**Simplificación de modelos multicuerpo a través de la selección de parámetros**

**Jose Fuentes Larez1, Javier Ros Ganuza 2, Aitor Plaza Puértolas3, Xabier Iriarte Goñi 4**

1Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España. Email: josedavid.fuentes@unavarra.es

2 Institute of Smart Cities – ISC, Universidad Pública de Navarra, Pamplona España. Email: jros@unavarra.es

3Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España. Email: aitor.plaza@unavarra.es

4Institute of Smart Cities –ISC, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España. Email: xabier.iriarte@unavarra.es

**Resumen**

Los métodos de selección de modelos, son usados en diferentes contextos científicos para representar un conjunto de datos en términos de un número reducido de parámetros. Los modelos multicuerpo pueden ser considerados modelos paramétricos en términos de sus parámetros dinámicos y estos modelos son susceptibles de ser reducidos. Se espera que los modelos de parámetros reducidos tengan una complejidad computacional menor que el original preservando el nivel de precisión deseado. En este trabajo, se han usado varias simulaciones para definir el conjunto de datos representativos del sistema. A continuación, un conjunto de parámetros reducido es escogido. Para tal fin, diferentes heurísticas de selección de modelos, así como del error normalizado, son propuestas. Usando estas metodologías, un robot de 6 grados de libertad ha sido analizado. Se han obtenido importantes reducciones en el número de parámetros y en su coste computacional sin prácticamente comprometer la precisión del modelo.

**Palabras clave:** Sistemas Multicuerpo; Robótica; Selección de Parámetros; Estimación de Parámetros.

**Abstract**

Model selection methods are used in different scientific contexts to represent a data set in terms of a reduced number of parameters. Multibody models can be considered parametric models in terms of their dynamic parameters, such models can be reduced. These reduced parameter models are expected to have a lower computational complexity than the original and still preserve a desired level of accuracy. In this work, several model simulations are used to define the representative data set of the system. Then a reduced set of parameters is chosen. To this end, several model selection heuristics as well as normalized error heuristics are proposed in this work. Using this methodology, a 6 degree of freedom robot has been analyzed. Significant reductions in the number of parameters and in their computational cost have been obtained without much compromise in the model accuracy.

**Keywords:** Multibody Systems; Robotics; Parameter Selection; Parameter Estimation.

# Introducción

Este trabajo completa de alguna manera una investigación presentada anteriormente [1]. El requerimiento de simulaciones rápidas para acelerar el diseño o permitir aplicaciones en tiempo real ha sido una de las principales preocupaciones de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo (DSM) durante las últimas décadas. En el contexto de la dinámica del solido rígido, las formulaciones que resuelven las ecuaciones dinámicas exactas utilizando un número mínimo de operaciones como las formulaciones recursivas y juegan un papel predominante [2]. Los métodos simbólicos multicuerpo se basan frecuentemente en los métodos anteriores para obtener las funciones dinámicas requeridas, reduciendo aún más el número de operaciones debido a la explotación de las simetrías [3]. En este contexto hay que mencionar el desarrollo de parametrizaciones inerciales especiales como en [3] [4] y los parámetros inerciales base [5], utilizados para reducir aún más el número de operaciones.

Otros métodos reducen el número de operaciones a costa de la precisión. Eliminan o aproximan algunos términos de las funciones del modelo, o cambian su frecuencia de cálculo. En [6] se propone eliminar los términos relacionados con los términos de Coriolis y centrífugos y en [7] se actualizan diferentes términos del modelo dinámico utilizando diferentes frecuencias. Por otro lado, en [8] se propone utilizar una aproximación *spline* para determinar las coordenadas dependientes en términos de las coordenadas independientes para algunos subsistemas de bucle cerrado (suspensiones de automóviles).

Debido a la linealidad de las ecuaciones de movimiento con respecto a los parámetros de inercia [9] el problema típico de estimación de los parámetros de inercia [10] toma la forma de un problema de regresión lineal estándar,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

donde **φ** es el vector de parámetros inerciales, **χ** es el vector de fuerzas externas en diferentes puntos de medición y **W** es la matriz de observación que es función del estado en los diferentes puntos de medición. Las técnicas de selección de modelos lineales estándar pueden considerarse como métodos que "*encuentran el subconjunto de parámetros (****φ****) que mejor se ajusta a un vector de datos dado (****χ****) como una combinación lineal de algunos regresores (columnas de* ***W****)"*. Esta selección es una combinación de dos elementos: 1) un criterio de error para medir la precisión del ajuste [11], y 2) una heurística para seleccionar las combinaciones de parámetros más prometedoras [12] [13] [14]. Técnicas de validación que miden el criterio de error para el modelo seleccionado en un conjunto de datos de validación son utilizadas con frecuencia.

