^2}{etro1(phi1)} \cdot dytro1(phi1) \cdot d\phi1$ 
  alpha2(tetha2) ←  $tetha2 + \frac{\gamma_{b2}}{2}$ 
  alphac2 ←  $tethac2 + \frac{\gamma_{b2}}{2}$ 
  y2(tetha2) ←  $\frac{rb2}{\cos(\alpha2(tetha2))} + (rb2 \cdot tetha2 - rb2 \cdot \tan(\alpha2(tetha2))) \cdot \sin(\alpha2(tetha2))$ 
  yc2 ←  $\frac{rb2}{\cos(\alpha2(tetha2))} + (rb2 \cdot tethac2 - rb2 \cdot \tan(\alpha2(tetha2))) \cdot \sin(\alpha2(tetha2))$ 
  e2(tetha2) ←  $2 \cdot (rb2 \cdot tetha2 - rb2 \cdot \tan(\alpha2(tetha2))) \cdot \cos(\alpha2(tetha2))$ 
  N6 ←  $\frac{6}{E \cdot b} \int_{tetha_{e2}}^{tetha_{e2}} \frac{((y2(tetha2) - yc2) \cdot \cos(\alpha2(tetha2)) - (rb2 \cdot \tan(\alpha2(tetha2)) - rb2 \cdot tethac2) \cdot \cos(\alpha2(tetha2)))^2}{e2(tetha2)^3} \cdot rb2 \cdot tetha2 \cdot \cos(\alpha2(tetha2)) \cdot dtetha2$ 
  N7 ←  $\frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{tetha_{e2}}^{tetha_{e2}} \frac{\sin(\alpha2(tetha2))^2}{e2(tetha2)} \cdot rb2 \cdot tetha2 \cdot \cos(\alpha2(tetha2)) \cdot dtetha2$ 
  N8 ←  $\frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{tetha_{e2}}^{tetha_{e2}} \frac{\cos(\alpha2(tetha2))^2}{e2(tetha2)} \cdot rb2 \cdot tetha2 \cdot \cos(\alpha2(tetha2)) \cdot dtetha2$ 
  Rr2 ←  $\frac{z2 \cdot cg}{z2 - z0}$ 
  Rr0 ←  $\frac{z0 \cdot cg}{z2 - z0}$ 

```

```

rtr02(phi2) := sqrt(Rr2^2 + delta2(phi2)^2 + 2 * Rr2 * delta2(phi2) * sin(phi2))
lambda2(phi2) := asin(delta2(phi2) / rtr02(phi2) * cos(phi2))
epsilon2(phi2) := asin(delta2(phi2) / rtr02(phi2) * cos(phi2))
nc_0 := tetha_eoi0 - tetha0
tetha_0(phi2) := nc_0 + epsilon2(phi2) + alpha_g
tetha_2(phi2) := (rb2 - rb0) / rb2 * tan(alpha_g) + rb0 / rb2 * tetha_0(phi2)
ntr02(phi2) := tetha_2(phi2) - alpha_g - lambda2(phi2)
gammatro2(phi2) := gamma_b2 + 2 * ntr02(phi2)
etro2(phi2) := 2 * rtr02(phi2) * sin(gammatro2(phi2) / 2)
ytr02(phi2) := rtr02(phi2) * cos(gammatro2(phi2) / 2)
dytro2(phi2) := d/dphi2 ytr02(phi2)

N_9 := 6 / (E * b) * integral(alpha_s, 0, pi/2, ((ytr02(phi2) - yc2) * cos(alpha2) - (rb2 * tan(alpha2) - rb2 * tetha2) * cos(alpha2) * sin(alpha2))^2 / etro2(phi2)^3 * dytro2(phi2) dphi2)
N_10 := 1 / (2 * E * b) * integral(alpha_s, 0, pi/2, sin(alpha2)^2 / etro2(phi2) * dytro2(phi2) dphi2)
N_11 := 1.2 / (2 * G * b) * integral(alpha_s, 0, pi/2, cos(alpha2)^2 / etro2(phi2) * dytro2(phi2) dphi2)
k_n := 2 * pi / (4 * (1 - mu^2))
N_12 := 1 / k_n
M_1_0 := concat(num2str(z1), "-", num2str(z2), "-", num2str(alpha), "-", num2str(x1), "-", num2str(x2), "-", num2str(n))
M_1_1 := chi
M_1_2 := n
M_1_3 := GR
U := 0
for k in 0..12
    U := U + N_k
M_1_4 := 1 / U
v := 1 / U
s := s + 1
for n in 1..n_pot
    M_2_5 := v_n / max(v)
    s2 := s2 + 1
    Chi_in := tetha_inf1 * z1
    Epsilon_alpha := (tetha_sup1 - tetha_inf1) * z1 / (2 * pi)
    Chi_cui := Chi_in + Epsilon_alpha - 1
    b := 0.7
    m := z1 / 15
    b_formula := try Parametros(b, m, Chi_in, Chi_cui)
    on error 0
    Chi_m := try Parametros(b, m, Chi_in, Chi_cui)
    on error 0
    for n in 1..n_pot
        DifPot1 := (tetha_sup1 - tetha_inf1) / (n_pot - 1)
        tetha1 := tetha_inf1 + (n - 1) * DifPot1
        chi := (tetha1 * z1) / (2 * pi)
        M_3_6 := cos(b_formula * (chi - Chi_m))^3
        M_3_7 := b_formula
        M_3_8 := Chi_m
        s3 := s3 + 1
    Chi_m2 := (tetha_inf1 * z1) / (2 * pi) + Epsilon_alpha / 2
    b2 := sqrt(1 / (1 + (1.13 * (Epsilon_alpha - 1) + 1) / 2)^2) - 1
    for n in 1..n_pot
        DifPot1 := (tetha_sup1 - tetha_inf1) / (n_pot - 1)
        tetha1 := tetha_inf1 + (n - 1) * DifPot1
        chi := (tetha1 * z1) / (2 * pi)

```



```

INPUTS
z1_0:=20    z1_f:=80    z2_0:=60    z2_f:=210    z0:=40    alphan_0:=19    alphan_f:=24    n_pot:=100    xc:=0    R1:=0.3535    R2:=0.6455

x1_0:=-0.1  x1_f:=0.1    m:=0.001  E:=2.1·1011    mu:=0.3  b:=0.003  ha1:=1  ha2:=1

ha0_1:=1.25  ha0_2:=1.25  rf1:=0.25  rf2:=0.25  rf0:=0.25  beta:=0    G:= $\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$     s:=0    s2:=0    s3:=0

BUCLE
Matrix:=for z1 ∈ z1_0,z1_0+15..z1_f
for z2 ∈ z2_0,z2_0+30..z2_f
for alphan ∈ alphan_0,alphan_0+1..alphan_f
for x1 ∈ x1_0,x1_0+0.05..x1_f
x2 ← x1
x0 ← x1
alphan ← atan( $\frac{\tan(\frac{\text{alphan} \cdot \pi}{180})}{\cos(\text{beta})}$ )
rp1 ← m ·  $\frac{z1}{2}$ 
rp2 ← m ·  $\frac{z2}{2}$ 
rp0 ← m ·  $\frac{z0}{2}$ 
rb1 ← rp1 · cos(alphan)
rb2 ← rp2 · cos(alphan)
rb0 ← rp0 · cos(alphan)
ra1 ← rp1 + m · (x1 + ha1)
ra2 ← rp2 + m · (x2 + ha2)
ra0 ← rp0 + m · (x2 + ha0_2)
rc0 ← ra0 - m · rf0
tetha_a1 ←  $\frac{\sqrt{ra1^2 - rb1^2}}{rb1}$ 
tetha_a2 ←  $\frac{\sqrt{ra2^2 - rb2^2}}{rb2}$ 
tetha_a0 ←  $\frac{(m \cdot rf0 + \sqrt{rc0^2 - rb0^2})}{rb0}$ 
C ← rp2 - rp1 + m · (x2 - x1)
alpha_g ← alphan -  $\frac{rb2 - rb0}{C}$ 
alpha_pt ← acos( $\frac{rb2 - rb1}{C}$ )
delta ← m · (ha0_1 - x1 - rf1 + rf1 · sin( $\frac{\text{alphan} \cdot \pi}{180}$ ))
gamma_b1 ← 2 · ( $\frac{\pi}{2 \cdot z1} + \frac{2 \cdot x1 \cdot \tan(\frac{\text{alphan} \cdot \pi}{180})}{z1} + \tan(\text{alphan}) - \text{alphan}$ )
gamma_b2 ←  $\frac{\pi}{z2} - \frac{z2}{4 \cdot x2 \cdot \tan(\frac{\text{alphan} \cdot \pi}{180})} - 2 \cdot (\tan(\text{alphan}) - \text{alphan})$ 
tetha_eoi0 ←  $\sqrt{\frac{rc0^2}{rb0^2} - 1} + \frac{m \cdot rf0}{rb0}$ 
tethac0 ← acos( $\frac{rb0}{rc0}$ )
eps_alphan1 ←  $\frac{1}{2 \cdot \pi} \left( z1 \cdot \sqrt{\left(\frac{ra1}{rb1}\right)^2 - 1} - z2 \cdot \sqrt{\left(\frac{ra2}{rb2}\right)^2 - 1} + (z2 - z1) \cdot \tan(\text{alpha\_pt}) \right)$ 
tetha_e1 ← tan(alphan) -  $\frac{\text{delta}}{rb1 \cdot \sin(\text{alphan})}$ 
tetha_e2 ←  $\frac{(rb2 - rb0)}{rb2} \cdot \tan(\text{alpha\_g}) + \frac{rb0}{rb2} \cdot \text{tetha\_eoi0}$ 
r_e1 ←  $\sqrt{rb1^2 + (rb1 \cdot \text{tetha\_e1})^2}$ 
r_e2 ←  $\sqrt{rb2^2 + (rb2 \cdot \text{tetha\_e2})^2}$ 
tetha_inf1 ←  $\frac{rb2}{rb1} \cdot \text{tetha\_a2} - \frac{rb2 - rb1}{rb1} \cdot \tan(\text{alpha\_pt})$ 
tetha_inf2 ←  $\frac{rb1}{rb2} \cdot \text{tetha\_a1} + \frac{rb2 - rb1}{rb2} \cdot \tan(\text{alpha\_pt})$ 
tetha_sup1 ←  $\frac{rb2}{rb1} \cdot \text{tetha\_inf2} - \frac{(rb2 - rb1)}{rb1} \cdot \tan(\text{alpha\_pt})$ 
tetha_sup2 ←  $\frac{rb1}{rb2} \cdot \text{tetha\_inf1} + \frac{(rb2 - rb1)}{rb2} \cdot \tan(\text{alpha\_pt})$ 
GR ←  $\frac{1}{2 \cdot \pi} \left( z1 \cdot \sqrt{\left(\frac{ra1}{rb1}\right)^2 - 1} - z2 \cdot \sqrt{\left(\frac{ra2}{rb2}\right)^2 - 1} + (z2 - z1) \cdot \tan(\text{alpha\_pt}) \right)$ 
GO ← 0
if GR < 2
GO ← GO + 1
if z2 > z1 + 4
GO ← GO + 1
if GO > 1
for n ∈ 1,2..n_pot
DifPot1 ←  $\frac{\text{tetha\_sup1} - \text{tetha\_inf1}}{n\_pot - 1}$ 
DifPot2 ←  $\frac{\text{tetha\_inf2} - \text{tetha\_sup2}}{n\_pot - 1}$ 
tethac1 ← tetha_inf1 + (n - 1) · DifPot1
tethac2 ← tetha_sup2 + (n - 1) · DifPot2
chi ←  $\frac{\text{tethac1} - z1}{2 \cdot \pi}$ 
alpha1(tetha1) ← tetha1 -  $\frac{\text{gamma\_b1}}{\chi}$ 

```

$$\begin{aligned} \text{alphac1} & \leftarrow \text{tethac1} + \frac{\text{gamma\_b1}}{2} \\ y1(\text{tetha1}) & \leftarrow \frac{\text{rb1}}{\cos(\text{alphac1}(\text{tetha1}))} + (\text{rb1} \cdot \text{tetha1} - \text{rb1} \cdot \tan(\text{alphac1}(\text{tetha1}))) \cdot \sin(\text{alphac1}(\text{tetha1})) \\ \text{yc1} & \leftarrow \frac{\text{rb1}}{\cos(\text{alphac1})} + (\text{rb1} \cdot \text{tethac1} - \text{rb1} \cdot \tan(\text{alphac1})) \cdot \sin(\text{alphac1}) \\ e1(\text{tetha1}) & \leftarrow 2 \cdot (\text{rb1} \cdot \text{tetha1} - \text{rb1} \cdot \tan(\text{alphac1}(\text{tetha1}))) \cdot \cos(\text{alphac1}(\text{tetha1})) \\ N_0 & \leftarrow \frac{6}{E \cdot b} \int_{\text{tetha\_e1}}^{\text{tethac1}} \frac{((\text{yc1} - y1(\text{tetha1})) \cdot \cos(\text{alphac1}) - (\text{rb1} \cdot \text{tethac1} - \text{rb1} \cdot \tan(\text{alphac1})) \cos(\text{alphac1}) \cdot \sin(\text{alphac1}))^2}{e1(\text{tetha1})^3} \text{rb1} \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alphac1}(\text{tetha1})) \, d\text{tetha1} \\ N_1 & \leftarrow \frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\text{tetha\_e1}}^{\text{tethac1}} \frac{\sin(\text{alphac1})^2}{e1(\text{tetha1})} \cdot \text{rb1} \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alphac1}(\text{tetha1})) \, d\text{tetha1} \\ N_2 & \leftarrow \frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\text{tetha\_e1}}^{\text{tethac1}} \frac{\cos(\text{alphac1})^2}{e1(\text{tetha1})} \cdot \text{rb1} \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alphac1}(\text{tetha1})) \, d\text{tetha1} \\ A1 & \leftarrow \frac{m \cdot \text{rf1}}{\cos(\text{alphan} \cdot \frac{\pi}{180}) \cdot \cos(\text{beta})} + m \cdot (\text{ha0\_1} - \text{x1} - \text{rf1}) \cdot \tan(\text{alphan}) \\ B1(\text{phi1}) & \leftarrow m \cdot (\text{ha0\_1} - \text{x1} - \text{rf1} + \text{rf1} \cdot \sin(\text{phi1})) \\ \text{epsilon1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{atan}\left(\frac{B1(\text{phi1}) \cdot \cos(\text{beta})}{(\text{rp1} - B1(\text{phi1})) \cdot \tan(\text{phi1})}\right) \\ \text{nu1}(\text{phi1}) & \leftarrow \tan(\text{alphan}) + \frac{1}{\text{rp1}} \cdot (m \cdot \text{rf1} \cdot \frac{\cos(\text{phi1})}{\cos(\text{beta})} - A1 - B1(\text{phi1}) \cdot \frac{\cos(\text{beta})}{\tan(\text{phi1})}) \\ \text{ntro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{nu1}(\text{phi1}) + \text{epsilon1}(\text{phi1}) - \text{alphan} \\ \text{rtro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \sqrt{(\text{rp1} - B1(\text{phi1}))^2 + (B1(\text{phi1}) \cdot \frac{\cos(\text{beta})}{\tan(\text{phi1})})^2} \\ \text{gammatro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{gamma\_b1} - 2 \cdot \text{ntro1}(\text{phi1}) \\ \text{ytr01}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{rtro1}(\text{phi1}) \cdot \cos\left(\frac{\text{gammatro1}(\text{phi1})}{2}\right) \\ \text{etro1}(\text{phi1}) & \leftarrow 2 \cdot \text{rtro1}(\text{phi1}) \cdot \sin\left(\frac{\text{gammatro1}(\text{phi1})}{2}\right) \\ \text{dytro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \frac{d}{d\text{phi1}} \text{ytr01}(\text{phi1}) \\ N_3 & \leftarrow \frac{6}{E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} \cdot \frac{\pi}{180}} \frac{((\text{yc1} - \text{ytr01}(\text{phi1})) \cdot \cos(\text{alphac1}) - (\text{rb1} \cdot \text{tethac1} - \text{rb1} \cdot \tan(\text{alphac1})) \cdot \cos(\text{alphac1}) \cdot \sin(\text{alphac1}))^2}{\text{etro1}(\text{phi1})^3} \text{dytro1}(\text{phi1}) \, d\text{phi1} \\ N_4 & \leftarrow \frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} \cdot \frac{\pi}{180}} \frac{\sin(\text{alphac1})^2}{\text{etro1}(\text{phi1})} \cdot \text{dytro1}(\text{phi1}) \, d\text{phi1} \\ N_5 & \leftarrow \frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} \cdot \frac{\pi}{180}} \frac{\cos(\text{alphac1})^2}{\text{etro1}(\text{phi1})} \cdot \text{dytro1}(\text{phi1}) \, d\text{phi1} \\ \text{alpha2}(\text{tetha2}) & \leftarrow \text{tetha2} + \frac{\text{gamma\_b2}}{2} \\ \text{alphac2} & \leftarrow \text{tethac2} + \frac{\text{gamma\_b2}}{2} \\ y2(\text{tetha2}) & \leftarrow \frac{\text{rb2}}{\cos(\text{alphac2}(\text{tetha2}))} + (\text{rb2} \cdot \text{tetha2} - \text{rb2} \cdot \tan(\text{alphac2}(\text{tetha2}))) \cdot \sin(\text{alphac2}(\text{tetha2})) \\ \text{yc2} & \leftarrow \frac{\text{rb2}}{\cos(\text{alphac2})} + (\text{rb2} \cdot \text{tethac2} - \text{rb2} \cdot \tan(\text{alphac2})) \cdot \sin(\text{alphac2}) \\ e2(\text{tetha2}) & \leftarrow 2 \cdot (\text{rb2} \cdot \text{tetha2} - \text{rb2} \cdot \tan(\text{alphac2}(\text{tetha2}))) \cdot \cos(\text{alphac2}(\text{tetha2})) \\ N_6 & \leftarrow \frac{6}{E \cdot b} \int_{\text{tetha\_e2}}^{\text{tethac2}} \frac{((\text{yc2}(\text{tetha2}) - \text{yc2}) \cdot \cos(\text{alphac2}) - (\text{rb2} \cdot \tan(\text{alphac2}) - \text{rb2} \cdot \text{tethac2}) \cos(\text{alphac2}) \cdot \sin(\text{alphac2}))^2}{e2(\text{tetha2})^3} \text{rb2} \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alphac2}(\text{tetha2})) \, d\text{tetha2} \\ N_7 & \leftarrow \frac{1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\text{tetha\_e2}}^{\text{tethac2}} \frac{\sin(\text{alphac2})^2}{e2(\text{tetha2})} \cdot \text{rb2} \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alphac2}(\text{tetha2})) \, d\text{tetha2} \\ N_8 & \leftarrow \frac{1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\text{tetha\_e2}}^{\text{tethac2}} \frac{\cos(\text{alphac2})^2}{e2(\text{tetha2})} \cdot \text{rb2} \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alphac2}(\text{tetha2})) \, d\text{tetha2} \\ Rr2 & \leftarrow \frac{z2 \cdot cg}{z2 - z0} \\ Rr0 & \leftarrow \frac{z0 \cdot cg}{z2 - z0} \\ \text{delta2}(\text{phi2}) & \leftarrow \sqrt{\text{rc0}^2 - \text{Rr0}^2 \cdot \cos(\text{phi2})^2 - \text{Rr0} \cdot \sin(\text{phi2}) + m \cdot \text{rf2}} \\ \text{rtro2}(\text{phi2}) & \leftarrow \sqrt{\text{Rr2}^2 + \text{delta2}(\text{phi2})^2 + 2 \cdot \text{Rr2} \cdot \text{delta2}(\text{phi2}) \cdot \sin(\text{phi2})} \\ \text{lambda2}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{asin}\left(\frac{\text{delta2}(\text{phi2})}{\text{rtro2}(\text{phi2})} \cdot \cos(\text{phi2})\right) \\ \text{epsilon2}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{asin}\left(\frac{\text{delta2}(\text{phi2}) - m \cdot \text{rf2}}{\text{rc0}} \cdot \cos(\text{phi2})\right) \\ \text{nc\_0} & \leftarrow \text{tetha\_eoi0} - \text{tethac0} \\ \text{tetha\_0}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{nc\_0} + \text{epsilon2}(\text{phi2}) + \text{alpha\_g} \\ \text{tetha\_2}(\text{phi2}) & \leftarrow \frac{\text{rb2} - \text{rb0}}{\text{rb2}} \cdot \tan(\text{alpha\_g}) + \frac{\text{rb0}}{\text{rb2}} \cdot \text{tetha\_0}(\text{phi2}) \\ \text{ntro2}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{tetha\_2}(\text{phi2}) - \text{alpha\_g} - \text{lambda2}(\text{phi2}) \\ \text{gammatro2}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{gamma\_b2} + 2 \cdot \text{ntro2}(\text{phi2}) \\ \text{etro2}(\text{phi2}) & \leftarrow 2 \cdot \text{rtro2}(\text{phi2}) \cdot \sin\left(\frac{\text{gammatro2}(\text{phi2})}{2}\right) \\ \text{ytr02}(\text{phi2}) & \leftarrow \text{rtro2}(\text{phi2}) \cdot \cos\left(\frac{\text{gammatro2}(\text{phi2})}{2}\right) \end{aligned}$$



