

# Modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes helicoidales con modificación de perfil

José I. Pedrero<sup>1</sup>, M. Pleguezuelos<sup>2</sup>, Miryam B. Sánchez<sup>3</sup>

Grupo de Investigación de Ingeniería Mecánica, Departamento de Mecánica, UNED, España.

<sup>1</sup> jpedrero@ind.uned.es, <sup>2</sup> mpleguezuelos@ind.uned.es, <sup>3</sup> msanchez@ind.uned.es

## Resumen

Para la simulación del contacto entre dientes de engranajes helicoidales es necesaria una precisa determinación de la longitud de la línea de contacto, que es variable a lo largo del ciclo de engrane. Esta variación viene influenciada no sólo por la inclinación de las líneas, sino también por su alargamiento debido al adelanto del inicio del contacto inducido por las deformaciones de los dientes bajo carga, así como por la reducción que en dicha longitud provoca la modificación del perfil. Todo ello influye de manera determinante en la rigidez de engrane, el error de transmisión y el reparto de carga, factores que tienen influencia decisiva en el comportamiento dinámico de la transmisión. En este trabajo se presenta un modelo aproximado, sencillo y eficiente, para la simulación de la rigidez de engrane, el error de transmisión y el reparto de carga para engranajes helicoidales con modificación de perfil.

**Palabras clave:** engranajes helicoidales; rigidez de engrane; error de transmisión; reparto de carga; modificación de perfil.

## Abstract

For the simulation of the tooth contact of helical gears, a precise determination of the length of the line of contact is necessary, which is variable throughout the meshing cycle. This variation is influenced not only by the inclination of the lines, but also by their elongation due to the sooner start of contact induced by the teeth deflections under load, as well as by the reduction in this length due to profile modification. All of this influences the mesh stiffness, transmission error, and load sharing, which have a decisive influence on the dynamic behavior of the transmission. In this work, an approximate, simple, and efficient model is presented for the simulation of the mesh stiffness, transmission error, and load sharing for helical gears with profile modification.

**Keywords:** helical gears; mesh stiffness; transmission error; load sharing; profile modification.

## 1. Introducción

En engranajes de transmisión de potencia, las deformaciones de los dientes en contacto se traducen en un retraso de la rueda conducida respecto de la conductora, que se conoce como error de transmisión cuasi estático [1]. Dado que dicho error de transmisión no es constante a lo largo del ciclo de engrane, se producen fluctuaciones periódicas de la velocidad de salida, esto es, aceleraciones y deceleraciones de la rueda conducida, que son fuente de carga dinámica y vibraciones [2]. Además, este retraso relativo entre las dos ruedas provoca un adelanto del inicio del contacto

(y un retraso de la finalización del mismo), que tiene lugar entre puntos no conjugados de los perfiles y fuera de la línea de presión. Ello genera un alargamiento de la longitud efectiva de contacto, pero induce un choque entre los dientes, que es fuente, a su vez, de ruido, sobrecarga y vibración [3].

Para hacer frente a estos problemas es muy común la modificación del perfil [3,4]. En efecto, si se elimina material de la cabeza del diente conducido, el inicio del contacto se retrasa, y si la cantidad eliminada es la adecuada, el inicio del contacto se desplaza hasta el punto teórico [1,3]. Mediante la longitud de perfil

rebajado y la forma del rebaje se puede controlar –en cierta medida– el error de transmisión, y por tanto la carga dinámica y vibración inducidas, el reparto de carga y la rigidez de engrane [4,5-7]. Este planteamiento, que resulta intuitivo en el caso de engranajes rectos, se complica considerablemente con los engranajes helicoidales. En este caso, las secciones transversales de los dientes –semejantes a engranajes rectos de espesor diferencial– están entrando en contacto y saliendo de él de manera continua, produciendo alargamientos del intervalo de contacto diferentes en cada punto del ciclo de engrane. Tomando todo esto en consideración, los autores presentaron un modelo de rigidez, reparto de carga y error de transmisión para engranajes helicoidales con rebaje de punta [8], basado en uno más sencillo para engranajes rectos, desarrollado con anterioridad [3,9-11]. En este trabajo se presenta un modelo para engranajes helicoidales basado en el presentado en [8], y la aplicación de dicho modelo a la simulación del contacto entre dientes, incluyendo deformaciones bajo carga y modificación de perfil.

## 2. Rigidez de la pareja de dientes

La rigidez de una pareja de engranajes rectos se puede expresar como [3,9-11]:

$$\begin{aligned} K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{inn} - \xi_m)) & \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) & \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{out} - \xi_m)) & \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max} \end{aligned}$$

donde  $b$  es el ancho de cara,  $K_{Mmax}^*$  y  $b_0$  parámetros que dependen de la geometría del engranaje, cuya determinación se presenta en [9-11], y  $\xi$  una variable característica del punto de contacto, definida como:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1}$$

en la que  $Z_1$  es el número de dientes,  $r_{c1}$  el radio del punto de contacto y  $r_{b1}$  el radio de base, de la rueda conductora.  $\xi$  es también, por lo tanto, una coordenada lineal en la línea de presión, indicativa del punto de la misma en que se produce el contacto. Los subíndices *min*, *inn*, *m*, *out* y *max* designan los puntos de contacto mínimo, inferior teórico, de rigidez máxima [3,4], superior teórico y máximo, respectivamente. La Figura 1 representa la evolución de la rigidez de la pareja de dientes a lo largo del intervalo de engrane extendido.