En este trabajo se propone utilizar técnicas de selección de modelos para obtener parámetros reducidos de modelos dinámicos de sistemas multicuerpo. El problema de regresión se alimenta con datos obtenidos de simulaciones basadas en el modelo exacto, y diferentes técnicas de selección de modelos para elegir el conjunto de parámetros más pequeño que se ajuste a estos datos para una determinada tolerancia de error, han sido analizadas.

Para ello, proponemos una medida de error normalizada no dimensional, para determinar el rendimiento de los modelos dinámicos. Las diferentes heurísticas: *QR, Backward Elimination, Forward Selección, Forward Selección iterativa, Norma L1 y LASSO* han sido propuestas para la selección de los conjuntos de parámetros candidatos. El rendimiento de los métodos propuestos se ha probado en un modelo de un robot de 6 grados de libertad. Además, se ha definido la optimización de trayectorias para definir los conjuntos de datos característicos suficientemente excitantes. Por otro lado, los errores del modelo, así como su número de operaciones algebraicas para evaluar las ecuaciones del movimiento para los parámetros seleccionados en base a las diferentes heurísticas propuestas han sido obtenidos. A partir de estos resultados se discute la relevancia de los métodos propuestos en la estimación de parámetros y la reducción de la complejidad computacional en el sistema dinámico.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presentan los métodos y algoritmos propuestos en este artículo. En la sección 3 los algoritmos introducidos en este artículo se aplican a un ejemplo particular. Una descripción detallada del sistema analizado y los resultados obtenidos se presentan en la sección 3.1. En la 4 se analizan los resultados obtenidos, poniendo en perspectiva la relevancia de los métodos propuestos. Por último, se proponen y discuten posibles mejoras.

# Método de reducción de parámetros

Usando un conjunto de coordenadas independientes **z** las ecuaciones de Lagrange de un sistema multicuerpo pueden establecerse como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

donde es el llamado modelo de dinámica inversa (IDM por sus siglas en inglés). El IDM permite obtener el vector de fuerzas generadas aplicadas externamente generalizadas dado el estado y el vector de parámetros dinámicos **φ** del sistema. En el contexto de la dinámica de sólido rígido, las implementaciones simbólicas de las formulaciones recursivas constituyen las técnicas de propósito general para el cálculo eficiente del IDM. El modelo de dinámica directa (DDM por sus siglas en inglés) suele obtenerse dividiendo como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

donde representa la denominada matriz de masa y las fuerzas de Coriolis, centrífugas y constitutivas generalizadas.

Las ideas presentadas en este trabajo se explican más convenientemente indicando explícitamente la linealidad de con respecto a los parámetros dinámicos [15] ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

Esta es una forma estándar del IDM utilizada en la literatura de estimación de parámetros dinámicos, donde es la matriz de observación de una sola muestra. El objetivo de la simplificación del modelo mediante la reducción de parámetros puede definirse en este contexto como la eliminación de algunos parámetros de , y las correspondientes columnas de **,** de modo que el vector puede aproximarse como una combinación lineal de un subconjunto de sus columnas como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

donde es el conjunto reducido de parámetros y la matriz reducida de observación de una sola muestra. Para la implementación del IDM es preferible eliminar los parámetros directamente de las expresiones simbólicas calculadas recursivamente para . Es decir, aproximándola como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

lo que significa que tiene los términos de la expresión simbólica en función de los parámetros no eliminados del cálculo. Obsérvese que el modelo reducido en su forma lineal explícita, , es computacionalmente menos eficiente.

## Reducción de los Parámetros Base

En el contexto de la identificación de los parámetros dinámicos de los sistemas robóticos, el modelo se suele parametrizar en términos de un conjunto independiente más pequeño de parámetros dinámicos.

Una de estas parametrizaciones se conoce como *conjunto de parámetros base* [16] o conjunto de parámetros mínimos. Esta parametrización, que conduce a un modelo exacto, puede considerarse una técnica de reducción de modelos.

El problema de estimación de los parámetros se establece forzando la satisfacción de las ecuaciones dinámicas mostradas en ecuación (5) para un conjunto de observaciones,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

donde es la llamada matriz de observación para el conjunto de datos .

