

## Convecção termomagnética em uma cavidade quadrada com obstáculo interno aquecido: uma investigação numérica

Luís Henrique Fraga Castro<sup>1</sup>, Francisco Ricardo da Cunha<sup>2</sup>, Adriano Possebon Rosa<sup>3</sup>

<sup>1</sup>VORTEX, Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil. Email: lhcastro@gmail.com

<sup>2</sup>VORTEX, Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil. Email: frcunha2@gmail.com

<sup>3</sup>VORTEX, Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil. Email: possebon.adriano@gmail.com

### Resumen

A convecção termomagnética é um campo da ciência que analisa o comportamento de um escoamento sujeito a efeitos gravitacionais, térmicos e magnéticos. Embora este tema já tenha sido estudado, principalmente nos últimos anos, há diversos modelos que ainda podem ser analisados. Portanto, o objeto de estudo desta pesquisa é a análise numérica da convecção termomagnética em uma cavidade quadrada com duas paredes isoladas (paredes laterais), uma aquecida (parede inferior) e outra fria (parede superior) com um obstáculo aquecido em seu interior para interagir com o fluxo de ferrofluido. O objetivo aqui é avaliar a competição entre as forças gravitacionais e as forças magnéticas devido ao gradiente de temperatura existente no sistema. O problema é descrito pelas equações da conservação de massa, do balanço de quantidade de movimento e da conservação de energia, na qual é utilizada a aproximação de *Boussinesq* para os termos gravitacional e magnético, apresentando uma dependência explícita da densidade e da magnetização do ferrofluido na magnetização. O problema apresentado é resolvido numericamente utilizando-se o método de diferenças finitas para a discretização das equações governantes, aplicado a uma malha defasada. Um método de projeção de segunda ordem é implementado para garantir a incompressibilidade do escoamento. Assim, os resultados esperados são dependentes da posição e intensidade do campo magnético externo, que pode auxiliar ou não na convecção termomagnética. Neste contexto, o estudo busca obter o número de *Nusselt* para entender como o fluxo de ferrofluido no interior da cavidade e como os elementos adicionais e mudanças nas condições de contorno podem influenciar a ferrohidrodinâmica.

**Palavras-chave:** Termoconvecção magnética, análise numérica, ferrohidrodinâmica, número de *Nusselt*

### Abstract

Thermomagnetic convection is a field of science that analyzes the behavior of a flow subject to gravitational, thermal, and magnetic effects. Although this topic has been studied in recent years, there are many models that can still be analyzed. Therefore, the object of study of this research is the numerical analysis of thermomagnetic convection in a square cavity with two insulated walls (side walls), a heated one (lower wall) and another cold one (upper wall) with a heated obstacle inside to interact with the ferrofluid flow. The purpose here is to evaluate the competition between the gravitational forces and magnetic forces due to the temperature gradient existing in the system. The problem is described by the terms of conservation of mass, balance of quantity of movement and conservation of energy, whereupon the *Boussinesq* approximation is used to the gravitational and magnetic terms, presenting an explicit dependence of the ferrofluid density and magnetization on magnetization. The presented problem is numerically solved by using the finite difference method for the discretization of the governing equations, applied to the staggered grid. An second order projection method is implemented to guarantee the incompressibility of the flow. Thus, the expected results are dependent on the position and intensity of the external magnetic field, which can help or not the thermomagnetic convection. In this context, the study seeks to obtain the *Nusselt* number to understand how the ferrofluid flow inside the cavity and how the additional elements and changes in the boundary conditions can influence the ferrohydrodynamics.

**Palavras-chave:** Thermomagnetic Convection, numerical analyze, ferrohydrodynamics, *Nusselt* number

## 1. Introdução

A convecção termomagnética tem sido objeto de estudo na atualidade por se tratar de um escoamento fluido interativo com efeitos térmicos e magnéticos em que seu comportamento pode ser controlado e moldado de acordo com essas interações. Estes aspectos proporcionam diversos estudos e possibilidades de aplicações.

