**Decisões em Engenharia – Teoria dos Jogos**

**Nuno Costa1, João Lourenço2**

1Instituto Politécnico de Setúbal, ESTSetúbal, CINEA, Portugal. Email: [nuno.costa@estsetubal.ips.pt](mailto:nuno.costa@estsetubal.ips.pt)

2Instituto Politécnico de Setúbal, ESTSetúbal, CDP2T, Portugal. Email: [joao.lourenco@estsetubal.ips.pt](mailto:joao.lourenco@estsetubal.ips.pt)

**Resumo**

A otimização simultânea de múltiplas características dos processos e produtos é um problema com que os engenheiros e outros profissionais se defrontam frequentemente num contexto industrial. Existem diversos métodos/técnicas para resolver este tipo de problema, porém, a dificuldade de implementação, a variedade e a quantidade de informação subjetiva que requerem do analista-decisor têm contribuído para dificultar a sua disseminação na prática. Neste artigo, sugere-se a utilização da Teoria dos Jogos, e em particular da técnica de Stackelberg complementada com uma ferramenta de seleção de variáveis (Escalonamento de Fatores) para encontrar soluções para problemas bi-objetivo. Os resultados de dois casos de estudo, onde se inclui a representação gráfica das denominadas soluções de Pareto para funções modeladas com base na Metodologia da Superfície de Respostas, evidenciam que a abordagem proposta permite encontrar soluções ótimas (não-dominadas), não sendo exigido do analista-decisor qualquer tipo de informação subjetiva.

**Palavras-chave:** Multiresposta; Otimização; Pareto; Robusto; RSM; Stackelberg.

**Abstract**

The simultaneous optimization of multiple product’s and process’s characteristics is a problem that engineers and other professionals often face in an industrial context. There are several methods/techniques to solve this type of problems, however, the difficulty of implementation, the variety and amount of subjective information required from the decision-maker or analyst have contributed to hinder its dissemination in practice. This article suggests the use of Game Theory, and namely the Stackelberg technique complemented with a variable selection tool (Scaling Factor) to find solutions to dual response problems. The results of two study cases, where the graphical representation of the so-called Pareto solutions is shown for functions modelled using the Response Surface Methodology, provide evidence that the proposed approach allows to find optimal (non-dominated) solutions without requiring subjective information from the analysts or decision-makers.

**Keywords:** Desirability; Optimization; Pareto; Robust; RSM; Stackelberg.

# Introdução

Vários trabalhos sobre o desenvolvimento conceptual e aplicação da Teoria dos Jogos (TJ) têm sido reconhecidos pela Real Academia Sueca de Ciências e galardoados com o prémio nobel da economía. Para além da área da economia, a TJ continua a ser investigada e aplicada em vários domínios do conhecimento, sendo exemplos a ciência política, a psicologia, a sociologia, as finanças e o marketing. Os casos reais de aplicação são muito diversos e incluem políticas de controlo de armas, relacionamentos amorosos, transplante de órgãos humanos, cooperação ambiental, definição de preços e de cadeias de abastecimento, bem como a segurança de infraestruturas, tais como aeroportos, redes de telecomunicações, etc. [1-5].

Entendida como o estudo das interações estratégicas num processo de tomada de decisão, a TJ propicia uma linguagem padronizada para formular, estruturar, analisar e compreender a interação entre agentes (jogadores/intervenientes) racionais e a respetiva estratégia ou tomada de decisão/ação. Neste sentido, este artigo tem como objetivo introduzir a TJ na resolução de problemas que os engenheiros e outros profissionais enfrentam num contexto industrial, nomeadamente em problemas de otimização de múltiplas caraterísticas do processo ou do produto, para os quais é necessário encontrar uma solução de compromisso, preferencialmente uma solução ótima. Para o efeito é utilizada a técnica de Stackelberg, melhorando-se a sua eficiência com a utilização de uma ferramenta de hierarquização de variáveis na resolução de problemas modelados pela denominada Metodologia da Superfície de Resposta (RSM).

