

Análisis Comparativo de Diferentes Modelos de Propagación de Grietas por Fatiga Utilizando el Método Dual de Elementos de Contorno

Jairo A Mantilla¹, Manuel Martínez², Diego F Villegas³,

¹Grupo de investigación en energía y medio ambiente, Escuela de ingeniería mecánica, Universidad industrial de Santander, Colombia. Email: jairo2218051@correo.uis.edu.co

²Grupo de investigación en energía y medio ambiente, Escuela de ingeniería mecánica, Universidad industrial de Santander, Colombia. Email: mjmartin@uis.edu.co

³Grupo de investigación en energía y medio ambiente, Escuela de ingeniería mecánica, Universidad industrial de Santander, Colombia. Email: dfvilleg@uis.edu.co

Resumen

Para el análisis del cuerpo agrietado se utiliza el método dual de elementos de contorno (DBEM), mediante el cual se calculan los factores de intensidad de esfuerzo (SIF), la razón de crecimiento y el número de ciclos transcurridos en cada incremento simulado de la propagación. Se estudiaron tres modelos específicos bajo cargas de fatiga de amplitud constante: el modelo de Paris, el modelo de Klesnil-Lucas y el modelo de Forman. Los resultados obtenidos se validan con literatura experimental y con el método de elementos finitos, en donde se evidencia que cada uno de los modelos analizados representa de manera satisfactoria una zona específica de la gráfica de crecimiento de grieta. El modelo de Klesnil-Lucas[1] representa la zona cercana al umbral de fractura; el modelo de Paris[2] se acomoda a la zona lineal o de crecimiento controlado de la grieta; mientras que el modelo de Forman[3] reproduce la zona de fractura descontrolada o zona final, esto es, cuando el factor de intensidad de esfuerzos se acerca a la tenacidad a la fractura del material. Finalmente se presenta una discusión sobre la aplicabilidad de cada modelo, el carácter conservativo de cada uno y se da una recomendación a utilizar el modelo de Klesnil-Lukas para simular el crecimiento completo de la grieta.

Palabras clave: Mecánica de fractura, Factor de intensidad de esfuerzos, Método de elementos de contorno, Crecimiento de grieta.

Abstract

For the analysis of the cracked body, the dual boundary element method (DBEM) is used, through which the stress intensity factors (SIF) are calculated to at last compute the crack growth rates, and the number of cycles elapsed in each simulated increment of the propagation. Three specific models were studied under constant amplitude fatigue loads: the Paris model, the Klesnil-Lucas model, and the Forman model. The results obtained are validated with experimental literature and with the finite element method, where it is evident that each of the analyzed models represents a specific part of the crack growth graph. The Klesnil-Lucas model represents the zone close to the fracture threshold; the Paris model fits to the linear or controlled zone of the crack; while the Forman model reproduces the uncontrolled fracture zone or final zone, i.e., when the stress intensity factor approaches the typical fracture toughness of the material. Finally, a discussion is presented on the applicability of each model, the conservative character of each one and a recommendation is given to use the Klesnil-Lukas model to simulate the complete growth of the crack.

Keywords: Fracture mechanics, Stress intensity factor, Boundary elements method, Fatigue crack growth.

1. Introducción

El diseño tradicional de componentes mecánicos tiene en cuenta tres factores principales: La carga aplicada, la geometría del elemento y su resistencia mecánica. El uso de factores de seguridad elevados en este tipo de diseño se atribuye al modelo de cálculo utilizado, la certeza en su vida útil y los ensayos experimentales necesarios. En aplicaciones de altas prestaciones como

equipo médico y la industria aeronáutica, se requiere de un esquema de diseño que adjudique una mayor confiabilidad. La mecánica de fractura surge como una disciplina de la ingeniería que estudia la resistencia de un componente agregando al análisis una nueva variable, esta es, la presencia de una grieta o defecto en el elemento. Con base en estos lineamientos se realiza un diseño de mayor confiabilidad que facilita la toma de decisiones preventivas.

El análisis de un componente agrietado solo se puede llevar a cabo de manera analítica para geometrías básicas con algunas simplificaciones. En un escenario real, resulta inapropiado el montaje experimental debido a los costos que involucra, por lo que un análisis computacional mediante métodos numéricos se constituye como una alternativa capaz de dar solución a un problema general con geometría definida y condiciones mixtas de frontera. Hay dos métodos numéricos ampliamente utilizados en esta disciplina: el método de elementos finitos (FEM) y el método de elementos de contorno (BEM). Aun cuando estos dos métodos brindan soluciones numéricamente precisas, es el BEM quien muestra algunas ventajas para este tipo de problemas[4], ya que discretiza únicamente la frontera del cuerpo y no la totalidad del dominio (Figura 1), lo que facilita el mallado del modelo, plantea un sistema de ecuaciones de orden menor y, por consiguiente, se disminuye el tiempo de cómputo.

Cuando se simula el fenómeno de propagación de grieta por fatiga se necesita de un modelo matemático para predecir el comportamiento del material según su gráfica de crecimiento de grieta, que relaciona la razón de crecimiento (da/dN) con la variación del factor de intensidad de esfuerzos aplicado (ΔK), obtenida de manera experimental. Múltiples modelos han sido propuestos en la literatura[5], sin embargo, no es claro la conveniencia en utilizar cada uno de estos, razón por la cual, se desarrolla un análisis comparativo de tres modelos de crecimiento de grieta bajo cargas de fatiga de amplitud constante: El modelo de Paris-Erdogan, Klesnil-Lucas y el modelo de Forman.

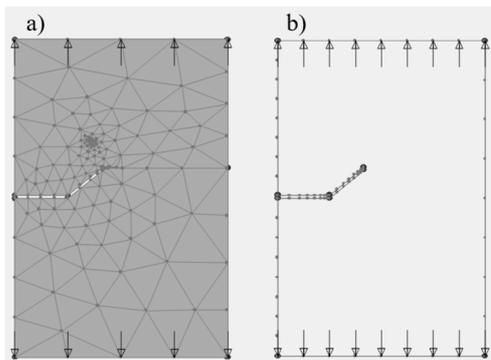


Figura 1. Discretización de un cuerpo agrietado. a) Método de elementos finitos, b) Método de elementos de contorno. Fuente: Elaboración propia.