Si  $F_T$  es la fuerza total transmitida, el reparto de carga entre dientes se puede calcular a partir de la rigidez mediante la expresión [9]:

$$R(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_T} = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_{Mj}(\xi)} = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_M(\xi + j)}$$

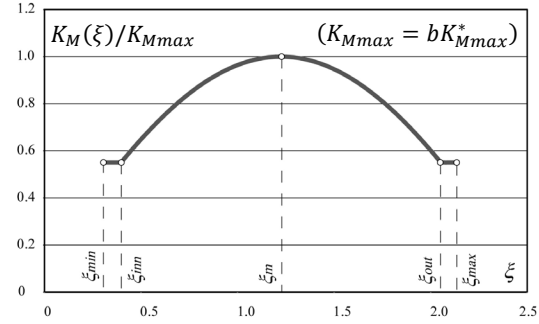


Figura 1. Curva de rigidez de la pareja de dientes.

de donde se tiene que la deformación de la pareja de dientes  $i$  viene dada por:

$$\delta_i(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{K_{Mi}(\xi)} = \frac{F_T}{\sum_j K_M(\xi + j)}$$

Se observa que el término de la derecha no depende de  $i$ , es decir, de la pareja de dientes, de donde se concluye que, en cada posición de engrane, la deformación es la misma para todas las parejas en contacto, y representa por tanto el retraso de la rueda conducida, que es lo que se conoce como error de transmisión [3,4].

Para engranajes helicoidales se puede aplicar este mismo modelo, considerando el diente helicoidal como una sucesión de engranajes rectos de espesor diferencial. La expresión de la rigidez de cada sección transversal  $dK_M(\xi)$  sería la misma, considerando un ancho de cara  $db$ , teniendo en cuenta que [9]:

$$db = \frac{b}{\varepsilon_\beta} d\xi$$

donde  $\varepsilon_\beta$  es el grado de recubrimiento axial. En adelante  $\xi_0$  designará el parámetro del punto de contacto de la sección transversal de referencia –que será la primera en iniciar el contacto– y  $\xi$  el parámetro del punto de contacto de cada sección transversal del diente.

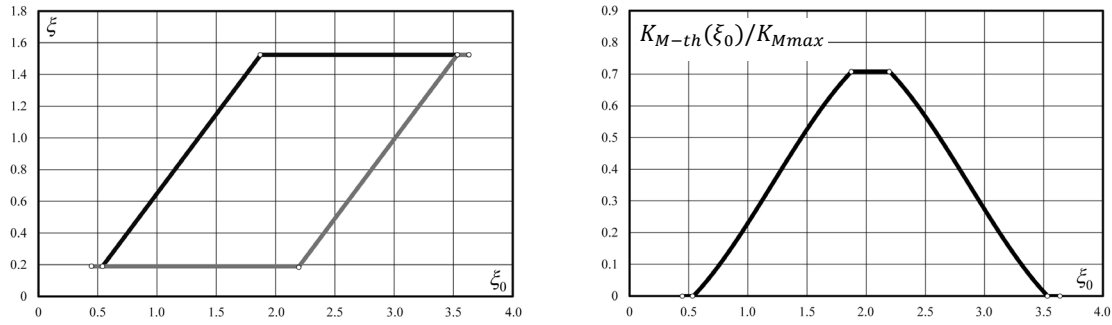
## 3. Modelo de contacto teórico

Si se considera el intervalo de engrane teórico, es decir, de  $\xi_{inn}$  a  $\xi_{out}$ , la rigidez del par de dientes helicoidales en cada posición de engrane  $\xi_0$  vendrá dada por:

$$K_{M-th}(\xi_0) = \int_{\xi_{inf-th}(\xi_0)}^{\xi_{sup-th}(\xi_0)} dK_M(\xi)$$

donde los límites superior e inferior del intervalo de contacto en cada  $\xi_0$  se pueden calcular con [4,11]:

$$\begin{aligned} \xi_{sup-th}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{inn}, \xi_0, \xi_{out}) \\ \xi_{inf-th}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{inn}, \xi_0 - \varepsilon_\beta, \xi_{out}) \end{aligned}$$



**Figura 2.** Contacto teórico con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$ : **izq.:** mapa de contacto; **dcha.:** rigidez del diente.

donde la función MID representa el valor intermedio de los tres. La Figura 2 representa el mapa de contacto teórico de un engranaje helicoidal –limitado por las curvas de  $\xi_{inf-th}$  y  $\xi_{sup-th}$ – y la curva de rigidez de la pareja de dientes, para  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$ , donde  $\varepsilon_\alpha$  es grado de recubrimiento transversal.