As restantes secções deste artigo estão estruturadas do seguinte modo: a próxima secção introduz a RSM, e apresenta uma revisão sobre otimização de múltiplas respostas, a TJ, a técnica de Stackelberg e o método de hierarquização de variáveis proposto (Escalonamento de Fatores). Na Secção 3 são apresentados os resultados de dois casos de estudo e na Secção 4 é feita a discussão dos resultados. As conclusões são apresentadas na Secção 5.

# RSM e Teoría dos Jogos

A otimização simultânea de várias características do processo ou do produto é dos problemas com que os engenheiros e outros profissionais se deparam frequentemente num contexto industrial [6-7]. Para os resolver recorre-se cada vez mais a equipas multidisciplinares que fazem uso da experimentação para recolher, analisar e interpretar dados que permitam uma correta tomada de decisão. A Metodologia da Superfície de Respostas (RSM) propicia o necessário enquadramento para que os estudos experimentais sejam bem sucedidos, ao contrário da prática da tentativa-erro, suportada na manipulação de uma variável de cada vez (*one-factor-at-time*) e na manipulação de todas as combinações possíveis das variáveis consideradas no estudo (*Brute force*), que é ainda frequentemente utilizada num contexto académico e industrial para conceber e otimizar processos e produtos.

A RSM tem sido cada vez mais utilizada com sucesso em várias áreas do conhecimento (indústria química, eletrónica, aeroespacial, …) e tem subjacente uma abordagem sequencial à geração de informação e de conhecimento que inclui a triagem de variáveis (identificação das variáveis ativas), a modelação das funções objetivo ou respostas e a respetiva otimização. Vários autores têm enfatizado a importância da utilização duma abordagem sequencial nos estudos experimentais, porém, esta não tem sido uma prática corrente nos estudos publicados na literatura. De acordo com Arboretti et al. [8], cerca de 88% dos estudos publicados não adota a devida abordagem sequencial. Esta má prática pode ter muitas causas que estão suficientemente descritas na literatura, pelo que, o leitor é remetido para as linhas de orientação sobre planeamento, condução e análise de experiências descritas em [9-11].

## Ótimização de Múltiplas Respostas

Agregar múltiplas respostas numa função objetivo e, em seguida, proceder à sua otimização é uma prática usual no âmbito da RSM. As funções objetivo mais populares entre (não-)académicos são as funções baseadas na função “desejo” (Desirability function) e na função perda (Loss function). Para uma revisão detalhada sobre este tipo de funções objetivo, o leitor é remetido para [12-14]. O desempenho de algumas destas funções objetivo foi avaliado e comparado com a de um método teoricamente mais sofisticado e eficaz em [15]. A utilidade e os aspetos computacionais de várias funções de otimização em diferentes contextos de tomada de decisão foram discutidos em [16], onde as abordagens mais importantes foram também categorizadas e integradas.

Em [17] é feita uma revisão de métodos publicados na literatura para a otimização de problemas bi-objetivo, ou de resposta dupla (DRO). Estes são um caso particular dos problemas de resposta múltipla (MRO) e consistem em,

(1)

onde () e () podem representar duas médias ou a média e a variância duma característica da qualidade de um processo ou produto, sendo X um vetor de variáveis de entrada.

Encontrar uma solução ótima ou o mais equilibrada possível para múltiplos objetivos continua a ser uma necessidade em problemas que sejam formulados num contexto académico e/ou industrial, pelo que a procura por métodos, técnicas ou ferramentas novas ou melhoradas, recorrendo aos avanços na otimização matemática, na computação científica e no poder informático para resolver esses problemas é uma prática frequente. Por conseguinte, estender a aplicação de métodos usados com sucesso em alguns domínios científicos a outros domínios é de igual modo apelativo e desafiante. No entanto, constata-se que a utilidade da Teoria dos Jogos na otimização de problemas bi-objetivo ainda não foi devidamente explorada.