En este trabajo se aplica el método dual de elementos de contorno (DBEM) con la integral J en varios problemas que simulan cuerpos agrietados bajo un estado plano (de esfuerzo o deformación), sujetos principalmente al modo de fractura I para grietas libres de tracción. El análisis propuesto contrasta los resultados de las razones de crecimiento y número de ciclos para cada uno de los modelos de propagación con datos experimentales de las tres regiones de crecimiento, también se comparan los resultados

obtenidos por medio del método dual de elementos de contorno con otras simulaciones que, en su mayoría, utilizan el método de elementos finitos, para validar el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo, la trayectoria de propagación y la implementación de los modelos.

2. Metodología

El método de análisis bidimensional de crecimiento de grieta por fatiga en materiales homogéneos e isotrópicos incluye en primer lugar, la estrategia general de simulación, para seguidamente abarcar los fundamentos específicos de cada operación que se ejecuta durante la simulación.

2.1. Estrategia general de simulación

En las simulaciones realizadas se sigue fielmente el proceso mostrado en la Figura 2a. Con las condiciones iniciales conocidas, se utiliza el DBEM con la integral J para dar solución al problema mixto de frontera y obtener como resultado principal los factores de intensidad de esfuerzo. Posteriormente se ejecuta un ciclo para cada uno de los incrementos simulados. Se utiliza el criterio de máximo esfuerzo tangencial para conocer la dirección de crecimiento de grieta (θ_t) y de esta manera se modifica la malla funcional tal como se muestra en la Figura 2b. El DBEM es empleado nuevamente con el objetivo de conocer todos los parámetros de esfuerzo, deformación, desplazamientos y SIF, tanto al inicio como al final de cada incremento. Para finalizar el ciclo de cálculo, se usa uno de los modelos de crecimiento para integrar el número de ciclos transcurridos y ubicar un punto en la gráfica de crecimiento de grieta.

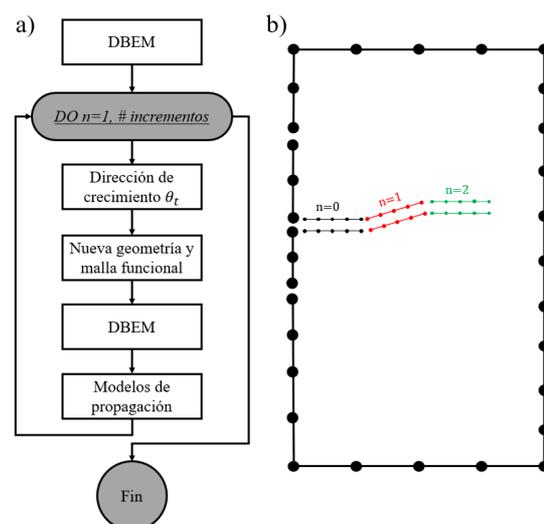


Figura 2. Metodología general para la simulación de crecimiento de grieta. a) Diagrama general de proceso, b) Ejemplo de discretización que muestra el cambio en la malla funcional para los dos primeros incrementos simulados. Fuente: elaboración propia.

2.2. Método dual de elementos de contorno.

En la tabla 1 se comparan algunas características entre el DBEM y el método de elementos finitos (FEM) que soportan el uso del DBEM en el presente trabajo. No obstante, la principal característica que hace indicado al método de elementos de contorno en el análisis de cuerpos agrietados y crecimiento de grieta es la discretización del modelo (Figura 1). Para un crecimiento computacional de la grieta, solo es necesario agregar nuevos elementos en la dirección de propagación, mientras que, con el método de elementos finitos, es necesario remallar la totalidad del dominio o por lo menos gran parte de este. Así, se facilitan los algoritmos de mallado en el pre-proceso y se disminuye el tiempo de cómputo, ya que, al no modificar la topología general de la malla, solo se deben agregar nuevas filas y columnas al sistema de ecuaciones del incremento anterior.

Tabla 1. Comparativa en el modelado del DBEM vs FEM.

Característica	DBEM	FEM
Discretización	Contorno (Γ)	Dominio (Ω)
Tiempo computo	Menor	Mayor
Dimensionalidad	Un grado menor al problema	Mismo grado del problema
Solución y Resultados	Cálculo del contorno, postproceso para puntos internos	Cálculo en todos los nodos de la malla funcional

Fuente: Elaboración propia.

La formulación de las ecuaciones integrales de contorno para elasticidad en dos dimensiones (2D) en materiales isotrópicos homogéneos con comportamiento lineal parte de la identidad de Somigliana[6]. Esta expresión (1) permite calcular los esfuerzos y desplazamientos en un punto interno $x' \in \Omega$, integrando las tracciones y desplazamientos en cada nodo del contorno $x \in \Gamma$ (Figura 3b).

$$u_i(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (1)$$

En donde $u_i(x')$ es el desplazamiento en la dirección i para el punto de interés x' , $u_j(x)$ y $t_j(x)$ son el desplazamiento y la tracción en la dirección j en $x \in \Gamma$. Los términos $T_{ij}(x', x)$ y $U_{ij}(x', x)$ corresponden a las soluciones fundamentales de Kelvin[7].

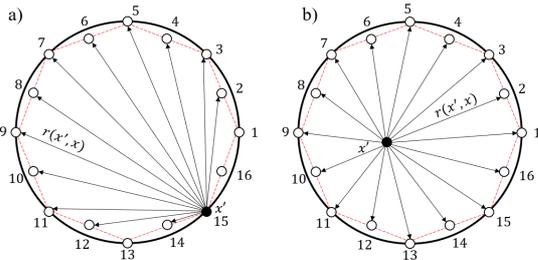


Figura 3. Aplicación de las ecuaciones integrales en un punto x' . a) Ecuaciones integrales de contorno. b) Identidad de Somigliana. Fuente: Elaboración propia.

El método clásico de elementos de contorno se indetermina al trabajar cuerpos agrietados con caras coincidentes, por esta razón, se utiliza el método dual, que hace uso de dos ecuaciones independientes[8], [9]. La ecuación de desplazamientos (2) y la ecuación de tracciones (3).

$$C_{ij}(x') u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} t_j(x') + n_i(x') \int_{\Gamma} S_{kij}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (3)$$

Donde $C_{ij}(x') = \delta_{ij}/2$ para un contorno suave y $n_i(x')$ es la normal al contorno en la dirección i . $S_{kij}(x', x)$ y $D_{kij}(x', x)$ contienen las derivadas de las soluciones fundamentales $T_{ij}(x', x)$ y $U_{ij}(x', x)$, respectivamente.