En general, por muy “excitado” que sea el conjunto de estimaciones, es de rango deficiente, lo que significa que existen dependencias lineales entre sus columnas y que, por tanto, el conjunto de parámetros no son independientes. se puede reordenar como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

donde es un conjunto elegido[[1]](#footnote-1) de columnas “independientes” (o reducidas) y es el resto de las columnas “dependientes'” (o excluidas). Los parámetros se pueden reordenar en consecuencia como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

donde es el conjunto de parámetros "independientes" (o reducidos) asociados a las columnas de y son el conjunto de parámetros parámetros "dependientes" (o excluidos) asociados a . Las columnas de pueden expresarse como combinaciones lineales de las columnas de como:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | (11) |  |

En esta expresión, las columnas de la matriz contienen los coeficientes de dichas combinaciones lineales. La ecuación. (8) puede reescribirse como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

Lo que lleva al problema de identificación *de parámetros base:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13) |

Donde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14) |

es el llamado conjunto de parámetros base o conjunto mínimo de parámetros. En este contexto, el número de parámetros en es . Nótese que esta parametrización depende de los parámetros independientes, , elegidos. Además, para conjuntos de datos suficientemente excitantes (es decir, si maximiza y está bien condicionado) y se vuelven independientes de . En particular, pasa a depender sólo de los parámetros geométricos del sistema.

En consecuencia,se puede dividir como y el modelo dinámico puede ser expresado en términos de los parámetros base :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (15) |

Esta ecuación puede considerarse como un modelo con parámetros reducidos que reproduce exactamente el original. En [5] se ha aplicado esta parametrización reducida al IDM de algunos manipuladores en serie para reducir su número de operaciones sin comprometer su precisión.

## Reducción de los parámetros del modelo

Los resultados sobre la estimación de los parámetros de los sistemas multicuerpo muestran que, con frecuencia, no todos los parámetros bases o mínimos pueden estimarse con una precisión "suficiente". Esto puede estar relacionado con el hecho de que, para un conjunto de datos de estimación dado, , las columnas de pueden expresarse con una precisión "suficiente" como combinaciones lineales de un subconjunto de de columnas independientes de . Se puede decir que el conjunto de datos característicos no excita suficientemente alguna dinámica del sistema.

Sean los parámetros asociados al subconjunto de columnas independientes elegido . El modelo reducido asociado se denominará modelo de parámetros reducidos, o .

Sea el conjunto de columnas eliminadas y sus parámetros asociados. Procediendo como en el apartado anterior, las columnas de y el conjunto de parámetros se pueden reordenar como y **.** puede ser aproximado por su proyección en el espacio de columnas de como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (16) |

donde representa la pseudoinversa de la matriz , y:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (17) |

Basado en las dos ecuaciones anteriores, puede ser aproximado como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (18) |

lo que conduce al problema de estimación aproximado:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (19) |

Las relaciones anteriores muestran que la solución de mínimos cuadrados para este problema de estimación es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (20) |

donde puede obtenerse utilizando la ecuación. (17).

La ecuación.(20) puede verse como una generalización del concepto *parámetro base* cuando el número de parámetros utilizados es menor que el rango de*,* ). Es decir, una generalización del concepto de parámetros base al contexto de los modelos reducidos de parámetros aproximados. Utilizamos el término “conjunto de parámetros base aproximados” o “conjunto de parámetros mínimos aproximados”, para distinguirlo de la parametrización base exacta descrita en la sección anterior. La ecuación. (20) puede utilizarse para calcular los valores de los parámetros a partir de los valores originales del modelo . Además, esta ecuación proporciona información sobre la influencia de los diferentes parámetros en la dinámica. Nótese que esta información no está contenida en los valores numéricos de **.**

El problema de selección de modelos con parámetros reducidos puede formularse como:

*“Para un modelo dinámico dado, con un conjunto de parámetros conocidos, se busca determinar el mínimo conjunto de parámetros del modelo que logre aproximar los datos del modelo, con una deseada precisión”.*

Esto lleva a la cuestión de definir: 1) el conjunto de datos de estimación característicos y 2) la medida de error.

1. La estimación característica de un conjunto de datos es dependiente de cada aplicación, y debería caracterizar el rango dinámico del sistema entero en la aplicación considerada. Este ajuste, puede ser obtenido mediante los datos de muestra del modelo entero.

Por ejemplo, en el caso de sistemas multicuerpos enteramente actuados, las trayectorias son parametrizadas para un conjunto de coordenadas independientes y un criterio de optimización es usado para determinar los valores de los parámetros. Una comparación de algunos de los criterios clásicos para la optimización de trayectorias puede ser encontrada en [17]. La parametrización de trayectorias basadas en series armónicas [18] [19] [20] y en polinómicas [21] [22] han sido propuestas en la literatura. Para sistemas sub-actuados, las simulaciones dinámicas tienen que ser ejecutadas para un conjunto de simulaciones representativas de trabajo. La validación del conjunto de datos puede ser obtenida usando el mismo procedimiento.