```

dytro2 (phi2) :=  $\frac{d}{d\phi i2} ytro2 (\phi i2)$ 
N_9 :=  $\frac{6}{E \cdot b} \int_{\phi i2_{min}}^{\phi i2_{max}} \frac{((ytr02 (\phi i2) - yc2) \cdot \cos (\alpha phac2) - (rb2 \cdot \tan (\alpha phac2) - rb2 \cdot tethac2) \cdot \cos (\alpha phac2) \cdot \sin (\alpha phac2))^2}{etro2 (\phi i2)^3} dytro2 (\phi i2) d\phi i2$ 
N_10 :=  $\frac{1}{2 E \cdot b} \int_{\phi i2_{min}}^{\phi i2_{max}} \frac{\sin (\alpha phac2)^2}{etro2 (\phi i2)} \cdot dytro2 (\phi i2) d\phi i2$ 
N_11 :=  $\frac{1.2}{2 G \cdot b} \int_{\phi i2_{min}}^{\phi i2_{max}} \frac{\cos (\alpha phac2)^2}{etro2 (\phi i2)} \cdot dytro2 (\phi i2) d\phi i2$ 
k_b :=  $2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E \cdot b}{1 - \mu^2}$ 
N_12 :=  $\frac{1}{k_b}$ 
M_{1,0} := concat (num2str (z1), "_", num2str (z2), "_", num2str (alpha), "_", num2str (x1), "_", num2str (x2), "_", num2str (n))
M_{1,1} := chi
M_{1,2} := n
M_{1,6} := GR
U := 0
for k ∈ 0, 1..12
    U := U + N_k
M_{1,3} :=  $\frac{1}{U}$ 
v :=  $\frac{1}{U}$ 
s := s + 1
for n ∈ 1, 2..n_pot
    v_n :=  $\frac{v}{n}$ 
M_{1,4} := max (v)
s2 := s2 + 1
for n ∈ 1, 2..n_pot
    DiftPot1 :=  $\frac{tetha\_sup1 - tetha\_inf1}{n\_pot - 1}$ 
    DiftPot2 :=  $\frac{tetha\_inf2 - tetha\_sup2}{n\_pot - 1}$ 
    tethac1_0 := tetha_inf1 + (n - 1) · DiftPot1
    tethac2_0 := tetha_sup2 + (n - 1) · DiftPot2
    ch1 :=  $\frac{tethac1_0 \cdot z1}{2 \cdot \pi}$ 
    tethac1 := tethac1_0 +  $\frac{2 \cdot \pi}{z1}$ 
    tethac2 := tethac2_0 +  $\frac{2 \cdot \pi}{z2}$ 
    if tethac1_0 < tetha_sup1 -  $\frac{2 \cdot \pi}{z1}$ 
        H := 1
    else
        H := 0
        tethac1 := tetha_inf1
    alpha1 (tetha1) := tetha1 -  $\frac{\gamma b1}{2}$ 
    alpha c1 := tethac1 -  $\frac{\gamma b1}{2}$ 
    y1 (tetha1) :=  $\frac{rb1}{\cos (\alpha phac1 (tetha1))} + (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan (\alpha phac1 (tetha1))) \cdot \sin (\alpha phac1 (tetha1))$ 
    yc1 :=  $\frac{rb1}{\cos (\alpha phac1)} + (rb1 \cdot tethac1 - rb1 \cdot \tan (\alpha phac1)) \cdot \sin (\alpha phac1)$ 
    e1 (tetha1) :=  $2 \cdot (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan (\alpha phac1 (tetha1))) \cdot \cos (\alpha phac1 (tetha1))$ 
    N_0 :=  $\frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{tetha_{1,1}}^{tetha_{1,2}} \frac{((yc1 - y1 (tetha1)) \cdot \cos (\alpha phac1) - (rb1 \cdot tethac1 - rb1 \cdot \tan (\alpha phac1)) \cos (\alpha phac1) \cdot \sin (\alpha phac1))^2}{e1 (tetha1)^3} rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos (\alpha phac1 (tetha1)) dtetha1$ 
    N_1 :=  $\frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{tetha_{1,1}}^{tetha_{1,2}} \frac{\sin (\alpha phac1)^2}{e1 (tetha1)} \cdot rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos (\alpha phac1 (tetha1)) dtetha1$ 
    N_2 :=  $\frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{tetha_{1,1}}^{tetha_{1,2}} \frac{\cos (\alpha phac1)^2}{e1 (tetha1)} \cdot rb1 \cdot tetha1 \cdot \cos (\alpha phac1 (tetha1)) dtetha1$ 
    A1 :=  $\frac{m \cdot rf1}{\cos (\alpha phan \cdot \frac{\pi}{180}) \cdot \cos (\beta eta)} + m \cdot (ha0\_1 - x1 - rf1) \cdot \tan (\alpha phat)$ 
    B1 (phi1) :=  $m \cdot (ha0\_1 - x1 - rf1 + rf1 \cdot \sin (\phi i1))$ 
    epsilon1 (phi1) := atan  $\left( \frac{B1 (\phi i1) \cdot \cos (\beta eta)}{(rp1 - B1 (\phi i1)) \cdot \tan (\phi i1)} \right)$ 
    nu1 (phi1) := tan (alpha phat) +  $\frac{1}{rp1} \cdot (m \cdot rf1 \cdot \frac{\cos (\phi i1)}{\cos (\beta eta)} - A1 - B1 (\phi i1) \cdot \frac{\cos (\beta eta)}{\tan (\phi i1)})$ 
    ntro1 (phi1) := nu1 (phi1) + epsilon1 (phi1) - alpha phat
    rtro1 (phi1) :=  $\sqrt{(rp1 - B1 (\phi i1))^2 + (B1 (\phi i1) \cdot \frac{\cos (\beta eta)}{\tan (\phi i1)})^2}$ 
    gammatro1 (phi1) := gamma_b1 - 2 · ntro1 (phi1)
    ytro1 (phi1) := rtro1 (phi1) · cos  $\left( \frac{\gamma b1}{2} \right)$ 
    etro1 (phi1) := 2 · rtro1 (phi1) · sin  $\left( \frac{\gamma b1}{2} \right)$ 

```

$$dytro1(\phi1) \leftarrow \frac{d}{d\phi1} ytro1(\phi1)$$

$$N_3 \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{((y1 - ytro1(\phi1)) \cdot \cos(\alpha\phi1) - (rb1 \cdot tetha1 - rb1 \cdot \tan(\alpha\phi1)) \cdot \cos(\alpha\phi1) \cdot \sin(\alpha\phi1))^2}{etro1(\phi1)^3} dytro1(\phi1) d\phi1$$

$$N_4 \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\sin(\alpha\phi1)^2}{etro1(\phi1)} \cdot dytro1(\phi1) d\phi1$$

$$N_5 \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos(\alpha\phi1)^2}{etro1(\phi1)} \cdot dytro1(\phi1) d\phi1$$

$$\alpha2(\theta2) \leftarrow \theta2 + \frac{\gamma b^2}{2}$$

$$\alpha\phi2 \leftarrow \theta2 + \frac{\gamma b^2}{2}$$

$$y2(\theta2) \leftarrow \frac{rb2}{\cos(\alpha2(\theta2))} + (rb2 \cdot \theta2 - rb2 \cdot \tan(\alpha2(\theta2))) \cdot \sin(\alpha2(\theta2))$$

$$yc2 \leftarrow \frac{rb2}{\cos(\alpha\phi2)} + (rb2 \cdot \theta2 - rb2 \cdot \tan(\alpha\phi2)) \cdot \sin(\alpha\phi2)$$

$$e2(\theta2) \leftarrow 2 \cdot (rb2 \cdot \theta2 - rb2 \cdot \tan(\alpha2(\theta2))) \cdot \cos(\alpha2(\theta2))$$

$$N_6 \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\theta2}^{\theta2 + \frac{\pi}{2}} \frac{((y2(\theta2) - yc2) \cdot \cos(\alpha\phi2) - (rb2 \cdot \tan(\alpha\phi2) - rb2 \cdot \theta2) \cdot \cos(\alpha\phi2) \cdot \sin(\alpha\phi2))^2}{e2(\theta2)^3} rb2 \cdot \theta2 \cdot \cos(\alpha2(\theta2)) d\theta2$$

$$N_7 \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\theta2}^{\theta2 + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\alpha\phi2)^2}{e2(\theta2)} \cdot rb2 \cdot \theta2 \cdot \cos(\alpha2(\theta2)) d\theta2$$

$$N_8 \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\theta2}^{\theta2 + \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\alpha\phi2)^2}{e2(\theta2)} \cdot rb2 \cdot \theta2 \cdot \cos(\alpha2(\theta2)) d\theta2$$

$$Rr2 \leftarrow \frac{z2 \cdot cg}{z2 - z0}$$

$$Rr0 \leftarrow \frac{z0 \cdot cg}{z2 - z0}$$

$$\delta2(\phi2) \leftarrow \sqrt{rc0^2 - Rr0^2 \cdot \cos(\phi2)^2 - Rr0 \cdot \sin(\phi2) + m \cdot rf2}$$

$$rtro2(\phi2) \leftarrow \sqrt{Rr2^2 + \delta2(\phi2)^2} + 2 \cdot Rr2 \cdot \delta2(\phi2) \cdot \sin(\phi2)$$

$$\lambda2(\phi2) \leftarrow \arcsin\left(\frac{rtro2(\phi2)}{rc0} \cdot \cos(\phi2)\right)$$

$$\epsilon2(\phi2) \leftarrow \arcsin\left(\frac{\delta2(\phi2) - m \cdot rf2}{rc0} \cdot \cos(\phi2)\right)$$

$$nc_0 \leftarrow \theta2_{e0} - \theta2_{c0}$$

$$\theta2_0(\phi2) \leftarrow nc_0 + \epsilon2(\phi2) + \alpha\phi_g$$

$$\theta2_2(\phi2) \leftarrow \frac{rb2 - rb0}{rb2} \cdot \tan(\alpha\phi_g) + \frac{rb0}{rb2} \cdot \theta2_0(\phi2)$$

$$ntro2(\phi2) \leftarrow \theta2_2(\phi2) - \alpha\phi_g - \lambda2(\phi2)$$

$$\gamma2(\phi2) \leftarrow \gamma b^2 + 2 \cdot ntro2(\phi2)$$

$$etro2(\phi2) \leftarrow 2 \cdot rtro2(\phi2) \cdot \sin\left(\frac{\gamma2(\phi2)}{2}\right)$$

$$y2ro2(\phi2) \leftarrow rtro2(\phi2) \cdot \cos\left(\frac{\gamma2(\phi2)}{2}\right)$$

$$dytro2(\phi2) \leftarrow \frac{d}{d\phi2} y2ro2(\phi2)$$

$$N_9 \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\alpha\phi_g}^{\alpha} \frac{((y2ro2(\phi2) - yc2) \cdot \cos(\alpha\phi2) - (rb2 \cdot \tan(\alpha\phi2) - rb2 \cdot \theta2) \cdot \cos(\alpha\phi2) \cdot \sin(\alpha\phi2))^2}{etro2(\phi2)^3} dytro2(\phi2) d\phi2$$

$$N_{10} \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\alpha\phi_g}^{\alpha} \frac{\sin(\alpha\phi2)^2}{etro2(\phi2)} \cdot dytro2(\phi2) d\phi2$$

$$N_{11} \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\alpha\phi_g}^{\alpha} \frac{\cos(\alpha\phi2)^2}{etro2(\phi2)} \cdot dytro2(\phi2) d\phi2$$

$$k_b \leftarrow 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E \cdot b}{1 - \mu^2}$$

$$N_{12} \leftarrow \frac{1}{k_b}$$

$$U \leftarrow 0$$

if  $\theta2_{c1} < \theta2_{sup1} - \frac{2 \cdot \pi}{21}$

$$\begin{cases} \text{for } k \in 0, 1, \dots, 12 \\ U \leftarrow U + N_k \\ V \leftarrow \frac{1}{U} \end{cases}$$

else

$$V \leftarrow 0$$

$$M_{s3,s} \leftarrow V$$

$$s3 \leftarrow s3 + 1$$

for  $n \in 1, 2, \dots, n_{pot}$

$$\begin{aligned}
 \text{DifPot1} & \leftarrow \frac{\text{tetha\_sup1} - \text{tetha\_inf1}}{n\_pot - 1} \\
 \text{DifPot2} & \leftarrow \frac{\text{tetha\_inf2} - \text{tetha\_sup2}}{n\_pot - 1} \\
 \text{tethac1\_0} & \leftarrow \text{tetha\_inf1} + (n - 1) \cdot \text{DifPot1} \\
 \text{tethac2\_0} & \leftarrow \text{tetha\_sup2} + (n - 1) \cdot \text{DifPot2} \\
 \text{chi} & \leftarrow \frac{\text{tethac1\_0} \cdot z1}{2 \cdot \pi} \\
 \text{tethac1} & \leftarrow \text{tethac1\_0} - \frac{2 \cdot \pi}{z1} \\
 \text{tethac2} & \leftarrow \text{tethac2\_0} - \frac{2 \cdot \pi}{z2} \\
 \text{if } \text{tethac1\_0} < \text{tetha\_inf1} + \frac{2 \cdot \pi}{z1} & \\
 \quad H & \leftarrow 0 \\
 \quad \text{tethac1} & \leftarrow \text{tetha\_inf1} \\
 \quad \text{tethac2} & \leftarrow \text{tetha\_sup2} \\
 \text{else} & \\
 \quad H & \leftarrow 1 \\
 \text{alpha1}(\text{tetha1}) & \leftarrow \text{tetha1} - \frac{\text{gamma\_b1}}{2} \\
 \text{alphac1} & \leftarrow \text{tethac1} - \frac{\text{gamma\_b1}}{2} \\
 y1(\text{tetha1}) & \leftarrow \frac{rb1}{\cos(\text{alpha1}(\text{tetha1}))} + (rb1 \cdot \text{tetha1} - rb1 \cdot \tan(\text{alpha1}(\text{tetha1}))) \cdot \sin(\text{alpha1}(\text{tetha1})) \\
 yc1 & \leftarrow \frac{rb1}{\cos(\text{alphac1})} + (rb1 \cdot \text{tethac1} - rb1 \cdot \tan(\text{alphac1})) \cdot \sin(\text{alphac1}) \\
 e1(\text{tetha1}) & \leftarrow 2 \cdot (rb1 \cdot \text{tetha1} - rb1 \cdot \tan(\text{alpha1}(\text{tetha1}))) \cdot \cos(\text{alpha1}(\text{tetha1})) \\
 N_0 & \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf1}}^{\text{tetha\_sup1}} \frac{((yc1 - y1(\text{tetha1})) \cdot \cos(\text{alphac1}) - (rb1 \cdot \text{tethac1} - rb1 \cdot \tan(\text{alphac1}))) \cos(\text{alphac1}) \cdot \sin(\text{alphac1}))^2}{e1(\text{tetha1})^3} \cdot rb1 \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alpha1}(\text{tetha1})) \cdot d\text{tetha1} \\
 N_1 & \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf1}}^{\text{tetha\_sup1}} \frac{\sin(\text{alphac1})^2}{e1(\text{tetha1})} \cdot rb1 \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alpha1}(\text{tetha1})) \cdot d\text{tetha1} \\
 N_2 & \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf1}}^{\text{tetha\_sup1}} \frac{\cos(\text{alphac1})^2}{e1(\text{tetha1})} \cdot rb1 \cdot \text{tetha1} \cdot \cos(\text{alpha1}(\text{tetha1})) \cdot d\text{tetha1} \\
 A1 & \leftarrow \frac{m \cdot rf1}{\cos(\text{alphan} \cdot \frac{\pi}{180}) \cdot \cos(\text{beta})} + m \cdot (\text{ha0\_1} - x1 - rf1) \cdot \tan(\text{alphat}) \\
 B1(\text{phi1}) & \leftarrow m \cdot (\text{ha0\_1} - x1 - rf1 + rf1 \cdot \sin(\text{phi1})) \\
 \text{epsilon1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{atan}\left(\frac{B1(\text{phi1}) \cdot \cos(\text{beta})}{(rp1 - B1(\text{phi1})) \cdot \tan(\text{phi1})}\right) \\
 \text{nu1}(\text{phi1}) & \leftarrow \tan(\text{alphat}) + \frac{1}{rp1} \cdot \left(m \cdot rf1 \cdot \frac{\cos(\text{phi1})}{\cos(\text{beta})} - A1 - B1(\text{phi1}) \cdot \frac{\cos(\text{beta})}{\tan(\text{phi1})}\right) \\
 \text{ntro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{nu1}(\text{phi1}) + \text{epsilon1}(\text{phi1}) - \text{alphat} \\
 \text{rtro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \sqrt{(rp1 - B1(\text{phi1}))^2 + \left(B1(\text{phi1}) \cdot \frac{\cos(\text{beta})}{\tan(\text{phi1})}\right)^2} \\
 \text{gammatro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{gamma\_b1} - 2 \cdot \text{ntro1}(\text{phi1}) \\
 \text{ytr01}(\text{phi1}) & \leftarrow \text{rtro1}(\text{phi1}) \cdot \cos\left(\frac{\text{gammatro1}(\text{phi1})}{2}\right) \\
 \text{etro1}(\text{phi1}) & \leftarrow 2 \cdot \text{rtro1}(\text{phi1}) \cdot \sin\left(\frac{\text{gammatro1}(\text{phi1})}{2}\right) \\
 \text{dytro1}(\text{phi1}) & \leftarrow \frac{d}{d\text{phi1}} \text{ytr01}(\text{phi1}) \\
 N_3 & \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} - \frac{\pi}{180}} \frac{((yc1 - ytr01(\text{phi1})) \cdot \cos(\text{alphac1}) - (rb1 \cdot \text{tethac1} - rb1 \cdot \tan(\text{alphac1}))) \cos(\text{alphac1}) \cdot \sin(\text{alphac1}))^2}{etro1(\text{phi1})^3} \cdot \text{dytro1}(\text{phi1}) \cdot d\text{phi1} \\
 N_4 & \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} - \frac{\pi}{180}} \frac{\sin(\text{alphac1})^2}{etro1(\text{phi1})} \cdot \text{dytro1}(\text{phi1}) \cdot d\text{phi1} \\
 N_5 & \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{alphan} - \frac{\pi}{180}} \frac{\cos(\text{alphac1})^2}{etro1(\text{phi1})} \cdot \text{dytro1}(\text{phi1}) \cdot d\text{phi1} \\
 \text{alpha2}(\text{tetha2}) & \leftarrow \text{tetha2} + \frac{\text{gamma\_b2}}{2} \\
 \text{alphac2} & \leftarrow \text{tethac2} + \frac{\text{gamma\_b2}}{2} \\
 y2(\text{tetha2}) & \leftarrow \frac{rb2}{\cos(\text{alpha2}(\text{tetha2}))} + (rb2 \cdot \text{tetha2} - rb2 \cdot \tan(\text{alpha2}(\text{tetha2}))) \cdot \sin(\text{alpha2}(\text{tetha2})) \\
 yc2 & \leftarrow \frac{rb2}{\cos(\text{alphac2})} + (rb2 \cdot \text{tethac2} - rb2 \cdot \tan(\text{alphac2})) \cdot \sin(\text{alphac2}) \\
 e2(\text{tetha2}) & \leftarrow 2 \cdot (rb2 \cdot \text{tetha2} - rb2 \cdot \tan(\text{alpha2}(\text{tetha2}))) \cdot \cos(\text{alpha2}(\text{tetha2})) \\
 N_6 & \leftarrow \frac{H \cdot 6}{E \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf2}}^{\text{tetha\_sup2}} \frac{((y2(\text{tetha2}) - yc2) \cdot \cos(\text{alphac2}) - (rb2 \cdot \tan(\text{alpha2}(\text{tetha2}) - rb2 \cdot \text{tethac2})) \cos(\text{alphac2}) \cdot \sin(\text{alphac2}))^2}{e2(\text{tetha2})^3} \cdot rb2 \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alpha2}(\text{tetha2})) \cdot d\text{tetha2} \\
 N_7 & \leftarrow \frac{H \cdot 1}{2 \cdot E \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf2}}^{\text{tetha\_sup2}} \frac{\sin(\text{alphac2})^2}{e2(\text{tetha2})} \cdot rb2 \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alpha2}(\text{tetha2})) \cdot d\text{tetha2} \\
 N_8 & \leftarrow \frac{H \cdot 1.2}{2 \cdot G \cdot b} \int_{\text{tetha\_inf2}}^{\text{tetha\_sup2}} \frac{\cos(\text{alphac2})^2}{e2(\text{tetha2})} \cdot rb2 \cdot \text{tetha2} \cdot \cos(\text{alpha2}(\text{tetha2})) \cdot d\text{tetha2}
 \end{aligned}$$