Las ecuaciones integrales de contorno (2 y 3) se aplican a un nodo de discretización $x' \in \Gamma$ evaluando las integrales en toda la frontera del cuerpo (Figura 3a), lo que involucra lidiar con varios tipos de singularidad cuando se integra el elemento al que pertenece el nodo de aplicación x' . La ecuación integral de desplazamientos (2) se usa en una de las caras de la grieta y la ecuación integral de tracciones (3) en la cara opuesta que es coincidente geoméricamente. Para el contorno restante se aplica la ecuación integral de desplazamientos (Figura 4).

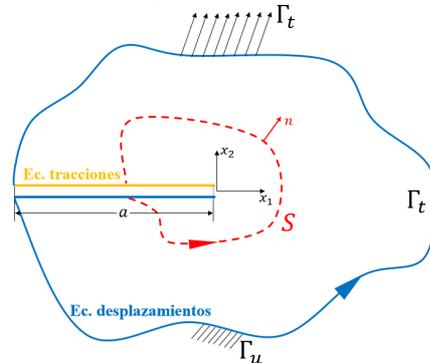


Figura 4. Diagrama general del cuerpo agrietado bajo condiciones mixtas de frontera. Se muestra la estrategia de aplicación de las ecuaciones integrales de contorno. Γ_t es el contorno donde se conocen las tracciones y Γ_u es el contorno donde se conocen los desplazamientos. La integral J es evaluada en un contorno S alrededor de la punta de la grieta. Fuente: Elaboración propia.

La estrategia de solución consiste en primero utilizar (2 y 3) para resolver todas las tracciones y desplazamientos en la frontera, para posteriormente aplicar la identidad de Somigliana (1) en el cómputo de los puntos internos de interés que son utilizados en la evaluación de la integral J . El cuerpo agrietado se discretiza con elementos cuadráticos en su totalidad, las caras de la grieta y los elementos aledaños a estas se discretizan con elementos cuadráticos discontinuos para trabajar las integrales singulares e hiper singulares bajo el concepto de Cauchy y Hadamard[10], el resto del contorno se enmalla con elementos continuos.

2.3. Integral J

Para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo se utiliza la integral J que equivale a la razón de liberación de energía para un cuerpo libre de fuerzas volumétricas[11]. La ecuación (4) ilustra la expresión de la integral J y su equivalencia con los factores de intensidad de esfuerzo para sólidos con comportamiento lineal elástico.

$$J = \int_S (W n_1 - t_j u_{j,1}) dS = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4)$$

Donde W es la densidad de energía de deformación, S es un contorno cualquiera alrededor de la punta de la grieta (Figura 5), n_1 es la normal al contorno en la dirección 1, $E' = E$ para esfuerzo plano y $E' = E/(1 - \nu^2)$ para deformación plano. ν es el coeficiente de Poisson.

Para cada incremento se añaden dos elementos (6 nodos funcionales) en cada cara de la grieta orientados en la dirección de crecimiento, lo que permite definir el sistema local de coordenadas (Figura 5). Se evalúa J (4) para un contorno circular alrededor de la punta de la grieta compuesto por 32 puntos internos en donde el radio del contorno está definido como la distancia desde la punta hasta el quinto nodo funcional más cercano. A fin de desacoplar los SIF se descompone el campo elástico en sus componentes simétrica y antisimétrica.

2.4. Dirección de crecimiento

Partiendo de las soluciones para el campo elástico de esfuerzos de Westergaard[12], se plantea que la grieta crecerá en una dirección perpendicular al máximo esfuerzo tangencial. Se selecciona este criterio porque la dirección de crecimiento solo depende de la relación entre los factores de intensidad de esfuerzo dada por la expresión (5).

$$\tan \frac{\theta_t}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (5)$$

Donde θ_t se refiere al ángulo de crecimiento referenciado desde el sistema coordinado en la punta de la grieta (Figura 5). De la expresión (5) se obtienen dos posibles ángulos de crecimiento, no obstante, se selecciona aquel que induce el esfuerzo principal máximo en un modo equivalente I.

2.5. Modelos de crecimiento de grieta analizados

Modelo de Paris-Erdogan[2]:

$$\frac{da}{dN} = C * (\Delta K)^m \quad (6)$$

Modelo de Klesnil-Lucas[1]:

$$\frac{da}{dN} = C * (\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (7)$$

Modelo de Forman[3]:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C * (\Delta K)^m}{(1-R) * K_{IC} - \Delta K} \quad (8)$$

Donde $\frac{da}{dN}$ corresponde a la velocidad de crecimiento de la grieta, R es la relación de cargas de fatiga, ΔK es la variación del factor de intensidad de esfuerzos, C y m son constantes experimentales que dependen del material, ΔK_{th} y K_{IC} son el umbral y la tenacidad a la fractura, respectivamente.

Para la variación del factor de intensidad de esfuerzos (ΔK) en las leyes de crecimiento se emplea la expresión (9) postulada por Tanaka[13], que trabaja con problemas bidimensionales en los cuales se aproxima una variación efectiva (ΔK_{eff}) en función de los factores de intensidad de esfuerzo ΔK_I y ΔK_{II} correspondientes a los modos de carga de apertura y cortante deslizante, respectivamente.

$$\Delta K_{eff} = [\Delta K_I^2 + 2\Delta K_{II}^2]^{1/2} \quad (9)$$

Una vez se conoce la variación del factor de intensidad de esfuerzos efectivo se hace uso de la regla del trapecio simple para evaluar la cantidad de ciclos transcurridos en cada incremento. Finalmente, la gráfica de crecimiento de grieta es construida y se computa el total de ciclos transcurridos.

3. Resultados

Primero se presenta una simulación realizada para validar el método dual de elementos de contorno y la integral J, para posteriormente presentar algunos casos de estudio que permiten realizar el análisis comparativo de los modelos de propagación.

3.1. Single Edge Notched Test (SENT)

Para validar los resultados de los factores de intensidad de esfuerzo calculados mediante el DBEM se lleva a cabo la simulación del ensayo SENT adoptado por la norma BS 8571 para determinar la tenacidad a la fractura y las razones de crecimiento de grieta en metales[14]. Este ensayo constituye una alternativa a los adoptados en la sociedad americana con las probetas CT y SENB[15].