1. Para un conjunto dado de parámetros reducidos del modelo, el siguiente criterio de error o medida del error de predicción, para la identificación de parámetros dinámicos es propuesto:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (21) |

En esta expresión representa la matriz de observación del modelo de parámetros reducidos determinado usando el conjunto de datos. Los parámetros son los valores numéricos para los parámetros base generalizados, definidos en la ecuación (13) para los parámetros del modelo usando los datos. La matriz de ponderación es definida como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22) |

Donde representa la norma del vector de valores característicos para los elementos del vector . En general, los valores característicos basados en la estimación de datos pueden ser usados, sin embargo, estos pueden ser establecidos por otras medias. Es importante notar que para la función , el argumento se refiere al conjunto de parámetros reducidos y no a sus valores numéricos. Obviamente, la computación de esta función requiere la determinación de los valores numéricos de . Los índices para caracterizar la relevancia de la contribución de las diferentes fuerzas dinámicas (Coriolis, centrípetas, etc.) para la IDM han sido propuestos por [23] pero estos no se ajustan al problema de reducción de parámetros en el cual este trabajo se enfoca. El criterio de error para el DDM puede ser equivalentemente expresado como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23) |

donde col (*S*) ordena los elementos de *S* en una columna. , y**.** Son las aceleraciones para el i-esimo dato predicho por el modelo entero y el modelo reducido respectivamente.

En la ecuación. (21) y ecuación. (23), la norma propuesta puede definirse de diferentes maneras. Las normas más interesantes en este contexto son probablemente la norma euclidiana (la elegida en los ejemplos de este trabajo), la norma l2 y la norma infinita.

En este trabajo se utiliza esta medida de error, , como criterio de idoneidad para la elección de los modelos con parámetros reducidos y para su validación utilizaremos . Por ejemplo, si el número de parámetros, , del modelo deseado es fijo, el mejor modelo se puede determinar cómo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24) |

Donde es la cardinalidad del conjunto de parámetros . Como antes, es necesario notar que el argumento se refiere al conjunto de parámetros elegidos y no a los de sus valores numéricos. Para un deseado nivel de error,, el modelo reducido es considerado aceptable si la validación y la estimación de los datos dan un nivel similar de error .

El problema con este enfoque es el número de posibles conjuntos de parámetros a ser probados para encontrar el mejor modelo de parámetros reducido con es alta.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (25) |

Si todos los conjuntos de parámetros con un número arbitrario de parámetros son probados, una mayor cantidad de números de candidatos es obtenida . En general, esto excluye al enfoque de ensayo y error para el problema de reducción de parámetros. Por lo tanto, algoritmos que tengan un compromiso entre el costo computacional de búsqueda y la calidad del modelo reducido son requeridos. A tal fin, se proponen distintas heurísticas de selección de modelos: *QR en la* sección 2.3*,* *Backward Elimination* en lasección 2.4*, Forward Selección* en la sección 2.5*, Forward Selección iterativa* en la sección 2.6*, Norma L1* en lasección 2.7 *y LASSO* en lasección 2.8*.*

## Heurística basada en la descomposición QR

Una descomposición QR con pivoteo de columnas de la matriz de observación tiene la siguiente forma:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (26) |

donde **W E** es una permutación de columnas de , **Q** es una matriz ortonormal y **R** es una matriz triangular superior con elementos diagonales de magnitud decreciente.

Sea ). **W E** se divide como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (27) |

donde contiene las primeras r columnas de **W E**, y es una r × r matriz. El modelo reducido está definido por el conjunto de parámetros asociado a las columnas de . De la ecuación anterior se deduce que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (28) |

Sobre la base de la ecuación (14) la matriz puede aproximarse como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (29) |

Donde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (30) |

La ecuación (29) es una muy buena aproximación de para un conjunto de parámetros de r elementos. Nótese que es elegido por el algoritmo QR para tener los elementos diagonales más pequeños y por lo tanto, el error en la aproximación de , sea lo más pequeño posible. Las ideas presentadas aquí están en parte inspiradas en el algoritmo de determinación de parámetros base basado en la descomposición QR descrito en [16], aunque las ideas allí presentadas se centran en el caso ). Un algoritmo de selección de subconjuntos con cierto parecido al que aquí se presenta, denominado de “*Orthogonal Least Squares*”, se describe en [13].