## Teoria dos Jogos – Técnica de Stackelberg

Os elementos-chave de um jogo são os seguintes: a) os Jogadores: quem está a interagir. b) as Estratégias: as opções que cada jogador pode tomar, tendo em conta a ordem em que jogam. c) os Payoffs: como as estratégias se traduzem em resultados, tendo em conta as preferências dos jogadores em relação aos possíveis resultados. d) A Informação/Crenças: o que os jogadores sabem/acreditam sobre a situação e sobre si mesmos ou sobre as ações que observam antes de tomarem decisões. e) a Racionalidade: como os jogadores pensam e agem.

Num jogo, quando há uma hierarquia entre os jogadores, ou seja, existe alguém que detém uma posição dominante ou joga primeiro do que outro(s) jogadores, a denominada técnica de Stackelberg é a mais adequada para encontrar as esperadas soluções de compromisso.

Num jogo de Stackelberg (hierárquico ou Líder-Seguidor), assumindo que *f*1(*X*) e *f*2(*X*) representam os modelos estimados para a média () e para a variância () de uma característica do processo ou do produto, dois tipos de jogos podem ser formulados: 1- O Líder otimiza e o Seguidor otimiza ; 2- O Líder otimiza e o Seguidor otimiza . Em cada um destes tipos de jogo existem três cenários possíveis, conforme se apresenta nos Quadros 1-2.

Quadro 1. Líder - Média.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Minimizar | Centrar no valor objetivo | Maximizar |
| Minimizar | | |

Quadro 2. Líder - Variância.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Minimizar | | |
| Minimizar | Centrar no valor objetivo | Maximizar |

Note-se que num jogo onde o objetivo é centrar a média no valor objetivo (alvo), minimizando-se o desvio padrão, o Líder otimiza *f*1(*X*) = , onde τ representa um valor-alvo e X representa um vetor de variáveis de entrada, e o Seguidor otimiza *f*2(*X*) = (X). Quando o Líder otimiza *f*1(*X*) = (X), o Seguidor otimiza *f*2(*X*) = .

## Seleção de Variáveis

Num jogo de Stackelberg, o Líder define a sua estratégia e é o primeiro a jogar (otimiza *f*1(*X*) utilizando, por exemplo, a ferramenta Excel-Solver®). Depois, o Seguidor reage usando a sua própria estratégia, a qual depende da estratégia usada pelo Líder. Por exemplo, se o Líder proceder à otimização de *f*1(*X*), manipulando uma ou mais variáveis () de X, o Seguidor procederá à otimização de *f*2(*X*), manipulando as restantes variáveis () de X. Este processo sequencial termina quando o Líder não consegue melhorar o resultado da sua função objetivo, o que significa que uma solução ótima ou de equilíbrio foi encontrada.

Na prática, nem sempre se sabe quais as variáveis que devem ser processadas pelo Líder e pelo Seguidor. Uma alternativa dispendiosa em termos de tempo é jogar todos os jogos que resultam de todas as combinações possíveis das variáveis de entrada, ou seja, usar todas as possíveis estratégias racionais () ∈ (*S*, *Sxj*), onde *S* and *Sxj* representam o conjunto de estratégias racionais dos jogadores 1 e 2, respetivamente. Quando o número de variáveis de entrada (variáveis controláveis) é grande e, consequentemente, o conjunto de estratégias racionais também é grande, encontrar a melhor solução possível (ótima ou mais equilibrada) pode não ser uma atividade fácil para os analistas que tenham limitações ao nível computacional para automatizar o procedimento de otimização. Portanto, para minimizar o número de estratégias racionais, e desta forma para melhorar a eficiência de um jogo de Stackelberg, ferramentas como as descritas em [18] podem ser usadas. Por questões de facilidade de aplicação e eficiência, nos casos de estudo que serão apresentados neste artigo é utilizada a ferramenta denominada Escalonamento de Fatores (*Factors Scaling*). De acordo com Otava e Mylona [19], esta ferramenta pode ser aplicada a qualquer tipo de problema desenvolvido no âmbito da RSM que inclua múltiplas respostas com várias variáveis de entrada. Assim, num jogo hierárquico, ou de Stackelberg, cada jogador tem um conjunto de variáveis sob o seu controlo para otimizar a sua função objetivo, pelo que é essencial que apenas as variáveis mais influentes, aquelas com efeitos mais fortes na função objetivo, sejam usadas no processo de otimização das funções de cada um dos jogadores.