El ensayo consiste en generar la fractura de una probeta con las dimensiones de la figura 5, sometida a una carga axial P en sus extremos. Por recomendación de la norma se trabaja con $H/w = 10$ y $H^*/w = 4$, en

donde H es la longitud libre y H^* es la longitud de sujeción en cada extremo, el espesor B es igual al ancho w .

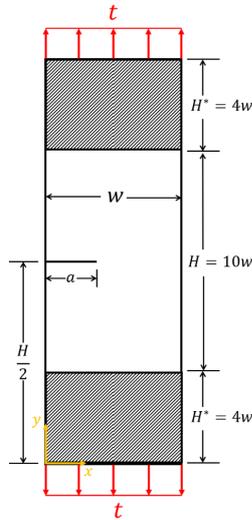


Figura 5. Geometría y condiciones de frontera para el ensayo SENT. Fuente: Elaboración propia.

Los SIF se comparan con tres referencias. La expresión dada por Zhu[16] obtenida de correlaciones experimentales para tracción y flexión pura, la correlación de Shen[17] mediante ajuste por simulación y la simulación por el método de elementos finitos en ABAQUS[18] presentada por Bassindale[19]. Se variaron las longitudes de grieta desde una relación $a/w = 0.1$ hasta $a/w = 0.9$ con incrementos de 0.05, rango en el que las referencias han sido verificadas anteriormente.

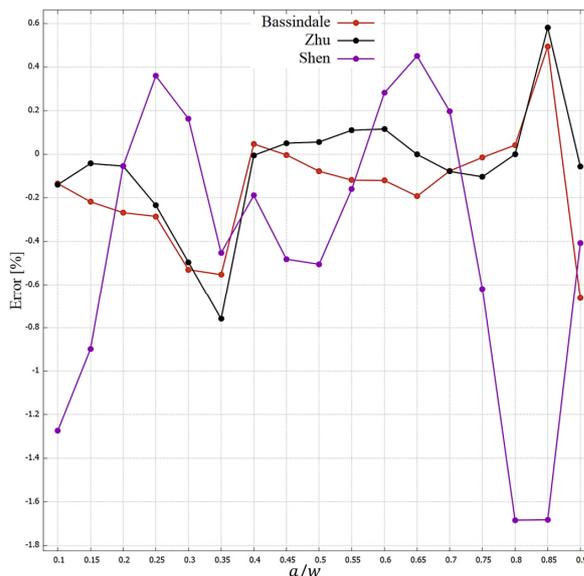


Figura 6. Errores porcentuales para los SIF en el ensayo SENT. Fuente: Elaboración propia.

Se obtienen errores (figura 6) inferiores al 1.7 % en todo el rango de estudio con respecto a las tres referencias, en el rango recomendado por la normal de $0.2 \leq a/w \leq 0.7$ el error es inferior al 0.8 %.

3.2. Probeta Rectangular con Muesca (PRM)

Se simula el ensayo experimental realizado por Singh[20] en el material *Nanotwinned copper* con la probeta mostrada en la figura 7. Las propiedades del material, así como algunos parámetros generales de la simulación se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Parámetros para la simulación PRM.

Parámetro	Valor
Tipo de problema	Esfuerzo plano
Relación de cargas de fatiga (R)	0.1
Tracción máxima aplicada (t)	135.9 MPa
Módulo de elasticidad (E)	207000 MPa
Módulo de Poisson (ν)	0.34
Umbral de fractura (ΔK_{th})	5 MPa \sqrt{m}
Tenacidad a la fractura (K_{Ic})	22.3 MPa \sqrt{m}

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de crecimiento se ejecuta desde un tamaño de grieta inicial $a_i = 1.36$ mm hasta $a_f = 5.057$ mm, para una longitud de crecimiento $\Delta a = 3.697$ mm. La grieta se discretiza con elementos de longitud $L_{elem} = 0.045$ mm, por lo tanto, la longitud de crecimiento se consigue al ejecutar 41 incrementos del doble de la longitud del elemento en la punta de la grieta.

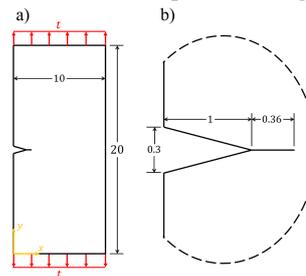


Figura 7. Geometría y condiciones de frontera, dimensiones en mm. a) Cotas generales, b) Dimensiones de la muesca.

La malla geométrica inicial contiene 216 elementos con 432 nodos, añadiendo 4 elementos nuevos para cada incremento. Debido a las condiciones de carga solo se tiene presente el modo I de manera dominante al calcular los factores de intensidad de esfuerzo (Figura 8).

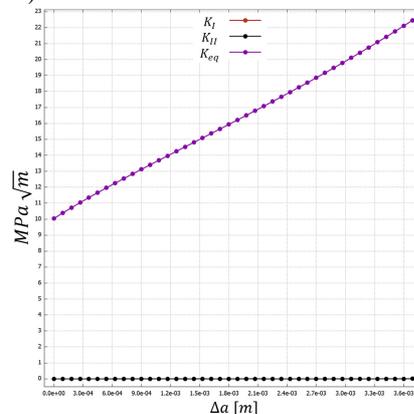


Figura 8. SIF para la simulación PRM. Fuente: Elaboración propia.

El factor de intensidad de esfuerzo para el modo *II* es prácticamente nulo, por lo que $K_{eq} \approx K_I$. En consecuencia, la propagación de la grieta se da de manera perpendicular a la carga aplicada (Figura 9).

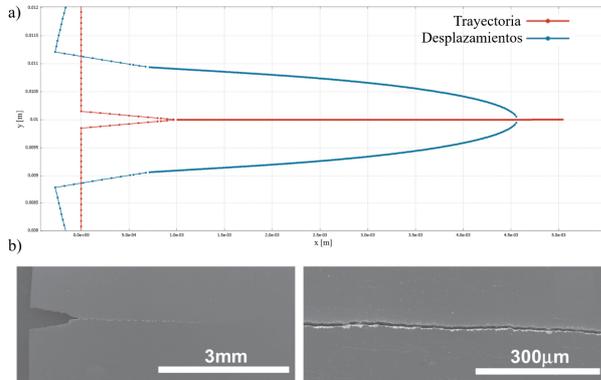


Figura 9. Comparativa entre la trayectoria de propagación simulada y el ensayo experimental. Escala para desplazamientos 100:1. Fuente: a) Elaboración propia, b) Singh[20].