```

tetha_0
Rr2 ← z2 · cg
z2 - z0
Rr0 ← z0 · cg
z2 - z0

delta2 (phi2) ← √(rc0² - Rr0² · cos(phi2)² - Rr0 · sin(phi2) + m · rf2)
rtro2 (phi2) ← √(Rr2² + delta2(phi2)² + 2 · Rr2 · delta2(phi2) · sin(phi2))
lambda2 (phi2) ← asin( (delta2(phi2) / rtro2(phi2)) · cos(phi2) )
epsilon2 (phi2) ← asin( (delta2(phi2) - m · rf2) / rc0 · cos(phi2) )
nc_0 ← tetha_eo10 - tethac0
tetha_0(phi2) ← nc_0 + epsilon2(phi2) + alpha_g
tetha_2(phi2) ← (rb2 - rb0) / rb2 · tan(alpha_g) + (rb0 / rb2) · tetha_0(phi2)
ntro2(phi2) ← tetha_2(phi2) - alpha_g - lambda2(phi2)
gammatro2(phi2) ← gamma_b2 + 2 · ntro2(phi2)
etro2(phi2) ← 2 · rtro2(phi2) · sin( (gammatro2(phi2) / 2) )
ytro2(phi2) ← rtro2(phi2) · cos( (gammatro2(phi2) / 2) )
dytro2(phi2) ← d/dphi2 ytro2(phi2)

N_9 ← (H · G) / (E · b) · ∫_alpha_g^pi/2 ( (ytro2(phi2) - yc2) · cos(alphac2) - (rb2 · tan(alphac2) - rb2 · tethac2) · cos(alphac2) · sin(alphac2) )² / etro2(phi2)³ · dytro2(phi2) dphi2

N_10 ← (H · 1) / (2 · E · b) · ∫_alpha_g^pi/2 ( sin(alphac2)² / etro2(phi2) ) · dytro2(phi2) dphi2

N_11 ← (H · 1.2) / (2 · G · b) · ∫_alpha_g^pi/2 ( cos(alphac2)² / etro2(phi2) ) · dytro2(phi2) dphi2