El número de parámetros conservados, , puede reducirse hasta que el error de predicción normalizado sea mayor que la tolerancia elegida .

Una posible crítica a este algoritmo es que la ordenación obtenida de los parámetros sólo depende de , pero no de . Este problema se puede evitar por la vía de la **Normalización:** La matriz , se normaliza multiplicando cada columna por el elemento correspondiente del vector **.**

## Backward Elimination (BE)

El algoritmo de *Backward Elimination* es un algoritmo iterativo. El algoritmo comienza utilizando el conjunto completo de parámetros para el modelo actual, . En cada iteración, el parámetro con la contribución menos significativa al error normalizado,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (31) |

se elimina del conjunto de parámetros del modelo actual,, hasta que el criterio de error normalizado sea mayor que la tolerancia elegida, . Esto se muestra en pseudocódigo en Algoritmo 1 utilizando un estilo algorítmico más formal.

Texto, Carta

Descripción generada automáticamente

Básicamente los parámetros que tienen una menor contribución al error del modelo se eliminan uno a uno. El algoritmo sería óptimo si las contribuciones al error de los diferentes parámetros , fueran independientes. El problema es que estas contribuciones no son en general independientes, por lo que eliminar un parámetro determinado tiene un efecto sobre el peso que tienen los demás parámetros en el modelo reducido resultante. Por lo tanto, es probable que el algoritmo funcione bien pero no de forma óptima.

Una característica importante de este algoritmo es que, además de , el vector tiene un efecto en el orden en que se eliminan los parámetros. Esta información no es considerada por la heurística QR introducida anteriormente, por lo que esto puede ser una ventaja.

## ForwardSelection (FS)

El algoritmo de *Forward Selección* es, de alguna manera, el inverso del anterior. Comienza con un conjunto de parámetros vacío para el modelo actual reducido, . En cada iteración, el parámetro con la contribución más significativa al error normalizado,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (32) |

se añade al conjunto de parámetros del modelo actual,

, hasta que se cumpla el objetivo de tolerancia requerido, . Esto se muestra en pseudocódigo en Algoritmo 2.

Texto, Carta

Descripción generada automáticamente

En esencia, los parámetros que tienen una mayor contribución al error del modelo se introducen uno a uno. Como antes, el algoritmo sería óptimo si las contribuciones al error de los distintos parámetros, , fueran independientes. Más adelante, se verá que FS funciona ligeramente mejor que la heurística BE: Al principio de la BE el modelo puede expresarse exactamente en términos del conjunto de base. Como este conjunto no es único, hay varias eliminaciones posibles de parámetros que no tienen ningún efecto en el error. Por lo tanto, no hay ningún criterio para diferenciar entre las posibles eliminaciones de parámetros, aun así, la elección tiene un efecto sobre el rendimiento del modelo reducido resultante. El algoritmo FS nunca tiene que enfrentarse a una indeterminación de este tipo, ya que los parámetros que no contribuyen nunca se añaden.

## Forward Selection Iterativo (FSI)

Los algoritmos presentados en las dos secciones anteriores, las secciones 2.4 y 2.5, son análogos a los algoritmos de *Forward Selection* y *Backward Elimination* que suelen encontrarse en el contexto de la selección de modelos [12] [13]. La bibliografía sugiere la posibilidad de utilizar iteraciones de paso más complejas en la heurística [13]. Normalmente, se añaden una o más iteraciones de búsqueda sobre la inicial.

Por ejemplo (adaptado de [12]), un posible algoritmo de *Forward Selection* con una iteración de búsqueda adicional siendo el conjunto de parámetros al comienzo de una iteración dada, y sea el parámetro añadido a este conjunto en la iteración anterior. El algoritmo comienza con un conjunto de parámetros vacío para el modelo actual, , y una variable vacía como la añadida en la iteración anterior, . En cada iteración de *Forward Selection*, como antes, el parámetro con la contribución más significativa al error normalizado, usando ecuación (32) se añade al modelo actual,. A continuación, el parámetro añadido en la iteración anterior, , se elimina, . Posteriormente, el parámetro que tenga la mayor contribución al error normalizado se busca de nuevo, y se añade al conjunto, , hasta que la tolerancia de error se cumpla, . Esto se muestra de manera más formal en el pseudocódigo del Algoritmo 3.