Se utilizan las constantes de la tabla 3 para simular la propagación de la grieta y obtener las gráficas de crecimiento (Figura 10) y número de ciclos transcurridos (Figura 11).

Tabla 3. Constantes de crecimiento PRM.

Modelo	Constante
Klesnil-Lucas	$C = 1.1049 \times 10^{-12}$
Paris-Erdogan	$m = 3.7719$
Forman	$C = 6.0490 \times 10^{-10}$
	$m = 2.1719$

Fuente: Elaboración propia.

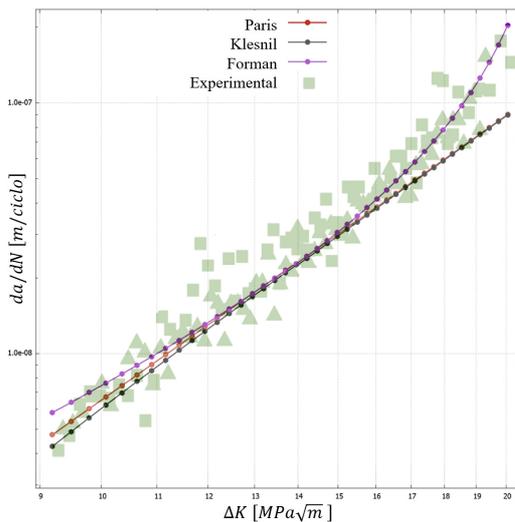


Figura 10. Gráfica de crecimiento de grieta PRM, simulación vs experimental. Fuente: Elaboración propia.

El ensayo experimental solo presenta el crecimiento en parte de la zona *II* y la zona *III*. No se cuenta con datos para la zona *I*, en consecuencia la estimación del umbral de fractura se realiza con alto grado de incertidumbre. El modelo de Paris-Erdogan representa

una línea en la gráfica de crecimiento, por lo tanto, no admite ninguna desviación al comportamiento lineal de la zona *II*. El modelo de Forman, al incluir la tenacidad a la fractura, reproduce el crecimiento rápido de la grieta, es decir, la parte final de la zona *II* y la zona *III* hasta el fallo total. Klesnil-Lucas presenta una curva que se asemeja a la recta de Paris para razones altas de crecimiento ($> 2 \times 10^{-8}$ m/ciclo) lejos de la propagación lenta de la grieta.

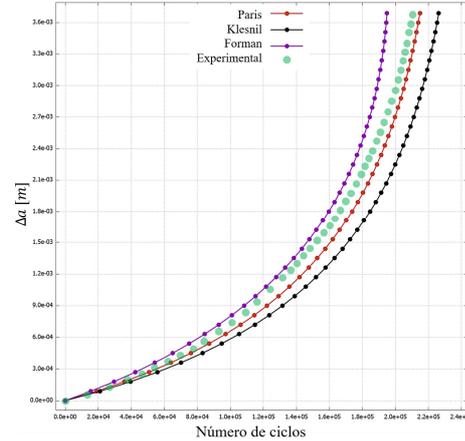


Figura 11. Tamaño de grieta vs número de ciclos PRM. Fuente: Elaboración propia.

El modelo de Paris-Erdogan al ser el que mejor se ajusta a los puntos experimentales de la gráfica de crecimiento, estima de manera precisa el número de ciclos para este caso específico (Figura 11). No obstante, los tres modelos no tienen diferencias notables en la estimación de la vida útil, esto se debe a que solo se están modelando las zonas *II* y *III* del crecimiento. La región de crecimiento rápido solo aporta una fracción muy pequeña en el número de ciclos totales, es por esta razón que, a pesar de que el modelo de Forman la tiene en cuenta, se reconoce que no tiene una aplicabilidad en términos ingenieriles, al ser el análisis de ciclo de vida el principal objetivo en el diseño de un componente. En la siguiente simulación se analiza la propagación cuando se incluye la región *I* de crecimiento lento.

3.3. Crecimiento de grieta en aleación de aluminio 7075 – T651

La simulación recrea las condiciones del ensayo experimental realizado por Zhao[21] con base en la norma ASTM E647[22]. Mediante la fractura controlada de la probeta compact tension con las dimensiones mostradas en la figura 12, se estudia el crecimiento de grieta en la aleación de aluminio 7075-T651. Se conoce que una carga máxima $P_{max} = 1.6$ kN es impuesta con una relación de cargas de $R = 0.1$. El crecimiento empieza con un tamaño de grieta $a_i = 7.3$ mm hasta un tamaño $a_f = 34.3$ mm, este último no corresponde a la fractura final de la probeta. Son simulados 54 incrementos de 0.5 mm para conseguir una variación total de $\Delta a = 27$ mm.

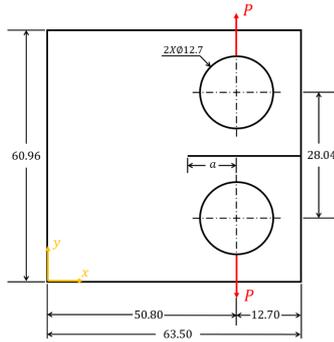


Figura 12. Geometría compact tension de la norma ASTM E647, dimensiones en mm. Fuente: Elaboración propia.

Las propiedades mecánicas del material son referenciadas según la base de datos MatWeb[23] con valores de $E = 71100 \text{ MPa}$ y $\nu = 0.33$. Se tratan los modelos de crecimiento con las constantes mostradas en la tabla 4.

Tabla 4. Constantes de crecimiento 7075-T651.

Modelo	Constante
Klesnil-Lucas	$\Delta K_{th}^* = 4.58 \text{ MPa}\sqrt{m}$
	$C^* = 8.3399 \times 10^{-11}$
Paris-Erdogan	$m^* = 3.5000$

Fuente: Elaboración propia.

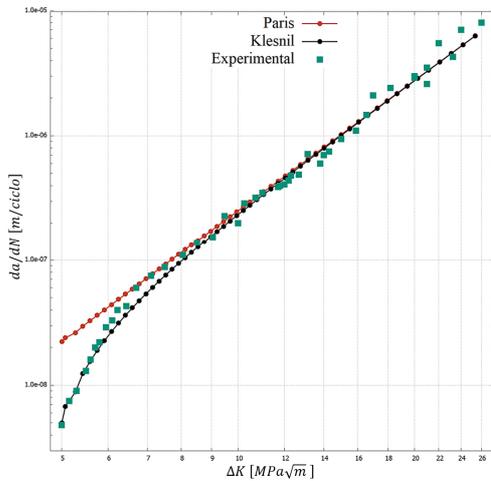


Figura 13. Gráfica de crecimiento de grieta 7075-T651 en la región II, simulación vs experimental. Fuente: Elaboración propia.