kh ← 2 · pi / (4 · (1 - mu²) · E · b)
N_12 ← 1 / kh
U ← 0
if tethac1_0 > tetha_inf1 + (2 · pi) / z1
  for k ∈ 0..12
    U ← U + N_k
    V ← 1 / U
  else
    V ← 0
M_4,6 ← V
s4 ← s4 + 1

```

Entradas	excel := Matrix						
	Code	Chi	n	V	v	V_ant	V_pos
Salidas							

## Apéndice 3

### Geometría del perfil de evolvente

En el presente capítulo se define la geometría del perfil de evolvente para los dientes de engranajes de dentado interior, tanto el piñón, de dientes exteriores, como la corona de dientes interiores. Las relaciones geométricas del perfil de evolvente dependen exclusivamente de las propiedades de la herramienta de tallado y su desplazamiento durante el mismo, mientras que las relaciones de funcionamiento dependen de la geometría de ambas ruedas en conjunto. Algunas de estas relaciones, como los radios o ángulos de engrane, son puramente geométricas, y otras, como los grados de recubrimiento o la longitud mínima de contacto, específicamente funcionales.

A continuación, se va a proceder a estudiar la geometría de la rueda tallada a partir de los parámetros geométricos de la herramienta que la talla. Las dentaduras de perfil de evolvente se pueden generar bien con herramientas de flancos rectos, como es el caso de la cremallera

para engranajes de dentado exterior bien con piñones cuyos flancos sean perfiles de evolvente, estudio que llevaremos a cabo en el presente capítulo.

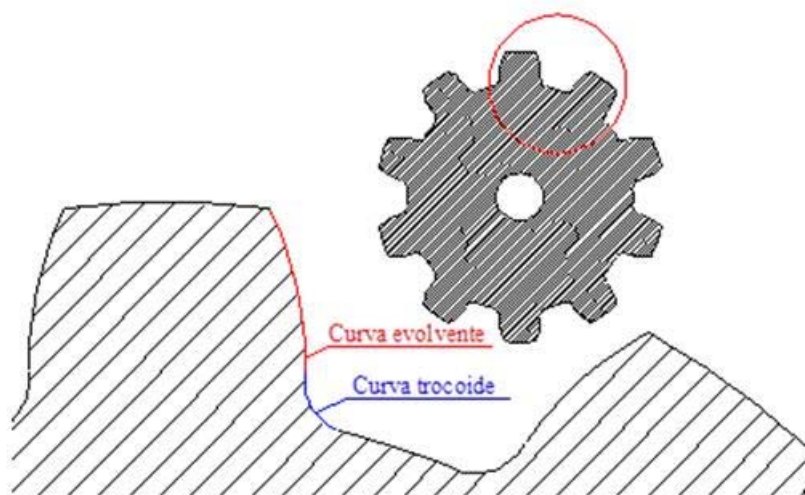


Figura A3.1. Curvas dentado de engranaje de perfil de evolvente. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

En primer lugar, se describirá la evolvente de circunferencia, así como la generación de este perfil y sus ecuaciones paramétricas. Se determinarán las ecuaciones del perfil que la herramienta genera en el tallado, demostrando que corresponde a la ecuación de una evolvente de circunferencia, así como en el acuerdo inferior, donde la evolvente no existe, correspondiendo en este caso a una trocoide.

### A3.1 Perfil de evolvente. Propiedades geométricas

La evolvente de circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos de un plano que verifican que la tangente por ellos a una circunferencia, llamada circunferencia de base, define un punto de tangencia que dista del punto considerado una distancia igual a la longitud del arco de la circunferencia de base limitado por el punto de tangencia y uno dado de la circunferencia.

En otras palabras, de la Fig. A3.2, los puntos P y P<sub>0</sub> de la evolvente cumplen que la distancia QP es igual al arco QP<sub>0</sub>. El punto P<sub>0</sub> es el punto de la evolvente a partir del cual se inicia la misma, por lo que de ahora en adelante se le denominará origen de evolvente.

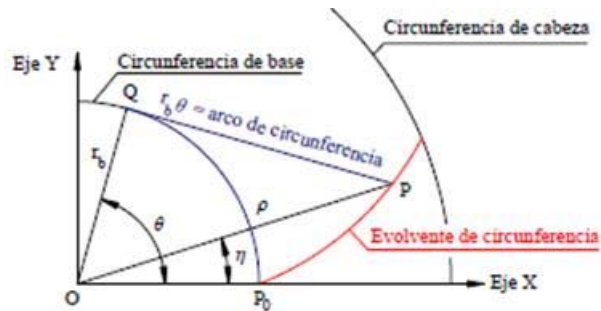


Figura A3.2. Evolvente de circunferencia. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Si  $r_b$  es el radio de la circunferencia de base, y  $\theta$  es el ángulo que abarca el arco de circunferencia limitado por el origen de la evolvente  $P_0$  y un punto cualquiera Q de la circunferencia de base, el punto de la evolvente correspondiente a este último habrá de verificar:

$$\rho = \sqrt{r_b^2 + r_b^2 \theta^2} = r_b \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$\eta = \theta - \operatorname{arctg} \frac{r_b \theta}{r_b} = \theta - \operatorname{arctg} \theta$$

lo que constituye las ecuaciones paramétricas de la evolvente en coordenadas polares, referidas a unos ejes cuyo origen de radios es el centro de la rueda, y su origen de ángulos, el radio que contiene el origen de la evolvente.

### A3.2. Engranajes de dentado exterior tallados con cremallera

En este apartado, definiremos las ecuaciones de la geometría de la rueda tallada a partir de los parámetros geométricos de la herramienta utilizada para tallarla. En el caso de engranajes exteriores de perfil de evolvente, esta herramienta es una cremallera con perfiles rectos, que genera el perfil deseado.

A continuación, se introducirán los parámetros dimensionales que definen la cremallera. Se presentarán los valores normalizados comúnmente utilizados en la práctica, así como las restricciones existentes entre ellos. Los desarrollos posteriores se realizarán con valores genéricos, bajo hipótesis de verificar dichas restricciones pero sin preestablecer ninguno de ellos. Posteriormente, se determinarán las ecuaciones del perfil que la cara recta de la herramienta genera en el tallado, demostrándose que corresponde a la ecuación de una evolvente.

Finalmente, una vez determinado el perfil del diente y conocida, por tanto, su geometría, se deducirán las expresiones de algunas magnitudes importantes derivadas como la variación del espesor del diente con el radio, y las condiciones que limitan los parámetros de tallado.

### A3.2.1. Geometría de la cremallera

La Figura A3.3, muestra la geometría de una herramienta de tallado. Los flancos de los dientes de la cremallera son de perfil rectilíneo y ambos tienen la misma inclinación con la dirección del eje principal.

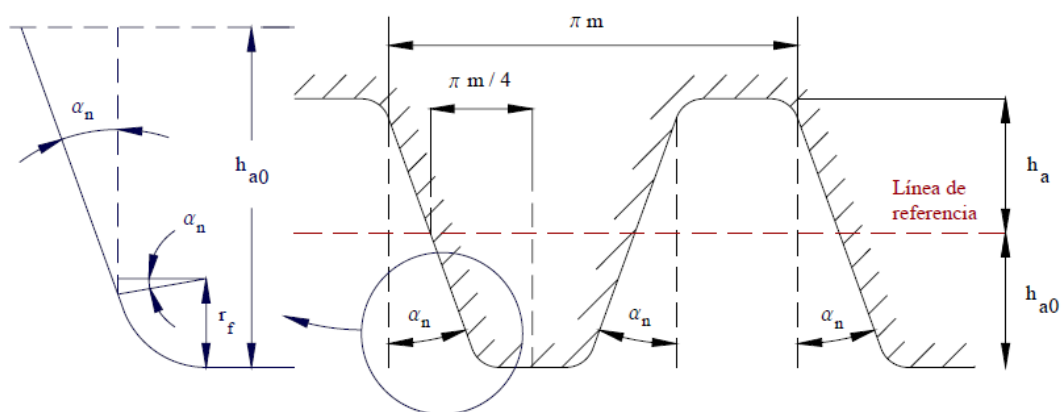


Figura A3.3. Geometría de la cremallera. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

A continuación, se definen los parámetros característicos que en ella aparecen:

- **Línea de referencia** (línea primitiva): Recta trazada siguiendo la dirección del eje longitudinal de la herramienta, a una altura tal, que su intersección con las rectas que forman los flancos de los dientes determina en ella segmentos que representan el



espesor de los dientes y de los huecos, o intervalos entre dientes, de forma que el segmento correspondiente al espesor del diente sea igual al del hueco.

- **Ángulo de presión** ( $\alpha_n$ ): Ángulo que forman los flancos de los dientes con la perpendicular a la línea primitiva.
- **Paso circular** ( $p$ ): Distancia sobre la línea de referencia entre dos puntos semejantes de dos dientes consecutivos. Esta misma distancia se hace igual a  $\pi$  por el módulo, de forma que, de la Figura A3.3

$$p = m\pi$$

- **Módulo** ( $m$ ): El módulo es una característica de magnitud, y representa la unidad del sistema de engranajes normalizados. Expresa el número de milímetros del diámetro primitivo, que corresponden a cada diente de la rueda.
- **Adendo** ( $mh_a$ ): Altura de pie de la cremallera. Distancia desde la línea primitiva al plano de pie de la cremallera. Se convertirá en la altura de cabeza del engranaje generado. ( $h_a$ : factor de adendo)
- **Dedendo** ( $mh_{a0}$ ): Altura de cabeza de la herramienta. Distancia desde la línea primitiva al plano de cabeza de la cremallera. Se convertirá en la altura de pie del engranaje generado. ( $h_{a0}$ : factor de dedendo)
- **Radio de acuerdo de cabeza** ( $mr_f$ ): También llamado radio de cabeza de la herramienta, está limitado por el ángulo de presión, adendo y dedendo.

### A3.2.2. Circunferencia primitiva

El tallado de una rueda se lleva a cabo de forma que mientras la rueda va girando alrededor de su centro, Figura A3.4, la herramienta se desplaza de manera que una circunferencia de la rueda, denominada circunferencia primitiva, rueda sin deslizar sobre el plano de la herramienta al que es tangente. Por tanto, si la rueda gira un ángulo  $d\varphi$ , la herramienta se desplaza una distancia  $r_{p1} d\varphi$ , donde  $r_{p1}$  es el radio de la circunferencia primitiva, que vendrá dado por:

$$r_{p1} = \frac{mz_1}{2}$$

con lo que tanto el paso  $p$  como el módulo  $m$  descritos en el epígrafe anterior podrán expresarse en función de  $r_p$ .

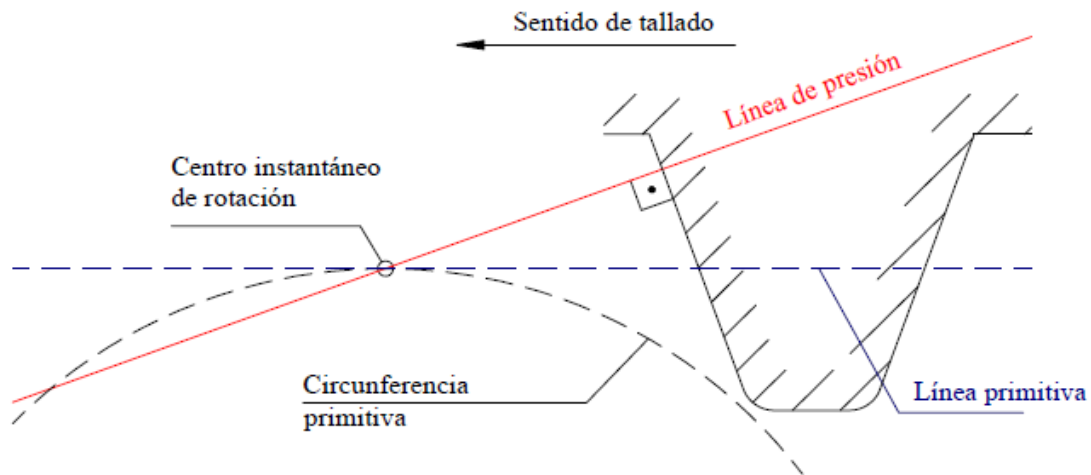


Figura A3.4. Geometría de la cremallera. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

La Figura A3.5, describe el movimiento de la herramienta durante el tallado. Supóngase que el punto 1 de la rueda pasa a ocupar la posición 2 tras un giro  $d\varphi$  alrededor de su centro. La herramienta se desplazará hacia la izquierda una distancia  $r_{p1} d\varphi$ , y su perfil, que antes pasaba por el punto 3', pasará a situarse sobre el punto 3. La distancia del punto de la rueda al perfil de la herramienta, antes y después del giro, será, de acuerdo con la Figura A3.5:

$$\delta_1 = l_{11'} = l_{42'}$$

$$\delta_2 = l_{23}$$

La distancia entre los puntos 2 y 2' se puede expresar de dos maneras:

$$I_{22'} = I_{24} + I_{42'} = r_1 d\varphi \text{ sen}(\varphi - \alpha_n) + \delta_1$$

$$I_{22'} = I_{23} + I_{32'} = \delta_2 + I_{33'} \cos(\alpha_n) = \delta_2 + r_{p1} d\varphi \cos(\alpha_n)$$

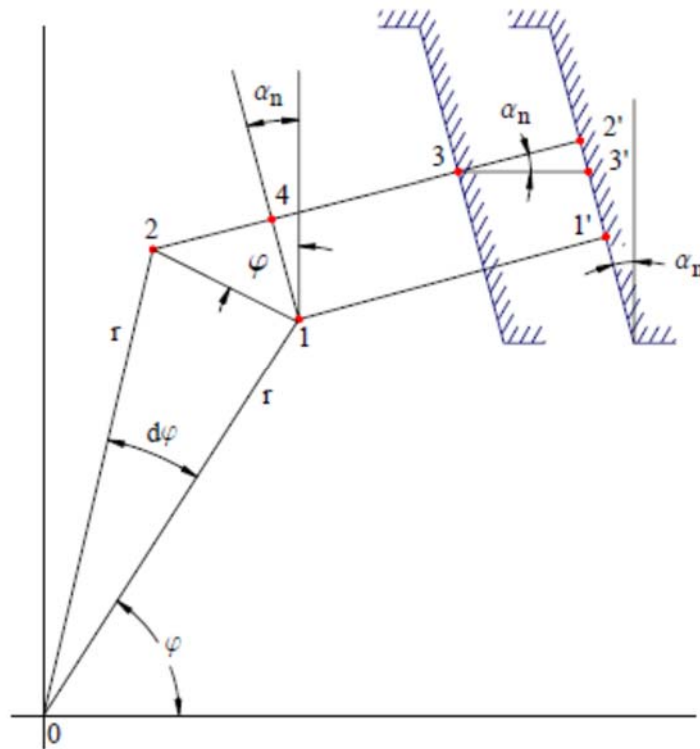


Figura A3.5. Desplazamiento de la herramienta durante el tallado. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Por consiguiente, igualando ambas expresiones:

$$r_1 \operatorname{sen}(\varphi - \alpha_n) d\varphi + \delta_1 = \delta_2 + r_{p1} \cos(\alpha_n) d\varphi$$

Lo que permite obtener las diferenciales primera y segunda de la distancia del punto a la herramienta, la primera despejando de la ecuación anterior y la segunda por derivación.

$$d\delta = \delta_2 - \delta_1 = [r_1 \operatorname{sen}(\varphi - \alpha_n) - r_{p1} \cos(\alpha_n)] d\varphi$$

$$d^2\delta = \frac{d(d\delta)}{d\varphi} = r_1 \cos(\varphi - \alpha_n) d\varphi^2$$

Para buscar las condiciones de distancia mínima, se tiene:

$$d\delta = 0 \rightarrow r_1 \operatorname{sen}(\varphi - \alpha_n) = r_{p1} \cos(\alpha_n)$$

$$d^2\delta > 0 \rightarrow \varphi - \alpha_n < \frac{\pi}{2}$$

luego los puntos  $(r_1, \varphi)$  de la rueda que verifican estas dos condiciones, distan de la herramienta una distancia que es mínima. Es evidente que, si además de ser mínima, esta distancia fuese nula, el punto sería un punto del perfil del diente. Por consiguiente, en cada posición de la herramienta, el punto de la misma cuyas coordenadas  $(r_1, \varphi)$  verifican las ecuaciones anteriores, estará tallado un punto del perfil.