Neste contexto, assuma-se que as respostas (*f*1(*X*) e *f*2(*X*)) são modeladas por um polinómio quadrático completo (2),

E(Yk) = + + + (2)

onde Yk denota um vetor de k respostas estimadas, representa o termo independente do modelo da *k-ésima* resposta, 𝛽nk representa os coeficientes de regressão dos efeitos lineares de Xn (que representa as variáveis de entrada {X1, …, XN} no modelo da *k-ésima* resposta), representa os coeficientes de regressão dos efeitos quadráticos de Xn e representa os coeficientes de regressão dos efeitos de interação entre Xn e Xm (n = 1, … , N − 1, m = n + 1, …, N) no modelo ajustado à k-ésima resposta. De acordo com Otava e Mylona [19], a importância relativa dos fatores dentro de uma resposta é calculada do seguinte modo:

(3)

onde MPInk (ver Equação 4) representa uma variação absoluta máxima em Yk que pode ser induzida pelo aumento de Xn por um valor H, para um certo valor inicial de Xn e alguma definição favorável das outras variáveis ou fatores X1, ..., Xn−1, Xn+1, ..., XN incluídos no modelo da resposta.

(4)

podendo H assumir um valor igual a um, se o espaço experimental for [-1, 1], ou igual a 1,682 se o espaço experimental for [-1,682; 1,682].

Importa salientar que esta ferramenta permite que os jogadores conheçam os fatores mais influentes nas respostas e conduz a uma melhor definição da sua estratégia, mas não substitui a avaliação/validação estatística necessária dos modelos ajustados às respostas [20]. No entanto, este conhecimento é um contributo significativo para a eficácia dos jogos, permitindo poupar tempo e dinheiro no processo de otimização através da minimização do número de estratégias definidas por ambos os jogadores.

# Exemplos de Aplicação

Para avaliar a aptidão da técnica de Stackelberg gerar soluções ótimas (não-dominadas) e a utilidade do Escalonamento de Fatores, são apresentados dois casos de estudo, sendo em ambos testadas as estratégias Líder-Média e Líder-Variância apresentadas nos Quadros 1-2.

**Caso 1-** Chen et al. [21] apresentaram um problema bi-objectivo e modelaram as respostas média *(*) e desvio-padrão *(*) do seguinte modo:

(5)

(6)

sendo

(7)

Neste problema é assumido que o desvio-padrão e a média são respostas do tipo menor-é-melhor, ou seja, é desejável que os seus valores alvo sejam os menores possíveis ( e ). Os limites superiores associados às respostas foram .

Na Figura 1 é apresentada a denominada fronteira de Pareto (conjunto de soluções não-dominadas ou ótimas) para este problema, conforme descrito em [22], sendo evidente que as respostas estão em conflito, ou seja, aos melhores valores para a média correspondem os piores valores para o desvio-padrão. Neste contexto adverso, usando a técnica de Stackelberg foi possível obter quatro soluções ótimas (de Pareto) para os quatro jogos possíveis de efetuar neste problema. Dado que o número de variáveis de entrada neste problema muito pequeno, a avaliação do impacto dos fatores é dispensável, sendo viável avaliar os quatro jogos possíveis com um dispêndio de tempo negligenciável.