Al conocer parte de la región I y estimar de manera correcta un umbral de fractura (Figura 13), se observa que el modelo de Klesnil-Lucas contempla una curva inicial en la razón de crecimiento, en concreto, se ajusta al crecimiento lento y a la región II de crecimiento controlado. En la figura 14 se contrasta el número estimado de ciclos entre los modelos y aunque no se cuenta con el avance detallado de la grieta contra el ciclaje, se conoce que se necesitaron 498900 ciclos en el crecimiento experimental. De manera general, Paris-Erdogan realiza una estimación menor con respecto a la vida útil del componente al predecir razones de crecimiento mayores a las reales en el inicio de la

propagación, lo que implica que hacer de Paris[2] para simular el crecimiento completo, enmarca un enfoque muy conservador.

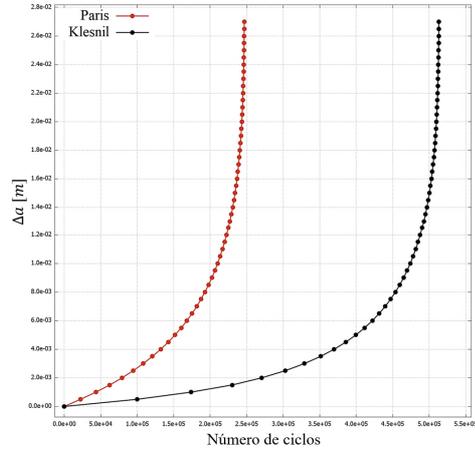


Figura 14. Tamaño de grieta vs número de ciclos 7075-T651. Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, Klesnil-Lucas logra estimar con un bajo error porcentual el número de ciclos transcurridos (Tabla 5).

Tabla 5. Error porcentual en el número de ciclos.

Modelo	Número de ciclos	Error [%]
Experimental / Teórico	498900	-----
Paris-Erdogan	246682	50.55
Klesnil-Lucas	513262	2.88

Fuente: Elaboración propia.

Teniendo en cuenta que el umbral de fractura corresponde a la variación del factor de intensidad de esfuerzos para una razón de crecimiento de $10^{-10} \text{ m/ciclos}$ y que los valores presentados en la figura 13 inician desde aproximadamente $4.5 \times 10^{-9} \text{ m/ciclo}$, se utilizan los resultados experimentales de Newman[24] para concluir que el comportamiento presentado por Zhao[21] solo abarca la región II de crecimiento y sigue sin dar un indicio claro del umbral de fractura real del material. La aleación 7075-T651 presenta una curvatura en la gráfica de crecimiento entre 3 y 6 $\text{MPa}\sqrt{m}$ aún en la región II, por lo que el umbral de fractura de $\Delta K_{th}^* = 4.58 \text{ MPa}\sqrt{m}$ funciona como un valor aparente que arroja buenos resultados solo cuando $\Delta K > 5 \text{ MPa}\sqrt{m}$. El umbral de fractura real es $\Delta K_{th} = 2.05 \text{ MPa}\sqrt{m}$, con este valor y con una tenacidad de $K_{Ic} = 54 \text{ MPa}\sqrt{m}$ se computan los resultados de la Figura 15 para el crecimiento completo en las tres regiones de propagación. Los tres modelos presentan resultados similares en la región II, se asemejan a la recta de Paris-Erdogan para valores intermedios de ΔK .

Teniendo en cuenta que el crecimiento lento característico de la región I es el que más demanda número de ciclos, el modelo de Klesnil-lucas se considera el más acertado para modelar crecimientos que incluyan las 3 regiones. Se recomienda hacer uso

de Klesnil-Lucas[1] únicamente cuando se conozca detalladamente el comportamiento experimental del material y pueda estimarse de forma precisa el umbral de fractura. Una pequeña variación en este parámetro cambia drásticamente el número de ciclos calculados.

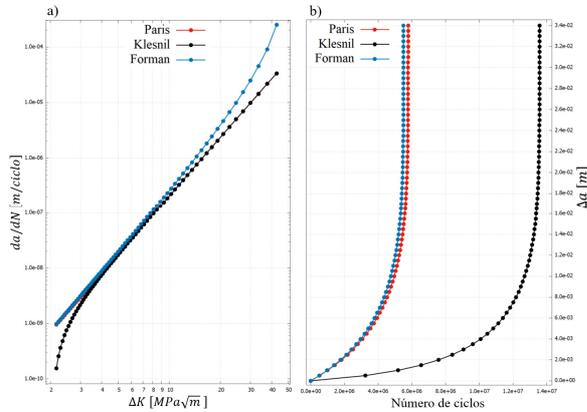


Figura 15. Simulación de crecimiento 7075-T651. a) Gráfica de crecimiento de grieta, b) Número de ciclos. Fuente: Elaboración propia.

Nótese en la Figura 15b la diferencia en el número de ciclos estimados entre Paris-Erdogan y Forman, esta variación representa el pequeño error en el que se incurre al no considerar el comportamiento de la región *III* en el análisis, mientras que, si no se tiene en cuenta la región *I* representada por Klesnil-lucas, se estima menos de la mitad de la vida útil del elemento. Forman se reconoce como el modelo más conservativo de los analizados.

3.4. Cuerpo Perforado (CP)

Por último, se considera un ejemplo de aplicación en el cual, debido a las condiciones de carga, geometría y configuración espacial de la grieta, están presentes de manera significativa los dos factores de intensidad de esfuerzo en el inicio de la propagación. El criterio de máximo esfuerzo tangencial se valida con la trayectoria obtenida por Boljanovic[25] de manera experimental y con la simulación de elementos finitos con el software NASTRAN[26] realizada por el mismo autor. Sajith[27] aborda el mismo problema con el software FRANC2D[28] y sus resultados también se utilizan para la validación de la trayectoria y el modelo de Paris-Erdogan.

Se simula el crecimiento de grieta en la aleación de aluminio 2024-T3 con propiedades mecánicas $E = 71200$ Mpa, $\nu = 0.33$ y con las dimensiones de la Figura 16. La grieta emana de un orificio, con una orientación de 45° y una longitud inicial $a_i = 2$ mm. La tracción aplicada en ambos extremos es de $t = 20.8$ MPa con una relación de cargas $R = 0.1$, no obstante, computacionalmente se fija la cara inferior de la probeta y la tracción solo se aplica en la cara superior. El crecimiento se simula hasta un tamaño final $a_f = 18.2$ mm, con 162 incrementos de 0.1 mm cada uno.