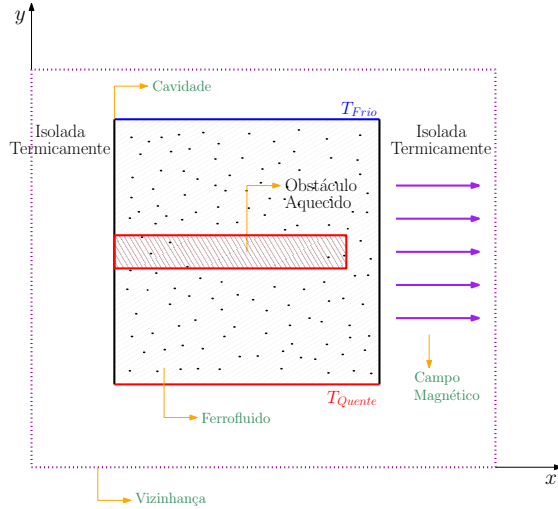


Figura 1: Modelo de estudo: escoamento termomagnético em uma cavidade quadrada sob ação de um campo magnético com um obstáculo aquecido em seu interior.

Encontram-se, então, estudos e análises em diversas frentes como o estudo na área experimental que busca entender o comportamento que a convecção termomagnética desenvolve quando enclausurada no interior de um cubo [17]. Há, também, a investigação comparativa entre a parte experimental e numérica da convecção termomagnética de um ferrofluido em uma cavidade cúbica [27], e, também, a investigação experimental da convecção termomagnética no interior de cavidades [13]. Análise de aplicabilidade, também foi desenvolvida, como a análise de elevação de performance de um dispositivo de arrefecimento para equipamentos quando sob ação de uma convecção termomagnética [26]. Ocorreram, também, investigações estatísticas a partir do método de *Lattice Boltzmann* para entender melhor o fenômeno da convecção termomagnética [16]. Outro método que seguiu caminho semelhante foi o estudo de modelagem para convecção magnética no interior de um cubo [24]. Além desses, houve a investigação da influência dos efeitos magnéticos sob o número de *Nusselt* na convecção termomagnética no interior de cavidades [9] [21] [2] [1].

Seguindo essa linha de investigação, propõe-se o objeto de estudo desse artigo que consiste em entender o comportamento que um escoamento de ferrofluido tem quando posto no interior de uma cavidade bidimensional (2D) selada com paredes laterais termicamente isoladas ( $\dot{Q} = 0$ ), parede superior em baixa tem-

peratura ( $T_{frio}$ ) e parede inferior em alta temperatura ( $T_{quente}$ ), junto a um obstáculo aquecido no interior da cavidade engastado no centro da parede esquerda e um campo magnético hipotético atuando unidirecionalmente na direção horizontal ( $x'$ ). A figura 1 apresenta o modelo esquemático desse objeto de estudo.

## 2. Formulação matemática

A formulação matemática para o modelo da figura 1 foi desenvolvido com base na equação de conservação da massa e equação de *Navier - Stokes*, onde o ferrofluido foi considerado contínuo e incompressível [3]. Já para o aspecto térmico, foi-se considerado a equação da energia e a equação para o número de *Nusselt* [4]. Por fim, no caso do eletromagnetismo, utilizou-se as equações de *Maxwell* considerando que é um ferrofluido de baixa fração volumétrica de partículas e superparamagnético [22] [14].

As equações governantes do problema, na forma adimensional, são a equação da conservação de massa,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

a equação de Navier-Stokes modificada,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{Pr}{(RaPr)^{\frac{1}{2}}} \nabla^2 \mathbf{u} + \theta \hat{\mathbf{e}}_y - \frac{Ra_m}{Ra} \theta \nabla \left( \frac{H^2}{2} \right), \quad (2)$$

e a equação da energia,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{(RaPr)^{\frac{1}{2}}} \nabla^2 \theta. \quad (3)$$

Nessas equações,  $t$  é o tempo,  $\mathbf{u}$  é a velocidade,  $p$  é a pressão,  $\theta$  é a temperatura e  $H$  é o campo magnético externo aplicado. Os parâmetros adimensionais governantes do problema são o número de Rayleigh,

$$Ra = \frac{L_c^3 g \beta (T_H - T_C)}{\nu \alpha}, \quad (4)$$

o número de Rayleigh magnético,

$$Ra_m = \frac{\mu_0 \chi_0 \beta_m (T_H - T_C) H_0^2 L_c^2}{\eta \alpha}, \quad (5)$$

e o número de Prandtl,

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\eta_0 c}{k}. \quad (6)$$

A troca de calor é calculada a partir do número de *Nusselt*, médio, definido como

$$\overline{Nu} = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=1} dx. \quad (7)$$

### 3. Metodologia numérica

A análise numérica foi a ferramenta escolhida para realização deste estudo, pois tem baixo custo de aplicação com alta confiabilidade de resolução e versatilidade de modelagem. Delimitou-se, então as métodos numéricos necessários para a aplicação computacional deste problema.