Texto, Carta

Descripción generada automáticamente

## Norma L1

El problema puede plantearse como: Resolver utilizando el menor número posible de componentes de . Para ello se utiliza el siguiente problema de minimización restringido por la norma L1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | arg | (33) |

Donde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (34) |

es la norma L1 de . La idea clave a entender es que esta minimización restringida por la norma L1 favorece que el mayor número posible de componentes de la solución tengan valores muy pequeños. Por tanto, podemos obtener un conjunto de parámetros reducidos, , sacando de los parámetros con el valor más pequeño.

El real se puede obtener utilizando ecuación. (20). Para resolver este problema utilizamos el algoritmo "*Min-L1 with equality constraints*" del paquete ℓ1-MAGIC [24], que se basa en el método del punto interior para la optimización convexa.

**Normalización:** En este caso la matriz se normaliza dividiendo cada columna de la matriz por su norma L2.

## LASSO

El operador LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) es un método de análisis de regresión que realiza una selección y regularización de variables [25]. Los parámetros de regresión se obtienen usando:

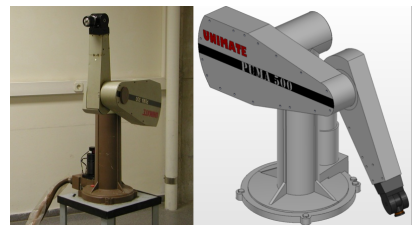
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | arg | (35) |

donde λ es un parámetro de regularización no negativo. Como λ multiplica la norma L1 de , el número de componentes de cercanos a cero aumenta con λ. Al igual que con el algoritmo de la norma L1, para cada λ el conjunto reducido de parámetros, se obtiene sacando de los parámetros de menor valor. El valor real de puede obtenerse mediante ecuación.(20)

**Normalización**: La matriz se normaliza como en el método L1.

# Resultados y discusión

El manipulador en serie PUMA560 de seis grados de libertad, mostrado en la **Figura 1**, es el ejemplo de sistema multicuerpo de alta movilidad (EAM) seleccionado. Los parámetros cinemáticos y las coordenadas y el conjunto de parámetros de inercia utilizados para definir el modelo se han tomado de la referencia [27].



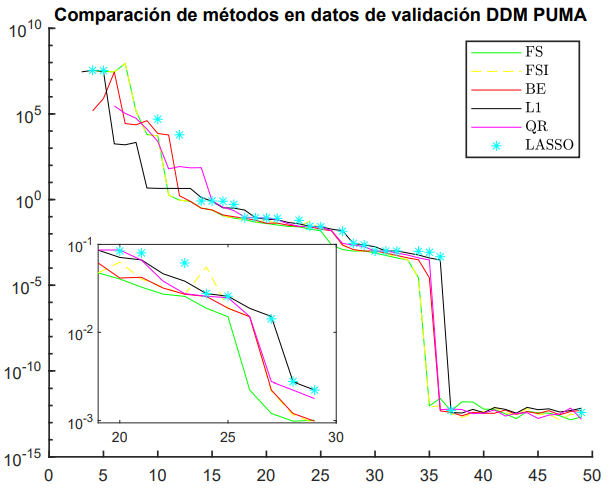
**Figura 1.** Ejemplo de alta movilidad: izquierda) Sistema real, derecha) modelo CAD.

Para obtener las ecuaciones dinámicas se ha utilizado *el Principio de las Potencias Virtuales*. Se ha utilizado la biblioteca simbólica de [28] para obtener el IDM, . Esta librería minimiza fuertemente el número de operaciones algebraicas utilizando algoritmos compatibles con formulaciones recursivas , teniendo un rendimiento a la altura de las formulaciones más innovadoras. De esta manera, las simplificaciones reportadas se hacen sobre modelos ya cuasi-óptimos. Esto garantiza un reporte justo de la complejidad computacional de los modelos reducidos, que se da en términos del número de operaciones.

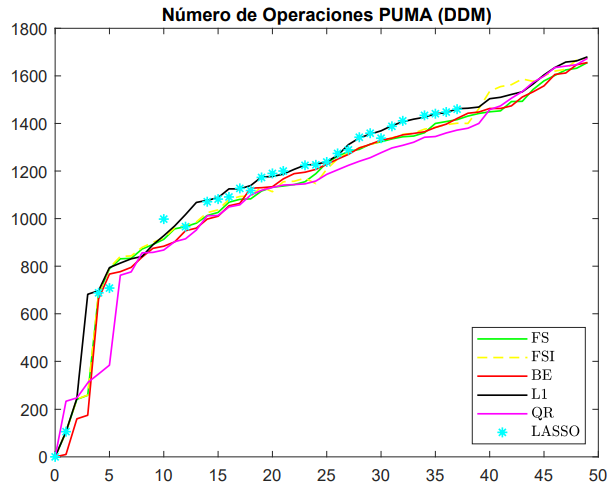
**Trayectorias de estimación**. El número de condición de la matriz de observación [[2]](#footnote-2) se ha utilizado como función objetivo para la optimización de la trayectoria. Las coordenadas independientes del robot, *z1, ..., z6*, se han parametrizado utilizando una serie de Fourier finita como se propone en [19]. Un número de 100 puntos de datos de muestreo que expanden uniformemente un período completo se extraen de cada trayectoria optimizada. Los datos de muestreo procedentes de 10 trayectorias optimizadas diferentes se utilizan para la estimación. Los ángulos de rotación y los rangos de velocidad angular de los actuadores se han limitado mediante restricciones de desigualdad lineal.