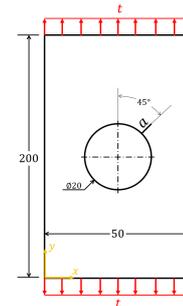


Figura 16. Geometría y condiciones de frontera CP, dimensiones en mm. Fuente: Elaboración propia.

La figura 17 expone los resultados para los factores de intensidad de esfuerzo durante la propagación. En el inicio del crecimiento, producto de la orientación de la grieta, se tiene un modo mixto de carga, lo que implica que la grieta se propague con un ángulo inicial de -43° con respecto al sistema coordenado local (Figura 18). Este ángulo calculado mediante el criterio de máximo esfuerzo tangencial está en concordancia con los -42° obtenidos por Boljanovic[25].

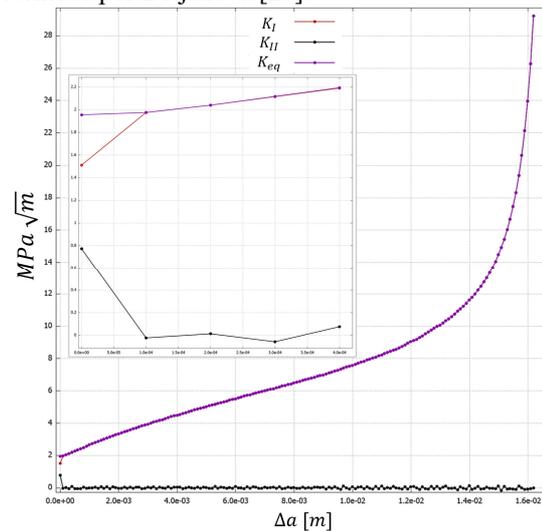


Figura 17. Factores de intensidad de esfuerzo CP, con detalle en el inicio de la propagación. Fuente: Elaboración propia.

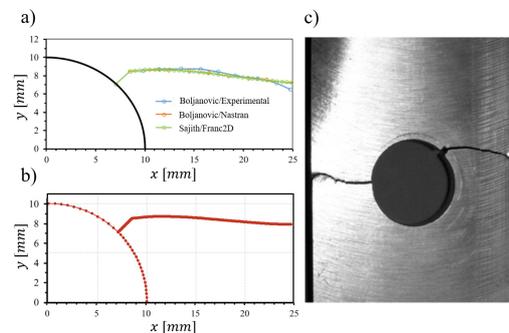


Figura 18. Trayectoria de propagación. a) Referencia, b) DBEM, c) Referencia experimental. Fuente: Elaboración propia.

Después del primer incremento, el factor de intensidad de esfuerzos K_{II} se anula completamente mientras que K_I aumenta con el tamaño de grieta, este

comportamiento conlleva a que la trayectoria sea perpendicular a la carga aplicada (Figura 18), en otras palabras, en un modo *I* de fractura.

Para validar la implementación del modelo de Paris y calcular un error en el estimado del número de ciclos, se usan las mismas constantes $C = 2.22 \times 10^{-10}$ y $m = 3.545$ que la referencia[25]. La figura 29 muestra la comparación en el número de ciclos entre el modelo de Paris implementado y la referencia numérica de elementos finitos.

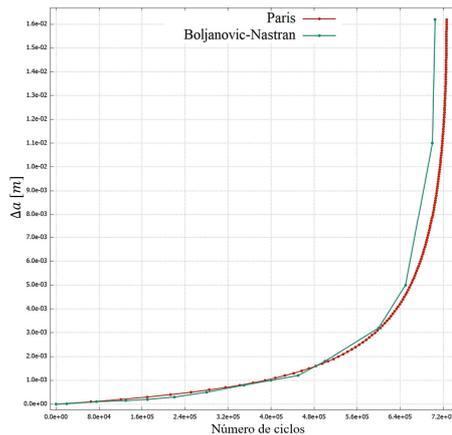


Figura 19. Número de ciclos para validar la ley de Paris con el método de elementos finitos. Fuente: Elaboración propia.

Se calcula un error porcentual del 3% entre los ciclos estimados (Tabla 6), esta variación puede deberse al método utilizado para el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos efectivo. Boljanovic utiliza una expresión polinómica basada en simulaciones previas, a diferencia del presente estudio que hace uso del modelo de Tanaka fundamentado en la teoría de dislocaciones de Lardner[29].

Tabla 6. Error porcentual en el número de ciclos CP.

Método/Software	Número de ciclos	Error [%]
FEM/Nastran	705000	-----
DBEM	726223	3.01

Fuente: Elaboración propia.

El número de ciclos se validó con otra simulación computacional, empero, debe verificarse que, con estas condiciones, el crecimiento solo se de en la región estable de propagación y pueda modelarse en su totalidad con Paris.

4. Conclusiones

Se analizan varios casos de estudio del problema general del cuerpo agrietado bajo condiciones mixtas de contorno haciendo uso del método dual de elementos de contorno en dos dimensiones (2D), siendo este un método efectivo para el análisis propuesto. Cada modelo de crecimiento tiene la dificultad de no poder representar de manera satisfactoria una o varias de las zonas de crecimiento,

el modelo de Paris solo puede representar una línea recta correspondiente a la zona de crecimiento estable, Klesnil contempla la zona *I* y *II*, sin poder representar los valores en el crecimiento rápido de la grieta; mientras que Forman se acomoda a la zona de crecimiento rápido y parte del crecimiento estable.

Con base en las simulaciones realizadas se infiere que la región *III* de crecimiento ocurre en muy pocos ciclos de carga, menor al 2% del total, razón por la cual, se puede despreciar en la estimación de la vida útil del componente. Por otro lado, la región *I* es la que demanda mayor número de ciclos en toda la propagación, alrededor del 50% del total, y es por esto por lo que se reconoce al modelo de Klesnil-Lukas como el más adecuado para realizar la estimación de las razones de crecimiento y el número total de ciclos transcurridos, sin embargo, se debe tener especial precaución con el umbral de fractura, una pequeña variación en este parámetro del 5% se ve reflejada en errores del 25% en la estimación del número de ciclos. Si no se conoce el umbral de fractura del material es recomendable modelar el crecimiento de la grieta de manera tradicional y conservadora con Paris.