#### 3.1. Método das diferenças finitas

O método de diferenças finitas centradas [15] [19] foi utilizado para discretizar os termos diferenciais das equações 1, 2 e 3 a fim de produzir uma formulação aproximada das equações governantes passível de ser resolvida numericamente.

#### 3.2. Malha defasada

O método da malha defasada (*staggered grid* [18] [12] [11]) foi utilizado para discretizar o domínio de estudo dado pela figura 1. Este método consiste em dividir o domínio em frações iguais, onde analisa-se o que cada termo formante das equações 1, 2 e 3 contribui em cada uma delas, a fim de obter o comportamento total que o escoamento desempenha no sistema. A figura 2 apresenta um esquemático de uma célula da malha defasada que é replicada por todo o domínio..

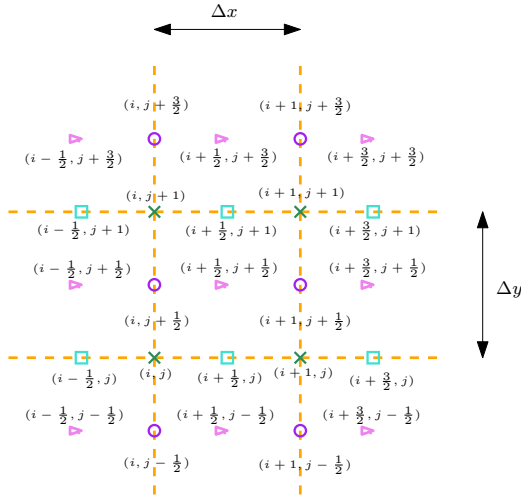


Figura 2: Representação esquemática de uma célula da malha defasada.

Na figura 2, os triângulos (▷) rosas representam a posição de análise da pressão  $p$ , da temperatura  $\theta$  e dos efeitos magnéticos  $H$ . Já os círculos (○) roxos representam a posição de análise da componente vertical da velocidade  $v$ . Os quadrados (□) cianos a componente horizontal da velocidade  $u$ . E por fim, os xis (×) verdes escuros são os nós da malha defasada que

representam os pontos nos quais a programação numérica alocará os resultados obtidos das análises feitas nos outros parâmetros anteriormente citados neste parágrafo.

#### 3.3. Método de projeção de segunda ordem

Para avançar as equações no tempo, é utilizado um método de projeção de segunda ordem [5] [8] [25]. Para os termos advectivos, é utilizada uma aproximação de upwind de 3ª ordem [6] [7]. Os passos do método utilizado são apresentados abaixo.

$$1^\circ : \begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{k+\frac{1}{2}} = -\nabla p^{k-\frac{1}{2}} + \\ + \frac{Pr}{(RaPr)^{\frac{1}{2}}} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^k) + \\ + \theta^{k+\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_y - \frac{Ra_m}{Ra} \theta \nabla \left[ \frac{(H^{k+\frac{1}{2}})^2}{2} \right] \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b + \Delta t \nabla \phi^2 \leftarrow \partial \Omega \end{cases}$$

$$2^\circ : \begin{cases} \nabla^2 \phi^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla \phi^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \leftarrow \partial \Omega \end{cases}$$

$$3^\circ : \{ u^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{k+1}$$

$$4^\circ : \{ p^{k+\frac{1}{2}} = p^{k-\frac{1}{2}} + \phi^{k+1} - \nabla^2 \phi^{k+1}$$

$$5^\circ : \begin{cases} \frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\Delta t} + \mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \theta^{k+\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{2(RaPr)^{\frac{1}{2}}} [\nabla^2 \theta^{k+1} + \nabla^2 \theta^k] \end{cases}$$

#### 3.4. Software

O *software* escolhido para compilação numérica foi o *Python* [19] que junto a sua biblioteca *Numba* consegue obter velocidades de processamento maiores que a do *Matlab* e semelhantes ao do *FORTRAN*, além de que o *Python* contém seu próprio gerador gráfico, regido pelas bibliotecas *Matplotlib* e *Panda*, simplificando o processo de geração de resultados gráficos.

#### 3.5. Validação

Para validar os resultados, primeiramente foi feita uma comparação com os resultados obtidos em [10]. Neste caso, não há efeitos magnéticos, apenas convecção natural. A tabela 1 mostra que os resultados obtidos concordam com os resultados do artigo [10].