La rigidez teórica de engrane  $K_{T-th}(\xi_0)$  será la suma

de la rigidez de todas las parejas de dientes en contacto:

$$K_{T-th}(\xi_0) = \sum_j \int_{\xi_{inf-th}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-th}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)$$

con lo que el error de transmisión y el reparto de carga:

$$\delta_{th}(\xi_0) = \frac{F_T}{K_{T-th}(\xi_0)}$$

$$R_{th}(\xi_0) = \frac{K_{M-th}(\xi_0)}{K_{T-th}(\xi_0)}$$

La Figura 3 muestra las correspondientes curvas de variación a lo largo del intervalo de engrane del diente.

#### 4. Modelo de contacto extendido

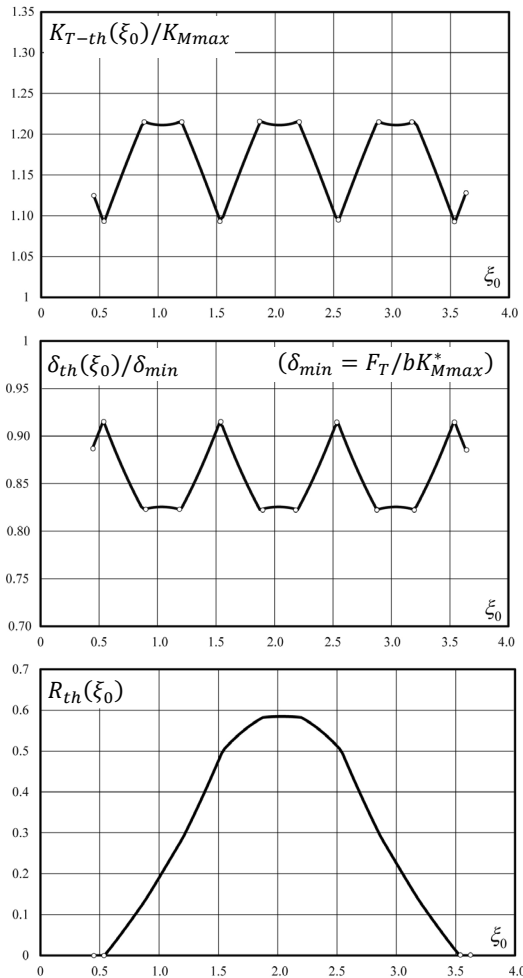
El modelo teórico del apartado anterior es válido para engranajes débilmente cargados, pero cuando se transmiten cargas importantes la rigidez, el error de transmisión y el reparto de carga se ven afectados por las deformaciones, lo que debe tenerse en cuenta.

Los límites del intervalo de contacto extendido en cada posición de engrane,  $\xi_{min-ext}(\xi_0)$  y  $\xi_{max-ext}(\xi_0)$ , se pueden calcular, muy aproximadamente, como [3,4]:

$$\xi_{min-ext}(\xi_0) = \xi_{inn} - \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_0)}{C_{p-inn} r_{b1}}}$$

$$\xi_{max-ext}(\xi_0) = \xi_{out} + \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_0)}{C_{p-out} r_{b1}}}$$

donde  $C_{p-inn}$  y  $C_{p-out}$  son constantes que dependen de la geometría de los engranajes, cuyo cálculo se presenta en [3,4]. El intervalo de variación de  $\xi_0$  a considerar, vendrá dado por el menor de los valores de  $\xi_{min}$ , que corresponde a  $\xi_{min-ext}(\xi_{inn})$ , y el mayor de los valores de  $\xi_{max}$ , que corresponde a  $\xi_{max-ext}(\xi_{out})$ . Dentro del intervalo de contacto extendido, la fuerza diferencial que transmite una sección transversal de engranaje vendrá dada por:



**Figura 3.** Contacto teórico con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$ : **sup.:** rigidez de engrane; **cent.:** error de transmisión **inf.:** reparto de carga.

$$dF(\xi) = dK_M(\xi)(\delta_{ext}(\xi_0) - \delta_G(\xi))$$

donde  $\delta_{ext}(\xi_0)$  es la deformación con el contacto extendido (igual para todas las secciones transversales) y  $\delta_G(\xi)$  la distancia que el diente conductor ha de aproximarse al diente conducido para contactar con él en el punto  $\xi$ . Esta distancia se expresa como [3,4]:

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-inn} r_{b1} (\xi_{inn} - \xi)^2 & \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_G(\xi) &= 0 & \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-out} r_{b1} (\xi - \xi_{out})^2 & \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max} \end{aligned}$$

Integrando la ecuación anterior, la fuerza sobre una pareja de dientes en cada posición de contacto  $\xi_0$  será:

$$F(\xi_0) = \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0)} dK_M(\xi)(\delta_{ext}(\xi_0) - \delta_G(\xi))$$

donde, para el contacto extendido:

$$\begin{aligned} \xi_{sup-ext}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{min-ext}(\xi_0), \xi_0, \xi_{max-ext}(\xi_0)) \\ \xi_{inf-ext}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{min-ext}(\xi_0), \xi_0 - \varepsilon_\beta, \xi_{max-ext}(\xi_0)) \end{aligned}$$

La fuerza total será:

$$F_T = \sum_j \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)(\delta_{ext}(\xi_0) - \delta_G(\xi))$$