5. Referencias

- [1] M. Klesnil and P. Lukáš, "Influence of strength and stress history on growth and stabilisation of fatigue cracks," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 4, no. 1, pp. 77–92, Mar. 1972, doi: 10.1016/0013-7944(72)90078-1.
- [2] P. Paris and F. Erdogan, "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws," *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, no. 4, pp. 528–533, Dec. 1963, doi: 10.1115/1.3656900.
- [3] R. G. Forman, V. E. Kearney, and R. M. Engle, "Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures," *Journal of Basic Engineering*, vol. 89, no. 3, pp. 459–463, Sep. 1967, doi: 10.1115/1.3609637.
- [4] A. Sedmak, "Computational fracture mechanics: An overview from early efforts to recent achievements," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 41, no. 12, pp. 2438–2474, Dec. 2018, doi: 10.1111/FFE.12912.
- [5] T. Machniewicz, "Fatigue crack growth prediction models for metallic materials," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 36, no. 4, pp. 293–307, Apr. 2013, doi: 10.1111/J.1460-2695.2012.01721.X.
- [6] A. Portela, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation," *Computers & Structures*, vol. 46, no. 2, pp. 237–247, Jan. 1993, doi: 10.1016/0045-7949(93)90189-K.
- [7] R. Balderrama, A. P. Cisilino, and M. Martinez, "Boundary Element Method Analysis of Three-Dimensional Thermoelastic Fracture Problems Using the Energy Domain Integral," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, no. 6, pp. 959–969, Nov. 2006, doi: 10.1115/1.2173287.

- [8] E. Santana and A. Portela, “Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, interaction and linkup,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 64, pp. 176–195, Mar. 2016, doi: 10.1016/J.ENGANABOUND.2015.12.002.
- [9] R. J. Price and J. Trevelyan, “Boundary element simulation of fatigue crack growth in multi-site damage,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 43, pp. 67–75, Jun. 2014, doi: 10.1016/J.ENGANABOUND.2014.03.002.
- [10] B. A. Kats and D. B. Katz, “Cauchy–Hadamard integral with applications,” *Monatshefte für Mathematik 2019 189:4*, vol. 189, no. 4, pp. 683–689, Jan. 2019, doi: 10.1007/S00605-019-01263-Z.
- [11] J. R. Rice, “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 379–386, Jun. 1968, doi: 10.1115/1.3601206.
- [12] E. E. Gdoutos, “Fracture Mechanics An Introduction,” pp. 15–28, 2005, Accessed: Aug. 07, 2022. [Online]. Available: https://books.google.com/books/about/Fracture_Mechanics.html?hl=es&id=MBMv6Pru4tGc
- [13] K. Tanaka, “Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6, no. 3, pp. 493–507, Oct. 1974, doi: 10.1016/0013-7944(74)90007-1.
- [14] P. Moore and H. Pisarski, “SENT testing standard BS 8571 and its ongoing development,” *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 156, pp. 2–7, Sep. 2017, doi: 10.1016/J.IJPVP.2017.05.011.
- [15] Z. Sajuri, N. A. Alang, N. A. Razak, and M. A. Aziman, “Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Behavior of Rail Track Material,” *Key Engineering Materials*, vol. 462–463, pp. 1109–1114, 2011, doi: 10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/KEM.462-463.1109.
- [16] X. K. Zhu, “Full-range stress intensity factor solutions for clamped SENT specimens,” *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 149, pp. 1–13, Jan. 2017, doi: 10.1016/J.IJPVP.2016.11.004.
- [17] “Measurement of J-R Curves Using Single-Specimen Technique On Clamped SE(T) Specimens | SPE.” <https://search.spe.org/i2kweb/SPE/doc/onepetro:A-F273B42> (accessed Aug. 07, 2022).
- [18] Dassault systemes, “ABAQUS.” France, 2022. [Online]. Available: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/https://www.3ds.com/products-services/simulia/>
- [19] C. Bassindale, X. Wang, W. R. Tyson, and S. Xu, “Numerical verification of stress intensity factor solution for clamped single edge notched tension (SENT) specimens,” *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 41, no. 2, pp. 494–499, Feb. 2018, doi: 10.1111/FFE.12700.
- [20] A. Singh, L. Tang, M. Dao, L. Lu, and S. Suresh, “Fracture toughness and fatigue crack growth characteristics of nanotwinned copper,” *Acta Materialia*, vol. 59, no. 6, pp. 2437–2446, Apr. 2011, doi: 10.1016/J.ACTAMAT.2010.12.043.
- [21] T. Zhao, J. Zhang, and Y. Jiang, “A study of fatigue crack growth of 7075-T651 aluminum alloy,” *International Journal of Fatigue*, vol. 30, no. 7, pp. 1169–1180, Jul. 2008, doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2007.09.006.
- [22] “Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates.” <https://www.astm.org/e0647-15e01.html> (accessed Aug. 07, 2022).
- [23] “Online Materials Information Resource - MatWeb.” <https://www.matweb.com/> (accessed Aug. 07, 2022).
- [24] J. C. Newman, E. L. Anagnostou, and D. Rusk, “Fatigue and crack-growth analyses on 7075-T651 aluminum alloy coupons under constant- and variable-amplitude loading,” *International Journal of Fatigue*, vol. 62, pp. 133–143, May 2014, doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2013.04.020.
- [25] S. Boljanović and S. Maksimović, “Analysis of the crack growth propagation process under mixed-mode loading,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, no. 8, pp. 1565–1576, May 2011, doi: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2011.02.003.
- [26] AUTODESK, “Inventor Nastran.” San Rafael, California, United States, 2022. [Online]. Available: <https://www.autodesk.com/products/inventor-nastran>
- [27] S. Sajith, K. S. R. K. Murthy, and P. S. Robi, “Mixed mode fatigue crack growth studies of crack emanating from circular hole,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 2200, no. 1, p. 020041, Dec. 2019, doi: 10.1063/1.5141211.
- [28] Cornell Fracture Group, “FRANC2D.” Ithaca, New York, 2015. [Online]. Available: <https://cfg.cornell.edu/software/>
- [29] R. W. Lardner, “A dislocation model for fatigue crack growth in metals,” <https://doi.org/10.1080/14786436808218181>, vol. 17, no. 145, pp. 71–82, 2006, doi: 10.1080/14786436808218181.