## Rendimiento del modelo con parámetros reducidos.

Para este ejemplo, el rendimiento de los algoritmos propuestos se ilustra en las **Figura 2** y **Figura 3**.



**Figura 2.** EAM: , frente a para las heurísticas FS, FSI, BE, L1, QR y LASSO



**Figura 3.** EAM: , frente a para las heurísticas FS, FSI, BE, L1, QR y LASSO

La **Figura 2** muestra que con FS y FSI heurísticos, se pueden obtener errores de aproximadamente ≈ 10-2 pueden obtenerse con tan solo = 26 (de 49). En general, FS y FSI obtienen mejores resultados, aunque QR, L1 y LASSO no se pueden descartar, ya que pueden ser ventajosas para un número específico de parámetros. FS y FSI tienen siempre un mejor rendimiento que BE, relacionado con el hecho de que el conjunto de parámetros no es independiente, y por tanto la heurística BE puede ser descartada.

Uno de los hallazgos de este trabajo es el requisito de normalizaciones específicas de normalizaciones de columna en para que L1, LASSO y QR para que funcionen como se muestra. Sin estas normalizaciones, estos métodos funcionan muy mal. Una de las ventajas de FS y FSI es que no requieren dicha normalización de columnas.

El número de operaciones para resolver las ecuaciones del movimiento, , en función del número de parámetros para las heurísticas de mejor rendimiento se muestran en la **Figura 3**. Obsérvese que los criterios utilizados para la selección del modelo no incluyen la minimización del número de operaciones de los modelos reducidos. La característica más llamativa es un decaimiento que muestra un perfil casi lineal escalonado que es parece independiente de la heurística utilizada. La heurística QR parece, en este caso, producir un menor número de operaciones.

# Conclusiones

En este trabajo, inspirado en la literatura de selección de modelos, se han propuesto metodologías de reducción de parámetros y se has probado en el contexto de los modelos DSM. Estos métodos requieren: a) una heurística de selección adecuada, b) un conjunto de datos característicos representativos de la dinámica del sistema y c) una medida del rendimiento para los modelos reducidos por parámetros.

Seis heurísticas de selección de modelos diferentes se han propuesto y probado en un sistema multicuerpo de 6 grados de libertad. Se ha definido un error normalizado para la dinámica inversa y se ha utilizado como medida de rendimiento en estos ejemplos.

Los resultados muestran que, sobre la base de las heurísticas FS y FSI, se consigue una reducción importante de parámetros requeridos: el modelo de dinámica inversa para un error normalizado de ≈ 1% se ha obtenido que sólo se necesitan 19 parámetros de 49.

Para estos modelos reducidos en parámetros, el ahorro de complejidad computacional para los modelos de dinámica inversa es aproximadamente de un 36%.

Como conclusión aparte, se ha demostrado que es posible obtener expresiones analíticas que determinen el valor del conjunto reducido de parámetros estimados en términos de los valores de parámetros del modelo original. Estas expresiones analíticas pueden considerarse una generalización del concepto de parámetro base en el caso de los modelos reducidos de parámetros aproximados.