Como antes,  $\delta_{ext}(\xi_0)$  no depende de  $\xi$  ni de  $j$ , por lo que se puede sacar factor común y despejar, resultando:

$$\delta_{ext}(\xi_0) = \frac{F_T + \sum_j \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0+j)} dK_M(\xi) \delta_G(\xi)}{\sum_j \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)}$$

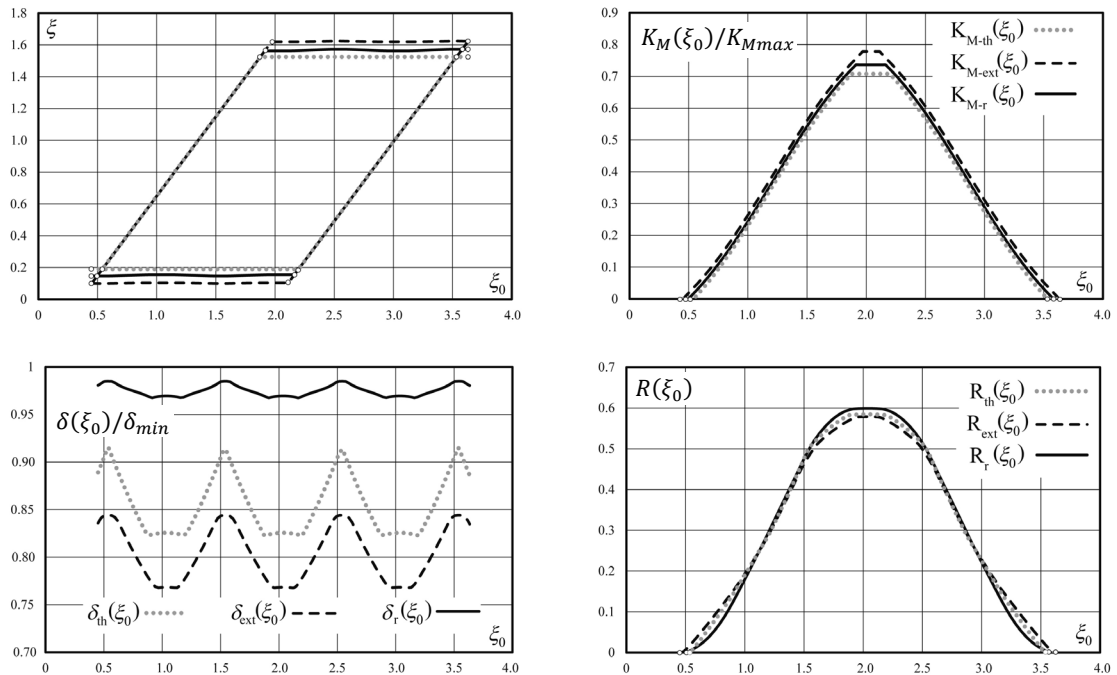
ecuación que proporciona el error de transmisión con contacto extendido. A partir de aquí, la rigidez de engrane y el reparto de carga serán:

$$\begin{aligned} K_{T-ext}(\xi_0) &= \frac{F_T}{\delta_{ext}(\xi_0)} \\ R_{ext}(\xi_0) &= \frac{1}{F_T} \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0)} dK_M(\xi)(\delta_{ext}(\xi_0) - \delta_G(\xi)) \end{aligned}$$

La rigidez de la pareja de dientes se calcula como antes, pero integrando sobre intervalo de contacto extendido, es decir:

$$K_{M-ext}(\xi_0) = \int_{\xi_{inf-ext}(\xi_0)}^{\xi_{sup-ext}(\xi_0)} dK_M(\xi)$$

La Figura 4 muestra, en línea de trazos, el mapa de contacto, la rigidez de la pareja de dientes, el error de transmisión y el reparto de carga con el modelo extendido, para la misma transmisión de las Figuras 2 y 3, con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$ . Se incluyen también las curvas del modelo teórico del apartado anterior para mostrar las diferencias entre ambos modelos.



**Figura 4.** Contacto extendido con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$ : **sup.-izq.:** mapa de contacto; **sup.-dcha.:** rigidez del diente; **inf.-izq.:** error de transmisión; **inf.-dcha.:** reparto de carga.

## 5. Modelo con modificación de perfil

Cuando una pareja de dientes contacta en el intervalo de rebaje del perfil sucede algo parecido al contacto en el intervalo de contacto extendido: los dientes han de aproximarse una cierta distancia (la profundidad de rebaje en ese punto) para empezar a contactar, y por tanto a deformarse. Obviamente, la profundidad de rebaje es una función conocida  $\delta_r(\xi)$  que, para rebaje lineal o parabólico, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} & \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{inn}}{\Delta \xi_{R-inn}}\right)^{\nu} & \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \Delta \xi_{R-inn} \\ \delta_R(\xi) &= 0 & \xi_{inn} + \Delta \xi_{R-inn} \leq \xi \leq \xi_{out} - \Delta \xi_{R-out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} \left(1 - \frac{\xi_0 - \xi}{\Delta \xi_{R-out}}\right)^{\nu} & \xi_{out} - \Delta \xi_{R-out} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} & \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned}$$

donde  $\Delta_{R-inn}$  y  $\Delta_{R-out}$  son las profundidades de rebaje en la cabeza de las ruedas conducida y conductora, respectivamente,  $\Delta \xi_{R-inn}$  y  $\Delta \xi_{R-out}$  las respectivas longitudes de rebaje, y el exponente  $\nu$  toma el valor 1 para rebaje lineal y 2 para rebaje parabólico.