$Ra$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$\overline{Nu}_{[10]}$	1.118	2.243	4.519	8.800
$\overline{Nu}_{\text{código}}$	1.118022	2.247341	4.539102	8.939654

Tabela 1: Análise comparativa do número de *Nusselt* do código com o do trabalho [10].

Além disso, foi feito um estudo de convergência de malha considerando os efeitos magnéticos. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos em [9], como mostra a tabela 2. Em [9] foi utilizado o método de elementos finitos. Novamente, nota-se uma concordância entre os resultados e também observa-se que os resultados do presente trabalho são independentes da malha utilizada. Na seção 4 todos os resultados foram obtidos com uma malha de  $100 \times 100$ .

Malha	$Ra_m$	$Ra$	$Nu_{qj}$	$Nu_{código}$
40 x 40	$10^5$	$10^4$	3.442336	3.49384339187454
60 X 60	$10^5$	$10^4$	3.436639	3.4595443966431
80 x 80	$10^5$	$10^4$	3.435145	3.44785080367491

Tabela 2: Análise de convergência de malha utilizando o código e comparando com o trabalho [9].

#### 4. Resultados

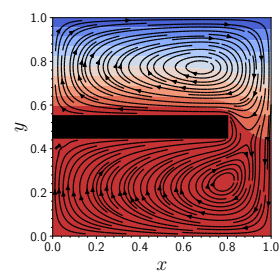
Os resultados foram obtidos a partir dos valores escolhidos para os números de *Prandtl* ( $Pr$ ), *Rayleigh* ( $Ra$ ) e *Rayleigh* magnético ( $Ra_m$ ), que são os dados de entrada do problema proposto. No caso, o número de *Prandtl* ( $Pr$ ) foi setado em 100, o número *Rayleigh* ( $Ra$ ) foi analisado para os valores de  $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$  e o número de *Rayleigh* magnético ( $Ra_m$ ) foi analisado para os valores de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ . Com essas definições, obteve-se resultados expressivos para o comportamento do escoamento, campo de pressão, campo de velocidade e campo de temperatura.

##### 4.1. Escoamento

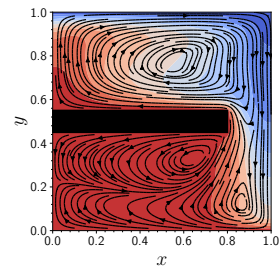
A figura 3 apresenta dois resultados para o número de *Rayleigh*  $10^3$ , sendo número de *Rayleigh* magnético  $10^3$  na figura 3a e número de *Rayleigh* magnético  $10^6$  na figura 3b. Nota-se que o escoamento do ferrofluido apresenta uma forma padronizada entre as regiões: superior e inferior da cavidade delimitada pelo obstáculo aquecido. Junto a essa condição, há a geração de duas regiões de recirculação que se concentram uma na região superior da cavidade e outra na região inferior da cavidade. Além disso, não há fluxo de ferrofluido de uma porção para outra configurando uma estrutura de estabilidade do escoamento no interior da cavidade.

Entretanto, com o aumento do número de *Rayleigh* magnético para o valor de  $10^6$ , considerando o número de *Rayleigh*, ainda fixo em  $10^3$ , visualiza-se, no gráfico 3b, que o escoamento modifica sua forma de modo a configurar um fluxo de ferrofluido da região superior da cavidade para a região inferior. Outro fator percebido é que o ferrofluido a baixa temperatura é mais afetado pelos efeitos magnéticos que o ferrofluido a alta temperatura. Além disso, não só há uma maior mistura de ferrofluido de baixa e alta temperaturas na região superior da cavidade de modo que a recirculação, já existente nesta região, apresenta uma mudança geométrica de sua estrutura, como também

há a uma modificação notável do escoamento na região inferior da cavidade, em que verifica-se a transformação de uma única recirculação pré-existente em duas novas recirculação disformes entre si. Nestas novas recirculações, observa-se que a segunda recirculação concentra-se próxima a parte inferior do obstáculo aquecido e tem sua concentração bem próxima da abertura de contato entre a região superior e inferior da cavidade, e a terceira recirculação tem uma configuração bem peculiar devido à sua concentração estar próxima a parede direita da cavidade, onde já ocorre uma mistura do ferrofluido a alta e baixa temperaturas, além de configurar uma espécie de esteira de ferrofluido que se expande próxima da parede inferior da cavidade e no sentido da parede esquerda da cavidade.



(a) Gráfico do escoamento de ferrofluido para número de *Rayleigh*  $10^3$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^3$ .