As quatro soluções que se mostram na Figura 1 caraterizam-se por uma variabilidade baixa, o que é desejável num contexto produtivo, embora tenham subjacente uma degradação do valor da média. Importa também salientar que, neste exemplo, inverter a hierarquia dos jogadores num jogo não produz soluções melhores ou piores. Por exemplo, a solução do jogo em que o Líder otimiza e o Seguidor otimiza , representada pelo losango, é a mesma da solução do jogo em que o Líder passa a otimizar e o Seguidor a otimizar , cuja solução é representada pelo símbolo mais (+).



Figura 1 – Soluções não-dominadas e de Stackelberg

**Caso 2**- Para otimizar a taxa de remoção de metal de uma máquina de corte metálico, foram avaliados os efeitos da velocidade (), profundidade () e avanço () no processo de corte [23]. No processo de otimização, assumiu-se que a média () é do tipo nominal-é-melhor, tendo com alvo o valor de 71,14 na gama [69, 83], e a variância () é do tipo menor-é-melhor.

(8)

(9)

A Figura 2 mostra a fronteira de Pareto e as soluções de Stackelberg para nove dos doze jogos possíveis, o que evidencia que inverter a hierarquia dos jogadores num jogo nem sempre produz a mesma solução. Por exemplo, a solução do jogo em que o Líder otimiza e o Seguidor otimiza , representada pela cruz, não é a mesma da solução do jogo em que o Líder otimiza e o Seguidor otimiza .

Este estudo de caso confirma que a técnica de Stackelberg pode capturar soluções ótimas em problemas bi-objetivo desenvolvidos no âmbito do RSM, tal como se pode constatar na Figura 2. Note-se que oito jogos (aqueles cujas soluções são representadas pelo losango, hexagrama, cruz e triângulo) produzem soluções não-dominadas, das quais seis delas têm a média no valor objetivo, nomeadamente as que estão representadas pelo hexagrama, losango e cruz. As soluções representadas pelo círculo e pelo triângulo com ponta virada para a esquerda estão a uma distância negligenciável da fronteira de Pareto, pelo que podem ser também soluções a considerar, à semelhança da solução representada pelo símbolo “mais” que tem uma variação marginalmente superior às que são representadas pelo losango e hexagrama. As soluções representadas pelo quadrado e pelo triângulo com ponta virada para a direitasão, claramente, soluções menos favoráveis (equilibradas) do que todas as outras.



Figura 2 – Soluções não-dominadas e de Stackelberg

Quadro 3. Influência das variáveis nas respostas.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Média | | | |
|  |  |  |  |
|  | 1,0000 | 0,5267 | 0,4238 |
| Variância | | | |
|  |  |  |  |
|  | 0,5901 | 1,0000 | 0,6541 |

Este caso de estudo valida a utilidade do Escalonamento de Fatores, na medida em que uma solução ótima é conseguida quando o Líder e o Seguidor manipulam as variáveis com maior influência nas suas funções objetivo (ver Quadro 3), sendo exemplos os jogos cuja solução é representada pelo triângulo e pela cruz (x). De qualquer maneira, importa realçar que esta não é uma condição indispensável para se obterem soluções ótimas. Por exemplo, no jogo , onde ambos os jogadores jogam com a variável com menor influência na sua função objetivo, a solução obtida, representada pelo símbolo +, deve também ser considerada.

Quadro 4. .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Jogador | Resultado melhorado | Variáveis | | | Líder-Média | Seguidor |
|  |  |  |  |  |
| Início | | -1,682 | 0,000 | 0,000 | 0,826 | 0,907 |
| Líder | Sim | -1,682 | 0,000 | 0,413 | 0,114 | 0,972 |
| Seguidor | Não | -1,682 | 0,000 | 0,413 | 0,114 | 0,972 |

Os Quadros 4-5 são exemplos de resultados de jogos e mostram que as soluções são alcançadas após duas e três jogadas, respetivamente. O número de jogadas nos outros jogos vai de duas, nos jogos cujas soluções são representadas pelo triângulo e pelo símbolo +, até dezasseis jogadas, no jogo cuja solução é representada pelo hexagrama.