En este caso, la fuerza diferencial que transmite una sección transversal de engranaje vendrá dada por:

$$dF(\xi) = dK_M(\xi)(\delta_r(\xi_0) - \delta_G(\xi) - \delta_R(\xi))$$

donde  $\delta(\xi_0)$  es la deformación con el contacto con rebaje, igual para todas las secciones transversales de todos los dientes. Para integrar esa ecuación es necesario definir primero los límites de integración, es decir, los límites de los intervalos de contacto en cada punto, o lo que es lo mismo, el mapa de contacto. Estos nuevos límites  $\xi_{\min-r}(\xi_0)$  y  $\xi_{\max-r}(\xi_0)$  serán las soluciones de la ecuación:

$$\delta_{ext}(\xi_0) = \delta_G(\xi) + \delta_R(\xi)$$

pues son los puntos donde se anula la fuerza transmitida. Esta ecuación toma diferente forma en función la relación entre la deformación y la profundidad de rebaje. Para el inicio del contacto:

- Para  $\delta_{ext}(\xi_0) \geq \Delta_{R-inn}$ :
$$\delta_{ext}(\xi_0) = \Delta_{R-inn} + \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-inn} r_{b1} (\xi_{inn} - \xi_{\min-r})^2$$

- Para  $\delta_{ext}(\xi_0) \leq \Delta_{R-inn}$ :
$$\delta_{ext}(\xi_0) = \Delta_{R-inn} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{inn}}{\Delta \xi_{R-inn}}\right)^{\nu}$$

Para la finalización del contacto:

- Para  $\delta_{ext}(\xi_0) \geq \Delta_{R-out}$ :

$$\delta_{ext}(\xi_0) = \Delta_{R-out} + \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-out} r_{b1} (\xi_{\max-r} - \xi_{out})^2$$

- Para  $\delta_{ext}(\xi_0) \leq \Delta_{R-out}$ :

$$\delta_{ext}(\xi_0) = \Delta_{R-out} \left(1 - \frac{\xi_{out} - \xi}{\Delta \xi_{R-out}}\right)^{\nu}$$

A partir de aquí el procedimiento es idéntico a los anteriores: la fuerza soportada por una pareja de dientes es:

$$F(\xi_0) = \int_{\xi_{inf-r}(\xi_0)}^{\xi_{sup-r}(\xi_0)} dK_M(\xi)(\delta_r(\xi_0) - \delta_G(\xi) - \delta_R(\xi))$$

en la que:

$$\begin{aligned} \xi_{sup-r}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{\min-r}(\xi_0), \xi_0, \xi_{\max-r}(\xi_0)) \\ \xi_{inf-r}(\xi_0) &= \text{MID}(\xi_{\min-r}(\xi_0), \xi_0 - \varepsilon_{\beta}, \xi_{\max-r}(\xi_0)) \end{aligned}$$

La fuerza total es:

$$F_T = \sum_j \int_{\xi_{inf-r}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-r}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)(\delta_r(\xi_0) - \delta_G(\xi) - \delta_R(\xi))$$

Como antes,  $\delta_r(\xi_0)$  no depende de  $\xi$  ni de  $j$ , por lo que se puede sacar factor común y despejar, resultando:

$$\delta_r(\xi_0) = \frac{F_T + \sum_j \int_{\xi_{inf-r}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-r}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)(\delta_G(\xi) + \delta_R(\xi))}{\sum_j \int_{\xi_{inf-r}(\xi_0+j)}^{\xi_{sup-r}(\xi_0+j)} dK_M(\xi)}$$

ecuación que proporciona el error de transmisión para dientes con rebaje. A partir de aquí, la rigidez de engrane y el reparto de carga serán, como antes:

$$\begin{aligned} K_{T-r}(\xi_0) &= \frac{F_T}{\delta_r(\xi_0)} \\ R_r(\xi_0) &= \frac{1}{F_T} \int_{\xi_{inf-r}(\xi_0)}^{\xi_{sup-r}(\xi_0)} dK_M(\xi)(\delta_r(\xi_0) - \delta_G(\xi) - \delta_R(\xi)) \end{aligned}$$

La Figura 4 muestra, en línea continua, el mapa de contacto, la rigidez de la pareja de dientes, el error de transmisión y el reparto de carga con el modelo con rebaje, para la transmisión considerada, con  $\varepsilon_{\beta} > \varepsilon_{\alpha}$ .

## 6. Influencia del grado de recubrimiento

El caso presentado en la Figura 4 corresponde a un engranaje con grado de recubrimiento transversal  $\varepsilon_{\alpha-th} = 1,3350$  y grado de recubrimiento axial  $\varepsilon_{\beta} = 1,6582$ . Si se toma en consideración el intervalo de contacto extendido, el grado de recubrimiento transversal aumenta hasta  $\varepsilon_{\alpha-ext} = 1,5250$ , y se reduce hasta  $\varepsilon_{\alpha-r} = 1,4263$  con el rebaje.