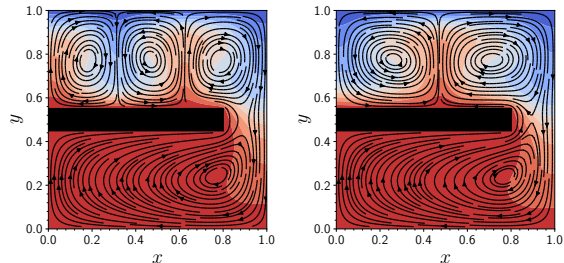


(b) Gráfico do escoamento de ferrofluido para número de *Rayleigh*  $10^3$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^6$ .

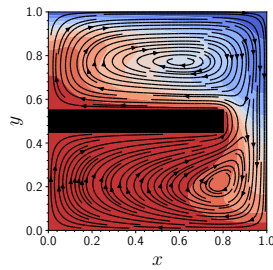
Figura 3: Análise comparativa entre o número de *Rayleigh* magnético  $10^3$  e o número de *Rayleigh* magnético  $10^6$  para o escoamento de ferrofluido com número de *Rayleigh*  $10^3$ .

Já, para o caso da figura 4, tem-se que o número de *Rayleigh* está definido como  $10^5$ , evidenciando que os efeitos térmicos estão bem intensos no escoamento de ferrofluido. Contudo, visualiza-se pelo gráficos 4a, 4b e 4c que o aumento gradativo do número de *Rayleigh* magnético altera de forma drástica o comportamento do escoamento do ferrofluido. No gráfico 4a observa-se a existência quatro regiões de recirculação, sendo três delas concentradas na região superior da cavidade e uma delas concentrada na região inferior da cavidade, porém com o aumento da intensidade dos efeitos magnéticos, o comportamento do escoamento al-

tera o modo como as recirculações presentes na região superior da cavidade fundem-se, ao ponto de que no gráfico 4c há somente uma grande recirculação na região superior da cavidade. Compreende-se, então, que os efeitos magnéticos têm forte influência sobre o escoamento de ferrofluido, principalmente na região de baixa temperatura.



(a) Gráfico do escoamento de ferrofluido para número de  $Rayleigh$   $10^5$  e número de  $Rayleigh$  magnético  $10^3$ . (b) Gráfico do escoamento de ferrofluido para número de  $Rayleigh$   $10^5$  e número de  $Rayleigh$  magnético  $10^4$ .



(c) Gráfico do escoamento de ferrofluido para número de  $Rayleigh$   $10^5$  e número de  $Rayleigh$  magnético  $10^5$ .

Figura 4: Análise comparativa entre o número de  $Rayleigh$  magnético  $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$  para o escoamento de ferrofluido com número de  $Rayleigh$   $10^5$ .

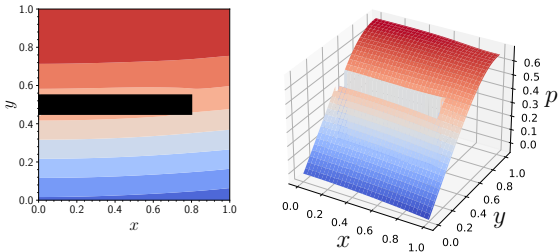
Outro ponto a se notar é que os efeitos magnéticos tendem a homogeneizar o comportamento do escoamento de ferrofluido no interior da cavidade, padronizando suas estruturas e gerando um padrão de fluxo não somente nas regiões superior e inferior da cavidade como também na abertura de conexão entre elas.

#### 4.2. Campo de pressão

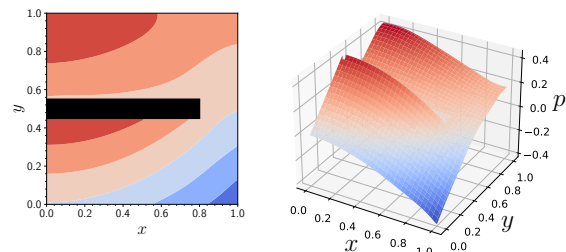
Para o campo de pressão, a figura 5 apresenta quatro gráficos de pressão, em que 5a e 5c apresentam um modelo bidimensional (2D) da pressão e 5b e 5d apresentam um modelo tridimensional (3D) da pressão. Os gráficos 5a e 5b foram gerados com os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^3$ , já os gráficos 5c e 5d com os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^5$ .