# Discussão de Resultados

Existem vários métodos para resolver problemas de otimização da média e da variância ou desvio-padrão de uma determinada caraterística do processo ou do produto, tendo cada um com os seus próprios méritos e fraquezas [24-26]. Porém, selecionar um método adequado às necessidades não é fácil para quem não tenha um domínio ou conhecimento suficiente de matemática-estatística, partindo-se do pressuposto que o acesso às várias revistas académicas onde esses métodos são publicados é possível. Além disto, a sobrecarga de informação subjetiva (fatores de forma, pesos ou outras informações preferenciais) exigida aos decisores e o elevado nível de conhecimentos computacionais, bem como de matemática-estatística, necessários para a utilização de alguns métodos são razões pelas quais a sua utilização na prática é pontual. De qualquer maneira, embora alguns (não-)académicos com formação limitada em computação, matemática e estatística possam ultrapassar as dificuldades que surjam na interpretação e implementação de métodos teoricamente mais sofisticados e eficientes, pode não existir qualquer vantagem na utilização desses métodos, na medida em que métodos fáceis de interpretar e implementar podem gerar soluções e permitir gerar fronteiras de Pareto semelhantes às alcançadas por métodos matemática e computacionalmente mais sofisticados [27-28].

A técnica de Stackelberg aqui apresentada e ilustrada não requer informação subjetiva dos analistas-decisores nem conhecimentos matemáticos, estatísticos e computacionais avançados, podendo ser implementada no Excel. Além disto, permite obter soluções ótimas (de Pareto). Em alguns jogos, isso é alcançado após um pequeno número de jogadas. Porém, a técnica de Stackelberg não está concebida para gerar fronteiras de Pareto. A geração de um conjunto de soluções ótimas (não-dominadas) uniformemente distribuídas ao longo dos valores possíveis para as funções ou respostas que se pretendem otimizar, exige que a curvatura das funções objetivas seja manipulada através de um fator de forma, de escala ou de ponderação [29-30]. Além do mais, importa salientar que gerar uma fronteira de Pareto não é uma tarefa fácil para quem não tem conhecimentos computacionais, matemáticos e estatísticos avançados e é sempre uma tarefa laboriosa que inclui uma purga nas soluções geradas, na medida em que todos os métodos de otimização geram soluções dominadas além de soluções não-dominadas.

Quadro 5. .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Jogador | Resultado  melhorado | Variáveis | | | Líder-Variância | Seguidor |
|  |  |  |  |  |
| Início | | -1,682 | 0,000 | 0,000 | 0,907 | 0,826 |
| Líder | Sim | -1,682 | 0,413 | 0,000 | 0,588 | 3,367 |
| Seguidor | Sim | -1,682 | 0,413 | 0,226 | 0,732 | 3,024 |
| Líder | Não | -1,682 | 0,413 | 0,226 | 0,732 | 3,024 |

É sabido que entre as soluções não-dominadas podem existir algumas cuja implementação na prática conduza a condições de funcionamento dos equipamentos ou produtos mais perigosas, mais dispendiosas ou mais difíceis de implementar e/ou controlar. Deste modo, as soluções próximas de soluções não-dominadas não devem ser rejeitadas sem uma análise detalhada e a decisão ser devidamente justificada. Efetivamente, a qualidade ou utilidade duma solução é uma classificação que pode depender de questões económicas e técnicas ou da preferência dos decisores. Neste cenário, os estudos de caso apresentados validam a utilidade da técnica de Stackelberg, sendo evidente que esta pode ser usada como uma ferramenta exploratória ou complementar na resolução de problemas bi-objetivo, na medida em que evidenciou ser capaz de gerar soluções não-dominadas.