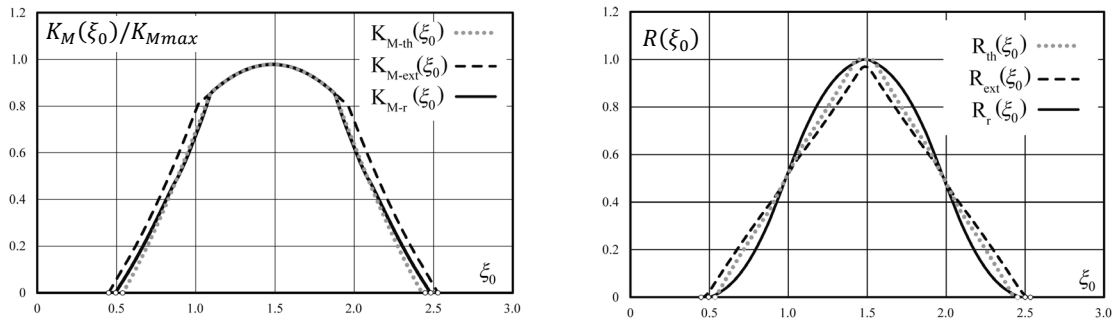


Figura 5. Contacto con rebaje con  $\varepsilon_\beta < \varepsilon_\alpha$ : **izq.**: rigidez del diente; **dcha.**: reparto de carga.

En la Figura 5 se representa el mismo engranaje, pero con el ancho de cara reducido a la tercera parte, de manera que  $\varepsilon_\beta = 0,5527$ . Los grados de recubrimiento transversal teórico y extendido se mantienen en 1,3350 y 1,5250; con rebaje se reduce a 1,4267.

Se aprecia que la curva de rigidez de la pareja de dientes deja de ser plana en la parte central del intervalo de contacto. Ello es debido a que, como se aprecia en el mapa de contacto de la Figura 4, cuando  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$  existe un intervalo en que las líneas de contacto son idénticas, y se extienden desde  $\xi_{min}$  hasta  $\xi_{max}$ . En cambio, cuando  $\varepsilon_\beta < \varepsilon_\alpha$  antes de que las líneas de contacto alcancen el punto de  $\xi_{max}$  dejan de contactar en  $\xi_{min}$ , por lo que son diferentes unas de otras, y la rigidez de la pareja de dientes varía.

Se aprecia también en la Figura 5 que las curvas de

reparto de carga teórica y con rebaje alcanzan el valor 1. Obviamente, eso se debe a que el grado de recubrimiento total no alcanza el valor 2, por lo que hay momentos en que toda la fuerza se transmite por una única pareja de dientes. No ocurre lo mismo con la curva de reparto extendida, porque en este caso el grado de recubrimiento total es  $\varepsilon_{\gamma-ext} = \varepsilon_{\alpha-ext} + \varepsilon_\beta = 2,0777 > 2$ . En cambio, en la Figura 4 el valor del coeficiente de reparto no supera el valor 0,6. El máximo se alcanza siempre en el punto medio del intervalo de contacto, y es menor en el modelo extendido que en teórico puesto que las líneas de contacto son más largas. Sin embargo, el máximo con rebaje, que es mayor que el extendido por la misma razón, es menor que el teórico porque, aunque las líneas de contacto son más largas, la carga transmitida en la zona de rebaje es menor, por lo que en la zona central ha de aumentar.