Visualiza-se, então, que quando investigado os gráficos onde os efeitos térmicos e magnéticos não são de grande intensidade, gráficos 5a e 5b, ocorre que o campo de pressão fica estável com menor intensidade

na região inferior da cavidade e com maior intensidade na região superior da cavidade. Isso demonstra que a região de maior fluxo do escoamento tem a maior pressão do sistema em oposição à região de menor pressão.



(a) Gráfico bidimensional (2D) do campo de pressão para os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^3$ . (b) Gráfico tridimensional (3D) do campo de pressão para os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^3$ .



(c) Gráfico bidimensional (2D) do campo de pressão para os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^5$ . (d) Gráfico tridimensional (3D) do campo de pressão para os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^5$ .

Figura 5: Análise comparativa entre os gráficos de pressão para os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^3$  com os números de  $Rayleigh$  e  $Rayleigh$  magnético definidos em  $10^5$ .

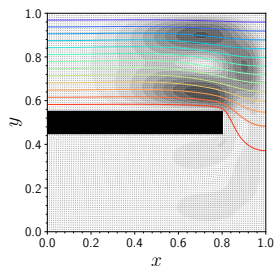
Já para o caso em que os efeitos térmicos e magnéticos são de grande intensidade, gráficos 5c e 5d, ocorre que o campo de pressão modifica-se ao ponto que o fluxo do escoamento gera duas regiões de alta pressão concentradas em que uma está localizada no vértice superior esquerdo da cavidade e outra próximo a região inferior do engaste do obstáculo aquecido. Nota-se, também, que a região de menor pressão concentra-se no vértice inferior direito da cavidade, porém com uma menor expressividade se comparado com quando a intensidade dos efeitos térmicos e magnéticos eram inferiores.

Assim sendo, as zonas de pressão tendem a se concentrar nas extremidades da cavidade quando os efeitos térmicos e magnéticos são de maior intensidade, revelando que com um fluxo intenso de escoamento a pressão não consegue se manter estável.

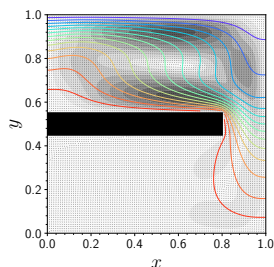
#### 4.3. Campo de velocidade

Para o campo de velocidade, a figura 6 apresenta dois gráficos de campo de velocidades associados á dispo-

sição do fluxo de temperatura no interior cavidade. Os gráficos 6a e 6b foram gerados com o número de *Rayleigh* definido em  $10^4$  e com o números de *Rayleigh* magnético  $10^3$  e  $10^5$  respectivamente para cada gráfico anteriormente citado.



(a) Gráfico do campo de velocidade para o número de *Rayleigh*  $10^4$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^3$ .



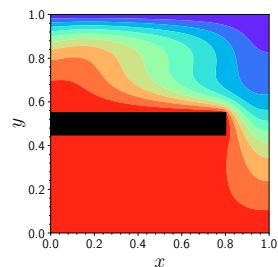
(b) Gráfico do campo de velocidade para o número de *Rayleigh*  $10^4$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^5$ .

Figura 6: Análise comparativa entre os gráficos dos campos de velocidade para os números de *Rayleigh* magnético:  $10^3$  e  $10^5$  quando o número de *Rayleigh* encontra-se fixo em  $10^4$ .

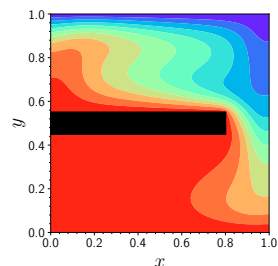
Em ambos os gráficos, há pequenas setas que exibem o sentido ao qual o fluxo toma quando ocorre o escoamento e regiões rachuradas em preto e cinza que expressam a intensidade do campo de velocidade no interior da cavidade. Logo, nota-se que para um número de *Rayleigh* constante há uma concentração de intensidade do campo de velocidade para um número de *Rayleigh* magnético de menor intensidade, gráfico 6a, porém quando o número de *Rayleigh* magnético é aprimorado, a intensidade do campo de velocidade tende a se diluir aumentando sua região de ocorrência, gráfico 6b.

#### 4.4. Campo de temperatura

Para o campo de temperatura, a figura 7 apresenta os gráficos de campo de temperatura 7a e 7b que foram gerados com o número de *Rayleigh* setado em  $10^5$  e com os números de *Rayleigh* magnético definidos em  $10^4$  e  $10^5$ , respectivamente.



(a) Gráfico do campo de temperatura para o número de *Rayleigh*  $10^4$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^5$ .