No que diz respeito à seleção de variáveis pelo Líder, a ferramenta de Escalonamento de Fatores propicia orientações úteis quando o número de variáveis é grande (≥3). De facto, no segundo caso de estudo, as soluções não-dominadas foram obtidas após um pequeno número de jogadas quando o Líder e o Seguidor manipulam as variáveis com maior influência na sua função objetivo. O que tem também impacto na solução alcançada para um jogo é o ponto de partida para as variáveis de entrada, sendo isto independente do tipo de jogo, Líder-Média ou Líder-Variância. Por conseguinte, o ponto de partida do algoritmo de otimização deve ser cuidadosamente selecionado para que a solução obtida seja o mais favorável possível, preferencialmente não-dominada (ótima). Note-se que isto é válido quando se utiliza a Teoria dos Jogos/técnica de Stackelberg, tal como é válido para qualquer outro método usado para encontrar soluções para problemas bi-objetivo ou multi-objetivo [15, 31].

# Conclusões

Formular problemas bi-objetivo como um jogo é uma abordagem que não tem recebido a merecida atenção num contexto académico e industrial. Este artigo aplica a Teoria dos Jogos, nomeadamente a técnica de Stackelberg, à resolução deste tipo de problemas e expõe os seus pontos fortes e fracos usando dois exemplos da literatura. Em ambos os casos de estudo, as soluções de Stackelberg foram comparadas com as soluções ótimas (não-dominadas ou da fronteira de Pareto), tendo-se mostrado que a referida técnica pode ser aplicada em problemas da vida real desenvolvidos no âmbito do RSM, onde o design e a melhoria das caraterísticas de interesse no processo ou produto, que são alvo do trabalho de equipas multidisciplinares, departamentos ou pessoas, têm objetivos conflituosos.

Outra novidade deste trabalho é a integração duma ferramenta de seleção de variáveis (Escalonamento de Fatores) na técnica de Stackelberg. De facto, quando são selecionadas variáveis com maior efeito nas funções objetivo de ambos os jogadores, uma solução ótima pode ser encontrada. No entanto, para melhor compreender a aptidão da abordagem usada, em futuros trabalhos devem ser testados outros casos de estudo, nomeadamente problemas que envolvam mais do que duas respostas.

# Agradecimentos

Os autores agradecem ao IPS o apoio à participação no CIBEM 2022.

# Referências

[1] Sarkar, S., Tarafdar, S. (2021). Investment Choice with Managerial Incentive Schemes. International Game Theory Review, 23(2): 2050016.

[2] Migdalas, A. (2002). Applications of Game Theory in Finance and Managerial Accounting. Operational Research. An International Journal, 2(2): 209-241.

[3] Megahed, A. (2019). The Stackelberg differential game for counter-terrorism. Quality & Quantity, 53, 207-220.

[4] Perera, R. (2021). Transboundary Emission Under Stochastic Differential Game. International Game Theory Review, 23(1): 2050009.

[5] Antelo, M., Bru, L. (2022). Per-unit versus ad-valorem royalty licensing in a Stackelberg market. Journal of Industrial and Business Economics 49, 95-109.

[6] Levent Erişkin, Leman Esra Dolgun & Gülser Köksal (2021) A method for robust design of products or processes with categorical response. Quality Engineering, 33(3): 474-486

[7] Cho, J‑S, Lee, D‑H, Seo, G‑J, Kim, D‑B, Shin, S‑J (2022). Optimizing the mean and variance of bead geometry in the wire+arc additive manufacturing using a desirability function method. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 120, 7771-7783.

[8] Rosa Arboretti, Riccardo Ceccato, Luca Pegoraro, Luigi Salmaso (2022). Design of Experiments and machine learning for product innovation: A systematic literature review. 38(2): 1131-1156.

[9] Costa, N., Pires, A., Ribeiro, C. (2006). Guidelines to help practitioners of design of experiments. TQM Magazine, 18, 386-399.