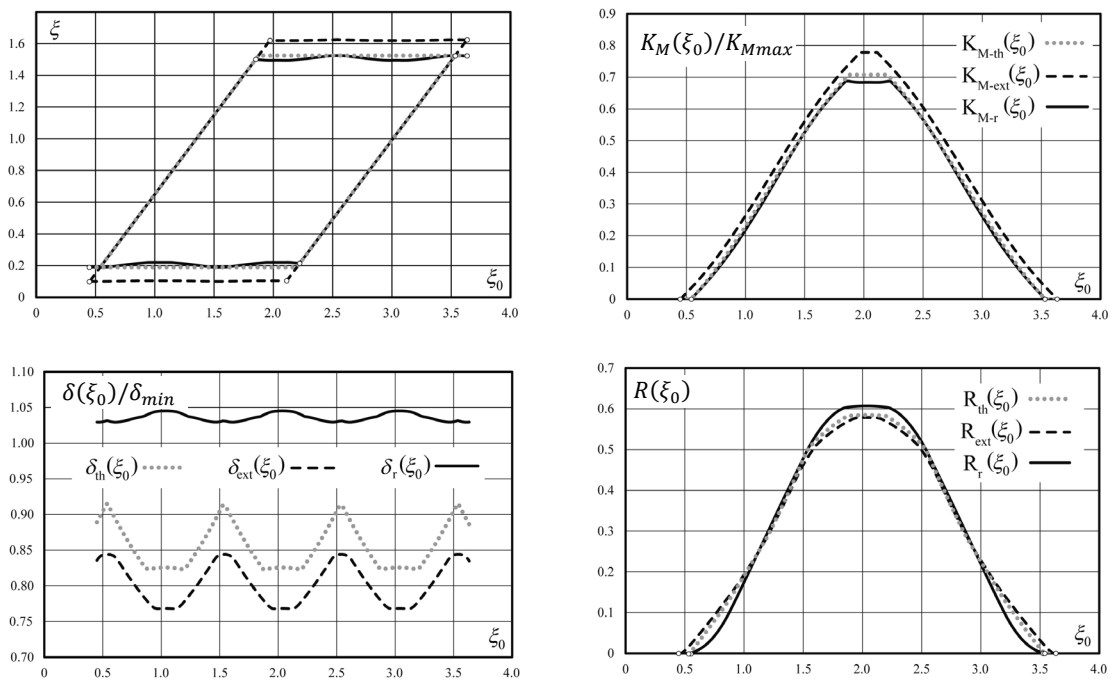


Figura 6. Engranaje helicoidal con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$  y profundidad de rebaje ajustada: **sup.-izq.**: mapa de contacto; **sup.-dcha.**: rigidez del diente; **inf.-izq.**: error de transmisión; **inf.-dcha.**: reparto de carga.

### 7. Influencia de la profundidad de rebaje

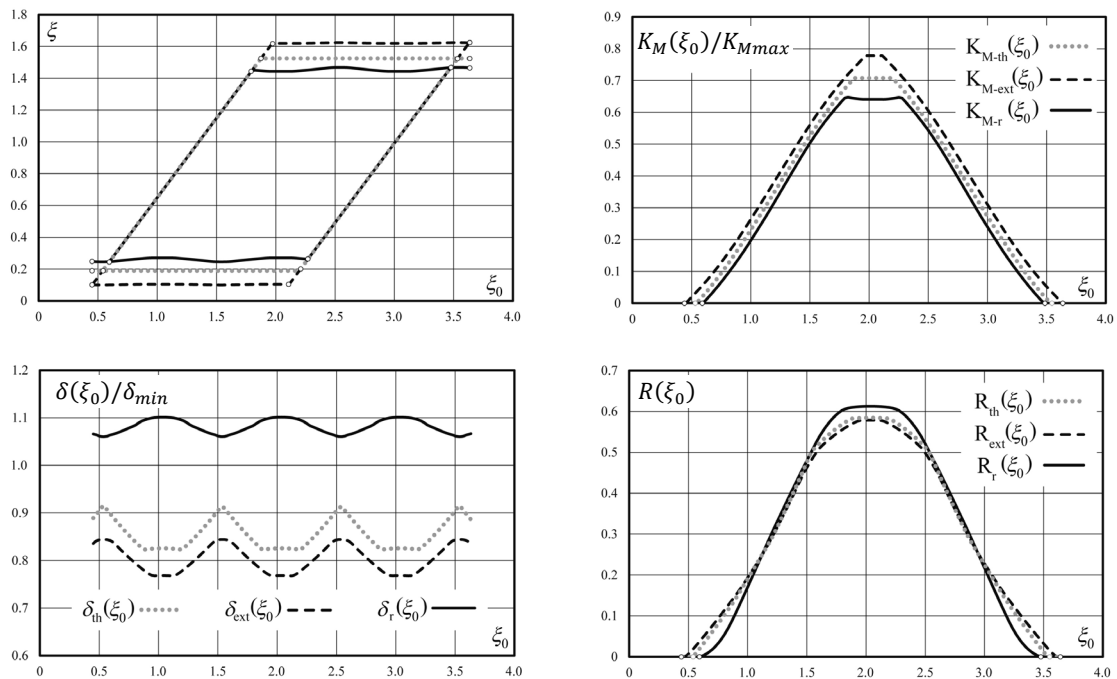
En engranajes rectos, la profundidad de rebaje tiene una influencia decisiva en la reducción del impacto de inicio de engrane, que se llega a eliminar por completo cuando la profundidad coincide con el error de transmisión en el punto de inicio de engrane teórico, lo que se conoce como profundidad de rebaje ajustada [4]. En engranajes helicoidales el efecto del rebaje es más complicado de visualizar, porque cada sección transversal inicia su contacto en unas condiciones de carga distintas. Sin embargo, es evidente que para evitar el impacto al inicio del engrane, la profundidad de rebaje ha de ser igual al error de transmisión en el punto de inicio de contacto teórico del diente.

En la Figura 4 se consideró una profundidad de rebaje del 75% de la ajustada. Se aprecia en los diagramas superior-derecho e inferior-derecho que el contacto comienza antes del punto teórico, lo que significa que el impacto de inicio de engrane se mitiga, pero no se elimina por completo. En cambio, el grado de recubrimiento aumenta ligeramente. Se aprecia también en el diagrama inferior-izquierdo que el error de transmisión aumenta, pero se reduce drásticamente la amplitud pico-pico, lo que reduce la sobrecarga dinámica y la amplitud de la vibración inducida.