# Referencias

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | X. R. J. M. V. a. P. A. Iriarte, «“Multibody model reduction by parameter elimination",» de *n Multibody Dynamics 2015, ECCOMAS Thematic Conference*, Barcelona,, 2015. |
| [2] | R. Featherstone, Rigid Body Dynamics Algorithms, Springer, 2008. |
| [3] | J. a. F. P. Samin, Symbolic Modeling of Multibody Systems, Springer Netherlands, 2003. |
| [4] | J. Wittenburg, Dynamics of Multibody Systems, 2008. |
| [5] | W. a. K. J. Khalil, «Minimum operations and minimum parameters of the dynamic models,» *Journal of Robotics and Automation,* vol. 6, nº RA-3, p. 517–526, 1987. |
| [6] | V. a. V. M. Cvetkovic, «Computer-Oriented Algorithm for Modeling Active Spatial Mechanisms for Robotics Applications,» *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* vol. 12, nº 6, pp. 838-847, 1982. |
| [7] | N. a. V. M. Djurovíc, «Approximate Dynamic Models of Manipulation Robots,» *Robotica,* vol. 9, pp. 341-347, 1991. |
| [8] | S.-S. Kim y J. Wanhee, «Subsystem synthesis method with approximate function approach for a real-time multibody vehicle model,» *Multibody System Dynamics,* vol. 17, nº 2, pp. 141-156, 2007. |
| [9] | P. a. K. T. Khosla, «Parameter identification of robot dynamics,» *Proceedings of 24th Conference on Decision and Control,* pp. 1754--1760, 1985. |
| [10] | M. Gautier y W. Khalil, «A direct determination of minimum inertial parameters of robots,» *Proceedings. 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation,* vol. 3, pp. 1682-1687, 1988. |
| [11] | T. Söderstrom, «Model validation and model structure determination,» *Circuits systems signal processing,* vol. 21, nº 1, pp. 83-90, 2002. |
| [12] | A. J. Miller, Subset selection in regression, Chapman and Hall, 1990. |
| [13] | O. Nelles, Nonlinear system identification, from classical approaches to neural networks and fuzzy models, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. |
| [14] | G. M. Furnival y R. W. Wilson, «Regressions by Leaps and Bounds,» *Technometrics,* vol. 16, nº 4, pp. 499-511, 1974. |
| [15] | C. G. A. a. C. H. A. a. J. M. Hollerbach, «Estimation of Inertial Parameters of Manipulator Loads and Links,» *The International Journal of Robotics Research,* vol. 5, nº 3, pp. 101-119, 1986. |
| [16] | M. Gautier, «Numerical calculation of the base inertial parameters of robots,» de *ICRA*, IEEE, 1990, pp. 1020-1025. |
| [17] | Y. Sun y J. M. Hollerbach, «Observability index selection for robot calibration,» *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation,* pp. 831-836, 2008. |
| [18] | G. Calafiore y M. Indri, «Experiment design for robot dynamic calibration,» de *Robotics and Automation. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, 1998, pp. 3303-3309. |
| [19] | J. Swevers, C. Ganseman, J. De Schutter y H. Van Brussel, «Experimental robot identification using optimised periodic trajectories,» *MSSP,* vol. 9, pp. 165-184, 1996. |
| [20] | K. Park, «Fourier-based optimal excitation trajectories for the dynamic identification of robots,» *Robotica,* vol. 24, pp. 625-633, 2006. |
| [21] | B. Armstrong, «On finding exciting trajectories for identification experiments involving systems with nonlinear dynamics,» *IJRR,* vol. 8, nº 6, pp. 28-48, 1989. |
| [22] | M. Gautier y Khalil, «Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots,» de *1991 Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991, pp. 494-499. |
| [23] | G. J. Wiens, S. A. Shamblin y Y. H. Oh, «Characterization of PKM dynamics in terms of system identification,» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics,* vol. 216, nº 1, pp. 59-72, 2002. |
| [24] | E. Candès y J. Romberg, «L1-magic :Recovery of Sparse Signals via Convex Programming,» *Caltech,* 2005. |
| [25] | R. Tibshirani, «Regression Shrinkage and Selection via the lasso,» *Journal of the Royal Statistical Society,* nº 1, pp. 267-288, 1996. |
| [26] | J. a. I. X. a. M. V. Ros, «3D Inertia Transfer Concept and Symbolic Determination of the Base Inertial Parameters,» *MMT,* vol. 49, pp. 284-297, 2012. |
| [27] | F. Benimeli, V. Mata y F. Valero, «A comparison between direct and indirect dynamic parameter identification methods in industrial robots,» *Robotica,* vol. 24, pp. 579-590, 2006. |
| [28] | J. Ros, L. Arrondo, J. Gil y X. Iriarte, «Lib3D\_MEC-GiNaC, a library for symbolic multibody dynamics,» de *Multibody Dynamics 2007, ECCOMAS Thematic Conference*, 2007. |
| [29] | C. Beltrán, «Estimates on the condition number of random rank-deficient matrices,» *IMA Journal of Numerical Analysis,* vol. 31, nº 1, pp. 25-39, 2011. |

1. Existen diversas posibles selecciones para este conjunto de columnas [↑](#footnote-ref-1)
2. definido como donde , son los valores singulares de **W** [29] [↑](#footnote-ref-2)