[10] Freeman, L., Ryan, A., Kensler, J., Dickinson, R., Vining, G. (2013). A tutorial on the planning of experiments. Quality Engineering, 25, 315-332.

[11] Costa, N. (2019), Design of experiments – overcome hindrances and bad practices. The TQM Journal, 31(5): 772-789.

[12] Costa, N.; Lourenço, J.; Pereira, Z. (2011). Desirability function approach: A review and performance evaluation in adverse conditions. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 107, 234-244.

[13] Murphy, T., Tsui, K., Allen, J. (2005). A review of robust design methods for multiple responses. Research in Engineering Design, 15, 201-215.

[14] Soh, W.; Kim, H.; Yum, B.-J. (2016). A multivariate loss function approach to robust design of systems with multiple performance characteristics. Quality and Reliability Engineering International, 32, 2685-2700.

[15] Costa, N.; Lourenço, J. (2016). Multiresponse problems: Desirability and other optimization approaches. Journal of Chemometrics, 30, 702-714.

[16] Ardakani, M., Wulff, S. (2013). An Overview of Optimization Formulations for Multiresponse Surface Problems. Quality and Reliability Engineering International, 29, 3-16.

[17] Costa, N. (2010). Simultaneous Optimization of Mean and Standard Deviation. Quality Engineering, 22(3): 140-149.

[18] Hamby, D. (1994). A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models. Environmental Monitoring and Assessment, 32, 135-154.

[19] Otava, M., Mylona, K. (2020). Communicating statistical conclusions of experiments to scientists. Quality and Reliability Engineering International, 36(8): 2688-2698.

[20] Costa, N., Lourenço, J. (2016). Gaussian Process Model – An Exploratory Study in the Response Surface Methodology. Quality and Reliability Engineering International, 32(7): 2367-2380.

[21] Chen, W., Wiecek, M. and Zhang, J. (1999). Quality utility: a compromise programming approach

to robust design. ASME Journal of Mechanical Design, 121(2): 179-187.

[22] Costa, N., Lourenço, J. (2015). On the generation and selection of solutions to multiple response problems. International Journal of Industrial and Systems Engineering, 20(4): 437-456.

[23] Shin, S., Cho, B., (2009), Studies on a bi-objective robust design optimization problem, IIE Transactions, 41(11), pp. 957-968.

[24] Costa, N., Lourenço, J. (2014). A comparative study of multiresponse optimization criteria working ability. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 138(11): 171-177.

[25] Costa, N., Lourenço, J. (2014). A comparative study of multiresponse optimization criteria working ability. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 138(11): 171-177.

[26] Lee, D-H., Yang, J-K., Kim, K-J (2018). Dual-response optimization using a patient rule induction method. Quality Engineering, 30(4): 610-620.

[27] Costa, N., Lourenço, J. (2015). Exploring Pareto Frontiers in the Response Surface Methodology. Transactions on Engineering Technologies - Special Edition of the ICMEE, ed. Gi-Chul Yang, Sio-Iong Ao, Len Gelman, 399-412. ISBN: 978-94-017-9803-7. Dordrecht: Springer Netherlands.

[28] Jeong, I-J., Lee, D-H (2019). Generating evenly distributed nondominated solutions in dual response surface optimization. Quality Technology & Quantitative Management, 16(1): 95-112.

[29] Monfared, M., Monabbati, S., Azar, M. (2020). Bi-objective optimization problems with two decision makers: Refining pareto-optimal front for equilibrium solution. OR Spectrum: Quantitative Approaches in Management, 42(2): 567-584.

[30] Anderson-Cook, C., Cao, Y., Lu, L. (2017). Quality quandaries: Understanding aspects influencing different types of multiple response optimization. Quality Engineering, 29(2): 329-341.

[31] Lu, L., Chapman, J., Anderson-Cook, C. (2017). Multiple response optimization for higher dimensions in factors and responses. Quality and Reliability Engineering International, 33(4): 727-744.