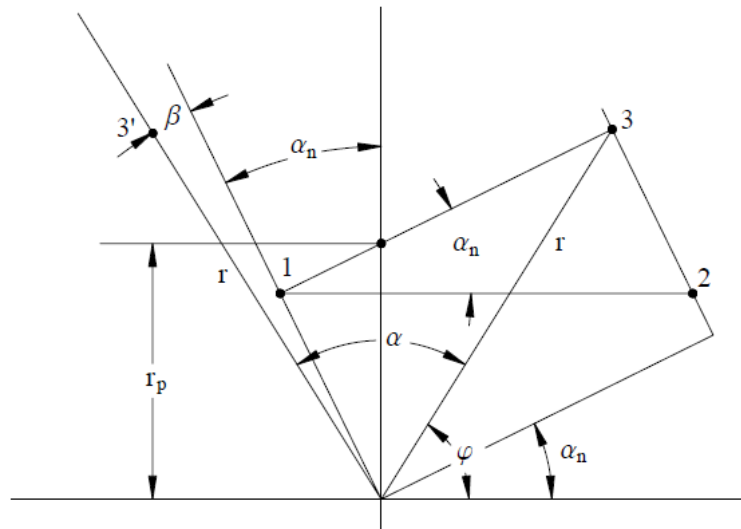


Figura A3.6. Localización de los puntos de tallado. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

En un plano de referencia fijo, como el de la Figura A3.6, estos puntos se localizan en la semirrecta 13, como se puede comprobar fácilmente. Por consiguiente, todos los puntos del perfil del diente son tallados por la herramienta en algún punto de la recta perpendicular al perfil de ésta y cuya distancia al centro del engrane vale  $r_p \cos \alpha_n$ .

### A3.2.3. Ecuación del perfil generado

En la Figura A3.6, cuando la herramienta esté tallando el punto 1, situado a una distancia  $r_b$  del centro de la rueda, el punto que talló cuando estaba en 3 habrá girado un ángulo:

$$\alpha = \frac{I_{12}}{r_p} = \frac{I_{13}}{r_p \cos(\alpha_n)}$$

y se habrá situado en  $3'$ . El ángulo  $\beta$  de la figura vendrá dado por:

$$\beta = \alpha - \alpha_n - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha_n)} + \left(\varphi - \alpha_n - \frac{\pi}{2}\right)$$

haciendo:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha_n) = \frac{1}{\theta_1}$$

y por tanto:

$$\operatorname{tg}\left(\varphi - \alpha_n - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha_n)} = -\theta_1$$

$$\operatorname{sen}(\varphi - \alpha_n) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha_n)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi - \alpha_n)}} = \frac{\frac{1}{\theta_1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\theta_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}}$$

$$r_1 = \frac{r_{p1} \cos(\alpha_n)}{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha_n)} = r_{p1} \cos(\alpha_n) \sqrt{\theta_1^2 + 1}$$

Que corresponden a las ecuaciones paramétricas de la evolvente anteriormente obtenidas, con un radio base:

$$r_{b1} = r_{p1} \cos(\alpha_n)$$

Por lo tanto, queda demostrado que el perfil generado por la recta de la herramienta de tallado por encima de un radio  $r_{p1} \cos \alpha_n$ , es una evolvente de circunferencia. El radio de base de esa circunferencia se conoce como radio de base del engranaje,  $r_{b1}$ . El perfil de evolvente es la evolvente de las trayectorias de los puntos de la cara de la herramienta.

**A3.2.4. Ruedas helicoidales**

En ruedas helicoidales, la herramienta incide sobre el cilindro a tallar, de forma que sus caras frontales forman un ángulo  $\beta$ , con las generatrices de dicho cilindro, conocido como ángulo de hélice.

Cada cara perpendicular al eje de la rueda, llamada sección frontal o transversal del engranaje helicoidal, será un engranaje recto de espesor diferencial, que estará desplazado un giro, también diferencial, respecto al anterior.

De acuerdo con la Figura A3.7, la sección frontal corresponde a un engranaje recto cuyo ángulo de presión y módulo se expresan como:

$$tg\alpha_t = \frac{\frac{L}{\cos\beta}}{H} = \frac{1}{\cos\beta} \frac{L}{H} = \frac{1}{\cos\beta} tg\alpha_n$$

$$m_t = \frac{m}{\cos\beta}$$

en engranajes rectos,  $\alpha_t$  coincide con  $\alpha_n$  y  $m_t$  con el módulo de la herramienta,  $m$ .

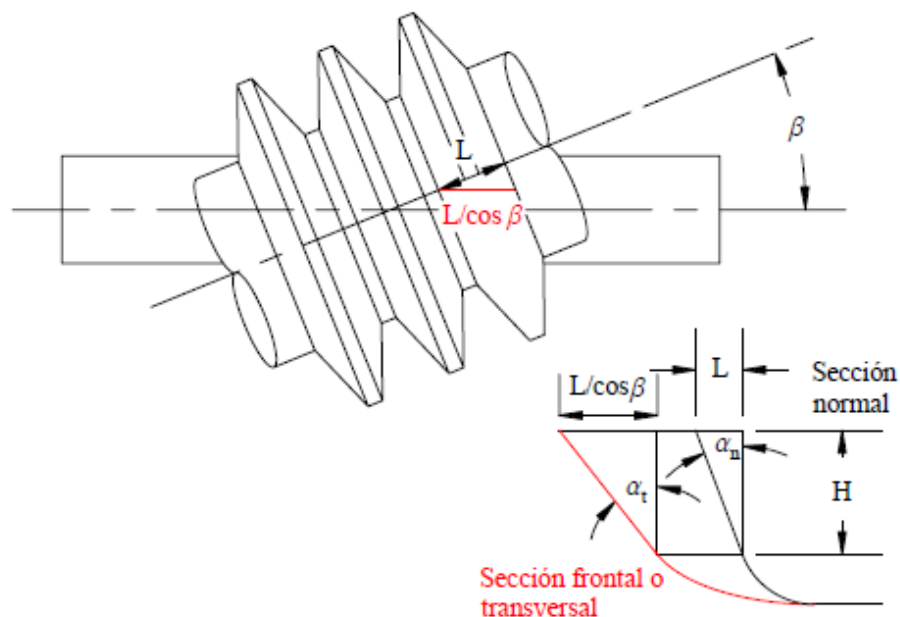


Figura A3.7. Tallado de un engranaje cilíndrico helicoidal. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Se puede hacer una generalización de las expresiones obtenidas para engranajes rectos referidas al radio primitivo y radio de base, así pues, en el caso de engranajes helicoidales tenemos:

$$r_{p1} = \frac{m_t z_1}{2} = \frac{m_n z_1}{2 \cos \beta}$$

$$r_{b1} = r_{p1} \cos \alpha_t = \frac{m_n z_1}{2 \cos \beta} \cos \alpha_t$$

En lo sucesivo, se sustituirá  $m_n$ , módulo normal, por  $m$ , módulo de la herramienta de tallado, ya que coinciden.

Por tanto, para el estudio de un engranaje helicoidal, se podrá considerar éste como una sucesión de engranajes rectos de espesor diferencial, tallados con estos valores del módulo  $m_t$  y del ángulo de presión  $\alpha_t$ , a los que se designará por módulo y ángulo de presión en la sección frontal, respectivamente.

### A3.2.5. Desplazamiento. Coeficiente de desplazamiento

Se llama desplazamiento de la herramienta a la distancia entre el plano primitivo de la misma y la circunferencia primitiva de la rueda durante el tallado. En consecuencia, una rueda sin desplazamiento se talla con el plano primitivo de la herramienta situado a una distancia del centro de la rueda igual al radio primitivo de ésta.

En general, el desplazamiento se expresa como un número de veces el módulo, el cual se representará por  $x_1$ , y se conoce como coeficiente de desplazamiento, o simplemente desplazamiento. El desplazamiento se entenderá como positivo cuando la herramienta se aleja de la rueda, y negativo en caso contrario. Así mismo, es bastante intuitivo el hecho de que un desplazamiento positivo da lugar a un diente más ancho en la base y, por tanto, más robusto, mientras que un desplazamiento negativo genera un diente más delgado y débil.

### A3.2.6. Espesor del diente

Cuando una herramienta talla una rueda con desplazamiento  $x_1$ , la circunferencia primitiva del engranaje rueda sin deslizar, sobre un plano situado a una distancia  $mx$  por debajo del plano primitivo de la herramienta. De acuerdo con la Figura A3.8, el espesor de la herramienta en este plano de rodadura será:

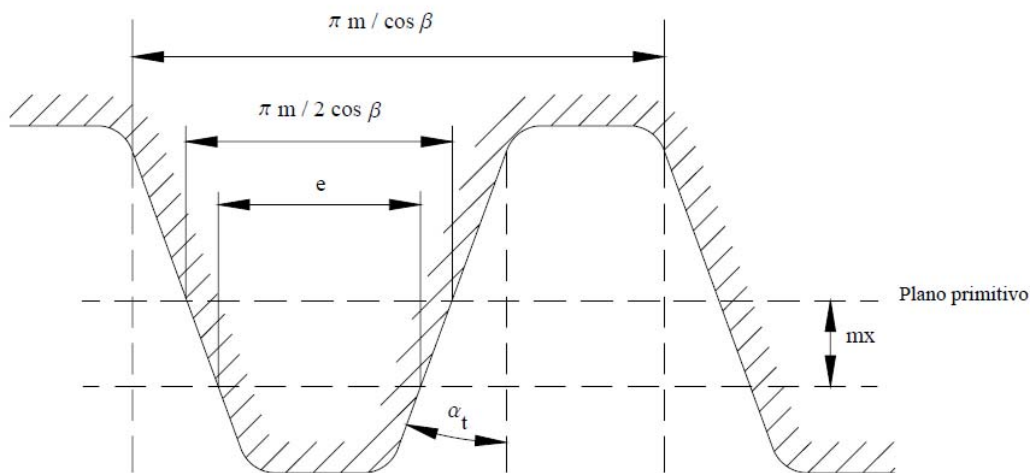


Figura A3.8. Espesor de la herramienta en el plano de rodadura. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

$$e = \frac{\pi m_t}{2} - 2mx_1 \operatorname{tg}(\alpha_t) = \frac{\pi m}{2 \cos \beta} - 2mx_1 \operatorname{tg}(\alpha_t)$$

Puesto que durante el tallado, en este plano se tiene rodadura sin deslizamiento, dicho espesor coincidirá con el hueco a una distancia  $r_{p1}$  del centro, medido sobre la circunferencia primitiva. Por consiguiente, según se observa en la Figura A3.9, el ángulo abarcado por el diente a un radio  $r_{p1}$  será:

$$\gamma_{p1} = \frac{2\pi}{z_1} - \frac{e}{r_{p1}} = \frac{2\pi}{z_1} - \frac{\frac{\pi m}{2 \cos \beta} - 2mx_1 \operatorname{tg}(\alpha_t)}{\frac{mz_1}{2 \cos \beta}} = \frac{2\pi}{z_1} - \frac{\pi}{z} + \frac{4x_1 \operatorname{tg}(\alpha_t) \cos \beta}{z_1}$$

$$\gamma_{p1} = \frac{\pi}{z_1} + \frac{4x_1}{z_1} \operatorname{tg}(\alpha_n)$$



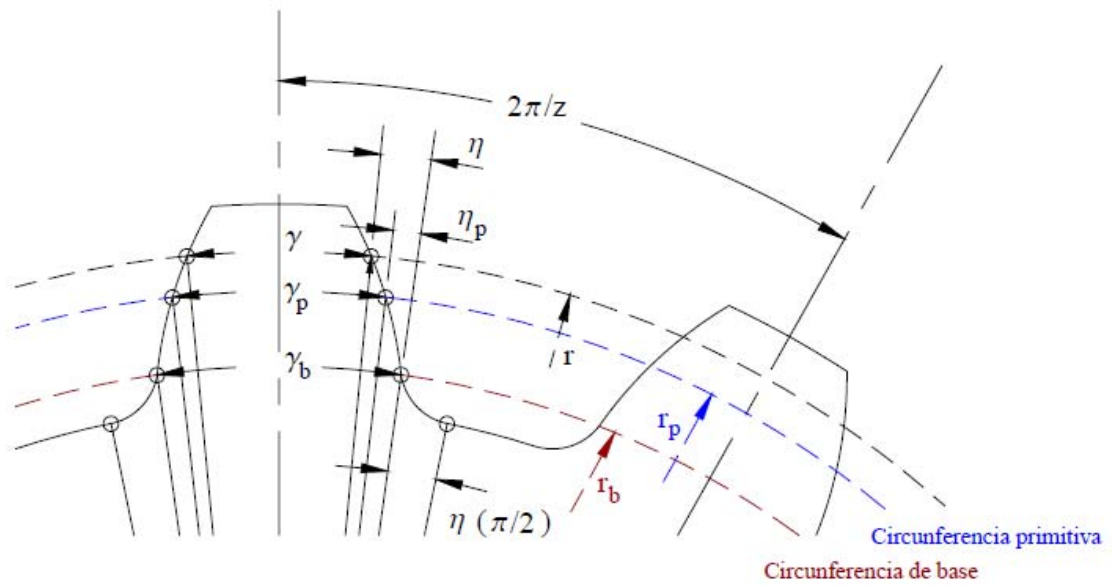


Figura A3.9. Espesores angulares del diente. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Según la Figura A3.9, obtenemos:

$$\gamma + 2\eta = \gamma_p + 2\eta_p$$

pero, debido a que tanto  $r$  y  $\eta$  como  $r_p$  y  $\eta_p$  verifican la ecuación de la evolvente, se tiene:

$$\eta = \theta - \operatorname{arctg} \theta = \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}$$

$$\eta_p = \sqrt{\frac{r_p^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_p^2}{r_b^2} - 1} = \operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t$$

Sustituyendo:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{z_1} + \frac{4x_1}{z_1} \operatorname{tg}(\alpha_n) + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2 \left( \sqrt{\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1} \right)$$

Esta expresión del espesor angular de un diente a un radio cualquiera, refleja que dicho espesor disminuye a medida que aumenta el radio. Ello quiere decir que existe un valor máximo para el radio de cabeza de la rueda  $r_{a1}$  a partir del cual se eliminaría todo el material durante el tallado. Es lo que se conoce como apuntamiento del diente.

Para ruedas sin desplazamiento situadas de manera que la distancia entre centros sea igual a la suma de los radios primitivos de ambas,  $r_{p1}$  y  $r_{p2}$ , que es lo que se conoce como distancia entre ejes nominal  $C_0$ , el radio de cabeza acostumbra a calcularse con la expresión:

$$r_{a1} = r_{p1} + mh_{a1}$$

### A3.2.7. Ecuación de la trocoide en la base del diente

Las ecuaciones de las curvas que generan los puntos de la zona redondeada de la cabeza de la herramienta no se corresponden con la ecuación de una evolvente.

Se llama trocoide a la curva descrita por los puntos del acuerdo de la cabeza de la herramienta, identificados por el parámetro  $\varphi$ , sobre la rueda generada.

El desarrollo siguiente se realiza para el caso de ruedas helicoidales en el que el tallado se produce con puntos de la cabeza de la herramienta en la sección frontal. El acuerdo de la herramienta se ve como una elipse, en lugar de una circunferencia, cuyo semieje vertical vale  $r_f$ , y su semieje horizontal  $r_f/\cos\beta$ . Las distancias verticales se mantendrán invariantes para engranajes rectos y helicoidales, y las horizontales aparecerán divididas por  $\cos\beta$  en el caso de engranajes helicoidales. Como es sabido, para el caso de engranajes rectos el ángulo de hélice  $\beta$  es igual a  $0^\circ$  y el ángulo de presión en la sección transversal  $\alpha_t$  coincide con el ángulo de presión en la sección normal  $\alpha_n$ .

Durante el tallado existe rodadura sin deslizamiento en el punto de tangencia de la circunferencia primitiva de la rueda con el plano horizontal de la herramienta que es tangente a ella. Por consiguiente, este punto es el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo, y en consecuencia, el punto de acuerdo que se talla en un instante dado es aquél cuya normal a

la elipse de cabeza pasa por el punto de rodadura. Las ecuaciones paramétricas de dicha elipse son:

$$x = r_x \cos \varphi = \frac{r_f}{\cos \beta} \cos \varphi$$

$$y = r_y \sin \varphi = r_f \sin \varphi$$

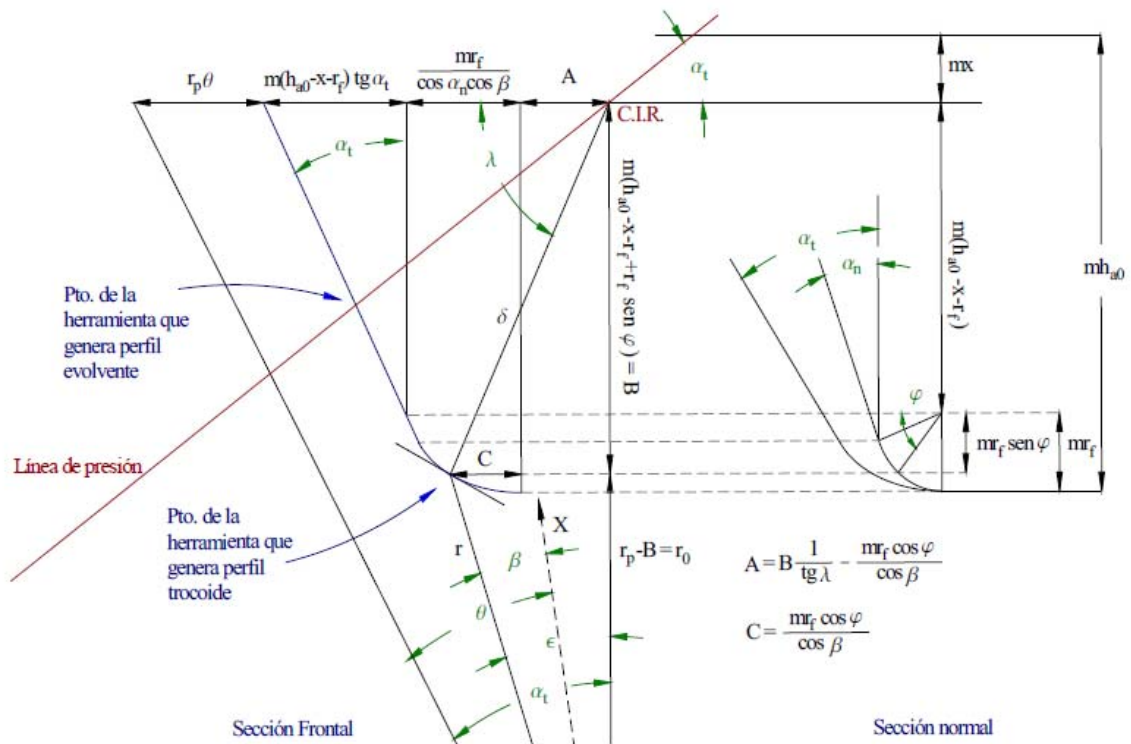


Figura A3.10. Tallado con puntos de acuerdo en cabeza de herramienta. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

De la Figura A3.10, aplicando el Teorema de Pitágoras para la determinación del radio de la trocoide en el punto generado en cada instante por el flanco curvo de la herramienta, las ecuaciones paramétricas de la trocoide vendrán dadas por:

$$r_{tro1} = \sqrt{(r_{p1} - B)^2 + \left(\frac{B \cos \beta}{\text{tg } \varphi}\right)^2}$$

$$\eta_{tro1} = \theta^* - (\alpha_t - \varepsilon)$$

donde  $\varphi$ , como se ha mencionado, determina el punto de la herramienta que talla el punto de la trocoide, es decir, para un  $\varphi$  dado, el punto de la cabeza de la herramienta caracterizado por  $\varphi$  es el que talla el punto de la trocoide cuyas coordenadas polares vienen dadas por las expresiones anteriores, particularizadas para el mismo  $\varphi$ . Por tanto, el parámetro de la trocoide  $\varphi$  estará limitado por el valor del ángulo de presión  $\alpha_n$  y  $\pi/2$  en el caso de que no se produzca penetración.

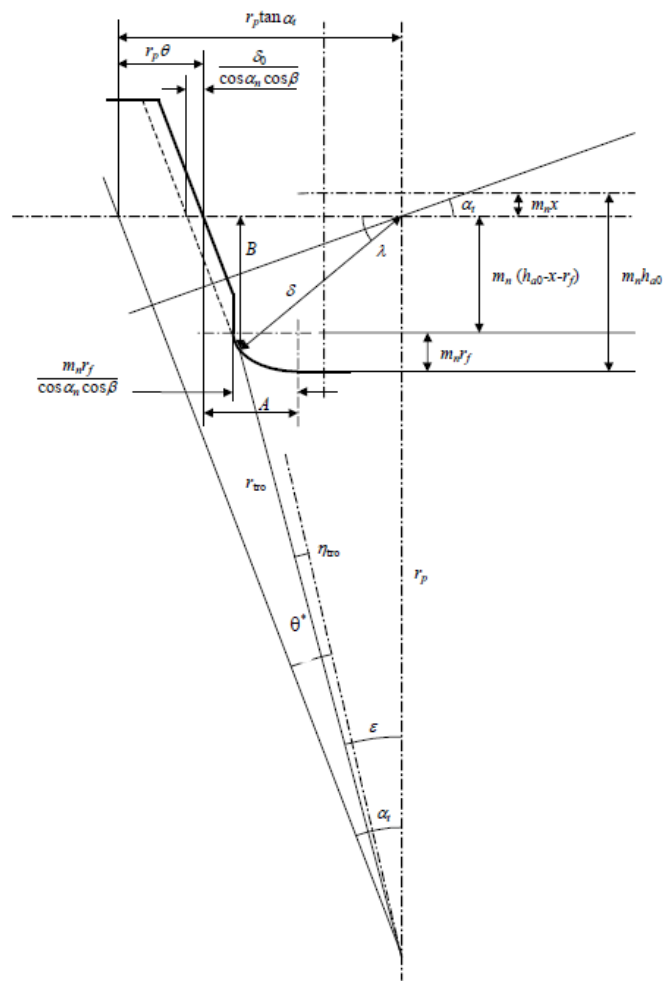


Figura A3.11. Determinación de las ecuaciones del perfil de trocoide. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Se puede observar, con ayuda de la Figura A3.11, que el término auxiliar  $B$  es igual a:

$$B = m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \text{sen } \varphi)$$

y además, se ha tenido en cuenta que el ángulo que forma la normal a la elipse de cabeza con una recta horizontal es:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta}$$

Para la determinación del ángulo de la trocoide  $\beta_{tro}$ , se observa en la Figura A3.11 que el ángulo  $\varepsilon$  se puede expresar como:

$$\varepsilon = \operatorname{atan} \left( \frac{B \cos \beta}{(r_{p1} - B) \tan \varphi} \right)$$

La distancia  $A$  se puede ver que corresponde a:

$$A = \frac{mr_f - \delta_0}{\cos \alpha_n \cos \beta} + m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1}) \tan \alpha_t$$

donde  $\delta_0$  es la protuberancia de la herramienta, que es igual a cero en los casos considerados en este proyecto. Sustituyendo y despejando el ángulo auxiliar  $\theta^*$  se obtiene:

$$\theta^* = \tan \alpha_t + \frac{1}{r_{p1}} \left( mr_{f1} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} - A - \frac{B \cos \beta}{\tan \varphi} \right)$$

Finalmente, sustituyendo todos estos términos en las ecuaciones paramétricas de la trocoide se obtiene:

$$r_{tro1} = \sqrt{\left( r_{p1} - m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \operatorname{sen} \varphi) \right)^2 + \left( \frac{\cos \beta}{\tan \varphi} m(h_{ha0} - x_1 - r_{f1} + r_{f1} \operatorname{sen} \varphi) \right)^2}$$

### A3.3. Tallado de ruedas interiores con piñón cortador

Las dentaduras de perfil de evolvente se pueden generar no sólo con herramientas de flancos rectos, sino también con piñones cuyos flancos sean perfiles de evolvente. La única diferencia entre la geometría de un engranaje y un piñón cortador estriba en el acuerdo de cabeza de éste último, que no existe en el primero. Se demostrará que la rueda de dentado

exterior es idéntica en su parte activa, es decir, en la parte del perfil que es de evolvente, a otra de iguales características generada por cremallera, y únicamente, se diferencian en la trocoide que se genera en la base del diente.

### A3.3.1. Geometría del piñón cortador

La geometría del piñón cortador vendrá definida por los mismos parámetros que definen la geometría de las ruedas de perfil de evolvente, como son: el módulo  $m$ , el número de dientes  $z_0$ , el ángulo de presión  $\alpha_0$ , la altura de cabeza o adendo  $h_{a0}$ , el desplazamiento con que se talló el piñón cortador  $x_0$  y el radio de acuerdo de cabeza  $r_{f0}$ . Los restantes parámetros geométricos, radio de base  $r_{b0}$ , radio primitivo  $r_{p0}$ , espesor angular  $\gamma_0$ , etc., pueden extraerse de las expresiones para engranajes tallados con cremallera. El subíndice  $0$  hace referencia al piñón cortador.

Circunferencia primitiva:

$$r_{p0} = \frac{mz_0}{2}$$

Radio base:

$$r_{b0} = r_{p0} \cos \alpha_n$$

El radio de cabeza será:

$$r_{a0} = r_{p0} + mx_0 + mh_{a0}$$

Sin embargo, debido al acuerdo de cabeza, el punto más alto del perfil activo del diente del piñón cortador no estará situado a una distancia  $r_{a0}$  del centro, sino  $r_{A0}$  inferior. Si se designa por  $C$ , el centro de acuerdo, y por  $r_c$ , la distancia de  $C$  al centro del piñón cortador, siendo esta distancia igual a:

$$r_c = r_{a0} - mr_{f0}$$

se tiene que la distancia  $r_{A0}$  vale:

$$r_{A0} = \sqrt{r_{b0}^2 + \left( mr_{f0} + \sqrt{r_C^2 - r_{b0}^2} \right)^2} = \sqrt{r_C^2 + mr_{f0}^2 + 2mr_{f0}\sqrt{r_C^2 - r_{b0}^2}}$$

según se aprecia en la Figura A3.12.

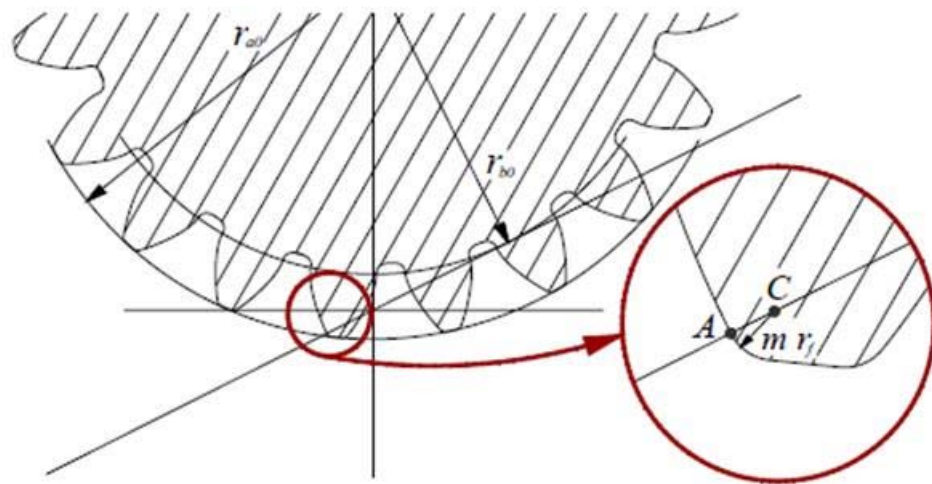


Figura A3.12. Acuerdo piñón cortador Fuente: TFG Silvia Aguiriano

De la Figura A3.13, se puede deducir el valor del ángulo  $\eta_{C0}$ , ángulo polar del punto C con respecto al origen de la evolvente y el ángulo  $\theta_{A0}$ :

$$\theta_{A0} = \frac{1}{r_{b0}} \left( mr_{f0} + \sqrt{r_C^2 - r_{b0}^2} \right) = \frac{mr_{f0}}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_C^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

$$\eta_{C0} = \theta_{A0} - \arccos \frac{r_{b0}}{r_C} = \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_C^2}{r_{b0}^2} - 1} - \arctg \sqrt{\frac{r_C^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

Con este ángulo se puede establecer la condición de no apuntamiento de la herramienta, siendo ésta:

$$\frac{\gamma_{b0}}{2} \geq \eta_{c0}$$

$$\frac{\pi}{2z_0} + \frac{2x_0}{z_0} \operatorname{tg} \alpha_n + (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \geq \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1}$$

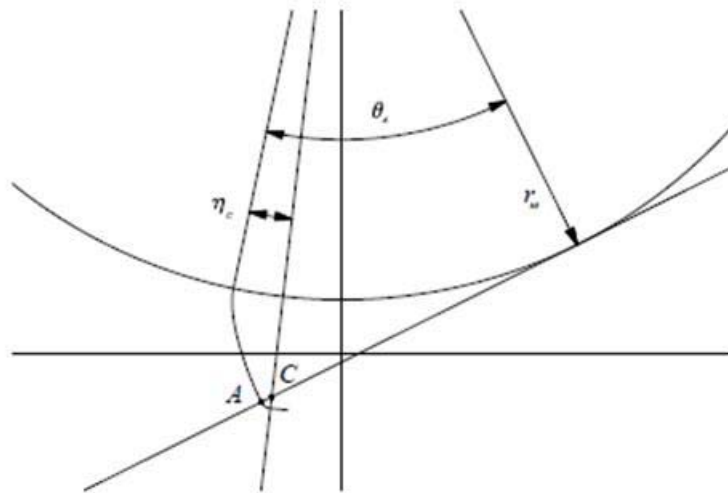


Figura A3.13. Geometría del piñón cortador Fuente: TFG Silvia Aguiriano

#### A3.4. Engranajes de dentado interior tallados con piñón cortador

En engranes interiores, la rueda va dentada interiormente y sus dientes presentan el contacto por su parte cóncava, mientras que el piñón es de dentado exterior y su estudio ha sido llevado a cabo en el epígrafe anterior.

Las reglas de normalización y el estudio de las posibles disposiciones de engranajes de dentado interior conducen a resultados análogos a los obtenidos para engranajes exteriores, con la salvedad del cambio de signo que acompaña al número de dientes del piñón en todas las fórmulas, dado que en este tipo de engranajes –interiores– la rotación de la rueda y del piñón es en el mismo sentido. No obstante, no se aplicará esta regla y se deducirán la geometría y los parámetros de funcionamiento de manera análoga a cuando se hizo para engranajes de dentado exterior.



En la Figura A3.15, se muestra un piñón engranando con una rueda de dentado interior o corona. Nótese que, ahora, ambos engranajes tienen sus centros de rotación en el mismo lado del punto donde se está produciendo el contacto, y que las circunferencias primitivas serán tangentes interiormente. Así pues, las posiciones de las circunferencias de adendo y de dedendo, con respecto a la circunferencia primitiva, están invertidas: la circunferencia de adendo de la corona queda dentro de la circunferencia primitiva.

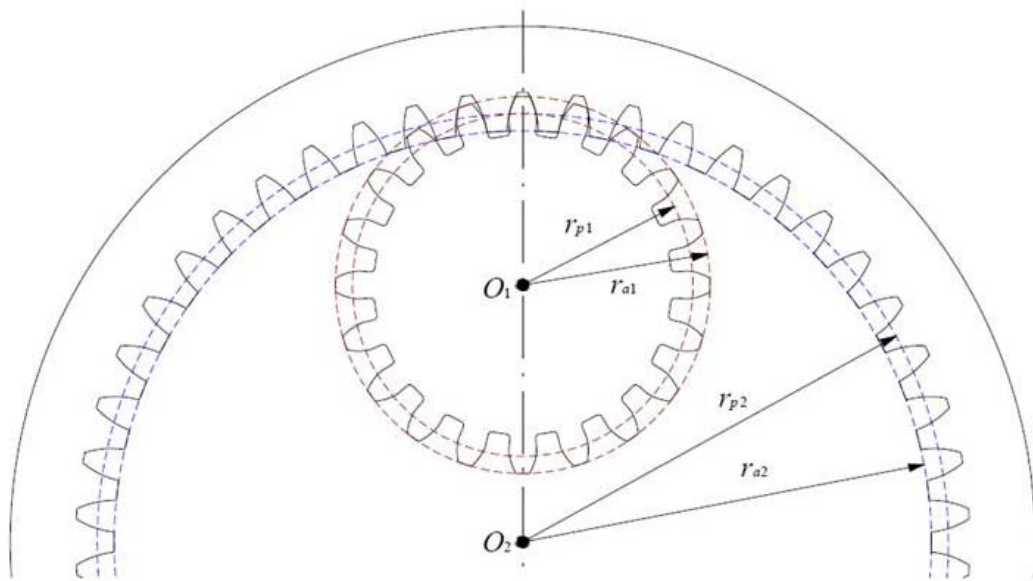


Figura A3.15. Engranajes interiores Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Al aumentar la distancia entre centros se incrementa el ángulo de presión y se reduce la longitud de la línea de acción, pero los dientes siguen siendo conjugados, el requisito para la transmisión de movimiento uniforme todavía se cumple y no se altera la relación de velocidades angulares.

#### A3.4.1. Ángulo de presión de generación

Cuando los desplazamientos entran en juego la determinación de la posición de las ruedas para el tallado se complica. Como se indicó anteriormente, la distancia entre centros ha de calcularse de manera que el diente generado tenga el mismo espesor que un diente generado por cremallera con el desplazamiento deseado  $x_2$ . Si se designa por  $C_g$  la distancia entre centros

de generación, para tallar un diente con desplazamiento  $x_2$ , el ángulo de presión  $\alpha_g$  vendrá dado por:

$$\cos\alpha_g = \frac{r_{b2} - r_{b0}}{C_{g2}} = \frac{m(z_2 - z_0)}{2C_g \cos\beta} \cos\alpha_t$$

Se puede deducir la expresión de los radios de rodadura en función de la distancia entre centros de generación.

$$r_{r2} = \frac{z_2 C_g}{z_2 - z_0} = \frac{r_{b2}}{\cos\alpha_g}$$

$$r_{r0} = \frac{z_0 C_g}{z_2 - z_0} = \frac{r_{b0}}{\cos\alpha_g}$$

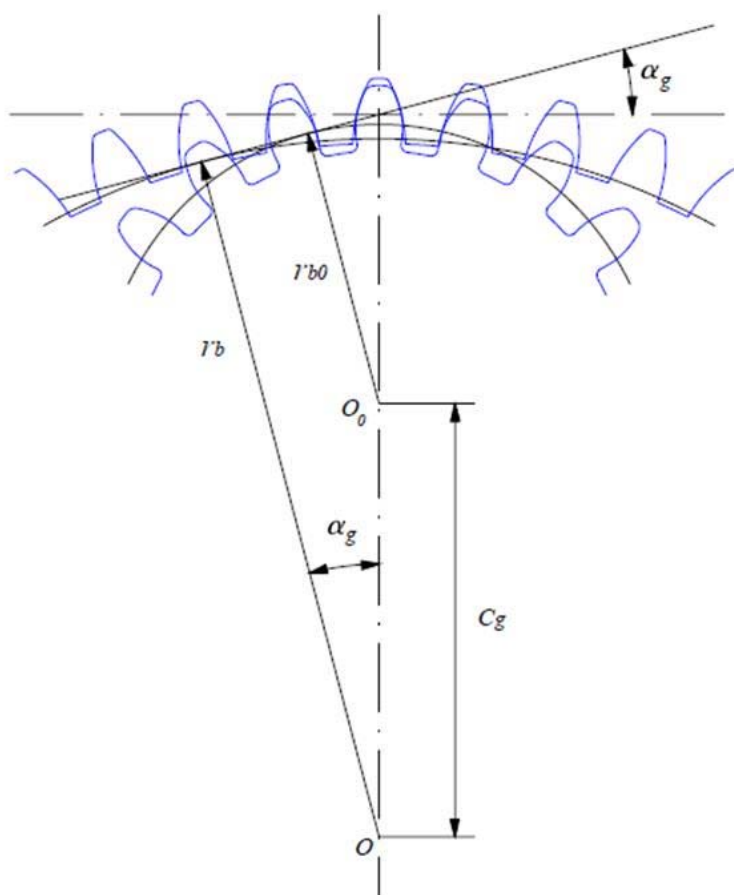


Figura A3.16. Distancia entre centros y ángulo de presión de generación. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

### A3.4.2. Generación del perfil de evolvente

En epígrafes anteriores se demostró que el punto de rodadura, y por tanto, el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo, está situado en la intersección de la línea de presión -normal al perfil del diente- y la línea de centros. Esto quiere decir que, durante la generación, el punto de la herramienta que talla en cada instante es aquél cuya normal pasa por el centro instantáneo de rotación, es decir, aquél que en cada momento se encuentra situado sobre la línea de presión de generación, o lo que es lo mismo, a la tangente común a las dos circunferencias de base durante la generación. Los puntos que forman parte del perfil generado son aquellos que a medida que gira la rueda se sitúan sobre una recta, por lo tanto, el perfil generado por el piñón cortador es un perfil de evolvente.

Además, y puesto que los radios de rodadura del piñón cortador y rueda generada están en la misma relación que los respectivos radios de base, se tiene:

$$\frac{r_{b2}}{r_{b0}} = \frac{r_{r2}}{r_{r0}} = \frac{z_2}{z_0}$$

Las ecuaciones paramétricas del perfil generado por la parte activa del piñón cortador corresponden a las de una evolvente. Para calcular dichas ecuaciones se considera que, durante la generación, la herramienta habrá girado un ángulo  $\alpha_0$  respecto de un instante anterior, girando la rueda que está siendo generada un ángulo  $\alpha_2$ , cuya relación con  $\alpha_0$  se establece mediante la relación de transmisión:

$$i = \frac{\theta_2}{\theta_0} = \frac{r_{b0}}{r_{b2}} = \frac{z_0}{z_2}$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 \frac{z_0}{z_2}$$

Al desplazarse la herramienta un ángulo  $\alpha_0$ , el punto de la misma que estaba tallando en el instante anterior se habrá desplazado, según las propiedades de la evolvente, una distancia equivalente a  $r_{b0}\alpha_0$ . De esta manera, la distancia recorrida por la herramienta entre los dos instantes de la generación considerados es:

$$r_{b0}\theta_0^* = r_{b0}\theta_0 - r_{b0}\alpha_0$$

donde  $\theta_0^*$  será el ángulo que define la nueva posición de la herramienta.

De manera análoga, la rueda habrá girado un ángulo  $\alpha_2$  durante la generación, y el punto que fue generado en un instante anterior se habrá desplazado una distancia equivalente a  $r_{b2}\alpha_2$ . El espacio recorrido por la rueda generada entre los dos instantes considerados debe ser el mismo que el recorrido por la herramienta, por lo que podemos decir:

$$r_{b2}\alpha_2 = r_{b0}\alpha_0$$

$$\alpha_0 = \alpha_2 \frac{r_{b2}}{r_{b0}}$$

Como se puede observar, las dos ecuaciones que dan el giro de rueda y herramienta expresan que la relación que existe entre los radios y los ángulos girados por la rueda y la herramienta permanece constante. Con todo lo dicho se puede asegurar que los perfiles del piñón cortador y de la rueda generada serán conjugados.

Cuando se definió el perfil del piñón cortador se dijo que era de evolvente, por lo que el perfil que genere en la rueda, al ser conjugado del de la herramienta, también será de evolvente.

De la Figura A3.17, se deducen las ecuaciones paramétricas del perfil generado:

$$r_2^2 = r_{b2}^2 + r_{b2}^2\theta_2^2 \rightarrow r = r_{b2}\sqrt{\theta_2^2 + 1}$$

$$\eta_2 = \theta_2 - \arctg \frac{r_{b2}\theta_2}{r_{b2}} \rightarrow \eta_2 = \theta_2 - \arctg \theta_2$$

donde  $r_2$  es el radio del punto considerado. Se comprueba que estas ecuaciones se corresponden con las de la evolvente, con lo que queda demostrado que el perfil activo generado es de evolvente.

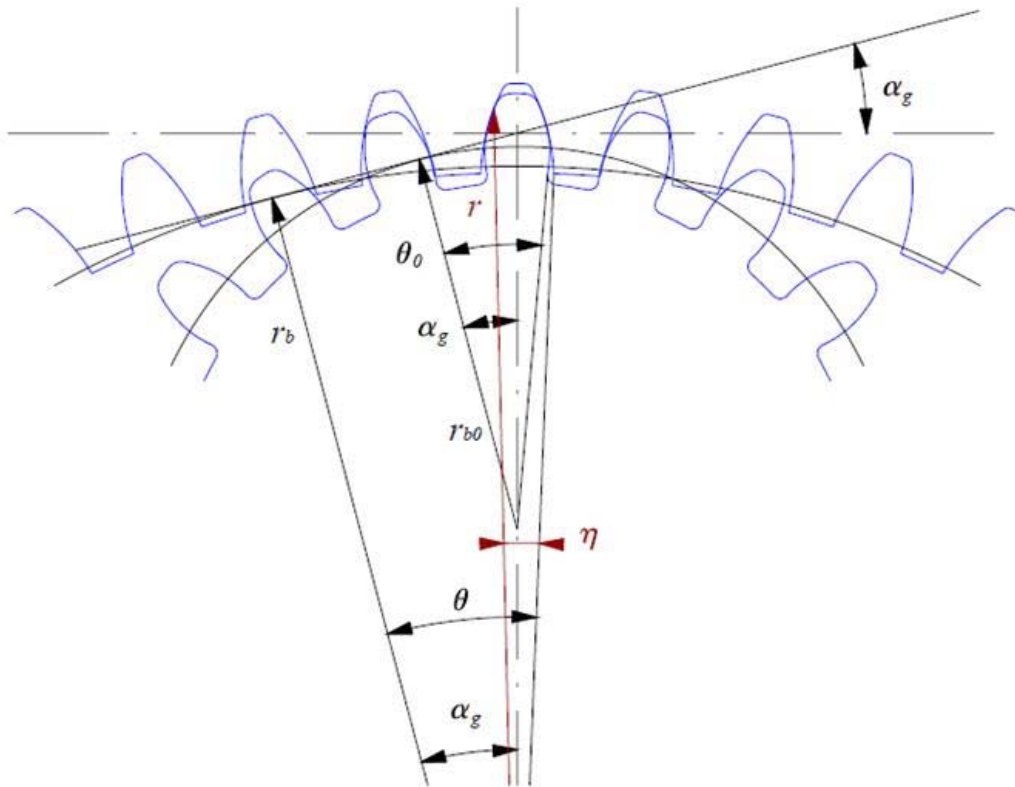


Figura A3.17. Perfil de evolvente generado. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

#### A3.4.3. Ecuación del perfil en la base del diente. Trocoide

La parte activa de la herramienta genera un perfil de evolvente en la rueda, mientras que el acuerdo de la cabeza genera en la base del diente un perfil que no es de evolvente. El perfil generado en la base del diente se corresponderá con el de una trocoide.

El punto del perfil de la herramienta que talla en cada instante es aquél cuya normal pasa por el punto de rodadura. Pero en el caso que se está considerando, el acuerdo de cabeza es una circunferencia, por lo que las normales pasan siempre por su centro  $C$ . En consecuencia, el punto de acuerdo que talla un punto de la trocoide es aquel que en cada instante se encuentra alineado con el centro del acuerdo y el punto de rodadura.

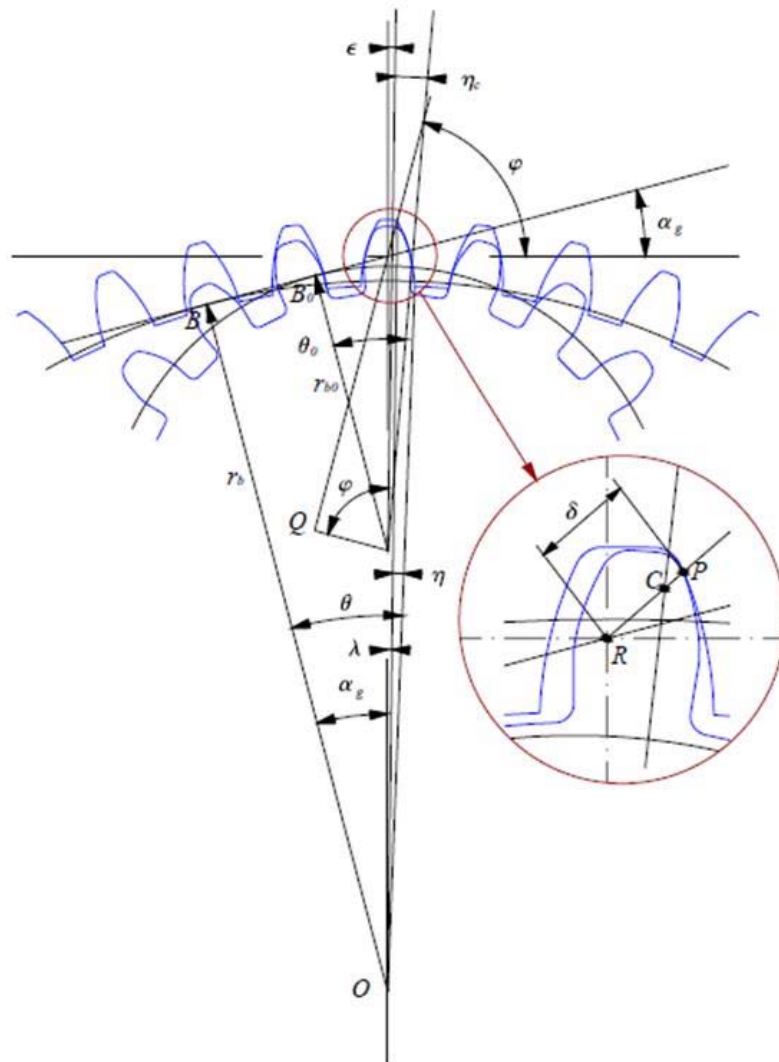


Figura A3.18. Trocoide en la base del diente. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

En la Figura A3.18, el punto de la herramienta que está tallando un punto de la trocoide es el punto P, y las coordenadas polares del punto que está siendo generado serán  $r$  y  $\eta$ . Se determinarán a continuación las ecuaciones genéricas del punto de la trocoide que está siendo generado.

La distancia entre los puntos C y R viene dada por:

$$l_{CR} = l_{CQ} - l_{RQ} = \sqrt{l_{O_0C}^2 - l_{O_0Q}^2} - l_{RQ} = \sqrt{r_c^2 - r_{r0}^2 \cos^2 \varphi} - r_{r0} \sin \varphi$$

donde el punto C es el centro del radio de acuerdo de la herramienta.

En consecuencia, la distancia entre los puntos P y R será:

$$\delta_2 = I_{PR} = I_{PC} + I_{CR} = mr_f + \sqrt{r_c^2 - r_{r0}^2 \cos^2 \varphi} - r_{r0} \operatorname{sen} \varphi$$

A partir de este resultado se obtiene el valor de r aplicando el teorema del coseno al triángulo OPR:

$$r_{tro2}^2 = \delta^2 + r_{r2}^2 - 2\delta_2 r_{r2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$r_{tro2} = \sqrt{\delta_2^2 + r_{r2}^2 + 2\delta_2 r_{r2} \operatorname{sen} \varphi}$$

En cuanto al ángulo  $\lambda_2$ , se aplica el teorema del seno al triángulo OPR y resulta:

$$\frac{\delta_2}{\operatorname{sen} \lambda_2} = \frac{r_{tro2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\delta_2}{r_{tro2}} \cos \varphi\right)$$

y por tanto el ángulo  $\eta_2$  respecto del origen de la evolvente, será:

$$\eta_2 = \theta_2 - \alpha_g - \lambda_2$$

Se debe calcular  $\theta_2$  ya que en este caso nos es desconocido. Aplicando el teorema del seno al triángulo O<sub>0</sub>RC, se calcula el valor del ángulo  $\varepsilon_2$ :

$$\frac{\cos(\varphi)}{r_c} = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_2}{l_{RC}}$$

$$\text{sen } \varepsilon_2 = \frac{\cos(\varphi)}{r_c} l_{RC}$$

Se debe recordar que:

$$I_{RC} = \delta_2 - mr_f$$

$$r_c = r_{a0} - mr_f$$

con lo que queda:

$$\varepsilon_2 = \text{arcsen} \left( \frac{\delta_2 - mr_f}{r_c} \cos \varphi \right)$$

De la Figura A3.18, se deduce que:

$$\theta_0 = \alpha_g + \eta_c + \varepsilon_2$$

donde  $\eta_c$  ya quedó definido cuando se definió la geometría del piñón cortador:

$$\eta_c = \theta_{A0} - \arccos \frac{r_{b0}}{r_c} = \frac{mr_f}{r_{b0}} + \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1} - \text{arctg} \sqrt{\frac{r_c^2}{r_{b0}^2} - 1} = \theta_{EOI_0} - \theta_{c0}$$

Finalmente, se relaciona  $\theta_2$  con  $\theta_0$  de la siguiente forma:

$$r_{b2}\theta_2 - C_g \text{sen } \alpha_g = r_{b2}\theta_2 - \frac{r_{b2} - r_{b0}}{\cos \alpha_{g2}} \text{sen } \alpha_g = r_{b2}\theta_2 - (r_{b2} - r_{b0}) \text{tg} \alpha_g = r_{b0}\theta_0$$



$$\theta_0 = \frac{r_{b2}\theta_2 - (r_{b2} - r_{b0})tg\alpha_g}{r_{b0}}$$

Igualando las expresiones obtenidas para  $\theta_0$ , y despejando, se obtiene la ecuación para  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \frac{r_{b0}\theta_0 + (r_{b2} - r_{b0})tg\alpha_g}{r_{b2}}$$

Aplicando la ecuación  $\eta_2 = \theta_2 - \alpha_{g2} - \lambda_2$ , para calcular el ángulo polar del punto P, quedará definida la trocoide formada en la base del diente por el acuerdo de cabeza del piñón cortador.

$$\eta_{tro2} = \frac{1}{r_{b2}} [r_{b0}(\alpha_g + \eta_c + \varepsilon_2) + (r_{b2} - r_{b0}) tg\alpha_g] - \alpha_g - \arcsen\left(\frac{\delta_2}{r_{tro2}} \cos \varphi\right)$$

Debe notarse que en este caso el parámetro  $\varphi$  no determina por sí solo el punto de la herramienta que talla el punto de la trocoide caracterizado por  $\varphi$ , sino que es también función del ángulo de presión o de la distancia entre centros de generación. Asimismo, se puede apreciar que  $\varphi$  varía entre  $\alpha_g$  y  $\pi/2$ .

#### A3.4.4. Espesor del diente

Se calcula el espesor del diente de una rueda de dentado interior que es tallada por un piñón cortador que, a su vez, como se vio anteriormente, fue tallado por una cremallera y cuyo espesor ya se obtuvo.

Durante el tallado, en el plano de rodadura se tiene rodadura sin deslizamiento, esto es, la herramienta rueda sin deslizar sobre la rueda. De la Figura A3.19, se deduce que el espesor del diente de la rueda de dentado interior más el hueco que deja la herramienta es igual a  $2\pi r_{r2}/z_2$ , donde  $r_{r2}$  es el radio de rodadura de la rueda.

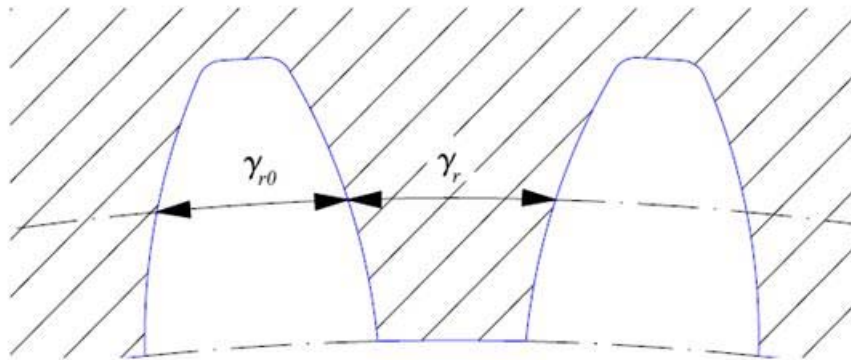


Figura A3.19. Espesor del diente en el plano de rodadura. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Por tanto, en la circunferencia de rodadura, el espesor del diente de la rueda  $\gamma_{r2}$  es:

$$r_{r2}\gamma_{r2} = \frac{2\pi r_{r2}}{z_2} - r_{r0}\gamma_{r0}$$

$$\gamma_{r2} = \frac{2\pi}{z_2} - \frac{r_{r0}}{r_{r2}}\gamma_{r0} = \frac{2\pi}{z_2} - \frac{z_0}{z_2}\gamma_{r0}$$

siendo  $\gamma_{r0}$  el espesor del hueco en el plano de rodadura, o espesor de la herramienta en dicho plano, denotando sus parámetros con el subíndice 0 ya que actúa como herramienta.

$$\gamma_{r0} = \frac{\pi}{z_0} + \frac{4x_0}{z_0}tg\alpha_n + 2(tg\alpha_t - \alpha_t) - 2(tg\alpha_g - \alpha_g)$$

Por otro lado, al ser un perfil de evolvente el diente de la corona, tendrá la expresión siguiente:

$$\gamma_{r2} = \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2}tg\alpha_n - 2(tg\alpha_t - \alpha_t) + 2(tg\alpha_g - \alpha_g)$$

Igualando las expresiones para el espesor del diente de la rueda en el radio de rodadura, se obtiene:

$$\pi + 4x_0 \operatorname{tg} \alpha_n + 2z_0(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2z_0(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) + \pi - 4x_2 \operatorname{tg} \alpha_n - 2z_2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2z_2(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) = 2\pi$$

Despejando:

$$(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) = (\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + \frac{2(x_0 - x_2)}{(z_0 - z_2)} \operatorname{tg} \alpha_n$$

Para engranajes tallados con un desplazamiento tal que,  $x_0 = x_2$ , el ángulo de presión de generación  $\alpha_{g2}$  coincide con el ángulo de presión de la sección frontal  $\alpha_{t2}$ .

En un punto genérico de la rueda, en un radio diferente al de rodadura, tenemos, como se deduce de la Figura A3.20, que el espesor del diente es:

$$\gamma_2 = \gamma_{b2} + 2\eta_2 = \gamma_{r2} - 2\eta_{r2} + 2\eta_2$$

Para un radio cualquiera  $\eta$  vale:

$$\eta_2 = \theta_2 - \operatorname{arctg} \theta_2 = \sqrt{\frac{r_2^2}{r_{b2}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_2^2}{r_{b2}^2} - 1}$$

Por tanto, para un radio igual al radio de rodadura, tenemos:

$$\eta_{r2} = \sqrt{\frac{r_{r2}^2}{r_{b2}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{r2}^2}{r_{b2}^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_g} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_g} - 1} = \operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g$$

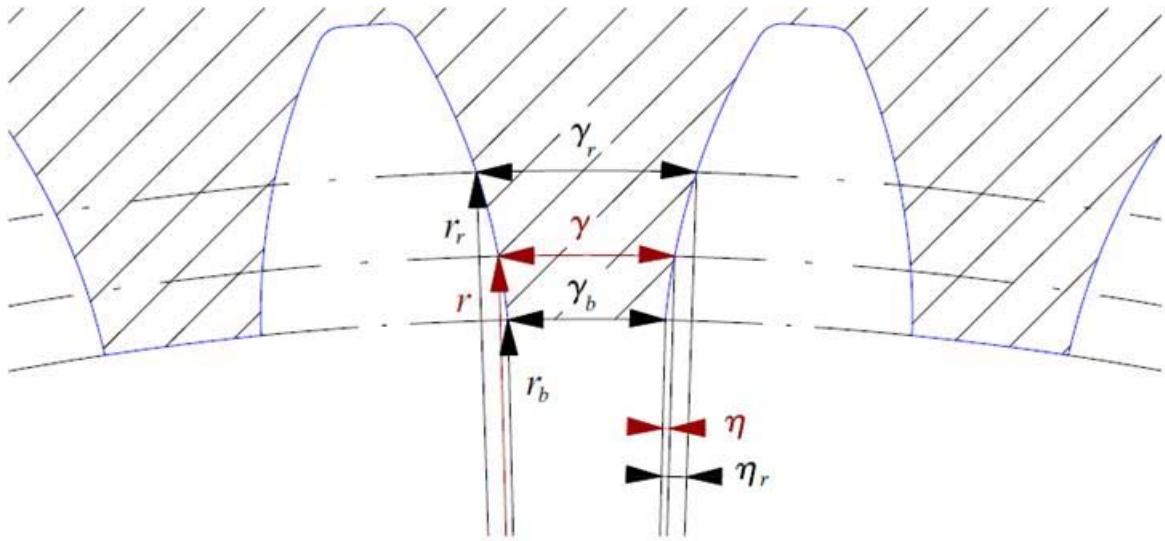


Figura A3.20. Espesor del diente. Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Sustituyendo los parámetros calculados en la fórmula del espesor del diente de la rueda, se obtiene la siguiente ecuación, correspondiente al espesor de la rueda en un punto genérico.

$$\gamma_2 = \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2(\operatorname{tg} \alpha_g - \alpha_g) - 2\eta_{r2} + 2\eta_2$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2 \left( \sqrt{\frac{r_2^2}{r_{b2}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_2^2}{r_{b2}^2} - 1} \right) \\ &= \frac{\pi}{z_2} - \frac{4x_2}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_n - 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) + 2(\theta_2 - \operatorname{arctg} \theta_2) \end{aligned}$$

### A3.5. Engrane de ruedas interiores de perfil de evolvente

Una vez deducidas las propiedades geométricas de una rueda interior a partir de la herramienta de tallado, determinaremos las propiedades funcionales, dependientes tanto de la rueda como del piñón que están engranando. A partir de ahora, la distancia entre centros y el ángulo de presión, se denominarán distancia entre centros y ángulo de presión de funcionamiento.

#### A3.5.1. Radio de finalización de engrane

Puesto que el contacto entre dientes se produce siempre en la línea de presión, los radios de los puntos que contactan de uno y otro diente están relacionados entre sí. De la Figura A3.20 se deduce que la distancia entre los puntos de tangencia de la línea de presión con ambas circunferencias de base es:

$$\lambda = C \operatorname{sen} \alpha_{wt} = C \operatorname{sen} \alpha'_t$$

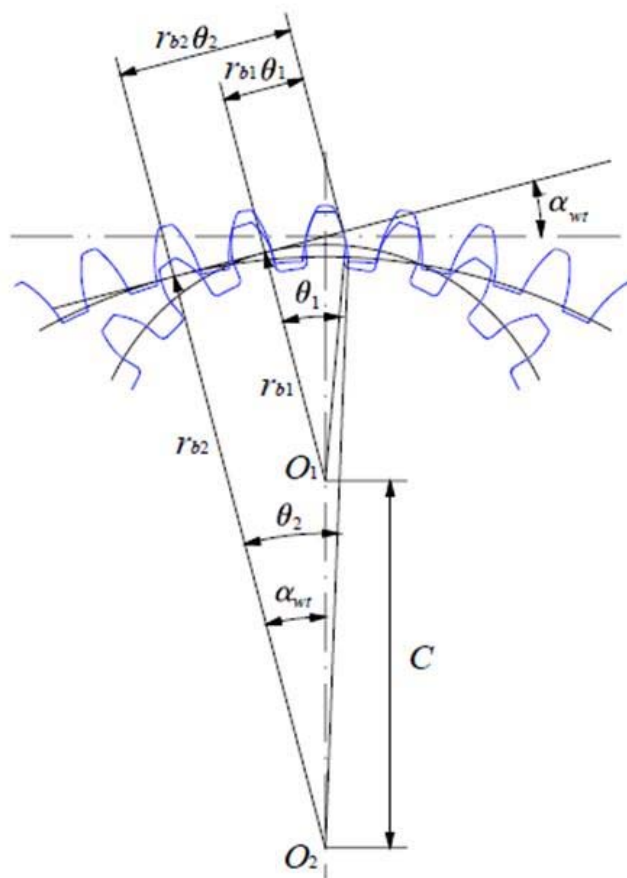


Figura A3.21. Radios de finalización de engrane (Engranajes interiores). Fuente: TFG Silvia Aguiriano

Como se demostró anteriormente, el radio de curvatura del perfil en un punto es igual a la distancia del mismo al punto de tangencia de la normal al perfil por él, con la circunferencia de base. Por tanto, la suma de los radios de curvatura de los dos perfiles en puntos de contacto es constante. Recordando la expresión del radio de curvatura:

$$\rho = r_b \theta = \sqrt{r^2 - r_b^2}$$

$$\lambda = r_{b2} \theta_2 - r_{b1} \theta_1$$

Por tanto,

$$\sqrt{r^2 - r_{b2}^2} - \sqrt{r^2 - r_{b1}^2} = C \operatorname{sen} \alpha'_t$$

$$r_2^2 = r_{b2}^2 + \left( C \operatorname{sen} \alpha'_t - \sqrt{r_1^2 - r_{b1}^2} \right)^2$$

En particular, el radio de finalización de engrane  $r_{fin}$ , entendido como el radio del punto más bajo del perfil que contacta con alguno de otra rueda, será el que engrana con la cabeza de la rueda contraria.

$$r_{fin2}^2 = r_{b2}^2 + \left( C \operatorname{sen} \alpha'_t - \sqrt{r_{1a}^2 - r_{b1}^2} \right)^2$$

Los radios de cabeza de piñón y rueda vienen definidos por:

$$r_{a2} = C + r_{p1} + mx_1 - mh_{a2}$$

$$r_{a1} = r_{p1} + mx_1 + mh_{a1}$$

Cabe destacar, como se verá posteriormente al estudiar las interferencias, que en engranajes de dentado interior puede producirse interferencia primaria en la base del piñón. La solución más común para evitar este efecto indeseado es rebajar el diente de la corona. Esto quiere decir que, en la primera de las ecuaciones anteriores, el término del adendo se verá afectado por un factor que hará que la altura del diente sea algo menor. Este factor sólo afectará al adendo de la corona, sin influir en los demás parámetros de forma alguna.

### A3.5.2. Ángulo recorrido entre dos puntos de engrane

Volviendo a la Figura A3.21, se observa que, cuando el contacto se produce en un punto P del perfil, situado a una distancia  $r$  de la rueda, el ángulo  $\theta$  correspondiente al punto P viene dado por:

$$\theta = \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}$$

de manera que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , correspondientes a dos puntos del perfil cuyos radios son  $r_1$  y  $r_2$ , vendrán dados por esta expresión, particularizada para  $r_1$  y  $r_2$ . Pero teniendo en cuenta que el punto B de la figura está situado sobre la rueda y se mueve solidariamente con ella, el ángulo girado por la rueda entre dos puntos de engrane caracterizados por  $r_1$  y  $r_2$  es precisamente la diferencia entre los correspondientes ángulos  $\theta$ .

$$w_{1-2} = \theta_1 - \theta_2 = \sqrt{\frac{r_1^2}{r_b^2} - 1} - \sqrt{\frac{r_2^2}{r_b^2} - 1}$$

### A3.5.3. Grado de recubrimiento

Como se ha visto anteriormente, el grado de recubrimiento de un par de engranajes se define como el número medio de dientes en contacto. Será, por lo tanto, igual al ángulo girado por una rueda desde que comienza el engrane de un diente hasta que acaba, dividido por el ángulo abarcado por el diente, es decir,  $2\pi/z$ .

Según la expresión obtenida en el apartado anterior, el ángulo girado por la rueda entre el radio de cabeza y el de rodadura viene dado por:

$$w_{a-r} = \sqrt{\frac{r_a^2}{r_b^2} - 1} - \sqrt{\frac{r_r^2}{r_b^2} - 1} = \sqrt{\frac{r_a^2}{r_b^2} - 1} - tg\alpha'_t$$

En consecuencia, la contribución de este tramo del engrane al grado de recubrimiento será:

$$\varepsilon_0 = \frac{w_{a-r}}{\frac{2\pi}{z}} = \frac{z}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{r_a^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{tg}\alpha'_t \right)$$

y eso mismo para la otra rueda corresponderá a la contribución al grado de recubrimiento del tramo de engranaje entre el punto de rodadura y el de finalización. La suma de ambos es lo que se conoce como grado de recubrimiento en la sección frontal,  $\varepsilon_f$ :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02} = \frac{1}{2\pi} \left( z_1 \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - z_2 \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} + (z_2 - z_1) \operatorname{tg}\alpha'_t \right)$$

En un engranaje recto, el grado de recubrimiento total coincide con el grado de recubrimiento en la sección frontal, pero no ocurre lo mismo en un helicoidal.

La componente correspondiente al recubrimiento en el salto es:

$$\Delta\varepsilon = \frac{F \operatorname{sen}\beta}{\pi m}$$

Como ya se indicó, el grado de recubrimiento efectivo o total vendrá dado por la suma del recubrimiento en la sección frontal más el recubrimiento en el salto:

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \Delta\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left( z_1 \sqrt{\frac{r_{a1}^2}{r_{b1}^2} - 1} - z_2 \sqrt{\frac{r_{a2}^2}{r_{b2}^2} - 1} + (z_2 - z_1) \operatorname{tg}\alpha_{wt} \right) + \frac{F \operatorname{sen}\beta}{\pi m}$$



#### A3.5.4. Radios de contacto único superior e inferior

Un engranaje, para estar diseñado correctamente, debe tener un grado de recubrimiento mayor que 1, lo que significa que cuando un diente comienza su engrane, el anterior no lo ha finalizado aún. Si se considera un engranaje recto, cuando un diente comienza su engrane, contactando en la cabeza, otro diente está en contacto. Inicialmente, el contacto se producirá a radios progresivamente menores, pero manteniéndose dos dientes en contacto. Esta situación se mantendrá hasta el momento en que el diente previo finalice su engrane. En este instante habrá un único diente en contacto, contacto que tendrá lugar a un cierto radio, denominado radio de contacto único superior. El diente se mantendrá en contacto único hasta un punto, el punto de contacto único inferior que corresponde al instante en que otro diente inicia su engrane, contactando en la cabeza.

Los puntos de contacto único determinan el intervalo en el que un único diente de un engranaje recto está soportando toda la carga, lo que suele determinar la condición más desfavorable para el cálculo de la resistencia del diente. Obviamente, los radios de contacto único superior e inferior de una rueda engranan con los radios de contacto único inferior y superior respectivamente, de la rueda contraria. En el caso de engranajes helicoidales, los puntos de contacto único carecen de interés, pues no determinan la condición más restrictiva. No obstante, desde un punto de vista teórico, se puede hablar de los puntos de contacto único de la sección frontal de un engranaje helicoidal.

Se define el radio de contacto único superior como el punto en el cual un único diente soporta toda la carga transmitida por el engranaje. En ese instante, el diente previo está finalizando su engrane, es decir, está engranando en el radio de finalización de engrane  $r_{fin}$ , por lo que el diente que estamos considerando está en una posición tal que habrá de girar  $2\pi/z$  para contactar en  $r_{fin}$ . Fijándonos en la Figura A3.21 se deduce:

$$r_{b2}\theta_2 - r_{b1}\theta_1 = C \operatorname{sen}\alpha'_t = (r_{b2} - r_{b1})\operatorname{tg}\alpha'_t$$

$$\theta_2 = \left(1 - \frac{r_{b1}}{r_{b2}}\right)\operatorname{tg}\alpha'_t + \frac{r_{b1}}{r_{b2}}\theta_1$$

Utilizando la relación de transmisión, se expresa la ecuación anterior en función de los números de dientes de la rueda y el piñón.

$$\theta_{fin2} = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right) tg\alpha'_t + \frac{z_1}{z_2} \theta_{a1}$$

$$\theta_{cus2} = \theta_{fin2} - \frac{2\pi}{z_2}$$

$$\theta_{fin1} = \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) tg\alpha'_t + \frac{z_2}{z_1} \theta_{a2}$$

El radio de contacto único superior para engranajes de dentado interior es:

$$r_{cus2} = r_{b2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{r_{fin2}^2}{r_{b2}^2} - 1} - \frac{2\pi}{z_2}\right)^2 + 1}$$