(b) Gráfico do campo de temperatura para o número de *Rayleigh*  $10^5$  e número de *Rayleigh* magnético  $10^5$ .

Figura 7: Análise comparativa entre os gráficos dos campos de temperatura para os números de *Rayleigh*:  $10^4$  e  $10^5$  quando o número de *Rayleigh* magnético encontra-se fixo em  $10^5$ .

Nesses gráficos, visualiza-se o comportamento que o campo de temperatura desenvolve durante o escoamento, de modo que com a intensificação dos efeitos magnéticos, ocorre uma tendência a desconcentração das fases térmicas, onde o fluxo térmico começa a se dissipar para a regiões periferia do interior da cavidade.

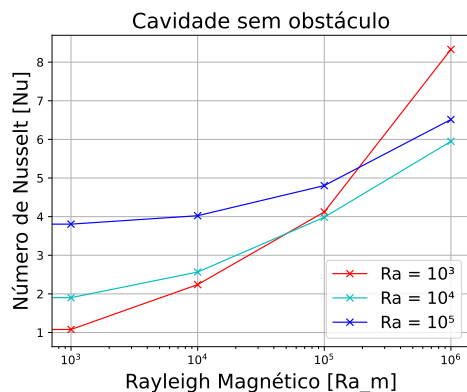
#### 4.5. Número de Nusselt

Nas figuras 8a e 8b, presentes na figura 8, são exibidos os valores do número de *Nusselt* médio em função do número de *Rayleigh* magnético para diferentes valores do número de *Rayleigh*.

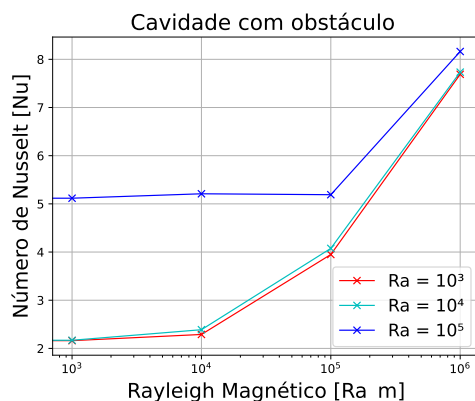
O gráfico 8a considera a cavidade livre, sem o obstáculo aquecido engastado em seu interior, de maneira a inferir-se que o número de *Nusselt* e o número de *Rayleigh* magnético tem uma relação crescente entre si. Contudo, há no gráfico uma região curiosa a partir da mudança do número de *Rayleigh* magnético de  $10^5$  para  $10^6$ , onde ocorre um crescimento abrupto e exacerbado para o valor de número de *Rayleigh*  $10^3$ , ao ponto que ele ultrapassa consideravelmente o número de *Nusselt* dos valores de número de *Rayleigh*  $10^4$  e  $10^5$ .

Já, para o gráfico 8b, considera-se o obstáculo aquecido engastado no interior da cavidade, de modo que

o gráfico apresenta um padrão diferente do caso do gráfico 8a, pois suas curvas não apresentam um padrão crescente aparentemente linear. Nota-se isso, pois a partir do número de *Rayleigh* magnético de  $10^4$ , o número de *Nusselt* alavanca um crescimento abrupto para os números de *Rayleigh*  $10^3$  e  $10^4$ . E para o número de *Rayleigh* magnético de  $10^5$  e *Rayleigh*  $10^5$ , o número de *Nusselt*, que se encontrava em uma reta praticamente constante, alavanca abruptamente seu crescimento.



(a) Gráfico de associação entre o número de *Nusselt* e o número de *Rayleigh* magnético para a cavidade sem obstáculo em seu interior.



(b) Gráfico de associação entre o número de *Nusselt* e o número de *Rayleigh* magnético para a cavidade com obstáculo em seu interior.

Figura 8: Análise comparativa entre os gráficos de número de *Nusselt* X número de *Rayleigh* magnético para cavidade sem e com obstáculo em seu interior.

## 5. Conclusão

O estudo de escoamento de ferrofluido do modelo proposto pela figura 1 proporcionou diversos resultados, em que alguns foram investigados na busca de entender como o escoamento de ferrofluido se comporta nas condições de análise onde o número de *Prandtl* (*Pr*) foi definido em 100, o número *Rayleigh* (*Ra*) foi analisado para os valores de  $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$  e o número de *Rayleigh* magnético (*Ra<sub>m</sub>*) foi analisado para os valores de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ .

Pela análise dos resultados, infere-se que o ferrofluido a baixa temperatura é mais suscetível aos efeitos magnéticos, e que esses, mesmo em baixa intensidade, já possuem uma influência visível sobre o comportamento que o escoamento de ferrofluido tem, mesmo nos casos em que há um domínio dos efeitos térmicos. Percebeu-se, que a forma e tamanho do obstáculo junto com a sua condição de estado térmico influenciam drasticamente no comportamento que o escoamento toma no interior da cavidade e que os efeitos magnéticos tendem a padronizar a forma que o escoamento de ferrofluido se desenvolve no interior da cavidade de modo a eliminar ou concentrar as regiões de recirculação em uma única.

## Referências

- [1] M. Ashouri and M. B. Shafii. Numerical simulation of magnetic convection ferrofluid flow in a permanent magnet-inserted cavity. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 422:270–278, 2017.
- [2] M. Ashouri, B. Ebrahimi, M. B. Shafii, M. H. Saidi, and M. S. Saidi. Correlation of nusselt number in pure magnetic convection ferrofluid flow in a square cavity by a numerical investigation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 322:3607–3613, 2010.
- [3] G. K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, 1967.
- [4] A. Bejan. Convection heat transfer. *John Wiley & Sons, Inc*, 4<sup>a</sup> Edition, 2013.
- [5] J. B. Bell, P. Colella, and H. M. Glaz. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equation. *Journal of Computational Physics*, 85:257–283, 1989.
- [6] C.-H. Bruneau and M. Saad. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 35:326–348, 2006.
- [7] C.-H. Bruneau and M. Saad. The behavior of high reynolds flows in a driven cavity. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 15.3(303):1–11, 2006.
- [8] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Matematics of Computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [9] L. H. P. Cunha, I. R. Siqueira, A. A. R. Campos, A. P. Rosa, and T. F. Oliveira. A numerical study on heat transfer of a ferrofluid flow in a square cavity under simultaneous gravitational and magnetic convection. *Theoretical and Computational Fluid Dynamic*, pages 1–15, 2020.

- [10] G. V. Davis. Natural convection of air in a square cavity a bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:249–264, 1983.
- [11] K. P. M. De Oliveira. Geração algébrica de malhas bidimensionais. *Universidade Estadual Paulista*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:1–143, 2005.
- [12] A. O. Fortuna. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos. *Editora da Universidade de São Paulo*, 2000.
- [13] R. G. Gontijo and F. R. Cunha. Experimental investigation on thermo-magnetic convection inside cavities. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, 12:9198–9207, 2012.
- [14] D. J. Griffiths. Eletrodinâmica. *Pearson*, 3ª Edition, 2011.
- [15] J. D. Hoffman. Numerical methods for engineers and scientists. *Marcel Dekker, Inc.*, Second Edition Revised and Expanded, 2001.
- [16] G. H. R. Kefayati. Natural convection of ferrofluid in a linearly heated cavity utilizing lbm. *Journal of Molecular Liquids*, 191:1–9, 2014.
- [17] H. Kikurá, T. S. Sawada, and T. Tanahashi. Natural convection of a magnetic fluid in a cubic enclosure. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 122:315–318, 1993.
- [18] J. Kim and P. Moin. Application of fractional-step method to incompressible navier-stokes equation. *Journal of Computational Physics*, 59 (0021-9991/85):308–323, 1985.
- [19] J. Kiusalaas. Numerical methods in engineering with python. *Cambridge University Press*, 2005.
- [20] R. J. LeVeque. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2007.
- [21] N. B. Marcelino, H. L. G. Couto, and F. R. Cunha. A study on magnetic convection in a narrow rectangular cavity. *Magnetohydrodynamics*, 43 (4):421–328, 2007.
- [22] R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. 1985.
- [23] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. Cálculo numérico aspectos teóricos e computacionais. *Pearson*, 2 Edição, 2000.
- [24] S. M. Snyder, T. Cader, and B. A. Finlayson. Finite element model of magnetoconvection of a ferrofluid. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 262:269–279, 2003.
- [25] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des Équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). *Archiv Ration Mech Anal*, 33:377–385, 1969.
- [26] H. Yamaguchi, I. Kobori, and Y. Uehata. Heat transfer in natural convection of a magnetic fluid. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 13 (4):501–507, 1999.
- [27] X. N. X. Yamaguchi, H.; Zhang and K. Yoshikawa. Thermomagnetic natural convection of thermo-sensitive magnetic fluids in cubic cavity with heat generating object inside. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 332:698–704, 2010.