En la Figura 6 se muestra el mismo caso de la Figura 4, pero con profundidad de rebaje ajustada. Se aprecia en los diagramas superior-derecho e inferior-derecho

que el inicio del contacto se desplaza al punto teórico, lo que evita el impacto de inicio de engrane. En el mapa de contacto (diagrama superior-izquierdo) se observa que los límites superior e inferior de la línea de contacto en cada posición de engrane se aproximan a los valores teóricos,  $\xi_{out}$  y  $\xi_{inn}$ , aunque no llegan a coincidir debido a la variación de la longitud de la línea de contacto a lo largo del ciclo de engrane. El error de transmisión aumenta —puesto que con mayor rebaje las deformaciones de los dientes son mayores—, pero manteniendo la amplitud pico-pico en valores muy pequeños, similares a los de la Figura 4. La fracción de carga transmitida se reduce al principio y al final del engrane del diente, como muestra el diagrama inferior-derecho, y se mantiene en el 60% en la parte central, si bien dicha parte central se ensancha.

La Figura 7, finalmente, muestra el mismo caso de las Figuras 4 y 6, pero con profundidad de rebaje superior a la ajustada. El contacto comienza después del punto teórico, y se elimina el impacto de inicio de engrane; sin embargo se reduce el grado de recubrimiento, lo que no es, en general, deseable. Las líneas de contacto se acortan y sus límites superior e inferior quedan por debajo y por encima, respectivamente, de los correspondientes límites teóricos,  $\xi_{out}$  y  $\xi_{inn}$ , en todo el ciclo de engrane. El error de transmisión aumenta más aún, y también aumenta la amplitud pico-pico. La carga transmitida se reduce al principio y al final del engrane, y aumenta en la parte central, superando ligeramente el valor del 60% anterior.



**Figura 7.** Engranaje helicoidal con  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_\alpha$  y profundidad de rebaje superior a la ajustada: **sup.-izq.:** mapa de contacto; **sup.-dcha.:** rigidez del diente; **inf.-izq.:** error de transmisión; **inf.-dcha.:** reparto de carga.

## 8. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo aproximado, sencillo y eficiente, para la simulación de la rigidez de engrane, el error de transmisión y el reparto de carga, para engranajes helicoidales con modificación de perfil. Está basado en un modelo de rigidez para engranajes rectos, desarrollado con anterioridad, que se aplica a cada una de las secciones transversales del diente helicoidal. De este modo, se han obtenido expresiones analíticas, relativamente sencillas, para la longitud de contacto, la rigidez de la pareja de dientes, la rigidez de engrane, el error de transmisión y el reparto de carga, en cada punto del ciclo de engrane.

Se ha estudiado la influencia del grado de recubrimiento axial, que a medida que disminuye hace disminuir la rigidez de engrane, lo que se traduce en aumentos del pico del reparto de carga y del error de transmisión.

Se ha estudiado la influencia de la profundidad de rebaje en la longitud de la línea de contacto en cada punto del ciclo de engrane, así como en la rigidez de la pareja de dientes, el reparto de carga y el error de transmisión. Se ha encontrado que el rebaje disminuye la rigidez de engrane, y por tanto aumenta siempre el valor del error de transmisión. Sin embargo, la amplitud pico-pico del error de transmisión disminuye muy sensiblemente, incluso cuando la profundidad de rebaje no es la ajustada.

Finalmente, aunque la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto de la pareja de dientes no es uniforme, el reparto de carga entre dientes que proporciona el modelo permite determinar el punto más cargado (o sometido a mayor tensión) de la línea de contacto en cada posición de engrane, lo que permite obtener con facilidad las condiciones críticas de carga y las tensiones críticas correspondientes, necesarias para el cálculo resistente de los dientes.

## 9. Agradecimientos

Los autores agradecen a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación del proyecto de investigación PID2019-110996RB-I00 “Simulación y control del error de transmisión en engranajes cilíndricos”, así como a la ETS de Ingenieros Industriales de la UNED el soporte del proyecto 2022-ETSII-UNED-10.

## 10. Referencias

[1] S.L. Harris. “Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears”. *Proc. Institution of Mechanical Engineers* **172**, 1958.

[2] H.H. Lin, F.B. Oswald, D.P. Townsend. “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”. *Mechanism and Machine Theory* **29**, 1994.

[3] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero. “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”. *Mechanism and Machine Theory* **139**, 2019.

[4] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez. “Control del error de transmisión cuasi-estático mediante rebaje de punta en engranajes rectos de perfil de evolvente”. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **22**, 2018.

[5] M.S. Tavakoli, D.R. Houser. “Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears”. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design* **108**, 1986.

[6] Y.A. Tesfahunegn, F. Rosa, C. Gorla. “The effects of the shape of tooth profile modifications on the transmission error, bending and contact stress of spur gears”. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* **224**, 2010.

[7] J. Bruyere, X. Gu, P. Velex. “On the analytical definition of profile modifications minimizing transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears”. *Mechanism and Machine Theory* **92**, 2015.

[8] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez. “Modelo de reparto de carga y error de transmisión para engranajes helicoidales con rebaje de punta”. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **25**, 2021.

[9] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artés, J.A. Antona. “Load distribution model along the line of contact for involute external gears”. *Mechanism and Machine Theory* **45**, 2010.

[10] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero. “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”. *Meccanica* **48**, 2013.

[11] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero. “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”. *Mechanism and Machine Theory* **109**, 2017.